ИССЛЕДОВАНИЕ РОЛИ НЕПРИВОДИМЫХ КОМПОНЕНТ КРУЧЕНИЯ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ВИДЕ ПЛОСКИХ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕ РИМАНА–КАРТАНА

В.Н. Щербань

Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия

vovan-ru1@yandex.ru

Для квадратичных лагранжианов общего вида получены вариационные уравнения гравитационного поля в пространстве Римана–Картана в формализме внешних форм методом неопределенных множителей Лагранжа. Исследована структура неприводимых компонент кручения при распространении в виде плоских волн в пространстве Римана–Картана.

Ключевые слова: внутренняя связность, продолженная связность, почти контактное кэлерово пространство, субфинслерово пространство с метрикой Бервальда-Моора нулевой кривизны.

1 Введение

Значительный интерес представляет собой изучение точных решений уравнений поля в пространствах, наделенных более сложной структурой, чем риманово пространство ОТО. Особое место здесь занимает поиск волновых решений, что обладает как теоретическим, так и возможным практическим значением [1-6]. Так, в [1] изучались гравитационные волны в пространстве с отличным от нуля кручением в теории с лагранжианом специального вида, состоящим из линейного лагранжиана теории Эйнштейна-Картана, одного из шести возможных квадратов тензора кривизны и всех возможных квадратов тензора, кручения. В [2] волны кручения исследовались на фоне плоского пространства в теории с квадратичным по кривизне лагранжианом. В [3] авторы рассматривали плоские волны в теории с квадратичным по кручению и кривизне лагранжианом без линейной части. Работа [4] была посвящена исследованию волн кручения для 2-формы кручения алгебраически специального N-типа. В [5] исследована структура плоских волн бесследовой части кручения, а в работе [6] кратко приведены результаты по исследованию свойств плоских волн также следа и псевдоследа кручения.

Целью данной работы является исследование структуры неприводимых компонент кручения при распространении в виде плоских волн в пространстве Римана–Картана.

Построение современной пуанкаре-калибровочной теории гравитации основано на существенном использовании нелинейных по кривизне и кручению лагранжианов [7-13]. Использование квадратичных лагранжианов в теории гравитационного поля стимулируется также построением перенормируемой теории гравитации в пространстве Римана–Картана. Большинство квадратичных теорий гравитации в пространстве Римана–Картана могут быть описаны как частные случаи общего 10-параметрического лагранжиана, введенного в [7, 8] в виде суммы линейного лагранжиана теории Эйнштейна–Картана и квадратов неприводимых частей тензоров кривизны и кручения.

На современном этапе теория гравитации описывается на языке внешних дифференциальных форм Картана. Мы будем использовать вариационный формализм на языке внешних форм, основыванный на лемме, сформулированной и доказанной в [5], о коммутации операторов варьирования и дуализации Ходжа.

В пространстве Римана–Картана получение уравнений гравитационного поля может быть осуществлено несколькими методами. Данные уравнения могут быть получены как частный случай уравнений поля в общем аффинно-метрическом пространстве при наложении условия метричности (согласованности метрики и связности) после варьирования и получения уравнений поля. Другой метод состоит в получении этих уравнений при наложении условия метричности до вариационной процедуры с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа. Наконец, третий метод состоит в явном разрешении условий метричности и построении лагранжиана гравитационного поля непосредственно в пространстве Римана–Картана. Одной из целей данной работы является обоснование эквивалентности последних двух методов варьирования и неэквивалентности этих методов первому методу.

2 Уравнения гравитационного поля в пространстве Римана–Картана в формализме внешних форм

Под общим аффинно-метрическим пространством (L_4, g) будем понимать связное четырехмерное ориентированное дифференцируемое многообразие $\mathcal{M}$, наделенное метрическим тензором $\breve{g}$ индекса 3, 4-формой объема η, 1-формой линейной связности $\Gamma^a{}_b$, не согласованной с метрикой, 2-формой кривизны $\mathcal{R}^a{}_b$, 2-формой кручения $\mathcal{T}^a$ и 1-формой неметричности $\mathcal{Q}_{ab}$.

2-форма кручения и 2-форма кривизны задаются на основе первого и второго структурных уравнений Картана:

$$\mathcal{T}^a = \frac{1}{2}\mathcal{T}^a{}_{bc}\theta^b \wedge \theta^c = \mathrm{D}\theta^a = d\theta^a + \Gamma^a{}_b \wedge \theta^b \,, \tag{1}$$

$$\mathcal{R}^a{}_b = \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d = \mathrm{d}\Gamma^a{}_b + \Gamma^a{}_c \wedge \Gamma^c{}_b \,. \tag{2}$$

Здесь θ^a $(a = 0, 1, 2, 3)$ – кобазис 1-форм пространства (L_4, g), $\wedge$ – оператор внешнего умножения, D – обобщенный внешний ковариантный дифференциал: $\mathrm{D} = \mathrm{d} + \Gamma \wedge \ldots$ (d – оператор внешнего дифференцирования). Будем использовать локальный неголономный векторный базис $\mathbf{e}_b$ $(b = 0, 1, 2, 3)$, причем $\mathbf{e}_b \rfloor \theta^a = \delta^a_b$, $\rfloor$ – операция внутреннего произведения (свертка) и $g_{ab} = \breve{g}\,(\mathbf{e}_a,\ \mathbf{e}_b) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Мерой несогласованности метрики и связности является отличие от нуля 1-формы

$$\mathcal{Q}_{ab} = -\mathrm{D}g_{ab} = -(\mathrm{d}g_{ab} - \Gamma^c{}_a g_{cb} - \Gamma^c{}_b g_{ac}) = 2\Gamma_{(ab)} \,. \tag{3}$$

Пространство Римана–Картана RC_4 представляет собой частный случай общего аффинно-метрического пространства при равной нулю 1-форме неметричности $\mathcal{Q}_{ab}$. В этом случае равное нулю выражение (3) будет представлять собой связь, налагаемую на 1-форму связности $\Gamma^a{}_b$, разрешение которой приводит к условию $\Gamma_{ab} = -\Gamma_{ba}$.

