КРАСОТА И СИЛА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ И ИХ РОЛЬ В РАЗВИТИИ ТВИСТОРНОЙ ТЕОРИИ

Роджер Пенроуз[1]

Публичная лекция сэра Роджера Пенроуза, прочитанная 2 апреля 2013 года в МГТУ им. Баумана, г. Москва. Лекция представляет некоторые аспекты комплексных чисел, их физические приложения, а также связь с теорией твисторов.

Ключевые слова: комплексные числа, световой конус, сфера Римана, конформное преобразование, когомология, теория твисторов.

Комплексные числа — тема достаточно известная, поэтому я хотел бы остановиться только на некоторых аспектах, касающихся их. В первую очередь, существует очень известное представление комплексных чисел на плоскости, сделанное первоначально норвежцем Весселем и позднее развитое многими другими исследователями.

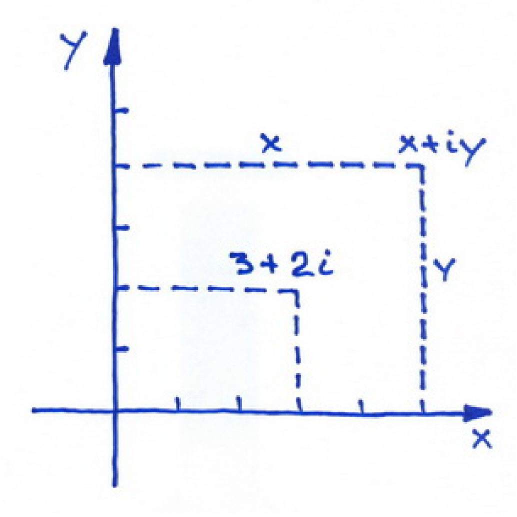


Рис. 1: Геометрическое представление комплексного числа. Комплексная плоскость Весселя (Арганда, Гаусса, ...).

Говоря о комплексных числах, мы имеем в виду мнимую единицу i, которая есть корень квадратный из минус единицы:

$$i^2 = -1 \tag{1}$$

Любое комплексное число z может быть представлено вещественным числом x плюс i, умноженным на другое вещественное число y: $x + iy$. То есть мы представляем x и y — действительную и мнимую части комплексного числа z в виде двух координат на плоскости. Действия сложения и умножения двух комплексных чисел z и w

$$w + z = (u + z) + i(v + y), \quad w = u + iv, \quad z = x + iy, \tag{2}$$

$$wz = (ux - vy) + i(uy + vx) \tag{3}$$

[1]Запись лекции сэра Роджера Пенроуза, прочитанной 2 апреля 2013 года в МГТУ им.Баумана, г. Москва. Перевод данной лекции и ее запись осуществлена Кирсановой Г.В.

легко представить с точки зрения геометрии, это хорошо известно. Здесь действует правило параллелограмма, рис. 2, для действия сложения (2). Действие умножения (3), выполняется в соответствии с правилом подобных треугольников, рис. 3. Как я уже сказал, это всё очень знакомо и понятно. Приятно, что существует геометрическое представление этих алгебраических действий.

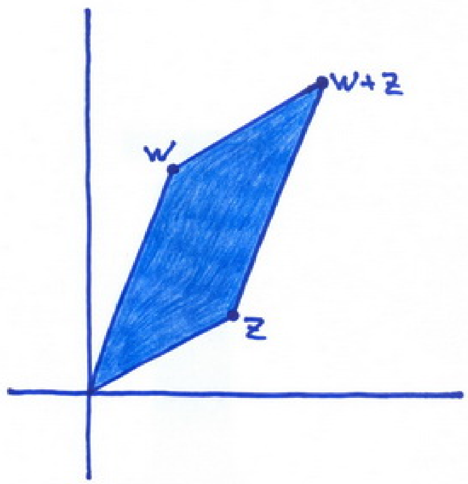


Рис. 2: Геометрическое представление правила параллелограмма для сложения комплексных чисел.

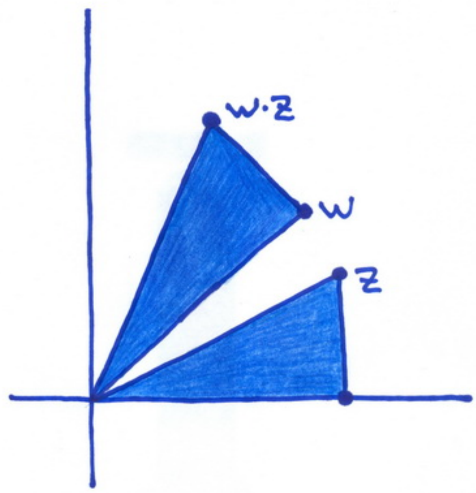


Рис. 3: Умножение комплексных чисел в соответствии с правилом подобных треугольников: треугольники с вершинами 0, 1, z и 0, w, $w \cdot z$ подобны.

В комплексных числах есть нечто завораживающее. Я бы хотел пояснять два из наиболее известных загадочных свойств комплексных чисел. Первое из них очень хорошо известно. Рассмотрим вот это достаточно простое полиномиальное уравнение, являющееся, если хотите, определением i:

$$z^2 + 1 = 0 \tag{4}$$

Если у нас имеется одно решение: i, будет и ещё одно решение: $-i$. Это всё хорошо известно. Из простого утверждения, что (4) имеет решения $z = \pm\, i$ мы выводим, что любое нетривиальное полиномиальное уравнение (5) имеет n решений для многочлена степени n:

$$z^n + az^{n-1} + bz^{n-2} + \ldots + gz + h = 0. \tag{5}$$

Когда я был студентом, больше всего меня завораживал тот удивительный факт, что тогда как для вещественных функций мы имеем разнообразнейшие порядки гладкости и мы можем продифференцировать функцию не один раз, а два или три, и даже бесконечное число раз, и всё же не найти возможность представить это в виде степенного ряда. Но если функция является гладкой с точки зрения комплексных чисел и поддается дифференцированию хотя бы один раз, то это означает, что её можно продифференцировать сколько угодно раз. И, более того, мы автоматически можем вывести разложение в степенной ряд этого числа, то есть если она является гладкой в точке начала координат или рядом с этой точкой, то мы наблюдаем разложение в степенной ряд, и затем вблизи другой точки мы можем наблюдать перенос степенного ряда. Это замечательные свойства, которые являются следствием решения этого простого уравнения.

У комплексных чисел существует и много других магических свойств. Я постоянно открывал для себя всё новые и новые свойства по мере того, как изучал комплексные функции, в особенности, при изучении комплексных функций более одной переменной. В этом случае у комплексных чисел и комплексных функций есть много замечательных свойств.

Ещё одна интересная характеристика комплексных чисел заключается в следующем. Пусть мы имеем простую на первый взгляд функцию, такую, как $1/(1+z^2)$. На рис. 4 представлен график этой функции для случая, когда z — вещественное число. На нем она выглядит идеально однородной и гладкой. Для этой функции мы имеем разложение в степенной ряд (6), расходящийся при $|z|>1$:

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \ldots \tag{6}$$

Если мы рассмотрим частичные суммы ряда (6), то обнаружатся две точки при $z=\pm 1$ в которых графики частичных сумм «отрываются» от графика рассматриваемой функции, несмотря на то, что функция не имеет каких-либо особенностей в этих точках. Как я уже сказал, при $z=\pm 1$ здесь происходит нечто странное и интересное.

Ситуация проясняется, если рассматриваемая функция будет комплексной. В данном случае существуют сингулярности в точках $\pm i$. Известен следующий результат: для любого степенного ряда вида (6) существует некоторый круг, названный кругом сходимости и обладающий следующим свойством: если комплексное число z лежит строго внутри круга, то при таких значениях z ряд сходится, если же z лежит вне круга, то ряд является расходящимся. Радиус круга определяется ближайшей к началу координат сингулярностью (внутри круга не должно быть сингулярностей).

Следовательно, в нашем случае, мы имеем круг сходимости единичного радиуса, который пересекает действительную ось точках ± 1. Это объясняет почему данная функция в обоих случаях сходится и расходится в одних и тех же областях.

Так или иначе, мы получаем больше информации о вещественных функциях, рассматривая комплексную плоскость. Существуют и многие другие интересные аспекты, которые я поясняю позже.

Итак, волшебство, магия комплексных чисел. Я всегда ловлю себя на мысли, что «за кулисами» происходит нечто интересное и неведомое. Для того чтобы понять функционирование вещественных функций, нам часто приходится рассматривать комплексные числа, нам необходимо более глубокое понимание природы функций комплексной переменной.

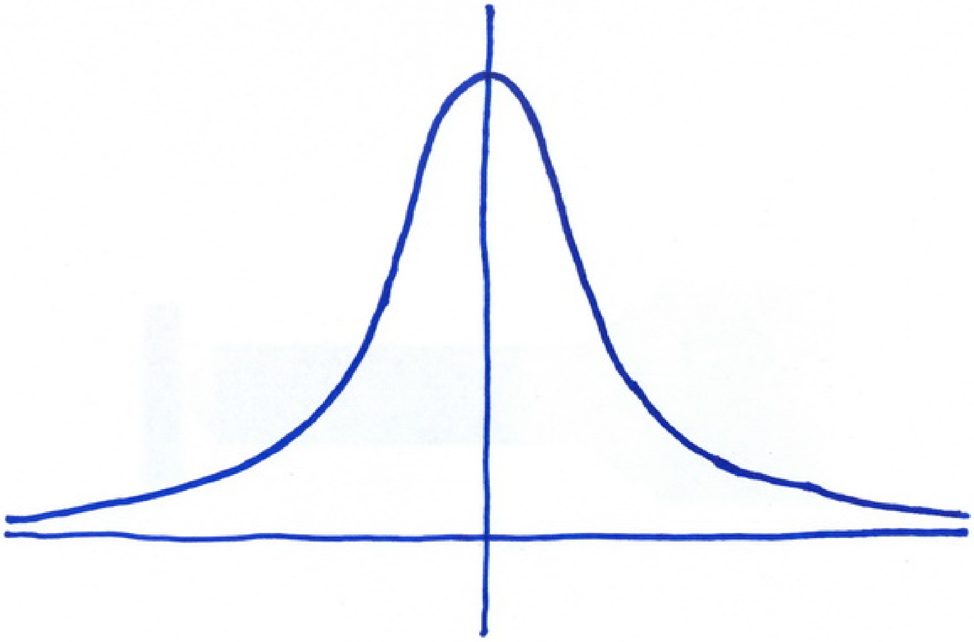


Рис. 4: График функции (6) в предположении, что z — вещественное число.

Комплексно-аналитическая функция, то есть функция, являющаяся гладкой и, следовательно, имеющей разложение в степенной ряд, называется «голоморфной функцией» $f(z)$, и именно этим термином я собираюсь пользоваться.

Всё это можно показать с помощью геометрического представления. Предположим, мы рассматриваем отображение, где w является функцией от z, и хотим отобразить её в какой-то области на комплексной плоскости или плоскости Весселя, это отображение переходит из одной области в другую. То есть здесь — плоскость z, а здесь — плоскость w, и эта область отображается в эту область. Но, с точки зрения геометрии, свойство, которым обладает эта голоморфная функция, заключается, в первую очередь в том, что она является конформной, На рис. 5 вы видите отображение в виде двух кривых, расположенных под углом друг к другу. Они являются одинаковыми, т.е. конформными. Это можно представить и другим образом, изобразив небольшую фигуру, которая при отображении может вращаться, расширяться или сокращаться. Тем не менее, форма фигуры остаётся прежней, например, небольшая окружность на z-плоскости будет отображаться в такую же небольшую окружность на w-плоскости.

Это природа голоморфной функции: она является конформной, и, кроме того, надо сказать, сохраняющей направление, то есть она не отражается. Таким образом, в голоморфном отображении направление сохраняется. Это очень ценное свойство. Вы, конечно, слышали о функции Жуковского. Это буквально завораживало меня, ещё когда я был студентом, например, возможность понять, что происходит в случае потока воздуха, я имею в виду функцию формы аэродинамического профиля и соответствующие преобразования. Идея заключается в том, что если имеется бездивергентный и бесповоротный поток, мы можем отобразить такой поток в двухмерном пространстве как другой такой же поток, используя одно из этих конформных или голоморфных отображений.

Если нам известны характеристики потока в некоторой небольшой области и эта область не возмущает поток вовсе, тогда с помощью одного из голоморфных преобразований эта область отображается в окружность, и мы получаем поток, обтекающий окружность или цилиндр (в данном случае двумерный), рис. 6. Свойства потока, обтекающе-

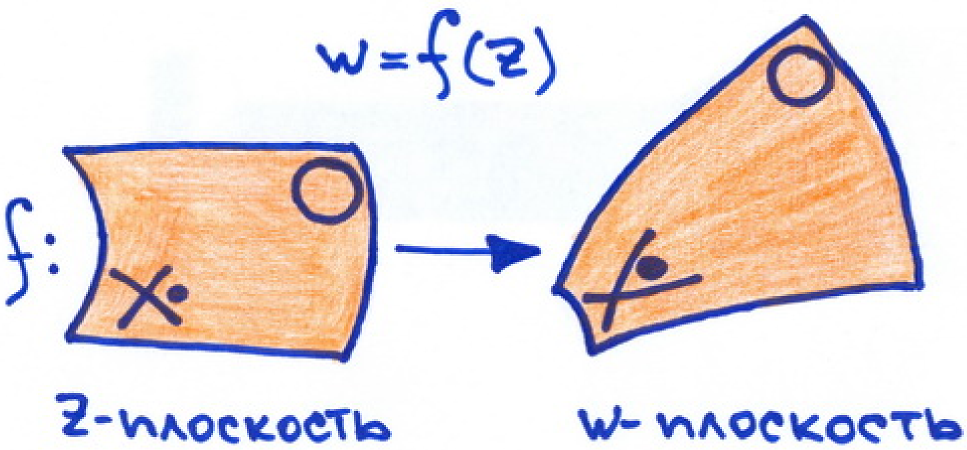


Рис. 5: Голоморфная функция $f(z)$. (= комплексная гладкость = комплексная аналитичность).

