ЛЕСТНИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛИЧИСЕЛ

Г.И. Гарасько

ФГУП ВЭИ, Москва, Россия

gri9z@mail.ru, gri9z.wordpress.com

В работе предложено обобщение экспоненциального представления невырожденных поличисел, которое названо *лестничным*, на примере гиперкомплексных чисел H_4. Возникающий при этом итерационный процесс может обрываться или быть бесконечным. Предложен новый подход к осмыслению цепочки понятия: длина, угол, новые объекты – в поличисловых пространствах.

Ключевые слова: невырожденные поличисла, экспоненциальное представление, лестничное представление, гиперкомплексные числа, итерационный процесс.

1 Введение

Любое не равное нулю комплексное число $z = x + iy$ представимо в экспоненциальном виде однозначно

$$z = \varrho\, e^{i\varphi}\,, \qquad i^2 = -1\,, \tag{1}$$

если потребовать, чтобы ϱ и φ были действительными числами, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\varrho > 0\,, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi\,. \tag{2}$$

При снятии всех условий можно многими способами представить не равное нулю комплексное число в виде «экспоненциальной лесенки»

$$z = w_{(1)} e^{w_{(2)} e^{w_{(3)} e^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} \tag{3}$$

конечной или бесконечной. Таким образом, вместо единственного начального числа z мы получает набор комплексных чисел:

$$z \to w_{(1)} \to w_{(2)} \to w_{(3)} \to ... \to w_{(c)} \to ... \tag{4}$$

Поэтому, для того чтобы построение (3) было однозначным, необходимо на каждом этапе (при каждой итерации) придерживаться экспоненциального представления. Тогда для комплексного числа z получим:

$$z \to \varrho \to \varphi \to \frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2} \to ... \to \frac{\pi}{2} \to i\frac{\pi}{2}\,, \tag{5}$$

если оборвать итерационный процесс, и

$$z \to \varrho \to \varphi \to \frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2} \to ... \to \frac{\pi}{2}\, ...\,, \tag{6}$$

если его не обрывать.

Для двойных чисел $z = x + j\,y \in H_2$, где $j^2 = 1$, экспоненциальное представление возможно, если

$$x + y > 0\,, \qquad x - y > 0\,. \tag{7}$$

Тогда найдутся действительные числа ϱ, α такие, что

$$z = \varrho e^{j\,\alpha}\,, \qquad \varrho = \sqrt{x^2 - y^2}\,, \qquad \varrho > 0\,, \qquad -\infty < \alpha < +\infty\,; \tag{8}$$

а вместо (5), (6) имеем

$$z \to \varrho \to j\,\alpha \tag{9}$$

или

$$z \to \varrho \to j\,\alpha \to 0\,, \tag{10}$$

и ничего более.

Обобщение таких построений, как (5), (6) для комплексных чисел и (9), (10) для двойных чисел, на алгебры произвольных невырожденных чисел $P_{k+2\cdot m}$ с учетом понятия экспоненциального представления последних [1] является содержанием настоящей работы. Такое обобщение экспоненциального представления невырожденных поличисел будем называть *лестничным представлением* поличисел. Хотя оборвать процесс можно на любой итерации, для поличисел $P_{k+2\cdot m}$ размерности $n \equiv k + 2\cdot m$ выделенной конечной последовательностью всегда будет последовательность, состоящая из n чисел. Для комплексных чисел это

$$z \to \varrho \to i\varphi\,, \qquad \{\varrho, \varphi\}\,,$$

для двойных чисел —

$$z \to \varrho \to j\,\alpha\,, \qquad \{\varrho, j\,\alpha\}\,,$$

а для $P_{k+2\cdot m}$ —

$$X \equiv X_{(1)} \to X_{(2)} \to ... \to X_{(n)}\,, \qquad \{W_{(1)}, W_{(2)}, ..., W_{(n)}\}\,. \tag{11}$$

Так как в общем случае поличисел $P_{k+2\cdot m}$ построение *лестничного представления* довольно громоздко, проведем его последовательно для поличисел H_4. Для других систем невырожденных поличисел *лестничное представление* строится аналогично.

