

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ПОЛИЧИСЛОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Д.Г. Павлов¹, С.С. Кокарев^{1,2}

¹ НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

² Российский научно-образовательный центр “Логос”, Ярославль, Россия

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

В статье рассмотрены некоторые математические свойства инвариантного скалярного оператора \mathcal{O}_n поличисловой теории поля и его ядра (т.е. решений уравнения $\mathcal{O}_n \Phi = 0$). Приведены выражения для метрики Бервальда-Моора и оператора \mathcal{O}_n в гиперболических сферической, цилиндрической изотропной и цилиндрической неизотропной системах координат для случая $n = 3$. Часть результатов представлена через специальные функции, являющиеся гиперболическим аналогом тригонометрических функций, сферических гармоник и полиномов Лежандра. Вычислен общий вид радиальной части оператора \mathcal{O}_n для любого n . Решена задача о распределении гиперболического поля равномерно заряженного шара. Показано, что в 3-мерной гиперболической теории поля не существует цилиндрически-симметричных (в случае неизотропной оси симметрии) решений с разделенными переменными.

Ключевые слова: поличисла, пространство Бервальда-Моора, гиперболическая теория поля, функция Грина, криволинейная система координат, сферическая симметрия, разделение переменных.

1 Введение

Принцип алгебраизации является ключевым инструментом для унифицированного описания пространственно-временных отношений, материи и физических взаимодействий. Он вошел в физику в первой половине XX века в период разработки основ и приложений квантовой теории, несколько уступая во времени принципу геометризации, лежащему в основе ОТО. Оба принципа сегодня тесно переплетаются и взаимно дополняют друг друга и, в действительности, (например, в теории суперструн) они работают совместно. Это плодотворное единство алгебры и геометрии наводит на мысль о существовании единой алгебро-геометрической основы физической реальности, которая раскрывается с различных сторон в зависимости от выбора точки зрения на реальность и средств ее описания [1–6].

Как принцип геометризации, так и принцип алгебраизации возвращают нас к идеям древних греков о первичности простых математических конструкций: в первом случае речь идет о теории Платоновых атомов — правильных геометрических фигур, во втором — об пифагоровом учении о числах, как основе природы [7]. Алгебра, по сути, и представляет собой глубокое обобщение числовых отношений и операций над числами. На сегодняшний день нам известны все числовые системы, допускающие стандартные арифметические операции: сумму, разность, умножение и деление с привычными свойствами ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности. Эти системы получили название *числовых полей*. Все числовые поля изоморфны одному из следующих полей: полю рациональных чисел Q , полю вещественных чисел R или полю комплексных чисел C [8]. Классический анализ, лежащий в основе гладких структур, на которых в основном и строится современная фундаментальная физика, опирается на свойства поля вещественных чисел или его многомерного расширения R^n . Интересные попытки аксиоматизации квантовой теории опираются на т.н. p -адический анализ, который строится на поле рациональных чисел [9]. Поле комплексных чисел лежит в основе общепринятой аксиоматики квантовой теории и ее многочисленных приложений [5]. Кроме того, множество задач

классической физики (электро- и магнитостатики, гидродинамики и теории упругости) эффективно решается с помощью методов комплексного анализа [10]. Последнее обстоятельство обусловлено наличием замечательных дифференциально-аналитических свойств комплексно-дифференцируемых функций, выражающихся т.н. условиями Коши-Римана. Эти последние принимают вид физических уравнений (условий потенциальности и соленоидальности соответствующих физических полей) и обеспечивают эффективный алгоритм отыскания решений задач двумерной математической физики.

Представляет интерес отыскание многомерных расширений поля комплексных чисел, которые позволяли бы решать пространственные задачи математической физики или даже задачи СТО и ОТО в 4-мерном пространстве-времени. Общая теорема алгебры, перечисляющая все числовые поля, закрывает вопрос о числовых полях размерности выше двух. Однако, простое наблюдение наводит на мысль о необходимости расширения условий на числовые системы, которые могут представлять интерес для физики. Речь идет о свойствах т.н. двойных чисел, которые давно известны математикам [11]. Двойные числа представляют собой 2-мерную алгебру над полем R с делителями нуля. Любое двойное число h можно представить в виде: $h = a + jb$, где $a, b \in R$, j — т.н. гиперболическая мнимая единица, удовлетворяющая условию: $j^2 = 1$. Вводя операцию комплексного сопряжения: $h \rightarrow \bar{h} = a - jb$ и образуя вещественную комбинацию $h\bar{h} = a^2 - b^2$, которую по аналогии с комплексными числами можно назвать квадратом нормы (или, точнее, псевдонормы) двойного числа, мы приходим к 2-мерной псевдоевклидовой квадратичной форме, которая лежит в основе геометрической структуры 2-мерного пространства-времени Минковского. При этом числа вида $h_0 = a(1 \pm j)$ не имеют обратных (с точки зрения алгебры они являются т.н. делителями нуля, т.е. отличными от нуля возможными решениями уравнения $h \cdot x = 0$), что препятствует отнесению алгебры двойных чисел к классу числовых полей. Однако с физической точки зрения именно делители нуля отражают факт существования в 2-мерном пространстве-времени фундаментальной конформной структуры — светового конуса. Делители нуля геометрически соответствуют точкам светового конуса (он представляет собой пару пересекающихся прямых) с вершиной в нуле. Физические аспекты алгебры двойных чисел были рассмотрены в ряде предыдущих работ [12–15].

n -мерным расширением алгебры двойных чисел является алгебра поличисел P_n . Соответствующие ей геометрические пространства H_n являются пространствами Бервальда-Моора с метриками Бервальда-Моора псевдофинслерова типа. Несмотря на весьма простые свойства этой алгебры, на ее основе можно строить соответствующий анализ вместе с обобщенной концепцией голоморфности, развивать дифференциальную геометрию соответствующих пространств H_n , строить теоретико-полевые лагранжианы и т.д. [16].

Настоящая статья посвящена исследованию различных представлений основного уравнения поличисловой теории поля:

$$\bigcirc_n F = 0, \quad (1)$$

и свойств его решений, где оператор \bigcirc_n в специальных (изотропных) координатах имеет вид:

$$\bigcirc_n = \frac{\partial^n}{\partial x^1 \dots \partial x^n} \quad (2)$$

и является своеобразным многомерным симбиозом операторов Лапласа и Даламбера высшего порядка.

В разделе 2 мы приводим необходимые сведения из алгебры и геометрии поличисел. В разделе 3 мы приводим явные выражения для решений уравнения (1) с сингулярной правой частью (в том числе для функции Грина оператора \bigcirc). Раздел 4 целиком посвящен исследованию 3-мерной сферической системы координат в H_3 в калибровочно-инвариантном виде и выводу явных выражений для метрики БМ и оператора \bigcirc_3 в этой системе коор-

динат. В разделе 5 мы концентрируем внимание на явном выражении радиальной части оператора \bigcirc_n для любого n . В разделе 6 изучается общий вид сферически-симметричного решения вне источников. Метод разделения переменных в уравнении $\bigcirc_3 f = 0$ и свойства гиперболических сферических гармоник исследуются в разделе 7. Задача о равномерно заряженном гиперболическом шаре рассматривается в разделе 8. Раздел 9 посвящен выводу основных формул в цилиндрической системе координат с неизотропной осью симметрии. Показано, что в H_3 не существует цилиндрически симметричных решений оператора \bigcirc_3 с разделяющимися переменными. Наконец, в приложении приведена подборка гиперболических аналогов евклидовых многогранников, кривых и поверхностей, определение которых опирается на функцию расстояния.

2 Алгебра и геометрия поличисел

2.1 Алгебра и операции

Напомним, что ассоциативно-коммутативная алгебра P_n над полем R (алгебра поличисел или n -чисел) обобщает на высшие измерения хорошо известную алгебру двойных чисел на плоскости [11]. Ее общий элемент имеет вид:

$$x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n, \quad (3)$$

где базис¹ $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ алгебры P_n удовлетворяет соотношениям:

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_i \quad (\text{нет суммирования!}). \quad (4)$$

Из соотношения (4) вытекают простые правила умножения и деления поличисел:

$$xy = \sum_{i=1}^n x^i y^i e_i, \quad \frac{x}{y} = \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{y^i} e_i, \quad (5)$$

при этом деление определено только на т. н. невырожденные элементы, у которых все $y^i \neq 0$. Роль алгебраической единицы играет элемент $I_n = \sum_{i=1}^n e_i$.

2.2 Степенные ряды

Правило (5) умножения поличисел в изотропном базисе позволяет определить любую целочисленную степень поличисла $x \in P_n$:

$$x^n = (x^1)^n e_1 + \dots + (x^n)^n e_n. \quad (6)$$

Формула (6) годится и для отрицательных значений n в случае, когда x невырождено. Эта формула позволяет легко определить формальные степенные поличисловые ряды вида:

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \equiv \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} c_{ks} (x^s)^k e_s, \quad (7)$$

где $P_n \ni c_k = \sum_{s=1}^n c_{ks} e_s$, $P_n \ni x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$. Равенство в (7), вытекающее из (6), означает, что степенной ряд поличисловой переменной в изотропном базисе распадается на сумму n независимых рядов вещественной переменной.

¹Этот базис (или, точнее, класс базисов) называется изотропным.

2.3 Сопряжения и псевдонорма

На алгебре P_n определена операция сопряжения $C: P_n \rightarrow P_n$, действующая по правилу:

$$C(x) = C\left(\sum_{i=1}^n x^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x^{i-1} e_i, \quad (8)$$

где $x^0 \equiv x^n$. Ее k -ая итерация действует по формуле:

$$C^k(x) = \sum_{i=1}^n x^{i-k} e_i, \quad (9)$$

где x^s с $-n \leq s \leq 0$ определяется формулой $x^s \equiv x^{n+s}$, т. е. сложение и вычитание индексов производится в арифметике по модулю n . Это правило по умолчанию будет всегда подразумеваться и далее. Для $k = n$ имеет место тождество $C^n = \text{id}$. Таким образом, фактически, на алгебре P_n определена $n - 1$ операция комплексного сопряжения, что обобщает ситуацию для комплексных и двойных чисел.

Определенные нами комплексные сопряжения позволяют чисто алгебраически определить (*псевдо*)норму $\|x\|$ всякого элемента $x \in P_n$:

$$\prod_{k=1}^n C^k(x) = \prod_{k=1}^n x^k \sum_{s=1}^n e_s \equiv \|x\|^n I_n, \quad (10)$$

где первое равенство автоматически следует из определения комплексного сопряжения и таблицы умножения в P_n , а второй знак равенства следует понимать как определение n -ой степени псевдонормы элемента x . Отметим, что псевдонорма $\|x\|$ может принимать положительные отрицательные, нулевые и мнимые значения. Абсолютной величиной элемента x , будем называть вещественное число, равное

$$|x| = \sqrt[n]{\|x\|^n}. \quad (11)$$

Очевидно, что для всякого собственно вырожденного элемента x имеют место равенства: $\|x\| = |x| = 0$, в то время как для невырожденных элементов $\|x\| \neq 0$.

2.4 Скалярное полипроизведение и метрика Бервальда-Моора

Концепция нормы, определение которой опирается на форму n -ого порядка, легко обобщается до концепции *полискалярного произведения* элементов (x_1, \dots, x_n) , опирающейся на n -линейную форму вида:

$$\sum_{\sigma(i_1, \dots, i_n)} \prod_{k=1}^n C^k(x_{i_k}) \equiv (x_1, \dots, x_n) I_n, \quad (12)$$

где суммирование выполняется по всем перестановкам $\sigma(i_1, \dots, i_n)$ различных индексов i_1, \dots, i_n . Из (12) легко получается следующая более явная формула:

$$(x_1, \dots, x_n) \equiv \text{perm} \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где perm — перманент квадратной матрицы, имеющий структуру определителя, все знаки в котором полагаются плюсами.

Скалярное полипроизведение (как и перманент) может быть записано в компонентах в следующем виде:

$$(x_1, \dots, x_n) \equiv \epsilon_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}, \quad (14)$$

где $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$ — симметричный символ Леви-Чивиты², совокупность компонент которого следует рассматривать как метрический тензор пространства P_n , отнесенный к базису $\{e_i\}$. Линейное пространство с полилинейной метрической формой (14) называется *пространством Бервальда-Моора* (обозначается H_n), а метрика в (14) называется *n -мерной метрикой Бервальда-Моора*, которую в настоящей статье мы будем обозначать ${}^{(n)}\epsilon$. Формулы (10) и (12) обнаруживают генетическую связь пространств P_n и H_n : алгебра поличисел индуцирует метрику Бервальда-Моора подобно тому, как алгебра комплексных чисел индуцирует евклидову метрику на плоскости [17]. Отметим, что пространство Бервальда-Моора H_n относится к типу n -корневых финслеровых пространств, изучаемых финслеровой геометрией [18].

2.5 Изометрии и конформные симметрии

Напомним некоторые дифференциально-геометрические аспекты пространства H_n . Метрика ${}^{(n)}\epsilon$ в этих координатах в соответствии с (13)-(14) принимает следующий вид:

$${}^{(n)}\epsilon = \hat{S}(dx^1 \otimes \dots \otimes dx^n), \quad (15)$$

где \hat{S} — оператор симметризации (без числового множителя). Непрерывные симметрии (конформные симметрии и изометрии) метрики Бервальда-Моора описываются алгеброй Ли векторных полей X , удовлетворяющих конформным уравнениям Киллинга:

$$L_X {}^{(n)}\epsilon = \lambda \cdot {}^{(n)}\epsilon, \quad (16)$$

где λ — некоторая скалярная функция координат. Можно показать [19], что общее решение уравнений (16) исчерпывается следующими классами векторных полей:

1. $T_{(i)} = \partial_i$, ($i = 1, \dots, n$) (трансляции);
2. $D_{(i)} = x^{i+1}\partial_{i+1} - x^i\partial_i$, ($i = 1, n-1$) — (унимодулярные дилатации, суммирования по i нет!);
3. $C_{(F_1, \dots, F_n)} = \sum_{i=1}^n F_i(x^i)\partial_i$, где F_i ($i = 1, \dots, n$) — произвольные гладкие функции одной переменной (конформные преобразования).

Первые два класса векторных полей индуцируют группу изометрии $\text{Iso}(H_n)$, которая является полупрямым произведением $T_n(H_n) \times D_{n-1}(H_n)$ двух абелевых подгрупп: абелевой подгруппы трансляций $T_n(H_n)$ и абелевой подгруппы унимодулярных дилатаций $D_{n-1}(H_n)$. В конечном виде в координатах преобразования изометрии метрики Бервальда-Моора имеют следующий общий вид:

$$\begin{aligned} T_n : x^i &\rightarrow x^i + c^i; \\ D_{n-1} : x^i &\rightarrow a^i x^i, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\prod_{i=1}^n a^i = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad c^i, a^i \in R.$$

²Он определяется аналогично стандартному антисимметричному символу Леви-Чивиты, для которого мы оставляем обозначение $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$, с заменой знаков минус на плюс.

Третий класс векторных полей индуцирует бесконечномерную неабелеву группу конформных преобразований $C(H_n)$, явный конечный вид которой в выбранном изотропном базисе определяется набором произвольных гладких функций $\{f^i\}_{i=1,\dots,n}$ одной переменной:

$$C(H_n) : x^i \rightarrow y^i = f^i(x^i) \quad i = 1, \dots, n. \quad (18)$$

При этом метрика ${}^{(n)}\epsilon$ преобразуется по закону:

$${}^{(n)}\epsilon = \prod_{k=1}^n \left(\frac{df^k}{dx^k} \right) {}^{(n)}\epsilon'. \quad (19)$$

Подчеркнем, что рассматриваемая нами группа $C(H_n)$ является весьма специальной подгруппой группы диффеоморфизмов, поэтому конформное преобразование вида (19) не приводит к появлению нетривиальной кривизны метрики Бервальда-Моора.

2.6 Некоторые метрические объекты в H_n

Как показано выше, группа изометрии $\text{Iso}(H_n)$ содержит полную подгруппу трансляций T_n . Это означает, что выбранная нами изотропная система координат допускает класс аффинно-эквивалентных ей систем координат (т.е. связанных с исходной невырожденным аффинным преобразованием), в котором компоненты метрики Бервальда-Моора остаются постоянными. Другими словами, мы можем работать в H_n с глобальными аффинными конструкциями (типа радиус-векторов, моментов различного порядка и т.д.), оставаясь в классе аффинно-эквивалентных систем координат (в котором, конечно, отнюдь не все представители будут являться изотропными системами). В силу возможности глобального отождествления касательного пространства $T_x H_n$ с самим H_n в любой точке x , по-линкалярное произведение тривиально переносится с дифференциально-геометрических (касательных) векторов в H_n на аффинные векторы.

Рассмотрим уравнение метрической единичной сферы S_{BM}^{n-1} в пространстве БМ:

$$|{}^{(n)}\epsilon(x, \dots, x)| = 1, \quad (20)$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$ понимается как аффинный вектор в пространстве H_n в изотропной системе координат с фиксированным началом. Определенная таким образом метрическая сфера имеет 2^n связных некомпактных компонент S_α^{n-1} :

$$S_{BM}^{n-1} = \bigsqcup_{\alpha=1}^{2^n} S_\alpha^{n-1}. \quad (21)$$

Эти компоненты можно классифицировать элементами вида $\{\tau_\alpha = (\pm 1, \dots, \pm 1)\}_{\alpha=1,\dots,2^n}$, каждый из которых принадлежит ровно одной из связных компонент сферы. В соответствии с этой классификацией, компоненты можно разделить на четные или нечетные, в зависимости от количества отрицательных компонент в классификаторе τ_α . Компоненту S_{BM}^{n-1} , соответствующую элементу $\tau_1 \equiv (1, \dots, 1)$, будем называть положительной³. По своим геометрическим свойствам сфера S_{BM}^{n-1} весьма близка к плоскому $n - 1$ -мерному пространству: в S_{BM}^{n-1} , например, через любую точку, не лежащую на данной экстремали длины (т.е. на гладкой кривой, доставляющей экстремум функционалу длины на S_{BM}^{n-1} , индуцированному вложением $S_{BM}^{n-1} \rightarrow H_n$) можно провести единственную экстремаль, не пересекающуюся с первой [20]. Отметим здесь еще одну важную аналогию сферы S_{BM}^{n-1}

³Также будем называть положительной часть P_n , содержащую все те элементы x , у которых $x^i > 0$ для всех $i = 1, \dots, n$.

с евклидовой сферой: точки, лежащие на четных компонентах сферы S_{BM}^{n-1} , рассматриваемые как элементы алгебры P_n , изображают подгруппу D_{n-1} (по умножению) группы изометрий $\text{Iso}(H_n)$.

Назовем *конусом* $\text{Con}(x_0)$ точки $x_0 \in H_n$ множество точек в H_n , удовлетворяющих уравнению:

$$|x - x_0| = 0. \quad (22)$$

Очевидно, конусы всех точек изоморфны и этот изоморфизм устанавливается символической формулой:

$$\text{Con}(x_1) = \text{Con}(x_0) + \overrightarrow{x_1 - x_0}.$$

Элементы $x \in \text{Con}(x_0)$, если их интерпретировать как элементы алгебры P_n , представляют собой в точности все те элементы, для которых $x - x_0$ не имеет обратного по умножению.

Непосредственной проверкой с помощью (5) легко убедиться в справедливости следующего представления любого невырожденного поличисла $x \in P_n$:

$$x = \sum_{s=1}^n x^s e_s = \Upsilon(x) |x| e^\chi, \quad (23)$$

где $\Upsilon(x) \equiv \Upsilon_{\alpha(x)}$ — классификатор той компоненты S_{BM}^{n-1} , которую пересекает луч λx , $R \ni \lambda > 0$,

$$\chi \equiv \sum_{s=1}^n \chi_x^s e_s \quad (24)$$

— полиугол x (т.е. угловая переменная, являющаяся по своей алгебраической природе поличислом того же типа, что и x),

$$\chi_x^s \equiv \ln \frac{\widehat{x}^s}{|\widehat{x}|} \quad (25)$$

т.н. *экспоненциальные углы элемента x* ,

$$\widehat{x} \equiv \frac{x}{\Upsilon_{\alpha(x)}} \quad (26)$$

приведенный (к положительной компоненте S_{BM}^{n-1}) элемент A , у которого все компоненты в изотропном базисе положительны. По самому своему определению экспоненциальные углы удовлетворяют тождеству:

$$\text{Tr}(\chi) \equiv \sum_{s=1}^n \chi^s = 0, \quad (27)$$

что, в свою очередь, обеспечивает тождество

$$|e^\chi| = 1, \quad (28)$$

аналогичное по смыслу условию единичности модуля комплексных чисел, лежащих на единичной окружности в комплексной плоскости. Можно показать, что величина

$$|\chi_x| = |\chi_x^1 \cdots \chi_x^n|^{1/n} \quad (29)$$

имеет смысл аналога евклидова угла⁴ между элементами(-векторами) x и $\mathfrak{T}(x)$. Она называется *взаимным углом* между ними. Взаимный угол между невырожденными элементами $x \in P_n$ и $y \in P_n$ при $\mathfrak{T}(x) = \mathfrak{T}(y)$ определяется по формуле:

$$\phi(x, y) \equiv |\chi_{y/x}|. \tag{30}$$

Переход от элементов P_n к их полиуглам по формуле (25) можно понимать как некоторое отображение: $\flat : P_n \rightarrow P_n$. Наглядно образ $\flat(P_n) \equiv \Omega P_n$ изображается в пространстве P_n в виде гиперплоскости, ортогональной (в евклидовом смысле) пространственной биссектрисе (понимаемой также в евклидовом смысле) положительной компоненты P_n , проходящей через нулевой элемент алгебры P_n . Отображение \flat , которое мы называем \flat -проекцией (бипроекцией), представляет собой нелинейное отображение линейных пространств и допускает последующие итерации:

$$P_n \xrightarrow{\flat} \Omega P_n \xrightarrow{\flat} \Omega^2 P_n \dots \xrightarrow{\flat} \Omega^k P_n \xrightarrow{\flat} \dots \tag{31}$$

Каждый шаг итерации проецирует прообраз и понижает размерность образа (как подмногообразия P_n) на единицу. Таким образом, размерность многообразия полиуглов $\Omega^k P_n$ равна $n - k$, и всего существует $n - 1$ независимых взаимных углов $\chi_x^{(k)}$. Эта последовательность независимых взаимных углов позволяет записать лестничное экспоненциальное представление поличисла [20]:

$$x = \left(\prod_{p=0}^{n-2} \chi_x^{(p)} \exp \circ \right) \chi_x^{n-1}. \tag{32}$$

2.7 Некоторые общие свойства функций поличисловой переменной

Всякую функцию поличисловой переменной как отображение $f : P_n \rightarrow P_n$ можно задавать в изотропном базисе совокупностью вещественных компонент:

$$x \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x^1, \dots, x^n) e_i. \tag{33}$$

При этом значительная часть свойств и связанных с ними определений функций многих вещественных переменных переносится на функции поличисловой переменной.

2.7.1 Аналитические функции поличисловой переменной

Возможность определения степенных рядов (раздел 2.2) позволяет определить класс аналитических функций поличисловой переменной $C^\omega(P_n)$ как совокупность отображений $P_n \rightarrow P_n$, представимых в виде сходящихся поличисловых степенных рядов вида (7) (с произвольным центром разложения). Это определение допускает обобщение на отрицательные степени (поличисловые ряды Лорана) вне конуса центра разложения в ряд. При этом аналитическое продолжение аналитической вещественной функции одной переменной всегда существует и единственно [16]. На самом деле, справедливо более общее утверждение: *имеет место биективное соответствие между наборами $\{f_s\}_{s=1, \dots, n}$ n вещественных аналитических функций от k вещественных переменных $R^k \rightarrow R$ и аналитическими функциями $P_n \rightarrow P_n$ от k поличисловых переменных вида:*

$$P_n^{l_1} \times P_n^{l_2} \times \dots \times P_n^{l_k} \rightarrow P_n$$

⁴Он обладает свойством аддитивности и может быть определен как длина экстремали на единичной сфере S_{BM}^{n-1} , соединяющий точку $\mathfrak{T}(x)$ и $e^{\chi(x)}$ на ней [16].

где

$$P_n \equiv C^{l_q}(P_n)$$

и все l_q для $q = 1, \dots, k$ попарно различны [16].

2.8 Голоморфные дифференциальные операторы

Мы не останавливаемся здесь на определении дифференцируемости функции поличисловой переменной (его можно найти в [16]). Интуитивно определение дифференцирования вдоль неизотропных направлений почти дословно повторяет классическое определение производной по направлению функции многих переменных, а дифференцирование вдоль изотропных направлений также, по сути, сводится к классическому, после некоторого доопределения операции деления и переходу в пространство БМ меньшего числа измерений.

Рассмотрим формальные дифференциальные операторы $\{\partial^k\}_{k=1, \dots, n}$, определяемые по формуле:

$$\partial \equiv C^k(\partial), \quad (34)$$

где $\partial \equiv \sum_{s=1}^n e_s \partial_s$. Введение этих операторов мотивируется следующими соображениями, аналогичными мотивирующим соображениям для введения операторов ∂_z и $\partial_{\bar{z}}$ в комплексном анализе [17]. Умножая равенства

$$x = x^{n-k+1} e_1 + x^{n-k+2} e_2 \dots + x^{2n-k} e_n, \quad (35)$$

которые можно понимать как формулы перехода от вещественных координат к поличисловым, последовательно на e_l ($l = 1, \dots, n$) получим серию равенств:

$$e_1 x^{n-k+1} = e_1 \frac{x^k}{x}; \quad e_2 x^{n-k+1} = e_2 \frac{x^{k+1}}{x}; \quad \dots \quad e_n x^{n-k+1} = e_n \frac{x^{k+n}}{x}, \quad (36)$$

откуда получаем обратные формулы перехода от поличисловых переменных к вещественным⁵:

$$x^l = \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-l}}{x} e_k, \quad (39)$$

где нумерация сопряжений как обычно производится по модулю n . Теперь, в соответствии с формулами (39) будем иметь по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial x} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^s} e_{k+s} \equiv \partial^k f \quad (40)$$

в соответствии с определением (34).

⁵Отметим для полноты картины, что формальная «якобиева матрица» задается компонентами:

$$\frac{\partial x^s}{\partial x^l} = \frac{\partial x^s}{\partial x} = e_{l+s}, \quad (37)$$

а якобианы — это невырожденные элементы из множества классификаторов $\Upsilon(P_n)$. Отметим также, что в силу (37) имеет место тождество:

$$\frac{\partial x^s}{\partial x} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial x^s}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x} = \sum_{m=1}^n e_{s+m} e_{l+m} = I_n \delta_l^s. \quad (38)$$

2.9 Голоморфные функции поличисловой переменной

Определим *голоморфные функции поличисловой переменной* как такие отображения приращение, которых можно представить в виде:

$$\Delta f = \alpha(x_0)\Delta x + \beta(x_0)o(\Delta x), \quad (41)$$

где α и β — некоторые непрерывные функции $P_n \rightarrow P_n$. Класс голоморфных функций является весьма узким подклассом дифференцируемых функций. С помощью формальных дифференциальных операторов $\{\partial\}^k$ условие голоморфности можно записать так:

$$\partial^k f = 0, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (42)$$

В компонентах условия (42) принимают вид *поличисловых условий Коши-Римана в изотропном базисе*:

$$\frac{\partial f^s}{\partial x^k} = 0 \quad \text{при} \quad s \neq k. \quad (43)$$

Таким образом, *голоморфные функции поличисловой переменной в изотропном базисе характеризуются произвольным набором $\{f^s\}_{s=1,\dots,n}$ n вещественно-дифференцируемых функций одной переменной*:

$$f(x) = f_1(x^1)e_1 + \dots + f^n(x^n)e_n. \quad (44)$$

Как и в комплексном случае, условию голоморфности можно придать вид условия независимости производной от направления. Действительно, расписывая условие дифференцируемости в общей форме при фиксированном (невырожденном) направлении приращения $\Delta x = \Upsilon(\Delta x)\varrho e^\chi$, ($\chi = \text{const}_{P_n}$) получим:

$$\Delta f = \sum_{m=1}^n \alpha_m(x_0) \Upsilon(\Delta x)^m \varrho e^{\chi} + \beta_m(x_0, \chi) o_m(\varrho), \quad (45)$$

получим для производной по невырожденному направлению χ в точке x_0 :

$$\frac{df}{d\chi}(x_0) \equiv \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Upsilon(\Delta x)\varrho e^\chi) - f(x_0)}{\Upsilon(\Delta x)\varrho e^\chi} = \sum_{m=1}^n \alpha_m(x_0) \Upsilon(\Delta x)^m / \Delta x e^{\chi - \chi}. \quad (46)$$

В общем случае значение производной df/dx дифференцируемой функции f при фиксированном направлении дифференцирования χ зависит от выбора этого направления. Если же функция f P_n -голоморфна, то зависимость от направления в (46) пропадает (аналогично комплексному случаю).