Удобно использовать вспомогательные поля: 3-формы η_a, 2-формы η_{ab}, 1-формы η_{abc} и 0 -формы η_{abcd}, определенные следующим образом [10]:

$$\begin{gathered}
\eta_a = \mathbf{e}_a \rfloor \eta = *\theta_a \,, \qquad \eta_{ab} = \mathbf{e}_b \rfloor \eta_a = *\,(\theta_a \wedge \theta_b)\,, \\
\eta_{abc} = \mathbf{e}_c \rfloor \eta_{ab} = *(\theta_a \wedge \theta_b \wedge \theta_c)\,, \\
\eta_{abcd} = \mathbf{e}_d \rfloor \eta_{abc} = *(\theta_a \wedge \theta_b \wedge \theta_c \wedge \theta_d)\,, \\
\theta^a \wedge \eta_b = \delta^a_b \eta \,, \qquad \theta^a \wedge \eta_{bc} = -2\delta^a_{[b}\eta_{c]}\,, \\
\theta^d \wedge \eta_{abc} = 3\delta^d_{[a}\eta_{bc]}\,, \qquad \theta^f \wedge \eta_{abcd} = -4\delta^f_{[a}\eta_{bcd]}\,,
\end{gathered} \tag{4}$$

где $*$ – оператор дуального сопряжения Ходжа.

В пространстве (L_4, g) 2-форма кривизны, 2-форма кручения и 1-форма неметричности могут быть разбиты на части, являющиеся неприводимыми представлениями группы псевдоортогональных преобразований четырехмерного пространства-времени:

$$\mathcal{R}_{ab} = \sum_{i=1}^{6} \overset{(i)}{\mathcal{R}}_{[ab]} + \sum_{i=1}^{5} \overset{(i)}{\mathcal{R}}_{(ab)}\,, \quad \mathcal{T}^a = \sum_{i=1}^{3} \overset{(i)}{\mathcal{T}}{}^a\,, \quad \mathcal{Q}_{ab} = \sum_{i=1}^{4} \overset{(i)}{\mathcal{Q}}_{ab}\,. \tag{5}$$

Конкретный вид указанного разложения, а также частный случай свойств этих разложений в пространстве Римана–Картана RC_4 может быть найден в обзоре [10]. Неприводимые части ортогональны относительно скалярного произведения $*(\mathcal{A}_{a_1\ldots a_r} \wedge *\mathcal{B}^{a_1\ldots a_r})$.

В дальнейшем будет использовано разложение 2-формы кручения на неприводимые части (1-форму бесследовой части $\overset{(1)}{\mathcal{T}}{}^a$, 1-форму следа $\overset{(2)}{\mathcal{T}}{}^a$ и 1-форму псевдоследа $\overset{(3)}{\mathcal{T}}{}^a$):

$$\overset{(1)}{\mathcal{T}}{}^a = \mathcal{T}^a - \overset{(2)}{\mathcal{T}}{}^a - \overset{(3)}{\mathcal{T}}{}^a\,, \quad \overset{(2)}{\mathcal{T}}{}^a = \frac{1}{3}\theta^a \wedge \left(\mathbf{e}_b \rfloor \mathcal{T}^b\right)\,, \quad \overset{(3)}{\mathcal{T}}{}^a = \frac{1}{3} * \left(\theta^a \wedge *(\mathcal{T}^b \wedge \theta_b)\right)\,. \tag{6}$$

При этом неприводимые слагаемые кручения обладают свойствами:

$$\overset{(1)}{\mathcal{T}}{}^a \wedge \theta_a = 0\,, \qquad \overset{(2)}{\mathcal{T}}{}^a \wedge \theta_a = 0\,, \qquad \mathbf{e}_a \rfloor \overset{(1)}{\mathcal{T}}{}^a = 0\,, \qquad \mathbf{e}_a \rfloor \overset{(3)}{\mathcal{T}}{}^a = 0\,. \tag{7}$$

В качестве лагранжевой плотности теории выберем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = f_0 \mathcal{R}^a{}_b \wedge \eta^b_a + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \mathcal{R}^{ab} \wedge * \overset{(i)}{\mathcal{R}}{}_{[ab]} + \sum_{i=1}^{3} \chi_i \mathcal{T}^a \wedge * \overset{(i)}{\mathcal{T}}{}_a + \mathcal{Q}_{ab} \wedge \Lambda^{ab} + \\ + \sum_{i=1}^{5} \kappa_i \mathcal{R}^{ab} \wedge * \overset{(i)}{\mathcal{R}}{}_{(ab)} + \sum_{i=1}^{4} \xi_i \mathcal{Q}^{ab} \wedge * \overset{(i)}{\mathcal{Q}}{}_{ab} + \sum_{i=1}^{3} \zeta_i \mathcal{Q}_{ab} \wedge \theta^{(a} \wedge * \overset{(i)}{\mathcal{T}}{}^{b)}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $f_0 = 1/(2\kappa)$ $(\kappa = 8\pi G/c^4)$, λ_i, κ_i, χ_i, ξ_i, ζ_i – константы связи, а (i) – индекс, перечисляющий неприводимые компоненты кривизны, кручения и неметричности.