го цилиндр, можно понять из голоморфного отображения. Преобразование Жуковского, простое и явное, помогает преобразовать окружность, рис. 6, например, в форму аэродинамического крыла. Свойства потока, огибающего крыло, можно понять с помощью комплексного анализа. Помню, когда я узнал об этом, будучи ещё студентом, я нашёл это чрезвычайно интересным.

Ещё одна вещь, которую я узнал в студенческие годы, это теория электрических цепей, более глубокое представление о которых можно получить, используя комплексные числа. Например, колебания и тому подобное можно очень легко понять, если рассматривать поведение системы с точки зрения комплексных чисел. Это всё очень красиво.

Существует множество совершенно разных областей применения комплексных чисел как, например, уже упоминавшиеся, динамика жидкостей и теория электрических цепей. Но вы можете сказать, что в некотором смысле это всё ухищрения, остроумные математические приемы, которые могут оказаться полезными для понимания свойств, например, потока особого рода, характеризующегося определенной вязкостью. Но когда речь идёт о трёхмерном пространстве, все уже не так просто и могут возникнуть осложнения, которые сделают анализ не таким уж изящным. Возможно, в этих случаях комплексные числа не играют основополагающей роли? Но надо понять, что с их помощью вы можете выполнять действия, которые с помощью других способов и методов не будут столь же изящными.

Пытаясь глубже понять структуру вселенной, мы находим, что есть область, в которой комплексные числа играют основополагающую роль. Я говорю о квантовой теории.

Напомню, что такое квантовая теория. На рис. 7 а) представлены два идеализированных эксперимента, которые демонстрируют корпускулярную или волновую природу света. Здесь показан лазер Л, испускающий, скажем, фотоны. В первом эксперименте (рис. 7 а)) — изображен расщепитель пучка Р. Д1 и Д2 — фотонные приемники. Мы обнаруживаем, что фотон может двигаться либо по пути A, либо по пути B, и при имеющемся расщепителе пучка будет активироваться то один, до другой детектор. То есть этот детектор Д1 будет активироваться в 50% случаев, а Д2 — в остальных 50%. Для частиц это очень хорошо можно себе представить, потому что всегда можно сказать, что частица двигается либо так, что активирует детектор Д1, либо иначе, активируя Д2. Полагая, что ситуация идеальна, вы понимаете, что движение всегда происходит либо по пути A, либо — по пути B. И это очень интересная ситуация. Невозможно представить себе, что один и тот же фотон будет детектироваться обоими детекторами или не будет детектироваться ни одним из них. Всегда будет активироваться только один из детекторов. Это то, что представляет собой поведение объектов, подобных частицам.

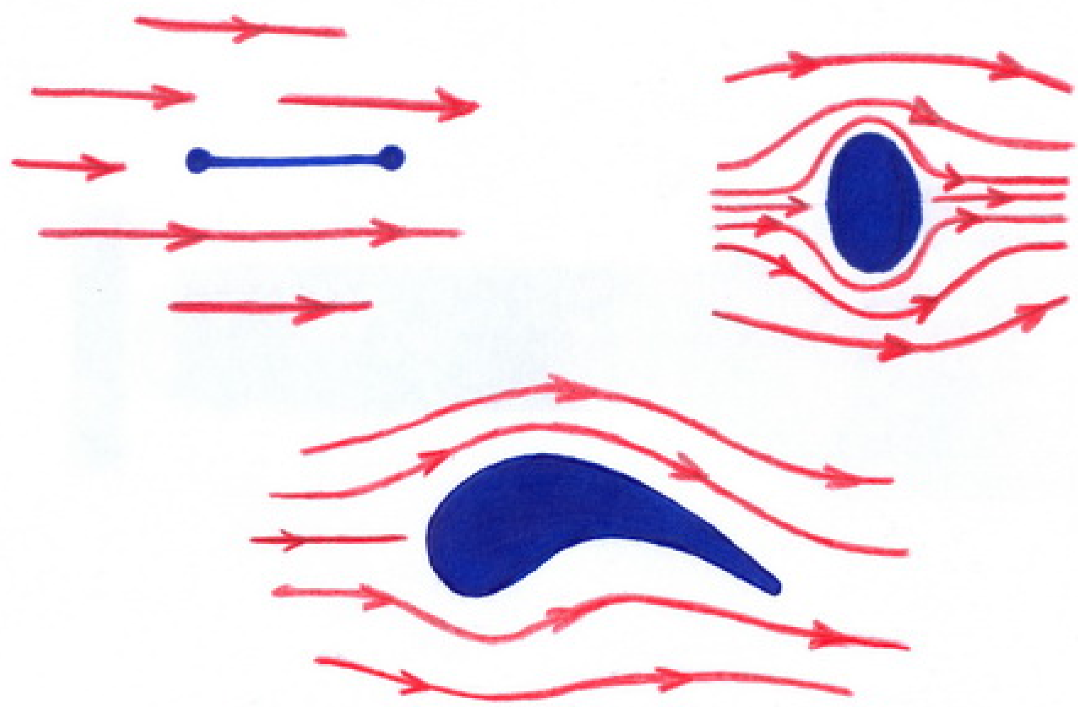
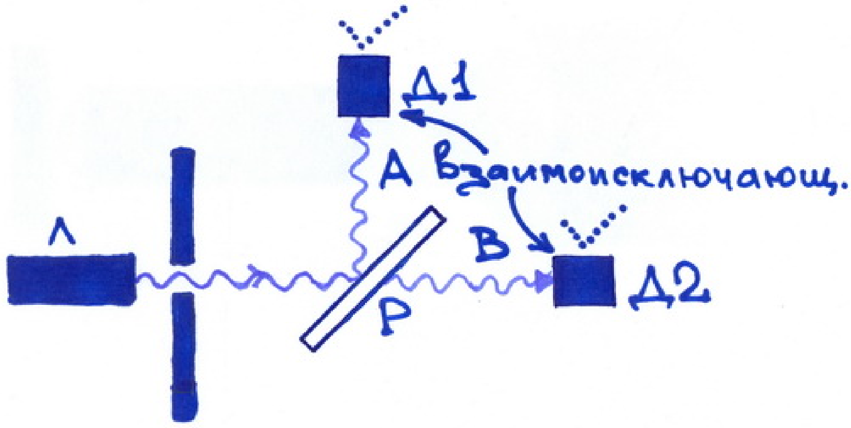


Рис. 6: Иллюстрация преобразования Жуковского для двухмерного ламинарного потока жидкости.

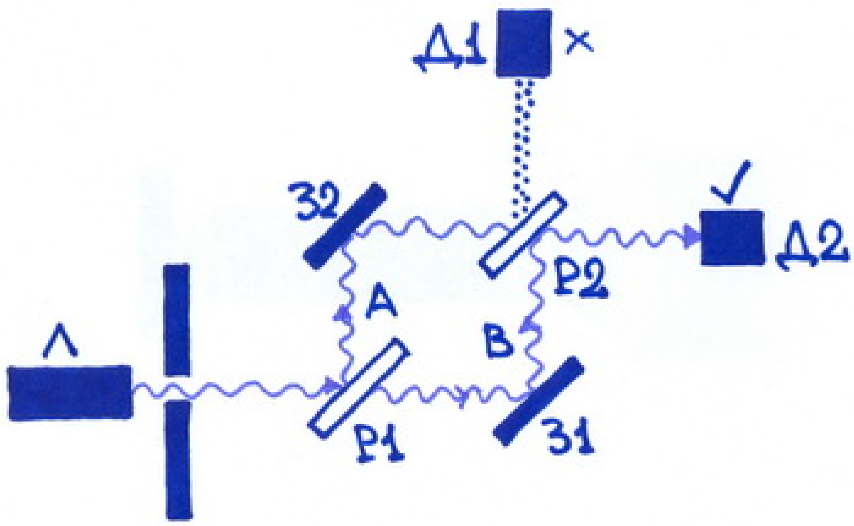
С другой стороны, можно несколько видоизменить наш эксперимент, добавив интерферометр. На рис. 7 б) изображён расщепитель пучка Р1, далее имеются два обычных зеркала З1 и З2, находящиеся под углом в 45 градусов по отношению к направлению луча. Далее — второй расщепитель Р2. В случае с частицами вы можете сказать, что частица двигается либо в направлении А, либо — в направлении В. И можно ожидать, что на протяжении половины времени она будет двигаться по одному пути, а на протяжении остального времени — по другому. Но, в действительности, полагая все расстояния одинаковыми, мы обнаруживаем, что частица всегда будет регистрироваться только детектором Д2, и никогда — Д1. То есть объяснение с точки зрения физики частиц больше не работает.

Пусть теперь вместо частиц мы будем рассматривать волновые пакеты. Представьте себе небольшой объект в форме волны. Волна делится на две части, то есть этот пакет волн делится на две части, и обе части попадают в Д2 усиливая друг друга. А распространяясь в другом направлении к Д1, они будут взаимно уничтожаться, поэтому они никогда не будут регистрироваться в этом направлении. Результаты, приведённые на рис. 7 б), объясняются, используя пакет волн.

Необходимо сделать следующее, и это достаточно нестандартно - необходимо рассматривать любую из ситуаций с точки зрения двух альтернативных способов поведения фотона. Рассматривая ситуацию с точки зрения корпускулярной теории, вы не можете сказать, что частицы или волны двигаются в одном из двух направлений. Вы должны будете сказать, что фотон делает и то, и другое, двигаясь в обоих направлениях одновременно, что было бы по меньшей мере странно. Если следовать уравнению Шрёдингера, то процесс происходит следующим образом. Существует эволюция двух альтернатив: системы А, и системы В. И надо рассматривать эти альтернативы как происходящие одновременно. Т.е.



а)



b)

Рис. 7: Идеализированные эксперименты, демонстрирующие корпускулярную (а) и волновую (б) природу света.

имеет место суперпозиция этих двух альтернативных состояний:

$$w \cdot \boxed{\text{альтернатива А}} + z \cdot \boxed{\text{альтернатива В}}, \quad w, z \in \mathbb{C}$$

Что обозначают коэффициенты w и z? Можно сказать, что они представляют собой вероятности того или другого сценария; иногда исследователи рассматривают волновые функции как волны вероятности. Но на самом деле такое объяснение не работает. Для того чтобы имела место интерференция, эти коэффициенты должны представлять собой комплексные числа.

Представим себе, что w и z представляют собой точки на плоскости комплексной переменной, а коэффициенты являются комплексными числами. Надо понять, что на квантовом уровне имеет место суперпозиция комплексных чисел. Они создают интерференцию. Однако необходимо рассмотреть ещё кое-что. Я имею в виду эволюцию, описываемую уравнением Шрёдингера, при которой эти числа сохраняются. Видите ли, каждая из систем эволюционирует отдельно, т.е. имеются альтернативы А и В. Если хотите, имеют место две ситуации, два мира, развивающиеся одновременно. Чтобы всё это имело смысл, необходимо произвести измерения, предполагается, что это должны делать детекторы. Я обозначил буквой $\mathbb{C}$ комплексные числа, а буква $\mathbf{U}$ обозначает унитарную эволюцию, которая описывается уравнением Шрёдингера. Я не буду здесь подробно это рассматривать.

Уравнение Шрёдингера — это особенное уравнение, объясняющее появление этих альтернативных состояний, остающихся согласно данному уравнению в положении суперпозиции. Это линейное уравнение, в котором сохраняются две одновременно эволюционирующие системы. Однако когда мы производим измерения (это то, что делают детекторы), мы внезапно сталкиваемся с необходимостью изменить правила. И вот эти элементы w и z, в некотором смысле, становятся вероятностями. Затем $|w|^2$ и $|z|^2$ становятся относительными вероятностями для A и B соответственно.

Теперь о второй части квантовой механики. Первая часть — это унитарная эволюция $\mathbf{U}$. Вторая часть называется редукцией квантового состояния $\mathbf{R}$ или коллапсом волновой функции. Я хотел бы рассказать об этом немного подробнее в конце лекции. Вообще, это несколько странно для меня, но для того чтобы квантовая механика имела смысл, приходится выполнять две совершенно разные операции, одна из которых является голоморфной, то есть $\mathbf{U}$, а вторая — нет. Вещь весьма странная, есть здесь парадокс своего рода.

Конечно, вы можете сказать: «Но ведь детекторы сами состоят из квантовых частиц, и они также должны вести себя как квантовые системы. Так почему же они не ведут себя так, как вы говорите?». Занимаясь квантовой механикой, вы должны учитывать, что вы в процессе меняете правила, например, вы говорите: «Нет-нет, здесь я использую другую процедуру, определю вот эти вероятности (это называется правилом Борна)». Вы применяете правило Борна и получаете вероятностный ответ. Уравнение Шрёдингера само по себе не имеет вот этой вероятностной составляющей. Итак, мы имеем дело с двумя тесно, но несколько туманно, связанными процедурами.

Я бы хотел рассмотреть их с точки зрения комплексного, голоморфного поведения. Голоморфную функцию можно рассматривать (а это новый взгляд на голоморфную функцию) как результат действий сложения и умножения (это то, что мы обсуждали ранее, рассматривая геометрическое представление). При операции сложения w и z происходит смещение всей плоскости в направлении w. С другой стороны, используя правило умножения, умножение на w приводит к повороту и стягиванию плоскости.

Таким образом, имеют место две основные операции, то есть мы рассматриваем действия сложения и умножения, а также действие нахождения предела. И это ещё один взгляд на то, что представляет собой голоморфная функция.

Ещё одним действием, которое является применимым и полезным, является нахождение комплексно сопряжённого числа. Это отражено на рис. 8 z принимает вид $\bar{z}$, это комплексно сопряжённое число, отражённое относительно действительной оси. Мнимая часть комплексного числа $\bar{z}$ изменяет знак, а его действительная часть остаётся неизменной.