Мы приходим к выводу о том, что *голоморфные функции поличисловой переменной — это (с точностью до перестановки координат) как раз те функции, которые осуществляют конформные преобразования метрики Бервальда-Моора*. Инвариантность углов между невырожденными векторами X, Y касательного пространства $T_x H_n$ проверяется прямой выкладкой с учетом определения (30):

$$\phi(X, Y) = |\chi_{Y/X}| \xrightarrow{f} \phi(X', Y') = \phi(f'X, f'Y) = |\chi_{f'Y/f'X}| = |\chi_{X/Y}| = \phi(X, Y), \quad (47)$$

где $f' \equiv df/dx$ и учтено, что закон преобразования векторов при голоморфных преобразованиях координат задается простым алгебраическим правилом: $X' = f' \cdot X$.

Аналогично классическому комплексному анализу в точках, в которых модуль поличисловой производной f' голоморфной функции обращается в нуль:

$$|f'| = |\Delta_f|^{1/n} = 0, \quad (48)$$

где $\Delta_f = \prod_{s=1}^n \partial f^s / \partial x^s$ — (вещественный) якобиан преобразования координат, соответствующего голоморфной функции f , условие конформности преобразования может нарушаться. Например отображение $x \rightarrow x^2$ неконформно в точке $x = 0$ (рассуждение, приведенное в предыдущем пункте не пройдет ввиду того, что в определении экспоненциального угла входит норма векторов, которую мы на всех этапах рассуждения полагали отличной от нуля).

2.10 Обобщенно-голоморфные функции поличисловой переменной

Рассмотренное выше условие голоморфности в форме равенства нулю некоторого набора частных производных первого порядка (42) допускает многочисленные обобщения, которые могут быть полезными в приложениях. Обозначим посредством \mathcal{A}_k^n поличисловое линейное пространство гладких функций $f: P_n \rightarrow P_n$, удовлетворяющих уравнению:

$$\overset{k}{\partial} f = 0. \quad (49)$$

Другими словами, $\mathcal{A}_k^n = \ker \overset{k}{\partial}$. Нетрудно написать общий вид элемента $f \in \mathcal{A}_k^n$, переходя к вещественным координатам. Согласно (49)

$$\overset{k}{\partial} f = \sum_{s=1}^n \partial_{s-k} f_s e_s = 0, \quad (50)$$

откуда условие принадлежности f классу \mathcal{A}_k^n выражается формулами для компонент:

$$\frac{\partial f^s}{\partial x^{s-k}} = 0, \quad s = 1, \dots, n. \quad (51)$$

Теперь, с учетом соотношений (42), можно сказать, что определенный выше класс голоморфных функций описывается как пересечение ядерных подпространств вида:

$$\mathcal{G}_0^n \equiv \bigcap_{s=1}^{n-1} \mathcal{A}_s^n. \quad (52)$$

Аналогично, определим⁶ классы голоморфных функций \mathcal{G}_k^n $k = 1, \dots, n-1$ посредством соотношения:

$$\mathcal{G}_k^n \equiv \bigcap_{s \neq k} \mathcal{A}_s^n. \quad (53)$$

Будем называть множество функций из класса \mathcal{G}_k^n k -голоморфными. В координатном представлении общий k -голоморфный элемент описывается формулой:

$$f(x) = \sum_{s=1}^n f^s(x^{s-k}) e_s = C^k g(x), \quad (54)$$

⁶Здесь и далее предполагается, что все функции имеют непрерывные частные производные такого порядка, который необходим для корректности вводимых определений.

где $g(x) \in \mathcal{G}_0^n$.

Можно продолжить построенное обобщение и далее. Для этой цели рассмотрим обобщенное условие голоморфности в виде набора мономных дифференциальных уравнений вида:

$$\prod_{m=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial} \right)^{k_\alpha^m} f \equiv D^{k_\alpha} f = 0. \quad (55)$$

В выражении (55) k_α — элемент n -мерной целочисленной неотрицательной решетки Z_+^n , k_α^m — его целочисленные неотрицательные компоненты, $\alpha = 1, \dots, r$ — число условий типа (55). Для краткости мы ввели символическое обозначение D^{k_α} — «вектор в степени вектор», определение которого очевидно:

$$U^V = U_1^{V_1} U_2^{V_2} \dots U_n^{V_n}. \quad (56)$$

Ввиду того, что каждое условие вида (55) параметризуется целочисленным вектором, а композиция пары таких условий (которая является дифференциальным следствием исходных условий) характеризуется суммой целочисленных векторов, имеем взаимно-однозначное отображение дифференциальных операторов вида (55) в кольцо Z_+^n над Z_+ . Очевидно, задавая условие голоморфности набором элементов в Z_+^n , целесообразно ограничиваться линейно-независимыми⁷ в Z_+^n элементами кольца Z_+^n . Вводя обозначения:

$$\mathcal{A}_{k_\alpha}^n \equiv \ker D^{k_\alpha}, \quad (57)$$

получаем в качестве обобщенных классов голоморфных функций пересечения ядерных пространств вида:

$$\mathcal{G}_{(k_1, \dots, k_r)}^n \equiv \bigcap_{\alpha=1}^r \mathcal{A}_{k_\alpha}^n. \quad (58)$$

Рассмотренные выше классы $\mathcal{G}_k^n \equiv \mathcal{G}_{(E_1, \dots, \widehat{E}_k, \dots, E_n)}^n$, где $\{E_i\}_{i=1, \dots, n}$ — набор базисных векторов решетки Z_+^n (у E_i на i -ом месте стоит единица, на остальных местах — нули), а «шляпка», как обычно, означает принудительный пропуск соответствующего элемента.

Опишем более подробно структуру пространства $\mathcal{A}_{pE_k}^n$. Соответствующий ему аннулирующий оператор D^{pE_k} может быть представлен в виде:

$$D^{pE_k} \equiv \binom{k}{\partial}^p = \binom{k}{\partial}^{p-1} \circ \binom{k}{\partial}, \quad (59)$$

что вместе с определением (49) для \mathcal{A}_k^n дает следующее символическое равенство для общего элемента $f \in \mathcal{A}_{pE_k}^n$:

$$D^{(p-1)E_k} f = \mathcal{A}_k^n. \quad (60)$$

Снова используя представление

$$D^{(p-1)E_k} = \binom{k}{\partial}^{p-2} \circ \binom{k}{\partial}, \quad (61)$$

и выполняя символическое интегрирование (60), получим:

$$D^{(p-2)E_k} f = x \otimes \mathcal{A}_k^n + \mathcal{A}_k^n. \quad (62)$$

⁷Несмотря на конечномерность Z_+^n как подмножества в Z^n , Z_+^n бесконечномерно как кольцо над Z_+ . К примеру, бесконечная последовательность элементов $(0, 0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), (2, 0, \dots, 0), \dots$ линейно независима в Z_+^n .

Продолжая этот процесс далее, получим общий вид представителя класса голоморфности $\mathcal{G}_{pE_k}^n = \mathcal{A}_{pE_k}^n$:

$$\mathcal{A}_{pE_k}^n = \bigoplus_{q=0}^{p-1} x^q \otimes \mathcal{A}_k^n \quad (63)$$

или в явном виде:

$$\mathcal{A}_{pE_k}^n \ni f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + f_{p-1} x^{p-1}, \quad (64)$$

где все $f_i \in \mathcal{A}_k^n$. Формулы типа (63) будем называть *формулами приведения* $\mathcal{A}_{pE_k}^n$ к \mathcal{A}_k^n . Можно выписать аналогичную формулу приведения и общих ядерных пространств $\mathcal{A}_{k_\alpha}^n$ к пространствам \mathcal{A}_k^n :

$$\mathcal{A}_{k_\alpha}^n = \bigoplus_{s=1}^n \bigoplus_{q=0}^{k_\alpha^s-1} x^q \otimes \mathcal{A}_s^n, \quad (65)$$

справедливость которой вполне очевидна из предыдущего рассмотрения.

В заключение этого раздела опишем специальный класс $\mathcal{G}_{E_1+\dots+E_n}^n$ -голоморфных функций, определяемый инвариантным (полискалярным) дифференциальным оператором:

$$\bigcirc_n \equiv \|\partial\|^n I_n \equiv \prod_{s=1}^n \partial^s. \quad (66)$$

Оператор \bigcirc_n является поличисловой версией двумерного оператора Лапласа $\Delta_2 = 4\partial_z\partial_{\bar{z}}$ и многомерным обобщением 2-мерного волнового оператора $\square_2 = 4\partial_h\partial_{\bar{h}}$, где $h \in P_2$. По этой причине класс $\mathcal{G}_{E_1+\dots+E_n}^n$ будем для краткости называть *полигармоническими функциями* и обозначать $\text{Harm}(P_n)$. В соответствии с общей формулой приведения (65), мы получаем для этого класса следующее общее симметричное представление:

$$\text{Harm}(P_n) = \bigoplus_{k=1}^n \mathcal{A}_k^n \quad (67)$$

или в координатном виде:

$$\text{Harm}(P_n) \ni f = \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n f_k^s e_s, \quad (68)$$

где f_k^s — вещественные функции $R^{n-1} \rightarrow R$, удовлетворяющие условиям:

$$\frac{\partial f_k^s}{\partial x^k} = 0, \quad s, k = 1, \dots, n. \quad (69)$$

3 Функция Грина оператора \bigcirc_n и сингулярные уравнения

3.1 Некоторые вспомогательные конструкции

Определим несколько полезных в дальнейшем вспомогательных функций поличисловой переменной $P_n \rightarrow P_n$. Прежде всего, определим функцию

$$\text{abs}(x) \equiv \sum_{s=1}^n |x^s| e_s, \quad (70)$$

где $|x^s|$ — обычный модуль вещественного числа. Эта функция является поличисловой версией обычного модуля: она отображает все координатные n -мерные полукубы на первый (положительный) полукуб. Ее финслерова норма связана с модулем поличисла по формуле:

$$\|\text{abs}(x)\| = |x|. \quad (71)$$

Определим пару нормированных пикообразных функций:

$$\begin{aligned} \omega_a(x) &\equiv \begin{cases} C_a e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & \text{abs}(x) < \text{abs}(a) \\ 0, & \text{abs}(x) \geq \text{abs}(a) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \sum_{s=1}^n C_a^s e^{-\frac{(a^s)^2}{(a^s)^2-(x^s)^2}} e_s, & |x^s| < |a^s|, (s = 1, \dots, n) \\ 0, & |x^s| \geq |a^s|, (s = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned} \quad (72)$$

и

$$\sigma_a(x) \equiv \frac{a}{\pi} \frac{1}{x^2 + a^2} = \sum_{s=1}^n \frac{a_s}{\pi} \frac{1}{(x^s)^2 + (a^s)^2} e_s. \quad (73)$$

В (72) $C_a = C_a^1 e_1 + \dots + C_a^n e_n$ — поличисло с компонентами C_a^s , удовлетворяющими условию нормировки на единицу:

$$C_a^s \int_{-a_s}^{a_s} e^{-\frac{(a^s)^2}{(a^s)^2-\xi^2}} d\xi = 1. \quad (74)$$

Обе функции представляют собой поличисловую версию функций-«шапочек», широко используемых в теории обобщенных функций [21] и удовлетворяют поличисловому условию нормировки

$$\int_{\Gamma \in \mathcal{P}_n^+} \left\{ \begin{array}{c} \omega_a(x) \\ \sigma_a(x) \end{array} \right\} dx = \left\{ \begin{array}{c} I_n \\ I_n \end{array} \right\}, \quad (75)$$

где \mathcal{P}_n^+ — класс вещественно-подобных путей в P_n , который определяется требованиями:
 1) $\text{abs}(\dot{x}_\Gamma(t)) = \dot{x}_\Gamma(t)$ и $|\dot{x}(t)| \neq 0$ для всех t из интервала параметризации пути $\Gamma \in \mathcal{P}_n^+$;
 2) $\Gamma \sim \ell(I_n)$, где $\ell(I_n)$ — вещественная ось в P_n , \sim — отношение гомотопии. Поличисловой интеграл в (75) понимается покомпонентно:

$$\int_{\Gamma} f(x) dx \equiv \sum_{s=1}^n \int_{t_1}^{t_2} f_s(x_\Gamma^s(t)) \dot{x}_\Gamma^s(t) dt, \quad (76)$$

где $x_\Gamma(t)$ — параметризация пути интегрирования Γ .

Рассмотрим, наконец поличисловую версию ступенчатой функции Хевисайда:

$$\Theta(x) \equiv \sum_{s=1}^n \theta(x^s) e_s, \quad (77)$$

где в правой части определения стоят стандартные ступенчатые функции от вещественных аргументов. Финслерова норма этой функции определяет стандартную многомерную ступенчатую функцию:

$$\|\Theta(x)\|^n = \theta_n(x^1, \dots, x^n) = \prod_{s=1}^n \theta(x^s). \quad (78)$$

3.2 Дельта-функция над поличислами

Определим теперь поличисловую версию дельта-функции, рассматривая следующие пределы:

$$\Delta(x) \equiv \lim_{a \rightarrow 0} \omega_a(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \sigma_a(x). \quad (79)$$

Как и в вещественном случае, пределы в (79), интерпретируемые поточечно, не определяют никакой классической функции. С другой стороны, объекту $\Delta(x)$ можно придать смысл, если рассматривать вместо (79) слабые пределы:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\Gamma \in \mathcal{P}_n^+} f(x) \omega_a(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{\Gamma \in \mathcal{P}_n^+} f(x) \sigma_a(x) dx = f(0), \quad (80)$$

где f — некоторая голоморфная поличисловая функция. Соотношения (80) позволяют вполне строго определить $\Delta(x)$ как линейный поличисловой функционал по формуле:

$$\langle \Delta(x), f(x) \rangle_{\Gamma} \equiv \int_{\Gamma \in \mathcal{P}_n^+} \Delta(x) f(x) dx = f(0). \quad (81)$$

Переходя к компонентам, из (81) очевидно имеем следующее представление:

$$\Delta(x) = \sum_{s=1}^n \delta(x^s) e_s, \quad (82)$$

где в правой части стоят обычные дельта-функции вещественной переменной.

В связи с определением $\Delta(x)$ необходимо сделать несколько замечаний.

1. Функционал $\Delta(x)$ в отличие от стандартной многомерной дельта-функции $\delta_n(x^1, \dots, x^n)$ имеет сингулярность, сосредоточенную не в точке, а на конусе $\text{Con}(x)$. Многомерная дельта-функция возникает в излагаемом подходе естественным образом как n -ая степень нормы:

$$\delta_n(x^1, \dots, x^n) \equiv \prod_{s=1}^n \delta(x^s) = \|\Delta(x)\|^n. \quad (83)$$

2. Формулы (81) или (82) однозначно определяют линейный функционал лишь в том случае, когда жестко фиксирован класс путей интегрирования (мы фиксировали класс положительно ориентированных вещественно-подобных путей). В формуле (81) зависимость значения функционала $\Delta(x)$ от пути интегрирования указана явно. Здесь проявляется многомерная специфика \mathcal{P}_n . В случае пути общего положения (или даже многосвязного пути) формулу (81) следует обобщить следующим образом:

$$\langle \Delta, f \rangle_{\Gamma} = N_{\Gamma} f(0), \quad (84)$$

где поличисло N учитывает количество пересечений пути плоскостей конуса, на котором сосредоточена сингулярность $\Delta(x)$. Это число определяется формулой:

$$N_{\Gamma} = \sum_{s=1}^n \sum_m \text{sign}(\dot{x}_{\Gamma}^s(t_m))|_{t_m=(x^s)^{-1}(0)} e_s. \quad (85)$$

3. Выбор конкретного класса основных функций поличисловой переменной, над которыми определяется пространство обобщенных функций как пространство линейных функционалов, зависит от решаемых задач. Общее требование заключается в существовании

интегралов вида (81). Этого можно добиться, например вводя поличисловой аналог пространства гладких функций с финитным носителем (определение которого покомпонентно сводится к классическому определению), или ограничивая интегрирование гладких или голоморфных функций на «поличисловой многомерный ящик», с размером $L = \sum_{s=1}^n L^s e_s$. Там где это возможно, мы не конкретизируем конкретные свойства класса основных функций, предполагая лишь существование интегралов и законность производимых операций.

4. Нетрудно определить набор голоморфных дельта-функций $\{\Delta(x)^k\}$ посредством формулы:

$$\Delta(x)^k \equiv C^k(\Delta(x)), \tag{86}$$

а также поличисловую дельта-функцию, особенность которой сосредоточена на некотором подмногообразии \mathcal{M}_q в P_n :

$$\Delta_{\mathcal{M}_q} \equiv \Delta(x - x_{\mathcal{M}}), \tag{87}$$

где $x_{\mathcal{M}} : R^q \rightarrow P_n$ — параметризация \mathcal{M}_q .

3.3 Функция Грина оператора \bigcirc_n и сингулярные уравнения

Рассмотрим неоднородное уравнение вида:

$$\bigcirc_n \mathcal{G}(x, x_0) = \Delta(x - x_0), \tag{88}$$

в правой части которого стоит поличисловой аналог точечного источника с вершиной в точке x_0 . Поличисловое уравнение (88) распадается на совокупность n скалярных уравнений в компонентах:

$$\frac{\partial^n \mathcal{G}^s}{\partial x^1 \dots \partial x^n} = \delta(x^s - x_0^s). \tag{89}$$

С учетом известного в классической теории обобщенных функций соотношения [21]:

$$\frac{d\theta(\xi)}{d\xi} = \delta(\xi), \quad \xi \in R, \tag{90}$$

мы получаем с помощью непосредственного последовательного интегрирования:

$$\mathcal{G}^s = \theta(x^s - x_0^s) x^1 \dots \hat{x}^s \dots x^n + f_0^s, \tag{91}$$

где шляпка, как обычно, означает пропуск соответствующего члена последовательности, а f_0^s — s -ая компонента произвольной полигармонической функции $f_0 \in \text{Harm}(P_n)$. Решение (91) можно записать и в поличисловой симметричной форме:

$$\mathcal{G}(x - x_0) = (\Theta(x - x_0) \cdot \partial) \|x - x_0\|^n I_n + f_0, \tag{92}$$

где $f_0 \in \text{Harm}(P_n)$. Выражение (92) представляет общий вид функции Грина для поличислового гармонического оператора. Если в правой части (88) будет стоять распределенный поличисловой источник $J(x)$, то общее решение уравнения

$$\bigcirc_n \Phi = J \tag{93}$$

будет выражаться по общим формулам теории функций Грина через следующую (в отличие от теории поля в R^n , по существу одномерную) свертку:

$$\Phi(x) = \int_{\Gamma \subset \mathcal{P}_n^+} \mathcal{G}(x - x') J(x') dx' + f_0, \tag{94}$$

где функция $f_0 \in \text{Harm}(P_n)$ определяется граничными условиями.

Рассмотрим также еще пару сингулярных уравнений, которые могут встретиться в приложениях поличисловой теории поля. Одно из них описывает сингулярный источник, сосредоточенный на конусе метрики БМ, и учитывает эффект его убывания с расстоянием, совместимый с группой симметрии метрики БМ. Это уравнение имеет следующий вид:

$$\bigcirc_n G_n = \delta(\|x - x_0\|^n). \quad (95)$$

Здесь правая часть — скаляр, а G_n — скалярная функция Грина уравнения (95). С помощью правил обращения с дельта-функцией от функции, правую часть в (95) можно преобразовать к виду:

$$\delta(\|x - x_0\|^n) = \frac{1}{\|x - x_0\|^n} \sum_{s=1}^n (x^s - x_0^s) \delta(x^s - x_0^s). \quad (96)$$

Непосредственным последовательным интегрированием (95) с учетом (96) получаем:

$$G_n = \prod_{s=1}^n \ln(x^s - x_0^s) \sum_{k=1}^n \frac{\theta(x^k - x_0^k)}{\ln(x^k - x_0^k)} \quad (97)$$

с точностью до решения однородного уравнения.

Еще одну скалярную функцию Грина определяет скалярное уравнение следующего вида:

$$\bigcirc_n \mathcal{R}_n = \|\Delta(x - x_0)\|^n = \prod_{s=1}^n \delta(x^s - x_0^s). \quad (98)$$

Его непосредственное последовательное интегрирование приводит к следующему фундаментальному решению:

$$\mathcal{R}_n = \|\Theta(x - x_0)\| = \prod_{s=1}^k \theta(x^s - x_0^s). \quad (99)$$

4 Метрика БМ и оператор \bigcirc_3 в сферической и цилиндрической (изотропной) системах координат

В этом разделе мы рассмотрим общий вид метрики БМ и скалярного оператора \bigcirc_3 в финслеровой сферической и цилиндрической системах координат. В первом случае мы проведем рассмотрение для произвольного выбора угловых координат на индикатриссе, а так же для некоторых конкретных угловых калибровок.

Начнем с более простой финслеровой цилиндрической системы координат, которая связана с исходной изотропной системой посредством соотношений⁸:

$$x^1 = \rho e^\psi; \quad X^2 = \rho e^{-\psi}; \quad X^3 = z. \quad (100)$$

Для базисных 1-форм получаем:

$$dx^1 = d\rho e^\psi + \rho e^\psi d\psi; \quad dx^2 = d\rho e^{-\psi} - \rho e^{-\psi} d\psi; \quad dx^3 = dz, \quad (101)$$

⁸Поясним происхождение этих формул с алгеброй поличисел. Согласно общему выражению для метрического бингла (29) для $n = 2$ имеем: $\psi = [-\ln(x^1/\rho) \ln(x^2/\rho)]^{1/2} = \ln[x^1/\rho]$, где было учтено соотношение $\rho = \sqrt{x^1 x^2}$, справедливое в первом и третьем клиньях плоскости двойной переменной. Отсюда сразу получаются формулы (100).

а для интервала Бервальда-Моора после тензорного перемножения 1-форм в (101), сразу получаем:

$$ds_{BM}^3 = (d\rho^2 - \rho^2 d\psi^2)dz. \quad (102)$$

Записывая дуальные соотношения для операторов дифференцирования:

$$\begin{aligned} \partial_\rho &= e^\psi \partial_1 + e^{-\psi} \partial_2; \\ \partial_\psi &= r e^\psi \partial_1 - r e^{-\psi} \partial_2; \\ \partial_z &= \partial_3 \end{aligned} \quad (103)$$

и выражая изотропные операторы ∂_i :

$$\begin{aligned} \partial_1 &= \frac{e^{-\psi}}{2} \left(\partial_r + \frac{1}{r} \partial_\psi \right); \\ \partial_2 &= \frac{e^\psi}{2} \left(\partial_r - \frac{1}{r} \partial_\psi \right); \\ \partial_3 &= \partial_z, \end{aligned} \quad (104)$$

получаем после некоторых преобразований для инвариантного оператора \bigcirc_3 следующее представление в цилиндрической системе координат:

$$\bigcirc_3 = \frac{1}{4} (\bigcirc_{2\rho} - \rho^{-2} \partial_\psi^2) \partial_z, \quad (105)$$

где $\bigcirc_{2\rho} = \rho^{-1} \partial_\rho \rho \partial_\rho$ — радиальная часть 2-мерного оператора⁹ \bigcirc_2 .

Перейдем к выражениям в общей финслеровой сферической системе координат, связь которых с плоскими изотропными координатами задается посредством следующих общих формул:

$$\begin{aligned} x^1 &= r e^{F_1}; \\ x^2 &= r e^{F_2}; \\ x^3 &= r e^{-F_1 - F_2}, \end{aligned} \quad (106)$$

где функции $F_i = F_i(\xi^1, \xi^2)$ (пока произвольные гладкие независимые функции двух вещественных переменных) задают параметризацию индикатриссы в пространстве H_3 , $r^3 = x^1 x^2 x^3 = \|x\|^3$. Из (106) получаем для базисных 1-форм следующие соотношения:

$$\begin{aligned} dx^1 &= e^{F_1} (dr + r(F_{1,1} d\xi^1 + F_{1,2} d\xi^2)); \\ dx^2 &= e^{F_2} (dr + r(F_{2,1} d\xi^1 + F_{2,2} d\xi^2)); \\ dx^3 &= e^{-F_1 - F_2} (dr - r((F_{1,1} + F_{2,1}) d\xi^1 + (F_{1,2} + F_{2,2}) d\xi^2)), \end{aligned} \quad (107)$$

где запятая с номером i означает частное дифференцирование по переменной ξ^i ($i = 1, 2$). Якобиан преобразования (106) легко вычисляется через коэффициенты матрицы Якоби в (107):

$$\mathfrak{J}(r, \xi^1, \xi^2) \equiv \frac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(r, \xi^1, \xi^2)} = 3r^2 \frac{D(F_1, F_2)}{D(\xi^1, \xi^2)}. \quad (108)$$

⁹Который, с точностью до числового множителя, совпадает со стандартным волновым оператором в двумерном пространстве-времени Минковского.

Подставляя (107) в выражение

$${}^3\mathfrak{h} = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3),$$

и выделяя коэффициенты при различных тензорных степенях криволинейных базисных 1-форм $\{dr, d\xi^1, d\xi^2\}$, мы приходим к следующим выражениям для компонент метрики БМ в общей сферической системе координат:

$$\begin{aligned} {}^3\mathfrak{h}_{rrr} &= 1; \\ {}^3\mathfrak{h}_{111} &= -r^3 F_{1,1} F_{2,1} (F_{1,1} + F_{2,1}); \\ {}^3\mathfrak{h}_{222} &= -r^3 F_{1,2} F_{2,2} (F_{1,2} + F_{2,2}); \end{aligned} \quad (109)$$

$$\begin{aligned} {}^3\mathfrak{h}_{rr1} &= 0; \quad {}^3\mathfrak{h}_{rr2} = 0; \\ {}^3\mathfrak{h}_{r11} &= -\frac{r^2}{3} (F_{1,1} F_{2,1} + F_{1,1}^2 + F_{2,1}^2); \\ {}^3\mathfrak{h}_{r22} &= -\frac{r^2}{3} (F_{1,2} F_{2,2} + F_{1,2}^2 + F_{2,2}^2); \end{aligned} \quad (110)$$

$${}^3\mathfrak{h}_{r12} = -\frac{r^2}{6} (2F_{1,1} F_{1,2} + 2F_{2,1} F_{2,2} + F_{1,1} F_{2,2} + F_{1,2} F_{2,1}); \quad (111)$$

$${}^3\mathfrak{h}_{112} = -\frac{r^3}{3} (2F_{1,1} F_{2,1} F_{2,2} + F_{1,2} F_{2,1}^2 + 2F_{1,1} F_{2,1} F_{1,2} + F_{1,1}^2 F_{2,2}); \quad (112)$$

$${}^3\mathfrak{h}_{122} = -\frac{r^3}{3} (2F_{1,2} F_{2,2} F_{2,1} + F_{1,1} F_{2,2}^2 + 2F_{1,2} F_{2,2} F_{1,2} + F_{1,2}^2 F_{2,1}). \quad (113)$$

Приведем явный вид метрики БМ в трех калибровках:

экспоненциальная калибровка $F_1 = \xi^1$, $F_2 = \xi^2$:

$$ds^3 = dr^3 - r^2(3du^2 + dv^2) dr - 2r^3(du^2 - dv^2) du, \quad (114)$$

где $u = (\xi^1 + \xi^2)/2$, $v = (\xi^1 - \xi^2)/2$;

тригонометрическая калибровка $F_1 = 2\xi^1 \sin \xi^2/\sqrt{3}$, $F_2 = \xi^1(\cos \xi^2 - \sin \xi^2/\sqrt{3})$:

$$\begin{aligned} ds^3 &= dr^3 - r^2 dr(du^2 + u^2 dv^2) + \frac{2\sqrt{3}}{9} r^3 (\sin v(4 \cos^2 v - 1)(3u^2 dv^2 - du^2) du + \\ &+ \cos v(4 \cos^2 v - 3)(u^2 dv^2 - 3du^2) u dv), \end{aligned} \quad (115)$$

где для простоты чтения формулы мы положили $\xi^1 = u$, $\xi^2 = v$.

лестничная калибровка $F_1 = \xi^1 e^{\xi^2}$, $F_2 = \xi^1 e^{-\xi^2}$:

$$ds^3 = dr^3 - r^2 dr(4dw^2 + ds^2) + 2r^3 ds^2 dw, \quad (116)$$

где $w = \xi^1 \operatorname{ch} \xi^2$, $ds^2 = (\xi^1)^2 (d\xi^2)^2 - (d\xi^1)^2 - 2$ -мерная метрика БМ (2-мерная метрика Минковского в гиперболических полярных координатах).

