Александр Элиович

Российский университет дружбы народов, кафедра теоретической физики и механики;
НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике

ПОЛИНОРМЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ИНВОЛЮЦИИ НА МОНОАССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ

В классических алгебрах Кэли-Диксона норма элемента может быть представлена как произведение элемента на сопряженный к нему. Изучается, какими свойствами норма и сопряжение будут обладать в произвольных квадратичных алгебрах. Решается вопрос, как обобщить эту конструкцию на полинормы высших степеней, заданных на неассоциативных алгебрах, т. е. как вычислить полинормы с помощью алгебраического умножения и линейных отображений.

Сопряжения и квадратичные нормы для кватернионов и октав

Как известно, классические гиперкомплексные алгебры кватернионов и октав замечательны прежде всего потому, что в них, как и в поле комплексных чисел, можно естественным образом ввести две взаимосвязанные конструкции с очень "хорошими" свойствами – сопряжение и квадратичную норму элементов.

Сопряжение на алгебре кватернионов $\mathcal{H}$ вводится так:

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3\,. \tag{1}$$

Кватернионное сопряжение является инволюцией (двойное сопряжение суть нейтральная операция), линейно и переставляет порядок сомножителей (является антиавтоморфизмом):

$$\bar{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}, \qquad \overline{\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}} = \lambda\bar{\mathbf{a}} + \mu\bar{\mathbf{b}}, \qquad \overline{\mathbf{ab}} = \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} \tag{2}$$

(λ, μ – вещественные числа). Благодаря этим свойствам, можно ввести квадратичные выражения, которые не меняются при сопряжении:

$$N_r(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{a}}, \quad N_l(\mathbf{a}) = \bar{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a} \qquad \text{(правая и левая 2-нормы).} \tag{3}$$

В алгебре кватернионов левая и правая нормы совпадают, или иначе – совпадают норма элемента и сопряженного к нему (это свойство выполняется далеко не во всех алгебрах):

$$N_r(\mathbf{a}) = N_l(\mathbf{a}) = N_r(\bar{\mathbf{a}}) \equiv N(\mathbf{a}) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\,. \tag{4}$$

Принципиально важно, что $N(\mathbf{a})$ и любые другие выражения, инвариантные относительно кватернионного сопряжения, являются вещественными числами, т. е. принадлежат тому полю, над которым задана алгебра. Это означает, что в алгебре кватернионов задано *центральное сопряжение* [10]. *Центром* алгебры называется некоторая подалгебра, элементы которой коммутируют и перемножаются ассоциативно не только друг с другом, но и с любыми элементами алгебры:

$$r\mathbf{a} = \mathbf{a}r; \quad r(\mathbf{ab}) = (r\mathbf{a})\mathbf{b}; \quad (\mathbf{a}r)\mathbf{b} = \mathbf{a}(r\mathbf{b}); \quad (\mathbf{ab})r = \mathbf{a}(\mathbf{b}r).$$

Все элементы, инвариантные относительно центрального сопряжения, принадлежат центру алгебры. В случае кватернионов, и вообще алгебр Кэли-Диксона, центр совпадает с полем, над которым задана алгебра.

Примечание. Нередко каноническое сопряжение (1) считается единственным, заданным на алгебре кватернионов, но это не так. На этой алгебре существуют и другие линейные инволюционные антиавтоморфизмы, т. е. другие сопряжения, например, такое:

$$\widetilde{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3\,. \tag{5}$$

Прямым вычислением можно проверить, что все свойства (2) выполняются. Это напрямую вытекает из того, что сопряжения (1) и (5) могут быть связаны автоморфизмом алгебры, одновременно являющимся инволюцией:

$$\widetilde{\mathbf{a}} = (\bar{\mathbf{a}})', \qquad (\mathbf{uv})' = \mathbf{u}'\mathbf{v}', \qquad \mathbf{u}'' = \mathbf{u}, \qquad \text{где}$$
$$(a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3)' = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3.$$

Однако, выражения, инвариантные относительно сопряжения (5), уже не являются вещественными числами. Оно не является центральным и этом смысле оно "хуже" канонического сопряжения кватернионов (1). Как несложно показать, всех сопряжений, включая неканонические, на алгебре кватернионов существует 4 – их число равно размерности алгебры (это ситуация типична).

Примечание 2. Отметим еще одно важное свойство канонического кватернионного сопряжения – оно может быть выражено через операции алгебры $\mathcal{H}$ (будем называть такие сопряжения *вычислимыми* средствами алгебры):

$$\bar{\mathbf{a}} = -1/2(\mathbf{a} + \mathbf{q}_1\mathbf{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2\mathbf{a}\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3\mathbf{a}\mathbf{q}_3). \tag{6}$$

В справедливости соотношения (6) легко убедиться, если учесть, что отображение $\mathbf{a} \to -\mathbf{q}_k\mathbf{a}\mathbf{q}_k$ меняет все компоненты, кроме $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{a}_k$. Отметим, что сопряжение комплексных чисел не может быть выражено через умножение и сложение в силу коммутативности этой алгебры; его приходится вводить “руками”.

Норма кватернионов, как мы видим, положительно определена, а их метрика имеет сигнатуру $+4$. Самое замечательное в кватернионах – мультипликативность их нормы: норма произведения кватернионов равна произведению их норм.

$$N(\mathbf{ab}) = N(\mathbf{a})N(\mathbf{b})\,. \tag{7}$$

Этот факт вместе с ассоциативностью кватернионов лежит в основе их геометрических интерпретаций. Кроме этого благодаря нему для вещественных чисел имеет место замечательное тождество четырех квадратов: правильно записанное произведение сумм четырех квадратов есть снова сумма четырех квадратов.

Алгебра октав уже не ассоциативна, что затрудняет ее применение в геометрии и физике. Сохраняется лишь ослабленная ассоциативность (альтернативность): в октавах любые два элемента порождают ассоциативную подалгебру. С альтернативностью тесно связано самое важное достоинство октав – их норма по-прежнему мультипликативна. Это приводит к выполнению для вещественных чисел тождества восьми квадратов – правильно записанное произведение сумм восьми квадратов есть снова сумма восьми квадратов. Как и в случае кватернионов, норма октав положительно определена; ее метрика имеет сигнатуру $+8$.

Как известно, комплексные числа, кватернионы и октавы могут быть получены с помощью итерационного процесса удвоения алгебр – удвоения Кэли-Диксона, стартуя от вещественных чисел:

$$(a + A\cdot\mathbf{e}_0)(b + B\cdot\mathbf{e}_0) = ab - \bar{B}A + (Ba + A\bar{b})\cdot\mathbf{e}_0, \tag{8}$$

Если в этой формуле знак минус в правой части заменить на плюс, получится псевдоудвоение Кэли-Диксона. Его результаты – алгебра двойных чисел, псевдокватернионы (антикватернионы), псевдооктавы (антиоктавы). Все замечательные свойства кватернионов и октав переносятся на псевдокватернионы и псевдооктавы, за одним исключением – норма теперь не является положительно определенной, так что лучше говорить о псевдонорме. Как следствие, деление на некоторый элемент возможно не всегда, поскольку обратный элемент к нему нередко не существует. Метрика псевдокватернионов имеет сигнатуру $(+2, -2)$, псевдооктав $(+4, -4)$.

Процесс Кэли-Диксона можно продолжать до бесконечности, порождая новые неассоциативные и даже неальтернативные алгебры размерности 2^n с положительно определенной квадратичной нормой. Однако, эта норма уже не будет мультипликативной. Кроме того, из-за сильной неассоциативности положительная определенность нормы не влечет выполнимость деления в алгебре.

В связи со всем этим возникают три очевидных вопроса:

– каковы свойства квадратичной нормы и сопряжения в общем случае – в произвольных неассоциативных квадратичных алгебрах. Какие хорошие свойства сохраняются, какие теряются;

– как понятие нормы обобщается для алгебр выше квадратичных, какими свойствами обладают полинормы;

– с помощью каких алгоритмов можно вычислить значение полинорм, и в частности, сохраняется ли возможность выразить полинорму с помощью некоторой комбинации умножения и линейных инволюций.

Такой алгоритм позволял бы представить полинорму элемента в инвариантном виде, не прибегая к конкретному представлению алгебры в некотором базисе. Установление подобной инвариантной записи помогло бы лучше понять связь между алгебрами и порождаемыми ими геометриями.

Первые два вопроса были прояснены в работах [10], [11], [12]. Здесь будут кратко представлены основные результаты этих работ, а также дан ответ на последний вопрос.

Далее везде будет подразумевается, что алгебры конечномерны, обладают единицей (нейтральным элементом по умножению) и что они заданы над полем характеристики 0 (поля вещественных и комплексных чисел, по умолчанию – поле вещественных чисел). Мы также будем, как это принято для гиперкомплексных алгебр, по умолчанию отождествлять единицу алгебры и единицу поля.