Слово «голоморфный» означает, что мы можем произвести действия сложения, умножения и нахождения предела, но не можем произвести комплексного сопряжения. Если мы введём комплексное сопряжение, мы рискуем потерять всю красоту комплексных чисел и фактически вернёмся к вещественным функциям.

Но если комплексное сопряжение не используется, то мы остаёмся в области голоморфности. Как видим, унитарная часть квантовой механики лежит внутри области голоморфности. С другой стороны, при проведении измерений мы вдруг уходим из этого мира голоморфности и остаёмся, если ходите, в объективном (реальном) мире, с которым мы знакомы лучше по сравнению с квантовыми явлениями, с квантовым миром, в каком-то смысле нам для нас незнакомом. И всё это находит отражение в поведении комплексных чисел.

Подробнее остановимся на комплексной геометрии, представляющей собой вещь весьма полезную. На этом слайде изображено действие, которое носит название стереографиче-

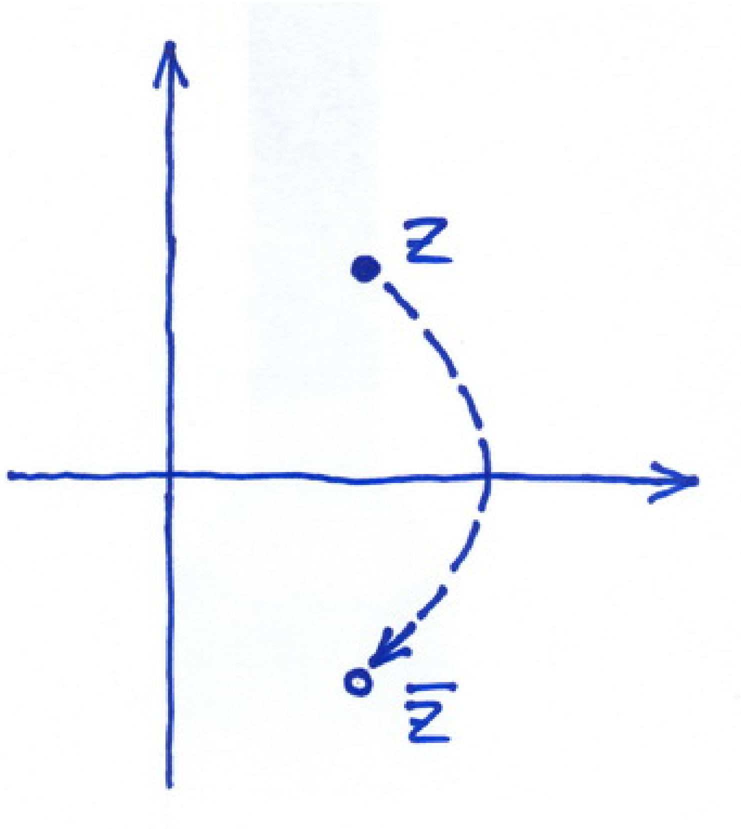


Рис. 8: Геометрическая иллюстрация операции комплексного сопряжения.

ской проекции. Недавно я читал одну лекцию, в которой затрагивал некоторые древние устройства. Стереографическая проекция, которая изображена на рис. 9, была известна по крайней мере в 150 году до нашей эры Гиппарху — очень древняя вещь! Астролябии, которые использовались в древности для отображения звёзд, основывались на принципе стереографической проекции.

Они знали всё об одном замечательном свойстве стереографической проекции. Я имею в виду, представление сферы (говоря о древних, это карта небосвода) и отображение её таким интересным образом на плоскости (я буду рассматривать эту плоскость как проходящую через экватор). Вверху изображён северный полюс N. Стереографическая проекция является конформной, то есть если на сфере имеется окружность, то она будет отображаться на плоскости в виде окружности. Это удивительный факт, известный ещё Гиппарху много веков назад, использовался в астролябиях. Интересно и то, что древним, по-видимому, было хорошо известно, что если строить отображение от южного полюса, то есть, если мы возьмём окружность на плоскости, отобразим её на сфере (от южного полюса), то, мы будем иметь две стереографические проекции: в одном случае окружность проецируется в окружность на сфере, а в другом случае мы имеем обратное отображение. Фактически, это было известно задолго до древних греков. Вообще для подробного изложения нужна ещё одна лекция. Моя же задача здесь – показать этот удивительно красивый способ представления плоскостей на сфере.

Это свойство очень удобно также в квантовой механике. Я уже упоминал о плоскости Весселя. Но если вы пожелаете рассмотреть отношения чисел (а это особенно заметно при рассмотрении частиц с полуцелым спином, таких, как электрон, нейтрон, протон), тогда спин частиц в квантовой механике может рассматриваться с точки зрения двух основных состояний, которые часто условно называют спином, направленным вверх, и спином, направленным вниз: spin-up и spin-down, рис. 10.

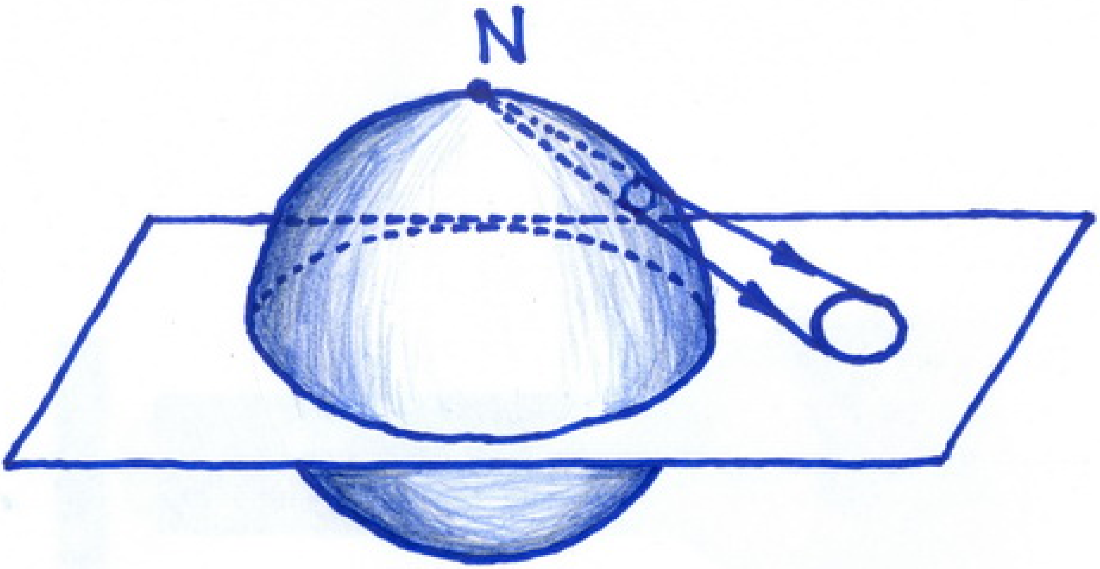


Рис. 9: Стереографическая проекция.

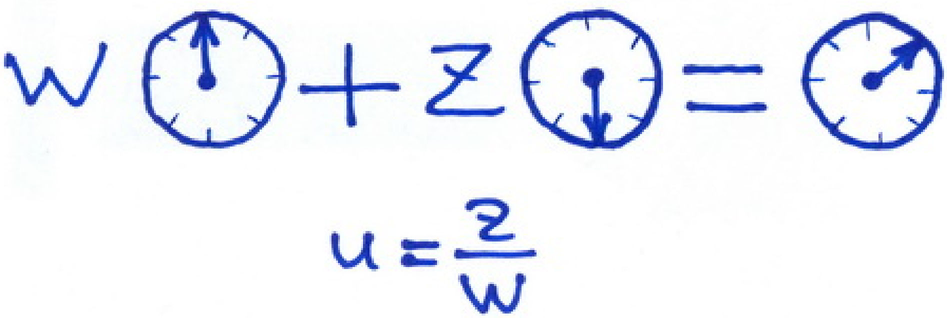


Рис. 10: Суперпозиция spin-up и spin-down состояний.

Любое другое направление обусловлено одной из квантовых суперпозиций этих направлений вверх и вниз. Интересным фактом, который мы получаем для полуцелого спина является то, что различные состояния спина соответствуют пространственным направлениям. Мы можем рассматривать их с точки зрения римановой сферы. Это способ представления, если хотите, отношений двух комплексных чисел — вспомните, когда я говорил об измерениях и отношениях, которые нас здесь интересуют, эти отношения могут быть равными нулю, или только одно из этих чисел может быть равно нулю. Это будет означать, что это отношение бесконечно большое.

То есть надо также как-то представить бесконечность. Как я заметил раньше, можно строить проекцию или от северного полюса, или от южного. В данном случае я строю проекцию от точки южного полюса. Экватор сферы выделяет на плоскости Весселя единичную окружность, проходящую через точки ± 1, $\pm i$. Все точки на этой плоскости соответствуют точкам на сфере. Но в дополнение к этому мы имеем бесконечность, каковой является сам южный полюс. По мере того, как эта точка движется вниз в бесконечность, отображение её двигаться в бесконечность на плоскости (эта точка южного полюса на сфере обозначена знаком бесконечности). Таким образом, мы включаем также бесконечность.

То, что Риман открыл, представляет собой очень удобную вещь в том смысле, что это позволяет правильно и красиво представлять многие явления, связанные с комплексными функциями. Риманова сфера — это также способ геометрического представления состояния частиц с полуцелым спином. Рассмотрим отношение равное $z/w=u$, где u представляет какую-то точку на плоскости. В стереографической проекции это точка на сфере, и проекция от начала координат — это ось, относительно которой определяется спин частицы, если вы измеряете его в этом направлении. Квантовая механика хорошо вписывается в геометрию пространства.

Я всегда повторяю, что это построение очень красиво и до некоторой степени загадочно. Числа, которые выглядят как отвлечённые, я имею в виду комплексные числа, которыми мы манипулируем в квантовой теории, по крайней мере в случае частиц с полуцелым спином, имеют очень чёткое геометрическое отображение с точки зрения геометрии пространства.

Комплексные числа также играют особенную роль при рассмотрении трёхмерного пространства, т.к. существует связь между направлениями в пространстве и комплексными числами в квантовой механике. Поскольку, видите ли, эта сфера — двухмерная сфера, а мы рассматриваем направления в обычном трёхмерном пространстве.

Я всегда находил удивительным факт, что любая квантовая система, характеризуется двумя состояниями. Я использую здесь систему обозначений, которую использовал Дирак. Ничего страшного, если вам это не знакомо. Буквой $|A\rangle$ обозначено состояние, $|B\rangle$ также обозначает состояние. Если у нас имеется система с двумя возможными состояниями, допустим, что это переменные или ортогональные состояния, тогда любое состояние можно представить как линейную комбинацию этих двух. И это только концептуальная схема — отношение этих двух чисел даёт нам риманову сферу. Это не связано непосредственно с геометрией с точки зрения рассмотрения частиц с полуцелым спином. Но если это система с двумя состояниями, то опять-таки риманова сфера играет важную роль, которую я демонстрировал ранее, но в данном случае мы не думаем о направлении от начала координат до точки на сфере. Возможно, это имеет отношение к направлению спина, а, может быть, является чем-то более абстрактным.

Посмотрим на геометрическое представление процедуры измерений. $|\Psi\rangle$ представляет собой суперпозицию состояний $|A\rangle$ и $|B\rangle$. Затем проводим измерения в другом направлении с тем, чтобы найти вероятность того, в каком направлении будет происходить движение. Довольно несложная геометрия здесь имеет место. Вероятность «нет» показана вот этим отрезком, а вероятность «да» — этим. Вы проводите измерения и получаете ответ «да» или «нет», в зависимости от того, в каком месте на сфере располагается начальное состояние. Имеет место простое соотношение. Я бы не хотел на этом подробно останавливаться. Это геометрия.

Итак, что касается полуцелого спина, то здесь прослеживается очень отчётливая связь с геометрией пространства. Это особенный случай. Как увидеть что-то подобное у частиц с другим значением спина?

Существует очень красивое описание, знакомое физикам благодаря итальянскому физику Майорана. Он умер очень молодым, успев сделать замечательные вещи в физике. Одним из таких достижений, не очень хорошо известным, является то, что имеет место нечто похожее на то, что я описал для случая частиц с полуцелым спином. Здесь состояние спина представлено точкой на сфере; все возможные состояния всегда представляют разные точки на сфере, другими словами, они направлены в разных направлениях от начала координат.

Если имеется частица со спином $n/2$, то это значит, что есть n точек, неупорядоченных на сфере. Это общее состояние. Не хочу вдаваться в подробности, я просто хотел дать общее представление. Основная мысль состоит в том, что представление Майораны осно-

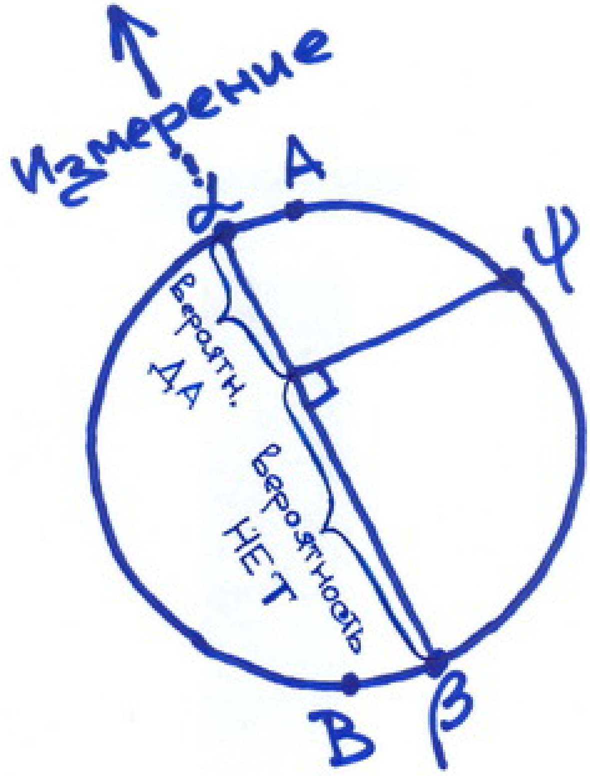


Рис. 11: Геометрическое представление квантовомеханической процедуры измерений.

