

ГЕОМЕТРИЯ И ФИЗИКА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ПОЛИЧИСЛОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Д.Г. Павлов¹, С.С. Кокарев^{1,2}

¹ НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

² РНОЦ “Логос”, Ярославль, Россия

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

На основе конструкции соприкосновения, изложенной в [5], исследуется физико-геометрическая интерпретация функций поличисловой переменной P_4 различных классов голоморфности по терминологии [5]. Показано, что конкретный выбор голоморфной функции (поличислового потенциала) определяет некоторую теоретико-полевую модель на фоне риманова многообразия ОТО, включающую тензорные поля различных рангов. Рассмотрен в общем виде вопрос о локальной причинной структуре псевдоримановых метрик, соприкасающихся с 4-мерной метрикой Бервальда-Моора. Показано, что конструкция соприкосновения порождает квадратичные метрики лишь с двумя типами сигнатур: $(+, -, -, -)$ и $(+, +, -, -)$. Выведены системы уравнений в частных производных, определяющих поличисловой потенциал для космологических метрик фридмановского типа и метрики Шварцшильда.

Ключевые слова: алгебра поличисел, метрика Бервальда-Моора, соприкосновение финслеровой и римановой метрик, ОТО, космологические модели Фрийдмана-Робертсона-Уокера, метрика Шварцшильда, обобщенно-голоморфные функции поличисловой переменной.

1 Введение

В работе [4] на основе предшествующих исследований по алгебре и геометрии двойных чисел [1–3] была построена теория поля для Гиперлэнда — двумерного мира Минковского, рассматриваемого в более широком, чем это делается в СТО, контексте конформной симметрии, связанной с h -голоморфными функциями двойной переменной. Модель Гиперлэнда оказалась привлекательной в первую очередь тем, что она представляет собой пример теории без свободных параметров и зависимостей: лагранжиан фундаментального поля, все существенные фундаментальные константы и типы простейших состояний этого поля (элементарные частицы материи Гиперлэнда — даблонa) оказались полностью вычислимыми (и вычисленными!) в рамках этой теории. Разумеется, теория Гиперлэнда является пробной игрушечной моделью, иллюстрирующей некоторые характерные особенности самой низкоразмерной версии поличисловой теории поля. Переход к более реалистичным 3-мерным и 4-мерным моделям в рамках поличислового подхода к описанию физической реальности требует использования алгебр тричисел P_3 и квадрачисел P_4 . Некоторые предварительные формальные разработки по алгебрам P_n были сделаны в [5], а более детальное исследование основного уравнения математической физики поличисловой теории поля в алгебре P_3 было проведено в [6]. Главным предметом рассмотрения настоящей статьи является алгебра поличисел P_4 и сопутствующие ей геометрические и аналитические объекты. Естественная геометрия алгебры P_4 связана с 4-мерной метрикой Бервальда-Моора 4-ого порядка, которая в специальных (т.н. изотропных) координатах имеет вид:

$${}^{(4)}G = \hat{S}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^4), \quad (1)$$

где \hat{S} — оператор симметризации без числового множителя. Метрика (1) относится к классу т.н. псевдофинслеровых метрик или m -корневых метрик [7]. Простейшим естественным

аналитическим объектом в P_n является т.н. h -голоморфная функция $P_4 \rightarrow P_4$ вида:

$$f(h) = f_1(x^1)e_1 + f_2(x^2)e_2 + f_3(x^3)e_3 + f_4(x^4)e_4, \quad (2)$$

где $h = x^i e_i$, $\{e_i\}_{i=1,4}$ — изотропный базис, в котором метрика Бервальда-Моора имеет вид (1), f_i — дифференцируемые функции вещественной переменной.

Мы исследуем вопрос о том, какие модели ОТО описываются в рамках концепции h -голоморфности. Отметим, что отношение алгебры P_4 к метрике (1) и функциям вида (2) вполне аналогично отношению алгебры комплексных чисел \mathbb{C} к евклидовой метрике и голоморфным функциям комплексной переменной. Имеются также поличисловые аналоги условий Коши-Римана и условий гармоничности (см. [5]). По этой причине в целом результаты настоящей статьи можно рассматривать как отдаленный поличисловой аналог стандартного метода конформных отображений в ТФКП, который посредством конструкции соприкосновения позволяет выходить на 4-мерные пространства-времена псевдориманова типа, изучаемые в рамках ОТО. С другой стороны, наше исследование представляет собой фрагмент будущей полной динамической теории поличислового потенциала, в которой конкретный его вид будет получаться путем решений динамических уравнений, выводимых из некоторых весьма общих принципов. Двумерный вариант такой теории, построенный на основе алгебры двойных чисел, представлен в работах [3, 4].

2 Алгебра кополиад

Рассмотрим пространство Бервальда-Моора H_n и метрику Бервальда-Моора ${}^{(n)}G$ в ней, отнесенную к некоторой изотропной системе координат (x^1, \dots, x^n) , в которой эта метрика имеет вид:

$${}^{(n)}G = \hat{S}(dx^1 \otimes \dots \otimes dx^n), \quad (3)$$

обобщающий (1). Рассмотрим тензор ${}^{(n)}\tilde{G}$ вида:

$${}^{(n)}\tilde{G} \equiv \hat{S}(\partial_1 \otimes \dots \otimes \partial_n), \quad (4)$$

который определяет “скалярное полипроизведение” в расслоении 1-форм $\wedge^1 H_n$ по формулам:

$$\tilde{G}(\omega_1, \dots, \omega_n) \equiv \epsilon^{k_1 \dots k_n} (\omega_1)_{k_1} \dots (\omega_n)_{k_n} \equiv \text{perm} \begin{pmatrix} (\omega_1)_1 & \dots & (\omega_1)_n \\ \dots & \dots & \dots \\ (\omega_n)_1 & \dots & (\omega_n)_n \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В (5) perm означает перманент матрицы, имеющий структуру обычного определителя, в котором все слагаемые берутся со знаком “плюс”. Таким образом, $\epsilon^{k_1 \dots k_n} = \tilde{G}^{k_1 \dots k_n}$ представляет собой симметричный аналог символа Леви-Чивиты (аналогично символ $\epsilon_{k_1 \dots k_n}$ с нижними индексами будет определять компоненты метрики Бервальда-Моора ${}^{(n)}G$ в изотропном базисе). Тензор (4) будем называть *дуальным* или *обратным* к ${}^{(n)}G$. Это название оправдывается следующим свойством компонент ${}^{(n)}G$ и ${}^{(n)}\tilde{G}$:

$$\sum_{k_{r+1}, \dots, k_n} \epsilon_{k_1 \dots k_r k_{r+1} \dots k_n} \epsilon^{m_1 \dots m_r k_{r+1} \dots k_n} = \frac{n!(n-1)!}{(n+r-1)!} \text{perm} \begin{pmatrix} \delta_{k_1}^{m_1} & \dots & \delta_{k_r}^{m_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k_1}^{m_r} & \dots & \delta_{k_r}^{m_r} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Равенства левой и правой частей (6) с точностью до коэффициента следуют из соображений симметрии, вид коэффициента следует из редукционной формулы для перманентов, вытекающей из простого подсчета перестановок:

$$\sum_{r=1}^n \begin{pmatrix} r & r_2 & \dots & r_s \\ r & m_2 & \dots & m_s \end{pmatrix} = (n+s-1) \begin{pmatrix} r_2 & \dots & r_s \\ m_2 & \dots & m_s \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где

$$\begin{pmatrix} r_1 & \dots & r_s \\ m_1 & \dots & m_s \end{pmatrix} \equiv \text{perm} \begin{pmatrix} \delta_{m_1}^{r_1} & \dots & \delta_{m_s}^{r_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{m_1}^{r_s} & \dots & \delta_{m_s}^{r_s} \end{pmatrix} \quad (8)$$

— сокращенное обозначение для перманента, составленного из упорядоченных дельта-символов. Таким образом, в каждом H_n имеется, как минимум, четыре типа полискалярного произведения: два полностью антисимметричных произведения n -ок векторов или 1-форм, ассоциированных с формами объемов в касательном и кокасательном расслоениях:

$$\text{vol} \equiv dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad \widetilde{\text{vol}} \equiv \partial_1 \wedge \dots \wedge \partial_n, \quad (9)$$

которые порождаются операцией внешнего (кососимметричного) произведения \wedge и два симметричных произведения n -ок векторов или 1-форм, задаваемых симметричными полилинейными формами (1) и (4). Отметим, что формы (9) существуют на любом гладком многообразии, в то время как наличие форм (1) и (4) — специфическая особенность пространств H_n . Для восстановления более полной симметрии между антисимметричными и симметричными метриками, определим операцию \vee симметрического произведения векторов или 1-форм по формулам:

$$X \vee Y \equiv X \otimes Y + Y \otimes X; \quad \omega \vee \lambda \equiv \omega \otimes \lambda + \lambda \otimes \omega, \quad (10)$$

для всяких $X, Y \in TH_n$ и $\omega, \lambda \in T^*H_n$. Теперь мы можем написать по аналогии с (9):

$${}^n G(X_1, \dots, X_n) \equiv \text{Vol}(X_1, \dots, X_n); \quad {}^n \widetilde{G}(\omega_1, \dots, \omega_n) \equiv \widetilde{\text{Vol}}(\omega_1, \dots, \omega_n), \quad (11)$$

где

$$\text{Vol} \equiv dx^1 \vee \dots \vee dx^n; \quad \widetilde{\text{Vol}} \equiv \partial_1 \vee \dots \vee \partial_n \quad (12)$$

— “симметричные формы объемов”.

Аналогию между антисимметричными тензорами (p -формами или p -векторами) и симметричными тензорами (p -полиады и p -кополиады) можно продолжить и далее. Определим расслоение p -полиад $\bigvee^p H_n$ как множество всех симметричных ковариантных тензорных полей. Они образуют $F(H_n)$ -модуль, базисом которого являются набор полиад $\{dx^{k_1} \vee \dots \vee dx^{k_p}\}_{k_i=1, \dots, n}$. Можно определить теперь градуированную алгебру полиад $\bigvee H_n$, в которой операция полиадного умножения \vee между полиадами $P = \sum_{k_1, \dots, k_p} P_{k_1 \dots k_p} dx^{k_1} \vee \dots \vee dx^{k_p} \in \bigvee^p H_n$ и $Q = \sum_{l_1, \dots, l_q} Q_{l_1 \dots l_q} dx^{l_1} \vee \dots \vee dx^{l_q} \in \bigvee^q H_n$ определяется по формуле:

$$P \vee Q = Q \vee P \equiv \sum_{k_1, \dots, k_p} \sum_{l_1, \dots, l_q} P_{k_1 \dots k_p} Q_{l_1 \dots l_q} dx^{k_1} \vee \dots \vee dx^{k_p} \vee dx^{l_1} \vee \dots \vee dx^{l_q}. \quad (13)$$

Очевидно

$$\bigvee H_n = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigvee^p H_n. \quad (14)$$

Аналогично определяется симметричная градуированная алгебра кополиад $\bigvee^* H_n$ (т.е. алгебра контравариантных симметричных тензоров).

По аналогии с операциями дуализации (звезда Ходжа), ассоциированными с антисимметричными формами объемов, можно определить дуализацию полиад (или кополиад).

Определим отображение $\otimes: \bigvee^p H_n \rightarrow \bigvee^{n-p} H_n$ (симметричная звезда Ходжа) как линейный оператор, действующий на базис полиад по формуле¹:

$$\otimes(dx^{k_1} \vee \dots \vee dx^{k_p}) \equiv \begin{cases} dx^{r_1} \vee \dots \vee dx^{r_{n-p}}, & \text{если все } k_1, \dots, k_p \text{ различны;} \\ 0, & \text{если хотя бы пара из набора } k_1, \dots, k_p \text{ совпадает.} \end{cases} \quad (15)$$

В первой строке n цифр $(k_1, \dots, k_p, r_1, \dots, r_{n-p})$ (возможно после надлежащей перестановки) образуют последовательность $1, \dots, n$ (определение симметризованной звезды Ходжа на кополиадах аналогично). (Отметим, что симметрия операции \vee позволяет не следить за знаками и ориентацией.) К примеру, формы Vol и $\widetilde{\text{Vol}}$ в (12) с помощью симметричной звезды Ходжа записываются более компактно:

$$\text{Vol} = \otimes 1; \quad \widetilde{\text{Vol}} = \otimes 1^*, \quad (16)$$

где 1^* — постоянная (единичная) функция на H_n , рассматриваемая как элемент формального пространства кополиад $\bigvee^{0^*} H_n$, которое мы отождествляем с $F(H_n)$.

