

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ И ФИЗИКА ДВОЙНЫХ ЧИСЕЛ

Д.Г. Павлов¹, С.С. Кокарев^{1,2}

¹ НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

² РНОЦ “Логос”, Ярославль, Россия

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

Статья представляет собой расширенную версию доклада, представленного на семинаре, проходившем 04.04.2013 в РУДН (Москва) с участием Р. Пенроуза. Рассматриваются аналоги известных конструкций комплексных алгебры и анализа на алгебре двойных чисел (полярная и экспоненциальная форма представления двойного числа, элементарные функции двойной переменной, дробно-линейные преобразования двойной плоскости и гиперболические спиноры, голоморфные функции двойной переменной и их свойства, голоморфные продолжения). Вторая часть статьи содержит некоторые физические приложения алгебры двойных чисел (СТО и ее конформное обобщение, «Теория Всего» Гиперлэнда, экстравариационный принцип). Теорию Гиперлэнда можно рассматривать как низкоразмерную версию будущей «Теории Всего», основанной на алгебре поличисел P_n .

Ключевые слова: двойные числа, h -голоморфные функции, гиперболические условия Коши-Римана, гиперболические спиноры, конформная теория относительности, конформная деформация пространства-времени, Гиперлэнд, неголоморфность, экстравариационный принцип.

1 Введение

Принцип алгебраизации является ключевым инструментом для унифицированного описания пространственно-временных отношений, материи и физических взаимодействий. Он вошел физику в первой половине XX века в период разработки основ и приложений квантовой теории, несколько уступая во времени *принципу геометризации*, лежащему в основе ОТО. Оба принципа сегодня тесно переплетаются и взаимно дополняют друг друга и, в действительности, (например, в теории суперструн) они работают совместно. Это плодотворное единство алгебры и геометрии наводит на мысль о существовании единой алгебро-геометрической основы физической реальности, которая раскрывается с различных сторон в зависимости от выбора точки зрения на реальность и средства ее описания [1–7].

Как принцип геометризации, так и принцип алгебраизации возвращают нас к идеям древних греков о первичности простых математических конструкций: в первом случае речь идет о теории платоновых атомов — правильных геометрических фигур, во втором — об пифагоровом учении о числах, как основе природы [8]. Алгебра, по сути, и представляет собой глубокое обобщение числовых отношений и операций над числами. На сегодняшний день нам известны все числовые системы, допускающие стандартные арифметические операции: сумму, разность, умножение и деление с привычными свойствами ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности. Эти системы получили название *числовых полей*. Все числовые поля изоморфны одному из следующих полей: полю рациональных чисел \mathbb{Q} , полю вещественных чисел \mathbb{R} или полю комплексных чисел \mathbb{C} [9]. Классический анализ, лежащий в основе гладких структур, на которых в основном и строится современная фундаментальная физика, опирается на свойства поля вещественных чисел или его многомерного расширения \mathbb{R}^n . Интересные попытки аксиоматизации квантовой теории опираются на т.н. p -адический анализ, который строится на p -адическом расширении поля рациональных чисел [10]. Поле комплексных чисел лежит в основе общепринятой аксиоматики квантовой теории и ее многочисленных приложений [5]. Кроме того, множество

задач классической физики (электро- и магнитостатики, гидродинамики и теории упругости) эффективно решается с помощью методов комплексного анализа [11]. Последнее обстоятельство обусловлено наличием замечательных дифференциально-аналитических свойств комплексно-дифференцируемых функций, выражающихся т. н. условиями Коши-Римана. Эти последние принимают вид физических уравнений (условий потенциальности и соленоидальности соответствующих физических полей) и обеспечивают эффективный алгоритм отыскания решений задач двумерной математической физики.

Общая теорема алгебры, перечисляющая все числовые поля, закрывает вопрос о коммутативно-ассоциативных числовых полях размерности выше двух. Но так ли существенны все свойства числовых полей для физических приложений? И не могут ли некоторые свойства более общих алгебр отражать важные физические характеристики пространства, времени и физических систем, наблюдаемых в реальности?

Пусть \mathbb{A}_2 — произвольная 2-мерная коммутативно-ассоциативная алгебра с единицей над \mathbb{R} :

$$\mathbb{A}_2 \ni A = a + Ib, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

с образующими $\{1, I\}$ (I — мнимая единица). Алгебра \mathbb{A}_2 однозначно определяется парой вещественных чисел p и q , задающих разложение I^2 :

$$I^2 = p + Iq \Rightarrow (I - q/2)^2 = p + q^2/4. \quad (1)$$

На самом деле [12], с точностью до изоморфизма тип \mathbb{A}_2 определяется знаком выражения $p + q^2/4$:

$$\begin{cases} \text{sign}(p + q^2/4) = -1, & \rightarrow \mathbb{A}_2 \sim \mathbb{C}; \\ \text{sign}(p + q^2/4) = +1, & \rightarrow \mathbb{A}_2 \sim H; \\ \text{sign}(p + q^2/4) = 0, & \rightarrow \mathbb{A}_2 \sim \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Первая строчка в (2) соответствует хорошо известной алгебре (числовому полю) комплексных чисел \mathbb{C} , о которой шла речь выше. С помощью вещественного линейного преобразования базиса \mathbb{A}_2 в этом случае можно преобразовать $I \rightarrow i$ с $i^2 = -1$. Вторая строчка в (2) соответствует алгебре двойных чисел H , которые будут составлять основной предмет исследования настоящей статьи. В этой алгебре заменой базиса можно преобразовать $I \rightarrow j$, где j — гиперболическая мнимая единица, удовлетворяющая условию $j^2 = 1$. Наконец, третья строчка в (2) соответствует так называемой алгебре дуальных чисел, в которой вещественной заменой базиса можно преобразовать $I \rightarrow \omega$, где $\omega^2 = 0$. В целом ситуация с 2-мерными ассоциативно-коммутативными алгебрами иллюстрируется на рис. 1

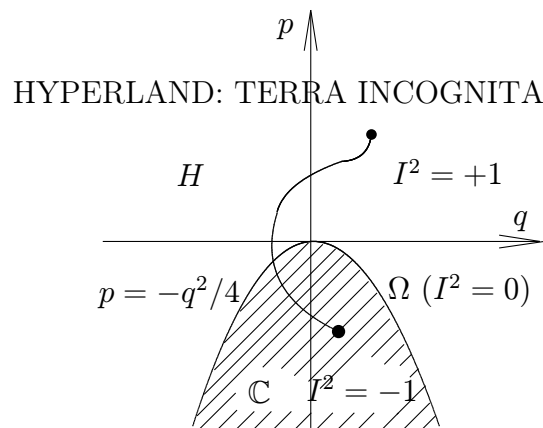


Рис. 1: Параметризация 2-мерных ассоциативно-коммутативных алгебр.

Двойные и дуальные числа известны математикам давно¹ [12–16] (и литература в последней ссылке). Среди геометрических приложений алгебры двойных чисел отметим наиболее важную и очевидную для физики связь алгебры двойных чисел с геометрией 2-мерного пространства-времени Минковского (раздел 12). Цель настоящей статьи — развить эту связь до физических теорий более общего типа, в которых нетривиальные свойства пространства-времени и материи описываются с единых алгебро-аналитических позиций.

Изложение материала статьи подчинено следующему плану.

В разделе 2 приводятся краткая сводка сведений и фактов из алгебры и анализа комплексных чисел, аналоги которых мы будем исследовать в алгебре H и использовать далее в ее приложениях. Основные определения и свойства алгебры двойных чисел приводятся в разделе 3. Раздел 4 посвящен определениям и свойствам элементарных функций двойной переменной. Алгебра двойных чисел в изотропном базисе и вопросы аналитического продолжения излагаются в разделе 5. Важный для приложений вопрос о компактификации плоскости двойной переменной рассмотрен в разделе 6. Раздел 7 посвящен свойствам дробно-линейных преобразований над алгеброй двойных чисел, модели геометрии Лобачевского на двойных числах и свойствам гиперболической функции Жуковского. В разделе 8 развивается гиперболическая версия спиноров и обсуждается их генетическая связь с пространством $M_{2,2}$. Класс голоморфных функций двойной переменной вводится в разделе 9. В нем же обсуждаются их характерные свойства. Раздел 10 посвящен различным формулировкам гиперболических версий интегральных теоремы и формулы Коши. В разделе 11 рассматриваются гиперболические аналоги полей элементарных источников. Изложение 2-мерной СТО на языке алгебры двойных чисел представлено в разделе 12. h -голоморфное обобщение СТО (Конформная Теория Относительности) излагается в разделе 13. Раздел 14 посвящен формулировке единой h -голоморфной теории пространства-времени-материи («Теория Всего» в Гиперланде). Комплекс идей, связанный с возможностью теоретического вычисления фундаментальных констант и лагранжианов (экстравариационный принцип), изложен в разделе 14.5. На основе этих идей в разделе 14.7 приведен полный расчет свойств статической двумерной вселенной Гиперлэнда. Раздел 15 посвящен краткому освещению перспективы обобщений излагаемого подхода на многомерные алгебры поличисел P_n , непосредственно обобщающие алгебру H на высшие измерения. В Заключение собраны некоторые общие замечания и комментарии.

Статья представляет собой расширенную версию доклада, представленного на семинаре, проходившем 04.04.2013 в РУДН (Москва) с участием Р.Пенроуза². Существенную часть доклада и статьи представляют результаты опубликованных статей [17–20].

2 Алгебра \mathbb{C} и некоторые ее приложения

В этом разделе мы сделаем краткий обзор (весьма фрагментарный) понятий и методов, связанных с алгеброй комплексных чисел. В дальнейшем, при обсуждении свойств алгебры двойных чисел, мы будем обращать внимание на аналогичные понятия и методы, связанные с этой алгеброй.

¹Двойные числа начал изучать У.Клиффорд во второй половине XIX века, а дуальные – Штуди примерно в то же время.

²Ссылки на видео: <http://www.youtube.com/watch?NR=1&v=NY7L7MRKIXo&feature=endscreen> и http://www.youtube.com/watch?v=Bgj1R_rX8Q

2.1 Алгебра \mathbb{C}

Алгебру комплексных чисел можно рассматривать как 2-мерную ассоциативно-коммутативную алгебру над \mathbb{R} :

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid i^2 = -1, x, y \in \mathbb{R}\}. \quad (3)$$

Фундаментальное свойство алгебры \mathbb{C} выражается следующим утверждением: \mathbb{C} является алгебраически-замкнутым числовым полем. Другими словами в алгебре \mathbb{C} определено деление на ненулевые элементы и любое алгебраическое уравнение вида $P_n(z) = 0$ (P_n — полином n -ого порядка с комплексными коэффициентами) всегда имеет корни (точнее, ровно n корней, если учитывать их кратность (основная теорема алгебры)).

2.2 Геометрия \mathbb{C}

Комплексное число $z = x + iy$ можно интерпретировать как точку или радиус-вектор на \mathbb{R}^2 с координатами $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$. При этом сумма и разность комплексных чисел на \mathbb{R}^2 геометрически изображается известным правилом параллелограмма для векторов. Для геометрической интерпретации произведения комплексных чисел удобно ввести полярную (или тригонометрическую) форму представления комплексного числа:

$$z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (4)$$

где $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \equiv |z|$ — модуль комплексного числа z , $\varphi = \arg z$ — его аргумент, определенный с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Нетрудно проверить, что $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$.

Комплексной версией отражений относительно прямой является инволютивная операция комплексного сопряжения: $z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$. Геометрически эта операция описывает отражение комплексной плоскости относительно оси $\operatorname{Im} z = 0$. Пару $\{z, \bar{z}\}$ можно рассматривать как независимые комплексные координаты на плоскости, которые связаны с декартовыми координатами посредством очевидных формул

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (5)$$

Геометрические свойства комплексной плоскости можно вывести из рассмотрения следующей эрмитовой формы:

$$\beta = dz_1 \otimes d\bar{z}_2 = \eta - i\omega. \quad (6)$$

Ее вещественная часть

$$\eta \equiv \operatorname{Re} \beta = dx_1 \otimes dx_2 + dy_1 \otimes dy_2 \quad (7)$$

определяет евклидову метрику, а мнимая часть

$$\omega = -\operatorname{Im} \beta = dx_1 \otimes dy_2 - dy_1 \otimes dx_2 \quad (8)$$

— 2-мерную симплектическую метрику. Комплексные числа представляют собой удивительно простой, компактный и содержательный язык для исследования различных геометрических фактов, связанных с этими метриками [13].

2.3 Дробно-линейные преобразования

Одним из эффективных инструментов для решения задач евклидовой геометрии и для построения моделей неевклидовых геометрий является семейство дробно-линейных преобразований $\operatorname{PL}(2, \mathbb{C})$:

$$z \mapsto z' = D(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad D \in \operatorname{PL}(2, \mathbb{C}), \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}. \quad (9)$$

Если исключить вырожденные (постоянные) дробно-линейные преобразования, то семейство $PL(2, \mathbb{C})$ становится группой по композиции, изоморфной группе матриц $SL(2, \mathbb{C})$:

$$M(D) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad M(D_1) \cdot M(D_2^{-1}) = M(D_1 \circ D_2^{-1}). \quad (10)$$

Фундаментальным инвариантом группы $PL(2, \mathbb{C})$ является двойное отношение 4-х точек:

$$\{z_1, z_2; z_3, z_4\} \equiv \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}. \quad (11)$$

Следующие утверждения образуют основу для приложений группы $PL(2, \mathbb{C})$ к задачам евклидовой геометрии плоскости:

1. Двойное отношение вещественно тогда и только тогда, когда четыре точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности³.
2. Группа $PL(2, \mathbb{C})$ действует транзитивно на семействе окружностей.
3. Для всякой окружности $C \in \mathbb{R}^2$ группа $PL(2, \mathbb{C})$ сохраняет отношение сопряженности точек относительно C :

$$z_1 \overset{C}{\sim} z_2 \Leftrightarrow D(z_1) \overset{D(C)}{\sim} D(z_2). \quad (12)$$

Напомним, что пара точек A, B на плоскости называется сопряженной, относительно некоторой окружности, если эти точки лежат на одном луче, проведенном из центра O этой окружности, и расстояния OA и OB удовлетворяют равенству $OA \cdot OB = R^2$, где R — радиус окружности.

2.4 Стереографическая проекция

Своеобразным «мостиком», между \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 является взаимно-однозначное соответствие между точками сферы и точками расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} + \{\infty\}$. Такое соответствие проще всего устанавливается с помощью хорошо известной стереографической проекции [21] стандартной единичной сферы (сфера Римана) $S^2: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ на \mathbb{C} :

$$\Pi_+ : \quad x_1 = \frac{2x}{1 + |z|^2}; \quad x_2 = \frac{2y}{1 + |z|^2}; \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}. \quad (13)$$

Это отображение конформно:

$$\Pi_+^*({}^3\eta) = \frac{4}{1 + |z|^2} \eta, \quad (14)$$

(${}^3\eta$ — евклидова метрика объемлющего \mathbb{R}^3 , Π_+^* — кодифференциал отображения Π_+), сохраняет окружности и дает возможность компактной интерпретации многих геометрических и топологических фактов на \mathbb{C} (например, некоторые расходящиеся последовательности точек на \mathbb{C} становятся сходящимися на сфере Римана $S^2 \simeq \bar{\mathbb{C}}$).

2.5 Спиноры над \mathbb{C}

Сферу Римана можно интерпретировать как пространство направлений изотропных прямых в 4-мерном пространстве-времени Минковского $\mathcal{M}_{1,3}$. Эта интерпретация в совокупности с отображением Π_+ приводит к конструкции спинорных объектов и спинорному описанию геометрии $\mathcal{M}_{1,3}$ [22]. Пространством спиноров называется линейное 2-мерное комплексное пространство $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$, оснащенное антисимметричной метрикой:

$$\xi, \zeta \in \mathfrak{S} : \langle \xi, \zeta \rangle \equiv *(\xi \wedge \zeta). \quad (15)$$

³При этом прямые тоже считаются окружностями (бесконечного радиуса), а значение $\{z_1, z_2; z_3, z_4\} = \infty$ считается вещественным.

Группой изометрии метрики \langle , \rangle является 6-параметрическая группа $SL(2, \mathbb{C})$. Представление этой группы в пространстве эрмитовых смешанных спиноров $S(\mathfrak{S} \otimes \bar{\mathfrak{S}})$ действует по правилу:

$$S(\mathfrak{S} \otimes \bar{\mathfrak{S}}) \ni K \mapsto K' = M \cdot K \cdot M^\dagger, \quad M \in SL(2, \mathbb{C}). \quad (16)$$

Используя представление

$$K = V^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} V^0 + V^3 & V^1 + iV^2 \\ V^1 - iV^2 & V^0 - V^3 \end{pmatrix}, \quad \{\sigma_\mu\} = \{1_{2 \times 2}, \vec{\sigma}\},$$

где $\vec{\sigma}$ — набор стандартных матриц Паули, мы приходим к двум ключевым инвариантам:

$$\det K = (V, V)_{\mathcal{M}_{1,3}} = \text{inv mod } SL(2, \mathbb{C}); \quad \text{Tr } K = 2V_0 = \text{inv mod } SU(2, \mathbb{C}). \quad (17)$$

Диаграмма (18) иллюстрирует отношение спинорных и пространственно-временных групп, лежащее в основе математических и физических приложений спиноров к геометрии пространства-времени Минковского.

$$\begin{array}{ccc} SL(2, \mathbb{C}) & \longrightarrow & SU(2) \\ \begin{array}{c} \downarrow \\ 2:1 \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \\ 2:1 \end{array} \\ SO(1, 3) & \longrightarrow & SO(3) \end{array} \quad (18)$$

Горизонтальные стрелки на диаграмме обозначают редукцию к подгруппе, а вертикальные — накрывающие гомоморфизмы. Их двухзначность можно объяснить с различных (и внутренне глубоко связанных) точек зрения. С алгебраической точки зрения эта двухзначность является следствием основной теоремы алгебры: в \mathbb{C} существует ровно два значения $\sqrt{1} = \pm 1$. Геометрически (или, точнее говоря, топологически) двухзначность спинорного представления связана со структурой фундаментальной группы $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$, имеющей два элемента⁴.

2.6 Голоморфные отображения $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Напомним, что произвольное гладкое отображение $f: R^2 \rightarrow R^2$ плоскости в себя можно представить парой компонент

$$(x, y) \mapsto (x', y') : \quad x' = f_1(x, y); \quad y' = f_2(x, y), \quad (19)$$

где f_1, f_2 — гладкие функции $R^2 \rightarrow R$. С помощью формул:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (20)$$

где $z = x + iy$, а черта обозначает операцию комплексного сопряжения, эти отображения можно всегда записать в виде

$$(z, \bar{z}) \mapsto (z', \bar{z}') : \quad z' = F_1(z, \bar{z}); \quad \bar{z}' = F_2(z, \bar{z}). \quad (21)$$

Среди всех гладких отображений рассматриваемого вида, целым рядом замечательных свойств выделяются отображения, называемые *голоморфными*, которые удовлетворяют условиям:

$$F_{,\bar{z}} = 0, \quad \text{и} \quad \exists F_{,z}, \quad (22)$$

⁴Множество бустов в группе Лоренца устроено топологически тривиально, поэтому $\pi_1(SO(1, 3)) \approx \pi_1(SO(3))$.

и отображения, называемые *антиголоморфными*, удовлетворяющие условию:

$$F_{,z} = 0 \quad \text{и} \quad \exists F_{,\bar{z}}. \quad (23)$$

Условия голоморфности или антиголоморфности могут выполняться в точке или в некоторой области на комплексной плоскости⁵.

2.7 Аналитический аспект \mathbb{C} -голоморфных функций

Напомним некоторые основные свойства голоморфных функций. Разделяя в функции F вещественную и мнимую часть: $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, используя связь операторов дифференцирования по комплексным и вещественным переменным:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (24)$$

формально вытекающие из (20) и расписывая условие (22) в декартовых координатах, приходим к соотношению

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} [u_{,x} + iv_{,x} + i(u_{,y} + iv_{,y})] = 0, \quad (25)$$

вещественная и мнимая часть которого дает известные *условия голоморфности (комплексной аналитичности) Коши-Римана*:

$$u_{,x} = v_{,y}; \quad u_{,y} = -v_{,x}. \quad (26)$$

Аналогично для антиголоморфных функций получаем⁶ условия антиголоморфности:

$$u_{,x} = -v_{,y}; \quad u_{,y} = v_{,x}. \quad (27)$$

Действуя на голоморфную или антиголоморфную функцию F 2-мерным вещественным оператором Лапласа

$$\Delta \equiv 4\partial_z\partial_{\bar{z}} = \partial_x^2 + \partial_y^2, \quad (28)$$

приходим к тождествам:

$$\Delta u = 0; \quad \Delta v = 0, \quad (29)$$

выражающим факт гармоничности вещественной и мнимой частей голоморфных или антиголоморфных функций.

Отметим, что в силу нашего определения производная от голоморфной функции (факт существования производных любого порядка доказывается в стандартном курсе ТФКП, см. напр. [21]) снова является голоморфной функцией:

$$F_{,\bar{z}} = 0 \Rightarrow (F_{,z})_{,\bar{z}} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow (F_{,z}^{(n)})_{,\bar{z}} = 0 \quad (30)$$

(аналогично и для антиголоморфной с заменой $z \leftrightarrow \bar{z}$). С этим обстоятельством связана возможность представления голоморфной в окрестности некоторой точки z_0 функции степенным рядом Тейлора:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad (31)$$

⁵Обычно под функцией, голоморфной в точке понимается комплексно дифференцируемая функция с условием (22), которое выполняется в некоторой окрестности этой точки. Иногда вместо термина «голоморфная функция» мы будем употреблять термин « \mathbb{C} -голоморфная функция», подразумевая, что в дальнейшем речь будет идти о H -голоморфных функциях на плоскости двойной переменной.

⁶Фактически они получаются из условий (26) заменой знака у v на противоположный.

где комплексные коэффициенты

$$c_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k F}{dz^k} \right|_{z=z_0}. \quad (32)$$

В окрестности точки z_0 , в которой свойство голоморфности нарушается, функция F иногда может быть представлена более общим *рядом Лорана*:

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k. \quad (33)$$

В окрестности точек ветвления ряд Лорана должен быть заменен обобщенным *рядом Пуансо*, содержащим нецелые степени $z - z_0$ или $\ln(z - z_0)$.

Пример 1. Функция $F(z) = \ln z$ голоморфна всюду на комплексной плоскости за исключением точек $z = 0$ и $z = \infty$. Ее координатное представление дается выражением:

$$\ln z = \ln \rho + 2\pi i k \varphi = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 2\pi i k \cdot \arg z, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (34)$$

Особые точки $z = 0$ и $z = \infty$ — точки ветвления логарифма.

Пример 2. Рассмотрим функцию $Z = \frac{1}{2} (z + z^{-1})$, называемую *функцией Жуковского*. Эта функция голоморфна всюду за исключением точек $z = 0$ и $z = \infty$, которые являются полюсами 1-ого порядка. Разложение этой функции на вещественную и мнимую часть имеет вид:

$$Z = \frac{x(x^2 + y^2 + 1)}{2(x^2 + y^2)} + i \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)}. \quad (35)$$

2.8 Топологический аспект \mathbb{C} -голоморфных функций.

Гармонические функции u и v , связанные условиями (26), не являются независимыми и определяют друг друга с точностью до констант. Действительно, приписывая функции v произвольное значение v_0 в точке (x_0, y_0) , ее значение в произвольной точке (x, y) в силу условий Коши-Римана можно определить через функцию u посредством следующего интеграла:

$$v(x, y) = v_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u_{,x} dy - u_{,y} dx, \quad (36)$$

который вычисляется по любому пути, соединяющему точки (x_0, y_0) и (x, y) и лежащему в области голоморфности функции $F = u + iv$. Функции u и v называются *сопряженными гармоническими функциями*.

На самом деле, результат интегрирования в (36) может зависеть от выбора пути, соединяющего начальную и конечную точки. В таком случае мы будем иметь дело с *многозначной аналитической функцией*, которая может иметь конечное или счетное число ветвей. Более точно, на вопрос об однозначности определения сопряженных функций и вообще об однозначности интегралов от голоморфных функций позволяет ответить фундаментальная *теорема Коши*, которая для голоморфной в односвязной области D функции выражается равенством

$$\oint_{\gamma \subset D} F(z) dz = 0, \quad (37)$$

где Γ — простой кусочно-гладкий замкнутый контур (для антиголоморфной функции следует заменить в этой формулировке z на \bar{z}). Эта теорема следует из условия голоморфности (22) и равенства:

$$\oint_{\gamma} F(z) dz = \int_{\text{Int}(\partial^{-1}\gamma)} F_{,\bar{z}} d\bar{z} \wedge dz, \quad (38)$$

выражающего комплексную форму теоремы Пуанкаре-Дарбу об интегрировании дифференциальных форм.

Из теоремы Коши непосредственно вытекает следующее равенство:

$$\int_{\gamma} F(z) dz = \text{const}_{[\gamma]}, \quad (39)$$

выражающее факт независимости интеграла от пути в классе $[\gamma]$ путей, гомотопных γ .

Из равенства

$$\oint_{\gamma_{z_0}} (z - z_0)^m dz = 2\pi i \delta_{m,-1}, \quad (40)$$

которое справедливо для любого замкнутого контура γ_{z_0} , охватывающего точку z_0 и легко проверяется на контуре в форме окружности с центром в z_0 , и теоремы Коши вытекает интегральная формула Коши:

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0}} \frac{F(z)}{z - z_0} dz, \quad (41)$$

где γ_{z_0} — кусочно-гладкий замкнутый контур, ограничивающий область $D \subset \mathbb{C}$, $F(z)$ — произвольная голоморфная в области D функция, $z_0 \in D$. Формула (37) допускает обобщение на многосвязные области, а формула (41) допускает обобщение на контуры, содержащие бесконечно-удаленную точку и контуры, проходящие через точку z_0 и даже имеющие там точку излома.

Мнозначные аналитические функции удобно описывать с помощью их графиков в 4-мерном пространстве $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Они называются *римановыми поверхностями* соответствующих функций. На своей римановой поверхности аналитическая функция по определению однозначна.

2.9 Геометрический аспект \mathbb{C} -голоморфных отображений.

Относительно преобразований, задаваемых голоморфными функциями $F(z)$, форма η в (7) ведет себя следующим образом:

$$\eta \mapsto \eta' = |F'(z)|^2 \eta, \quad (42)$$

где $F'(z) = dF/dz$. Формула (42) означает, что функция $F(z)$ в области своей голоморфности при условии $F'(z) \neq 0$ осуществляет конформное отображение комплексной плоскости на себя, т. е. сохраняет углы. Отметим, что $|F'|^2 = |\nabla u|^2 = |\nabla v|^2 = \Delta_F$, где ∇ — оператор градиента в евклидовой метрике, а Δ_F — якобиан отображения F . Как это следует из условий (26) или соображений конформности, линии $u = \text{const}$ и линии $v = \text{const}$ для всякой голоморфной функции $F(z)$ образуют на плоскости \mathbb{C} ортогональную криволинейную систему координат, поскольку в каждой точке выполняется равенство:

$$\nabla u \cdot \nabla v = u_{,x}v_{,x} + u_{,y}v_{,y} = -u_{,x}u_{,y} + u_{,y}u_{,x} = 0. \quad (43)$$

Это проясняет геометрический смысл отношения сопряженности функций u и v : *сопряженные функции имеют взаимно-ортогональные поверхности уровня и равные нормы градиентов в каждой точке.*

Пример 3. В силу формулы $z^n = \rho^n e^{in\varphi}$ и формулы (34) для логарифма очевидно, что степенная функция отображает ортогональную сетку полярных координат в другую ортогональную сетку полярных координат на плоскости образов, а логарифм отображает полярную сетку в декартову сетку на плоскости образов. На рисунке показан образ полярной сетки при отображении, осуществляемым функцией Жуковского.

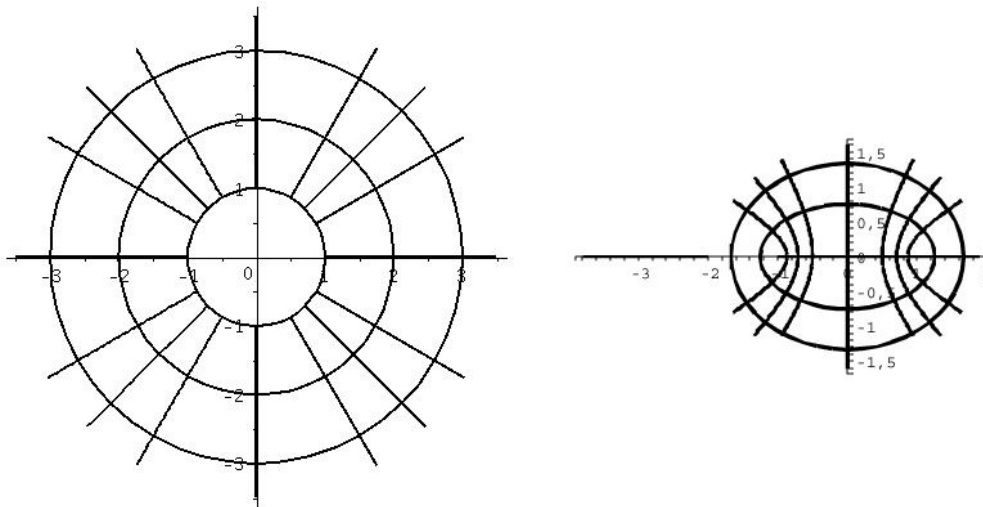


Рис. 2: На левом рисунке представлены линии полярной системы координат, на правом — их образы при отображении $z \mapsto (z + z^{-1})/2$.

Отметим, что конформное преобразование можно понимать как в активном (деформация плоскости), так и в пассивном (смена координат) смыслах. При этом независимо от интерпретации метрика η остается евклидовой, в отличие от конформных преобразований более общего вида: $\eta \rightarrow \eta' = e^{2\phi}\eta$, где ϕ — произвольная гладкая функция координат x и y . Можно показать, что условие обращения в нуль тензора кривизны для метрики $e^{2\phi}\eta$ (η — евклидова метрика) равносильно равенству $e^{2\phi} = |F'|^2$ для некоторой голоморфной функции $F(z)$.

2.10 Физический аспект \mathbb{C} -голоморфных отображений.

Напомним основные факты приложений голоморфных функций на примере задач электростатики [23, §3]. В области голоморфности с функцией $F(z) = u + iv$ можно ассоциировать электростатическое поле в пространстве, свободном от зарядов. При этом вещественная часть u этой функции является потенциалом электростатического поля (*потенциальная функция*, $u = \text{const}$ — уравнение эквипотенциальных линий), а мнимая часть v является *силовой функцией* этого поля ($v = \text{const}$ — уравнение для линий напряженности). Основная идея, на которой базируются приложения ТФКП для решения плоских задач электростатики, заключается в отыскании такой голоморфной функции $F(z)$, которая переводит границы Γ_i всех проводников рассматриваемой задачи в прямые линии $\text{Re } F(z)|_{\Gamma_i} = \text{const}_i$. Действительно, при этом границы всех проводников станут эквипотенциалами, а в силу общей теоремы существования и единственности решения уравнения Лапласа с заданными граничными условиями полученное решение будет единственным (с точностью до физически несущественной перенормировки потенциала). Если требуемая

голоморфная функция найдена (для ее отыскания не существует универсальных рецептов), то напряженность электростатического поля можно найти посредством формулы:

$$E = E_x + iE_y = -\frac{\overline{dF}}{dz} = -\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}} = -u_{,x} - iu_{,y}, \quad (44)$$

которую нужно понимать как комплексную форму для векторного поля градиента функции u . Отметим, что формула (44) получается с учетом соотношений (24) и условий Коши-Римана (26).

