НЕГОЛОНОМНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА С МЕТРИКОЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА

А.В. Букушева

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

bukusheva@list.ru

На гладком пятимерном многообразии рассматривается распределение коразмерности 1 с финслеровой метрикой типа Бервальда-Моора. Определяется внутренняя связность, ассоциированная с заданной метрической структурой.

Ключевые слова: метрика Бервальда-Моора, внутренняя связность, неголономное многообразие Бервальда-Моора.

1 Введение

В n-мерном линейном пространстве с заданным базисом естественным образом определяется коммутативная ассоциативная алгебра (алгебра поличисел), согласованная с метрической функцией Бервальда-Моора (БМ) [1]. Алгебра поличисел P_n является обобщением алгебры двойных чисел. Таким образом, в алгебре поличисел P_n существует базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ такой, что $\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}\vec{e}_\alpha$. Если алгебру поличисел рассматривать как гладкое многообразие X, то соответствующая метрика Бервальда-Моора определяется функцией, не зависящей от выбора точки многообразия X [1]. В более общей ситуации, метрическая функция БМ определяется некоторым гладким полем полиформ. По-видимому, такая попытка обобщения многообразия БМ впервые была предпринята в работе [2]. Настоящая статья является продолжением этой работы. Переход от алгебры поличисел к многообразию с заданным полем полиформ в некотором смысле аналогичен продолжению специальной теории относительности до ОТО. В предлагаемой статье делается новый шаг на пути обобщения геометрии пространств с метрикой БМ. Идеи Калуцы-Клейна подтолкнули исследователей к построению моделей физического пространства, основанных на использовании геометрии почти контактных метрических структур. Авторы работы [3] предполагают, что пространство скоростей частиц является четырехмерным неголономным распределением на многообразии более высокой размерности. Это распределение задается 4-потенциалом электромагнитного поля. Уравнения допустимых (горизонтальных) геодезических для этого распределения совпадают с уравнениями движения заряженной частицы общей теории относительности. На распределении определен метрический тензор лоренцевой сигнатуры $(+,-,-,-)$, что позволяет определять причинность, как в общей теории относительности. Авторы вводят ковариантное дифференцирование (линейную связность) и тензор кривизны для распределения. Впрочем, связность в распределении и ее инварианты были исследованы задолго до этого профессором Вагнером [4]. Применительно к распределению с финслеровой метрикой задачи построения связности и ее инвариантов решались в работах [5, 6]. Помимо введения работа содержит три раздела. Во втором разделе дается краткое изложение работы [2]. В третьем разделе обсуждается понятия внутренней связности. В четвертом разделе содержится введение в геометрию распределения с финслеровой метрикой типа БМ.

2 Многообразия с полиаффинорной структурой и метрикой Бервальда-Моора

Пусть X - связное C^∞ – многообразие размерности n. Все встречающиеся на X функции и геометрические объекты будем считать бесконечно дифференцируемыми. В дальнейшем для удобства всякое тензорное поле мы будем называть тензором и, в частности, поле полиформ – полиформой. При исследовании пространств БМ, как правило, используются методы финслеровой геометрии. Однако, учитывая, что в основе определения метрики БМ лежит полилинейная форма, при изучении пространств БМ можно использовать линейную ковариантную производную и соответствующие ей дифференциальные инварианты – кривизну, кручение и т.д. В работе [2] на многообразии X с метрикой Бервальда-Моора, определяемой полилинейной формой g, была задана полиаффинорная алгебра с аффинорами $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$. Оба объекта (полиформа и алгебра) были определены таким образом, чтобы при определенных условиях пространство $(X, g, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ свелось бы к уже известному пространству поличисел. В дальнейшем тройку $(X, g, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ будем называть многообразием Бервальда-Моора (БМ). Алгебра аффиноров определяется следующим образом [2]. На многообразии X задается поле одномерных распределений D_α таким образом, чтобы $TX = \oplus_{\alpha=1}^{n} D_\alpha$. Не нулевая алгебраическая метрика называется метрикой Бервальда-Моора, если существует поле базисов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ таких, что каждый вектор $\vec{e}_\alpha$ базиса, с одной стороны, задает нулевое направление формы g [2], а с другой – порождает соответствующее одномерное распределение: $D_\alpha =< \vec{e}_\alpha >$. Такое поле базисов будем называть адаптированным полем базисов формы g, или, просто адаптированным базисом. Форма g в адаптированном базисе имеет единственную, с точностью до перестановки индексов, отличную от нуля компоненту $g_{12...n}$.

