ОПЕРАТОРЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ БИКОМПЛЕКСНОЙ ФУНКЦИИ И ИЗОТРОПНЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ И ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

А.В. Горюнов

Университет Туран-Астана, Астана, Казахстан

avgor@hotbox.ru

Рассмотрены понятия бикомплексной функции и операторов частных производных этой функции по её бикомплексным, комплексным и действительным аргументам в бикомплексном пространстве. Установлена взаимосвязь операторов дифференцирования в бикомплексном пространстве и в псевдоевклидовом 4-пространстве. Тем самым получена возможность дифференцирования бикомплексной функции по 4-пространственным переменным. В результате, основные *дифференциальные* изотропные (светоподобные) уравнения релятивистского и электродинамического характера получены как прямое следствие соответствующих бикомплексных *алгебраических* соотношений предыдущей работы.

Ключевые слова: N-комплексные числа, бикомплексные числа, бикомплексная функция, операторы дифференцирования, специальная теория относительности, электродинамика.

Введение

Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [1][1], в которой была введена новая концепция бикомплексных чисел (называемых кратко B-числами или B-векторами), подробно разработана алгебра B-чисел, а затем этот математический аппарат был применён для получения основных алгебраических соотношений частной теории относительности и электродинамики.

Так, вычислением всех возможных билинейных и квадратичных произведений четырёх сопряжённых значений B-вектора в [1] получено десять действительных выражений, обозначенных как переменные T, X, Y, Z, F, G, K, L, M, N. Тем самым B-вектору q (четырём его действительным координатам a, b, c, d) сопоставлено десять взаимосвязанных переменных $\{T..N\}$. Исследованы соотношения этих переменных и рассмотрены их трансформационные свойства, обусловленные преобразованием B-вектора. Показано, что переменные T, X, Y, Z взаимосвязаны и преобразуются как координаты изотропного 4-вектора, а переменные $\{F..N\}$ — как составляющие антисимметричного 4-тензора, аналогичного тензору электромагнитной бегущей волны. Таким образом, произвольному B-вектору (в B-пространстве) сопоставлены изотропные 4-вектор и антисимметричный 4-тензор в псевдоевклидовом 4-пространстве с сигнатурой $(+ - - -)$, а унимодулярному B-преобразованию B-вектора сопоставлено преобразование Лоренца составляющих этих 4-векторов и 4-тензоров. Получены релятивистские формулы преобразования скорости и соотношения для компонентов симметричного 4-тензора, аналогичного тензору энергии – импульса.

Цель настоящей статьи: развить основы дифференциального исчисления бикомплексных функций; установить взаимосвязь дифференциальных операций в B-пространстве и в 4-пространстве, опираясь на изученные в [1] зависимости между переменными этих

[1] В предыдущей печатной работе А.В. Горюнова «N-комплексная алгебра и изотропные релятивистские и электродинамические уравнения» (№17, ГЧГФ), по техническим причинам, возник ряд опечаток, которые исправлены в электронной версии №17. (Прим. ред.)

пространств; получить дифференциальные соотношения релятивистского и электродинамического характера, вытекающие из взаимосвязи переменных и их производных в B-пространстве и в 4-пространстве.

Так, здесь введены понятия B-векторной функции и операторов частных производных этой функции по её бикомплексным, комплексным и действительным аргументам в B-пространстве. Получены соотношения между операторами дифференцирования (∂-операторами) в B-пространстве и в 4-пространстве. Тем самым получена возможность дифференцирования B-векторной функции по 4-пространственным переменным. Установлено соответствие между ∂-операторами первого порядка по 4-пространственным переменным и ∂-операторами второго порядка по координатам B-пространства. Показано, что производные B-векторной функции по переменным T, X, Y, Z удовлетворяют в 4-пространстве волновому уравнению, а производные по переменным F, G, K, L, M, N — уравнениям Максвелла для бегущей электромагнитной волны. Эти производные являются компонентами соответственно 4-вектора и антисимметричного 4-тензора. B-преобразование, обусловливающее преобразование Лоренца для 4-координат, вызывает и преобразование Лоренца указанных компонентов. Показано, что инвариантами B-преобразования являются псевдоевклидовы квадрат 4-вектора производных и скалярное произведение 4-вектора производных и 4-вектора координат, а также определённые составляющие тензора 4-момента. Все результаты согласуются с литературными данными.

В качестве литературы сравнения и источника физических обозначений нами использовались книги Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [2,3]. Ссылки на формулы с указанием главы (1 или 2) относятся к работе [1]. Например, ссылку [1, 2:3.4] следует понимать как глава 2, раздел 3, формула 4 работы [1]. Подчеркнём, что эта публикация полностью наследует *понятия, определения и обозначения*, введённые в [1].

1 B-векторная функция и её производные

Действительные переменные a, b, c, d и сопряжённые формы бикомплексной переменной q могут быть выражены друг через друга:

$$
\begin{aligned}
q &= a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}c + \mathrm{ij}d = u + \mathrm{j}v, & a &= \quad (q + \bar{q} + \tilde{q} + \tilde{\bar{q}})/4 = \quad (u + \bar{u})/2 \\
\bar{q} &= a - \mathrm{i}b + \mathrm{j}c - \mathrm{ij}d = \bar{u} + \mathrm{j}\bar{v}, & b &= -\mathrm{i}\,(q - \bar{q} + \tilde{q} - \tilde{\bar{q}})/4 = -\mathrm{i}\,(u - \bar{u})/2 \\
\tilde{q} &= a + \mathrm{i}b - \mathrm{j}c - \mathrm{ij}d = u - \mathrm{j}v, & c &= \quad \mathrm{j}\,(q + \bar{q} - \tilde{q} - \tilde{\bar{q}})/4 = \quad (v + \bar{v})/2 \\
\tilde{\bar{q}} &= a - \mathrm{i}b - \mathrm{j}c + \mathrm{ij}d = \bar{u} - \mathrm{j}\bar{v}, & d &= -\mathrm{ij}\,(q - \bar{q} - \tilde{q} + \tilde{\bar{q}})/4 = -\mathrm{i}\,(v - \bar{v})/2
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

дифференциалы этих переменных имеют аналогичный вид. Например,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}q &= \mathrm{d}a + \mathrm{id}b + \mathrm{jd}c + \mathrm{ijd}d = \mathrm{d}u + \mathrm{jd}v, \\
\mathrm{d}c &= \mathrm{j}(\mathrm{d}q + \mathrm{d}\bar{q} - \mathrm{d}\tilde{q} - \mathrm{d}\tilde{\bar{q}})/4 = (\mathrm{d}v + \mathrm{d}\bar{v})/2
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Рассмотрим функцию $f\,(a, b, c, d)$ от четырёх независимых действительных аргументов (a, b, c, d). Путём замены переменных (1.1) она может быть преобразована в функцию $f\,(q, \bar{q}, \tilde{q}, \tilde{\bar{q}})$ четырёх бикомплексных переменных или в функцию $f(u, v, \bar{u}, \bar{v})$ четырёх комплексных переменных. (Здесь мы следуем используемому в комплексном анализе способу записи [4–6], когда после замены переменных типа (1.1) функциональная зависимость продолжает обозначаться той же самой буквой f). В общем случае функция f будет бикомплекснозначной (B-значной). На равных правах будем использовать термин – B-векторная функция. Через свои составляющие эта функция может быть представлена в следующем виде:

$$
f\,(a, b, c, d) = A\,(a, b, c, d) + \mathrm{i}B\,(a, b, c, d) + \mathrm{j}C\,(a, b, c, d) + \mathrm{ij}D\,(a, b, c, d)\,, \tag{1.3}
$$

где A, B, C, D — действительные функции четырёх действительных переменных. Форму записи (1.3) функции f, когда она имеет ту же структуру, что и переменная q, будем называть *стандартной*.

Если функции A, B, C, D дифференцируемы, то с учётом (1.2) получим

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial a}\mathrm{d}a + \frac{\partial f}{\partial b}\mathrm{d}b + \frac{\partial f}{\partial c}\mathrm{d}c + \frac{\partial f}{\partial d}\mathrm{d}d = \\
&= \frac{\partial f}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\mathrm{d}\bar{q} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}}\mathrm{d}\tilde{q} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\tilde{q}}}\mathrm{d}\bar{\tilde{q}} = \\
&= \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v + \frac{\partial f}{\partial \bar{u}}\mathrm{d}\bar{u} + \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}\mathrm{d}\bar{v} = \\
&= \frac{\partial f}{\partial q}(\mathrm{d}a + \mathrm{i}\mathrm{d}b + \mathrm{j}\mathrm{d}c + \mathrm{ij}\mathrm{d}d) + \frac{\partial f}{\partial \bar{q}}(\mathrm{d}a - \mathrm{i}\mathrm{d}b + \mathrm{j}\mathrm{d}c - \mathrm{ij}\mathrm{d}d) + \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}}(\mathrm{d}a + \mathrm{i}\mathrm{d}b - \mathrm{j}\mathrm{d}c - \mathrm{ij}\mathrm{d}d) + \frac{\partial f}{\partial \bar{\tilde{q}}}(\mathrm{d}a - \mathrm{i}\mathrm{d}b - \mathrm{j}\mathrm{d}c + \mathrm{ij}\mathrm{d}d) = \qquad (1.4) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\tilde{q}}}\right)\mathrm{d}a + \mathrm{i}\left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\tilde{q}}}\right)\mathrm{d}b + \\
&\quad + \mathrm{j}\left(\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\tilde{q}}}\right)\mathrm{d}c + \mathrm{ij}\left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\tilde{q}}}\right)\mathrm{d}d = \\
&= \frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{d}a + \mathrm{i}\mathrm{d}b) + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathrm{d}c + \mathrm{i}\mathrm{d}d) + \frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(\mathrm{d}a - \mathrm{i}\mathrm{d}b) + \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\mathrm{d}c - \mathrm{i}\mathrm{d}d) = \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \bar{u}}\right)\mathrm{d}a + \mathrm{i}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial \bar{u}}\right)\mathrm{d}b + \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}\right)\mathrm{d}c + \mathrm{i}\left(\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}\right)\mathrm{d}d\,.
\end{aligned}$$

При таком, классическом способе записи операторов дифференцирования (кратко — ∂-операторов) массивы формул типа (1.4) выглядят достаточно громоздко. Поэтому, наряду с полной формой ∂-операторов, используют более компактный вариант их записи:

$$\frac{\partial}{\partial a} = \partial_a,$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \partial_a f, \qquad (1.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\tilde{q}}} = \left(\partial_q + \partial_{\bar{q}} + \partial_{\tilde{q}} + \partial_{\bar{\tilde{q}}}\right) f$$

Для нашего материала этот способ обозначений имеет две неудобные особенности. Во-первых, действие оператора на операнд внешне выглядит как обычное умножение. Поэтому, когда приходится иметь дело именно с произведением ∂-оператора и переменной или с умножением самих ∂-операторов, то это надо специально выделять и оговаривать. Во-вторых, везде *одинаковый* символ операции дифференцирования «∂» обозначен строчной буквой, тогда как *различные* переменные, по которым производится дифференцирование, указаны мелким шрифтом в подстрочном индексе. При большом количестве разных и сложных подстрочных индексов такая форма записи оказывается трудоёмкой для восприятия. Чтобы скорректировать эти особенности, введём следующие, модифицированные по сравнению с (1.5) обозначения:

$$\partial_a = {}^{\partial}a,$$

$$\partial_a f = \left({}^{\partial}a \,|\, f\right), \tag{1.6}$$

$$\left(\partial_q + \partial_{\bar{q}} + \partial_{\tilde{q}} + \partial_{\tilde{\bar{q}}}\right) f = \left({}^{\partial}q + {}^{\partial}\bar{q} + {}^{\partial}\tilde{q} + {}^{\partial}\tilde{\bar{q}} \,|\, f\right)$$

В таких обозначениях различные переменные дифференцирования записаны строчными буквами, а один и тот же символ операции дифференцирования «∂» указан в виде левого надстрочного индекса. При этом оператор и операнд дифференцирования разделены вертикальной чертой «|», тогда как для операции умножения оставлено её традиционное обозначение.