Перейдем теперь к вычислению инвариантного оператора \bigcirc_3 в общей сферической системе координат (106). Запишем формулы, дуальные к (107), вытекающие непосредственно из (106):

$$\begin{aligned}\partial_r &= e^{F_1}\partial_1 + e^{F_2}\partial_2 + e^{-F_1-F_2}\partial_3; \\ \partial_u &= r(F_{1,1}e^{F_1}\partial_1 + F_{2,1}e^{F_2}\partial_2) - (F_{1,1} + F_{2,1})e^{-F_1-F_2}\partial_3; \\ \partial_v &= r(F_{1,2}e^{F_1}\partial_1 + F_{2,2}e^{F_2}\partial_2) - (F_{1,2} + F_{2,2})e^{-F_1-F_2}\partial_3,\end{aligned}\tag{117}$$

где $u = \xi^1$, $v = \xi^2$, $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$ ($i = 1, 2, 3$). Рассматривая (117) как систему линейных уравнений относительно дифференциальных операторов ∂_i и разрешая ее, находим:

$$\partial_1 = \frac{r^2 e^{-F_1}}{\mathfrak{J}} \left(\partial_r + \frac{F_{1,2} + 2F_{2,2}}{r} \partial_u - \frac{2F_{2,1} + F_{1,1}}{r} \partial_v \right); \tag{118}$$

$$\partial_2 = \frac{r^2 e^{-F_2}}{\mathfrak{J}} \left(\partial_r - \frac{F_{2,2} + 2F_{1,2}}{r} \partial_u + \frac{2F_{1,1} + F_{2,1}}{r} \partial_v \right); \tag{119}$$

$$\partial_3 = \frac{r^2 e^{F_1+F_2}}{\mathfrak{J}} \left(\partial_r + \frac{F_{1,2} - F_{2,2}}{r} \partial_u + \frac{F_{2,1} - F_{1,1}}{r} \partial_v \right); \tag{120}$$

Перемножая дифференциальные операторы (118)-(120) и выполняя все необходимые дифференцирования, получаем выражение для \bigcirc_3 в общих сферических координатах в виде суммы кубической \mathcal{Q}^3 , квадратичной \mathcal{Q}^2 и линейной \mathcal{Q} форм относительно операторов $\{\partial_r, \partial_u, \partial_v\}$:

$$\bigcirc_3 = \mathcal{Q}^3(\partial_r, \partial_u, \partial_v) + \mathcal{Q}^2(\partial_r, \partial_u, \partial_v) + \mathcal{Q}(\partial_r, \partial_u, \partial_v), \tag{121}$$

где отличные от нуля коэффициенты этих форм имеют следующий вид:

$$\mathcal{Q}_{rrr}^3 = \frac{1}{27}; \quad \mathcal{Q}_{rr}^2 = \frac{1}{9r}; \quad \mathcal{Q}_r^1 = \frac{1}{27r^2} \tag{122}$$

$$\mathcal{Q}_{ruu}^3 = -\frac{r^2(F_{1,2}^2 + F_{1,2}F_{2,2} + F_{2,2}^2)}{3\mathfrak{J}^2}; \quad \mathcal{Q}_{rvv}^3 = -\frac{r^2(F_{1,1}^2 + F_{1,1}F_{2,1} + F_{2,1}^2)}{3\mathfrak{J}^2}; \tag{123}$$

$$\mathcal{Q}_{ruv}^3 = \frac{r^2(F_{1,1}F_{2,2} + 2F_{2,2}F_{2,1} + 2F_{1,2}F_{1,1} + F_{1,2}F_{2,1})}{6\mathfrak{J}^2}; \tag{124}$$

$$\mathcal{Q}_{uuu}^3 = \frac{r^3(F_{1,2}^2F_{2,1} - 2F_{1,2}F_{2,1}F_{2,2} - 2F_{2,1}F_{2,2}^2 + 2F_{1,1}F_{1,2}^2 + 2F_{1,1}F_{1,2}F_{2,2} - F_{1,1}F_{2,2}^2)}{\mathfrak{J}^3}; \tag{125}$$

$$\mathcal{Q}_{vvv}^3 = \frac{r^3(F_{2,1}^2F_{1,2} - 2F_{1,1}F_{2,1}F_{1,2} - 2F_{1,2}F_{1,1}^2 + 2F_{2,2}F_{2,1}^2 + 2F_{1,1}F_{2,1}F_{2,2} - F_{1,1}^2F_{2,2})}{\mathfrak{J}^3}; \tag{126}$$

$$\begin{aligned}
Q_{uuu}^3 = \frac{9r^7}{\mathcal{J}^5} & (3F_{2,2}^2 F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 + 6F_{1,2}^3 F_{2,2}^2 F_{1,1} F_{2,1} - 2F_{1,2}^3 F_{2,2}^2 F_{1,1}^2 - 4F_{2,2}^4 F_{1,1} F_{1,2} F_{2,1} + \\
& + 2F_{2,2}^5 F_{1,1}^2 - 2F_{1,2}^5 F_{2,1}^2 + 4F_{1,2}^4 F_{2,1} F_{2,2} F_{1,1} - 6F_{2,2}^3 F_{1,1} F_{1,2}^2 F_{2,1} + 2F_{2,2}^3 F_{1,2}^2 F_{2,1}^2 + \\
& + 3F_{1,2} F_{2,2}^4 F_{1,1}^2 - 3F_{1,2}^2 F_{2,2}^3 F_{1,1}^2 - 3F_{2,2} F_{1,2}^4 F_{2,1}^2); \tag{127}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{vvv}^3 = \frac{9r^7}{\mathcal{J}^5} & (-2F_{2,1}^5 F_{1,2}^2 + 2F_{1,1}^5 F_{2,2}^2 + 2F_{1,1}^3 F_{2,2}^2 F_{1,1}^2 + 3F_{1,1}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1}^3 - 3F_{2,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1}^3 + \\
& + 6F_{1,1}^2 F_{2,1}^3 F_{1,2} F_{2,2} + 3F_{2,1} F_{1,1}^4 F_{2,2}^2 - 4F_{1,1}^4 F_{2,2} F_{1,2} F_{2,1} + 4F_{2,1}^4 F_{1,2} F_{2,2} F_{1,1} - \\
& - 6F_{1,1}^3 F_{2,2} F_{1,2} F_{2,1}^2 - 2F_{2,1}^3 F_{2,2}^2 F_{1,1}^2 - 3F_{1,1} F_{2,1}^4 F_{1,2}^2); \tag{128}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{uu}^2 = \frac{9r^7}{\mathcal{J}^5} & (-3F_{2,2,2} F_{1,2}^3 F_{2,1}^3 - 6F_{2,1,2} F_{1,2}^4 F_{2,1}^2 - 6F_{2,2}^5 F_{1,1} F_{1,1,1} + 3F_{1,2,2} F_{2,2}^3 F_{1,1}^3 + \\
& + 6F_{1,2}^5 F_{2,1} F_{2,1,1} + 6F_{1,1,2} F_{2,2}^4 F_{1,1}^2 - 12F_{1,2} F_{1,1,2} F_{2,2}^3 F_{1,1}^2 - 9F_{2,2}^2 F_{1,2}^3 F_{2,1} F_{1,1,1} - \\
& - 9F_{1,2}^3 F_{2,2}^2 F_{1,1} F_{2,1,1} + 9F_{2,2}^3 F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{1,1,1} + 12F_{2,2}^4 F_{1,1,2} F_{2,1} F_{1,1} - \\
& - 9F_{2,2}^2 F_{1,2}^3 F_{2,1} F_{2,1,1} + 6F_{2,2,2} F_{1,2} F_{2,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1} - 6F_{1,2}^4 F_{2,1} F_{2,2} F_{1,1,1} + \\
& + 6F_{1,2} F_{1,2,2} F_{2,2}^2 F_{1,1}^3 - 6F_{1,2}^2 F_{2,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2} - 6F_{2,2} F_{1,1} F_{1,2}^3 F_{2,1,2} F_{2,1} + \\
& + 12F_{2,2} F_{2,1,2} F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 - 12F_{2,2}^3 F_{1,1,2} F_{2,1}^2 F_{1,2} + 6F_{2,2}^4 F_{1,1} F_{1,2} F_{2,1,1} - \\
& - 6F_{2,2} F_{2,2,2} F_{1,2}^2 F_{2,1}^3 - 9F_{1,2} F_{2,2}^4 F_{1,1} F_{1,1,1} + 3F_{1,2} F_{1,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,2,2} F_{2,1} - \\
& - 3F_{1,1}^2 F_{2,2,2} F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,2} - 6F_{2,2}^2 F_{1,1} F_{2,1,2} F_{1,2}^2 F_{2,1} - 3F_{2,2,2} F_{1,2}^2 F_{2,1}^2 F_{2,2} F_{1,1} + \\
& + 6F_{1,1} F_{2,2,2} F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 - 3F_{1,2} F_{2,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2}^2 + 6F_{2,2}^2 F_{1,2,2} F_{2,1}^3 F_{1,2} + \\
& + 6F_{1,2} F_{2,2}^3 F_{1,1,2} F_{2,1} F_{1,1} - 12F_{2,2}^2 F_{1,1,2} F_{2,1}^2 F_{1,2}^2 + 12F_{1,1}^2 F_{1,2}^3 F_{2,1,2} F_{2,2} + \\
& + 12F_{1,2}^3 F_{2,2} F_{1,1} F_{1,1,2} F_{2,1} + 3F_{2,2} F_{1,2,2} F_{2,1}^3 F_{1,2}^2 - 6F_{2,2}^3 F_{1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1} + \\
& + 6F_{2,2} F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 F_{1,1,2} - 6F_{1,2}^4 F_{2,2} F_{1,1} F_{2,1,1} - 6F_{2,2}^3 F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,1,1} - \\
& - 6F_{1,2,2} F_{2,2} F_{1,1}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1} + 6F_{1,2}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1} F_{1,1,2} F_{2,1} + 9F_{1,2}^2 F_{2,2}^3 F_{1,1} F_{1,1,1} + \\
& + 9F_{2,2}^3 F_{1,1} F_{1,2}^2 F_{2,1,1} + 3F_{1,2} F_{2,2}^2 F_{1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1} + 9F_{2,2} F_{1,2}^4 F_{2,1} F_{2,1,1} - \\
& - 12F_{1,1} F_{1,2}^4 F_{2,1,2} F_{2,1} - 6F_{1,2} F_{2,2}^3 F_{1,1}^2 F_{2,1,2} - 12F_{1,2}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1}^2 F_{1,1,2} + \\
& + 6F_{1,2}^3 F_{2,2,2} F_{1,1}^2 F_{2,1} + 12F_{1,2}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1}^2 F_{2,1,2} + 6F_{2,2}^4 F_{1,2} F_{2,1} F_{1,1,1} - \\
& - 6F_{1,1} F_{2,2} F_{1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,2}^2 + 6F_{1,1}^2 F_{2,2,2} F_{1,2} F_{2,1} F_{2,2}^2 + 6F_{1,2}^3 F_{2,2}^2 F_{1,1} F_{1,1,1} + \\
& + 12F_{2,2}^2 F_{2,1,2} F_{1,2}^2 F_{2,1}^2 - 6F_{1,1}^2 F_{2,2}^3 F_{1,2,2} F_{2,1} - 12F_{2,2}^3 F_{1,1} F_{2,1,2} F_{1,2} F_{2,1}); \tag{129}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{vv}^2 = & -\frac{9r^7}{\mathfrak{J}^5}(-12F_{1,2}F_{1,1}^4F_{2,1,2}F_{2,2} + 12F_{2,1}^2F_{2,1,2}F_{1,1}^2F_{1,2}^2 + 9F_{1,1}^2F_{1,2}F_{2,1}^3F_{1,2,2}- \\
 & - 6F_{2,1}^3F_{2,2}^2F_{1,1,1}F_{1,2} + 12F_{2,1}^2F_{2,1,2}F_{1,1}^2F_{2,2}^2 + 6F_{1,1}^3F_{1,2}F_{2,1}^2F_{1,2,2}+ \\
 & + 6F_{1,2}F_{2,1,1}F_{2,2}^2F_{1,1}^3 - 12F_{2,1}^3F_{1,1,2}F_{2,2}^2F_{1,1} - 3F_{1,1}F_{1,2}^3F_{2,1}^2F_{2,1,1}- \\
 & - 9F_{1,1}F_{2,1}^4F_{1,2}F_{1,2,2} + 9F_{1,1}^2F_{1,2}F_{2,1}^3F_{2,2,2} - 6F_{1,2}F_{1,1}^4F_{2,1}F_{2,2,2}- \\
 & - 12F_{1,1}^2F_{2,1}^2F_{1,1,2}F_{1,2}^2 - 6F_{1,1}^2F_{1,2}^3F_{2,1,1}F_{2,1} - 12F_{1,1}F_{2,1}^3F_{1,1,2}F_{1,2}^2+ \\
 & + 6F_{2,1}^2F_{2,2}^3F_{1,1,1}F_{1,1} - 6F_{1,1}^4F_{2,2}F_{1,2,2}F_{2,1} - 6F_{2,1}^3F_{2,1,2}F_{1,1}F_{1,2}^2+ \\
 & + 12F_{2,1}^4F_{2,2}F_{1,1,2}F_{1,2} + 6F_{1,1}^3F_{1,1,2}F_{2,1}F_{2,2}^2 - 9F_{1,1}^3F_{1,2}F_{2,1}^2F_{2,2,2}+ \\
 & + 3F_{2,2}F_{1,1}F_{1,2}^2F_{2,1}^2F_{1,1,1} - 3F_{1,1}^2F_{2,2}F_{1,2}^2F_{2,1,1}F_{2,1} - 3F_{1,2}F_{2,1}F_{2,2}^2F_{1,1}^2F_{2,1,1}- \\
 & - 6F_{2,1}^3F_{2,2}F_{1,1,1}F_{1,2}^2 + 12F_{1,1}^3F_{2,1,2}F_{1,2}^2F_{2,1} + 6F_{1,1}^3F_{1,2}^2F_{2,1,1}F_{2,2}- \\
 & - 6F_{1,1}^3F_{1,2}^2F_{2,1,1}F_{2,2} - 12F_{1,1}^2F_{2,1}^2F_{1,1,2}F_{2,2}^2 - 9F_{2,1}^2F_{2,2}F_{1,1}^3F_{2,2,2}+ \\
 & + 6F_{2,1}^4F_{1,2}F_{2,2,2}F_{1,1} - 3F_{2,1,1}F_{2,2}^3F_{1,1}^3 - 6F_{1,1}^4F_{2,1,2}F_{2,2}^2 + 3F_{1,1,1}F_{2,1}^3F_{1,2}^3+ \\
 & + 6F_{1,1}F_{1,2}^3F_{2,1}^2F_{1,1,1} + 3F_{2,1}F_{2,2}^3F_{1,1}^2F_{1,1,1} + 6F_{2,1}^2F_{1,2}F_{2,1,1}F_{2,2}^2F_{1,1}- \\
 & - 6F_{2,1}^2F_{1,2}F_{2,1,2}F_{1,1}^2F_{2,2} - 12F_{2,1}^3F_{2,2}F_{2,1,2}F_{1,1}F_{1,2} + 6F_{1,1}^2F_{1,2}F_{2,1}^2F_{1,1,2}F_{2,2}- \\
 & - 9F_{1,1}^3F_{2,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^2 + 9F_{2,1}^3F_{2,2}F_{1,1}^2F_{1,2,2} + 12F_{1,1}^3F_{1,2}F_{1,1,2}F_{2,1}F_{2,2}+ \\
 & + 6F_{2,1}^4F_{1,1,2}F_{1,2}^2 - 6F_{2,1}^5F_{1,2}F_{1,2,2} + 6F_{1,1}^5F_{2,2}F_{2,2,2} + 6F_{1,2}F_{2,1}^3F_{1,1,2}F_{2,2}F_{1,1}+ \\
 & + 12F_{2,1}F_{2,1,2}F_{1,1}^3F_{2,2}^2 - 6F_{2,1}F_{2,2}^3F_{1,1}^2F_{2,1,1} + 3F_{2,1}^2F_{1,2}F_{2,2}^2F_{1,1,1}F_{1,1}+ \\
 & + 6F_{2,1}^2F_{1,2}^2F_{2,1,1}F_{2,2}F_{1,1} - 6F_{1,1}^2F_{2,2}F_{1,1,1}F_{1,2}^2F_{2,1} - 6F_{1,2}F_{2,1}F_{2,1,2}F_{1,1}^3F_{2,2}+ \\
 & + 9F_{2,1}F_{1,1}^4F_{2,2}F_{2,2,2} - 6F_{1,2}F_{2,1}F_{2,2}^2F_{1,1}^2F_{1,1,1} - 6F_{2,1}^3F_{2,2}F_{1,1}^2F_{2,2,2}+ \\
 & + 6F_{2,1}^4F_{2,2}F_{1,1}F_{1,2,2});
 \end{aligned} \tag{130}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{ru}^2 = & -\frac{3r^4}{2\mathfrak{J}^3}(-F_{1,1,1}F_{2,2}^3 + F_{2,2}^2F_{1,1,2}F_{1,1} + F_{2,2}^2F_{1,2}F_{2,1,1} + 2F_{2,2}^2F_{1,1,2}F_{2,1}- \\
 & - F_{2,2}^2F_{1,2}F_{1,1,1} - F_{2,2}F_{1,2,2}F_{1,1}^2 + 2F_{2,2}F_{1,1}F_{1,2}F_{1,1,2} - F_{2,2}F_{1,1}F_{1,2,2}F_{2,1}- \\
 & - F_{2,2}F_{1,1}F_{1,2}F_{2,1,2} - F_{2,2}F_{1,2}^2F_{1,1,1} - F_{2,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^2 - 2F_{2,2}F_{2,1,2}F_{1,2}F_{2,1}+ \\
 & + F_{2,2}F_{1,2}^2F_{2,1,1} + F_{2,2}F_{1,2}F_{2,1}F_{1,1,2} + F_{1,2}F_{2,2,2}F_{1,1}^2 + F_{1,1}F_{2,2,2}F_{1,2}F_{2,1}- \\
 & - 2F_{1,1}F_{1,2}^2F_{2,1,2} + F_{1,2}^3F_{2,1,1} - F_{1,2}^2F_{2,1}F_{2,1,2} + F_{1,2}F_{2,2,2}F_{2,1}^2);
 \end{aligned} \tag{131}$$

$$\begin{aligned}
Q_{rv}^2 = & -\frac{3r^4}{2\mathfrak{J}^3}(F_{2,2}^2 F_{2,1,1} F_{1,1} - F_{2,2}^2 F_{2,1} F_{1,1,1} - F_{2,2} F_{2,1,2} F_{1,1}^2 - 2F_{2,2} F_{1,1} F_{2,1} F_{2,1,2} + \\
& + F_{2,2} F_{1,1} F_{1,1,2} F_{2,1} + F_{2,2} F_{1,1} F_{1,2} F_{2,1,1} - F_{2,2} F_{1,1,1} F_{1,2} F_{2,1} + 2F_{2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1,2} + \\
& + F_{2,2,2} F_{1,1}^3 - 2F_{1,1}^2 F_{1,2} F_{2,1,2} + F_{1,1}^2 F_{2,1} F_{2,2,2} - F_{1,1}^2 F_{1,2,2} F_{2,1} + F_{1,1} F_{1,2}^2 F_{2,1,1} + \\
& + 2F_{1,2} F_{2,1} F_{1,1,2} F_{1,1} + F_{1,1} F_{2,1}^2 F_{2,2,2} - F_{1,1} F_{2,1,2} F_{1,2} F_{2,1} - F_{1,1} F_{1,2,2} F_{2,1}^2 - \\
& - F_{2,1}^3 F_{1,2,2} - F_{1,2}^2 F_{1,1,1} F_{2,1} + F_{1,1,2} F_{2,1}^2 F_{1,2});
\end{aligned} \tag{132}$$

$$\begin{aligned}
Q_{uv}^2 = & \frac{9r^5}{2\mathfrak{J}^4}(-8F_{1,2}^2 F_{1,1}^2 F_{2,1,2} - 4F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,2} F_{1,1,1} - 2F_{1,2} F_{1,1} F_{2,2}^2 F_{1,1,1} - \\
& - 4F_{1,2} F_{2,1,1} F_{2,2}^2 F_{1,1} + 4F_{2,2}^2 F_{2,1} F_{1,1} F_{2,1,2} + 5F_{1,2} F_{2,1} F_{2,2,2} F_{1,1}^2 - \\
& - 2F_{2,2}^3 F_{1,1} F_{2,1,1} + 4F_{2,2} F_{1,2,2} F_{2,1}^3 + 2F_{2,2}^2 F_{1,1}^2 F_{1,1,2} + F_{2,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2} + \\
& + F_{2,2}^3 F_{1,1,1} F_{1,1} + 4F_{2,1} F_{2,2}^3 F_{1,1,1} + 4F_{1,2}^3 F_{1,1} F_{2,1,1} - 8F_{2,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1,2} - \\
& - 2F_{1,2} F_{2,1}^3 F_{2,2,2} + 4F_{1,2} F_{1,1}^3 F_{2,2,2} + 8F_{1,2} F_{2,1} F_{1,1,2} F_{2,2} F_{1,1} + \\
& + 8F_{1,2} F_{2,1} F_{2,2} F_{2,1,2} F_{1,1} - 2F_{1,2}^2 F_{2,2} F_{1,1} F_{1,1,1} + 4F_{1,2} F_{2,1}^2 F_{2,2} F_{2,1,2} - \\
& - 2F_{2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1} F_{2,2,2} - 6F_{2,2}^2 F_{2,1} F_{1,1} F_{1,1,2} - 6F_{1,2} F_{2,2} F_{1,1}^2 F_{2,1,2} - \\
& - 2F_{1,2} F_{2,1} F_{1,1}^2 F_{1,2,2} - 6F_{1,2} F_{2,1}^2 F_{2,2} F_{1,1,2} - 4F_{1,2} F_{2,1}^2 F_{2,2,2} F_{1,1} + \\
& + 4F_{1,2} F_{2,2} F_{1,1}^2 F_{1,1,2} + 5F_{2,1}^2 F_{1,2,2} F_{2,2} F_{1,1} - 2F_{1,2} F_{2,1} F_{2,2}^2 F_{2,1,1} + \\
& + 5F_{1,2} F_{2,1} F_{2,2}^2 F_{1,1,1} - 2F_{1,2} F_{2,1}^2 F_{1,1} F_{1,2,2} - 4F_{1,1}^2 F_{1,2,2} F_{2,1} F_{2,2} - \\
& - 6F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,1,2} F_{1,1} - 2F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,2} F_{2,1,1} + 4F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{1,1} F_{1,1,2} - \\
& - 2F_{1,1}^2 F_{2,1} F_{2,2,2} F_{2,2} + 5F_{1,2}^2 F_{2,1,1} F_{2,2} F_{1,1} + F_{1,2} F_{2,1}^3 F_{1,2,2} - \\
& - 2F_{2,2} F_{1,1}^3 F_{1,2,2} - 2F_{1,2}^3 F_{2,1} F_{1,1,1} + F_{1,2}^3 F_{2,1,1} F_{2,1} + 2F_{1,2}^2 F_{2,1}^2 F_{1,1,2} + \\
& + 2F_{1,2}^2 F_{2,1}^2 F_{2,1,2} + 2F_{2,2}^2 F_{2,1,2} F_{1,1}^2);
\end{aligned} \tag{133}$$

$$\begin{aligned}
Q_u = & \frac{9r^7}{\mathfrak{J}^5}(-2F_{2,2}^5 F_{1,1,1,1} F_{1,1} - 2F_{1,2,2,2} F_{2,2}^2 F_{1,1}^4 + 3F_{1,1,1} F_{2,2,2} F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 - 6F_{1,2} F_{2,2}^2 F_{1,1}^4 - \\
& - 3F_{2,1,2,2} F_{1,2}^3 F_{2,1}^3 + 2F_{1,2}^5 F_{2,1,1,1} F_{2,1} - 3F_{2,1,1,2} F_{1,2}^4 F_{2,1}^2 - 9F_{2,2} F_{1,2}^4 F_{2,1,1}^2 + \\
& + 6F_{1,1}^2 F_{1,2}^3 F_{2,1,1,2} F_{2,2} - 9F_{1,2}^2 F_{2,2}^3 F_{1,1,1}^2 + 24F_{2,2}^3 F_{1,1,2} F_{2,1}^2 + 6F_{2,2}^3 F_{1,2}^2 F_{2,1,1}^2 + \\
& + 9F_{1,2} F_{2,2}^4 F_{1,1,1}^2 - 6F_{1,1}^2 F_{1,1,2}^2 F_{2,2}^3 + 6F_{1,1} F_{2,1,2,2} F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 + 2F_{2,2,2,2} F_{1,2}^2 F_{2,1}^4 + \\
& + 3F_{1,1,2,2} F_{2,2}^3 F_{1,1}^3 - 6F_{1,2}^3 F_{2,2}^2 F_{1,1,1}^2 + 6F_{1,2}^3 F_{2,1,2,2} F_{1,1}^2 F_{2,1} - 6F_{1,1} F_{1,2}^4 F_{2,1,1,2} F_{2,1} +
\end{aligned} \tag{134}$$