Данное выражение представляет собой сумму общей квадратичной лагранжевой плотности в пространстве (L_4, g) (линейной лагранжевой плотности, пропорциональной скаляру кривизны, квадратов всех неприводимых частей кривизны, кручения и неметричности) и слагаемого с неопределенным множителем Лагранжа Λ^{ab}.

Для получения уравнений гравитационного поля в пространстве Римана–Картана RC_4 в вакууме проведем при помощи вариационного формализма первого порядка независимое варьирование лагранжевой плотности (8) по базисным формам θ^a, 1-форме связности Γ^a_b пространства (L_4, g) и 3-форме множителя Лагранжа Λ^{ab}. Метод варьирования в формализме внешних форм основан на использовании леммы о коммутации операторов варьирования и дуального сопряжения Ходжа [5].

В результате вырьирования плотности (8) по Λ^{ab} получим условие метричности

$$\mathcal{Q}_{ab} = 0\,. \tag{9}$$

Данное условие приводит к следующим свойствам связности и кривизны в RC_4:

$$\Gamma_{ab} = -\Gamma_{ba}\,, \qquad \mathcal{R}_{ab} = \mathcal{R}_{[ab]}\,. \tag{10}$$

Как следствие свойств (9) и (10) результат варьирования последних трех слагаемых лагранжевой плотности (8) обнулится за исключением выражений вида

$$\delta\mathcal{Q}_{ab} \wedge (\Lambda^{ab} + \zeta_i \theta^{(a} \wedge * \overset{(i)}{\mathcal{T}}{}^{b)}) = \delta\Gamma^a{}_b \wedge (\Lambda_a{}^b + 2\zeta_i \theta_{(a} \wedge * \overset{(i)}{\mathcal{T}}{}^{b)})\,, \tag{11}$$

которое дает вклад в Г-уравнение, исчезающий после антисимметризации по a, b.

Используя выражения для неприводимых частей кривизны и кручения, первые три слагаемых плотности (8) преобразуем к виду, более удобному для варьирования:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_P = {} & f_0\mathcal{R}^a{}_b \wedge \eta^b_a + \tau_1\mathcal{R}^a{}_b \wedge *\mathcal{R}^b{}_a + \tau_2\left(\mathcal{R}^{ab}\wedge\theta_a\right)\wedge *\left(\mathcal{R}^{cb}\wedge\theta_c\right) + \\
& + \tau_3\left(\mathcal{R}^{ab}\wedge\theta_c\right)\wedge *(\mathcal{R}^c{}_b\wedge\theta_a) + \tau_4\left(\mathcal{R}^a{}_b\wedge\theta_a\wedge\theta^b\right)\wedge *\left(\mathcal{R}^c{}_d\wedge\theta_c\wedge\theta^d\right) + \\
& + \tau_5\left(\mathcal{R}^a{}_b\wedge\theta_a\wedge\theta^d\right)\wedge *\left(\mathcal{R}^c{}_d\wedge\theta_c\wedge\theta^b\right) + \\
& + \tau_6\left(\mathcal{R}^a{}_b\wedge\theta_c\wedge\theta^d\right)\wedge *\left(\mathcal{R}^c{}_d\wedge\theta_a\wedge\theta^b\right) + \\
& + \varrho_1\mathcal{T}^a\wedge *\mathcal{T}_a + \varrho_2(\mathcal{T}^a\wedge\theta_a)\wedge *(\mathcal{T}^b\wedge\theta_b) + \varrho_3(\mathcal{T}^a\wedge\theta_b)\wedge *(\mathcal{T}^b\wedge\theta_a)\,.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Данная часть лагранжевой плотности сохраняет свой вид (при учете (10)) также в пространстве Римана–Картана RC_4 и представляет собой лагранжеву плотности пуанкаре калибровочной теории гравитации [7-13].

Константы связи лагранжевых плотностей (12) и (8) связаны линейными соотношениями [11], из которых в дальнейшем будут использованы следующие:

$$
\varrho_1 = \frac{1}{3}(2\chi_1+\chi_2)\,, \qquad \varrho_2 = \frac{1}{3}(-\chi_1+\chi_3)\,, \qquad \varrho_3 = \frac{1}{3}(\chi_1-\chi_2)\,. \tag{13}
$$