Приравнивая в (1.4) выражения при одинаковых дифференциалах (и опустив во всех частях равенства *один и тот же* операнд f), получим следующие соотношения для операторов частных производных:

$$\begin{aligned}
{}^{\partial}a &= \left({}^{\partial}q + {}^{\partial}\bar{q} + {}^{\partial}\tilde{q} + {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}\right) = \left({}^{\partial}u + {}^{\partial}\bar{u}\right)\\
{}^{\partial}b &= \mathrm{i}\left({}^{\partial}q - {}^{\partial}\bar{q} + {}^{\partial}\tilde{q} - {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}\right) = \mathrm{i}\left({}^{\partial}u - {}^{\partial}\bar{u}\right)\\
{}^{\partial}c &= \mathrm{j}\left({}^{\partial}q + {}^{\partial}\bar{q} - {}^{\partial}\tilde{q} - {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}\right) = \left({}^{\partial}v + {}^{\partial}\bar{v}\right)\\
{}^{\partial}d &= \mathrm{ij}\left({}^{\partial}q - {}^{\partial}\bar{q} - {}^{\partial}\tilde{q} + {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}\right) = \mathrm{i}\left({}^{\partial}v - {}^{\partial}\bar{v}\right)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Аналогично, или непосредственно из (1.7), получим также:

$$\begin{aligned}
4\,{}^{\partial}q &= {}^{\partial}a - \mathrm{i}{}^{\partial}b + \mathrm{j}{}^{\partial}c - \mathrm{ij}{}^{\partial}d = \left({}^{\partial}a - \mathrm{i}{}^{\partial}b\right) + \mathrm{j}\left({}^{\partial}c - \mathrm{i}{}^{\partial}d\right) = 2\left({}^{\partial}u + \mathrm{j}{}^{\partial}v\right)\\
4\,{}^{\partial}\bar{q} &= {}^{\partial}a + \mathrm{i}{}^{\partial}b + \mathrm{j}{}^{\partial}c + \mathrm{ij}{}^{\partial}d = \left({}^{\partial}a + \mathrm{i}{}^{\partial}b\right) + \mathrm{j}\left({}^{\partial}c + \mathrm{i}{}^{\partial}d\right) = 2\left({}^{\partial}\bar{u} + \mathrm{j}{}^{\partial}\bar{v}\right)\\
4\,{}^{\partial}\tilde{q} &= {}^{\partial}a - \mathrm{i}{}^{\partial}b - \mathrm{j}{}^{\partial}c + \mathrm{ij}{}^{\partial}d = \left({}^{\partial}a - \mathrm{i}{}^{\partial}b\right) - \mathrm{j}\left({}^{\partial}c - \mathrm{i}{}^{\partial}d\right) = 2\left({}^{\partial}u - \mathrm{j}{}^{\partial}v\right)\\
4\,{}^{\partial}\tilde{\bar{q}} &= {}^{\partial}a + \mathrm{i}{}^{\partial}b - \mathrm{j}{}^{\partial}c - \mathrm{ij}{}^{\partial}d = \left({}^{\partial}a + \mathrm{i}{}^{\partial}b\right) - \mathrm{j}\left({}^{\partial}c + \mathrm{i}{}^{\partial}d\right) = 2\left({}^{\partial}\bar{u} - \mathrm{j}{}^{\partial}\bar{v}\right)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Таким образом, частная производная от функции f по переменной q может быть записана следующими способами:

$$\partial f/\partial q = \left({}^{\partial}q \,|\, f\right) = \left({}^{\partial}u + \mathrm{j}{}^{\partial}v \,|\, f\right)/2 = \left({}^{\partial}a - \mathrm{i}{}^{\partial}b + \mathrm{j}{}^{\partial}c - \mathrm{ij}{}^{\partial}d \,|\, f\right)/4$$

∂-оператор по комплексной переменной, выраженный через частные производные по действительным переменным, имеет комплексно-сопряжённую структуру:

$$\begin{aligned}
&u = a + \mathrm{i}b, && \bar{u} = a - \mathrm{i}b, && v = c + \mathrm{i}d, && \bar{v} = c - \mathrm{i}d,\\
&{}^{\partial}u = \left({}^{\partial}a - \mathrm{i}{}^{\partial}b\right)/2, && {}^{\partial}\bar{u} = \left({}^{\partial}a + \mathrm{i}{}^{\partial}b\right)/2, && {}^{\partial}v = \left({}^{\partial}c - \mathrm{i}{}^{\partial}d\right)/2, && {}^{\partial}\bar{v} = \left({}^{\partial}c + \mathrm{i}{}^{\partial}d\right)/2\,.
\end{aligned}$$

Тем самым и ∂-операторы по бикомплексным переменным (1.8), выраженные через производные по действительным переменным, имеют *структуру* B-векторов, комплексно сопряжённых тем переменным, по которым проводится дифференцирование. Когда базисная единица (i) явно в переменную дифференцирования не входит, то структура ∂-операторов оказывается такой же, как у самих C- и B-векторов. Например,

$$q = u + \mathrm{j}v \qquad \text{и} \qquad {}^{\partial}q = \left({}^{\partial}u + \mathrm{j}\,{}^{\partial}v\right)/2\,.$$

Подстановка переменных (1.1) в формулы (1.8) показывает, что частные производные любой из этих переменных по всем её сопряжённым формам равны нулю, а производная по себе самой — единице. Например,

$$\begin{aligned}
\left({}^{\partial}q\,|\,q\right) &= \left({}^{\partial}a - \mathrm{i}\,{}^{\partial}b + \mathrm{j}\,{}^{\partial}c - \mathrm{ij}\,{}^{\partial}d\,|\,a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}c + \mathrm{ij}d\right)/4 = (1+1+1+1)/4 = 1\\
\left({}^{\partial}q\,|\,\bar{q}\right) &= \left({}^{\partial}a - \mathrm{i}\,{}^{\partial}b + \mathrm{j}\,{}^{\partial}c - \mathrm{ij}\,{}^{\partial}d\,|\,a - \mathrm{i}b + \mathrm{j}c - \mathrm{ij}d\right)/4 = (1-1+1-1)/4 = 0\\
\left({}^{\partial}\bar{q}\,|\,\bar{q}\right) &= \left({}^{\partial}a + \mathrm{i}\,{}^{\partial}b + \mathrm{j}\,{}^{\partial}c + \mathrm{ij}\,{}^{\partial}d\,|\,a - \mathrm{i}b + \mathrm{j}c - \mathrm{ij}d\right)/4 = (1+1+1+1)/4 = 1.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Стандартная форма B-векторной функции (1.3) подразумевает возможность записи её сопряжённых значений в соответствующих *стандартных сопряжённых* формах:

$$\begin{aligned}
\bar{f}\,(a,b,c,d) &= A\,(a,b,c,d) - \mathrm{i}B\,(a,b,c,d) + \mathrm{j}C\,(a,b,c,d) - \mathrm{ij}D\,(a,b,c,d)\\
\tilde{f}\,(a,b,c,d) &= A\,(a,b,c,d) + \mathrm{i}B\,(a,b,c,d) - \mathrm{j}C\,(a,b,c,d) - \mathrm{ij}D\,(a,b,c,d)\\
\tilde{\bar{f}}\,(a,b,c,d) &= A\,(a,b,c,d) - \mathrm{i}B\,(a,b,c,d) - \mathrm{j}C\,(a,b,c,d) + \mathrm{ij}D\,(a,b,c,d)\,.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Принцип построения операторов (1.7), (1.8) не зависит от вида дифференцируемой функции. Поэтому, те же операторные соотношения будут иметь место и для функций (1.10). Естественно, результат действия одних и тех же операторов на различные функции будет различным.

2 Операторы вторых производных по переменным B-пространства Операторы первых производных по переменным 4-пространства

Вторую производную некоторой функции получают дифференцированием её первой производной. В терминах операторов дифференцирования эта процедура эквивалентна действию друг на друга двух ∂-операторов первого порядка, получения тем самым оператора второго порядка, а затем его действия на дифференцируемую функцию:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial b}\,\frac{\partial}{\partial a}\right) f = \left(\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial b}\right) f, \qquad \text{где} \quad \frac{\partial^2}{\partial a\,\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\,\frac{\partial}{\partial a}.$$

Для операторов вторых (и более высокого порядка) частных производных, в развитие (1.6), введём компактные обозначения по следующему принципу:

$$\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial b} = {}^{\partial}ab,\ \frac{\partial^2}{\partial a^2} = {}^{\partial}aa = {}^{\partial}a^2,\ \frac{\partial^4}{\partial a\,\partial b^2 \partial c} = {}^{\partial}ab^2c \qquad \text{и т.п.,} \tag{2.1}$$

где характер и порядок производной однозначно определяются перечнем переменных дифференцирования, стоящих после *надстрочного* символа «∂». В обозначениях (1.6) и (2.1) вторую производную можно кратко записать так:

$$\begin{aligned}
\left({}^{\partial}b\,\middle|\,{}^{\partial}a\,|\,f\right) &= \left({}^{\partial}ab\,|\,f\right), \qquad \text{где } \left({}^{\partial}ab\right) = \left({}^{\partial}b\,|\,{}^{\partial}a\right);\\
\left({}^{\partial}a\,\middle|\,{}^{\partial}a\,|\,f\right) &= \left({}^{\partial}a^2\,|\,f\right), \qquad \text{где } \left({}^{\partial}a^2\right) = \left({}^{\partial}a\,|\,{}^{\partial}a\right).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Например, вторая производная от a^2 «по де a дважды»: $\partial^2\left(a^2\right)/\partial a^2 = \left({}^{\partial}a^2\,|\,a^2\right) = 2$.

Поскольку значение смешанных производных дифференцируемой функции не зависит от порядка дифференцирования, то

$$\left({}^{\partial}b\,|\,{}^{\partial}a\right) = {}^{\partial}ab = {}^{\partial}ba = \left({}^{\partial}a\,|\,{}^{\partial}b\right) \tag{2.3}$$

и мы будем использовать свойство (2.3) для того, чтобы располагать переменные дифференцирования в ∂-операторах в наиболее наглядном порядке.

На основе (1.8), действуя оператором на оператор, для вторых частных производных получим:

$$\begin{aligned}
16\,{}^{\partial}q\bar{q} &= 4\left[{}^{\partial}u\bar{u} + {}^{\partial}v\bar{v} + \mathrm{j}({}^{\partial}u\bar{v} + {}^{\partial}\bar{u}v)\right] = {}^{\partial}a^2 + {}^{\partial}b^2 + {}^{\partial}c^2 + {}^{\partial}d^2 + \mathrm{j}2\left({}^{\partial}ac + {}^{\partial}bd\right)\\
16\,{}^{\partial}\tilde{q}\tilde{\bar{q}} &= 4\left[{}^{\partial}u\bar{u} + {}^{\partial}v\bar{v} - \mathrm{j}({}^{\partial}u\bar{v} + {}^{\partial}\bar{u}v)\right] = {}^{\partial}a^2 + {}^{\partial}b^2 + {}^{\partial}c^2 + {}^{\partial}d^2 - \mathrm{j}2\left({}^{\partial}ac + {}^{\partial}bd\right)\\
16\,{}^{\partial}q\tilde{\bar{q}} &= 4\left[{}^{\partial}u\bar{u} - {}^{\partial}v\bar{v} - \mathrm{j}({}^{\partial}u\bar{v} - {}^{\partial}\bar{u}v)\right] = {}^{\partial}a^2 + {}^{\partial}b^2 - {}^{\partial}c^2 - {}^{\partial}d^2 - \mathrm{ij}2\left({}^{\partial}ad - {}^{\partial}bc\right)\\
16\,{}^{\partial}\bar{q}\tilde{q} &= 4\left[{}^{\partial}u\bar{u} - {}^{\partial}v\bar{v} + \mathrm{j}({}^{\partial}u\bar{v} - {}^{\partial}\bar{u}v)\right] = {}^{\partial}a^2 + {}^{\partial}b^2 - {}^{\partial}c^2 - {}^{\partial}d^2 + \mathrm{ij}2\left({}^{\partial}ad - {}^{\partial}bc\right)\\
16\,{}^{\partial}q\tilde{q} &= 4\left({}^{\partial}u^2 - {}^{\partial}v^2\right) \qquad\qquad\qquad\quad = {}^{\partial}a^2 - {}^{\partial}b^2 - {}^{\partial}c^2 + {}^{\partial}d^2 - \mathrm{i}2\left({}^{\partial}ab - {}^{\partial}cd\right)\\
16\,{}^{\partial}\bar{q}\tilde{\bar{q}} &= 4\left({}^{\partial}\bar{u}^2 - {}^{\partial}\bar{v}^2\right) \qquad\qquad\qquad\quad = {}^{\partial}a^2 - {}^{\partial}b^2 - {}^{\partial}c^2 + {}^{\partial}d^2 + \mathrm{i}2\left({}^{\partial}ab - {}^{\partial}cd\right)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}
16\,{}^{\partial}q^2 = 4\left({}^{\partial}u^2 + {}^{\partial}v^2 + \mathrm{i}2\,{}^{\partial}uv\right) =\\
= {}^{\partial}a^2 - {}^{\partial}b^2 + {}^{\partial}c^2 - {}^{\partial}d^2 - \mathrm{i}2\left({}^{\partial}ab + {}^{\partial}cd\right) + \mathrm{j}2\left({}^{\partial}ac - {}^{\partial}bd\right) - \mathrm{ij}2\left({}^{\partial}ad + {}^{\partial}bc\right)
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Значения ${}^{\partial}\bar{q}^2$, ${}^{\partial}\tilde{q}^2$, ${}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2$ находим соответствующим сопряжением выражения (2.5). Отметим, что ∂-операторы вторых производных (2.4) и (2.5) имеют структуру, комплексно сопряжённую структуре аналогичных произведений B-векторов.

