ГРУППА ЛОРЕНЦА – ОСНОВА ОПИСАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БОЗОНОВ И ФЕРМИОНОВ С ПСЕВДОРИМАНОВОЙ СТРУКТУРОЙ ПРОСТРАНСТВА. ЧТО ВЗАМЕН ПРИ ФИНСЛЕРОВОЙ ГЕОМЕТРИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВА?

В.М. Редьков[1], В.В. Кисель[2], Е.М. Овсиюк[3]

[1] *Институт физики НАН Беларуси, Минск, Белоруссия*
[2] *Белорусский государственный педагогический университет, Минск, Белоруссия*
[3] *Мозырский государственный педагогический университет, Мозырь, Белоруссия*

v.redkov@dragon.bas-net.by, e.ovsiyuk@mail.ru

Дается краткий обзор основ теории волновых уравнений элементарных частиц в присутствии внешних гравитационных полей, описываемых как псевдориманова структура пространства–времени. Общековариантные обобщения волновых уравнений, установленных в пространстве Минковского, представлены для бозонов и фермионов в равной степени как результат применения единого тетрадного рецепта Тетроде – Вейля – Фока – Иваненко, базирующегося на представлениях группы Лоренца. Группа Лоренца играет определяющую и унифицирующую роль для описания полей всех частиц (с разными спинами, массивных и безмассовых) как в плоском, так и в искривленном пространстве–времени. Отличие состоит в том, что в плоском пространстве группа Лоренца играет роль глобальной симметрии для волновых уравнений, в псевдоримановом пространстве она играет роль зависящей от координат локальной группы симметрии. Особое внимание уделяется полям Дирака и Максвелла.

Поскольку от всякой новой теории физического пространства – времени следует ожидать преемственности с развитыми и уже апробированными моделями на фоне плоской и псевдоримановых моделей пространства, ставится вопрос: чем следует заменить базирующийся на группе Лоренца способ описания взаимодействия элементарных частиц с псевдоримановым геометрическим фоном, если пространство–время наделяется финслеровой структурой. Также можно поставить более частный вопрос: какие эффективные материальные среды можно описать, используя обобщенную электродинамику Максвелла на фоне пространства–времени с финслеровой геометрией.

Ответ на этот вопрос, если он возможен, должен быть достаточно универсальным и не зависящим от величины спина частицы или ее массы. Общий ответ на этот вопрос позволил бы лучше понять, чего можно ожидать в физике от использования финслеровой геометрии в наиболее кардинальном аспекте, как новой геометрии физического пространства–времени.

Ключевые слова: волновые уравнения, искривленные пространства, унификация, группа Лоренца, поля Дирака и Максвелла, финслерова геометрия.

1 Уравнение Дирака

Уравнение Дирака

$$(i\,\gamma^a\,\partial_a - m)\;\Psi(x) = 0$$

при наличии внешнего гравитационного поля (псевдориманово пространство–время) записывается в виде

$$\big[i\gamma^{\alpha}(x)(\partial_{\alpha} + \Gamma_{\alpha}(x)) - m\big]\Psi(x) = 0, \tag{1}$$

где

$$\gamma^{\alpha}(x) = \gamma^{a} e^{\alpha}_{(a)}(x), \quad e^{\alpha}_{(a)}(x) \;-\; \text{тетрада},$$
$$\Gamma_{\alpha}(x) = \frac{1}{2}\,\sigma^{ab} e^{\beta}_{(a)} \nabla_{\alpha}(e^{\alpha}_{(b);\beta}) \;-\; \text{биспинорная связность}; \tag{2}$$

∇_{α} и $;\alpha$ – символы общековариантной производной. Тетрада фиксируется с точностью до 6-параметрической свободы:

$$e^{\alpha}_{(a)}(x)\; e^{\beta}_{(b)}(x) \eta^{(a)(b)} = g^{\alpha\beta}(x),$$
$$10\,[g_{\alpha\beta}(x)] \quad\Longrightarrow\quad 16\,[e^{\beta}_{(b)}(x)]\,.$$

В спинорном базисе

$$\psi(x) = \begin{vmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{vmatrix}, \quad \xi(x) = \begin{vmatrix} \xi^{1} \\ \xi^{2} \end{vmatrix}, \quad \eta(x) = \begin{vmatrix} \eta_{\dot{1}} \\ \eta_{\dot{2}} \end{vmatrix}, \quad \gamma^{a} = \begin{vmatrix} 0 & \bar{\sigma}^{a} \\ \sigma^{a} & 0 \end{vmatrix},$$
$$\sigma^{a} = (I,\; +\sigma^{k}), \qquad \bar{\sigma}^{a} = (I,\; -\sigma^{k}),$$

