# N-КОМПЛЕКСНАЯ АЛГЕБРА И ИЗОТРОПНЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ И ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

**А.В. Горюнов**

*Университет Туран-Астана, Астана, Казахстан*

avgor@hotbox.ru

Предложен вариант системы гиперкомплексных чисел, названных N-комплексными числами. В рамках этой системы введена новая концепция бикомплексных чисел и подробно разработана алгебраическая составляющая бикомплексного исчисления. Элементы алгебры трикомплексных и тетракомплексных чисел изложены кратко, на уровне развития бикомплексных понятий и обозначений. Установлена и исследована взаимосвязь элементов бикомплексного пространства с элементами псевдоевклидова 4-пространства. Показано, что все основные изотропные (светоподобные) алгебраические соотношения специальной теории относительности и электродинамики могут быть получены как прямое следствие свойств бикомплексных чисел.

**Ключевые слова:** гиперкомплексные числа, N-комплексные числа, бикомплексные числа, N-комплексная алгебра, бикомплексная алгебра, СТО, электродинамика.

## Введение

Понятие *числа* является наиболее фундаментальным понятием математики, а развитие и расширение этого базового понятия и развитие самой математики неразрывно связаны. Отметим, что каждое расширение понятия числа происходило постепенно, на протяжении десятилетий, а то и столетий. Например отрицательные, а впоследствии и мнимые числа снова и снова появлялись при вычислениях, зачастую помимо и даже против воли того или другого математика, и лишь по мере того, как обнаруживалась польза от их употребления, они получали всё более и более широкое распространение [1].

После "заполнения" действительной числовой оси (целые, рациональные, иррациональные, отрицательные числа), были открыты мнимые и комплексные числа, которые обрели геометрическое воплощение в виде радиус-векторов комплексной плоскости, включающей в себя и ось действительных чисел. Тем самым, множество действительных чисел ($x$) оказалось подмножеством чисел комплексных ($z = x + iy$). При этом алгебра комплексных чисел ($z$) стала рассматриваться как двухмерная ($xy$) алгебра над полем действительных чисел. Итог "самопроизвольного", внутренне предопределённого развития понятия числа подводит классическая теорема Г. Фробениуса. Она утверждает, что существуют только две конечномерные алгебры над полем действительных чисел, в которых умножение коммутативно, ассоциативно и нет делителей нуля, – это само поле действительных чисел $R$ и поле комплексных чисел $C$ [2].

По завершении "эпохи открытий" новых расширений понятия числа наступил период их искусственного построения. Мотивация таких построений была уже не столько внутренне математической, сколько внешней, физической и имела целью построение "числового аппарата" для описания процессов в реальном трёхмерном пространстве или в четырёхмерном пространстве-времени. Математически эта процедура выглядела как отказ от одного (или нескольких) из условий теоремы Фробениуса — коммутативности, ассоциативности или отсутствия делителей нуля. Исторически первыми на пути построения алгебр гиперкомплексных (размерности $n > 2$) чисел были четырёхмерные кватернионы Гамильтона (1843 г.) и восьмимерные числа Кэли (1845 г.). В этих алгебрах делители нуля отсутствуют, однако произведение кватернионов не коммутативно, а чисел Кэли — ещё и не ассоциативно. Вторая часть теоремы Фробениуса утверждает, что этим (с точностью до изоморфизма) конечномерные действительные альтернативные алгебры без делителей нуля и исчерпываются (то есть, их размерность может принимать лишь значения 1, 2, 4 или 8) [1, 2]. Отметим, что указанная последовательность алгебр может рассматриваться как результат так называемой "процедуры удвоения Кэли – Диксона", когда сложное число последующего уровня получают объединением двух чисел предыдущего уровня посредством новой "единицы", наделяемой нужными свойствами умножения [3].

Гиперкомплексные числа нашли физическое применение, в частности при изложении электродинамики Дж. К. Максвелла (1860-е гг.) и при описании пространства-времени специальной теории относительности А. Эйнштейна (1905 г.) Г. Минковским (1907-08 гг.). Например, Ф. Клейн [1] демонстрирует применимость кватернионов для получения преобразований Лоренца, указывая, что сам Минковский использует в своих работах символику чисел Кэли, позволяющую наряду с преобразованиями Лоренца получить инварианты группы Лоренца. Примечательно, что для описания пространства-времени в действительную часть кватерниона потребовалось ввести коэффициент $\sqrt{-1}$, отличный от кватернионных единиц $i$, $j$, $k$. В современной физике такая конструкция описывается либо через 4-векторы $(it,\ xyz)$, имеющие мнимую координату [4], либо через действительные, ковариантные и контравариантные 4-векторы $(t,\ xyz)$ и $(t, -x, -y, -z)$ [4, 5]. Сами гиперкомплексные числа при этом вообще не упоминаются. Аналогично обстоит дело и с электродинамикой, в изложении которой теперь присутствуют лишь "отдельные составляющие" кватернионного исчисления, называемые современным языком скалярным и векторным произведением 3-векторов. Работы, как с традиционными, так и с новыми применениями кватернионов Гамильтона и октав Кэли продолжают появляться до сих пор. Хотя, на сегодняшний день интерес к этим гиперкомплексным числам имеет преимущественно научно-исторический характер. Конструктивное же внимание переместилось на числовые системы и конечномерные алгебры с делителями нуля.