С учётом строения переменных $\{T..N\}$ [1, 2:1.1] и [1, 2:4.1], из (2.4) и (2.5) имеем возможность записать:

$$\begin{aligned}
\left({}^{\partial}q\bar{q} + {}^{\partial}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right) &= \left({}^{\partial}u\bar{u} + {}^{\partial}v\bar{v}\right)/2 &&= \left({}^{\partial}a^2 + {}^{\partial}b^2 + {}^{\partial}c^2 + {}^{\partial}d^2\right)/8 &&= {}^{\partial}T\\
\left({}^{\partial}q\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\right) &= \left({}^{\partial}u\bar{u} - {}^{\partial}v\bar{v}\right)/2 &&= \left({}^{\partial}a^2 + {}^{\partial}b^2 - {}^{\partial}c^2 - {}^{\partial}d^2\right)/8 &&= {}^{\partial}Y\\
\left({}^{\partial}q\tilde{q} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{\bar{q}}\right) &= \left({}^{\partial}u^2 - {}^{\partial}v^2 + {}^{\partial}\bar{u}^2 - {}^{\partial}\bar{v}^2\right)/4 &&= \left({}^{\partial}a^2 - {}^{\partial}b^2 - {}^{\partial}c^2 + {}^{\partial}d^2\right)/8 &&= {}^{\partial}F\\
\left({}^{\partial}q\tilde{q} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{\bar{q}}\right) &= \left({}^{\partial}u^2 - {}^{\partial}v^2 - {}^{\partial}\bar{u}^2 + {}^{\partial}\bar{v}^2\right)/4 &&= -\mathrm{i}\left({}^{\partial}ab - {}^{\partial}cd\right)/4 &&= -\mathrm{i}{}^{\partial}G\\
\left({}^{\partial}q\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\right) &= -\mathrm{j}\left({}^{\partial}u\bar{v} - {}^{\partial}\bar{u}v\right)/2 &&= -\mathrm{ij}\left({}^{\partial}ad - {}^{\partial}bc\right)/4 &&= -\mathrm{ij}{}^{\partial}Z\\
\left({}^{\partial}q\bar{q} - {}^{\partial}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right) &= \mathrm{j}\left({}^{\partial}u\bar{v} + {}^{\partial}\bar{u}v\right)/2 &&= \mathrm{j}\left({}^{\partial}ac + {}^{\partial}bd\right)/4 &&= \mathrm{j}{}^{\partial}X
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
\left({}^{\partial}q^2 + {}^{\partial}\bar{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right)/2 &= \left({}^{\partial}u^2 + {}^{\partial}v^2 + {}^{\partial}\bar{u}^2 + {}^{\partial}\bar{v}^2\right)/4 =\\
&= \left({}^{\partial}a^2 - {}^{\partial}b^2 + {}^{\partial}c^2 - {}^{\partial}d^2\right)/8 = {}^{\partial}K\\
\left({}^{\partial}q^2 - {}^{\partial}\bar{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right)/2 &= \left({}^{\partial}u^2 + {}^{\partial}v^2 - {}^{\partial}\bar{u}^2 - {}^{\partial}\bar{v}^2\right)/4 = -\mathrm{i}\left({}^{\partial}ab + {}^{\partial}cd\right)/4 = -\mathrm{i}{}^{\partial}L\\
\left({}^{\partial}q^2 + {}^{\partial}\bar{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right)/2 &= \mathrm{j}\left({}^{\partial}uv + {}^{\partial}\bar{u}\bar{v}\right)/2 = \mathrm{j}\left({}^{\partial}ac - {}^{\partial}bd\right)/4 = \mathrm{j}{}^{\partial}M\\
\left({}^{\partial}q^2 - {}^{\partial}\bar{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right)/2 &= \mathrm{j}\left({}^{\partial}uv - {}^{\partial}\bar{u}\bar{v}\right)/2 = -\mathrm{ij}\left({}^{\partial}ad + {}^{\partial}bc\right)/4 = -\mathrm{ij}{}^{\partial}N
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Операторы (2.6), (2.7) являются комплексом *вторых* производных B-векторной функции по её собственным аргументам и одновременно выступают в роли *первых* производных по переменным $\{T..N\}$. При этом для всех десяти переменных $\{T..N\}$ и всех десяти ∂-операторов (2.6), (2.7) действие на собственную переменную даёт единицу, а на девять остальных — ноль. Например,

$$\begin{aligned}
\left({}^{\partial}T \,|\, T\right) &= \left({}^{\partial}a^2 + {}^{\partial}b^2 + {}^{\partial}c^2 + {}^{\partial}d^2 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)/8 = (2+2+2+2)/8 = 1 \\
\left({}^{\partial}T \,|\, Y\right) &= \left({}^{\partial}a^2 + {}^{\partial}b^2 + {}^{\partial}c^2 + {}^{\partial}d^2 \mid a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)/8 = (2+2-2-2)/8 = 0 \\
\left({}^{\partial}T \,|\, K\right) &= \left({}^{\partial}a^2 + {}^{\partial}b^2 + {}^{\partial}c^2 + {}^{\partial}d^2 \mid a^2 - b^2 + c^2 - d^2\right)/8 = (2-2+2-2)/8 = 0
\end{aligned} \qquad (2.8)$$

Множество операторов (2.6), (2.7) и его основные подмножества кратко обозначим так:

$$\begin{aligned}
\left\{{}^{\partial}T, {}^{\partial}X, {}^{\partial}Y, {}^{\partial}Z, {}^{\partial}F, {}^{\partial}G, {}^{\partial}K, {}^{\partial}L, {}^{\partial}M, {}^{\partial}N\right\} &= \left\{{}^{\partial}T..{}^{\partial}N\right\}, \\
\left\{{}^{\partial}T, {}^{\partial}X, {}^{\partial}Y, {}^{\partial}Z, {}^{\partial}F, {}^{\partial}G\right\} &= \left\{{}^{\partial}T..{}^{\partial}G\right\}, \\
\left\{{}^{\partial}F, {}^{\partial}G, {}^{\partial}K, {}^{\partial}L, {}^{\partial}M, {}^{\partial}N\right\} &= \left\{{}^{\partial}F..{}^{\partial}N\right\}, \\
\left\{{}^{\partial}T, {}^{\partial}X, {}^{\partial}Y, {}^{\partial}Z\right\} &= \left\{{}^{\partial}T..{}^{\partial}Z\right\}, \\
\left\{{}^{\partial}K, {}^{\partial}L, {}^{\partial}M, {}^{\partial}N\right\} &= \left\{{}^{\partial}K..{}^{\partial}N\right\}.
\end{aligned}$$

В обозначениях (2.6), (2.7) исходные формулы (2.4), (2.5) принимают вид:

$$\begin{aligned}
&2\,{}^{\partial}q\bar{q} = \left({}^{\partial}T + \mathrm{j}{}^{\partial}X\right), \quad 2\,{}^{\partial}q\tilde{\bar{q}} = \left({}^{\partial}Y - \mathrm{ij}{}^{\partial}Z\right), \quad 2\,{}^{\partial}q\tilde{q} = \left({}^{\partial}F - \mathrm{i}{}^{\partial}G\right) \\
&2\,{}^{\partial}\tilde{q}\tilde{\bar{q}} = \left({}^{\partial}T - \mathrm{j}{}^{\partial}X\right), \quad 2\,{}^{\partial}\bar{q}\tilde{q} = \left({}^{\partial}Y + \mathrm{ij}{}^{\partial}Z\right), \quad 2\,{}^{\partial}\bar{q}\tilde{\bar{q}} = \left({}^{\partial}F + \mathrm{i}{}^{\partial}G\right)
\end{aligned} \qquad (2.9)$$

$$2\,{}^{\partial}q^2 = \left({}^{\partial}K - \mathrm{i}{}^{\partial}L + \mathrm{j}{}^{\partial}M - \mathrm{ij}{}^{\partial}N\right) \qquad (2.10)$$

Значения ${}^{\partial}\bar{q}^2$, ${}^{\partial}\tilde{q}^2$, ${}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2$ получаем соответствующим сопряжением выражения (2.10).

Таким образом, каждому из десяти операторов $\{{}^{\partial}T..{}^{\partial}N\}$ сопоставляется дифференциальный комплекс второго порядка по четырём независимым переменным (a, b, c, d) или по эквивалентным четвёркам аргументов $(q, \bar{q}, \tilde{q}, \tilde{\bar{q}})$ или $(u, v, \bar{u}, \bar{v})$.

3 Соотношения вторых производных по переменным T, X, Y, Z, F, G. Волновое уравнение

Из (2.6), действуя оператором на оператор, получим следующие операторы вторых производных уже по переменным $\{T..G\}$:

$$
\begin{aligned}
{}^{\partial}T^2 &= \left({}^{\partial}q^2\bar{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}}^2 + 2\,{}^{\partial}q\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right) = \\
&= \left[{}^{\partial}a^4 + {}^{\partial}b^4 + {}^{\partial}c^4 + {}^{\partial}d^4 + 2\left({}^{\partial}a^2b^2 + {}^{\partial}a^2c^2 + {}^{\partial}a^2d^2 + {}^{\partial}b^2c^2 + {}^{\partial}b^2d^2 + {}^{\partial}c^2d^2\right)\right]/64 \\
{}^{\partial}X^2 &= \left({}^{\partial}q^2\bar{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}}^2 - 2\,{}^{\partial}q\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right) = \left[4\left({}^{\partial}a^2c^2 + {}^{\partial}b^2d^2 + 2\,{}^{\partial}abcd\right)\right]/64 \\
{}^{\partial}Y^2 &= \left({}^{\partial}q^2\tilde{\bar{q}}^2 + {}^{\partial}\bar{q}^2\tilde{q}^2 + 2\,{}^{\partial}q\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right) = \\
&= \left[{}^{\partial}a^4 + {}^{\partial}b^4 + {}^{\partial}c^4 + {}^{\partial}d^4 + 2\left({}^{\partial}a^2b^2 - {}^{\partial}a^2c^2 - {}^{\partial}a^2d^2 - {}^{\partial}b^2c^2 - {}^{\partial}b^2d^2 + {}^{\partial}c^2d^2\right)\right]/64 \qquad (3.1) \\
{}^{\partial}Z^2 &= -\left({}^{\partial}q^2\tilde{\bar{q}}^2 + {}^{\partial}\bar{q}^2\tilde{q}^2 - 2\,{}^{\partial}q\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right) = \left[4\left({}^{\partial}a^2d^2 + {}^{\partial}b^2c^2 - 2\,{}^{\partial}abcd\right)\right]/64 \\
{}^{\partial}F^2 &= \left({}^{\partial}q^2\tilde{q}^2 + {}^{\partial}\bar{q}^2\tilde{\bar{q}}^2 + 2\,{}^{\partial}q\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right) = \\
&= \left[{}^{\partial}a^4 + {}^{\partial}b^4 + {}^{\partial}c^4 + {}^{\partial}d^4 - 2\left({}^{\partial}a^2b^2 + {}^{\partial}a^2c^2 - {}^{\partial}a^2d^2 - {}^{\partial}b^2c^2 + {}^{\partial}b^2d^2 + {}^{\partial}c^2d^2\right)\right]/64 \\
{}^{\partial}G^2 &= -\left({}^{\partial}q^2\tilde{q}^2 + {}^{\partial}\bar{q}^2\tilde{\bar{q}}^2 - 2\,{}^{\partial}q\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right) = \left[4\left({}^{\partial}a^2b^2 + {}^{\partial}c^2d^2 - 2\,{}^{\partial}abcd\right)\right]/64\ ,
\end{aligned}
$$