В силу соотношения $E = E(\bar{z})$ (антиголоморфность напряженности), вытекающего из (44), с учетом (24) имеем тождество:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{2}[E_{x,x} + E_{y,y} - i(E_{x,y} - E_{y,x})] = 0, \quad (45)$$

которое эквивалентно двум тождествам:

$$\operatorname{div} E \equiv E_{x,x} + E_{y,y} = 0; \quad \operatorname{rot} E \equiv E_{y,x} - E_{x,y} = 0, \quad (46)$$

выражающим соответственно *соленоидальность* и *потенциальность* электростатического поля.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\Phi[E, \gamma] = \int_{\gamma} E d\bar{z} = \int_{\gamma} E_x dx + E_y dy + i \int_{\gamma} E_y dx - E_x dy = \Gamma[E, \gamma] - i\Pi[E, \gamma] \quad (47)$$

по некоторому пути γ . Его вещественная часть $\Gamma[E, \gamma]$ называется *циркуляцией поля E вдоль пути γ* , а величина $\Pi[E, \gamma]$, противоположная мнимой части, называется *потокм поля E через линию γ* . С учетом определения (44) и условий Коши-Римана для этих величин получаются следующие выражения через приращения компонент комплексного потенциала:

$$\Gamma[E, \gamma] = -\delta_{\gamma}u \equiv u(z_1) - u(z_2); \quad \Pi[E, \gamma] = -\delta_{\gamma}v \equiv v(z_1) - v(z_2), \quad (48)$$

где $\{z_1, z_2\} = \partial\gamma$.

Рассмотрим несколько важных примеров.

Пример 4: поле точечного источника. Комплексный потенциал

$$F(z) = -q \ln z \quad (49)$$

описывает поле точечного заряда q на плоскости (в 3-мерном пространстве ему соответствует бесконечно протяженная заряженная нить с линейной плотностью заряда q). Из выражения (34) и формулы (44) следует формула для напряженности, которую можно привести к виду

$$E = q \frac{z}{|z|^2} \quad (50)$$

— 2-мерного закона Кулона. Из соотношений (48) получаем для любой окружности с центром в начале системы координат, где находится заряд (а значит и любого замкнутого контура, однократно обходящего точку $z=0$):

$$\Gamma[E] = 0, \quad \Pi[E] = 2\pi q. \quad (51)$$

Пример 5: проводящий нейтральный цилиндр в постоянном поле. Комплексный потенциал $F(z) = 2iE_0RZ(z/R) = iE_0(z + R^2z^{-1})$ описывает электростатическое поле вокруг проводящего нейтрального цилиндра радиуса R , помещенного в однородное электрическое поле E_0 , перпендикулярное его оси. Из выражения (35) и формулы (44) следует выражение для напряженности

$$E = iE_0 - iE_0R^2 \frac{z^2}{|z|^4}. \quad (52)$$

Силловые линии этого поля проще получить исходя из вида силовой функции в (35) (с учетом множителя i это будет функция u). Они представлены на рисунке 3 слева.

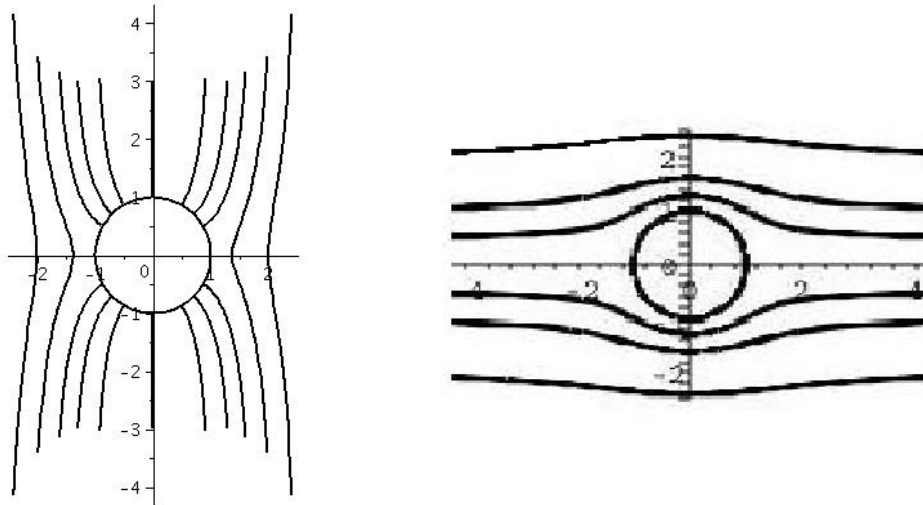


Рис. 3: Слева: силловые линии электрического поля в окрестности цилиндра радиуса $R = 1$. Внешнее электрическое поле ориентировано вдоль мнимой оси. Справа: силловые линии магнитного поля в окрестности диамагнитного цилиндра радиуса $R = 1$. Внешнее однородное магнитное поле ориентировано вдоль вещественной оси.

Рассмотренные выше примеры и вообще любое решение плоской электростатической задачи, записанное с помощью комплексного потенциала, обладают замечательной *дуальной симметрией*. Для пояснения идеи дуальной симметрии рассмотрим комплексный потенциал $F(z)$ некоторой электростатической задачи и далее рассмотрим дуальный ему потенциал iF . Для напряженности нового поля B в силу (44) получим выражение

$$B = iE, \quad (53)$$

что геометрически означает поворот вектора напряженности E в каждой точке на угол $\pi/2$. Физически такое преобразование можно интерпретировать как *переход от электростатической задачи к сопряженной (дуальной) магнитостатической*. Применяя такой переход к ситуации с точечным зарядом (заряженной нитью) на плоскости, получаем магнитное поле линейного тока с потенциалом:

$$\tilde{F} = -q \arctan(y/x) + iq \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (54)$$

При этом силловые линии поля B — концентрические окружности, а эквипотенциальные поверхности — радиальные линии, исходящие из источника (силовая и потенциальная функции поменялись местами). Формулы (48) теперь дают $\Gamma[B] = 2\pi q$, $\Pi[B] = 0$, что выражает закон полного тока в магнитостатике и соленоидальность магнитного поля соответственно.

Переход к потенциалу $\tilde{F} = iF$ в примере с цилиндром приводит к задаче о цилиндрическом диамагнетике, помещенном во внешнее однородное магнитное поле, перпендикулярное его оси. Силовые линии магнитного поля получаются теперь с помощью мнимой части формулы (35) (рис. 3 справа).

Имеется интересная возможность объединить две дуально-сопряженные картины, рассмотренные выше, в одну. Обратимся к решению с точечным зарядом и рассмотрим ситуацию, когда этот заряд является комплексным: $Q = q - im$. Очевидно, что логарифмический потенциал с таким зарядом:

$$F(z) = -Q \ln z = -q \ln \sqrt{x^2 + y^2} - m \arctan(y/x) - i(q \arctan(y/x) - m \ln \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (55)$$

включает в себя как частные случаи как электрическую, так и магнитную картину, рассмотренные выше и описывает их суперпозицию. Для избежания физически некорректного суммирования электрического и магнитного полей, можно рассмотреть, к примеру, гипотетическую дуально-симметричную электродинамику, в которой существуют магнитные заряды (монополи) и магнитные токи. На рисунке 4 показан вид силовых линий электростатического поля в суперпозиции, когда $q = m$.

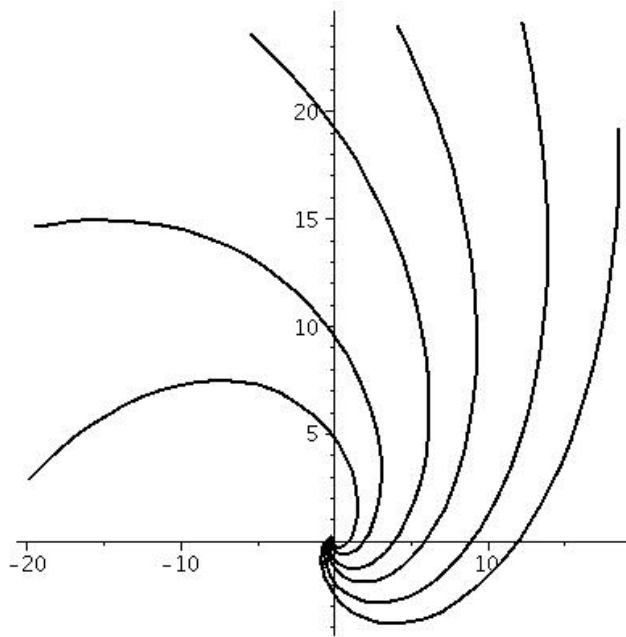


Рис. 4: Силовые линии электростатического поля в окрестности вихреисточника с равными мощностями вихря и источника.

3 Алгебра и геометрия двойных чисел H

В этом и последующих разделах мы постараемся систематизировать и дополнить сведения о двойных числах, рассеянные по различным источникам [12–15, 17, 26, 27]. Определим алгебру двойных чисел H как 2-мерный R -модуль с парой образующих $\{1, j\}$, и таблицей умножения:

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & j \\ \hline 1 & 1 & j \\ \hline j & j & 1 \end{array} . \quad (56)$$

Элементы H будем записывать в виде: $H \ni h = 1 \cdot t + jx$, где $t, x \in R$, имея ввиду дальнейшие приложения этой алгебры для описания 2-мерного пространства-времени. По аналогии с комплексными числами, вещественное число $\text{Re } h \equiv t$ называется *вещественной*

частью двойного числа h , а вещественное число $\text{Im } h \equiv x$ называется *мнимой частью* двойного числа h . Алгебра двойных чисел с таблицей умножения (56) не образует числового поля, поскольку содержит делители нуля, т. е. уравнение $h_1 h_2 = 0$ может выполняться при отличных от нуля элементах h_1 и h_2 . Геометрическая интерпретация двойных чисел аналогична интерпретации комплексных чисел: на плоскости двойной переменной (коротко — гиперболической плоскости) каждому двойному числу соответствует радиус-вектор, координаты которого суть вещественная и мнимая часть этого числа. При этом сумма и разность двойных чисел изображается стандартным правилом параллелограмма для соответствующих радиус-векторов на гиперболической плоскости.

Инволютивную операцию *комплексного сопряжения* для двойных чисел определим следующим образом: $h = t + jx \mapsto \bar{h} = t - jx$. Геометрически эта операция описывает отражение гиперболической плоскости относительно оси $\text{Im } h = 0$. Аналогично комплексному случаю, пару $\{h, \bar{h}\}$ можно рассматривать как независимые двойные координаты на гиперболической плоскости, которые связаны с декартовыми координатами посредством формул (5) с заменой $z, \bar{z} \rightarrow h, \bar{h}$ и i на j .

Комплексная координатная билинейная форма $\mathcal{G} \equiv dh \otimes d\bar{h}$ разлагается на симметричную Ξ и кососимметричную Ω неприводимые компоненты следующим образом:

$$\mathcal{B} \equiv dh \otimes d\bar{h} = \Xi - j\Omega, \quad (57)$$

где $\Xi = dt \otimes dt - dx \otimes dx$ — псевдоевклидова метрическая форма, $\Omega \equiv dt \wedge dx = -jdh \wedge d\bar{h}/2$ — 2-мерная форма объема. Мы видим, что алгебра двойных чисел индуцирует на плоскости двойной переменной 2-мерную псевдоевклидову (гиперболическую) геометрию с метрической формой Ξ , что объясняет принятый нами термин «гиперболическая плоскость».

Определим (псевдо)норму $\|\cdot\|$ и модуль $|\cdot|$ элемента h согласно следующим формулам:

$$\|h\|^2 \equiv h\bar{h}; \quad |h| \equiv \sqrt{\|h\|^2}, \quad \|hg\|^2 = \|h\|^2 \|g\|^2. \quad (58)$$

Отметим, что введенные норма и модуль не удовлетворяют евклидовому свойству нормы: $\|h\|^2 = 0 \Rightarrow h = 0$. Это обстоятельство тесно связано с псевдоевклидовой геометрией двойных чисел, а точнее, с наличием в алгебре H вырожденных элементов (делителей нуля), которые мы выделяем в отдельное подмножество

$$H^\circ \equiv \{h \in H \mid \|h\|^2 = 0\}; \quad H^\circ \ni h = a(1 \pm j), \quad a \in \mathbb{R}. \quad (59)$$

Отметим важное свойство множества H° : для всякого $H' \subseteq H$, $H' \cdot H^\circ \subset H^\circ$ (H° является в H идеалом по умножению). Для невырожденных элементов определена операция их обращения:

$$h \mapsto h^{-1} \equiv \frac{\bar{h}}{h\bar{h}}. \quad (60)$$

Множество

$$\text{Con}(h_0) = \{h \in H \mid h - h_0 \in H^\circ\} \quad (61)$$

будем называть конусом точки h_0 .

Переход к гиперболическим полярным координатам и экспоненциальной форме представления двойного числа имеет ряд особенностей, которых нет в случае комплексных чисел. $\text{Con}(0)$ (пара прямых $t \pm x = 0$) разбивает всю гиперболическую плоскость на четыре клиновидные области, обозначенные на рисунке цифрами I, II, III и IV (рис. 5).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что в каждой из отмеченных областей двойные числа допускают гиперболическое полярное представление вида:

$$h = t + jx = J\varrho(\cosh \psi + j \sinh \psi), \quad (62)$$

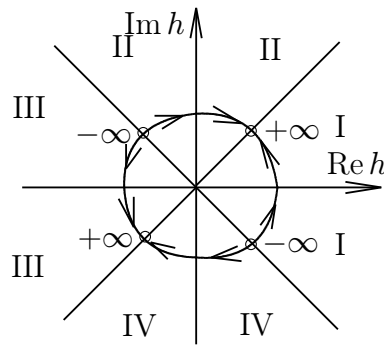


Рис. 5: Область $R \sqcup -R \sqcup R \sqcup -R$ изменения угла ψ на плоскости \mathcal{H} . Ориентация согласована в противоположных клиньях и противоположна в соседних. Для различения углов в различных клиньях можно нумеровать угол ψ индексом k : ψ_k , ($k = 1, 2, 3, 4$).

где для каждого из клиньев имеют место следующие определения величин:

$$\begin{aligned}
 \text{I} : & \quad J = 1, \quad \varrho = \sqrt{t^2 - x^2}, \quad \psi = \text{Arth}(x/t); \\
 \text{II} : & \quad J = j, \quad \varrho = \sqrt{x^2 - t^2}, \quad \psi = \text{Arth}(t/x); \\
 \text{III} : & \quad J = -1, \quad \varrho = \sqrt{t^2 - x^2}, \quad \psi = \text{Arth}(x/t); \\
 \text{IV} : & \quad J = -j, \quad \varrho = \sqrt{x^2 - t^2}, \quad \psi = \text{Arth}(t/x).
 \end{aligned} \tag{63}$$

где $\varrho \equiv |h|$, $\psi = \text{Arg } h$ — гиперболический аргумент. Таким образом, в каждом из клиньев $0 \leq \varrho < \infty$, а сами клинья параметризуются отдельными экземплярами вещественных прямых, которые в совокупности образуют многообразие Ψ угловых переменных в виде ориентированной дизъюнктивной суммы $R \sqcup -R \sqcup R \sqcup -R$. Более наглядно многообразие Ψ можно представить себе, компактифицируя каждое из R в открытый интервал и склеивая интервалы в их концах в окружность с четырьмя выколотыми точками. Отметим, что множество двойных чисел с нулевой нормой не описывается ни одной из координатных карт введенной выше гиперболической полярной системы координат.

Справедливость гиперболической формулы Эйлера: $\cosh \psi + j \sinh \psi = e^{j\psi}$ проверяется разложением левых и правых частей в формальные ряды Маклорена (которые сходятся в \mathcal{H} покомпонентно) и сравнением их вещественных и мнимых частей. Гиперболическая формула Эйлера приводит к экспоненциальной форме представления двойных чисел:

$$h = t + jx = J\varrho e^{j\psi} = J e^{\Theta}, \tag{64}$$

где в последнем равенстве мы перешли к «комплексному гиперболическому углу»

$$\Theta = \ln \varrho + j\psi \equiv \ln h. \tag{65}$$

При этом произведение пары двойных чисел сводится к сложению их комплексных углов и перемножению знаковых множителей J .

В завершение этого параграфа мы приведем для наглядной иллюстрации геометрических свойств плоскости \mathcal{H} несколько гиперболических аналогов евклидовых геометрических объектов и отношений между ними. Поскольку геометрия плоскости \mathcal{H} совпадает с геометрией двумерного пространства-времени Минковского $\mathcal{M}_{1,1}$, группой непрерывных изометрий \mathcal{H} является 3-мерная группа Пуанкаре:

$$h \mapsto h + a; \quad h \rightarrow r_\psi \cdot h, \quad r_\psi \equiv e^{j\psi}. \tag{66}$$

Хотя формально гиперболические вращения описываются множителем $e^{j\psi}$, вполне аналогичным комплексному $e^{i\varphi}$, некомпактность пространства углов и группы гиперболических

вращений приводит к заметным визуальным отличиям в ситуациях, аналогичных простым и привычным ситуациям на евклидовой плоскости. На рисунке 6 показана пара равных друг другу равносторонних треугольников, которые получаются друг из друга гиперболическим вращением вокруг начала системы координат (зеленые линии (гиперболы) — это компоненты метрической окружности на H , изображающие орбиты группы гиперболических вращений).

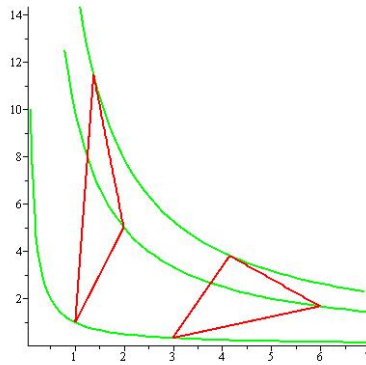


Рис. 6: Конгруэнтные равносторонние треугольники на H .

На рисунке 7 представлены семейства гиперболических эллипсов и гипербол⁷, метрическое определение которых формально совпадает с евклидовым: $\varrho_1 \pm \varrho_2 = \text{const}$, где $\varrho_{1,2}$ — гиперболические расстояния от точки кривой до пары фиксированных точек двойной плоскости.

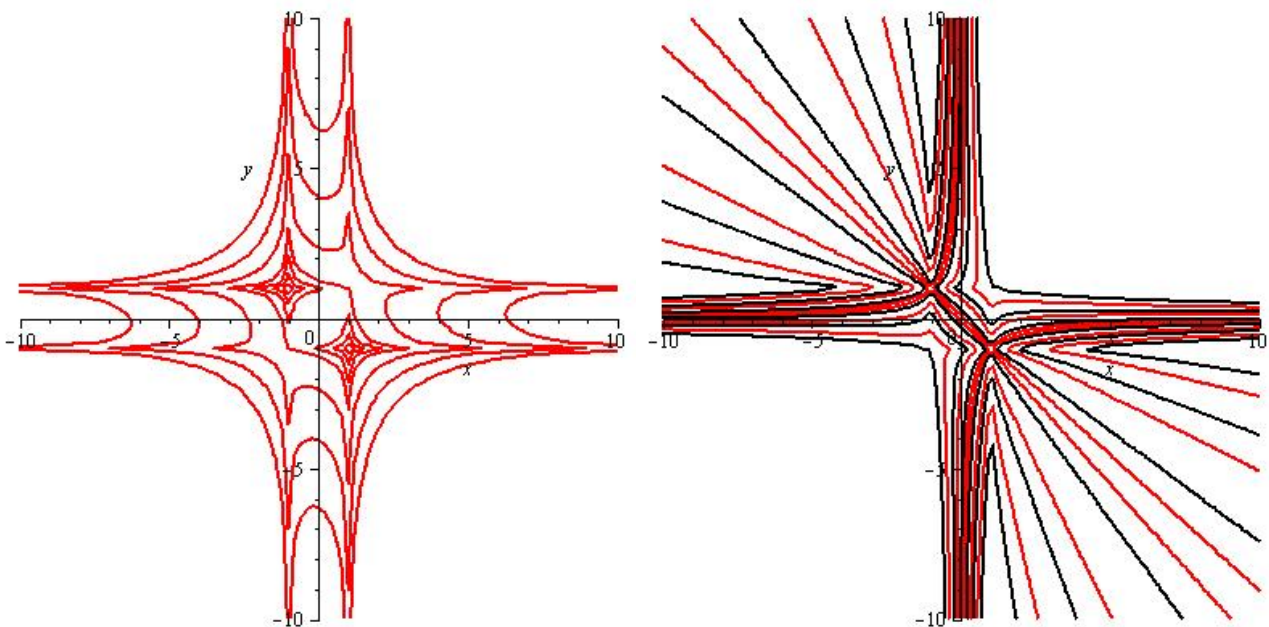


Рис. 7: Софокусные эллипсы и гиперболы на H .

Наконец, на рисунке 8 представлены семейства гиперболических спиралей: слева — гиперболические спирали Архимеда с полярным уравнением $\varrho = C\psi$, справа — гиперболические логарифмические спирали с уравнением $\varrho = Ce^\psi$.

⁷Обычные (евклидовы) эллипсы и гиперболы согласно принятой нами терминологии следует называть эллиптическими.

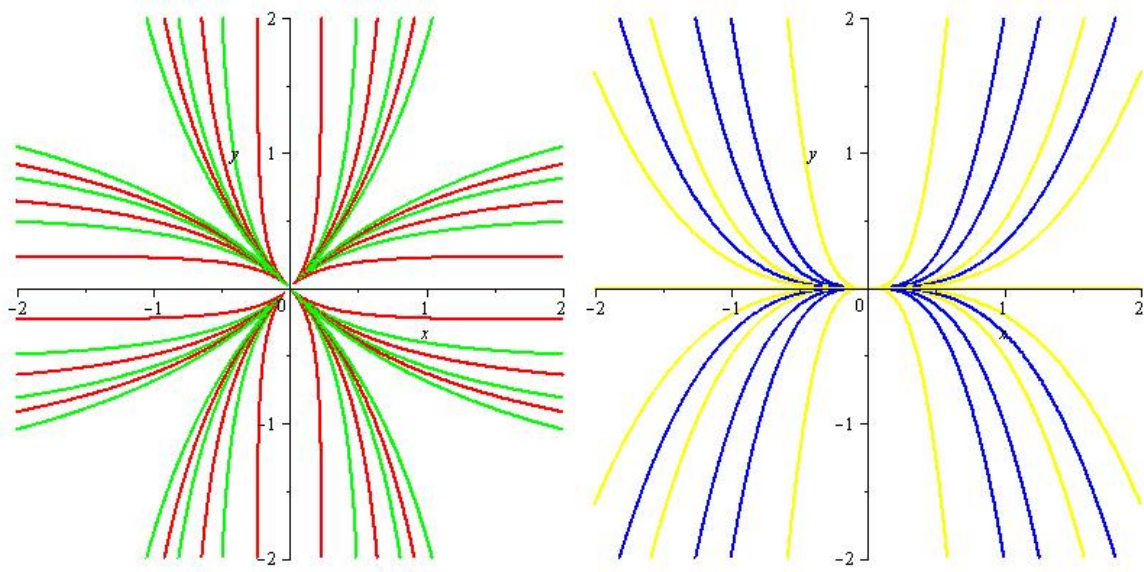


Рис. 8: Семейство спиралей на H .

4 Элементарные функции на H .

Для определения и выяснения свойств элементарных функций двойной переменной, т.е. таких отображений $H \rightarrow H$, которые на вещественной оси сводились бы к одному из представителей стандартных элементарных функций вещественной переменной, достаточно знания двух типов соотношений для вещественных функций:

1. $f(x + y) = \Phi(f_1(x), f_2(y)) \{1\}$ — вещественного закона для «суперпозиции аргументов» (типа правила «суммы синусов»);

2.

$$f(x) = (Sf)(x) + (Af)(x); (Sf)(jx) = (Sf)(x); (Af)(jx) = j(Af)(x) \{2\} \quad (67)$$

— закона взаимодействия симметричной и антисимметричной компонент вещественной функции с j .

Соотношения первого типа выводятся непосредственно из определений конкретных вещественных функций, соотношения второго типа проверяется разложением в формальные степенные ряды⁸ левых и правых частей с учетом равенства $j^2 = 1$. В настоящем разделе с помощью этих правил мы построим аналитические продолжения всех элементарных функций с \mathbb{R} на H .

4.1 Степенные функции $F(h) = h^n, n \in \mathbb{Z}$.

В отличие от степенной функции комплексной переменной случаи четных n и нечетных n кардинально отличаются. Действительно, переходя к экспоненциальному представлению⁹ (64), получаем:

$$h = J\rho e^{j\psi} \mapsto J^n \rho e^{jn\psi}. \quad (68)$$

Поскольку для любого четного $n, J^n = 1$, можно заключить, что *степенная функция $h \mapsto h^n$ при $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$ биективно отображает каждый из клиньев I, II, III, IV на*

⁸Такая проверка, разумеется, годится лишь для аналитических функций вещественной переменной, каковыми являются все элементарные функции.

⁹Для определения h^n можно было бы воспользоваться биномом Ньютона и правилами, сформулированными выше, но тот же результат получается быстрее в экспоненциальном представлении.

клин I с сохранением конусов $\text{Con}(h) \rightarrow \text{Con}(h^n)$. Напротив, при нечетном n каждый из координатных клиньев при отображении $h \mapsto h^n$, $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ биективно отображается в себя (снова с сохранением соответствующих конусов). При этом, как нетрудно видеть из (68) координатная сетка $\varrho = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ переходит в координатную сетку $\varrho' = \varrho^n = \text{const}$, $\psi' = n\psi = \text{const}$ для всяких целых n . В случае положительных целых n радиальные линии растягиваются при $\varrho > 1$ и сжимаются при $\varrho < 1$. Кроме того, они поворачиваются от значения $\psi = 0$ в сторону соответствующих им по знаку компонент конусов. Для целых отрицательных n (степенное отображение определено для $h \notin H^\circ$) дополнительно имеется инверсия относительно единичных гиперболических окружностей $\varrho = 1$ и инверсия пространства углов $\Psi \rightarrow -\Psi$.

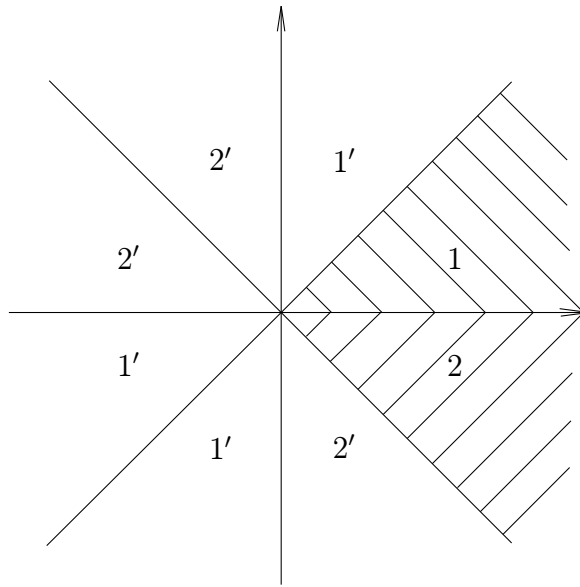


Рис. 9: Глобальная структура отображения $h \mapsto h^{2k}$.

На рис. 9 представлена глобальная структура отображения $h \mapsto h^{2k}$: клин 1-2 переходит сам в себя (его границы — в соответствующие границы), а отображения остальных клиньев в клин 1-2 показано соответствующими цифрами (цифры со штрихами, помечающими клин, показывают как именно соответствующий клин отображается в клин 1-2). Таким образом, отображение $h \mapsto h^{2k}$ является 4-листным.

Из свойств степенных функций легко вывести свойства корней различных порядков и рациональных степеней: $h \mapsto h^{1/n}$, $h \mapsto h^{m/n}$. Любой корень $\sqrt[n]{h}$ четного порядка определен в клине I. Такой корень будет 4-значной функцией. Каждый лист гиперболической римановой поверхности этой функции представляет собой идентичную копию клина 1-2, показанного на рис. 9. На каждом из листов функция однозначна. Все листы склеиваются в риманову поверхность, представляющую собой R^2 , при этом точка $(0; 0)$ принадлежит всем листам и является гиперболическим аналогом точки ветвления. Наглядно риманову поверхность корня четного порядка можно реализовать листом бумаги, сложенным вчетверо так, как показано на рис. 10.

Корни нечетной степени — однозначны в каждом из 4 клиньев.

4.2 Экспонента двойной переменной $w = e^h$

Записывая $e^h = e^{t+jx} = e^t e^{jx}$ и принимая во внимание соотношения:

$$S(e^x) = \cosh x; \quad A(e^x) = \sinh x,$$

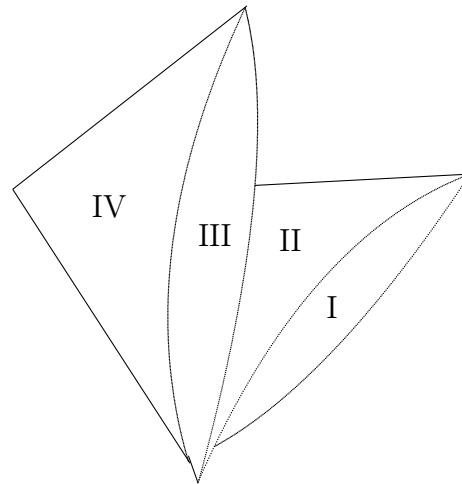


Рис. 10: Гиперболическая риманова поверхность 4-значного отображения $h \mapsto h^{1/2k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

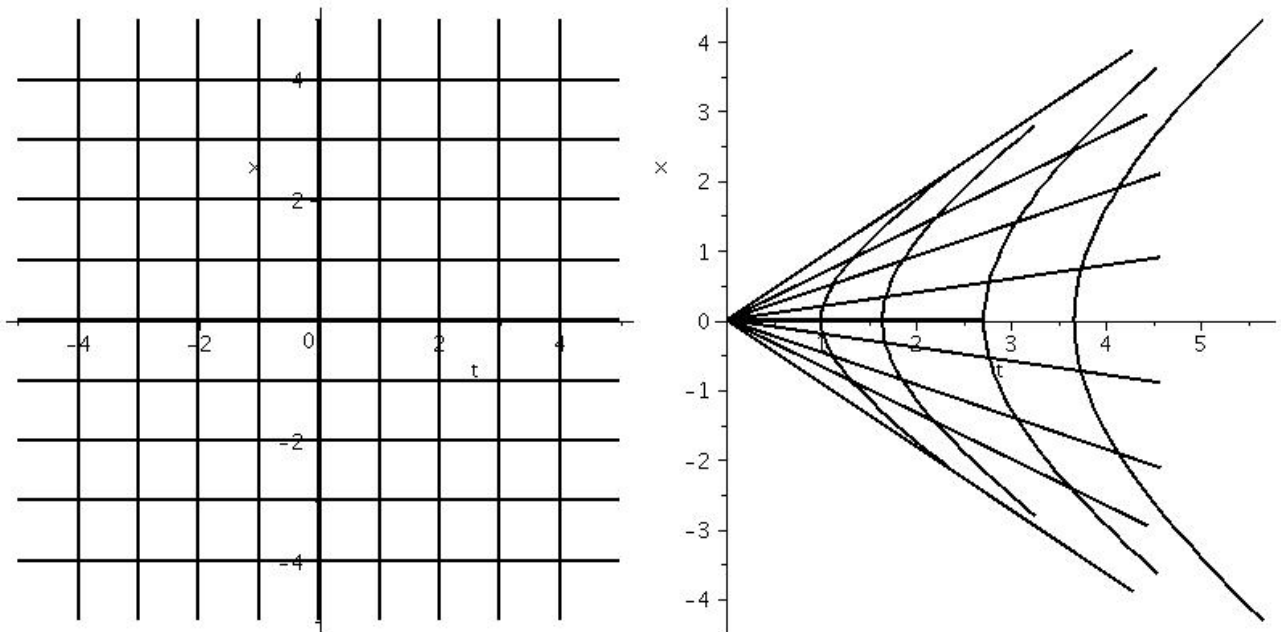


Рис. 11: Глобальная структура отображения $h \mapsto e^h$.

с учетом правил $\{1\}$, $\{2\}$, приходим к глобальной структуре экспоненциального отображения, представленной на рис. 11.

Прямоугольная псевдоортогональная сетка на плоскости переменной h отображается экспонентой в псевдоортогональную сетку, состоящую из лучей и гипербол в первом клине с вершиной в точке $h=0$. Отображение $h \mapsto e^h$ — биективно. Очевидно, что обратная функция $\ln h = \ln \varrho + j\psi$ определена во внутренности первого клина. На границах (т.е. на конусе Con) полярная система координат не работает и требуется дополнительное исследование поведения отображения $h \mapsto \ln h$, на котором мы здесь не останавливаемся.