Примером двухмерных чисел (не совпадающих с обычными комплексными) являются гиперболические числа, называемые также двойными или 2комплексными (twocomplex) числами [3, 6, 7, 8, 9]. В работах [6] и [8] эти числа представлены квадратными матрицами 2-го порядка. В [6] рассмотрено их обобщение путём построения матриц от 3-го до 6-го порядка, и изложены основные элементы теории аналитических функций таких $n$-мерных $(n = 2, 3, \dots, 6)$ "комплексных" переменных. В [8] дана геометрическая интерпретация 2- и 3-комплексных чисел, которая применена для матричного представления кристаллографических групп. В [9] гиперболические и комплексные числа рассмотрены с общих позиций — на основе соответствующих формул Эйлера, после чего построено обобщение чисел и полученных тригонометрических соотношений на размерности $n > 2$. В [7] гиперболические и комплексные числа представлены как частные случаи четырёхмерных бикомплексных чисел, изложению алгебраических свойств которых статья фактически и посвящена. Важно подчеркнуть, что в разных работах четырёхмерные числа (например, бикомплексные [7] и 4-комплексные [6]) и соответствующие им четырёхмерные алгебры отнюдь не совпадают. Отметим также, что терминология для четырёхмерных чисел ещё более разнообразна, чем для двухмерных чисел. Так, кроме уже упоминавшихся (кватернионы, бикомплексные и 4-комплексные числа), встречаются названия: четырехкомпонентные числа, квадрачисла, скалярные кватернионы, а также специальные символьные обозначения. Примечательно, что упомянутые термины *bi*complex и *four*complex — оба относятся к четырёхмерным числам. А, например, скалярные кватернионы [10] на уровне базисных единиц практически совпадают с бикомплексными числами [7], но существенно отличаются от кватернионов Гамильтона. В широком смысле гиперкомплексными называют любые числа, размерность которых $n > 2$ [2]. Для сложных чисел применяют также название “поличисла”. (См. например, программную публикацию [11] и вводимую там терминологию).

Даже из этого, весьма краткого и неполного обзора следует, что у разных авторов математические подходы, цели и методы отличаются большим разнообразием. Столь же разнообразны типы конструируемых числовых систем, уровень их обобщённости, вводимая терминология и получаемые результаты. В ряде работ особо отмечена взаимосвязь систем гиперкомплексных чисел с обычными комплексными числами. Однако, на наш взгляд, ни одна из этих систем пока не оказалась столь же значимой в математическом или прикладном отношении, как сами комплексные числа.

Целью настоящей работы является: построение наиболее простого и наглядного варианта системы коммутативных гиперкомплексных чисел, включающих в себя действительные и комплексные числа; подробная разработка в рамках этой системы новой концепции алгебры бикомплексных чисел на принципах её максимальной аналогии алгебрам действительных и комплексных чисел; демонстрация применимости этой алгебры для получения основных соотношений теории относительности и электродинамики.

В статье построена последовательность поколений гиперкомплексных чисел, которые названы N-комплексными (${}^{\mathrm{N}}C-$) числами, где $\mathrm{N} = 0, 1, 2, \ldots, \infty$. Получение базисных единиц ${}^{\mathrm{N}}C$-чисел N-го уровня происходит путём извлечения квадратных корней ($\pm$) из всех базисных единиц ($\mathrm{N}-1$)-го уровня. В результате, размерность ${}^{\mathrm{N}}C$-чисел: $n = 2^{\mathrm{N}}$. При $\mathrm{N} = 0$ и $\mathrm{N} = 1$ мы имеем дело с обычными действительными (${}^{0}C \equiv R$) и комплексными (${}^{1}C \equiv C$) числами. При $\mathrm{N} = 2$ и $N = 3$ получаем соответственно бикомплексные и трикомплексные числа ($B \equiv {}^{2}C$ и $T \equiv {}^{3}C$). И т. д. То есть, в нашей работе нумерация поколений ${}^{\mathrm{N}}C$-чисел идёт по показателю степени N, а не по их удваивающейся на каждом шаге размерности $n$.

Начиная с $B$-чисел, в качестве базиса $B$-пространства мы выбираем не сами единицы, которые получились при извлечении квадратных корней из единиц предыдущего уровня (действительной и мнимой), а их линейные комбинации. С одной стороны, опираясь на процедуру извлечения корней, мы ограничиваем произвол в выборе новых базисных единиц. С другой стороны, выбирая оптимальную линейную комбинацию — сопоставляем процедуру извлечения корней с “методом удвоения”. Тем самым, при $\mathrm{N} > 1$ построение ${}^{\mathrm{N}}C$-числа сводится к объединению двух ${}^{(\mathrm{N}-1)}C$-чисел посредством *единственной* новой коммутативной единицы ($j$, $k$, $l$, $\ldots$), для которой реализуется простейшее по знаку соотношение: $jj = kk = ll = \ldots = 1$. Отметим, что $B$-числа в нашей работе, следует отличать от схожих по названию и обозначениям чисел из работ [7] и [10].

Наиболее подробно в статье изложена алгебра бикомплексных чисел. Она является коммутативной, ассоциативной и содержит делители нуля. Рассмотрены операции сложения, умножения, деления и вычисления детерминанта $B$-чисел, а также операции их комплексного и бикомплексного сопряжения. Дано подразделение $B$-чисел на вырожденные и невырожденные и найдены соотношения между ними. Введены алгебраическая, векторная, матричная, экспоненциальная и тригонометрическая формы $B$-числа. Рассмотрены евклидовы и неевклидовы характеристики $B$-пространства. Элементы алгебры трикомплексных ($T \equiv {}^{3}C$) и тетракомплексных ($F \equiv {}^{4}C$) чисел изложены кратко, на уровне развития бикомплексных понятий и обозначений в соответствии с общей идеей построения ${}^{\mathrm{N}}C$-чисел.

В физической части работы исходными служат известные [12, 13] выражения координат изотропного 4-вектора через комплексные переменные. С учётом этих выражений, вычислением всех возможных билинейных и квадратичных произведений четырёх сопряжённых значений $B$-вектора получено десять различных действительных переменных, обозначенных как $T$, $X$, $Y$, $Z$, $F$, $G$, $K$, $L$, $M$, $N$. Тем самым $B$-вектору $q$ (его действительным координатам $a$, $b$, $c$, $d$ сопоставлено десять взаимосвязанных переменных $\{T..N\}$. Исследованы соотношения этих переменных и рассмотрены их трансформационные свойства, обусловленные преобразованием $B$-вектора. Показано, что переменные $T$, $X$, $Y$, $Z$ взаимосвязаны и преобразуются как координаты изотропного 4-вектора, а переменные $\{F..N\}$ — как составляющие антисимметричного 4-тензора, аналогичного тензору электромагнитной бегущей волны. Таким образом, произвольному $B$-вектору (в $B$-пространстве) сопоставлены изотропные 4-вектор и антисимметричный 4-тензор в псевдоевклидовом 4-пространстве с сигнатурой $(+\,-\,-\,-)$, а каждому унимодулярному $B$-преобразованию $B$-вектора сопоставлено преобразование Лоренца составляющих этих 4-векторов и 4-тензоров. Получены релятивистские формулы преобразования скорости и соотношения для компонентов симметричного 4-тензора, аналогичного тензору энергии-импульса.