где оператор 4-ой смешанной производной

$$
\begin{aligned}
&256\,{}^{\partial}q\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}} = \\
&= \left\{{}^{\partial}a^2 + {}^{\partial}b^2 + {}^{\partial}c^2 + {}^{\partial}d^2 + \mathrm{j}2\left({}^{\partial}ac + {}^{\partial}bd\right) \mid {}^{\partial}a^2 + {}^{\partial}b^2 + {}^{\partial}c^2 + {}^{\partial}d^2 - \mathrm{j}2\left({}^{\partial}ac + {}^{\partial}bd\right)\right\} = \\
&= \left\{{}^{\partial}a^4 + {}^{\partial}b^4 + {}^{\partial}c^4 + {}^{\partial}d^4 + \right. \\
&\quad \left. + 2\left({}^{\partial}a^2b^2 - {}^{\partial}a^2c^2 + {}^{\partial}a^2d^2 + {}^{\partial}b^2c^2 - {}^{\partial}b^2d^2 + {}^{\partial}c^2d^2\right) - 8\,{}^{\partial}abcd\right\}.
\end{aligned}
\qquad (3.2)
$$

Из (3.1) вытекают следующие соотношения:

$$\left({}^{\partial}T^2 - {}^{\partial}X^2\right) = \left({}^{\partial}Y^2 + {}^{\partial}Z^2\right) = \left({}^{\partial}F^2 + {}^{\partial}G^2\right) = 4\,{}^{\partial}q\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}. \qquad (3.3)$$

Отметим, что эти соотношения могут быть получены и непосредственно действием друг на друга сопряжённых операторов (2.9), что рассматривается в следующем разделе. Пока же, из (3.3) находим

$$\left({}^{\partial}T^2 - {}^{\partial}X^2 - {}^{\partial}Y^2 - {}^{\partial}Z^2\right) = 0 \qquad (3.4)$$

$$\left({}^{\partial}T^2 - {}^{\partial}X^2 - {}^{\partial}F^2 - {}^{\partial}G^2\right) = 0 \qquad (3.5)$$

$${}^{\partial}T^2 = \left({}^{\partial}X^2 + {}^{\partial}Y^2 + {}^{\partial}Z^2\right) = \left({}^{\partial}X^2 + {}^{\partial}F^2 + {}^{\partial}G^2\right). \qquad (3.6)$$

Из (3.6) следует, что любая дифференцируемая B-векторная функция удовлетворяет в 4-пространстве следующему волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2}. \qquad (3.7)$$

Аналогичное волновое уравнение имеет место и для переменных (T, X, F, G).

Если первые производные по переменным (T, X, Y, Z) записать в обозначениях энергии и составляющих импульса $(\mathcal{E}, \mathbf{p})$

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \mathcal{E}, \quad \frac{\partial f}{\partial X} = -p_x, \quad \frac{\partial f}{\partial Y} = -p_y, \quad \frac{\partial f}{\partial Z} = -p_z, \tag{3.8}$$

то уравнение (3.7) принимает вид

$$-\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} = \frac{\partial p_x}{\partial X} + \frac{\partial p_y}{\partial Y} + \frac{\partial p_z}{\partial Z} = \operatorname{div} \mathbf{p}. \tag{3.9}$$

А из равенства смешанных производных, для переменных (3.8) получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial T\, \partial X} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X} = -\frac{\partial p_x}{\partial T}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial T\, \partial Y} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Y} = -\frac{\partial p_y}{\partial T}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial T\, \partial Z} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z} = -\frac{\partial p_z}{\partial T}, \tag{3.10}$$

что даёт 3-векторное уравнение

$$\operatorname{grad} \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial T} \tag{3.11}$$

Отметим, что в общем случае величины (3.8), как производные B-векторной функции по действительным переменным, являются B-векторными, и требуют более подробного физического анализа в дальнейшем.

4 Произведение и композиция операторов дифференцирования

Термины «произведение» и «композиция» при обозначении последовательного действия операторов употребляют как синонимы. В физике (например, в квантовой механике) обычно используют термин «произведение» операторов [9]. Результат такого «произведения» существенно зависит от типа линейной операции. Например, «произведение» линейных функций рассматривается как получение сложной линейной функции, «произведение» операторов дифференцирования первого порядка — как нахождение второй производной, а «произведение» координат — как произведение координат и т.п. При таком подходе операция обычного умножения производных остаётся вне рамок данного формализма, поскольку он неспособен *не преобразовывать* «произведение» ∂-операторов в повторное дифференцирование. Например, когда в квантовой механике квадратное уравнение энергии-импульса интерпретируют как операторное (в обозначениях типа (3.8)), то получают дифференциальное уравнение второго порядка [9]. В зависимости от вида исходного уравнения (изотропное или времениподобное), результатом будет волновое уравнение типа (3.7) или уравнение Клейна – Гордона, для которых исходные алгебраические соотношения имеют характер дисперсионных уравнений.

В нашей работе, ∂-операторы фактически служат для краткой записи частных производных, которые сами являются B-векторами. Учитывая опыт предыдущей работы [1], можно ожидать, что не только дифференциальные, но и алгебраические соотношения между B-векторными производными могут представлять интерес с физической точки зрения. Поэтому, желательно иметь возможность отличать повторное дифференцирование от алгебраического умножения производных уже на уровне операторного способа записи, а также на уровне терминологии. Исходя из этих соображений, «произведением» (переменных, производных, функций, ∂-операторов, переменной и ∂-оператора и т.п.) мы будем называть только их обычное умножение друг на друга. Термин «композиция» будем применять для обозначения последовательного действия ∂-операторов. Способ записи (1.6), когда действие ∂-оператора на операнд (другой ∂-оператор или переменную) обозначено вертикальной чертой, позволяет отличать композицию ∂-операторов от их произведения.

Пример записи произведений ∂-операторов: $\left({}^\partial a\right)\left({}^\partial bc\right)$ и $\left({}^\partial a\right)\left({}^\partial a\right)=\left({}^\partial a\right)^2$, а пример записи их соответствующих композиций: $\left({}^\partial a\,|\,{}^\partial bc\right)={}^\partial abc$ и $\left({}^\partial a\,|\,{}^\partial a\right)={}^\partial a^2$.

Все структурные элементы сложного оператора действуют на *одну и ту же* (произвольную, дифференцируемую) функцию. Если несколько операторов объединены в некоторое уравнение, то всё это уравнение относится к *той же самой* функции. При необходимости записать одно уравнение для различных функций, эти функции должны быть указаны явно. Тем самым, мы фактически перейдём от операторного уравнения к конкретному дифференциальному уравнению.

Проиллюстрируем способ записи композиции и произведения ∂-операторов на примере соотношений (2.9):

$$\begin{gathered}\left({}^\partial T+\mathrm{j}{}^\partial X\;|\,{}^\partial T-\mathrm{j}{}^\partial X\right)=\left({}^\partial T^2-{}^\partial X^2\right)=4\left({}^\partial q\bar q\,|\,{}^\partial\tilde q\tilde{\bar q}\right)=4\,{}^\partial q\bar q\tilde q\tilde{\bar q}\\ \left({}^\partial Y-\mathrm{ij}{}^\partial Z\;|\,{}^\partial Y+\mathrm{ij}{}^\partial Z\right)=\left({}^\partial Y^2+{}^\partial Z^2\right)=4\left({}^\partial q\tilde{\bar q}\,|\,{}^\partial\bar q\tilde q\right)=4\,{}^\partial q\bar q\tilde q\tilde{\bar q}\\ \left({}^\partial F-\mathrm{i}{}^\partial G\;|\,{}^\partial F+\mathrm{i}{}^\partial G\right)=\left({}^\partial F^2+{}^\partial G^2\right)=4\left({}^\partial q\tilde q\,|\,{}^\partial\bar q\tilde{\bar q}\right)=4\,{}^\partial q\bar q\tilde q\tilde{\bar q},\end{gathered}\tag{4.1}$$

$$\begin{gathered}\left({}^\partial T+\mathrm{j}{}^\partial X\right)\left({}^\partial T-\mathrm{j}{}^\partial X\right)=\left({}^\partial T\right)^2-\left({}^\partial X\right)^2=4\left({}^\partial q\bar q\right)\left({}^\partial\tilde q\tilde{\bar q}\right)\\ \left({}^\partial Y-\mathrm{ij}{}^\partial Z\right)\left({}^\partial Y+\mathrm{ij}{}^\partial Z\right)=\left({}^\partial Y\right)^2+\left({}^\partial Z\right)^2=4\left({}^\partial q\tilde{\bar q}\right)\left({}^\partial\bar q\tilde q\right)\\ \left({}^\partial F-\mathrm{i}{}^\partial G\right)\left({}^\partial F+\mathrm{i}{}^\partial G\right)=\left({}^\partial F\right)^2+\left({}^\partial G\right)^2=4\left({}^\partial q\tilde q\right)\left({}^\partial\bar q\tilde{\bar q}\right).\end{gathered}\tag{4.2}$$

В (4.1) получены операторы *вторых* производных, а в (4.2) — *квадраты* операторов *первых* производных по переменным $\{T..G\}$.

При композиции ∂-операторов мы заведомо имеем дело с той же исходной функцией. Например, первое из уравнений (4.1) при полной записи согласно (2.2) выглядит так:

$$\left({}^\partial T+\mathrm{j}{}^\partial X\,\middle|\,{}^\partial T-\mathrm{j}{}^\partial X\,|\,f\right)=\left({}^\partial T^2-{}^\partial X^2\,|\,f\right)=4\left({}^\partial q\bar q\,\middle|\,{}^\partial\tilde q\tilde{\bar q}\,|\,f\right)=4\left({}^\partial q\bar q\tilde q\tilde{\bar q}\,|\,f\right).$$

Произведения производных могут быть найдены и для различных функций:

$$2\left({}^\partial q\bar q\,|\,f_1\right)=\left({}^\partial T+\mathrm{j}{}^\partial X\,|\,f_1\right)\quad\text{и}\quad 2\left({}^\partial\tilde q\tilde{\bar q}\,|\,f_2\right)=\left({}^\partial T-\mathrm{j}{}^\partial X\,|\,f_2\right)$$

$$\begin{gathered}4\left({}^\partial q\bar q\,|\,f_1\right)\left({}^\partial\tilde q\tilde{\bar q}\,|\,f_2\right)=\left({}^\partial T+\mathrm{j}{}^\partial X\,|\,f_1\right)\left({}^\partial T-\mathrm{j}{}^\partial X\,|\,f_2\right)=\\ =\left(\frac{\partial f_1}{\partial T}\frac{\partial f_2}{\partial T}-\frac{\partial f_1}{\partial X}\frac{\partial f_2}{\partial X}\right)-\mathrm{j}\left(\frac{\partial f_1}{\partial T}\frac{\partial f_2}{\partial X}-\frac{\partial f_1}{\partial X}\frac{\partial f_2}{\partial T}\right)\end{gathered}\tag{4.3}$$

В случае $f_1\equiv f_2$, дифференциальное уравнение (4.3) сводится к первому из операторных уравнений (4.2).

