ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ

Г.И. Гарасько

ФГУП ВЭИ, Москва, Россия

gri9z@yandex.ru, gri9z.wordpress.com

Если раньше финслерова геометрия претендовала лишь на решение задачи геометризации классической механики, то после формулировки несколько лет назад *принципа самодостаточности финслеровой геометрии* можно говорить о том, что с помощью финслеровой геометрии, по-видимому, может быть решена проблема геометризации физики в целом.

Из принципа самодостаточности финслеровой геометрии получаются уравнения поля, причем гравитационное поле и электромагнитное поле естественным образом объединяются и в псевдоримановом четырехмерном пространстве, и в кривом четырехмерном пространстве Бервальда-Моора; а тензор энергии – импульса, связанный с законами сохранения, получается обычным образом по теореме Э. Нетер.

В приближении малых полей из принципа самодостаточности финслеровой геометрии в первом приближении могут получаться линейные уравнения поля для нескольких независимых полей. При усилении полей, то есть при переходе ко второму и следующим приближениям (или отсутствию приближениий по малости полей), полевые уравнения становятся, вообще говоря, нелинейными, и поля перестают быть независимыми, что приводит к невыполнению закона суперпозиции для каждого отдельного поля и к дополнительному взаимодействию между разными полями.

В любом финслеровом пространстве существует поле или поля в этом пространстве можно дополнить полем, которое имеет смысл действия как функции координат и которое аналогично действительной части комплексного потенциала на евклидовой плоскости. Такой потенциал мы предлагаем называть конформным потенциалом, так как он обычно связан с положительным функциональным множителем перед некоторой исходной метрической функцией.

Невырожденные поличисла являются финслеровыми пространствами, интересными сами по себе, а также, возможно, и как пространства, которые будут применимы в физике.

Для любого финслерового пространства можно построить уравнение аналогичное уравнению Шредингера или уравнению Клейна Гордона. То есть финслерова геометрия позволяет и предполагает развитие в кваново-механическую область.

Ключевые слова: финслерова геометрия, финслерово пространство, принцип самодостаточности, теория поля, триединство ОТО, триединство финслеровой геометрии, невырожденные поличисла, конформный потенциал, электромагнитное поле, гравитационное поле.

1 Введение

Финслеровой геометрии не повезло. Созданная как геометризация классической механики, она не вызвала особого интереса у физиков, так как не затрагивала вначале геометризацию классической теории поля, а значит не приводила к глобальной геометризации физики. Это задержало ее (финслеровой геометрии) развитие на многие десятки лет. При этом получение уравнений поля в “кривых” пространствах под влиянием ОТО стали “жестко” связывать с параллельным переносом, ковариантной производной и тензором кривизны, то есть с обязательным дополнением основной геометрии еще и геометрией аффинной связанности, или, иначе говоря, погружением основной геометрии в геометрию аффинной связанности.

Евклидова геометрия и любая псевдоевклидова геометрия размерности n являются частными случаями финслеровой геометрии точно так же, как римановы и псевдоримановы геометрии.

Если в пространстве x^1, x^2, ..., x^n расстояние между двумя бесконечно близкими точками $M(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $M(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, \ldots, x^n + dx^n)$ выражается по формуле

$$ds = L(dx^1, dx^2, \ldots, dx^n;\, x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

то функцию $L(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n;\, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ принято называть метрической.

Финслерова геометрия определяется выбором метрической функции $L(\xi; x)$ при выполнении следующих условий:

1. $L(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n;\, x^1, x^2, \ldots, x^n) > 0$ в каждой точке $M(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ основного пространства в конусообразной области изменения координат центроаффинного касательного пространства $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ (все векторы этого конуса будут являться измеримыми векторами);

2. метрическая функция должна быть положительно однородной первой степени относительно первых n аргументов;

3. $$\mathrm{rang}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\right) = (n-1)\,. \tag{1}$$

Из третьего условия вытекает единственность функциональной зависимости

$$\Phi(p_1, p_2, \ldots, p_n;\, x^1, x^2, \ldots, x^n) = 0\,, \tag{2}$$

где

$$p_i = \frac{\partial L(\xi; x)}{\partial \xi} \tag{3}$$

– координаты касательной к индикатрисе гиперплоскости, или в физической терминологии – компоненты обобщенного импульса. Саму функциональную зависимость (2) называют тангенциальным уравнением индикатрисы, точечное уравнение которой имеет вид

$$L(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n;\, x^1, x^2, \ldots, x^n) = 1\,, \tag{4}$$

а функцию $\Phi(p; x)$ – функцией Финслера. Предполагается, что тангенциальное уравнение записывается таким образом, что в рассматриваемой области производные $\dfrac{\partial \Phi}{\partial p_i}$ нигде не обращаются в нуль одновременно. Последнее позволяет записывать для экстремалей в основном пространстве канонические уравнения, не преобразуя тангенциальное уравнение индикатрисы.