Уравнение, полученное путем варьирования по связности Γ^a_b(Г-уравнение), после учета свойств (9) и (10) и антисимметризации по a, b будет иметь вид:

$$
\begin{aligned}
& f_0\mathrm{D}\eta_a{}^b + 2\tau_1\mathrm{D} * \mathcal{R}^b_a + \tau_2\mathrm{D}\left(\theta_a\wedge *\left(\mathcal{R}^{cb}\wedge\theta_c\right) - \theta^b\wedge *\left(\mathcal{R}^c_a\wedge\theta_c\right)\right) + \\
& + \tau_3\mathrm{D}\left(\theta^c\wedge *\left(\mathcal{R}_c{}^b\wedge\theta_a\right) - \theta^c\wedge *\left(\mathcal{R}_{ca}\wedge\theta^b\right)\right) + \\
& + 2\tau_4\mathrm{D}\left(\theta_a\wedge\theta^b\wedge *\left(\mathcal{R}^{cd}\wedge\theta_c\wedge\theta_d\right)\right) + \\
& + \tau_5\mathrm{D}\left(\theta_a\wedge\theta^d\wedge *\left(\mathcal{R}^c_d\wedge\theta_c\wedge\theta^b\right) - \theta^b\wedge\theta^d\wedge *\left(\mathcal{R}^c_d\wedge\theta_c\wedge\theta_a\right)\right) + \\
& + 2\tau_6\mathrm{D}\left(\theta_c\wedge\theta^d\wedge *\left(\mathcal{R}^c_d\wedge\theta_a\wedge\theta^b\right)\right) + \\
& + \varrho_1\left(\theta^b\wedge *\mathcal{T}_a - \theta_a\wedge *\mathcal{T}^b\right) + 2\varrho_2\theta^b\wedge\theta_a\wedge *\left(\mathcal{T}^c\wedge\theta_c\right) + \\
& + \varrho_3\left(\theta^b\wedge\theta^c\wedge *\left(\mathcal{T}_c\wedge\theta_a\right) - \theta_a\wedge\theta^c\wedge *\left(\mathcal{T}_c\wedge\theta^b\right)\right) = 0\,.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

При этом симметризация по a, b не приводит к новому уравнению, а позволяет определить 1-форму лагранжевого множителя Λ^b_a.

После варьирования по базисным формам θ^a и учете (9) и (10) получим уравнение

$$
\begin{aligned}
& f_0\mathcal{R}^{bc}\wedge\eta_{abc} + \tau_1\left(\mathcal{R}^n_b\wedge *\left(\mathcal{R}^b_n\wedge\theta_a\right) + *\left(*\mathcal{R}^b_n\wedge\theta_a\right)\wedge *\mathcal{R}^n_b\right) + \\
& + \tau_2\left(2\mathcal{R}_{an}\wedge *\left(\mathcal{R}^{mn}\wedge\theta_m\right) - \left(\mathcal{R}^{rb}\wedge\theta_r\right)\wedge *\left(\mathcal{R}^m_b\wedge\theta_m\wedge\theta_a\right)\right) - \\
& - \tau_2\left(*\left(*\left(\mathcal{R}^{mn}\wedge\theta_m\right)\wedge\theta_a\right)\wedge *\left(\mathcal{R}^{rb}\wedge\theta_r\right)\right) + \\
& + \tau_3\left(-2\mathcal{R}^t_n\wedge *\left(\mathcal{R}^n_a\wedge\theta_t\right) - \left(\mathcal{R}^b_l\wedge\theta_m\right)\wedge *\left(\mathcal{R}^m_b\wedge\theta^l\wedge\theta_a\right)\right) - \\
& - \tau_3\left(*\left(*\left(\mathcal{R}^m_b\wedge\theta^l\right)\wedge\theta_a\right)\wedge *\left(\mathcal{R}^b_l\wedge\theta_m\right)\right) + \\
& + \tau_4\left(4\mathcal{R}_{ab}\wedge\theta^b\wedge *\left(\mathcal{R}^{ln}\wedge\theta_l\wedge\theta_n\right) + *\left(*\left(\mathcal{R}^l_n\wedge\theta_l\wedge\theta^n\right)\wedge\theta_a\right)\wedge *\left(\mathcal{R}^t_b\wedge\theta_t\wedge\theta^b\right)\right) + \\
& + \tau_5\left(4\mathcal{R}_{[a|b|}\wedge\theta^l\wedge *\left(\mathcal{R}^n_{l]}\wedge\theta_n\wedge\theta^b\right) + *\left(*\left(\mathcal{R}^n_l\wedge\theta_n\wedge\theta^b\right)\wedge\theta_a\right)\wedge *\left(\mathcal{R}^t_b\wedge\theta_t\wedge\theta^l\right)\right) + \\
& + \tau_6\left(4\mathcal{R}^n_b\wedge\theta^l\wedge *\left(\mathcal{R}_{al}\wedge\theta_n\wedge\theta^b\right) + *\left(*\left(\mathcal{R}^l_n\wedge\theta^t\wedge\theta^b\right)\wedge\theta_a\right)\wedge *\left(\mathcal{R}_{tb}\wedge\theta_l\wedge\theta^n\right)\right) + \\
& + \varrho_1\left(2\mathrm{D} * \mathcal{T}_a + \mathcal{T}_n\wedge *\left(\mathcal{T}^n\wedge\theta_a\right) + *\left(*\mathcal{T}^n\wedge\theta_a\right)\wedge *\mathcal{T}_n\right) + \\
& + \varrho_2\left(4\mathrm{D}\mathcal{T}_a\wedge *\left(\mathcal{T}^b\wedge\theta_b\right) - 2\theta_a\wedge\mathrm{D} * \left(\mathcal{T}^b\wedge\theta_b\right) - \left(\mathcal{T}^l\wedge\theta_l\right)\wedge *\left(\mathcal{T}^b\wedge\theta_b\wedge\theta_a\right)\right) - \\
& - \varrho_2\left(*\left(*\left(\mathcal{T}^b\wedge\theta_b\right)\wedge\theta_a\right)\wedge *\left(\mathcal{T}^l\wedge\theta_l\right)\right) + \\
& + \varrho_3\left(2\mathcal{T}^b\wedge *\left(\mathcal{T}_a\wedge\theta_b\right) + 2\mathrm{D}\left(\theta^b\wedge *\left(\mathcal{T}_b\wedge\theta_a\right)\right) - \left(\mathcal{T}_l\wedge\theta_n\right)\wedge *\left(\mathcal{T}^n\wedge\theta^l\wedge\theta_a\right)\right) - \\
& - \varrho_3\left(*\left(*\left(\mathcal{T}^n\wedge\theta^l\right)\wedge\theta_a\right)\wedge *\left(\mathcal{T}_l\wedge\theta_n\right)\right) = 0\,.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Уравнения поля (14), (15) совпадают с вариационными уравнениями, полученными в работах [5, 6], в которых лагранжева плотность строилась непосредственно в пространстве RC_4. Это обосновывает эквивалентость указанных во введении второго и третьего методов варьирования при получении уравнений гравитационного поля в пространстве RC_4. Неэкевивалентность этих методов первому методу очевидна, так как в этом случае ввиду отсутствия ${\Lambda_a}^b$ симметризация приводит к дополнительному уравнению поля. Заметим также, что уравнения (14), (15) представляют собой частный случай уравнений поля конформной теории гравитации в пространстве Картана–Вейля, развитой в [14-18], если в них приравять нулю след 1-формы неметричности $\mathcal{Q}$, для скалярного поля Дезера–Дирака положить $\beta = 1$ и произвести замену $\varrho_2 \longleftrightarrow \varrho_3$.