Сопряжения и (псевдо)нормы для произвольных квадратичных алгебр

Под *сопряжениями* мы будем понимать линейные инволюционные антиавтоморфизмы:

$$\begin{aligned} \overline{\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}} &= \lambda\bar{\mathbf{a}}+\mu\bar{\mathbf{b}} \quad && (\lambda, \mu \text{ – элементы поля, линейность}),\\ \bar{\bar{\mathbf{a}}} &= \mathbf{a} && (\text{инволюция}),\\ \overline{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}} &= \bar{\mathbf{b}}\cdot\bar{\mathbf{a}} && (\text{антиавтоморфизм}). \end{aligned}$$

Благодаря этим свойствам, следующие выражения не изменяются при сопряжении (назовем их *инвариантными* или *реальными* для данного сопряжения):

$$\begin{gathered} \Re(\mathbf{a}) = 1/2(\mathbf{a}+\bar{\mathbf{a}}) \quad (\textit{реальная часть } \mathbf{a}),\\ N_r = \mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{a}}, \quad N_l = \bar{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a} = N_r(\bar{\mathbf{a}}) \quad (\textit{правая и левая 2-нормы}) \end{gathered} \tag{9}$$

При этом $\Re(\bar{\mathbf{a}}) = \Re(\mathbf{a})$, но вообще говоря $N(\bar{\mathbf{a}}) \neq N(\mathbf{a})$, т. е. $N_l(\mathbf{a}) \neq N_r(\mathbf{a})$.

В случае кватернионов, октав и любых алгебр цепочки Кэли-Диксона инвариантные выражения относительно канонических сопряжений оказываются вещественными числами. Посмотрим, к каким следствиям приводит факт существования в алгебре центральных сопряжений. Используя (9), видим, что для произвольного элемента $\mathbf{a}$ алгебры:

$$\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{a}} = N(\mathbf{a}); \quad \mathbf{a}+\bar{\mathbf{a}} = T(\mathbf{a}) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{a}\cdot(T-\mathbf{a}) = N(\mathbf{a}) \qquad \text{или}$$

$$\mathbf{a}^2 - T(\mathbf{a})\cdot\mathbf{a} + N(\mathbf{a}) = 0. \tag{10}$$

(N, T – некоторые элементы поля, величина которых зависит от выбранного элемента). Каждый элемент алгебры обнуляет некоторый характеристический квадратичный полином с коэффициентами, принадлежащими полю. В таком случае говорят, что алгебра является *квадратичной* (над своим полем).

Моменты элементов квадратичной алгебры будем называть: $T(\mathbf{a})$ – *след* (удвоенная реальная часть) элемента $\mathbf{a}$, $N(\mathbf{a})$ – его *2-норма.* Здесь есть один нюанс: элементу алгебры, пропорциональному единичному, соответствует характеристический полином первой степени $\mathbf{a}-\lambda = 0$, а полиномов второй степени можно подобрать сколь угодно много. Для самосогласованности определений мы должны положить $\Re(\mathbf{1}) = \frac{1}{2}T(\mathbf{1}) = N(\mathbf{1}) = 1$. К этому выводу можно прийти, рассмотрев элемент, бесконечно близкий к единичному, и потребовав непрерывность моментов. То же получится, если возвести полином первой степени в квадрат. Как следствие, $T(\lambda) = 2\lambda$

Мы видим также, что

$$\mathbf{a}\cdot(T-\mathbf{a}) = (T-\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}, \qquad \text{т. е.} \quad \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a} \qquad \text{или} \quad N_l(\mathbf{a}) = N_r(\mathbf{a}) = N_l(\bar{\mathbf{a}}),$$

правая и левая 2-нормы совпадают (другими словами, норма сопряженного элемента равна норме самого элемента).

Итак, справедливо

Утверждение 1. Если в алгебре существует сопряжение, инвариантные элементы которого принадлежат полю, над которым задана алгебра (т. е. существует центральное сопряжение), то алгебра является квадратичной, причем левая и правая 2-нормы в ней совпадают.

Возникает важный вопрос – верно ли обратное? Верно ли, что что в произвольной квадратичной алгебре всегда существует центральное сопряжение и что в ней всегда будет совпадають левая и правая квадратичные нормы?

Этот вопрос был прояснен в [11], где был доказан ряд утверждений о квадратичных и обобщенно-квадратичных алгебрах. Здесь мы повторим самые важные из них. Начнем с очевидного:

Лемма 1. *Всякая квадратичная алгебра моноассоциативна.*

Напомним, что *моноассоциативными*, или *степенно-ассоциативными* называют алгебры, в которых один элемент порождает ассоциативную подалгебру. Иначе говоря, в произведениях элемента на самого себя можно не следить за расстановкой скобок, заменяя все произведения на соответствующую степень элемента:

$$\mathbf{a}^n\cdot\mathbf{a}^m = \mathbf{a}^{n+m}\,.$$

В самом деле, равенство (10) позволяет свести умножение $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ к линейному по $\mathbf{a}$ члену, убрав скобку вместе с умножением, что и позволяет не заботиться о порядке расстановки скобок при перемножениях $\mathbf{a}$ на самое себя.

В [11] было введено важное понятие

Определение 1. *Отображение* $\mathbf{a} \to \widetilde{\mathbf{a}}$ *назовем* ***почти точным антиавтоморфизмом*** *(**почти-сопряжением**), если оно отличается от антиавтоморфизма не более, чем на элемент* $\mathbf{r}$ *поля, над которым задана алгебра, т. е.*

$$\widetilde{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})} = \widetilde{\mathbf{b}} \cdot \widetilde{\mathbf{a}} + r.$$

Там же была доказана принципиальная теорема (здесь мы пунктирно повторим это доказательство)

Теорема 1. *В любой квадратичной алгебре существует инволюция, являющаяся почти-сопряжением, инвариантные элементы которого принадлежат полю алгебры (центральное почти-сопряжение).*

При этом квадратичная (псевдо)норма элемента равна произведению элемента на почти-сопряженный к нему, левая и правая нормы совпадают.

Теорема была доказана конструктивно. А именно, искомым почти-сопряжением оказалось каноническое отображение $\mathbf{a} \to \widetilde{\mathbf{a}}$, заданное посредством

$$\widetilde{\mathbf{a}} = T(\mathbf{a}) - \mathbf{a}. \tag{11}$$

Поскольку для элементов поля $T(\lambda) = 2\lambda$, это отображение является инволюцией:

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{a}}} = T(\widetilde{\mathbf{a}}) - \widetilde{\mathbf{a}} = T(T(\mathbf{a}) - \mathbf{a}) - (T(\mathbf{a}) - \mathbf{a}) = 2T(\mathbf{a}) - T(\mathbf{a}) - T(\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

По той же причине оно оставляет элементы поля инвариантным

$$\widetilde{r} = T(r) - r = 2r - r = r \qquad (\text{в частности, } \widetilde{1} = 1). \tag{12}$$

Более того, любой инвариантный относительно отображения элемент принадлежит полю:

$$\widetilde{\mathbf{a}} = T(\mathbf{a}) - \mathbf{a} = \mathbf{a} \qquad \Rightarrow \qquad 2\mathbf{a} = T(\mathbf{a}).$$

Далее, как легко видеть,

$$\widetilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} = \big(T(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\big) \cdot \mathbf{a} = T(\mathbf{a})\,\mathbf{a} - \mathbf{a}^2 = \text{ согласно (10) } = N(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \widetilde{\mathbf{a}}.$$

Это означает, что в квадратичных алгебрах (псевдо)норма элемента действительно вычислима посредством алгебраического умножения и канонического отображения, и при этом правая и левая 2-нормы совпадают:

$$N_l(\mathbf{a}) \equiv \widetilde{\mathbf{a}}\mathbf{a} = N_r(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}. \tag{13}$$

Осталось доказать, что наше отображение является почти точным антиавтоморфизмом.

Поляризуя 2- норму, введем для удобства *2-скалярное произведение.*

$$2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = N(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - N(\mathbf{a}) - N(\mathbf{b}) \qquad \Rightarrow \qquad N(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}). \tag{14}$$

Норму обратно можно определить как скалярное произведение элемента на себя. Скалярное произведение с очевидностью принадлежит полю алгебры, симметрично по аргументам, а кроме того, как и норма, не будет разделяться на правое и левое:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_r = 1/2\,(\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{b}} + \mathbf{b}\widetilde{\mathbf{a}}) = 1/2\,(\widetilde{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \widetilde{\mathbf{b}}\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})_l = (\widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}})_r\,,$$

или иначе, в квадратичных алгебрах совпадают скалярные произведения элементов и скалярные произведения сопряженных к ним.