По аналогии с тем, как стандартная звезда Ходжа $*$ в исчислении внешних форм связана с символом Леви-Чивиты, симметричная звезда Ходжа \otimes связана с симметричным аналогом символа Леви-Чивиты. Так, в компонентах операция дуализации полностью симметричного тензора (p -полиады) Q представляется выражением:

$$(\otimes Q)_{k_1 \dots k_{n-p}} = \frac{1}{p!} \sum_{r_1, \dots, r_p} \epsilon_{k_1 \dots k_{n-p} r_1 \dots r_p} Q_{r_1 \dots r_p}. \quad (17)$$

Отметим, что операция \otimes , в отличие от $*$, в силу своего определения (15) не обладает свойством инволютивности:

$$\otimes^2 \neq \text{id}. \quad (18)$$

Это связано с тем, что однократное применение \otimes стирает ту часть информации в тензоре, которая связана с компонентами, имеющими хотя бы пару одинаковых индексов. Эти части информации ковариантны относительно действия группы изометрий $\text{Iso}(H_n)$ и даже более широкой конформной группы $C(H_n)$, но не ковариантны относительно общей линейной группы.

Можно определить симметричные аналоги внешнего дифференцирования и теоремы Дарбу-Пуанкаре [5], но в настоящей статье они нам не понадобятся.

3 Соприкасающиеся объекты

Конструкция соприкосновения, которая служит мостиком между финслеровой геометрией пространств Бервальда-Моора и псевдоримановой геометрией современных теоретико-полевых моделей, включающих гравитацию, излагалась в статье [5]. Напомним кратко основные составляющие этой конструкции. Рассмотрим совокупность $\{X_1, \dots, X_{n-m}\}$ $n - m$ векторных полей в H_n (допускается повторение некоторых полей в этой совокупности). Будем называть эту совокупность *опорой* \mathcal{E}^{n-m} и обозначать ее посредством более подробной записи

$$\mathcal{E}^{n-m} \equiv \{X_1^{\alpha_1}, \dots, X_k^{\alpha_k}\}, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_k = n - m, \quad (19)$$

¹В статье [5] было дано немного другое определение, опирающееся на класс т.н. смешанных полиад. Настоящая версия определения, по существу эквивалентна предыдущей, но не требует ограничения на область определения операции \otimes .

где α_i кратность повторения векторного поля X_i . В случае с повторяющимися векторными полями опоры \mathcal{E}^{n-m} уже не описывается в терминах классического распределения. На опорах \mathcal{E}^{n-m} можно ввести $F(H_n)$ -алгебру, полагая

$$\mathcal{E}^{n-m_1} \uplus \mathcal{E}^{n-m_2} = \begin{cases} \mathcal{E}^{n-m_1-m_2}, & m_1 + m_2 \leq n \\ \mathcal{E}^\emptyset, & m_1 + m_2 > n \end{cases}, \quad (20)$$

где $\mathcal{E}^{n-m_1-m_2}$ получается из \mathcal{E}^{n-m_1} и \mathcal{E}^{n-m_2} объединением их элементов (для общих векторных полей их индексы-показатели α_i складываются), а \mathcal{E}^\emptyset — пустая опора. Умножение опор на скалярные функции производится покомпонентно (каждое векторное поле независимо от его кратности умножается на функцию). С помощью опор и метрики Бервальда-Моора можно строить соприкасающиеся с ней тензорные объекты более низкого ранга. А именно, назовем тензор

$$\mathcal{T}_{\mathcal{E}^{n-m}} = \mathcal{E}^{n-m} \uparrow {}^n G \equiv ({}^n G(X_1, \dots, X_{n-m}, \underbrace{}, \dots)) \quad (21)$$

m пустых аргументов

соприкасающимся с метрикой Бервальда-Моора вдоль опоры $\mathcal{E}^{n-m} = \{X_1, \dots, X_{n-m}\}$. Очевидно, с что с точки зрения симметричной алгебры кополиад

$$\mathcal{T}_{\mathcal{E}^{n-m}} = \otimes(X_1 \vee \dots \vee X_{n-m}).$$

По определению полагаем, что

$$\mathcal{E}^\emptyset \uparrow {}^n G \equiv 0. \quad (22)$$

Алгебра опор следующим образом взаимодействует с операцией соприкосновения:

$$\mathcal{E}^{n-m_2} \uparrow (\mathcal{E}^{n-m_1} \uparrow {}^n G) = (\mathcal{E}^{n-m_1} \uplus \mathcal{E}^{n-m_2}) \uparrow {}^n G; \quad (f\mathcal{E}^{n-m}) \uparrow {}^n G = f^{n-m}(\mathcal{E}^{n-m} \uparrow {}^n G). \quad (23)$$

Более общая конструкция соприкосновения вдоль кополиады $Q = Q^\alpha \mathcal{E}_\alpha$ сводится к рассмотренной конструкции соприкосновения вдоль опоры с помощью операции усреднения по кополиадному базису $\{\mathcal{E}_\alpha\}$, который представляет собой набор соответствующих опор:

$$Q \uparrow ({}^n \epsilon) = \sum_{\alpha} Q^\alpha (\mathcal{E}_\alpha \uparrow ({}^n \epsilon)). \quad (24)$$

Все дальнейшее изложение будет посвящено применению конструкции соприкосновения для физической интерпретации поличислового потенциала в терминах тензорных полей в псевдоримановом пространстве-времени.

4 Псевдоримановы метрики, соприкасающиеся с метрикой Бервальда-Моора в H_4

Изучим более подробно типы псевдоримановых метрик, которые в принципе могут получаться с помощью конструкции соприкосновения в H_4 . В фиксированной точке такое исследование сводится к свойствам матрицы $(g_{\alpha\beta})$ метрического тензора, соприкасающегося с метрикой Бервальда-Моора вдоль опоры \mathcal{E}^2 , локально представляемой диадой $A \vee B \equiv \mathcal{F}$:

$$g_{\alpha\beta} \equiv (\mathcal{F} \uparrow ({}^4 G))_{\alpha\beta} = \otimes(A \vee B)_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} A^\gamma B^\delta. \quad (25)$$

В настоящем разделе нас будет интересовать тип (сигнатура) метрики g . Для упрощения исследования, во-первых, удалим из диады \mathcal{F} несущественные для конструкции соприкосновения диагональные компоненты:

$$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\circ = \otimes^2 \mathcal{F}. \quad (26)$$

У диады \mathcal{F}° — шесть независимых компонент (как и у тензора электромагнитного поля в пространстве Минковского). Используя свободу выбора координатной калибровки, допускаемую классом изотропных систем координат, мы можем использовать ее три степени свободы (т.к. $\dim \text{Iso}(H_4) = 3$) для приведения анзаца компонент \mathcal{F}° к виду:

$$\mathcal{F}_{12}^\circ = \mathcal{F}_{34}^\circ = \frac{a}{2}; \quad \mathcal{F}_{13}^\circ = \mathcal{F}_{24}^\circ = \frac{b}{2}; \quad \mathcal{F}_{14}^\circ = \mathcal{F}_{23}^\circ = \frac{c}{2}. \quad (27)$$

В выбранной координатной калибровке метрика g будет характеризоваться следующей матрицей компонент:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Ее характеристический полином $G(\lambda) = \det(g - \lambda I)$ имеет вид:

$$G(\lambda) = \lambda^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)\lambda^2 - 8\lambda abc + a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2). \quad (29)$$

Опираясь на обобщенную теорему Виета, из вида (29) можно сделать следующие заключения относительно собственных значений матрицы $(g_{\alpha\beta})$:

1. Коэффициент при λ^3 равный $-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = 0$, следовательно собственные значения обязательно имеют разные знаки. Это означает, что соприкасающаяся метрика g может быть (с точностью до перенумерации координат) лишь двух гиперболических типов: $(+, -, -, -)$ или $(+, +, -, -)$.
2. Гиперболический тип метрики g меняется всякий раз при пересечении поверхности в пространстве параметров a, b, c , определяемой нулем свободного члена в (29):

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 0. \quad (30)$$

На этой поверхности метрика g становится вырожденной: некоторые (может быть даже и все) собственные значения матрицы $(g_{\alpha\beta})$ обращаются на ней в нуль. Раскладывая левую часть (30) на множители, получаем:

$$(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) = 0, \quad (31)$$

что означает разложение поверхности вырождения в объединение 4-х плоскостей, симметрично проходящих через начало системы координат в пространстве параметров a, b, c .

Эта поверхность представлена на рисунке 1.

Простая проверка (например, подстановка $a = b = 0, c = 1$) обнаруживает, что четырехгранные компоненты на рис. 1 содержат гиперболический тип $(+, +, -, -)$, а трехгранные — гиперболический тип $(+, -, -, -)$. В дальнейшем, будем обозначать этот последний тип номером I, а первый — номером II. Нетрудно сообразить, что гиперболический тип метрики g определяется знаком σ многочлена слева в (31):

$$\text{Номер типа} = 2^{(1+\sigma)/2}, \quad \text{где} \quad \sigma \equiv \text{sign}(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c). \quad (32)$$

Чтобы сформулировать инвариантную классификацию соприкасающихся гиперболических структур, заметим, что произведения:

$$\mathcal{F}_{ik}\mathcal{F}_{mn} \quad (33)$$

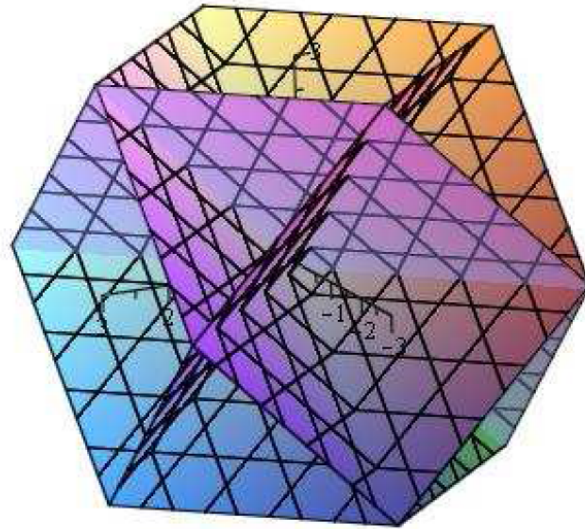


Рис. 1: Поверхность вырождения соприкасающейся метрики g — четыре плоскости, проходящих через начало. Множества направлений, содержащие оси (шесть 4-гранных пространственных углов) задают гиперболическую метрику типа $(+, +, -, -)$, в то время как дополнительные компоненты (восемь 3-гранных пространственных углов) задают гиперболическую метрику типа $(+, -, -, -)$.

являются инвариантами относительно группы $\text{Iso}(H_4)$, если совокупность индексов i, k, m, n образуют некоторую подстановку индексов 1, 2, 3, 4. Отсюда приходим к заключению, что

$$a^2 = \mathcal{F}_{12}\mathcal{F}_{34} = \text{inv} = I_1; \quad b^2 = \mathcal{F}_{13}\mathcal{F}_{24} = \text{inv} = I_2; \quad c^2 = \mathcal{F}_{14}\mathcal{F}_{23} = \text{inv} = I_3 \quad (34)$$

и знаковая функция σ определяется инвариантным соотношением:

$$\sigma = \text{sign}(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 - 2(I_1I_2 + I_1I_3 + I_2I_3)). \quad (35)$$

На рисунке 2 показан график поверхности $I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 - 2(I_1I_2 + I_1I_3 + I_2I_3) = 0$ в пространстве инвариантов I_1, I_2, I_3 .