4.3 Тригонометрические функции $\sin h$, $\cos h$ и обратные к ним

С учетом правил $\{1\}$, $\{2\}$ получаем:

$$\sin h = \sin(t + jx) = \sin t \cos x + j \sin x \cos t. \tag{69}$$

Нетрудно видеть, что линии $x = \text{const}$ и $t = \text{const}$ отображаются в семейства эллипсов с центром в точке $(0; 0)$. Эти линии наматываются на соответствующие эллипсы бесконечное число раз.

Глобальную структуру отображения $h \mapsto \sin h$ удобнее представить с помощью системы фундаментальных квадратов, один из которых представлен на рис. 12 (слева).

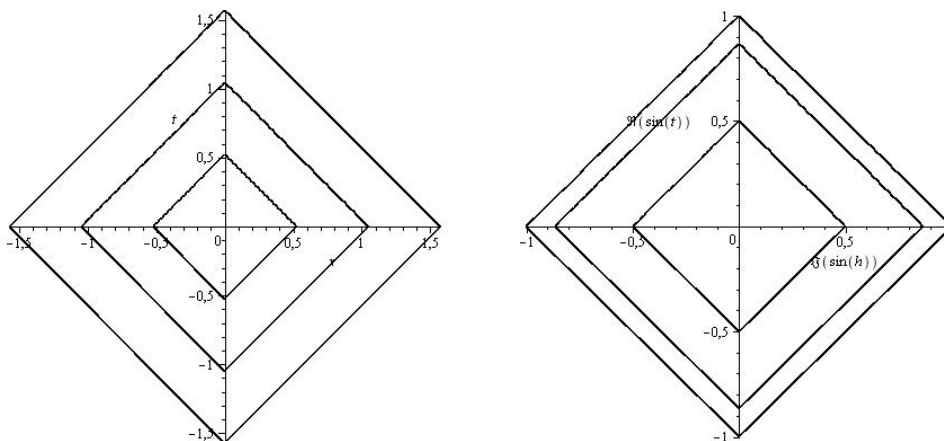


Рис. 12: Глобальная структура отображения $h \mapsto \sin h$. Фундаментальный квадрат (самый большой слева) отображается функцией \sin в квадрат с вершинами в единичных точках на осях (наибольший квадрат справа).

Вся плоскость переменной h покрывается такими квадратами, сдвинутыми на векторы $(k \pm jm)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, то есть отображение $h \mapsto \sin h$ бесконечнолистно. При этом отображение $h \mapsto \sin h$ в двух соседних квадратах имеет противоположные знаки якобиана отображения, то есть, меняет ориентацию базиса на плоскости. Нетрудно убедиться, что отображение $h \mapsto \cos h$ устроено аналогично, только все семейство «фундаментальных квадратов» сдвинуто на плоскости переменной h влево на $\pi/2$ (поскольку $\cos h = \sin(h + \pi/2)$.) Соответственно функции \arcsin и \arccos можно определить на квадрате с вершинами в точках $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$. Явные формулы для арксинуса и арккосинуса имеют вид:

$$\begin{aligned} \arcsin h &= \frac{1}{2} [\arcsin((t+x)\sqrt{1-(t-x)^2} + (t-x)\sqrt{1-(t+x)^2}) + \\ & j \arcsin((t+x)\sqrt{1-(t-x)^2} - (t-x)\sqrt{1-(t+x)^2})] + 2\pi(m+jn) \\ \arccos h &= \frac{1}{2} [\arccos(t^2 - x^2 - \sqrt{1-(t-x)^2}\sqrt{1-(t+x)^2}) + \\ & j \arccos(t^2 - x^2 + \sqrt{1-(t-x)^2}\sqrt{1-(t+x)^2})] + 2\pi(m+jn), \end{aligned}$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$.

4.4 Тригонометрические функции $\tan h$, $\cot h$ и обратные к ним

Выделяя с помощью правил $\{1\}$, $\{2\}$ в функции $w = \tan h$ вещественную и мнимую часть после элементарных преобразований получаем:

$$\tan h = \frac{\sin 2t + j \sin 2x}{\cos 2t + \cos 2x}.$$

Эта функция отображает квадрат с центром в точке $(0; 0)$ и стороной $\pi/2$ в область, ограниченную гиперболами, а прямоугольную сетку в исходном квадрате — в симметричную гиперболическую сетку внутри области (рис. 13).

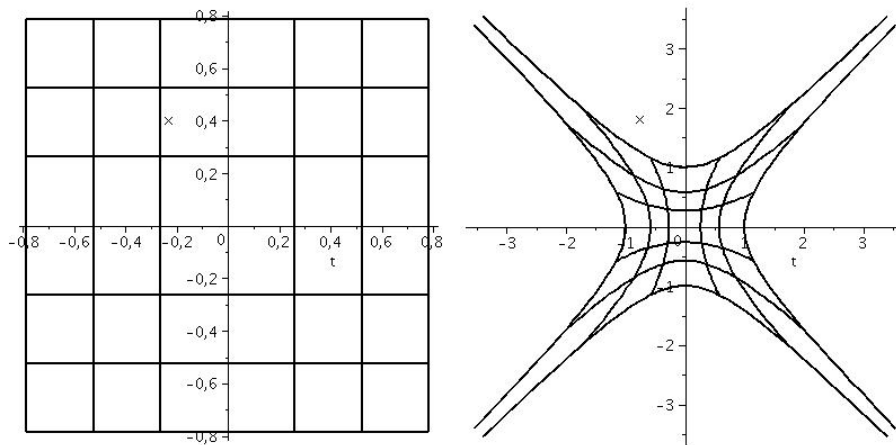


Рис. 13: Структура отображения $h \mapsto \tan h$.

В целом функция $h \rightarrow \tan h$ бесконечнолистка. Ее листы представляют собой квадраты, получаемые из фундаментального квадрата $(\pi/2; 0), (0; \pi/2), (-\pi/2; 0), (0; -\pi/2)$ (см. рис. 12 слева) трансляциями на векторы кратные π по t и x .

Ввиду тождества $\cot h = -\tan(h - \pi/2)$, аналогично устроена функция $w = \cot h$. Функции \arctan и arccot многозначны. К примеру, функция $\arctan h$ имеет следующий явный вид в координатах:

$$\arctan h = \frac{1}{2} \left\{ \arctan \left[\frac{2t}{1 - t^2 + x^2} \right] + j \arctan \left[\frac{2x}{1 + t^2 - x^2} \right] \right\} + \pi(m + nj),$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$.

4.5 Гиперболические функции $\sinh h, \cosh h, \tanh h, \coth h$ и обратные к ним

Выделяя с помощью правил $\{1\}, \{2\}$ в функции $w = \sinh h$ вещественную и мнимую часть, приходим к выражению:

$$\sinh h = \sinh t \cosh x + j \sinh x \cosh t.$$

Нетрудно видеть, что прямоугольная координатная сетка (t, x) отображается в гиперболическую сетку на плоскости образов w (рис. 14).

Отображение $h \mapsto \sinh h$ — взаимно-однозначно, поэтому обратное отображение Arsh определено на всей двойной плоскости. Его явный координатный вид дается формулой:

$$\operatorname{Arsh} h = \frac{1}{2} \left(\operatorname{Arsh}[(t+x)\sqrt{1+(t-x)^2} + (t-x)\sqrt{1+(t+x)^2}] + j \operatorname{Arsh}[(t+x)\sqrt{1+(t-x)^2} - (t-x)\sqrt{1+(t+x)^2}] \right).$$

Ввиду двулистности гиперболического косинуса отображение

$$\cosh h = \cosh t \cosh x - j \sinh t \sinh x$$

устроено иначе.

Первый клин с вершиной в нуле отображение \cosh биективно отображает в первый клин с вершиной в точке 1. При этом декартова сетка переходит в сетку ортогональных гипербол. В этот же клин переходят и остальные клинья с вершиной в точке 0 (рис. 15).

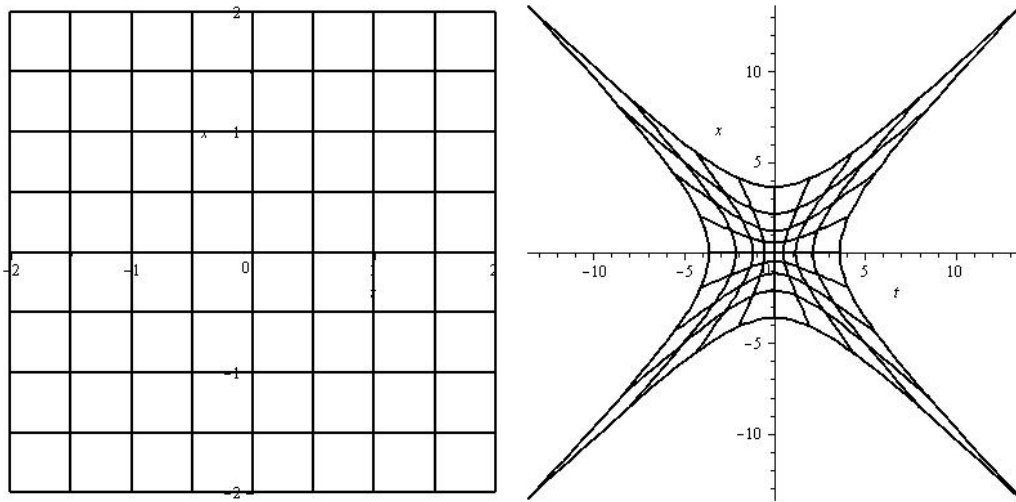


Рис. 14: Структура отображения $h \mapsto \sinh h$.

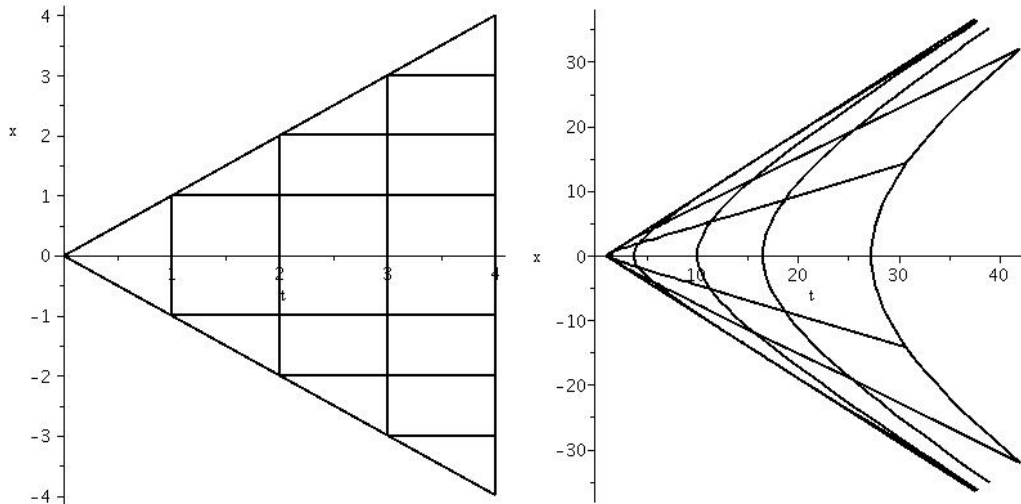


Рис. 15: Структура отображения $h \mapsto \cosh h$.

В целом глобальная структура отображения $\cosh h$ иллюстрируется рисунком 9, в котором вершины клиньев сдвинуты на единицу вправо. Таким образом, гиперболический косинус — 4-листная функция, а гиперболический арккосинус — 4-значная с римановой поверхностью, представленной на рис. 10. Его явное координатное представление дается формулой:

$$\text{Arch } h = \frac{1}{2}(\text{Arch}[t^2 - x^2 - \sqrt{(t+x)^2 - 1}\sqrt{(t-x)^2 - 1}] + j\text{Arch}[t^2 - x^2 + \sqrt{(t+x)^2 - 1}\sqrt{(t-x)^2 - 1}]).$$

Функция

$$\tanh h \equiv \frac{\sinh h}{\cosh h} = \frac{\tanh t(1 - \tanh^2 x)}{1 - \tanh^2 t \tanh^2 x} + j \frac{\tanh x(1 - \tanh^2 t)}{1 - \tanh^2 t \tanh^2 x}$$

отображает двойную плоскость на внутренность единичного квадрата с вершинами в точках $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, а квадрат со стороной два с ортогональной сеткой — в некоторую внутреннюю часть квадрата-образа двойной плоскости (рис. 16).

Гиперболический тангенс — функция однолистная, поэтому обратная функция Arctanh

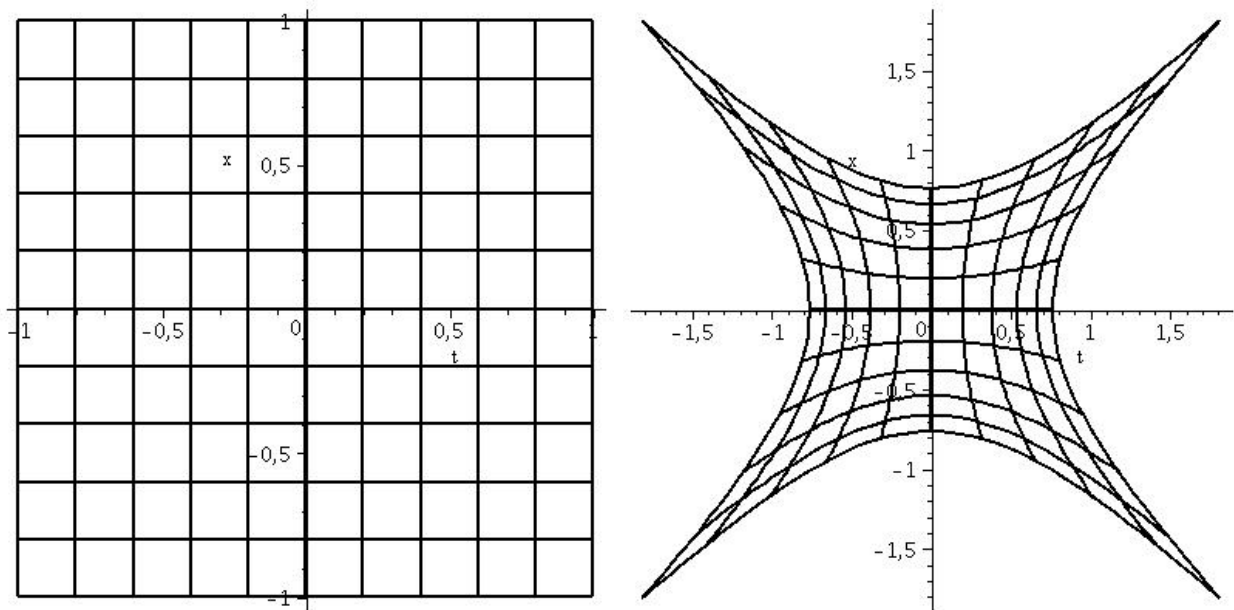


Рис. 16: Структура отображения $h \mapsto \tanh h$.

однозначна на области определения. Ее выражение в координатах дается формулой:

$$\operatorname{Arctanh} h = \frac{1}{2}(\operatorname{Arth}(t+x) + \operatorname{Arth}(t-x) + j(\operatorname{Arth}(t+x) - \operatorname{Arth}(t-x))).$$

Функция

$$\coth h \equiv \frac{\cosh h}{\sinh h} = \frac{\coth t(1 - \coth^2 x) + j \coth x(1 + \coth^2 t)}{\coth^2 t - \coth^2 x}$$

является в определенном смысле дополнительной к функции $\tanh h$: она отображает всю плоскость \mathcal{H} на внешность квадрата на рис. 16 (справа). При этом прямоугольная координатная сетка переходит в ортогональное семейство гипербол, которые пересекаются в бесконечно-удаленной точке.

Функция \coth — однолистная и обратная к ней функция $\operatorname{Arccoth}$ — однозначная в своей области определения (внешности квадрата). Ее выражение в координатах дается формулой:

$$\operatorname{Arccoth} h = \frac{1}{2}(\operatorname{Arcth}(t+x) + \operatorname{Arcth}(t-x) + j(\operatorname{Arcth}(t+x) - \operatorname{Arcth}(t-x))).$$

5 Изотропный базис и аналитическое продолжение

Замечательной отличительной особенностью алгебры двойных чисел, которая отсутствует в алгебре комплексных чисел, является наличие в первой специального алгебраического базиса $\{e_1, e_2\}$ (точнее класса базисов), в котором все алгебраические, геометрические и аналитические аспекты двойных чисел и связанных с ними конструкций, выявляются в максимально простом виде. Далее мы будем называть его по некоторой сложившейся исторической традиции *изотропным*. Этот базис непосредственно связан с образующими делителей нуля:

$$e_1 = \frac{1+j}{2}; \quad e_2 = \frac{1-j}{2}, \quad t = \frac{h_1+h_2}{2}, \quad x = \frac{h_1-h_2}{2}, \quad (70)$$

где $h = h_1e_1 + h_2e_2$ — представление двойного числа в изотропном базисе. Упомянутая выше выделенная роль изотропного базиса обусловлена очень простой таблицей умножения

двойных чисел и правила комплексного сопряжения в нем:

$$e_1^2 = e_1; e_2^2 = e_2; e_1 e_2 = 0; \bar{e}_1 = e_2 \quad \bar{e}_2 = e_1. \quad (71)$$

Соответственно, алгебраическая единица закон умножения двойных чисел и выражение псевдонормы принимают следующий вид:

$$h \cdot g = h_1 g_1 e_1 + h_2 g_2 e_2; \quad 1 = e_1 + e_2 \quad \|h\|^2 = h_1 h_2. \quad (72)$$

Мы видим, что в изотропном базисе алгебра H явным образом раскладывается (расщепляется) на пару вещественных алгебр: операции суммы и произведения выполняются в этом базисе покомпонентно. По этой причине двойные числа иногда называют также *расщепляемыми* числами. По всей видимости, именно факт разложения $H = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ сыграл роль (во многом психологического!) препятствия к разработке двойных чисел и их физических приложений. Далее мы увидим, что, несмотря на столь простую структуру алгебры H , она замечательным образом воспроизводит многие свойства объектов на комплексной плоскости, а потенциал физических приложений двойных чисел оказывается неожиданно привлекательным и многообещающим.

Начиная с этого момента, мы будем использовать (если не оговорено особо) изотропный базис, поскольку анализ свойств самих двойных чисел и конструкций над ними в этом базисе очень существенно упрощается. Поскольку операция возведения в степень в этом базисе выполняется покомпонентно:

$$h^n = h_1^n e_1 + h_2^n e_2, \quad (73)$$

мы сразу приходим к очень простой конструкции формальных степенных рядов над H :

$$R(h) \equiv \sum_k c_k h^k = \left(\sum_k c_k^1 h_1^k \right) e_1 + \left(\sum_k c_k^2 h_2^k \right) e_2, \quad c_k \in H, \quad c_k^{1,2} \in \mathbb{R}. \quad (74)$$

Другими словами, степенные ряды в H расщепляются на пары степенных рядов в \mathbb{R} . Сходимость степенных рядов в H теперь естественно определить как одновременную сходимость их вещественных компонент.

Эти простые факты дают возможность различных обобщений аналитических продолжений, которые были предприняты в разделе 4 для элементарных функций. Будем далее обозначать $C^\omega(H')$ семейство функций двойной переменной H -аналитических в некоторой области $H' \subseteq H$. Сформулируем несколько утверждений, относящихся к различным способам аналитических продолжений функций с одних областей H (в частности, с вещественной прямой $\text{Re } h = \lambda(e_1 + e_2)$) на другие. В этих утверждениях J — открытое множество \mathbb{R} , D — открытое множество \mathbb{R}^2 .

Утверждение 1 *Любая вещественно аналитическая на J функция одной переменной допускает аналитическое продолжение на $J \times J \subseteq H$*

Доказательство заключается в следующей простой выкладке, приводящей к явному выражению для искомого аналитического продолжения:

$$f : J \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f : J \times J \rightarrow H : f(h) \equiv \sum_k c_k h^k = \sum_k c_k (h_1^k e_1 + h_2^k e_2) \quad (75)$$

$$\sum_k c_k h_1^k e_1 + \sum_k c_k h_2^k e_2 = f(h_1) e_1 + f(h_2) e_2.$$

Отметим, что это утверждение включает в себя все разобранные в разделе 4 аналитические продолжения элементарных функций. Рассмотрим теперь некоторое обобщение этой ситуации.

Утверждение 2 *Имеет место биекция между множеством $C^\omega(J_1) \times C^\omega(J_2)$ и множеством $C^\omega(J_1 \times J_2)$ ($J_1 \times J_2 \subseteq H$).*

Доказательство сводится к простой выкладке:

$$f_1(h_1)e_1 + f_2(h_2)e_2 = \sum_k (c_k^1 e_1 + c_k^2 e_2)(h_1^k e_1 + h_2^k e_2) \sum c_k h^k \equiv f(h). \quad (76)$$

Другими словами, алгебра двойных чисел позволяет объединить две различных независимых аналитических функции одной вещественной переменной в одну аналитическую функцию двойной переменной. Отличие от случая предыдущего утверждения заключается в том, что теперь коэффициенты разложения этой функции будут двойными числами (в предыдущем случае они были вещественными). Рассмотрим многомерное обобщение этой ситуации.

Утверждение 3 *Имеет место биекция между множеством $C^\omega(D_1) \times C^\omega(D_2)$ и множеством $C^\omega(D_1 \cap D_2)$ ($D_1 \cap D_2 \subseteq H$).*

Доказательство сводится к выкладке с двойными рядами:

$$f(h, \bar{h}) = \sum_{k,m} c_{km} h^k \bar{h}^m \left(\sum_{km} c_{km}^1 h_1^k h_2^m \right) e_1 + \left(\sum_{km} c_{km}^2 h_2^k h_1^m \right) e_2 \quad (77)$$

$$f_1(h_1, h_2)e_1 + f_2(h_1, h_2)e_2.$$

Другими словами, алгебра двойных чисел позволяет объединить пару независимых вещественно-аналитических функций двух вещественных переменных в одну H -аналитическую функцию пары сопряженных переменных h и \bar{h} .

Рассмотрим, наконец, вариант аналитического продолжения с подмножества H — гладкой регулярной кривой $\gamma \subset H$.

Утверждение 4 *Всякая H -аналитическая функция f , заданная на кривой γ , однозначно аналитически продолжается на прямоугольник $\pi_1(\gamma) \times \pi_2(\gamma)$, где π_i — проекции на оси изотропной системы координат.*

Явное выражение для искомого аналитического продолжения \hat{f} дается формулой:

$$\hat{f}(h) = f \circ \gamma^{-1}(h),$$

где $\gamma(t) = \{\gamma_1(t), \gamma_2(t)\}$ — параметризация кривой γ , $\gamma^{-1} = \{\gamma_1^{-1}(h_1), \gamma_2^{-1}(h_2)\}$.

Прямоугольные области, возникающие в во всех сформулированных утверждениях типичны для аналитических функций двойной переменной: они играют роль максимальных областей аналитического продолжения функций двойной переменной (гиперболический аналог областей Рейнхарта в многомерном комплексном анализе [21]).

6 Компактификация H

Для корректного определения некоторых будущих конструкций полезно рассмотреть компактифицированную версию H , определение и свойства которой наиболее просты в изотропном базисе. Мы рассмотрим два способа компактификации, каждый из которых связан с определенной факторизацией H по точкам, имеющим бесконечные изотропные координаты. При первом способе мы пополняем H четырьмя бесконечно-удаленными прямыми

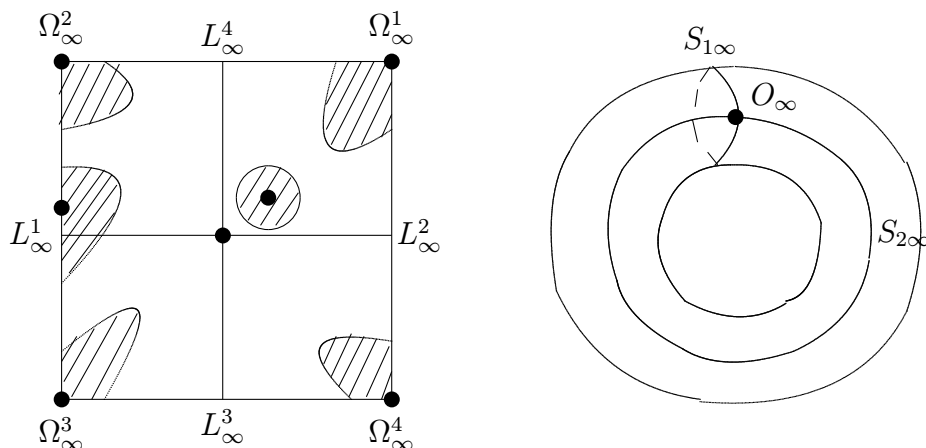


Рис. 17: Структура H^\square и H^\circled .

L_∞ и четырьмя бесконечно-удаленными точками Ω_∞ :

$$H \rightarrow H^\square = H \cup L_\infty \cup \Omega_\infty, \tag{78}$$

где

$$L_\infty = \{(-\infty, a)\} \cup \{(+\infty, a)\} \cup \{(a, -\infty)\} \cup \{(a, +\infty)\}, \quad a \in \mathbb{R} \tag{79}$$

и

$$\Omega_\infty = \{(+\infty, +\infty)\} \cup \{(-\infty, +\infty)\} \cup \{(-\infty, -\infty)\} \cup \{(+\infty, -\infty)\}. \tag{80}$$

Такая компактификация осуществляется преобразованием $h \mapsto \tanh h$. На рис. 17 (слева) показаны окрестности некоторых конечных и бесконечно-удаленных точек. Некоторые расходящиеся на H последовательности становятся сходящимися на H^\square (например, последовательность $h_n = e_1 + ne_2$ становится сходящейся, а $h_n = e_1 + (-1)^n ne_2$ остается расходящейся).

Второй способ связан с последующей попарной склейкой противоположных бесконечно-удаленных прямых в H^\square (получится пара бесконечно удаленных окружностей $S_{1\infty}$ и $S_{2\infty}$), при этом четыре бесконечно-удаленных точки склеиваются в одну O_∞ :

$$H^\square \rightarrow H^\circled = H_0^\square \cup S_{1\infty} \cup S_{2\infty} \cup O_\infty \tag{81}$$

(рис. 22 (справа)). Очевидно, что полученное таким образом H^\circled гомеоморфно двумерному тору. Теперь последовательность $h_n = e_1 + (-1)^n ne_2$ становится сходящейся на H^\circled , а функция $1/h$ будет непрерывной на H^\circled .

Следует отметить, что операция деления в H^\circled определена на всех элементах. К примеру,

$$\frac{1}{0} = O_\infty; \quad \frac{1}{2e_1} = \frac{e_1 + e_2}{2e_1 + 0e_2} = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{0}e_2 = \frac{1}{2}e_1 + \infty e_2 \in S_{2\infty}.$$

Наконец,

$$\frac{0e_1 + ae_2}{0e_1 + be_2} \equiv 0e_1 + \frac{a}{b}e_2, \tag{82}$$

что следует рассматривать, как доопределение деления делителей нуля одного типа, которое мы используем далее при определении дифференцирования.

Отметим также, что идея компактификации, основанная на гиперболическом аналоге стереографической проекции не годится, поскольку гиперболическая сфера — некомпактное многообразие. Вопрос о стереографической проекции гиперболической сферы на H требует выхода в алгебру тройных чисел P_3 и в настоящей статье мы его не рассматриваем.

7 Дробно-линейные преобразования и функция Жуковского на H

Теперь мы можем определить семейство дробно-линейных преобразований $PL(2, H)$ плоскости двойной переменной как голоморфный дробно-линейный автоморфизм: $H^\circ \rightarrow H^\circ$ вида:

$$PL(2, H) \ni D_M^H : h \mapsto D_M^H(h) = \frac{ah + b}{ch + d} = \frac{a_1 h_1 + b_1}{c_1 h_1 + d_1} e_1 + \frac{a_2 h_2 + b_2}{c_2 h_2 + d_2} e_2, \quad (83)$$

где

$$M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

— матрица, элементами которой являются двойные числа из H° . Как это видно из представления элемента D_M^H в изотропном базисе в (83), семейство $PL(2, H)$ изоморфно $PL(1, \mathbb{R}^\circ) \times PL(1, \mathbb{R}^\circ)$, где \mathbb{R}° — вещественная прямая, компактифицированная на окружность.

Из определения (83) легко устанавливаются следующие важные свойства семейства $PL(2, H)$.

1. $PL(2, H) \sim SL(2, H)$, откуда следует также и еще один изоморфизм: $SL(2, H) \sim PL(1, \mathbb{R}^\circ) \times PL(1, \mathbb{R}^\circ) \sim SL(2, \mathbb{R}^\circ) \times SL(2, \mathbb{R}^\circ)$.
2. $D_M^H \in C^\omega(H^\circ \setminus \text{Con}(-d/c))$.
3. $D_M^H(-d/c) = O_\infty$, $D_M^H(\text{Con}(-d/c)) = \text{Con}(O_\infty) = S_{1\infty} \cup S_{2\infty}$.
4. $D_M^H(O_\infty) = a/c$, $D_M^H(\text{Con}(O_\infty)) = \text{Con}(a/c)$.
5. D_M^H сохраняет сопряженные точки¹⁰:

$$h \stackrel{S_H}{\sim} h' \Leftrightarrow D_M^H(h) \stackrel{D_M^H(S_H)}{\sim} D_M^H(h') \quad (84)$$

Частным случаем сохранения сопряженности является круговое свойство: гиперболические дробно-линейные преобразования переводят гиперболические окружности в гиперболические окружности (точки на окружностях самосопряжены).

6. Сохранение двойного отношения:

$$\{g, h; w, u\} = \frac{g-w}{g+w} \cdot \frac{h-u}{h+w} = \text{inv}. \quad (85)$$

На связных компонентах окружности двойное отношение 4-х точек как и в евклидовом случае оказывается вещественным!

По аналогии с комплексной плоскостью, можно определить подгруппу дробно-линейных гиперболических автоморфизмов области D :

$$D_M(D) = D. \quad (86)$$

К примеру, автоморфизмы единичного круга имеют вид:

$$h' = \pm e^{j\psi} \frac{h-a}{1-\bar{a}h}, \quad (87)$$

а автоморфизмы полуплоскости $\text{Im } h \geq 0$:

$$M \in SL(2, R). \quad (88)$$

¹⁰Определение сопряженных точек на H дословно повторяет соответствующее определение евклидовой геометрии (с заменой евклидова содержания терминов «окружность» и «расстояние» на гиперболическое).

На рис. 18 наглядно представлено действие дробно-линейного преобразования $h \mapsto (h - a)/(h - \bar{a})$, $a = e_1 + 2e_2$ (оно относится как раз к числу автоморфизмов гиперболического единичного круга). Криволинейная фигура на рисунке справа — это образ параллелограмма слева, который состоит из кусков гипербол. Конус особой точки пересекает исходный параллелограмм в двух точках: этим точкам пересечения соответствуют вертикальные разрывы на рисунке справа. Однако, на компактифицированной плоскости H° образ параллелограмма замкнут.

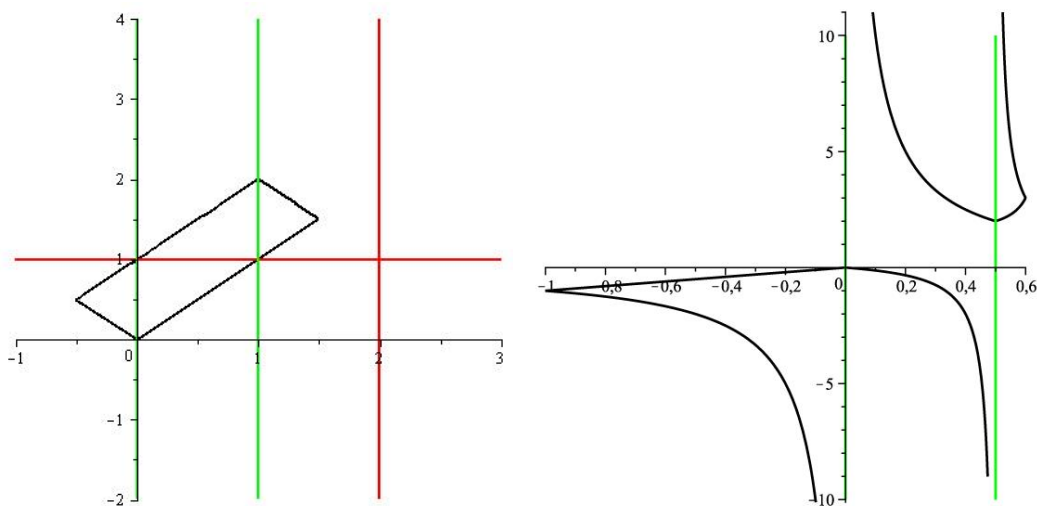


Рис. 18: $h \mapsto (h - a)/(h - \bar{a})$, $a = e_1 + 2e_2$.