С учетом (12) легко видеть,

$$2(\mathbf{a},1) = \mathbf{a} + \widetilde{\mathbf{a}} = T(\mathbf{a}); \quad (\mathbf{a},r) = r(\mathbf{a},1).$$

Рассмотрим разность, которую можно назвать *дефектом антиавтоморфизма* [11]:

$$\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{y}} - \widetilde{\mathbf{y}\widetilde{\mathbf{x}}} = \Lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{15}$$

Дефект точного сопряжения равен 0 $(\widetilde{\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{y}}} = \widetilde{\widetilde{\mathbf{y}}}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y}\widetilde{\mathbf{x}})$, для неточного дефект не выходит за пределы поля, над которым задана алгебра. Добавим и вычтем слева $\mathbf{y}\widetilde{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{y}} + \mathbf{y}\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\widetilde{\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{y}\widetilde{\mathbf{x}}} = \Lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}), \qquad \text{т. е.}$$

$$\Lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2(\mathbf{x},\mathbf{y}) - 2(\mathbf{y}\widetilde{\mathbf{x}},1)$$

Откуда сразу видно, что дефект антиавтоморфизма принадлежит полю алгебры, что завершает доказательство теоремы. □

Далее с помощью несложных выкладок было доказана

Лемма 2. *Дефект антиавтоморфизма является антисимметричной функцией от аргументов; он также обращается в нуль если один из них принадлежит полю, над которым задана алгебра:*

$$\Lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\Lambda(\mathbf{y},\mathbf{x}); \qquad \Lambda(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0, \quad \Lambda(\mathbf{x},1) = 0. \tag{16}$$

Прямым следствием этого является:

$$\Lambda(\mathbf{x},\widetilde{\mathbf{x}}) = 0, \qquad \text{т. е.} \quad \widetilde{\mathbf{x}^2} = (\widetilde{\mathbf{x}})^2, \qquad \text{и более того} \quad \widetilde{\mathbf{x}^n} = (\widetilde{\mathbf{x}})^n. \tag{17}$$

В каком случае дефект антиавтоморфизма равен 0, т е. квадратичная алгебра имеет полноценное сопряжение? В том же исследовании был доказан ряд утверждений.

Теорема 2. *Эластичные (и тем более йордановы, альтернативные) квадратичные алгебры обладают строгим центральным сопряжением.*

Условие эластичности является достаточным, но не необходимым. Множество квадратичных алгебр с точным антиавтоморфизмом значительно шире множества эластичных алгебр. В той же статье был приведен пример неэластичной квадратичной алгебры с точным антиавтоморфизмом – одна из "испорченных" кватернионных алгебр с метрикой Минковского $(+1,-3)$. В отношении необходимых условий там же были доказаны две леммы.

Лемма 3. *Отображение* $\mathbf{x} \to \widetilde{\mathbf{x}}$ *в квадратичной алгебре является точным антиавтоморфизмом (сопряжением) тогда и только тогда, когда возможно перестановка сомножителей под знаком реальной части* $\Re(..) \equiv T(..)$ *или, эквивалентно, коммутатор произвольных элементов алгебры является чисто мнимым (меняет знак при сопряжении):*

$$\Re\,(\mathbf{x}\mathbf{y}) = \Re\,(\mathbf{y}\mathbf{x}); \qquad \Re([\mathbf{x},\mathbf{y}]) = 0, \qquad \text{т. е.} \quad \widetilde{[\mathbf{x},\mathbf{y}]} = -[\mathbf{x},\mathbf{y}]. \tag{18}$$

Лемма 3 позволяет сразу же построить пример квадратичной алгебры с неточным антиавтоморфизмом ("испорченные" кватернионы).

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3 + r$	$-\mathbf{q}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3 - r$	-1	$\mathbf{q}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1

. (*Tab. N*)

Отображение меняет знак у орт $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$. Алгебра квадратична:

$$\mathbf{a} = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot \mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3$$
$$\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ra_1a_2 - ra_2a_1 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Как видим, норма положительно определена и совпадает с нормой кватернионов. Однако,

$$\widetilde{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2} = \widetilde{\mathbf{q}_3 + r} = -\mathbf{q}_3 + r \ \neq$$
$$\widetilde{\mathbf{q}}_2\widetilde{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{q}_2\mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_3 - r.$$

В соответствии с теоремой 2, алгебра неэластична:

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1(-\mathbf{q}_3 - r) = \mathbf{q}_2 - r\mathbf{q}_1\,, \qquad \text{но}$$
$$\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1 = (\mathbf{q}_3 + r)\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 + r\mathbf{q}_1$$

В соответствии с доказанными леммами

$$\Re(q_1q_2) = r \neq \Re(q_2q_1) = -r, \qquad \Re([q_1, q_2]) = 2r \neq 0$$

Наконец, можно доказать следующую важную теорему:

Теорема 3. *Во всякой квадратичной алгебре произведение трех элементов под знаком реальной части ассоциативно тогда и только тогда эта алгебра эластична:*

$$\Re(\mathbf{ab} \cdot \mathbf{c}) = \Re(\mathbf{a} \cdot \mathbf{bc}) \qquad \text{или} \quad T(\mathbf{ab} \cdot \mathbf{c}) = T(\mathbf{a} \cdot \mathbf{bc}). \tag{19}$$

Отметим, что для произведения произвольного числа элементов ассоциативности под знаком реальной части нет, к примеру вообще говоря:

$$\Re\big(\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{cd})\big) \neq \Re\big(\mathbf{a}(\mathbf{bc} \cdot \mathbf{d})\big). \tag{20}$$

Поэтому форму $\Re(...) \equiv T(...)$ некорректно называть “ассоциативной формой”, как это распространено.

Следствием этой теоремы является

Лемма 4. *Во всякой эластичной алгебре с центральным сопряжением возможна циклическая перестановка трех сомножителей под знаком реальной части.*

Однако, реальное значение этой теоремы в том, что свойство (19) тесно связано с полупростотой алгебры. Согласно теореме Дьедонне, конечномерная неассоциативная алгебра будет полупростой (будет однозначным образом представима в виде прямой суммы простых идеалов), если на ней определена невырожденная "ассоциативная" симметричная билинейная форма $B(x; y)$, и при этом для каждого ненулевого идеала алгебры выполняется $I^2 \neq 0$. Неполупростые (составные) алгебры во многих смыслах значительно "хуже" по своим свойствам. В частности, в рассмотренной выше алгебре свойство (19) не выполняется, она не полупроста.

Отметим, что как было показано в [10], все алгебры бесконечной цепочки Кэли-Диксона эластичны.

Наконец, несложно доказать следующую теорему:

Теорема 4. *Любая квадратичная алгебра монокомпозиционна, т. е. 2-норма квадрата элемента равна квадрату 2-нормы этого элемента:*

$$N_2(\mathbf{aa}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}), \quad \text{и более того} \quad N_2(\mathbf{a}^k) = N_2^k(\mathbf{a}). \tag{21}$$

В самом деле, используя моноассоциативность квадратичных алгебр и равенство левой и правой норм:

$$N_2(\mathbf{aa}) = \mathbf{aa}\cdot\widetilde{\mathbf{a}}\widetilde{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}})\widetilde{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}\cdot\widetilde{\mathbf{a}}\mathbf{a})\widetilde{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a})\widetilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}} = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}).$$

В общем случае, используя (17):

$$\begin{gathered} N_2(\mathbf{a}^k) = N_2(\mathbf{aa}^{k-1}) = \mathbf{aa}^{k-1}\cdot\widetilde{\mathbf{a}^{k-1}}\widetilde{\mathbf{a}} = \mathbf{aa}^{k-1}\cdot\widetilde{\mathbf{a}}^{k-1}\widetilde{\mathbf{a}} = \mathbf{aa}^{k-1}\cdot\widetilde{\mathbf{a}}\widetilde{\mathbf{a}}^{k-1} = \\ = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}^{k-1}\widetilde{\mathbf{a}})\widetilde{\mathbf{a}}^{k-1} = (\mathbf{a}\cdot\widetilde{\mathbf{a}}\mathbf{a}^{k-1})\widetilde{\mathbf{a}}^{k-1} = \mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a}^{k-1}\widetilde{\mathbf{a}}^{k-1} = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}^{k-1}), \end{gathered}$$

и так далее, вплоть до получения $N_2^k(\mathbf{a})$. □

В общем, ситуация с квадратичными алгебрами достаточно ясна. Эти алгебры всегда моноассоциативны. В них может отсутствовать точное сопряжение, но всегда есть почти-сопряжение, инвариантные элементы которого принадлежат полю, т. е. центральное почти-сопряжение. Эластичность гарантирует наличие в алгебре точного сопряжения, хотя и необязательна для этого. Квадратичная (псевдо)норма вычислима как произведение элемента на почти-сопряженный к нему. Правая и левая нормы совпадают, норма монокомпозиционна.