5 Геометрия и физика логарифма в P_4

Хорошо известно, что функция $\ln z$ является комплексным потенциалом множества задач 2-мерной математической физики, связанных с наличием точечного источника или точечного вихря [8]. По методическим соображениям мы начнем изучение физико-геометрических свойств h -голоморфных функций на P_4 с функции

$$\ln h = \ln x^1 e_1 + \ln x^2 e_2 + \ln x^3 e_3 + \ln x^4 e_4. \quad (36)$$

Согласно общему подходу, намеченному в [4] и [5], функция $\ln h$ полностью “кодирует” на языке P_4 устройство некоторой конкретной 4-мерной вселенной с квадратичной метрикой. При этом сама по себе функция $\ln h$ устроена довольно просто: она сводится к прямой сумме вещественных логарифмов и потому определена в положительном октанте P_4 . Аналогом сферы Римана в комплексном анализе в случае P_4 является 4-мерный вещественный тор, который получается “склеиванием” бесконечно-удаленных точек на каждой из изотропных координатных осей после их предварительного сжатия посредством отображения $h \mapsto \tanh h$. Рассматривая функцию $\ln h$ на таком торе, мы можем заключить, что

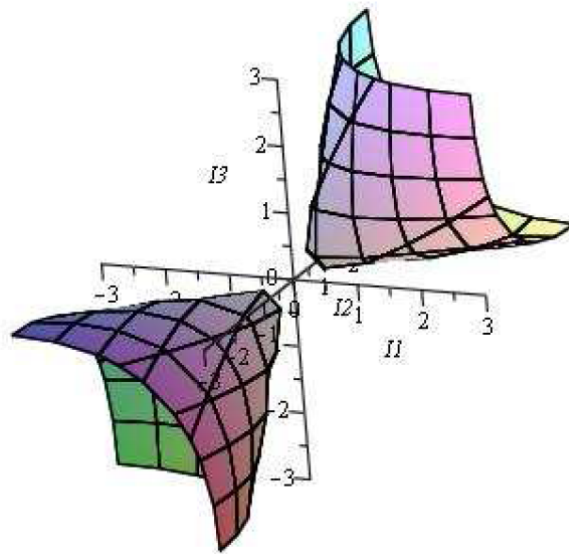


Рис. 2: Поверхность смены знака функции σ . Область внутри полостей соответствует типу I, область вне полостей — типу II. Полости смыкаются в начале системы координат (погрешность графопостроителя неявной функции в MAPLE).

она осуществляет гомеоморфизм внутренности $1/16$ части 4-тора на 4-тор с удаленными 3-торами, изображающими бесконечно-удаленные 3-плоскости в P_4 .

Дифференцируя функцию поличислового логарифма (36), получаем ее голоморфный дифференциал:

$$d \ln h = \frac{dx^1}{x^1} e_1 + \frac{dx^2}{x^2} e_2 + \frac{dx^3}{x^3} e_3 + \frac{dx^4}{x^4} e_4, \quad (37)$$

вещественные компоненты которого $\omega_i = dx^i/x^i$ позволяют построить систему опор различных порядков:

$$\tilde{\mathcal{E}}^1 = \{\omega_{(i)}\}; \quad \tilde{\mathcal{E}}^2 = \{\omega_{(i)}\omega_{(j)}\}; \quad \tilde{\mathcal{E}}^3 = \{\omega_{(i)}\omega_{(j)}\omega_{(k)}\}; \quad \tilde{\mathcal{E}}^4 = \{\omega_{(i)}\omega_{(j)}\omega_{(k)}\omega_{(s)}\}. \quad (38)$$

Опоры второго порядка образуют полиаду $\mathcal{F}_{ik} = 1/x^i x^k$, инварианты которой удовлетворяют соотношениям $I_1 = I_2 = I_3 = 1/x^1 x^2 x^3 x^4$, что позволяет сделать заключение, опираясь на исследования предыдущего раздела, о принадлежности соприкасающейся римановой метрики к типу I. Соприкасажая метрику Бервальда-Моора² ${}^{(4)}\tilde{G}$ вдоль этих опор, получаем физико-геометрические объекты следующего вида:

скалярное поле:

$$\phi \equiv \tilde{\mathcal{E}}^4 \uparrow {}^{(4)}\tilde{G} \equiv \epsilon^{ijkl} \omega_{(1)i} \omega_{(2)j} \omega_{(3)k} \omega_{(4)l} = \frac{1}{x^1 x^2 x^3 x^4}; \quad (39)$$

векторное поле³:

$$v \equiv \sum_s \tilde{\mathcal{E}}_s^3 \uparrow {}^{(4)}\tilde{G} \equiv \epsilon^{ijkl} (\omega_{(1)i} \omega_{(2)j} \omega_{(3)k} + \omega_{(1)i} \omega_{(2)j} \omega_{(4)k} + \omega_{(2)i} \omega_{(3)j} \omega_{(4)k} + \omega_{(1)i} \omega_{(3)j} \omega_{(4)k}) \partial_l = \quad (40)$$

²Отметим, что сейчас речь идет о контравариантной метрике Бервальда-Моора (это отмечено тильдой), определение которой в изотропном базисе P_n отличается от (1) заменой $dx^i \rightarrow \partial_i$. Многомерные матрицы, представляющие компоненты тензоров ${}^{(n)}G$ и ${}^{(n)}\tilde{G}$ удовлетворяют соотношениям: ${}^{(n)}G_{AB} {}^{(n)}\tilde{G}^{BA'} = n_B! \Delta(A, A')$, где A, A', B — коллективные индексы, n_B — число индексов, по которым производится суммирование, величина $\Delta(A, A')$ равна нулю, если в совокупности индексов A или A' по отдельности есть хотя бы одна пара повторяющихся, и равна единице в противоположном случае.

³Здесь и далее мы усредняем соприкосновение по всем опорам данного типа.

$$= \frac{1}{x^2 x^3 x^4} \partial_1 + \frac{1}{x^1 x^3 x^4} \partial_2 + \frac{1}{x^1 x^2 x^4} \partial_3 + \frac{1}{x^1 x^2 x^3} \partial_4;$$

симметричное тензорное поле валентности (2,0):

$$g \equiv \sum_s \tilde{\mathcal{E}}_s^2 \uparrow^{(4)} \tilde{G} \quad (41)$$

с матрицей компонент

$$(g^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/x^3 x^4 & 1/x^2 x^4 & 1/x^2 x^3 \\ 1/x^3 x^4 & 0 & 1/x^1 x^4 & 1/x^1 x^3 \\ 1/x^2 x^4 & 1/x^1 x^4 & 0 & 1/x^1 x^2 \\ 1/x^2 x^3 & 1/x^1 x^3 & 1/x^1 x^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

и симметричное тензорное поле валентности (3,0):

$$S \equiv \sum_s \tilde{\mathcal{E}}_s^1 \uparrow^{(4)} \tilde{G} \quad (43)$$

с отличными от нуля компонентами:

$$S^{123} = \frac{1}{x^4}; \quad S^{124} = \frac{1}{x^3}; \quad S^{134} = \frac{1}{x^2}; \quad S^{234} = \frac{1}{x^1}. \quad (44)$$

Для надлежащей интерпретации полученного набора геометрических объектов, обратимся прежде всего к тензору g , который мы отождествляем с метрикой риманова многообразия, кодируемого гиперкомплексным потенциалом $\ln h$. Ее ковариантные компоненты представляются матрицей:

$$(g_{ik}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2x^2 x^3 x^4 / x^1 & x^3 x^4 & x^2 x^4 & x^2 x^3 \\ x^3 x^4 & -2x^1 x^3 x^4 / x^2 & x^1 x^4 & x^1 x^3 \\ x^2 x^4 & x^1 x^4 & -2x^1 x^2 x^4 / x^3 & x^1 x^2 \\ x^2 x^3 & x^1 x^3 & x^1 x^2 & -2x^1 x^2 x^3 / x^4 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Полученная метрика имеет богатую группу симметрий. Решение уравнений Киллинга

$$L_X g = 0 \quad (46)$$

описывается следующим набором шести независимых полей:

$$\begin{aligned} X_{(1)} &= x^1 \ln \left(\frac{x^3}{x^4} \right) \partial_1 - x^3 \ln \left(\frac{x^1}{x^4} \right) \partial_3 + x^4 \ln \left(\frac{x^1}{x^3} \right) \partial_4; & X_{(2)} &= x^1 \partial_1 - x^4 \partial_4; \\ X_{(3)} &= x^1 \ln \left(\frac{x^2}{x^4} \right) \partial_1 - x^2 \ln \left(\frac{x^1}{x^4} \right) \partial_2 + x^4 \ln \left(\frac{x^1}{x^2} \right) \partial_4; & X_{(4)} &= x^2 \partial_2 - x^4 \partial_4; \\ X_{(5)} &= x^2 \ln \left(\frac{x^3}{x^4} \right) \partial_2 - x^3 \ln \left(\frac{x^2}{x^4} \right) \partial_3 + x^4 \ln \left(\frac{x^2}{x^3} \right) \partial_4; & X_{(6)} &= x^3 \partial_3 - x^4 \partial_4. \end{aligned} \quad (47)$$

Поля $X_{(2)}$, $X_{(4)}$, $X_{(6)}$ и $X_{(1)}$, $X_{(3)}$, $X_{(6)}$ по отдельности образуют подалгебры (первая тройка — абелеву). Следует ожидать, что рассматриваемое риманово многообразие имеет отношение к моделям ОТО космологического типа. Чтобы убедиться в справедливости этого предположения, сделаем замену координат: $u^i = \ln x^i$, $i = 1, 2, 3, 4$. В этих координатах метрика (45) принимает конформно-плоский вид:

$$g = e^{u^1 + u^2 + u^3 + u^4} g_0, \quad (48)$$

где

$$g_0 \equiv \frac{1}{3}(-2du^1 \otimes du^1 - 2du^2 \otimes du^2 - 2du^3 \otimes du^3 - 2du^4 \otimes du^4 + du^1 \vee du^2 + du^1 \vee du^3 + du^1 \vee du^4 + du^2 \vee du^3 + du^2 \vee du^4 + du^3 \vee du^4), \quad (49)$$

$a \vee b \equiv a \otimes b + b \otimes a$. Матрица метрики g_0 имеет собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 1/3$, что согласуется с заключением о локально-лоренцевом виде соприкасающейся метрики g , сделанным ранее. Соответствующие собственные векторы:

$$U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad U_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (50)$$

можно подвергнуть процедуре ортогонализации Шмидта, в результате чего получаем ортогональную матрицу R , диагонализующую матрицу g_0 :

$$R = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} \\ 1/2 & 0 & 2/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} \\ 1/2 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad (51)$$

(ее столбцы — это ортогонализированные собственные векторы g_0).

Выполняя теперь с помощью матрицы R замену переменных:

$$t = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{2\sqrt{3}}; \quad x = \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{2}}; \quad y = \frac{2u_3 - u_1 - u_2}{\sqrt{6}}; \quad z = \frac{\sqrt{3}(3u_4 - u_1 - u_2 - u_3)}{6} \quad (52)$$

во всех геометрических объектах, получим псевдориманову метрику космологического типа (t — конформное время):

$$g = e^{2\sqrt{3}t}(dt \otimes dt - dx \otimes dx - dy \otimes dy - dz \otimes dz); \quad (53)$$

космологическое скалярное поле:

$$\phi(t) = e^{-2\sqrt{3}t}; \quad (54)$$

космологическое векторное поле:

$$v = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-2\sqrt{3}t}\partial_t \quad (55)$$

и космологическое симметричное тензорное поле с отличными от нуля компонентами:

$$S^{ttt} = -S^{txx} = -S^{tyy} = -S^{tzz} = -S^{xxz} = -S^{yyz} = \frac{e^{-2\sqrt{3}t}}{\sqrt{3}}; \\ S^{yyy} = -S^{xxy} = \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-2\sqrt{3}t}; \quad S^{zzz} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-2\sqrt{3}t}. \quad (56)$$

Сделаем несколько пояснений к полученным результатам.

1. Космологическая метрика (53) описывает однородную изотропную вселенную с плоскими пространственными сечениями. В интерпретации эйнштейновской ОТО такая вселенная порождается веществом с баротропным уравнением состояния $p = -\varepsilon/3$ (уравнение состояния струноподобной материи).