Рассмотрим n распределений $D_{\hat{\alpha}}$ определяемых следующим образом:

$$D_{\hat{\alpha}} = D_1 \oplus \cdots D_{\alpha-1} \oplus D_{\alpha+1} \cdots \oplus D_n.$$

Таким образом, для любого α получаем разложение $TX = D_{\hat{\alpha}} \oplus D_\alpha$, задающее семейство проекторов $\varphi_\alpha : TX \to D_\alpha$.

Совокупность аффиноров φ_α относительно операции композиции образует n-мерную полиаффинорную алгебру, обозначаемую нами AH_n, изоморфную алгебре P_n. Будем говорить, что алгебра AH_n и метрика g - согласованы.

В адаптированном базисе аффинор φ_α имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Если на многообразии X существует атлас, состоящий из карт, адаптированных к метрике g, т.е., задающих адаптированный базис: $\partial_\alpha = \vec{e}_\alpha$, то алгебра AH_n оказывается интегрируемой. В этом случае многообразие X может рассматриваться как многообразие над алгеброй поличисел P_n [7].

Теорема 1 [2]. *На многообразии X существует единственная связность нулевого кручения, совместимая с метрикой БМ g, коэффициенты которой определяются равенствами* $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha} = \dfrac{\partial_\alpha g_{12...n}}{g_{12...n}}$. *(Суммирования по α нет.)*

Тензорной структурой на гладком многообразии называется определенная совокупность тензорных полей. Таким образом, в нашем рассмотрении находится тензорная структура, включающая в себя систему полиаффиноров и согласованную с этой системой полилинейную форму.

Тензорная структура называется интегрируемой, если на многообразии можно найти такой атлас, что всякий тензор структуры имеет в любой карте из этого атласа постоянные компоненты. Кручкович Г.И. в своей работе [7] сформулировал следующее утверждение: “Если тензорная структура допускает совместимую связность нулевой кривизны без кручения, то такая структура интегрируема. Всякая интегрируемая тензорная структура допускает связность нулевой кривизны без кручения, по крайней мере, локально".

Предложение Кручковича позволяет сформулировать следующую теорему

Теорема 2 [2]. *Тензорная структура* $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, g)$ *интегрируема тогда и только тогда, когда тензор кривизны совместимой с ней связности равен нулю.*

Используя выражение в координатах тензора кривизны R связности ∇, получаем, что единственными отличными от нуля компонентами тензора R являются

$$R^{\gamma}_{\alpha\gamma\gamma} = \partial_\alpha \frac{\partial_\gamma g_{12...n}}{g_{12...n}}$$

($\alpha \neq \gamma$, по γ суммирования нет).

3 Внутренняя связность

Рассмотрим многообразие X с заданным на нем с помощью 1-формы η гладким распределением (неголономным многообразием) D коразмерности 1. Будем полагать, что распределение D оснащено, т.е. определено одномерное распределение $D^\perp$ такое, что $TX = D \oplus D^\perp$, при этом, потребуем существование векторного поля $\vec{\xi}$, такого, что $D^\perp = Span(\vec{\xi})$.

Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n)$ $(a, b, c, e = 1, ..., n-1)$ на многообразии X будем называть адаптированной к неголономному многообразию D, если $D^\perp = Span(\dfrac{\partial}{\partial x^n})$ [5].

Пусть $p : TX \to D$ – проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ – адаптированная карта. Векторные поля $p(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему D: $D = Span(\vec{e}_a)$.

Таким образом, мы имеем на многообразии X неголономное поле базисов $(\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = M^n_{ab} \partial_n$, где компоненты M^n_{ab} образуют так называемый тензор неголономности [4]. Если потребовать, чтобы для всех адаптированных координат выполнялось равенство $\vec{\xi} = \partial_n$, то окажется справедливым равенство $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n$, где $\omega = d\eta$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ как базис, определяемый адаптированной картой. Заметим, что имеет место равенство $\partial_n \Gamma^n_a = 0$.