Для алгебр выше квадратичных инвариантные относительно некоторого сопряжения выражения уже не могут быть элементами поля, например, вещественными числами. Однако, может случиться, что эти выражения принадлежат не полю, но центру алгебры. Если центр алгебры прост или полупрост, можно говорить об обобщенно-квадратичных алгебрах (алгебрах, квадратичных над своим центром), или алгебрах с центральным сопряжением [11]. В этом случае все приведенные выше утверждения сохраняют свою силу, алгебра все так же моноассоциативна и монокомпозиционна; псевдонорма остается квадратичной над центром, но имеет более высокую степень над полем алгебры, например, в вещественных числах.

Конструкция алгебр над ассоциативно-коммутативными алгебрами, а не над полем, как это делается обычно, удобна тем, что позволяет единым образом рассматривать как алгебры над комплексными числами, так и алгебры над двойными числами. Например, единообразно можно строить теорию алгебраических свойств октав, биоктав (комплексных октав), диоктав (октав над двойными числами).

Однако, обобщенно-квадратичные алгебры – все еще довольно узкий класс, для построения и описания полинорм в произвольных алгебрах нужны совершенно иные методы.

Мультипликативные полинормы и альтернативные алгебры

Как мы видели на примере "испорченных" кватернионов, с одной и той же псевдонормой даже в квадратичном случае могут быть связаны разные алгебры. Для форм выше квадратичных это тем более так. С другой стороны, автору известно множество случаев, когда с одной и той же неассоциативной алгеброй естественным образом связаны разные полинормы. Таким образом, отношения между алгебрами и нормами весьма нетривиальны. Сделать их более определенными можно разными условиями. Самый очевидный способ связать полинормы с алгебраическим умножением – распространить на полинормы условие мультипликативности, которое играет такую яркую роль для классических гиперкомплексных алгебр.

Вопрос о мультипликативности форм степени выше 2 поставил и решил в 1950–60-х гг. Р. Д. Шафер [1]–[3] (с дополнениями К. МакКриммона). Он показал, что невырожденные мультипликативные псевдонормы можно построить только над альтернативными (в частности, ассоциативными) алгебрами.

Пусть V – векторное пространство, возможно ∞-мерное, над полем F характеристики 0 или $p > n$. Отображение $\mathbf{u} \to N(\mathbf{u})$ V на F называется *формой степени* n на V в случае

$$N(\lambda\mathbf{u}) = \lambda^n N(\mathbf{u}) \qquad \text{для любых} \quad \lambda \in F,\ \mathbf{u} \in V.$$

Теорема Шафера. *Пусть $\mathbb{U}$ – алгебра с единицей, вообще говоря бесконечномерная, над полем F характеристики 0 или $p > n$. Необходимое и достаточное условие для существования на $\mathbb{U}$ невырожденной формы N степени $n > 0$, допускающей композицию, состоит в том, что $\mathbb{U}$ является конечномерной сепарабельной альтернативной алгеброй $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{U}_r$, $\mathbb{U}_i$ – простые алгебры степени m_i, где*

$$n = m_1 f_1 + \ldots + m_r f_r,$$

удовлетворяется для положительных целых чисел f_i $(i = 1, \ldots, r)$. Более того, форма N на $\mathbb{U}$ задается посредством

$$N(\mathbf{u}) = [n_1(u_1)]^{f_1} \cdots [n_r(u_r)]^{f_r}, \tag{22}$$

где $n_j(u_j)$ – форма, заданная на простой алгебре $\mathbb{U}_j$.

Здесь существенным является понятие *невырожденности* нормы степени n, которое вводится так:

1) С каждой n-нормой связывается n-линейная форма *n-скалярного произведения* от n гиперкомплексных чисел по формуле Шафера:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = \frac{1}{n!}\big[N(\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n) - \sum_{i=1}^{n} N(\mathbf{u}_1 + \ldots + \check{\mathbf{u}}_i + \ldots + \mathbf{u}_n) \\ + \sum_{i<j} N(\mathbf{u}_1 + \ldots + \check{\mathbf{u}}_i + \ldots + \check{\mathbf{u}}_j + \ldots + \mathbf{u}_n) - \ldots + (-1)^{n-1}\sum N(\mathbf{u}_i)\big],\end{aligned} \tag{23}$$

где запись $\check{\mathbf{u}}_i$ означает, что $\mathbf{u}_i$ опущен. Легко видеть, что

$$N_n(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}), \qquad \text{поскольку} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k (n-k)^n = n!$$

Форма $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ имеет все свойства, которые естественно ожидать от обобщения понятия скалярного произведения. Она вещественна, симметрична относительно любых перестановок векторов, линейна по каждому из них (в частности, обращается в нуль, если один из векторов равен нулю). Более точно называть эту форму n-псевдоскалярным произведением, так как она в общем случае не является положительно определенной.

2) По определению Шафера, формы степени n называются *невырожденными* в случае, если из условия $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = 0$ для всех $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ вытекает $\mathbf{u}_1 = 0$.

Расширение результатов на произвольные моноассоциативные алгебры

Далее мы будем ограничиваться алгебрами со слабым остатком ассоциативности – моноассоциативностью. Это ограничение не выглядит слишком узким. Все ассоциативные, альтернативные, йордановы алгебры являются моноассоциативными алгебрами.

Рассматриваемые нами алгебры уже не являются квадратичными. Однако, всякая конечномерная алгебра $\mathcal{A}$ над любым полем $\mathcal{F}$, как известно, является *алгебраической алгеброй* ограниченной степени. Это значит, что любой элемент $\mathbf{a}$ в такой алгебре аннулирует некоторый (характерный для данного элемента) многочлен над полем $\mathcal{F}$: $f(\mathbf{a}) = 0$, причем минимальная степень такого многочлена *(индекс элемента)* никогда не превышает некоторое число k *(индекс,* или *степень алгебры)*. Причина этого проста – в конечномерной алгебре степени любого элемента рано или поздно окажутся линейно зависимыми. Частным случаем этого факта является теорема Гамильтона-Кэли для ассоциативных алгебр.

Итак, под алгеброй k-ой степени будем понимать алгебру, все элементы которой удовлетворяют тому или иному полиномиальному соотношению степени k, причем в ней существуют элементы, которые не удовлетворяют никаким соотношениям степени ниже k (элементы индекса k). Назовем коэффициенты в полиномиальном соотношении степени k, которое аннулируется элементом $\mathbf{a}$, *моментами* этого элемента.

В моноассоциативных алгебрах (и тем более в альтернативных, ассоциативных) ситуация особенно проста, поскольку в характеристическом многочлене можно не заботиться о расстановке скобок. Таким образом, любой элемент $\mathbf{x}$ моноассоциативной алгебры степени n удовлетворяет определяющему полиномиальному соотношению [11]

$$\mathbf{x}^n - T_1(\mathbf{x})\mathbf{x}^{n-1} + T_2(\mathbf{x})\mathbf{x}^{n-2} \ldots + (-1)^{n-1}T_{n-1}(\mathbf{x})\mathbf{x} + (-1)^n T_n(\mathbf{x}) = 0, \tag{24}$$

$$T_i(\mathbf{x}) = C_n^i(\underbrace{\mathbf{x}, \ldots \mathbf{x}}_{i}, 1 \ldots 1). \tag{25}$$

(Это обобщение формулы Гамильтона-Кэли для моноассоциативных алгебр.) Под i-ым моментом элемента $\mathbf{x}$ будем понимать вещественную функцию $T_i(\mathbf{x})$. В частности, полинорма степени n совпадает с последним моментом $N_n(\mathbf{x}) \equiv T_n(\mathbf{x})$. Далее везде будет предполагаться, что заданная на алгебре полинорма невырождена.

С алгебраическими моментами произвольного индекса математики и тем более физики почти не знакомы. Они используются в механике под названием тензорных инвариантов того или иного порядка. Причина их появления в том, что тензорная алгебра – частный случай ассоциативных алгебр.

Широкие массы математиков и физиков косвенно знакомы с двумя видами алгебраических моментов по теории матриц. Общеизвестен момент первой степени $T_1 \equiv T$: $T(\mathbf{u}) = n(\mathbf{u}, 1, 1, \ldots 1)$ – это след матрицы элемента (в точном представлении $n \times n$ алгебры).

Хорошо знаком и момент высшего порядка (полинорма) $T_n(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u})$ для ассоциативных алгебр – это не что иное, как детерминант матрицы элемента (в точном представлении алгебры).

С очевидностью выполняется:

Лемма 5. *Для элементов, индекс k которых совпадает со степенью алгебры, все моменты задаются однозначно.*

В самом деле, в силу неоднозначности моментов мы получаем по крайней мере два разных полиномиальных соотношения для одного элемента. Вычтя одно из другого, мы получаем, что наш элемент удовлетворяет полиномиальному соотношению степени меньшей k, что противоречит допущению. □

Полиномиальное соотношение степени k для элементов, индекс которых ниже степени алгебры, задается неоднозначно. В связи с этим, моменты таких элементов должны быть доопределены на основании некоторых дополнительных условий, как это уже было для элементов поля (центра) в квадратичных (обобщенно-квадратичных) алгебрах. Таким условием является, например, требование непрерывности моментов.