$$\begin{aligned}
& + 3F_{1,2}^3 F_{2,2} F_{1,1,1,2} F_{2,1}^2 - 3F_{1,1,2} F_{2,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2}^2 + 6F_{2,2}^2 F_{2,1,1,2} F_{1,2}^2 F_{2,1}^2 + 6F_{2,2}^4 F_{1,1,1,2} F_{2,1} F_{1,1} - \\
& - 3F_{2,2}^3 F_{1,2} F_{2,1,1,2} F_{1,1}^2 - 12F_{2,2}^4 F_{1,2} F_{2,1,1} F_{1,1,1} + 12F_{1,2}^4 F_{2,1,1} F_{2,2} F_{1,1,1} + 6F_{1,2} F_{1,1,2,2} F_{2,2}^2 F_{1,1}^3 - \\
& - 24F_{1,2}^3 F_{2,1,1} F_{1,1,2} F_{2,2} F_{1,1} - 27F_{2,2}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1,1} F_{1,1,2} F_{1,1} + 18F_{2,2} F_{2,2,2} F_{1,1,2} F_{2,1}^3 F_{1,2} + \\
& + 6F_{1,2,2} F_{2,2} F_{1,1}^4 F_{2,2,2} - 3F_{1,1,1} F_{2,2} F_{1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,2}^2 + 12F_{2,2} F_{2,1,2} F_{1,2,2} F_{2,1}^3 F_{1,2} - \\
& - 6F_{1,2,2} F_{2,2} F_{1,1} F_{1,1,1} F_{1,2}^2 F_{2,1} + 3F_{2,2} F_{1,1,2,2} F_{2,1}^3 F_{1,2}^2 + 3F_{2,2} F_{1,2}^4 F_{2,1,1,1} F_{2,1} - \\
& - 3F_{2,2}^2 F_{2,1,1,2} F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{1,1} + 6F_{2,1,2} F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 F_{1,1,2} - 27F_{1,2} F_{2,2}^3 F_{1,1,2} F_{2,1} F_{1,1,1} + \\
& + 6F_{1,2}^3 F_{2,2,2} F_{1,1} F_{1,1,1} F_{2,1} - 18F_{2,1,2}^2 F_{1,2}^3 F_{1,1} F_{2,1} - 6F_{1,1}^2 F_{1,2}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1,1,2} + \\
& + 3F_{1,2} F_{2,2}^2 F_{1,1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1} - 3F_{1,1}^2 F_{2,1,2,2} F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,2} - 6F_{2,2}^3 F_{1,1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1} + \\
& + 9F_{2,2}^2 F_{1,2}^3 F_{2,1,1}^2 - 9F_{1,1}^2 F_{2,2,2} F_{1,2}^2 F_{2,1,1} F_{2,2} - 24F_{2,2}^4 F_{1,1,2} F_{2,1} F_{1,1,1} - 6F_{1,2,2} F_{2,1,2} F_{1,1}^3 F_{2,2}^2 - \\
& - 6F_{1,1}^2 F_{2,2}^3 F_{1,1,2,2} F_{2,1} - 9F_{1,2,2}^2 F_{2,2} F_{1,1}^2 F_{2,1}^2 + 6F_{2,1,2}^2 F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 + 6F_{2,2} F_{1,2,2}^2 F_{2,1}^4 + \\
& + 6F_{1,2,2} F_{2,2}^2 F_{1,1}^3 F_{1,1,2} - 12F_{2,2}^3 F_{1,1,2} F_{2,1} F_{2,1,2} F_{1,1} + 2F_{1,2}^3 F_{2,2}^2 F_{1,1,1,1} F_{1,1} - \\
& - 6F_{2,2,2} F_{1,2}^2 F_{2,1}^3 F_{2,1,2} - 3F_{2,1,2,2} F_{1,2}^2 F_{2,1}^2 F_{2,2} F_{1,1} - 6F_{1,2} F_{1,2,2} F_{2,2}^2 F_{1,1}^2 F_{1,1,1} - \\
& - 6F_{1,2}^2 F_{2,1,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2} - 6F_{1,2} F_{1,1,1,2} F_{2,2}^3 F_{1,1}^2 - 9F_{2,2} F_{1,2}^3 F_{2,1,1} F_{1,1,2} F_{2,1} + \\
& + 18F_{2,2}^2 F_{1,1,2} F_{2,1,1} F_{1,2}^2 F_{2,1} + 18F_{1,1,2}^2 F_{2,2}^3 F_{2,1} F_{1,1} - 6F_{1,2,2} F_{2,1,2} F_{1,1}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1} - \\
& - 18F_{2,2}^2 F_{2,1,2} F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,1,1} - 2F_{1,2}^4 F_{2,1,1,1} F_{2,2} F_{1,1} - 12F_{1,2}^3 F_{2,2,2} F_{1,1}^2 F_{2,1,1} + 6F_{2,2}^5 F_{1,1,1}^2 + \\
& + 3F_{2,2}^3 F_{1,1,1,1} F_{1,2}^2 F_{2,1} - 18F_{2,2}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1,1} F_{2,1,2} F_{1,1} - 12F_{1,2} F_{2,2}^2 F_{1,2,2} F_{2,1} F_{2,1,1} F_{1,1} + \\
& + 6F_{2,1,2}^2 F_{1,2} F_{1,1}^2 F_{2,2}^2 - 3F_{2,2} F_{1,1} F_{1,2}^3 F_{2,1,1,2} F_{2,1} + 3F_{2,1} F_{1,2} F_{2,2,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2} - \\
& - 42F_{1,2} F_{2,2}^2 F_{1,1,2} F_{2,1} F_{2,1,2} F_{1,1} + 18F_{1,2} F_{2,2}^3 F_{1,1,2} F_{2,1,1} F_{1,1} + 12F_{2,2}^3 F_{1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1,1} - \\
& - 6F_{1,1,2}^2 F_{2,2} F_{2,1}^2 F_{1,2}^2 - 9F_{1,1} F_{2,2,2} F_{1,2} F_{2,1}^3 F_{1,2,2} + 24F_{2,1,2}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,2} F_{1,1} + \\
& + 12F_{1,1,1} F_{2,2,2} F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,2} F_{1,1} - 18F_{1,2}^3 F_{2,2} F_{1,1,1} F_{2,1,2} F_{2,1} - 3F_{1,2} F_{2,1,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2}^2 + \\
& + 18F_{1,2}^3 F_{2,2}^2 F_{1,1,1} F_{2,1,1} - 9F_{1,1,2} F_{2,2}^4 F_{1,1} F_{1,1,1} - 36F_{2,2}^2 F_{1,1,2} F_{2,1}^2 F_{2,1,2} F_{1,2} - \\
& - 9F_{1,1,1} F_{2,2,2} F_{1,2} F_{2,1} F_{2,2}^2 F_{1,1} + 3F_{1,2} F_{2,2,2} F_{1,1}^2 F_{1,1,1} F_{2,2}^2 + 12F_{1,2,2} F_{2,2} F_{1,1}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1,1} - \\
& - 9F_{1,2} F_{2,2} F_{1,2,2} F_{2,1}^3 F_{1,1,2} + 9F_{1,2} F_{1,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,2,2} F_{2,1,1} - 24F_{2,2}^2 F_{1,2,2} F_{2,1}^3 F_{1,1,2} - \\
& - 12F_{1,2} F_{1,1}^2 F_{1,1,2}^2 F_{2,2}^2 - 24F_{2,2} F_{1,1,2} F_{2,1}^2 F_{2,1,2} F_{1,2}^2 - 3F_{1,2} F_{2,2}^4 F_{1,1,1,1} F_{1,1} + \\
& + 3F_{1,2} F_{2,2}^3 F_{1,1,1,2} F_{2,1} F_{1,1} + 2F_{2,2}^4 F_{1,2} F_{2,1,1,1} F_{1,1} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 6F_{2,2,2}F_{1,1,2}F_{2,1}^2F_{2,2}^2F_{1,1} + 3F_{2,2}^3F_{1,2}^2F_{2,1,1,1}F_{1,1} + 2F_{2,2}^2F_{1,2,2,2}F_{2,1}^3F_{1,1} + \\
& + 12F_{2,1,2}^2F_{1,2}F_{2,1}F_{2,2}^2F_{1,1} + 6F_{1,1}F_{1,2}^3F_{2,2}F_{1,1,1,2}F_{2,1} - 18F_{2,1,2}^2F_{1,2}^2F_{1,1}^2F_{2,2} + \\
& - 6F_{1,2}F_{2,2,2}F_{1,1}^3F_{1,2,2}F_{2,1} + 6F_{2,2,2}^2F_{1,2}F_{2,1}^3F_{1,1} + 24F_{1,2}^4F_{2,1,1}F_{2,1,2}F_{1,1} - \\
& - 3F_{1,2,2}F_{2,2}^3F_{1,1}^2F_{1,1,1} + 18F_{1,2,2}F_{2,2}^2F_{1,1}^2F_{1,1,2}F_{2,1} - 6F_{2,2,2}F_{1,2}F_{2,1}^4F_{1,1,2} + \\
& + 42F_{1,1,2}F_{2,2}F_{1,1}F_{2,1,2}F_{1,2}^2F_{2,1} + 24F_{1,2}^2F_{2,2,2}F_{1,1}^3F_{2,1,2} - 12F_{1,1}F_{1,1,2}^2F_{2,2}F_{1,2}^2F_{2,1} + \\
& + 6F_{1,2}^2F_{2,2,2}F_{1,1}^2F_{1,1,1}F_{2,2} - 3F_{2,2}^2F_{1,2}^3F_{2,1,1,1}F_{2,1} - 27F_{1,1}F_{2,2}^2F_{1,2,2}F_{2,1}^2F_{1,1,2} - \\
& - 3F_{2,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^2F_{2,1,1}F_{1,2}^2 - 18F_{2,2}F_{2,2,2}F_{1,2}F_{2,1}^2F_{2,1,2}F_{1,1} + 9F_{2,2}F_{1,2}F_{2,2,2}F_{1,1}^3F_{2,1,2} + \\
& + 6F_{2,2}F_{2,1,1,2}F_{1,2}^3F_{2,1}^2 + 27F_{2,2}F_{1,2}^3F_{2,1,1}F_{2,1,2}F_{1,1} + 2F_{1,2,2,2}F_{2,2}F_{1,1}^3F_{1,2}F_{2,1} + \\
& + 24F_{1,2}F_{1,1,2}F_{2,2}^2F_{1,1}^2F_{2,1,2} + 6F_{2,2}^2F_{1,1,2,2}F_{2,1}^3F_{1,2} - 3F_{1,1}^2F_{2,2}^3F_{1,2,2}F_{2,1,1} - \\
& - 9F_{2,1}F_{1,2}F_{2,2,2}^2F_{1,1}^3 + 18F_{1,2}F_{2,2}^2F_{1,1,2}^2F_{2,1}^2 + 2F_{2,2}^4F_{1,1,1,1}F_{1,2}F_{2,1} + \\
& + 3F_{1,1}^2F_{2,2}^2F_{1,2,2,2}F_{2,1}^2 - 2F_{2,2}^3F_{1,2}^2F_{2,1,1,1}F_{2,1} + 6F_{2,1,2,2}F_{1,2}F_{2,1}^2F_{2,2}^2F_{1,1} + \\
& + 18F_{1,2}^2F_{2,2}^2F_{1,1,1}F_{1,1,2}F_{2,1} + 18F_{1,2}F_{1,1,2}F_{2,2}^3F_{1,1}F_{1,1,1} - 6F_{2,2}^3F_{1,2}F_{2,1,1}F_{2,1,2}F_{1,1} - \\
& - 2F_{2,2}F_{1,2,2,2}F_{2,1}^4F_{1,2} + 12F_{1,1}^2F_{2,1,2}F_{1,2,2}F_{2,1}F_{2,2}^2 + 12F_{2,1,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^2F_{2,2}^2F_{1,1} + \\
& + 3F_{2,2,2}F_{1,2}^3F_{2,1}^2F_{2,1,1} + 9F_{2,1,2}F_{1,2}^4F_{2,1}F_{2,1,1} - 6F_{2,2}^3F_{1,2,2}F_{2,1}F_{2,1,1}F_{1,1} + \\
& + 9F_{1,1,1}F_{2,2}^3F_{1,2,2}F_{2,1}F_{1,1} - 6F_{1,1}F_{2,1,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^2F_{1,2}^2 + 9F_{1,1}F_{2,2}F_{1,2,2}F_{2,1,1}F_{1,2}^2F_{2,1} + \\
& + 6F_{2,2}^2F_{1,2}^2F_{2,1,1,2}F_{1,1}^2 + 6F_{2,2,2}F_{1,2}F_{2,1}F_{2,1,1}F_{2,2}^2F_{1,1} - 3F_{1,1}^2F_{2,2,2,2}F_{1,2}F_{2,1}^2F_{2,2} + \\
& + 6F_{2,2,2}F_{1,1,2}F_{2,1}^3F_{1,2}^2 - 6F_{2,2}^2F_{1,2,2}F_{2,1}^2F_{2,1,1}F_{1,2} + 3F_{1,1,1,2}F_{2,2}^4F_{1,1}^2 - \\
& - 18F_{2,2}F_{1,1}^2F_{2,2,2}F_{1,2}F_{2,1}F_{2,1,2} - 21F_{1,2}F_{1,1}^2F_{2,2,2}F_{1,1,2}F_{2,1}F_{2,2} - 24F_{1,2}F_{1,1,2}^2F_{2,2}^2F_{2,1}F_{1,1} - \\
& - 3F_{2,1}F_{1,2,2,2}F_{2,2}^2F_{1,1}^3 - 6F_{2,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^3F_{2,2,2}F_{1,1} - 18F_{2,2}^3F_{1,2}^2F_{2,1,1}F_{1,1,1} + \\
& + 36F_{1,1}^2F_{1,2}^2F_{2,1,2}F_{1,1,2}F_{2,2} + 3F_{2,1,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^3F_{1,2}^2 + 24F_{1,2}F_{2,2,2}F_{1,1,2}F_{2,1}^2F_{2,2}F_{1,1} - \\
& - 9F_{1,1}F_{2,2,2}F_{1,2}^3F_{2,1,1}F_{2,1} + 6F_{2,2}F_{2,2,2}F_{1,2}^2F_{2,1}^2F_{2,1,1} - 12F_{1,1}F_{2,2,2}F_{1,1,2}F_{2,1}^2F_{1,2}^2 + \\
& + 12F_{2,2}F_{2,1,2}^2F_{1,2}^2F_{2,1}^2 - 6F_{1,2,2}^2F_{2,2}F_{1,1}^3F_{2,1} + 12F_{1,1}F_{1,2}^3F_{2,1,2}F_{1,1,2}F_{2,1} - \\
& - 18F_{1,2}F_{1,2,2}F_{2,1,2}F_{1,1}^3F_{2,2} - 6F_{2,2}^3F_{1,1,1,2}F_{2,1}^2F_{1,2} - 24F_{1,1}^2F_{1,2}^3F_{2,1,2}^2 + \\
& + 18F_{2,2}^3F_{1,1,2}F_{2,1,1}F_{1,2}F_{2,1} - 3F_{1,2}^3F_{2,2}^2F_{1,1,1,1}F_{2,1} + 27F_{1,1}^2F_{2,2,2}F_{1,2}^2F_{2,1}F_{2,1,2} + \\
& + 9F_{2,1}F_{1,2,2}F_{2,2}F_{1,1}^3F_{2,2,2} + 21F_{1,2}F_{2,1,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^2F_{2,2}F_{1,1} - 18F_{1,1,1}F_{1,2}^3F_{2,1,2}F_{2,2}F_{1,1} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 6F_{2,2}F_{2,1,2,2}F_{1,2}^2F_{2,1}^3 + 2F_{1,2}F_{2,2,2,2}F_{1,1}^4F_{2,2} + 3F_{1,2}F_{1,1}^2F_{2,2}^2F_{1,1,2,2}F_{2,1} + \\
 & + 3F_{1,1}^2F_{2,2,2}F_{1,2}F_{2,1,1}F_{2,2}^2 + 3F_{1,1}F_{2,2,2,2}F_{1,2}^2F_{2,1}^3 - 6F_{2,2}^3F_{2,1,1,2}F_{1,2}F_{2,1}F_{1,1} - \\
 & - 3F_{1,2}^2F_{2,2,2,2}F_{1,1}^2F_{2,1}^2 - 24F_{1,2}F_{1,1}^2F_{2,1,2}F_{1,2,2}F_{2,1}F_{2,2} - 6F_{1,1,2,2}F_{2,2}F_{1,1}^2F_{1,2}^2F_{2,1} + \\
 & + 12F_{2,2,2}F_{1,2}^2F_{2,1}F_{2,1,1}F_{2,2}F_{1,1} + 6F_{1,1}^2F_{2,2,2}F_{1,1,2}F_{2,1}F_{2,2}^2 - 6F_{1,1,1}F_{1,2}^4F_{2,1,2}F_{2,1} - \\
 & - 9F_{2,2,2}F_{1,2}^2F_{2,1}^2F_{2,2}F_{1,1,1} + 3F_{1,1}F_{1,2}^2F_{2,2}^2F_{1,1,1,2}F_{2,1} + 9F_{1,1}^2F_{2,2,2}^2F_{1,2}F_{2,1}^2 - \\
 & - 12F_{1,2}F_{1,1,2}F_{2,2,2}F_{1,1}^3F_{2,2} - 9F_{1,1}^2F_{2,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^2F_{2,2,2} + 6F_{1,1}^2F_{2,1,2,2}F_{1,2}F_{2,1}F_{2,2}^2 - \\
 & - 2F_{2,2,2,2}F_{1,2}F_{2,1}^3F_{2,2}F_{1,1} + 18F_{1,2}F_{1,1}F_{2,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^2F_{1,1,2} - 12F_{1,2}F_{1,1,1}F_{2,2}^2F_{1,2,2}F_{2,1}F_{1,1} + \\
 & + 9F_{1,2}F_{2,2,2}F_{1,1}^2F_{1,2,2}F_{2,1}^2 - 6F_{1,1}F_{2,2}F_{1,1,2,2}F_{2,1}^2F_{1,2}^2 + 6F_{1,2}^3F_{2,2}F_{1,1,1}F_{1,1,2}F_{2,1} + \\
 & + 9F_{1,1}F_{2,2}F_{1,2,2}^2F_{2,1}^3 - 6F_{1,1,2}F_{2,2}^3F_{1,1}^2F_{2,1,2} - 3F_{2,2}^2F_{1,2}^3F_{2,1,1,1}F_{1,1} + \\
 & + 27F_{2,2}^2F_{1,1,1}F_{2,1,2}F_{1,2}^2F_{2,1} - 18F_{1,2}^2F_{2,2}^2F_{1,1,1}F_{2,1,2}F_{1,1} - 2F_{1,2}^2F_{2,2,2,2}F_{1,1}^3F_{2,1} - \\
 & - 3F_{1,1}F_{2,2}F_{1,2,2,2}F_{2,1}^3F_{1,2} + 18F_{1,2}F_{1,2,2}F_{2,2}F_{1,1}^2F_{1,1,2}F_{2,1} + 3F_{1,2,2,2}F_{2,2}F_{1,1}^2F_{1,2}F_{2,1}^2 + \\
 & + 24F_{2,2}^3F_{1,1,1}F_{2,1,2}F_{1,2}F_{2,1} - 6F_{2,2}^2F_{1,1,1,2}F_{2,1}^2F_{1,2}^2 - 12F_{1,1,2}F_{2,2,2}F_{1,1}^2F_{1,2}^2F_{2,1} - \\
 & - 6F_{1,2}^5F_{2,1,1}^2 + 3F_{1,2}^2F_{2,2}^3F_{1,1,1,1}F_{1,1} + 9F_{1,2}F_{2,2}^3F_{1,1,1}F_{2,1,2}F_{1,1} + 9F_{1,2}F_{2,2}^2F_{1,2,2}F_{2,1}^2F_{1,1,1} - \\
 & - 12F_{2,2,2}F_{1,2}F_{2,1}^2F_{2,2}^2F_{1,1,1} - 18F_{2,2,2}F_{1,2}^2F_{2,1}^2F_{2,1,2}F_{1,1} - 18F_{2,2}F_{2,1,2}F_{1,2}^3F_{2,1}F_{2,1,1} + \\
 & + 18F_{1,1}F_{1,2}^2F_{2,2}^2F_{1,1,2}F_{1,1,1} + 6F_{2,2}^4F_{1,1,2}F_{2,1,1}F_{1,1} - 2F_{1,2}^4F_{2,2}F_{1,1,1,1}F_{2,1});
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_v = & - \frac{9r^7}{\mathfrak{J}^5} (-2F_{1,1,1,1}F_{1,2}^4F_{2,1}^2 - 2F_{2,1}^5F_{1,2,2,2}F_{1,2} - 6F_{2,2}^3F_{2,1}F_{2,1,1,2}F_{1,1}^2 - 9F_{2,1}F_{1,1}^4F_{2,2,2}^2 - \\
 & - 6F_{1,1,2}^2F_{2,1}^3F_{1,2}^2 - 9F_{2,2}F_{1,1}F_{1,2}^3F_{2,1,1}^2 - 9F_{2,2}^2F_{1,1,1}^2F_{1,2}^2F_{2,1} - 6F_{1,1}^2F_{1,1,2,2}F_{2,1}^2F_{1,2}^2 + \\
 & + 12F_{1,1}^2F_{2,2,2}F_{1,1,1}F_{1,2}^2F_{2,1} + 2F_{2,1}^4F_{2,2,2,2}F_{1,1}F_{1,2} - 6F_{2,2}F_{2,1}^3F_{1,1,1,2}F_{1,2}^2 + \\
 & + 9F_{1,2}^3F_{2,1}F_{2,1,2}F_{1,1}F_{2,1,1} - 2F_{1,1}^4F_{1,2,2,2}F_{2,1}F_{2,2} + 24F_{2,2}^2F_{2,1}^3F_{1,1,2}^2 - \\
 & - 24F_{1,2}F_{1,1}^3F_{2,2,2}F_{1,1,2}F_{2,1} - 3F_{2,2}^2F_{1,1}^2F_{1,2}^2F_{2,1,1,1} + 6F_{2,2}^3F_{2,1}^2F_{1,1,1,2}F_{1,1} - \\
 & - 6F_{2,2}F_{2,1}^3F_{2,2,2}F_{1,1,1}F_{1,2} + 9F_{1,1}F_{2,1}^4F_{1,2,2}^2 + 18F_{1,2}F_{2,2}^2F_{1,1}F_{1,1,2}F_{2,1}F_{1,1,1} + \\
 & + 3F_{2,2}^3F_{1,1}^2F_{2,1,2}F_{1,1,1} - 3F_{1,1,1}F_{2,1}^3F_{1,2,2}F_{1,2}^2 - 6F_{1,1,1}^2F_{1,2}^3F_{2,1}F_{2,2} + 3F_{2,2}^3F_{1,1}^2F_{1,1,1,2}F_{2,1} + \\
 & + 9F_{2,2}F_{1,1,1}F_{1,2}^3F_{2,1}F_{2,1,1} + 6F_{2,1}^4F_{2,2,2}F_{1,1,2}F_{1,2} + 6F_{1,1}F_{1,2}^3F_{2,1,1}F_{2,2}F_{1,1,1} + \\
 & + 27F_{2,2}F_{1,1}^2F_{2,1,2}F_{1,2}^2F_{2,1,1} - 9F_{1,2}F_{2,1}^4F_{1,2,2}F_{1,1,2} + 18F_{1,2}F_{1,1}F_{2,1}^3F_{1,2,2}F_{1,1,2} + \\
 & + 2F_{2,1}^2F_{2,2}^3F_{1,1,1,1}F_{1,2} + 18F_{1,1}F_{1,1,2}F_{1,2}^2F_{2,1}F_{2,2}F_{1,1,1} - 3F_{1,1}^2F_{1,2,2}F_{2,1}F_{1,1,1}F_{2,2}^2 +
 \end{aligned} \tag{135}$$

$$\begin{aligned}
& + 12F_{2,1}^2 F_{2,2} F_{1,1,1} F_{2,1,2} F_{1,2}^2 - 6F_{1,1}^5 F_{2,2,2}^2 - 2F_{2,1,1,1} F_{2,2}^3 F_{1,1} F_{1,2} F_{2,1} - \\
& - 6F_{2,1}^3 F_{2,2,2} F_{1,1} F_{1,2} F_{2,1,2} + 6F_{1,1,1} F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 F_{1,1,2} + 3F_{2,1} F_{1,1}^4 F_{2,2,2,2} F_{2,2} - \\
& - 9F_{1,1}^2 F_{2,1} F_{1,2,2} F_{2,1,1} F_{2,2}^2 + 3F_{1,2} F_{1,1}^2 F_{2,1}^2 F_{1,1,2,2} F_{2,2} + 24F_{2,2} F_{2,1}^3 F_{1,2,2} F_{2,1,2} F_{1,1} - \\
& - 9F_{2,1} F_{2,2}^2 F_{1,1,1} F_{1,2}^2 F_{2,1,1} - 18F_{1,2} F_{1,1}^2 F_{2,1}^2 F_{1,2,2} F_{2,1,2} - 6F_{1,1}^3 F_{1,2,2}^2 F_{2,1}^2 - \\
& - 3F_{2,1,1,1} F_{2,2}^2 F_{1,1} F_{1,2}^2 F_{2,1} - 3F_{2,2}^3 F_{1,1}^3 F_{2,1,1,2} + 2F_{1,1} F_{1,2}^4 F_{2,1,1,1} F_{2,1} - \\
& - 3F_{1,2} F_{2,2}^2 F_{2,1} F_{2,1,1,2} F_{1,1}^2 + 6F_{2,1}^2 F_{2,1,2,2} F_{1,1}^2 F_{2,2}^2 - 3F_{1,1}^3 F_{1,2,2,2} F_{2,1}^2 F_{2,2} + \\
& + 12F_{2,1}^3 F_{1,2,2} F_{2,2}^2 F_{1,1,1} - 3F_{1,2} F_{2,1} F_{2,2}^3 F_{1,1,1,1} F_{1,1} - 3F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 F_{1,1,2} F_{2,1,1} + \\
& + 9F_{1,2} F_{2,1}^3 F_{1,2,2} F_{2,2} F_{1,1,1} + 24F_{1,2} F_{1,1}^4 F_{2,2,2} F_{2,1,2} + 6F_{2,1,2}^2 F_{1,1}^3 F_{2,2}^2 - 24F_{1,1}^3 F_{1,2}^2 F_{2,1,2}^2 + \\
& + 6F_{1,2} F_{2,2}^2 F_{1,1}^3 F_{2,1,1,2} + 6F_{2,1,1}^2 F_{2,2}^3 F_{1,1} F_{1,2} - 6F_{1,1}^2 F_{1,1,1,2} F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,2} + \\
& + 9F_{1,2} F_{2,1} F_{2,2,2} F_{1,1}^2 F_{1,1,1} F_{2,2} + 9F_{1,2} F_{2,1} F_{2,2}^3 F_{1,1,1}^2 + 3F_{2,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1,1,1} F_{1,2}^2 + \\
& + 6F_{2,1} F_{2,1,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2}^2 - 2F_{1,1}^2 F_{1,2}^3 F_{2,1,1,1} F_{2,2} - 6F_{1,2} F_{1,1}^4 F_{2,1,2,2} F_{2,2} + \\
& + 18F_{2,2} F_{2,1}^2 F_{2,2,2} F_{1,1}^2 F_{1,1,2} + 18F_{2,2} F_{2,1}^3 F_{2,2,2} F_{1,1} F_{1,1,2} + 3F_{1,1}^3 F_{1,1,2,2} F_{2,1} F_{2,2}^2 + \\
& + 6F_{2,2} F_{2,1}^2 F_{2,1,1,2} F_{1,1} F_{1,2}^2 + 3F_{2,1}^3 F_{2,2,2,2} F_{1,1}^2 F_{1,2} - 3F_{1,2} F_{2,1}^2 F_{2,1,2,2} F_{1,1}^2 F_{2,2} + \\
& + 3F_{1,1}^2 F_{1,2,2,2} F_{2,1}^3 F_{1,2} - 9F_{1,1}^2 F_{1,2,2}^2 F_{2,1}^3 + 3F_{2,1}^4 F_{1,1,2,2} F_{1,2}^2 + 12F_{1,1}^4 F_{2,2,2} F_{1,2,2} F_{2,1} + \\
& + 6F_{2,1}^5 F_{1,2,2}^2 + 18F_{2,2} F_{1,1}^2 F_{1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1,2} + 3F_{1,1} F_{2,1}^2 F_{1,2,2} F_{2,1,1} F_{1,2}^2 - \\
& - 6F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 F_{2,1,2} F_{1,1,1} + 6F_{2,1,2}^2 F_{2,1}^2 F_{1,1} F_{1,2}^2 - 3F_{2,2} F_{1,1}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1,1,2} F_{2,1} + \\
& + 3F_{2,2} F_{1,1}^3 F_{1,2}^3 F_{2,1,1,1} F_{2,1} - 12F_{1,1} F_{1,1,2}^2 F_{2,1}^2 F_{1,2}^2 + 12F_{2,1} F_{2,2}^3 F_{1,1,1} F_{2,1,2} F_{1,1} - \\
& - 2F_{2,1} F_{2,2}^4 F_{1,1,1,1} F_{1,1} + 3F_{2,2}^2 F_{1,1,1,1} F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{1,1} + 9F_{2,1,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1} F_{1,2}^2 - \\
& - 6F_{2,1} F_{2,2}^3 F_{1,1,1} F_{1,2} F_{2,1,1} - 3F_{2,1} F_{2,2,2} F_{1,1}^2 F_{1,1,1} F_{2,2}^2 + 12F_{2,1,2}^2 F_{2,1} F_{1,1}^2 F_{2,2}^2 + \\
& + 6F_{2,2}^2 F_{2,1}^2 F_{2,1,1,2} F_{1,1} F_{1,2} - 6F_{2,1,2} F_{2,1}^3 F_{1,1,2} F_{1,2}^2 + 18F_{1,1}^3 F_{2,2,2} F_{1,2,2} F_{2,1}^2 - \\
& - 12F_{2,2} F_{2,1,2} F_{2,1}^3 F_{1,1,2} F_{1,2} - 3F_{2,1}^3 F_{2,2,2} F_{1,1,1} F_{1,2}^2 - 6F_{2,2} F_{2,1}^3 F_{2,1,2,2} F_{1,1} F_{1,2} + \\
& + 6F_{2,2}^2 F_{2,1}^2 F_{1,1,2} F_{2,1,1} F_{1,2} - 6F_{1,1}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1,2} F_{1,1,1} F_{2,2} - 24F_{2,2} F_{2,1}^4 F_{1,2,2} F_{1,1,2} - \\
& - 3F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 F_{2,1,1,2} F_{1,1} - 6F_{2,1}^3 F_{1,1,2,2} F_{2,2}^2 F_{1,1} - 6F_{2,1,1} F_{2,2}^4 F_{1,1} F_{1,1,1} + \\
& + 3F_{1,1}^2 F_{2,1}^3 F_{1,2,2,2} F_{2,2} - 18F_{1,1} F_{1,2}^3 F_{2,1,2} F_{1,1,1} F_{2,1} - 12F_{1,1}^2 F_{1,1,2} F_{1,2}^2 F_{2,1,1} F_{2,2} + \\
& + 27F_{2,2} F_{1,1}^2 F_{2,1}^2 F_{1,2,2} F_{2,1,2} + 12F_{2,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1,1} F_{2,1,2} F_{1,2} - 6F_{1,2} F_{2,2}^2 F_{1,1}^2 F_{2,1,2} F_{1,1,1} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 9F_{1,2}F_{2,1,1}F_{2,2}^3F_{1,1}F_{1,1,1} - 3F_{2,1}^3F_{2,1,2,2}F_{1,1}F_{1,2}^2 - 18F_{2,1,2}^2F_{1,1}^2F_{1,2}^2F_{2,1} + \\
& + 6F_{1,1}^3F_{1,2}^2F_{2,1,1,2}F_{2,2} - 6F_{1,2}F_{2,2}^2F_{1,1}^2F_{1,1,1,2}F_{2,1} - 12F_{1,1}^3F_{2,2,2}F_{1,2}^2F_{2,1,1} - \\
& - 18F_{1,1}^2F_{2,1}^3F_{1,2,2}F_{2,2,2} + 18F_{1,2}^2F_{2,1}^2F_{1,1,2}F_{2,2}F_{1,1,1} - 6F_{2,2}^2F_{2,1}^3F_{1,1,1,2}F_{1,2} + \\
& + 18F_{1,2}F_{2,1}^3F_{2,2,2}F_{1,1}F_{1,1,2} - 3F_{1,1}^4F_{2,1,2,2}F_{2,2}^2 - 24F_{1,2}F_{1,1,2}^2F_{2,1}^2F_{2,2}F_{1,1} - \\
& - 12F_{1,1}F_{1,1,2}F_{1,2}^3F_{2,1,1}F_{2,1} + 24F_{1,2}F_{2,2}^2F_{2,1}F_{1,1,2}F_{2,1,1}F_{1,1} - 6F_{1,1}^2F_{2,1}^2F_{1,1,2,2}F_{2,2}^2 + \\
& + 6F_{2,2}F_{2,1}^2F_{2,2,2}F_{1,1}F_{2,1,1}F_{1,2} + 12F_{2,2}F_{2,1,2}^2F_{2,1}^2F_{1,1}F_{1,2} + 6F_{2,2}F_{2,1}^4F_{1,1,2,2}F_{1,2} + \\
& + 6F_{1,1,1}F_{1,2}^4F_{2,1}F_{2,1,1} + 6F_{1,1}^3F_{1,1,2}F_{2,1,2}F_{2,2}^2 + 12F_{1,2}F_{1,1}^2F_{2,1}F_{1,2,2}F_{2,1,1}F_{2,2} + \\
& + 12F_{1,2}F_{2,1}F_{2,2,2}F_{1,1}^2F_{2,1,1}F_{2,2} - 18F_{2,2}F_{1,1}^3F_{1,2,2}F_{2,1}F_{2,1,2} + 9F_{2,2}^2F_{1,1}F_{1,2}^2F_{2,1,1}F_{1,1,1} - \\
& - 9F_{1,2}F_{2,1,1}F_{2,2,2}F_{1,1}^3F_{2,2} + 24F_{1,1}^2F_{1,2}^3F_{2,1,2}F_{2,1,1} + 6F_{2,1}^3F_{2,2,2}F_{1,1}^2 - 3F_{2,2}F_{1,1,1,1}F_{1,2}^3F_{2,1}^2 + \\
& + 3F_{2,2}F_{1,1}F_{1,1,1,2}F_{1,2}^2F_{2,1}^2 - 9F_{2,2}F_{1,1}^3F_{2,2,2}F_{1,1,2}F_{2,1} - 3F_{1,1}^3F_{2,2,2,2}F_{1,2}F_{2,1}^2 + \\
& + 3F_{1,1}^3F_{1,2,2}F_{2,1,1}F_{2,2}^2 + 2F_{2,1,1,1}F_{2,2}^4F_{1,1}^2 - 18F_{1,2}F_{2,1,2}^2F_{1,1}^3F_{2,2} + \\
& + 21F_{1,2}F_{2,1}F_{2,2}^2F_{1,1,1}F_{2,1,2}F_{1,1} - 9F_{1,2}F_{2,1}^2F_{1,2,2}F_{2,1,1}F_{2,2}F_{1,1} - 12F_{2,1}^4F_{2,2,2}F_{1,1}F_{1,2,2} - \\
& - 2F_{1,1}^4F_{2,2,2,2}F_{1,2}F_{2,1} + 6F_{1,1}F_{1,1,1,2}F_{1,2}^3F_{2,1}^2 - 18F_{1,2}F_{1,1}^3F_{1,2,2}F_{2,1}F_{2,1,2} + \\
& + 27F_{1,2}F_{2,1}F_{2,2,2}F_{1,1}^3F_{2,1,2} + 6F_{2,1}F_{2,2,2}F_{1,1}^2F_{2,1,1}F_{2,2}^2 - 12F_{1,2}F_{2,2}^2F_{1,1}^2F_{1,1,2}F_{2,1,1} - \\
& - 24F_{2,1}^2F_{2,2}^3F_{1,1,1}F_{1,1,2} + 2F_{1,1}^5F_{2,2,2,2}F_{2,2} + 6F_{1,1}^2F_{1,2,2}F_{2,1,1}F_{1,2}^2F_{2,1} + \\
& + 12F_{1,2}F_{1,1}^3F_{1,1,2}F_{2,1,2}F_{2,2} - 6F_{1,1}^4F_{1,2,2}F_{2,1,2}F_{2,2} - 12F_{1,2}F_{1,1,1}F_{2,1}^2F_{1,2,2}F_{2,2}F_{1,1} + \\
& + 18F_{2,2}^3F_{2,1}F_{1,1,2}F_{2,1,1}F_{1,1} + 9F_{1,2}F_{2,1}^3F_{1,1,2}F_{2,1,2}F_{1,1} + 42F_{1,2}F_{2,2}F_{1,1}^2F_{2,1,2}F_{1,1,2}F_{2,1} + \\
& + 6F_{1,1}^3F_{2,1,2,2}F_{1,2}^2F_{2,1} + 6F_{2,1}^2F_{2,1,2,2}F_{1,1}^2F_{1,2}^2 + 24F_{1,2}^2F_{2,1}^2F_{1,1,2}F_{2,1,2}F_{1,1} + \\
& + 3F_{2,1}^2F_{2,2,2}F_{1,1}F_{2,1,1}F_{1,2}^2 - 6F_{1,1}F_{2,1}^3F_{1,1,2,2}F_{1,2}^2 + 3F_{1,2}^3F_{2,1}^3F_{1,1,1,2} - 12F_{1,2}F_{1,1}^2F_{1,1,2}^2F_{2,1}F_{2,2} - \\
& - 18F_{2,2}^2F_{2,1}F_{2,1,2}F_{1,1}F_{1,2}F_{2,1,1} - 9F_{2,2}^3F_{1,1}F_{1,1,2}F_{2,1}F_{1,1,1} - 24F_{2,2}F_{1,1}F_{2,1,2}F_{1,1,1}F_{1,2}^2F_{2,1} - \\
& - 18F_{1,2}F_{2,1}^2F_{2,2,2}F_{1,1}^2F_{2,1,2} + 2F_{2,1}^4F_{1,2,2,2}F_{2,2}F_{1,1} - 18F_{2,2}F_{2,1}F_{2,1,2}F_{1,1}F_{1,2}^2F_{2,1,1} + \\
& + 3F_{1,2}F_{2,1}^3F_{1,1,2,2}F_{2,2}F_{1,1} - 6F_{1,2}F_{1,1}^2F_{1,1,2}F_{2,1}F_{1,1,1}F_{2,2} - 21F_{2,2}F_{1,1}F_{1,1,2}F_{2,1,1}F_{1,2}^2F_{2,1} + \\
& + 6F_{1,1}^3F_{1,1,2}F_{2,1}F_{2,2}F_{1,1,2} - 12F_{1,2}F_{2,1}^2F_{2,2,2}F_{1,1,1}F_{2,2}F_{1,1} - 36F_{2,1,2}F_{2,1}^2F_{1,1,2}F_{2,2}^2F_{1,1} + \\
& + 2F_{1,1,1,1}F_{1,2}^3F_{2,1}F_{2,2}F_{1,1} + 9F_{2,1}^2F_{2,2,2}F_{1,1}F_{1,1,1}F_{1,2}^2 + 9F_{1,1,1}F_{2,1}^2F_{1,2,2}F_{2,2}^2F_{1,1} - \\
& - 24F_{2,2}^2F_{1,1}^2F_{2,1,2}F_{1,1,2}F_{2,1} + 6F_{2,2}^3F_{1,1}^2F_{1,1,2}F_{2,1,1} + 6F_{2,2}F_{2,1}^2F_{1,1,2}F_{2,1,1}F_{1,2}^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 3F_{2,1}^2 F_{2,2,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2} - 27F_{2,2} F_{1,1} F_{2,1}^3 F_{1,2,2} F_{1,1,2} + 18F_{1,2} F_{1,1}^2 F_{1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1,2} - \\
& - 3F_{1,2} F_{2,1} F_{2,1,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2} - 3F_{1,1} F_{2,1}^4 F_{1,2,2,2} F_{1,2} + 2F_{1,1}^3 F_{1,2,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,2} + \\
& + 18F_{1,1,2}^2 F_{2,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1} - 6F_{1,1} F_{1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1,1} F_{1,2}^2 - 9F_{2,1,1} F_{2,2,2} F_{1,1}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1} + \\
& + 6F_{2,1} F_{2,2}^4 F_{1,1,1}^2 - 27F_{1,2} F_{2,1}^2 F_{2,2,2} F_{1,1}^2 F_{1,1,2} + 3F_{1,2} F_{2,1,1,1} F_{2,2}^3 F_{1,1}^2 + \\
& + 36F_{1,1}^2 F_{1,1,2} F_{2,1,2} F_{1,2}^2 F_{2,1} - 42F_{1,2} F_{2,1,2} F_{2,1}^2 F_{1,1,2} F_{2,2} F_{1,1} + 6F_{1,2} F_{1,1}^3 F_{1,2,2} F_{2,1,1} F_{2,2} + \\
& + 3F_{2,1,1} F_{2,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2}^2 - 6F_{1,1}^2 F_{1,2}^3 F_{2,1,1,2} F_{2,1} - 18F_{2,2} F_{2,1} F_{2,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,1,2} - 6F_{1,1} F_{1,2}^4 F_{2,1,1}^2 + \\
& + 6F_{1,2} F_{1,1}^3 F_{1,1,2,2} F_{2,1} F_{2,2} - 6F_{2,1,1} F_{2,2}^3 F_{1,1}^2 F_{2,1,2} + 9F_{2,1}^2 F_{2,2,2}^2 F_{1,1}^3 - \\
& - 27F_{1,2} F_{2,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1,1} F_{1,1,2} + 9F_{2,2} F_{1,1}^4 F_{2,2,2} F_{2,1,2} - 6F_{2,1}^2 F_{2,2,2} F_{1,1,1} F_{2,2}^2 F_{1,1} + \\
& + 3F_{1,2} F_{2,2}^2 F_{2,1}^2 F_{1,1,1,2} F_{1,1} - 6F_{1,1}^2 F_{1,1,2}^2 F_{2,1} F_{2,2}^2 - 18F_{1,2} F_{2,1,1} F_{2,2}^2 F_{1,1}^2 F_{2,1,2} + \\
& + 18F_{1,2} F_{2,2} F_{2,1}^3 F_{1,1,2}^2 - 18F_{2,2} F_{2,1}^2 F_{2,2,2} F_{1,1}^2 F_{2,1,2} - 2F_{2,1}^3 F_{2,2,2,2} F_{1,1}^2 F_{2,2} - \\
& - 12F_{2,1}^2 F_{1,2,2} F_{2,1,1} F_{2,2}^2 F_{1,1} + 24F_{1,2} F_{2,1,2} F_{2,1} F_{1,1}^2 F_{2,2}).
\end{aligned}$$