В качестве литературы сравнения и источника физических обозначений нами использованы книги Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [5], [14] и Б.В. Медведева [4].

# 1 N-комплексная алгебра

## 1.1 Понятие N-комплексного пространства

Представим несколько последовательных этапов извлечения квадратного корня из единицы в виде следующей таблицы 1.1.1.

Двузначность ($\pm$) операции извлечения квадратного корня удваивает на каждом этапе количество “субъединиц”, которые при обратной операции — возведении в квадрат — должны давать исходное число. Появление новых субъединиц можно интерпретировать двояко: либо, как появление нового *знака* у исходной единицы, либо как появление нового *типа* единицы. Например: $\sqrt{1} = -1$ или $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$. Эти интерпретации не противоречат друг другу, и каждая из них может быть представлена в альтернативной форме:

$$(-1)(-1) = 1 \leftrightarrow (-)(-) = (+)$$

$$(\mathrm{i})(\mathrm{i}) = -1 \leftrightarrow (\mathrm{i}1)(\mathrm{i}1) = -1 \leftrightarrow (\mathrm{i})(\mathrm{i}) = (-)$$

$$(-\mathrm{i})(-\mathrm{i}) = -1 \leftrightarrow (-\mathrm{i}1)(-\mathrm{i}1) = (-1) \leftrightarrow (-\mathrm{i})(-\mathrm{i}) = (-)(-)(\mathrm{i})(\mathrm{i}) = (+)(-) = (-)$$

Таким образом, произведение субъединиц можно рассматривать как суперпозицию соответствующих знаков и наоборот. Аналогичная ситуация имеет место и для субъединиц последующих уровней. Именно поэтому все знаки-субъединицы мы будем всегда собирать вместе и ставить их перед числом. Например: $\mathrm{i}3$, $-\mathrm{ij}5$, $a + \mathrm{j}b$.

Понятие N-комплексного пространства введём как развитие понятий пространств действительных ($R$) и комплексных ($C$) чисел, основываясь на таблице 1.1.1. Так, на этапе $\mathrm{N} = 0$ знак $(-)$ дополняет положительную полуось до полной числовой оси. На этапе

Таблица 1.1.1: Извлечение квадратного корня из единицы.

<table>
<tr><td colspan="16">1</td><td>N</td></tr>
<tr><td colspan="8">1</td><td colspan="8">$-1$</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="4">1</td><td colspan="4">$-1$</td><td colspan="4">$\mathrm{i}$</td><td colspan="4">$-\mathrm{i}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">$-1$</td><td colspan="2">$\mathrm{i}$</td><td colspan="2">$-\mathrm{i}$</td><td colspan="2">$\mathrm{j}_1$</td><td colspan="2">$-\mathrm{j}_1$</td><td colspan="2">$\mathrm{j}_2$</td><td colspan="2">$-\mathrm{j}_2$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$-1$</td><td>$\mathrm{i}$</td><td>$-\mathrm{i}$</td><td>$\mathrm{j}_1$</td><td>$-\mathrm{j}_1$</td><td>$\mathrm{j}_2$</td><td>$-\mathrm{j}_2$</td><td>$\mathrm{k}_1$</td><td>$-\mathrm{k}_1$</td><td>$\mathrm{k}_2$</td><td>$-\mathrm{k}_2$</td><td>$\mathrm{k}_3$</td><td>$-\mathrm{k}_3$</td><td>$\mathrm{k}_4$</td><td>$-\mathrm{k}_4$</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="16">и так далее ...</td><td>$\infty$</td></tr>
</table>

N = 1 знак (i) вводит вторую — мнимую — координатную числовую ось, позволяя рассматривать множество комплексных чисел как двухмерное векторное пространство — комплексную плоскость. Будем считать, что каждая новая субъединица вводит соответствующую новую числовую ось, увеличивая на единицу размерность линейного пространства. При N = 2, введение двух дополнительных осей $\mathrm{j}_1$ и $\mathrm{j}_2$ делает пространство 4-мерным $\{1, \mathrm{i}, \mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2\}$. При N = 3, введение еще четырех осей $\mathrm{k}_1$ $\mathrm{k}_2$ $\mathrm{k}_3$ и $\mathrm{k}_4$ создает 8-мерное пространство $\{1, \mathrm{i}, \mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{k}_3, \mathrm{k}_4\}$ и т. д. На N-ом этапе размерность линейного пространства $n = 2^{\mathrm{N}}$.

Введем следующую *терминологию*, согласующуюся с общепринятой:

**0-комплексное ($^0C$-) пространство** — не комплексное — пространство *действительных* чисел $R$, одномерная ось $R$;

**1-комплексное ($^1C$-) пространство** — монокомплексное — обычное *компле́ксное* пространство $C$, двумерная комплексная плоскость, $C$-плоскость;

**2-комплексное ($^2C$-) пространство** — *бикомпле́ксное* пространство $B$, 4-мерное $B$-пространство;

**3-комплексное ($^3C$-) пространство** — *трикомплексное* пространство $T$, 8-мерное $T$-пространство;

**4-комплексное ($^4C$-) пространство** — *тетракомплексное* пространство $F$, 16-мерное $F$-пространство.

И так далее... Общее обозначение: N-комплексное ($^{\mathrm{N}}C$-) пространство.

Субъединицы $1, \mathrm{i}, \mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{k}_3, \mathrm{k}_4, \ldots$ — будем называть *базисными единицами* соответствующего N-комплексного пространства.