Легко доказать следующую теорему [11]:

Теорема 5. *Моменты произвольного элемента* $\mathbf{x}$ *моноассоциативной алгебры* $\mathcal{A}$ *(и в частности, его полинорма) инвариантны относительно автоморфизмов и антиавтоморфизмов (в том числе сопряжений) алгебры*

$$T_i(\mathbf{x}') = T_i(\mathbf{x}), \qquad N_n(\mathbf{x}') = N_n(\mathbf{x}). \tag{26}$$

Далее везде будет предполагаться, что полинорма невырождена. Невырожденность полинормы тесно связана с ниль-полупростотой моноассоциативной алгебры. В ниль-полупростой алгебре нет ненулевых двусторонних ниль-идеалов, т. е. идеалов, состоящих из нильпотентных элементов (элементов, порождающих нильпотентные подалгебры $A^j = 0$).

В ниль-полупростых моноассоциативных алгебрах любой отдельно взятый элемент вместе с единицей алгебры порождает ассоциативную подалгебру, для которой вступает в силу теорема Шафера о композиционости полинормы. Если это элемент максимального индекса, ассоциативная подалгебра и композиционная полинорма в ней имеют ту же степень k, что и исходная алгебра. Это сразу же завершает построение полинормы, которая будет композиционна в подалгебре и лишь монокомпозиционна в исходной неассоциативной алгебре. Если же мы имеем дело с элементом индекса ниже максимального, монокомпозиционность, как несложно показать, сохраняется при доопределении полинормы на основании требования непрерывности [11].

Как результат, мы получаем теорему, обобщающую приведенное выше утверждение о квадратичных алгебрах:

Теорема 6. *Ниль-полупростые моноассоциативные алгебры любой степени монокомпозиционны, т. е.*

$$N_k(\mathbf{a}^2) = N_k^2(\mathbf{a}) \qquad \textit{и более того,} \quad N_k(\mathbf{a}^j) = N_k^j(\mathbf{a}). \tag{27}$$

Итак, мы довольно много знаем о свойствах полинорм на моноассоциативных алгебрах. Однако, все еще остается неизвестным способ их явного построения. Для ассоциативных алгебр полинорма равна детерминанту их точного матричного представления. Однако, использование определенного матричного представления и отсутствие инвариантной записи плохо вяжутся с духом геометрического подхода. Этот способ получения полинормы также неоптимален в вычислительном плане и, наконец, неприменим к неассоциативным алгебрам.

Наша цель – найти для произвольных алгебр высоких степеней универсальный алгоритм, отображающий любой элемент данной алгебры на элемент поля (т. е. вещественное или комплексное число) и использующий средства самой алгебры (сложение, умножение и согласованные с ними линейные отображения, в частности, инволюции).

Сначала мы рассмотрим частный важный случай полинорм 4 степени и найдем способ их явного выражения посредством сопряжений, заданных на алгебре. Затем укажем наиболее общий способ вычисления полинорм произвольного порядка в моноассоциативных алгебрах посредством алгебраического умножения и линейных отображений. (Этот результат ранее еще не публиковался.)

Сопряжения и полинормы 4 порядка

В случае алгебр 4 порядка определяющее полиномиальное соотношение таково:

$$\mathbf{x}^4 - T_1(\mathbf{x})\mathbf{x}^3 + T_2(\mathbf{x})\mathbf{x}^2 - T_3(\mathbf{x})\mathbf{x} + T_4(\mathbf{x}) = 0, \tag{28}$$

$$T_i(\mathbf{x}) = C_4^i(\underbrace{\mathbf{x}, ...\mathbf{x}}_{i}, 1...1) \quad \Rightarrow \tag{29}$$

$$\mathbf{x}^4 - 4(\mathbf{x}, 1, 1, 1)\mathbf{x}^3 + 6(\mathbf{x}, \mathbf{x}, 1, 1)\mathbf{x}^2 - 4(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, 1)\mathbf{x} + (\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0, \tag{30}$$

$$N_4(\mathbf{x}) \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) \equiv T_4(\mathbf{x}). \tag{31}$$

Наша цель – связать квадранормы с сопряжениями. Начнем с утверждения, ранее доказанного автором [12]:

Лемма 6. *Во всякой полупростой эластичной моноассоциативной алгебре существует хотя бы одно сопряжение.*

Условие полупростоты является существенным даже для конечномерных ассоциативных алгебр. Они всегда могут быть представлены вещественными или комплексными матрицами, а очевидным примером алгебраического сопряжения является транспонирование матриц. Однако, в случае неполупростых (составных) алгебр операция транспонирования может вывести элемент за пределы алгебры. Согласно основной теореме Веддерберна произвольные ассоциативные алгебры могут быть разложены в сумму полупростой алгебры и максимального нильпотентного идеала (радикала), т. е. в самом простом случае могут быть представлены матрицами вида

$$\begin{pmatrix} A & Z \\ 0 & B \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} A & Z \\ 0 & B \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ Z^T & B^T \end{pmatrix}.$$

Если радикал $Z \neq 0$, операция транспонирования выводит за пределы алгебры и существование сопряжения как инволюционного антиавтоморфизма не гарантировано.

Для практического использования сопряжений можно предложить следующую простую, но полезную *Лемму о коммутации*:

Лемма 7. *Если 3 элемента алгебры связаны соотношением* $\mathbf{ab} = \mathbf{c}$ *и при этом каждый из них является чисто реальным (инвариантным) или чисто мнимым (антиинвариантным) относительно некоторого сопряжения данной алгебры, то* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$*:*
– коммутируют, если количество мнимых элементов четно (т. е. 0 или 2)
– антикоммутируют, если их количество нечетно (1 или 3).

В самом деле, применив операцию сопряжения, имеем $\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{c}}$. При четном числе мнимых элементов имеем $\mathbf{ba} = \mathbf{c} \ \Rightarrow \mathbf{ba} = \mathbf{ab}$; при нечетном $\mathbf{ba} = -\mathbf{c} \ \Rightarrow \mathbf{ba} = -\mathbf{ab}$. □

Теперь рассмотрим в моноассоциативной алгебре 4 степени чисто мнимый относительно некоторого сопряжения элемент $\mathbf{q}$. Имеем для него:

$$\mathbf{q}^4 - T_1(\mathbf{q})\mathbf{q}^3 + T_2(\mathbf{q})\mathbf{q}^2 - T_3(\mathbf{q})\mathbf{q} + T_4(\mathbf{q}) = 0, \tag{32}$$

Поскольку алгебра моноассоциативна,

$$\overline{\mathbf{q}^{2k}} = \mathbf{q}^{2k}, \qquad \overline{\mathbf{q}^{2k+1}} = -\mathbf{q}^{2k+1} \tag{33}$$

Подвергнув соотношение Гамильтона-Кэли операции сопряжения, получаем:

$$\mathbf{q}^4 + T_1(\mathbf{q})\mathbf{q}^3 + T_2(\mathbf{q})\mathbf{q}^2 + T_3(\mathbf{q})\mathbf{q} + T_4(\mathbf{q}) = 0,$$

Сложив исходное равенство с сопряженным, имеем, опустив двойку:

$$\mathbf{q}^4 + T_2(\mathbf{q})\mathbf{q}^2 + T_4(\mathbf{q}) = 0. \tag{34}$$

Это означает, что реальный элемент $\mathbf{r}$, представимый в виде квадрата мнимого элемента $\mathbf{q}^2$, удовлетворяет квадратичному соотношению

$$\mathbf{r}^2 - \tau(\mathbf{r})\mathbf{r} + \nu(\mathbf{r}) = 0. \tag{35}$$

Построение конструкций 4 порядка на алгебрах 4 степени значительно упрощается, если в алгебре существует сопряжение, относительно которого не только квадраты мнимых элементов $\mathbf{q}^2$, но и любые реальные элементы удовлетворяют квадратичному соотношению (35).

Определение 2. *Назовем сопряжение **базовым**, если любой реальный (инвариантный) относительно него элемент алгебры $\mathbf{r}$ удовлетворяет квадратичному соотношению (35) и если он при этом принадлежит ассоциативному ядру алгебры.*

Примечания.

1) Под *ассоциативным центром* алгебры, или *ядром (nucleus)* алгебры, (см. например, [2], [7]) понимается подалгебра, элементы которой $\mathbf{r}$ умножаются ассоциативно не только друг на друга, но и на все элементы алгебры. При этом, коммутация элементов ядра друг с другом или с иными элементами алгебры не предполагается: $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] \neq 0$ в общем случае. В ядро всегда входят 0 и единица алгебры; центр алгебры является подалгеброй ядра.

