# ВРЕМЯ КАК ПОЛЕ СИНХРОНИЗИРОВАННЫХ СОБСТВЕННЫХ ВРЕМЕН НОРМАЛЬНОЙ КОНГРУЭНЦИИ МИРОВЫХ ЛИНИЙ

**Г.И. Гарасько**

*ФГУП ВЭИ, Москва, Россия*

gri9z@yandex.ru, gri9z.wordpress.com

Предлагается понимать время как поле синхронизированных собственных времен нормальной конгруэнции мировых линий. Сформулированы условия, при выполнении которых некоторая функция точки пространства событий может считаться параметром эволюции. Наиболее удобным параметром эволюции является длина мировой линии из нормальной конгруэнции экстремалей, в классической механике - это действие как функция координат. Существует связь между Мировым полем (полем Мировой функции, или физическим Миром в нулевом приближении) и полем синхронизированных собственных времен нормальной конгруенции мировых линий. Если поле собственных времен выражается только через Мировую функцию, то гиперповерхности уровня Мировой функции являются гиперповерхностями собственных времен нормальной конгруэнции мировых линий. Такие гиперповерхности предлагается считать собственно пространством в отличии от собственно времени. Собственно пространство (в любой момент времени) трансверсально всем мировым линиям из нормальной конгруэнции.

**Ключевые слова:** время, конгруенция мировых линий, конформный коэффициент, метрическая функция, Мировая функция, Мировое поле, нормальная конгруенция мировых линий, параметр эволюции, пространство Минковского, собственное время, собственно пространство, финслерова геометриия, финслерово пространство.

## 1 Введение

Основные (базисные) понятия в любой теории не могут быть определены никак иначе, как через другие базисные понятия, то есть полная система связей между основными понятиями эти понятия и определяет.

Если исходить от понятий наблюдатель и системы отсчета, связанной с наблюдателем, то в четырехмерном пространстве событий $x^0$, $x^1$, $x^2$, $x^3$ мировая линия наблюдателя – координатная ось $x^0$, то есть прямая линия, описываемая системой уравнений:

$$x^1 = 0, \qquad x^2 = 0, \qquad x^3 = 0\,. \tag{1}$$

Каждый наблюдатель строит систему координат $x^0, x^1, x^2, x^3$ во всем пространстве событий, что в принципе не возможно – практически не осуществимо. Но собственное время он может измерять довольно точно: с точностью тех часов, которые он имеет, и тех представлений о времени, которые у него сложились. Последнее более существенно и более сложно: во-первых, измеряемое собственное время должно монотонно увеличиваться -

$$dx^0 > 0\,, \qquad x^0 \in [x^0_{(1)}, x^0_{(2)}]\,, \qquad x^0_{(1)} < x^0_{(2)} \tag{2}$$

- в том промежутке, который интересует наблюдателя, например, от значения $x^0_{(1)}$ до значения $x^0_{(2)}$; во-вторых, собственное время должно увеличиваться равномерно, с одной и той же "скоростью". Таким образом, создание часов и осмысление понятия собственного времени это сложный противоречивый процесс. И все же будем предполагать: мы понимаем, что такое собственное время, умеем его, равномерно и монотонно увеличивающееся, "точно" измерять, и координатное время в системе отсчете, связанной наблюдателем $V_{(1)}$, суть собственное время наблюдателя $V_{(1)}$.

Тогда любая мировая линия наблюдателя $V_{(2)}$ в системе отсчета и координатах, связанных с наблюдателем $V_{(1)}$, будет определяться системой уравнений:

$$x^0 = x^0\,, \qquad x^1 = g_{(1)}(x^0)\,, \quad x^2 = g_{(2)}(x^0)\,, \quad x^3 = g_{(3)}(x^0)\,, \tag{3}$$

или

$$x^0 = u_{(0)}(x^0)\,, \quad x^1 = u_{(1)}(x^0)\,, \quad x^2 = u_{(2)}(x^0)\,, \quad x^3 = u_{(3)}(x^0)\,, \tag{4}$$

где $g$, $u$ – функции одного действительного аргумента, достаточное число раз дифференцируемые и удовлетворяющие еще некоторым дополнительным условиям. Вместо системы уравнений (4) для описания произвольной мировой линии можно использовать и другую систему уравнений:

$$x^0 = f_{(0)}(\tau)\,, \quad x^1 = f_{(1)}(\tau)\,, \quad x^2 = f_{(2)}(\tau)\,, \quad x^3 = f_{(3)}(\tau)\,, \tag{5}$$