имеем

$$i\sigma^{\alpha}(x)\big[\partial_{\alpha} + \Sigma_{\alpha}(x)\big]\xi(x) = m\eta(x),$$
$$i\bar{\sigma}^{\alpha}(x)\big[\partial_{\alpha} + \bar{\Sigma}_{\alpha}(x)\big]\eta(x) = m\xi(x); \tag{3}$$

использованы обозначения:

$$\sigma^{\alpha}(x) = \sigma^{a}\; e^{\alpha}_{(a)}(x), \quad \bar{\sigma}^{\alpha}(x) = \bar{\sigma}^{a} e^{\alpha}_{(a)}(x),$$
$$\Sigma_{\alpha}(x) = \frac{1}{2}\,\Sigma^{ab}\, e^{\beta}_{(a)}\; \nabla_{\alpha}(e_{(b)\beta}), \quad \bar{\Sigma}_{\alpha}(x) = \frac{1}{2}\,\bar{\Sigma}^{ab}\; e^{\beta}_{(x)}\; \nabla_{\alpha}(e_{(b)\beta}),$$
$$\Sigma^{ab} = \frac{1}{4}\,(\bar{\sigma}^{a}\;\sigma^{b} - \bar{\sigma}^{b}\;\sigma^{a}), \quad \bar{\Sigma}^{ab} = \frac{1}{4}\,(\sigma^{a}\;\bar{\sigma}^{b} \;-\; \sigma^{b}\;\bar{\sigma}^{a}).$$

Полагая $m=0$, получаем уравнения Вейля для двухкомпонентных волновых функций нейтрино $\eta(x)$ и антинейтрино $\xi(x)$.

Рассмотрим свойства симметрии уравнения Дирака в римановом пространстве. Для этого совершим над волновой функцией $\Psi(x)=(\xi(x),\eta(x))$ локальное биспинорное преобразование:

$$\xi'(x) = B\big(k(x)\big)\,\xi(x),$$
$$\eta'(x) = B^{+}\big(\bar{k}(x)\big)\,\eta(x). \tag{4}$$

Здесь $B(k)$ – матрица из группы $SL(2.C)$:

$$B(k) = \sigma^{a}\; k_{a}, \quad \det B = k_{0}^{2} - k_{j}^{2} = +1,$$
$$B^{+}(k) = B(k^{*}), \quad B^{-1}(k) = B(\bar{k}), \quad \bar{k} = (k_{0},\, -k_{j}). \tag{5}$$

После подстановки в уравнение функций $\xi'(x)$ и $\eta'(x)$, с использованием соотношений

$$B\big(\bar{k}^{*}(x)\big)\,\sigma^{a} B\big(\bar{k}(x)\big) = \sigma^{b} L^{a}_{b}(x),$$
$$B\big(k(x)\big)\,\bar{\sigma}^{a} B\big(k^{*}(x)\big) = \bar{\sigma}^{b} L^{a}_{b}(x), \tag{6}$$

где $L^a_b(x)$ – 4-мерная матрица

$$L^a_b(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\big[\sigma_b\,B(k(x))\,\bar{\sigma}^a\,B(k^*(x))\big] = L^a_b(k(x),\,k^*(x)), \tag{7}$$

приходим к новым уравнениям

$$\begin{aligned} &i\,\sigma'^{\alpha}(x)\big[\partial_\alpha + \Sigma'_\alpha(x)\big]\,\xi'(x) = m\eta'(x),\\ &i\,\bar{\sigma}'^{\alpha}(x)\,\big[\partial_\alpha + \bar{\Sigma}'_\alpha(x)\big]\,\eta'(x) = m\xi'(x). \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь штрихованные матрицы

$$(\sigma'^{\alpha},\ \bar{\sigma}'^{\alpha},\ \Sigma'_\alpha\ ,\ \bar{\Sigma}'_\alpha)$$

построены по тому же правилу, что и матрицы

$$(\sigma^\alpha,\ \bar{\sigma}^\alpha,\ \Sigma_\alpha,\ \bar{\Sigma}_\alpha),$$

но с использованием новой (штрихованной) тетрады $e'^{\alpha}_{(a)}(x)$, связанной с исходной локальным преобразованием Лоренца

$$e'^{\alpha}_{(b)}(x) = L^a_b(k(x),\ k^*(x))\ e^{\alpha}_{(a)}(x). \tag{9}$$

Для матрицы L имеем явное выражение

$$L^a_b(k,\ k^*) = \bar{\delta}^c_b\,\big(-\delta^a_c\,k^n\,k^*_n + k_c\,k^{a*} + k^*_c\,k^a + i\,\epsilon_c^{\ anm}\,k_n\,k^*_m\,\big), \tag{10}$$

где $\bar{\delta}^c_b$ – специальный символ Кронекера.