2. Симметрия скаляра ϕ , вектора v и тензора S оказываются автоматически согласованными с симметриями метрики g , (все поля являются полями космологического типа).
3. Имеют место соотношения:

$$g(v, v) = \frac{4\phi}{3}; \quad \bar{S} = \text{Tr}S = \frac{4}{\sqrt{3}}\partial_t; \quad g(\bar{S}, \bar{S}) = \frac{16}{3\phi}. \quad (57)$$

4. Предыдущий пункт обнаруживает, что вселенная, кодируемая функцией $\ln h$, фактически, управляется скалярным полем $\phi = e^{-2\sqrt{3}t} \equiv \|h^{-1}\|$, поскольку

$$g = \phi^{-1}g_0; \quad v = \frac{2}{\sqrt{3}}\phi\partial_t; \quad S = \phi S_0, \quad (58)$$

где g_0 — метрика Минковского, S_0 — постоянный симметричный тензор валентности $(3, 0)$.

5. Вопрос о системе динамических уравнений, которые в совокупности делают систему геометрических объектов $\{\phi, v, g, S\}$ самосогласованной остается открытым. Согласно общей идеологии поличисловой теории поля, эти уравнения должны быть тождественными следствиями уравнений теории поличислового потенциала, которая изначально формулируется в P_4 .

6 Геометрия и физика общей 0-голоморфной функции в P_4 .

Рассмотрим теперь более общий случай произвольной h -голоморфной⁴ функции вида:

$$f(h) = f_1(x^1)e_1 + f_2(x^2)e_2 + f_3(x^3)e_3 + f_4(x^4)e_4, \quad (59)$$

где f_i — гладкие функции своих аргументов. Голоморфный дифференциал df порождает теперь совокупность 1-форм $\{df_i\}$, из которых можно строить опоры \mathcal{E}^q различных порядков q . Соприкасая по аналогии с предыдущим разделом метрику Бервальда-Моора вдоль этих опор, получаем физико-геометрические объекты:

скалярное поле:

$$\phi \equiv \tilde{\mathcal{E}}^4 \uparrow (4)\tilde{G} \equiv \epsilon^{ijkl} df_{1i} df_{2j} df_{3k} df_{4l} = f'_1 f'_2 f'_3 f'_4; \quad (60)$$

векторное поле:

$$v \equiv \sum_s \tilde{\mathcal{E}}_s^3 \uparrow (4)\tilde{G} \equiv \epsilon^{ijkl} (df_{1i} df_{2j} df_{3k} + df_{1i} df_{2j} df_{4k} + df_{1i} df_{3j} df_{4k} + df_{2i} df_{3j} df_{4k}) \partial_l = \quad (61)$$

$$= f'_2 f'_3 f'_4 \partial_1 + f'_1 f'_3 f'_4 \partial_2 + f'_1 f'_2 f'_4 \partial_3 + f'_1 f'_2 f'_3 \partial_4;$$

симметричное тензорное поле валентности $(2, 0)$:

$$g \equiv \sum_s \tilde{\mathcal{E}}_s^2 \uparrow (4)\tilde{G} \quad (62)$$

с матрицей компонент

$$(g^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & f'_3 f'_4 & f'_2 f'_4 & f'_2 f'_3 \\ f'_3 f'_4 & 0 & f'_1 f'_4 & f'_1 f'_3 \\ f'_2 f'_4 & f'_1 f'_4 & 0 & f'_1 f'_2 \\ f'_2 f'_3 & f'_1 f'_3 & f'_1 f'_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (63)$$

⁴По терминологии работы [5] 0-голоморфной. Случаи k -голоморфности будут давать изоморфные картины, связанные друг с другом переобозначением координат.

и симметричное тензорное поле валентности (3, 0):

$$S \equiv \sum_s \tilde{\mathcal{E}}_s^1 \uparrow^{(4)} \tilde{G} \quad (64)$$

с отличными от нуля компонентами:

$$S^{123} = f'_4; \quad S^{124} = f'_3; \quad S^{134} = f'_2; \quad S^{234} = f'_1. \quad (65)$$

Отметим, что, ввиду сходной структуры $\ln h$ и f в (59), каждая из формул (60)-(65) получается из соответствующих формул (39)-(44) простой заменой: $x^i \mapsto 1/f'_i$. Это соответствие сохраняется в некоторой степени и в дальнейших рассуждениях и мы будем использовать его для сокращения выкладок. Для ковариантных компонент римановой метрики g из (45) мы получим матрицу:

$$(g_{ik}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2f'_1/f'_2f'_3f'_4 & 1/f'_3f'_4 & 1/f'_2f'_4 & 1/f'_2f'_3 \\ 1/f'_3f'_4 & -2f'_2/f'_1f'_3f'_4 & 1/f'_1f'_4 & 1/f'_1f'_3 \\ 1/f'_2f'_4 & 1/f'_1f'_4 & -2f'_3/f'_1f'_2f'_4 & 1/f'_1f'_2 \\ 1/f'_2f'_3 & 1/f'_1f'_3 & 1/f'_1f'_2 & -2f'_4/f'_1f'_2f'_3 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Сделаем теперь замену переменных $u^i = f_i(x^i)$. Как и раньше в этих координатах метрика (66) принимает конформно-плоский вид:

$$g = \phi^{-1}(u^1, u^2, u^3, u^4)g_0, \quad (67)$$

где g_0 — метрика плоского пространства-времени вида (49), а скалярное поле

$$\phi(u^1, u^2, u^3, u^4) \equiv f'_1(f^{-1}(u_1))f'_2(f^{-1}(u_2))f'_3(f^{-1}(u_3))f'_4(f^{-1}(u_4)) \quad (68)$$

и f_i^{-1} — обратная функция к f_i . Отметим, что функция $g(u) = f'(f^{-1}(u))$ локально может быть выбрана произвольной. Действительно, выбирая произвольную гладкую g и переходя к новой переменной $x = f^{-1}(u)$, мы приходим к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$f'(x) = g(f(x)) \quad (69)$$

относительно компоненты потенциала f . Таким образом, без ограничения общности можно считать, что

$$\phi(u^1, u^2, u^3, u^4) = g_1(u^1)g_2(u^2)g_3(u^3)g_4(u^4), \quad (70)$$

где g_i — произвольные гладкие функции своих аргументов.

Диагонализируя матрицу метрики g_0 с помощью матрицы (51), мы получим конформно-плоскую риманову метрику вида:

$$g = \Phi^{-1}(t, x, y, z)(dt \otimes dt - dx \otimes dx - dy \otimes dy - dz \otimes dz), \quad (71)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(t, x, y, z) = g_1 \left((3t - \sqrt{6}x - z - \sqrt{2}y)/\sqrt{12} \right) g_2 \left((3t + \sqrt{6}x - \sqrt{2}y - z)/\sqrt{12} \right) \times \\ g_3 \left(\sqrt{3}(3t + 2\sqrt{2}y - z)/6 \right) g_4 \left(\sqrt{3}(t + z)/2 \right). \end{aligned} \quad (72)$$

Метрика (71) описывает класс конформно-плоских моделей пространства времени ОТО некоторого специального вида. В качестве примера рассмотрим гиперболический потенциал⁵:

$$f(h) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{k_i} \ln(x^i + C^i) e_i, \quad (73)$$

где k_i, C^i — вещественные константы. После простых вычислений и преобразований скалярное поле Φ в (71) можно преобразовать к виду:

$$\Phi = e^{at+bx+cy+dz}, \quad (74)$$

где a, b, c, d — вещественные константы, линейно зависящие от k_i . В зависимости от знака выражения $s^2 = a^2 - b^2 - c^2 - d^2$ линейную форму в показателе экспоненты можно с помощью преобразований Лоренца (они не изменяют вида плоской метрики g_0) преобразовать к одному из трех видов: (1) e^{At} , (2) e^{Bx} , (3) $e^{A(t+x)}$. Первый случай соответствует вселенной, кодируемой поличисловым логарифмом, рассмотренной в предыдущем разделе, второй описывает неоднородную анизотропную статическую вселенную с отрицательной плотностью энергии и нарушенным условием энергодоминантности. Наконец, третий случай соответствует электровакуумной анизотропной вселенной, заполненной излучением, распространяющимся вдоль оси x .

Мы не останавливаемся на явных формулах для векторного и тензорного полей в рассматриваемом случае.

7 Поличисловой потенциал для метрик Фридмана-Робертсона-Уокера

В настоящем разделе мы исследуем вопрос о возможности получения стандартных космологических моделей фридмановского типа с метрикой из соприкасающихся конструкций в пространстве Бервальда-Моора. Поскольку любая соприкасающаяся риманова метрика, выводимая из метрики Бервальда-Моора, взятой в изотропных координатах, получается снова в изотропных координатах⁶, то для ответа на поставленный вопрос мы сначала перепишем метрику Фридмана в изотропных координатах. В обычных координатах (в калибровке конформного времени) метрики фридмановского типа имеют следующий общий вид:

$$g = a^2(t)(dt \otimes dt - dr \otimes dr - \frac{\sin^2(Kr)}{K^2}(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi)), \quad (75)$$

где t — конформное время, $a(t)$ — масштабный фактор, K — параметр кривизны пространственных сечений, который может иметь любые вещественные отличные от нуля значения (замкнутый мир Фридмана), чисто мнимые значения (открытый мир Фридмана) и нулевые значения (плоский мир Фридмана). Изотропная координата X для метрики Фридмана удовлетворяет уравнению:

$$g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \partial_\beta X = \frac{1}{a^2} \left((\partial_t X)^2 - (\partial_r X)^2 - \frac{K^2}{\sin^2(Kr)} \left((\partial_\theta X)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta} (\partial_\varphi X)^2 \right) \right) = 0. \quad (76)$$

Разделение переменных дает следующее общее решение для изотропных координат:

$$X = X_0 e^{At+c\varphi \pm f(A/K, b, Kr) \pm f(b, c, \theta)}, \quad (77)$$

⁵Он является аналитической функцией поличисловой переменной с поличисловыми коэффициентами.

⁶Во втором случае изотропность понимается уже относительно светового конуса псевдоримановой геометрии: координата X называется изотропной, если норма вектора нормали к гиперповерхности ее постоянного значения равна нулю: $(\partial X, \partial X) = 0$, что в координатном представлении приводит к уравнению $g^{XX} = 0$, где g^{XX} — диагональная X -компонента контравариантной метрики.

где A, b, c — константы разделения, а функция $f(b, c, x)$ является решением дифференциального уравнения:

$$\frac{df}{dx} = \sqrt{b^2 - \frac{c^2}{\sin^2 x}}. \quad (78)$$

В качестве набора независимых изотропных координат примем следующие зависимости:

$$X^1 = e^{t+r}; \quad X^2 = e^{t-r}; \quad X^3 = e^{At+f(A/K,1,Kr)+\theta}; \quad X^4 = e^{At+f(A/K,b,Kr)+f(b,1,\theta)+\varphi}. \quad (79)$$

Независимость координат $\{X^1, X^2, X^3, X^4\}$ проверяется непосредственным вычислением детерминанта матрицы Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} X^1 & X^1 & 0 & 0 \\ X^2 & -X^2 & 0 & 0 \\ AX^3 & X^3 \sqrt{A^2 - K^2/\sin^2(Kr)} & X^3 & 0 \\ AX^4 & X^4 \sqrt{A^2 - b^2 K^2/\sin^2(Kr)} & \sqrt{b^2 - 1/\sin^2 \theta} & X^4 \end{pmatrix}. \quad (80)$$

Он равен $-2X^1 X^2 X^3 X^4$ в допустимой области замены координат:

$$\theta \notin (-\arcsin(1/|b|), +\arcsin(1/|b|)), \quad r \notin (-\arcsin(|bK/A|)/K, +\arcsin(|bK/A|)/K).$$

Преобразуя контравариантную метрику Фридмана:

$$g = \frac{1}{a^2(t)} \left(\partial_t \otimes \partial_t - \partial_r \otimes \partial_r - \frac{K^2}{\sin^2(Kr)} \left(\partial_\theta \otimes \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi \otimes \partial_\varphi \right) \right) \quad (81)$$

