ТЕРНАРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ НАД ТРЁХМЕРНЫМИ МАТРИЦАМИ

А.В. Лапшин

НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

lavexander@mail.ru

В статье рассматривается тернарное обобщение стандартной алгебры матриц на случай пространственных (кубических) матриц. Помимо определения самой тернарной операции и исследования ее основных свойств, построены многомерные версии общепринятых понятий, операций и отображений, используемых в стандартной алгебре матриц: транспонирование, единичный элемент, коммутативность, ассоциативность и других. Обсуждается связь построенной тернарной операции с алгеброй поличисел P_3.

Ключевые слова: тернарная операция, тернарное произведение, скалярное полипроизведение, алгебра поличисел, тройные числа, псевдонорма.

1 Введение

В настоящей статье исследуется расширение классической бинарной операции произведения $\cdot$ двумерных матриц $\mathcal{M}^{(2)}_{m\times n}$ а также алгебры квадратных матриц, в основе которой лежит данная операция, на тернарную операцию произведения $\mathcal{P}$ пространственных матриц $\mathcal{M}^{(3)}_{m\times n\times p}$ и алгебру кубических матриц на основе тернарной операции $\mathcal{P}$. Частично представленный материал докладывался на конференциях, в частности, на FERT-2012 [42].

Мотивация данной работы вытекает из потребности более основательного изучения симметрий метрик, индуцированных алгебрами поличисел P_n имеющих вид *скалярного полипроизведения* [2,4]. Если скалярное произведение пары векторов порождает бинарную группу, то *скалярное полипроизведение p векторов (или тензоров)* порождает p-арную группу (цитата по [5, стр. 21-22]):

«Одной из основных особенностей понятия группы симметрий является связь с бинарными операциями, тогда как природа математических операций сама по себе совсем не указывает на бинарность как на единственно выделенное отношение. Более того, логика действительно последовательных исследований просто требует, чтобы наравне с бинарными операциями рассматривались и n (p)-арные».

Потенциальные перспективы построения единых физико-алгебраических теорий пространства, времени, полей и материи стимулировало активность в исследованиях алгебр P_n в последнее время [6–12].

p-арные алгебры являются классическим разделом высшей алгебры, в котором они рассматриваются с общих позиций [15–17, 19, и библиография там]. Тернарные алгебраические структуры уже нашли свои приложения в квантовой механике и математической физике [22–24, 32, 34–41].

Перейдем к некоторым общим определениям.

Пусть $\mathfrak{R}$ - произвольное кольцо, $\mathbb{N}_q = \{1, 2, \ldots, q\}$ - конечный отрезок натурального ряда длины q.

Определение 1.1. Отображение $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_r \times \mathbb{N}_p \to \mathfrak{R}$ называется *пространственной матрицей*. Множество таких матриц обозначим $\mathcal{M}^{(3)}$. При $n = m = p$ пространственную матрицу будем называть **кубической матрицей порядка** n, а множество таких матриц обозначать $\mathcal{M}^{(3,n)}$.

Наглядно пространственную матрицу удобно записывать как трехиндексный объект M_{ijk}. При этом образ M_{ijk} при фиксированных j и k, обозначающих ориентацию, определяет jk-ый *столбец* ($\equiv$ строку направления i), при фиксированных i и k — ik-ую *строку* (строку направления j) и при фиксированных i и j — ij-ую *балку* (строку направления k):

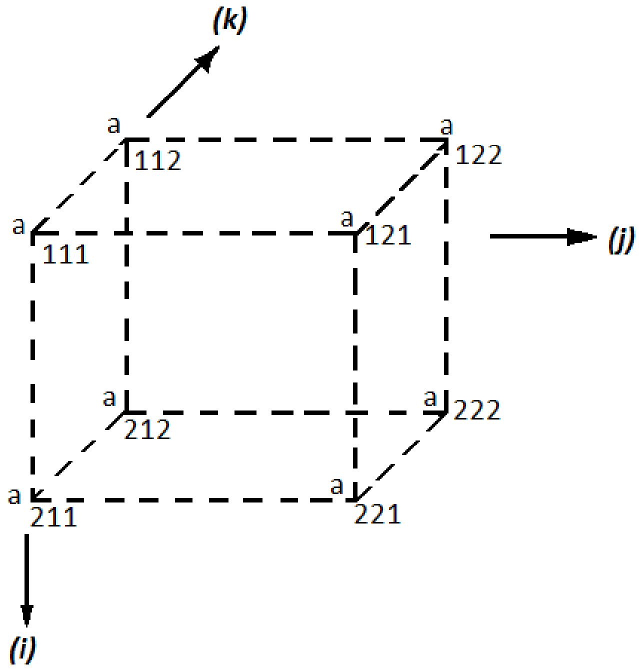

Рис. 1: Направления изменения индексов произвольной трёхмерной матрицы.

Замечание 1.1. При необходимости подматрицы произвольной матрицы $M_{ijk} \in \mathcal{M}^{(3)}$ меньшей размерности $p < 3$ фиксируются обозначением индекса(-ов) ориентации греческими буквами. Во всех других случаях индексы обозначены латинскими буквами.

Полезно рассмотреть произвольную трёхмерную матрицу $A_{ijk} \in \mathcal{M}^{(3)}_{ijk}$ как *вектор-матрицу* [18] (или J-матрицу [21]):

Определение 1.2. Пусть $\mathfrak{R}$ – кольцо, $1 \leq k \in \mathbb{N}$. Упорядоченный набор

$$A = (A_1, \dots, A_s)$$

s матриц $A_1, \dots, A_s$, размеров $m_1 \times n_1, \dots, m_s \times n_s$ с элементами из P называется **векторной матрицей** или **вектор-матрицей размера** $(m_1 \times n_1, \dots, m_s \times n_s)$ **над** P. Индекс s будем называть *векторным*, сечения ориентации s – $A_1, \dots, A_s$ – *элементарными сечениями вектор-матрицы* A, а их индексы $m_1 \times n_1, \dots, m_s \times n_s$ – *индексами сечения вектор-матрицы* A. Рассмотрим $A_{ijk} \in \mathcal{M}^{(3)}$ как *вектор-матрицу*. В этом случае:

1. $m_1 = \ldots = m_s \times n_1 = \ldots = n_s$

2. A_{ijk} может быть направлена тремя различными способами, если $s = i \in \mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$; $s = k \in \mathbb{N}_r = \{1, \dots, r\}$; $s = j \in \mathbb{N}_p = \{1, \dots, p\}$:

$$A_{ijk} = \begin{matrix} (A_{\cdot jk})_1 \\ \vdots \\ (A_{\cdot jk})_n \end{matrix} = \begin{matrix} (A_{ij})_r & & \\ & \ddots & \\ & & (A_{ij})_1 \end{matrix} = (A_{i\cdot k})_1 \quad \dots \quad (A_{i\cdot k})_p \tag{1.1}$$

Матрица A_{ijk} показана как *вектор-матрица-столбец* $(s = i)$, *вектор-матрица-балка* $(s = k)$, *вектор-матрица-строка* $(s = j)$. *Направление* вектор-матрицы *определяется векторным индексом, ориентация – индексами сечения вектор-матрицы.*

Тернарное произведение трёхмерных и, в частности, кубических матриц может быть построено разными способами. Одним из первых задача построения тернарной операции на множестве $\mathcal{M}^{(3,n)}$ была решена Р. Кернером [26, формула 6, стр. 7]. В этой и последующих работах, он разработал сам [27, 30] и с соавторами [28, 29] теорию тернарного перемножения трёх кубических матриц. Однако его вариант тернарной операции получен трёхкратным применением бинарной операции свёртки трёх трёхмерных матриц:

$$D_{ijk} = \sum_{p,q,r} A_{ipq}B_{pjr}C_{qrk} = \sum_{q,r}(AB)_{iqjr}C_{qrk} = \sum_{r}(ABC)_{ijrrk} = D_{ijk}$$

Такое произведение назовём *биэлементным тернарным произведением*. Другой способ определения тернарной операции предложен В.М. Черновым [25, стр. 38]:

$$x_{pqr} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{pij}b_{iqj}c_{ijr}.$$

Бинарная операция свёртки заменена её тернарным обобщением. К сожалению, по-видимому, такая операция не получила дальнейшего развития. Такое произведение назовём *триэлементным тернарным произведением*. Задача работы – получить **триэлементное** тернарное произведение, но без использования "умножения Цассенхауза" [25, стр. 38, Пример 1.2].

2 Построение тернарной операции на множестве $\mathcal{M}^{(3)}_{ijk}$.

Поскольку целью работы является обобщение произведения двух двумерных матриц на случай трёх трёхмерных, начнём с общеизвестных фактов:

1. *Каждый элемент итоговой матрицы равен скалярному произведению одномерных подматриц – строки $A_{\phi l}$ первой матрицы на столбец $B_{l\psi}$ второй*:

$$c_{\phi\psi} = (A_{\phi l}, B_{l\psi}) = \sum_{l=1}^{h} a_{\phi l}b_{l\psi}$$

2. Если из строк составить вектор-матрицу-столбец, а из столбцов – вектор-матрицу-строку, мы получим правило произведения матриц, если размерности элементарного сечения $l \in \mathbb{N}_h = \{1, \dots, h\}$ полученных вектор-матриц совпадают:

$$c_{ij} = A_{il} \cdot B_{lj} = \begin{bmatrix} A_{1l} \\ A_{2l} \\ \vdots \\ A_{nl} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{lm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1l}B_{l1} & A_{1l}B_{l2} & \cdots & A_{1l}B_{lm} \\ A_{2l}B_{l1} & A_{2l}B_{l2} & \cdots & A_{2l}B_{lm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{nl}B_{l1} & A_{nl}B_{l2} & \cdots & A_{nl}B_{lm} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

Осуществим аналогичные шаги:

1. *Прямым обобщением пункта 1* на случай тернарной операции следует считать произведение одномерных подматриц по правилу *строка* $\times$ *столбец* $\times$ *балка*:

$$\begin{array}{ccccccl} & & & c_{\phi\psi h} & & & \\ & & b_{1\psi\omega} & & & & \\ a_{\phi 1\omega} & \cdots\ a_{\phi h\omega} & \vdots & & c_{\phi\psi 2} & & = a_{\phi 1\omega}b_{1\psi\omega}c_{\phi\psi 1}+\dots+a_{\phi l\omega}b_{l\psi\omega}c_{\phi\psi l}+\dots+a_{\phi h\omega}b_{h\psi\omega}c_{\phi\psi h} = k \\ & & b_{h\psi\omega} & & & & \\ & & & & & c_{\phi\psi 1} & \end{array} \tag{2.2}$$

В (2.2) k – это скаляр, однако очевидно, что если такими скалярами заполнить пространственную матрицу, результатом будет 6-мерный объект (по числу свободных индексов). Назовём суммирование (2.2) *внутренним.*

2. Введём дополнительную операцию сложения сумм вида (2.2):

Определение 2.1. *Внешнее суммирование* – это сумма по второму индексу суммирования m, нумерующего 1-мерные подматрицы 2-мерных элементарных сечений 3-мерных матриц. *Внешняя сумма* есть сумма по индексу m внутренних сумм:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} & & & & & & & & & & & & c_{1\psi h} & \\ & & & & & b_{11\omega} & b_{12\omega} & \cdots & b_{1t\omega} & & c_{1\psi 2} & & c_{2\psi h} & \\ & & & & & & & & & & & & \vdots & \\ & & a_{\phi 1t} & a_{\phi 2t} & \cdots & a_{\phi ht} & & & & & & & & \\ & a_{\phi 12} & a_{\phi 22} & \cdots & a_{\phi h2} & b_{21\omega} & b_{22\omega} & \cdots & b_{2t\omega} & c_{1\psi 1} & c_{2\psi 2} & & c_{t\psi h} & = \\ a_{\phi 11} & a_{\phi 21} & \cdots & a_{\phi h1} & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & & \\ & & & & & b_{h1\omega} & b_{h2\omega} & \cdots & b_{ht\omega} & c_{2\psi 1} & c_{t\psi 2} & & & \\ & & & & & & & & & \vdots & & & & \\ & & & & & & & & & c_{t\psi 1} & & & & \end{array} \tag{2.3}$$

$$= \underbrace{\overbrace{a_{\phi 11}b_{11\omega}c_{1\psi 1}}^{l=1} + \dots + \overbrace{a_{\phi h1}b_{h1\omega}c_{1\psi h}}^{l=h}}_{m=1} + \dots + \underbrace{a_{\phi 1t}b_{1t\omega}c_{t\psi 1} + \dots + a_{\phi ht}b_{ht\omega}c_{t\psi h}}_{m=t} = d_{\phi\psi\omega}$$

3. Ориентация матриц в (2.3) подобрана так, чтобы было выполнено ещё одно условие, характерное для (2.1): *Первая вектор-матрица операции является вектор-матрицей-столбцом.* Переходя к ключевому определению работы, убеждаемся в его выполнении.