С помощью двойных чисел можно определить еще одну модель геометрии Лобачевского. В качестве прямых этой геометрии можно рассматривать куски гиперболических окружностей в верхней полуплоскости¹¹ в верхней полуплоскости (рис. 19 слева). Нетрудно убедиться, что любая пара точек в верхней полуплоскости определяет единственную прямую, а вещественная ось играет роль абсолюта.

Также нетрудно убедиться, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести бесчисленное множество параллельных ей прямых (рис. 19 справа). В качестве расстояния между парой точек h и g можно взять модуль логарифма двойного отношения:

$$\rho(h, g) \equiv |\ln\{h, g, O_\infty, a_{(h,g)}\}| = \left| \ln \frac{1 - \sinh \psi_h - \cosh \psi_h}{1 - \sinh \psi_g - \cosh \psi_g} \right|. \quad (89)$$

где $a_{h,g}$ — точка пересечения прямой, содержащей h и g и абсолюта, $\psi_{h,g}$ — гиперболические углы точек h и g . Имеют место соотношения:

$$\rho(h, O_\infty) = \rho(h, A) = \infty, \quad A \in \text{Re}h.$$

В заключение этого параграфа рассмотрим свойства гиперболической версии функции Жуковского:

$$Z(h) \equiv \frac{1}{2} \left(h + \frac{1}{h} \right),$$

которую следует отнести к классу дробно-рациональных преобразований $PR(2, H)$. Эта функция, как и функция Жуковского на \mathbb{C} , двукратно накрывает плоскость двойной перемешиваемой, однако она имеет 4 точки ветвления $\{\pm 1, \pm j\}$, а не две, как в комплексном случае.

¹¹Здесь мы временно пользуемся исходным базисом $\{1, j\}$.

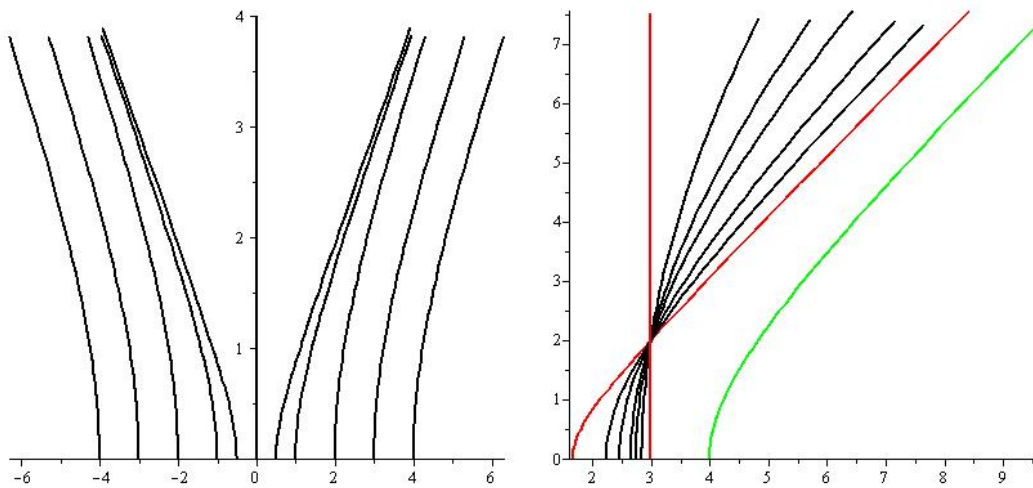


Рис. 19: Реализация геометрии Лобачевского на двойных числах.

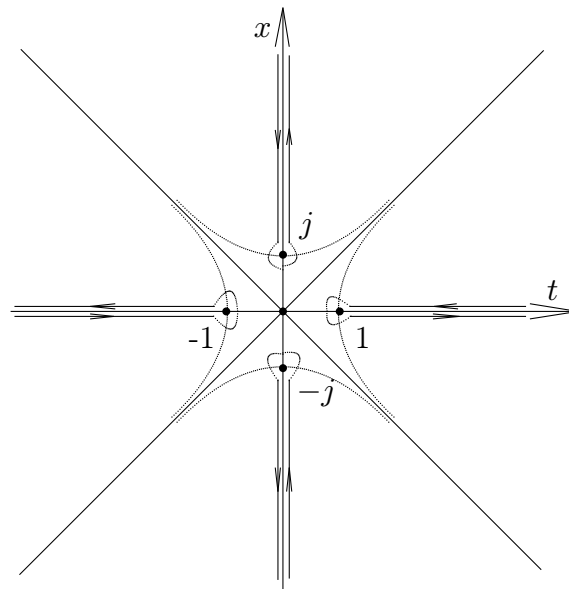


Рис. 20: Функция $Z(h)$.

В каждом клине внешность и внутренность единичной гиперболической окружности отображается на весь клин. При этом обратная функция будет двузначной, ее риманова поверхность получится склеиванием двух копий двойной плоскости с разрезами вдоль лучей $[\pm 1; \pm\infty)$ и $[\pm j; \pm j\infty)$ (рис. 21).

8 Гиперболические спиноры $\mathfrak{S}(H)$

Определим гиперболические спиноры как 2-мерное линейное векторное пространство над алгеброй H , оснащенное антисимметричной метрикой:

$$\langle \xi, \zeta \rangle \equiv *(\xi \wedge \zeta), \quad \xi, \zeta \in \mathfrak{S}(H).$$

Рассматривая эту конструкцию в изотропном базисе, имеем очевидный изоморфизм:

$$\mathfrak{S}(H) \sim \mathfrak{S}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{S}(\mathbb{R}), \tag{90}$$

где $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$ — 2-мерное линейное пространство вещественных спиноров. Группой изометрии метрики \langle , \rangle является группа $SL(2, H)$ матриц над H с единичным определителем. Имеет

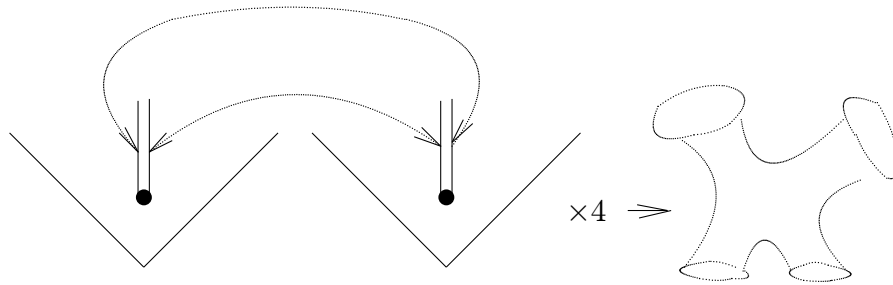


Рис. 21: Риманова поверхность $Z^{-1}(h)$.

место очевидная цепочка включений:

$$SL(2, H) \supset SU(2, H) \supset SO_2(\mathbb{R}), \tag{91}$$

где $SL(2, H) \sim SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ – 6-параметрическая группа h -унимодулярных преобразований:

$$M = A_1 e_1 + A_2 e_2, \quad \det A_1 = \det A_2 = 1;$$

$SU(2, H)$ – 3-параметрическая группа H -унитарных преобразований¹², изоморфная $SL(2, \mathbb{R})$:

$$M = A e_1 + (A^T)^{-1} e_2, \quad \det A = 1;$$

$SO_2(\mathbb{R})$ – 1-параметрическая группа евклидовых вращений:

$$M = R(e_1 + e_2), \quad R R^T = 1.$$

Рассмотрим теперь векторное пространство эрмитовых спиноров валентности $(1, 1)$:

$$\mathfrak{E}(H) \equiv S(\mathfrak{S}(H) \otimes \bar{\mathfrak{S}}(H)).$$

Его произвольный элемент $K \in \mathfrak{E}(H)$ можно записать в следующем виде:

$$K \begin{pmatrix} T + X & Y + jU \\ Y - jU & T - X \end{pmatrix}, \quad T, X, Y, Z \in \mathbb{R}.$$

Пространство $\mathfrak{E}(H)$ можно рассматривать как линейное 4-мерное представление группы изометрии $SL(2, H)$:

$$K \mapsto K' = M \cdot K \cdot M^\dagger. \tag{92}$$

Выпишем систему инвариантов пространства $\mathfrak{E}(H)$, вид которых легко устанавливается из закона (92) и известных свойств матриц:

$$\det K = T^2 + U^2 - X^2 - Y^2, \quad M \in SL(2, H),$$

$$\text{Trace } K = 2T, \quad M \in SU(2, H),$$

$$\text{Im } K = U \langle \ , \ \rangle, \quad M \in SO_2(\mathbb{R}).$$

Таким образом, мы имеем следующую диаграмму гомоморфизмов гиперболических спинорных групп:

$$\begin{array}{ccccc} SL(2, H) & \longrightarrow & SU(2, H) & \longrightarrow & SO_2(\mathbb{R}) \\ 4:1 \downarrow & & \downarrow 4:1 & & \downarrow 4:1 \\ SO(2, 2) & \longrightarrow & SO(1, 2) & \longrightarrow & SO_2(\mathbb{R}) \end{array} \tag{93}$$

¹²Эта группа оставляет инвариантной H -эрмитову форму $(\xi, \zeta) = \bar{\xi}^1 \zeta^1 + \bar{\xi}^2 \zeta^2$

Здесь горизонтальные стрелки обозначают редукцию на подгруппу, а вертикальные — гомоморфизмы спинорных групп на пространственно-временные.

Мы видим, что гиперболические спиноры являются эффективным языком описания геометрии симметричного пространства-времени с сигнатурой $(+, +, -, -)$. Это пространство возникает в некоторых аналитических решениях ОТО, а группа $SO(2, 2)$ исследуется в ряде моделей деформационного квантования. Хорошо известно, что эта группа является конформной группой 2-мерного пространства-времени Минковского [28]. Отметим здесь, что 4-кратное накрытие пространственно-временных групп спинорными группами непосредственным образом связано со свойствами алгебры двойных чисел: в отличие от комплексного случая уравнение $x^2 = 1$ имеет не два корня ± 1 , а четыре: $\pm 1, \pm j$. Существует и чисто топологическое объяснение 4-кратности накрытия. Группа $SO(2, 2)$ содержит внутри себя два независимых евклидовых вращения и четыре независимых лоренцевых буста. Поскольку пространство бустов топологически тривиально, все нетривиальные топологические свойства обусловлены евклидовыми вращениями. Другими словами, $SO(2, 2) \approx \mathbb{R}^4 \times S^1 \times S^1$, поэтому, в частности, $\pi_1(SO(2, 2)) \sim \pi_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Факторизуя $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ по четности, приходим к фактор-группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, содержащей четыре элемента, каждый из которых отвечает за свою компоненту гомоморфизма в (93). Можно сказать, что гиперболическая спинорная структура «чувствует» четность элементов фундаментальной группы.

Отметим, что гомоморфизмы (93) хорошо известны и были получены различными способами, однако, по всей видимости, спинорный подход позволяет выявить их факт наиболее прямым и простым способом.

9 h -голоморфные функции двойной переменной

Перейдем к определению класса голоморфных функций $\text{Hol}(H)$. Свойство обычной дифференцируемости функции двух переменных в некоторой точке, записанное в терминах пары независимых двойных переменных h и \bar{h} , имеет вид:

$$\Delta F = A\Delta h + B\Delta\bar{h} + o(\Delta h) + o(\Delta\bar{h}) \quad (94)$$

или в изотропном базисе:

$$\Delta F = (A_1\Delta h_1 + B_1\Delta h_2 + o(\Delta h_1) + o(\Delta h_2))e_1 + (A_2\Delta h_2 + B_2\Delta h_1 + o(\Delta h_1) + o(\Delta h_2))e_2.$$

Здесь мы определяем $o(h) \equiv o(h_1)e_1 + o(h_2)e_2$, где символ o -малое в последнем выражении справа имеет смысл, общепринятый в вещественном анализе.

Определим класс $\text{Hol}(H)$ h -голоморфных (в точке) функций условием $B = 0$ в (94). При этом мы приходим к следующему выражению для приращения функции голоморфной функции:

$$\begin{aligned} \Delta F &= A\Delta h + o(\Delta h) + o(\Delta\bar{h}) = \\ &= (A_1\Delta h_1 + o(\Delta h_1) + o(\Delta h_2))e_1 + (A_2\Delta h_2 + o(\Delta h_2) + o(\Delta h_1))e_2. \end{aligned} \quad (95)$$

С учетом доопределения операции деления с помощью (82), мы можем записать условие h -голоморфности в точке h_0 с помощью формальной частной производной:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{h}}(h_0) = 0, \quad (96)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial h} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + j \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial h_1} + \frac{\partial}{\partial h_2}; \quad \frac{\partial}{\partial \bar{h}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - j \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial h_2} + \frac{\partial}{\partial h_1}. \quad (97)$$

При этом частная производная в (96) понимается как предел:

$$\lim_{|\Delta \bar{h}|_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta \bar{h}}, \quad (98)$$

где $|h|_2 \equiv |h_1| + |h_2|$ — норма прямой суммы 1-мерных вещественных евклидовых норм. Функцию F , голоморфную в каждой точке некоторой открытой области $D \subseteq H$, будем называть голоморфной в области D и отмечать этот факт так: $F \in \text{Hol}(D)$. С учетом (97) производную (96) можно расписать в компонентах следующим образом:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \bar{h}} = \frac{\partial F_1}{\partial h_2} e_1 + \frac{\partial F_2}{\partial h_1} e_2, \quad (99)$$

откуда приходим к следующему общему виду h -голоморфной функции двойной переменной в изотропном базисе:

$$F = F_1(h_1)e_1 + F_2(h_2)e_2, \quad (100)$$

где F_i — дифференцируемые функции вещественной переменной.

Таким образом, мы приходим к заключению, что класс h -голоморфных функций устроен как декартов квадрат вещественно-дифференцируемых функций одной переменной:

$$\text{Hol}(H) \sim C^1(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}).$$

Это обстоятельство означает, что голоморфные функции двойной переменной устроены проще, чем голоморфные функции комплексной переменной. В частности, на двойной плоскости нет тождества голоморфности и аналитичности¹³. Тем не менее, далее мы увидим, что значительная часть свойств комплексных голоморфных функций формально воспроизводится и их h -голоморфными аналогами. Перейдем к установлению этих свойств.

9.1 Гиперболические условия Коши-Римана

Уравнение (99) по существу представляет гиперболические условия Коши-Римана в изотропном базисе. Переходя к стандартному базису $\{1, j\}$, с учетом (97) получаем для функции $F = U + jV$:

$$F_{,\bar{h}} = 0 \Rightarrow U_{,t} - V_{,x} + j(V_{,t} - U_{,x}) = 0 \Rightarrow U_{,t} = V_{,x}; \quad U_{,x} = V_{,t}. \quad (101)$$

— гиперболические условия Коши-Римана, выражающие свойство h -дифференцируемости в базисе $\{1, j\}$. Они отличаются знаком от стандартных условий Коши-Римана на \mathbb{C} .

9.2 h -гармонические функции

Применяя оператор $\partial_{\bar{h}}$ к уравнению $\partial_{\bar{h}} F = 0$ комплексной дифференцируемости, получаем дифференциальное следствие

$$\frac{\partial^2}{\partial h \partial \bar{h}} F = 0, \quad (102)$$

¹³Пример аналитической, но не голоморфной функции двойной переменной представляет собой любой сходящийся ряд вида $\sum_{m,n} c_{mn} h^m \bar{h}^n$. Нетрудно построить пример голоморфной и не аналитической функции, опираясь на классический пример e^{-1/x^2} из вещественного анализа. Соответствующая гиперболическая версия этой функции имеет вид:

$$\Theta(h) \cdot e^{-1/h^2} \equiv \theta(h_1) e^{-1/h_1^2} e_1 + \theta(h_2) e^{-1/h_2^2} e_2.$$

которому удовлетворяет всякая h -голоморфная функция. Из (97) следует, что оператор $\partial_h \partial_{\bar{h}}$ вещественный, и что он с точностью до числового множителя совпадает с 2-мерным волновым оператором (который можно было бы назвать «гиперболическим лапласианом»):

$$4 \frac{\partial^2}{\partial h \partial \bar{h}} \equiv \square_2. \quad (103)$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что компоненты h -голоморфной функции в любом базисе удовлетворяют волновому уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{h}} = 0 \Rightarrow \square_2 F_1 = \square_2 F_2 = 0. \quad (104)$$

Множество $\ker \square_2$ мы будем называть h -гармоническими функциями, а h -гармонические функции F_1 и F_2 , являющиеся компонентами некоторой h -голоморфной функции естественно называть сопряженными h -гармоническими функциями. Рассмотрим произвольную h -гармоническую функцию $U(t, x)$ в переменных t, x , в которых $\square_2 \equiv \partial_t^2 - \partial_x^2$. По известной теореме математической физики ее всегда можно представить как сумму произвольных дважды дифференцируемых функций опережающего и запаздывающего аргументов:

$$U = \Phi_+(t + x) + \Phi_-(t - x).$$

Условия (101) приводят к системе дифференциальных уравнений на h -гармонически сопряженную функцию V в базисе $\{1, j\}$:

$$V_{,t} = U_{,x} = \Phi'_+ - \Phi'_-; \quad V_{,x} = U_{,t} = \Phi'_+ + \Phi'_-. \quad (105)$$

Условия интегрируемости этой системы уравнений: $\square_2 U = 0$ выполняются тождественно, а сама система интегрируется непосредственно. Результат — функция V , h -гармонически сопряженная к U , — имеет вид:

$$V = \Phi_+ - \Phi_- + \text{const}, \quad (106)$$

откуда приходим к заключению, что в базисе¹⁴ $\{1, j\}$ всякая h -гармоническая функция определяет свою h -гармонически сопряженную с точностью до константы.

9.3 Конформное свойство

Всякую h -голоморфную функцию можно рассматривать как отображение (деформацию) $H \rightarrow H$. Ввиду соотношений: $dF = F' dh$, $d\bar{F} = \bar{F}' d\bar{h}$, в изотропном базисе мы имеем:

$$\Xi = dh \otimes d\bar{h} \xrightarrow{F} \tilde{\Xi} = \|F'\|^2 \Xi. \quad (107)$$

— конформный закон преобразования метрики. Из него непосредственно следует сохранение гиперболических углов между любой парой направлений в точке h , в которой $\|F'\|^2 \neq 0$, а также сохранение изотропных направлений, вдоль которых $\|dh\|^2 = 0$. Следствием последнего обстоятельства является сохранение конформной структуры H :

$$F(\text{Con}(h)) = \text{Con}(F(h)) \quad (108)$$

для всех $h \in H$ и $F \in \text{Hol}(H)$. Свойство (108) мы уже неоднократно наблюдали на рассмотренных ранее конкретных примерах.

¹⁴Этот результат будет также справедлив и для любого другого неизотропного базиса. В самом же изотропном базисе есть два уточнения: во-первых, не всякая h -гармоническая функция может быть компонентой некоторой h -голоморфной функции, во-вторых, в случае, когда может, она не определяет однозначно вторую компоненту.

10 Теорема и формула Коши

Остановимся на гиперболической версии интегральных теоремы и формулы Коши. Прежде всего, определим интеграл от непрерывной функции двойной переменной по кусочно-гладкой регулярной кривой $\Gamma \subset H$. Очевидно, что значение этого интеграла (двойное число!) не зависит от выбора алгебраического базиса, поэтому дадим определение интеграла в изотропном базисе, в котором оно будет математически наиболее простым:

$$\int_{\Gamma} F dh \equiv \left(\int_{\pi_1(\Gamma)} F_1 d\xi_1 \right) e_1 + \left(\int_{\pi_2(\Gamma)} F_2 d\xi_1 \right) e_2, \quad (109)$$

где π_i ($i = 1, 2$) — проекции на оси изотропной системы координат.

Предположим теперь, что функция F h -голоморфна и интегрирование в (109) производится по замкнутому контуру. В этом случае проекции $\pi_i(\Gamma)$ также будут замкнутыми контурами на \mathbb{R} и в силу известных свойств аддитивности и антисимметричности обычного вещественного интеграла, мы будем иметь:

$$\oint_{\pi_1(\Gamma)} F_1(\xi_1) d\xi_1 = 0; \quad \oint_{\pi_2(\Gamma)} F_2(\xi_2) d\xi_1 = 0 \quad (110)$$

для дифференцируемых (и даже просто непрерывных) функций $F_1(\xi_1)$ и $F_2(\xi_2)$. Таким образом, из (109)-(110) для h -голоморфных функций имеет место гиперболическая интегральная теорема Коши:

$$\oint_{\Gamma} F dh = 0 \quad \text{для всякой } F \in \text{Hol}(H). \quad (111)$$

С помощью языка комплексных дифференциальных форм формула (111) доказывается еще быстрее:

$$\oint_{\Gamma} F(h) dh = \int_{\text{Int}(\partial^{-1}\Gamma)} F_{\bar{h}} d\bar{h} \wedge dh = 0$$

с учетом (96).

На самом деле, область применимости формулы (111) существенно выходит за рамки h -дифференцируемых функций. Пусть у функции F есть особая точка (a_1, a_2) , характеризующаяся пересечением пары особых линий¹⁵. Перейдем от исходного интеграла (который теперь в обычном смысле может не существовать) к регуляризованному:

$$\oint_{\Gamma} F dh \rightarrow \oint_{\Gamma_{\varepsilon}} F dh = \left(\int_{\pi_1(\Gamma) \setminus a_{1\varepsilon}} F_1 d\xi_1 \right) e_1 + \left(\int_{\pi_2(\Gamma) \setminus a_{2\varepsilon}} F_2 d\xi_1 \right) e_2, \quad (112)$$

¹⁵В изотропном базисе все особенности функции F двойной переменной сводятся к особенностям ее вещественных компонент F_1 и F_2 . Пусть a_1 — изолированная особая точка F_1 и a_2 — изолированная особая точка F_2 (точки разрыва первого или второго рода). Тогда подмножество H вида $(a_1, x)_{x \in \mathbb{R}}$ и $(t, a_2)_{t \in \mathbb{R}}$ — особые линии F (прямые), а их точка пересечения — особая точка F . Если F_1 и F_2 имеют множество особых точек, числом N_1 и N_2 соответственно, то функция F будет иметь множество особых прямых числом $N_1 + N_2$ и множество особых точек числом $N_1 N_2$. Далее в тексте мы ограничиваемся случаем одной особой точки и парой особых линий. Более общий случай рассматривается аналогично.

где $a_{i\varepsilon}$ — стандартная ε -окрестность a_i . Интеграл (112) хорошо определен и равен нулю, независимо от ε , поскольку любой участок вещественной оси проходимся проекцией замкнутого контура равное число раз в прямом и обратном направлении. Отсюда следует, что

$$\oint_{\Gamma} F dh = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\varepsilon} F dh = 0 \tag{113}$$

и при наличии особых точек у функции F .

Из (113), в частности, следует, что

$$\oint_{\Gamma} (h - h_0)^{2n+1} dh = 0, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \oint_{\Gamma} (\text{abs}(h - h_0))^\alpha dh = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{114}$$

где $\text{abs}(h) \equiv |h_1|e_1 + |h_2|e_2$. Также для h -голоморфной функции F без особых точек имеем тождество:

$$\oint_{\Gamma} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = 0, \tag{115}$$

выражающее гиперболическую версию интегральной теоремы Коши.

Следует отметить, что формулы (113)-(115) получены с помощью определенной (возможно, в каком-то смысле наиболее естественной) процедуры регуляризации, которую далее мы будем называть *изотропной регуляризацией*. Рассмотрим другую процедуру регуляризации, связанную с вычислениями интегралов в гиперболической полярной системе координат (полярная регуляризация). Предположим, что точка h_0 лежит внутри контура Γ в (115). В силу интегральной теоремы Коши (111) интеграл слева в (115) не зависит от выбора контура интегрирования в классе гомотопных контуров. Деформируем $\Gamma \rightarrow S_r$, где $S_r(h_0)$ — (евклидова) окружность радиуса r с центром в точке h_0 , при этом интеграл (115) не зависит от радиуса этой окружности (см. рис. 22).

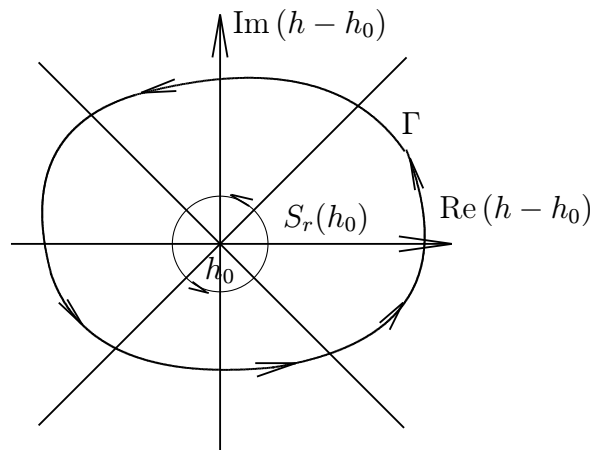


Рис. 22: К выводу интегральной теоремы Коши на плоскости двойной переменной.

В результате будем иметь:

$$\oint_{\Gamma} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = \oint_{S_r(h_0)} \frac{F(h)}{h - h_0} dh. \tag{116}$$

Сделаем теперь замену переменной: $hh_0 + J\rho(r, \psi)e^{j\psi}$, где функция $\rho(r, \psi)e^{j\psi} = rf(\psi)e^{j\psi}$ является полярно-параметрическим заданием евклидовой окружности $S_r(0)$ в терминах

гиперболической полярной системы координат¹⁶. При этом нам потребуется лишь только однозначность функции f . Переходя к интегрированию по ψ , получаем: $h - h_0 = Jr f(\psi)e^{j\psi}$, $dh = Jr(df + jf d\psi)e^{j\psi}$, а сам интеграл Коши принимает вид:

$$\oint_{S_r(h_0)} F(h)(d \ln f + j d\psi).$$

Используя независимость интеграла от r и переходя в нем к пределу при $r \rightarrow 0$, получаем:

$$\oint_{S_r(h_0)} F(h)(d \ln f + j d\psi) = \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{S_r(h_0)} F(h)(d \ln f + j d\psi) = F(h_0) \int_{\Psi} (d \ln f + j d\psi).$$

Интеграл от первого слагаемого равен нулю в силу однозначности функции $\ln f$. Таким образом, приходим к следующей формуле гиперболической версии интегральной формулы Коши:

$$\oint_{\Gamma} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = jF(h_0) \int_{\Psi} d\psi.$$

В обычном смысле интеграл, полученный справа, расходится. Однако ему можно придать смысл, вводя формальную величину π_H размера гиперболического пространства направлений по формуле:

$$\pi_H \equiv \int_{\mathbb{R}} d\psi. \quad (117)$$

С учетом ориентации кусков R в Ψ (см. рис. 5), получаем:

$$\int_{\Psi} d\psi = \pi_H - \pi_H + \pi_H - \pi_H = 0, \quad (118)$$

что воспроизводит результат (интегральную теорему Коши), полученный выше в изотропной регуляризации.

Формула (118) теперь однако подсказывает, как нужно модифицировать контур, чтобы получить более содержательный аналог стандартной формулы Коши. Рассмотрим замкнутый контур Γ_r вида, представленного на рисунке 23.

Этот контур состоит из двух дуг произвольных кусочно-гладких простых кривых, лежащих в областях $|t - t_0| \geq |x - x_0|$ и опирающихся своими концами на компоненты конуса $\text{Con}(h_0)$, отрезков этого конуса, и пары двух дуг евклидовой окружности радиуса r с центром в h_0 , опирающихся на компоненты конуса $\text{Con}(h_0)$. Интеграл типа Коши по контуру Γ_r равен нулю в том же обобщенном смысле, что и (118), ввиду того, что контур Γ_r является гомотопией исходного контура Γ в области голоморфности функции $F(h)/(h - h_0)$. Теперь имеем

$$0 = \oint_{\Gamma_r} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = \oint_{S_r(h_0)} \frac{F(h)}{h - h_0} dh + \oint_{\Gamma'_r} \frac{F(h)}{h - h_0} dh, \quad (119)$$

где $\Gamma'_r \equiv \Gamma_r \setminus S_r(h_0)$. Вводя на $S_r(h_0)$ гиперболическую полярную систему координат, повторяя предыдущие рассуждения и используя свойства функции $f(\psi)$ (ее четность по ψ), задающей полярное уравнение евклидовой окружности, получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{S_r(h_0)} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = -2j\pi_H F(h_0), \quad (120)$$

¹⁶Явный вид функции f таков: $f = 1/\sqrt{\cosh^2 \psi + \sinh^2 \psi}$.

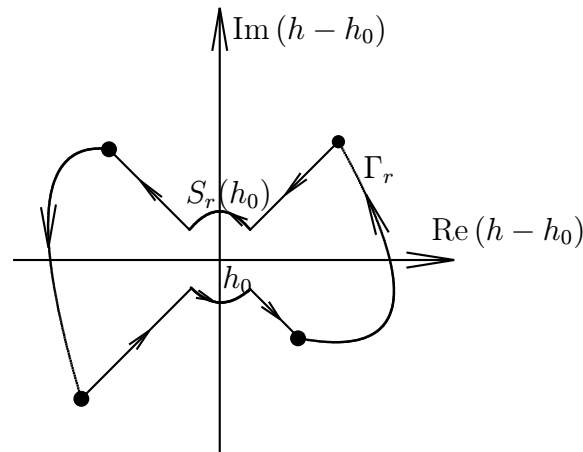


Рис. 23: К выводу интегральной теоремы Коши на плоскости двойной переменной: контур Γ_r .

откуда из (119) получаем более прямой гиперболический аналог формулы Коши:

$$F(h_0) = \frac{1}{2\pi_H j} \oint_{\Gamma_0} \frac{F(h)}{h - h_0} dh, \tag{121}$$

где контур $\Gamma_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \Gamma'_r$. По своему виду полученная формула формально вполне эквивалентна стандартной формуле (41) с заменой размера пространства евклидовых направлений 2π на размер пространства гиперболических направлений $2\pi_H$ в паре клиньев с одинаковым знаком $h\bar{h}$. Величину π_H можно считать «фундаментальной константой» геометрии двойных чисел. При вычислениях с этой константой надо аккуратно учитывать ее свойства и использовать надлежащую процедуру регуляризации выражений.

Пример. В качестве примера проиллюстрируем работу формулы Коши путем явного вычисления интеграла по контуру Γ_1 .

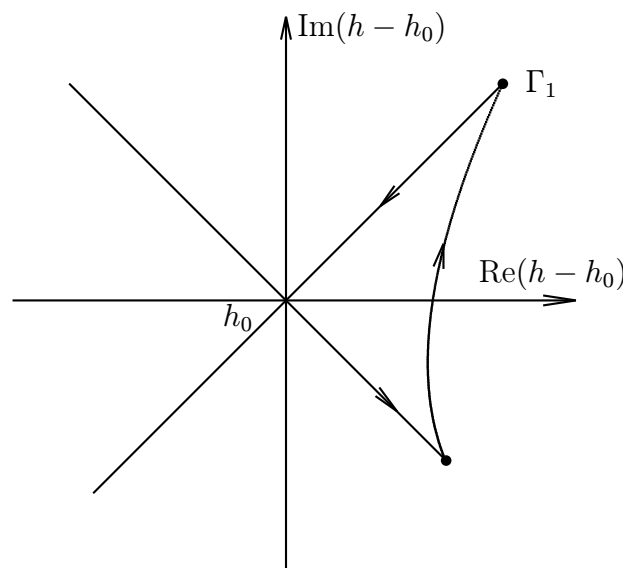


Рис. 24: К выводу интегральной теоремы Коши на плоскости двойной переменной: контур Γ_1 .