с помощью матрицы (80), приходим к метрике Фридмана в изотропных координатах с матрицей компонент:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2X^1 X^2}{a^2(t)} & \frac{X^1 X^3 (A-f_1)}{a^2(t)} & \frac{X^1 X^4 (A-f_2)}{a^2(t)} \\ \frac{2X^1 X^2}{a^2(t)} & 0 & \frac{X^2 X^3 (A+f_1)}{a^2(t)} & \frac{X^2 X^4 (A+f_2)}{a^2(t)} \\ \frac{X^1 X^3 (A-f_1)}{a^2(t)} & \frac{X^2 X^3 (A+f_1)}{a^2(t)} & 0 & \frac{X^3 X^4}{a^2(t)} \left(A^2 - f_1 f_2 - \frac{K^2 f_3}{\sin^2(Kr)} \right) \\ \frac{X^1 X^4 (A-f_2)}{a^2(t)} & \frac{X^2 X^4 (A+f_2)}{a^2(t)} & \frac{X^3 X^4}{a^2(t)} \left(A^2 - f_1 f_2 - \frac{K^2 f_3}{\sin^2(Kr)} \right) & 0 \end{pmatrix}, \quad (82)$$

где

$$f_1(r) = f_r(A/K, 1, Kr); \quad f_2(r) = f_r(A/K, b, Kr); \quad f_3(\theta) = f_{,\theta}(b, 1, \theta); \quad (83)$$

$$t = \frac{1}{2} \ln(X^1 X^2); \quad r = \frac{1}{2} \ln(X^1/X^2); \quad \theta = \ln \frac{X^3}{(X^1 X^2)^{A/2}} - f_1 \left(\frac{1}{2} \ln \frac{X^1}{X^2} \right).$$

Полагая теперь, что метрика (82) порождается соприкосновением с 1-формами dQ_i , связанными с компонентами поличислового потенциала:

$$Q = Q_1(X)e_1 + Q_2(X)e_2 + Q_3(X)e_3 + Q_4(X)e_4, \quad (84)$$

мы приходим к системе 6 нелинейных дифференциальных уравнений на 4 неизвестные функции:

$$2 \sum_{i=1}^4 \partial_3 Q_i \partial_4 Q_i = \frac{2X^1 X^2}{a^2}; \quad 2 \sum_{i=1}^4 \partial_2 Q_i \partial_4 Q_i = \frac{X^1 X^3 (A - f_1)}{a^2}; \quad (85)$$

$$2 \sum_{i=1}^4 \partial_2 Q_i \partial_3 Q_i = \frac{X^1 X^4 (A - f_2)}{a^2}; \quad 2 \sum_{i=1}^4 \partial_1 Q_i \partial_2 Q_i = \frac{X^3 X^4}{a^2} \left(A^2 - f_1 f_2 - \frac{K^2 f_3}{\sin^2(Kr)} \right); \quad (86)$$

$$2 \sum_{i=1}^4 \partial_1 Q_i \partial_4 Q_i = \frac{X^2 X^3 (A + f_1)}{a^2}; \quad 2 \sum_{i=1}^4 \partial_1 Q_i \partial_3 Q_i = \frac{X^2 X^4 (A + f_2)}{a^2}. \quad (87)$$

В настоящей статье мы не будем заниматься ее решением.

8 Поличисловой потенциал для метрики Шварцшильда

Для отыскания поличислового потенциала для метрики Шварцшильда мы будем действовать как и ранее: сначала перепишем метрику Шварцшильда в изотропных координатах, а затем будем рассматривать ее как соприкасающуюся вдоль 1-форм дифференциала неизвестного поличислового потенциала. Изотропная координата X для метрики Шварцшильда удовлетворяет уравнению:

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X\partial_\beta X = \frac{1}{F}(\partial_t X)^2 - F(\partial_r X)^2 - \frac{1}{r^2}(\partial_\theta X)^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}(\partial_\varphi X)^2 = 0. \quad (88)$$

Здесь $F = 1 - 2M/r$. Разделение переменных дает следующее общее решение для изотропных координат:

$$X = at + b\varphi \pm f_1(a, \mu, r) \pm f_2(b, \mu, \theta), \quad (89)$$

где a, b, μ — константы разделения, а функции f_1 и f_2 являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{df_1}{dr} = \sqrt{\frac{a^2}{F^2} - \frac{\mu}{Fr^2}}; \quad \frac{df_2}{d\theta} = \sqrt{\mu - \frac{b^2}{\sin^2 \theta}}. \quad (90)$$

В качестве набора независимых изотропных координат примем следующие зависимости:

$$X^1 = t + f_1(1, 0, r); \quad X^2 = t - f_1(1, 0, r); \quad (91)$$

$$X^3 = t + \varphi + f_1(1, \mu, r) + f_2(1, \mu, \theta); \quad X^4 = t + \varphi + f_1(1, \mu, r) - f_2(1, \mu, \theta).$$

Независимость координат $\{X^1, X^2, X^3, X^4\}$ проверяется непосредственным вычислением детерминанта матрицы Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1/F & 0 & 0 \\ 1 & -1/F & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{1/F^2 - \mu/r^2 F} & \sqrt{\mu - 1/\sin^2 \theta} & 1 \\ 1 & \sqrt{1/F^2 - \mu/r^2 F} & -\sqrt{\mu - 1/\sin^2 \theta} & 1 \end{pmatrix}. \quad (92)$$

Он равен $-4\sqrt{\mu - 1/\sin^2 \theta}/F \neq 0$ в допустимой области замены координат $\theta \notin (-\arcsin(1/\sqrt{\mu}), +\arcsin(1/\sqrt{\mu}))$. Преобразуя контравариантную метрику Шварцшильда:

$$g = \frac{1}{F}\partial_t \otimes \partial_t - F\partial_r \otimes \partial_r - \frac{1}{r^2}(\partial_\theta \otimes \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta}\partial_\varphi \otimes \partial_\varphi) \quad (93)$$

с помощью матрицы (92), приходим к метрике Шварцшильда в изотропных координатах с матрицей компонент:

$$(g)_{\text{iso}} = \begin{pmatrix} 0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_2 \\ \Phi_1 & 0 & \Phi_1 - \Phi_2 & \Phi_1 - \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_1 - \Phi_2 & 0 & \Psi \\ \Phi_2 & \Phi_1 - \Phi_2 & \Psi & 0 \end{pmatrix}, \quad (94)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{2}{F}; \quad \Phi_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \mu F/r^2}}{F}; \quad \Psi = \frac{2}{r^2} \left(\mu - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right). \quad (95)$$

При этом координаты r и θ в (94)-(95) должны быть заменены на свои выражения через $\{X^1, X^2, X^3, X^4\}$:

$$r = 2M(1 + L(-A^2 e^{U/2M})); \quad \theta = K(V), \quad U = X^1 - X^2; \quad V = X^3 - X^4, \quad (96)$$

L — функция Ламберта, определяемая трансцендентным уравнением: $L(x)e^{L(x)} = x$, K — обращение функции $f_2(1, \mu, \theta)$ относительно θ .

Полагая теперь, что метрика (94) порождается соприкосновением с 1-формами dQ_i , связанными с компонентами поличислового потенциала:

$$Q = Q_1(X)e_1 + Q_2(X)e_2 + Q_3(X)e_3 + Q_4(X)e_4, \quad (97)$$

мы приходим к системе 6 нелинейных дифференциальных уравнений на 4 неизвестные функции:

$$2 \sum_{i=1}^4 \partial_3 Q_i \partial_4 Q_i = \Phi_1; \quad 2 \sum_{i=1}^4 \partial_2 Q_i \partial_4 Q_i = 2 \sum_{i=1}^4 \partial_2 Q_i \partial_3 Q_i = \Phi_2; \quad (98)$$

$$2 \sum_{i=1}^4 \partial_1 Q_i \partial_2 Q_i = \Psi; \quad 2 \sum_{i=1}^4 \partial_1 Q_i \partial_4 Q_i = 2 \sum_{i=1}^4 \partial_1 Q_i \partial_3 Q_i = \Phi_1 - \Phi_2. \quad (99)$$

В настоящей статье мы не будем заниматься ее решением.

9 Физика и геометрия обобщенно-голоморфных функций

Рассмотрим в этом разделе соприкасающиеся метрики, порождаемые поличисловым потенциалом, ассоциированным с обобщенно-голоморфными или неголоморфными функциями поличисловой переменной. Отметим, что любое, даже незначительное усложнение вида голоморфной функции (59) весьма значительно усложняет структуру соприкасающихся объектов, в частности, структуру соприкасающейся ковариантной римановой метрики. Поэтому мы рассмотрим минимальные обобщения, объем вычислений в которых соизмерим с размерами журнальной статьи. Прежде всего рассмотрим потенциал вида:

$$F_1 = f_1(x^1, x^2)e_1 + f_2(x^2)e_2 + f_3(x^3)e_3 + f_4(x^4)e_4, \quad (100)$$

где f_i — набор гладких функций от указанных переменных. Очевидно, потенциал F_1 является обобщением потенциала f в (59) и относится к специальному типу $\mathcal{G}_{0, n-1}^n$ по терминологии [5]. Опора второго порядка порождается системой диад $\{df_i \vee df_j\}$, так что соприкасающаяся контравариантная риманова метрика будет иметь вид:

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\gamma f_i \partial_\delta f_j, \quad (101)$$

или в компонентах:

$$\begin{pmatrix} 0 & f'_3 f'_4 & f'_4(f'_2 + f_{1,2}) & f'_3(f'_2 + f_{1,2}) \\ f'_3 f'_4 & 0 & f'_1 f'_4 & f'_1 f'_3 \\ f'_4(f'_2 + f_{1,2}) & f'_3 f'_4 & 0 & f'_1(f'_2 + f_{1,2}) \\ f'_3(f'_2 + f_{1,2}) & f'_1 f'_3 & f'_1(f'_2 + f_{1,2}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (102)$$

где $f'_i \equiv \partial f_i / \partial x^i$, $f_{1,2} \equiv \partial f_1 / \partial x^2$. Вычисление ковариантной соприкасающейся метрики приводит к следующей матрице компонент:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -2f'_1/(f'_2+f_{1,2})f'_3f'_4 & 1/f'_3f'_4 & 1/(f'_2+f_{1,2})f'_4 & 1/(f'_2+f_{1,2})f'_3 \\ 1/f'_3f'_4 & -2(f'_2+f_{1,2})/f'_1f'_3f'_4 & 1/f'_1f'_4 & 1/f'_1f'_3 \\ 1/(f'_2+f_{1,2})f'_4 & 1/f'_1f'_4 & -2f'_3/f'_1(f'_2+f_{1,2})f'_4 & 1/f'_1(f'_2+f_{1,2}) \\ 1/(f'_2+f_{1,2})f'_3 & 1/f'_1f'_3 & 1/f'_1(f'_2+f_{1,2}) & -2f'_4/f'_1f'_2f'_3 \end{pmatrix}. \quad (103)$$

Очевидно, что (103) переходит в (66) при $f_{1,2} = 0$.