Определение 2.2. Пусть даны трёхмерные матрицы A размера $n \times h \times t$, B размера $h \times t \times r$, C размера $t \times p \times h$. **Триэлементным тернарным произведением** $\mathcal{P}$ трёхмерных матриц A, B и C, взятых в указанном порядке, называется трёхмерная матрица D размера $n \times p \times r$, элементы которой находятся по формуле:

$$\boxed{\mathcal{P} = \left\{ D = ABC \mid d_{ijk} \equiv \sum_{m=1}^{t} \sum_{l=1}^{h} a_{ilm} b_{lmk} c_{mjl} \right\}}. \tag{2.4}$$

В вектор-матричной форме оно может быть записано так:

$$D_{ijk} \equiv \begin{array}{cccc} (A_{\cdot lm})_1 (B_{lm})_r & & & \\ \vdots & \ddots & & (C_{m\cdot l})_1 \ \dots \ (C_{m\cdot l})_p = [D]_{n\times p\times r} \\ (A_{\cdot lm})_n & & (B_{lm})_1 & \end{array} \tag{2.4$'$}$$

Несколько дополнительных комментариев:

1. Данное определение может быть обобщено на случай p-арного произведения p-мерных матриц, однако данное направление развития исследований отложим до дальнейших публикаций.

2. В рамках операции $\mathcal{P}$ в представлении (2.4′) вектор-матрицы-сомножители имеют фиксированное, раз и навсегда заданное и определяемое их положением направление: первая - (i), вторая - (k), третья - (j).

3. Видно, что векторные индексы i, k, j вектор-матриц-множителей, соответственно, A, B, C в (2.4′) могут быть $\forall n, s, r \in \mathbb{N}$. Значит, $\mathcal{P}$ определена на элементах множества $\mathcal{M}^{(3)}$, а не только $\mathcal{M}^{(3,n)}$, хотя выполняется и в случае $if\ n = s = r$, поскольку $\mathcal{M}^{(3,n)} \subset \mathcal{M}^{(3)}$.

4. Операция $\mathcal{P}$ является триэлементной. Сравним операцию $\mathcal{P}$ с вариантом Р.Кернера явно:
$$D_{ijk} = \sum_{l,m} A_{ilm} B_{lmk} C_{mjl} \quad \text{versus} \quad E_{ijk} = \sum_{p,q,r} A_{ipq} B_{pjr} C_{qrk}.$$
Видно, что первая – триэлементная, в отличии от второй.

3 Тернарная алгебра кубических матриц $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}, [\mathcal{P}] \rangle$ и её свойства

Рассмотрим ключевые свойства алгебры $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}, [\mathcal{P}] \rangle$ с операцией $\mathcal{P}$. Для начала убедимся, что это действительно алгебра, а затем последовательно рассмотрим её свойства.

3.1 Алгебра $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}, [\mathcal{P}] \rangle$

Чтобы множество $\mathcal{M}^{(3,n)}$ было кольцом, необходимо выполнение на множестве $\mathcal{M}^{(3,n)}$ сложения, умножения на число и дистрибутивности $\mathcal{P}$ относительно сложения.

- Сложение трёхмерных матриц определено в [1, стр. 48].
- Умножение на число выполняется – формула:
$$\alpha[ABC] = [(\alpha A)BC] = [A(\alpha B)C] = [AB(\alpha C)], \tag{3.1}$$
(3.1) является следствием формулы (2.4) и соответствующего бинарного свойства.
- Дистрибутивность относительно сложения выполняется, так как формулы:
$$[(A + B)CD] = [ACD] + [BCD], \tag{3.2a}$$
$$[A(B + C)D] = [ABD] + [ACD], \tag{3.2b}$$
$$[AB(C + D)] = [ABC] + [ABD]; \tag{3.2c}$$
также являются следствиями формулы (2.4) и соответствующего бинарного свойства и потому справедливы.

Таким образом, $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}, [\mathcal{P}] \rangle$ является тернарным кольцом и $\Rightarrow$ тернарной алгеброй. Покажем далее, что алгебра $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}, [\mathcal{P}] \rangle$ содержит нейтральные элементы.

3.2 Нейтральные (тождественные) отображения специального подмножества матриц $\mathcal{M}^{(s(\square,\square),n)} \subset \mathcal{M}^{(3)}$ в себя и единичные элементы алгебры $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}, [\mathcal{P}] \rangle$

Определение 3.1. Подмножество $\mathcal{M}^{(3)}$ такое, что образующие его вектор-матрицы имеют произвольный индекс s и такие элементарные сечения, что $\mathbb{N}_{\bar{s}_1} = \mathbb{N}_{\bar{s}_2} = \mathbb{N}_n$[1], то есть в

[1] $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ читаются как "не-эс-один" и "не-эс-два".

виде квадратных матриц размера $n \times n$, назовём подмножеством *матриц-брусьев* и обозначим $\mathcal{M}^{(s(\square,\square),n)} \subset \mathcal{M}^{(3)}$. В качестве $s, \bar{s}_1, \bar{s}_2$ берутся индексы i, j, k. При $s = i$ это – *брус-столбец*, обозначенный $\mathcal{M}^{(i(j,k),n)}$, при $s = j$ – *брус-строка* – $\mathcal{M}^{(j(i,k),n)}$, $s = k$ – *брус-балка* – $\mathcal{M}^{(k(i,j),n)}$. Очевидно, что:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{M}^{(s(\square,\square),n)} = \mathcal{M}^{(i(j,k),n)} \cup \mathcal{M}^{(j(i,k),n)} \cup \mathcal{M}^{(k(i,j),n)} \\ \mathcal{M}^{(3,n)} = \mathcal{M}^{(i(j,k),n)} \cap \mathcal{M}^{(j(i,k),n)} \cap \mathcal{M}^{(k(i,j),n)} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{M}^{(3,n)} \subset \mathcal{M}^{(s(\square,\square),n)}. \tag{3.3}$$

Определение 3.2. Подмножество $\mathcal{M}^{(s(\square,\square),n)}$ такое, что образующие его вектор-матрицы в качестве элементарных сечений имеют диагональные квадратные матрицы называется множеством *главных 2-диагональных 3-матриц направления* s и обозначается $\mathcal{D}^{\left(s\left(\overrightarrow{\bar{s}_1},\overrightarrow{\bar{s}_2}\right),n\right)}$, а множество, элементарные сечения вектор-матриц которого представляют собой побочно-диагональные матрицы, называется множеством *побочных 2-диагональных 3-матриц направления* s и обозначается $\mathcal{D}^{\left(s\left(\overrightarrow{\bar{s}_1},\overleftarrow{\bar{s}_2}\right),n\right)}$. Так же, как и в определении 3.1, каждое состоит из трёх подмножеств, пересечение которых даёт подмножество диагональных кубических матриц:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{D}^{\left(s\left(\overrightarrow{\bar{s}_1},\overrightarrow{\bar{s}_2}\right),n\right)} = \mathcal{D}^{\left(i\left(\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right),n\right)} \cup \mathcal{D}^{\left(j\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}\right),n\right)} \cup \mathcal{D}^{\left(k\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right),n\right)}, \\ \mathcal{D}^{\left(s_{cub}\left(\overrightarrow{\bar{s}_1},\overrightarrow{\bar{s}_2}\right),n\right)} = \mathcal{D}^{\left(i\left(\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right),n\right)} \cap \mathcal{D}^{\left(j\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}\right),n\right)} \cap \mathcal{D}^{\left(k\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right),n\right)} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{D}^{\left(s_{cub}\left(\overrightarrow{\bar{s}_1},\overrightarrow{\bar{s}_2}\right),n\right)} \subset \mathcal{D}^{\left(s\left(\overrightarrow{\bar{s}_1},\overrightarrow{\bar{s}_2}\right),n\right)};$$
$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{D}^{\left(s\left(\overrightarrow{\bar{s}_1},\overleftarrow{\bar{s}_2}\right),n\right)} = \mathcal{D}^{\left(i\left(\overrightarrow{j},\overleftarrow{k}\right),n\right)} \cup \mathcal{D}^{\left(j\left(\overrightarrow{i},\overleftarrow{k}\right),n\right)} \cup \mathcal{D}^{\left(k\left(\overrightarrow{i},\overleftarrow{j}\right),n\right)}, \\ \mathcal{D}^{\left(s_{cub}\left(\overrightarrow{\bar{s}_1},\overleftarrow{\bar{s}_2}\right),n\right)} = \mathcal{D}^{\left(i\left(\overrightarrow{j},\overleftarrow{k}\right),n\right)} \cap \mathcal{D}^{\left(j\left(\overrightarrow{i},\overleftarrow{k}\right),n\right)} \cap \mathcal{D}^{\left(k\left(\overrightarrow{i},\overleftarrow{j}\right),n\right)} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{D}^{\left(s_{cub}\left(\overrightarrow{\bar{s}_1},\overleftarrow{\bar{s}_2}\right),n\right)} \subset \mathcal{D}^{\left(s\left(\overrightarrow{\bar{s}_1},\overleftarrow{\bar{s}_2}\right),n\right)}. \tag{3.4}$$

Определение 3.3. Назовём множество $\mathcal{D}^{(\circ,n)} \subset \mathcal{M}^{(3,n)}$ множеством *главных 1-диагональных 3-матриц*, таких, что

$$\mathcal{M}^{(3,n)} \supset \mathcal{D}^{(\circ,n)} \ni M_{ijk} : m_{ijk} \begin{cases} \neq 0, \text{ if } i = j = k, \\ = 0, \text{ if } i \neq j \neq k \neq i. \end{cases}$$

Определение 3.4. Определим кубическую вектор-матрицу $E^{[i]} \in \mathcal{D}^{\left(i_{cub}\left(\overrightarrow{j},\overleftarrow{k}\right),n\right)}$ такую, что все её элементарные сечения представляют собой двумерную единичную матрицу. Тогда отображение, переводящее множество $\mathcal{M}^{(i(j,k),n)}$ в себя: $id^l_{\mathcal{M}^{(i(j,k),n)}}(M^{(i(j,k),n)}) = M^{(i(j,k),n)}$ парой матриц $E^{[i]}$, стоящих справа от отображаемого объекта, назовём *левым тождественным или нейтральным отображением.* Оно действует с точностью до переобозначения индексов отображаемого объекта следующим образом:

$$M_{ilm} E^{[i]}_{lmk} E^{[i]}_{mjl} = M_{ijk},\ M_{ilm} \equiv M_{ijk} \in \mathcal{M}^{(i(j,k),n)}. \tag{3.5}$$

Матрицу $E^{[i]}$ назовём *единичной матрицей направления* i в алгебре $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}, [\mathcal{P}] \rangle$ вследствие (3.3).