где $f$ – функции одного действительного аргумента, достаточное число раз дифференцируемые, а $\tau$ – параметр эволюции. Параметр эволюции должен обладать всеми свойствами собственного времени, кроме равномерности. Если параметр эволюции можно выразить через координата $x^0, x^1, x^2, x^3$ пространства событий в системе отсчета наблюдателя $V_{(1)}$, где $x^0$ – собственное время наблюдателя $V_{(1)}$, то вдоль любой мировой линии

$$\frac{d\tau}{dx^0} > 0\,. \tag{6}$$

Сразу же возникает вопрос о синхронизации всех часов, имеющихся у всевозможных наблюдателей. Эта проблема имеет, как практический аспект, так и теоретический. Нас будет интересовать только теоретический аспект.

Будем исходить из того, что в пространстве событий в некоторой окрестности точки $M_0(0,0,0,0)$ нахождения наблюдателя он может с некоторой точностью построить систему координат $x^0, x^1, x^2, x^3$, экстраполировать ее на все пространство событий, а затем уточнять эту систему координат по мере продвижения по собственной мировой линии (1). Именно в этом смысле мы и будем понимать координатное пространство $x^0, x^1, x^2, x^3$ или $x^0, x^1, x^2, ..., x^{n-1}$ в n-мерном пространстве событий.

На данный момент мы исходим из концепции, что пространство событий (как четырехмерное так и, если понадобится, n-мерное) является финслеровым пространством (финслеровой геометрией). Любому материальному объекту в этом пространстве соответствует мировая линия. Любая модель физического Мира в нулевом приближении это нормальная конгруэнция мировых линий.

Во всем множестве финслеровых геометрий можно выделить два класса геометрий: класс $P^{(I)}$ – геометрии, в которых можно ввести понятие собственного времени наблюдателя, а значит систему координат, содержащую хотя бы одну временну́ю координату (индикатрисы в таких геометриях обычно – вогнутые гиперповерхности); и класс $P^{(II)}$ – геометрии, в которых нельзя ввести понятие собственного времени (индикатрисы в таких геометриях обычно – выпуклые гиперповерхности), а собственное время можно ввести как единое для всех наблюдателей в виде дополнительного абсолютного параметра (параметра эволюции), то есть времени Галилея или аналога такового. Все невырожденные поличисла – финслеровы пространства, относящиеся к первому классу, за исключением комплексных чисел, геометрия которых принадлежит классу $P^{(II)}$.

В настоящей работе мы будем изучать финслеровы пространства класса $P^{(I)}$, но некоторые построения и выводы справедливы и для пространств класса $P^{(II)}$.

## 2 Наилучший параметр эволюции

Рассмотрим конкретное финслерово пространство $x^0, x^1, ..., x^{n-1}$ класса $P^{(I)}$, где $x^0$ – собственное время наблюдателя, мировая линия которого совпадает с прямой:

$$x^1 = 0, \quad x^2 = 0, \quad ..., \quad x^{n-1} = 0\,. \tag{7}$$

Элемент длины определяется метрической функцией $L(dx; x)$:

$$ds = L(dx^0, dx^1, ..., dx^{n-1}; x^0, x^1, ..., x^{n-1})\,. \tag{8}$$

Уравнение индикатрисы в центроаффинном касательном пространстве $\xi^0$, $\xi^1$, ..., $\xi^{n-1}$ в точке $M(x^0, x^1, ... x^{n-1})$ основного пространства $x^0$, $x^1$, ..., $x^{n-1}$ имеет вид:

$$L(\xi; x) = 1\,, \tag{9}$$

а тангенциальное уравнение той же индикатрисы суть

$$\Phi(p; x) = 0\,, \tag{10}$$

где $\Phi(p; x)$ – функция Финслера, $p_i$ – компоненты обобщенного импульса:

$$p_i = \frac{\partial}{\partial\, dx^i} L(dx; x)\,. \tag{11}$$

Мировые линии – экстремали нашего пространства, они являются решениями системы дифференциальных уравнений Лагранжа - Эйлера:

$$\frac{d}{d\,\dot{x}^i}\frac{\partial L(\dot{x}; x)}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L(\dot{x}; x)}{\partial x^i} = 0\,, \tag{12}$$

где

$$\dot{x}^i = \frac{d\,x^i}{d\,\tau} \tag{13}$$

– производные координат по некоторому параметру эволюции $\tau$. Для нахождения экстремалей также можно воспользоваться системой канонических уравнений:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \Phi(p; x)}{\partial\, p^i} \cdot \lambda(p; x)\,, \qquad \dot{p}^i = -\frac{\partial \Phi(p; x)}{\partial\, x^i} \cdot \lambda(p; x)\,, \qquad \Phi(p; x) = 0\,, \tag{14}$$

где $\lambda(p; x) > 0$ – некоторая функция.