Вычисление компонент тензора кривизны и тензора Эйнштейна для метрики (103) в выбранных изотропных координатах приводят к довольно громоздким выражениям. Для примера приведем явный вид выражения скалярной кривизны для метрики (103):

$$\begin{aligned} R = & (-168f_{2,2}f_{3,3}^3f_{4,4}^5f_{1,1}f_{1,1,2}f_{1,1,1}f_{1,2} + 15f_{2,2}^3f_{3,3}f_{4,4}^7f_{1,1,1}^2 - \\ & 108f_{2,2}f_{4,4}^5f_{3,3}f_{1,1}^2f_{1,2}^2f_{1,1,1}f_{3,3} - 36f_{2,2}f_{4,4}^4f_{3,3}^2f_{1,1,1}f_{4,4,4}f_{1,1}^2f_{1,2}^2 - \\ & 84f_{3,3}^4f_{1,1}^3f_{4,4}^4f_{1,1,2}f_{2,2,2} + 4f_{1,1}^4f_{3,3}^3f_{1,2}^2f_{4,4,4,4}f_{4,4}^2 + \\ & 15f_{3,3}f_{4,4}^7f_{1,1,1}^3f_{1,2}^3 - 72f_{2,2}^2f_{1,1}^4f_{3,3}^3f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{3,3,3}f_{1,2} - \\ & 18f_{2,2}^2f_{4,4}^7f_{3,3}f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{1,2} - 27f_{2,2}f_{1,1}^4f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{3,3,3}f_{1,2}^2 - \\ & 9f_{3,3}^2f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{1,1}^4f_{1,2}f_{1,2,2} - 9f_{3,3}^2f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{1,1}^4f_{1,2}f_{2,2,2} - \\ & 144f_{2,2}^2f_{1,1}^2f_{4,4}^4f_{3,3}^2f_{1,1,1}f_{4,4,4}f_{1,2} - 28f_{2,2}^3f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{4,4,4}^3f_{3,3} - \\ & 144f_{2,2}^2f_{1,1}^2f_{4,4}^3f_{3,3}^3f_{1,1,1}f_{4,4,4}f_{1,2} - 180f_{2,2}f_{4,4}^4f_{3,3}^2f_{1,1,1}^2f_{1,2}^2 - \\ & 108f_{2,2}^2f_{4,4}^5f_{3,3}f_{1,1}^2f_{1,2}f_{1,1,1}f_{3,3} - 108f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{3,3,3}f_{4,4,4}f_{1,2} - \\ & 9f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{1,1}^2f_{2,2,2} - 9f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{1,1}^2f_{1,2,2} - \\ & 9f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{1,1}^2f_{4,4}^6f_{1,1,1}f_{2,2,2} - 9f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{1,1}^2f_{4,4}^6f_{1,1,1}f_{1,2,2} - \\ & 6f_{1,1}^4f_{3,3}f_{4,4,4,4}f_{4,4}^4f_{2,2}f_{1,2}^2 - 6f_{1,1}^4f_{3,3}f_{4,4,4,4}f_{4,4}^4f_{1,2}f_{2,2}^2 + \\ & 135f_{2,2}^2f_{4,4}^6f_{1,1,1}^2f_{3,3}^2f_{1,2} - 36f_{2,2}^2f_{4,4}^4f_{3,3}^2f_{1,1,1}f_{4,4,4}f_{1,1}^2f_{1,2} - \\ & 54f_{2,2}f_{4,4}^6f_{3,3}^2f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{1,2}^2 - 72f_{2,2}f_{1,1}^4f_{3,3}f_{4,4}^3f_{4,4,4}f_{3,3,3}f_{1,2}^2 - \\ & 180f_{2,2}^2f_{4,4}^4f_{3,3}^2f_{1,1,1}^2f_{1,2} - 27f_{2,2}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{3,3,3}f_{1,2} - \\ & 8f_{1,1}^4f_{3,3}^2f_{4,4,4,4}f_{4,4}^3f_{2,2}^3 - 36f_{3,3}^4f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{2,2,2}f_{4,4,4}f_{2,2} - \\ & 36f_{3,3}^4f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{1,2,2}f_{4,4,4}f_{2,2} + 45f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{4,4,4}^2f_{1,2}^2 + \\ & 112f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{2,2}f_{1,2} + 72f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{2,2}^2f_{1,2} + \\ & 72f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{2,2}f_{1,2}^2 - 184f_{2,2}f_{4,4}^4f_{3,3}^4f_{1,1}f_{1,1,2}f_{1,1,1}f_{1,2} - \\ & 24f_{1,1}^4f_{3,3}^2f_{4,4,4,4}f_{4,4}^3f_{1,2}f_{2,2}^2 + 45f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{4,4,4}^2f_{1,2} - \\ & 6f_{2,2}^2f_{1,1}^3f_{4,4}^3f_{3,3}^3f_{1,1,2}f_{4,4,4} - 36f_{2,2}^3f_{3,3}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{3,3,3}f_{4,4,4} - \\ & 48f_{2,2}^3f_{1,1}^2f_{4,4}^2f_{3,3}^3f_{1,1,1}f_{4,4,4} - 36f_{2,2}^3f_{4,4}^5f_{3,3,3}f_{1,1}^2f_{1,1,1}f_{3,3} - \\ & 84f_{2,2}^2f_{3,3}^3f_{4,4}^5f_{1,1}f_{1,1,2}f_{1,1,1} - 84f_{2,2}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{4,4,4}^3f_{3,3}f_{1,2} - \\ & 92f_{2,2}^2f_{4,4}^4f_{3,3}^4f_{1,1}f_{1,1,2}f_{1,1,1} - 180f_{2,2}^2f_{1,1}^2f_{4,4,4}^2f_{3,3}^4f_{1,2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4f_{3,3}f_{4,4}f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{2,2}f_{1,2} + 12f_{1,1}^4f_{3,3}f_{4,4}^2f_{4,4}^3f_{2,2}f_{1,2}^2 - \\
& 60f_{4,4}^4f_{3,3}^4f_{1,1,1}^2f_{1,2}^3 - 36f_{4,4}^4f_{3,3,3}^4f_{1,1}f_{1,2}f_{3,3}^2f_{1,2,2} - \\
& 36f_{4,4}^4f_{3,3,3}^4f_{1,1}f_{1,2}f_{3,3}^2f_{2,2,2} - 84f_{3,3}^3f_{4,4}^5f_{1,1}f_{1,1,2}f_{1,1,1}f_{1,2}^2 - \\
& 36f_{4,4}^5f_{3,3,3}^4f_{1,1}f_{1,2}f_{3,3}f_{2,2,2} + 24f_{1,1}^4f_{3,3}^4f_{1,2}^3f_{4,4,4,4}f_{4,4} - \\
& 36f_{3,3}^3f_{4,4,4}^4f_{1,1}^3f_{4,4}^3f_{1,2,2}f_{1,2} + 6f_{4,4}^6f_{3,3}^2f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{1,2}^2 - \\
& 36f_{3,3}^3f_{4,4,4}^4f_{1,1}^3f_{4,4}^3f_{2,2,2}f_{1,2} - 144f_{2,2}^2f_{1,1}^2f_{4,4}^2f_{3,3}^4f_{1,1,1}f_{4,4,4}f_{1,2}^2 - \\
& 60f_{2,2}^3f_{4,4}^4f_{3,3}^4f_{1,1,1}^2 - 36f_{2,2}^3f_{3,3}^2f_{1,1}^5f_{4,4}f_{1,1,1}f_{2,2,2} - \\
& 36f_{2,2}^3f_{3,3}^2f_{1,1}^5f_{4,4}f_{1,1,1}f_{1,2,2} + 45f_{2,2}^2f_{3,3}^3f_{4,4}^7f_{1,1,1}^2f_{1,2} + \\
& 45f_{2,2}^2f_{3,3}^3f_{4,4}^7f_{1,1,1}^2f_{1,2}^2 - 21f_{1,1}^3f_{3,3}^2f_{4,4}^6f_{1,1,2}f_{2,2,2} - \\
& 21f_{1,1}^3f_{3,3}^2f_{4,4}^6f_{1,1,2}f_{1,2,2} - 9f_{1,1}^4f_{4,4}^4f_{4,4,4}^3f_{3,3}^3f_{1,2}^2 - \\
& 6f_{2,2}^2f_{3,3}^3f_{4,4}^4f_{1,1}^3f_{1,1,2}f_{4,4,4}f_{1,2} - 24f_{1,1}^4f_{3,3}^2f_{4,4,4,4}^3f_{4,4}^2f_{2,2}f_{1,2} - \\
& 18f_{2,2}^2f_{4,4}^7f_{3,3}^3f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{1,2}^2 - 30f_{2,2}^2f_{1,1}^6f_{4,4}f_{1,1,2}f_{3,3}^2f_{1,1,1}f_{1,2} + \\
& 12f_{1,1}^4f_{3,3}^3f_{4,4,4,4}^2f_{4,4}^2f_{1,2}f_{2,2}^2 + 6f_{4,4}^6f_{3,3}^2f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{2,2}^2 + \\
& 4f_{1,1}^4f_{3,3}^3f_{4,4,4,4}^2f_{4,4}^2f_{2,2}^3 - 108f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{4,4}^2f_{1,1}^2f_{1,1,1}f_{3,3,3}f_{1,2} - \\
& 33f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{1,1}^5f_{4,4}^2f_{1,1,2}^2 - 36f_{3,3}^3f_{1,1}^5f_{4,4}^2f_{1,1,1}f_{1,2}f_{2,2,2} - \\
& 36f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1,1}f_{1,2}f_{1,1}^2f_{1,2,2} - 36f_{2,2}^4f_{4,4}^3f_{3,3}^4f_{1,1}^2f_{3,3}^2f_{2,2,2} - \\
& 84f_{2,2}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{4,4,4}^3f_{3,3}^3f_{1,2} + 15f_{2,2}^3f_{3,3}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{4,4,4} - \\
& 144f_{2,2}^2f_{1,1}^2f_{4,4}^3f_{3,3}^3f_{1,1,1}f_{4,4,4}f_{1,2}^2 - 36f_{4,4}^5f_{3,3,3}^2f_{1,1}^3f_{1,2}^2f_{1,1,1}f_{3,3} + \\
& 45f_{4,4}^6f_{1,1,1}^2f_{3,3}^3f_{1,2}^3 - 36f_{2,2}^2f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1,1}^2f_{1,1}^2f_{1,2,2} + \\
& 45f_{2,2}^3f_{4,4}^6f_{1,1,1}^2f_{3,3}^3 - 12f_{2,2}^2f_{1,1}^3f_{4,4}^3f_{3,3}^3f_{1,1,2}f_{4,4,4}f_{1,2} + \\
& 4f_{2,2}^2f_{3,3}^3f_{1,1}^7f_{4,4}^4f_{1,1,2}f_{1,1,1}f_{1,2} + 48f_{2,2}^2f_{3,3}^4f_{4,4}^3f_{1,1}^3f_{1,1,2,2} - \\
& 50f_{2,2}^2f_{3,3}^4f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{1,1,2}^2 - 180f_{2,2}^2f_{1,1}^4f_{4,4,4}^2f_{3,3}^4f_{1,2}^2 - \\
& 9f_{3,3}^2f_{1,1}^2f_{4,4}^6f_{1,1,1}f_{1,2}f_{1,2,2} - 8f_{1,1}^4f_{3,3}^2f_{1,2}^3f_{4,4,4,4}^3f_{4,4} + \\
& 24f_{1,1}^4f_{3,3}^3f_{4,4,4,4}^2f_{4,4}^3f_{2,2} - 60f_{2,2}^3f_{1,1}^2f_{4,4,4}^3f_{3,3} - \\
& 9f_{3,3}^2f_{1,1}^2f_{4,4}^6f_{1,1,1}f_{1,2}f_{2,2,2} - 3f_{3,3}^2f_{4,4}^4f_{1,1}^3f_{1,1,2}f_{4,4,4}f_{1,2}^2 + \\
& 2f_{3,3}^2f_{1,1}^7f_{4,4}^4f_{1,1,2}f_{1,1,1}f_{1,2}^2 - 3f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{4,4}^3f_{1,1}^3f_{1,1,2}f_{4,4,4} + \\
& 2f_{2,2}^2f_{3,3}^3f_{1,1}^7f_{4,4}^4f_{1,1,2}f_{1,1,1} - 54f_{2,2}^2f_{4,4}^6f_{3,3}^2f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{1,2} + \\
& 72f_{1,1}^4f_{3,3}^4f_{4,4,4,4}^2f_{4,4}^2f_{2,2}f_{1,2}^2 - 36f_{4,4}^5f_{3,3,3}^4f_{1,1}f_{1,2}f_{3,3}f_{1,2,2} + \\
& 15f_{3,3}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{4,4,4}^3f_{1,2}^3 - 36f_{2,2}^3f_{3,3}^3f_{4,4,4}^4f_{1,1}^3f_{4,4}f_{1,2,2} - \\
& 24f_{2,2}^3f_{1,1}^3f_{3,3}^3f_{4,4}^4f_{4,4,4}^3f_{3,3,3} - 2f_{1,1}^4f_{3,3}^3f_{4,4,4,4}^4f_{4,4}^2f_{2,2} - \\
& 18f_{2,2}^3f_{4,4}^6f_{3,3}^2f_{1,1}f_{1,1,1,1} + 135f_{2,2}^2f_{4,4}^6f_{1,1,1}^2f_{3,3}^2f_{1,2}^2 - \\
& 60f_{1,1}^4f_{4,4,4}^2f_{3,3}^3f_{1,2}^3 - 108f_{2,2}^2f_{3,3}^4f_{4,4}^2f_{1,1}^2f_{1,1,1}f_{3,3,3}f_{1,2}^2 - \\
& 12f_{4,4}^4f_{3,3}^2f_{1,1,1}f_{4,4,4}^2f_{1,1}^3f_{1,2}^3 + 96f_{3,3}^3f_{4,4}^5f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{2,2}f_{1,2} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2f_{3,3}f_{4,4}^7f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{2,2}^2 + 4f_{1,1}^4f_{3,3}f_{1,2}^3f_{4,4,4}^2f_{4,4}^3 - \\
& 2f_{1,1}^4f_{3,3}f_{1,2}^3f_{4,4,4,4}f_{4,4}^4 - 2f_{3,3}f_{4,4}^7f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{1,2}^2 + \\
& 2f_{3,3}f_{1,1,2}^2f_{4,4}^7f_{1,1}^2f_{2,2} + 2f_{1,1}^2f_{3,3}f_{4,4}^7f_{1,1,2}^2f_{1,2} - \\
& 9f_{2,2}f_{4,4}^6f_{3,3,3}f_{1,1}^4f_{1,2} + 12f_{1,1}^4f_{3,3}f_{4,4,4}^2f_{4,4}^3f_{1,2}f_{2,2} - \\
& 36f_{3,3}^2f_{4,4}^4f_{1,1}^2f_{1,1,1}f_{3,3,3}f_{1,2}^3 - 36f_{2,2}^3f_{3,3}^2f_{4,4}^4f_{1,1}^2f_{1,1,1}f_{3,3,3} - \\
& 27f_{2,2}^2f_{1,1,1}f_{3,3,3}f_{4,4}^6f_{1,1}^2f_{1,2} - 27f_{2,2}f_{1,1,1}f_{3,3,3}f_{4,4}^6f_{1,1}^2f_{1,2}^2 + \\
& 48f_{2,2}^2f_{3,3}^3f_{4,4}^5f_{1,1}^3f_{1,1,2} - 36f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1,1}f_{1,2}f_{1,1,1}^2f_{2,2,2} - \\
& 36f_{3,3}^3f_{1,1}^2f_{4,4}^5f_{1,1,1}f_{1,2}f_{1,2,2} + 12f_{4,4}^6f_{3,3}^2f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{2,2}f_{1,2} - \\
& 24f_{1,1}^4f_{3,3}f_{4,4}^3f_{4,4,4}f_{3,3,3}f_{1,2}^3 - 48f_{1,1}^2f_{4,4}^2f_{3,3}^4f_{1,1,1}f_{4,4,4}f_{1,2}^3 + \\
& 48f_{3,3}^4f_{1,1}^3f_{4,4}^4f_{1,1,2,2}f_{1,2} + 48f_{3,3}^3f_{1,1}^3f_{4,4}^5f_{1,1,2,2}f_{1,2} - \\
& 36f_{2,2}^3f_{3,3}^3f_{4,4,4}f_{1,1}^4f_{4,4}^3f_{2,2,2} + 4f_{1,1}^4f_{3,3}f_{4,4,4}^2f_{4,4}^3f_{2,2}^3 - \\
& 9f_{2,2}^6f_{4,4}^6f_{3,3,3}f_{1,1}^4f_{2,2,2} - 9f_{2,2}^3f_{1,1}^4f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{3,3,3} - \\
& 36f_{2,2}^2f_{4,4}^5f_{3,3,3}f_{1,1}^4f_{3,3}f_{1,2,2} - 36f_{2,2}^2f_{4,4}^5f_{3,3,3}f_{1,1}^4f_{3,3}f_{2,2,2} - \\
& 36f_{2,2}^2f_{4,4}^4f_{3,3,3}f_{1,1}^4f_{3,3}^2f_{1,2,2} - 36f_{1,1}^4f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{2,2,2}f_{1,2} - \\
& 36f_{1,1}^4f_{3,3}^4f_{4,4}^2f_{4,4,4}f_{1,2,2}f_{1,2} - 36f_{3,3}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^4f_{3,3,3}f_{4,4,4}f_{1,2}^3 - \\
& 92f_{4,4}^4f_{3,3}^4f_{1,1}f_{1,1,2}f_{1,1,1}f_{1,2}^2 - 15f_{2,2}^2f_{1,1}^6f_{4,4}^4f_{1,1,2}f_{3,3}^2f_{1,1,1} - \\
& 84f_{3,3}^3f_{1,1}^3f_{4,4}^5f_{1,1,2}f_{1,2,2} - 36f_{2,2}^4f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1,1}f_{1,1}^2f_{2,2,2} + \\
& 72f_{1,1}^4f_{3,3}^3f_{4,4,4,4}f_{4,4}f_{1,2}f_{2,2}^2 - 108f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{3,3,3}f_{4,4,4}f_{1,2}^2 + \\
& 12f_{1,1}^3f_{3,3}^2f_{4,4}^6f_{1,1,2,2}f_{1,2} - 6f_{4,4}^7f_{3,3}f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{1,2}^3 + \\
& 12f_{2,2}^2f_{4,4}^6f_{3,3}^2f_{1,1}^3f_{1,1,2,2} - 6f_{2,2}^3f_{4,4}^7f_{3,3}f_{1,1}f_{1,1,1,1} - \\
& 9f_{4,4}^6f_{3,3,3}f_{1,1}^4f_{1,2}f_{1,2,2} - 9f_{4,4}^6f_{3,3,3}f_{1,1}^4f_{1,2}f_{2,2,2} - \\
& 15f_{1,1}f_{4,4}^6f_{1,1,2}f_{3,3}^2f_{1,1,1}f_{1,2}^2 - 48f_{1,1}^2f_{4,4}^3f_{3,3}^3f_{1,1,1}f_{4,4,4}f_{1,2}^3 - \\
& 6f_{1,1}^3f_{4,4}^3f_{3,3}^3f_{1,1,2}f_{4,4,4}f_{1,2}^2 - 9f_{4,4}^6f_{3,3,3}f_{1,1}^2f_{1,2}^3f_{1,1,1} - \\
& 9f_{2,2}^3f_{1,1,1}f_{3,3,3}f_{4,4}^6f_{1,1}^2 + 48f_{3,3}^3f_{4,4}^5f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{2,2}^2 + \\
& 56f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{2,2}^2 - \\
& 84f_{3,3}^3f_{1,1}^3f_{4,4}^5f_{1,1,2}f_{2,2,2} - 50f_{3,3}^4f_{1,1}^2f_{4,4}^4f_{1,1,2}f_{1,2} - \\
& 33f_{3,3}^3f_{1,1}^2f_{4,4}^5f_{1,1,2}f_{1,2} - 84f_{3,3}^4f_{1,1}^4f_{4,4}^4f_{1,1,2}f_{1,2,2} - \\
& 48f_{2,2}^2f_{1,1}^3f_{4,4}^3f_{3,3}f_{1,1,1}f_{4,4,4} - 12f_{2,2}^3f_{4,4}^4f_{3,3}^2f_{1,1,1}f_{4,4,4}f_{1,1}^2 + \\
& 48f_{3,3}^3f_{4,4}^5f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{1,2}^2 + 12f_{1,1}^4f_{3,3}^3f_{4,4,4,4}f_{4,4}^2f_{2,2}f_{1,2}^2 + \\
& 56f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{1,2}^2 - 28f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{4,4,4}^3f_{3,3}^3f_{1,2}^3 - \\
& 18f_{4,4}^6f_{3,3}^2f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{1,2}^3 + 24f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{2,2}^3 + \\
& 24f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{1,2}^3)/(f_{4,4}^3(f_{4,4} + 2f_{3,3})^3(f_{2,2} + f_{1,2})^2f_{1,1}^3)
\end{aligned}$$