Пример 3.1. Рассмотрим пример. Пусть $A_{ijk} \in \mathcal{M}^{(\{i\in\mathbb{N}_3\}(j,k),2)}, E^l \in \mathcal{D}^{\left(i_{cub}\left(\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right),2\right)}$. Тогда:

$$\begin{array}{cccc} & a_{112} & & a_{122} \\ a_{111} & & a_{121} & \\ & a_{212} & & a_{222} \\ a_{211} & & a_{221} & \\ & a_{312} & & a_{322} \\ a_{311} & & a_{321} & \end{array} \begin{array}{cccc} & 0 & & 1 \\ 1 & & 0 & \\ & 0 & & 1 \\ 1 & & 0 & \end{array} \begin{array}{cccc} & 0 & & 1 \\ 1 & & 0 & \\ & 0 & & 1 \\ 1 & & 0 & \end{array} = \begin{array}{cccc} & a_{112} & & a_{122} \\ a_{111} & & a_{121} & \\ & a_{212} & & a_{222} \\ a_{211} & & a_{221} & \\ & a_{312} & & a_{322} \\ a_{311} & & a_{321} & \end{array} \tag{3.6}$$

Рассчитаем в (3.6) элементы, допустим, матричного сечения $i = 3$ явно и убедимся в справедливости равенства:

$$\begin{cases} a'_{311} = a_{311} \cdot 1 \cdot 1 + a_{321} \cdot 1 \cdot 0 + a_{312} \cdot 0 \cdot 1 + a_{322} \cdot 0 \cdot 0 = a_{311}, \\ a'_{321} = a_{311} \cdot 1 \cdot 0 + a_{321} \cdot 1 \cdot 1 + a_{312} \cdot 0 \cdot 0 + a_{322} \cdot 0 \cdot 1 = a_{321}, \\ a'_{312} = a_{311} \cdot 0 \cdot 1 + a_{321} \cdot 0 \cdot 0 + a_{312} \cdot 1 \cdot 1 + a_{322} \cdot 1 \cdot 0 = a_{312}, \\ a'_{322} = a_{311} \cdot 0 \cdot 0 + a_{321} \cdot 0 \cdot 1 + a_{312} \cdot 1 \cdot 0 + a_{322} \cdot 1 \cdot 1 = a_{322}, \end{cases} \tag{3.7}$$

Аналогичные формулы справедливы для $i = 1, 2$.

Определение 3.5. Определим кубическую вектор-матрицу $E^{[k]} \in \mathcal{D}^{\left(k_{cub}\left(\overrightarrow{i}, \overleftarrow{j}\right), n\right)}$ такую, что все её элементарные сечения представляют собой двумерную единичную матрицу. Тогда отображение, переводящеее множество $\mathcal{M}^{(k(i,j),n)}$ в себя: $id^c_{\mathcal{M}^{(k(i,j),n)}}(M^{(k(i,j),n)}) = M^{(k(i,j),n)}$ парой матриц $E^{[k]}$, стоящих слева и справа от отображаемого объекта, назовём *центральным тождественным или нейтральным отображением*. Оно действует с точностью до переобозначения индексов отображаемого объекта следующим образом:

$$E^{[k]}_{ilm} M_{lmk} E^{[k]}_{mjl} = M_{ijk},\ M_{lmk} \equiv M_{ijk} \in \mathcal{M}^{(k(i,j),n)}. \tag{3.8}$$

Матрицу $E^{[k]}$ назовём *единичной матрицей направления* k в алгебре $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}, [\mathcal{P}] \rangle$.

Определение 3.6. Определим кубическую вектор-матрицу $E^{[j]} \in \mathcal{D}^{\left(j_{cub}\left(\overrightarrow{i}, \overleftarrow{k}\right), n\right)}$ такую, что все её элементарные сечения представляют собой двумерную единичную матрицу. Тогда отображение, переводящеее множество $\mathcal{M}^{(j(i,k),n)}$ в себя: $id^r_{\mathcal{M}^{(j(i,k),n)}}(M^{(j(i,k),n)}) = M^{(j(i,k),n)}$ парой матриц $E^{[j]}$, стоящих слева от отображаемого объекта, назовём *правым тождественным или нейтральным отображением*. Оно действует с точностью до переобозначения индексов отображаемого объекта следующим образом:

$$E^{[j]}_{ilm} E^{[j]}_{lmk} M_{mjl} = M_{ijk},\ M_{mjl} \equiv M_{ijk} \in \mathcal{M}^{(j(i,k),n)}. \tag{3.9}$$

Матрицу $E^{[j]}$ назовём *единичной матрицей направления* j в алгебре $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}, [\mathcal{P}] \rangle$.

Ясно, что все единичные матрицы могут быть переведены друг в друга отображением σ транспонирования согласно циклической подстановке индексов (i, j, k) [1, стр. 17]:

$$\begin{cases} \sigma(E^{[i]})^{(i,j,k)} : E^{[i]}_{ijk} \to (E^{[i]}_{ijk})^{(i,j,k)} = E^{[k]}_{i\to j'\, j\to k'\, k\to i'} = E^{[k]}_{i'j'k'} \\ \sigma(E^{[k]})^{(i,j,k)} : E^{[k]}_{ijk} \to (E^{[k]}_{ijk})^{(i,j,k)} = E^{[j]}_{j\to k'\, k\to i'\, i\to j'} = E^{[j]}_{i'j'k'} \\ \sigma(E^{[j]})^{(i,j,k)} : E^{[j]}_{ijk} \to (E^{[j]}_{ijk})^{(i,j,k)} = E^{[i]}_{k\to i'\, i\to j'\, j\to k'} = E^{[i]}_{i'j'k'} \end{cases} \tag{3.10}$$

Поскольку $E^{[i]}, E^{[i]}, E^{[i]}_{ijk} \in \mathcal{M}^{(3,n)}$, а значит, также переводятся в себя отображениями id^l, id^c, id^r, соответствующие последовательности из этих матриц являются нейтральными, а сами матрицы – идемпотенты алгебры $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}, [\mathcal{P}] \rangle$, также равные произведениям $\mathcal{P}(\sigma(E^{\phi} E^{\phi} E^{\bar{\phi}}))$: рассмотрим частные случаи произведений единичных матриц с точностью до перенумеровски индексов:

$$\begin{aligned} &\underline{E^{[i]} E^{[i]} E^{[i]}} = E^{[i]} E^{[i]} E^{[j]} = E^{[i]} E^{[k]} E^{[i]} = E^{[k]} E^{[k]} E^{[i]} = E^{[j]} E^{[i]} E^{[j]} = \underline{E^{[i]}}, \\ &\underline{E^{[k]} E^{[k]} E^{[k]}} = E^{[k]} E^{[i]} E^{[i]} = E^{[k]} E^{[k]} E^{[j]} = E^{[k]} E^{[i]} E^{[k]} = E^{[j]} E^{[k]} E^{[k]} = \underline{E^{[k]}}, \\ &\underline{E^{[j]} E^{[j]} E^{[j]}} = E^{[j]} E^{[i]} E^{[i]} = E^{[j]} E^{[k]} E^{[j]} = E^{[j]} E^{[j]} E^{[i]} = E^{[k]} E^{[j]} E^{[j]} = \underline{E^{[j]}}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Перемножение трёх единичных матриц:

1. Циклические перестановки единичных матриц:

$$E^{[i]}E^{[k]}E^{[j]} = E^{[i]}, \tag{3.12a}$$
$$E^{[j]}E^{[i]}E^{[k]} = E^{[k]}, \tag{3.12b}$$
$$E^{[k]}E^{[j]}E^{[i]} = E^{[j]}. \tag{3.12c}$$

2. Контрциклические перестановки единичных матриц:

$$E^{[k]}E^{[i]}E^{[j]} = E^{[j]}E^{[k]}E^{[i]} = n \cdot diag\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix} = n \cdot E^{\circ} \in \mathcal{D}^{\circ}, \tag{3.13a}$$
$$E^{[i]}E^{[j]}E^{[k]} = n \cdot \mathbb{I} = n \cdot \{\, A_{ijk} \mid a_{ijk} = 1, \, \forall i, j, k \,\}. \tag{3.13b}$$

3.3 Структурные особенности $\mathcal{P}$-произведения кубических матриц $\mathcal{M}^{(3,n)}$ с $n \geqslant 3$

В [5, стр. 31-32] предложен ещё один вариант тернарного произведения кубических матриц. В его основе лежит различение элементов кубической матрицы размерности $3\times3\times3$ по трём группам, в зависимости от наличия повторяющихся индексов: элементы типа $a_{\phi\phi\phi}$, элементы типа $a_{\sigma(\phi\psi\psi)}$, элементы типа $a_{\sigma(\phi\psi\omega)}$. В [5, стр. 31-32] матрицы, состоящие только из элементов каждой из трёх групп образуют замкнутые подалгебры в $\mathcal{M}^{(3,3)}$. Рассмотрим данный вопрос применительно к алгебре $\langle \mathcal{M}^{(3,3)}, [\mathcal{P}] \rangle$.

1. Матрицы множества $\mathcal{D}^{(\circ,3)}$, состоящие из элементов типа $a_{\phi\phi\phi}$, образуют подалгебру $\langle \mathcal{D}^{(\circ,3)}, [\mathcal{P}] \rangle \subset \langle \mathcal{M}^{(3,3)}_{ijk}, [\mathcal{P}] \rangle$ относительно $\mathcal{P}$. Действительно,

$$A_{ilm}B_{lmk}C_{mjl} = D_{i'j'k'} = diag\left((a_{111}b_{111}c_{111})_{1'1'1'} \quad \dots \quad (a_{nnn}b_{nnn}c_{nnn})_{n'n'n'} \right), \tag{3.14}$$

то есть множество $\mathcal{D}^{(\circ,3)} \subset \mathcal{M}^{(3,3)}_{ijk}$ замкнуто относительно $\mathcal{P}$-произведения. Далее, $\exists$ нейтральный элемент (см. 3.13a), $E^{(\circ,3)} = \begin{cases} e_{111} = e_{222} = e_{333} = 1, \\ 0, \text{в других случаях;} \end{cases}$. Значит множество $\mathcal{D}^{(\circ,3)} \subset \mathcal{M}^{(3,3)}$ относительно $\mathcal{P}$ образует тернарную подалгебру $\langle \mathcal{D}^{(\circ,3)}, [\mathcal{P}] \rangle$ с единицей $E^{(\circ,3)}$. (3.14) совпадает с законом перемножения для элементов типа $a_{\phi\phi\phi}$, введённым в [5, стр. 31].