В соответствии с выше принятыми соглашениями в финслеровой геометрии существует одна и только одна функциональная зависимость между компонентами $p_1, p_2, \ldots, p_n$ обобщенного импульса. Очень часто и математики, и физики забывают о третьем условии (формула (1)) и называют финслеровыми геометрии с метрическими функциями, обладающими первыми двумя свойствами, но не обладающими третьим свойством, что неверно и приводит к путанице.

На некоторых векторах касательного пространства метрическая функция может обращаться в нуль. Будем называть такие векторы *изотропными.* Нулевой вектор не будем относить ни к изотропным векторам, ни к измеримым. Однако, если нулевой вектор понимать как $0 = \varepsilon\xi$, где ξ – измеримый вектор, а действительная положительная переменная

$\varepsilon \to 0$, то в этом смысле длина нулевого вектора, конечно, всегда определена и равна нулю. Таким образом, в каждой точке основного пространства все множество векторов центроаффинного касательного пространства является объединением четырёх не пересекающихся множеств: нулевого вектора, множества изотропных векторов, множества измеримых векторов и множества неизмеримых векторов, для последних длина не может быть определена.

Подчеркнем, что выбор (определение) метрической функции $L(\xi; x)$ включает в себя и задание области её определения, то есть задание в каждой точке основного пространства конической области измеримых векторов, возможно, за исключением некоторых точек, линий, ... или областей основного пространства.

2 Триединство финслеровой геометрии

Псевдориманова четырехмерная геометрия с сигнатурой $(+,-,-,-)$ в ОТО обладает ***триединством*** – задание метрической функции позволяет:

1. производить все необходимые геометрические вычисления и построения;
2. получать уравнения движения пробной частицы в гравитационном поле;
3. получать уравнения гравитационного поля для метрического тензора.

Именно это триединство поражает и покоряет в созданной А. Эйнштейном ОТО. Такое триединство обычно принято переносить на любые другие римановы и псевдоримановы пространства, а также более общие метрические пространства следующим образом: третий пункт обычно реализуется погружением рассматриваемого пространства тем или иным образом в геометрию аффинной связности, для чего конструируются такие понятия, как: параллельный перенос, ковариантная производная и тензор кривизны.

Для финслеровой геометрии указанное выше триединство существенно (качественно) изменяется в третьем пункте по сравнению с методом ОТО. Оказалось, что уравнения поля для финслеровых пространств можно получать с помощью принципа самодостаточности [2], не погружая финслерову геометрию в геометрию аффинной связности. При этом действием $\mathbb{S}$ для получения полевых уравнений является с точностью до постоянного коэффициента инвариантный объем некоторой области $\mathcal{O}$ финслерова пространства

$$\mathbb{S} = \text{const} \int\limits_{\mathcal{O}}^{(n)} \frac{dx^1 dx^2 \dots dx^n}{(V_{ind})_{ev}}\,, \tag{5}$$

где V_{ind} – объем, ометаемый единичным вектором касательного пространства, когда он пробегает всю индикатрису, в предположении, что касательное пространство евклидово, а координаты – декартовы прямоугольные.

Таким образом, полевым лагранжианом в финслеровом пространстве является

$$\mathcal{L} = \frac{\text{const}}{(V_{ind})_{ev}}\,, \tag{6}$$

если действие понимать как

$$\mathbb{S} = \int\limits_{\mathcal{O}}^{(n)} \mathcal{L} \cdot dx^1 dx^2 \dots\, dx^n\,. \tag{7}$$

Для римановых и псевдоримановых пространств это приводит к лагранжиану следующего вида:

$$\mathcal{L} = \text{conct}' \cdot \sqrt[n]{(-1)^m\, det(g_{ij})}\,, \tag{8}$$

где $(-1)^m$ – знаковый множитель выбирается в зависимости от сигнатуры псевдориманова пространства.

В финслеровой геометрии движение физической системы с конечным числом степеней свобода описывается уравнениями Эйлера – Лагранжа для действия, которое пропорционально длине мировой линии. А эволюция физических полей (физических объектов с бесконечным числом степеней свободы) определяется уравнениями поля, которые получаются на основе действия, равного с точностью до постоянного коэффициента инвариантному объему некоторой области финслерового пространства.

Любая финслерова геометрия обладает ***триединством*** – задание метрической функции позволяет:

1. производить все необходимые геометрические вычисления и построения;
2. получать уравнения движения пробной частицы в любом поле, совместимом с рассматриваемой финслеровой геометрий;
3. получать уравнения любого поля, совместимого с рассматриваемой финслеровой геометрий.