Есть еще способ нахождения системы мировых линий (экстремалей), образующих нормальную конгруэнцию. Если $S(x)$ – длина мировых линий (экстремалей) как функция координат в финслеровом пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$, то она определяет нормальную конгруэнцию экстремалей (мировых линий) как решение системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \left( \frac{\partial \Phi(p; x)}{\partial p_i} \cdot \lambda(p; x) \right)\Bigg|_{p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}}\,, \tag{15}$$

где $\Phi(p; x)$ – функция Финслера, $\lambda(p; x) > 0$ – некоторая функция, а $\tau$ – параметр эволюции. Параметр эволюции с точностью до аддитивной постоянной однозначно определяется выбором функций $\Phi(p; x)$ и $\lambda(p; x) > 0$. Сама же функция $S(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi\left( \frac{\partial S(x)}{\partial x}; x \right) = 0\,, \tag{16}$$

которое в классической механике называют уравнением Гамильтона - Якоби. Гиперповерхности уровня

$$S(x) = C \tag{17}$$

являются собственно пространственными объектами размерности $(n-1)$, трансверсальными мировым линиям нормальной конгруэнции.

Основополагающим свойством нормальной конгруэнции мировых линий является следующее свойство: при эволюции наблюдателей по различным мировым линиям рассматриваемой нормальной конгруэнции от гиперповерхности уровня $C_1$ до гиперповерхности уровня $C_2$ у всех наблюдателей эти гиперповерхности вырезают отрезки мировых линий одинаковой длины:

$$\Delta s = C_2 - C_1\,. \tag{18}$$

Иначе говоря, для данной нормальной конгруэнции мировых линий всегда можно определить приращение длины отрезка мировой линии из этой конгруэнции между гиперповерхностями уровня $C_1$ и $C_2$, проходящей через точки $x_{(1)}$ и $x_{(2)}$, следующим образом:

$$\Delta s = S\left(x_{(2)}\right) - S\left(x_{(1)}\right)\,. \tag{19}$$

Итак, пусть известная функция $S(x)$, и она нам определяет нормальную конгруэнцию мировых линий. Какой параметр эволюции наиболее удобен при изучении такой конгруэнции?

Координатное время далеко не всегда удобно выбирать в качестве параметра эволюции, так как это приводит к не ковариантным формулам уравнениям, построениям, рассуждениям ...

Вычислим элемент длины произвольной мировой линии из рассматриваемой конгруэнции:

$$ds = L\left(dx(\tau); x(\tau)\right) = p_i(\tau)\cdot dx^i(\tau) = p_i(\tau)\cdot \dot{x}^i \cdot d\tau\,. \tag{20}$$

Воспользуемся уравнениями (15). Тогда

$$ds = \left.\left(p_i \cdot \frac{\partial\Phi(p;x)}{\partial p_i}\cdot\lambda(p;x)\right)\right|_{p_i=\frac{\partial S}{\partial x^i}} d\tau\,. \tag{21}$$

Таким образом, если выбрать функции Финслера и $\lambda(p;x)$ так, чтобы вне зависимости от выбора мировой линии из нормальной конгруэнции выполнялось условие

$$p_i \cdot \frac{\partial\Phi(p;x)}{\partial p_i}\cdot\lambda(p;x)\;\equiv\;1\,, \tag{22}$$

что можно сделать многими разными способами, то в результате получим наилучший (естественный) параметр эволюции сразу для всех мировых линий из нормальной конгруэнции. Для любой мировой линии $x^i(\tau)$ отрезок между точками $x^i(\tau_1)$ и $x^i(\tau_2)$, через которые она проходит, имеет длину $s_{12} = \tau_2 - \tau_1$.

Для каждой мировой линии начало отсчета параметра эволюции может быть выбрано свое, но удобнее все эти параметры "синхронизовать" (согласовать), используя для этого трансверсальную гиперповерхность уровня:

$$S(x) = \tau_0\,, \tag{23}$$

положив значения всех параметров эволюции, при которых эти мировые линии пересекают гиперповерхность уровня (23), равными $\tau_0$, а если это возможно, то и $\tau_0 = 0$. В последнем случае для мировой линии $x^i(\tau)$ длина мировой линии от поверхности уровня $S(x) = 0$ до точки $x^i(\tau)$ равна $|\tau|$.