2. Если матрицы $A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}, \dots$ состоят из элементов типа $a_{\sigma(\phi\psi\psi)}$, значит, они принадлежат дополнению $A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}, \dots \in \mathcal{D}^{\left(s\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2\right),3\right)} \backslash \mathcal{D}^{(\circ,3)}$ (см. определение 3.3 на с. 162). Выпишем $A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}$, а затем поэлеметно вычислим результат D_{ijk} их $\mathcal{P}$-произведения:

$$A = \begin{array}{ccc} a_{113} & 0 & a_{133} \\ a_{112} & a_{122} & 0 \\ 0 & a_{121} & a_{131} \\ 0 & a_{223} & a_{233} \\ a_{212} & 0 & a_{232} \\ a_{211} & a_{221} & 0 \\ a_{313} & a_{323} & 0 \\ 0 & a_{322} & a_{332} \\ a_{311} & 0 & a_{331} \end{array}; \quad B = \begin{array}{ccc} b_{113} & 0 & b_{133} \\ b_{112} & b_{122} & 0 \\ 0 & b_{121} & b_{131} \\ 0 & b_{223} & b_{233} \\ b_{212} & 0 & b_{232} \\ b_{211} & b_{221} & 0 \\ b_{313} & b_{323} & 0 \\ 0 & b_{322} & b_{332} \\ b_{311} & 0 & b_{331} \end{array}; \quad C = \begin{array}{ccc} c_{113} & 0 & c_{133} \\ c_{112} & c_{122} & 0 \\ 0 & c_{121} & c_{131} \\ 0 & c_{223} & c_{233} \\ c_{212} & 0 & c_{232} \\ c_{211} & c_{221} & 0 \\ c_{313} & c_{323} & 0 \\ 0 & c_{322} & c_{332} \\ c_{311} & 0 & c_{331} \end{array} \tag{3.15}$$

В (3.15) можно наглядно убедиться, что все ненулевые элементы принадлежат трём главным диагональным сечениям указанных матриц. Теперь рассмотрим их $\mathcal{P}$-произведение:

$$\begin{aligned}
d_{111} &= a_{121}b_{211}c_{112} + a_{131}b_{311}c_{113} + a_{112}b_{121}c_{211} + a_{122}b_{221}c_{212} + a_{113}b_{131}c_{311} + a_{133}b_{331}c_{313} \\
d_{222} &= a_{211}b_{112}c_{121} + a_{221}b_{212}c_{122} + a_{212}b_{122}c_{221} + a_{232}b_{322}c_{223} + a_{223}b_{232}c_{322} + a_{233}b_{332}c_{323} \\
d_{333} &= a_{311}b_{113}c_{131} + a_{331}b_{313}c_{133} + a_{322}b_{223}c_{232} + a_{332}b_{232}c_{233} + a_{313}b_{133}c_{331} + a_{323}b_{233}c_{332}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{121} &= a_{121}b_{211}c_{122} + a_{112}b_{121}c_{211} + a_{133}b_{331}c_{313} & d_{131} &= a_{131}b_{311}c_{133} + a_{122}b_{221}c_{232} + a_{113}b_{131}c_{331} \\
d_{211} &= a_{221}b_{211}c_{122} + a_{212}b_{121}c_{211} + a_{233}b_{331}c_{313} & d_{221} &= a_{221}b_{211}c_{122} + a_{212}b_{121}c_{221} + a_{233}b_{331}c_{323} \\
d_{311} &= a_{331}b_{311}c_{113} + a_{322}b_{221}c_{212} + a_{313}b_{131}c_{113} & d_{331} &= a_{331}b_{311}c_{113} + a_{332}b_{221}c_{233} + a_{313}b_{131}c_{331} \\
d_{112} &= a_{121}b_{212}c_{112} + a_{112}b_{122}c_{211} + a_{133}b_{332}c_{313} & d_{122} &= a_{121}b_{212}c_{122} + a_{112}b_{122}c_{221} + a_{133}b_{332}c_{323} \\
d_{212} &= a_{221}b_{212}c_{112} + a_{212}b_{122}c_{211} + a_{233}b_{332}c_{313} & d_{232} &= a_{211}b_{112}c_{131} + a_{232}b_{322}c_{233} + a_{223}b_{232}c_{332} \\
d_{322} &= a_{311}b_{112}c_{121} + a_{332}b_{322}c_{223} + a_{323}b_{232}c_{223} & d_{332} &= a_{311}b_{112}c_{131} + a_{332}b_{322}c_{233} + a_{323}b_{232}c_{332} \\
d_{113} &= a_{131}b_{313}c_{113} + a_{122}b_{223}c_{212} + a_{113}b_{133}c_{311} & d_{133} &= a_{131}b_{313}c_{133} + a_{122}b_{223}c_{232} + a_{113}b_{133}c_{331} \\
d_{223} &= a_{211}b_{113}c_{121} + a_{232}b_{323}c_{223} + a_{223}b_{233}c_{322} & d_{233} &= a_{211}b_{113}c_{131} + a_{232}b_{323}c_{233} + a_{223}b_{233}c_{332} \\
d_{313} &= a_{331}b_{311}c_{113} + a_{322}b_{221}c_{212} + a_{313}b_{131}c_{311} & d_{323} &= a_{311}b_{112}c_{131} + a_{332}b_{322}c_{233} + a_{323}b_{232}c_{332} \\
& d_{231} = d_{321} = d_{132} = d_{312} = d_{123} = d_{213} = 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Вычисленные значения элементов (3.16) результирующей матрицы D_{ijk} однозначно демонстрируют незамкнутость дополнения $\mathcal{D}^{\left(s\left(\vec{\bar{s}}_1,\vec{\bar{s}}_2\right),3\right)} \backslash \mathcal{D}^{(\circ,3)}$ относительно $\mathcal{P}$-произведения, а значит элементы данного множества не образуют подалгебры относительно операции $\mathcal{P}$ в $\langle \mathcal{M}^{(3,3)}_{ijk}, [\mathcal{P}] \rangle$. Это можно сравнить с незамкнутостью множества векторных кватернионов относительно кватернiононного произведения (например, см. [2, стр. 1-2]) – в результате появляется скалярная часть.

3. Рассмотрим произведение трёх матриц $A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}$, $3\times3\times3$, состоящих из элементов типа $a_{\sigma(\phi\psi\omega)}$:

$$\begin{aligned}
& A_{ilm}B_{lmk}C_{mjl} = D_{ijk} = \\
& diag\left(a_{132}b_{321}c_{213} + a_{123}b_{231}c_{312} \quad a_{231}b_{312}c_{123} + a_{213}b_{132}c_{321} \quad a_{321}b_{213}c_{132} + a_{312}b_{123}c_{231}\right)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Так как получается диагональная матрица D_{ijk}, матрицы из элементов типа $a_{\sigma(\phi\psi\omega)}$ не образуют замкнутого подмножества.

3.4 Транспонированное $\mathcal{P}$-произведение трёхмерных матриц

Известно действие отображения транспонирования на произведение двух двумерных матриц:

$$\sigma(C_{ij} = A_{il}B_{lj}) : (C_{ij})^{(i,j)} = (A_{il}B_{lj})^{(i,j)} = (B_{lj})^{(i,j)}(A_{il})^{(i,j)} = B_{jl}A_{li} = C_{ji} = (C_{ij})^{(i,j)}. \tag{3.18}$$

Соответственно, возникает вопрос, как действует транспонирование на результат $\mathcal{P}$-произведения трёх трёхмерных матриц? Для этого применим использованную выше (3.10 на с. 163) операцию $\sigma^{(i,j,k)}$ транспонирования относительно циклической подстановки (i,j,k) к произведению трёх матриц. При этом рассмотрим как *однократную* или *прямую* подстановку $(i,j,k) : i \to j', j \to k', k \to i'$, так и *двукратную* или *обратную* подстановку $2(i,j,k) = -(i,j,k) : i \to k', j \to i', k \to j'$:

$$\sigma^{(i,j,k)}(D_{ijk} = A_{ilm}B_{lmk}C_{mjl}) : (A_{ilm}B_{lmk}C_{mjl})^{(i,j,k)} = (B_{lmk})^{(i,j,k)}(C_{mjl})^{(i,j,k)}(A_{ilm})^{(i,j,k)} = \\ = B_{klm}C_{lmj}A_{mil} = D_{kij} = (D_{ijk})^{(i,j,k)} \Rightarrow D^{(i,j,k)} = -(A, B, C); \tag{3.19a}$$

$$\sigma^{-(i,j,k)}(D_{ijk} = A_{ilm}B_{lmk}C_{mjl}) : (A_{ilm}B_{lmk}C_{mjl})^{-(i,j,k)} = (C_{mjl})^{-(i,j,k)}(A_{ilm})^{-(i,j,k)}(B_{lmk})^{-(i,j,k)} = \\ = C_{jlm}A_{lmi}B_{mkl} = D_{jki} = (D_{ijk})^{-(i,j,k)} \Rightarrow D^{-(i,j,k)} = (A, B, C). \tag{3.19b}$$

Из уравнений (3.19) видно, что транспонированое относительно цикличекой подстановки индексов $\mathcal{P}$-произведения трёх трёхмерных матриц равно произведению транспонированных матриц, взятых в обратной подстановке к данной.

3.5 Тернарная коммутативность или *тернутативность*

Данный вопрос достаточно подробно рассморен в работе [24]. Тернарный коммутатор или, по терминологии авторов, *тернутатор* определён в [24], как альтернированная сумма произведений трёх операторов. В настоящей статье речь идёт просто о матрицах, но в остльном данное определение вполне можно использовать. Итак:

Определение 3.7. Произведение трёх кубических матриц $A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk} \in \mathcal{M}^{(3,n)}_{ijk}$ назовём *тернарно-коммутативным или тернутативным*, если их *тернутатор*, то есть альтернированная сумма всевозможных произведений равна 0:

$$[A_{ilm}B_{lmk}C_{mjl}] = A_{ilm}B_{lmk}C_{mjl} + B_{ilm}C_{lmk}A_{mjl} + C_{ilm}A_{lmk}B_{mjl} - A_{ilm}C_{lmk}B_{mjl} - \\ - C_{ilm}B_{lmk}A_{mjl} - B_{ilm}A_{lmk}C_{mjl} = 0. \tag{3.20}$$

В отношении данного свойства выделим два важных обстоятельства:

1. Алгебра $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}_{ijk}, [\mathcal{P}] \rangle$ не является тернутативной. Доказательством тому может служить рассмотрение частного случая – тернутатора $\mathcal{P}$-произведений трёх единичных матриц - подставим в (3.20) результаты с 3.12 по 3.13 на с. 164:

$$[E^{[i]}E^{[k]}E^{[j]}] = E^{[i]}E^{[k]}E^{[j]} + E^{[j]}E^{[i]}E^{[k]} + E^{[k]}E^{[j]}E^{[i]} - E^{[k]}E^{[i]}E^{[j]} \\ - E^{[j]}E^{[k]}E^{[i]} - E^{[i]}E^{[j]}E^{[k]} = E^{[i]} + E^{[k]} + E^{[j]} - nE^{(\circ,n)} - nE^{(\circ,n)} - n\mathbb{I} = \\ = \left[A_{ijk} \mid a_{ijk} = \begin{cases} 3(1-n), \text{ if } i=j=k \\ 0, \text{ if } i \neq j \neq k \neq i \end{cases} \right] + \left[B_{ijk} \mid b_{ijk} = \begin{cases} 1-n, \text{ if } b_{ijk} \in \mathcal{D}^{\left(s_{cub}\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2\right), n\right)} \setminus \mathcal{D}^{(\circ,n)} \\ 0, \text{ if } b_{ijk} \notin \mathcal{D}^{\left(s_{cub}\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2\right), n\right)} \setminus \mathcal{D}^{(\circ,n)} \end{cases} \right] + \\ + \left[C_{ijk} \mid c_{ijk} = \begin{cases} -n, \ c_{ijk} \in c_{\sigma(\phi\psi\omega)} \\ 0, \ c_{ijk} \notin c_{\sigma(\phi\psi\omega)} \end{cases} \right] = D_{ijk} \neq 0 \tag{3.21}$$

   Иначе говоря, в (3.21) элементы трёх типов различаются, но не равны 0: $d_{\phi\phi\phi} = a_{ijk} = 3(1-n)$, $d_{\sigma(\phi\psi\psi)} = b_{ijk} = 1-n$, $d_{\sigma(\phi\psi\omega)} = c_{ijk} = -n$. Поскольку в данном частном случае тернутативность не выполняется, алгебра $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}, [\mathcal{P}] \rangle$ не является тернарно-коммутативной или тернутативной.

2. Подалгебра $\langle \mathcal{D}^{(\circ,n)}, [\mathcal{P}] \rangle$ являетстя тернутативной. Действительно, как следует из (3.14), от перестановки множителей результат не изменится, а значит тернутатор (3.20) будет равняться 0.

3.6 Тернарная ассоциативность

Тернарную ассоциативность (которую, по аналогии с тернарной коммутативностью можно также обозначить новым словом – *терсоциативность*) можно определить разными способами.

1. Способ, указанный в [14, стр. 264-265], через равенство 0 ассоциатора. Последний вводится как альтернированная сумма *чётного числа слагаемых.* Такой способ возможен, однако в данном случае представляется избыточным, поскольку от выбора способа определения в алгебре $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}, [\mathcal{P}] \rangle$ результат не меняется.

   Возьмём 7 согласованных между собой кубических матриц $A_{ijk}B_{ijk}C_{ijk}D_{ijk}E_{ijk}F_{ijk}G_{ijk} \in \mathcal{M}^{(3,n)}$. Ассоциатором можно было бы назвать следующую альтернированную сумму 12 слагаемых (инедексы опускаем):

$$\begin{aligned}
&\{ABCDEFG\} = \{-(-1)^{I_{int}+I_{mid}}(ABCDEFG)\} = \\
&= \underbrace{-(-1)^{1+1}((ABC)DE)FG}_{\#1} \underbrace{-(-1)^{2+1}(A(BCD)E)FG}_{\#2} \underbrace{-(-1)^{3+1}(AB(CDE))FG}_{\#3} - \\
&\underbrace{-(-1)^{2+3}A(BCD)(EFG)}_{\#4} \underbrace{-(-1)^{1+2}A((BCD)EF)G}_{\#5} \underbrace{-(-1)^{2+2}A(B(CDE)F)G}_{\#6} - \\
&\underbrace{-(-1)^{3+2}A(BC(DEF))G}_{\#7} \underbrace{-(-1)^{1+3}(ABC)D(EFG)}_{\#8} \underbrace{-(-1)^{1+3}AB((CDE)FG)}_{\#9} - \\
&\underbrace{-(-1)^{2+3}AB(C(DEF)G)}_{\#10} \underbrace{-(-1)^{3+3}AB(CD(EFG))}_{\#11} \underbrace{-(-1)^{1+2}(ABC)(DEF)G}_{\#12} = 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

   I_{int} в (3.22) – это индекс внутренней операции, равный её месту в объемлющей, I_{mid} – индекс средней операции, также равный её месту в объемлющей. Знак "$-$" перед слагаемыми обусловлен требованием соответствия с бинарным ассоциатором, определённым в [14, стр. 264, формула (1)].

   Если последний переписать в использованных обозначениях, получим:

$$\{ABC\} = \{-(-1)^{I_{int}}(ABC)\} = -(-1)^1(AB)C - (-1)^2A(BC) = (AB)C - A(BC) = 0.$$

   Также стоит отметить, что число слагаемых и чередование знаков позволяет поделить полный ассоциатор в (3.22) на три частичных: левый, центральный и правый (под этими ассоциаторами указаны номера слагаемых из (3.22), из которых они состоят):

$$\{ABCDEFG\} = \underbrace{\{ABCDEFG\}^l}_{\#1+\#2+\#3+\#4} + \underbrace{\{ABCDEFG\}^c}_{\#5+\#6+\#7+\#8} + \underbrace{\{ABCDEFG\}^r}_{\#9+\#10+\#11+\#12} \tag{3.23}$$

2. Однако ниже будем пользоваться более общеупотребимой и не такой громоздкой формулировкой ассоциативности. Именно такой способ задания ассоциативности используется в [26, стр. 7] и, более явно, в [29, стр. 3, формулы (2.1)-(2.4)] (перестановочные варианты, как в той же работе, формулы (2.5) - (2.7), или в [31, стр. 2] не рассматриваются). Следуя источникам, введём определение.

Определение 3.8. Тернарную алгебру $\langle \mathcal{X}, [\ldots] \rangle$ на множестве объектов $\mathcal{X}$ с тернарной операцией $[\ldots]$ назовём *тернарно ассоциативной или терсоциативной*, если выполнена следующая цепочка равенств:

$$[X_1X_2X_3]X_4X_5 = X_1[X_2X_3X_4]X_5 = X_1X_2[X_3X_4X_5]; \; X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \in \mathcal{X} \tag{3.24}$$

Алгебру $\langle \mathcal{X}, [\ldots] \rangle$ будем называть, соответственно, лево-, центрально- и правоассоциативной (по месту опущенного равенства из (3.24)), если выполняется только одно из равенств:

$$X_1[X_2X_3X_4]X_5 = X_1X_2[X_3X_4X_5], \tag{3.25a}$$
$$[X_1X_2X_3]X_4X_5 = X_1X_2[X_3X_4X_5] \tag{3.25b}$$
$$[X_1X_2X_3]X_4X_5 = X_1[X_2X_3X_4]X_5. \tag{3.25c}$$

Посмотрим с точки зрения данного определения на алгебру $\langle \mathcal{M}^{(3)}_{ijk}, [\mathcal{P}] \rangle$ и ряд её подалгебр.

Алгебра $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}_{ijk}, [\mathcal{P}] \rangle$ не являются ассоциативной и в данном случае не выделяется из ряда алгебр, порождаемых другими видами тернарных операций на множестве $\mathcal{M}^{(3,n)}_{ijk}$. В частности, и В.М. Чернов [25, стр. 37] подразумевает (вследствие неассоциативности "умножения Цассенхауза"), а Р. Кернер [26, стр. 7] прямо отмечает, что вводимые ими тернарные операции не предполагают ассоциативности. В том, что аналогичный вывод справедлив и для алгебры $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}, [\mathcal{P}] \rangle$ убедимся с помощью численного примера.

Пример 3.2. Возьмём пять произвольных невырожденных двумерных матриц, необходимых ниже для расчёта по формуле (3.24): $A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}, D_{ijk}, E_{ijk} \in \mathcal{M}^{(3,2))}_{ijk}$:

$$A = \begin{array}{cccc} & 6 & & 8 \\ 1 & & 4 & \\ & -3 & & 9 \\ 10 & & 5 & \end{array},\ B = \begin{array}{cccc} & 5 & & 12 \\ 8 & & 1 & \\ & 4 & & 3 \\ -5 & & -2 & \end{array},\ C = \begin{array}{cccc} & 1 & & 4 \\ 3 & & 1 & \\ & 15 & & -2 \\ 5 & & 9 & \end{array},\ D = \begin{array}{cccc} & 10 & & 2 \\ -3 & & 1 & \\ & 11 & & 7 \\ 6 & & 5 & \end{array},\ E = \begin{array}{cccc} & 5 & & -8 \\ 1 & & 2 & \\ & 3 & & 2 \\ 17 & & 4 & \end{array}.$$

Проверим справедливо ли основное условие тернарной ассоциативности:

$$\begin{aligned}
(ABC)DE &= \begin{array}{cccc} & 751 & & 669 \\ -206 & & 14 & \\ & 95 & & -248 \\ -70 & & -113 & \end{array} \begin{array}{cccc} & 10 & & 2 \\ -3 & & 1 & \\ & 11 & & 7 \\ 6 & & 5 & \end{array} \begin{array}{cccc} & 5 & & -8 \\ 1 & & 2 & \\ & 3 & & 2 \\ 17 & & 4 & \end{array} = \begin{array}{cccc} & 38293 & & 10022 \\ 23840 & & 10258 & \\ & 6917 & & -744 \\ 2875 & & 48 & \end{array} \\
A(BCD)E &= \begin{array}{cccc} & 6 & & 8 \\ 1 & & 4 & \\ & -3 & & 9 \\ 10 & & 5 & \end{array} \begin{array}{cccc} & -18 & & -30 \\ 1196 & & 815 & \\ & -255 & & -27 \\ 266 & & 174 & \end{array} \begin{array}{cccc} & 5 & & -8 \\ 1 & & 2 & \\ & 3 & & 2 \\ 17 & & 4 & \end{array} = \begin{array}{cccc} & -8826 & & 6972 \\ 93822 & & 16224 & \\ & -5754 & & 9714 \\ -18257 & & 6632 & \end{array} \\
AB(CDE) &= \begin{array}{cccc} & 6 & & 8 \\ 1 & & 4 & \\ & -3 & & 9 \\ 10 & & 5 & \end{array} \begin{array}{cccc} & 5 & & 12 \\ 8 & & 1 & \\ & 4 & & 3 \\ -5 & & -2 & \end{array} \begin{array}{cccc} & 203 & & 36 \\ 98 & & -22 & \\ & 1013 & & -600 \\ 480 & & -422 & \end{array} = \begin{array}{cccc} & 62610 & & -44318 \\ -16604 & & 6172 & \\ & 19031 & & -1388 \\ -16909 & & 9406 & \end{array}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Видно, что в (3.26) $(ABC)DE \neq A(BCD)E \neq AB(CDE) \neq (ABC)DE$, значит алгебра $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}, [\mathcal{P}] \rangle$ не является тернарно ассоциативной.