Приведем явные выражения для оператора \bigcirc_3 в трех рассмотренных выше калибровках.

Экспоненциальная калибровка:

$$\bigcirc_3 = \bigcirc_{3r} - \frac{1}{9r^2} (\partial_1^2 + \partial_2^2 - \partial_1 \partial_2) \partial_r + \frac{1}{27r^3} (2\partial_2^3 + 2\partial_2^3 - 3\partial_1 \partial_2^2 - 3\partial_1^2 \partial_2); \quad (136)$$

тригонометрическая калибровка:

$$\bigcirc_3 = \bigcirc_{3r} - \frac{1}{12r^2} (\partial_1^2 + (1/\xi^1) \partial_1 + (1/\xi^1)^2 \partial_2^2) \partial_r + \frac{1}{r^3} \sum_{k=0,3;s=0,3-k} \frac{\mathcal{P}_{ks}(\xi^2)}{(\xi^1)^{k-3}} \partial_1^k \partial_2^s; \quad (137)$$

лестничная калибровка:

$$\bigcirc_3 = \bigcirc_{3r} + \frac{1}{216r^3 e^{3\xi^2}} \sum_{k=0,3;s=0,3-k} \frac{\mathcal{K}_{ks}(e^{\xi^2})}{(\xi^1)^{k-3}} \partial_1^k \partial_2^s. \quad (138)$$

В (136)-(138) использованы следующие обозначения: \bigcirc_{3r} — радиальная часть оператора \bigcirc_3 , которая не зависит от выбора угловой калибровки и определяется соотношением:

$$\bigcirc_{3r} = \mathcal{Q}_{rrr}^3 \partial_r^3 + \mathcal{Q}_{rr}^2 \partial_r^2 + \mathcal{Q}_r^1 \partial_r = \frac{1}{27} (\partial_r^3 + (3/r) \partial_r^2 + (1/r^2) \partial_r); \quad (139)$$

$\partial_1 = \partial/\partial\xi^1$, $\partial_2 = \partial/\partial\xi^2$; полиномы \mathcal{P}_{ks} от тригонометрических функций переменной ξ^2 в (137) определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{30} &= -\frac{\sqrt{3}}{36} \sin \xi^2 (4 \cos^2 \xi^2 - 1); & \mathcal{P}_{20} &= -3\mathcal{P}_{30}; \\
\mathcal{P}_{21} &= -\frac{\sqrt{3}}{12} \cos \xi^2 (4 \cos^2 \xi^2 - 3); & \mathcal{P}_{12} &= \mathcal{P}_{20}; \\
\mathcal{P}_{11} &= -3\mathcal{P}_{21}; & \mathcal{P}_{20} &= -\mathcal{P}_{10}; \\
\mathcal{P}_{03} &= \frac{12}{27} \mathcal{P}_{21}; & \mathcal{P}_{02} &= 6\mathcal{P}_{30}; \\
\mathcal{P}_{01} &= \frac{8}{3} \mathcal{P}_{21}; & \mathcal{P}_{00} &= 0;
\end{aligned} \quad (140)$$

полиномы от e^{ξ^2} в (138) определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_{30}(x) &= 2x^6 - 3x^4 - 3x^2 + 2; \\
 \mathcal{K}_{20}(x) &= -6x^6 - 3x^4 - 3x^2 - 6; \\
 \mathcal{K}_{21}(x) &= -6x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 6; \\
 \mathcal{K}_{10}(x) &= -\mathcal{K}_{20}(x); \\
 \mathcal{K}_{11}(x) &= 18x^6 + 3x^4 - 3x^2 - 18; \\
 \mathcal{K}_{12}(x) &= -\mathcal{K}_{20}(x); \\
 \mathcal{K}_{00}(x) &= 0; \\
 \mathcal{K}_{01}(x) &= 16(1 - x^6); \\
 \mathcal{K}_{02}(x) &= 2\mathcal{K}_{20}(x); \\
 \mathcal{K}_{03}(x) &= -2x^6 - 3x^4 + 3x^2 + 2.
 \end{aligned} \tag{141}$$

5 Радиальная часть \bigcirc_{nr} .

Рассмотрим вопрос об общем виде радиальной части \bigcirc_{nr} оператора \bigcirc_n в пространстве H_n произвольной размерности. Простое наблюдение в H_2 и H_3 (а также наблюдение с классическим оператором Лапласа в R^n) обнаруживает, что \bigcirc_{nr} не зависит от угловых координат (формулы (105) и (122)). Этот результат можно доказать и в общем виде для произвольной размерности. Действительно, если функция $f: H_n \rightarrow R$ постоянна на финслеровых сферах, т.е. $f = f(r)$, то результат действия оператора \bigcirc_n на ней очевидно сводится к виду:

$$\bigcirc_n f = \bigcirc_{nr} f. \tag{142}$$

С другой стороны с учетом выражения $r = (x^1 \cdots x^n)^{1/n}$, мы можем непосредственно вычислить:

$$\partial_1 f = f' \partial_1 r = \frac{1}{nx^1} f' r; \quad \partial_2 \partial_1 f = \frac{1}{n^2 x^1 x^2} (f' r)' r; \quad \dots \tag{143}$$

и, стало быть, окончательно:

$$\bigcirc_n f = \partial_1 \cdots \partial_n f = \frac{1}{n^n r^n} \left(r \frac{d}{dr} \right)^n f. \tag{144}$$

Сравнивая правые части (142) и (144), приходим к заключению, что \bigcirc_{nr} не зависит от угловых переменных (независимо от выбора угловой калибровки) и общий вид радиальной части оператора \bigcirc_n дается следующим свернутым выражением:

$$\bigcirc_{nr} = \frac{1}{n^n r^n} \left(r \frac{d}{dr} \right)^n. \tag{145}$$

Для получения развернутого вида \bigcirc_{rn} можно использовать рекуррентное соотношение:

$$\bigcirc_{nr} = \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \left(\frac{n-1}{r} \bigcirc_{n-1,r} + \frac{d}{dr} \bigcirc_{n-1,r} \right), \tag{146}$$

которое вытекает непосредственно из вида (145). Мы выведем развернутое представление для \bigcirc_{nr} матричным методом. Для этого сначала представим оператор \bigcirc_{rn} в виде полинома по степеням d/dr с коэффициентами, удовлетворяющими соотношениям однородности

(оператор \bigcirc_{nr} (и даже оператор \bigcirc_n) однородны по r со степенью однородности $-n$):

$$\bigcirc_{nr} = \sum_{s=1}^n \frac{A_{ns}}{r^{n-s}} \left(\frac{d}{dr} \right)^s, \quad (147)$$

где A_{ns} — числовые коэффициенты, подлежащие определению. С помощью формулы (144) рассмотрим действие \bigcirc_{rn} на функции $\Phi_k(r) = r^k$. С одной стороны по формуле (144) сразу получаем:

$$\bigcirc_{nr} \Phi_k = \left(\frac{k}{n} \right)^n \frac{1}{r^{n-k}}. \quad (148)$$

С другой стороны по формуле (147) получаем:

$$\bigcirc_{nr} \Phi_k = \frac{1}{r^{n-k}} (A_{n1}k + A_{n2}k(k-1) + \dots + A_{ns}k!/(k-s)! + \dots + A_{nk}k!). \quad (149)$$

Приравнявая (148) и (149) приходим к системе уравнений:

$$A_{n1}k + A_{n2}k(k-1) + \dots + A_{ns}k!/(k-s)! + \dots + A_{nk}k! = \left(\frac{k}{n} \right)^n, \quad k = 1, \dots, n. \quad (150)$$

Разделив обе части (150) на $k!$ и переходя к матричным обозначениям, получаем матричное уравнение:

$$M_n \cdot A_n = F_n, \quad (151)$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n1} \\ \vdots \\ A_{nn} \end{pmatrix}; \quad F_n = \begin{pmatrix} 1/n^n \\ \vdots \\ 1/n! \end{pmatrix};$$

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2! & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1/3! & 1/2! & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1/4! & 1/3! & 1/2! & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/(n-1)! & 1/(n-2)! & \dots & 1/2! & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (152)$$

Общие элементы матриц F_n и M_n задаются следующими формулами:

$$(F_n)_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{k}{n} \right)^n; \quad (M_n)_{ik} = \begin{cases} 1/(i-k)!, & i \geq k; \\ 0, & i < k. \end{cases} \quad (153)$$

Матрица M_n является нижнетреугольной, поэтому и обратная к ней матрица M_n^{-1} также будет нижнетреугольной. Нетрудно проверить непосредственным вычислением, что эта обратная матрица имеет следующий вид:

$$M_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2! & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1/3! & 1/2! & -1 & 1 & 0 & \dots \\ 1/4! & -1/3! & 1/2! & -1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1}/(n-1)! & (-1)^n/(n-2)! & \dots & 1/2! & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (154)$$

или в компонентах:

$$(M_n^{-1})_{ik} = \begin{cases} (-1)^{i+k}/(i-k)!, & i \geq k; \\ 0, & i < k. \end{cases} \quad (155)$$

Произведение матриц M_n и M_n^{-1} записывается в компонентах следующим образом:

$$(M_n \cdot M_n^{-1})_{ik} = \sum_{s=1}^n (M_n)_{is} (M_n^{-1})_{sk} = \sum_{s=k}^i \frac{(-1)^{s+k}}{(i-s)!(s-k)!}, \quad (156)$$

где были учтены формулы (153) и (155). Заменяя индекс суммирования s на $p = s - k$ и полагая $i - k = N$, получаем:

$$\sum_{s=k}^i \frac{(-1)^{s+k}}{(i-s)!(s-k)!} = \sum_{p=0}^N \frac{(-1)^p}{(N-p)!p!} = \frac{1}{N!} \sum_{p=0}^N (-1)^p C_p^N = \frac{(1-1)^N}{N!}, \quad (157)$$

что равно нулю в случае $N \neq 0$, (т.е. при $i \neq k$) и равно единице при $N = 0$, (т.е. при $i = k$.) что и требуется для обратной матрицы. Теперь из (151) после умножения на обратную матрицу, получаем:

$$A_n = M_n^{-1} \cdot F_n, \quad (158)$$

или, с учетом (152) и (156), в компонентах

$$A_{nk} = \sum_{s=1}^n (M^{-1})_{ks} (F_n)_s = \sum_{s=1}^k \frac{(-1)^{k+s}}{(k-s)!} \frac{1}{s!} \left(\frac{s}{n}\right)^n = \frac{(-1)^k}{n^n k!} \sum_{s=0}^k (-1)^s C_s^k s^n. \quad (159)$$

При $n = 2$ и 3 полученная формула воспроизводит уже приведенные выше выражения для \bigcirc_{2r} и \bigcirc_{3r} .

6 Точечные центрально-симметричные источники

Переходя в формуле (144) к новой переменной $u = \ln r$, получим более простое выражение для оператора \bigcirc_{nr} :

$$\bigcirc_n f = \partial_1 \cdots \partial_n f = \frac{e^{-nu}}{n^n} \frac{d^n}{du^n} f. \quad (160)$$

Общее центрально-симметричное решение уравнения $\bigcirc_{nr} R_n = 0$ очевидно имеет вид полинома порядка $n - 1$ с произвольными вещественными коэффициентами или, в терминах исходной радиальной переменной r , полинома по логарифмам:

$$R_n(r) = c_0 + c_1 \ln r + c_2 \ln^2 r + \dots c_{n-1} \ln^{n-1} r. \quad (161)$$

Функция (161) удовлетворяет уравнению $\bigcirc_n R_n = 0$ всюду за исключением множества точек, конуса $r = 0$, на котором функция R_n неопределена. По аналогии с евклидовым пространством, решение (161) можно рассматривать как поле некоторого источника, локализованного на конусе¹⁰ $r = 0$. При этом физическим смыслом обладают не сами константы c_i , а их специальные комбинации, которые получаются сравнением выражения (161) и эквивалентного ему выражения:

$$R_n(r) = Q \left(\varepsilon_1 \ln \left[\frac{r}{r_1} \right] + \varepsilon_2 \ln^2 \left[\frac{r}{r_2} \right] + \dots + \varepsilon_{n-1} \ln^{n-1} \left[\frac{r}{r_{n-1}} \right] \right), \quad (162)$$

¹⁰Хотя функция (161) не является функцией Грина для оператора \bigcirc_n с сингулярным источником в правой части.

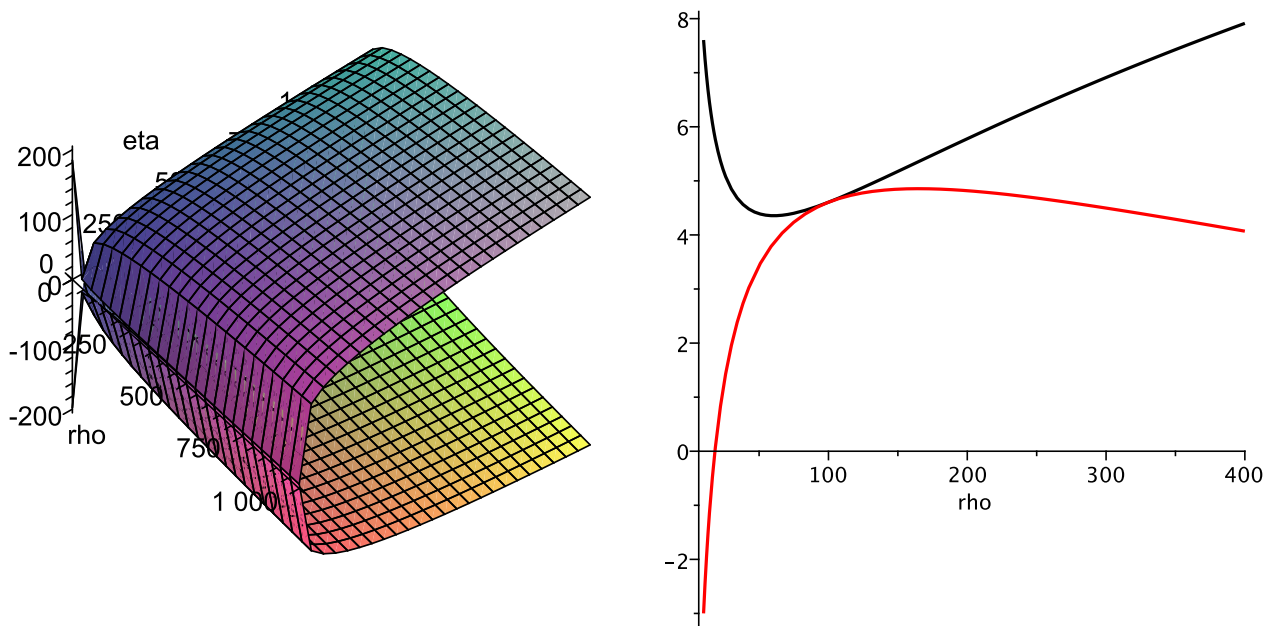


Рис. 1: Слева — зависимость приведенного потенциала $F_3(\rho, \eta)$ от параметров, справа — ее сечение при $\eta = 0.01$ ($\varepsilon = +1$ для верхней кривой и $\varepsilon = -1$ для нижней кривой).

в котором восстановлена правильная физическая размерность. Здесь $\varepsilon_i = \pm 1$ — знаковые множители. Таким образом, n констант интегрирования распределяются на одну физическую константу, имеющую смысл заряда источника, и $n - 1$ масштабных r_i констант, задающих различные масштабы длины. Для случаев $n = 3$ и $n = 4$ соответствующие формулы связи наборов $\{c_i\}$ и $\{Q, r_i\}$ даются выражениями:

$$Q = \frac{c_2}{\varepsilon_2}; \quad r_1 = \exp \left[\frac{(c_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 c_2)^2 - 4c_0 c_2}{4\varepsilon_1 \varepsilon_2 c_2^2} \right]; \quad r_2 = \exp \left[\frac{\varepsilon_1 c_2 - \varepsilon_2 c_1}{2\varepsilon_2 c_2} \right]; \quad (n = 3), \quad (163)$$

$$Q = \frac{c_3}{\varepsilon_3}; \quad r_3 = \exp \left[\frac{c_3 \varepsilon_2 - c_2 \varepsilon_3}{3\varepsilon_3 c_3} \right]; \quad r_2 = \exp \left[\frac{-3c_1 c_3 + 3\varepsilon_1 \varepsilon_3 c_3^2 + c_2^2 - 2c_2 c_2 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + c_3^2}{6\varepsilon_2 \varepsilon_3 c_3^2} \right];$$

$$r_1 = \exp \left[(-108\varepsilon_2 \varepsilon_3 c_0 c_3^3 + 27c_1^2 c_3^2 + (26 + 18\varepsilon_1 \varepsilon_3)c_3^4 + 3c_2^4 - 8\varepsilon_2 c_2^3 c_3 + \right. \\ \left. + (6 + 18\varepsilon_1 \varepsilon_2)c_2^2 c_3^2 - (18 + 54\varepsilon_1 \varepsilon_3)c_1 c_3^3 - 18c_1 c_2^2 c_3 + 36\varepsilon_2 \varepsilon_3 c_1 c_2 c_3^2 - \right. \\ \left. - 36\varepsilon_1 \varepsilon_2 c_2 c_3^3 \right] / (108\varepsilon_1 \varepsilon_2 c_3^4). \quad (164)$$

Исследуем подробнее приведенную зависимость R_3 вида

$$F_3 = \ln \rho + \varepsilon \ln^2(\eta \rho), \quad (165)$$

в которой оставлены лишь существенные параметры. Зависимость $F_3(\rho, \eta)$ получится из (162) при $Q = 1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$, $\rho = r/r_1$, $\eta = r_1/r_2$. График для $F_3(\rho, \eta)$ представлен на рисунке 1.

Из графиков видно, что различный выбор знаковых множителей определяет общий характер поведения потенциала (возрастание или убывание в окрестности нуля или на бесконечности). Характерной особенностью полиномиально-логарифмического потенциала является наличие точек равновесия (устойчивых на верхней кривой и неустойчивых на нижней). При этом для нижней ветви $\varepsilon = -1$ нуль и бесконечность разделены бесконечно

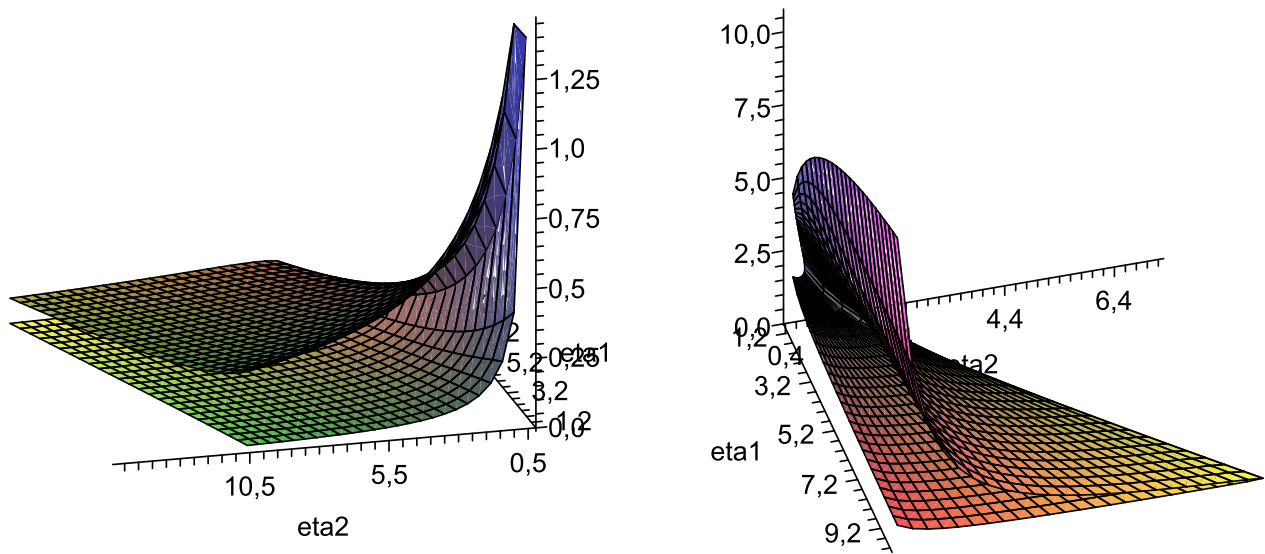


Рис. 2: Слева — зависимость положения экстремумов ρ_{--}^{\pm} потенциала F_4 , справа — экстремумов ρ_{-+}^{\pm} того же потенциала.