С учётом сказанного, вернёмся непосредственно к уравнениям (4.1) и (4.2). Из (4.1) вытекают полученные выше волновые уравнения (3.6), (3.7). Тогда как из (4.2) следуют соотношения:

$$\begin{gathered}\left({}^\partial T\right)^2-\left({}^\partial X\right)^2-\left({}^\partial Y\right)^2-\left({}^\partial Z\right)^2=4\left[\left({}^\partial q\bar q\right)\left({}^\partial\tilde q\tilde{\bar q}\right)-\left({}^\partial q\tilde{\bar q}\right)\left({}^\partial\bar q\tilde q\right)\right]\\ \left({}^\partial T\right)^2-\left({}^\partial X\right)^2-\left({}^\partial F\right)^2-\left({}^\partial G\right)^2=4\left[\left({}^\partial q\bar q\right)\left({}^\partial\tilde q\tilde{\bar q}\right)-\left({}^\partial q\tilde q\right)\left({}^\partial\bar q\tilde{\bar q}\right)\right]\end{gathered}\tag{4.4}$$

Это уже не волновые дифференциальные уравнения второго порядка, а квадратные уравнения для первых производных B-векторной функции, имеющие 4-векторную структуру. Для произвольной функции, произведения производных в правой части уравнений — $\left({}^\partial q\bar q\,|\,f\right)\left({}^\partial\tilde q\tilde{\bar q}\,|\,f\right)$, $\left({}^\partial q\tilde{\bar q}\,|\,f\right)\left({}^\partial\bar q\tilde q\,|\,f\right)$, $\left({}^\partial q\tilde q\,|\,f\right)\left({}^\partial\bar q\tilde{\bar q}\,|\,f\right)$ — не обязаны быть равны друг другу. То есть, правая часть в (4.4) может быть не равна нулю. Поэтому 4-векторы, соответствующие уравнениям (4.4), в общем случае не являются *изотропными*. Например, это относится к 4-вектору в обозначениях энергии-импульса (3.8).

5 Соотношения вторых производных по переменным F, G, K, L, M, N. Изотропные уравнения Максвелла

При интерпретации производных по переменным $\{F..G\}$ воспользуемся аналогией с алгебраическими соотношениями [1, 2:4.5] для тензора $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и проверим адекватность применения обозначений электромагнитного поля $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$:

$$\begin{aligned} &E_x = \frac{\partial f}{\partial \mathcal{A}_x} \equiv \frac{\partial f}{\partial F}, \quad E_y = \frac{\partial f}{\partial \mathcal{A}_y} \equiv -\frac{\partial f}{\partial M}, \quad E_z = \frac{\partial f}{\partial \mathcal{A}_z} \equiv -\frac{\partial f}{\partial L} \\ &H_x = \frac{\partial f}{\partial \mathcal{B}_x} \equiv \frac{\partial f}{\partial G}, \quad H_y = \frac{\partial f}{\partial \mathcal{B}_y} \equiv -\frac{\partial f}{\partial N}, \quad H_z = \frac{\partial f}{\partial \mathcal{B}_z} \equiv \frac{\partial f}{\partial K}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Дифференцируя переменные (5.1) по T, X, Y, Z, получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E_x}{\partial T} = \frac{\partial^2 f}{\partial F\,\partial T}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial X} = \frac{\partial^2 f}{\partial F\,\partial X}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial Y} = \frac{\partial^2 f}{\partial F\,\partial Y}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial Z} = \frac{\partial^2 f}{\partial F\,\partial Z} \\
&\frac{\partial E_y}{\partial T} = -\frac{\partial^2 f}{\partial M\,\partial T}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial X} = -\frac{\partial^2 f}{\partial M\,\partial X}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial Y} = -\frac{\partial^2 f}{\partial M\,\partial Y}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial Z} = -\frac{\partial^2 f}{\partial M\,\partial Z} \\
&\frac{\partial E_z}{\partial T} = -\frac{\partial^2 f}{\partial L\,\partial T}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial X} = -\frac{\partial^2 f}{\partial L\,\partial X}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial Y} = -\frac{\partial^2 f}{\partial L\,\partial Y}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial Z} = -\frac{\partial^2 f}{\partial L\,\partial Z} \\
&\frac{\partial H_x}{\partial T} = \frac{\partial^2 f}{\partial G\,\partial T}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial X} = \frac{\partial^2 f}{\partial G\,\partial X}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial Y} = \frac{\partial^2 f}{\partial G\,\partial Y}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial Z} = \frac{\partial^2 f}{\partial G\,\partial Z} \\
&\frac{\partial H_y}{\partial T} = -\frac{\partial^2 f}{\partial N\,\partial T}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial X} = -\frac{\partial^2 f}{\partial N\,\partial X}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial Y} = -\frac{\partial^2 f}{\partial N\,\partial Y}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial Z} = -\frac{\partial^2 f}{\partial N\,\partial Z} \\
&\frac{\partial H_z}{\partial T} = \frac{\partial^2 f}{\partial K\,\partial T}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial X} = \frac{\partial^2 f}{\partial K\,\partial X}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial Y} = \frac{\partial^2 f}{\partial K\,\partial Y}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial Z} = \frac{\partial^2 f}{\partial K\,\partial Z}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Производные (5.2) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
&\partial E_x/\partial X = \left({}^{\partial}FX \mid f\right) = \left[\left({}^{\partial}q\tilde{q} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{\bar{q}}\right) \mid \mathrm{j}\left({}^{\partial}q\bar{q} - {}^{\partial}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right) \mid f\right] \to \\
&\partial E_y/\partial Y = -\left({}^{\partial}MY \mid f\right) = -\left[\mathrm{j}\left({}^{\partial}q^2 + {}^{\partial}\bar{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right)/2 \mid \left({}^{\partial}q\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\right) \mid f\right] \Rightarrow \\
&\partial E_z/\partial Z = -\left({}^{\partial}LZ \mid f\right) = -\left[\mathrm{i}\left({}^{\partial}q^2 - {}^{\partial}\bar{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right)/2 \mid \mathrm{ij}\left({}^{\partial}q\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\right) \mid f\right] \Rrightarrow \\
&\qquad \to \ \mathrm{j}\left({}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} + {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 \mid f\right) \\
&\qquad \Rightarrow -\mathrm{j}\left({}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} + {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + {}^{\partial}q^3\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}^3\tilde{q} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}^3 - {}^{\partial}q\tilde{\bar{q}}^3 \mid f\right)/2 \\
&\qquad \Rrightarrow \mathrm{j}\left(-{}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} - {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + {}^{\partial}q^3\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}^3\tilde{q} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}^3 - {}^{\partial}q\tilde{\bar{q}}^3 \mid f\right)/2,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \partial E_x/\partial X + \partial E_y/\partial Y + \partial E_z/\partial Z = 0 \tag{5.4}$$

$$
\begin{aligned}
\partial H_x/\partial X &= \left({}^{\partial}GX \mid f\right) = \left[\mathrm{i}\left({}^{\partial}q\tilde{q} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{\bar{q}}\right) \mid \mathrm{j}\left({}^{\partial}q\bar{q} - {}^{\partial}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right) \mid f\right] \to \\
\partial H_y/\partial Y &= -\left({}^{\partial}NY \mid f\right) = -\left[\mathrm{ij}\left({}^{\partial}q^2 - {}^{\partial}\bar{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right)/2 \mid \left({}^{\partial}q\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\right) \mid f\right] \Rightarrow \\
\partial H_z/\partial Z &= \left({}^{\partial}KZ \mid f\right) = \left[\left({}^{\partial}q^2 + {}^{\partial}\bar{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right)/2 \mid \mathrm{ij}\left({}^{\partial}q\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\right) \mid f\right] \Rrightarrow \\
&\to \mathrm{ij}\left({}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} - {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 \mid f\right) \\
&\Rightarrow -\mathrm{ij}\left({}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} - {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + {}^{\partial}q^3\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}^3\tilde{q} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}^3 + {}^{\partial}q\tilde{\bar{q}}^3 \mid f\right)/2 \\
&\Rrightarrow \mathrm{ij}\left(-{}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} + {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + {}^{\partial}q^3\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}^3\tilde{q} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}^3 + {}^{\partial}q\tilde{\bar{q}}^3 \mid f\right)/2
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

$$
\operatorname{div}\mathbf{H} = \partial H_x/\partial X + \partial H_y/\partial Y + \partial H_z/\partial Z = 0 \tag{5.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial H_z/\partial Y &= \left({}^{\partial}KY \mid f\right) = \left[\left({}^{\partial}q^2 + {}^{\partial}\bar{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right)/2 \mid \left({}^{\partial}q\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\right) \mid f\right] \to \\
\partial H_y/\partial Z &= -\left({}^{\partial}NZ \mid f\right) = -\left[\mathrm{ij}\left({}^{\partial}q^2 - {}^{\partial}\bar{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right)/2 \mid \mathrm{ij}\left({}^{\partial}q\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\right) \mid f\right] \Rightarrow \\
\partial E_x/\partial T &= \left({}^{\partial}FT \mid f\right) = \left[\left({}^{\partial}q\tilde{q} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{\bar{q}}\right) \mid \left({}^{\partial}q\bar{q} + {}^{\partial}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right) \mid f\right] \Rrightarrow \\
&\to \left({}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} + {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + {}^{\partial}q^3\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}^3\tilde{q} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}^3 + {}^{\partial}q\tilde{\bar{q}}^3 \mid f\right)/2 \\
&\Rightarrow \left(-{}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} - {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + {}^{\partial}q^3\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}^3\tilde{q} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}^3 + {}^{\partial}q\tilde{\bar{q}}^3 \mid f\right)/2 \\
&\Rrightarrow \left({}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} + {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 \mid f\right)
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

$$
\partial H_z/\partial Y - \partial H_y/\partial Z = \partial E_x/\partial T \tag{5.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial H_x/\partial Z &= \left({}^{\partial}GZ \mid f\right) = \left[\mathrm{i}\left({}^{\partial}q\tilde{q} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{\bar{q}}\right) \mid \mathrm{ij}\left({}^{\partial}q\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\right) \mid f\right] \to \\
\partial H_z/\partial X &= \left({}^{\partial}KX \mid f\right) = \left[\left({}^{\partial}q^2 + {}^{\partial}\bar{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right)/2 \mid \mathrm{j}\left({}^{\partial}q\bar{q} - {}^{\partial}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right) \mid f\right] \Rightarrow \\
\partial E_y/\partial T &= -\left({}^{\partial}MT \mid f\right) = -\left[\mathrm{j}\left({}^{\partial}q^2 + {}^{\partial}\bar{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right)/2 \mid \left({}^{\partial}q\bar{q} + {}^{\partial}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right) \mid f\right] \Rrightarrow \\
&\to -\mathrm{j}\left({}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} + {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 \mid f\right) \\
&\Rightarrow \mathrm{j}\left(-{}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} - {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + {}^{\partial}q^3\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}^3\tilde{q} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}^3 - {}^{\partial}q\tilde{\bar{q}}^3 \mid f\right)/2 \\
&\Rrightarrow -\mathrm{j}\left({}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} + {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + {}^{\partial}q^3\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}^3\tilde{q} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}^3 - {}^{\partial}q\tilde{\bar{q}}^3 \mid f\right)/2
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

$$
\partial H_x/\partial Z - \partial H_z/\partial X = \partial E_y/\partial T \tag{5.10}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial H_y/\partial X &= -\left({}^{\partial}NX \mid f\right) = -\left[\mathrm{ij}\left({}^{\partial}q^2 - {}^{\partial}\bar{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right)/2 \,\middle|\, \mathrm{j}\left({}^{\partial}q\bar{q} - {}^{\partial}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right) \middle| f\right] \to \\
\partial H_x/\partial Y &= \left({}^{\partial}GY \mid f\right) = \left[\mathrm{i}\left({}^{\partial}q\tilde{q} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{\bar{q}}\right) \middle| \left({}^{\partial}q\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\right) \middle| f\right] \Rightarrow \\
\partial E_z/\partial T &= -\left({}^{\partial}LT \mid f\right) = -\left[\mathrm{i}\left({}^{\partial}q^2 - {}^{\partial}\bar{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right)/2 \,\middle|\, \left({}^{\partial}q\bar{q} + {}^{\partial}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right) \middle| f\right] \Rrightarrow \\
&\to -\mathrm{i}\left(-{}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} + {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + {}^{\partial}q^3\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}^3\tilde{q} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}^3 - {}^{\partial}q\tilde{\bar{q}}^3 \mid f\right)/2 \\
&\Rightarrow \mathrm{i}\left({}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} - {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 \mid f\right) \\
&\Rrightarrow -\mathrm{i}\left({}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} - {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + {}^{\partial}q^3\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}^3\tilde{q} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}^3 - {}^{\partial}q\tilde{\bar{q}}^3 \mid f\right)/2
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

$$\partial H_y/\partial X - \partial H_x/\partial Y = \partial E_z/\partial T \tag{5.12}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \partial\mathbf{E}/\partial T \tag{5.13}$$