Как известно [1], поличисло $X \in H_4$ может быть представлено в экспоненциальном виде

$$X = |X| \cdot e^{\alpha j + \beta k + \gamma jk} \cdot 1\,, \tag{12}$$

где $1, j, k, jk$ - "ортонормированный" базис,

$$j^2 = 1, \quad k^2 = 1, \quad (jk)^2 = 1, \quad j\cdot k = jk, \quad j\cdot jk = k, \quad k\cdot jk = j\,; \tag{13}$$

который связан с изотропным базисом e_1, e_2, e_3, e_4 следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4\,,\\ j &= e_1 + e_2 - e_3 - e_4\,,\\ k &= e_1 - e_2 + e_3 - e_4\,,\\ jk &= e_1 - e_2 - e_3 + e_4\,, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

если все координаты $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ поличисла X в изотропном базисе e_1, e_2, e_3, e_4 являются действительными положительными числами:

$$\xi^i > 0\,. \tag{15}$$

Запишем формулу (12) в изотропном базисе:

$$X = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \cdot |X| \cdot e^{\eta^1 e_1 + \eta^2 e_2 + \eta^3 e_3 + \eta^4 e_4}\,, \tag{16}$$

где

$$|X| = \sqrt[4]{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4}\,, \qquad \eta_i = \ln\left(\frac{\xi^i}{|X|}\right)\,. \tag{17}$$

Величины η^i не являются независимыми, так как

$$\eta^1 + \eta^2 + \eta^3 + \eta^4 = 0\,, \tag{18}$$

и выражаются через угловые переменные α, β, γ следующим образом:

$$\eta^1 = \alpha + \beta + \gamma, \quad \eta^2 = \alpha - \beta - \gamma, \quad \eta^3 = -\alpha + \beta - \gamma, \quad \eta^4 = -\alpha - \beta + \gamma. \tag{19}$$

Обратные формулы имеют вид:

$$\alpha = \frac{1}{2}(\eta^1 + \eta^2)\,, \quad \beta = \frac{1}{2}(\eta^1 + \eta^3)\,, \quad \gamma = \frac{1}{2}(\eta^1 + \eta^4)\,. \tag{20}$$

2 Лестничное представление поличисел $\mathbf{H}_4$

Из анализа формул (15) – (17) вытекает естественное обобщение экспоненциального представления поличисел $X \in H_4$, для которых вместо условия (15) должно выполняться более слабое условие:

$$\xi^i \neq 0\,. \tag{21}$$

Такое представление можно записать следующим образом:

$$X = \overset{s}{X} \cdot \left|\overset{m}{X}\right| \cdot e^{\,\eta^1 e_1 + \eta^2 e_2 + \eta^3 e_3 + \eta^4 e_4}\,, \tag{22}$$

где

$$\overset{s}{X} \equiv \mathrm{sign}(\xi^1)\, e_1 + \mathrm{sign}(\xi^2)\, e_2 + \mathrm{sign}(\xi^3)\, e_3 + \mathrm{sign}(\xi^4)\, e_4\,, \tag{23}$$

$$\overset{m}{X} \equiv \left|\xi^1\right| e_1 + \left|\xi^2\right| e_2 + \left|\xi^3\right| e_3 + \left|\xi^4\right| e_4\,, \tag{24}$$

$$\left|\overset{m}{X}\right| \equiv \varrho = \sqrt[4]{|\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4|}\,, \qquad \overset{1}{X} \equiv \frac{\overset{m}{X}}{\left|\overset{m}{X}\right|}\,, \tag{25}$$

$$\eta^i = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{(\xi^i)^8}{(\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4)^2}\right)\,, \qquad \eta^1 + \eta^2 + \eta^3 + \eta^4 = 0\,. \tag{26}$$

Из последней формулы следует, что η^i не могут быть все положительными или все отрицательными. Если хотя бы одна из η^i обращается в нуль, то далее процесс построения лестничного представления продолжен быть не может, то есть он обрывается. Формулу (22) можно записать более кратко:

$$X = \overset{s}{X}_{(1)} \cdot \left|\overset{m}{X}_{(1)}\right| \cdot e^{\ln\left(\overset{1}{X}_{(1)}\right)}\,, \qquad X_{(1)} \equiv X\,. \tag{27}$$

Число различных поличисел $\overset{s}{X} \equiv J_1$ равно 16. В это множество J_a, $a = 1, 2, ..., 16$ входят все базисные элементы $1, j, k, jk$. Произведение двух произвольных элементов J_{a_1} и J_{a_2} дает опять элемент J_{a_3} того же множества. Для каждого J_a существует обратный элемент из того же множества. Все J_a обладают свойством:

$$J_a^2 = 1\,. \tag{28}$$

Поэтому множество элементов J_a образует группу, которую естественно назвать группой символьных гиперболических единиц.