высоким потенциальным барьером. Координаты экстремумов легко получаются дифференцированием зависимости (165) по переменной ρ . Результат дается выражением:

$$\rho_{\pm} = \frac{\sqrt{e^{\mp 1}}}{\eta}, \tag{166}$$

где знак «плюс» соответствует минимуму верхней зависимости, а знак минус — максимуму нижней. Видно, что при увеличении параметра η экстремумы сдвигаются влево (графики сжимаются), а при уменьшении параметра η экстремумы сдвигаются вправо (графики растягиваются). Отметим, наконец, что визуальный эффект соприкосновения ветвей неслучаен: они действительно соприкасаются в точке $\rho = 1/\eta$.

Перейдем к приведенной зависимости F_4 , которая дается выражением:

$$F_4(\rho, \eta_1, \eta_2) = \ln \rho + \varepsilon_1 \ln^2(\eta_1 \rho) + \varepsilon_2 \ln^3(\eta_2 \rho). \tag{167}$$

Точки экстремума (нули производной $\partial F_4 / \partial \rho$) даются следующей общей формулой:

$$\rho_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}^{\pm} = \frac{e^{-2\varepsilon_1 \pm \sqrt{1 - 3\varepsilon_2 + 6\varepsilon_2 \ln(\eta_2 / \eta_1)}}}{\eta_2}. \tag{168}$$

Теперь мы имеем четыре ветви потенциала (все случаи выбора знаковых констант $\varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1$) и для каждой из них мы будем иметь по две, одной или ни одной точки экстремума, в зависимости от знака подкоренного выражения в показателе экспоненты (это дискриминант квадратного уравнения). На графиках (рис. 2) приведена пара характерных зависимостей.

Из графиков видно, что вся область значений параметров η_1 и η_2 разбивается на под-область, где у F_4 нет экстремумов, подобласть, где у нее два экстремума и их границу — кривую, на которой экстремум один. Типичная зависимость F_4 с двумя экстремумами представлена на рисунке 3 (слева).

Вообще выбирая логарифмический полином $R_n(r)$ при достаточно большом n , можно получать довольно сложные немонотонные зависимости. На графике 3 справа представлен

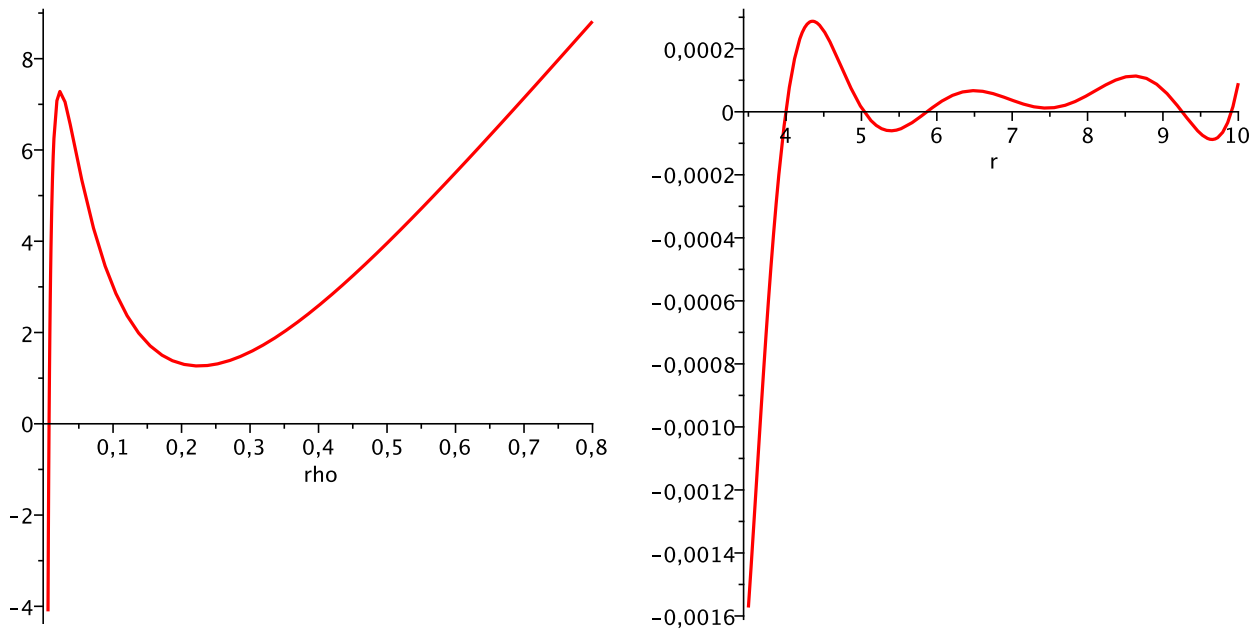


Рис. 3: Слева — зависимость $F_4(\rho)$ при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \eta_1 = 1$, $\eta_2 = 10$. Справа — фрагмент зависимости $R_{10}(r)$ при $c_1 \approx -62$, $c_2 \approx 383$, $c_3 \approx -1018$, $c_4 \approx 1545$, $c_5 \approx -1480$, $c_6 \approx 929$, $c_7 \approx -383$, $c_8 \approx 100$, $c_9 \approx -15$, $c_{10} \approx 1$.

фрагмент зависимости $R_{10}(r)$ при некотором специальном выборе констант c_i , $i = 1, \dots, 10$. Отметим, что асимптотическое поведение $R_n(r)$ при $r \rightarrow 0$ или $r \rightarrow \infty$ будет определяться старшей степенью логарифма. По этой причине коэффициент при старшей степени логарифма и следует отождествить с гиперболическим зарядом, в чем мы убедимся непосредственно в разделе 8.

7 Разделение переменных в операторе \mathcal{O}_3

В этом разделе мы исследуем вопрос о разделении переменных в операторе \mathcal{O}_3 в экспоненциальной калибровке. Мы выведем явные формулы для гиперболических аналогов сферических гармоник и радиальных полиномов. Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{O}_3 \Phi = 0, \quad (169)$$

которое представляет собой «гиперболический симбиоз» уравнения Лапласа и волнового уравнения. Оператор \mathcal{O}_3 возьмем в экспоненциальной калибровке (136), а решение представим в виде следующего произведения:

$$\Phi(r, \xi_1, \xi_2) = R(r) \Xi_1(\xi_1) \Xi_2(\xi_2). \quad (170)$$

Подставляя это выражение в (169) и разделяя переменные, получим (169) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{O}_{3r}}{R} - \frac{R'}{9r^2 R} \left(\frac{\Xi_1''}{\Xi_1} + \frac{\Xi_2''}{\Xi_2} - \frac{\Xi_1' \Xi_2'}{\Xi_1 \Xi_2} \right) + \\ + \frac{1}{27r^3} \left(2 \frac{\Xi_1'''}{\Xi_1} + 2 \frac{\Xi_2'''}{\Xi_2} - 3 \frac{\Xi_1' \Xi_2''}{\Xi_1 \Xi_2} - 3 \frac{\Xi_1'' \Xi_2'}{\Xi_1 \Xi_2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (171)$$

Общее условие разделения переменных в (171) имеет вид:

$$\Xi_1' = \sigma_1 \Xi_1; \quad \Xi_2' = \sigma_2 \Xi_2 \quad (172)$$

или эквивалентно:

$$\Xi_1 = \Xi_{01} e^{\sigma_1 \xi^1}; \quad \Xi_2 = \Xi_{20} e^{\sigma_2 \xi^2}, \quad (173)$$

где σ_1, σ_2 — произвольные вещественные константы. Таким образом, роль сферических гармоник играют вещественные экспоненты. Нетрудно убедиться, что каждая из функций (173) реализует неприводимое (1-мерное, как и должно быть для абелевой группы) представление группы гиперболических вращений. Действительно, произвольный элемент $e^{\chi^1 e_1 + \chi^2 e_2 - (\chi^1 + \chi^2) e_3}$ группы гиперболических вращений действует на угловые координаты $\{\xi^1, \xi^2\}$ по правилу:

$$\xi^1 \rightarrow \xi'^1 = \xi^1 + \chi^1; \quad \xi^2 \rightarrow \xi'^2 = \xi^2 + \chi^2. \quad (174)$$

Обозначая операцию гиперболического вращения оператором $\hat{\mathcal{D}}_{(\chi^1, \chi^2)}$, с учетом (174) находим для функций Θ_i :

$$\hat{\mathcal{D}}_{(\chi^1, \chi^2)} \Xi_1 = e^{\sigma_1 \chi^1} \Xi_1; \quad \hat{\mathcal{D}}_{(\chi^1, \chi^2)} \Xi_2 = e^{\sigma_2 \chi^2} \Xi_2, \quad (175)$$

т.е. функции Ξ_1, Ξ_2 являются собственными функциями оператора $\hat{\mathcal{D}}_{(\chi^1, \chi^2)}$.

С учетом явного вида угловой части решения, получаем для радиальной части уравнение вида:

$$R''' + \frac{3}{r} R'' + \frac{a}{r^2} R' + \frac{b}{r^3} R = 0, \quad (176)$$

где

$$a = 1 - 3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2) \leq 1; \quad b = 2(\sigma_1^3 + \sigma_2^3) - 3(\sigma_1 \sigma_2^2 + \sigma_2 \sigma_1^2). \quad (177)$$

Переходя к новой переменной $\tau = \ln r$, приводим уравнение (176) к уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{R} + (a - 1)\dot{R} + bR = 0 \quad (178)$$

Это уравнение можно немного упростить, сделав еще одну замену переменной:

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1-a}}. \quad (179)$$

При этом уравнение (178) переходит в уравнение с одним свободным непрерывным параметром:

$$\ddot{R} - \dot{R} + qR = 0, \quad (180)$$

где $q = b/(1-a)^{3/2}$ при $a \neq 1$ и $q = b$ при $a = 1$. В уравнении (180) мы сохранили штрих для производной по новой переменной τ' , при этом когда $a = 1$ мы полагаем в нем $\tau' = \tau$. Отметим, что значение $a = 1$ соответствует сферически-симметричному случаю $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, подробно разобранному в предыдущем разделе. По этой причине далее мы его не рассматриваем.

Дальнейшее исследование уравнения (180) сводится к изучению структуры корней характеристического уравнения:

$$\lambda^3 - \lambda + q = 0. \quad (181)$$

Три корня этого уравнения можно представить в следующем виде:

$$\lambda_0 = \frac{1}{6} \Delta_q^{1/3} + \frac{2}{\Delta_q^{1/3}}; \quad \lambda_{\pm} = -\frac{\Delta_q^{1/3}}{12} - \frac{\varepsilon}{\Delta_q^{1/3}} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\Delta_q^{1/3}}{6} - \frac{2\varepsilon}{\Delta_q^{1/3}} \right), \quad (182)$$

где $\Delta_q = -108q + 12\sqrt{81q^2 - 12}$. Рассмотрим все возможные случаи.

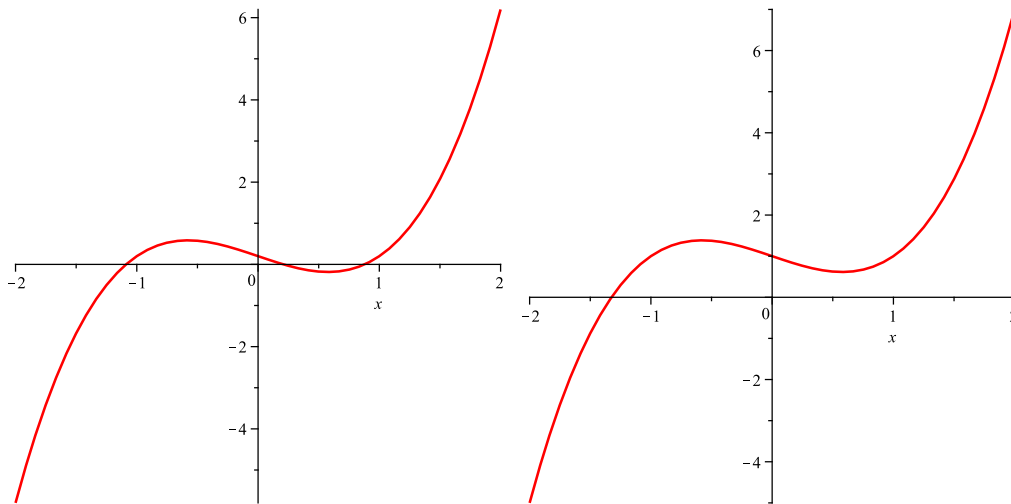


Рис. 4: Слева — типичный вид графика характеристического многочлена при $|q| < 2\sqrt{3}/9$. Все три корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — вещественны. Справа — типичный вид графика характеристического многочлена при $|q| > 2\sqrt{3}/9$. При этом один его корень λ_0 — вещественен, а два λ_{\pm} — комплексно-сопряжены.

1. $|q| < 2\sqrt{3}/9$. В этом случае график кубического трехчлена имеет вид, показанный на рисунке 4 (слева).

При этом, как это можно непосредственно проверить все три корня в (182) оказываются вещественными и различными. Общее решение уравнения (180) можно представить в виде:

$$R(\tau') = C_1 e^{\lambda_1 \tau'} + C_2 e^{\lambda_2 \tau'} + C_3 e^{\lambda_3 \tau'} \quad (183)$$

или возвращаясь к радиальной переменной:

$$R^{(\sigma_1, \sigma_2)}(r) = C_1 r^{\lambda_1 \sqrt{1-a}} + C_2 r^{\lambda_2 \sqrt{1-a}} + C_3 e^{\lambda_3 \sqrt{1-a}}, \quad (184)$$

где C_i ($i = 1, 2, 3$) — произвольные константы интегрирования.

2. $|q| > 2\sqrt{3}/9$. В этом случае график кубического трехчлена имеет вид, показанный на рисунке 4 (справа). Имеется один вещественный корень λ_0 и два комплексно-сопряженных λ_{\pm} . При этом общее решение будет иметь следующий вид:

$$R(\tau') = C_1 e^{\lambda_0 \tau'} + e^{\operatorname{Re} \lambda_{\pm} \tau'} (C_2 \sin[\sqrt{|\lambda_{\pm}|^2 - \operatorname{Re}^2 \lambda_{\pm} \tau'}] + C_3 \cos[\sqrt{|\lambda_{\pm}|^2 - \operatorname{Re}^2 \lambda_{\pm} \tau'}]) \quad (185)$$

или в радиальных координатах:

$$R^{(\sigma_1, \sigma_2)}(r) = C_1 r^{\lambda_0 \sqrt{1-a}} + r^{\operatorname{Re} \lambda_{\pm} \sqrt{1-a}} \times \quad (186)$$

$$(C_2 \sin[\sqrt{|\lambda_{\pm}|^2 - \operatorname{Re}^2 \lambda_{\pm} \sqrt{1-a} \ln r}] + C_3 \cos[\sqrt{|\lambda_{\pm}|^2 - \operatorname{Re}^2 \lambda_{\pm} \sqrt{1-a} \ln r}]).$$

3. $|q| = 2\sqrt{3}/9$. Вид графика характеристического трехчлена показан на рис. 5 слева.

Теперь все три корня вещественны, но один из корней двукратно вырожден: $\lambda_2 = \lambda_3$. Общее решение имеет вид:

$$R(\tau') = C_1 e^{\lambda_1 \tau'} + (C_2 + C_3 \tau') e^{\lambda_2 \tau'} \quad (187)$$

или в терминах радиальной координаты:

$$R(\tau') = C_1 r^{\lambda_1 \sqrt{1-a}} + (C_2 + C_3 \ln r) r^{\lambda_2 \sqrt{1-a}}. \quad (188)$$

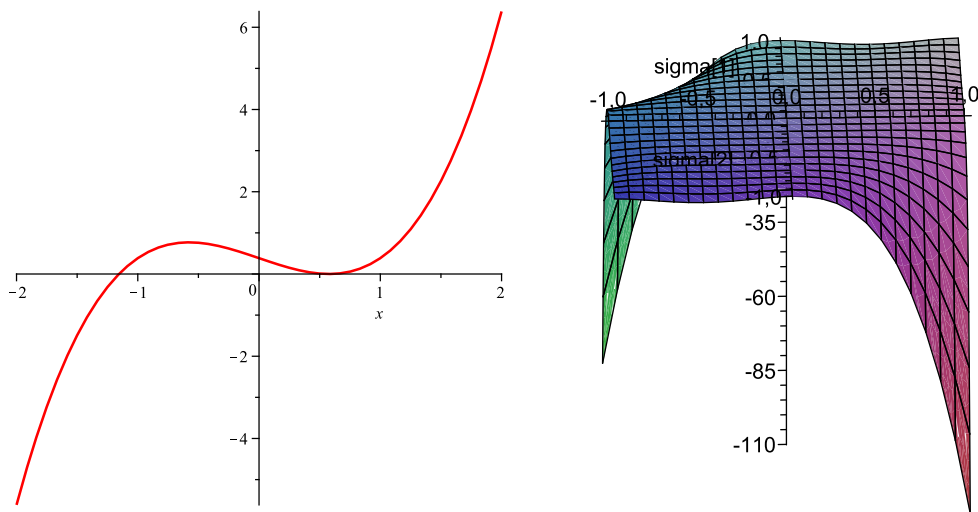


Рис. 5: Слева — вид графика характеристического многочлена при $q = 2\sqrt{3}/9$. Все корни вещественны, но два корня совпадают $\lambda_2 = \lambda_3$. При $q = -2\sqrt{3}/9$ график примыкает к оси абсцисс слева и снизу. Справа — зависимость функции $F'(q^2 - 12/81)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^3$ от параметров σ_1, σ_2 . Эта функция всюду неположительна, следовательно $q^2 \leq 12/81$.

Сделаем несколько замечаний по поводу полученных результатов.

1. Ввиду того, что именно равенство нулю величины $1 - a = 3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)$ определяет переход к сферически-симметричному случаю, величину $1 - a$ следует считать пропорциональной квадрату момента импульса поля ℓ^2 . Примечательно, что в экспоненциальной калибровке квадрат момента представляется евклидовой положительно-определенной формой компонент $\{\sigma_1, \sigma_2\}$:

$$\ell^2 = K(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) = K[(\sigma_1 - \sigma_2/2)^2 + 3\sigma_2^2/4] = K[(\sigma_2 - \sigma_1/2)^2 + 3\sigma_1^2/4]. \quad (189)$$

2. Сферически-симметричный случай не получается предельным переходом $a \rightarrow 1$ из формул (183)-(188).
3. Случай $b=0$ (или $q=0$) не является особым. Ему соответствуют решения: $\sigma_1 = 2\sigma_2$, $\sigma_2 = 2\sigma_1$ и $\sigma_1 = \sigma_2$.
4. Более детальный анализ зависимости параметра q от σ_1, σ_2 показывает, что случай $q^2 > 12/81$ на самом деле не реализуется, т.е. при всех значениях параметров σ_1 и σ_2 имеет место неравенство $q^2 \leq 12/81$. По этой причине решение (185)-(186) не реализуется в действительности. График на рис. 5 (справа) наглядно иллюстрирует сказанное. Неравенство превращается в равенство на осях $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0$ и на биссектриссе $\sigma_1 = \sigma_2$. Этим случаям соответствует решение вида (188). Всем остальным парам (σ_1, σ_2) соответствует решение (184). Наконец, имеется еще особая точка $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, которой соответствует сферически-симметричное решение, описанное в предыдущем разделе.

8 Гиперболическое поле однородно заряженного шара

Рассмотрим задачу о распределении потенциала в гиперболической теории поля в окрестности однородно заряженного гиперболического шара радиуса R . Основное уравнение для этой задачи принимает вид:

$$\bigcirc_{3r} \Phi = k\rho_0, \quad (190)$$

где $\rho_0 = \text{const}$ — плотность распределения гиперболического заряда, k — константа, зависящая от выбора системы единиц. Определение плотности ρ_0 требует некоторого допол-

нительного обсуждения, ввиду бесконечности площади любой компоненты индикатриссы (т.е. бесконечности полного телесного угла в пространстве БМ) и, как следствие, бесконечности объема шара любого отличного от нуля радиуса R . Для прояснения этого вопроса проинтегрируем уравнение (190) по объему шара радиуса $r > R$. При этом в соответствии с (108) элемент интегрирования можно представить в виде:

$$d^{(3)}V = r^2 dr d\Omega, \quad (191)$$

где $d\Omega$ — элемент интегрирования в пространстве направлений (элемент телесного угла), а в силу сферической симметрии интегрирование по радиусу и углам факторизуется:

$$\int \bigcirc_{3r} \Phi dV = \int k\rho_0 dV \Rightarrow \int \bigcirc_{3r} \Phi dV = k\rho_0 V = kQ, \quad (192)$$

где $V = R^3\Omega/3$ — объем заряженного шара, $\Omega = \int d\Omega$ — мера множества направлений (бесконечная!), Q — полный заряд шара. Следовательно плотность равномерно заряженного гиперболического шара следует определить как величину:

$$\rho_0 \equiv \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{R^3\Omega}, \quad (193)$$

содержащую бесконечную геометрическую константу Ω пространства H_3 . Далее, расписывая оператор \bigcirc_{3r} в левой части (192), получаем:

$$\int \bigcirc_{3r} \Phi dV = \int d\Omega \int_0^r \frac{1}{27\rho^3} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right)^3 \Phi(\rho) \rho^2 d\rho = \frac{\Omega}{27} \left(r \frac{d}{dr} \right)^2 \Phi(r) = kQ. \quad (194)$$

Уравнение (194) является гиперболическим аналогом электростатической теоремы Гаусса. Выберем систему единиц, в которой $k = \Omega/27$, в результате придем к уравнению:

$$\left(r \frac{d}{dr} \right)^2 \Phi(r) = Q, \quad (195)$$

последовательно интегрирование которого дает общее решение вне шара:

$$\Phi_{\text{ext}}(r) = Q \ln^2 r + C_1 \ln r + C_0, \quad (196)$$

содержащее две неопределенные константы. Это решение является членом общего класса (161)-(162) при $n = 3$.

Внутри заряженного шара уравнение (190) (с учетом наших определений ρ_0 и k) принимает следующий вид:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)^2 \Phi = \frac{3Qr^2}{R^3}. \quad (197)$$

Его непосредственное интегрирование приводит к следующему общему виду решения:

$$\Phi_{\text{in}}(r) = \frac{Q}{9R^3} r^3 + C'_2 \ln^2 r + C'_1 \ln r + C'_0. \quad (198)$$

Требование регулярности решения на конусе начала системы координат (оно в этой задаче ничем не выделено), т.е. при $r=0$ приводит к выбору констант $C'_1 = 0$, $C'_2 = 0$. Константа C'_0 отвечает за выбор начала отсчета потенциала. Мы потребуем, чтобы $\Phi_{\text{in}}(0) = 0$, откуда $C'_0 = 0$.

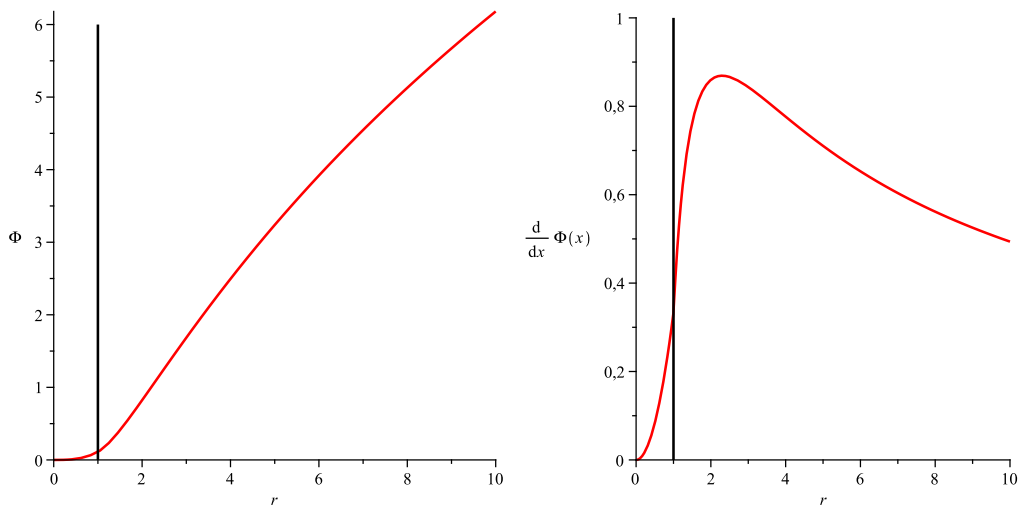


Рис. 6:

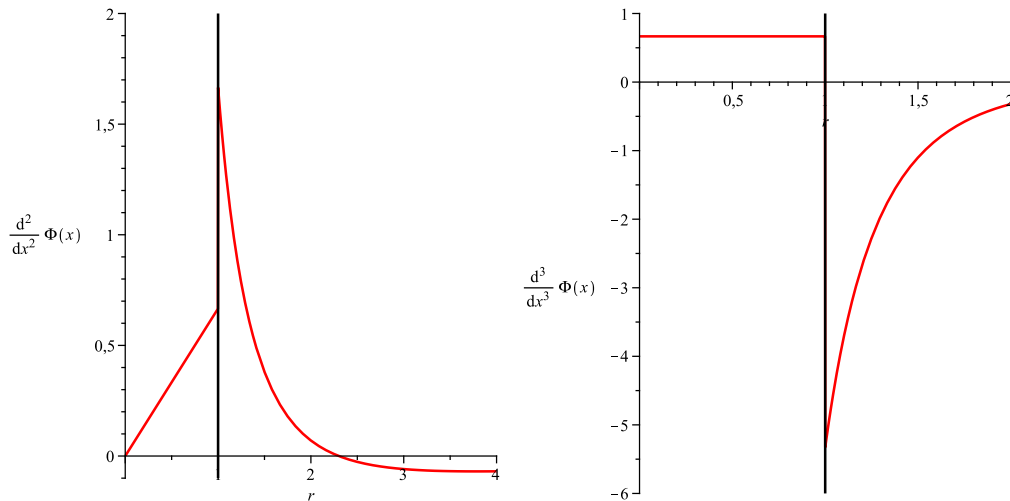


Рис. 7:

Теперь необходимо сшить части решения Φ_{in} и Φ_{ext} на границе шара при $r = R$. Полагая

$$\Phi_{\text{in}}(R) = \Phi_{\text{ext}}(R); \quad \Phi'_{\text{in}}(R) = \Phi'_{\text{ext}}(R), \tag{199}$$

находим

$$C'_1 = \frac{Q}{3} - 2Q \ln R; \quad C'_0 = Q \left(\frac{1}{9} - \ln^2 R - \frac{1}{3} \ln R \right). \tag{200}$$

Окончательно, решение задачи описывается следующей составной формулой:

$$\Phi = \begin{cases} \frac{Qr^3}{9R^3}, & r \leq R \\ Q \left(\ln^2(r/R) + \frac{1}{3} \ln(r/R) + \frac{1}{9} \right), & r \geq R \end{cases} \tag{201}$$

Для параметров $R = 1$ и $Q = 1$ соответствующие графики для потенциала и его производных, описываемых формулой (201) показаны на рисунках 6-7.