Метрику (103) целесообразно переписать в координатах $u^i = f_i$. В этих координатах эта метрика характеризуется следующей матрицей компонент:

$$(g_{\alpha\beta}) = \frac{2}{3\Phi_1\Phi_3\Phi_4(1+\Psi)} \begin{pmatrix} -1 & (1+3\Psi)/2 & 1/2 & 1/2 \\ (1+3\Psi)/2 & -(1+3\Psi+3\Psi^2) & (1+\Psi)/2 & (1+\Psi)/2 \\ 1/2 & (1+\Psi)/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & (1+\Psi)/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (105)$$

где

$$\Phi_i \equiv f'_i \circ f_i^{-1}, \quad \Psi(u^1, u^2) = \Phi_1(u^1, u^2) \left(S_1(u_2) + S_2(u_2) \int \frac{du^1}{\Phi_1(u^1, u^2)} + \int \frac{\Phi_{1,2}(u^1, u^2)}{\Phi_1^2(u^1, u^2)} du^1 \right).$$

Рассмотрим здесь также модель пространства-времени, порождаемую гиперболическим потенциалом вида:

$$F = \Phi(x^1, x^2, x^3, x^4)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = \Phi I_4. \quad (106)$$

Очевидно, что все физико-геометрические характеристики модели порождаются единственным скалярным полем Φ . Опора второго порядка порождается диадой $\{d\Phi \vee d\Phi\}$, при этом сопрягающаяся контравариантная риманова метрика будет иметь вид:

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\gamma \Phi \partial_\delta \Phi, \quad (107)$$

или в компонентах:

$$\begin{pmatrix} 0 & \Phi_{,3}\Phi_{,4} & \Phi_{,4}\Phi_{,2} & \Phi_{,3}\Phi_{,2} \\ \Phi_{,3}\Phi_{,4} & 0 & \Phi_{,1}\Phi_{,4} & \Phi_{,1}\Phi_{,3} \\ \Phi_{,4}\Phi_{,2} & \Phi_{,3}\Phi_{,4} & 0 & \Phi_{,1}\Phi_{,2} \\ \Phi_{,3}\Phi_{,2} & \Phi_{,1}\Phi_{,3} & \Phi_{,1}\Phi_{,2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (108)$$

Соответствующая контравариантная метрика имеет вид:

$$(g_{\alpha\beta}) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2\Phi_{,1}/\Phi_{,2}\Phi_{,3}\Phi_{,4} & 1/\Phi_{,3}\Phi_{,4} & 1/\Phi_{,2}\Phi_{,4} & 1/\Phi_{,2}\Phi_{,3} \\ 1/\Phi_{,3}\Phi_{,4} & -2\Phi_{,2}/\Phi_{,1}\Phi_{,3}\Phi_{,4} & 1/\Phi_{,1}\Phi_{,4} & 1/\Phi_{,1}\Phi_{,3} \\ 1/\Phi_{,2}\Phi_{,4} & 1/\Phi_{,1}\Phi_{,4} & -2\Phi_{,3}/\Phi_{,1}\Phi_{,2}\Phi_{,4} & 1/\Phi_{,1}\Phi_{,2} \\ 1/\Phi_{,2}\Phi_{,3} & 1/\Phi_{,1}\Phi_{,3} & 1/\Phi_{,1}\Phi_{,2} & -2\Phi_{,4}/\Phi_{,1}\Phi_{,2}\Phi_{,3} \end{pmatrix}. \quad (109)$$