где векторное уравнение (5.13) объединяет в себе уравнения (5.8), (5.10) и (5.12).

$$\begin{aligned}
\partial E_z/\partial Y &= -\left({}^{\partial}LY \mid f\right) = -\left[\mathrm{i}\left({}^{\partial}q^2 - {}^{\partial}\bar{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right)/2 \left|\left({}^{\partial}q\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\right)\right| f\right] \rightarrow \\
\partial E_y/\partial Z &= -\left({}^{\partial}MZ \mid f\right) = -\left[\mathrm{j}\left({}^{\partial}q^2 + {}^{\partial}\bar{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right)/2 \left|\mathrm{ij}\left({}^{\partial}q\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\right)\right| f\right] \Rightarrow \\
\partial H_x/\partial T &= \left({}^{\partial}GT \mid f\right) = \left[\mathrm{i}\left({}^{\partial}q\tilde{q} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{\bar{q}}\right) \left|\left({}^{\partial}q\bar{q} + {}^{\partial}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right)\right| f\right] \Rrightarrow \\
&\rightarrow -\mathrm{i}\left({}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} - {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + {}^{\partial}q^3\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}^3\tilde{q} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}^3 - {}^{\partial}q\tilde{\bar{q}}^3 \mid f\right)/2 \\
&\Rightarrow -\mathrm{i}\left(-{}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} + {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + {}^{\partial}q^3\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}^3\tilde{q} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}^3 - {}^{\partial}q\tilde{\bar{q}}^3 \mid f\right)/2 \\
&\Rrightarrow \ \mathrm{i}\left(\ {}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} - {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 \mid f\right)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\partial E_z/\partial Y - \partial E_y/\partial Z = -\partial H_x/\partial T \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}
\partial E_x/\partial Z &= \left({}^{\partial}FZ \mid f\right) = \left[\left({}^{\partial}q\tilde{q} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{\bar{q}}\right) \left|\mathrm{ij}\left({}^{\partial}q\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\right)\right| f\right] \rightarrow \\
\partial E_z/\partial X &= -\left({}^{\partial}LX \mid f\right) = -\left[\mathrm{i}\left({}^{\partial}q^2 - {}^{\partial}\bar{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right) \left|\mathrm{j}\left({}^{\partial}q\bar{q} - {}^{\partial}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right)\right| f\right]/2 \Rightarrow \\
\partial H_y/\partial T &= -\left({}^{\partial}NT \mid f\right) = -\left[\mathrm{ij}\left({}^{\partial}q^2 - {}^{\partial}\bar{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right) \left|\left({}^{\partial}q\bar{q} + {}^{\partial}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right)\right| f\right]/2 \Rrightarrow \\
&\rightarrow \ \mathrm{ij}\left(\ {}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} - {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 \mid f\right) \\
&\Rightarrow -\mathrm{ij}\left(-{}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} + {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + {}^{\partial}q^3\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}^3\tilde{q} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}^3 + {}^{\partial}q\tilde{\bar{q}}^3 \mid f\right)/2 \\
&\Rrightarrow -\mathrm{ij}\left(\ {}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} - {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + {}^{\partial}q^3\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}^3\tilde{q} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}^3 + {}^{\partial}q\tilde{\bar{q}}^3 \mid f\right)/2
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\partial E_x/\partial Z - \partial E_z/\partial X = -\partial H_y/\partial T \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
\partial E_y/\partial X &= -\left({}^{\partial}MX \mid f\right) = -\left[\mathrm{j}\left({}^{\partial}q^2 + {}^{\partial}\bar{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{q}^2 - {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right)/2 \left|\mathrm{j}\left({}^{\partial}q\bar{q} - {}^{\partial}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right)\right| f\right] \rightarrow \\
\partial E_x/\partial Y &= \left({}^{\partial}FY \mid f\right) = \left[\left({}^{\partial}q\tilde{q} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{\bar{q}}\right) \left|\left({}^{\partial}q\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\right)\right| f\right] \Rightarrow \\
\partial H_z/\partial T &= \left({}^{\partial}KT \mid f\right) = \left[\left({}^{\partial}q^2 + {}^{\partial}\bar{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{q}^2 + {}^{\partial}\tilde{\bar{q}}^2\right)/2 \left|\left({}^{\partial}q\bar{q} + {}^{\partial}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\right)\right| f\right] \Rrightarrow \\
&\rightarrow -\left(-{}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} - {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} - {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + {}^{\partial}q^3\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}^3\tilde{q} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}^3 + {}^{\partial}q\tilde{\bar{q}}^3 \mid f\right)/2 \\
&\Rightarrow \ \left(\ {}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} + {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 \mid f\right) \\
&\Rrightarrow \ \left(\ {}^{\partial}q^2\bar{q}\tilde{q} + {}^{\partial}q\bar{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}q\tilde{q}^2\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + {}^{\partial}q^3\tilde{\bar{q}} + {}^{\partial}\bar{q}^3\tilde{q} + {}^{\partial}\bar{q}\tilde{q}^3 + {}^{\partial}q\tilde{\bar{q}}^3 \mid f\right)/2
\end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\partial E_y/\partial X - \partial E_x/\partial Y = -\partial H_z/\partial T \tag{5.19}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{H}/\partial T \tag{5.20}$$

где векторное уравнение (5.20) объединяет в себе уравнения (5.15), (5.17) и (5.19).

Таким образом, производные (5.1) удовлетворяют уравнениям Максвелла (5.4), (5.6) и (5.13), (5.20) для электромагнитной волны. Эти уравнения никак не связаны с зарядами и токами и описывают процессы, имеющие лишь световую скорость ($c=1$). Поэтому мы их также называем *изотропными*. Отметим при этом, что и производные (5.1), и скалярные или векторные по виду уравнения из (5.2)–(5.20) фактически являются B-векторными. Им удовлетворяет произвольная дифференцируемая B-векторная функция f.

Отметим также, что выбор обозначений $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ всё ещё остаётся условным, а сами эти величины — совершенно равноправными. Они выражены через производные по переменным $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, а не через производные по переменным T, X, Y, Z. По этой причине невозможно приписать им полярный или аксиальный характер, как и самим переменным $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, или выразить их через какое-то подобие 4-векторного потенциала (φ, $\mathbf{A}$). Если бы для описания величин E_i и H_i, вместо производных (5.1) $\partial f/\partial \mathcal{A}_i$ и $\partial f/\partial \mathcal{B}_i$ были выбраны производные $(-\partial f/\partial \mathcal{A}_i)$ и $(-\partial f/\partial \mathcal{B}_i)$, то для совпадения с уравнениями Максвелла с учётом всех знаков, обозначения E_i и H_i потребовалось бы поменять местами. Для окончательного выбора обозначений необходимо введение понятий заряда и тока, что выходит за рамки данной работы.

6 B-преобразование операторов дифференцирования. Преобразования Лоренца

Будем рассматривать B-преобразование [1, 2:2.1] B-вектора как замену переменной дифференцирования: $q_1 \to q_2 = q_1 q$, где q — постоянный множитель. Тогда при $\det q = 1$, получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial q_2} = \frac{1}{q}\,\frac{\partial}{\partial q_1} = \frac{\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}}{\det q}\,\frac{\partial}{\partial q_1} = \bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}\,\frac{\partial}{\partial q_1}\\
\frac{\partial^2}{\partial q_2 \partial \bar{q}_2} = \frac{1}{q\bar{q}}\,\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial \bar{q}_1} = \frac{\tilde{q}\tilde{\bar{q}}}{\det q}\,\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial \bar{q}_1} = \tilde{q}\tilde{\bar{q}}\,\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial \bar{q}_1}\\
\frac{\partial^3}{\partial q_2 \partial \bar{q}_2 \partial \tilde{q}_2} = \frac{1}{q\bar{q}\tilde{q}}\,\frac{\partial^3}{\partial q_1 \partial \bar{q}_1 \partial \tilde{q}_1} = \frac{\tilde{\bar{q}}}{\det q}\,\frac{\partial^3}{\partial q_1 \partial \bar{q}_1 \partial \tilde{q}_1} = \tilde{\bar{q}}\,\frac{\partial^3}{\partial q_1 \partial \bar{q}_1 \partial \tilde{q}_1}\\
\frac{\partial^4}{\partial q_2 \partial \bar{q}_2 \partial \tilde{q}_2 \partial \tilde{\bar{q}}_2} = \frac{\partial^4}{\partial q_1 \partial \bar{q}_1 \partial \tilde{q}_1 \partial \tilde{\bar{q}}_1}.
\end{gathered} \tag{6.1}$$

Таким образом, для ∂-операторов по B-переменным, B-преобразование сводится к *делению* на соответствующие значения этого преобразования. При $\det q = 1$ это же преобразование можно рассматривать как *умножение* на значения, сопряжённые переменным дифференцирования. Напомним, что при переходе к конкретному дифференциальному уравнению в обе части операторного уравнения следует подставлять *одну и ту же* функцию. Например, для подстановки в первое уравнение (6.1) может быть взята функция $f\,(q_2, \bar{q}_2, \tilde{q}_2, \tilde{\bar{q}}_2)$. После чего, для выполнения дифференцирования в правой части производится замена переменной:

$$\frac{\partial f\,(q_2, \bar{q}_2, \tilde{q}_2, \tilde{\bar{q}}_2)}{\partial q_2} = \frac{1}{q}\frac{\partial f\,(q_2, \bar{q}_2, \tilde{q}_2, \tilde{\bar{q}}_2)}{\partial q_1} \;\;\to\;\; \frac{\partial f\,(q_2, \bar{q}_2, \tilde{q}_2, \tilde{\bar{q}}_2)}{\partial q_2} = \frac{1}{q}\frac{\partial f\,(q q_1, \bar{q}\bar{q}_1, \tilde{q}\tilde{q}_1, \tilde{\bar{q}}\tilde{\bar{q}}_1)}{\partial q_1}.$$

Для 4-векторных операторов (2.9) получим:

$$
\begin{gathered}
{}^{\partial}q_2\bar{q}_2 = \tilde{q}\tilde{\bar{q}}\ {}^{\partial}q_1\bar{q}_1 \\
\left({}^{\partial}T_2 + \mathrm{j}^{\partial}X_2\right) = \tilde{q}\tilde{\bar{q}}\left({}^{\partial}T_1 + \mathrm{j}^{\partial}X_1\right) = \exp\left(-\mathrm{j}2\gamma\right)\left({}^{\partial}T_1 + \mathrm{j}^{\partial}X_1\right) = \\
= \left(\operatorname{ch}2\gamma - \mathrm{j}\operatorname{sh}2\gamma\right)\left({}^{\partial}T_1 + \mathrm{j}^{\partial}X_1\right) = \left(\operatorname{ch}2\gamma\,{}^{\partial}T_1 - \operatorname{sh}2\gamma\,{}^{\partial}X_1\right) + \mathrm{j}\left(\operatorname{ch}2\gamma\,{}^{\partial}X_1 - \operatorname{sh}2\gamma\,{}^{\partial}T_1\right)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
{}^{\partial}q_2\tilde{\bar{q}}_2 = \bar{q}\tilde{q}\ {}^{\partial}q_1\tilde{\bar{q}}_1 \\
\left({}^{\partial}Y_2 - \mathrm{ij}^{\partial}Z_2\right) = \bar{q}\tilde{q}\left({}^{\partial}Y_1 - \mathrm{ij}^{\partial}Z_1\right) = \exp\left(-\mathrm{ij}2\delta\right)\left({}^{\partial}Y_1 - \mathrm{ij}^{\partial}Z_1\right) = \\
= \left(\cos 2\delta - \mathrm{ij}\sin 2\delta\right)\left({}^{\partial}Y_1 - \mathrm{ij}^{\partial}Z_1\right) = \left(\cos 2\delta\,{}^{\partial}Y_1 - \sin 2\delta\,{}^{\partial}Z_1\right) - \mathrm{ij}\left(\sin 2\delta\,{}^{\partial}Y_1 + \cos 2\delta\,{}^{\partial}Z_1\right)
\end{gathered}
\tag{6.2}
$$

$$
\begin{gathered}
{}^{\partial}q_2\tilde{q}_2 = \bar{q}\tilde{\bar{q}}\,{}^{\partial}q_1\bar{q}_1 \\
\left({}^{\partial}F_2 - \mathrm{i}^{\partial}G_2\right) = \bar{q}\tilde{\bar{q}}\left({}^{\partial}F_1 - \mathrm{i}^{\partial}G_1\right) = \exp\left(-\mathrm{i}2\beta\right)\left({}^{\partial}F_1 - \mathrm{i}^{\partial}G_1\right) = \\
= \left(\cos 2\beta - \mathrm{i}\sin 2\beta\right)\left({}^{\partial}F_1 - \mathrm{i}^{\partial}G_1\right) = \left(\cos 2\beta\,{}^{\partial}F_1 - \sin 2\beta\,{}^{\partial}G_1\right) - \mathrm{i}\left(\sin 2\beta\,{}^{\partial}F_1 + \cos 2\beta\,{}^{\partial}G_1\right).
\end{gathered}
$$