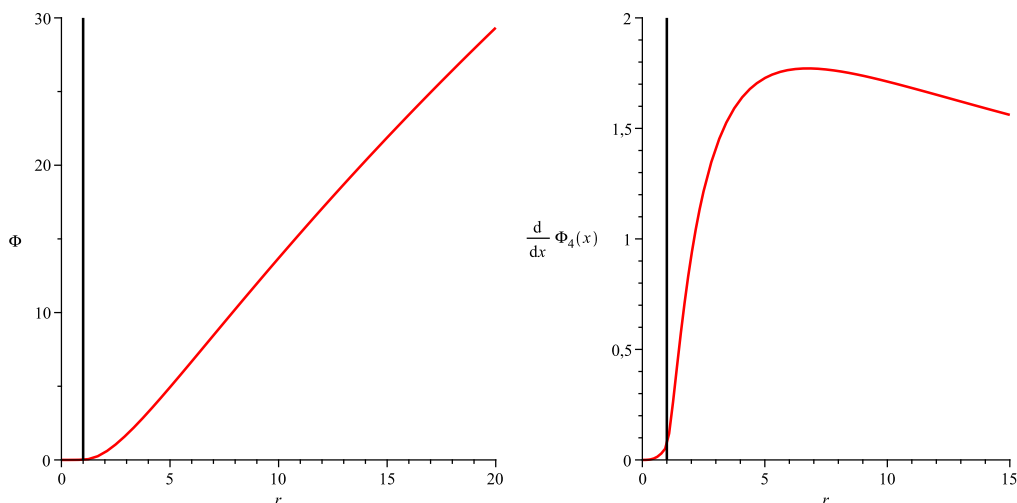


Рис. 8:

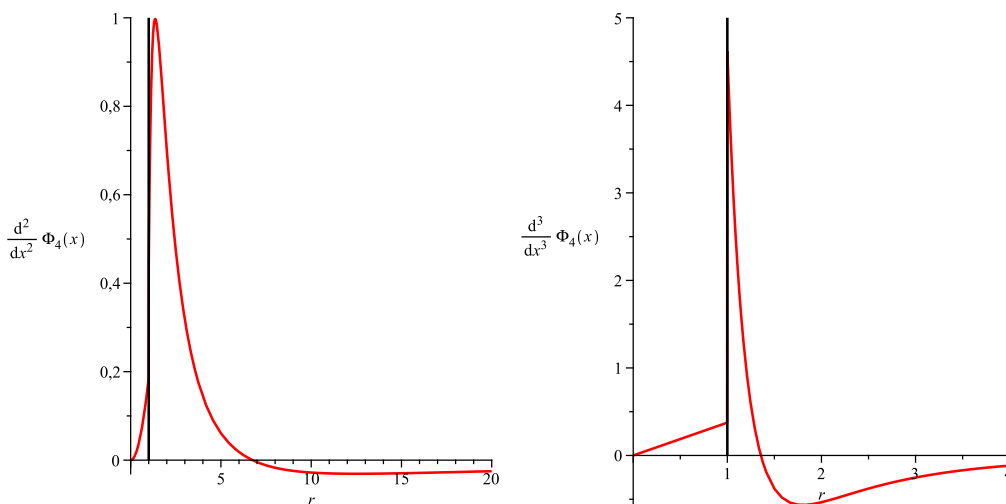


Рис. 9:

Аналогичным образом можно рассмотреть n -мерный заряженный шар, потенциал которого будет описываться скобкой:

$$\Phi_n = \begin{cases} \frac{Qr^n}{n^{n-1}R^n}, & r \leq R \\ Q \left(\ln^{n-1}(r/R) + c_{n-2} \ln^{n-2}(r/R) + \dots + c_0 \right), & r \geq R, \end{cases} \quad (202)$$

где константы c_i ($i = 0, \dots, n - 2$) определяются из условий непрерывности потенциала и его производных до $n - 2$ -ого включительно. Нетрудно проверить, что $c_0 = 1/n^{n-1}$, $c_1 = 1/n^{n-2}$, $c_2 = 1/2n^{n-3}$, ... Для $n = 4$ это дает решение вида:

$$\Phi_4 = \begin{cases} \frac{Qr^4}{64R^4}, & r \leq R \\ Q \left(\ln^3(r/R) + \frac{1}{4} \ln^2(r/R) + \frac{1}{16} \ln(r/R) + \frac{1}{64} \right), & r \geq R. \end{cases} \quad (203)$$

Зависимости потенциала (203) и его производных при $Q = 1$, $R = 1$ представлены на рис. 8-9.

9 Цилиндрическая симметрия — случай неизотропной оси симметрии

Рассмотрим теперь подробно цилиндрическую систему координат, ось которой является неизотропной прямой. Выкладки в этом случае оказываются существенно более сложными, чем в изотропном случае, поэтому мы посвящаем этому случаю отдельный параграф. Неизотропную ось OZ посредством вращений из группы $\text{Iso}(H_3)$ всегда можно совместить с единичным лучом $\ell(\mathbb{I}_3)$. Координату z вдоль этой оси можно выбрать в виде:

$$z = x^1 + x^2 + x^3, \quad (204)$$

где $\{x^i\}_{i=1,2,3}$ — система неизотропных координат. Оставшуюся пару координат необходимо выбрать таким образом, чтобы одна из них — координата ρ имела смысл расстояния от некоторой точки, цилиндрические координаты которой мы вычисляем, до оси OZ , отсчитанного вдоль плоскости с уравнением $z = \text{const}$. Вторая координата должна иметь смысл угловой координаты ψ на этой плоскости, точное определение которой мы сформулируем чуть позже. Отыскание координат ρ и ψ будем производить в два этапа. Сначала введем пару новых аффинных координат u и v согласно определениям:

$$u = 2x^2 - x^1 - x^3; \quad v = 2x^3 - x^1 - x^2. \quad (205)$$

Оставшаяся симметричная координата $w = 2x^1 - x^2 - x^3$ удовлетворяет условию:

$$w + u + v = 0, \quad (206)$$

т.е., другими словами, аффинный вектор V с координатами (w, u, v) лежит в плоскости $z = \text{const}$, поскольку $dz(V) = 0$. Нетрудно найти формулы обратного перехода от координат $\{u, v, z\}$ к изотропным координатам:

$$x^1 = \frac{-v - u + z}{3}, \quad x^2 = \frac{z + u}{3}, \quad x^3 = \frac{v + z}{3}. \quad (207)$$

Из формул (207) дифференцированием получаются соотношения, связывающие дуальные базисы. В новых аффинных координатах $\{z, u, v\}$ интервал метрики БМ в результате принимает вид:

$$ds^3 = dx^1 dx^2 dx^3 - \frac{1}{27} (dz(dv^2 + du^2 + du dv) + dv^2 du + du^2 dv - dz^3). \quad (208)$$

Теперь рассмотрим точку с произвольными изотропными координатами (x^1, x^2, x^3) . Через эту точку проходит координатная плоскость $z = x^1 + x^2 + x^3 = \text{const}$. Искомое расстояние ρ представляет собой финслерово расстояние от этой точки до точки пересечения луча $\ell(\mathbb{I}_3)$ с плоскостью $z = \text{const}$, которая, очевидно имеет координаты $(z/3, z/3, z/3)$. Таким образом, искомая координата ρ определяется уравнением:

$$\rho^3 = (x^1 - z/3) \cdot (x^2 - z/3)(x^3 - z/3), \quad (209)$$

которое с учетом (204) и (205) можно записать в виде:

$$\rho^3 = \frac{1}{27} uvw = -\frac{1}{27} uv(u + v). \quad (210)$$

Перейдем к определению угловой координаты ψ . По существу оно соответствует общей идее, предложенной в [20]. Угол ψ мы определим как длину окружности единичного радиуса, построенной на плоскости $z = \text{const}$, отсчитываемой от некоторого направления. Для перехода на эту плоскость перепишем (209) в виде:

$$\rho^3 = (x^1 - z)(x^2 - z)(2z/3 - x^1 - x^2) \quad (211)$$

(мы исключили координату x^3 , а координаты x^1 и x^2 используем как двумерную координатную карту на плоскости $z = \text{const}$). Уравнение (211) при фиксированном ρ представляет собой неявное уравнение гиперболического цилиндра единичного радиуса с осью Oz . Дифференцируя это уравнение при фиксированном z и ρ , находим связь базисных один форм на единичной окружности:

$$\frac{dx^2}{dx^1} \equiv \dot{x}^2 = \frac{-4x^2z + 6x^2x^1 + 3(x^2)^2 + z^2 - 2zx^1}{4zx^1 - 3(x^1)^2 - 6x^2x^1 - z^2 + 2x^2z}. \quad (212)$$

Теперь для элемента длины на единичной окружности (т.е. для угла ψ) получаем следующую цепочку равенств:

$$\psi = \frac{1}{\rho} \int_{S_{BM}} dl|_{z=\text{const}, \rho=\text{const}} \stackrel{(204)}{=} -\frac{1}{\rho} \int_{\rho=\text{const}} [dx^1 dx^2 (dx^1 + dx^2)]^{1/3} \quad (213)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho} \int_{\rho=\text{const}} [\dot{x}^2(1 + \dot{x}^2)]^{1/3} dx^1 \stackrel{(212)}{=} \\ & = -\frac{1}{\rho} \int_a^{X^1} \left[\frac{(-3x^2 + z)(z - x^2 - 2x^1)(x^1 - x^2)(-3x^1 + 2z - 3x^2)}{(-3x^1 + z)^2(z - x^1 - 2x^2)^2} \right]^{1/3} dx^1, \end{aligned} \quad (214)$$

где в последнем интеграле мы ввели переменный верхний предел X^1 , а x^2 понимается как функция x^1 , неявно заданная посредством (211). Уравнение (211) является квадратным относительно x^2 . Его решения можно представить следующей общей формулой:

$$x^2 = \frac{1}{2}(z - x^1) + \frac{\epsilon}{6}\sqrt{\Delta}, \quad (215)$$

где

$$\Delta = \frac{z^3 - 9x^1z^2 + 27(x^1)^2z + 108\rho^3 - 27(x^1)^3}{z - 3x^1}; \quad \epsilon = \pm 1.$$

Довольно громоздкая проверка с помощью формул (204) и (211) обнаруживает тождество:

$$\Delta = 9(x^2 - x^3)^2, \quad (216)$$

которое гарантирует корректность представления решения для x^2 в виде (215) на всем H_3 . Подстановка (215) в (214) после некоторых элементарных, но громоздких упрощений приводит к следующему интегралу для угловой переменной:

$$\psi = -\frac{1}{\rho} \int_a^{X^1} \left[\frac{27\rho^3(27\rho^3 + 54(x^1)^3 - 54(x^1)^2z + 18z^2x^1 - 2z^3)}{(-3x^1 + z)^3(z^3 - 9z^2x^1 + 27(x^1)^2z + 108\rho^3 - 27(x^1)^3)} \right]^{1/3} dx^1. \quad (217)$$

Переходя к новой переменной $\xi = x^1/\rho$ и новому параметру $\zeta = z/\rho$, получаем после простых преобразований:

$$\psi = -3 \int_a^{X^1/\rho} \left[\frac{(27 + 54\xi^3 - 54\xi^2\zeta + 18\zeta^2\xi - 2\zeta^3)}{(-3\xi + \zeta)^3(\zeta^3 - 9\zeta^2\xi + 27\xi^2\zeta + 108 - 27\xi^3)} \right]^{1/3} d\xi. \quad (218)$$

Сдвигая переменную интегрирования по формуле:

$$\xi = U + \zeta/3, \quad (219)$$

получаем более простой по виду интеграл:

$$\psi = \int_a^{x^1/\rho-\zeta/3} \frac{1}{U} \left[\frac{1+2U^3}{4-U^3} \right]^{1/3} dU. \quad (220)$$

Наконец, делая дополнительную замену переменной:

$$y = \frac{3 \ln |U| + \ln 2}{2}, \quad (221)$$

приходим к следующим интегральным представлениям для угла:

$$\psi_{\pm} = \begin{cases} -\left(\frac{2}{3}\right)^{5/3} \times \int_a^{(3 \ln[(3x^1-z)/\rho] + \ln 2)/2} \frac{1}{(\tanh y - 7/9)^{1/3}} dy, & (3x^1 - z)/\rho > 0; \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{5/3} \times \int_a^{(3 \ln[-(3x^1-z)/\rho] + \ln 2)/2} \frac{1}{(\coth y - 7/9)^{1/3}} dy, & (3x^1 - z)/\rho < 0, \end{cases} \quad (222)$$

где верхняя строчка определяет ψ_+ , а нижняя ψ_- в соответствующих областях, и мы вернулись в пределах интегрирования к старому обозначению x^1 . Граница раздела областей определения ψ_+ и ψ_- (это плоскость $w = 0$) не покрывается нашей параметризацией углов и для ее описания необходимо выбрать параметризацию окружности с помощью координаты x^2 или x^3 .

Интегралы в (222) вычисляются в элементарных функциях:

$$\psi_{\pm} \equiv \mp \text{ArcTH}_3(q), \quad (223)$$

где

$$q = \left(\frac{9 \tanh y - 7}{3} \right)^{1/3} \quad (224)$$

для ψ_+ и

$$q = \left(\frac{9 \coth y - 7}{3} \right)^{1/3} \quad (225)$$

для ψ_- , и где мы ввели основную функцию гиперболической тригонометрии (Hyperbolic Trigonometry) в H_3 :

$$\begin{aligned} \text{ArcTH}_3(q) = & -\frac{2^{1/3}}{6} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{(q-1)^4(q+2)^2}{(q^2+q+1)^2(q^2-2q+4)} - \sqrt{3} \arctan \left[\frac{10q+8+9q^3-3q^2}{\sqrt{3}q(3q+10)} \right] \right) + \\ & \frac{\pi}{2^{2/3}\sqrt{3}} (\theta(-q) + \theta(-q-10/3)) - \frac{2^{1/3}\sqrt{3}\pi}{12}. \end{aligned} \quad (226)$$

Здесь ступенчатые функции Хэвисайда обеспечивают¹¹ непрерывность функции ArcTH в точках разрыва главной ветви арктангенса ($q=0$, $q=10/3$), а аддитивная константа (константа интегрирования) обеспечивает нормировку $\psi_{\infty} \equiv \mp \text{ArcTH}_3(+\infty) = 0$. График зависимости $\text{ArcTH}_3(q)$ представлен на рис. 10 слева.

¹¹Фактически, они осуществляют аналитический выбор различных ветвей арктангенса, который обеспечивает непрерывность ψ как первообразной.

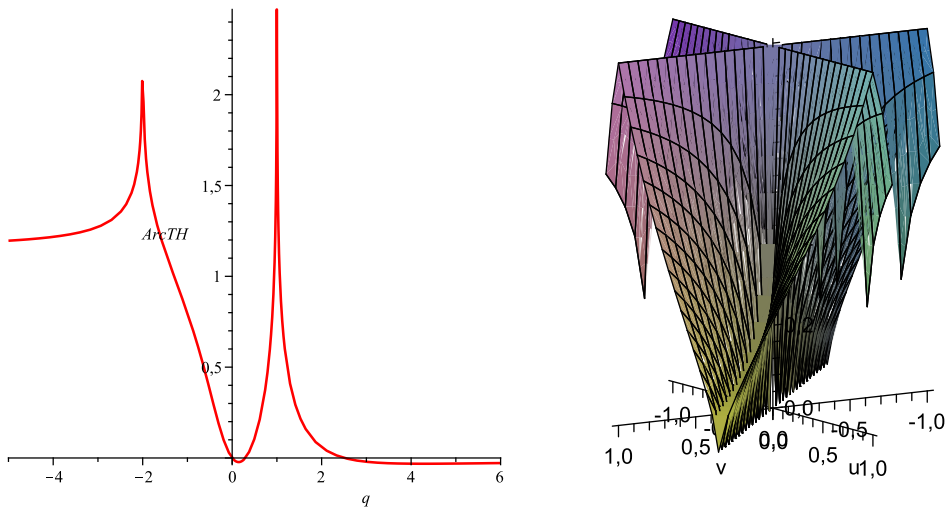


Рис. 10: Слева — вид функции $\text{ArcTH}_3(q)$ — основной функции гиперболической тригонометрии в H_3 . $\text{ArcTH}_3(\infty) = 0$, $\text{ArcTH}_3(-\infty) = 2^{1/3}\sqrt{3}\pi/6$. Вертикальные прямые $q=1$ и $q=-2$ — вертикальные асимптоты. Функция $\text{ArcTH}(q)$ монотонна на промежутках: $(-\infty; -2)(\uparrow)$, $(-2; 0.14536)(\downarrow)$, $(0.14536; 1)(\uparrow)$, $(1; 4.27828)(\downarrow)$ и на $(4.27828; +\infty)(\uparrow)$. Абсолютный минимум $\text{ArcTH}_3(4.27828) \approx -0.0317667341$. Справа — зависимость $q(u, v)$, определяемая формулой (230) ниже. Максимальное значение q достигается на осях $u = 0, v = 0$ и составляет $(2/3)^{1/3} \approx 0.87358$. Таким образом, функция ArcTH_3 слева практически работает лишь в области $q \leq q_{\max}$. В этой области она имеет три участка монотонности.

Теперь мы можем немного преобразовать выражение для переменной q в (223)-(225). Для $\tanh y$ в (224)-(225) имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \tanh y &\stackrel{(221)}{=} \tanh \left[\ln(\sqrt{2}|U|^{3/2}) \right] = \frac{2|U|^3 - 1}{2|U|^3 + 1} \stackrel{(219)}{=} \frac{2|x^1 - z/3|^3 - |\rho|^3}{2|x^1 - z/3|^3 + |\rho|^3} \stackrel{(204)}{=} \\ &= \frac{2|2x^1 - x^2 - x^3|^3 - 27|\rho|^3}{2|2x^1 - x^2 - x^3|^3 + 27|\rho|^3} \stackrel{(205),(211)}{=} \frac{2(u+v)^2 - |uv|}{2(u+v)^2 + |uv|}. \end{aligned} \tag{227}$$

Соответственно для аргумента q из (224)-(225) получается следующее выражение:

$$q^3 = \frac{4(u+v)^2 - 4|uv|}{3 \cdot 2(u+v)^2 + |uv|}, \tag{228}$$

где положительная ветвь модуля берется для ψ_+ , а отрицательная — для ψ_- . При этом неравенство в (222), определяющее ветвь угловой переменной ψ , можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{sign} \left(\frac{3x^1 - z}{\rho} \right) &\stackrel{(204)}{=} \text{sign} \left(\frac{2x^1 - x^2 - x^3}{\rho} \right) \stackrel{(211)}{=} \\ &= \text{sign} \left(\frac{w}{(uvw)^{1/3}} \right) = \text{sign} \left(\frac{w^2}{uv} \right) = \text{sign}(uv). \end{aligned} \tag{229}$$

Следовательно ветвь ψ_+ характеризует угол в той части, где единичная гиперболическая окружность пересекает косоугольные квадранты $u > 0, v > 0$ или $u < 0, v < 0$, а ветвь ψ_- характеризует угол при $u > 0, v < 0$ и $u < 0, v > 0$. С учетом этого условия выражение (228) для переменной q можно записать в следующем универсальном виде:

$$q = \left(\frac{4(u+v)^2 - 4|uv|}{3 \cdot 2(u+v)^2 + |uv|} \right)^{1/3}. \tag{230}$$

График зависимости $q(u, v)$ представлен на рис. 10 справа.

Теперь мы имеем следующие формулы для зависимости криволинейных координат ρ и ψ от аффинных координат u, v :

$$\rho^3 = -\frac{uv(u+v)}{27}; \quad \psi_{\pm} = \mp \text{ArcTH}_3 \left[\left(\frac{4(u+v)^2 - 4|uv|}{3 \cdot 2(u+v)^2 + |uv|} \right)^{1/3} \right]. \quad (231)$$

Для вычисления вида метрик БМ в цилиндрических координатах с помощью (208) необходимы обратные соотношения. Для их вывода перейдем сначала к промежуточным криволинейным симметрическим координатам:

$$uv = \epsilon x^2, \quad (\epsilon = \pm 1); \quad u + v = y. \quad (232)$$

Из (231)-(232) получаем:

$$x^2 y = -27\epsilon \rho^3; \quad \frac{y^2 - 4x^2}{2y^2 + x^2} = \frac{3}{4} \text{TH}_3^3(\mp \psi_{\pm}). \quad (233)$$

При этом функция TH_3 геометрически определена на промежутке $[-0.0227; +\infty)$, однозначна на промежутке $[0.693; 1.143]$ и двузначна на промежутках $[-0.227; 0.693]$ и $[1.143; +\infty)$. Решением системы уравнений (233) будет пара зависимостей:

$$x = \pm 3 \cdot 2^{1/6} \left(\frac{2 - 3\text{TH}_3^3(\psi)}{16 + 3\text{TH}_3^3(\psi)} \right)^{1/6} \rho; \quad y = -\frac{3}{2^{1/3}} \left(\frac{2 - 3\text{TH}_3^3(\psi)}{16 + 3\text{TH}_3^3(\psi)} \right)^{-1/3} \rho, \quad (234)$$

где $\psi = \mp \psi_{\pm}$. Далее решением системы уравнений (232) при (234) будет пара выражений:

$$u = -\frac{3 \cdot 2^{2/3} \rho}{4A} (1 + \sqrt{1 - 8\epsilon A^3}),$$

$$v = -\frac{3 \cdot 2^{2/3} \rho}{4A} (1 - \sqrt{1 - 8\epsilon A^3}), \quad (235)$$

$$\epsilon = \pm 1, \quad A = \left(\frac{2 - 3T^3}{16 + 3T^3} \right)^{1/3}.$$

Теперь мы можем вычислить компоненты матрицы Якоби $J(u, v | \rho, \psi)$:

$$J_{u\rho} = \frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{3 \cdot 2^{2/3}}{4A} (1 + \sqrt{1 - 8\epsilon A^3}); \quad J_{v\rho} = \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{3 \cdot 2^{2/3}}{4A} (1 - \sqrt{1 - 8\epsilon A^3}); \quad (236)$$

$$J_{u\psi} = \frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{\partial u}{\partial A} \cdot \frac{\partial A}{\partial \text{TH}_3(\psi)} \cdot \left(\frac{\partial \text{ArcTH}_3(q)}{\partial q} \right)^{-1} \Bigg|_{q=\text{TH}_3(\psi)}; \quad (237)$$

$$J_{v\psi} = \frac{\partial v}{\partial \psi} = \frac{\partial v}{\partial A} \cdot \frac{\partial A}{\partial \text{TH}_3(\psi)} \cdot \left(\frac{\partial \text{ArcTH}_3(q)}{\partial q} \right)^{-1} \Bigg|_{q=\text{TH}_3(\psi)}. \quad (238)$$

Мы не приводим явный вид двух последних выражений, ввиду того, что они носят промежуточный результат и несколько громоздки. Теперь у нас есть все необходимые формулы для вывода вида метрики БМ в неизотропной цилиндрической системе координат. Используя представление:

$$du = J_{u\rho} d\rho + J_{u\psi} d\psi; \quad dv = J_{v\rho} d\rho + J_{v\psi} d\psi, \quad (239)$$

а также (236)-(238), из (208) получаем путем выделения коэффициентов при различных степенях $\{dz, d\rho, d\psi\}$:

$$\mathfrak{h}_{zzz} = \frac{1}{27}; \quad \mathfrak{h}_{\rho\rho\rho} = 1; \quad \mathfrak{h}_{zz\psi} = \mathfrak{h}_{zz\rho} = \mathfrak{h}_{\rho\rho\psi} = 0; \quad (240)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{\psi\psi\psi} = & \frac{2^6 \cdot 3^9 \epsilon}{N} \rho^3 T^6 (T-1)^3 (T+2)^3 (T^2+T+1)^3 (T^2-2T+4)^3 \times \\ & \times (9T^2+6T+4)^3 (-3T^3+3\epsilon T^3+2+16\epsilon); \end{aligned} \quad (241)$$

$$\mathfrak{h}_{z\rho\rho} = \frac{2^{1/3}}{36} B \frac{6T^3+3\epsilon T^3-4+16\epsilon}{3T^3-2}; \quad (242)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{z\psi\psi} = & \frac{2^{8/3} \cdot 3^4 A}{N} \rho^2 T^4 (3T^6-3T^5-2T^4-136T^3-132T^2-88T+16) \times \\ & \times (16+3T^3)(T-1)^2 (T+2)^2 (T^2+T+1)^2 (T^2-2T+4)^2 (9T^2+6T+4)^2 \times \\ & \times (6\epsilon T^3+3T^3-4\epsilon+16)^2; \end{aligned} \quad (243)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{\rho\psi\psi} = & -\frac{2^{10/3} \cdot 3^6 \epsilon}{N} \rho^2 T^4 (6T^3-4+3\epsilon T^3+16\epsilon)(3T^3-2) \times \\ & \times (3T^6-3T^5-2T^4-136T^3-132T^2-88T+16) \times \\ & \times (16+3T^3)(T^2+T+1)^2 (T^2-2T+4)^2 (9T^2+6T+4)^2 (T-1)^2 (T+2)^2; \end{aligned} \quad (244)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{\rho\psi z} = & -\frac{6A}{N} \rho T^2 (T-1)(T+2)(T^2+T+1)(T^2-2T+4)(9T^2+6T+4)(3T^3-2) \times \\ & \times (3T^6-3T^5-2T^4-136T^3-132T^2-88T+16)^2 (16+3T^3)^2 \times \\ & \times (-63T^6+63\epsilon T^6+192T^3+294\epsilon T^3+224-224\epsilon), \end{aligned} \quad (245)$$

где

$$\begin{aligned} A = & \left(\frac{2-3T^3}{16+3T^3} \right)^{1/3}, \\ N = & (3T^6-3T^5-2T^4-136T^3-132T^2-88T+16)^3 \times \\ & \times (3T^3-2)^3 (16+3T^3-16\epsilon+24\epsilon T^3)(16+3T^3)^3, \\ T \equiv & \text{TH}_3(\psi). \end{aligned} \quad (246)$$

Перейдем к выводу вида оператора \bigcirc_3 в неизотропной цилиндрической системе координат. Для промежуточной аффинной системы $\{u, w, z\}$ имеем:

$$\partial_1 = -\partial_u - \partial_v + \partial_z; \quad \partial_2 = 2\partial_u - \partial_v + \partial_z; \quad \partial_3 = -\partial_u + 2\partial_v + \partial_z. \quad (247)$$

Для производных ∂_v и ∂_u в свою очередь имеем:

$$\partial_u = \frac{\partial \rho}{u} \partial_\rho + \frac{\partial \psi}{\partial u} \partial_\psi; \quad \partial_v = \frac{\partial \rho}{v} \partial_\rho + \frac{\partial \psi}{\partial v} \partial_\psi. \quad (248)$$

Используя соотношения (231) и (235) после довольно громоздких вычислений с учетом вида (226) функции ArсTH_3 и (228), можно составить оператор \bigcirc_3 . Как и в случае сферической симметрии результат можно представить в виде следующей суммы форм по $\{\partial_z, \partial_\rho, \partial_\psi\}$:

$$\bigcirc_3 = \mathcal{C}^3(\partial_z, \partial_\rho, \partial_\psi) + \mathcal{C}^2(\partial_z, \partial_\rho, \partial_\psi) + \mathcal{Q}(\partial_z, \partial_\rho, \partial_\psi). \quad (249)$$

Мы не будем приводить здесь выражения для коэффициентов форм $\mathcal{C}^3, \mathcal{C}^2, \mathcal{C}$, ввиду их чрезвычайной громоздкости. Обсудим структуру цилиндрически-симметричных решений уравнения $\bigcirc_3 f = 0$ в общем виде. Цилиндрически-симметричное решение по определению не зависит от координат z и ψ . Из общих соображений (непосредственные вычисления с помощью (249) подтверждают это) радиальная часть оператора \bigcirc_3 в неизотропной цилиндрической системе координат будет иметь вид:

$$\bigcirc_{3\rho} = F_3(T) \frac{\partial^3}{\partial \rho^3} + F_2(T) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + F_1(T) \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad (250)$$

где F_1, F_2, F_3 — функции переменной $T = \text{TH}_3(\psi)$. Условие разделения переменных в уравнении $\bigcirc_{3\rho} f(\rho) = 0$ имеет вид:

$$f(\rho) = C_0 \rho^C, \quad (251)$$

где C и C_0 — произвольные вещественные константы. Подстановка (251) в (250) приводит к соотношению:

$$C(C-1)(C-2)F_3(T) + C(C-1)F_2(T) + CF_1(T) = 0, \quad (252)$$

что означает специальную линейную зависимость функций F_1, F_2, F_3 . Непосредственная проверка с помощью явного вида (249) обнаруживает, что такая зависимость не имеет места в действительности. Отсюда вытекает любопытный вывод: *в H_3 (аналогично и в H_n) не существует цилиндрически симметричных решений уравнения $\bigcirc_3 f = 0$ с разделяющимися переменными!*¹² Это обстоятельство тесно связано с размерностью группы гиперболических вращений в H_3 . Цилиндрическую симметрию можно рассматривать как нарушенную сферическую симметрию. Выбор оси симметрии требует фиксации двух параметров (два независимых угла). В евклидовом случае после фиксации оси симметрии остается еще один свободный параметр — полярный угол φ , в то время как в H_3 все вращательные параметры после задания оси симметрии оказываются уже исчерпанными (группа гиперболических вращений в H_3 — двумерна).