Связность в пространстве RC_4 может быть разложена на риманову часть и конторсию, линейно зависящую от тензора кручения [10]:

$$\overset{C}{\Gamma}{}^a{}_b = \overset{R}{\Gamma}{}^a{}_b + \mathcal{K}^a{}_b\,, \qquad \mathcal{T}^a = \mathcal{K}^a{}_b \wedge \theta^\beta\,, \tag{16}$$

$$\mathcal{K}_{ab} = 2\mathbf{e}_{[a}\rfloor \mathcal{T}_{b]} - \frac{1}{2}\mathbf{e}_a\rfloor \mathbf{e}_b\rfloor(\mathcal{T}_c \wedge \theta^c)\,, \tag{17}$$

где $\overset{R}{\Gamma}{}^a{}_b$ есть 1-форма связности Римана и $\mathcal{K}^a{}_b$ представляет собой 1-форму конторсии.

Разложение связности (16) индуцирует разложение кривизны:

$$\overset{C}{\mathcal{R}}{}^a{}_b = \overset{R}{\mathcal{R}}{}^a{}_b + \overset{R}{\mathrm{D}}\,\mathcal{K}^a{}_b + \mathcal{K}^a{}_c \wedge \mathcal{K}^c{}_b\,, \tag{18}$$

где $\overset{R}{\mathcal{R}}{}^a{}_b$ – 2-форма кривизны Римана и $\overset{R}{\mathrm{D}}$ есть внешний ковариантный дифференциал относительно 1-формы связности Римана $\overset{R}{\Gamma}{}^a{}_b$.

Для скаляра кривизны имеем разложение:

$$\mathcal{R}^a{}_b \wedge \eta^b{}_a = \overset{R}{\mathcal{R}}{}^a{}_b \wedge \eta^b{}_a - \overset{R}{\mathrm{D}}\left(*\overset{(2)}{\mathcal{T}_a} \wedge \theta_a\right) + \overset{(1)}{\mathcal{T}^a} \wedge *\overset{(1)}{\mathcal{T}_a} - 2\overset{(2)}{\mathcal{T}^a} \wedge *\overset{(2)}{\mathcal{T}_a} - \frac{1}{2}\overset{(3)}{\mathcal{T}^a} \wedge *\overset{(3)}{\mathcal{T}_a}\,. \tag{19}$$

3 Плоские волны кручения в пространстве Римана–Картана

Нас будут интересовать те ограничения на гравитационный лагранжиан (8), к которым может привести существование плоских волн кручения, так как общий гравитационный лагранжиан (12) в пространстве Римана–Картана содержит девять произвольных параметров, и важной задачей теории гравитации с квадратичными лагранжианами является нахождение критериев уменьшения числа свободных параметров.

В соответствии с работой [1] введем координатный базис, образованный двумя нулевыми векторами $\mathbf{e}_0 = \partial_{\mathrm{v}}$, $\mathbf{e}_1 = \partial_u$ и двумя пространственно подобными векторами $\mathbf{e}_2 = \partial_x$, $\mathbf{e}_3 = \partial_y$. Вектор $\mathbf{e}_0$ выбирается ковариантно постоянным и направленным вдоль волнового луча, причем волновая поверхность $(u, \mathrm{v}) = const$ параметризована координатами x и y.

Плоская волна метрики имеет вид

$$\breve{g} = 2H(x,y,u)du^2 + 2dudv - dx^2 - dy^2\,, \tag{20}$$

и представляет собой частный случай метрики плоскофронтовых гравитационных волн с параллельными лучами (pp-волн) [1, 4], где координата u имеет смысл запаздывающего времени и интерпретируется как фаза волны.