ВЫВОД

Уравнение для электрона во внешнем гравитационном поле обладает свойством калибровочной инвариантности относительно локальной группы $SL(2.C)$. Данное свойство уравнения является свидетельством его корректности: при заданной метрике пространства–времени $g_{\alpha\beta}(x)$ тетрада $e^{\beta}_{(a)}(x)$ фиксируется лишь с точностью до локального преобразования Лоренца $L^b_a(x)$ и поскольку в уравнении явно присутствует тетрада, то необходимо, чтобы два уравнения, записанные с использованием разных тетрад, переходили друг в друга в результате соответствующего калибровочного пересчета.

2 Бозон со спином 1 в римановом пространстве, унификация с фермионом

Распространенной является точка зрения, что способ учета воздействия гравитационного поля на квантово-механическую частицу или классическое поле существенно зависит от того, идет ли речь о фермионе или бозоне. При этом считается, что тензорные уравнения (для бозонных полей) обобщаются на случай искривленного пространства легче, чем спинорные уравнения (для фермионов). Так, например, уравнение Прока для векторной частицы $S=1$ в пространстве Минковского

$$\partial_a\Psi_b - \partial_b\Psi_a = m\Psi_{ab}, \qquad \partial^b\Psi_{ab} = m\Psi_a,$$

будучи подвергнуто этой формальной процедуре, превращается в

$$\nabla_\alpha\Psi_\beta - \nabla_\beta\Psi_\alpha = m\Psi_{\alpha\beta}, \qquad \nabla^\beta\Psi_{\alpha\beta} = m\Psi_\alpha. \tag{11}$$

Однако известно и уже довольно долгое время, что все частицы независимо от величины их спина подчиняются в искривленном пространстве – времени единому тетрадному подходу. Но можно констатировать, что тетрадный формализм в применении к бозонам до недавнего времени почти не применялся

Будем исходить из обычного уравнения Даффина – Кеммера в плоском пространстве

$$(i\beta^a \partial_a - m)\,\Phi(x) = 0, \tag{12}$$

$\Phi(x)$ – это 10-компонентная волновая функция; β^a – (10×10)-матрицы; в декартовом представлении

$$\Phi = (\Phi_0,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3;\ \Phi_{01},\ \Phi_{02},\ \Phi_{03},\ \Phi_{23},\ \Phi_{31},\ \Phi_{12})\ ,$$

$$\beta^a = \left| \begin{array}{cc} 0 & \kappa^a \\ \lambda^a & 0 \end{array} \right| = \kappa^a \oplus \lambda^a\ ,$$

$$(\kappa^a)_j^{[mn]} = -i(\delta_j^m g^{na} - \delta_j^n g^{ma}),$$

$$(\lambda^a)_{[mn]}^j = -i(\delta_m^a \delta_n^j - \delta_n^a \delta_m^j) = -i\delta_{mn}^{aj}. \tag{13}$$

Следуя тетрадному рецепту, уравнение должно быть обобщено на риманово пространство–время с метрикой $g_{\alpha\beta}(x)$ и какой-либо сопутствующей ей тетрадой $e_{(a)}^{\alpha}(x)$ согласно

$$\begin{gathered} \big[i\,\beta^\alpha(x)\,(\partial_\alpha + B_\alpha(x)) - m\big]\Phi(x) = 0, \\ \beta^\alpha(x) = \beta^a e_{(a)}^{\alpha}(x), \\ B_\alpha(x) = \frac{1}{2} j^{ab} e_{(a)}^{\beta} \nabla_\alpha(e_{(b)\beta}). \end{gathered} \tag{14}$$

Уравнение (14) содержит тетраду $e_{(a)}^{\alpha}(x)$. Следовательно, должна существовать возможность преобразовывать друг в друга уравнения, записанные в разных тетрадах; в противном случае уравнение некорректно. Эта симметрия действительно выполняется

$$e'^{\alpha}_{(b)}(x) = L_a^b(x)\, e_{(b)}^{\alpha}(x), \qquad \Phi(x) \Longrightarrow \Phi'(x) = S(x)\,\Phi(x). \tag{15}$$