## 1.2 Соотношение базисных единиц

### $B$-пространства

Мнимое число i обычно определяют как такое число, квадрат которого, $\mathrm{i}^2 = \mathrm{ii} = -1$. Аналогичным образом (согласно таблице 1.1.1) определим и числа j:

$$\mathrm{j}_1^2 = \mathrm{j}_1\mathrm{j}_1 = (-\mathrm{j}_1)(-\mathrm{j}_1) = \mathrm{i}, \qquad \mathrm{j}_2^2 = \mathrm{j}_2\mathrm{j}_2 = (-\mathrm{j}_2)(-\mathrm{j}_2) = -\mathrm{i}.$$

Учитывая правило комплексного сопряжения произведения, получим

$$\bar{\mathrm{j}}_1\bar{\mathrm{j}}_1 = \overline{\mathrm{j}_1\mathrm{j}_1} = \bar{\mathrm{i}} = -\mathrm{i} = \mathrm{j}_2\mathrm{j}_2$$

откуда следует, что числа $\mathrm{j}_1$ и $\mathrm{j}_2$ являются комплексно сопряжёнными:

$$\bar{\mathrm{j}}_1 = \mathrm{j}_2 \text{ или } \bar{\mathrm{j}}_1 = -\mathrm{j}_2$$

Эти соотношения означают, что при комплексном сопряжении оси $B$-пространства $\mathrm{j}_1$ и $\mathrm{j}_2$ переходят друг в друга. Выбор знака на данном этапе *определяет* — окажутся при этом направления осей одинаковыми или противоположными. Выберем первую альтернативу. Кроме того,

$$1 = -\mathrm{ii} = (\mathrm{j}_2\mathrm{j}_2)(\mathrm{j}_1\mathrm{j}_1) = (\mathrm{j}_1\mathrm{j}_2)(\mathrm{j}_1\mathrm{j}_2), \quad \text{то есть} \quad \mathrm{j}_1\mathrm{j}_2 = 1 \quad \text{или} \quad \mathrm{j}_1\mathrm{j}_2 = -1.$$

Здесь мы опять произвольно *определяем* ориентацию плоскости $(\mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2)$ уже по отношению к плоскости, задаваемой базисными единицами $(1, \mathrm{i})$. Выберем

$$\mathrm{j}_1\mathrm{j}_2 = 1,$$

тогда

$$\mathrm{i}\mathrm{j}_2 = (\mathrm{j}_1\mathrm{j}_1)\mathrm{j}_2 = \mathrm{j}_1(\mathrm{j}_1\mathrm{j}_2) = \mathrm{j}_1, \quad \text{то есть} \quad \mathrm{i}\mathrm{j}_2 = \mathrm{j}_1$$

$$-\mathrm{i}\mathrm{j}_1 = (\mathrm{j}_2\mathrm{j}_2)\,\mathrm{j}_1 = \mathrm{j}_2\,(\mathrm{j}_1\mathrm{j}_2) = \mathrm{j}_2, \quad \text{то есть} \quad \mathrm{i}\mathrm{j}_1 = -\mathrm{j}_2$$

Плоскость $(\mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2)$, как и плоскость $(1, \mathrm{i})$, является комплексной, но её оси $\mathrm{j}_1$ и $\mathrm{j}_2$ повёрнуты так, что ни одна из них не является ни действительной, ни мнимой. Совершим линейную замену базисных единиц и введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{j}_1 + \mathrm{j}_2}{\sqrt{2}} &= \frac{\mathrm{i}\mathrm{j}_2 + \mathrm{j}_2}{\sqrt{2}} = \mathrm{j}_2\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \equiv \mathrm{j} \\ \frac{\mathrm{j}_1 - \mathrm{j}_2}{\sqrt{2}} &= \frac{\mathrm{i}\mathrm{j}_2 - \mathrm{j}_2}{\sqrt{2}} = \mathrm{i}\mathrm{j}_2\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \mathrm{i}\mathrm{j} \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

теперь

$$\bar{\mathrm{j}} = \mathrm{j}, \quad \overline{\mathrm{i}\mathrm{j}} = -\mathrm{i}\mathrm{j}, \quad \mathrm{j}^2 = 1, \quad (\mathrm{i}\mathrm{j})^2 = -1 \tag{1.2.2}$$

Тем самым, для обозначения двух новых осей $B$-пространства (j и ij) мы используем фактически всего один символ j с наличием или отсутствием “знака” i перед ним. При этом сам символ j оказывается выведенным из-под действия операции комплексного сопряжения. Сводка полученных соотношений представлена в виде таблицы, в которой произведения базисных единиц $B$-пространства стоят на пересечении соответствующих строк и столбцов:

Таблица 1.2.1:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | i | j | ij |
| i | −1 | ij | −j |
| j | ij | 1 | i |
| ij | −j | i | −1 |

## 1.3 Операции над элементами $B$-пространства

Элементы бикомплексного пространства будем обозначать символом $q$ и записывать в одной из следующих форм:

$$q{=}a{+}\mathrm{i}b{+}\mathrm{j}c{+}\mathrm{i}\mathrm{j}d{=}\,(a{+}\mathrm{i}b)\,{+}\mathrm{j}\,(c{+}\mathrm{i}d)\,{=}u{+}\mathrm{j}v \tag{1.3.1}$$

где 1, i, j, ij — базисные единицы бикомплексного пространства; $a$, $b$, $c$, $d$ — действительные числа; $u = a{+}\mathrm{i}b$ и $v = c{+}\mathrm{i}d$ — комплексные числа. Таким образом, наряду с представлением через действительные числа $a$, $b$, $c$, $d$, возможно представление элемента $B$-пространства в виде двучлена с комплексными составляющими $u$ и $v$.

Если базисные единицы рассматривать как обозначения базисных векторов, то упорядоченная четверка чисел $(abcd)$ является координатами *бикомплексного вектора* (кратко — $B$-вектора) $q$. Если же базисные единицы считать алгебраическими символами, то можно сказать, что формула (1.3.1) задает алгебраическую форму *бикомплексного числа* (кратко — $B$-числа) $q$. Далее оба термина — $B$-число и $B$-вектор — будем использовать на равных правах.