вывается непосредственно на данном представлении. Немного подробнее об этом скажу чуть позже. Это основная теорема алгебры. Я говорил ранее, что это одно из замечательных свойств комплексных чисел. Полиномиальные уравнения могут быть разложимы на множители, полиномиальные уравнения разрешимы.

Это основная теорема алгебры. Любое полиномиальное уравнение имеет решение. Это то свойство, которое используется здесь, и разные корни дают нам разные направления. Представление Майораны даёт нам прямое применение основной теоремы алгебры. Физики обычно рассматривают основные состояния, которые представляют собой примеры, частные случаи, применения представления Майораны. Все направления — это либо «вверх», либо «вниз». В первом примере видим, что все направления (в данном случае их шесть) — «вверх»; все они могут быть направлены только вверх; или все, кроме одного, или кроме двух (направленных вниз) и так далее до случая, когда все они направлены вниз. Существует несколько основных состояний, согласно представлению Майораны, которые мы получаем, просто произвольно выбирая n; то есть на сфере имеется n неупорядоченных точек. Это представление Майораны, которое непосредственно вытекает из основной теоремы алгебры, и которое здесь находит особенное применение.

А как ведут себя безмассовые частицы? Например, фотон? Существует два основных состояния поляризации фотона: правосторонняя поляризация и левосторонняя поляризация по отношению к направлению движения. Известно, что для безмассовых частиц существует только два, а не n состояний, которые характерны для частиц с более высоким спином. Неважно, каким конкретно является спин, если он больше нуля; существует только два независимых состояния. На рис. 12 я представил фотон, для которого существует два основных состояния: правостороннее и левостороннее. В общем случае мы имеем линейную комбинацию правостороннего и левостороннего состояний, что даёт нам эллиптическую поляризацию.

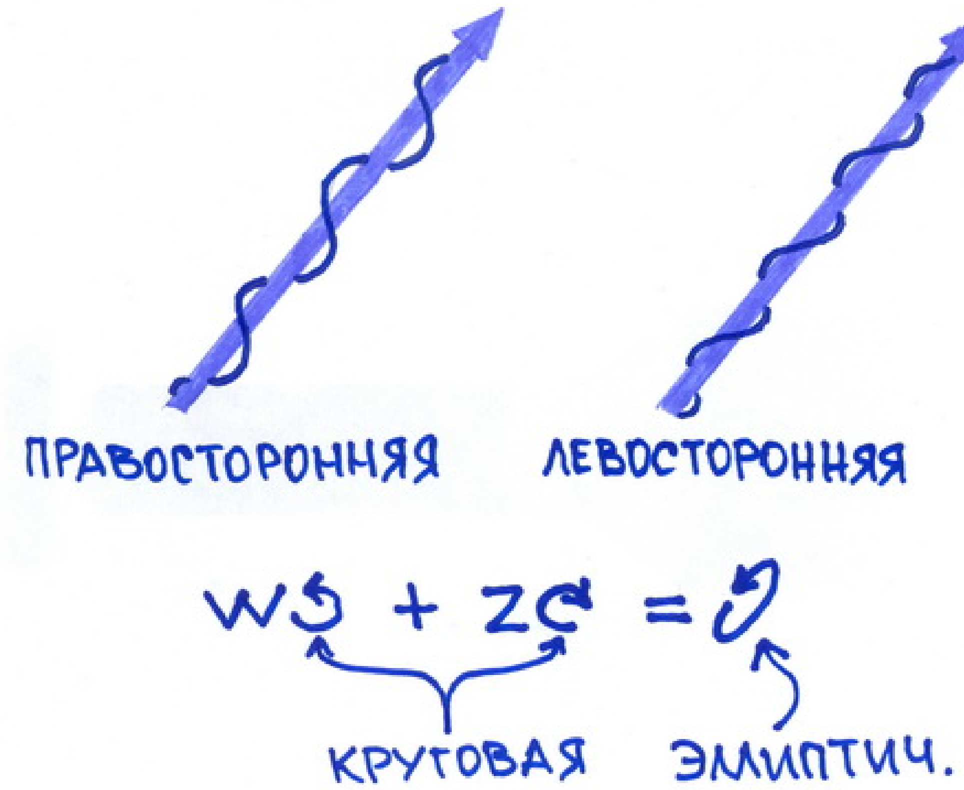


Рис. 12: Состояния поляризации фотона.

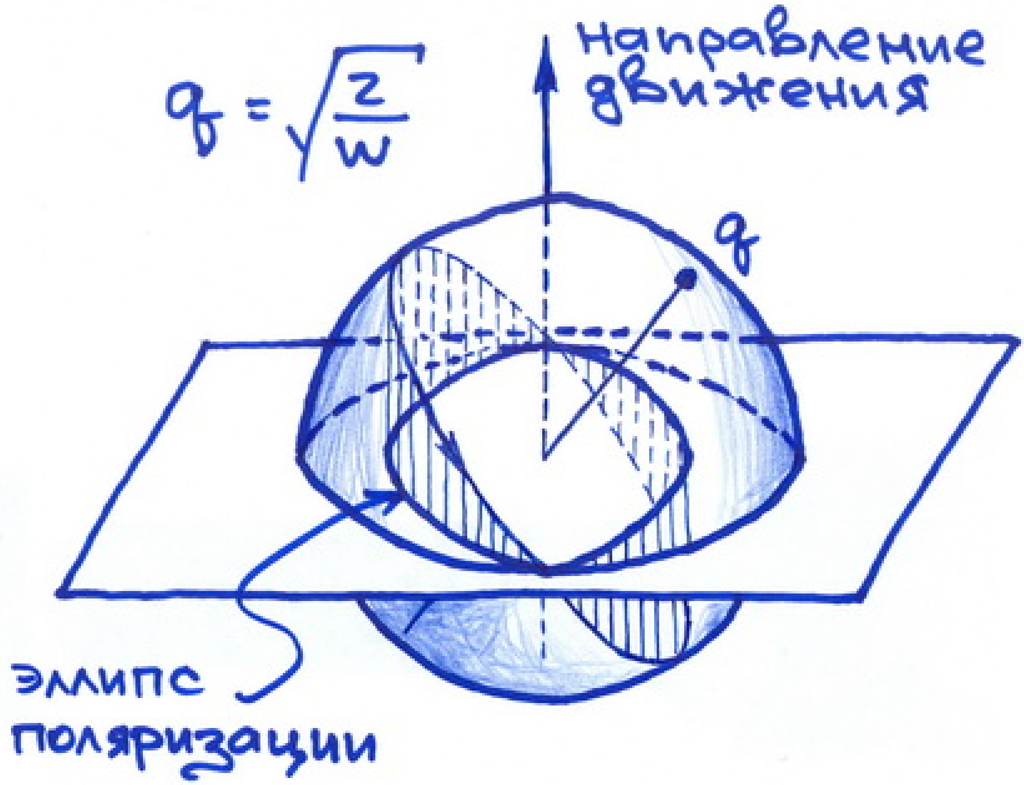


Рис. 13: Состояния поляризации фотона.

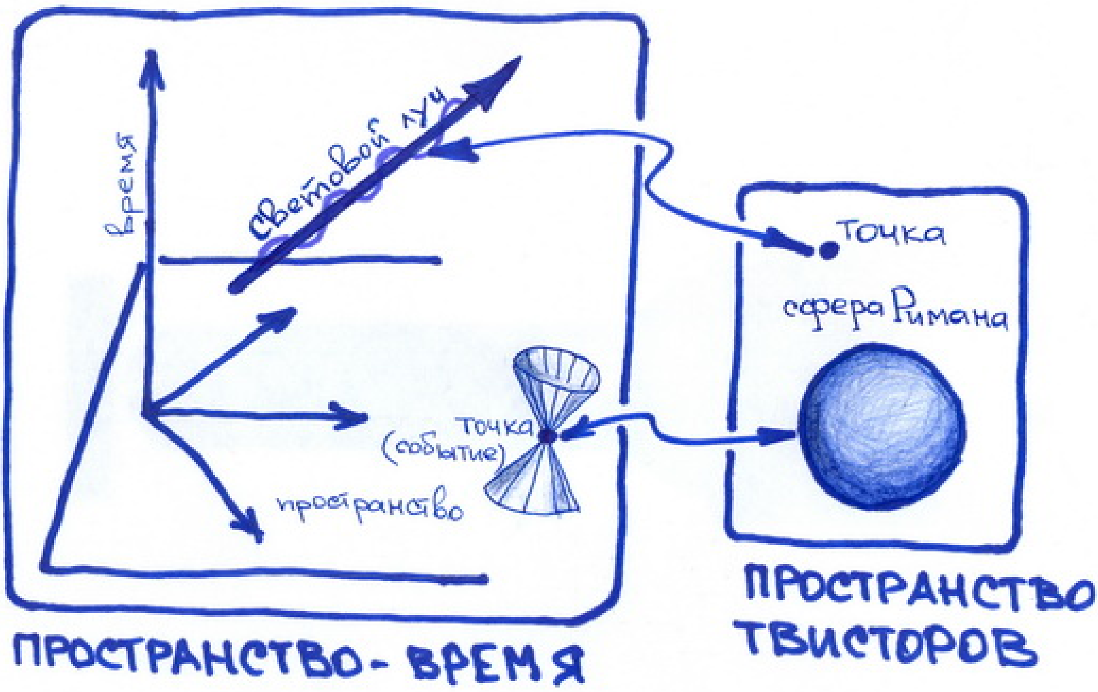


Рис. 14: Представление пространства-времени в теории твисторов.

Рассмотрим это с точки зрения геометрии. На рис. 13 мы видим представление Стокса. На сфере Римана представлен квадратный корень отношения w/z. Предположим, фотон движется в вверх. На рис. 13 направление движения фотона показано стрелкой. В этом случае q представляет состояние поляризации. Изображаем плоскость, перпендикулярную направлению q и получаем окружность, рассекающую сферу, проецируем её вниз, в направлении движения. Получаем эллипс на плоскости, который представляет собой эллипс поляризации. Используя это комплексное геометрическое представление, видим, как эти эллипсы поляризации соотносятся с отношениями этих комплексных чисел на сфере Римана. Это всё, что касается темы комплексного представления.

Теперь я бы хотел поговорить о теории твисторов. Я должен сказать, что разрабатывая эту идею, я использовал теорию относительности. Теория основана на специальной теории относительности. Но и для общей теории относительности здесь также есть место, но у меня, к сожалению, нет времени, чтобы рассказать об отношении теории твисторов и общей теории относительности. Поэтому будем рассматривать ситуацию только с точки зрения специальной теории относительности.

На рис. 14 изображено представление пространства-времени. Три вектора на плоскости — направления пространства (на самом деле, здесь должно быть трёхмерное пространство), и ось вверх — направление времени. А здесь представлен световой луч. В соответствии с тем, что я рассказал вам о фотонах (рассматривая их, мы говорили о состояниях поляризации, основных состояниях, левосторонней и правосторонней поляризации, круговой поляризации относительно направления движения), это классическое представление движения фотона.

На рис. 14 слева, мы предполагаем, что имеет место пространство-время. Фотон будет представлен, по крайней мере, с классической точки зрения, прямой линией, а мы рассматриваем скорость света. Световые лучи направлены под углом 45 градусов к вертикали на изображении справа. Здесь представлена, так сказать, история фотона, который характеризуется так называемой спиральностью, то есть существует закручивание миро-

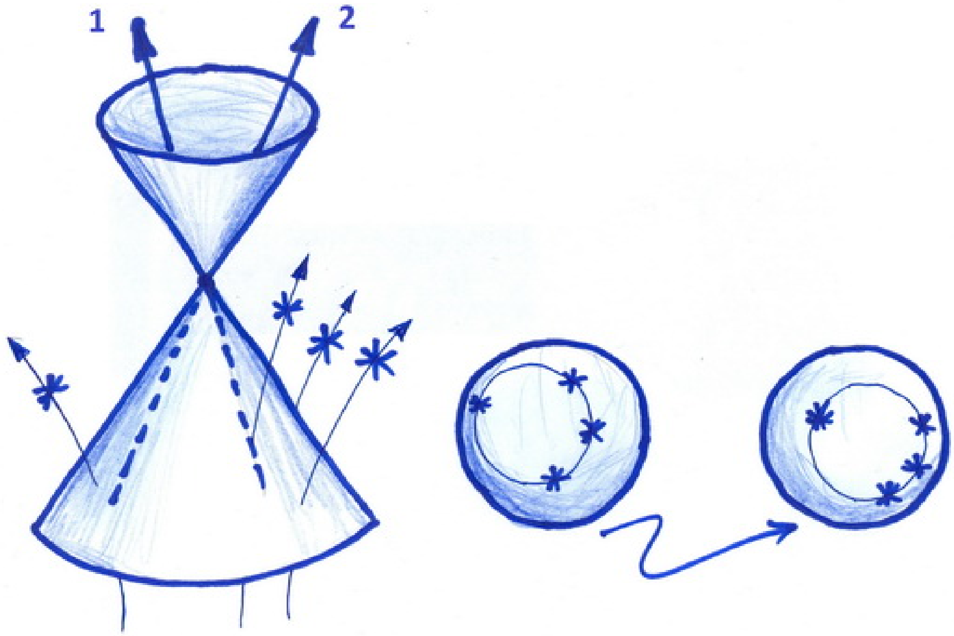


Рис. 15: Два наблюдателя (1 и 2) и небесная сфера, которую видит каждый из них.

вой линии фотона. В теории твисторов, по крайней мере в её первоначальном виде, мы рассматриваем эту иллюстрацию — а я собираюсь говорить о световых лучах, как об основополагающих вещах — вместо того, чтобы рассматривать ситуацию с точки зрения пространства-времени, мы говорим здесь о пространстве светового луча. Этот световой луч представлен точкой на рис. 14 справа, в пространстве твисторов.