Если образовать кобазис в кокасательном пространстве из 1-форм

$$\theta^0 = H(x,y,u)\mathrm{d}u + dv\,, \quad \theta^1 = \mathrm{d}u\,, \quad \theta^2 = \mathrm{d}x\,, \quad \theta^3 = \mathrm{d}y\,, \tag{21}$$

то метрике (20) будет соответствовать метрический тензор

$$\breve{g} = g_{ab}\theta^a \otimes \theta^b\,, \qquad g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Риманово пространство R_4 с метрикой плоской волны допускает группу симметрий G_5, порождаемую векторными полям X со структурой [1]:

$$X = (a + b^{'}x + c^{'}y)\partial_v + b\partial_x + c\partial_y\,, \tag{22}$$

где $a = const$, а $b(u)$, $c(u)$ – произвольные функции и b' c' – их производные.

Группа движений G_5 оставляет неизменной изотропную гиперповерхность в R_4, описывающую фронт волны с постоянной амплитудой [1]. Как pp-волны, плоские волны метрики обладают нулевыми сдвигом, вращением и растяжением.

Определение [5]**.** Назовем пространство Римана–Картана RC_4 пространством RC_4 типа плоской волны, а его метрику и кручение – плоскими волнами метрики и кручения, если метрика g_{ab} и 2-форма кручения $\mathcal{T}^a$ этого пространства допускают группу симметрий G_5, что означает выполнение условий: $\mathrm{L}_X g_{ab} = 0$, $\mathrm{L}_X \mathcal{T}^a = 0$, где L_X – производная Ли вдоль векторного поля X, порождающего группу симметрий G_5.

Доказана следующая теорема [6].

Теорема 1. *2-форма кручения пространства RC_4 типа плоской волны имеет следующую структуру: бесследовая часть зависит от двух произвольных функций $t_1(u)$ и $t_2(u)$ запаздывающего аргумента u, а след и псевдослед зависят каждый от одной произвольной функции от u, соответственно, $t_3(u)$ и $t_4(u)$:*

$$\overset{(1)}{\mathcal{T}^0} = t_1(u)\,\theta^1 \wedge \theta^2 + t_2(u)\,\theta^1 \wedge \theta^3\,, \tag{23}$$

$$\overset{(2)}{\mathcal{T}^0} = t_3(u)\theta^0 \wedge \theta^1, \quad \overset{(2)}{\mathcal{T}^2} = -t_3(u)\theta^1 \wedge \theta^2, \quad \overset{(2)}{\mathcal{T}^3} = -t_3(u)\theta^1 \wedge \theta^3\,, \tag{24}$$

$$\overset{(3)}{\mathcal{T}^0} = t_4(u)\theta^2 \wedge \theta^3, \quad \overset{(3)}{\mathcal{T}^2} = t_4(u)\theta^1 \wedge \theta^3, \quad \overset{(3)}{\mathcal{T}^3} = -t_4(u)\theta^1 \wedge \theta^2\,. \tag{25}$$

Для доказательства подставим векторное поле (22) в уравнение $\mathrm{L}_X \mathcal{T}^a = 0$. В результате приходим к системе уравнений, следствием которой ввиду произвольности функций b, c, b' и c' будет равенство нулю всех компонент кручения за исключением тех, которые выражены формулами (23)–(25) через четыре произвольных функций от u.

Данная теорема обобщает результат работы [5], в которой плоские волны кручения зависели только от двух произвольных функций, определяющих его бесследовую часть. В [1], а затем в [5] из аналогии с плоскими электромагнитными волнами было введено дополнительное условие $\Gamma^a_{\ b} = \Gamma^a_{\ b1}\theta^1$. Следствием данного условия было то, что свойством плоских волн кручения могла обладать только бесследовая компонента кручения (23), содержащая две произвольные функции. После того, как в [6] в соответствии с [2] это условие уже не налагалось, свойством плоских волн стали обладать также след (24) и псевдослед (25) кручения.

Рассмотрим теперь вариационные уравнения гравитационного поля (14), (15) в пространстве Римана–Картана RC_4. Данные уравнения с помощью разложений (16)–(19) могут быть разбиты на слагаемые, относящиеся к пространству Римана R_4 и на дополнительные слагаемые, определяемые компонентеми кручения вида (23)–(25). При этом ненулевые компоненты кривизны и тензор Риччи пространства Римана оказываются равными (остальные компоненты равны нулю, $R_{ab} = R^c{}_{acb}$)

$$\overset{R}{\mathcal{R}}{}^0{}_2 = \overset{R}{\mathcal{R}}{}^2{}_1 = H_{xx}\theta^2 \wedge \theta^1 + H_{xy}\theta^3 \wedge \theta^1 \,, \tag{26}$$

$$\overset{R}{\mathcal{R}}{}^0{}_3 = \overset{R}{\mathcal{R}}{}^3{}_1 = H_{xy}\theta^2 \wedge \theta^1 + H_{yy}\theta^3 \wedge \theta^1 \,, \tag{27}$$

$$\overset{R}{R}_{11} = H_{xx} + H_{yy} \,, \tag{28}$$

где H_{xx}, H_{xy} и H_{yy} – вторые частные производные от функции $H(u, x, y)$ по соответствующим координатам. Вычисляя для компонент кручения (23)–(25) конторсию на основе представления (17)), находим для компонент кривизны в пространстве RC_4:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^0{}_2 = \mathcal{R}^2{}_1 = (H_{xx} - \partial_u t_3 + (t_3)^2 - (1/4)(t_4)^2)\theta^2 \wedge \theta^1 + \\ +(H_{xy} + (1/2)\partial_u t_4 - t_3 t_4)\theta^3 \wedge \theta^1 \,, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^0{}_3 = \mathcal{R}^3{}_1 = (H_{xy} - (1/2)\partial_u t_4 + t_3 t_4)\theta^2 \wedge \theta^1 + \\ +(H_{yy} - \partial_u t_3 + (t_3)^2 - (1/4)(t_4)^2)\theta^3 \wedge \theta^1 \,. \end{aligned} \tag{30}$$