Пусть $qq_1$ и $q_2$ — произвольные элементы $B$-пространства, $\lambda$ — действительное число, а $z = x + \mathrm{i}y$ — число комплексное. Тогда

**сумма элементов**

$$\begin{aligned} q_1+q_2 &= (u_1+u_2) + \mathrm{j}\,(v_1+v_2) = \\ &= (a_1+a_2) + \mathrm{i}\,(b_1+b_2) + \mathrm{j}[(c_1+c_2) + \mathrm{i}\,(d_1+d_2)] = \\ &= (a_1+a_2) + \mathrm{i}\,(b_1+b_2) + \mathrm{j}\,(c_1+c_2) + \mathrm{ij}\,(d_1+d_2) \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

**произведение элемента на число**

$$\lambda q = \lambda u + \mathrm{j}\lambda v = \lambda\,(a+\mathrm{i}b) + \mathrm{j}\lambda\,(c+\mathrm{i}d) = \lambda a + \mathrm{i}\lambda b + \mathrm{j}\lambda c + \mathrm{ij}\lambda d \tag{1.3.3}$$

$$\begin{aligned} zq &= zu + \mathrm{j}zv = (x+\mathrm{i}y)\,(a+\mathrm{i}b) + \mathrm{j}(x+\mathrm{i}y)\,(c+\mathrm{i}d) = \\ &= (xa-yb) + \mathrm{i}\,(xb+ya) + \mathrm{j}\,[(xc-yd) + \mathrm{i}\,(xd+yc)] = \\ &= (xa-yb) + \mathrm{i}\,(xb+ya) + \mathrm{j}\,(xc-yd) + \mathrm{ij}\,(xd+yc) \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Таким образом, сложение $B$-векторов сводится к сложению их соответствующих координат, а умножение $B$-вектора на число выполняется путем умножения всех координат вектора на это число. Обе операции могут проводиться как в действительной, так и в комплексной форме и удовлетворяют восьми аксиомам линейного пространства:

1° $q_1+q_2=q_2+q_1$

2° $(q_1+q_2)+q_3=q_1+(q_2+q_3)$

3° $0+\mathrm{i}0+\mathrm{j}0+\mathrm{ij}0=0$ — нулевой элемент: $0+q=q$

4° $-q=-a-\mathrm{i}b-\mathrm{j}c-\mathrm{ij}d=q'$ — противоположный элемент: $q+q'=0$

5° $1q=q$ — особая роль числового множителя 1

6° $z_1\,(z_2q)=(z_1z_2)\,q$

7° $(z_1+z_2)q=z_1q+z_2q$

8° $z(q_1+q_2)=zq_1+zq_2$

Поскольку произведения базисных единиц определены (табл. 1.2.1), найдём

**произведение элементов B-пространства:**

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= (a_1+\mathrm{i}b_1+\mathrm{j}c_1+\mathrm{ij}d_1)\,(a_2+\mathrm{i}b_2+\mathrm{j}c_2+\mathrm{ij}d_2) = \\ &= (a_1a_2-b_1b_2+c_1c_2-d_1d_2) + \mathrm{i}\,(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2+d_1c_2) + \\ &\quad + \mathrm{j}\,(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2-d_1b_2) + \mathrm{ij}\,(a_1d_2+b_1c_2+c_1b_2+d_1a_2) = \\ &= (u_1+\mathrm{j}v_1)\,(u_2+\mathrm{j}v_2) = (u_1u_2+v_1v_2) + \mathrm{j}\,(u_1v_2+v_1u_2) \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

В том числе,

**квадрат B-числа:**

$$\begin{aligned} q^2 &= (a+\mathrm{i}b+\mathrm{j}c+\mathrm{ij}d)\,(a+\mathrm{i}b+\mathrm{j}c+\mathrm{ij}d) = \\ &= \left(a^2-b^2+c^2-d^2\right) + \mathrm{i}2\,(ab+cd) + \mathrm{j}2\,(ac-bd) + \mathrm{ij}2\,(ad+bc) = \\ &= (u+\mathrm{j}v)^2 = u^2+v^2+\mathrm{j}2uv \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

В зависимости от значений координат сомножителей, произведение $B$-чисел может принимать любое значение — бикомплексное, комплексное, мнимое, действительное или вообще нулевое. Произведение $B$-чисел и коммутативно, и ассоциативно.

**Сопряжённые формы B-числа.**

С учетом формул (1.2.2), комплексно сопряжённое $B$-число $\bar{q}$ будет иметь вид:

$$\bar{q}=a-\mathrm{i}b+\mathrm{j}c-\mathrm{ij}d=(a-\mathrm{i}b)+\mathrm{j}\,(c-\mathrm{i}d)=\bar{u}+\mathrm{j}\bar{v} \tag{1.3.7}$$

Кроме обычной операции комплексного сопряжения ($C$-сопряжения) введем операцию *бикомплексного сопряжения* ($B$-сопряжения), состоящую в смене знака перед символом j. Эту операцию обозначим проставлением над символом $B$-числа знака тильда ( $\tilde{}$ ). На основе формул (1.3.1) и (1.3.7), $B$-сопряжённое число $\tilde{q}$ и $CB$-сопряжённое число $\tilde{\bar{q}}$ запишем так:

$$\tilde{q} = a + \mathrm{i}b - \mathrm{j}c - \mathrm{ij}d = (a + \mathrm{i}b) - \mathrm{j}\,(c + \mathrm{i}d) = u - \mathrm{j}v \tag{1.3.8}$$

$$\tilde{\bar{q}} = a - \mathrm{i}b - \mathrm{j}c + \mathrm{ij}d = (a - \mathrm{i}b) - \mathrm{j}\,(c - \mathrm{i}d) = \bar{u} - \mathrm{j}\bar{v} \tag{1.3.9}$$

Отметим, что операции $C$- и $B$-сопряжения независимы. Поэтому, как выполнение, так и проставление над символом $B$-числа знаков этих операций может производиться в любом порядке. Повторное сопряжение любого типа равносильно отсутствию этого сопряжения:

$$\tilde{\bar{q}} = \bar{\tilde{q}}, \quad \bar{\bar{q}} = q, \quad \tilde{\tilde{q}} = q \tag{1.3.10}$$