Общековариантный матричный формализм согласуется с тензорным подходом Прока. Действительно, учтем блочную структуру для β^a, J^{ab} и $\Phi(x)$:

$$i\big[\lambda^c e_{(c)}^{\alpha}(\partial_\alpha + \kappa^a \lambda^b e_{(a)}^{\beta} \nabla_\alpha e_{(b)\beta})\big]_{[mn]}^{l} \Phi_l = m\Phi_{[mn]},$$

$$i\big[\kappa^c e_{(c)}^{\alpha}(\partial_\alpha + \lambda^a \kappa^b e_{(a)}^{\beta} \nabla_\alpha e_{(b)\beta})\big]_{l}^{[mn]} \Phi_{[mn]} = m\Phi_l,$$

что приводит к

$$\begin{gathered} \big(e_{(a)}^{\alpha}\partial_\alpha \Phi_b - e_{(b)}^{\alpha}\partial_\alpha \Phi_a\big) + \big(\gamma_{ab}^{c} - \gamma_{ba}^{c}\big)\Phi_c = m\Phi_{ab}, \\ e^{(b)\alpha}\partial_\alpha \Phi_{ab} + \gamma_n^{nb}\Phi_{ab} + \gamma_a^{mn}\Phi_{mn} = m\Phi_a. \end{gathered} \tag{16}$$

Эти уравнения представляют собой тензорные уравнения Прока (11), записанные в терминах тетрадных компонент

$$\Phi_a(x) \ = \ e_{(a)}^{\alpha}(x)\ \Phi_\alpha(x), \quad \Phi_{ab}(x) = e_{(a)}^{\alpha}(x)\ e_{(b)}^{\beta}(x)\ \Phi_{\alpha\beta}(x). \tag{17}$$

Способ обобщения уравнений Дирака и Даффина – Кеммера в рамках специальной теории относительности на случай общерелятивистской теории ясно указывает на то, что группа Лоренца сохраняет свою исключительную важность при переходе от пространственной модели Минковского к произвольно искривленному пространству–времени.

В диссонанс с этим фактом, вступает обобщение уравнения Прока: используя общековариантную тензорную формулировку, мы автоматически разрушаем всякую тесную связь с группой Лоренца, хотя само определение для частицы со спином единица было основано именно на этой группе (как подгруппе в группе Пуанкаре).

В свете изложенного выше действительно удивительной и загадочной видится возможность переписать исходное уравнение Даффина – Кеммера в римановом пространстве в терминах общековариантных тензоров и производных. В этом факте совпадения можно увидеть также указание на то, что группа Лоренца лежит в основании также и геометрии искривленного пространства–времени.

ВОПРОС:

чем следует заменить базирующийся на группе Лоренца способ описания взаимодействия элементарных частиц с псевдоримановым геометрическим фоном в случае, когда пространство-время наделяется финслеровой структурой.

3 Матричная тетрадная форма электродинамики Максвелла в средах в представлении Майораны – Оппенгеймера в римановом пространстве

Известный подход Римана – Зильберштейна – Майораны – Оппенгеймера к электродинамике Максвелла в среде

$$\mathbf{f} = \mathbf{E} + ic\mathbf{B} , \qquad \mathbf{h} = \frac{1}{\epsilon_0}\,(\mathbf{D} + i\mathbf{H}/c) ,$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{h}+\mathbf{f}}{2} , \qquad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{h}^* - \mathbf{f}^*}{2}$$

$$M = \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{M} \end{array} \right| , \quad N = \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{N} \end{array} \right| , \quad J = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} \rho \\ i\,\mathbf{j} \end{array} \right| ,$$

$$(-i\partial_0 + \alpha^i \partial_i)\, M + (-i\partial_0 + \beta^i\partial_i)\, N = J \qquad (18)$$

также может быть обобщен на случай псевдоримановой структуры пространства–времени в соответствии с тетрадным рецептом Тетроде – Вейля – Фока – Иваненко

$$\alpha_\rho(x)\big[\partial_\rho + A_\rho(x)\big]\, M + \beta_\rho(x)\big[\partial_\rho + B_\rho(x)\big]\, N = J. \qquad (19)$$