Если

$$X_{(2)} \equiv \ln\left(\overset{1}{X}_{(1)}\right) \tag{29}$$

не есть делитель нуля, то процесс можно продолжить:

$$X_{(2)} \to X_{(3)} \equiv \ln\left(\overset{1}{X}_{(2)}\right). \tag{30}$$

Если

$$X_{(3)} \equiv \ln\left(\overset{1}{X}_{(2)}\right) \tag{31}$$

не есть делитель нуля, то процесс можно продолжить:

$$X_{(3)} \to X_{(4)} \equiv \ln\left(\overset{1}{X}_{(3)}\right). \tag{32}$$

Тогда мы получим набор из 4-х действительных положительных чисел:

$$\varrho_1 = \left|\overset{m}{X}_{(1)}\right|, \quad \varrho_2 = \left|\overset{m}{X}_{(2)}\right|, \quad \varrho_3 = \left|\overset{m}{X}_{(3)}\right|, \quad \varrho_4 = \left|\overset{m}{X}_{(4)}\right|, \tag{33}$$

которые назовём модулем, углом, тринглом и 4-инглом соответственно. Каждой из этих величин соответствует некоторое направление в четырехмерном пространстве H_4:

$$J_1 = \overset{s}{X}_{(1)}, \qquad J_2 = \overset{s}{X}_{(2)}, \qquad J_3 = \overset{s}{X}_{(3)}, \qquad \overset{s}{X}_{(4)}\overset{1}{X}_{(4)} \equiv J_4\ \overset{1}{X}_{(4)}. \tag{34}$$

Итак, вместо поличисла X мы получили набор из 4-х поличисел:

$$\left\{J_1\varrho_1,\ J_2\varrho_2,\ J_3\varrho_3,\ J_4\varrho_4\ \overset{1}{X}_{(4)}\right\}. \tag{35}$$

Поличисло J_1 - указывает один из 16-ти конусов, на которые разбивается координатное пространство H_4 делителями нуля. Каждое поличисло J_2, J_3, J_4 - указывает на один из конусов из меньшего, чем 16-ть, множества, так как в это множество заведомо не входят конусы $(+,+,+,+)$ и $(-,-,-,-)$. Можно считать, что унимодулярное поличисло

$$\overset{1}{X}_{(4)} = e^{\alpha_4 j + \beta_4 k + \gamma_4 jk} \tag{36}$$

указывает направление в конусе, который определяется поличислом J_4.

Итак, для поличисел $X \in H_4$, у которых координаты в изотропном базисе на каждой итерации отличны от нуля, то есть они не являются делителями нуля, получается представление следующего вида

$$X = J_1\varrho_1 \cdot \mathbf{e}^{J_2\varrho_2 \cdot \mathbf{e}^{J_3\varrho_3 \cdot \mathbf{e}^{J_4\varrho_4 \overset{1}{X}_{(4)}}}}, \tag{37}$$

или для координат в изотропном базисе

$$\xi^i = j_1^i\varrho_1 \cdot \mathbf{e}^{j_2^i\varrho_2 \cdot \mathbf{e}^{j_3^i\varrho_3 \cdot \mathbf{e}^{\varrho_4 j_4^i \cdot \zeta^i}}}. \tag{38}$$

Здесь по индексу i нет суммирования, $j_k^i = \pm 1$ - независимые знаковые коэффициенты,

$$J_k = j_k^1 e_1 + j_k^2 e_2 + j_k^3 e_3 + j_k^4 e_4\,; \tag{39}$$

$$\overset{1}{X}_{(4)} = \zeta^1 e_1 + \zeta^2 e_2 + \zeta^3 e_3 + \zeta^4 e_4 \,, \tag{40}$$

$$\overset{1}{X}_{(4)} = e^{\,\alpha_4+\beta_4+\gamma_4} e_1 + e^{\,\alpha_4-\beta_4-\gamma_4} e_2 + e^{\,-\alpha_4+\beta_4-\gamma_4} e_3 + e^{\,-\alpha_4-\beta_4+\gamma_4} e_4 \,. \tag{41}$$

Представление (37) будем называть *лестничным представлением* поличисел H_4.

Если итерационный процесс обрывается раньше, то вместо (37) можем получить

$$X = J_1 \varrho_1 \cdot \mathbf{e}^{\,J_2 \varrho_2 \overset{1}{X}_{(2)}} \quad \text{или} \quad X = J_1 \varrho_1 \cdot \mathbf{e}^{\,J_2 \varrho_2 \cdot \, \mathbf{e}^{\,J_3 \varrho_3 \overset{1}{X}_{(3)}}} \,, \tag{42}$$

соответственно.

3 Бесконечный итерационный процесс

Лестничное представление (37) можно продолжить до сколь угодно большого $(m+1)$:

$$X = J_1 \varrho_1 \mathbf{e}^{\,J_2 \varrho_2 \mathbf{e}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\mathbf{e}^{\,\varrho_m J_m \mathbf{e}^{\,\alpha_m j + \beta_m k + \gamma_m jk}}}}}}} \,, \tag{43}$$

$$\alpha_m ,\; \beta_m ,\; \gamma_m \;\; \to \;\; \alpha_{m+1} ,\; \beta_{m+1} ,\; \gamma_{m+1} \,, \tag{44}$$

если все $X_{(a)},\ a \le m$ не являются делителями нуля. Трехмерное координатное пространство $\alpha \equiv x$, $\beta \equiv y$, $\gamma \equiv z$ можно рассматривать как пространственную гиперплоскость в четырехмерном пространстве H_4, которое мы отождествляем с пространством событий. Задавая различные начальные значения $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, получим последовательность точек в трехмерном пространстве x, y, z, которое, для наглядности, будем считать евклидовым, а сами координаты - декартовыми прямоугольными:

$$(x_4, y_4, z_4),\ (x_5, y_5, z_5),\ \ldots,\ (x_m, y_m, z_m),\ \ldots \tag{45}$$

Если перейти к сферическим координатам r, ϑ, φ, то такие последовательности точек можно изображать на небесной сфере координатами ϑ, φ.