3 Псевдориманово пространство с сигнатурой $(+,-,-,-)$

Рассмотрим псевдориманово пространство с сигнатурой $(+,-,-,-)$, явно выделив в метрическом тензоре $g_{ij}(x)$ этого пространства метрический тензор $\overset{o}{g}_{ij}$ пространства Минковского,

$$g_{ij}(x) = \overset{o}{g}_{ij} + h_{ij}(x)\,. \tag{9}$$

Будем предполагать, что поле $h_{ij}(x)$ малое, то есть

$$|h_{ij}(x)| < \varepsilon \ll 1\,. \tag{10}$$

Лагранжиан (6), (8) псевдориманова пространства с сигнатурой $(+,-,-,-)$ равен

$$\mathfrak{L} = \mathrm{const}\,\sqrt{-det(g_{ij})}\,. \tag{11}$$

Вычислим величину $[-det(g_{ij})]$ до членов $|h_{ij}(x)|^2$ включительно:

$$-det(g_{ij}) \simeq 1 + \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2\,, \tag{12}$$

где

$$\mathfrak{L}_1 = \overset{o}{g}{}^{ij}\ h_{ij} \equiv h_{00} - h_{11} - h_{22} - h_{33}\,, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_2 = &-h_{00}(h_{11}+h_{22}+h_{33}) + \\ &+ h_{11}h_{22} + h_{11}h_{33} + h_{22}h_{33} - h_{12}^2 - h_{13}^2 - h_{23}^2 + h_{03}^2 + h_{02}^2 + h_{01}^2\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Тогда

$$\mathfrak{L} \simeq 1 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{L}_1 + \frac{1}{2}\,\left[\mathfrak{L}_2 - \frac{1}{4}\,\mathfrak{L}_1^2\right]\,. \tag{15}$$

Для того, чтобы получить уравнения для малого поля в первом приближении надо использовать лагранжиан $\mathfrak{L}_1$, а во втором приближении – лагранжиан $\left(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 - \frac{1}{4}\,\mathfrak{L}_1^2\right)$.

4 Свободное электромагнитное поле и четырехмерное псевдориманово пространство с сигнатурой $(+,-,-,-)$

Для того, чтобы из ковариантного поля $A_i(x)$ построить симметрический дважды ковариантный тензор $h_{ij}(x)$, не прибегая к использованию объектов связности, вспомним, что альтернированная частная производная от один раз ковариантного тензора есть дважды ковариантный антисимметрический тензор:

$$F_{ij}=\frac{\partial A_j}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^j}\,. \tag{16}$$

Построим на основе тензора F_{ij} симметрический тензор. Для этого вначале запишем с точностью до мультипликативной постоянной общепринятый классический лагранжиан свободного электромагнитного поля:

$$\mathcal{L}_A\equiv \overset{o}{g}{}^{ij}\overset{o}{g}{}^{km}\;F_{ik}F_{jm}=2\,\overset{o}{g}{}^{ij}\overset{o}{g}{}^{km}\;\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_m}{\partial x^j}-\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_j}{\partial x^m}\right) \tag{17}$$

– откуда следуют выражения для двух симметрических тензоров

$$h^{(1)}_{ij}=\overset{o}{g}{}^{km}\;\left(2\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_m}{\partial x^j}-\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_j}{\partial x^m}-\frac{\partial A_k}{\partial x^j}\frac{\partial A_i}{\partial x^m}\right)\,, \tag{18}$$

$$h^{(2)}_{ij}=\overset{o}{g}{}^{km}\;\left(2\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\frac{\partial A_j}{\partial x^m}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\frac{\partial A_m}{\partial x^j}-\frac{\partial A_j}{\partial x^k}\frac{\partial A_m}{\partial x^i}\right)\,. \tag{19}$$

Пусть в формуле (9)

$$h_{ij}\equiv h^{(A_k)}_{ij}=\mathrm{const}'\left\{\chi(x)\,h^{(1)}_{ij}+[1-\chi(x)]\;h^{(2)}_{ij}\right\}\,, \tag{20}$$

где $\chi(x)$ – некоторая скалярная функция. Тогда в первом приближении получим

$$\mathcal{L}_1=\mathrm{const}'\cdot 2\,\overset{o}{g}{}^{ij}\overset{o}{g}{}^{km}\;\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_m}{\partial x^j}-\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_j}{\partial x^m}\right)\equiv\mathcal{L}_A\,, \tag{21}$$

то есть в первом приближении для поля $A_i(x)$ следует выполнение уравнений Максвелла:

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\;\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}A_k-\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\overset{o}{g}{}^{ij}\;\frac{\partial A_j}{\partial x^i}\right)=0\,. \tag{22}$$

Если принять лоренцевскую калибровку

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\;\frac{\partial A_j}{\partial x^i}=0\,, \tag{23}$$

то уравнения (22) принимают вид

$$\Box A_k=0\,. \tag{24}$$

5 Гравитационное и свободное электромагнитное поле в четырехмерном пространстве событий

Любое риманово или псевдориманово пространство можно представить как поверхность [3] размерности n в евклидовом или соответственно псевдоевклидовом пространстве достаточно большой размерности. Из этого следует, что любой метрический тензор четырехмерного псевдориманого пространства представим [3] в виде

$$g_{ij}(x^0,x^1,x^2,x^3)=\sum_{\alpha}^{N}\varepsilon_\alpha\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x^j}\,, \tag{25}$$

где ε_α – знаковые множители, а $\varphi_\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$ – скалярные функции. Представление (25) не является единственно возможным. Тогда метрический тензор пространства событий, описывающий эволюцию одновременно гравитационного и свободного электромагнитного полей можно представить следующим образом:

$$g_{ij}(x) = \overset{o}{g}_{ij} + \beta \cdot h_{ij}^{(grav)}(x) + \gamma \cdot h_{ij}^{(A_k)}(x)\,. \tag{26}$$

Здесь β и γ – фундаментальные постоянные, тензор $h_{ij}^{A_k}(x)$ определяется формулой (20), а тензор $h_{ij}^{grav}(x)$ – формулой, по структуре аналогичной формуле (25).