Подход порождает основанную на тетрадном формализме и группе $SO(3,C)$ (изоморфной группе Лоренца) технику работы с уравнениями Максвелла на фоне псевдоримановой геометрии. Она в значительной степени базируется на простой алгебраической структуре вовлеченных сюда матриц

$$\alpha^1 = \left| \begin{array}{rrrr} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| , \; \alpha^2 = \left| \begin{array}{rrrr} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right| , \; \alpha^3 = \left| \begin{array}{rrrr} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| ,$$

$$\beta^1 = \left| \begin{array}{rrrr} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right| , \ \beta^2 = \left| \begin{array}{rrrr} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| , \ \beta^3 = \left| \begin{array}{rrrr} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

с простыми свойствами:

$$(\alpha^1)^2 = -I \ , \ \ (\alpha^2)^2 = -I \ , \ \ (\alpha^3)^2 = -I \ ,$$

$$\alpha^1\alpha^2 = -\alpha^2\alpha^1 = +\alpha^3,$$
$$\alpha^2\alpha^3 = -\alpha^3\alpha^2 = +\alpha^1,$$
$$\alpha^3\alpha^1 = -\alpha^1\alpha^3 = +\alpha^2,$$

$$(\beta^1)^2 = -I, \quad (\beta^2)^2 = -I, \quad (\beta^3)^2 = -I,$$

$$\beta^1\beta^2 = -\beta^2\beta^1 = -\beta^3,$$
$$\beta^2\beta^3 = -\beta^3\beta^2 = -\beta^1,$$
$$\beta^3\beta^1 = -\beta^1\beta^3 = -\beta^2.$$

$$\alpha^k \ \beta^l = \beta^l \ \alpha^k \ .$$

4 Теория Максвелла в римановом пространстве–времени и моделирование материальных сред

Известно, что уравнения Максвелла в пространстве–времени с римановой геометрией могут рассматриваться как уравнения Максвелла в пространстве Минковского в эффективной материальной среде; причем материальные уравнения связи задаются метрическим тензором пространства–времени

$$g_{\alpha\beta}(x) = \left| \begin{array}{cccc} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{01} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{02} & g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{array} \right| , \ g^{\alpha\beta}(x) = \left| \begin{array}{cccc} g^{00} & g^{01} & g^{02} & g^{03} \\ g^{01} & g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{02} & g^{12} & g^{22} & g^{23} \\ g^{03} & g^{13} & g^{23} & g^{33} \end{array} \right| ,$$

$$H^{\beta\alpha}(x) = \epsilon_0 \ [\ \sqrt{-G(x)} \ g^{\alpha\rho}(x) g^{\beta\sigma}(x) \ ] \ F_{\rho\sigma}(x) \ , \qquad G = \det \ (g_{\alpha\beta}(x)). \tag{20}$$

В 3-мерном представлении компоненты тензора обозначаем двумя наборами 3-векторов:

$$E_1 = F_{10} \ , \ E_2 = F_{20} \ , \ E_3 = F_{30},$$

$$cB_1 = -F_{23} \ , \ cB_2 = -F_{31} \ , \ cB_3 = -F_{12},$$

$$D^1 = \epsilon_0 F^{10} \ , \ D^2 = \epsilon_0 F^{20} \ , \ \epsilon_0 D^3 = F^{30},$$

$$\frac{H^1}{c} = -\epsilon_0 F^{23} \ , \ \frac{H^2}{c} = -\epsilon_0 F^{31} \ , \ \frac{H^3}{c} = -\epsilon_0 F^{12}.$$

Электродинамические материальные уравнения, генерируемые римановой геометрией пространства–времени, имеют в 3-мерном представлении следующий вид:

$$\left| \begin{array}{c} D^i(x) \\ \\ H^i(x) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \epsilon_0\, \epsilon^{ik}(x) & \epsilon_0\, c\, \alpha^{ik}(x) \\ \\ \epsilon_0 c\, \beta^{ik}(x) & \mu_0^{-1}(\mu^{-1})^{ik}(x) \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} E_k(x) \\ \\ B_k(x) \end{array} \right| , \tag{21}$$

со свойствами

$$\begin{gathered} \tilde{\epsilon}(x) = +\epsilon\,(x), \\ (\mu^{-1})^{\sim}(x) = +\mu^{-1}(x), \\ \tilde{\beta}(x) = +\alpha\,(x) \end{gathered} \tag{22}$$

