1 Алгебра γ-матриц

Среди матриц 4×4 можно выбрать 4 матрицы $\gamma^0,\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3$ удовлетворяющие следующим антикоммутационным соотношениям

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}I, \tag{1}$$

где I- единичная матрица, а $g^{\mu\nu}=\mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)$ — метрический тензор. Конечно, такой выбор неоднозначен, так как с помощью произвольной обратимой матрицы L мы можем получить другой набор, который ничем не хуже:

$$\gamma'^\mu=L\gamma^\mu L^{-1}. \tag{2}$$

Этими преобразованиями, собственно, произвол в выборе матриц и ограничивается.

Часто используется такой выбор (стандартное представление):

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\gamma^i=\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix},\ i=1,2,3. \tag{3}$$

В стандартном представлении γ^0 является эрмитовой матрицей, а $\boldsymbol{\gamma}$ — антиэрмитовыми. Поэтому из (1) следует, что в стандартном представлении

$$\gamma^{\mu\dagger}=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

Во многих случаях можно проводить преобразования выражений с γ-матрицами, используя не их явный вид, а основное антикоммутационное соотношение (1).

1.1 Вычисление следов

Получим рекуррентное правило для вычисления следов. Во-первых

$$\mathrm{Sp}\ \Big[\overbrace{\gamma^\mu\ldots\gamma^\rho}^{\text{нечетное число}}\Big]\ =0$$

Это тождество легко доказать, если вставить $\left(\gamma^5\right)^2=I$ и проносить матрицы в разные стороны, пользуясь антикоммутацией.

Далее,

$$\mathrm{Sp}\left[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n}\right]=\sum_{i=2}^{n}(-1)^i\,\mathrm{Sp}\left[\gamma^{\mu_2}\ldots\overset{\times}{\gamma^{\mu_i}}\ldots\gamma^{\mu_n}\right],$$

что легко доказывается пронесением γ^{μ_1} вправо до конца. Здесь $\overset{\times}{\gamma^{\mu_i}}$ означает отсутствие γ^{μ_i}. С помощью этой формулы получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\,[I]&=4\\ \mathrm{Sp}\left[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\right]&=4g^{\mu_1\mu_2}\\ \mathrm{Sp}\left[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4}\right]&=4\left[g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}-g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4}+g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}\right]\\ &\ \vdots\end{aligned} \tag{4}$$

Получающиеся правила сильно напоминают теорему Вика для фермионных операторов. Введем сразу матрицу $\gamma^5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Эта матрица также часто встречается в вычислениях. Чтобы взять след с матрицей γ^5, используем, что $\gamma^5=-\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho$[1] Отсюда сразу получаем

[1] Мы используем $\varepsilon^{0123}=+1$, так что $\varepsilon_{0123}=-1$.

$$\mathrm{Sp}\left[\gamma^5 \quad \overbrace{\gamma^\mu \ldots \gamma^\rho}^{\text{нечетное число}}\right] = \mathrm{Sp}\left[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\right] = \mathrm{Sp}\left[\gamma^5\right] = 0$$

$$\mathrm{Sp}\left[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho\right] = -i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

Можно сообразить, что γ^5 спаривается сразу с четырьмя γ-матрицами, и быстро вычислять более сложные следы. Ясно также, что если под следом стоят несколько γ^5, то нужно их попарно "аннигилировать используя антикоммутационные свойства.

1.2 Соотношения Фирца

Соотношения Фирца – это, фактически, соотношения полноты для γ-матриц. Вывод ничем принципиально не отличается от стандартного вывода соотношения полноты. В пространстве матриц 4×4 полный набор образуют матрицы

$$\overbrace{I}^{\text{1 матрица}}\ ,\quad \overbrace{\gamma^\mu}^{\text{4 матрицы}}\ ,\quad \overbrace{\sigma^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]}^{\text{6 матр., учитывая антисимм.}}\ ,\quad \overbrace{\gamma^5\gamma^\mu}^{\text{4 матриц}}\ ,\ \overbrace{\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3}^{\text{1 матрица}} \tag{5}$$