Как представить точку на этой картинке (рис. 14)? Мы полагаем, что все световые лучи, проходящие через эту точку, образуют сферу. То есть представим, что я нахожусь в этой точке и наблюдаю мир. Все фотоны, движущиеся навстречу мне с разных направлений (а это и есть световые лучи, проходящие через эту точку), будут образовывать сферу, небесную сферу, которая, если хотите, будет представлять сферу, образованную этими точками.

Мы говорим о геометрии пространства-времени и геометрии твисторов. Геометрия твисторов – это геометрия спиральных лучей света, скажем так, а вот эти точки (рис. 15) представлены сферами, которые я изобразил как небесные. Подчёркиваю, что эти небесные сферы являются римановыми сферами. Я имею в виду, что эти сферы – конформные.

На рис. 15 изображены также два наблюдателя. Эти наблюдатели передвигаются довольно близко друг к другу на очень большой скорости. Когда они смотрят на небосвод, в тот момент, когда они встречаются, они видят один и тот же небесный свод, но из-за эффектов аберрации небесная сфера будет выглядеть искажённо. Это — небесная сфера для первого наблюдателя, а это — для второго. Но это искажение совершенно особого рода. Это конформное искажение. Это означает, что углы небесной сферы для одного наблюдателя будут соответствовать углам на небесной сфере другого наблюдателя.

Более того, если вы видите расположенные соответствующим образом звёзды на небосводе, которые для одного наблюдателя будут находиться в пределах окружности, то для другого наблюдателя картина расположения звёзд будет такой же, т.е. звёзды будут находиться в пределах окружности. Это довольно примечательный факт. Я действительно считаю это удивительным. Я имею в виду преобразование Лоренца при переходе от одного наблюдателя к другому. Так каким образом действует преобразование Лоренца в случае небесной сферы?

Посмотрим на это несколько иначе. Если мы принимаем, что окружности отражаются в окружности, вместо того, чтобы рассматривать быстро двигающихся наблюдателей, я мог бы предположить, что один из наших наблюдателей наблюдает сферу, а сфера всегда выглядит как объект, ограниченный окружностью.

Если эта сфера является стационарной для одного наблюдателя, а другой наблюдатель смотрит на ту же сферу, двигающуюся с большой скоростью, что же он увидит? В соответствии с тем, что я сказал ранее, для него это также будет выглядеть как объект, ограниченный окружностью. Но это должно быть эквивалентно, в соответствии со специальной теорией относительности, тому, что видит наблюдатель, который смотрит на быстро движущуюся сферу. Это часто вызывает недоумение. Поскольку мы знаем, что если сфера движется очень быстро, она должна сплющиваться в соответствии с сокращением Фицджеральда-Лоренца.

Так почему же эта сфера не кажется плоской? Когда мы смотрим на точку, которая находится на заднем плане на сфере, она выглядит для нас как удалённая. Тогда как если мы наблюдаем точку впереди, то она кажется нам ближе. Свету требуется больше времени, чтобы пройти расстояние от более удалённой точки на сфере, чем от точки, расположенной на передней части сферы, поэтому этот свет достигает вас раньше. То есть происходит расширение сферы. Понадобится некоторое объяснение, чтобы понять, почему и как работает этот довод.

Дж. Синг, занимавшийся общей теорией относительности, высказал очень интересное соображение о том, как это можно рассматривать с геометрической точки зрения. Подробно не буду на этом останавливаться. Важно, что это подтверждает тот факт, что окружности небесной сферы отображаются в окружности. Если считать окружности бесконечно малыми и использовать конформное преобразование, мы должны понимать, что это преобразование получается с помощью (а мы рассматриваем здесь сферу Римана) комплексных билинейных преобразований, которые приводят к преобразованию Лоренца.

Отложим это в сторону. Поговорим о том, что явилось основным толчком к созданию теории твисторов. Допустим, мы хотим получить математическое исчисление с точки зрения пространства-времени, которое представляет собой трёхмерное пространство с одной размерностью, связанной со временем.

Видите ли, это очень отличается от философии теории струн. В теории струн рассматриваются пространства, имеющие большое число дополнительных измерений. По разным причинам я не очень уютно чувствую себя в таких размерностях. Одной из причин является то, что теория твисторов была в значительной степени обусловлена необходимостью рассматривать трёхмерное пространство в сочетании с одномерным временем. Её методы не работают так же хорошо в других размерностях. С точки зрения физики существует ещё одна, более очевидная, причина беспокоиться по поводу дополнительных пространственных измерений — они чрезвычайно нестабильны, все эти дополнительные степени свободы, от которых вы не можете избавиться. Трудно представить себе вразумительную теорию, в которой существовала бы полная свобода в иных измерениях. В самом деле, это приводит к огромной нестабильности, обусловленной всеми этими скрытыми степенями свободы.

Я никак не мог постичь логику такой многомерности, физики большого числа измерений. В любом случае, это противоречит теории твисторов, поскольку это в значительной степени определяется теми двумя ролями, которые играет сфера Римана. Одной из них (рис. 16) проявляется роль сферы Римана в квантовой механике: во-первых, она играет важную роль в понимании структуры спина, в частности, она играет непосредственную роль в объяснении полуцелого спина. Во-вторых, сфера Римана играет важную роль при рассмотрении объектов небесной сферы. До некоторой степени эти вещи очень похожи, но понимаются по-разному. Сфера Римана играет две важные роли: с одной стороны, теория

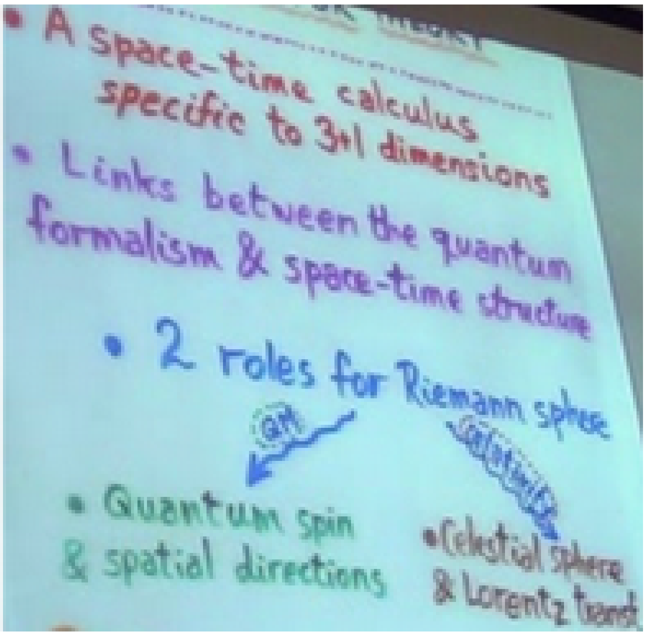


Рис. 16: Две роли, которые играет сфера Римана: первая — спин в квантовой механике и пространственная направленность, вторая – небесная сфера и преобразование Лоренца. Фрагмент презентации Р. Пенроуза (Фото А. Склярова).

относительности и небесная сфера; с другой стороны, квантовая механика и пространственная направленность. Всё это явилось побуждающим стимулом для теории твисторов.

Кроме того, отметим безмассовые частицы, которые в каком-то смысле являются более основополагающими, чем частицы, обладающие массой. Это хорошо перекликается с тем, над чем работают в современной физике высоких энергий. Безмассовые частицы являются для нас основным объектом исследования, например, частица Хиггса, которая обладает массой, но в этом случае масса является второстепенным понятием.

Я должен также упомянуть квантовую нелокальность и магию комплексных чисел, которая постоянно здесь присутствует, обнаруживая интересные особенности. Я уже демонстрировал подобную иллюстрацию небесной сферы, на которой изображены звёзды. Практически я обо всём этом говорил уже ранее.

К сожалению, я смогу лишь коротко рассказать о том, как работать с элементами теории твисторов. Подробно не буду об этом говорить, за исключением одной весьма примечательной вещи, почву для которой я должен подготовить. Что касается геометрии, это во многом повторяет то, о чём я говорил ранее. В этом случае мы рассматриваем пространство-время, а точка в пространстве-времени представляет собой сферу Римана. В этом пространстве твисторов луч света является точкой. На самом деле мы называем это пространство проективным пространством твисторов или, точнее говоря, это частично-проективное пространство твисторов. Пространство твисторов или проективное пространство твисторов представляет собой комплексное проективное трёхмерное пространство.

Мы имеем пространство комплексной размерности, здесь шесть вещественных размерностей. Мы называем его комплексным также с целью подчеркнуть важность его структуры. Что представляет это пространство? Во-первых, подчёркиваю, что световой луч является точкой. Говоря о количестве степеней свободы, которыми обладает этот световой луч, надо отметить, что это пространство является пятимерным. Если нам надо перейти в комплексное пространство, то мы должны иметь чётное количество размерностей. Если мы рассмотрим момент импульса и энергию, то световые лучи становятся лишь аппроксимацией, когда момент импульса стремится к нулю. Зная момент импульса этих фотонов,

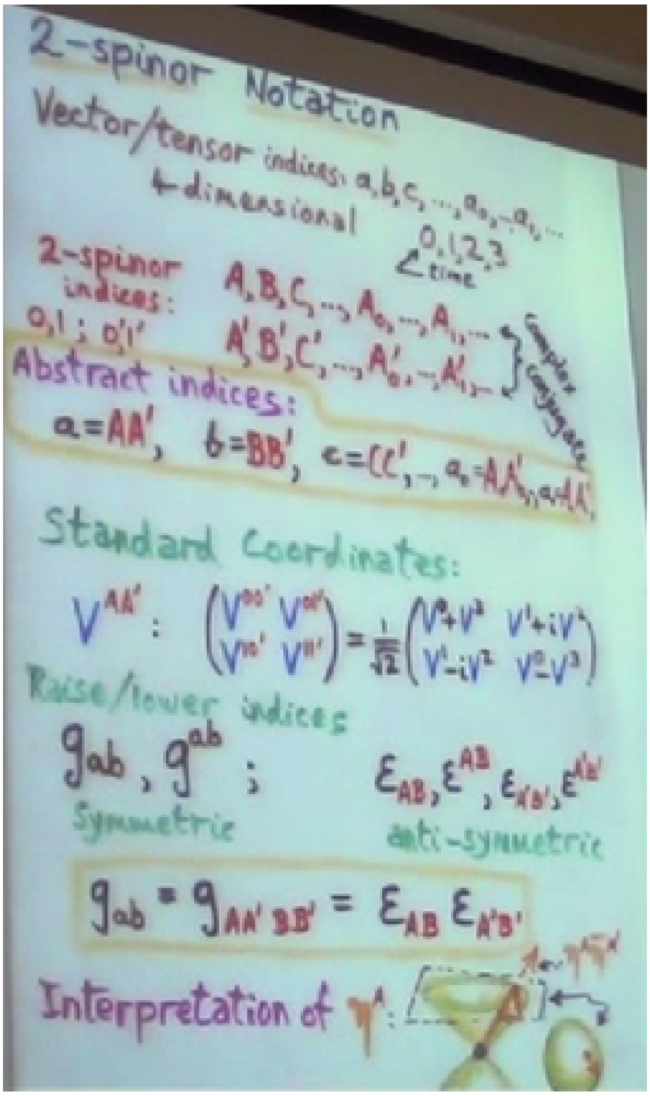


Рис. 17: 2-спинорное исчисление. Фрагмент презентации Р. Пенроуза (Фото А. Склярова)

мы обнаруживаем, что нам необходима более полная картина, изображающая шестимерное пространство или пространство с комплексной размерностью 3. Анализируя это, мы видим, что имеется 4 координаты, z^0, z^1, z^2 и z^3, а отношения, три независимых отношения, дают нам комплексное проективное пространство твисторов. Не буду вдаваться в подробности.

Удобным также является и то, что мы называем два-спинорным исчислением, рис 17. В случае с частицами с полуцелым спином, мы рассматриваем два основных состояния спина, и здесь приводится исчисление. Я использую заглавные буквы для обозначения показателей степени. Заглавная буква соответствует состоянию спина и состоит из двух компонентов. То есть, скажем, A принимает два значения: 0 и 1, которые представляют изотропное направление и небольшой флаг. Трудно себе это представить, поскольку необходимо ещё одно измерение. На этой иллюстрации (рис. 17) я попытался представить это с точки зрения пространства-времени, а здесь – с точки зрения пространства. Эта – сечение светового конуса. Сам световой луч является точкой, и существует флаговая плоскость, обозначенная направлением стрелки вот здесь. Это то, что представляют собой спиноры. Если бы мы интересовались подробностями теории, я бы объяснил, как работает система обозначений.

Я думаю, что я дал вам небольшое представление об этой теории, не вдаваясь в подробности. И всё же надо отметить ещё некоторые моменты.