Подставляя эти выражения в θ-уравнение поля (15), найдем, что единственной ненулевой компонентой этого уравнения будет u-компонента, имеющая вид

$$\begin{aligned} (-2f_0(H_{xx} + H_{yy}) + 2\partial_u t_3(u)(f_0 - \rho_1 + 2\rho_2) - 2(t_3(u))^2(f_0 - \rho_1 + 2\rho_2) + \\ +(1/2)(t_4(u))^2(f_0 - 4\rho_1 - 4\rho_2 + 12\rho_3))\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0 \,. \end{aligned} \tag{31}$$

При этом все квадратичные по кривизне слагаемые оказываются равными нулю.

В силу произвольности функций $t_3(u)$, $\partial_u t_3(u)$, $t_4(u)$ из уравнения (31) следует равенство нулю следующих величин:

$$f_0 - \rho_1 + 2\rho_2 = 0 \,, \quad f_0 - 4\rho_1 - 4\rho_2 + 12\rho_3 = 0 \,, \quad f_0(H_{xx} + H_{yy}) = 0 \,. \tag{32}$$

Принимая во внимание связь констант (13), найдем, что первые два равенства (32) означают справедливость соотношений

$$2f_0 - \chi_2 = 0 \,, \qquad f_0 - 2\chi_3 = 0 \,, \tag{33}$$

а на основании (28) из последнего равенства (32) вытекает равенство

$$f_0 \overset{R}{R}_{ab} = 0 \,. \tag{34}$$

Обратимся теперь к Г-уравнению (14) и подставим в него выражения (29), (30). Выпишем одну из ненулевых компонент этого уравнения, например, (u, x)-компоненту:

$$\begin{aligned} -t_4(u)(f_0 - 2\rho_1 - 6\rho_2 - 2\rho_3)\mathrm{dv} \wedge \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}x - t_3(u)(2f_0 - \rho_1 + 2\rho_3)\mathrm{dv} \wedge \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}y + \\ +(2f_0(\tau_1 - \tau_3)(H_{xyy} + H_{xxx}) - t_1(u)(f_0 + \rho_1 + \rho_3))\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0 \,. \end{aligned} \tag{35}$$

Первое слагаемое во второй строке этого уравнения обращается в нуль как следствие последнего равенства в (32). Из второго слагаемого во второй строке этого уравнения вследствие произвольности функции $t_1(u)$ вытекает равенство

$$f_0 + \rho_1 + \rho_3 = 0 \,. \tag{36}$$

Дальнейшие вычисления показывают, что в уравнении (14) слагаемые с коэффициентами τ_2, τ_4, τ_5 и τ_6 тождественно равны нулю, а слагаемые с коэффициентом τ_1 равны

$$\begin{aligned} 2\tau_1 \mathrm{D} * \mathcal{R}^0{}_2 = 2\tau_1 \mathrm{D} * \mathcal{R}^2{}_1 = 2\tau_1(H_{xxx} + H_{xyy})\eta^1 = 0 \,, \\ 2\tau_1 \mathrm{D} * \mathcal{R}^0{}_3 = 2\tau_1 \mathrm{D} * \mathcal{R}^3{}_1 = 2\tau_1(H_{xxy} + H_{yyy})\eta^1 = 0 \,. \end{aligned}$$

Здесь равенство нулю является следствием последнего из равенств (32). Слагаемые с коэффициеном τ_3 также определяются равными нулю выражениями $(H_{xxx}+H_{xyy})$ и $(H_{xxy}+H_{yyy})$. Остальные слагаемые уравнения (14) также оказываются равными нулю вследствие равенств (32) и (36). Наконец, в силу соотношений (13) равенство (36) эквивалентно равенству

$$f_0+\chi_1=0\,. \tag{37}$$

Полученные результаты могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пространство Римана–Картана RC_4 типа плоской волны с четырьмя произвольными функциями является решением вариационных уравнений гравитационного поля в этом пространстве тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия для гравитационного лагранжиана* (8)*:*

$$a)\quad f_0\overset{R}{R}_{ab}=0\,, \tag{38}$$

$$b)\quad f_0+\chi_1=0\,,\quad 2f_0-\chi_2=0\,,\quad f_0-2\chi_3=0\,. \tag{39}$$

Данная теорема имеет важное следствие.

Следствие. *В пространстве Римана–Картана RC_4 плоские волны неприводимых компонент кручения (бесследовой компоненты, следа и псевдоследа) могут переносить информацию, распространяющуюся со скоростью света.*

Первая часть этого утверждения обосновывается тем, что решение для плоских волн неприводимых компонент кручения содержит произвольные функции, что характерно для асимптотического поведения волн в волновой зоне (две произвольных функции для бесследовой компоненты и по одной для следа и псевдоследа). Это позволяет производить амплитудную модуляцию плоской волны, что означает согласно А. Траутману [19] возможность для этого типа волн переносить информацию.

Вторая часть утверждения указанного следствия вытекает из того, что массы покоя квантов неприводимых компонент поля кручения типа плоской волны равны нулю. Для обоснования этого в исходную лагранжеву плотность (8) подставим (с учетом (9) и (10)) разложение (19) и убедимся, что вследствие соотношений (39) все слагаемые с квадратами неприводимых компонент кручения в (8) оказываются равными нулю, что означает безмассовость квантов соответствующих компонент поля кручения.