Их как раз ровно $4\cdot 4 = 16$ штук. Линейную независимость, вообще говоря, нужно проверять, однако в стандартном представлении это так, а значит, и в любом так (вследствие того, что любое представление связано невырожденным линейным преобразованием (2) со стандартным)[2]. Кстати, из определения легко выводятся следующие свойства γ^5:

$$\left(\gamma^5\right)^2 = I\,,\quad \left\{\gamma^5,\gamma^\mu\right\} = 0$$

Как известно, *соотношение полноты* есть следствие *полноты* набора. Получим, например, разложение для $f_1 = \delta_{ij}\delta_{kl}$. Пишем условие полноты, выражающее тот факт, что f_1, как матрица по индексам k,j линейно раскладывается по матрицам из (5)

$$f_1 = A\otimes I + B_\mu\otimes\gamma^\mu + C_{\mu\nu}\otimes\sigma^{\mu\nu} + D_\mu\otimes\gamma^5\gamma^\mu + E\otimes\gamma^5\,, \tag{6}$$

где, для краткости, обозначено $a\otimes b \equiv a_{il}b_{kj}$. Умножая это уравнение на $(I)_{jk}$, $(\gamma_\mu)_{jk}$, $(\sigma_{\mu\nu})_{jk}$, $(\gamma^5\gamma_\mu)_{jk}$, $(\gamma^5)_{jk}$ и используя формулы предыдущего раздела, находим A, B_μ, $C_{\mu\nu}$, D_μ и E. Окончательно получаем

$$f_1 = \frac{1}{4}I\otimes I + \frac{1}{4}\gamma_\mu\otimes\gamma^\mu - \frac{1}{8}\sigma_{\mu\nu}\otimes\sigma^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\gamma^5\gamma_\mu\otimes\gamma^5\gamma^\mu + \frac{1}{4}\gamma^5\otimes\gamma^5\,, \tag{7}$$

Остальные соотношения можно получить аналогично, но мы получим их по-другому, используя другие соотношения, также представляющие некоторую ценность. Именно, благодаря тому же соотношению полноты, все произведения матриц из набора (5) линейно выражаются через вектора того же набора:

$$\begin{gathered}\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu}I + \sigma^{\mu\nu}\,,\quad \gamma^\mu\sigma^{\nu\sigma} = g^{\mu\nu}\gamma^\sigma - g^{\mu\sigma}\gamma^\nu - i\varepsilon^{\mu\nu\sigma\delta}\gamma^5\gamma_\delta\,,\quad \gamma^5\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\delta}\sigma_{\sigma\delta}\,,\\ \sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\sigma} = (g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})I + g^{\mu\sigma}\sigma^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}\sigma^{\nu\sigma} + g^{\nu\rho}\sigma^{\mu\sigma} - g^{\nu\sigma}\sigma^{\mu\rho} - i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5\,.\end{gathered} \tag{8}$$

Поэтому, мы получаем, например, для $f_2 = (\gamma^\mu)_{ij}(\gamma_\mu)_{kl}$

$$f_2 = (\gamma^\mu)_{ii'}(\gamma_\mu)_{l'l}\delta_{i'j}\delta_{kl'} = I\otimes I - \frac{1}{2}\gamma_\mu\otimes\gamma^\mu - \frac{1}{2}\gamma^5\gamma_\mu\otimes\gamma^5\gamma^\mu - \gamma^5\otimes\gamma^5 \tag{9}$$

[2] См. ниже рассмотрение в пространстве произвольной размерности.

1.3 Свертки по индексам

Формулы для сверток по индексам получаются с помощью (1). Выпишем их для справки

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma_\mu &= \tfrac{1}{2}\left\{\gamma^\mu,\gamma_\mu\right\} = g^\mu_\mu I = 4I \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= \gamma^\mu\left\{\gamma^\nu,\gamma_\mu\right\} - \gamma^\mu\gamma_\mu\gamma^\nu = -2\gamma^\nu \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma_\mu &= 4g^{\nu\sigma}I \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma_\mu &= -2\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu
\end{aligned}$$

Из этой формулы,в частности, следует, что произведение любого нечетного числа γ-матриц в обкладках $\gamma^\mu\ldots\gamma_\mu$ дает произведение этих γ-матриц в обратном порядке, умноженное на -2.