Конечно, совместное сосуществование гравитационного поля, электромагнитного поля и некоторой конкретной финслеровой геометрии не всегда возможно, но для 4-мерного пространства Бервальда – Моора это осуществимо. В этом пространстве в изотропной системе координат элемент длины выражается формулой

$$ds = \sqrt[4]{dy^1 dy^2 dy^3 dy^4} \equiv \sqrt[4]{\overset{o}{g}_{ijkl}\, dy^i dy^j dy^k dy^l} \tag{27}$$

где

$$\overset{o}{g}_{ijkl} = \frac{1}{24} \begin{cases} 1\,, & \text{если индексы } i,\, j,\, k,\, l \text{ все разные}\,; \\ 0\,, & \text{во всех остальных случаях}\,; \end{cases} \tag{28}$$

или в физической системе координат x^0, x^1, x^2, x^3,

$$\left.\begin{aligned} y^1 &= x^0 + x^1 + x^2 + x^3\,, \\ y^2 &= x^0 + x^1 - x^2 - x^3\,, \\ y^3 &= x^0 - x^1 + x^2 - x^3\,, \\ y^4 &= x^0 - x^1 - x^2 + x^3\,, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

$$ds = \sqrt[4]{\overset{o'}{g}_{ijkl}\, dx^i dx^j dx^k dx^l}\,. \tag{30}$$

Тогда метрический тензор "кривого" пространства Бервальда-Моора, описывающий одновременно и гравитационное, и электромагнитное поля имеет вид:

$$g_{ijkl}(x) = \overset{o'}{g}_{ijkl} + \beta \cdot h_{ijkl}^{(grav)}(x) + \gamma \cdot h_{(ijkl)}^{(A_k)}(x)\,, \tag{31}$$

где

$$h_{ijkm} \equiv h_{ijkm}^{(A_k)} = \text{const}' \left\{ \chi(x)\, h_{ijkm}^{(1)} + [1 - \chi(x)]\; h_{ijkm}^{(2)} \right\} \tag{32}$$

– тензор, соответствующий электромагнитному полю, а

$$h_{ijkm}^{(1)} = 2\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{\partial A_k}{\partial x^j}\frac{\partial A_i}{\partial x^m}\,, \tag{33}$$

$$h_{ijkm}^{(2)} = 2\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k}\frac{\partial A_m}{\partial x^i}\,. \tag{34}$$

Тензор $h_{ijkl}^{(grav)}(x)$, отвечающий за гравитационное поле, не будем здесь подробно выписывать. Отметим лишь, что он строится аналогично (25) или более сложным образом так, чтобы быть симметричным по всем четырем индексам.

6 Конформный потенциал

Пусть $x^1, x^2, \dots, x^n$ – финслерово пространство с метрической функцией

$$L(\xi;x) \equiv L(\xi^1,\xi^2,\dots,\xi^n;x^1,x^2,\dots,x^n)\,, \tag{35}$$

где $\xi^1,\xi^2,\dots,\xi^n$ – центроаффинное касательное пространство в точке $M(x^1,x^2,\dots,x^n)$ основного пространства. Тогда элемент длины определяется формулой

$$ds = L(dx^1,dx^2,\dots,dx^n;x^1,x^2,\dots,x^n)\,, \tag{36}$$

а компоненты обобщенного импульса

$$p_i = \frac{\partial L(dx;x)}{\partial(dx^i)} \tag{37}$$

связаны единственным функциональным соотношением

$$\Phi(p;x) = 0\,. \tag{38}$$

Тангенциальному уравнению индикатрисы (38) всегда можно придать специальную форму

$$\Phi_m(p;x) - 1 = 0\,, \tag{39}$$

где $\Phi_m(p;x)$ – однородная функция m-го порядка ($m > 0$) по первым n аргументам. Если функция $S(x)$ определяет в рассматриваемом финслеровом пространстве нормальную конгруэнцию геодезических, то она должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\Phi\left(\frac{\partial S}{\partial x^1},\dots\frac{\partial S}{\partial x^n};x\right) = 0\,. \tag{40}$$

Функцию $S(x)$ в классической механике называют действием как функцией координат, а уравнение (40) – уравнением Гамильтона-Якоби. Если функция $S(x)$ известна, то поле обобщенных импульсов находится как

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}\,, \tag{41}$$

а экстремали (траектории движения, мировые линии, линии тока) этой нормальной конгруэнции находятся из системы уравнений

$$\dot{x}^i = \left.\frac{\partial\Phi(p;x)}{\partial p_i}\right|_{p_k=\frac{\partial S}{\partial x^k}} \cdot \lambda(x)\,, \tag{42}$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$, а τ – параметр вдоль экстремали, параметр эволюции.