Далее рассмотрим ряд подалгебр $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}_{ijk}, [\mathcal{P}] \rangle$ и проверим данное свойство в отношении к ним. Порядок рассмотрения - от простого к сложному:

1. Рассмотрим три возможных комбинации произведений пяти единичных матриц, основываясь на результатах с 3.12 по 3.13 на с. 164:

$$\begin{aligned}
&(E^{[i]}E^{[k]}E^{[j]})E^{[j]}E^{[i]} = E^{[i]}E^{[j]}E^{[i]} = \mathbb{I}, \\
&E^{[i]}(E^{[k]}E^{[j]}E^{[j]})E^{[i]} = E^{[i]}E^{[j]}E^{[i]} = \mathbb{I}, \\
&E^{[i]}E^{[k]}(E^{[j]}E^{[j]}E^{[i]}) = E^{[i]}E^{[k]}E^{[j]} = E^{[i]}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Полученный результат свидетельствует о том, что матрицы $(E^{[i,n]}E^{[k,n]}E^{[j,n]}E^{(\circ,n)}), \mathbb{I}$ не образуют замкнутой относительно $\mathcal{P}$ подалгебры вследствие (3.13), операция $\mathcal{P}$ на этих матрицах из-за выполнения только условия (3.25c), является только *правоассоциативной.*

2. Подалгебра $\langle \mathcal{D}^{(\circ,n)}, [\mathcal{P}]\rangle$ обладает свойством полной тернарной ассоциативности или *терсоциативности*, поскольку:

$$\begin{aligned}&(a_{\phi\phi\phi}b_{\phi\phi\phi}c_{\phi\phi\phi})d_{\phi\phi\phi}e_{\phi\phi\phi} = a_{\phi\phi\phi}(b_{\phi\phi\phi}c_{\phi\phi\phi}d_{\phi\phi\phi})e_{\phi\phi\phi} = a_{\phi\phi\phi}b_{\phi\phi\phi}(c_{\phi\phi\phi}d_{\phi\phi\phi}e_{\phi\phi\phi}) = \\ &= a_{\phi\phi\phi}b_{\phi\phi\phi}c_{\phi\phi\phi}d_{\phi\phi\phi}e_{\phi\phi\phi} = f_{\phi\phi\phi},\ \forall\phi\in\mathbb{N}_n\end{aligned} \tag{3.28}$$

Данный результат справедлив для любых пяти матриц множества $\mathcal{D}^{(\circ,n)}$ в целом, поскольку они состоят только из элементов типа $a_{\phi\phi\phi}$.

3. Подалгебры главных 2-диагональных кубических матриц $\mathcal{D}^{\left(s_{cub}\left(\vec{\bar{s}}_1,\vec{\bar{s}}_2\right),n\right)}$ проверяются на соответствие свойству терсоциативности путём вычисления побочных элементов двумерного диагонального сечения. Рассмотрим три пятёрки соответствующих матриц $A^l_{ijk}, B^l_{ijk}, C^l_{ijk}, D^l_{ijk}, E^l_{ijk} \in D^{\left(i_{(cub)}\left(\vec{j},\vec{k}\right),n\right)}$; $A^r_{ijk}, B^r_{ijk}, C^r_{ijk}, D^r_{ijk}, E^r_{ijk} \in \mathcal{D}^{\left(j_{(cub)}\left(\vec{i},\vec{k}\right),n\right)}$; $A^c_{ijk}, B^c_{ijk}, C^c_{ijk}, D^c_{ijk}, E^c_{ijk} \in \mathcal{D}^{\left(k_{(cub)}\left(\vec{i},\vec{j}\right),n\right)}$. Результатом двух тернарных операций на этих пятёрках окажется матрица того же множества. Для доказательства рассчитаем значения её элементов, расположенных не на главной 1-диагонали:

$$\begin{aligned}&g_{122}{=}[\ldots]_{122}d_{222}e_{222}{=}a_{122}b_{222}c_{222}d_{222}e_{222} && g_{211}{=}[\ldots]_{211}d_{111}e_{111}{=}a_{211}b_{111}c_{111}d_{111}e_{111},\\ &g_{122}{=}a_{122}[\ldots]_{222}e_{222}{=}a_{122}b_{222}c_{222}d_{222}e_{222} && g_{211}{=}a_{211}[\ldots]_{111}e_{111}{=}a_{211}b_{111}c_{111}d_{111}e_{111},\\ &g_{122}{=}a_{122}b_{222}[\ldots]_{222}{=}a_{122}b_{222}c_{222}d_{222}e_{222} && g_{211}{=}a_{211}b_{111}[\ldots]_{111}{=}a_{211}b_{111}c_{111}d_{111}e_{111};\end{aligned} \tag{3.29a}$$

$$\begin{aligned}&g_{121}{=}[\ldots]_{111}d_{111}e_{121}{=}a_{111}b_{111}c_{111}d_{111}e_{121} && g_{212}{=}[\ldots]_{222}d_{222}e_{212}{=}a_{222}b_{222}c_{222}d_{222}e_{212},\\ &g_{121}{=}a_{111}[\ldots]_{111}e_{121}{=}a_{111}b_{111}c_{111}d_{111}e_{121} && g_{212}{=}a_{222}[\ldots]_{222}e_{212}{=}a_{222}b_{222}c_{222}d_{222}e_{212},\\ &g_{121}{=}a_{111}b_{111}[\ldots]_{121}{=}a_{111}b_{111}c_{111}d_{111}e_{121} && g_{212}{=}a_{222}b_{222}[\ldots]_{212}{=}a_{222}b_{222}c_{222}d_{222}e_{212};\end{aligned} \tag{3.29b}$$

$$\begin{aligned}&g_{112}{=}[\ldots]_{111}d_{112}e_{111}{=}a_{111}b_{111}c_{111}d_{112}e_{111} && g_{221}{=}[\ldots]_{222}d_{221}e_{222}{=}a_{222}b_{222}c_{222}d_{221}e_{222},\\ &g'_{112}{=}a_{111}[\ldots]_{112}e_{111}{=}a_{111}b_{111}c_{112}d_{111}e_{111} && g'_{221}{=}a_{222}[\ldots]_{221}e_{222}{=}a_{222}b_{222}c_{221}d_{222}e_{222},\\ &g''_{112}{=}a_{111}b_{112}[\ldots]_{111}{=}a_{111}b_{112}c_{111}d_{111}e_{111} && g''_{221}{=}a_{222}b_{221}[\ldots]_{222}{=}a_{222}b_{221}c_{222}d_{222}e_{222}.\end{aligned} \tag{3.29c}$$

- В соответствии с (3.29a) и (3.29b) заключаем, что подалгебры $\langle \mathcal{D}^{\left(i_{cub}\left(\vec{j},\vec{k}\right),2\right)}, [\mathcal{P}]\rangle$, $\langle \mathcal{D}^{\left(k_{cub}\left(\vec{i},\vec{k}\right),2\right)}, [\mathcal{P}]\rangle \subset \langle \mathcal{D}^{\left(s_{cub}\left(\vec{\bar{s}}_1,\vec{\bar{s}}_2\right),2\right)}, [\mathcal{P}]\rangle \subset \langle \mathcal{M}^{(3,2)}, [\mathcal{P}]\rangle$ обладают свойством терсоциативности.
- Подалгебра $\langle \mathcal{D}^{\left(j_{cub}\left(\vec{i},\vec{j}\right),2\right)}, [\mathcal{P}]\rangle \subset \langle \mathcal{D}^{\left(s_{cub}\left(\vec{\bar{s}}_1,\vec{\bar{s}}_2\right),2\right)}, [\mathcal{P}]\rangle \subset \langle \mathcal{M}^{(3,2)}_{ijk}, [\mathcal{P}]\rangle$ в соответствии с (3.29c) таким свойством не обладает.
- Последнее утверждение свидетельствует о том, что данным свойством также не обладает и объемлющая подалгебра $\langle \mathcal{D}^{\left(s_{cub}\left(\vec{\bar{s}}_1,\vec{\bar{s}}_2\right),2\right)}, [\mathcal{P}]\rangle \subset \langle \mathcal{M}^{(3,2)}_{ijk}, [\mathcal{P}]\rangle$

4 Матричное представление псевдонормы двойных чисел P_2 и тройных чисел P_3

4.1 Псевдонорма двойного числа P_2 (или p) в изотропном базисе

Напомним уравнения для единиц и коэффициентов алгебры двойных чисел в изотропном и "декартовом" базисах:

$$1 = e_1 + e_2,\ \ j = e_1 - e_2,\ \ j^2 = 1; \tag{4.1a}$$

$$p = t + jx = A_1e_1 + A_2e_2,\ \ \bar{p} = t - jx = A_2e_1 + A_1e_2; \tag{4.1b}$$

$$A_1 = t + x,\ \ A_2 = t - x,\ \ t = \tfrac{A_1+A_2}{2},\ \ x = \tfrac{A_1-A_2}{2}; \tag{4.1c}$$

$$e_1 = \tfrac{1+j}{2},\ \ e_2 = \tfrac{1-j}{2},\ \ e_1e_2 \equiv 0,\ \ (e_1)^2 = e_1,\ \ (e_2)^2 = e_2. \tag{4.1d}$$

Рассмотрим выражение для двойного числа в изотропном базисе: справа от второго знака равенства в (4.1b). Псевдонорма в алгебре P_2 выражается через квадратный корень из произведения исходного числа на сопряжённое:

$$\begin{aligned}&\|p\| = \sqrt{p\bar{p}} = \sqrt{(A_1e_1 + A_2e_2)(A_2e_1 + A_1e_2)} \overset{\text{по (4.1d)}}{=} \sqrt{(A_1A_2e_1 + A_2A_1e_2)} = \\ &\sqrt{A_1A_2(e_1+e_2)} \overset{\text{по (4.1a)}}{=} \sqrt{A_1A_2} \Leftrightarrow \|p\|^2 = A_1A_2\end{aligned} \tag{4.2}$$

От представления квадрата псевдонормы в виде произведения двух чисел перейдём к записи скалярного произведения двойных чисел через метрический тензор. Двойное число представимо в виде скалярного произведения 1-формы на вектор. Разлагая каждое из чисел в (4.2), выпишем произведение двойных чисел $(p, \bar{p})$ без (4.3a) и с (4.3b) симметризацией:

$$\begin{aligned}&\|p\|^2 = \left[\begin{pmatrix} e_1 & e_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2\end{pmatrix}\right]^{(i,j)}\left[\begin{pmatrix} e_2 & e_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} A_1 & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 & e_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2\end{pmatrix}\right] = \\ &= \left[A_1\ \ A_2\begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_2 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix} A_1 \\ A_2\end{matrix}\right] = \begin{pmatrix} A_2e_2 & A_1e_1\end{pmatrix}\begin{matrix} A_1 \\ A_2\end{matrix} = A_2A_1e_2 + A_1A_2e_1 = A_1A_2(e_2+e_1) = A_1A_2\end{aligned} \tag{4.3a}$$

$$\begin{aligned}&\|p\|^2 = \tfrac{1}{2}(p\bar{p} + \bar{p}p) = \tfrac{1}{2}\left[A_1\ \ A_2\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 & e_1\end{pmatrix}\begin{matrix} A_1 \\ A_2\end{matrix} + A_1\ \ A_2\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 & e_2\end{pmatrix}\begin{matrix} A_1 \\ A_2\end{matrix}\right] = \\ &= \tfrac{1}{2}\left[A_1\ \ A_2\begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_2 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix} A_1 \\ A_2\end{matrix} + A_1\ \ A_2\begin{pmatrix} 0 & e_2 \\ e_1 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix} A_1 \\ A_2\end{matrix}\right] = \tfrac{1}{2}\left[A_1\ \ A_2\begin{pmatrix} 0 & e_1+e_2 \\ e_2+e_1 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix} A_1 \\ A_2\end{matrix}\right] = \\ &= \tfrac{1}{2}\left[A_1\ \ A_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix} A_1 \\ A_2\end{matrix}\right] = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} A_2 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2\end{pmatrix} = \tfrac{A_2A_1+A_1A_2}{2} = \tfrac{2A_1A_2}{2} = A_1A_2\end{aligned} \tag{4.3b}$$