и определяются метрическим тензором

$$\begin{gathered} \epsilon^{ik}(x) = \sqrt{-G}\,\left[g^{00}(x)\, g^{ik}(x) - g^{0i}(x)\, g^{0k}(x)\right], \\ (\mu^{-1})^{ik}(x) = \sqrt{-G}\,\left[\frac{1}{2}\,\epsilon_{imn}\, g^{ml}(x) g^{nj}(x)\,\epsilon_{ljk}\right], \\ \alpha^{ik}(x) = +\sqrt{-G}\,\left[g^{ij}(x)\, g^{0l}(x)\,\epsilon_{ljk}\right], \\ \beta^{ik}(x) = -\sqrt{-G}\,\left[g^{0j}(x)\,\epsilon_{jil}\, g^{lk}(x)\right]. \end{gathered} \tag{23}$$

Задача состоит в следующем: поскольку четыре тензора второго ранга в (1) содержат $6+6+9=21$ независимых функций; а исходный их определяющий тензор $g^{\alpha\beta}(x)$ задается только 10 независимыми функциями; то должны существовать 11 условий связи на составляющие четырех тензоров из (21). Нужно их найти в явном виде.

Отмечаем тождество

$$\mathrm{Sp}\;\alpha = \mathrm{Sp}\;\beta = 0\;, \tag{24a}$$

а также

$$\begin{gathered} \vec{g}\,\beta = 0 \implies (g^{01}, g^{02}, g^{03}) \left| \begin{array}{ccc} \beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13} \\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23} \\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33} \end{array} \right| = 0\;, \\ \alpha\,\vec{g}^{+} = 0 \implies \left| \begin{array}{ccc} \alpha^{11} & \alpha^{12} & \alpha^{13} \\ \alpha^{21} & \alpha^{22} & \alpha^{23} \\ \alpha^{31} & \alpha^{32} & \alpha^{33} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} g^{01} \\ g^{02} \\ g^{03} \end{array} \right| = 0\;, \end{gathered} \tag{24}$$

причем последние тождества эквивалентны друг другу.

Можно установить выражения для матриц $\epsilon^{ik}(x)$ и $\mu^{ik}(x)$:

$$\frac{1}{g^{00}(x)} \left(\frac{\epsilon^{ik}(x)}{\sqrt{-G(x)}} + (\vec{g}(x) \bullet \vec{g}(x))^{ik} \right) = g^{ik}(x)\;,$$

$$\mu^{ik}(x)\;\sqrt{-G(x)} = \det\,(g_{ik}(x))\;\; g^{ik}(x)\;;$$

откуда следует соотношение связи

$$\epsilon^{ik}(x) + \sqrt{-G(x)}\;[\vec{g}(x) \bullet \vec{g}(x)]^{ik} = -\frac{g^{00}(x)\; G(x)}{\det\,(g_{ik}(x))}\;\mu^{ik}(x). \tag{24c}$$

Рассмотрим простой класс (стационарных) метрик вида

$$g_{\alpha\beta}(x) = \left| \begin{array}{cccc} g_{00}(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11}(x) & g_{12}(x) & g_{13}(x) \\ 0 & g_{21}(x) & g_{22}(x) & g_{23}(x) \\ 0 & g_{31}(x) & g_{32}(x) & g_{33}(x) \end{array} \right| ,$$

$$\vec{g}(x) = 0 \; , \qquad G(x) = g_{00} \det[g_{ij}(x)] \; ; \tag{25a}$$

при этом материальные уравнения ограничены условиями:

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \epsilon^{ik}(x) = -\mu^{ik}(x) \; . \tag{25b}$$

Это в принципе возможный, но очень специальный класс сред.

ВОПРОС:

какие среды может моделировать электродинамика в финслеровом пространстве–времени.

Отметим, что известное представление материальных уравнений Минковского в форме Гордона – Тамма – Мандельштама для движущейся однородной материальной среды также может быть описано в рамках метрики эффективного пространства

$$\begin{gathered} \Delta^{abmn} = \epsilon_0 \frac{1}{\sqrt{\mu}} \Big[\eta^{am} + (\epsilon\mu - 1)\, u^a u^m \Big] \, \frac{1}{\sqrt{\mu}} \Big[\eta^{bn} + (\epsilon\mu - 1)\, u^b u^n \Big], \\ H^{\rho\sigma}(x) = \Delta^{abmn} \, F_{mn} = \epsilon_0 \; g^{\rho\alpha}(x) \; g^{\sigma\beta}(x) \; F_{\alpha\beta}(x). \end{gathered} \tag{26}$$