Финслерово пространство, конформно связанное с исходным, имеет метрическую функцию вида

$$\tilde{L}(\xi;x) = \kappa(x)L(\xi;x)\,, \tag{43}$$

где $\kappa(x) > 0$ – некая скалярная функция. Элемент длины в таком пространстве определяется формулой

$$d\tilde{s} = \kappa(x)L(dx;x)\,. \tag{44}$$

Обобщенные импульсы

$$\tilde{p}_i = \kappa(x)\,\frac{\partial L(dx;x)}{\partial(dx^i\,)} \tag{45}$$

связаны соотношением

$$\Phi_m(\tilde{p};x) - \kappa^m = 0\,, \tag{46}$$

то есть функция Финслера конформно связанного пространства определяется следующим образом:

$$\tilde{\Phi}(\tilde{p};x) = \Phi_m(\tilde{p};x) - \kappa^m\,, \tag{47}$$

где $\kappa(x) > 0$ – конформный коэффициент растяжения-сжатия.

Пусть $S_W(x)$ – скалярная функция, тогда в области, где выполняется неравенство

$$\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1},\ldots\frac{\partial S_W}{\partial x^n};x\right) > 0\,, \tag{48}$$

определена финслерова геометрия, конформно связанная с исходной, и полем коэффициента растяжения-сжатия

$$\kappa(x) = \sqrt[m]{\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1},\ldots\frac{\partial S_W}{\partial x^n};x\right)}\,, \tag{49}$$

причем в этой же области функция $S_W(x)$ определяет нормальную конгруэнцию геодезических

$$\acute{x}^i = \left.\frac{\partial\Phi_m(\tilde{p};x)}{\partial\tilde{p}_i}\right|_{\tilde{p}_k=\frac{\partial S_W}{\partial x^k}}\cdot\tilde{\lambda}(x)\,, \tag{50}$$

где $\tilde{\lambda}(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\acute{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau'}$, а τ' – параметр эволюции. Таким образом, функция $S_W(x)$ является действием как функцией координат в конформно связанном пространстве.

Из принципа самодостаточности финслеровой геометрии следует, что функция S_W не может быть произвольной, а должна удовлетворять некоторому полевому фундаментальному уравнению. Если в исходном пространстве элемент объема имел вид

$$dV = \varrho(x)\,dx^1dx^2\ldots dx^n\,, \tag{51}$$

то лагранжиан, из которого следует фундаментальное уравнение для поля S_W, имеет вид

$$\mathfrak{L} = \varrho(x)\,\kappa^n(x) \equiv \varrho(x)\,\left[\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial S_W}{\partial x^n};x^1,\ldots,x^n\right)\right]^{\frac{n}{m}}\,, \tag{52}$$

а фундаментальное уравнение соответственно запишется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\varrho(x)\,\Phi_m^{\frac{n-m}{m}}\,\frac{\partial\Phi_m}{\partial\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^i}\right)}\right\} = 0\,. \tag{53}$$

Если в качестве исходного финслерова пространства взять невырожденное поличисловое пространство $P_n \ni X$, то любая компонента произвольной аналитической функции $F(X)$ в нем удовлетворяет фундаментальному уравнению поля (53) для Мировой функции $S_W(x)$. Аналитические функции можно перемножать, брать их линейные комбинации, строить функцию от функции, при этом опять будут получаться аналитическая функция.

Если не оговорено другое, в качестве Мировой функции в невырожденном поличисловом пространстве выступает компонента $U(x^1, \dots, x^n)$ при единице

$$F(X) = U(x) \cdot 1 + V^1(x) \cdot j_1 + \dots + V^{n-1}(x) \cdot j_{n-1} \tag{54}$$

в базисе $1, j_1, \dots, j_{n-1}$, в котором имеет место экспоненциальное представление поличисел, то есть

$$X = |X| e^{\alpha^1 \cdot j_1 + \dots + \alpha^{n-1} \cdot j_{n-1}}, \tag{55}$$

где $|X|$ – модуль поличисла [2].

Конформный потенциал, таким образом построенный с помощью аналитической функции в поличисловом невырожденном пространстве, наиболее близок к понятию комплексного потенциала в теории функций комплексной переменной, поэтому функцию $F(X)$ можно называть гиперкомплексным потенциалом.

7 Примеры фундаментальных уравнений

Пространства, конформно связанные с евклидовыми пространствами

Пространство, конформно связанное с n-мерным евклидовым пространством, обладает элементом длины

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2}, \tag{56}$$

где $\kappa(x) > 0$, а уравнение поля (53) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \frac{\partial S_W}{\partial x^i} \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^n} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}-1} \right\} = 0. \tag{57}$$

Отметим, что для $n > 2$ это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.