1.4 Алгебра γ-матриц в $\mathcal{D}$-мерии

Многие формулы из вышеизложенных можно обобщить на случай $\mathcal{D}$ измерений исходя из соотношения (1). Например, формулы для сверток выглядят так

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma_\mu &= \mathcal{D}I \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= \left(2-\mathcal{D}\right)\gamma^\nu \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma_\mu &= 2\gamma^\sigma\gamma^\nu - \left(2-\mathcal{D}\right)\gamma^\nu\gamma^\sigma \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma_\mu &= -2\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu + \left(4-\mathcal{D}\right)\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho
\end{aligned}$$

След четного числа γ-матриц вычисляется абсолютно аналогично (4). Единственная разница — другой, вообще говоря, общий множитель:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp}\left[I\right] &= N\left(\mathcal{D}\right) \\
\mathrm{Sp}\left[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\right] &= N\left(\mathcal{D}\right) g^{\mu_1\mu_2} \\
\mathrm{Sp}\left[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4}\right] &= N\left(\mathcal{D}\right)\left[g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} - g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4} + g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}\right] \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{10}$$

Функция $N\left(\mathcal{D}\right)$, очевидно, имеет смысл размерности γ-матриц. Для размерностной регуляризации функция $N\left(\mathcal{D}\right)$ может быть выбрана произвольно, при условии, что $N\left(4\right) = 4$. Часто выбирают $N\left(\mathcal{D}\right) = 4$. Чтобы определить действительную размерность γ- матриц в $\mathcal{D}$-мерном пространстве ($\mathcal{D}$-натуральное число), нам нужно рассмотреть представление группы Лоренца в линейном пространстве матриц $N \times N$.

1.4.1 Представление группы Лоренца на алгебре Клиффорда

Пусть $\gamma^0,\ldots\gamma^{\mathcal{D}-1}$ — некоторые матрицы $N \times N$, удовлетворяющие условию (1)[3].

Сопоставим каждому преобразованию Лоренца

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \exp\left[\omega\right]^\mu{}_\nu$$

[3]Совокупность таких матриц называется алгеброй Клиффорда

матрицу[4]

$$S(\Lambda) = \exp\left[\frac{1}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}\right], \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right],$$

и рассмотрим линейные преобразования матриц $N \times N$:

$$T_{\Lambda} : M \to S^{-1}(\Lambda)\, M S(\Lambda), \tag{11}$$

Из коммутационных соотношений можно показать, что

$$T_{\Lambda}(\gamma^{\mu}) = S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^{\mu} S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}, \tag{12}$$

то есть, что γ^{μ} ведет себя как вектор.

Задача 1 *Доказать (12)*

Рассмотрим теперь такую последовательность

$$\begin{aligned} &\gamma^{\mu} \\ \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]} &= \frac{1}{2}\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right] \\ \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma]} &= \frac{1}{6}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma} + \gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu} + \gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu} - \gamma^{\sigma}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\right) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{13}$$

Каждый из таких объектов преобразуется как полностью антисимметричный тензор при преобразованиях Лоренца. Причем для неповторяющихся индексов компонента $\gamma^{[\mu_1}\dots\gamma^{\mu_n]}$ не равна нулю. Действительно, из (1) следует, что все γ-матрицы невырождены и что $\gamma^{[\mu_1}\dots\gamma^{\mu_n]} = \gamma^{\mu_1}\dots\gamma^{\mu_n}$ (среди $\mu_1\dots\mu_n$ нет повторяющихся). Поэтому

$$\det\left\{\gamma^{[\mu_1}\dots\gamma^{\mu_n]}\right\} = \det\left\{\gamma^{\mu_1}\dots\gamma^{\mu_n}\right\} = \det\left\{\gamma^{\mu_1}\right\}\dots\det\left\{\gamma^{\mu_n}\right\} \neq 0,$$

а значит, и сама матрица $\gamma^{[\mu_1}\dots\gamma^{\mu_n]}$ не равна нулю. Если между матрицами (13) есть линейная связь, ее коэффициенты должны быть инвариантными тензорами, чтобы эта связь не изменялась при преобразовании (11). В собственной группе Лоренца есть два основных инвариантных тензора: $g^{\mu\nu}$ и $\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_{\mathcal{D}}}$. Если еще учесть P-четность, то второй объект уже не является инвариантным тензором. Поэтому, легко понять, что с учетом P-четности тензорные компоненты всех тензоров из (13) с возрастающими значениями индексов являются линейно независимыми матрицами. Действительно, единственный вариант связи — это уменьшение числа индексов у одного или нескольких тензоров из (13) и сложение с тензорами с таким же числом индексов. Но число индексов уменьшить можно только сверткой с $g^{\mu\nu}$, что дает ноль. Теперь, считая компоненты, получаем

$$N^2 \geqslant 1 + \mathcal{D} + \frac{\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)}{2} + \frac{\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)(\mathcal{D}-2)}{6} + \ldots = \sum_{n=0}^{\mathcal{D}} C_{\mathcal{D}}^{n} = 2^{\mathcal{D}}$$

Тут нужно заметить, что в четных размерностях преобразование

$$M \to \left(\gamma^{0}\right)^{-1} M \gamma^{0}$$

[4]Строго говоря, матрица Лоренцевских преобразований определяет $S(\Lambda)$ с точностью до знака

соответствует P-четности, так как

$$\left(\gamma^0\right)^{-1}\gamma^\mu\gamma^0 = P^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Поэтому в четных размерностях $\mathcal{D}$ размерность γ-матриц не может быть меньше, чем $2^{\mathcal{D}/2}$[5].