В трехмерной форме имеет вид:

$$\begin{gathered} \mathbf{D} = +\frac{\epsilon_0}{\mu}\,\mathbf{E} + \frac{\epsilon_0 \gamma}{\mu}\, \frac{\mathbf{E} - (\mathbf{V}\mathbf{E})\,\mathbf{V}}{1 - V^2} + \frac{\epsilon_0 c \gamma}{\mu}\, \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{1 - V^2}, \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu}\,\mathbf{B} + \frac{\gamma}{\mu_0 \mu} \frac{\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}))}{1 - V^2} + \frac{\epsilon_0 c \, \gamma}{\mu}\, \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{E}}{1 - V^2}. \end{gathered} \tag{27}$$

В этих материальных уравнениях очевидным образом присутствует анизотропия: уравнения зависят от вектора скорости движения среды относительно инерциальной системы отсчета. Если в уравнениях Максвелла для движущейся среды исключить векторы $\mathbf{D}, \mathbf{H}$, то получающиеся уравнения электродинамики явным образом зависят от выбора системы отсчета инерциального наблюдателя.

На найденную много лет тому назад Минковским процедуру ковариантизации материальных уравнений можно смотреть как на “сделанную руками” релятивизацию исходных материальных уравнений Максвелла покоящейся однородной среды, которая по сути базируется на введении ОПРЕДЕЛЕНИЯ новых уравнений связи в движущейся среде.

Этот прием релятивизации через использование преобразований Лоренца может быть выполнен всегда и с любыми материальными уравнениями среды

$$\begin{aligned} &\text{в системе покоя:} && H^{\alpha\beta} = f(F^{\alpha\beta}) \; , \\ &\text{в движущейся системе:} && L^{\alpha}{}_{\alpha'} L^{\beta}{}_{\beta'} H^{\alpha'\beta'} = f(L^{\alpha}{}_{\alpha'} L^{\beta}{}_{\beta'} F^{\alpha'\beta'}). \end{aligned} \tag{28}$$

В этом контексте можно утверждать, что ковариантиазация электродинамики Максвелла в средах достигается за счет постулирования правила обобщения уравнений при переходе к движущейся системе отсчета.

Заключение

Группа Лоренца играет определяющую и унифицирующую роль для описания полей всех частиц (с разными спинами, массивных и безмассовых) как в плоском, так и в искривленном пространстве–времени. Поскольку от всякой новой теории физического пространства–времени следует ожидать преемственности с развитыми и уже апробированными моделями на фоне плоской и псевдоримановых моделей пространства, ставится вопрос: чем следует заменить базирующийся на группе Лоренца способ описания взаимодействия элементарных частиц с псевдоримановым геометрическим фоном, если пространство–время наделяется финслеровой структурой. Также можно поставить более частный вопрос: какие эффективные материальные среды можно описать, используя обобщенную электродинамику Максвелла на фоне пространства–времени с финслеровой геометрией.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований: Румынско-Белорусский проект, грант Ф12РА-002.

Авторы благодарны организаторам VIII международной конференции “Финслеровы обобшения теории относительности” за поддержку нашего участия в работе конференции.

Приведенный ниже список литературы перечисляет лишь некоторые публикации, на основе которых сделана данная работа.

Литература

[1] Богуш А.А., Мороз Л.Г. Введение в теорию классических полей. Наука и техника, Минск, 1968.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. Наука, Москва, 1973.

[3] Penrose R., Rindler W. Spinors and space-time. Vol. I. Two-spinor calculus and relativistic fields. Cambridge University Press, 1984; рус. пер. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. Т. 1. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля. Мир, Москва, 1987.

[4] Федоров Ф.И. Группа Лоренца. Наука, Москва, 1979.

[5] Редьков В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца. Белорусская наука, Минск, 2009.

[6] Овсиюк Е.М., Редьков В.М. Электродинамика Максвелла в пространстве с неевклидовой геометрией. Издательство Мозырского государственного педагогического университета, Мозырь, 2011.

[7] Овсиюк Е.М., Кисель В.В., Крылов Г.Г., Редьков В.М. Квантовая механика в однородном магнитом поле: новые задачи. Издательство Мозырского государственного педагогического университета, Мозырь, 2011.

[8] Red’kov V.M., Ovsiyuk E.M. Quantum mechanics in spaces of constant curvature. Nova Science Publishers. Inc., New York, 2012. – 434 pages.