Установленные в теореме условия (39) на константы гравитационного лагранжиана оказывается важным еще в связи с тем, что при этих условиях сферически симметричное решение для кручения, порождаемого островной системой материи, имеет асимптотику $1/r$ [20]. Такая асимптотика необходима для правильного истолкования закона сохранения энергии-импульса гравитационного поля в пространстве Римана–Картана [11]. Найденные условия на константы лагранжиана важны также с квантовой точки зрения как одно из возможных условий отсутствия в теории духов и тахионов.

Благодарности

Автор благодарит Б.Н. Фролова за активную помощь и поддержку при написании работы и В.В. Житникова за предоставление возможности использовать разработанную им программу символьных вычислений на компьютере GRG [21].

Литература

[1] Adamovich W. Plane waves in gauge theories of gravitation // *Gen. Rel. Grav*, 1980, V. 12, pp. 677–691.

[2] Sipper R, Goenner H. Symmetry classes of pp-waves // *Gen. Relat. Grav.*, 1986, V. 18, pp. 1229–1243.

[3] Jogia S., Griffiths J. B. // *Gen. Rel. Grav.*, 1980, V. 12, pp. 597–617.

[4] Zhytnikov V.V. Wavelike exact solutions of $R + R^2 + Q^2$ gravity // *J. Math. Phys.*, 1994, V. 35, pp. 6001–6017.

[5] Babourova O.V., Frolov B.N., Klimova E.A. Plane torsion waves in quadratic gravitational theories in Riemann-Cartan space // *Class. Quantum Grav.*, 1999, V. 16, pp. 1149–1162.

[6] Бабурова О.В., Фролов Б.Н., Щербань В.Н. Плоские волны кручения в пуанкаре калибровочной теории гравитации // *Известия высших учебных заведений. Физика.*, 2012, Т. 55, № 6, с. 114–116.

[7] Frolov B.N. // *Вестник Моск. ун-та, сер. физ., астрон.*, 1963, № 6, с. 48–58.

[8] Hayashi K. Gauge Theories of Masive and Massless Tensor Fields // *Prog. Theor. Phys.*, 1968, V. 39, pp. 494–515.

[9] Frolov B.N. Tetrad Palatini formalism and quadratic Lagrangians in the gravitational field theory // *Acta Phys. Polon.*, 1978, V. B9, pp. 823–829.

[10] Hehl F.W., McCrea J.D., Mielke E.W., Neeman Y. Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance // *Phys. Rep.*, 1995, V. 258, pp. 1–171.

[11] Фролов Б.Н. Пуанкаре калибровочная теория гравитации. М.: МПГУ, Прометей, 2003, 160 с.

[12] Frolov B.N. On Foundations of Poincare-Gauge Theory of Gravity // *Grav. Cosmol. (Гравитация и космология).*, 2004, V. 6, N. 4(24), pp. 116–120.

[13] Obukhov Yu.N. Poincaré gauge gravity: selected topics // *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 2006, V. 3, pp. 95–138 (gr-qc/0601090v1).

[14] Babourova O.V., Frolov B.N., Kostkin R.S. Dirac's scalar field as dark energy with the frameworks of conformal theory of gravitation in Weyl–Cartan space. ArXive: 1006.4761[gr-qc], 2010.

[15] Babourova O.V., Frolov B.N. Dark energy, Dirac's scalar field and the cosmological constant problem. ArXive: 1112.4449 [gr-qc], 2011.

[16] Бабурова О.В., Косткин Р.С., Фролов Б.Н. Эксперимент "GRAVITY PROBE B", взаимодействие орбитального момента с калибровочным полем и гравидиамагнитный эффект // *Известия вузов. Физика.*, 2011, Т. 54, № 1, С. 111–112.

[17] Бабурова О.В., Липкин К.Н., Фролов Б.Н. Теория гравитации со скалярным полем Дирак и проблема космологической постоянной // *Известия вузов. Физика.*, 2012, Т. 55, № 7, с. 113–115.

[18] Babourova O.V., Frolov B.N., Lipkin K.N. Theory of gravity with a Dirac scalar field in the exterior form formalism and the cosmological constant problem // *Grav. Cosm.*, 2012, V. 18, No 4, pp. 225–231.

[19] Trautman A. In: Recent development in general relativity (Pergamon Press, Oxford–London–New York–Paris, PNN–Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1962), pp. 459–464.

[20] Zhang Y.Z. Approximate solution for general Riemann-Cartan-type $R + R^2$ theories of gravitation // *Phys. Rev. D.*, 1983, V. 28, pp. 1866–1871.

[21] Zhytnikov V.V. GRG. Computer algebra system for differential geometry, gravity and field theory. Ver. 3.2, Moscow, 1997.

INVESTIGATION OF ROLE OF IRREDUCIBLE TORSION COMPONENTS UNDER PLANE WAVE PROPAGATION IN RIEMANNIAN-CARTAN SPACE

V.N. Shcherban

Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia

vovan-ru1@yandex.ru

For quadratic lagrangian of general type obtained variational equations of gravitational field in Riemannian-Catran space. Structure of irreducible torsion components under plane wave propagation in Riemannian-Catran space is investigated.

Key Words: connection, Kaeler space, Berwald-Moore space.