То есть, $\alpha 0$-преобразование B-векторов (и связанное с ним преобразование 4-радиус-векторов) вызывает соответствующие преобразования ∂-операторов по координатам этих 4-векторов. В частности, преобразованию Лоренца [1, 2:2.6] 4-координат соответствует следующее преобразование операторов:

$$
{}^{\partial}T_2 + \mathrm{j}^{\partial}X_2 = \left[{}^{\partial}T_1 - V\,{}^{\partial}X_1 + \mathrm{j}\left({}^{\partial}X_1 - V\,{}^{\partial}T_1\right)\right]\Big/\sqrt{1 - V^2} \tag{6.3}
$$

$$
{}^{\partial}T_2 = \left({}^{\partial}T_1 - V\,{}^{\partial}X_1\right)\Big/\sqrt{1 - V^2}, \qquad {}^{\partial}X_2 = \left({}^{\partial}X_1 - V\,{}^{\partial}T_1\right)\Big/\sqrt{1 - V^2} \tag{6.4}
$$

$$
E_2 = \left(E_1 + V p_{1x}\right)\Big/\sqrt{1 - V^2}, \qquad p_{2x} = \left(p_{1x} + V E_1\right)\Big/\sqrt{1 - V^2} \tag{6.5}
$$

Уравнения (6.4) представляют собой составляющие B-векторного уравнения (6.3). Уравнения (6.5) получены подстановкой соотношений (3.8) в операторы (6.4).

Для преобразования операторов $\left\{{}^{\partial}K..{}^{\partial}N\right\}$, с учётом (2.10), запишем:

$$
{}^{\partial}q_2^2 = q^{-2\partial}q_1^2
$$

$$
\begin{gathered}
{}^{\partial}K_2 - \mathrm{i}^{\partial}L_2 + \mathrm{j}^{\partial}M_2 - \mathrm{ij}^{\partial}N_2 = \\
= \exp\left[-2\left(\alpha + \mathrm{i}\beta + \mathrm{j}\gamma + \mathrm{ij}\delta\right)\right]\left({}^{\partial}K_1 - \mathrm{i}^{\partial}L_1 + \mathrm{j}^{\partial}M_1 - \mathrm{ij}^{\partial}N_1\right) = \\
= \exp\left[-2\left(\alpha + \mathrm{i}\beta\right)\right]\left\{\left({}^{\partial}K_1 - \mathrm{i}^{\partial}L_1\right)\operatorname{ch}2\left(\gamma + \mathrm{i}\delta\right) - \left({}^{\partial}M_1 - \mathrm{i}^{\partial}N_1\right)\operatorname{sh}2\left(\gamma + \mathrm{i}\delta\right) + \right. \\
\left. + \ \mathrm{j}\left[\left({}^{\partial}M_1 - \mathrm{i}^{\partial}N_1\right)\operatorname{ch}2\left(\gamma + \mathrm{i}\delta\right) - \left({}^{\partial}K_1 - \mathrm{i}^{\partial}L_1\right)\operatorname{sh}2\left(\gamma + \mathrm{i}\delta\right)\right]\right\}
\end{gathered}
\tag{6.6}
$$

Для γ-преобразования при $(\alpha = \beta = \delta = 0)$ из (6.6) следует:

$$
\begin{aligned}
&\left({}^{\partial}K_2 - \mathrm{i}^{\partial}L_2\right) + \mathrm{j}\left({}^{\partial}M_2 - \mathrm{i}^{\partial}N_2\right) = \\
&= \left({}^{\partial}K_1 - \mathrm{i}^{\partial}L_1\right)\operatorname{ch}2\gamma - \left({}^{\partial}M_1 - \mathrm{i}^{\partial}N_1\right)\operatorname{sh}2\gamma + \mathrm{j}\left[\left({}^{\partial}M_1 - \mathrm{i}^{\partial}N_1\right)\operatorname{ch}2\gamma - \left({}^{\partial}K_1 - \mathrm{i}^{\partial}L_1\right)\operatorname{sh}2\gamma\right] \\
&H_{2z} + \mathrm{i}E_{2z} + \mathrm{j}(-E_{2y} + \mathrm{i}H_{2y}) = \\
&= \left(H_{1z} + \mathrm{i}E_{1z}\right)\operatorname{ch}2\gamma - \left(-E_{1y} + \mathrm{i}H_{1y}\right)\operatorname{sh}2\gamma + \mathrm{j}\left[\left(-E_{1y} + \mathrm{i}H_{1y}\right)\operatorname{ch}2\gamma - \left(H_{1z} + \mathrm{i}E_{1z}\right)\operatorname{sh}2\gamma\right]
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

откуда после разделения по j- и i-составляющим получим:

$$
\begin{aligned}
&E_{2y} = E_{1y}\mathrm{ch}\,2\gamma + H_{1z}\mathrm{sh}\,2\gamma, && H_{2y} = H_{1y}\mathrm{ch}\,2\gamma - E_{1z}\mathrm{sh}\,2\gamma\\
&E_{2z} = E_{1z}\mathrm{ch}\,2\gamma - H_{1y}\mathrm{sh}\,2\gamma, && H_{2z} = H_{1z}\mathrm{ch}\,2\gamma + E_{1y}\mathrm{sh}\,2\gamma\\
\\
&E_{2x} = E_{1x}, && H_{2x} = H_{1x}\\
&E_{2y} = (E_{1y} + VH_{1z})\big/\sqrt{1-V^2}, && H_{2y} = (H_{1y} - VE_{1z})\big/\sqrt{1-V^2}\\
&E_{2z} = (E_{1z} - VH_{1y})\big/\sqrt{1-V^2}, && H_{2z} = (H_{1z} + VE_{1y})\big/\sqrt{1-V^2}
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

где учтена также независимость $E_x = \partial f/\partial F$ и $H_x = \partial f/\partial G$ от γ.

Таким образом, формулы (6.8) полностью совпадают с формулами преобразований Лоренца для составляющих электромагнитного поля.

7 Инварианты B-преобразования

Для невырожденных B-чисел, любой B-вектор q_2 может быть получен из произвольного B-вектора q_1 умножением на соответствующее B-число q. В этом смысле, рассмотренные в предыдущем разделе B-преобразования (6.1) имеют общий характер, хотя и сводятся к обычному умножению. Рассмотрим два типа инвариантов, естественным образом вытекающих из этого свойства.

При $\alpha 0$-преобразовании инвариантными будут такие операторы или произведения операторов, для которых преобразование в итоге сводится к делению (или умножению) на $\det q = 1$. Например,

$$
\frac{\partial^4}{\partial q\,\partial\bar q\,\partial\tilde q\,\partial\tilde{\bar q}},\quad
\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial\bar q\,\partial\tilde q}\cdot\frac{\partial}{\partial\tilde{\bar q}},\quad
\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial\bar q}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\tilde q\,\partial\tilde{\bar q}},\quad
\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial\bar q}\cdot\frac{\partial}{\partial\tilde q}\cdot\frac{\partial}{\partial\tilde{\bar q}},\quad
\frac{\partial}{\partial q}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar q}\cdot\frac{\partial}{\partial\tilde q}\cdot\frac{\partial}{\partial\tilde{\bar q}}
\tag{7.1}
$$

Кроме непосредственно операторов (7.1) инвариантными будут и их аналоги, отличающиеся распределением переменных дифференцирования $(q, \bar q, \tilde q, \tilde{\bar q})$ между сомножителями. Отметим, что в разных сомножителях одного инвариантного произведения дифференцируемые функции могут быть различными.

Из неизменности выражений типа (7.1) следует, например, что операторы (4.1) и (4.2) являются инвариантами $\alpha 0$-преобразования и, тем самым, уравнения (4.4) описывают 4-векторы (ковекторы), характер которых (изотропный, времениподобный, пространственно-подобный) зависит от соотношения инвариантов (4.2). Волновое же уравнение (3.7) от значения инварианта (4.1) (или (3.3)) не зависит и всегда остаётся изотропным.

Если оператор дифференцирования по некоторому набору B-переменных умножить на этот же набор B-переменных, то такая конструкция окажется инвариантом любого B-преобразования (в том числе, при $\det q \neq 1$). Например, выражения

$$
q\,\frac{\partial}{\partial q},\quad \tilde q\,\frac{\partial}{\partial\tilde q},\quad q\bar q\,\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial\bar q},\quad \bar q^2\tilde q\,\frac{\partial^3}{\partial\bar q^2\,\partial\tilde q}\qquad \text{и т.п.}
\tag{7.2}
$$

останутся неизменными, так как однотипные, но взаимно обратные преобразования алгебраического и дифференциального сомножителей будут сокращаться. Так, из

$$
\begin{aligned}
2q\bar q\,{}^{\partial}q\bar q &= (T+\mathrm{j}X)\left({}^{\partial}T+\mathrm{j}{}^{\partial}X\right) = \left(T\,{}^{\partial}T + X\,{}^{\partial}X\right) + \mathrm{j}\left(T\,{}^{\partial}X + X\,{}^{\partial}T\right)\\
2q\tilde{\bar q}\,{}^{\partial}q\tilde{\bar q} &= (Y+\mathrm{ij}Z)\left({}^{\partial}Y-\mathrm{ij}{}^{\partial}Z\right) = \left(Y\,{}^{\partial}Y + Z\,{}^{\partial}Z\right) - \mathrm{ij}\left(Y\,{}^{\partial}Z - Z\,{}^{\partial}Y\right)\\
2q\tilde q\,{}^{\partial}q\tilde q &= (F+\mathrm{i}G)\left({}^{\partial}F-\mathrm{i}{}^{\partial}G\right) = \left(F\,{}^{\partial}F + G\,{}^{\partial}G\right) - \mathrm{i}\left(F\,{}^{\partial}G - G\,{}^{\partial}F\right)
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

в обозначениях (3.8) и (5.1) получим следующий набор инвариантов B-преобразования:

$$\begin{gathered}(T\mathcal{E}-Xp_x)-\mathrm{j}\,(Tp_x-X\mathcal{E})=\mathrm{Inv}\\ -\,(Yp_y+Zp_z)+\mathrm{ij}\,(Yp_z-Zp_y)=\mathrm{Inv}\\ (\mathcal{A}_xE_x+\mathcal{B}_xH_x)-\mathrm{i}\,(\mathcal{A}_xH_x-\mathcal{B}_xE_x)=\mathrm{Inv}\end{gathered}\tag{7.4}$$

Сопряжённые выражения соотношений (7.3) и (7.4), отличающиеся знаком при i, j и ij, здесь не записаны, но также являются инвариантами. Сохраняться будут и всевозможные суммы, разности и произведения этих инвариантов.

Так, следствием первых двух равенств (7.4) и их сопряжённых выражений будет инвариант

$$(T\mathcal{E}-Xp_x-Yp_y-Zp_z)=\mathrm{Inv},\tag{7.5}$$

который представляет собой псевдоевклидово скалярное произведение 4-векторов $(T,\mathbf{R})$ и $(\mathcal{E},\mathbf{p})$. Тогда как инварианты

$$(Tp_x-X\mathcal{E})\qquad \text{и}\qquad (Yp_z-Zp_y)=M_x\tag{7.6}$$

являются сохраняющимися компонентами 4-тензора момента $(T\mathbf{p}-\mathbf{R}\mathcal{E},\mathbf{M})$.