Для комплексного числа $z = x + \mathrm{i}y$ существуют операции выделения (действительных) координат по действительной и мнимой осям: $\mathrm{Re}(z) = x$ и $\mathrm{Im}(z) = y$. Комплексные числа $u$ и $v$ по аналогии можно назвать соответственно комплексной частью и "j-частью" бикомплексного числа $q$. Для операций выделения этих (комплексных) координат $B$-вектора введем следующие обозначения:

$$\mathrm{C1}\,(q) = u \quad \mathrm{C2}(q) = v \tag{1.3.11}$$

Тогда для $B$-чисел (1.3.7) – (1.3.9) получим

$$\mathrm{C1}\,(\bar{q})=\bar{u},\ \mathrm{C2}\,(\bar{q})=\bar{v}; \quad \mathrm{C1}\,(\tilde{q})=u,\ \mathrm{C2}\,(\tilde{q})=-v; \quad \mathrm{C1}\,(\tilde{\bar{q}})=\bar{u},\ \mathrm{C2}\,(\tilde{\bar{q}})=-\bar{v}$$

Выпишем произведения пар сопряжённых $B$-чисел:

$$\begin{aligned}
&\text{а) } q\bar{q} = (u + \mathrm{j}v)\,(\bar{u} + \mathrm{j}\bar{v}) = u\bar{u} + v\bar{v} + \mathrm{j}\,(u\bar{v} + \bar{u}v)\\
&\text{б) } \tilde{q}\tilde{\bar{q}} = (u - \mathrm{j}v)\,(\bar{u} - \mathrm{j}\bar{v}) = u\bar{u} + v\bar{v} - \mathrm{j}\,(u\bar{v} + \bar{u}v)\\
&\text{в) } q\tilde{q} = (u + \mathrm{j}v)\,(u - \mathrm{j}v) = u^2 - v^2\\
&\text{г) } \bar{q}\tilde{\bar{q}} = (\bar{u} + \mathrm{j}\bar{v})\,(\bar{u} - \mathrm{j}\bar{v}) = \bar{u}^2 - \bar{v}^2\\
&\text{д) } q\tilde{\bar{q}} = (u + \mathrm{j}v)\,(\bar{u} - \mathrm{j}\bar{v}) = u\bar{u} - v\bar{v} - \mathrm{j}\,(u\bar{v} - \bar{u}v)\\
&\text{е) } \bar{q}\tilde{q} = (\bar{u} + \mathrm{j}\bar{v})\,(u - \mathrm{j}v) = u\bar{u} - v\bar{v} + \mathrm{j}(u\bar{v} - \bar{u}v)
\end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Произведения а) и б) сопряжены бикомплексно: $\mathrm{C1}\,(q\bar{q}) = \mathrm{C1}(\tilde{q}\tilde{\bar{q}})$, $\mathrm{C2}\,(q\bar{q}) = -\mathrm{C2}(\tilde{q}\tilde{\bar{q}})$. В произведениях в) и г) сами сомножители являются $B$-сопряжёнными. Между собой же эти произведения сопряжены комплексно. В результате: $\mathrm{C2}\,(q\tilde{q}) = \mathrm{C2}\,(\bar{q}\tilde{\bar{q}}) = 0$. Наконец, произведения д) и е) можно рассматривать либо как $C$-сопряжённые, либо как $B$-сопряжённые, так как при любом из этих сопряжений они переходят друг в друга.

Произведение всех четырех сопряжённых форм может быть вычислено через сомножители (1.3.12) следующими тремя способами:

$$\det q=q\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}=(q\bar{q})\,(\tilde{q}\tilde{\bar{q}})=(q\tilde{q})\,(\bar{q}\tilde{\bar{q}})=(q\tilde{\bar{q}})(\bar{q}\tilde{q})=$$

$$=(u\bar{u}+v\bar{v})^2-(u\bar{v}+\bar{u}v)^2=(u^2-v^2)(\bar{u}^2-\bar{v}^2)=(u\bar{u}-v\bar{v})^2-(u\bar{v}-\bar{u}v)^2=$$

$$
\begin{gathered}
=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2-4\,(ac+bd)^2=\\
=\left(a^2-b^2-c^2+d^2\right)^2+4\,(ab-cd)^2=\\
=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(ad-bc)^2=\\
=a^4+b^4+c^4+d^4+2\left(a^2b^2-a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2-b^2d^2+c^2d^2\right)-8abcd
\end{gathered}
\tag{1.3.13}
$$

Как сумма квадратов двух действительных чисел (строки 4 и 5 в (1.3.13), это произведение всегда имеет действительное неотрицательное значение. Использование обозначения определителя, $\det q$, связано с матричной формой представления $B$-чисел, которая будет рассмотрена в следующем разделе. Сейчас же отметим, что в тех случаях, когда $\det q \neq 0$ для данного числа $q$ возможно

**деление на $B$-число**

$$
\frac{q_1}{q}=\frac{q_1\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}}{q\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}}=\frac{q_1\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}}{\det q}
\tag{1.3.14}
$$

Тем самым, деление на $B$-число $q$ сводится к умножению на три сопряжённые формы этого числа и делению на действительное число $\det q$ Если $q_1 = 1$, то получим

**обратное $B$-число**

$$
1/q = q^{-1} = \bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}/\det q
\tag{1.3.15}
$$

Естественно, обратное значение имеют только те $B$-числа, определитель которых не равен нулю.