Запишем для пространства, конформно связанного с двумерной евклидовой плоскостью (x, y), уравнение (57),

$$\frac{\partial^2 S_W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_W}{\partial y^2} = 0, \tag{58}$$

то есть функция $S_W(x, y)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа, а значит она является компонентой аналитической функции комплексной переменной.

Пространства, конформно связанные с псевдоевклидовыми пространствами с сигнатурой $(+, -, -, \dots, -)$

Пространство, конформно связанное с n-мерным псевдоевклидовым пространством с сигнатурой $(+, -, -, \dots, -)$, обладает элементом длины

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - \dots - (dx^{n-1})^2}, \tag{59}$$

где $\kappa(x) > 0$. а уравнение поля (53) принимает вид:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \frac{\partial S_W}{\partial x^0} \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1} \right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^{n-1}} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}-1} \right\} - \\ - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \frac{\partial S_W}{\partial x^\mu} \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^1 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2} \right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^{n-1}} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}-1} \right\} = 0. \end{gathered} \tag{60}$$

Отметим, что для $n>2$ это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.

Для пространства, конформно связанного с двумерной псевдоевклидовой плоскостью (x,y), уравнение (60) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 S_W}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 S_W}{\partial y^2}=0\,, \tag{61}$$

то есть в двумерном случае уравнение поля (60) – это волновое уравнение.

Пространства, конформно связанные с пространством Минковского, играют важную роль, поэтому выпишем ряд формул для $n=4$, используя в них метрический тензор пространства Минковского $\overset{o}{g}_{ij}$: связь между функцией $S_W(x)$ и коэффициентом растяжения-сжатия $\kappa(x)$ –

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\;\frac{\partial S_W}{\partial x^i}\frac{\partial S_W}{\partial x^j}=\kappa^2(x)\,, \tag{62}$$

лагранжиан –

$$\mathfrak{L}=\left(\overset{o}{g}{}^{ij}\;\frac{\partial S_W}{\partial x^i}\frac{\partial S_W}{\partial x^j}\right)^2\,, \tag{63}$$

уравнение поля –

$$\overset{o}{g}{}^{kl}\;\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial S_W}{\partial x^l}\left(\overset{o}{g}{}^{ij}\;\frac{\partial S_W}{\partial x^i}\frac{\partial S_W}{\partial x^j}\right)\right]=0 \tag{64}$$

с дополнительным условием

$$\kappa(x)>0\,. \tag{65}$$

Пространства, конформно связанные с четырехмерным пространством Бервальда-Моора

Элемент длины в таком пространстве в специальном изотропном базисе имеет вид

$$ds=\kappa(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4)\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,. \tag{66}$$

Соответственно уравнение поля имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\xi^1}\left(\frac{\partial S_W}{\partial\xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^4}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial S_W}{\partial\xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^4}\right)+\\+\frac{\partial}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial S_W}{\partial\xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^4}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi^4}\left(\frac{\partial S_W}{\partial\xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^3}\right)=0\,.\end{gathered} \tag{67}$$

Любая функция S_W, зависящая не от всех координат ξ^1,ξ^2,ξ^3,ξ^4 удовлетворяет этому уравнению, но не удовлетворяет необходимому условию

$$\kappa(x)>0\,. \tag{68}$$

8 Два скалярных поля

Переход от малых к более сильным полям приводит к переходу от линейных уравнений поля для независимых полей к нелинейным уравнениям поля для взаимосвязанных взаимодействующих полей. Покажем это на примере двух скалярных полей $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, "включающих" гравитационное поле в пространстве Минковского.

Пусть метрический тензор (9) псевдориманового пространства с сигнатурой $(+,-,-,-)$ содержит тензор

$$h_{ij} = \varepsilon_\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} + \varepsilon_\psi \frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^j}, \tag{69}$$

где ε_φ, ε_ψ – независимые знаковые коэффициенты. Тогда точный лагранжиан может быть записан следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\varphi,\psi} = \sqrt{1+\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}\,, \tag{70}$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \overset{o}{g}{}^{ij}\left(\varepsilon_\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} + \varepsilon_\psi \frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^j}\right)\,, \tag{71}$$

а

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 = \varepsilon_\varphi\,\varepsilon_\psi \Bigg[-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\frac{\partial\psi}{\partial x^1} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\psi}{\partial x^0}\right)^2 + \\
-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\frac{\partial\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\frac{\partial\psi}{\partial x^3} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\frac{\partial\psi}{\partial x^0}\right)^2 + \\
+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\psi}{\partial x^3} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right)^2 + \\
+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x^3} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)^2\Bigg]\,.
\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

В первом приближении в качестве лагранжиана следует использовать $\mathcal{L}_1$, тогда уравнения поля суть система двух независимых волновых уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^0\partial x^0} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\partial x^1} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^3\partial x^3} = 0\,, \\
\frac{\partial^2\psi}{\partial x^0\partial x^0} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^1\partial x^1} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^3\partial x^3} = 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

При этом поля $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ независимы и для каждого из них выполняется закон суперпозиции.