Из произведения квадрата B-вектора и его ∂-оператора

$$\begin{gathered}2q^2\,{}^\partial q^2=(K+\mathrm{i}L+\mathrm{j}M+\mathrm{ij}N)\left({}^\partial K-\mathrm{i}{}^\partial L+\mathrm{j}{}^\partial M-\mathrm{ij}{}^\partial N\right)=\\ =\left(K\,{}^\partial K+L\,{}^\partial L+M\,{}^\partial M+N\,{}^\partial N\right)+\mathrm{i}\left(L\,{}^\partial K-K\,{}^\partial L+N\,{}^\partial M-M\,{}^\partial N\right)+\\ +\mathrm{j}\left(M\,{}^\partial K+N\,{}^\partial L+K\,{}^\partial M+L\,{}^\partial N\right)+\mathrm{ij}\left(N\,{}^\partial K-M\,{}^\partial L+L\,{}^\partial M-K\,{}^\partial N\right)\end{gathered}\tag{7.7}$$

в обозначениях (4.5) и (5.1) вытекает следующее выражение

$$\begin{gathered}(\mathcal{A}_yE_y+\mathcal{A}_zE_z+\mathcal{B}_yH_y+\mathcal{B}_zH_z)+\mathrm{i}\,(-\mathcal{A}_yH_y-\mathcal{A}_zH_z+\mathcal{B}_yE_y+\mathcal{B}_zE_z)+\\ +\mathrm{j}\,(-\mathcal{A}_yH_z+\mathcal{A}_zH_y+\mathcal{B}_yE_z-\mathcal{B}_zE_y)+\mathrm{ij}\,(-\mathcal{A}_yE_z+\mathcal{A}_zE_y-\mathcal{B}_yH_z+\mathcal{B}_zH_y)=\mathrm{Inv}\end{gathered}\tag{7.8}$$

которое вместе с третьей строкой в (7.4) характеризует инварианты B-преобразования для системы тензоров $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ и $(\mathbf{E},\,\mathbf{H})$.

Из соотношений типа (7.1), (7.2) могут быть получены и другие инварианты B-преобразования. Однако, ограничимся этими примерами, как наиболее показательными.

Заключение

Об аналитической функции

При конструировании новых гиперкомплексных чисел, считается весьма важным развить исчисление таких гиперкомплексных переменных до уровня теории их *аналитических* функций [7, 8]. В нашей работе ∂-операторы построены исходя из того, что B-векторная функция аналитической *не является*. Она зависит от всех сопряжённых форм своих аргументов как обычная функция четырёх переменных: $f\,(a,b,c,d)=f\,(u,v,\bar{u},\bar{v})=f\,(q,\bar{q},\tilde{q},\tilde{\bar{q}})$. Для получения дифференциальных соотношений физического характера в 4-пространстве, задействованы все первые производные этой B-векторной функции, а также их повторные и смешанные производные более высоких порядков. В случае аналитической функции $f\,(q)$, когда три из четырёх производных $\partial f/\partial q$, $\partial f/\partial\bar{q}$, $\partial f/\partial\tilde{q}$, $\partial f/\partial\tilde{\bar{q}}$ равны нулю, реализация такого подхода оказалась бы невозможной. Таким образом, развитие анализа N-комплексных функций по принципам математического анализа функций n переменных представляется нам не менее важным и перспективным, чем разработка аналитического аспекта.

Вырожденные приращения аргумента

В (1.3) действительные функции A, B, C, D определены как дифференцируемые по своим действительным аргументам a, b, c, d. Тем самым в (1.3) функция $f\,(a, b, c, d)$ определена как дифференцируемая в смысле $\mathbb{R}^4$. Операторные уравнения (1.8) выражают производные по переменным $q, \bar{q}, \tilde{q}, \tilde{\bar{q}}$ через производные по переменным a, b, c, d. Например,

$$\partial f/\partial q = (\partial f/\partial a - \mathrm{i}\partial f/\partial b + \mathrm{j}\partial f/\partial c - \mathrm{ij}\partial f/\partial d)\,/4$$

В силу определённости правой части, такое уравнение фактически является *определением* его левой части, то есть производной $\partial f/\partial q$. На приращения (дифференциалы) аргументов $\mathrm{d}a$, $\mathrm{d}b$, $\mathrm{d}c$, $\mathrm{d}d$, а значит и на $\mathrm{d}q = \mathrm{d}a + \mathrm{id}b + \mathrm{jd}c + \mathrm{ijd}d$, никаких ограничений не наложено. В частности, в случае вырожденного приращения аргумента $\mathrm{d}q$, когда $\mathrm{d}a + \mathrm{id}b = \mathrm{d}c + \mathrm{id}d$, получим вырожденное значение производной:

$$\partial f/\partial q = (\partial f/\partial a - \mathrm{i}\partial f/\partial b + \mathrm{j}\partial f/\partial a - \mathrm{ij}\partial f/\partial b)\,/4 = (1+\mathrm{j})\,(\partial f/\partial a - \mathrm{i}\partial f/\partial b)\,/4$$

Сам факт того, что производная B-векторной функции может принимать вырожденные значения вполне закономерен, и для изложенного материала критическим не является.

Зависимость переменных

Для B-векторной функции (1.3) и её производных независимыми являются переменные (a, b, c, d), которые по определению могут принимать произвольные действительные значения. Аналогично комплексному анализу [5, 6], аргументами формально считаются и четвёрки переменных $(u, v, \bar{u}, \bar{v})$ и $(q, \bar{q}, \tilde{q}, \tilde{\bar{q}})$. Это, конечно, не означает, что сопряжённым формам бикомплексной переменной можно присваивать значения независимо друг от друга, но лишь отражает факт взаимно однозначного и линейного их выражения через аргументы (a, b, c, d) согласно (1.1).

B-пространство характеризуется четырьмя координатами (a, b, c, d). Переменные $\{T..N\}$ являются их функциями [1, 2:1.1], [1, 2:4.1]. Вычисление показывает, что ранг функционального определителя $D\,(T, X, Y, Z, F, G, K, L, M, N)/D\,(a, b, c, d)$ равен четырём. В принципе, при исключении переменных (a, b, c, d), в качестве независимых можно выделить четыре переменных из совокупности $\{T..N\}$. Подчеркнём однако, что переменные T, X, Y, Z независимыми *не являются.* Это следует, прежде всего, из вычисления функционального определителя. А при последующей физической интерпретации подтверждается уравнением [1, 2:1.4], в которое T, X, Y, Z входят как координаты *изотропного* 4-вектора, лежащего на световом конусе. Поэтому в работе [1] алгебраические взаимосвязи между переменными $\{T..N\}$ устанавливались без выделения среди них некоторой конкретной «независимой четвёрки», на основе бикомплексных соотношений между переменными (a, b, c, d).

Такой же подход реализован и в настоящей работе. Функция f через свои составляющие A, B, C, D зависит от четырёх аргументов (a, b, c, d). Все десять операторов $\left\{{}^{\partial}T..{}^{\partial}N\right\}$ выражены через операторы ${}^{\partial}a$, ${}^{\partial}b$, ${}^{\partial}c$, ${}^{\partial}d$ (2.6), (2.7). Тем самым, применение любого из операторов $\left\{{}^{\partial}T..{}^{\partial}N\right\}$ фактически является дифференцированием по независимым переменным (a, b, c, d). Отсюда любое дифференциальное соотношение, записанное через операторы $\left\{{}^{\partial}T..{}^{\partial}N\right\}$, является своего рода формой краткой записи соответствующих им дифференциальных комплексов, построенных из операторов ${}^{\partial}a$, ${}^{\partial}b$, ${}^{\partial}c$, ${}^{\partial}d$. Если воспользоваться примером механики Лагранжа со связями [10], то можно сказать, что окончательный вид дифференциальных уравнений настоящей статьи определяется алгебраическими «связями» [1, 2:1.1], [1, 2:4.1] выражающими переменные $\{T..N\}$ через переменные (a, b, c, d). Тем самым, дифференциальные уравнения этой публикации оказываются прямым следствием бикомплексных алгебраических соотношений предыдущей работы [1].

Согласно (2.8), для всех десяти переменных $\{T..N\}$ и всех десяти операторов $\{{}^{\partial}T..{}^{\partial}N\}$ действие на собственную переменную даёт единицу, а на девять остальных — ноль. Мы нигде пока не использовали это свойство, и воздействовали операторами $\{{}^{\partial}T..{}^{\partial}N\}$ только на саму B-векторную функцию $f(a,b,c,d)$, как это только что обсуждалось. Однако это свойство даёт нам возможность поставить вопрос: а не будут ли указанные переменные в физическом плане *выглядеть* как независимые? И не будут ли скрытые бикомплексные (алгебраические и дифференциальные) взаимосвязи между ними *восприниматься* как физические закономерности?

Волна и 4-вектор

Мы не даём пока толкования B-векторной функции f. Хотя, естественно возникает вопрос о возможности её рассмотрения как некоторого аналога квантово-механической волновой функции. Учитывая такую возможность, отметим две особенности нашего подхода, реализованные в данной работе. Во-первых, мы нигде не «заменяем» переменные их операторами или наоборот. В каждом конкретном случае мы *вычисляем* переменную путём воздействия оператора на B-векторную функцию. Другое дело, что на саму эту функцию пока не наложено никаких ограничений, кроме дифференцируемости. И во-вторых, из ∂-операторов первого порядка $\{{}^{\partial}T..{}^{\partial}N\}$ мы получаем не только дифференциальные соотношения второго *порядка*, но и выражения второй *степени*. Одни приводят к волновому уравнению и выражениям, характерным для векторного анализа, включая уравнения Максвелла (разделы 3 и 5). Другие — к алгебраическим квадратичным и билинейным 4-векторным соотношениям для производных, включая 4-вектор энергии-импульса и 4-тензор момента (разделы 4 и 7). На уровне ∂-операторных соотношений первого порядка и первой степени эти два подхода ещё не разделяются, и содержат в себе указанный «дуализм» в скрытом виде.

Результаты и перспективы

Наша работа посвящена построению ∂-операторов для B-векторной функции и их применению для получения дифференциальных соотношений частной теории относительности и электродинамики. Тем самым, эта статья продолжает и дополняет чисто алгебраическую публикацию [1] той же тематики. Из указанных работ следует, что бикомплексное исчисление позволяет вывести все основные *изотропные* соотношения релятивистского и электродинамического типа, но не охватывает *времениподобных* и *пространственно-подобных* закономерностей. Этим определяется важность разработки следующих уровней N-комплексного исчисления и перспективность их приложения в физике.

Во-первых, это предоставит возможность описания физических явлений не только на световом конусе, но и в 4-пространстве в целом. Во-вторых, — позволит более полно обосновать уже имеющиеся физические интерпретации, носящие пока достаточно формальный характер.

Литература

[1] Горюнов А.В. N-комплексная алгебра и изотропные релятивистские и электродинамические уравнения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(17), 2012, с. 65 – 105.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Теоретическая физика, т. 1, М., «Наука», 1973, 208 с.

[3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Теоретическая физика, т.2, М., «Наука»., 1973, 504 с.

[4] Математический энциклопедический словарь. Аналитическая функция. М., «Советская энциклопедия», 1988.

[5] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М., «Наука», 1986, 759 с.

[6] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М., «Наука», 1976.

[7] Olariu S. Complex numbers in n dimensions. arXiv:math/0011044[math.CV], 2000.

[8] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Аналитические, дифференциально-геометрические и алгебраические свойства гладких функций поличисловой переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(16), 2011, с. 4 – 53.

[9] Фок В.А. Начала квантовой механики. М., «Наука», 1976, 376 с.

[10] Айзерман М.А. Классическая механика. М., «Наука», 1974, 367 с.

Differential Operators of Bicomplex Function and Isotropic Relativistic and Electrodynamics Equations

A.V. Goryunov

Turan-Astana University, Astana, Kazakhstan

avgor@hotbox.ru

Concepts of bicomplex function and its differential operators in bicomplex space are considered. Interrelations of differential operators in bicomplex space and differential operators in 4-space are obtained. Thus the possibility of calculation of derivatives of bicomplex function on 4-space variables is achieved. As result, the main *differential* isotropic equations of theory of relativity and electrodynamics are obtained as direct consequence of related bicomplex *algebraic* formulas of preceded paper.

Key Words: N-complex numbers, bicomplex numbers, bicomplex function, differential operators, special theory of relativity, electrodynamics.