Имеем

$$\frac{1}{\pi_H j} \oint_{\Gamma_1} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = \frac{1}{\pi_H j} \oint_{\Gamma_1} \frac{F(h) - F(h_0)}{h - h_0} dh + \frac{F(h_0)}{\pi_H j} \oint_{\Gamma_1} \frac{dh}{h - h_0}. \tag{122}$$

Подынтегральное выражение в первом интеграле — голоморфная функция в области, ограниченной контуром Γ_1 и на нем самом, поэтому этот интеграл обращается в нуль. На верхней компоненте конуса $\text{Con}(p_0)$ выберем в качестве переменной интегрирования переменную $t \in [t_0 + \tau_1, t_0]$, а на нижней — переменную $t \in [t_0, t_0 + \tau_2]$, где τ_1, τ_2 — абсциссы конечных точек криволинейной части контура Γ_1 (соответственно верхнего и нижнего концов) в системе координат с началом в точке h_0 . Таким образом, интегралы по компонентам конуса дают следующий вклад:

$$\frac{F(h_0)}{\pi_H j} \left[\int_{t_0 + \tau_1}^{t_0} \frac{(1+j) dt}{(1+j)(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t_0 + \tau_2} \frac{(1-j) dt}{(1-j)(t-t_0)} \right]$$

$$\frac{F(h_0)}{\pi_H j} (\ln 0 - \ln \tau_1 + \ln \tau_2 - \ln 0) = \frac{F(h_0)}{\pi_H j} \ln(\tau_2/\tau_1) = 0.$$

В предпоследнем равенстве было учтено сокращение двух одинаковых логарифмически сингулярных членов, а в последнем учтено «свойство бесконечности» фундаментальной константы π_H . Таким образом, вклад в интеграл Коши дает только участок Γ' контура между компонентами конуса $\text{Con}(h_0)$. Переходя к полярной системе координат с центром в точке h_0 получаем:

$$\frac{F(h_0)}{\pi_H j} \int_{\Gamma'} \frac{dh}{h-h_0} = \frac{F(h_0)}{\pi_H j} \int_R (d \ln \varrho + d\psi).$$

Интеграл от первого слагаемого дает нуль в силу того, что на концах контура $\Gamma' \varrho = 0$. Интегрируя второе слагаемое с учетом (117), приходим к результату $F(h_0)$, что и утверждает гиперболическая формула Коши.

11 Теория гиперболического потенциала на H

В этом разделе мы опишем теорию гиперболического потенциала (h -поля), которая строится аналогично теории комплексного потенциала и опирается на перечисленные выше аналитические и геометрические свойства h -голоморфных функций. Картины полей, которые получаются в этом случае, имеют пространственно-временную природу. Надлежащая физическая интерпретация этой картины приводит к необходимости расширения специальной теории относительности: в разделе 13 мы опишем его подробно (мы будем называть его *конформной теорией относительности*). А пока займемся изучением формальных свойств гиперболических полей простых источников. Как и в комплексном случае будем ассоциировать вещественную часть U этой функции с потенциалом поля (h -потенциальная функция), а мнимую часть V с функцией тока этого поля¹⁷. Другими словами, как и в комплексном случае, линии $U = \text{const}$ являются эквипотенциальными линиями h -поля, а линии $V = \text{const}$ совпадают с линиями тока этого поля. Эти семейства линий взаимно-ортогональны¹⁸:

$$\nabla U \star \nabla V = U_{,t} V_{,t} - U_{,x} V_{,x} = U_{,t} U_{,x} - U_{,x} U_{,t} = 0 \quad (123)$$

(здесь \star — скалярное произведение в 2-мерной метрике Минковского Ξ) и каждая из функций U и V удовлетворяет волновому уравнению (104) в силу гиперболических условий Коши-Римана.

¹⁷Теперь будет полезным держать в голове гидродинамическую интерпретацию комплексного потенциала [11].

¹⁸Теперь можно сформулировать геометрический критерий h -сопряженности пары h -гармонических функций: такие функции имеют равные по (гиперболическому!) модулю и псевдоортогональные градиенты.

Определим напряженность \mathbf{u} h -поля по формуле:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_t + j\mathbf{u}_x = -\frac{\overline{dF}}{dh} = -\frac{d\bar{F}}{d\bar{h}} = -U_{,t} + jU_{,x}, \quad (124)$$

которую можно рассматривать как гиперболическую форму представления для векторного поля градиента функции U относительно псевдоевклидовой метрики. Формула (124) получается с учетом соотношений (97) и условий Коши-Римана (101).

В силу соотношения $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\bar{h})$ (антиголоморфность напряженности), вытекающего из определения (124), с учетом (97) приходим к следующему тождеству:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{h}} = \frac{1}{2}[\mathbf{u}_{t,t} + \mathbf{u}_{x,x} + j(\mathbf{u}_{t,x} + \mathbf{u}_{x,t})] = 0, \quad (125)$$

которое эквивалентно двум тождествам:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_{t,t} + \mathbf{u}_{x,x} = 0; \quad \operatorname{roth} \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_{t,x} + \mathbf{u}_{x,t} = 0, \quad (126)$$

выражающим соответственно h -соленоидальность и h -потенциальность гиперболического поля¹⁹. Отметим, что условие h -потенциальности вытекает из коммутативности вторых частных производных гладкой скалярной функции, а условие соленоидальности эквивалентно волновому уравнению $\square U = 0$, которое выполняется автоматически, если потенциал U является вещественной частью некоторой h -голоморфной функции.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\Omega[\mathbf{u}, \gamma] = \int_{\gamma} \mathbf{u} d\bar{h} = \int_{\gamma} \mathbf{u}_t dt - \mathbf{u}_x dx + j \int_{\gamma} \mathbf{u}_x dt - \mathbf{u}_t dx = \Upsilon[\mathbf{u}, \gamma] - j\Phi[\mathbf{u}, \gamma] \quad (127)$$

по некоторому пути γ . Его вещественную часть $\Upsilon[\mathbf{u}, \gamma]$ назовем *циркуляцией поля \mathbf{u} вдоль пути γ* , а величину $\Phi[\mathbf{u}, \gamma]$, противоположную мнимой части, назовем *поток поля \mathbf{u} через кривую γ* . С учетом определения (124) и гиперболических условий Коши-Римана для этих величин получаются следующие выражения через приращения компонент комплексного потенциала:

$$\Upsilon[\mathbf{u}, \gamma] = -\delta_{\gamma} U; \quad \Xi[\mathbf{u}, \gamma] = -\delta_{\gamma} V, \quad (128)$$

которые можно рассматривать как иллюстрирующие физический смысл компонент комплексного h -потенциала $F(h)$.

11.1 Поле гиперболического точечного источника

Рассмотрим h -потенциал вида

$$F(h) = -q \ln h, \quad (129)$$

который является очевидным гиперболическим вариантом кулоновского потенциала (49). Напряженность поля, которая ему соответствует, вычисляется по формуле (124) и имеет вид:

$$\mathbf{u} = \frac{q}{\bar{h}} = \frac{qh}{|h|^2} = q \left(\frac{t}{t^2 - x^2} + j \frac{x}{t^2 - x^2} \right). \quad (130)$$

Любопытным новым обстоятельством является разница в областях определения формулы (129) и (130): первая задает h -потенциал лишь в первом клине, в то время как вторая

¹⁹Отметим, что гиперболическое условие потенциальности по существу совпадает с евклидовым (равенство нулю внешнего дифференциала 1-формы $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_t, -\mathbf{u}_x)$ — в такой форме оно вообще никак не связано с метрикой), в то время как условие соленоидальности отличается от евклидового знаком одного из слагаемых (это связано с сигнатурой 2-мерной метрики Минковского).

корректно определена во всех 4-х клиньях двойной плоскости. Алгебраическое объяснение этого обстоятельства заключается в том, что логарифм от двойного числа, взятого из 2,3 или 4 клиньев можно формально представить в виде $\ln h + \ln J$, где h — некоторое двойное число из первого клина, J — один из знаковых множителей, определенных в (63). При этом $\ln J$ — это некоторая алгебраическая константа²⁰, которая при дифференцировании «стирается» из конечного выражения (130). Силовые линии гиперболического точечного источника — это радиальные прямые с $\psi = \text{const}$, а эквипотенциальные линии — гиперболы $\varrho = \text{const}$. Картина силовых линий во всех 4-х клиньях представлена на рисунке 25.

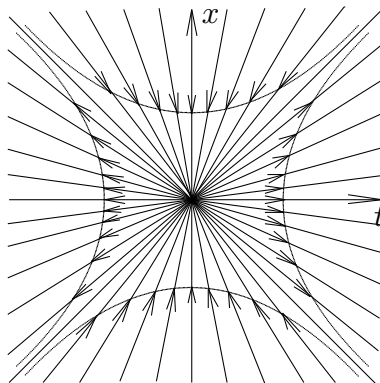


Рис. 25: Схематическая картина силовых линий гиперболического точечного источника. Поле постоянно по абсолютной величине на гиперболических окружностях (евклидовых гиперболах). На конусе $\text{Con}(0)$ поле имеет особенность, а в соседних клиньях меняет свой характер (источник или сток).

По формулам (128) получаем для гиперболических циркуляции и потока выражения:

$$\Upsilon[\mathbf{u}, \mathcal{C}] = 0; \quad \Phi[\mathbf{u}, \mathcal{C}] = \pi_H q \quad (131)$$

для контура, представленного на рис. 24 или гомотопных ему. Формулы (131) выражают гиперболическую потенциальность и гиперболическую теорему Гаусса для поля \mathbf{u} .

11.2 h -дуальная интерпретация

Дуальная интерпретация точечного гиперболического источника получается переходом от потенциала $F(h)$ в (129) к потенциалу $jF(h)$. При этом для нового дуального поля \mathbf{b} получается выражение:

$$\mathbf{b} = j \frac{d\bar{F}}{dh} = -\frac{qj}{h} = -q \frac{x + jt}{t^2 - x^2}. \quad (132)$$

Поле \mathbf{b} является гиперболическим аналогом точечного вихря. Его силовые линии — гиперболы — показаны на рисунке 26.

Как и в комплексном случае векторное поле \mathbf{b} оказывается ортогональным полю \mathbf{u} по отношению к псевдоевклидовой метрике.

По формулам (128) получаем для гиперболических циркуляции и потока поля \mathbf{B} выражения:

$$\Phi[\mathbf{b}, \mathcal{C}] = 0; \quad \Upsilon[\mathbf{b}, \mathcal{C}] = \pi_H q. \quad (133)$$

для контура, представленного на рис. 24 или гомотопных ему. Формулы (133) выражают гиперболическую соленоидальность и гиперболический аналог закона полного тока для поля \mathbf{b} .

²⁰Отметим, что она не лежит в алгебре H .

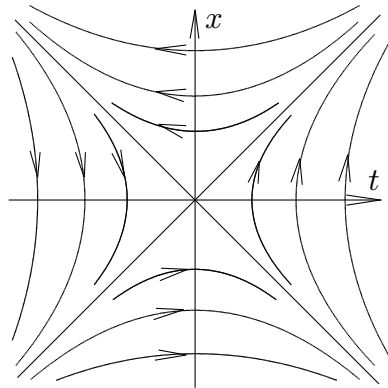


Рис. 26: Силовые линии точечного вихря. Ориентация линий — общая для всех 4-х клиньев (против часовой стрелки).

11.3 h -вихреисточник

По аналогии с комплексным случаем можно объединить две предыдущие ситуации в одну, вводя в рассмотрение концепцию *гиперболического вихреисточника* с комплексным зарядом $\mathcal{Q} = q - jm$. Потенциал принимает вид:

$$F(z) = -\mathcal{Q} \ln h = -q \ln \varrho + m\psi - j(-m \ln \varrho + q\psi). \quad (134)$$

Такой потенциал наиболее естественно интерпретировать в рамках дуально-симметричной гиперболической теории поля, в которой гиперболические электрические и магнитные заряды и токи присутствуют на «равных правах». Уравнение для силовых линий такого поля получается из (134) приравниванием мнимой части константе:

$$m \ln \varrho + q\psi = C \Leftrightarrow (t^2 - x^2)e^{-(2q/m)\text{Arcth}(x/t)} = C, \quad (135)$$

или после некоторых простых преобразований:

$$(t + x)^{1-\alpha}(t - x)^{1+\alpha} = \text{const}, \quad (136)$$

где $\alpha = q/m$. Картина силовых линий для $\alpha = -2$ показана на рис. 27

По формулам (128) получаем для гиперболических циркуляции и потока дуально-симметричного поля \mathbf{u} выражения:

$$\Upsilon[\mathbf{u}, \mathcal{C}] = -\pi_H m; \quad \Phi[\mathbf{u}, \mathcal{C}] = \pi_H q \quad (137)$$

для контура, представленного на рис. 24 или гомотопных ему. Формулы (137) выражают гиперболическую теорему Гаусса и гиперболический аналог закона полного тока для дуально-симметричного поля \mathbf{u} .

11.4 Гиперболический цилиндр в постоянном поле

Рассмотрим гиперболический аналог проводящего цилиндра в постоянном поле \mathbf{u}_0 . Эта задача описывается потенциалом

$$F(h) = -2u_0 R Z(h/R) = -u_0(h + R^2/h), \quad (138)$$

где R — постоянный гиперболический радиус цилиндра. Напряженность поля в окрестности такого цилиндра будет даваться формулой:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 - \frac{u_0 R^2}{h^2} = \mathbf{u}_0 - u_0 R^2 \left(\frac{t^2 + x^2}{(t^2 - x^2)^2} - j \frac{2tx}{(t^2 - x^2)^2} \right). \quad (139)$$

Линии напряженности поля \mathbf{u} , которые можно получить из силовой функции в (138), представлены на рисунке 28.

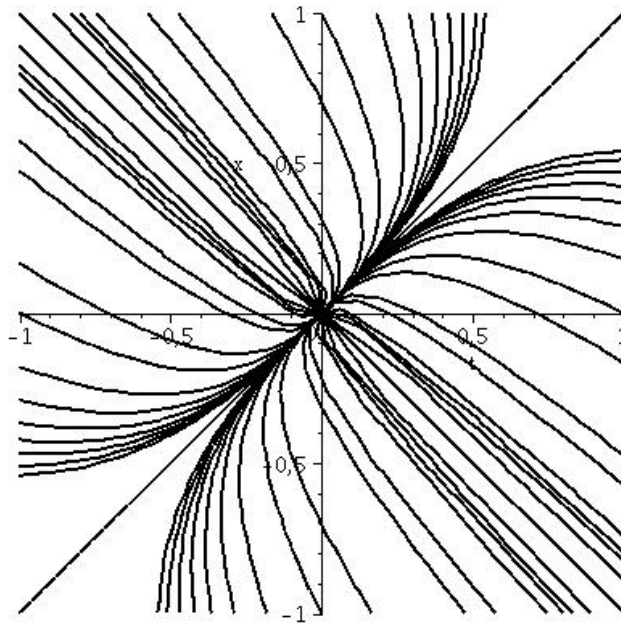


Рис. 27: Силовые линии точечного вихреисточника (семейство спиралей Архимеда) для $q/m = -2$. Линии исходят из центра во втором и четвертом координатных клиньях, и сходятся к центру в первом и третьем клиньях.

11.5 h -мультиполя

По аналогии с комплексным случаем определим с помощью индуктивной формулы

$$F_n(h) = \frac{Q^{(n)}}{Q^{(n-1)}} \frac{dF_{n-1}}{dh} = (-1)^{n+1} \frac{Q^{(n)}}{h^n} - (-\epsilon)^n \epsilon_Q \frac{|Q^{(n)}| e^{-j(n\psi - \delta_n)}}{\varrho^n}, \quad (140)$$

потенциал точечного гиперболического $2(n-1)$ -мультиполя с мощностью $Q^{(n)}$. Здесь $|Q^{(n)}| = \sqrt{|(Q_e^{(n)})^2 - (Q_m^{(n)})^2|}$, $\delta_n = \text{Arth} Q_m^{(n)} / Q_e^{(n)}$, ϵ и ϵ_Q — знаковые множители для h и комплексного заряда Q соответственно. Уравнение для силовых линий имеет в полярных координатах вид.

$$\varrho = C \sqrt[n]{\sinh(n\psi - \delta_n)} \quad (141)$$

Вид силовых линий для $n = 2, 3$ показан на рисунке 29.

12 2-мерная СТО

В настоящем разделе мы покажем, что алгебра двойных чисел является естественной и самодостаточной для изложения фактов 2-мерной СТО. Несмотря на некоторую (кажущуюся!) искусственность такого рассмотрения, оно во многих отношениях полезно и поучительно. В частности, оно оттеняет алгебраический аспект псевдоевклидовой геометрии и геометрические аспекты алгебры двойных чисел и представляет собой естественную основу для дальнейших обобщений.

12.1 2-мерное пространство-время и векторные операции в нем

Будем отождествлять элементы H с точками-событиями 2-мерного пространства-времени Минковского $\mathcal{M}_{1,1}$. Таким образом, с каждым элементом $h \in H$ мы ассоциируем 2-мерный радиус-вектор $h = t + jx$. Элементы H как элементы алгебры образуют 2-мерное вещественное линейное пространство. Рассмотрим пару элементов $h_1 = t_1 + jx_1$ и $h_2 = t_2 + jx_2$

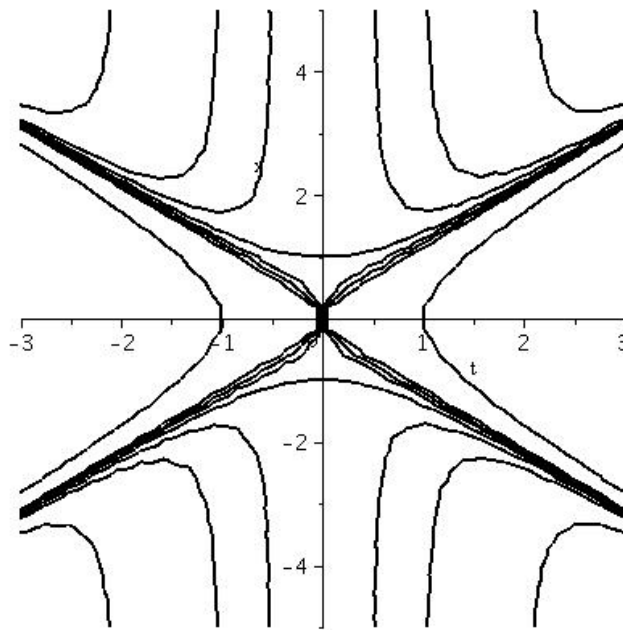


Рис. 28: Силовые линии в окрестности гиперболического цилиндра (две крайних гиперболы слева и справа) радиуса $R = 1$, помещенного в однородное силовое поле $u_0 = 1$.

и комплексно-значную полуторалинейную форму на них:

$$h_1 \cdot \bar{h}_2 = t_1 t_2 - x_1 x_2 + j(t_2 x_1 - t_1 x_2). \quad (142)$$

Очевидно, что такая форма, с одной стороны, полностью определяется средствами алгебры H , с другой — определяет вещественные симметричное $h_1 \star h_2$ и антисимметричное (косое) $h_1 \times h_2$ скалярные произведения по формулам:

$$h_1 \star h_2 \equiv \text{Re}(h_1 \bar{h}_2); \quad h_1 \times h_2 \equiv -\text{Im}(h_1 \bar{h}_2). \quad (143)$$

Симметричное произведение²¹, как это уже отмечалось выше, является 2-мерным вариантом псевдоевклидовой метрики Минковского, а антисимметричное — 2-мерным вариантом векторного произведения, которое теперь является (псевдо)скаляром и отвечает за геометрию ориентированных объемов (т. е. площадей) пространства $\mathcal{M}_{1,1}$.

12.2 Алгебра изометрий

Группы изометрий Iso^* и Iso^\times билинейных форм (143) хорошо известны²²: первая представляет собой 2-мерную группу Лоренца $\text{Lo}(1,1)$ вторая — группу унимодулярных преобразований $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. Рассмотрим произвольный (невыврожденный) внутренний автоморфизм алгебры H , порождаемый умножениями $h \mapsto h' = \alpha \cdot h$, где $\alpha = \alpha_1 + j\alpha_2 \in H$ и запишем его в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}. \quad (144)$$

Далее непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости формул:

$$(\alpha h_1) \star (\alpha h_2) = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) h_1 \star h_2; \quad (\alpha h_1) \times (\alpha h_2) = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) h_1 \times h_2.$$

²¹Мы оставляем обычную точку \cdot за операцией умножения в алгебре H .

²²Мы игнорируем трансляции. Их включение приводит к группам Пуанкаре $\text{P}(1,1)$ и аффинно-унимодулярной группе $\text{SAff}(2, \mathbb{R})$

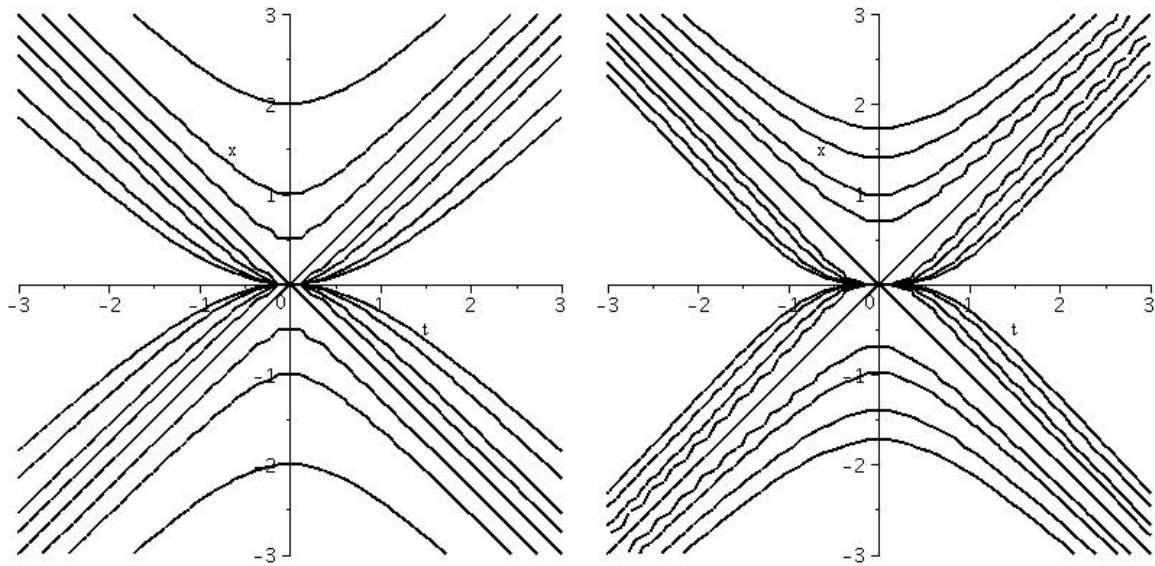


Рис. 29: Силовые линии гиперболического h -поля в окрестности точечного гиперболического диполя и квадруполь с единичной мощностью, ориентированного вдоль вещественной оси.

Отсюда с учетом (144) следует важное равенство:

$$\text{Iso}^* = \text{Iso}^\times \cap \text{Aut}^{\text{int}}(H),$$

где $\text{Aut}^{\text{int}}(H)$ — группа внутренних автоморфизмов алгебры H , порожденная умножениями на невырожденные элементы. Отметим, что наличие метрики, ассоциированной с косым произведением, позволяет интерпретировать элементы H как вещественные спиноры.

Матрица преобразования в (144), описывающая внутренние автоморфизмы умножений алгебры H , обладает свойством симметрии при ее транспонировании как относительно главной, так и относительно побочной диагонали. Назовем такую матрицу *абсолютно симметричной*. Из тривиального равенства $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_3 \in H$, выражающего алгебраическую замкнутость H , следует, что *абсолютно симметричные матрицы образуют группу относительно матричного умножения*. Эта группа представляет собой прямое произведение $\mathbb{R} \setminus 0 \times \text{Lor}(1, 1)$ и, помимо преобразований Лоренца, включает в себя однородные дилатации: $h \mapsto \lambda h$, $\lambda \in \mathbb{R}$. В дальнейшем для краткости мы будем обозначать эту группу $\text{Sp}(1, 1)$ и называть ее *однородной конформной группой на H* . Очевидно, что инвариантными геометрическими объектами для этой группы будут конуса $\text{Con}(h)$, $h \in H$.

Рассмотрим теперь дискретные преобразования $H: h = t + jx \mapsto \sigma_i h$ следующих независимых типов:

$$\sigma_t h \equiv -t + jx; \quad \sigma_x h \equiv t - jx; \quad \sigma_I \equiv x + jt. \quad (145)$$

Очевидно, что на алгебраическом языке эти операции записываются следующим образом:

$$\sigma_x h = \bar{h}; \quad \sigma_t h = -\bar{h}; \quad \sigma_I = j \cdot h,$$

откуда видно, что лишь операция σ_I допускает представление (144).

12.3 Коалгебра H^*

Рассмотрим алгебру H^* , двойственную к H , элементами которой служат линейные функционалы (1-формы, ковекторы) над H . Введем обозначение $\omega(h)$ для значения 1-формы

$\omega \in H^*$ на элементе $h \in H$ (это вещественное число). Выбирая базис $\{1_*, j_*\}$ в алгебре H^* дуальным к базису $\{1, j\}$ в H , будем иметь систему соотношений²³:

$$1_*(1) = 1; \quad 1_*(j) = 0; \quad j_*(1) = 0; \quad j_*(j) = 1. \quad (146)$$

Тогда значение произвольной 1-формы $\omega = T1_* + Xj_*$ на элементе $h = t + jx$ будет равно:

$$\omega(h) = Tt + Xx. \quad (147)$$

Имея в распоряжении две невырожденные метрики, ассоциированные с операциями \star и \times , можно ввести два отображения сопряжения $H \rightarrow H^*$ по формулам:

$$h \mapsto h^* \in H^* : h^*(q) \equiv h \star q; \quad \text{и} \quad h \mapsto h^\times \in H^* : h^\times(q) \equiv h \times q. \quad (148)$$

Будем называть первое сопряжение *векторным*, а второе — *спинорным*. В компонентах с учетом (146) и (148) для произвольного $h = t + jx$ будем иметь:

$$\text{Re}(h^*) = t; \quad \text{Im}(h^*) = -x; \quad \text{Re}(h^\times) = -x; \quad \text{Im}(h^\times) = t. \quad (149)$$

Формулы (149) соответствуют известным правилам «жонглирования индексами» с помощью псевдоевклидовой и спинорной метрик в индексном представлении и устанавливают известные изоморфизмы линейных метризованных пространств с невырожденными метриками.

Коалгебра H^* так же как и H индуцирует пару операций скалярного произведения: \star и \times соответственно²⁴ по правилам:

$$\omega_1 \star \omega_2 \equiv \text{Re}(\omega_1 \bar{\omega}_2); \quad \omega_1 \times \omega_2 \equiv -\text{Im}(\omega_1 \bar{\omega}_2), \quad (150)$$

которые мы будем называть *коскалярным* и *кокосым* или *коспинорным*.

Алгебры H или H^* взаимно сопряжены, т.е. $(H^*)^* = H$. Это означает, что элементы H можно интерпретировать как 1-формы по отношению к элементам H^* . Элементарно проверяются следующие тождества:

$$h_1^* \star h_2^* = h_1 \star h_2; \quad h_1^\times \times h_2^\times = h_1 \times h_2; \quad h_1^\times \star h_2^\times = -h_1 \star h_2; \quad h_1^* \times h_2^* = -h_1 \times h_2;$$

$$h_1^* \star h_2^\times = -h_1 \times h_2; \quad h_1^\times \times h_2^* = h_1 \star h_2; \quad h_1^\times \times h_2^\times = -h_1 \star h_2; \quad h_1^\times \star h_2^* = h_1 \times h_2.$$

Символически эти правила записываются короче, если определить *таблицы сопряжений* с помощью пары элементов $\{(\star), (\times)\}$ над парой операций $\{\star, \times\}$:

$$\star : \begin{array}{c|c|c} 2 \setminus 1 & (\star) & (\times) \\ \hline \star & \star & \times \\ \times & -\times & -\star \end{array} \quad \times : \begin{array}{c|c|c} 2 \setminus 1 & (\star) & (\times) \\ \hline \star & -\times & -\star \\ \times & \star & \times \end{array} \quad (151)$$

²³Теперь, строго говоря, следует различать единицу алгебры $1_H \in H$ и вещественную единицу $1 \in \mathbb{R}$. В скобках левых частей соотношений (146) стоят именно единицы алгебры H_2 , а в правых частях стоят вещественные единицы из \mathbb{R} . В случаях, когда это не приводит к путанице, мы сохраняем обозначение 1 за обеими единицами.

²⁴Их следовало бы обозначить \star^* и \times^* , поскольку они определяются между элементами H^* , имеющими природу, отличную от H . Из контекста в дальнейшем всегда будет ясно, на каких элементах действуют эти операции и мы для избежания усложнения обозначений используем одни и те же символы.

12.3.1 Системы отсчета на M_2

С позиций стандартной СТО элементы введенной коалгебры H^* представляют различные системы отсчета. Более точно, определим класс \mathcal{IR} инерциальных систем отсчета на $M_{1,1}$ как совокупность элементов подкоалгебры SH^* по умножению на единичной гиперболической окружности $|\omega\bar{\omega}| = 1$ на H^* . Эта окружность на H^* имеет 4 несвязные компоненты: на двух из них $\omega\bar{\omega} = +1$, а на двух других $\omega\bar{\omega} = -1$. Будем называть подкласс систем отсчета из первых двух компонент *причинным* (ему соответствуют системы отсчета с досветовыми скоростями) и обозначать его \mathcal{IR}_+ , а класс систем отсчета из вторых двух компонент *апричинным* (ему соответствуют системы отсчета со сверхсветовыми скоростями) и обозначать его \mathcal{IR}_- . Внутри каждого из названных подклассов выделяются еще по две связные компоненты: в положительных и отрицательных полуплоскостях $\text{Im}\omega \geq 0$ для \mathcal{IR}_+ и $\text{Re}\omega \geq 0$ для \mathcal{IR}_- . Мы будем обозначать их соответственно \mathcal{IR}_+^\uparrow , $\mathcal{IR}_+^\downarrow$, и $\mathcal{IR}_-^\rightarrow$, $\mathcal{IR}_-^\leftarrow$ и называть *положительными-отрицательными* и *правыми-левыми* системами отсчета. Таким образом, полный класс \mathcal{IR} всех инерциальных систем отсчета допускает следующее разбиение:

$$\mathcal{IR} = \mathcal{IR}_+^\uparrow \cup \mathcal{IR}_+^\downarrow \cup \mathcal{IR}_-^\rightarrow \cup \mathcal{IR}_-^\leftarrow. \quad (152)$$

Нетрудно убедиться, что компоненты разбиения получаются из класса \mathcal{IR}_+^\uparrow положительных причинных систем отсчета с помощью дискретных операций (145):

$$\mathcal{IR}_+^\downarrow = \sigma_t \mathcal{IR}_+^\uparrow; \quad \mathcal{IR}_-^\rightarrow = \sigma_I \mathcal{IR}_+^\uparrow; \quad \mathcal{IR}_-^\leftarrow = \sigma_x \sigma_I \mathcal{IR}_+^\uparrow. \quad (153)$$

Следует отметить, что ввиду формального равноправия всех координатных клиньев на плоскости H или H^* разбиение (153) имеет несколько условный смысл.