Используя точный лагранжиан (70) для двух скалярных полей, получим систему двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left.\begin{aligned}
\overset{o}{g}{}^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}\left(1\pm \overset{o}{g}{}^{rs}\dfrac{\partial\psi}{\partial x^r}\dfrac{\partial\psi}{\partial x^s}\right) \mp \dfrac{\partial\psi}{\partial x^j}\overset{o}{g}{}^{rs}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^r}\dfrac{\partial\psi}{\partial x^s}}{\sqrt{1+\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}}\right] = 0\,, \\
\overset{o}{g}{}^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x^j}\left(1+ \overset{o}{g}{}^{rs}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^s}\right) - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}\overset{o}{g}{}^{rs}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^r}\dfrac{\partial\psi}{\partial x^s}}{\sqrt{1+\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}}\right] = 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Теперь уже поля $\varphi(x)$, $\psi(x)$ зависят друг от друга, и принцип суперпозиции для них не выполняется. Переход от уравнений (73) к уравнениям (74) можно рассматривать как переход от малых полей к более сильным полям.

9 Невырожденные поличисла

Рассмотрим некоторую систему невырожденных поличисел P_n [2]. Соответствующее координатное пространство $x^1, x^2, \ldots, x^n$ является финслеровым метрическим плоским пространством с элементом длины вида

$$ds = \sqrt[n]{\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \ldots i_n}\, dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_n}}\,, \tag{75}$$

$\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ – метрический тензор, не зависящий от точки пространства.

Компоненты обобщенного импульса в геометрии (75) вычисляются по формулам:

$$p_i = \frac{\overset{o}{g}_{i j_2 \ldots j_n}\, dx^{j_2} \ldots dx^{j_n}}{\left(\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \cdots n}\, dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_n}\right)^{\frac{n-1}{n}}}\,. \tag{76}$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы в пространстве невырожденных поличисел P_n всегда можно записать [2] в виде

$$\overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 \ldots i_n}\, p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_n} - \mu^n = 0\,, \tag{77}$$

где $\mu > 0$ – некоторая постоянная, причем всегда найдется такое $\mu > 0$ и такой специальный базис (и, вообще говоря, не один), в котором

$$\left(\overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 \ldots i_n}\right) = \left(\overset{o}{g}{}_{i_1 i_2 \ldots i_n}\right)\,. \tag{78}$$

Перейдем к новой финслеровой геометрии на основе пространства невырожденных поличисел P_n, которая (новая геометрия) уже не является плоской, но отличие новой геометрии от исходной бесконечно мало, причем элемент длины в такой геометрии пусть имеет вид

$$ds = \sqrt[n]{\left[\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \ldots i_n} + \varepsilon h_{i_1 i_2 \dot{s} i_n}(x)\right] dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_n}}\,, \tag{79}$$

где ε – бесконечно малая величина. Если в исходном плоском пространстве элемент объема определялся формулой

$$dV = dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_n}\,, \tag{80}$$

то в новом пространстве с точностью до ε в первой степени имеем

$$dV_h \simeq \left[1 + \varepsilon \cdot C_0\, \overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 \cdots n}\, h_{i_1 i_2 \cdots n}(x)\right] dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_n}\,, \tag{81}$$

то есть лагранжиан для малых полей в пространстве с элементом длины (79) в первом приближении по ε суть

$$\mathcal{L}_1 = \text{const}\ \overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 \cdots n}\, h_{i_1 i_2 \cdots n}(x)\,. \tag{82}$$

Эта формула является обобщением формулы (13).

10 Квантовая механика

В каждом финслеровом пространстве можно записать некое дифференциальное уравнение с частными производными, которое совпадает или аналогично известным уравнениям квантовой механики, например, уравнению Шредингера или уравнению Клейна-Гордона.

В этом смысле каждое финслерово пространство “наделено” квантовой механикой, в которой состояние физической системы может быть описано в координатном представлении функцией координат $\Psi(x^1, x^2, \dots, x^n)$, вообще говоря, комплексной. Будем называть её *волновой функцией*, или *функцией состояния* физической системы. Все физически наблюдаемые величины при переходе к квантовой механике становятся операторами, действующими в пространстве функций состояния. При этом канонически сопряжённые величины переходят в канонически сопряжённые наблюдаемые. Если пространство плоское, обобщённые импульсы p_i в координатном представлении являются операторами вида

$$\hat{p}_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}\,, \tag{83}$$

действующими на волновые функции. Координаты как наблюдаемые также являются операторами, причём

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0\,, \qquad [x^i, x^j] = 0\,, \qquad [\hat{p}_i, x^j] = i\hbar\delta_i^j\,, \tag{84}$$

где

$$[\hat{a}, \hat{b}] \equiv \hat{a}\,\hat{b} - \hat{b}\,\hat{a}\,.$$

Таким образом, скобки Пуассона заменяются коммутаторами. Причём для канонически сопряжённых величин результат умножается на размерный мнимый коэффициент, но при этом надо учитывать зависимость, если таковая имеется, элемента объема от точки пространства. Когда элемент объема в пространстве x^0, x^1, x^2, x^3 имеет вид

$$dV = w^4(x)\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3\,, \tag{85}$$