## 1.4 Матричная форма $B$-числа

Каждому $B$-числу в форме (1.3.1) может быть сопоставлена действительная квадратная матрица четвертого порядка, которую будем обозначать тем же символом $q$:

$$
\begin{gathered}
q=\begin{Vmatrix} a & b & c & d\\ -b & a & -d & c\\ c & d & a & b\\ -d & c & -b & a\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} u & v\\ v & u\end{Vmatrix},\quad
\tilde{q}=\begin{Vmatrix} a & b & -c & -d\\ -b & a & d & -c\\ -c & -d & a & b\\ -d & -c & -b & a\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} u & -v\\ -v & u\end{Vmatrix},\\
\bar{q}=\begin{Vmatrix} a & -b & c & -d\\ b & a & d & c\\ c & -d & a & -b\\ d & c & b & a\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \bar{u} & \bar{v}\\ \bar{v} & \bar{u}\end{Vmatrix},\quad
\tilde{\bar{q}}=\begin{Vmatrix} a & -b & -c & d\\ b & a & -d & -c\\ -c & d & a & -b\\ -d & -c & b & a\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \bar{u} & -\bar{v}\\ -\bar{v} & \bar{u}\end{Vmatrix},
\end{gathered}
\tag{1.4.1}
$$

Эти матрицы являются суммой произведений — согласно формулам (1.3.1) — (1.3.9) — действительных чисел $(a, b, c, d)$ на следующие матрицы базисных элементов:

$$
1=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix},\ 
\mathrm{i}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{Vmatrix},\ 
\mathrm{j}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{Vmatrix},\ 
\mathrm{ij}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}
\tag{1.4.2}
$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что формулы (1.2.2) реализуются на матрицах (1.4.2).

Действительные матрицы (1.4.1) и (1.4.2) $B$-чисел можно представить в виде комплексных (блочных) матриц второго порядка. При этом их элементы записываются в матричной форме так, как это принято для комплексных чисел:

$$u = \begin{Vmatrix} a & b \\ -b & a \end{Vmatrix},\ \bar{u} = \begin{Vmatrix} a & -b \\ b & a \end{Vmatrix}, v = \begin{Vmatrix} c & d \\ -d & c \end{Vmatrix}, \bar{v} = \begin{Vmatrix} c & -d \\ d & c \end{Vmatrix}, 1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \mathrm{i} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \quad (1.4.3)$$

Операции с матрицами $B$-чисел — сложение, произведение, умножение на число — могут выполняться как в действительной, так и в комплексной форме. Сами комплексные и действительные числа в свою очередь могут рассматриваться как частные случаи бикомплексных: $u = u + \mathrm{j}$ и $a = a + \mathrm{i}0 + \mathrm{j}0 + \mathrm{ij}$:

$$u = \begin{Vmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad a = \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{Vmatrix} \quad (1.4.4)$$

Тем самым операции с $R$-, $C$- и $B$-числами осуществляются на матрицах одинаковых порядков. Матрицы $B$-чисел коммутативны. Это обеспечивается их симметричностью относительно *побочной* диагонали. Бикомплексное и комплексное сопряжения выражается в смене знака соответственно у j- или у i-элементов.

Во всех матрицах (1.4.1) алгебраические дополнения $A, B, C, D$ элементов $a, b, c, d$ не зависят от места расположения этих элементов в матрицах. Тем самым, вычисляя определитель любой из матриц (1.4.1) разложением по любой их строке или столбцу, получим

$$\det q = \det \bar{q} = \det \tilde{q} = \det \tilde{\bar{q}} = aA + bB + cC + dD = q\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}} \quad (1.4.5)$$

Именно поэтому в формуле (1.3.13) произведение всех четырёх сопряжённых форм $B$-числа было обозначено как $\det q$. Из формул (1.4.3) следует, что аналогичные соотношения имеют место и для комплексных чисел: $\det u = \det \bar{u} = u\bar{u} = a^2 + b^2$.

Определитель $B$-числа можно вычислить и через комплексные матрицы (1.4.1) как через промежуточную стадию:

$$\det q = \det(u^2 - v^2) = \det(\bar{u}^2 - \bar{v}^2) = \begin{vmatrix} a^2 - b^2 - c^2 + d^2 & \pm 2(ab - cd) \\ \mp 2(ab - cd) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{vmatrix} = \\ (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^{+}4(ab - cd)^2 \quad (1.4.6)$$

## 1.5 Делители нуля

Очевидно, что определитель $\det q = 0$ в случае $q = u = v = a = b = c = d = 0$. Но даже когда $q \neq 0$, то из (1.4.6) следует, что $\det q = 0$, если выполняется условие

$$u^2 - v^2 = 0, \text{ то есть } u = \pm v. \quad (1.5.1)$$

При $q \neq 0$, не равны нулю и все сопряжённые формы $q$. Поскольку определитель вычисляется как их произведение (1.4.5), то это значит, что результатом произведения ненулевых сомножителей может быть число ноль. Таким образом, множество $B$-чисел содержит делители нуля.

$B$-числа, определитель которых равен нулю, а матрица является вырожденной, тоже будем называть *вырожденными*. Рассмотрим произведение $q_1 q_2 = q_3$. Для него $\det q_1 \det q_2 = \det q_3$. Отсюда следует, что определитель произведения $\det q_3$ равен нулю только, когда один или оба сомножителя вырождены. И наоборот, если $\det q_1 \neq 0$ и $\det q_2 \neq 0$, то и $\det q_3 \neq 0$.

## 1.6 О понятии $B$-числа

Множество элементов $B$-пространства образует ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, имеющее делители нуля. Над полем $R$ действительных чисел это кольцо является четырёхмерной (над полем $C$ комплексных чисел — 2-мерной) ассоциативной и коммутативной алгеброй. Нулевой и единичный элементы кольца и полей $R$ и $C$ совпадают, а операции сложения и умножения элементов $B$-пространства являются естественным развитием этих операций для элементов числовых полей $R$ b $C$. Именно поэтому элементы $B$-пространства мы называем (бикомплексными) числами. Бикомплексные числа являются не менее естественным направлением развития понятия числа, чем кватернионы и числа Кэли. Отметим, что не имеющие делителей нуля гиперкомплексные числа на стадии 4-мерной действительной алгебры кватернионов уже не обладают свойством коммутативности произведения, а на стадии 8-мерной алгебры чисел Кэли теряют ещё и свойство ассоциативности (оставаясь альтернативной). Тем самым, развитие понятия числа без делителей нуля естественным образом заканчивается. В отличие от этого, бикомплексные числа (и последующие ${}^{\mathrm{N}}C$-числа) имеют делители нуля, но сохраняют все свои алгебраические свойства в силу того, что именно сохранение этих свойств и положено в основу их построения.