[9] Gordon W. Zur Lichtfortpanzungnach der Relativitätstheorie // *Ann. Phys.* (Leipzig). 1923, Bd. 72, pp. 421–456.

[10] Тамм И.Е. Электродинамика анизотропной среды в специальной теории относительности // *ЖРФХО Физ. Отд.*, Т. 56, вып. 2-3, 1924, с. 248–262.

[11] Mandelstam L.I., Tamm I.E. Elektrodynamik der anisotropen Medien und der speziallen Relativitatstheorie // *Math. Annalen.*, Bd. 95, 1925, pp. 154–160.

[12] Тамм И.Е. Кристаллороптика теории относительности в связи с геометрией квадратичной формы // *ЖРФХО*, вып. 3-4, 1925, с. 1.

[13] Minkowski H. Die Grundlagen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Kërpern // *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse.* 1908, pp. 53–111;

reprint in *Math. Ann.* 1910, Vol. 68, pp. 472–525;
рус. перевод: *Эйнштейновский сборник*, 1978–1979, с. 5–63;
Raum und Zeit. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1909, Bd. 18. pp. 75–88;
Raum und Zeit. Phys. Zeit., 1909, Bd. 10, pp. 104–111;
Das Relativitätsprinzip. *Annalen der Physik.* 1915, Bd. 47, pp. 927–938.

[14] Weber H. Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik nach Riemann's Vorlesungen. Friedrich Vieweg und Sohn. Braunschweig, 1901.

[15] Silberstein L. Elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung // *Ann. der Phys.* 1907, Bd. 22, No. 3, pp. 579–586;
Nachtrag zur Abhandlung Über "elektromagnetische Grundgleichungen in bivektorieller Behandlung" // *Ann. der Phys.* 1907, Bd. 24, No. 14, pp. 783–784;
The Theory of Relativity. Macmillan, London, 1914.

[16] Oppenheimer J.R. Note on light quanta and the electromagnetic field // *Phys. Rev.* 1931, Vol. 38, pp. 725.

[17] Majorana E. Scientific Papers, unpublished, deposited at the "Domus Galileana". Pisa, quaderno 2, pp. 101/1; quaderno 3. pp. 11, 160; quaderno 15, p. 16; quaderno 17, pp. 83, 159.

[18] Rosen N. Special theories of relativity // *Am. J. Phys.* 1952, Vol. 20, No. 3, pp. 161–164.

THE LORENTZ GROUP IS A BASE FOR DESCRIBING INTERACTION OF BOSONS AND FERMIONS WITH PSEUDO-RIEMANNIAN STRUCTURE OF A BACKGROUND SPACE-TIME. WHAT SHOULD BE INSTEAD FOR FINSLERIAN SPACE-TIME MODELS?

V.M. Red'kov[1], V.V. Kisel[2], E.M. Ovsiyuk[3]

[1] *Institute of Physics, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
[2] *Belarus State Pedagogical University, Minsk, Belarus*
[3] *Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus*

v.redkov@dragon.bas-net.by, e.ovsiyuk@mail.ru

A brief overview of the basics of the theory of wave equations of elementary particles in the presence of external gravitational field, described as a pseudo-Riemannian structure of space–time, is given. Covariant generalization of the wave equations, set in Minkowski space, are presented for bosons and fermions equally, is presented as the result of a single tetrad recipe by Tetrode–Weyl–Fock–Ivanenko, based on representations of the Lorentz group. The Lorentz group plays a unifying role in describing the fields of all particles (with different spins, massive and massless) in the flat and in curved space–time. The difference lies in the fact that in flat space Lorentz group acts as a global symmetry of the wave equations; and in a pseudo-Riemannian space, it plays a role of local symmetry group (dependent on coordinates). Particular attention is given to the Dirac and Maxwell fields. Because any new theory of physical space–time can be expected to cover already developed and proven models, the question naturally arises: for what should be replaced the method of describing the interactions of elementary particles with a pseudo-Rimannian geometric background, if the space-time endowed with a Finsler structure.

The answer to this question, if possible, should be fairly universal and independent of the magnitude of the spin of a particle or its mass. The general answer to this question would provide us with the better understanding what we can expect in physics from the use of Finsler geometry, in the most radical aspect as a basic new geometry of physical space–time.

One can also put a more particular question: what effective physical media can be described by using a generalized Maxwell electrodynamics in space–time with Finsler geometry.

Key Words: wave equations, curved spaces, unification, Lorentz group, Dirac and Maxwell fields, Finslerian geometry.