Рассмотрим также с общих позиций структуру решения, описывающего цилиндрический вихрь, которое зависит от пары координат ρ и ψ , а от координаты z не зависит. Такое решение не исключается соображениями групповой симметрии. Оператор $\bigcirc_{3\perp}$, в котором формально $\partial_z = 0$, будет иметь следующую общую структуру:

$$\begin{aligned} \bigcirc_{3\perp} = & F_{30}(T) \frac{\partial^3}{\partial \rho^3} + F_{20}(T) \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + F_{10}(T) \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} + F_{21}(T) \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3}{\partial \psi \partial \rho^2} + \\ & + F_{11}(T) \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \rho} + F_{12}(T) \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^3}{\partial \psi^2 \partial \rho} + \frac{1}{\rho^3} \left(F_{01}(T) \frac{\partial}{\partial \psi} + F_{02}(T) \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + F_{03}(T) \frac{\partial^3}{\partial \psi^3} \right), \end{aligned} \quad (253)$$

где $\{F_{ij}\}$ — набор вполне определенных функций переменной T (они дробно-иррациональные). Представляя решение $f(\rho, \psi)$ в разделенном виде:

$$f(\rho, \psi) = R(\rho)\Psi(\psi) \quad (254)$$

¹²На самом деле, несложный анализ обнаруживает, что такого решения не существует и в классе несе-парабельных решений.

в (253) приходим после некоторого предварительного анализа к условию разделения переменных: $R(\rho) = C_0 r^C$, что после подстановки в (254) и приведения подобных слагаемых дает уравнение на угловую часть вида:

$$G_3(T)\ddot{\Psi} + G_2(T)\dot{\Psi} + G_1(T)\Psi + G_0\Psi = 0, \quad (255)$$

где точка означает дифференцирование по ψ . Переходя к новой переменной $x = T(\psi)$, с помощью формулы:

$$\frac{d}{d\psi} = \frac{dx}{d\psi} \frac{d}{dx} = 2^{2/3} \frac{(x+2)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-2x+4)(9x^2+6x+4)}{3x^6-3x^5-2x^4-136x^3-132x^2-88x+16} \frac{d}{dx}, \quad (256)$$

которая получается из (226) с помощью правила дифференцирования обратной функции, получаем из (255) уравнение вида:

$$\bar{G}_3(x)\Phi'''(x) + \bar{G}_2(x)\Phi''(x) + \bar{G}_1(x)\Phi'(x) + \bar{G}_0\Phi(x) = 0, \quad (257)$$

где функции $\bar{G}_i(x)$ являются линейными комбинациями функций G_i из (255) с дробно-рациональными коэффициентами. Уравнение (257) является определяющим для угловой части оператора \mathcal{O}_3 , а его решения являются гиперболическими аналогами цилиндрических гармоник.

А Некоторые геометрические объекты в H_3

В этом приложении мы приведем иллюстрации гиперболических аналогов некоторых привычных евклидовых геометрических объектов.

А.1 Правильные многогранники

Даже на плоскости двойной переменной, метрические отношения на которой описываются 2-мерной метрикой Минковского, адекватное восприятие привычных отношений простейших фигур затруднено из-за столкновения евклидовой интуиции с неевклидовыми метрическими отношениями. На рис. 11 слева красным цветом показаны два равнобедренных треугольника, которые, кроме того, конгруэнтны (т.е. могут быть совмещены друг с другом посредством преобразований из группы движений псевдоевклидовой плоскости). Зеленым цветом показаны траектории потока одного из возможных движений — псевдоевклидового вращения, которое переводит вершины одного треугольника в вершины другого без изменения их метрических отношений. Отметим, что правая верхняя сторона каждого треугольника имеет квадрат длины, противоположный по знаку квадратам длин двух других сторон.

На рис. 11 справа аналогичная ситуация показана для многогранников в H_3 . Красным цветом изображены два гиперболических куба, которые конгруэнтны между собой. Условие ортогональности ребер в вершинах имеет вид:

$$\mathfrak{h}(A, B, C) = 0 \quad (258)$$

— триортогональности векторов A, B, C , изображающих ребра куба. Каждый из кубов может быть переведен в другой посредством комбинации трансляции и гиперболического вращения.

А.2 Некоторые замечательные кривые

Определения евклидовых геометрических объектов, опирающиеся лишь на функцию расстояния, оказываются пригодными и для определения соответствующих им гиперболических аналогов. Рассмотрим несколько конкретных примеров.

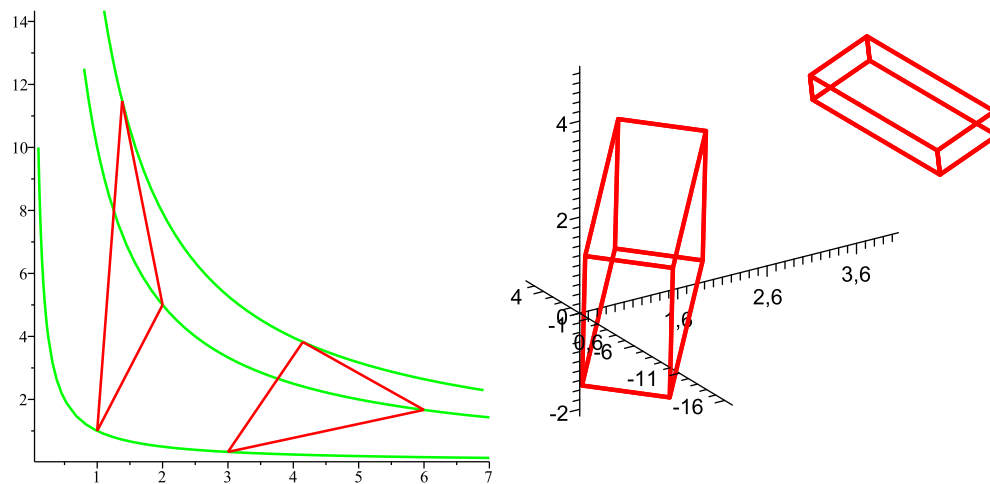


Рис. 11: Слева — пара конгруэнтных равносторонних треугольников на псевдоевклидовой плоскости, связанных преобразованием из группы движения, справа — пара конгруэнтных кубов в H_3 , связанных преобразованием из группы движения H_3 (в вершинах выполняется условие 3-ортогональности).

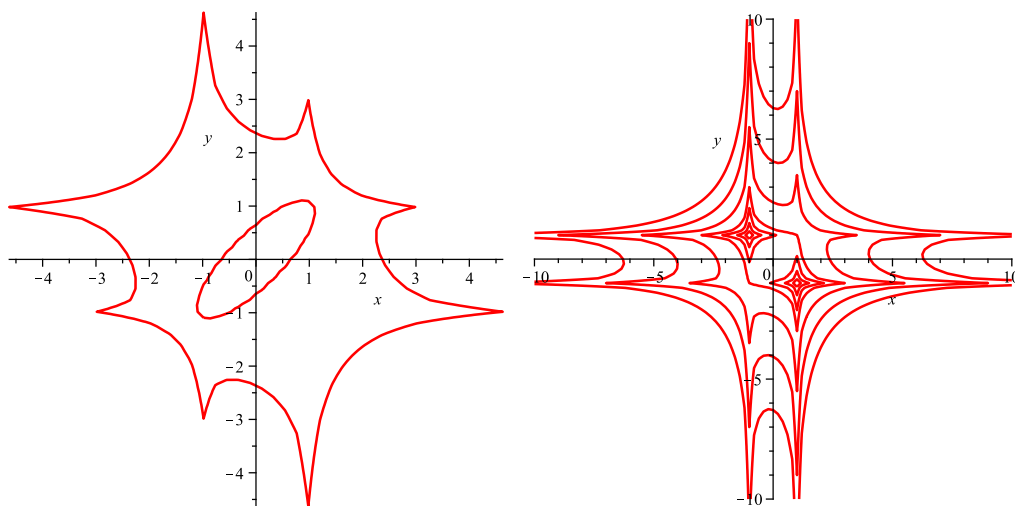


Рис. 12: Слева — евклидов и псевдоевклидов эллипсы с одинаковым уравнением $r_1 + r_2 = 3$, (r_1, r_2 — расстояния до точек $(1; 1)$ и $(-1; -1)$). Справа — семейство гиперболических эллипсов $r_1 + r_2 = C$. При некотором (малом) C изменяется связность кривой.

А.2.1 Гиперболический эллипс

Рассмотрим известное фокальное определение эллипса, которое определяет его как множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных является величиной постоянной:

$$r_1 + r_2 = \text{const.} \tag{259}$$

Если под расстояниями r_1 и r_2 понимать их гиперболические версии в H_2 , то приходим к определению гиперболического эллипса. Их характерный вид представлен на рис. 12.

А.2.2 Гиперболическая гипербола

Рассмотрим теперь известное фокальное определение гиперболы, которое определяет его как множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух за-

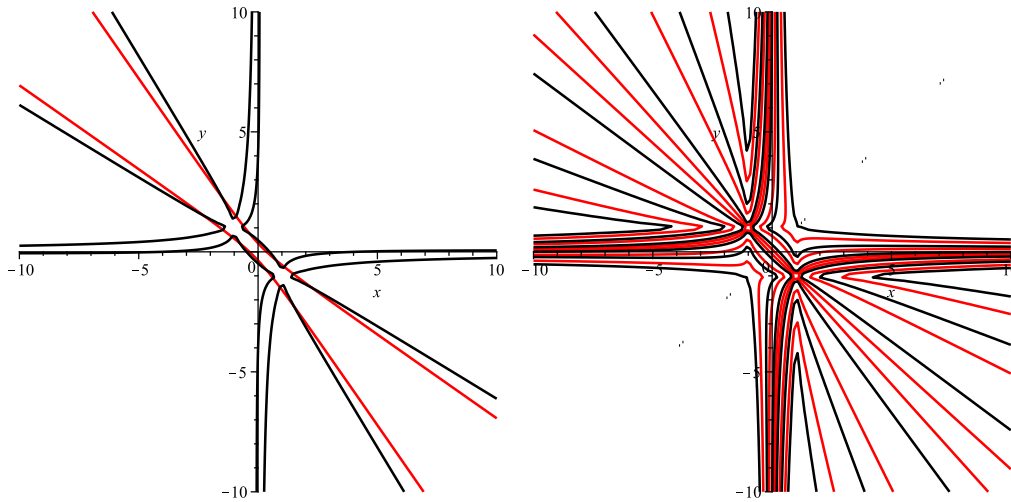


Рис. 13: Слева — евклидовы и псевдоевклидовы гиперболы с одинаковым уравнением $r_1 - r_2 = \pm 0.5$, (r_1, r_2 — расстояния до точек $(1; 1)$ и $(-1; -1)$). Справа — семейство гиперболических гипербол $r_1 - r_2 = C$.

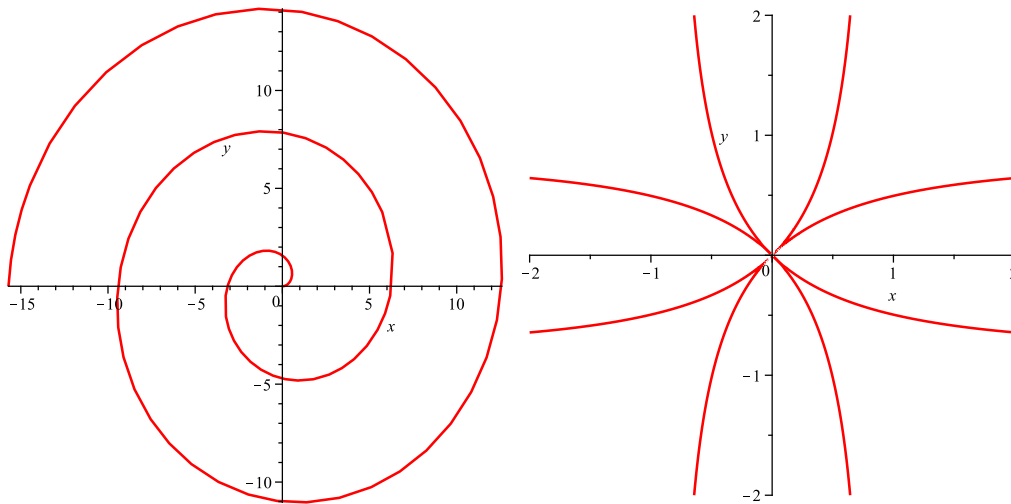


Рис. 14: Слева — равномерная евклидова спираль, справа — равномерная гиперболическая спираль с одинаковым уравнением $r = \varphi$.

данных является величиной постоянной:

$$r_1 - r_2 = \text{const.} \quad (260)$$

Аналогично предыдущему случаю, в H_2 приходим к определению гиперболических гипербол. Их общий вид представлен на рис. 13.

А.3 Спирали

Определение равномерной евклидовой спирали:

$$r = C\varphi \quad (261)$$

без изменения переносится на двойную плоскость, если под расстоянием и углом понимать их гиперболические аналоги. На рис. 14 показаны евклидова (слева) и гиперболическая (справа) спирали.

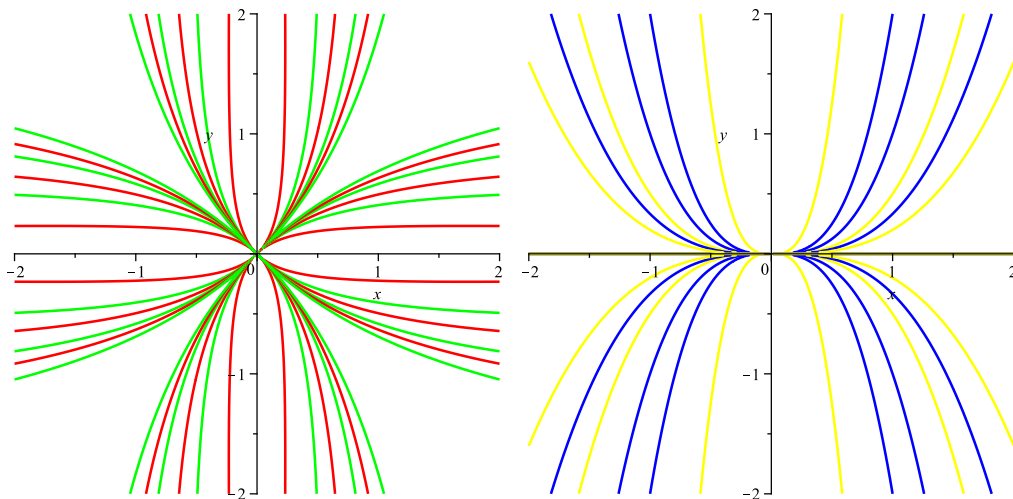


Рис. 15: Слева — семейство равномерных гиперболическая спиралей с уравнением $\rho = C\psi$, справа — семейство гиперболических спиралей Архимеда с уравнением $\rho = e^{k\psi}$.

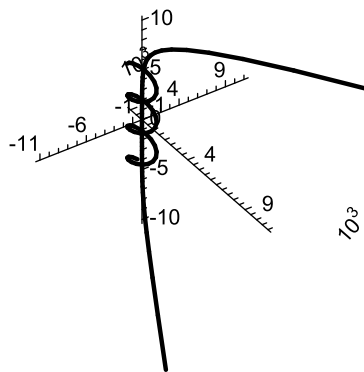


Рис. 16: Эллиптическая и гиперболическая равномерные спирали.

На рисунке 15 (слева) показано семейство равномерных гиперболических спиралей (261) с различными C , а справа показан вид спирали Архимеда с уравнением:

$$r = e^{k\varphi}. \tag{262}$$

На рис. 16 представлены круговая эллиптическая и гиперболическая пространственные спирали. Первая задается уравнением:

$$x(t) = x_0 + R \cos t; \quad y = y_0 + R \sin t; \quad z = z_0 + at, \tag{263}$$

а уравнение второй получается из (263) заменой тригонометрических \sin и \cos на гиперболические \sinh и \cosh .

А.3.1 Астроиды

Если в каноническом уравнении евклидовой астроиды:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \tag{264}$$

изменить знак перед одним из слагаемых в левой части, то получим семейство гиперболических астроид. Их общий вид показан на рис. 17.

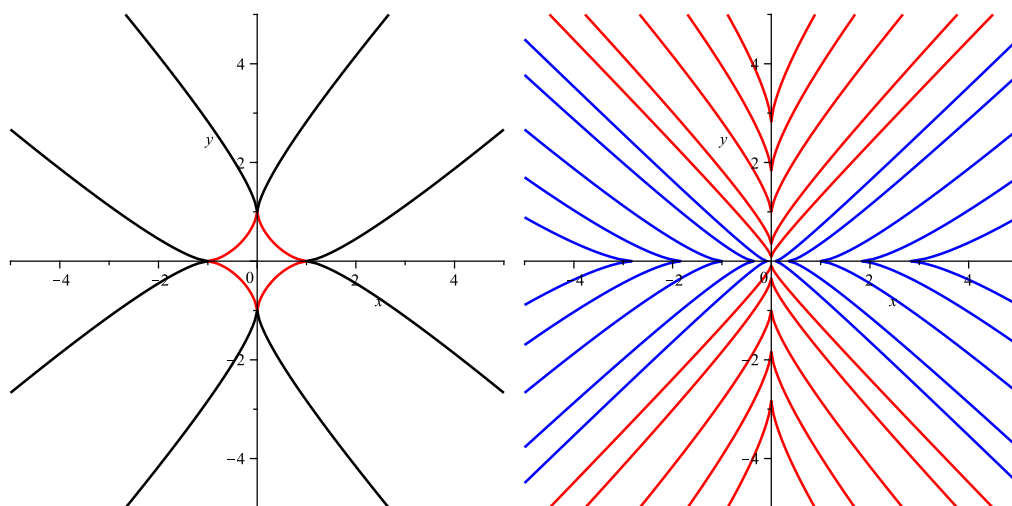


Рис. 17: Слева — эллиптическая и гиперболическая астроида, справа семейство астронд вида $y^{2/3} - x^{2/3} = C$.

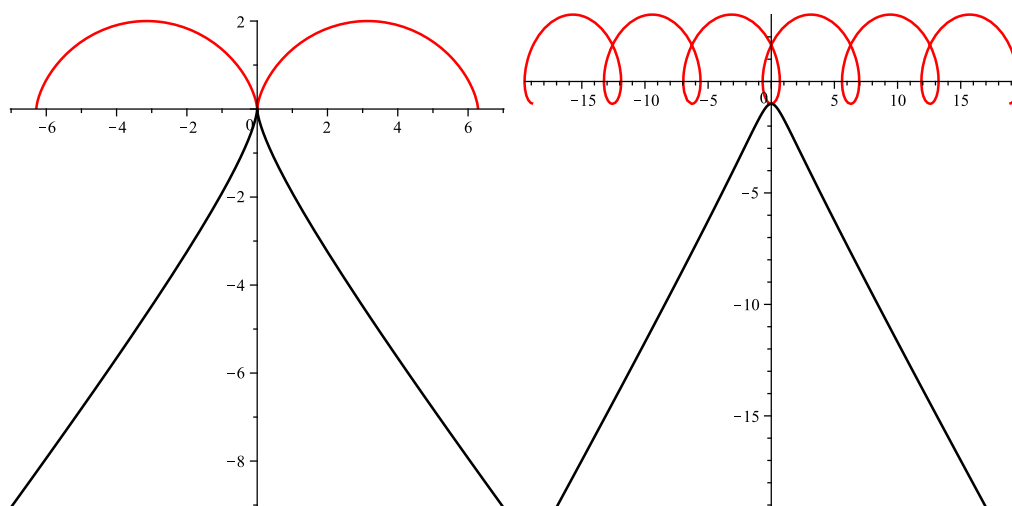


Рис. 18: Слева — эллиптическая и гиперболическая циклоиды, справа — эллиптическая и гиперболические трохоиды.

А.3.2 Циклоиды

Если в каноническом параметрическом уравнении циклоиды:

$$x(t) = t - \sin t; \quad y(t) = 1 - \cos t \quad (265)$$

заменить тригонометрические \sin и \cos на гиперболические \sinh и \cosh , то получим параметрическое уравнение гиперболической циклоиды. Аналогично обстоит дело и для трохоидальных кривых, уравнение которых обобщает (265)

$$x(t) = t - C \sin t; \quad y(t) = 1 - C \cos t. \quad (266)$$

Вид эллиптических и гиперболических циклоиды и трохоиды представлен на рис. 18.

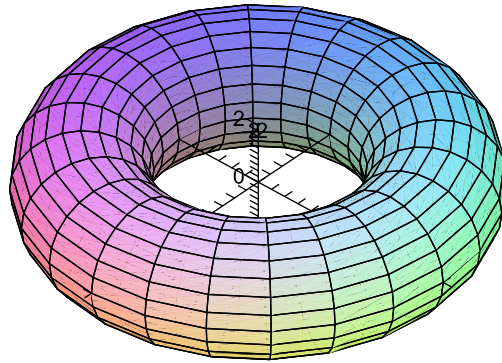


Рис. 19: Эллиптический тор с отношением радиусов 5/2.

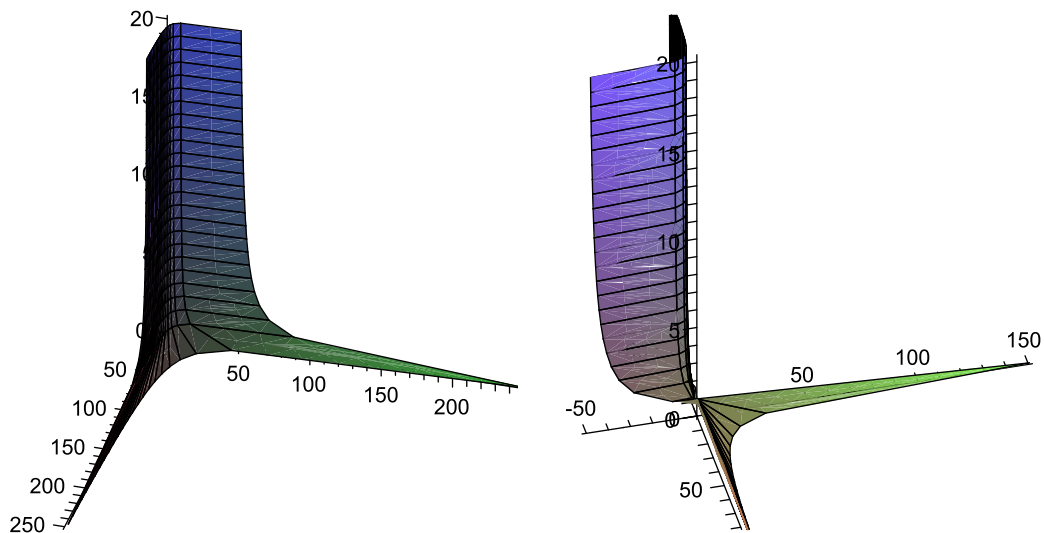


Рис. 20: Слева — компонента гиперболического тора с двумя радиусами одного знака, справа — компонента - с радиусами разных знаков.

А.4 Торы

Каноническое уравнение тора, описывающее вращение одной окружности вдоль другой имеет вид:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= x_0 + r_1 \cos u + r_2 \cos u \cos v; \\ y(u, v) &= r_1 \sin u + r_2 \sin u \cos v; \\ z(u, v) &= r_2 \sin v. \end{aligned} \tag{267}$$

Эллиптический тор представлен на рис. 19.

Если в этом определении заменить тригонометрические функции на гиперболические и под радиусами понимать гиперболические расстояния, то формально приходим к определению гиперболического тора. Чтобы получить полную картину, необходимо учесть что квадраты радиусов могут иметь различные знаки и определение типа (267) может включать в себя радиусы, квадраты которых имеют один и тот же знак, или противоположные знаки. Эти возможные ситуации представлены на рис. 20.

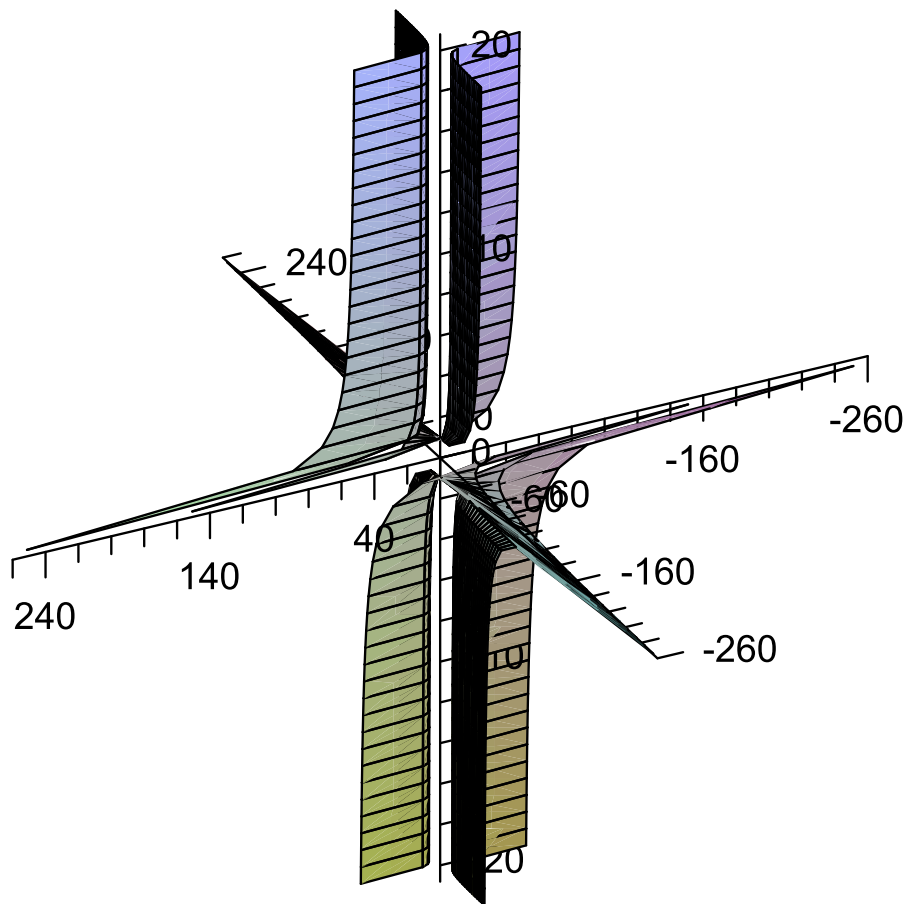


Рис. 21: Гиперболическое полноторие

Для получения полной картины (полнотория) необходимо объединить все компоненты поверхности на одной иллюстрации (рис. 21).

Литература

- [1] Пенроуз Р. Путь к реальности или законы, управляющие вселенной, РХД, Москва-Ижевск, 2007.
- [2] Владимиров Ю.С. Пространство-время: явные и скрытые размерности. (Изд-е 2-е переработанное) М., Книжный дом «Либроком» 2010.
- [3] Кокарев С.С. Три лекции о законах Ньютона. В сб. трудов РНОЦ «Логос», Ярославль, вып.1, 2006, с. 45–72, arXiv: 0905.3285v1[gr-qc].
- [4] Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля (в 4-х томах). М., УРСС, 1996–2000.
- [5] Боголюбов Н.Н., Логунов А.А. Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М., Наука, 1987.
- [6] Б.А.Дубровин, Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М., Наука, 1979.
- [7] Гайденок П.П. История греческой философии в ее связи с наукой. М., УРСС, 2009.
- [8] ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М., Наука, 1979.
- [9] Zelenov E. p-adic mathematical physics and space-time. // *Grav. & Cosm.*, v1, N3, 1995, pp. 243–246.
- [10] Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1977.

- [11] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973.
- [12] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. h -голоморфные функции двойной переменной и их приложения. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(13), т. 7, 2010, с. 44–77.
- [13] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(13), т. 7, 2010, с. 78–127.
- [14] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(14), т. 7, 2010, с. 11–37.
- [15] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналогов множества Жюлиа на плоскости двойной переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(12), т. 6, 2009, с. 163–176.
- [16] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Аналитические, дифференциально-геометрические и алгебраические свойства гладких функций поличисловой переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(16), том 8, 2011, с. 4–53.
- [17] Шабат Б.О. Введение в комплексный анализ. М., Наука, 1985.
- [18] Balan V. Spectral properties and applications of of numerical multilinear algebra of m -root structures. // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 2(10), v. 5, 2008, p. 101.
- [19] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Конформные калибровки геометрии Бервальда-Моора и индуцируемые ими нелинейные симметрии. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(10), т. 5, 2008, с. 3.
- [20] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Метрические бинглы и тринглы в H_3 . // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(11), т. 6, 2009, с. 42–67.
- [21] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., Наука, 1981.

SOME PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS IN POLYNUMBERS FIELD THEORY

D.G. Pavlov¹, S.S. Kokarev^{1,2}

¹ *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fрязино, Russia*

² *RSEC Logos, Yaroslavl, Russia*

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

Some mathematical aspects of the invariant scalar operator \bigcirc_n , that appears in polynumbers field theory, are considered together with some characteristic properties of its kernel. Concrete expressions for Berwald-Moor metrics and operator \bigcirc_n in isotropic cylindrical, non-isotropic cylindrical and general spherical coordinate systems are derived in case $n=3$. Part of the results is expressed in terms of special functions, which are hyperbolic analogies of trigonometric ones, spherical harmonics and Legendre polynomials. General kind of radial part of \bigcirc_n is calculated for arbitrary n . The problem of finding of hyperbolic field, generated by homogeneously charged hyperbolic sphere, is solved. We show, that there is no separable solutions to hyperbolic wave equation with cylindrical symmetry.

Key Words: polynumbers, Berwald-Moor space, hyperbolic field theory, Green functions, curvilinear coordinates, spherical symmetry, separation of variables.