Тензорное поле назовем допустимым (к распределению D), если оно обращается в нуль каждый раз, когда его векторный аргумент принадлежит оснащению $D^\perp$, а ковекторный аргумент коллинеарен форме η. Координатное представление допустимого тензорного поля типа (p, q) в адаптированной карте имеет вид:

$$t = t^{a_1 ... a_p}_{b_1 ... b_q} \vec{e}_{a_1} \otimes ... \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes ... \otimes dx^{b_q}.$$

Так, в частности, под допустимым векторным полем будем понимать такое векторное поле, все значения которого лежат в распределении D, а под допустимой 1-формой будем понимать всякую 1-форму, обращающуюся в нуль на оснащении $D^\perp$.

Назовем допустимое тензорное поле интегрируемым, если в окрестности каждой точки многообразия X найдется адаптированная карта, относительно которой компоненты поля постоянны. Форма $\omega = d\eta$ является одним из примеров интегрируемой допустимой тензорной структуры. Если распределение D интегрируемо, то всякая допустимая интегрируемая структура является интегрируемой структурой на многообразии X. Естественность понятия интегрируемой допустимой тензорной структуры косвенно подтверждается следующими обстоятельствами. Интегрируемое оснащение $D^\perp$ определяет, как известно, слоение с одномерными слоями. Если на этом слоении каким-нибудь разумным образом задать структуру гладкого многообразия, то всякая допустимая интегрируемая тензорная структура естественным образом определит на таком многообразии интегрируемую тензорную структуру уже в обычном смысле.

Под внутренней линейной связностью в неголономном многообразии D понимается отображение

$$\nabla : \Gamma D \times \Gamma D \to \Gamma D$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$1)\nabla_{f_1\vec{u_1}+f_2\vec{u_2}} = f_1\nabla_{\vec{u_1}} + f_2\nabla_{\vec{u_2}},$$

$$2)\nabla_{\vec{u}}f\vec{v} = f\nabla_{\vec{u}}\vec{v} + (\vec{u}f)\vec{v},$$

где ΓD – модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определятся из соотношения

$$\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c.$$

Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным

$$S(\vec{X},\vec{Y}) = \nabla_{\vec{X}}\vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}}\vec{X} - p[\vec{X},\vec{Y}].$$

Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем $S^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}$.

Действие внутренней линейной связности естественным образом продолжается на произвольные допустимые тензорные поля. Важным примером внутренней линейной связности является внутренняя метрическая связность, однозначно определяемая условиями $\nabla g = 0$, $S = 0$ [4]. В адаптированных координатах мы имеем:

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

В работе [4] допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{u},\vec{v})\vec{w} = \nabla_{\vec{u}}\nabla_{\vec{v}}\vec{w} - \nabla_{\vec{v}}\nabla_{\vec{u}}\vec{w} - \nabla_{p[\vec{u},\vec{v}]}\vec{w} - p[q[\vec{u},\vec{v}],\vec{w}],$$

где $q = 1 - p$, названо Вагнером первым тензором кривизны Схоутена. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид:

$$R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a||e||}\Gamma^e_{b]c}.$$

В случае, когда распределение D не содержит интегрируемое распределение размерности $n-2$, обращение в нуль тензора кривизны Схоутена равносильно тому, что параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых не зависит от пути переноса [4]. Назовем тензор Схоутена тензором кривизны распределения D, а распределение D, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, - распределением нулевой кривизны. Нетрудно установить, что частные производные $\partial_n\Gamma^a_{bc} = P^a_{bc}$ являются компонентами допустимого тензорного поля [4].