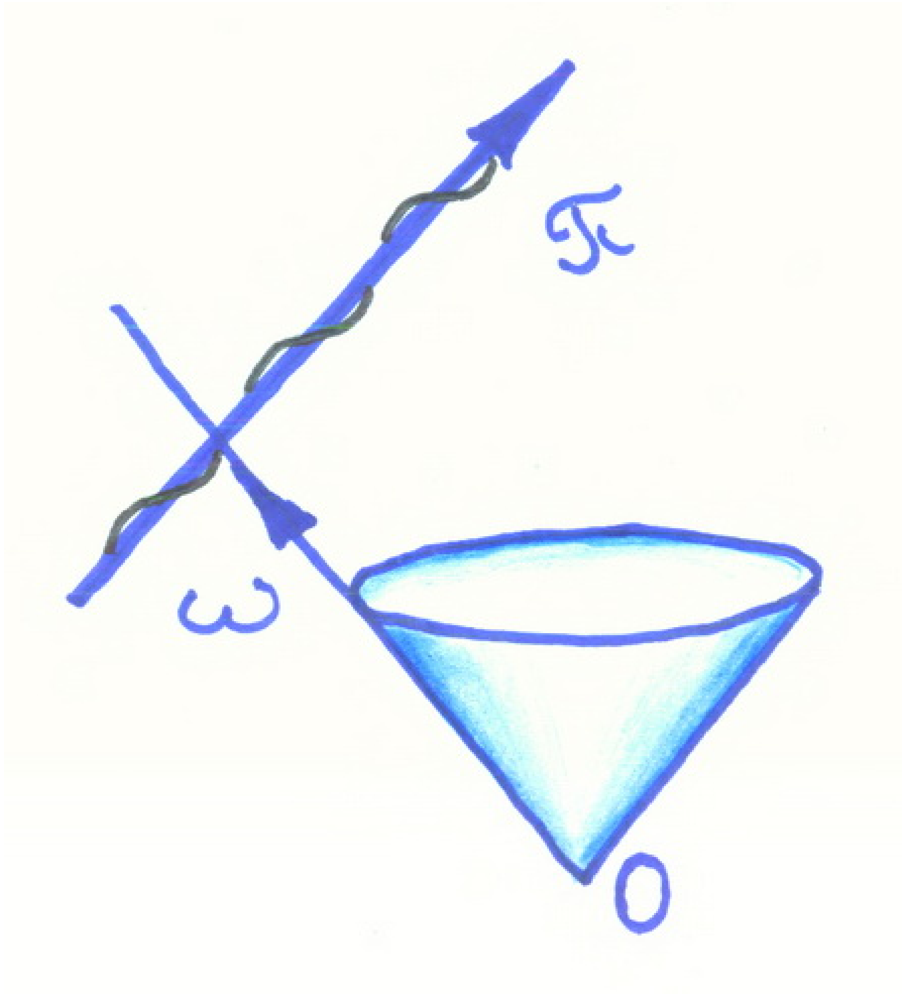


Рис. 18: Изображение нуль-твистора $Z=(\omega,\pi)$.

Что же такое твистор? Твистор Z может быть представлен, как пара 2-спиноров π и ω. Первый из них описывает 4-момент безмассовой частицы со спином ($p=\pi\bar{\pi}$, где $\bar{\pi}$ — комплексно сопряженная), второй описывает угловой момент относительно выбранного начала O (более точно 6-угловой момент M линейно выражается в терминах $\omega\bar{\pi}$ и $\pi\bar{\omega}$).

Две из них — это один двухкомпонентный спинор; две другие — другой двухкомпонентный спинор. Можно посмотреть, как они функционируют с геометрической точки зрения. Я обозначаю эти спиноры буквами ω и π. На рис. 18 дана геометрическая интерпретация нулевого твистора $Z=(\omega,\pi)$.

Отмечу, что твисторы стали довольно популярным предметов в физике высоких энергий в настоящее время. Правда, физики используют другую систему обозначений, предпочитая обозначать их λ и μ. Причина — печальная: дело в том, что в своей первой работе, посвящённой твисторам, я использовал неправильные условные обозначения. Потом я это поправил. Когда я говорю «неправильные», на самом деле трудно сказать, что считать правильным, что — неправильным. Я думаю, они в определённом смысле были неверными. К сожалению, когда Эдвард Виттен (Edward Whitten) заинтересовался идеей твисторов (которая стала довольно модной), он использовал условные обозначения, которыми я пользовался в своей первоначальной работе и которые оказались не совсем верными. Но это неважно.

Я собираюсь использовать свою систему обозначений: ω и π. Причина в том, что π — это греческая версия английской буквы P, а — это обозначение энергии-импульса. Итак, это энергия-импульс безмассовой частицы. А ω — это буква, часто использующаяся в мате-

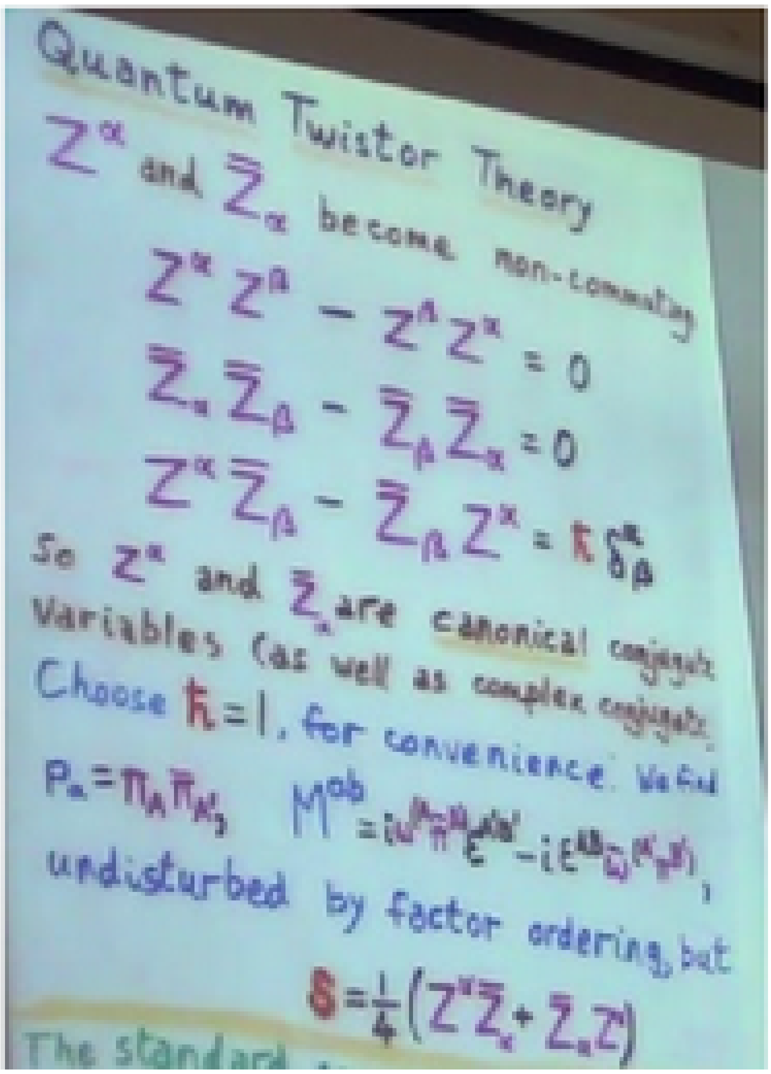


Рис. 19: Квантовая теория твисторов. Фрагмент презентации Р. Пенроуза (Фото А. Склярова).

матике для обозначения момента импульса движения. С геометрической точки зрения это выглядит так. π — это спинор, направленный вдоль светового конуса; это двухкомпонентный спинор, направленный в направлении движения фотона. ω указывает направление от отправной точки (здесь надо знать, где она находится) до световой волны. Если известны и ω и π, то это и составляет целостный твистор z. Итак, если ω и π — это два двухкомпонентных спинора, ω направлена вдоль светового конуса в точке O, а π — тоже вдоль светового конуса, рис. 18, это и составляет твистор, который характеризует конкретный световой конус.

Как уже говорилось ω и π связаны с энергией-импульсом и моментом импульса движения в обычной системе обозначений. Я не буду подробно об этом говорить. Достаточно сказать, что если известны ω и π, то можно получить P и M, то есть энергию-импульс и момент импульса.

Перейдём к квантовой теории твисторов, рис. 19. В обычной физике вы рассматриваете положение в пространстве и энергию-импульс, которые представляют собой сопряжённые переменные. В квантовой теории твисторов они не коммутируют. В теории твисторов мы говорим, что эти величины — сопряжённые переменные, т.е. твистор и его сопряжённая переменная.

Мы имеем Z^{α} и $\bar{Z}_{\alpha}$, которые являются некоммутирующими. Говоря о коммутационных соотношениях, Z^{α} и $\bar{Z}_{\alpha}$ коммутируют только сами с собой. Буквой S обозначена спиральность и приведены коммутационные соотношения для энергии-импульса и момента импульса движения.

Всё логично и красиво. В традиционной физике получение энергии-импульса и момента импульса движения выглядит сложно. Одним из преимуществ теории твисторов является то, что эти тензорные выражения очень простые. Здесь присутствует простое каноническое сопряжённое выражение.

Твисторная волновая функция, рис. 20. Что такое твисторная волновая функции? Если Z^α и $\bar{Z}_\alpha$ являются сопряжёнными переменными, как вы запишете волновую функцию? Если рассматривать координаты и энергию-импульс, мы берём либо представление положения в пространстве, и тогда сопряжённая переменная энергия-импульс становится дифференциалом по отношению к положению, либо рассматриваем представление энергии-импульса, тогда положение в пространстве является дифференциалом по отношению к энергии-импульсу. Что происходит в теории твисторов? Это сопряжённые переменные, и вы используете представление либо с Z^α либо $\bar{Z}_\alpha$. Возьмём, например, Z^α. Это означает, что волновая функция должна быть функцией только одной из них. Сравним с традиционной физикой: рассматривая энергию-импульс или положение в пространстве, мы получаем волновую функцию либо энергии-импульса, либо положения в пространстве. Если мы рассматриваем положение в пространстве, то появляется дифференцирование по отношению к энергии-импульсу, а если вы рассматриваете энергию-импульс, то появляется дифференцирование по отношению к положению в пространстве. Мы здесь делаем нечто похожее. Волновая функция твистора, f, должна быть функцией либо Z^α либо $\bar{Z}_\alpha$. Говоря о дифференцировании относительно Z^α, f не зависит от $\bar{Z}_\alpha$. Это означает, что она голоморфна. f должна быть голоморфной комплекснозначной аналитической функцией. Итак, f — голоморфная функция.

Говоря о собственных состояниях спиральности, необходимо отметить, что они однородны. Я просто хотел показать вам суть, главную идею, как представить волновую функцию. Волновая функция — это твисторная функция, характеризующаяся степенью однородности. Если умножить Z на какое-нибудь число, то происходит умножение этого числа на показатель степени этого числа. Степень однородности представлена этим показателем степени. Если это скалярная величина, то показателем степени является -2, для Z в скалярном поле у меня будет простая функция такого типа. Опять-таки я не буду говорить об этом подробно. Подчеркну только, что в этих функциях имеют место сингулярности. А что мы делаем с сингулярностями? Мы проводим операцию интегрирования. Таким образом, мы имеем криволинейный интеграл. Твисторная функция находится здесь. Вы выводите криволинейный интеграл и получаете пространственно-временную функцию. Это обычная волновая функция с точки зрения пространства-времени. А это твисторная волновая функция с точки зрения твисторных переменных. Это голоморфная комплексная аналитическая функция, имеющая сингулярности.

Когда я впервые встретился с этими выражениями, должен признать, что я понятия не имел о том, что какие-то из этих вещей рассматривались ранее Уиттекером (Edmund T.Whittaker), Бейтманом (Paul T. Bateman), в основном, Бейтманом. Какие-то вещи были уже известны, но не существовало общих принципов, то есть того, что появилось с созданием теории твисторов.

Это очень красивый способ представления волновой функции. Если мы говорим о бесспиновой функция, то всё сводится к решению волнового уравнения, которое мы получаем автоматически из этих криволинейных интегралов твисторной функции.

Посмотрим, как это выглядит с точки зрения геометрии. В этом случае, рис. 20 имеются две сингулярности. Это типичный случай. Выражения являются линейными, и геометрическое представление выглядит следующим образом. Имеется нулевое твисторное пространство. Я должен был упомянуть, что вот этот объект в центре – это то место, где

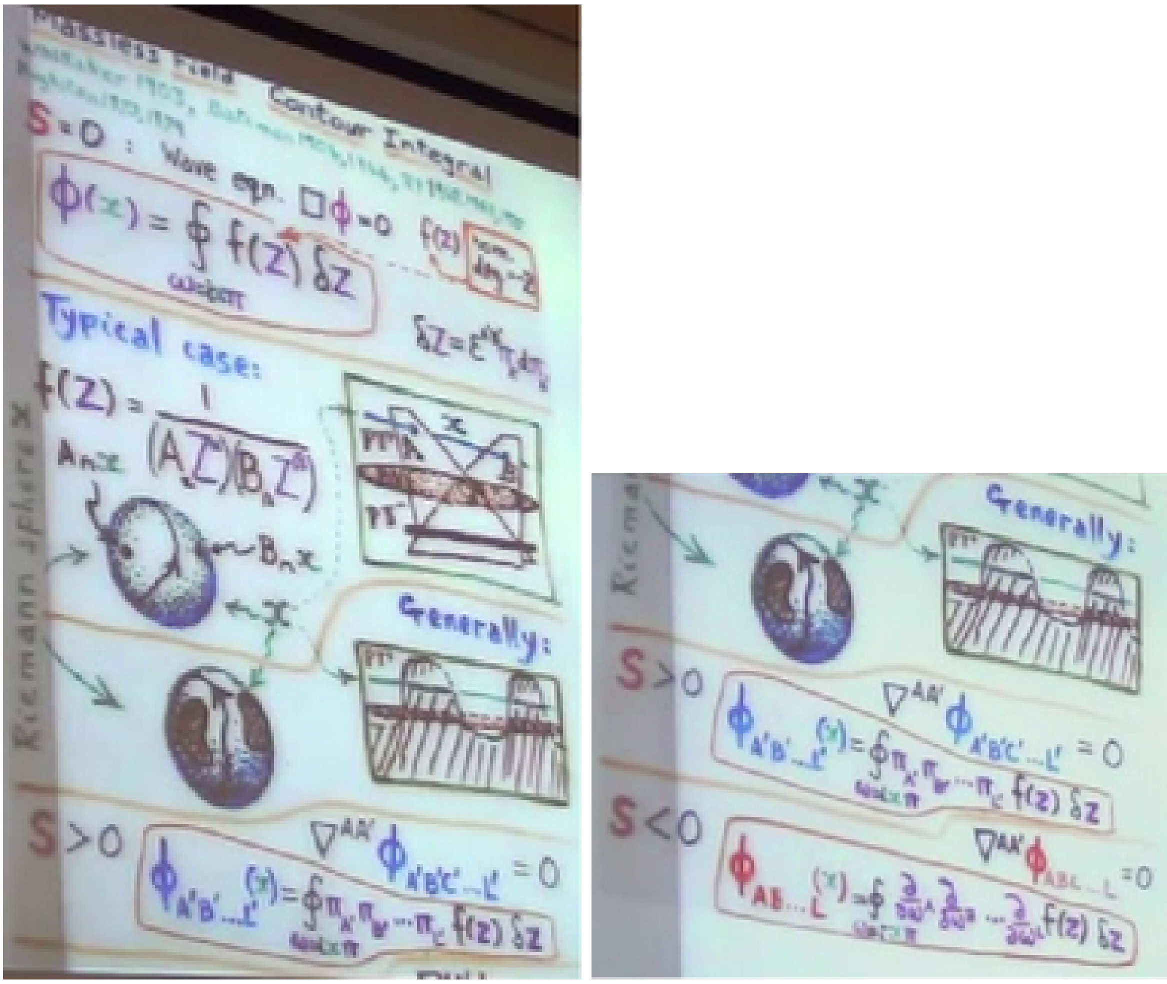


Рис. 20: Безмассовое поле. Контурный интеграл. Фрагмент презентации Р. Пенроуза (Фото А. Склярова).