Возможен ещё один вариант представления квадрата псевдонормы – двойные числа $(p, \bar{p})$ представляются каждое в виде вектора без декомпозиции, осуществлённой в (4.4):

$$\|p\|^2 = (\vec{p})^{(i,j)}\vec{\bar{p}} = \begin{pmatrix} A_1e_1 & A_2e_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2e_1 \\ A_1e_2\end{pmatrix} = A_1A_2e_1 + A_2A_1e_2 = A_1A_2(e_1+e_2) = A_1A_2. \tag{4.4}$$

4.2 Псевдонорма тройного числа P_3 (или P) в изотропном базисе

Для начала необходимы уравнения для единиц алгебры тричисел P_3. Обратимся для этого к [6, стр. 111, уравнения 139-143], переписав их с заменой $j_1 \to j$, $j_2 \to k$, $j_3 \to jk$, $x_1 \to x$, $x_2 \to y$, $x_3 \to z$, $\xi_i \to A_i$:

$$j = e_1 - e_2 - e_3,\;\; k = -e_1 + e_2 - e_3,\;\; jk = -e_1 - e_2 + e_3,\;\; 1 = e_1 + e_2 + e_3; \tag{4.5a}$$

$$j^2 = k^2 = (jk)^2 = -(j + k + jk) = 1;\;\; j \cdot k = jk; \tag{4.5b}$$

$$P{=}xj + yk + z(jk){=}A_1e_1{+}A_2e_2{+}A_3e_3, \bar{P}{=}A_1e_3{+}A_2e_1{+}A_3e_2, \bar{\bar{P}}{=}A_1e_2{+}A_2e_3{+}A_3e_1; \tag{4.5c}$$

$$A_1 = x - y - z,\;\; A_2 = -x + y - z,\;\; A_3 = -x - y + z; \tag{4.5d}$$

$$e_1 = -\tfrac{k+jk}{2},\;\; e_2 = -\tfrac{j+jk}{2},\;\; e_3 = -\tfrac{j+k}{2},\;\; e_ie_j \equiv 0; \tag{4.5e}$$

$$x = -\tfrac{A_2+A_3}{2},\;\; y = -\tfrac{A_1+A_3}{2},\;\; z = -\tfrac{A_1+A_2}{2};. \tag{4.5f}$$

Выпишем аналог произведения (4.2) для тройных чисел:

$$\|P\| = \sqrt[3]{P\bar{P}\bar{\bar{P}}} = \sqrt[3]{(A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3)(A_1e_3 + A_2e_1 + A_3e_2)(A_1e_2 + A_2e_3 + A_3e_1)} \overset{\text{по }(4.5e)}{=}$$
$$\overset{\text{по }(4.5e)}{=} \sqrt[3]{(A_1A_2A_3e_1 + A_2A_3A_1e_2 + A_3A_1A_2e_3)} = \sqrt[3]{A_1A_2A_3(e_1 + e_2 + e_3)} \overset{\text{по }(4.5a)}{=} \sqrt[3]{A_1A_2A_3}. \tag{4.6}$$

Выпишем формулу, аналогичную (4.4), используя тернарное произведение векторов 2.2 на с. 160 (имея ввиду, что вектор – это столбец), применяя к первому и третьему тричислам-векторам оба способа транспонирования из 3.19 на с. 165:

$$\|P\|^3 = \left(\vec{P}\right)^{(i,j,k)} \vec{P} \left(\vec{\bar{\bar{P}}}\right)^{-(i,j,k)} = \begin{array}{ccccccc} & & & A_2e_1 & & & A_2e_3 \\ A_1e_1 & A_2e_2 & A_3e_3 & A_3e_2 & & A_1e_2 & \\ & & & A_1e_3 & A_3e_1 & & \end{array} = \tag{4.7}$$

$$A_1A_2A_3e_1 + A_2A_3A_1e_2 + A_3A_1A_2e_3 = A_1A_2A_3(e_1 + e_2 + e_3) = A_1A_2A_3.$$

Перейдём к аналогу матричного представления псевдонормы (4.3). Сначала выпишем три способа декомпозиции каждого из чисел $(P, \bar{P}, \bar{\bar{P}})$ продолжая считать (что вытекает из принципа аналогии с (4.3a)), что вектор - это столбец (остальные объекты – в матричном виде). Способы разложения числа P, первого сопряжённого $\bar{P}$ и второго сопряжённого $\bar{\bar{P}}$:

$$P = P^{[1]} \equiv \begin{array}{ccc} 0 & 0 & e_3 \\ 0 & e_2 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 \end{array} \;\; \begin{array}{cccc} & & & 0 \\ A_1 & & 0 & 0 \\ A_2 & e_1 & e_2 & e_3 \\ A_3 & 0 & 0 & \\ & 0 & & \\ & & e_3 & \end{array} = P^{[2]} \equiv \begin{array}{ccc} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \\ 0 & e_2 & 0 \end{array} \;\; \begin{array}{cccc} & & & 0 \\ A_1 & & e_2 & e_3 \\ A_2 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & \\ & e_1 & & \end{array} = \tag{4.8}$$

$$= P^{[3]} \equiv \begin{array}{ccc} 0 & e_2 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{array} \;\; \begin{array}{cccc} A_1 & & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & e_1 & e_2 & \\ & 0 & & \end{array} = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3.$$

$$\bar P = \bar P^{[1]} \equiv \begin{matrix} e_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 \\ 0 & e_1 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} & & & 0 \\ A_1 & & e_1 & e_2 \\ A_2 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & \\ & e_3 & & \end{matrix} = \bar P^{[2]} \equiv \begin{matrix} 0 & e_1 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 \end{matrix} \begin{matrix} & & & e_2 \\ A_1 & & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & e_3 & e_1 & \\ & 0 & & \end{matrix} =$$

$$= \bar P^{[3]} \equiv \begin{matrix} 0 & 0 & e_2 \\ 0 & e_1 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} & & & 0 \\ A_1 & & 0 & 0 \\ A_2 & e_3 & e_1 & e_2 \\ A_3 & 0 & 0 & \\ & 0 & & \end{matrix} = A_2e_1 + A_3e_2 + A_1e_3. \tag{4.9}$$

$$\bar{\bar P} = \bar{\bar P}^{[1]} \equiv \begin{matrix} 0 & e_3 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 \end{matrix} \begin{matrix} & & & e_1 \\ A_1 & & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & e_2 & e_3 & \\ & 0 & & \end{matrix} = \bar{\bar P}^{[2]} \equiv \begin{matrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_3 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} & & & 0 \\ A_1 & & 0 & 0 \\ A_2 & e_2 & e_3 & e_1 \\ A_3 & 0 & 0 & \\ & 0 & & \end{matrix} =$$

$$= \bar{\bar P}^{[3]} \equiv \begin{matrix} e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_3 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} & & & 0 \\ A_1 & & e_3 & e_1 \\ A_2 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & \\ & e_2 & & \end{matrix} = A_3e_1 + A_1e_2 + A_2e_3. \tag{4.10}$$

Далее выписываем аналоги[2] (4.3a) исходя из разложений (4.8), (4.9), (4.10):

[2]Транспонировние как на с. 165 произведено и явно не выписано из-за занимаемого места.

$$P^{[1]^{(i,j,k)}}\bar{P}^{[1]}\left(\bar{\bar{P}}^{[1]}\right)^{-(i,j,k)} = A_1 \quad A_2 \quad A_3 \left[\left(\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 0 & & & & & \\ e_1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & & & & \\ & & & & & & & & e_3 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & e_1 & e_2 & e_3 & 0 & 0 & e_2 & & \\ & & & & & 0 & e_1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & & \end{array}\right)\right.$$

$$\begin{array}{cccc} & & 0 & \\ A_1 & & e_1 & e_2 \\ A_2 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & \\ & e_3 & & \end{array}\left]\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & e_2 & 0 & & A_3 \\ & 0 & e_3 & 0 & & & & & \\ e_2 & 0 & 0 & & 0 & 0 & e_3 & & A_2 \\ 0 & 0 & e_1 & & & & & & \\ & & & & e_1 & 0 & 0 & A_1 & \end{array}\right. =$$

$$= A_1 \quad A_2 \quad A_3 \left[\begin{array}{cccccccccc} & & 0 & 0 & 0 & & & & & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & e_1 & 0 & & & A_1 & & e_1 & e_2 & \\ & & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & 0 & 0 & e_2 & & A_2 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ & & e_3 & 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & e_3 & & & \end{array}\right]\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & e_2 & 0 & & A_3 \\ & 0 & e_3 & 0 & & & & & \\ e_2 & 0 & 0 & & 0 & 0 & e_3 & & A_2 \\ 0 & 0 & e_1 & & & & & & \\ & & & & e_1 & 0 & 0 & A_1 & \end{array} \tag{4.11}$$

$$\|P^{[2]}\|^3 = A_1 \quad A_2 \quad A_3 \left[\begin{array}{cccccccccc} & & 0 & 0 & 0 & & & & & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & e_2 & 0 & & & A_1 & & e_2 & e_3 & \\ & & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & 0 & 0 & e_3 & & A_2 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ & & e_1 & 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & e_1 & & & \end{array}\right]\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & e_3 & 0 & & A_3 \\ & 0 & e_1 & 0 & & & & & \\ e_3 & 0 & 0 & & 0 & 0 & e_1 & & A_2 \\ 0 & 0 & e_2 & & & & & & \\ & & & & e_2 & 0 & 0 & A_1 & \end{array} \tag{4.12a}$$

$$\|P^{[3]}\|^3 = A_1 \quad A_2 \quad A_3 \left[\begin{array}{cccccccccc} & & 0 & 0 & 0 & & & & & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & e_3 & 0 & & & A_1 & & e_3 & e_1 & \\ & & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & 0 & 0 & e_1 & & A_2 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ & & e_2 & 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & e_2 & & & \end{array}\right]\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & e_1 & 0 & & A_3 \\ & 0 & e_2 & 0 & & & & & \\ e_1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & e_2 & & A_2 \\ 0 & 0 & e_3 & & & & & & \\ & & & & e_3 & 0 & 0 & A_1 & \end{array} \tag{4.12b}$$

Складывая (4.11), (4.12a) и (4.12b), получаем полноценный аналог (4.3b):

$$
\|P\|^3 = \frac{1}{3}\left(P\bar{P}\bar{\bar{P}} + \bar{\bar{P}}P\bar{P} + \bar{P}\bar{\bar{P}}P\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{array}\left[\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & 0 & 0 & & & & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & A_1 & & 1 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 & & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ & & 1 & 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & 1 & & \end{array}\right]\begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & & & A_3 \\ 0 & 0 & 1 & & A_2 & \\ 1 & 0 & 0 & A_1 & & \end{array}\right) = \frac{1}{3}\left(\left[\begin{array}{ccccccc} & & & A_2 & & & \\ & & & & 0 & 1 & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_3 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & A_1 & & & \end{array}\right]\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & & & A_3 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & A_2 & \\ & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & A_1 & & \end{array}\right) =
$$

$$
= \frac{1}{3}\left(\begin{array}{cccccccc} & & & 0 & 1 & 0 & & A_3 \\ & & & & & & & \\ A_2A_3 & A_3A_1 & A_1A_2 & 0 & 0 & 1 & A_2 & \\ & & & & & & & \\ & & & 1 & 0 & 0 & A_1 & \end{array}\right) = \frac{1}{3}\left(A_1A_2A_3 + A_2A_3A_1 + A_3A_1A_2\right) = A_1A_2A_3. \tag{4.13}
$$

Сокращённая запись выражений типа (4.11), (4.12a), (4.12b) и (4.13) выглядит так:

$$
\|P\|^3 = (\mathbf{p}_{\phi i\psi}(\mathbf{G}_{ijk}\bar{\mathbf{p}}_{j\alpha_k\omega}\bar{\mathbf{g}}_{k\psi j})\bar{\bar{\mathbf{g}}}_{\psi ti})\bar{\bar{\mathbf{g}}}_{tr_\omega\gamma}\bar{\bar{\mathbf{p}}}_{\omega\beta t} = d_{\phi\beta\gamma} = d = A_1A_2A_3, \tag{4.14}
$$

где $\mathbf{G}_{ijk}$ - аналог метрического тензора для чисел P (или пространства H_3), $\bar{\mathbf{g}}$ - квадратные матрицы, $\mathbf{p}$ - вектора коэффициентов, об индексах см. замечание 1.1 на с. 158.