Из выше изложенного следуют конкретные формулы для указанного итерационного процесса в трехмерном пространстве x, y, z:

$$\left.\begin{aligned}
x_{m+1} &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(x_m + y_m + z_m)(x_m - y_m - z_m)}{(-x_m + y_m - z_m)(-x_m - y_m + z_m)} \right| \,, \\
y_{m+1} &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(x_m + y_m + z_m)(-x_m + y_m - z_m)}{(x_m - y_m - z_m)(-x_m - y_m + z_m)} \right| \,, \\
z_{m+1} &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(x_m + y_m + z_m)(-x_m - y_m + z_m)}{(x_m - y_m - z_m)(-x_m + y_m - z_m)} \right| \,.
\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Если дополнить эти формулы формулой

$$\begin{aligned}
x^0_{m+1} = \Bigg| \ln \frac{|x_m + y_m + z_m|}{\rho_m} \cdot \ln \frac{|x_m - y_m - z_m|}{\rho_m} \times \\
\times \ln \frac{|-x_m + y_m - z_m|}{\rho_m} \cdot \ln \frac{|-x_m - y_m + z_m|}{\rho_m} \Bigg|^{\frac{1}{4}} \,,
\end{aligned} \tag{47}$$

где

$$\rho_m = |(x_m + y_m + z_m)(x_m - y_m - z_m)(-x_m + y_m - z_m)(-x_m - y_m + z_m)|^{\frac{1}{4}}\,, \tag{48}$$

получим итерационный процесс в 4-мерном пространстве x^0, x, y, z. Отметим, что в правой части формулы (47) отсутствует величина x^0_m, а в формулах (46) величины $x_{m+1}, y_{m+1}, z_{m+1}$ выражаются только через сферические углы ϑ_m, φ_m. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_{m+1} &= \Theta(\vartheta_m, \varphi_m)\,, \\ \varphi_{m+1} &= \Phi(\vartheta_m, \varphi_m)\,, \\ r_{m+1} &= R(\vartheta_m, \varphi_m)\,, \\ x^0_{m+1} &= X^0(r_m, \vartheta_m, \varphi_m)\,. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

На наш взгляд, особенно интересен итерационный процесс

$$\vartheta_m,\, \varphi_m \quad \to \quad \vartheta_{m+1},\, \varphi_{m+1}\,. \tag{50}$$

При этом удобно в качестве промежуточных формул использовать формулы (46), где положить

$$x_m \equiv \sin(\vartheta_m)\cos(\varphi_m)\,, \quad y_m \equiv \sin(\vartheta_m)\sin(\varphi_m)\,, \quad z_m \equiv \cos(\vartheta_m)\,. \tag{51}$$

Углы ϑ_{m+1}, φ_{m+1} вычисляются по формулам:

$$\vartheta_{m+1} = \arccos\frac{z_{m+1}}{r_{m+1}}, \quad \varphi_{m+1} = \mathrm{sign}(y_{m+1})\arccos\frac{x_{m+1}}{r_{m+1}\sqrt{1 - \left(\dfrac{z_{m+1}}{r_{m+1}}\right)^2}}\,, \tag{52}$$

где

$$r_{m+1} \equiv \sqrt{x^2_{m+1} + y^2_{m+1} + z^2_{m+1}}\,. \tag{53}$$

4 Заключение

Используя для произвольных невырожденных поличисел $P_{k+2\cdot m}$ экспоненциальное представление [1] и следуя алгоритму построения *лестничного представления* для поличисел H_4, изложенному выше; теперь мы можем построить *лестничное представление* для поличисел любой алгебры $P_{k+2\cdot m}$.

Литература

[1] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., ТЕТРУ, 2009.

LADDER REPRESENTATION OF NONDEGENERATE POLYNUMBERS

G.I. Garas'ko

Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia

gri9z@mail.ru, gri9z.wordpress.com

The paper gives a generalization of exponential representation of nondegenerate polynumbers, which are named as ladder representation. It given on the base of hypercomplex numbers H_4. The representation arise an iterative process, which can be finite or infinite. Also a new approach to understanding of notions of length and angle in polynumber spaces are proposed.

Key Words: nondegenerate polynumbers, exponential representation, ladder representation, hypercomplex numbers, iterative process.