2) Совокупность реальных относительно базового сопряжения элементов замкнута по сложению, но, вообще говоря, не замкнута по умножению; поэтому они в общем случае не образуют алгебру. Если бы реальные элементы образовывали алгебру, то в силу Леммы о коммутации 3 элементов, эта подалгебра была бы не только ассоциативной, но и коммутативной, т. е. образовывала бы не только ядро, но и даже центр исходной алгебры 4 порядка. В этом случае она была бы обобщенно-квадратичной алгеброй над своим центром.

3) Базовое сопряжение для алгебр 4 степени является аналогом центрального сопряжения для обобщенно-квадратичных алгебр. Инвариантные относительно этих сопряжений элементы удовлетворяют соотношению меньшей степени, чем сама алгебра, и вдобавок ассоциативны со всеми ее элементами.

Базовое сопряжение в тех алгебрах 4 степени, в которых оно существует, позволяет сразу же указать явный алгоритм построения полинормы 4 порядка. В [12] была доказана следующая

Теорема 7. *В моноассоциативных (в том числе, в йордановых, альтернативных и ассоциативных) алгебрах 4 степени с базовым сопряжением $\bar{\mathbf{a}}$ полинорма 4 порядка равна*

$$N_4(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\bigl(\tfrac{1}{2}T(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}) - \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\bigr) = N_2\bigl(2(N_2, 1, 1, 1) - N_2\bigr), \tag{36}$$

где 2-норма $N_2(\mathbf{a})$, вообще говоря, не является элементом поля.

Таким образом, в моноассоциативных алгебрах 4 степени с базовым сопряжением вычисление 4-нормы элемента $\mathbf{a}$ сводится к вычислению его 2-нормы $\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}$ и затем нахождению ее вещественной части. Умножив 2-норму на ее инволюционное отражение относительно вещественного следа, мы получаем 4-норму.

Поляризуя 4-норму, можно получить формулу, выражающую 4-скалярное произведение через 2-скалярное:

$$\begin{multline}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{1}{6}\bigl((\mathbf{a}, \mathbf{b})(\mathbf{c}, \mathbf{d})^\dagger + (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{d})^\dagger + (\mathbf{a}, \mathbf{d})(\mathbf{b}, \mathbf{c})^\dagger + \\ + (\mathbf{c}, \mathbf{d})(\mathbf{a}, \mathbf{b})^\dagger + (\mathbf{b}, \mathbf{d})(\mathbf{a}, \mathbf{c})^\dagger + (\mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{a}, \mathbf{d})^\dagger\bigr), \tag{37}\end{multline}$$

где $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ не являются вещественными числами (элементами поля):

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}+\mathbf{b}\bar{\mathbf{a}}), \tag{38}$$

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})^{\dagger} = \tfrac{1}{2}T\big((\mathbf{a},\mathbf{b})\big)-(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 2\big((\mathbf{a},\mathbf{b}),1,1,1\big)-(\mathbf{a},\mathbf{b}). \tag{39}$$

К сожалению, этот путь вычисления полинормы не удается обобщить для алгебр 8 степени. Для алгебр степени выше 4 нужен принципиально иной метод.

Полинормы и инволюции в моноассоциативных алгебрах произвольной степени

Еще в 2004 г. автор поставил вопрос, существует ли для произвольных (моноассоциативных) алгебр универсальный алгоритм, вычисляющий средствами самой алгебры полинорму ее элементов. (Под средствами алгебры здесь понимаются сложение, умножение и согласованные с ними линейные инволюции, не обязательно антиавтоморфизмы). Такой алгоритм позволил бы вычислять полинорму инвариантным образом, не прибегая к конкретному представлению алгебры в некотором базисе. Долгое время ничего не получалось и автор полагал, что в общем случае для алгебр степени выше 4 этого алгоритма не существует. Однако, в 2014 г. этот алгоритм в расширенном смысле удалось найти и он оказался довольно несложным.

Для начала выясним вопрос, когда линейные отображения вида $\mathbf{a}' = \lambda T(\mathbf{a})-\mathbf{a}$ (λ – элемент поля) являются инволюцией: $\mathbf{a}''=\mathbf{a}$.

$$\mathbf{a}'' = \big(\lambda T(\mathbf{a})-\mathbf{a}\big)' = \lambda T\big(\lambda T(\mathbf{a})-\mathbf{a}\big)-(\lambda T(\mathbf{a})-\mathbf{a}) = \lambda^2 nT(\mathbf{a})-2\lambda T(\mathbf{a})+\mathbf{a} = \lambda(\lambda n-2)T(\mathbf{a})+\mathbf{a}.$$

(Учитываем, что в случае алгебры степени n след элементов поля равен $T(r)=nr$.) Таким образом, в случае $\lambda = 2/n$ добавка сокращается, а значит инволюцией является линейное отображение следующего вида:

$$\mathbf{a}' = \tfrac{2}{n}T(\mathbf{a})-\mathbf{a} = 2(\mathbf{a},1,\ldots,1)-\mathbf{a}.$$

Для квадратичных алгебр, как мы уже видели, инволюцией является каноническое отображение $\mathbf{a}'=T(\mathbf{a})-\mathbf{a}$. Для алгебр 4 степени инволюцией является отображение $\mathbf{a}'=\frac{1}{2}T(\mathbf{a})-\mathbf{a}$, которое уже использовалось в предыдущем параграфе. При произвольном коэффициенте λ мы имеем линейную *почти-инволюцию*: результат двух отображений совпадает с исходным с точностью до некоторого элемента поля.

Далее идея вычисления полинормы сначала будет изложена на примере алгебр третьей и четвертой степени, затем она будет дана в общем виде.

Можно доказать следующую полезную теорему:

Теорема 8. *В эластичных моноассоциативных (в том числе, в йордановых, альтернативных и ассоциативных) алгебрах можно выносить из под полискалярного произведения циклически умножающийся на его аргументы элемент:*

$$(\mathbf{a}\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n)+(\mathbf{u}_1,\mathbf{a}\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n)+\ldots+(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{a}\mathbf{u}_n) = T(\mathbf{a})(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n) \tag{40}$$

$$(\mathbf{u}_1\mathbf{a},\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n)+(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\mathbf{a},\ldots,\mathbf{u}_n)+\ldots+(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\mathbf{a}) = T(\mathbf{a})(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n) \tag{41}$$

В частном случае альтернативных алгебр такое утверждение было доказано Шафером [1]. Нам, однако, вполне хватит значительно более слабого основного утверждения:

Теорема 9. *В моноассоциативных (в том числе, в йордановых, альтернативных и ассоциативных) алгебрах можно выносить из под полискалярного произведения элемент, циклически умножающийся на его аргументы в виде степеней этого элемента:*

$$(\mathbf{a}\mathbf{a}^{k_1},\mathbf{a}^{k_2},\ldots,\mathbf{a}^{k_n})+(\mathbf{a}^{k_1},\mathbf{a}\mathbf{a}^{k_2},\ldots,\mathbf{a}^{k_n})+\ldots+(\mathbf{a}^{k_1},\mathbf{a}^{k_2},\ldots,\mathbf{a}\mathbf{a}^{k_n}) = T(\mathbf{a})(\mathbf{a}^{k_1},\mathbf{a}^{k_2},\ldots,\mathbf{a}^{k_n}). \tag{42}$$

В данном случае уже не имеет значения, слева или справа умножается элемент. Для согласованности мы полагаем, что нулевая степень элемента $\mathbf{a}^0$ совпадает с единицей алгебры. Данная теорема сразу же вытекает из предыдущей, поскольку в моноассоциативных алгебрах подалгебра, порожденная одним элементом, ассоциативна (и уж тем более эластична).

Алгебры второй степени. Здесь нам уже все понятно.

$$\mathbf{a}^2 - T_1(\mathbf{a})\mathbf{a} + T_2(\mathbf{a}) = 0 \qquad (T_1 \equiv T)$$
$$T_2(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\big(T(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\big) = \mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}.$$

Квадратичная норма выразима уже известными нам средствами алгебры – умножение и каноническое сопряжение.

Алгебры третьей степени. Из основной теоремы сразу вытекает справедливость для моноассоциативных алгебр формулы Шафера, доказанной им для альтернативных алгебр:

$$2T_2(\mathbf{a}) = T^2(\mathbf{a}) - T(\mathbf{a}^2). \tag{43}$$

В самом деле,

$$(\mathbf{aa}, 1, \ldots, 1) + (\mathbf{a}, \mathbf{a}, \ldots, 1) + \ldots + (\mathbf{a}, 1, \ldots, \mathbf{a}) = T(\mathbf{a})(\mathbf{a}, 1, \ldots, 1), \qquad \text{т. е.}$$
$$\tfrac{1}{n}T(\mathbf{a}^2) + (n-1)(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \ldots, 1) = \tfrac{1}{n}T(\mathbf{a})T(\mathbf{a}),$$

откуда, учтя что $T_2(\mathbf{a}) = \frac{n(n-1)}{2}(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \ldots, 1)$, и получаем формулу Шафера.