В дальнейшем всегда будем считать, что параметры эволюции это длины "синхронизированных" отрезков мировых линий. Если функция $S(x)$ известна (задана), то решая систему уравнений (15), получим для произвольной мировой линии из нормальной конгруэнции

$$x^i = x^i \left( \tau; x^0_{(0)}, x^1_{(0)}, ..., x^{n-1}_{(0)} \right) , \tag{24}$$

где точка $M_0 \left( x^0_{(0)}, x^1_{(0)}, ..., x^{n-1}_{(0)} \right)$ принадлежит гиперповерхности уровня $S(x) = \tau_0$ и однозначно определяет мировую линию из нашей конгруэнции, проходящую через эту точку. Систему уравнений (24) разрешим относительно $x^0_{(0)}, x^1_{(0)}, ..., x^{n-1}_{(0)}$ и получим

$$x^i_{(0)} = x^i_{(0)} \left( \tau; x^0(\tau), x^1(\tau), ..., x^{n-1}(\tau) \right) . \tag{25}$$

Предположим, что нам известна некоторая величина, определяемая в каждой точке мировой линии из нашей нормальной конгруэнции, например, собственное время $T$ наблюдателя, связанного с мировой линией. Тогда эта величина может быть определена как функция

$$T = T \left( \tau; x^0_{(0)}, x^1_{(0)}, ..., x^{n-1}_{(0)} \right) , \tag{26}$$

или, подставив вместо $x^i_{(0)}$ выражения (25), а вместо $\tau$ функцию $S(x)$, получим поле рассматриваемой величины:

$$T = T(x^0, x^1, ..., x^{n-1}) . \tag{27}$$

До сих пор мы считали функцию $S(x)$ заданной, но во многих задачах она не определена однозначно и находится как решение фундаментального уравнения. Тогда она называется Мировой функцией и обозначается $S_W(x)$.

## 3 Гиперболический потенциал

Рассмотрим геометрию в координатном пространстве $x^0, x^1$ с элементом длины

$$ds = \kappa(x)\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2} , \qquad dx^0 > 0 , \quad \kappa(x) > 0 . \tag{28}$$

Компоненты обобщенного импульса для такой геометрии это

$$p_0 = \kappa(x)\frac{dx^0}{\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2}} , \qquad p_1 = -\,\kappa(x)\frac{dx^0}{\sqrt{(dx^1)^2 - (dx^1)^2}} . \tag{29}$$

Они функционально связаны тангенциальным уравнением индикатрисы

$$(p_0)^2 - (p_1)^2 - \kappa^2(x) = 0 , \tag{30}$$

из которого получим выражение конформного коэффициента $\kappa(x)$ через функцию $S(x)$:

$$\kappa(x) = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2} . \tag{31}$$

Тогда лагранжиан –

$$\mathcal{L} = \mathrm{const} \cdot \left[ \left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 \right] \tag{32}$$

дает для функции $S(x)$ уравнение поля:

$$\frac{\partial S}{\partial \left(x^0\right)^2} - \frac{\partial S}{\partial \left(x^1\right)^2} = 0\,. \tag{33}$$

Решение этого уравнения с условием

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 > 0 \tag{34}$$

суть Мировая функция $S_W(x)$.

Аналитические функции

$$F(X) = U(x^0, x^1) + jV(x^0, x^1) \tag{35}$$

гиперболической (двойной) переменной

$$X = x^0 \cdot 1 + x^1 \cdot j\,, \qquad j^2 = 1\,, \tag{36}$$

называемые также гиперболическими потенциалами, в изотропном базисе $e_1, e_2$:

$$e_1 e_1 = e_1\,, \qquad e_2 e_2 = e_2\,, \qquad e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0\,, \tag{37}$$

$$1 = \frac{e_1 + e_2}{2}\,, \qquad j = \frac{e_1 - e_2}{2}\,, \tag{38}$$

$$e_1 = 1 + j\,, \qquad e_2 = 1 - j \tag{39}$$

– в общем виде могут быть записаны следующим образом:

$$F(X) = f_{(1)}(x^0 + x^1)e_1 + f_{(2)}(x^0 - x^1)e_2\,, \tag{40}$$

где функции $f_{(1)},\ f_{(2)}$ – произвольные гладкие функции одной действительной переменной. Тогда в базисе 1, $j$ произвольная аналитическая функция двойной переменной - гиперболический потенциал – имеет вид:

$$F(X) = \left[f_{(1)}(x^0 + x^1) + f_{(2)}(x^0 - x^1)\right] \cdot 1 + \left[f_{(1)}(x^0 + x^1) - f_{(2)}(x^0 - x^1)\right] \cdot j. \tag{41}$$