где $w(x)$ – некоторая функция координат, то

$$p_i \to \hat{p}_i = i\hbar \frac{1}{w^2}\frac{\partial}{\partial x^i}\, w^2 \qquad \Rightarrow \qquad [\hat{p}_i, x^j] = i\hbar\delta_i^j\,. \tag{86}$$

При таком подходе возникают проблемы с интерпретацией самой волновой функции $\Psi(x)$ и величины $\overline{\Psi}(x)\Psi(x)$. Это связано с тем, что время становятся наблюдаемой, даже в нерелятивистских задачах. Тем не менее, на данный момент ряд квантово-механических задач может быть поставлен и решен, например, некоторые задачи на собственные значения.

При переходе от классической механики к квантовой тангенциальное уравнение индикатрисы также качественно видоизменяется: оно будет содержать канонически сопряжённые наблюдаемые, и поэтому его надо понимать следующим образом:

$$\Phi(\hat{p}; x)\Psi(x) = 0\,. \tag{87}$$

Это линейное уравнение в частных производных в том смысле, что любая линейная комбинация решений опять же является решением уравнения (87). Так как наблюдаемые $\hat{p}_i$, x^i не коммутируют, даже при заданной (фиксированной) функции Финслера, уравнение (87) может быть записано по-разному. Для нерелятивистской частицы в потенциальном поле уравнение (87) совпадает с уравнением Шредингера, если считать $w(x) \approx const$ в элементе объема (85), что для нерелятивистских квантовых задач вполне приемлемо. Для пространства Минковского уравнение (87) совпадает с уравнение Клейна - Гордона.

В пространстве x^0, x^1, x^2, x^3, конформно связанном с пространством Минковского, то есть в пространстве с элементом длины

$$dl = \kappa(x)\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}\,, \tag{88}$$

уравнение (87) принимает вид

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\, \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\kappa^2\, \Psi = -\frac{\kappa^4}{\hbar^2}\, \Psi\,, \tag{89}$$

где $\kappa(x)$ – поле коэффициента растяжения-сжатия.

11 Заключение

Принцип самодостаточности финслеровой геометрии [2], по-видимому, позволяет построить объединенную теорию поля и максимально геометризовать физику. Этот принцип не противоречит ОТО А. Эйнштейна [4], а дополняет и развивает ее, снимая некоторые трудности. Геометрический подход [2] в теории поля, который обычно дает нелинейные не разделяющиеся уравнения поля, для малых полей в первом приближении может приводить к системе независимых линейных уравнений поля. При усилении полей принцип суперпозиции полей нарушается, уравнения поля становятся нелинейными и поля начинают взаимодействовать между собой. Можно считать, что эти изменения уравнений поля при переходе от слабых к более сильным полям происходят за счет двух механизмов: во-первых, качественное изменение уравнений поля для свободных полей; во-вторых, появление дополнительных источников поля.

В рамках геометрического подхода в теории поля происходит естественное объединение электромагнитного и гравитационного полей как в четырехмерном псевдоримановом пространстве с метрическим тензором $g_{ij}(x)$, так и в четырехмерном кривом пространстве Бервальда-Моора с метрическим тензором $g_{ijkl}(x)$. Это говорит о том, что эти качественно различные пространства во многом схожи, а так же о том, что построение объединенной теории поля возможно.

Литература

[1] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М. – Л., ОГИЗ, 1947.

[2] Гарасько Г. И., Начала финслеровой геометрии для физиков, М., ТЕТРУ, 2009.

[3] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ. М., “Наука”, 1967.

[4] Эйнштейн А., Сущность теории относительности, М., И* Л, 1955.

FINSLER GEOMETRY

G.I. Garas'ko

Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia

gri9z@yandex.ru, gri9z.wordpress.com

If before Finsler geometry pretends only on geometrization of classical mechanics than after formulation of Finsler geometry self-sufficiency principle we can speaking that the geometry pretends on whole physics geometrization.

From that principle follow field theory equations and electromagnetic field and gravitational field naturally unified in four-dimensional pseudo-Riemannian space and in curved Berwald-Moore space. Energy momentum tensor concerned with conservation laws follows from E. Neter theorem.

In weak fields approach from Finsler geometry self-sufficiency principle follows linear field theory equations for several independent fields. In opposite case field equations becomes nonlinear and fields becomes non-independent that leads to superposition principle nonfulfillment.

In any Finsler space exists a field or some fields in that space may be supplemented with field, which make sense of action as function of coordinates and analogous to real part of complex potential on Euclidean plane. We propose name such potential as conformal potential.

Nondegenerate polynumbers are finslerian spaces, which are very interesting itself and possibly may use in physics.

For any finslerian space is possible to build equation analogous to Schrodinger equation or Klein-Gordon equation. This means that the geometry allows further quantum-mechanical development.

Key Words: Finsler geometry, Finsler space, self-sufficiency principle, field theory, nondegenerate polynumbers, conformal potential, electromagnetic field, gravitational field.