Рассмотрим характеристический полином для алгебр третьей степени:

$$\mathbf{a}^3 - T_1(\mathbf{a})\mathbf{a}^2 + T_2(\mathbf{a})\mathbf{a} - T_3(\mathbf{a}) = 0. \tag{44}$$

Наша задача выразить $T_3(\mathbf{a})$ с помощью умножения и линейных отображений.

$$T_3(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\big(\mathbf{a}^2 - T(\mathbf{a})\mathbf{a} + T_2(\mathbf{a})\big) = \mathbf{a}\Big(\mathbf{a}^2 - T(\mathbf{a})\mathbf{a} + \tfrac{1}{2}\big(T^2(\mathbf{a}) - T(\mathbf{a}^2)\big)\Big) =$$
$$= \mathbf{a}\Big(\mathbf{a}^2 - T(\mathbf{a})\mathbf{a} - \tfrac{1}{2}T\big(\mathbf{a}^2 - T(\mathbf{a})\mathbf{a}\big)\Big) = \mathbf{a}\Big(-\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}} - \tfrac{1}{2}T\big(-\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}\big)\Big) = \mathbf{a}\Big(\tfrac{1}{2}T\big(\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}\big) - \mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}\Big). \tag{45}$$

Введя новое линейное отображение

$$\mathbf{b}' = \tfrac{1}{2}T(\mathbf{b}) - \mathbf{b}, \tag{46}$$

мы с его помощью можем теперь выразить полинорму 3 степени:

$$N_3(\mathbf{a}) \equiv T_3(\mathbf{a}) = \mathbf{a}(\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}})'. \tag{47}$$

Мы достигли цели в той мере, в которой это оказалось возможным: кубическая норма выразима алгебраическим умножением и линейными почти-инволюциями. Внутри этой формулы "спрятана" структура квадратичной нормы.

Алгебры четвертой степени. Исходя из основной теоремы несложно вывести формулу уже для момента T_3, получив сначала следующие соотношения:

$$(\mathbf{a}^3, 1, \ldots, 1) + (\mathbf{a}^2, \mathbf{a}, 1, \ldots, 1) + \ldots + (\mathbf{a}^2, 1, \ldots, \mathbf{a}) = T(\mathbf{a})(\mathbf{a}^2, 1, \ldots, 1), \qquad \text{и}$$
$$(\mathbf{a}^2, \mathbf{a}, 1, \ldots, 1) + (\mathbf{a}, \mathbf{a}^2, 1, \ldots, 1) + (\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, 1, \ldots, 1) \ldots + (\mathbf{a}, \mathbf{a}, 1, \ldots, \mathbf{a}) = T(\mathbf{a})(\mathbf{a}, \mathbf{a}, 1, \ldots, 1).$$

Отсюда исключая $(\mathbf{a}^2, \mathbf{a}, \ldots, 1)$ несложно получить:

$$3T_3(\mathbf{a}) = T_2(\mathbf{a})T(\mathbf{a}) - T(\mathbf{a})T(\mathbf{a}^2) + T(\mathbf{a}^3). \tag{48}$$

Выразив T_2 с помощью формулы Шафера через след T, получаем

$$6T_3(\mathbf{a}) = T^3(\mathbf{a}) - 3T(\mathbf{a})T(\mathbf{a}^2) + 2T(\mathbf{a}^3). \tag{49}$$

Выразим T_4, преобразуя характеристический полином для алгебр четвертой степени:

$$\mathbf{a}^4 - T(\mathbf{a})\mathbf{a}^3 + T_2(\mathbf{a})\mathbf{a}^2 - T_3(\mathbf{a})\mathbf{a} + T_4(\mathbf{a}) = 0,$$
$$T_4(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}\big(\mathbf{a}^3 - T(\mathbf{a})\mathbf{a}^2 + T_2(\mathbf{a})\mathbf{a} - T_3(\mathbf{a})\big).$$

Используя формулу Шафера для T_2 и выведенную выше формулу для T_3, после несложных выкладок получаем:

$$N_4(\mathbf{a}) = T_4(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\Big[\mathbf{a}(\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}})'\Big]^{\natural}, \tag{50}$$

где

$$\widetilde{\mathbf{a}} = T(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \quad \mathbf{b}' = \tfrac{1}{2}T(\mathbf{b}) - \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}^{\natural} = \tfrac{1}{3}T(\mathbf{c}) - \mathbf{c}. \tag{51}$$

Полинорма 4 степени также оказывается выразима алгебраическим умножением и линейными почти-инволюциями. Второе из них является точной инволюцией. Становится понятным и общий принцип построения таких формул в виде "матрешки".

Стоит отметить, что полинорма 4 степени, полученная данным методом, и полинорма, вычисленная на основе базового сопряжения, для моноассоциативных алгебр неизбежно совпадут в силу принципиальных теорем о единственности полинорм.

Алгебры высших степеней – первый способ. Здесь можно идти тем же путем. Например, для произвольных моноассоциативных алгебр пятой степени вывести формулу, выражающую T_4 через более низкие моменты T_3, T_2, T, и затем только через след T:

$$4T_4(\mathbf{a}) = T_3(\mathbf{a})T(\mathbf{a}) - T_2(\mathbf{a})T(\mathbf{a}^2) + T(\mathbf{a})T(\mathbf{a}^3) - T(\mathbf{a}^4), \tag{52}$$
$$24T_4(\mathbf{a}) = T^4(\mathbf{a}) - 6T^2(\mathbf{a})T(\mathbf{a}^2) + 3T^2(\mathbf{a}^2) + 6T(\mathbf{a})T(\mathbf{a}^3) - 4T(\mathbf{a}^4) \tag{53}$$

и после довольно громоздких выкладок получить:

$$N_5(\mathbf{a}) = T_5(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\left(\mathbf{a}\Big[\mathbf{a}(\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}})'\Big]^{\natural}\right)^{\flat}, \tag{54}$$

где мы имеем цепочку линейных отображений

$$\widetilde{\mathbf{a}} = T(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \quad \mathbf{b}' = \tfrac{1}{2}T(\mathbf{b}) - \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}^{\natural} = \tfrac{1}{3}T(\mathbf{c}) - \mathbf{c} \quad \mathbf{d}^{\flat} = \tfrac{1}{4}T(\mathbf{d}) - \mathbf{d} \tag{55}$$

В общем случае формула, связывающая момент степени k с более низкими, как несложно увидеть, такова:

$$kT_k(\mathbf{a}) = T_{k-1}(\mathbf{a})T(\mathbf{a}) - T_{k-2}(\mathbf{a})T(\mathbf{a}^2) + T_{k-3}(\mathbf{a})T(\mathbf{a}^3) + \ldots$$
$$+ (-1)^{k-3}T_2(\mathbf{a})T(\mathbf{a}^{k-2}) + (-1)^{k-2}T(\mathbf{a})T(\mathbf{a}^{k-1}) + (-1)^{k-1}T(\mathbf{a}^k). \tag{56}$$

Далее можно выразить все моменты в правой части через след T_1 от степеней элемента $\mathbf{a}^i$ и получить весьма сложное и громоздкое выражение момента T_k только через следовые члены. В итоге, мы получим выражение полинормы через алгебраическое умножение и линейные отображения:

$$N_k(\mathbf{a}) = T_k(\mathbf{a}) = \mathbf{a}(\mathbf{a}(\ldots(\mathbf{a}(\mathbf{a}\mathbf{a}^{\times_1})^{\times_2})\ldots)^{\times_{k-2}})^{\times_{k-1}}, \qquad \text{где} \qquad \mathbf{u}^{\times_i} = \tfrac{1}{i}T(\mathbf{u}) - \mathbf{u}. \tag{57}$$

Алгебры высших степеней – второй способ. Есть и другой, более простой способ получения этой формулы. Он, однако, требует введения элемента, обратного к данному. Поэтому сначала выясним, при каком условии в моноассоциативной алгебре существует обратный элемент. Опять стартуем от характеристического полинома:

$$\mathbf{x}^n - T_1(\mathbf{x})\mathbf{x}^{n-1} + T_2(\mathbf{x})\mathbf{x}^{n-2} \ldots + (-1)^{n-1}T_{n-1}(\mathbf{x})\mathbf{x} + (-1)^n T_n(\mathbf{x}) = 0,$$
$$\mathbf{x}\big(\mathbf{x}^{n-1} - T_1(\mathbf{x})\mathbf{x}^{n-2} + T_2(\mathbf{x})\mathbf{x}^{n-3} \ldots + (-1)^{n-1}T_{n-1}(\mathbf{x})\big) = (-1)^{n+1}T_n(\mathbf{x}), \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{x}^{-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{T_n(\mathbf{x})}\Big(\mathbf{x}^{n-1} - T_1(\mathbf{x})\mathbf{x}^{n-2} + T_2(\mathbf{x})\mathbf{x}^{n-3} \ldots + (-1)^{n-1}T_{n-1}(\mathbf{x})\Big) \tag{58}$$

Таким образом, обратный элемент к данному существует всегда, когда полинорма исходного элемента не равна нулю $T_n(\mathbf{x}) \neq 0$. Но это, собственно, и есть тот случай, когда имеет смысл эту полинорму вычислять. Так что, данный путь получения формулы применим достаточно широко.