Рассмотрим теперь «нормальную» (т.е. досветовую и ориентированную в будущее) систему отсчета, взятую из компоненты \mathcal{IR}_+^\uparrow . Ей соответствует некоторый элемент $\tau \in H^*$, который в выбранном нами базисе имеет вид: $\tau = T1_* + Xj_*$, причем его компоненты T и X удовлетворяют условиям:

$$T > 0; \quad T^2 - X^2 = 1. \quad (154)$$

Первое условие выражает факт положительной ориентации отсчета времени, второе — факт его универсального (постоянного) «единичного темпа». Формально последнее связано с единичной нормировкой ковектора τ . Условия (154) автоматически удовлетворяются параметризацией:

$$T = \cosh \psi; \quad X = \sinh \psi, \quad (155)$$

где параметр ψ имеет геометрический смысл гиперболического угла в гиперболической полярной системе координат и физический смысл известного параметра быстроты ($\tanh \psi = v$, v — пространственная скорость системы отсчета). В компонентах (в параметризации скорости v) 1-форма τ принимает вид:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} 1_* - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} j_*. \quad (156)$$

Теперь, для заданной системы отсчета $\tau \in H^*$ и для любого элемента-события $h \in \mathcal{H}_2$ мы можем определить его *временную компоненту* h_T^τ по отношению к системе отсчета τ с помощью простой формулы:

$$h_T^\tau \equiv \tau(h). \quad (157)$$

Для произвольного $h = t + jx$ с помощью формул (147), (155) и (156) определение (157) дает временную часть преобразований Лоренца:

$$h_T^\tau \equiv \frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Для вектора $\Delta h = \Delta t + j \cdot 0$, характеризующего временной интервал в системе покоя некоторых часов, получаем формулу релятивистского растяжения промежутков времени:

$$h_T^\tau(\Delta h) = \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Чтобы перейти к определению пространственных проекций событий, необходимо определить единичную 1-форму s из компоненты $\mathcal{IR}_-^{\rightarrow}$, ортогональную τ , т. е. удовлетворяющую соотношению: $s \star \tau = 0$. С помощью формул (150) и (156) нетрудно найти ее координатный вид:

$$s = -\frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}1_* + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}j_*. \quad (158)$$

Теперь для пространственной проекции произвольного события $h \in H$ по отношению к системе отсчета τ с помощью формул (147), (158) мы можем дать следующее определение:

$$h_X^\tau \equiv s(h) = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (159)$$

что дает по существу пространственную часть преобразований Лоренца.

Рассмотрим тождественный линейный оператор $\hat{I} \equiv 1 \otimes 1_* + j \otimes j_*$. Непосредственной проверкой с помощью формул (156) и (158) можно убедиться в справедливости следующего разложения этого оператора:

$$\hat{I} = \tau^* \otimes \tau - s^* \otimes s. \quad (160)$$

Действуя этим оператором на векторы-события или 1-формы получаем их разложение на пространственные и временные компоненты:

$$h = h_T^\tau \tau^* + h_X^\tau s^*; \quad \omega = \omega_T^\tau \tau + \omega_X^\tau s,$$

где $h \in H$, $\omega \in H^*$ и

$$h_T^\tau \equiv \tau(h); \quad h_X^\tau \equiv s(h); \quad \omega_T^\tau \equiv \omega(\tau^*); \quad \omega_X^\tau \equiv \omega(s^*).$$

Аналогично, вводя разложение единичного оператора в тензорном расслоении $T^{(r,s)}(H)$:

$$\hat{I}^{\otimes(r+s)} = (\tau^* \otimes \tau - s^* \otimes s)^{\otimes(r+s)}$$

можно всякий тензор на H разложить на пространственно-временные компоненты. Например, метрические тензоры g^* и g^\times , ассоциированные с симметричным и косым произведениями соответственно имеют следующие представления:

$$g^* = \tau \otimes \tau - s \otimes s; \quad g^\times = \tau \wedge s,$$

которые по существу имеют смысл 2-мерного (диадного) аналога тетрадного описания величин в СТО и ОТО [32]. Отметим, что специфика 2-мерия заключается в наличии взаимно-однозначного соответствия пространственных и временных элементов диады $\{\tau, s\}$.

Рассмотрим пару элементов τ_1 и τ_2 из H^* , которые параметризуются скоростями v_1 и v_2 по формуле (156). Легко убедиться, что их произведение в коалгебре H^* определяет элемент

$$\tau = \tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}1_* - \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}j_*,$$

где

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 - v_1 v_2}. \quad (161)$$

Другими словами, последовательная смена систем отсчета описывается умножением в алгебре двойных чисел соответствующих элементов из H^* . Это умножение автоматически индуцирует релятивистский закон сложения скоростей. Интересное следствие этого факта связано с алгебраической интерпретацией активных и пассивных преобразований: *умножения нормированных на единицу элементов в коалгебре H^* описывают пассивные преобразования Лоренца (смену точки зрения на одни и те же события), в то время как умножения нормированных на единицу элементов в алгебре H описывают активные преобразования Лоренца (переход к другим событиям, на которые мы смотрим с той же точки зрения)*. Отсюда, в частности, следуют тождества:

$$\tau_v(\alpha_v \cdot h) = t; \quad s_v(\alpha_v \cdot h) = x$$

для всякого элемента $h = t + jx$ и элементов $\alpha_v \in SH$, $\tau_v, s_v \in SH^*$, параметризуемых одним и тем же параметром v . Эти тождества являются математическим выражением следующего утверждения: *событие, переведенное активным бустом в новое событие, не изменяет своих пространственно-временных проекций в системе отсчета, соответствующей этому бусту*.

Все приведенные выше построения допускают локализацию т. е. переход к дифференциально-геометрическим объектам (касательным векторам и дифференциальным 1-формам). Для этого достаточно допустить зависимость параметра v от t и x , а все конструкции рассматривать в касательных и кокасательных пространствах $T_{(t,x)}H$ и $T_{(t,x)}^*H = T_{(t,x)}H^*$. Такой переход позволяет рассматривать протяженные деформирующиеся системы отсчета и даже включать гравитацию.

13 Конформная теория относительности

Расширим теперь группу Пуанкаре $P(1,1)$, действующую на двумерном пространстве-времени $\mathcal{M}_{1,1}$, до группы произвольных h -голоморфных преобразований, которые действуют на точки-события пространства-времени как на элементы алгебры H . Ввиду нелинейности таких преобразований, глобальная аффинная структура $\mathcal{M}_{1,1}$ в общем случае не сохраняется и необходимо переходить к локальной версии отображения — его дифференциалу. На алгебраическом языке дифференциал отображения $F : h \mapsto F(h)$ осуществляет отображение касательных пространств по формуле:

$$\xi_h \mapsto \chi_{F(h)} = F' \xi_h. \quad (162)$$

где $\xi_h \in T_h H$, $\chi_{F(h)} \in T_{F(h)} H$, $h = t + jx$. Используя экспоненциальное представление для производной F' :

$$F'(h) = J|F'| (t, x) e^{j\psi(t, x)}, \quad (163)$$

приходим к заключению о том, что локально h -голоморфные преобразования осуществляют:

1. преобразования Лоренца, зависящие от точки (поворот на гиперболический угол $\psi(t, x)$);
2. отражения осей времени и пространственной координаты (параметр I);
3. растяжение длин векторов (скалярный множитель $|F'| (t, x)$).

Первые два типа преобразований, по существу, рассматриваются и в стандартной версии СТО. Разница преобразований Лоренца в конформной СТО и обычной СТО заключается в том, что первые действуют локально, т.е. параметр ψ зависит от точки, в то время как в стандартной СТО мы используем глобальные преобразования Лоренца, сохраняющие аффинную структуру пространства-времени²⁵.

Таким образом, в локальной версии h -голоморфных преобразований пространства-времени $\mathcal{M}_{1,1}$ единственными новыми элементами являются растяжения псевдоевклидовых длин (интервалов), описываемое модулем производной $|F'|$. В случае стандартных преобразований Лоренца $|F'| = 1$ и конформная степень свободы исчезает.

Перейдем к физической интерпретации h -голоморфных отображений. При этом в качестве эвристического руководящего принципа мы будем придерживаться *принципа аналогии с комплексной плоскостью*. Голоморфная функция на комплексной плоскости может быть как динамическим (электростатика), так и кинематическим (гидродинамика) потенциалом. Эти две точки зрения могут быть в определенном смысле эквивалентными друг другу, аналогично тому как силовой и геометрический способы описания гравитации в некоторых ситуациях эквивалентны друг другу в рамках ОТО.

Будем рассматривать функцию $F = U + jV$ как *комплексный потенциал обобщенной системы отсчета*, состоящей из пары полей (пространственно-временной диады) \mathbf{u} и \mathbf{s} . Времени-подобная монада (поле обобщенной 2-скорости) \mathbf{u} будет определяться формулой:

$$\mathbf{u} = \frac{dF}{dh} = \frac{\partial U}{\partial t} + j \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (164)$$

в которой использованы определение (97) оператора комплексного дифференцирования и гиперболические условия Коши-Римана (101). Аналогично, пространственно-подобная монада

$$\mathbf{s} = j\mathbf{u} = V_{,t} + jV_{,x}. \quad (165)$$

Монады \mathbf{u} и \mathbf{s} удовлетворяют соотношениям:

$$\mathbf{u} \star \mathbf{s} = 0; \quad |\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{s}|^2 = (\nabla U)^2 = (\nabla V)^2 = |F'|^2. \quad (166)$$

Мы видим, что в отличие от СТО (и ОТО), диада, задающая, систему отсчета, не является нормированной, хотя остается ортогональной. В связи с этим, будем рассматривать голоморфный потенциал $F = U + jV$ как *обобщенную систему отсчета*, которая определяет промежутки времени и пространственные длины в пространстве-времени $\mathcal{M}_{1,1}$ согласно формул:

$$\frac{d\tau}{ds} = \mathbf{u} \star \dot{\gamma} = \nabla U \star \dot{\gamma}; \quad \frac{dl}{ds} = \mathbf{s} \star \dot{\gamma} = \nabla V \star \dot{\gamma}, \quad (167)$$

где γ — кривая в натуральной параметризации ($\dot{\gamma}$ — поле 2-скорости на γ , точка — дифференцирование по натуральному параметру s).

В случае тривиального потенциала $F(h) = h$, $U = t$, $V = x$, мы получаем:

$$\Delta\tau = \Delta t; \quad \Delta l = \Delta x \quad (168)$$

— совпадение промежутков времени и длин с приращениями соответствующих координат. Из формул (167) нетрудно видеть, что в общем случае мы будем иметь формулы,

²⁵Отметим, что попытка использовать локализованные преобразования Лоренца посредством умножения на элементы вида $e^{j\psi(t,x)}$ выводит за рамки h -голоморфных преобразований.

обобщающие (168):

$$\Delta\tau_{AB} = \int_A^B \nabla U \star \dot{\gamma} ds = \int_A^B dU = U(B) - U(A);$$

$$\Delta\ell_{AB} = \int_A^B \nabla V \star \dot{\gamma} ds = \int_A^B dV = V(B) - V(A). \quad (169)$$

Таким образом, можно сказать что время и длина в рассматриваемой нами конформной теории относительности (КТО) «потенциальны»: промежутки времени и длины между парой событий не зависят от выбора пути, который их соединяет (но, конечно, зависят от выбора обобщенной системы отсчета). Линии $U = \text{const}$ естественно считать множествами одновременных событий, а линии $V = \text{const}$ — множествами одномоментных событий в системе отсчета, ассоциированной с $F = U + jV$. При этом с первым семейством линий можно связать семейство криволинейных пространственных осей обобщенной системы отсчета, а со вторым — семейство ее линий времени. Сравнивая формулы (169) с (128) из раздела 11.1, приходим к еще одной интерпретации промежутков времени и длины: промежуток времени между парой событий A и B представляет собой циркуляцию поля \mathbf{u} вдоль любой кривой, соединяющей A и B , а пространственная длина — его поток (для поля \mathbf{s} все наоборот).

Физико-геометрический смысл величины $|F'| = |\nabla U| = |\nabla V|$ можно прояснить, если в качестве кривой γ в (167) рассмотреть интегральную кривую одного из полей ∇U или ∇V . Прежде всего докажем одно любопытное свойство таких кривых, вытекающее из потенциальности пространственно-временных промежутков. Составим уравнения интегральных кривых, к примеру, поля ∇U :

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{\partial U}{\partial t}; \quad \frac{dx}{d\lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (170)$$

где λ — параметр на искомой кривой. Вычислим смешанные производные $\partial^2 U / \partial t \partial x$ из первого и второго уравнения в (170) независимо. Имеем для первого уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{dt}{d\lambda} = \frac{d^2 t}{d\lambda^2} \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^{-1}.$$

Аналогично для второго уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{dx}{d\lambda} = \frac{d^2 x}{d\lambda^2} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^{-1}.$$

Приравнивая полученные выражения получаем после простых преобразований

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 \right) = 0, \quad (171)$$

откуда следует

$$\left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 = C = \text{const}, \quad (172)$$

— натуральность параметра λ (с точностью до константы — в дальнейшем мы везде полагаем $C = 1$). Аналогичный результат получается и для интегральных кривых градиента V .

Пусть теперь γ_1 — отрезок интегральной кривой поля ∇U , а γ_2 — отрезок интегральной кривой поля V . С учетом доказанного свойства имеем $\dot{\gamma}_1 = \nabla U / |\nabla U|$, $\dot{\gamma}_2 = \nabla V / |\nabla V|$. Подставляя это в (167), получаем:

$$\frac{d\tau}{ds} = |\nabla U|; \quad \frac{d\ell}{ds} = |\nabla V|. \quad (173)$$

Таким образом величина $|\nabla U| = |\nabla V| = |F'|$ выступает как множитель, связывающий в каждой точке геометрическую длину элемента соответствующей линии системы отсчета с отнесенными к нему промежутку времени и пространственной длине. В СТО для преобразований Лоренца имеем $|F'| = 1$.

13.1 Конформный сдвиг частоты

Проанализируем с позиций излагаемой конформной теории относительности процедуру сравнения хода пространственно разделенных часов. Пусть Γ_1 и Γ_2 — мировые линии двух часов, которые рассматриваются в 2-мерном пространстве времени в некоторой конформной калибровке, задаваемой h -голоморфным потенциалом $F = U + jV$ (рис. 30). Рассмотрим пару близких точек на интегральной кривой Γ_2 : точку $p = (t(s_2), x(s_2))$ и точ-

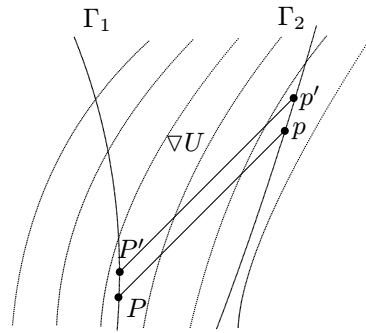


Рис. 30: К процедуре сравнения хода часов в h -голоморфной теории относительности

ку $p' = (t(s_2 + \Delta s_2), x(s_2 + \Delta s_2))$, где s_2 — натуральный параметр на кривой Γ_2 . Переходя к линеаризованным выражениям, получаем:

$$t' = t(s_2 + \Delta s_2) = t(s_2) + \dot{t}\Delta s_2 + o(\Delta s_2); \quad (174)$$

$$x' = x(s_2 + \Delta s_2) = x + \dot{x}\Delta s_2 + o(\Delta s_2), \quad (175)$$

где точка означает дифференцирование по параметру s_2 . С учетом правил (167), хроноинтервал, приходящийся на рассматриваемый отрезок Δs_2 мировой линии Γ_2 , можно вычислить по формуле:

$$d\tau_2 = \nabla U \star (\dot{t}\partial_t + \dot{x}\partial_x)\Delta s_2 = \frac{dU}{ds_2} \Delta s_2. \quad (176)$$

Линии конусов прошлого $\text{Con}(p)$ и $\text{Con}(p')$ пересекают на мировой линии Γ_1 пару точек $P = (T, X)$ и $P' = (T', X')$ соответственно. Условие принадлежности пары точек $\{p, P\}$ одной компоненте конуса приводит к соотношению

$$T(s_1) - X(s_1) = t(s_2) - x(s_2), \quad (177)$$

определяющему связь параметров s_1 (натуральный параметр на мировой линии Γ_1) и s_2 , при которых часы оказываются связаны световым сигналом. Для часов 1 имеем аналогично формуле (176):

$$d\tau_1 = \nabla U \star (\dot{T}\partial_t + \dot{X}\partial_x)\Delta s_1 = \frac{dU}{ds_1} \Big|_{\text{Con}(p)} \Delta s_1. \quad (178)$$

Дифференцируя соотношение (177), приходим к связи длин отрезков мировых линий часов:

$$ds_1 = \frac{\dot{t} - \dot{x}}{(\dot{T} - \dot{X})|_{\text{Con}(p)}} ds_2. \quad (179)$$

Теперь из (176) и (178) с учетом (179) получаем:

$$\delta(P|p) \equiv \frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\Delta_P}{\Delta_p}, \quad (180)$$

где

$$\Delta_p \equiv \frac{dU/ds_2}{\dot{t} - \dot{x}}; \quad \Delta_P \equiv \frac{dU/ds_1}{\dot{T} - \dot{X}} \Big|_{\text{Con}(p)}. \quad (181)$$

Формулы (180)-(181) описывают принципиально наблюдаемый эффект конформной деформации собственного времени, измеряемый путем обмена световыми сигналами между двумя пространственно разделенными часами. Величина $\delta(P|p)$ показывает скорость хода часов в точке P в единицах собственного времени часов в точке p , расположенной на конусе будущей точки P , в конформной калибровке $F = U + jV$.

В качестве примера рассмотрим эффект конформной деформации времени, индуцированной слабой конформной волной вида:

$$F(h) = h + \varepsilon \sin \omega h, \quad |\omega \varepsilon|_2 \ll 1. \quad (182)$$

Полагая $\varepsilon = \varepsilon_1 + j\varepsilon_2$, $\omega = \omega_1 + j\omega_2$, получаем для $F(h) = U(t, x) + jV(t, x)$ в компонентах:

$$U(t, x) = t + \varepsilon_1 \sin \Phi_1 \cos \Phi_2 + \varepsilon_2 \sin \Phi_2 \cos \Phi_1; \quad (183)$$

$$V(t, x) = x + \varepsilon_1 \sin \Phi_2 \cos \Phi_1 + \varepsilon_2 \sin \Phi_1 \cos \Phi_2, \quad (184)$$

где $\Phi_1 = \omega_1 t + \omega_2 x$, $\Phi_2 = \omega_2 t + \omega_1 x$. Рассмотрим пару покоящихся на расстоянии L друг от друга часов²⁶. Такие часы описываются компонентами 2-скорости: $\dot{t} = \dot{T} = 1$, $\dot{x} = \dot{X} = 0$. Формулы (180)-(181) приводят к простому выражению эффекта конформной деформации времени (координаты (t, x) — произвольные текущие координаты опорных часов):

$$\delta((t - L, x - L)|(t, x)) = \frac{U_{,t}(t - L, x - L)}{U_{,t}(t, x)}. \quad (185)$$

Элементарные вычисления приводят к выражению:

$$U_{,t}(t, x) = 1 + \varepsilon_1(\omega_1 \cos \Phi_1 \cos \Phi_2 - \omega_2 \sin \Phi_1 \sin \Phi_2) + \varepsilon_2(\omega_2 \cos \Phi_2 \cos \Phi_1 - \omega_1 \sin \Phi_2 \sin \Phi_1); \quad (186)$$

$$U_{,t}(t - L, x - L) = U_{,t}(t, x)|_{\Phi_i \rightarrow \Phi_i - \delta}, \quad (187)$$

где $\delta = (\omega_1 + \omega_2)L$. Подставляя (186)-(187) в формулу (185) и используя условие малости конформной деформации, после элементарных тригонометрических преобразований получаем следующее выражение для относительного хода часов:

$$\delta((t - L, x - L)|(t, x)) \approx 1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\omega_1 + \omega_2) \sin[(\omega_1 + \omega_2)L] \sin[(\omega_1 + \omega_2)(t + x - L)]. \quad (188)$$

Формула (188) показывает, что в конформной теории относительности относительная скорость хода часов испытывает пространственно-временную модуляцию, которая

²⁶Далее мы везде отождествляем L с разностью координат x положений часов, поскольку учет конформной деформации длин с помощью формулы (169) приведет к поправкам высшего порядка малости.

в принципиальном отношении доступна измерению посредством эксперимента. В реальном эксперименте удобнее измерять не скорость хода часов, а сдвиг частоты двух идентичных точечных электромагнитных излучателей. Формула для относительного сдвига частоты в этом случае:

$$\frac{d\omega_2}{d\omega_1} - 1 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\omega_1 + \omega_2) \sin[(\omega_1 + \omega_2)L] \sin[(\omega_1 + \omega_2)(t + x - L)] \quad (189)$$

получается очевидным образом из формулы (188).

Идея обсуждаемого здесь эксперимента, связанного с эффектом конформной деформации темпа хода часов, легла в основу реальных экспериментов с кварцевыми генераторами, организованных и проведенных сотрудниками НИИ ГСГФ [33]. Анализ усредненных разностных спектров, приводит к обнадеживающему предварительному выводу о том, что сильно нестационарный локализованный в пространстве и времени процесс (в реальных экспериментах исследовался удар тяжелой стальной болванки о стальное основание) может приводить к эффекту конформной деформации пространства времени в пространственно-временной окрестности этого процесса.

14 Алгебраическая теория пространства-времени-материи («Теория Всего» в Гиперлэнде)

Целью настоящего раздела является формулировка и исследование динамического принципа, из которого бы вытекали уравнения и законы, управляющие динамикой потенциала F в 2-мерном мире, который мы будем далее называть Гиперлэндом. Мы постулируем, что в глубинной основе физической картины мира Гиперлэнда лежит алгебра двойных чисел. Развивая последовательно принцип алгебраизации, мы построим очень конкретную теорию Гиперлэнда, в которой все существенные характеристики (фундаментальные константы, лагранжиан, потенциал гиперсилы) вычисляются в явном виде. Рассматриваемую нами 2-мерную модель Гиперлэнда можно рассматривать как «игрушечную» низкоразмерную версию чисто алгебраической «Теории Всего». Ее более реалистичные варианты, основанные на многомерных обобщениях двойных чисел — алгебрах поличисел — мы обсудим в общих чертах в Заключение.

14.1 Общая идея

В предыдущем разделе мы фактически рассмотрели фрагмент теории гиперболического потенциала в пустоте, не задаваясь вопросом об источниках этого поля. Вне источников поле гиперболического потенциала является h -голоморфной функцией, со всеми свойствами и физической интерпретацией, рассмотренными выше. Из общих соображений можно предположить, что в области, занятой источниками (точная природа которых пока неясна), поле F , вообще говоря, уже не будет являться голоморфной функцией переменной h . Другими словами, область источников поля характеризуется неравенством $F_{,\bar{h}} \neq 0$, выражающим факт неголоморфности функции F , так что в этой области полевая функция F зависит, вообще говоря, как от переменной h , так и от переменной \bar{h} . Будем в дальнейшем называть величину $F_{,\bar{h}}$ *неголоморфностью гиперкомплексного потенциала F* . Если с источниками гиперболического потенциала ассоциировать вещество, то поле F становится универсальной функцией, содержащей в себе всю информацию обо всем пространстве-времени вместе с его материальным наполнением. Несколько упрощая ситуацию, можно сказать, что производные $F_{,h}$ отвечают за локальные кинематику источников и геометрию пространства-времени, а производные $F_{,\bar{h}}$ (неголоморфность) отвечают за внутренние локальные характеристики источников.

14.2 Вариационный принцип и уравнения поля

Перейдем к теоретико-полевым формулировкам. Постулируем действие для гиперболического потенциала в следующем виде:

$$\mathcal{S}[F, \bar{F}] = \int_H (\mathcal{Y} - \mathcal{U}(\mathcal{X})) dh \wedge d\bar{h}, \quad (190)$$

где

$$\mathcal{X} \equiv \|N\|^2, \quad N \equiv \frac{\partial F}{\partial \bar{h}}; \quad \mathcal{Y} \equiv \|K\|^2, \quad K \equiv \frac{\partial F}{\partial h}.$$

Первое слагаемое под интегралом в (190) является гиперболическим «кинетическим членом» и отвечает за динамику гиперболического потенциала в пустоте, а второе слагаемое представляет собой гиперболический «потенциальный член» и отвечает за свойства и вклад источников. В соответствии с изложенными выше соображениями, это последнее слагаемое зависит только от гиперболической нормы неголоморфности N и в области вне источников, где неголоморфность обращается в нуль, оно определяет в действии некоторую постоянную объемную плотность энергии, играющую в Гиперлэнде роль плотности энергии вакуума. Отметим, что действие в целом вещественно²⁷, хотя мы и записали его в двойном представлении.

Стандартная процедура варьирования действия (190) по полевым переменным \bar{F} , F приводит к уравнениям поля, которые можно привести к виду:

$$\frac{1}{4} \square F = (\mathcal{U}' F_{,\bar{h}})_{,h} \quad (191)$$

— неоднородного волнового уравнения с источником в правой части, зависящим лишь от неголоморфности F . Штрих в (191) обозначает дифференцирование функции \mathcal{U} по ее аргументу (т. е. по квадрату модуля неголоморфности). Второе уравнение получается из уравнения (191) его гиперболическим комплексным сопряжением. Как и следовало ожидать, уравнения поля получились нелинейными, поскольку поле F , как это следует из принципов развиваемой теории, описывает и свои источники за счет эффективного самодействия. В этом отношении развиваемая теория примыкает к вариантам единой теории поля Ми [34].

14.3 Первый интеграл и его следствия

Замечательной особенностью уравнений (191) является наличие у них первого интеграла, независимо от конкретного вида потенциальной функции \mathcal{U} . Действительно, записывая волновой оператор в комплексной форме (103), уравнение (191) можно представить в виде равенства нулю некоторой производной:

$$(F_{,\bar{h}}(1 - \mathcal{U}'))_{,h} = 0, \quad (192)$$

откуда следует

$$F_{,\bar{h}}(1 - \mathcal{U}') = \varphi(\bar{h}) \quad (193)$$

²⁷Но не общековариантно. Выражения $\mathcal{Y} = \|F_{,h}\|^2$ и $\mathcal{X} = \|F_{,\bar{h}}\|^2$ являются (вещественными) скалярами лишь относительно голоморфных или антиголоморфных преобразований координат на H . Общековариантным скаляром является комбинация $\mathfrak{c} = \mathcal{X} + \mathcal{Y} \equiv [(\nabla U)^2 - (\nabla V)^2]/2$. Отметим, что под знаком интеграла $\mathfrak{c} \sim 2\|F_{,h}\|^2$ с точностью до граничных членов. Поэтому теория с кинетическим членом в виде \mathfrak{c} с помощью интегрирования по частям и тривиального переопределения F и \mathcal{U} сводится к исходной версии (190). Таким образом, наша теория Гиперлэнда будет конформно-ковариантной, и группа $\text{Hol}(H)$ будет играть в ней ту же роль, что и группа Пуанкаре в классической теории поля в плоском пространстве-времени.

— первый интеграл уравнения (191), содержащий произвольную функцию $\varphi(\bar{h})$.

Интеграл (193) в общем случае представляет собой систему двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Рассмотрим его важное следствие, которое выполняется в общем случае независимо от вида потенциальной функции \mathcal{U} . Домножая обе части уравнения (193) на \bar{F}_h , приходим к вещественному соотношению:

$$R \ni \mathcal{X}(1 - \mathcal{U}'(\mathcal{X})) = \varphi(\bar{h})\bar{F}_h, \quad (194)$$

откуда следует, что

$$\text{Im } \varphi(\bar{h})\bar{F}_h = 0. \quad (195)$$

Расписывая это соотношение в компонентах, приходим к уравнению:

$$\varphi_1(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_2(U_{,t} - V_{,x}) = 0, \quad (196)$$

связывающему $\varphi = \varphi_1 + j\varphi_2$ и $F = U + jV$ и не содержащему функции \mathcal{U} . Дифференцируя соотношение (196) по t и по x , приходим к паре дифференциальных следствий:

$$\varphi_{1,t}(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_1(U_{,x,t} - V_{,t,t}) + \varphi_{2,t}(U_{,t} - V_{,x}) + \varphi_2(U_{,t,t} - V_{,x,t}) = 0; \quad (197)$$

$$\varphi_{1,x}(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_1(U_{,x,x} - V_{,t,x}) + \varphi_{2,x}(U_{,t} - V_{,x}) + \varphi_2(U_{,t,x} - V_{,x,x}) = 0. \quad (198)$$

Ввиду того, что φ_1 и φ_2 являются компонентами антиголоморфной функции φ , они связаны гиперболическими условиями типа Коши-Римана:

$$\varphi_{1,t} = -\varphi_{2,x}; \quad \varphi_{1,x} = -\varphi_{2,t}. \quad (199)$$

Выражая производные $\varphi_{1,t}$ и $\varphi_{2,t}$ в уравнении (197) через (199), приходим к уравнению:

$$-\varphi_{2,x}(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_1(U_{,x,t} - V_{,t,t}) - \varphi_{1,x}(U_{,t} - V_{,x}) + \varphi_2(U_{,t,t} - V_{,x,t}) = 0. \quad (200)$$

Рассматривая теперь уравнения (198) и (200) как систему линейных уравнений относительно φ_1 и $\varphi_{1,x}$, находим:

$$\varphi_1 = A\varphi_2 + B\varphi_{2,x}, \quad (201)$$

где

$$A = -\frac{N_{1,t}N_2 + (N_1^2)_{,x}/2}{N_1N_{2,x} + (N_2^2)_{,t}/2}, \quad B = -\frac{N_1^2 - N_2^2}{N_1N_{2,x} + (N_2^2)_{,t}/2}, \quad (202)$$

а

$$N_1 \equiv U_{,t} - V_{,x}; \quad N_2 \equiv N_2 = U_{,x} - V_{,t} \quad (203)$$

— величины, обращающиеся в нуль для h -голоморфного потенциала $F(h)$ (т.е. по существу компоненты неголоморфности F). Подставляя теперь решение (201) в (196), приходим к дифференциальному уравнению первого порядка относительно φ_2 , которое можно преобразовать к виду:

$$(\ln \varphi_2)_{,x} = -\frac{A}{B} - \frac{N_1}{N_2B}, \quad (204)$$

где A и B определяются формулами (202)-(203).

Выражая теперь аналогичным образом производные $\varphi_{1,x}$ и $\varphi_{2,x}$ в уравнении (198) через (199), приходим к уравнению:

$$-\varphi_{2,t}(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_1(U_{,x,x} - V_{,t,x}) - \varphi_{1,t}(U_{,t} - V_{,x}) + \varphi_2(U_{,t,x} - V_{,x,x}) = 0. \quad (205)$$

Снова рассматривая уравнения (197) и (205) как систему линейных уравнений относительно φ_1 и $\varphi_{1,t}$, находим:

$$\varphi_1 = \tilde{A}\varphi_2 + \tilde{B}\varphi_{2,t}, \quad (206)$$

где

$$\tilde{A} = -\frac{N_{1,x}N_2 + (N_1^2)_{,t}/2}{N_1N_{2,t} + (N_2^2)_{,x}/2}; \quad \tilde{B} = \frac{N_1^2 - N_2^2}{N_1N_{2,t} + (N_2^2)_{,x}/2}. \quad (207)$$

Подставляя решение (206) в (196), снова приходим к дифференциальному уравнению первого порядка относительно φ_2 , которое можно привести к виду:

$$(\ln \varphi_2)_{,t} = -\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} - \frac{N_1}{N_2\tilde{B}}, \quad (208)$$

где \tilde{A} и \tilde{B} определяются формулами (207) и (203).