Приведем явный вид выражения скалярной кривизны для метрики (109):

$$R = (2(-6\Phi_{,1}^2\Phi_{,2}^2\Phi_{,3}^2\Phi_{,4}^2\Phi_{,1,2,4} - 6\Phi_{,1}^2\Phi_{,2}^2\Phi_{,3}^2\Phi_{,4}^2\Phi_{,1,2,3} - 6\Phi_{,1}^2\Phi_{,2}^2\Phi_{,3}^2\Phi_{,4}^2\Phi_{,1,3,4} - 6\Phi_{,1}^3\Phi_{,2}^2\Phi_{,3}^2\Phi_{,4}^2\Phi_{,2,3,4} + 7\Phi_{,1,3}\Phi_{,2}^3\Phi_{,3}^2\Phi_{,4}^3\Phi_{,1,1} + 3\Phi_{,1,3}^2\Phi_{,2}^3\Phi_{,3}^3\Phi_{,4}^3\Phi_{,1} + 7\Phi_{,1}^3\Phi_{,2,3}\Phi_{,3}^2\Phi_{,4}^2\Phi_{,2,2} + 3\Phi_{,1}^3\Phi_{,2,3}^2\Phi_{,3}^3\Phi_{,4}^2\Phi_{,2} + 7\Phi_{,1}^3\Phi_{,3,3}\Phi_{,2}^2\Phi_{,4}^2\Phi_{,2,3} + 7\Phi_{,1}^2\Phi_{,3,3}\Phi_{,2}^3\Phi_{,4}^2\Phi_{,1,3} + 7\Phi_{,1,1}\Phi_{,2}^3\Phi_{,3}^2\Phi_{,4}^2\Phi_{,1,4} + 3\Phi_{,1}\Phi_{,1,4}^2\Phi_{,2}^3\Phi_{,3}^3\Phi_{,4} + 7\Phi_{,1}^2\Phi_{,1,4}\Phi_{,2}^3\Phi_{,3}^3\Phi_{,4,4} + 7\Phi_{,1}^3\Phi_{,3}^3\Phi_{,2,4}\Phi_{,4}^2\Phi_{,2,2} + 3\Phi_{,1}^3\Phi_{,3}^3\Phi_{,2,4}^2\Phi_{,4}\Phi_{,2} + 7\Phi_{,1}^3\Phi_{,3}^3\Phi_{,4,4}\Phi_{,2}^2\Phi_{,2,4} - 4\Phi_{,1}^3\Phi_{,2}\Phi_{,2}^2\Phi_{,3}^3\Phi_{,4}\Phi_{,2,2,3} - 4\Phi_{,1}^3\Phi_{,2}^2\Phi_{,3}\Phi_{,4}^2\Phi_{,2,3,3} - 4\Phi_{,1}\Phi_{,2}^3\Phi_{,3}^2\Phi_{,4}\Phi_{,1,1,4} - 4\Phi_{,1}^2\Phi_{,2}^3\Phi_{,3}\Phi_{,4}\Phi_{,1,4,4} - 4\Phi_{,1}^3\Phi_{,2}\Phi_{,2}^3\Phi_{,4}^2\Phi_{,2,2,4} - 4\Phi_{,1}^3\Phi_{,2}^2\Phi_{,3}\Phi_{,4}\Phi_{,2,4,4} - 4\Phi_{,1}\Phi_{,2}^3\Phi_{,2}^2\Phi_{,3}^3\Phi_{,4}\Phi_{,1,1,3} - 4\Phi_{,1}^2\Phi_{,2}^3\Phi_{,3}\Phi_{,4}^2\Phi_{,1,3,3} + 7\Phi_{,1}^3\Phi_{,3,3}\Phi_{,2}^2\Phi_{,4}^2\Phi_{,3,4} + 3\Phi_{,1}^3\Phi_{,3,4}^2\Phi_{,2}^3\Phi_{,3}\Phi_{,4} + 7\Phi_{,1}^3\Phi_{,3,4}\Phi_{,2}^3\Phi_{,2}^2\Phi_{,3}\Phi_{,4,4} +$$

$$\begin{aligned}
& 7\Phi_{,1,1}\Phi_{,2}^2\Phi_3^3\Phi_4^3\Phi_{,1,2} + 3\Phi_{,1}\Phi_{,1,2}^2\Phi_3^3\Phi_4^3\Phi_{,2} + 7\Phi_{,1}^2\Phi_{,1,2}\Phi_3^3\Phi_4^3\Phi_{,2,2} - \\
& 4\Phi_{,1}^3\Phi_2^3\Phi_3\Phi_4^2\Phi_{,3,3,4} - 4\Phi_{,1}^3\Phi_2^3\Phi_3^2\Phi_4\Phi_{,3,4,4} - 4\Phi_{,1}\Phi_2^2\Phi_3^3\Phi_4^3\Phi_{,1,1,2} - \\
& 4\Phi_{,1}^2\Phi_2\Phi_3^3\Phi_4^3\Phi_{,1,2,2} + 3\Phi_{,1,3}\Phi_2^3\Phi_3\Phi_4^2\Phi_{,1,3,4} + 3\Phi_{,1}^3\Phi_2\Phi_3\Phi_4^2\Phi_{,2,3,4} + \\
& 3\Phi_{,1}^3\Phi_3\Phi_2\Phi_4^3\Phi_{,2,2,2,3} + 3\Phi_{,1}\Phi_{,3,3}\Phi_2^3\Phi_4^3\Phi_{,1,1}\Phi_{,3} + 3\Phi_{,1,1}\Phi_2^3\Phi_3^3\Phi_4\Phi_{,1}\Phi_{,4,4} + \\
& 3\Phi_{,1}\Phi_{,1,2}\Phi_2^2\Phi_3^3\Phi_4^2\Phi_{,1,3} + 3\Phi_{,1}\Phi_{,1,2}\Phi_3^3\Phi_4^2\Phi_{,2,1,4} + 3\Phi_{,1}^2\Phi_4^3\Phi_{,2,3}\Phi_3^2\Phi_{,1,2}\Phi_{,2} + \\
& 3\Phi_{,3}^3\Phi_4^2\Phi_{,1}^2\Phi_{,1,2}\Phi_{,2,4}\Phi_{,2} + 3\Phi_{,1}^3\Phi_3^3\Phi_{,4,4}\Phi_{,2}\Phi_{,2,2}\Phi_{,4} - 4\Phi_{,4}^2\Phi_{,1,3}\Phi_2^2\Phi_{,1}^2\Phi_{,3}\Phi_{,2,4} + \\
& 3\Phi_{,1,4}\Phi_2^3\Phi_3^2\Phi_4\Phi_{,1}^2\Phi_{,3,4} + 3\Phi_{,1}^3\Phi_{,2,4}\Phi_3^2\Phi_4\Phi_{,2}\Phi_{,3,4} - 4\Phi_{,3}^2\Phi_{,1,4}\Phi_2^2\Phi_{,1}^2\Phi_{,4}\Phi_{,2,3} + \\
& 3\Phi_{,1,3}\Phi_2^2\Phi_3\Phi_4^3\Phi_{,1}^2\Phi_{,2,3} + 3\Phi_{,1}^3\Phi_{,3,3}\Phi_2^3\Phi_4\Phi_{,4,4}\Phi_{,3} + 3\Phi_{,1,1}\Phi_2\Phi_3^3\Phi_4^3\Phi_{,1}\Phi_{,2,2} + \\
& 3\Phi_{,1}\Phi_{,1,3}\Phi_2^3\Phi_4^2\Phi_3^2\Phi_{,1,4} + 3\Phi_{,1}^3\Phi_4^2\Phi_{,2,3}\Phi_3^2\Phi_{,2,4}\Phi_{,2} - 4\Phi_{,4}^2\Phi_{,1,2}\Phi_3^2\Phi_{,1}^2\Phi_{,2}\Phi_{,3,4} + \\
& 3\Phi_{,1,4}\Phi_2^2\Phi_3^3\Phi_4\Phi_{,1}^2\Phi_{,2,4})) / \Phi_{,3}^2\Phi_{,4}^2\Phi_{,1}^2\Phi_{,2}^2
\end{aligned}$$

10 Заключение

На основе алгебры кополиад (разд. 2) и конструкции соприкосновения (разд. 3) мы рассмотрели взаимосвязь поличисловой теории поля с физически интерпретируемыми в рамках ОТО моделями пространства-времени в двух направлениях: от поличисловой теории поля в сторону ОТО (разделы 5,6,9) и в обратную сторону (разделы 7 и 8). Предварительный общий анализ, приведенный в разделе 4, обнаруживает замечательный факт соприкасающихся конструкций в H_4 : все невырожденные псевдоримановы метрики, получаемые методом соприкосновения с метрикой Бервальда-Моора, могут быть лишь двух типов — с сигнатурами $(+, -, -, -)$ или $(+, +, -, -)$. Возникновение пространств второго типа в рамках геометрий пространств Бервальда-Моора, индуцируемых алгебрами поличисел, иллюстрирует некоторую внутреннюю преемственность этих алгебр: ранее [4] пространство с сигнатурой $(+, +, -, -)$ было получено как векторное представление группы $SL(2, H)$ — группы изометрии пространства гиперболических спиноров (спиноры над двойными числами P_2). Алгебра P_2 , порождающая H_2 , является подалгеброй P_4 , порождающей H_4 , поэтому спинорный аспект соприкасающихся метрик в H_4 оказывается своеобразным образом распределенным между спинорами над комплексными числами в случае пространств $(+, -, -, -)$ и спинорами над двойными числами в случае пространств $(+, +, -, -)$. Мы оставляем исследование спинорных свойств поличисловых моделей для будущих исследований.

В нашей статье мы показали, что поличисловой потенциал допускает последовательную интерпретацию в рамках стандартных теоретико-полевых моделей на фоне искривленного пространства-времени ОТО. Между тем, остается неясным вопрос о том, всякую ли метрику ОТО можно реализовать как соприкасающуюся конструкцию с базисом из диад, построенных на основе некоторого поличислового потенциала. В своей общей постановке этот вопрос имеет некоторые аналогии с вопросом о вложимости 4-мерных римановых многообразий в многомерные плоские. В общем случае ответ на поставленный вопрос, по всей видимости будет отрицательным. Он может оказаться отрицательным даже для рассмотренных метрик фридмановского типа и метрики Шварцшильда, поскольку условия реализуемости в обоих случаях представляют собой систему шести нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных на четыре неизвестных функции, решение которых может существовать лишь благодаря высокой степени (скрытой!) симметрии этих систем. Но даже в случае несовместности упомянутых систем, поличисловая теория

поля остается интересным кандидатом на единую теорию пространства-времени-материи-взаимодействий, поскольку она не является обобщением существующих стандартных теорий, в которых метрика Шварцшильда или метрики фридмановского типа возникают и выводятся естественным образом, а представляет собой альтернативную теорию физической реальности. В ее рамках и в ее формализме опытные факты должны истолковываться на своем языке: языке уравнений поличисловой теории поля и правил перехода к наблюдаемым величинам. Формулировку этих уравнений и правил мы оставляем для будущих исследований.

Литература

- [1] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. h -голоморфные функции двойной переменной и их приложения // *Гиперболические числа в геометрии и физике*, 13, 2010, с. 44–77.
- [2] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной // *Гиперболические числа в геометрии и физике*, 13, 2010, с. 78–127.
- [3] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной // *Гиперболические числа в геометрии и физике*, 2(14), т. 7, 2010, с. 11–37.
- [4] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Алгебра, геометрия и физика двойных чисел // *Гиперболические числа в геометрии и физике*, 1(19), т. 10, 2013, с. 4–78.
- [5] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Аналитические, дифференциально-геометрические и алгебраические свойства гладких функций поличисловой переменной // *Гиперболические числа в геометрии и физике*, 2(16), т. 8, 2011, с. 4–53.
- [6] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Некоторые задачи математической физики в поличисловой теории поля // *Гиперболические числа в геометрии и физике*, 2012, 2(18), 9, с. 200–255.
- [7] Balan V. Spectral properties and applications of numerical multilinear algebra of m -root structures // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 2(10), 5, 2008, 101.
- [8] Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели, М.: Наука, 1977.

GEOMETRY AND PHYSICS OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS IN POLYNUMBERS FIELD THEORY

D.G. Pavlov¹, S.S. Kokarev^{1,2}

¹ *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fрязино, Russia*

² *RSEC Logos, Yaroslavl, Russia*

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

A physical-geometric interpreting of holomorphic functions over polynumber variable for a number of holomorphicity classes is investigated with using tangent construction, developed in [5]. It is shown, that any concrete choice of holomorphic function (polynumber potential) defines some field-theoretical model with background space-time of GR together with tensor fields of a various ranges. The question on local causal structure of pseudo-Riemannian space-time, obtained by tangent construction in Berwald-Moor space, is investigated in general form. It is shown, that the only two causal types of space-times with signature $(+, -, -, -)$ and $(+, +, -, -)$ can be generated by tangent construction. The systems of differential equations, defining polynumber potential for Schwarzschild metric and cosmological FRW-metrics are derived.

Key Words: algebra of polynumber, Berwald-Moor metric, Riemannian metric tangent to Finslerian one, General Relativity (GR), Friedmann-Robertson-Walker (FRW) cosmological metrics, Schwarzschild metric, generalized holomorphic functions over polynumber variable.