При вычислении полинормы мы будем действовать индуктивно. Считаем, что формула (57) уже установлена для моноассоциативных алгебр степени $n-1$. Для алгебры степени n мы имеем

$$\mathbf{a}^n - T_1(\mathbf{a})\mathbf{a}^{n-1} + T_2(\mathbf{a})\mathbf{a}^{n-2} \ldots + (-1)^{n-1}T_{n-1}(\mathbf{a})\mathbf{a} + (-1)^n T_n(\mathbf{a}) = 0 \tag{59}$$

Рассмотрим выражение меньшей на 1 степени

$$\mathbf{a}^{n-1} - T_1(\mathbf{a})\mathbf{a}^{n-2} + T_2(\mathbf{a})\mathbf{a}^{n-3} \ldots + (-1)^{n-1}X_{n-1}(\mathbf{a}). \tag{60}$$

Элемент алгебры $X_{n-1}(\mathbf{a})$ берется по той же формуле (57), по которой в случае алгебр степени $n-1$ находится полинорма степени $n-1$. Таким образом, X_{n-1} обращает это выражение тождественно в нуль:

$$\mathbf{a}^{n-1} - T_1(\mathbf{a})\mathbf{a}^{n-2} + T_2(\mathbf{a})\mathbf{a}^{n-3} \ldots + (-1)^{n-1}X_{n-1}(\mathbf{a}) = 0. \tag{61}$$

$X_{n-1}(\mathbf{a})$, конечно, уже не совпадает с $T_{n-1}(\mathbf{a})$ и, более того, не является элементом поля (иначе $\mathbf{a}$ не был бы элементом степени n). Это теперь просто некоторый элемент, формально вычисляемый по алгоритму нахождения полинормы для алгебр предыдущей степени. Домножим наше выражение на $\mathbf{a}$ и вычтем ее как тождественный нуль из формулы (59), почти все слагаемые сократятся кроме:

$$(-1)^{n-1}T_{n-1}(\mathbf{a})\mathbf{a} + (-1)^n T_n(\mathbf{a}) - (-1)^{n-1}X_{n-1}(\mathbf{a})\mathbf{a} = 0$$
$$T_n(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\big(T_{n-1}(\mathbf{a}) - X_{n-1}(\mathbf{a})\big). \tag{62}$$

Это уже нужный вид. Осталось связать $T_{n-1}(\mathbf{a})$ со следом $X_{n-1}(\mathbf{a})$. Мы предполагаем, что у нашего элемента $\mathbf{a}$ существует обратный элемент $\mathbf{a}^{-1} \equiv \frac{1}{\mathbf{a}}$. В этом случае мы можем записать

$$T_{n-1} - X_{n-1} = \frac{T_n}{\mathbf{a}} \tag{63}$$

Взяв след, получаем

$$nT_{n-1} - T(X_{n-1}) = T_n T(\mathbf{a}^{-1}). \tag{64}$$

Для нахождения следа обратного элемента $\mathbf{a}^{-1}$ разделим формулу (59) на $(-1)^n T_n \mathbf{a}^n$:

$$(-1)^n \frac{1}{T_n} + (-1)^{n-1}\frac{T_1}{T_n}\mathbf{a}^{-1} + (-1)^{n-2}\frac{T_2}{T_n}\mathbf{a}^{-2} \ldots - \frac{T_{n-1}}{T_n}\mathbf{a}^{-(n-1)} + \mathbf{a}^{-n} = 0. \tag{65}$$

Читая справа налево мы имеем характеристический полином для обратного элемента $\mathbf{a}^{-1}$. Таким образом, его след – коэффициент при $\left(\mathbf{a}^{-1}\right)^{n-1}$ – есть

$$T(\mathbf{a}^{-1}) = \frac{T_{n-1}}{T_n}. \tag{66}$$

Подставляя в (64), получаем:

$$nT_{n-1} - T(X_{n-1}) = T_n \frac{T_{n-1}}{T_n} = T_{n-1} \quad \Rightarrow \quad T(X_{n-1}) = (n-1)T_{n-1}$$

И, наконец, подставляя этот результат в (62), получаем

$$T_n(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\Big(\tfrac{1}{n-1}T\big(X_{n-1}(\mathbf{a})\big) - X_{n-1}(\mathbf{a})\Big) = \mathbf{a}\big(X_{n-1}(\mathbf{a})\big)^{\times_{n-1}}. \qquad \square \tag{67}$$

Мы видим, что формула (57)

$$N_k(\mathbf{a}) = T_k(\mathbf{a}) = \mathbf{a}(\mathbf{a}(\ldots(\mathbf{a}(\mathbf{a}\mathbf{a}^{\times_1})^{\times_2})\ldots)^{\times_{k-2}})^{\times_{k-1}}, \quad \text{где} \quad \mathbf{u}^{\times_i} = \tfrac{1}{i}T(\mathbf{u}) - \mathbf{u},$$

по предположению верная для моноассоциативной алгебры степени $n-1$, оказывается верной и для моноассоциативной алгебры степени n, что завершает индуктивный вывод.

* * *

Мы рассмотрели, какими свойствами обладают (псевдо)нормы и сопряжения в случае произвольных квадратичных алгебр. Мы установили, как эта конструкция обобщается для алгебр 4 степени, если они обладают удобным (базовым) сопряжением. С помощью другого подхода удалось найти инвариантный алгоритм вычисления полинорм для моноассоциативных алгебр любой степени. Все, что необходимо для его выполнения, – умение находить след (фактически – вещественную часть) элементов. Данный результат важен не только в вычислительном, но и в концептуальном отношении, поскольку позволяет лучше понимать связь между алгебрами и порождаемыми ими геометриями.

References

[1] R. D. Schafer. *On forms of degree n permitting composition*, J. Math. Mech. **12** (1963), 777–792. Русский перевод: Р. Д. Шафер, *О формах степени n, допускающих композицию,* Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, том 1, 204, 140–154.

[2] R. D. Schafer. *Forms permitting composition*, Advances in Mathematics **4**, 111 – 148 (1970).

[3] R. D. Schafer. *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York, 1 изд. 1967, 2 изд. 1991.

[4] И. Л. Кантор и А. С. Солодовников. *Гиперкомплексные числа*, Наука, М. 1973.

[5] John C. Baez. *The Octonions*. ArXiv: math-RA/0105155 v4 (2002). Русский перевод: Баэз Джон С., *Октонионы,* Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (5)**, том 3, 2006, 120–176.

[6] M.-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J.-P. Tignol. “The Book of Involutions”. AMS, Colloquium Publications, Vol. 44, 1998.

[7] S. Pumplün. *On flexible quadratic algebras*, arXiv:0703.395 [math.RA], 2007.

[8] M. Bremner, L. Murakami, I. Shestakov, *Nonassociative algebras*. Chapter 69 of Handbook of Linear Algebra. ed. by L. Hogben. Chapman & Hall/ CRC, 2007.

[9] “Общая алгебра”, том 1. Справочная математическая библиотека. М., Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.

[10] А. А. Элиович. О норме бикватернионов и иных алгебр с центральным сопряжением, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2**, том 1, 2004, 24–50.

[11] А. А. Элиович. О полинормах на неассоциативных алгебрах и их возможном применении в физике, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2 (10)**, том 5, 2008, 131–159.

[12] А. А. Элиович. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М., 2010 (см. www.polynumbers.ru и eliovich.livejournal.com).

[13] A. A. Eliovich, V. I. Sanyuk, Some Aspects of Applying Polynorms in field theory. TMPh, 2010, N. 2, p. 135–148.

[14] А. А. Элиович. Квадратичные тождества в алгебраическом контексте, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (24)**, том 13, 2016, 123–134.

Alexander Eliovich

Polynorms and linear involutions on monoassociative algebras

In classical Cayley-Dixon algebras, the norm of an element can be represented as the product of an element by its conjugate. We study what properties the norm and conjugation will possess in arbitrary quadratic algebras. The question is solved, how to generalize this construction to higher-degree polynomials given on nonassociative algebras, that is, how to calculate polynorms by means of algebraic multiplication and linear mappings.