4 Основные понятия геометрии распределения с финслеровой метрикой типа Бервальда-Моора

Пусть X – гладкое многообразие размерности 5. Как и в предыдущем разделе, будем считать, что $TX = D \oplus D^{\perp}$, где D – распределение коразмерности 1. Не нарушая общности, сразу перейдем к случаю, когда $X = R^5$, а распределение D порождается векторными полями

$$\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_5, \quad \vec{e}_2 = \partial_2, \quad \vec{e}_3 = \partial_3 - x^4\partial_5, \quad \vec{e}_4 = \partial_4.$$

Зададим семейство допустимых аффиноров (φ_a), полагая

$$\varphi_a(\vec{e}_b) = \begin{cases} \vec{0}, a \neq b, \\ \vec{e}_a, a = b. \end{cases}$$

Пусть, далее, g – поле симметрических форм, все компоненты которых равны нулю, за исключением (с точностью до перестановки) $g_{1234} = g$. Здесь $g_{1234} = g(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Назовем четверку $(X, D, g, \varphi_1, ..., \varphi_4)$ неголономным многообразием Бервальда-Моора. Имеет место

Теорема 3. *Существует единственная внутренняя связность ∇ с нулевым кручением такая, что $\nabla g = 0$.*

Доказательство. Единственность. Для всех a равенство $\nabla g = 0$ сведется к равенствам $\Gamma^b_{ab} = \dfrac{\vec{e}_a g_{1234}}{g_{1234}}$. Если потребовать обращения в нуль кручения, то окажется, что отличными от нуля компонентами искомой связности будут, лишь $\Gamma^a_{aa} = \dfrac{\vec{e}_a g_{1234}}{g_{1234}}$ (по a суммирования нет). Существование заявленной связности проверяется непосредственно. □

Проводя необходимые вычисления, получаем следующие выражения для отличных от нуля компонент тензора кривизны Схоутена $R^c_{acc} = \vec{e}_a \dfrac{\vec{e}_c g_{1234}}{g_{1234}}$ ($a \neq c$, по c суммирования нет).

Условие интегрируемости формы g эквивалентно обращению в нуль тензора кривизны. Приравнивая к нулю нужные компоненты, получаем дифференциальные уравнения в частных производных следующего вида $\partial_a \dfrac{\partial_c g_{1234}}{g_{1234}} = 0$, $(a \neq c)$. Среди решений данной системы находятся функции вида $g_{1234} = e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4}$. По сути дела, в случае обращения в нуль тензора кривизны, каждую точку многообразия X можно снабдить двумя координатами. Одна из которых - действительное число, другая – поличисло.

Уравнения геодезических допустимой связности запишем в виде

$$\ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{x}^b\dot{x}^c = 0,$$
$$\dot{x}^n = -\dot{x}^a\Gamma^n_a\partial_n.$$

Или, с учетом проведенных вычислений,

$$\ddot{x}^a + \frac{\vec{e}_a g_{1234}}{g_{1234}}(\dot{x}^a)^2 = 0,$$
$$\dot{x}^n = -\dot{x}^a\Gamma^n_a\partial_n.$$

Литература

[1] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Конформные калибровки геометрии Бервальда-Моора и индуцированные ими нелинейные симметрии // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, №10, 2008, с. 3–14.

[2] Букушева А.В. О пространстве над алгеброй поличисел с метрикой Бервальда-Моора // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(15), том 8, 2011, с. 99–103.

[3] Крым В. Р., Петров Н.Н. Тензор кривизны и уравнения Эйнштейна для четырехмерного неголономного распределения // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.*, 2008. Вып. 3. с. 68–80.

[4] Вагнер В.В. Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // *Тр. семинара по векторному и тензорному анализу*, вып. 5, 1941, с. 173-255 .

[5] Букушева А.В., Галаев С.В. Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер.* 2012. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. с. 17-22.

[6] Букушева А.В. О геометрии слоений на распределениях с финслеровой метрикой // *Известия Пензенского государственного педагогического университета имени В.Г. Белинского. (Серия физико-математические и технические науки).* №30, 2012, с. 33–38.

[7] Кручкович Г.И. Гиперкомплексные структуры на многообразиях, I // *Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу* М. 1972. Т. 16. с. 174–201.

NONHOLONOMIC GEODESIC IN SPACE WITH FOR BERWALD-MOOR METRIC

A.V. Bukusheva

Saratov State University, Saratov, Russia

bukusheva@list.ru

On a smooth five-dimensional manifold is considered distribution of codimension 1 with the Finsler metric type Berwald-Moor. We define the intrinsic connection associated with a given metric structure.

Key Words: a Berwald-Moor metric, intrinsic connection, nonholonomic manifold Berwald-Moor.