Каждая компонента этого потенциала удовлетворяет фундаментальному уравнению (33), что следует из условий аналитичности Коши - Римана и может быть проверено непосредственной подстановкой в уравнение, но при этом не всегда выполняется условие (34). Таким образом, общее выражение для действительной части гиперволического потенциала –

$$U(x^0, x^1) = f_{(1)}(x^0 + x^1) + f_{(2)}(x^0 - x^1)\,, \tag{42}$$

а условие (34) запишется так:

$$\dot{f}_{(1)}(x^0 + x^1)\, \dot{f}_{(2)}(x^0 - x^1) > 0\,, \tag{43}$$

где точка означает производную функции одной действительной переменной по этой переменной.

Приведенные выше формулы (более подробно см. [2]) позволяют строить Мировую функцию, используя алгебру двойных чисел.

В качестве примера рассмотрим потенциал (Мировую функцию) вида

$$U(x^0,x^1) = a\ln\left(\frac{x^0+x^1}{b}\right) + a\ln\left(\frac{x^0-x^1}{b}\right)\,, \tag{44}$$

где $a$, $b$ – действительные постоянные, для определенности будем считать, что они больше нуля: $a > 0$, $b > 0$. Так как для существования функции (44) необходимо выполнение неравенств

$$x^0+x^1>0\,,\qquad x^0-x^1>0\,, \tag{45}$$

то область определения потенциала $U(x^0,x^1)$ суть

$$x^0 > 0\,,\qquad -x^0<x^1<x^0\,. \tag{46}$$

Запишем потенциал (44) несколько иначе:

$$U(x^0,x^1) = a\ln\left(\frac{(x^0)^2-(x^1)^2}{b^2}\right) \tag{47}$$

– и проверим выполнение условия (34):

$$\frac{4\,a^2}{(x^0)^2-(x^1)^2} > 0\,. \tag{48}$$

В области определения потенциала $U(x^0,x^1)$ (44) выполняется и условие (34).

Вычислим теперь конформный коэффициент (31):

$$\kappa(x) = \frac{2\,a}{\sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2}}\,. \tag{49}$$

Теперь мы знаем, какую геометрию изучаем, так как можем записать конкретную метрическую функцию, а значит и – элемент длины нашей геометрии:

$$ds = \frac{2\,a}{\sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2}}\cdot\sqrt{(dx^0)^2-(dx^1)^2}\,. \tag{50}$$

Найдем конгруэнцию мировых линий, задаваемых Мировой функцией $U(x^0,x^1)$ (47). Для этого в качестве функции Финслера выберем

$$\Phi(p;x) = \frac{1}{2\kappa^2(x)}\left(p_0^2-p_1^2\right) - \frac{1}{2}\,. \tag{51}$$

Тогда (при выборе $\lambda(p;x)\equiv 1$) с точностью до постоянной (вообще говоря, своей для каждой мировой линии) параметром эволюции будет являться сам потенциал (Мировая функция). Вспоминая, что компоненты обобщенного импульса выражаются через Мировую функцию как производные

$$p_0 = \frac{\partial U}{\partial x^0}\,,\qquad p_1 = \frac{\partial U}{\partial x^1}\,, \tag{52}$$

используя формулы (15), запишем систему дифференциальных уравнений, определяющую нормальную конгруэнцию мировых линий:

$$\dot x^0 = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x^0}}{\left(\dfrac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2-\left(\dfrac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2}\,,\qquad \dot x^1 = \frac{-\dfrac{\partial U}{\partial x^1}}{\left(\dfrac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2-\left(\dfrac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2}\,, \tag{53}$$

а подставив $U(x^0, x^1)$ (47) –

$$\dot{x}^0 = \frac{1}{2\,a}\,x^0\,, \qquad \dot{x}^1 = \frac{1}{2\,a}\,x^1\,. \tag{54}$$

Решая эту систему уравнений, имеем

$$x^0 = x^0_{(0)}\,e^{\frac{1}{2\,a}(\tau-\tau_0)} \qquad x^1 = x^1_{(0)}\,e^{\frac{1}{2\,a}(\tau-\tau_0)}\,. \tag{55}$$