Приравнявая выраженные из (204) и (208) вторые смешанные производные: $(\ln \varphi_2)_{,t,x} = (\ln \varphi_2)_{,x,t}$, приходим к условиям интегрируемости исходного уравнения (195), которые уже не содержат функций φ_1, φ_2 :

$$\left(\frac{A}{B} + \frac{N_1}{N_2B}\right)_{,t} = \left(\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} + \frac{N_1}{N_2\tilde{B}}\right)_{,x} \quad (209)$$

или после некоторых преобразований и упрощений с учетом формул (202), (203), (207):

$$\left(\frac{N_2^2N_{1,t} - N_1^2N_{2,x} + N_1N_2(N_{1,x} - N_{2,t})}{N_2(N_1^2 - N_2^2)}\right)_{,t} = \left(\frac{N_2^2N_{1,x} - N_1^2N_{2,t} + N_1N_2(N_{1,t} - N_{2,x})}{N_2(N_1^2 - N_2^2)}\right)_{,x}. \quad (210)$$

Вводя новую функцию: $\mathcal{Q} \equiv N_1/N_2$ после несложных манипуляций с производными уравнение (210) приводится к очень простому виду:

$$\square \text{Arth} \mathcal{Q} = 0, \quad (211)$$

общий интеграл которого имеет вид:

$$\mathcal{Q} \equiv \frac{U_{,t} - V_{,x}}{U_{,x} - V_{,t}} = \tanh(\phi_1(t+x) + \phi_2(t-x)), \quad (212)$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — произвольные функции своих аргументов. Интеграл (212) удовлетворяется тождественно и в пустоте, где обращается в нуль не голоморфность. Таким образом, в рассматриваемой нами теории соотношение (212) имеет вид общего универсального соотношения, которое, с одной стороны, является следствием вариационного динамического принципа (190), с другой ограничивает вид F -поля универсальным образом, независимо от его материальных источников. С математической точки зрения соотношение (212) можно рассматривать как некоторое обобщение гиперболических условий Коши-Римана, определяющее некоторый класс $\mathcal{G}(H)$ функций с правилом дифференцирования:

$$\frac{dF}{dh} = \frac{1}{2}(U_{,x} - V_{,t})(\tanh(\phi_1 + \phi_2) - j). \quad (213)$$

Более детальное обсуждение математических свойств этого класса функций и его физическую интерпретацию мы оставляем для следующих публикаций. Сейчас мы остановимся лишь на одном важном наблюдении математического характера, принципиально важном для излагаемого подхода. Условие $F_{,\bar{h}} = 0$, рассматриваемое на границе области, занятой материей, дает два уравнения на две функции от переменных (t, x) : $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, которые в общем случае независимы. Это означало бы, что в нашей теории материальные распределения ограничиваются точечными источниками, за исключением, быть может, некоторых случайных вырожденных ситуаций. Соотношение (212), которое можно понимать

как линейную связь компонент неголономности, выделяет в нашей теории класс физических гиперкомплексных потенциалов $\mathcal{G}(H)$, у каждого представителя которого обнуление одной из компонент неголоморфности влечет за собой обнуление другой компоненты. Иными словами, *динамический принцип теории в форме (190) автоматически приводит к протяженным материальным распределениям, с границей, задаваемой уравнением вида $f(t, x) = 0$, как это и должно быть в реалистичной 2-мерной теории относительности.*

14.4 Тензор энергии-импульса и характеристики источников

Поскольку лагранжиан в действии (190) не зависит от координат, теорема Нетер гарантирует выполнение слабого закона сохранения:

$$\mathcal{T}_{\beta, \alpha}^{\alpha} = 0, \quad (214)$$

где:

$$\mathcal{T}_{\beta, \alpha}^{\alpha} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{, \alpha}^a} F_{, \beta}^a - \delta_{\beta}^{\alpha} \mathcal{L} \quad (215)$$

— канонический тензор энергии-импульса поля F . Здесь $\alpha, \beta = h, \bar{h}$, $\{F^a\} = F, \bar{F}$. Непосредственное вычисление по формуле (215) приводит к следующему виду компонент тензора \mathcal{T} в комплексном базисе:

$$\mathcal{T}_h^h = \mathcal{T}_{\bar{h}}^{\bar{h}} = \mathcal{U}(X) - \mathcal{U}'(X)X \equiv \mu; \quad \mathcal{T}_h^{\bar{h}} = \overline{\mathcal{T}_{\bar{h}}^h} = \bar{F}_{, \bar{h}} F_{, h} (1 - \mathcal{U}') \equiv \sigma. \quad (216)$$

Для пересчета этих компонент в более привычном вещественном базисе заметим, что матрицы Якоби J и J^{-1} , определяющиеся видом преобразований координат:

$$t = \frac{h + \bar{h}}{2}; \quad x = \frac{h - \bar{h}}{2j}; \quad h = t + jx; \quad \bar{h} = t - jx, \quad (217)$$

имеют вид:

$$J \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ j/2 & -j/2 \end{pmatrix}; \quad J^{-1} \begin{pmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{pmatrix}. \quad (218)$$

С помощью известного закона преобразования тензоров посредством матриц Якоби легко находим компоненты тензора энергии-импульса в декартовых координатах (t, x) :

$$\mathcal{T}_0^0 = \mu + \operatorname{Re} \sigma; \quad \mathcal{T}_1^1 = \mu - \operatorname{Re} \sigma; \quad \mathcal{T}_0^1 = -\mathcal{T}_1^0 = \operatorname{Im} \sigma \quad (219)$$

Из представления (219) очевидно, что дважды ковариантный тензор \mathcal{T} полностью симметричен и имеет вид:

$$(\mathcal{T}_{\alpha\beta}) \begin{pmatrix} \mu + \operatorname{Re} \sigma & -\operatorname{Im} \sigma \\ -\operatorname{Im} \sigma & \operatorname{Re} \sigma - \mu \end{pmatrix}. \quad (220)$$

Для выяснения вопроса о связи потенциала F с плотностью энергии и давлением составим задачу на собственные значения относительно метрики Минковского Ξ :

$$\mathcal{T}(, u) = \lambda \Xi(, u). \quad (221)$$

Секулярное уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \mu + \operatorname{Re} \sigma - \lambda & -\operatorname{Im} \sigma \\ -\operatorname{Im} \sigma & \operatorname{Re} \sigma - \mu + \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (222)$$

или

$$(\mu - \lambda)^2 - (\operatorname{Re} \sigma)^2 + (\operatorname{Im} \sigma)^2 = 0. \quad (223)$$

Его корни:

$$\lambda_1 = \varepsilon = \mu + \sqrt{\sigma\bar{\sigma}}; \quad \lambda_2 = p = \mu - \sqrt{\sigma\bar{\sigma}}. \quad (224)$$

Приведем также выражения для ε и p в явном виде:

$$\varepsilon = \mathcal{U} - \mathcal{U}'\mathcal{X} + (1 - \mathcal{U}')\sqrt{\mathcal{X}\mathcal{Y}}; \quad p = \mathcal{U} - \mathcal{U}'\mathcal{X} - (1 - \mathcal{U}')\sqrt{\mathcal{X}\mathcal{Y}}. \quad (225)$$

Из формул (225) следует, что величины ε и p в общем случае не связаны никаким уравнением состояния вида $p = f(\varepsilon)$, поскольку функциональный определитель

$$\frac{D(\varepsilon, p)}{D(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} \equiv \begin{vmatrix} \varepsilon, \mathcal{X} & \varepsilon, \mathcal{Y} \\ p, \mathcal{X} & p, \mathcal{Y} \end{vmatrix} \frac{\mathcal{U}''(1 - \mathcal{U}')\mathcal{X}^2}{\mathcal{Y}^{1/2}} \neq 0 \quad (226)$$

— в общем случае отличен от нуля. Это обстоятельство позволяет говорить об уравнении состояния более общего вида: $p = f(\varepsilon, s)$, где параметр s можно ассоциировать с плотностью энтропии Гиперлэнда.

14.5 Супервариационный принцип для фундаментальных теорий

Практически любая физическая теория содержит неопределяемые из самой теории параметры — эмпирические константы модели или фундаментальные физические константы. Так, классическая электродинамика содержит две фундаментальные константы: e и c , квантовая электродинамика содержит три константы: e, \hbar, c , а единая теория электрослабого взаимодействия — около 20 констант. Ньютоновская теория гравитации содержит одну константу G , а эйнштейновская ОТО — две константы G и c . Механика Ньютона не содержит фундаментальных констант²⁸ Следует отметить, что в вычислениях константы модели могут группироваться в определенные типичные для данной теории комбинации, которые и определяют экспериментально наблюдаемые величины. Такими комбинациями, к примеру, являются постоянная тонкой структуры $\alpha \equiv e^2/\hbar c$ в квантовой электродинамике и эйнштейновская гравитационная постоянная $8\pi G/c^4$ в ОТО.

Как правило, константы модели определяются из экспериментальных данных. Такой подход, однако, свидетельствует о принципиальной неполноте рассматриваемой теории. Было бы совершенно естественно ожидать, что полная фундаментальная «Теория Всего» (если она вообще существует!) должна давать средства для вычисления всех своих существенных параметров, т. е. тех, которые определяют экспериментально наблюдаемые величины. Более того, фундаментальная теория природы не должна содержать произвола в выборе некоторых фундаментальных зависимостей, определяющих динамические уравнения теории, например, вид потенциальной функции или даже вид лагранжиана.

Все вышесказанное относится и к рассматриваемой нами теории Гиперлэнда. В настоящем параграфе мы обсудим один из возможных подходов к устранению отмеченного произвола [35].

14.5.1 Супервариационный принцип для фундаментальных констант

Рассмотрим действие вида $\mathcal{S}_\alpha[\phi]$ для некоторой фундаментальной теории, где ϕ — коллективный символ для набора динамических переменных (относящихся к частицам, полям и т.д.), а α — коллективный символ для набора фундаментальных констант теории. Пусть $\phi_\beta(\alpha)$ — решение уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\delta_\phi \mathcal{S}_\alpha[\phi] = 0,$$

²⁸Что лишний раз подтверждает тезис о том, что законы механики Ньютона на самом деле являются принципами [3].

с некоторыми начально-краевыми условиями, фиксированными посредством набора параметров β . Подставляя это решение обратно в действие (и регуляризуя результат, если это необходимо), мы получаем функцию многих переменных вида:

$$\Phi(\alpha, \beta) \equiv \mathcal{S}_{\text{reg } \alpha}[\phi_{\beta}(\alpha)]. \quad (227)$$

Ключевая идея излагаемого нами супервариационного принципа заключается в минимизации функции (227) по отношению к набору переменных α , для того чтобы получить выражения для набора параметров α или его части:

$$\alpha = \alpha_0(\beta), \quad (228)$$

связывающие значения фундаментальных констант с параметрами граничных условий.

Более кардинальный шаг заключается в минимизации (227) по отношению к полному набору переменных (α, β) , что в принципе определяет как существенные фундаментальные постоянные, так и граничные условия «из ничего».

В качестве простейшего примера рассмотрим гармонический осциллятор с действием

$$\mathcal{S}[x(t)] = \int \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \right] dt. \quad (229)$$

Общее решение уравнений движения, вытекающих из (229) хорошо известно:

$$x_0(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{k/m}, \quad (230)$$

где m — масса осциллятора, k — параметр его жесткости, A — амплитуда, φ — начальная фаза. Первые два параметра относятся к числу «фундаментальных постоянных» модели, вторые два — к числу начально-краевых условий. Подставляя (230) в (229), получаем для функции $\Phi_{\beta}(\alpha)$ ($\beta = \{A, \varphi, T\}$, $\alpha = \{m, k\}$) в (227):

$$\Phi_{(A, \varphi, T)}(k, m) \equiv \int_0^T L(x_0(t), \dot{x}_0) dt \quad (231)$$

$$\frac{kA^2}{4\omega} [\sin 2(\omega T + \varphi) - \sin 2\varphi].$$

Здесь появился еще один параметр T — «время существования» осциллятора. Очевидно, что экстремумы по k и по A тривиальны и дают нулевое действие. Условия экстремума для параметров ω и φ принимают вид системы уравнений:

$$(\chi - 2\varphi) \cos \varphi - \sin \chi + \sin 2\varphi = 0; \quad \cos \chi = \cos 2\varphi, \quad (232)$$

где $\chi \equiv 2(\omega T + \varphi)$. Общее решение второго уравнения имеет вид:

$$\chi = \varphi + \pi n \Rightarrow \omega = \omega_n = \frac{\pi n}{T}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (233)$$

Разумеется, для обычного осциллятора в виде грузика на нити или на пружинке у нас нет никаких оснований применять супервариационный принцип, поскольку такого рода осцилляторы искусственны и их параметры в определенном смысле случайны. Однако для «фундаментальных осцилляторов» в виде частиц или квазичастиц, рассмотренная нами супервариационная процедура дает в принципиальном (но, конечно, не количественном!) плане правдоподобные результаты: элементарные возбуждения связаны с глобальными фундаментальными характеристиками системы. Более того, спектр колебаний такого осциллятора согласно (233) оказывается квантованным и эквидистантным, как в квантовой механике.

14.5.2 Супервариационная процедура для потенциала

Рассмотренные выше идеи, касающиеся фундаментальных параметров теории, нетрудно распространить также и на фундаментальные зависимости теории, типа зависимостей ее потенциала от полевых переменных.

Пусть действие некоторой полевой теории имеет вид:

$$\mathcal{S}[\phi] = \int \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) d\text{vol}, \quad (234)$$

где лагранжиан $\mathcal{L} = (\partial\phi)^2 - U(\phi, \partial\phi)$. Пусть следствием уравнений Эйлера-Лагранжа является интеграл (или система интегралов) вида:

$$F(\phi, \partial\phi) = 0. \quad (235)$$

Если интеграл (235) это позволяет сделать, то исключим с помощью него кинетический член в лагранжиане \mathcal{L} . Обозначая совокупность переменных, от которых зависит потенциал U через y , а остальную совокупность через x' , приведем действие (234) к виду:

$$\mathcal{S}[\phi]|_F = \int \mathcal{L}|_F d\text{vol} \int \mathcal{L}'(x', y, U(y), \partial U(y)) J(x', y) d\text{vol}_y \wedge d\text{vol}_{x'} \equiv \mathcal{S}'[U(y)] \quad (236)$$

— функционала относительно функции $U(y)$. Новое действие (236) получается ограничением исходного действия (234) на интеграл (235) и переходом от координатных переменных (x) к новой системе «полевых координат» (x', y) (J в (236) — якобиан перехода). При этом совокупность переменных x' представляет собой совокупность параметров, по которым в последнем знаке равенства в (236) произведено усреднение (интегрирование с регуляризацией, если она требуется). Таким образом, рассматривая теперь функционал $\mathcal{S}'[U(y)]$, приходим к уравнениям экстремума:

$$\delta_U \mathcal{S}'[U(y)] = 0, \quad (237)$$

определяющим потенциал с точностью до констант.

14.6 Пример 2: суперэкстремум в теории h -поля

Сейчас мы установим еще одно интересное свойство лагранжиана в (190): он обеспечивает существование вполне определенного суперэкстремума, который мы найдем с точностью до пары констант. Из интеграла (193) можно вывести следующее выражение для квадрата модуля неголоморфности:

$$\mathcal{X} = \frac{|\varphi|^2}{(1 - \mathcal{U}')^2}. \quad (238)$$

Подставляя его²⁹ в действие (190) и переходя от переменных (h, \bar{h}) к новым переменным³⁰ (\mathcal{X}, X') , приходим к новому действию вида:

$$\mathcal{S}'[\mathcal{U}(\mathcal{X})] = \int \left[\frac{|\varphi|^2}{(1 - \mathcal{U}')^2} - \mathcal{U} \right] d\mathcal{X} \wedge dX'.$$

²⁹При этом мы, как обычно игнорируем граничные члены, делая определенные предположения о поведении решений на бесконечности. Для самосогласованности суперэкстремума следовало бы проверить эти предположения для решений, вытекающих из модели с суперэкстремальным потенциалом.

³⁰Таким, что $\frac{D(\mathcal{X}, X')}{D(h, \bar{h})} = \text{const}$. Доказательство существования такой системы координат представляет собой полезное упражнение с 1-формами!

Варьируя его по \mathcal{U} и исключая $|\varphi|^2$ посредством (238), мы приходим к уравнению супер-экстремума теории:

$$\frac{d}{d\mathcal{X}} \left(\frac{\mathcal{X}}{1 - \mathcal{U}'} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Его решение имеет вид:

$$\mathcal{U}'(\mathcal{X}) = 3\mathcal{X} + \mathcal{U}_0 - 2\mathcal{U}_1 \ln \left| 1 + \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{U}_1} \right|, \quad (239)$$

где $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ — пара «фундаментальных констант» теории.

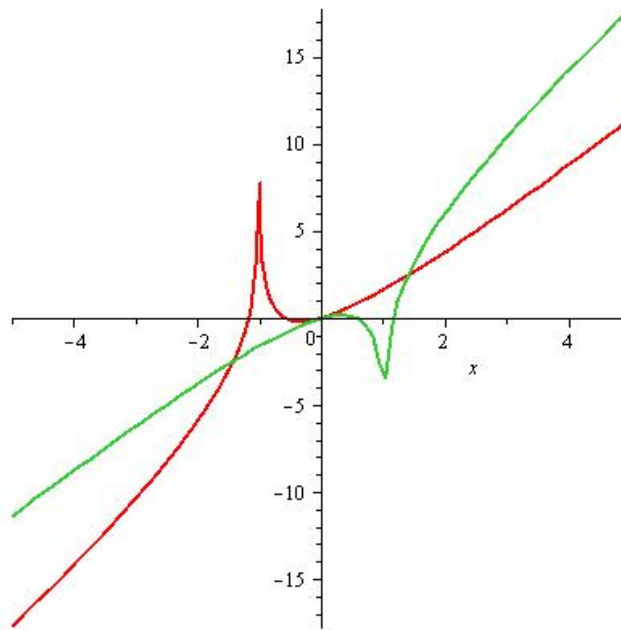


Рис. 31: $U'(\mathcal{X})$ при $\mathcal{U}_0 = 0, \mathcal{U}_1 = \pm 1$

14.7 Статический Гиперлэнд

В настоящей статье мы ограничимся подробным исследованием статического Гиперлэнда. В статическом Гиперлэнде по определению существует такая система координат, в которой потенциал F не зависит от t :

$$F_{,t} = 0 \Rightarrow U_{,t} = V_{,t} = 0. \quad (240)$$

С учетом формулы (212) получаем следующее выражение для неголоморфности

$$N = F_{,\bar{h}} = \frac{1}{2} U_{,x} (\tanh(\phi_1 + \phi_2) - j) \Rightarrow |F_{,\bar{h}}|^2 = \mathcal{X} = -\frac{U_{,x}^2}{4 \cosh^2(\phi_1 + \phi_2)}, \quad (241)$$

который получается с учетом общего уравнения (212). Поскольку U и V не зависят от t , не должен зависеть от t и аргумент гиперболического тангенса $\phi_1(t+x) + \phi_2(t-x)$. Нетрудно показать, что это возможно только в случае линейных функций ϕ_1 и ϕ_2 , так что в результате получим: $\phi_1 + \phi_2 = Ax + B, A, B \in \mathbb{R}$. После надлежащего выбора начала отсчета на оси x , неголоморфность \mathcal{X} приводится к виду:

$$\mathcal{X} = -\frac{U_{,x}^2}{4 \cosh^2(Ax)}. \quad (242)$$

Подставляя это выражение \mathcal{X} в действие (190) с потенциалом \mathcal{U}^\vee :

$$\mathcal{S}^\vee = \int_H \left(2\mathcal{U}_1 \ln \left| 1 + \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{U}_1} \right| - 2\mathcal{X} - \mathcal{U}_0 \right) dt \wedge dx \quad (243)$$

и варьируя его по $U(x)$, мы получим уравнение поля в форме:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^\vee}{\partial U'} \right) = 0, \quad (244)$$

где \mathcal{L}^\vee — лагранжиан модели (подынтегральное выражение в (243) — оно не зависит от поля $U(x)$, а зависит только от его производных). После однократного интегрирования и простых преобразований (244), мы приходим к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка на $U(x)$ вида:

$$Z^3 + \alpha \cosh(Ax)(Z^2 - \epsilon) = 0, \quad (245)$$

где

$$Z \equiv \frac{U_{,x}}{2\sqrt{|\mathcal{U}_1|} \cosh(Ax)}, \quad \epsilon \equiv \text{sign}(\mathcal{U}_1), \quad (246)$$

α — пока неопределенная безразмерная константа. Его непосредственное интегрирование неудобно ввиду громоздкости явного вида ветвей решения кубического уравнения. Вместо этого в дальнейших вычислениях мы будем использовать величину Z как параметр, а уравнение (245) будем понимать как определение неявной зависимости $x(Z)$ (локально).

Для дальнейшего продвижения в вычислении свойств статической вселенной Гиперлэнда, нам необходимо определить число и тип существенных фундаментальных констант этой вселенной и попытаться вычислить эти константы с помощью экстравариационного принципа. Для этой цели перепишем действие (243) в виде, в котором роль всех констант видна наиболее отчетливо:

$$\mathcal{S}^\vee = |\mathcal{U}_1| T \int_{-L/2}^{L/2} (Z^2 + \epsilon \ln(1 - \epsilon Z^2) - \Lambda) dx, \quad (247)$$

где $\Lambda = \mathcal{U}_0/\mathcal{U}_1$.

Все параметры вселенной Гиперлэнда сведены в следующей таблице.

Фундаментальные константы статического Гиперлэнда

Константа	Смысл	Значение
Λ	энергия вакуума	существенна=?
$ \mathcal{U}_1 $	ед. измерения энергии	несущественна
ϵ	форма потенциала (рис.31)	существенна= 0, ± 1-?
A	единица длины ⁻¹	несущественна
α	безразмерная «структурная константа» (245)	существенна, =?
L	«размеры	∞
T	пространства-времени»	∞

Как это видно из выражения (245) и приведенной таблицы, все существенные свойства вселенной Гиперлэнда определяются тремя константами: Λ , α^2 и ϵ , причем последняя может принимать лишь два значения³¹ ± 1 .

Попытаемся вычислить константу α^2 . Для этой цели перейдем в действии (247) к новой координате Z с помощью формулы:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\sqrt{Z^6 - \alpha^2(\epsilon - Z^2)^2(\epsilon - Z^2)}}{Z^2(3\epsilon - Z^2)}, \quad (248)$$

которая получается дифференцированием (245) по x . С учетом формулы:

$$\frac{\partial Z}{\partial \alpha} = -\frac{Z}{\alpha},$$

которая получается из (245) дифференцированием по α , условие экстремума действия $\partial \mathcal{S}^\vee / \partial \alpha = 0$ можно привести к виду:

$$\int_{s^*(\alpha^2)}^{\infty} \frac{s^{5/2}(3 - \epsilon s)}{(1 - \epsilon s)^2 \sqrt{s^3 - \alpha^2(1 - \epsilon s)^2}} ds = 0, \quad (249)$$

где $s^{*3} - \alpha^2(1 - \epsilon s^*)^2 = 0$, $s = Z^2$. Интеграл (249) расходится: он ведет себя как $O(s)$ при $s \rightarrow \infty$ и, кроме того, имеет конечную неинтегрируемую особенность! Первая причина расходимости является вполне естественной в рассматриваемой нами модели: она связана с некомпактностью 2-мерного пространства-времени. Ее можно избежать, заключая вселенную Гиперлэнда в «пространственный ящик» размерами L , а затем после вычислений в конечном результате переходя к пределу $L \rightarrow \infty$. Это, однако, не устраняет вторую причину расходимости интеграла (249) — конечную особенность в точке, в которой подкоренное выражение в знаменателе обращается в ноль. Оказывается, только при $\epsilon = +1$ существует единственное значение константы

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 = \frac{27}{4}, \quad (250)$$

при котором ноль подкоренного выражения и ноль числителя совпадают и интеграл регуляризуется. Значение $\alpha_0 = \pm 3\sqrt{3}/2$ (выбор знака в дальнейшем несущественен) мы и примем за значение α в статической вселенной Гиперлэнда³². В процессе определения структурной константы α определилось и значение дискретной константы ϵ : только ветвь с $\epsilon = +1$ допускает регуляризацию интеграла (249). Отметим, что энергия вакуума Λ на данном этапе не вычисляется с помощью вариационного принципа, поскольку Λ входит в действие тривиально.

Теперь мы можем описать вещество Гиперлэнда (мы будем далее называть его даблонной материей или даблоном, помня об его алгебраическом источнике — двойных числах). Формулы (224) для плотности энергии и давления даблонной материи с учетом (242) и (246) принимают следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \\ p \end{array} \right\} = \Lambda - 2 \ln |1 - Z^2| - \frac{2Z^2(1 \pm Z^2)}{1 - Z^2}. \quad (251)$$

³¹Случай $\epsilon = 0$ математически возможен, но изначально ясно, что он приводит к вселенной Гиперлэнда с тривиальными свойствами.

³²Отметим, что, хотя такой способ «вычисления» требует несколько расширенного толкования экстремального принципа, он, в некотором смысле, аналогичен вычислению размерности многомерного пространства-времени в теории суперструн (требование сокращения квантовых аномалий).

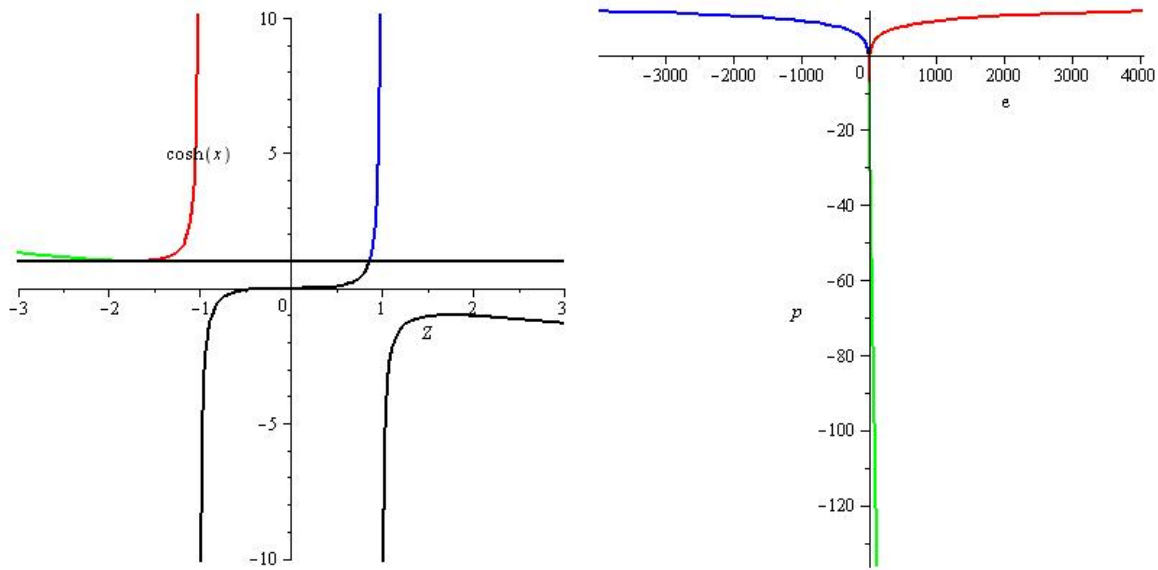


Рис. 32: Три физических области Z и три ветви уравнения состояния дублона (синяя, красная и зеленая) $\Lambda = 0$.

В совокупности с формулами:

$$\cosh x = \frac{Z^3}{\alpha_0(1-Z^2)}; \quad r = V = \frac{Z^4 - Z^2 + 2}{1 - Z^2} + \ln |1 - Z^2| \quad (252)$$

(вторая формула получается из первой с помощью (212) и второго соотношения в (169)) мы имеем теперь все соотношения для описания свойств вселенной Гиперлэнда.

Поскольку в (251) ε и p зависят от Z , мы заключаем, что в статическом Гиперлэнде плотность энергии и давления связаны уравнением состояния вида $p = p(\varepsilon)$. Оказывается, оно имеет три различные ветви с разными свойствами. Чтобы выявить этот факт, обратимся к первому соотношению (252). Оно, фактически, выделяет физические области изменения параметра Z : ввиду того, что $\cosh x \geq 1$, допустимы лишь те значения Z , при которых правая часть больше единицы. На левом графике 32 показана зависимость $Z^3/\alpha_0(1-Z^2)$. Черная горизонтальная линия ограничивает допустимые значения гиперболического косинуса — они лежат выше нее. Допустимые части ветвей отмеченной зависимости представлены синим (справа), красным (в центре) и зеленым (слева) цветами. На графике справа показаны соответствующие ветви уравнения состояния (синяя — слева, красная — справа, зеленая — по центру, близко к оси ординат), которое задается параметрически при соответствующих значениях Z (ветви одного цвета на левых и правых графиках соответствуют друг другу).

Чтобы изобразить все три ветви на одном графике, необходимо было выбрать достаточно мелкий масштаб, при котором ускользают некоторые любопытные детали. Зеленая и красная ветви сливаются в одну непрерывную кривую. При выбранном значении энергии вакуума ($\Lambda = 0$) она не проходит через ноль имеет точку максимального приближения к оси давлений, давление на этой ветви состояния всегда больше нуля, плотность энергии на зеленой ветви меньше нуля, а на красной — меняет знак. Синяя ветвь не доходит до нуля. Отметим также, что выделенность значения α_0 , полученного нами на основании соображений регуляризации уравнения экстравариационного принципа, проявляется на левом графике 32 в том, что именно при этом значении α зеленая и красная ветви уравнения состояния дублона начинают соприкасаться (красно-зеленая ветвь кривой касается горизонтальной прямой).

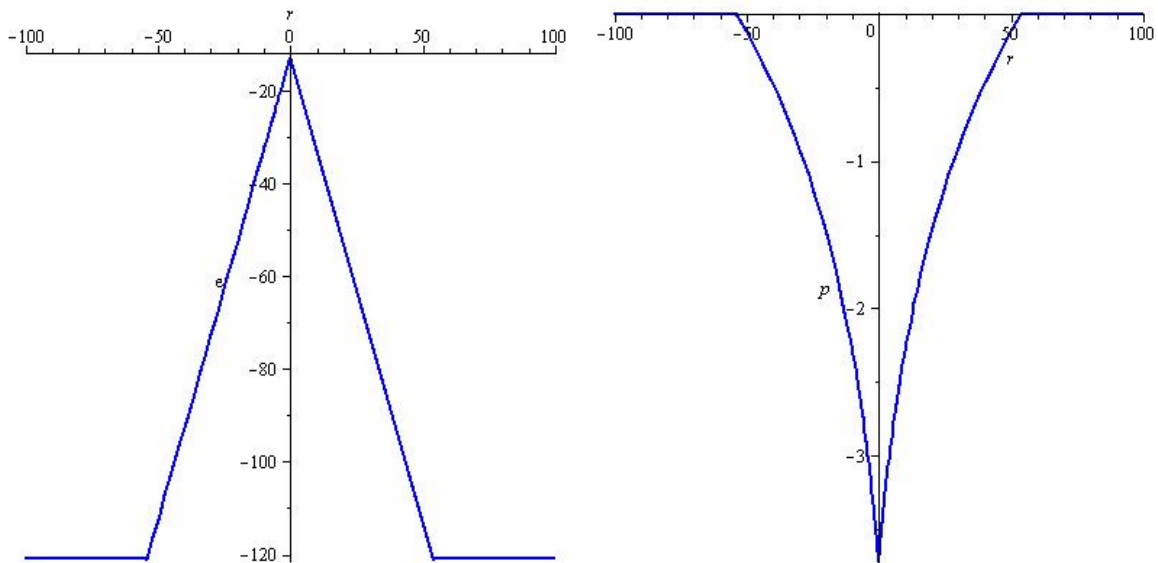


Рис. 33: $\varepsilon(r)$ и $p(r)$ «синего даблona» ($\Lambda = -5$).

Охарактеризуем более подробно различные состояния даблona. На рис. 33 представлены профили плотности энергии и давления «синего состояния».

Графики 33 получаются из (251) подстановкой туда $Z \in (\sqrt{3}/2; +\infty)$, соответствующего синей ветви на рис. 32 (слева). При выбранном $\Lambda = -5$ (для каждого цвета оно выбирается пока условно для удобства изображения) плотность энергии и давление оказываются отрицательными, при этом давление возрастает по направлению к границе «синего состояния». Эта граница определяется равенством давления даблona внешнему давлению вакуума. Отрицательность давления означает, что вещество даблona в «синем состоянии» подвержено растяжению. Поскольку вся система находится в равновесии, градиент давления должен уравнивать некоторую универсальную коллективную самосогласованную силу, действующую на каждый одномерный элемент объема даблонной материи в Гиперлэнде:

$$f - p' = 0. \tag{253}$$

Вычисляя градиент p , получим зависимость этой силы от расстояния внутри «синего даблona» (рис. 34).

Из приведенного рисунка видно, что эта сила проявляет себя здесь как сила отталкивания со следующими асимптотическими характеристиками:

$$f \stackrel{r \rightarrow \infty}{\cong} \frac{2}{r}; \quad f \stackrel{r \rightarrow 0}{\cong} \frac{2}{9}.$$

Рисунки 35-36 иллюстрируют ситуацию с красным состоянием даблona.