твисторная норма обращается в ноль, и спиральность, если хотите, равна нулю. Не буду вдаваться в детали. Следует отметить, что эти плоскости представляют собой сингулярности этих функций. Функция становится сингулярной в этой плоскости и в этой плоскости. Затем мы получаем волновую функцию. Для этого мы берём линию (я говорил уже о сфере Римана, обращённую в точку в моём описании твисторов). Вот эта прямая линия соответствует точке здесь, слева. Итак, в твисторном пространстве мы имеем прямую линию, которая отображена как точка в пространстве-времени. Как получить значение поля в точке ? — это прямая линия в пространстве твисторов. Где находится эта прямая линия? Она соответствует точке на сфере Римана. Где находятся сингулярности? На этой плоскости есть две такие сингулярные точки. Криволинейный интеграл будет представлять собой кривую или виток между этими двумя сингулярными точками. Это достаточно общие соображения. У нас есть сингулярности, которые имеют вот такой вид (похожи на горбы верблюда).

Я нахожу это весьма странным. Если вы хотите представить волновые функции, если у вас имеются сингулярности, что это означает? Это выражение для высокоспинового случая, не будем об этом подробно говорить.

Ясно, что комплексный анализ — вещь достаточно сложная. Что мы пытаемся сделать — так это... На этой картинке представлена часть твисторного пространства, об этом я тоже не буду подробно рассказывать. Отмечу, что это верхняя половина твисторного пространства, где должны находиться наши волновые функции. Что это означает? Если часто-

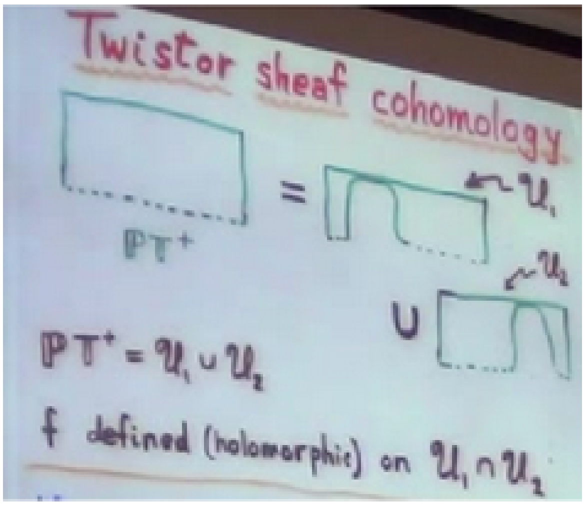


Рис. 21: Пучок когомологий твистора. $PT^+ = U1 \cup U2$, твисторная функция f определена (голоморфна) на $U1 \cap U2$. Фрагмент презентации Р. Пенроуза (Фото А. Склярова).

та представляет собой положительную величину, что волновая функция должна обладать положительной частотой или положительной энергией. Итак, говоря о положительной энергии, мы имеем в виду верхнюю половину твисторного пространства.

Рассмотрим сингулярности. Имеются два места, характеризующиеся сингулярностью. И в этих пределах мы должны провести интегрирование. Будет правильно рассматривать это следующим образом. Это — наша твисторная функция с двумя максимумами сингулярности. Запишем выражение для пространства в целом как множество без учёта каждого из этих максимумов поочерёдно. Итак, это полное пространство. Твисторная функция сама по себе предполагает выключение обоих максимумов. И наша функция определяется на пересечении этих двух областей $U1$ и $U2$. Нас интересует здесь область сопряжения этих двух элементов.

Это то, что называется когомологией пучка твисторов. Я узнал об этом, когда учился в аспирантуре в Кембридже, но в то время я не понимал всего этого глубоко. Гораздо позже я встретился с этими функциями и задался вопросом о странном поведении этих функций. У меня был коллега в Кембридже Майкл Тиа, который объяснил мне явление когомологии пучка, и как оно работает. Здесь представлены некоторые общие соображения.

Всё это проливает свет на загадки, о которых я говорил. Твисторная функция — это на самом деле не функция в обычном смысле слова. Это гораздо более тонкое понятие, потому что мы можем описать одну и ту же сущность, добавив сингулярности, движение и т.д. Что мы на самом деле делаем — это то, что носит название когомологии пучка.

Здесь (рис. 21) представлено более подробное описание того, что происходит – мы разрезаем наше пространство на две части $U1$ и $U2$, а сопряжение этих двух частей представляет собой полное пространство. Пересечение этих двух частей и есть место, где находится наша твисторная функция. Если бы мы рассматривали ситуацию с более широкой точки зрения, если бы мы разделили пространство на множество частей, нам пришлось бы выполнить много довольно сложных операций, которые показаны на этом рисунке.

Об этом я тоже не буду говорить подробно. Я хотел вам показать более наглядное представление того, чем я занимаюсь. Что это? Что за фигура изображена на этой картинке (рис. 22)? Здесь изображён невозможный объект. Эта фигура появилась очень-очень давно и была навеяна работами голландского художника Маурица Эшера. Я был заинтригован такими невозможными объектами.

Эта фигура, если мы рассматриваем её локально, вполне логична и возможна. Вы можете вырезать элемент фигуры в любом месте, и получите трёхмерный объект, имеющий

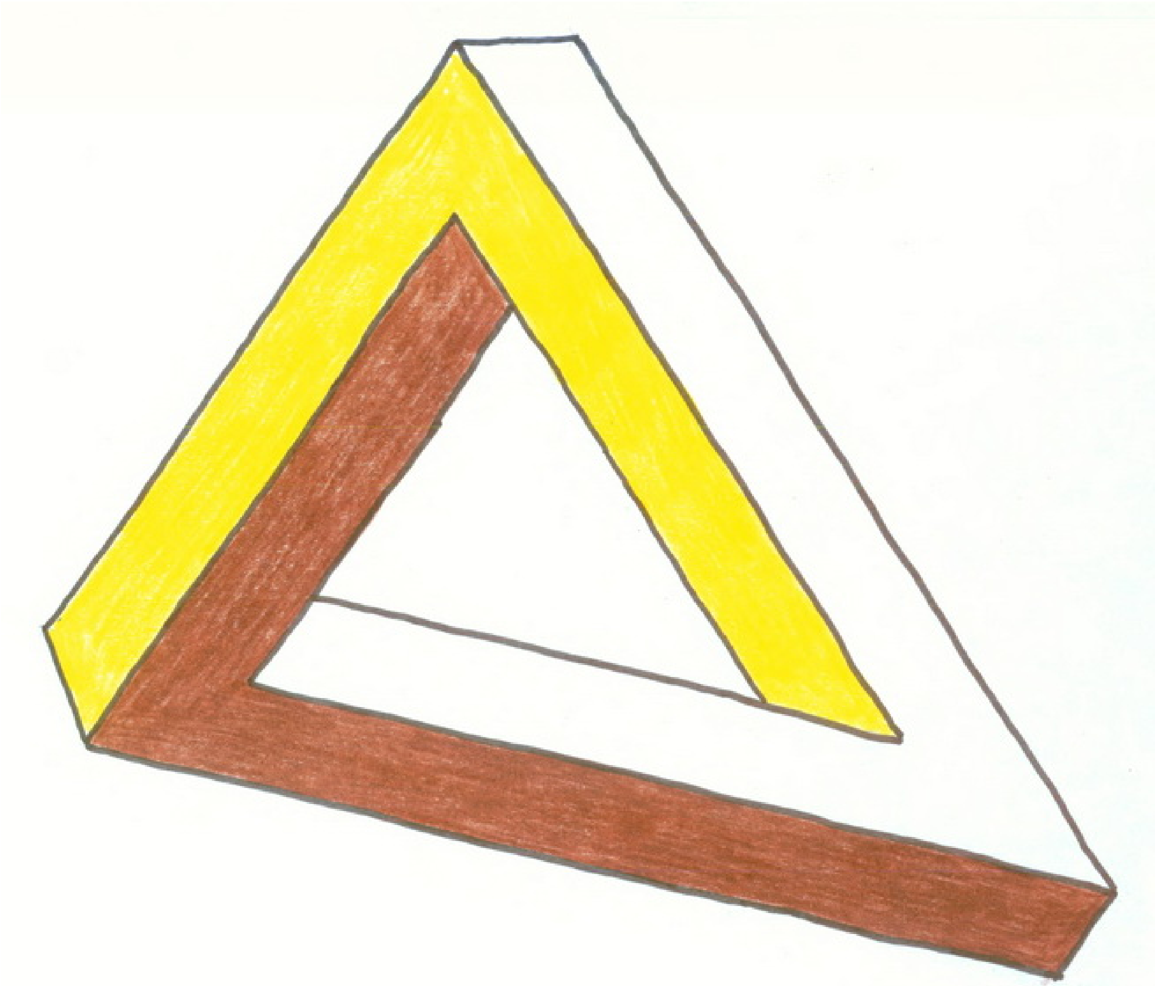
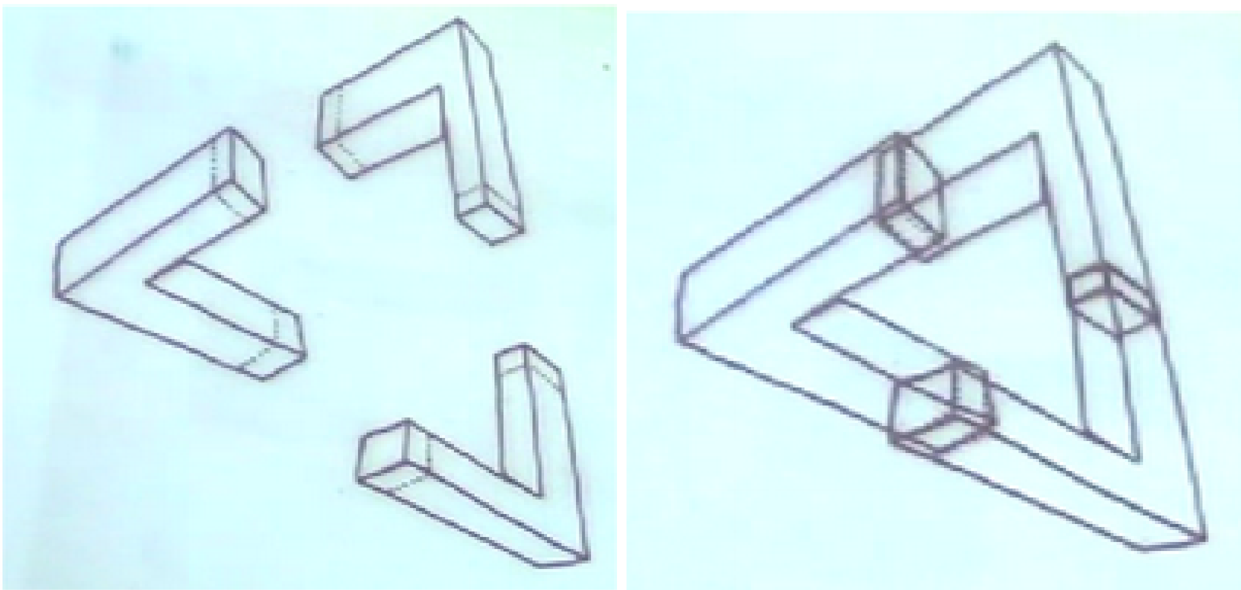


Рис. 22: Невозможный треугольник.



a) b)

Рис. 23: Иллюстрация когомологии первого порядка. Фрагмент презентации Р. Пенроуза (Фото А. Склярова).

смысл. Но фигура в целом нелогична. Как описать это противоречие с математической точки зрения? Это делает когомология. И это именно то, что мы видим в описании твисторных функций. Как я уже говорил, всё это трудно себе представить. Всё это можно рассматривать с точки зрения поведения сложных объектов, их взаимодействия, перекрытия одного элемента объекта другим, взаимосвязи между различными элементами и так далее.

На самом деле мы делаем следующее. Зададимся вопросом о том, какова мера невозможности этого объекта. Мы можем разделить фигуру на составляющие её элементы, например на три элемента (рис. 23 а).

Здесь показана та же фигура, которая сделана, предположим, из трёх кусков дерева. Это три отдельных элемента. Теперь мне надо написать инструкцию по применению: каким образом склеить этот кусок с этим (это часть моей твисторной функции), как склеить следующий кусок вот с этим, и как склеить третий элемент с первым (рис. 23 б). Каждое из этих описаний было бы логично с локальной точки зрения.