При $\tau = \tau_0$ мировая линия проходит через точку $(x^0_{(0)}, x^1_{(0)})$. Если исключить параметр эволюции из параметрического задания мировых линий, то получим такое уравнение мировой линии:

$$x^1 = \frac{x^1_{(0)}}{x^0_{(0)}}\,x^0\,. \tag{56}$$

Мировые линии из нашей нормальной конгруэнции это лучи (полупрямые), исходящие из начала координат, то есть данная конгруэнция это "полу пучок" прямых линий. Материальные объекты (или наблюдатели), соответствующие им, движутся равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\frac{d\,x^1}{d\,x^0} = \frac{x^1_{(0)}}{x^0_{(0)}}\,. \tag{57}$$

Подставим (55) в потенциал (Мировую функцию) $U(x^0, x^1)$ (47), получим

$$U(x^0(\tau), x^1(\tau)) = a\ln\left(\frac{(x^0_{(0)})^2 - (x^1_{(0)})^2}{b^2}\right) + \tau - \tau_0\,. \tag{58}$$

Теперь нам надо "синхронизовать" (согласовать) выбор постоянной $\tau_0$, вообще говоря, своей для каждой мировой линии, например, так:

$$\tau_0 = a\ln\left(\frac{(x^0_{(0)})^2 - (x^1_{(0)})^2}{b^2}\right)\,. \tag{59}$$

Тогда для всех мировых линий из нормальной конгруэнции определяемой потенциалом $U(x^0, x^1)$ (47)

$$U(x^0(\tau), x^1(\tau)) = \tau\,. \tag{60}$$

Если же потребовать, чтобы начальная точка $(x^0_{(0)}, x^1_{(0)})$ для каждой мировой линии выбиралась гиперповерхности

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = b^2\,, \qquad x^0 > 0\,, \tag{61}$$

то для всех мировых линий $\tau_0 = 0$ и $S(x^0_{(0)}, x^1_{(0)}) = 0$.

Собственное время для произвольной мировой линии из рассматриваемой конгруэнции можно вычислить следующим образом:

$$T = \frac{1}{c}\int\limits_0^\tau \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2}\,, \tag{62}$$

тогда

$$T = \frac{b}{c}\left(e^{\frac{1}{2\,a}\,\tau} - 1\right)\,, \tag{63}$$

или подставляя в место $\tau$ потенциал $U(x^0, x^1)$ (47), получим

$$T = \frac{b}{c}\left(e^{\frac{1}{2a}U(x^0,x^1)} - 1\right) \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{1}{c}\left(\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2} - b\right), \tag{64}$$

$T = 0$ на гиперповерхности (61).

Итак, для конкретной нормальной конгруэнции мировых линий получено поле собственных времен $T(x^0, x^1)$ (64), выражающееся только через потенциал $U(x^0, x^1)$ (47) (Мировую функцию), и тем самым синхронизированное по трансверсальным гиперповерхностям. В точке пересечения с каждой поверхностью уровня

$$U(x^0, x^1) = \mathrm{const}$$

синхронизированное выше указанным способом собственное время любой мировой линии из нормальной конгруэнции равно одному и тому же значению

$$T(x^0, x^1) = \mathrm{const}'\,.$$

Модель физического Мира, описываемая потенциалом (47), - это Большой Взрыв в точке $(0,0)$ пространства событий $x^0$, $x^1$ двойных чисел. В такой модели имеет место закон Хабла.

## 4 Пространство, конформно связанное с пространством Минковского

Финслерова геометрия с метрической функцией $L_1(dx; x)$ называется конформно связанной с геометрией, определяемой метрической функцией $L_2(dx; x)$, если первая метрическая функция выражается через вторую по формуле

$$L_1(dx; x) = \kappa(x) \cdot L_2(dx; x)\,, \qquad \kappa(x) > 0\,. \tag{65}$$

Если вторая геометрия плоская, то конформный множитель $\kappa(x)$ обычно выражается [2] через Мировую функцию. Поясним это на примере финслеровой геометрии, конформно связанной с пространством, которое можно назвать пространством Минковского, а именно геометрией, которая определяется метрической функцией

$$L(dx; x) = \kappa(x)\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}, \quad dx > 0, \quad \kappa(x) > 0. \tag{66}$$