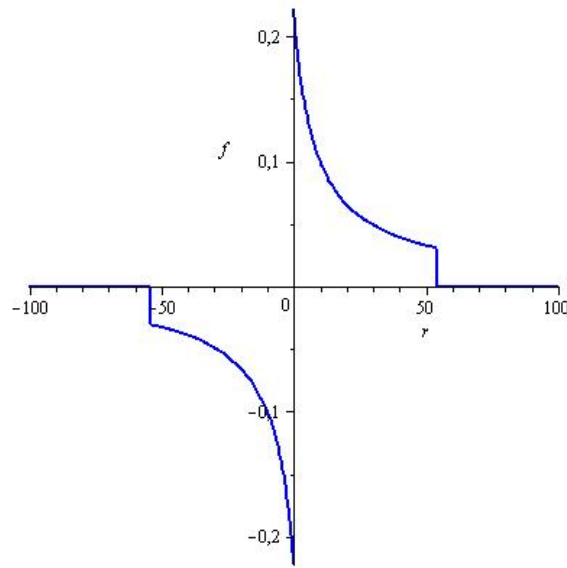
Внутри красного даблona также действует фундаментальная сила отталкивания с асимптотическими характеристиками:

$$f \stackrel{r \rightarrow \infty}{\cong} \frac{2}{r}; \quad f \stackrel{r \rightarrow 0}{\cong} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{r}}.$$

Наконец, зеленое состояние даблona характеризуется графиками 37-38.

В отличие от синего и красного состояния, зеленое состояние характеризуется силой притяжения с асимптотическими характеристиками:

$$f \stackrel{r \rightarrow \infty}{\cong} 2 - \frac{4}{r}, \quad f \stackrel{r \rightarrow 0}{\cong} -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{r}}.$$

Рис. 34: $f(r)$ внутри «синего даблона»

Мы видим, что статическая вселенная Гиперлэнда достаточно просто и несимметрично структурирована: в ней есть элементарные локализованные состояния даблонной материи с различными свойствами. Подчеркнем, что, как число даблонных состояний, так и их (весьма конкретные!) свойства мы вывели из достаточно общих принципов: принципа алгебраизации и экстравариационного принципа.

Если описанные выше даблонные состояния принять за элементарные составляющие статического Гиперлэнда (элементарные частицы? атомы?), то далее возникает естественный вопрос о возможности существования более сложных составных конфигураций элементарных составляющих (химии и физики конденсированного состояния, ядерной физики Гиперлэнда). Мы выносим обсуждение этих вопросов в следующие публикации.

15 Что дальше?

В этом разделе мы очень бегло и схематично очертим перспективы развития идей h -голоморфной «теории всего» на случай большего числа пространственно-временных измерений. Стартовой точкой является хорошо известный факт принадлежности алгебры двойных чисел к иерархии ассоциативно-коммутативных поличисловых алгебр [20, 39, 40]:

$$H = P_2 \subset P_3 \subset \dots P_n \subset \dots$$

Элементы алгебры P_n описываются вещественными комбинациями изотропных образующих e_j :

$$A = A_1 e_1 + \dots A_n e_n, \quad e_i e_j = e_j \delta_{ij},$$

таблица умножения которых является прямым многомерным обобщением таблицы умножения в H . Каждая из алгебр P_n индуцирует свою геометрию, с метрикой ${}^{(n)}\Xi$, так что имеем иерархию метрик:

$$\Xi = {}^{(2)}\Xi \leftarrow {}^{(3)}\Xi \leftarrow \dots \leftarrow {}^{(n)}\Xi \leftarrow \dots,$$

Метрика ${}^{(n)}\Xi$ имеет в изотропных координатах следующий вид:

$${}^{(n)}\Xi = \hat{S}(dx^1 \otimes \dots \otimes dx^n),$$

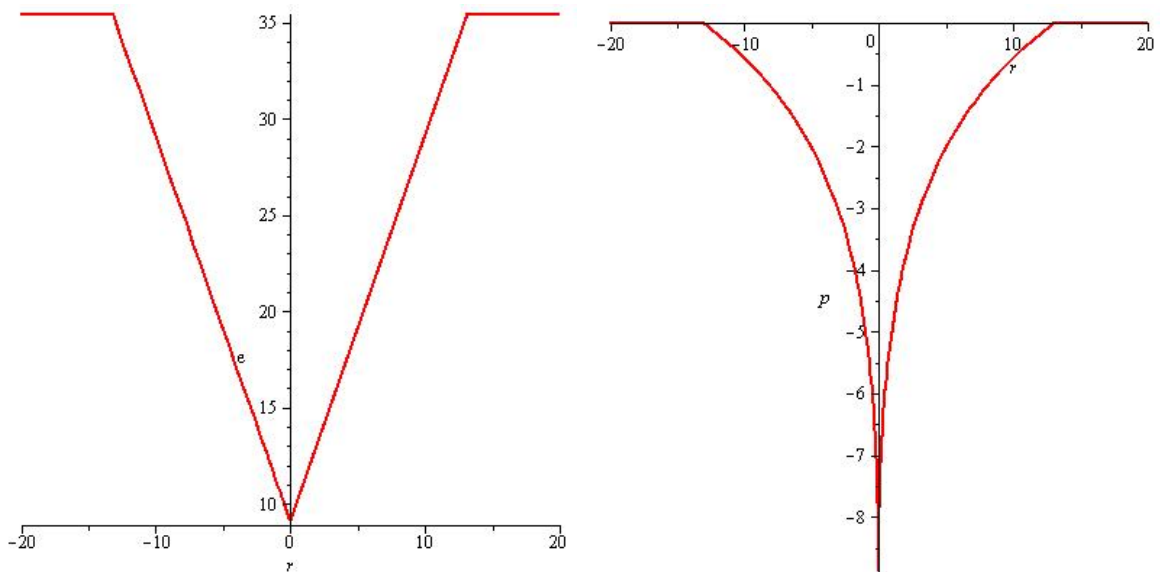


Рис. 35: $\varepsilon(r)$ и $p(r)$ «красного даблona» ($\Lambda = -1.5$)

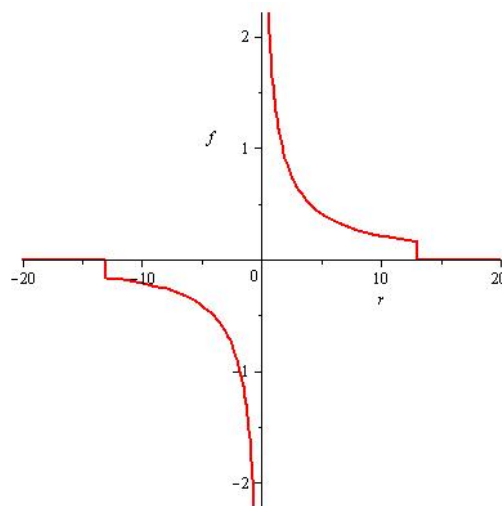


Рис. 36: $f(r)$ внутри «красного даблona».

где \hat{S} — оператор симметризации (без числового множителя), и относится к классу метрик Бервальда-Моора (псевдо)финслерова типа [41–45].

Роль скалярного «волнового оператора» играет основной оператор поличисловой теории поля (оператор Гарасько):

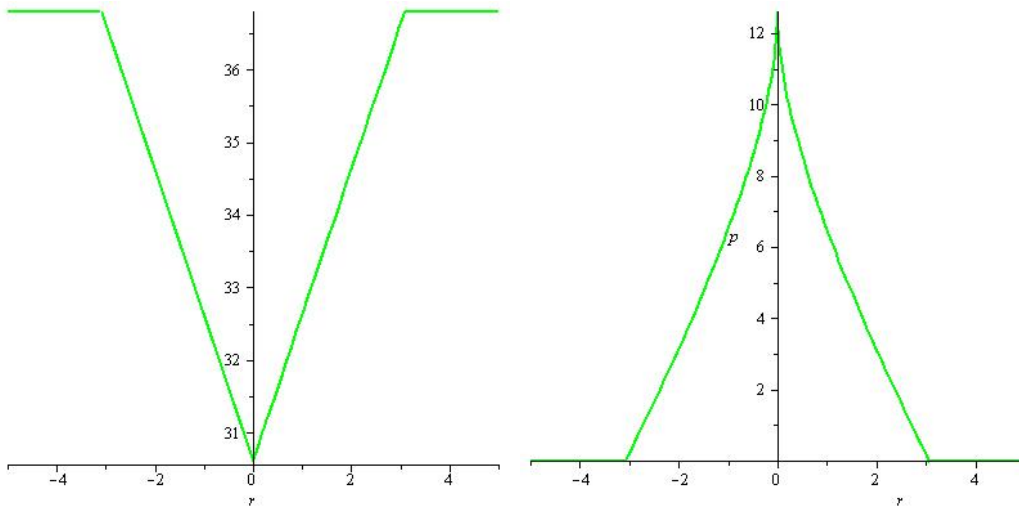
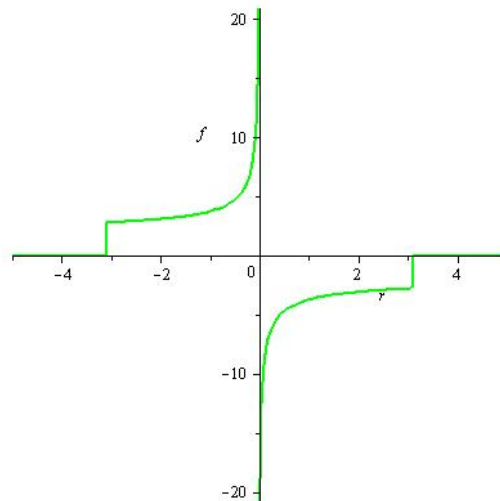
$$\bigcirc_n \equiv \frac{\partial^n}{\partial \overset{1}{x} \dots \partial \overset{n}{x}},$$

представляющий собой многомерный симбиоз волнового оператора и оператора Лапласа. Здесь $\overset{i}{x} \equiv C^i x$ — результат действия i -ого комплексного сопряжения (в алгебре P_n их $n-1$) на голоморфную поличисловую координату (см. [20]). Фундаментальное сферически-симметричное решение уравнения $\bigcirc_n R_n = 0$ ($r = \|x\|^{1/n}$) имеет вид:

$$R_n(r) = C_0 + C_1 \ln r + \dots + C_{n-1} \ln^{n-1} r,$$

где C_i — вещественные константы интегрирования [46].

Главным вопросом к физическим моделям, опирающимся на геометрию пространства Бервальда-Моора, является их соотнесение с традиционными теоретико-полевыми моделя-

Рис. 37: $\varepsilon(r)$ и $p(r)$ для «зеленого даблona» (Λ).Рис. 38: $f(r)$ внутри «зеленого даблona».

ми, которые строятся на основе метрики Минковского (глобально или локально). Ключевой конструкцией в ответе на этот вопрос является так называемая *конструкция соприкосновения* [47]. Рассмотрим ее на примере метрики Бервальда-Моора 4-ого порядка, которая индуцируется алгеброй квадратов P_4 . Метрику ${}^{(4)}\Xi$ можно рассматривать как отображение вида:

$$V(H_4) \times V(H_4) \rightarrow S(T_2^0(H_4))$$

(паре векторных полей ставится в соответствие симметричное ковариантное тензорное поле второго ранга), которое в индексных обозначениях действует по правилу: $g_{\alpha\beta} = {}^{(4)}\Xi_{\alpha\beta\gamma\delta} U^\gamma V^\delta$. Говорят, что (псевдо)риманова метрика g соприкасается с финслеровой метрикой ${}^{(4)}\Xi$ вдоль векторных полей U и V . Оказывается, что локально (в фиксированной точке H_4) возможны только два невырожденных типа метрики g : с сигнатурой $(+, -, -, -)$ и $(+, +, -, -)$ (последний случай соответствует пространству-времени гиперболических спиноров, уже рассматривавшемуся в разделе 8). Сигнатура соприкасающейся метрики зависит от взаимной относительной ориентации пары векторов U и V в фиксированной точке. Если зафиксировать направление одного из векторов и менять второй, то в некоторых направлениях метрика будет вырождаться. Такие направления вырождения образуют коническую многосвязную 3-мерную поверхность в 4-мерном пространстве H_4 .

Ее пересечение с 3-мерной гиперболической сферой будет представлять уже 2-мерную поверхность, проекция которой на одну из координатных гиперплоскостей в H_4 показана на рис. 39 (слева).

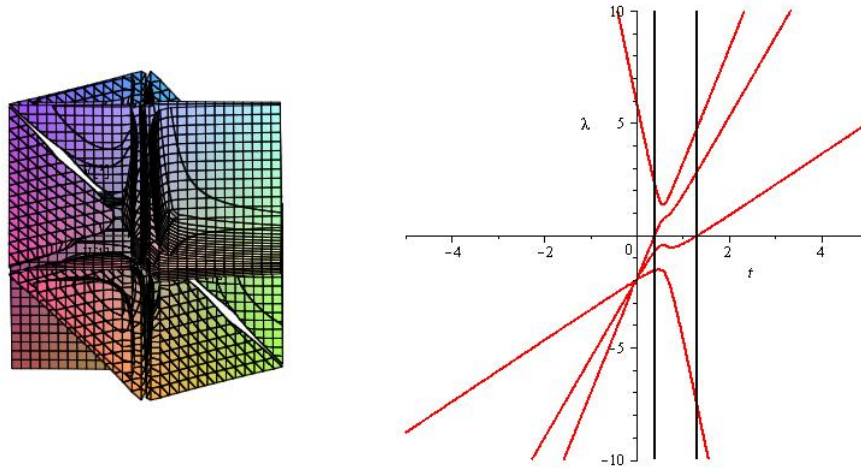


Рис. 39: Проекция поверхности вырождения соприкасающейся метрики и поведение ее сигнатуры вдоль прямой $(1 - t, 1 - 2t, 1 - 3t, 1 - 0.5t)$

Мы видим, что пространство H_4 расслаивается на домены с фиксированным причинным типом соприкасающейся римановой метрики, причем на перегородках метрика вырождается (одно из собственных значений соприкасающейся метрики относительно 4-мерной евклидовой метрики обращается в нуль). Более наглядно эту ситуацию иллюстрирует рис. 39 (справа). На нем показаны графики зависимости корней секулярного уравнения для метрики g при движении конца второго вектора вдоль некоторой прямой в зависимости от параметра t на прямой. То же представлено на рисунках 40 для других направлений.

Можно сказать, что метрика Бервальда-Моора нетривиальным образом содержит внутри себя 4-мерную метрику Минковского и метрику с сигнатурой $(+, +, -, -)$. При этом причинный тип метрики определяется характеристиками самого объекта, помещенного в H_4 (например, относительной ориентацией векторов скорости и спина частицы). Мы исследуем эти интересные возможности в следующих публикациях. Отметим здесь лишь замечательный факт: *соприкасающаяся метрика g не может быть евклидова типа!* Это следует из общего вида секулярного уравнения: коэффициент при кубе собственного значения в нем равен нулю. В силу обобщенной теоремы Виета должна быть равна нулю и

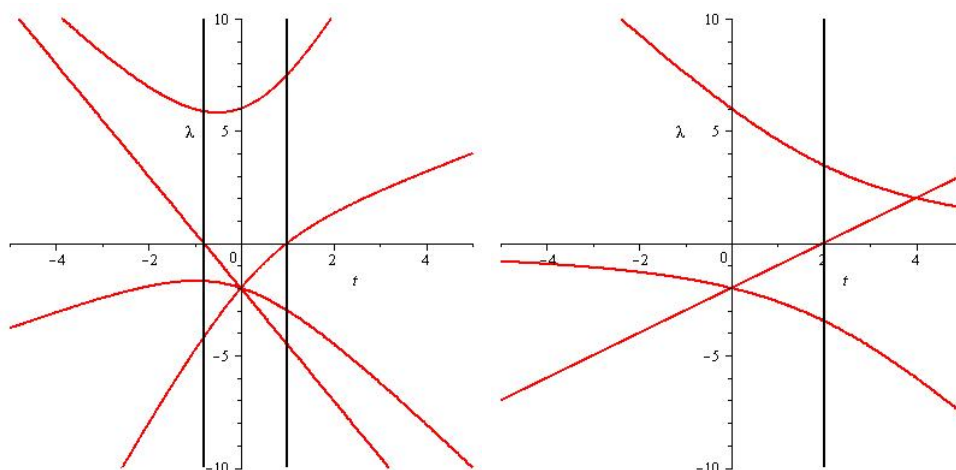


Рис. 40: Поведение сигнатуры вдоль линий $(1 - t, 1 + 2t, 1 - t, 1 + 0.5t)$ и $(1 - t, 1, 1, 1)$

сумма собственных значений $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$, следовательно эти значения не могут иметь одинаковый знак (евклидов случай)!

Обзор различных подходов к приложениям финслеровой геометрии в физике можно найти в [48].

16 Заключение

Мы рассмотрели алгебраические, аналитические, геометрические, фрактальные и физические аспекты алгебры двойных чисел. Наш анализ обнаружил несколько замечательных фактов, которые мы сейчас перечислим.

16.1 Комплексные или двойные числа?

1. Наличие делителей нуля в алгебре двойных чисел не является серьезным препятствием для их приложений. Более того, именно наличие делителей нуля в этой алгебре, в конечном счете, обуславливают релятивистский аспект физических приложений (2-мерная СТО и ее конформное расширение).
2. Факт сведения алгебры двойных чисел к прямой сумме двух вещественных алгебр, несомненно, позволяет утверждать, что эта алгебра устроена проще, чем алгебра комплексных чисел. Тем более удивительным становится наличие гиперболических аналогов большей части комплексных объектов (гиперболические дробно-линейные преобразования, гиперболические спиноры, h -голоморфные функции, гиперболические конформные преобразования, гиперболические условия Коши-Римана и гиперболическая гармоничность и т.д.) с аналогичными свойствами.
3. Разумеется, не все факты комплексного анализа имеют полные гиперболические аналоги (таковых нет в точном смысле для интегральной формулы Коши, для фракталов, для совпадения классов голоморфных и аналитических функций и ряда других фактов). При этом, однако, не все факты алгебры двойных чисел имеют комплексные аналоги (к примеру, на комплексной плоскости нет изотропного базиса и тесно связанной с ним конформной структуры). Наконец, часть родственных фактов осталось просто незатронутой в этой статье (например, мы совсем не коснулись гиперболического аналога стереографической проекции, поскольку такая конструкция (она существует!) требует выхода в алгебру тройных чисел — 3-мерное непосредственное (и простейшее) обобщение алгебры двойных чисел. Этому вопросу будет посвящена специальная публикация в будущем). Отметим, что возможность естественного и непосредственного многомерного обобщения алгебры двойных чисел, также является характерным отличительным свойством этой алгебры. Скажем, в алгебре квадрачисел P_4 (вещественная размерность 4 — см. раздел 15) все изотропные измерения равноправны, в то время как 4 вещественных измерения \mathbb{C}^2 комбинируются с точки зрения комплексной структуры в пару комплексных прямых.
4. Можно сказать, что алгебры комплексных и двойных чисел в определенном смысле дополняют друг друга. Наиболее рельефно мы можем наблюдать это в физике Гиперлэнда: в ней имеется целая «лакуна реальности», которая не описывается действием, построенным на алгебре двойных чисел. Действительно, если строить голоморфную теорию 2-мерной Вселенной, опираясь на алгебру комплексных чисел (назовем ее Эллиплэндом) и повторяя дословно все рассуждения, мы придем к уравнению (245) с тригонометрическим косинусом. Его область значений $[-1; 1]$ выделит на графиках 32 область физических значений Z , которые не попали в Гиперлэнд. Ей будет соответствовать небольшой кусочек синей ветви уравнения состояния вблизи нуля на правом

графике — это часть реальности 2-мерной вселенной. Можно сказать, что воображаемые жители Гиперлэнда (назовем их гиперболонами), исследуя свой мир, могли бы прийти чисто «феноменологическим путем» к алгебре комплексных чисел, исследуя закономерности поведения вещества своей вселенной. Напротив, недостаточность алгебры комплексных чисел для описания свойств Эллиплэнда также могла быть установлена воображаемыми эллиптонами феноменологически. Полная картина возникает только при одновременном использовании алгебр \mathbb{C} и \mathbb{H} , при этом диаграмма на рис. 1 приобретает даже некоторый буквальный физический смысл.

16.2 КТО и физика Гиперлэнда

1. Концепция КТО занимает промежуточное место между специальной и общей теориями относительности. С одной стороны, мы строим теорию поля в плоском двумерном пространстве-времени, с другой — расширяем множество изометрических преобразований, оставляющих метрику форминвариантной, до множества конформных преобразований, которые образуют бесконечномерную группу. При этом физико-геометрические эффекты, порождаемые гиперболическим полем, могут быть истолкованы на языке эффективной метрики пространства-времени (полученной деформацией плоской метрики Минковского в декартовых координатах). Мы, однако, становимся на активную точку зрения на координатные преобразования, согласно которой деформируется само пространство-время, в то время как псевдоевклидова метрика считается недеформируемой (отсчетной). Наглядно деформация пространства-времени в нашем подходе представлена на рис. 41. Общее обсуждение теории пространства-времени с позиций

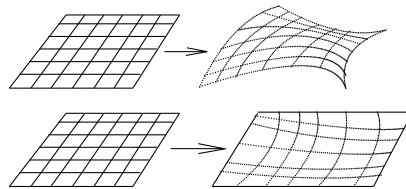


Рис. 41: Деформация пространства-времени в ОТО (сверху) и в h -голоморфном подходе (снизу). В ОТО деформации пространства-времени в общем случае связаны с изгибанием пространственно-временной мембраны, приводящими к кривизне, в то время как в h -голоморфном подходе деформация пространственно-временной мембраны сводится к растяжениям-сжатиям, оставляющим внутреннюю кривизну нулевой.

теории упругости многомерных сплошных сред можно найти в [36, 37].

2. В пустом пространстве-времени h -поле описывается h -голоморфной функцией двойной переменной. Условия гиперболической голоморфности (101) автоматически обеспечивают волновой характер h -поля F в этом случае, равно как и конформную инвариантность вместе со спецрелятивистской инвариантностью.
3. В пустом пространстве-времени h -поле проявляет себя в эффектах конформной деформации хроноинтервалов и пространственных длин, принципиально доступных экспериментальному наблюдению. С позиций классических специальной и общей теорий относительности эти эффекты объясняются на геометрическом языке, включающем спецрелятивистские эффекты и кривизну. В частности, формулы (180)-(181) по всей видимости представляют собой альтернативное выражение классического эффекта гравитационного красного смещения, традиционно описываемого в рамках геометрических

теорий гравитации с помощью неоднородной метрики временных промежутков. Вопрос о точном соотношении теории относительности с развиваемым в настоящей статье подходом мы оставляем для будущих исследований. По всей видимости предлагаемый подход является альтернативным к ОТО (в ее двумерной версии) и ни одна из теорий не является частным или предельным случаем другой.

4. Области пространства-времени, заполненные материей, характеризуются отличным от нуля квадратом модуля неголоморфности $\mathcal{X} = |F_{\bar{h}}|^2$. При этом все основные свойства материи (плотность энергии, давление и их связь) определяются видом потенциальной функции $\mathcal{U}(\mathcal{X})$. Выбор действия в виде (190) автоматически обеспечивает как согласованность с предыдущим пунктом, так и возможность описания протяженных конфигураций материи (соотношение (212) и обсуждение в конце раздела 14.3). Отметим некоторую условность разделения лагранжиана в (190) на кинетическое и потенциальное слагаемые: первое (кинетическое) слагаемое, рассматриваемое под знаком интеграла в действии (190) может быть преобразовано в выражение X с помощью двукратного перекрестного применения формулы интегрирования по частям. Таким образом, можно считать, что излагаемый нами подход не содержит кинетического члена в действии и описывает статическое пространственно-временное равновесие 2-мерной вселенной. Такая точка зрения в несколько ином аспекте высказывалась ранее в работе [38].
5. Возможна ситуация, когда величина $\mathcal{X} = 0$, в то время как сама неголоморфность $F_{\bar{h}} \neq 0$. Такая неголоморфность должна соответствовать «материи», которая в некотором смысле близка по своим свойствам к пустому пространству-времени. Выскажем здесь гипотезу, согласно которой неголоморфность с нулевым модулем описывает безмассовые физические поля (гравитацию и (или) электромагнетизм). Эта гипотеза частично подкрепляется следующим наблюдением: формулы (225) при $\mathcal{X} = 0$ дают уравнение состояния материи вида $p = \varepsilon$, которое в случае 2-мерного пространства-времени описывает газ ультрарелятивистских частиц³³.
6. Новые интересные и перспективные возможности излагаемого подхода открывает изложенная нами в общих чертах в разделе 14.5 супервариационная процедура. С одной стороны, эта процедура применима к любой фундаментальной теории поля. Она дает принципиальную возможность рассчитать как фундаментальные параметры теории, так и ее фундаментальные зависимости, не выходя за рамки самой теории. С другой стороны, как это показывает более тщательный анализ [35], не для всякой теории поля супервариационный принцип дает содержательные результаты. В разделе 14.6 мы установили, что теории h -голоморфных полей с действием вида (190) имеют суперэкстремум вида (239), который и представляет собой ту единственную уникальную модель пространства-времени-материи, которая и подлежит детальному изучению в рамках данной теории.

Более реалистичные и богатые по физическому содержанию ситуации возникают при обобщении развитого подхода на случай поличисел P_n высших измерений. При этом основные положения и интерпретация теории, оставаясь в своих общих чертах неизменными, требуют некоторой доработки. Мы планируем посвятить таким обобщениям ряд будущих публикаций.

Литература

- [1] Пенроуз Р. Путь к реальности или законы, управляющие вселенной. РХД, Москва-Ижевск, 2007.

³³В рассматриваемом нами 2-мерном случае при этом оказывается, что $p = \varepsilon = \mathcal{U}(0) = \text{const}$.

- [2] Владимиров Ю.С. Пространство-время: явные и скрытые размерности. (изд-е 2-е переработанное) М., Книжный дом «Либроком» 2010.
- [3] Кокарев С.С. Три лекции о законах Ньютона. В сб. трудов РНОЦ «Логос», Ярославль, вып.1, 2006, с.45-72, arXiv: 0905.3285v1[gr-qc]
- [4] Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля (в 4-х томах). М., УРСС, 1996-2000.
- [5] Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М., Наука, 1987.
- [6] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М., Наука, 1979
- [7] Элиович А.А., Санюк В.И. Некоторые аспекты применения полинорм в теории поля // *ТМФ*, 2010, 2, 162, с. 163–178.
- [8] Гайденко П.П. История греческой философии в ее связи с наукой. М., УРСС, 2009.
- [9] ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М., Наука, 1979.
- [10] Zelenov E. p-adic mathematical physics and space-time // *Grav. & Cosm.*, v. 1, N. 3, 1995, pp. 243–246.
- [11] Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1977.
- [12] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973.
- [13] Яглом И.М. Комплексные числа и их применения в геометрии. М., Физматгиз, 1963.
- [14] Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. М., Наука, 1969.
- [15] Kisil V.V. Erlangen Programme at large: an overview. ArXiv: 1106.1686v2
- [16] Павлов Д.Г., Гарасько Г.И. Двойные числа // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2010, 1(13), том. 7.
- [17] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. h -голоморфные функции двойной переменной и их приложения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 13, 2010, с. 44–77.
- [18] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 13, 2010, с. 78–127.
- [19] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(14), т. 7, 2010, с. 11–37.
- [20] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Аналитические, дифференциально-геометрические и алгебраические свойства гладких функций поличисловой переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(16), т. 8, 2011, с. 4–53.
- [21] Шабат Б.О. Введение в комплексный анализ (в 2-х томах). М., Наука, 1985.
- [22] Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время (т.1,2). М., Мир, 1987.
- [23] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1992.
- [24] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М., <Институт компьютерных исследований>, 2002.
- [25] Милнор Дж. Голоморфная динамика. Вводные лекции. Ижевск, НИЦ <Регулярная и хаотическая динамика>, 2000.
- [26] Khrennikov A., Segre G. An Introduction to Hyperbolic Analysis. arXiv: math-ph/0507053v2
- [27] Labine M. Hyperbolic Cauchy Integral Formula for the Split Complex Numbers. arXiv: 0712.0375v1 [math-ph]

- [28] Herranz F.G. A new quantum $so(2,2)$ algebra. arXiv: math/9911138v1
- [29] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Малыхин А.В., Панчелюга В.А. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2009, 1(11), том. 6, с. 135–145.
- [30] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналога множества Жюлиа при нулевом значении параметра на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2009, 1(11), том. 6, с. 146–151.
- [31] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналогов множества Жюлиа на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2009, 2(12), том. 6, с. 163–176.
- [32] Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. М., Энергоиздат, 1982.
- [33] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. Поисковые исследования пространственно-временных эффектов гиперболических полей. Предварительные результаты // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, (1)17, 9, 2012, с. 162–175.
- [34] Паули В. Теория относительности. М., Физматлит, 1991.
- [35] Кокарев С.С. Экстравариационный принцип в теории поля. В сб. трудов РНОЦ «Логос», вып.6, 2011, с. 123–146.
- [36] Kokarev S.S. Space-time as multidimensional elastic plate // *Nuovo Cimento*, B113, 1998, pp. 1339–1350.
- [37] Kokarev S.S. Space-time as strongly bent plate // *Nuovo Cimento*, B114, 1999, pp. 903–921.
- [38] Kokarev S.S. Classical solids dynamics as 4D static of elastic strings // *Nuovo Cimento*, B116, 2001, pp. 915–936.
- [39] Павлов Д.Г. Обобщение аксиом скалярного произведения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2004, 1(1), 1, с. 5–19.
- [40] Гарасько Г.И., Павлов Д.Г. Геометрия невырожденных поличисел // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2007, 1(7), 4, с. 3–25.
- [41] Balan V. Spectral properties and applications of numerical multilinear algebra of m -root structures // *Hypercomp. Numb. Geom. Phys.*, 2(10), 5, 2008, 101.
- [42] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Конформные калибровки геометрии Бервальда-Моора и индуцируемые ими нелинейные симметрии // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(10), 5, 2008, 3.
- [43] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Метрические бинглы и тринглы в H_3 // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(11), т. 6, 2009, с. 42–67.
- [44] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Аддитивные углы в пространстве H_3 // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2008, 2(10), 5, с. 25–43.
- [45] Balan V., Lebedev S. On the Legendre transform and Hamiltonian formalism in Berwald-Moore Geometry // *Dyff. Geom. Dyn. Syst.*, 12, 1, 2010, 4.
- [46] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Некоторые задачи математической физики в поличисловой теории поля // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2012, 2(18), 9, с. 200–255.
- [47] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Римановы метрики, соприкасающиеся с 3-мерной финслеровой метрикой Бервальда-Моора // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(10), т. 5, 2008, с. 15–24.
- [48] Balan V., Bogoslovskiy G.Yu., Kokarev S.S., Pavlov D.G., Siparov S.V., Voicu N.

Geometrical Models of the Locally Anisotropic Space-Time // *Journal of Modern Physics*, 2012, 3, pp. 1314–1335. (arXiv:1111.4346)

ALGEBRA, GEOMETRY AND PHYSICS OF DOUBLE NUMBERS

D.G. Pavlov¹, S.S. Kokarev^{1,2}

¹ *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia*

² *RSEC Logos, Yaroslavl, Russia*

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

The paper presents developed version of talk, given at the seminar, which took place 04.04.2013 in PFUR (Moscow) with sir R. Penrose. Some important analogies of complex algebra and analysis based on double numbers algebra are considered (polar and exponential forms of double numbers, elementary functions over double numbers, linear-fractional transformations and hyperbolic spinors, h -holomorphic functions and their properties, h -holomorphic extensions). The second part of the paper is devoted to some physical applications of double numbers algebra (SR and its conformal generalization, the «theory of everything» in Hyperland, extravariational principle). The theory of Hyperland can be treated as low-dimensional version of future more realistic «theory of everything», based on polynumbers algebra P_n .

Key Words: double numbers, h -holomorphic functions, hyperbolic Cauchy-Riemannian conditions, hyperbolic spinors, conformal relativity theory, conformal deformation of space-time, Hyperland, non-holomorphicity, extravariational principle.