Но получу ли я реальный, возможный объект? Чтобы понять, возможен этот объект или нет, вы должны будете проделать то, о чём я говорил, демонстрируя слайд, посвящённый когомологии. Надо посмотреть, является ли этот элемент конструкции нулевым или нет; если да, то всё сработает. Если нет, вы получаете меру невозможности, а это уже элемент когомологии. Этот очень интересный способ понять суть когомологии первого порядка (а это всё, что нам здесь необходимо для получения твисторной функции одиночной частицы). Эта нелокальность не видна в каждом из этих отдельных элементов локально. Однако если мы соединяем все элементы вместе, появляется несовместимость, которая выражается в этом когомологическом представлении. Это очень интересное описание. Мне понадобилось много времени, чтобы осознать, что есть нечто в этом описании, что отражает одну из наиболее озадачивающих особенностей квантовой механики Видите ли, квантовая механика характеризуется нелокальностью. Одной из основных идей, возникших при разработке теории твисторов, является нелокальность. Если вы знакомы с нелокальностью Эйнштейна – Подольского – Розена (ЭПР), вы можете сказать, что частицы движутся в разных направлениях, в каком-то смысле, они движутся параллельно друг другу, правда, это едва заметно: вы не можете отправить информацию от одной частицы к другой. В любом случае невозможно создать модель, в которой обе эти части не были бы задействованы. Один фотон движется в этом направлении, другой — в этом. В экспериментах, проводимых в настоящее время, они могут находиться на расстоянии 150 км друг от друга, и всё же они связаны друг с другом (запутаны). Они не являются отдельными, независимыми, даже если находятся на таком расстоянии друг от друга.

Всё это гораздо сложнее и тоньше, потому что здесь я говорю только об одиночных частицах. Твисторная волновая функция – это волновая функция одиночной частицы, в которой играет роль когомология первого порядка.

В квантовой механике есть нелокальность, которая является более основополагающей, но не так часто упоминаемой. Это нелокальность одиночной частицы. Вы не рассматриваете здесь две частицы на расстоянии 150 км друг от друга. Важно понять, что одиночная частица обладает нелокальностью. Это очень важно.

На рис. 24 показан источник, например, фотонов. Фотон характеризуется волновой функцией, распространяющейся по всему этому экрану, то есть волновая функция достигает изображённого здесь экрана. Предположим, по всей площади экрана установлены детекторы. Возможно, в каком-то месте один из детекторов регистрирует обнаружение фотона. Можно представить себе, что детектор находится здесь, т.е. фотографическая пластинка — здесь. И детектор сообщает: «Я обнаружил фотон». Здесь интересно то, что волновая функция всё-таки является нелокальным объектом. Её нельзя сравнить с волной, распространяющейся в воде. Это можно сравнить с экспериментом, о котором я упоминал:

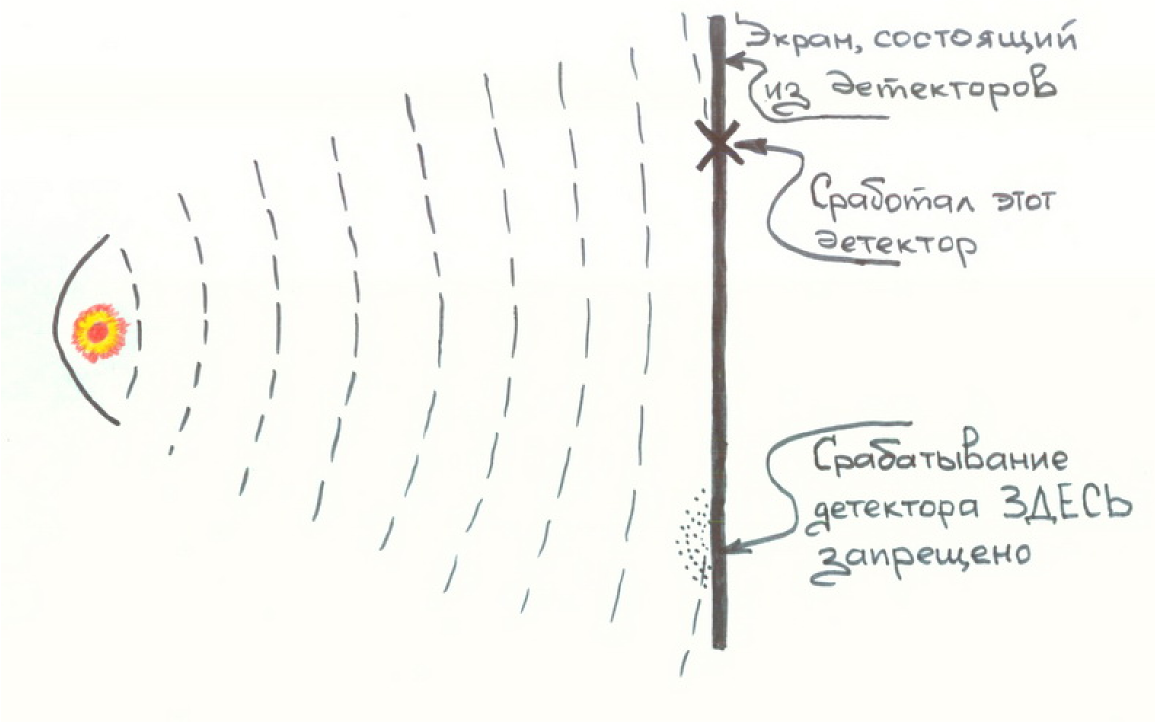


Рис. 24: Нелокальность волновой функции одиночной частицы.

один фотон движется в одном направлении, другой — в другом. Мы не можем рассматривать эти два объекта вне зависимости друг от друга. Они являются парой запутанных фотонов. Итак, это нельзя сравнить с волной, распространяющейся в воде, в этом случае, когда волна достигает определённой интенсивности (плотности) с вероятностью обнаружения вот здесь, а в случае другой волны вероятность обнаружения — вот здесь. Эти вероятности являются независимыми. Обнаружение может иметь место и в этом месте, и в этом. Или ни здесь, и ни здесь.

В квантовой механике происходит совсем другое. В этом случае обнаружение имеет место либо здесь, либо здесь (возможно, во многих местах). Это очень важно.

Что это означает? Как только фотон регистрируется здесь, отправляется сообщение: «Ты опоздал. Я тебя уже увидел. Я обнаружил фотон. Ты увидеть его не сможешь. Слишком поздно». То есть если он уже обнаружен в одном месте, то, его нельзя обнаружить в другом.

Это невозможно рассматривать с точки зрения обычной каузальности. Поскольку скорость здесь будет больше скорости света. Вот эти два события должны происходить мгновенно. Мы не можем послать кому-то ещё сигнал со скоростью, превышающей скорость света: «Нет-нет. Поздно. Я засёк фотон». Это подлинно нелокальное явление, даже когда речь идёт об одиночной частице.

В теории твисторов именно так мы описываем волновую функцию одиночной частицы. Это можно сравнить с невозможным треугольником на рис. 22, когда вы говорите (а в нашем случае вы обнаруживаете фотон): «Мы потеряли информацию». В когомологии нет больше информации, она распалась, и это было обнаружено. Нелокальность, наблюдаемая в твисторной функции, отражает нелокальность, которую мы рассматриваем в этом примере с одиночной частицей. Интересно посмотреть, сможет ли система, состоящая из нескольких частиц, рассматриваться с точки зрения твисторной теории. У меня есть студент, который в настоящее время это исследует.

На самом деле, нелокальность рассматривалась многими исследователями: вспомните теорию нелокальности Белла, результаты исследования парадокса Эйнштейна, Подольского и Розена. Нелокальность в квантовой механике обычно описывается с точки зрения нескольких частиц — двух или больше. И это также можно понять с точки зрения когомологии. Это немного не та когомология, которую мы рассматриваем в теории твисторов. Я убеждён, что когомология в теории твисторов (когда вы рассматриваете две частицы, три частицы, четыре частицы) — вещь более утончённая. Когомология, о которой я говорю — это когомология первого порядка. Когда мы имеем дело с твисторной функцией одиночной частицы, это явление, относящееся к когомологии первого порядка. Если имеется две частицы, это когомология второго порядка; три — когомология третьего порядка. Это сложнее проиллюстрировать. Я не могу вам дать столь же простой пример второй или третьей когомологии. Тем не менее, когомология даёт возможность понять, каким образом теория твисторов связана с нелокальностью, присутствующей в квантовой механике. Я думаю, это очень интересная тема для будущих исследований.

Большое спасибо.

ВОПРОСЫ

Вопрос: Одной из самых больших загадок нашего мира является время, но его первопричина и природа — это огромная загадка для человечества. Оно просто существует. Существует единожды. Существует ли какое-либо математическое заклинание, которое приоткрыло бы для нас эти загадки, и которое позволило бы нам повернуть время вспять?

Р. Пенроуз: Всё, о чём я здесь говорил... я рассматриваю время с точки зрения специальной теории относительности или общей теории относительности. Минковкий рассматривал пространство-время как 4-мерную структуру. Наверно, вы имеете в виду, что есть какие-то вещи, которые не укладываются в наше представление. Поскольку восприятие времени не объясняется статической картинкой такого плана. Это не то, что вы не можете... Предположим, когда вы изучаете физику, вы изучаете теорию относительности с точки зрения времени. На самом деле это представление, основанное на описании пространства-времени. Но если вы захотите увидеть зависимость между течением времени, вы должны будете рассматривать сложную проблему сознательного восприятия времени. А мы очень мало что здесь понимаем. Я убеждён, что это тесно связано с нашим пониманием квантовой механики, сознания с точки зрения физики, но это тема для отдельной лекции. Лично я думаю, что существует тесная связь с той загадкой, о которой я упоминал ранее. Я имею в виду примечательное, даже странное, понимание квантовой механики, понимание в кавычках. Поскольку мы должны иметь в виду, что мы и не ожидаем, что кто-то глубоко поймёт квантовую механику. По-моему, для этого существует веская причина — квантовая механика является логически непоследовательной. Но с другой стороны, мы понимаем, что в мире происходит что-то, что необходимо понять и объяснить. Я думаю, что понять это можно будет с помощью доработанной, усовершенствованной квантовой механики с процедурами измерения, которые сделали бы её более логичной. То, что мы обсуждали здесь, — это до некоторой степени голоморфное описание. Мы находимся в этом мире, голоморфном мире. Эта ситуация не включает в себя процедуры измерения. Для того чтобы добавить этот недостающий элемент, надо освободиться от этого мира. Я думаю, что вопрос о восприятии хода времени — весьма глубокий вопрос, нуждающийся в исследовании. А это процесс длительный. Наверно, я не ответил на ваш вопрос, потому что требуется много времени, чтобы это понять.

– Спасибо.

Вопрос: Я бы хотел обратиться к одной из программ радио ВВС с вашим участием в 2005 году. Вы говорили о тёмной материи. В этой программе вы сказали, что для того, чтобы понять явление времени, нам необходимо модифицировать современную квантовую механику. А это именно то, над чем работают исследователи теории струн в настоящее время. Насколько я понял, вы чувствуете себя «не в своей тарелке», обсуждая теорию струн с её множеством измерений. Вы увереннее чувствуете себя в 4-х мерном мире. Как вы думаете, этот подход, подход, который вы предлагаете, приведёт ли он к каким-то успехам в нашем понимании? Думаю, мой вопрос, конечно, связан с предыдущим.

Р. Пенроуз: Да. Что-то я хотел сказать... [забыл]. Вы видели эту программу довольно давно, я полагаю.

– В 2005 году.

Р. Пенроуз: Да. Я выступал с лекцией вчера. И я собираюсь читать ещё одну лекцию здесь, по-моему, послезавтра. В этой лекции я буду говорить о моём нынешнем представлении о квантовой гравитации. Понимаете, квантовая гравитация, я заявляю это,

— это не то, что происходит в большом взрыве. Есть что-то, что можно лучше понять с точки зрения классической физики, как ни странно. Но, конечно, и с квантовой механикой всё это также тесно связано. Да, я должен признать, что я не вполне доволен квантовой механикой, простите, не вполне доволен теорией струн из-за дополнительных размерностей. По причинам, о которых я говорил ранее, нам нужна физика с тремя пространственными измерениями и одним временным измерением. Это не означает, что мы глубоко понимаем эти вещи. Но я думаю, мы из этого должны исходить. Теория твисторов как раз об этом. Я уверен (и я думаю, ваш вопрос заключается именно в этом), что меньшинство исследователей, занимающихся теориями струн, хотели бы изменить квантовую механику. Большинство идут по проторенному пути. Мало исследователей (я думаю, Джон Эллис – один из них) увлечены этими вопросами. Может быть, это не совсем классическая теория струн. Честно говоря, не совсем уверен, что такое классическая теория струн. В любом случае, обычно они не озадачиваются квантовой механикой. Да, я думаю, что одной из особенностей исследований, связанных с квантовой механикой, является то, что необходимо разобраться с квантовыми нелокальностями. С точки зрения современной квантовой механики, нелокальность — это не то, что их волнует. Они хотели бы уйти от реальности. Я никогда не способен был осознать, каким образом можно понять реальную физику, уйдя от реальности. Люди часто придерживаются этой точки зрения. Возможно, это просто удобный инструмент для исследований. Если мы говорим о реальности на квантовом уровне, эта реальность должна быть нелокальной. Тип локальности должен, по моему мнению, описываться с помощью когомологии. Теория твисторов для этого подходит. Когда я только задумался над этим, я начал заниматься нелокальностью, которая послужила толчком для теории твисторов. Тогда я рассматривал нелокальные световые лучи и нелокальные точки несколько приближённо. Здесь же представлена значительно более сложная и тонкая схема, в которой мы рассматриваем квантовые нелокальности, свойственные структуре голоморфной функции. Когомология первого порядка, которая проявляется в твисторных функциях и когомологии более высокого порядка – я думаю, что нелокальности скрыты именно здесь. Какая бы теория не заменила квантовую механику, она должна быть более логичной и здравой, но она непременно должна включать нелокальности. Теория твисторов, несомненно, является, хорошей основой для этого.

– Спасибо.

POWER AND BEAUTY OF COMPLEX NUMBERS AND ITS ROLE IN TWISTOR THEORY DEVELOPMENT

Roger Penrose

Russian translation of public lecture of Professor Roger Penrose organized by Bauman Moscow State Technical University and the Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics. The lecture presents some aspects of complex numbers, its physical applications and fundamentals of twistor theory.

Key words: complex numbers, light cone, Riemann sphere, conformal transformation, cohomology, twistor theory.