Для такой геометрии компоненты обобщенного импульса равны

$$\begin{aligned} p_0 &= \ \kappa(x)\,\frac{dx^0}{\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}}\,, \\ p_\mu &= -\kappa(x)\,\frac{dx^\mu}{\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}}\,, \end{aligned} \tag{67}$$

где $\mu = 1, 2, 3$; а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать в виде:

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - \kappa^2(x) = 0\,. \tag{68}$$

Действие как функция координат должно удовлетворять уравнению Клейна - Гордона:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2 = \kappa^2(x)\,, \tag{69}$$

из которого можно получить выражение поля конформного коэффициента через поле $S(x)$:

$$\kappa(x)=\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2}\,. \qquad (70)$$

Если функция $\kappa(x)$ не задана изначально, то согласно принципу самодостаточности финслеровых геометрий она должна определяться формулой (70), а поле $S(x)$ является решением уравнения Лагранжа - Эйлера - Остроградского с лагранжианом

$$\mathcal{L}=\mathrm{const}\cdot\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2\right]^2. \qquad (71)$$

Выпишем это уравнение явно:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x^0}\left\{\frac{\partial S}{\partial x^0}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2\right]\right\}-\\
&-\frac{\partial}{\partial x^1}\left\{\frac{\partial S}{\partial x^1}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2\right]\right\}-\\
&-\frac{\partial}{\partial x^2}\left\{\frac{\partial S}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2\right]\right\}-\\
&-\frac{\partial}{\partial x^3}\left\{\frac{\partial S}{\partial x^3}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2\right]\right\}=0\,.
\end{aligned} \qquad (72)$$

Его решение при условии

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2>0 \qquad (73)$$

и есть Мировая функция $S_W(x)$. Одним из решений уравнения (72) является функция

$$S_W(x)=a\ln\left(\frac{(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2}{b^2}\right), \qquad (74)$$

где $a>0$, $b>0$ – постоянные. Областью определения функции $S_W(x)$ (74) выберем конус будущего:

$$x^0>0\,,\qquad (x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2>0\,, \qquad (75)$$

где условие (73) выполняется автоматически. Используя формулу (70), вычислим конформный множитель:

$$\kappa(x)=\frac{2\,a}{\sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2}}\,. \qquad (76)$$

Таким образом, мы изучаем геометрию с метрической функцией

$$L(dx;x)=\frac{2\,a\,\sqrt{(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2}}{\sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2}}\,. \qquad (77)$$

Для того чтобы параметр эволюции в такой геометрии совпадал с точностью до аддитивной постоянной (вообще говоря, своей для каждой мировой линии из нормальной конгруэнции) с Мировой функцией, следует, например, выбрать функцию Финслера следующим образом:

$$\Phi(p;x) = \frac{1}{2\,\kappa^2(x)}\left(p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2\right) - \frac{1}{2}\,, \tag{78}$$

а $\lambda(p;x) \equiv 1$.

Тогда система уравнений (15) для нахождения мировых линий нормальной конгруэнции, порождаемой функцией $S_W(x)$ (74), принимает вид:

$$\frac{d\,x^i}{d\,\tau} = \frac{1}{2\,a}\,x^i\,. \tag{79}$$

Ее решения можно записать так:

$$x^i = x^i_{(0)}\,e^{\frac{1}{2\,a}\,\tau} \tag{80}$$

где постоянные $x^i_{(0)}$ лежат на гиперповерхности уровня $S_W(x) = 0$:

$$x^0_{(0)} - x^1_{(0)} - x^2_{(0)} - x^3_{(0)} = b^2\,. \tag{81}$$

Вычислим обычную трехмерную скорость для произвольной мировой линии и получим, что они постоянны, не зависят ни от параметра эволюции, ни от времени, ни от координат:

$$\frac{d\,x^\mu}{d\,x^0} = \frac{x^\mu_{(0)}}{x^0_{(0)}}\,. \tag{82}$$

Здесь $\mu = 1, 2, 3$. А уравнения мировых линий можно записать и так:

$$x^\mu = \frac{x^\mu_{(0)}}{x^0_{(0)}}\;x^0\,, \qquad x^0 > 0\,. \tag{83}$$

Таким образом, мировые линии из рассматриваемой конгруэнции суть лучи (полупрямые), "исходящие" из точки (0,0,0,0), но не включающие эту точку. То есть все материальные объекты (и/или наблюдатели) нашей нормальной конгруэнции мировых линий движутся равномерно и прямолинейно, с (постоянными!) скоростями (82).