5 Заключение

В настоящей работе сделан первый шаг к полноценному описанию алгебры $\langle\mathcal{M}_{ijk}^{(3,n)}, [\mathcal{P}]\rangle$, связанной с введённым здесь тернарным произведением трёхмерных матриц. Как видно из последнего раздела статьи, работа в данном направлении открывает значительные перспективы дальнейшего изучения как непосредственно алгебры поличисел P_3 и порождаемого ею пространства H_3, так и для изучения всего спектра финслеровых пространств с метрической функцией третьей степени (например, пространства Чернова [25]).

Целый ряд фундаментальных вопросов не был и не мог быть затронут по причине, в первую очередь, объёмности соответствующей работы. К таким вопросам относятся, например, определение аналога обратной (сопряжённой) операции, исследование инвариантов операции $\mathcal{P}$, вопросы введения аналогов характеристического уравнения, матричные функции и многое другое. Всё это должно являться предметами дальнейших работ на данную тему.

Вместе с тем, удалось проанализировать операцию $\mathcal{P}$ на степень удовлетворения классическим свойствам, на которые проверяется любая вводимая бинарная операция. Естественно, список неполон (например, не решён вопрос с обратимостью), однако для начала представляется вполне достаточным. Кроме того, выделены и классифицированы в соответствии со степенью выполнения тех же свойств ряд структурных подалгебр исходной алгебры $\langle\mathcal{M}_{ijk}^{(3,n)}, [\mathcal{P}]\rangle$, что является важным подспорьем для дальнейшего исследования.

И наконец, следует ещё раз подчеркнуть собственную значимость четвёртого раздела настоящей работы в качестве пролога к дальнейшим исследованиям с использованием тернарной операции в области финслеровой геометрии вообще и пространства Бервальда-Моора, в частности. Ещё раз видно, насколько наличие жёсткой алгебраической структуры оказывается (или может оказаться) важным подспорьем созданию новых математических методов изучения малоизученных геометрических структур.

6 Благодарности

Автор хотел бы искренне поблагодарить Д.Г. Павлова, С.С. Кокарева и А.М. Гальмака за поддержку на протяжении последних лет, плодотворные обсуждения и внесённые ценные коррективы в текст статьи.

Литература

[1] Соколов Н.П.. Пространственные матрицы и их приложения. М., ГИФМЛ, 1960, 300 с.

[2] Павлов Д.Г. Обобщение аксиом скалярного произведения // *Гиперкомлексные числа в геометрии и физике*, 1, 2004. с. 1–16.

[3] Павлов Д.Г. Хронометрия трёхмерного времени // *Гиперкомлексные числа в геометрии и физике*, 1, 2004. с. 17–30.

[4] D. G. Pavlov Generalization of scalar product axioms // Space-Time Structure. Algebra and Geometry; D.G. Pavlov, Gh. Atanasiu, V. Balan (eds); Moskow, Lilia-Print, 2007, p. 15-31

[5] Павлов Д.Г. Симметрии и геометрические инварианты // *Гиперкомлексные числа в геометрии и физике*, 2(6), 2006. с. 21–32.

[6] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной // *Гиперкомлексные числа в геометрии и физике*, 1(13), 2010. с. 78–127.

[7] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной // *Гиперкомлексные числа в геометрии и физике*, 2(14), 2010. с. 11–37.

[8] Балан В., Богословский Г.Ю., Кокарев С.С., Павлов Д.Г., Сипаров С.В., Войку Н. Геометрические модели локально-анизотропного пространства-времени // *Гиперкомлексные числа в геометрии и физике*, 1(15), 2010. с. 4–37.

[9] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Аналитические, дифференциально-геометрические, алгебраические свойства гладких функций поличисловой переменной // *Гиперкомлексные числа в геометрии и физике*, 2(16), 2011. с. 4–53.

[10] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Некоторые задачи математической физики в поличисловой теории поля // *Гиперкомлексные числа в геометрии и физике*, 2(18), 2012. с. 200–255.

[11] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Алгебра, геометрия и физика двойных чисел // *Гиперкомлексные числа в геометрии и физике*, 1(19), 2013. с. 86–161.

[12] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Геометрия и физика голоморфных функций в поличисловой теории поля // *Гиперкомлексные числа в геометрии и физике*, 2(20), 2013. с. 190-212.

[13] Курош А.Г. Общая алгебра, М.: изд-во МГУ им М.В. Ломоносова, 1974, 162 с.

[14] Курош А.Г. Лекции по общей алгебре, М.: Наука, 1973, 400 с.

[15] Гальмак А.М. Многоместные операции на декартовых степенях; Минск, изд. центр БГУ, 2009.- 265 с.

[16] Гальмак А.М. N-арные группы // *Гиперкомлексные числа в геометрии и физике*, 2(8), 2007. с. 76–95.

[17] Гальмак А.М. Полиадические операции на декартовых степенях // *Гиперкомлексные числа в геометрии и физике*, 1(9), 2008. с. 112–139.

[18] Гальмак А.М. Вектор-матрицы // *Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова*, №1 (37), серия B, 2011. с. 30—37.

[19] Гальмак А.М. Полиадические операции на декартовых степенях группоидов, полугрупп и колец // *Гиперкомлексные числа в геометрии и физике*, 1(15), 2011. с. 86–98.

[20] Гальмак А.М. О полиадических операциях на множестве пространственных матриц // *Гиперкомлексные числа в геометрии и физике*, 1(17), 2012. с. 16–27.

[21] Гальмак А.М. Полиадические операции на множествах матричнозначных функций // *Гиперкомлексные числа в геометрии и физике*, 2(20), 2013. с. 253–289.

[22] Nambu Y. Generalized Hamiltonian Dynamics // *Phys. Rev. D.* 7 2405–2412, 1973

[23] DeBellis J., Saemann C., Szabo R.J. Quantized Nambu-Poisson Manifolds in a 3-Lie Algebra Reduced Model // *JHEP 04* (2011) 075.

[24] Chandrashekar Devchand, Fairlie D., Nuyts J., Weingart G. Ternutator Identities // *J.Phys.A42*: 475209, 2009.

[25] Чернов В.М. Обобщённые n-арные законы композиции в алгебре H_4 и их связь с ассоциированными метрическими формами // *Гиперкомлексные числа в геометрии и физике*, 2(6), 2006. с. 33–44.

[26] Kerner R. The cubic chessboard // *Class. Quantum Grav. 14* (1997) A203-A225.

[27] Kerner R. Ternary algebraic structures and their applications in physics // *Proceedings of the Conference ICGTMP "Group-23"*, sis Dubna, 2000, Russia.

[28] Bazunova N., Borowiec A. and Kerner R. Universal differential calculus on ternary algebras // *Lett. Math. Phys. 67*: 195–206, 2004.

[29] Abramov V., Kerner R., Liivapuu O., Shitov S. Algebras with ternary law of composition and their realization by cubic matrices // *arXiv:0901.2506v2.*

[30] Kerner R. Lorentz and SU(3) groups derived from cubic quark algebra // *arXiv:0901.3961v1.*

[31] Goze N., Remm E. The n-ary algebra of tensors and of cubic and hypercubic matrices // *arXiv:0902.2757v2.*

[32] Rausch de Traubenberg M. Ternary algebras and groups // *J.Phys.Conf.Ser.128*: 012060, 2008.

[33] Lipatov L.N., Rausch de Traubenberg M., Volkov G.G.On the ternary complex analysis and its applications // *J.Math.Phys.49*: 013502, 2008.

[34] Dubrovsky A., Volkov G.G. Ternary numbers and algebras. Reflexive numbers and Berger graphs // *Adv.Appl.CliffordAlgebras17* 159-181, 2007.

[35] Volkov G.G. Ternary "Quaternions"and Ternary $TU(3)$ algebra // *arXiv:1006.5627v1.*

[36] Beites P.D., Pozhidaev A.P. On simple Filippov superalgebras of type $A(0,n)$ // *arXiv:1008.0120v1.*

[37] Elduque A., Okubo S. Lie algebras with S3 or S4-action, and generalized Malcev algebras // *arXiv:0801.2481v1.*

[38] Bremner M.R., Douglas A. The simple non-Lie Malcev algebra as a Lie-Yamaguti algebra // *arXiv:1108.4202v1.*

[39] Loday J.-L. Dialgebras, in "Dialgebras and related operads 7–66, Lecture Notes in Math., 1763, Springer, Berlin 2001.

[40] Bremner M.R., Sanchez-Ortega J. The partially alternating ternary sum in an associative dialgebra // *J.Phys.A43*: 455215, 2010.

[41] Bremner M.R., Peresi L.A., Sanchez-Ortega J. Malcev dialgebras // *arXiv:1108.0586v1*.

[42] Lapshin A.V. N-ary operations on the set of spatial matrices. The case N=3 is the object of detail consideration // *Proceedings of the VIII-th International Conference on Finsler Extencion of Relativity Theory*, p. 96 / Eds.: Pavlov D.G., Bogoslovsky G.Yu., Panchelyuga V.A. – Moskow, Buki Vedi, 2012, 106 p.

TERNARY PRODUCT OVER THREE-DIMENSIONAL MATRICES

A.V. Lapshin

Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia

lavexander@mail.ru

The paper presents the ternary generalization of the standard algebra of matrices to the case of spatial (cubic) matrices. In addition to the definition of the ternary operation itself and to its basic properties, the multy-dimensional versions of the other conventional concepts, operations and mapping such as transposition, unit element, commutativity, associativity and others that are used in the standard algebra of matrices are constructed. The relationship between the constructed ternary operation and the algebra of polynumbers P_3 is discussed.

Key Words: ternary operation, ternary product, polyscalar product, algebra of polynumbers, triple numbers, pseudo-norm.