В нечетных размерностях, если мы не собираемся использовать P-четность, возможной является связь

$$\gamma^{[\mu_1}\dots\gamma^{\mu_n]} \propto \varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_n}{}_{\mu_{n+1}\cdots\mu_\mathcal{D}}\gamma^{[\mu_{n+1}}\dots\gamma^{\mu_\mathcal{D}]} \tag{14}$$

и поэтому минимальная размерность γ-матриц равна $2^{(\mathcal{D}-1)/2}$.

1.4.2 Аномалии в следе нечетного числа γ-матриц

Наконец, рассмотрим след нечетного числа γ-матриц. Наше доказательсто равенства его нулю не годится, так как существенно использует определение матрицы γ_5. Но теперь мы понимаем, что, по крайней мере, для натуральных $\mathcal{D}$, этот след является инвариантным тензором. Поэтому он может быть отличен от нуля только для нечетных натуральных $\mathcal{D}$ и для числа γ-матриц, равного $\mathcal{D}, \mathcal{D}+2, \dots$(так как инвариантные тензоры с нечетным количеством индексов в $\mathcal{D}$-мерье могут иметь $\mathcal{D}, \mathcal{D}+2, \dots$ индексов). Для нецелых $\mathcal{D}$ мы можем действовать так. Рассмотрим тождество

$$\mathcal{D}\,\mathrm{Sp}\left[\gamma^\alpha\right] = \mathrm{Sp}\left[\gamma_\mu\gamma^\mu\gamma^\alpha\right] = \mathrm{Sp}\left[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu\right] = (2-\mathcal{D})\,\mathrm{Sp}\left[\gamma^\alpha\right].$$

Из него получаем, что

$$(\mathcal{D}-1)\,\mathrm{Sp}\left[\gamma^\alpha\right] = 0,$$

что означает, что при $\mathcal{D} \neq 1$ (а все натуральные $\mathcal{D}$ мы уже обсудили) $\mathrm{Sp}\left[\gamma^\alpha\right] = 0$. Большее нечетное число γ-матриц имеет также нулевой след в нецелой размерности.

Упражнение 2 *Вывести тождество*

$$(\mathcal{D}-3)\,\mathrm{Sp}\left[\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\right] = 0.$$

Для нечетных размерностей мы можем определить чему может быть равен след $\mathcal{D}$ γ-матриц при их минимальной размерности $N = 2^{(\mathcal{D}-1)/2}$. Для этого нам нужно определить коэффициент пропорциональности в формуле (14) . Имеем

$$\begin{gathered} \gamma^0\dots\gamma^{\mathcal{D}-1} = \alpha\varepsilon^{0\dots\mathcal{D}-1} = \alpha \\ \left(\gamma^0\dots\gamma^{\mathcal{D}-1}\right)^2 = \alpha^2 \\ (-1)^{\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)/2}\det g = \alpha^2 \\ \alpha = \pm\sqrt{(-1)^{\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)/2}} = \pm\sqrt{(-1)^{(\mathcal{D}-1)/2}} \end{gathered}$$

Здесь мы учли, что в нечетной размерности $\det g = 1$. Очевидно, что если реализуется один знак, то другой тоже возможен. Получаем для нечетных размерностей

$$\mathrm{Sp}\left[\gamma^{\mu_1}\dots\gamma^{\mu_\mathcal{D}}\right] = \pm\sqrt{(-1)^{(\mathcal{D}-1)/2}}\,2^{(\mathcal{D}-1)/2}\varepsilon^{\mu_1\dots\mu_\mathcal{D}} = \pm\,(2i)^{(\mathcal{D}-1)/2}\,\varepsilon^{\mu_1\dots\mu_\mathcal{D}}$$

[5] А явным построением можно показать, что размерность равна $2^{\mathcal{D}/2}$