Отметим, что из формул (82), (83) следует выполнение при достаточно больших значениях $x^0$:

$$x^0 \gg |x^\mu| \tag{84}$$

– закона Хаббла. Так как группа Лоренца является подгруппой изометрической группы симметрии геометрии (77), собственное время для произвольной мировой линии из рассматриваемой конгруэнции можно вычислить следующим образом:

$$T = \frac{1}{c}\int\limits_0^\tau \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}\,, \tag{85}$$

тогда

$$T = \frac{b}{c}\left(e^{\frac{1}{2\,a}\,\tau} - 1\right)\,, \tag{86}$$

или подставляя в место $\tau$ Мировую функцию $S_W(x)$ (74), получим

$$T(x) = \frac{b}{c}\left(e^{\frac{1}{2\,a}\,S_W(x)} - 1\right)\,, \tag{87}$$

или

$$T(x) = \frac{1}{c}\left(\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2} - b\right), \tag{88}$$

$T(x) = 0$ на гиперповерхности

$$\left(x^0\right)^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2 = b^2, \qquad x^0 > 0, \tag{89}$$

которая является гиперповерхностью уровня $S_W(x) = 0$ Мировой функции (74).

Таким образом, для конкретной нормальной конгруэнции мировых линий (80) получено поле собственных времен $T(x)$ (87), выражающееся только через потенциал $S_W(x)$ (74) (Мировую функцию), и тем самым синхронизированное по трансверсальным гиперповерхностям, или поверхностям уровня $S_W(x) = \tau$.

Модель физического Мира, описываемая потенциалом (77), - это Большой Взрыв в точке $(0, 0, 0, 0)$ четырехмерного пространства событий $x^0$, $x^1$, $x^2$, $x^3$. В такой модели имеет место закон Хаббла.

## 5 Заключение

Нормальная конгруэнция мировых линий это модель физического Мира в нулевом приближении. Естественным параметром эволюции $\tau$ в такой системе является длина отрезка мировой линии отсчитываемая от некоторой фиксированной гиперповерхности уровня $\mathfrak{S}_0$ Мировой функции. Такая гиперповерхность является трансверсальной ко всем мировым линиям из нормальной конгруэнции. Точка на гиперповерхности $\mathfrak{S}_0$ и значение параметра эволюции $\tau$ можно рассматривать как специальные координаты в пространстве событий.

Если наблюдатели, соответствующие мировым линиям конкретной нормальной конгруэнции, производят измерения некоторой величины $\mathfrak{T}$ и значения этой величины можно "синхронизовать" на любой трансверсальной гиперповерхности, то такая величина зависит только от Мировой функции $S_W(x)$:

$$\mathfrak{T}(x) = F(S_W(x)). \tag{90}$$

На двух примерах: (63) и (87) - мы показали, что это возможно.

Любая поверхность уровня $S_W(x) = \tau$ имеет размерность $(n-1)$ и является собственно пространством. Модель физического Мира должна строится таким образом, чтобы для поля собственных времен $T(x)$ нормальной конгруэнции мировых линий выполнялась формула (90). Тогда время есть функция длины отрезка мировой линии:

$$T = T(\tau). \tag{91}$$

## Литература


[1] Рашевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М., Л., ОГИЗ, 1947.

[2] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., ТЕТРУ, 2009.

[3] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ. М., "Наука" , 1967.

# TIME AS A FIELD OF SYNCHRONISED PROPER TIMES OF A NORMAL CONGRUENCE OF WORLD LINES

**G.I. Garas'ko**

*Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia*

gri9z@yandex.ru, gri9z.wordpress.com

The author suggests to interpret time as a field of synchronized proper times of a normal congruence of world lines.

He lays down the conditions allowing to consider a function of a point of the events space as a parameter of evolution.

The length of a world line from a normal congruence of extremums is the best suited parameter of evolution, that is, an operation is the same as a point function in the Newtonian mechanics. Whether the world field (the field of the world function or a meatspace at zero-order approximation) and a field of synchronized proper times of a normal congruence of world lines are interrelated? If a field of the proper times can be expressed through a world function only, then hypersurfaces of the world function level are the hypersurfaces of the proper times of normal congruencies of the world lines. A space per se (at any moment of time) is transversal to all the world lines from the normal congruence.

**Key Words:** time, congruence of world lines, conformal coefficient, metric function, world function, world field, normal congruence of world lines, parameter of evolution, Minkowski space, proper time, space per se, Finsler geometry, Finsler space.