## 1.7 Экспонента от $B$-аргумента

Представим функцию $e^x \equiv \exp x$ в виде следующего степенного ряда:

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = X_0 + X_1 + X_+ \dots + X_n + \dots, \qquad (1.7.1)$$

где $X_n = \dfrac{x^n}{n!}$

Пусть $\alpha$ — действительное число. Известно, что, группируя чётные и нечётные члены ряда, при $x = \alpha$ экспоненту (1.7.1) можно выразить через гиперболические функции, а при $x = \mathrm{i}\alpha$ — через тригонометрические:

$$\exp(\alpha) = (X_0{+}X_2{+}X_4{+}\dots) + (X_1{+}X_3{+}X_5{+}\dots) = \mathrm{ch}\alpha + \mathrm{sh}\alpha$$

$$\exp(i\alpha) = X_0 + \mathrm{i}X_1 - X_2 - \mathrm{i}X_3 + \dots = (X_0 - X_2 + X_4 - \dots) + \mathrm{i}\,(X_1 - X_3 + X_5 - \dots) =$$
$$= \mathrm{ch}(\mathrm{i}\alpha) + \mathrm{sh}\,(\mathrm{i}\alpha) = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$$

где $X_n = \alpha^n/n!$ — действительные числа. Аналогично, для $x = \mathrm{j}\alpha$ и $x = \mathrm{ij}\alpha$, получим:

$$\exp(\mathrm{j}\alpha) = X_0 + \mathrm{j}X_1 + X_2 + \mathrm{j}X_3 + \dots = (X_0 + X_2 + X_4 + \dots) + \mathrm{j}\,(X_1 + X_3 + X_5 + \dots) =$$
$$= \mathrm{ch}\,(\mathrm{j}\alpha) + \mathrm{sh}\,(\mathrm{j}\alpha) = \mathrm{ch}\alpha + \mathrm{j}\,\mathrm{sh}\alpha$$

$$\exp(\mathrm{ij}\alpha) = X_0 + \mathrm{ij}X_1 - X_2 - \mathrm{ij}X_3 + \dots = (X_0 - X_2 + X_4 - \dots) + \mathrm{ij}\,(X_1 - X_3 + X_5 - \dots) =$$
$$= \mathrm{ch}\,(\mathrm{ij}\alpha) + \mathrm{sh}\,(\mathrm{ij}\alpha) = \cos\alpha + \mathrm{ij}\sin\alpha$$

Сводка уже известных и вновь полученных формул имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\exp(\alpha) &= \mathrm{ch}\alpha + \mathrm{sh}\alpha\\
\exp(\mathrm{i}\alpha) &= \mathrm{ch}\,(\mathrm{i}\alpha) + \mathrm{sh}\,(\mathrm{i}\alpha) = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha\\
\exp(\mathrm{j}\alpha) &= \mathrm{ch}\,(\mathrm{j}\alpha) + \mathrm{sh}\,(\mathrm{j}\alpha) = \mathrm{ch}\alpha + \mathrm{j}\,\mathrm{sh}\alpha\\
\exp(\mathrm{ij}\alpha) &= \mathrm{ch}\,(\mathrm{ij}\alpha) + \mathrm{sh}\,(\mathrm{ij}\alpha) = \cos\alpha + \mathrm{ij}\sin\alpha
\end{aligned} \qquad (1.7.2)$$

Для отрицательного аргумента $(-\alpha)$ знак $(+)$ перед нечётными функциями синуса во всех формулах (1.7.2) изменится на знак $(-)$. Тогда, наряду с известными формулами Эйлера

$$\begin{cases} \dfrac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}=\text{ch}\alpha \\ \dfrac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}=\text{sh}\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{e^{\mathrm{i}\alpha}+e^{-\mathrm{i}\alpha}}{2}=\text{ch}(\mathrm{i}\alpha)=\cos(\alpha) \\ \dfrac{e^{\mathrm{i}\alpha}-e^{-\mathrm{i}\alpha}}{2}=\text{sh}(\mathrm{i}\alpha)=\mathrm{i}\sin(\alpha) \end{cases}$$

мы получаем возможность записать (1.7.3)

$$\begin{cases} \dfrac{e^{\mathrm{j}\alpha}+e^{-\mathrm{j}\alpha}}{2}=\text{ch}(\mathrm{j}\alpha)=\text{ch}(\alpha) \\ \dfrac{e^{\mathrm{j}\alpha}-e^{-\mathrm{j}\alpha}}{2}=\text{sh}(\mathrm{j}\alpha)=\mathrm{j}\,\text{sh}(\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{e^{\mathrm{ij}\alpha}+e^{-\mathrm{ij}\alpha}}{2}=\text{ch}(\mathrm{ij}\alpha)=\cos(\alpha) \\ \dfrac{e^{\mathrm{ij}\alpha}-e^{-\mathrm{ij}\alpha}}{2}=\text{sh}(\mathrm{ij}\alpha)=\mathrm{ij}\sin(\alpha) \end{cases} \tag{1.7.3}$$

Если в качестве аргумента экспоненты взять $B$-число

$$\kappa=\alpha+\mathrm{i}\beta+\mathrm{j}\gamma+\mathrm{ij}\delta=\xi+\mathrm{j}\eta$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ действительные, а $\xi=\alpha+\mathrm{i}\beta$ и $\eta=\gamma+\mathrm{i}\delta$ — комплексные числа, то

$$\begin{aligned} \exp\kappa &= \exp(\alpha+\mathrm{i}\beta+\mathrm{j}\gamma+\mathrm{ij}\delta)=\exp\alpha\exp(\mathrm{i}\beta)\exp(\mathrm{j}\gamma)\exp(\mathrm{ij}\delta)= \\ &= \exp\alpha(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)(\text{ch}\gamma+\mathrm{j}\,\text{sh}\gamma)(\cos\delta+\mathrm{ij}\sin\delta)= \\ &= e^{\alpha}\{[(\cos\beta\text{ch}\gamma\cos\delta-\sin\beta\text{sh}\gamma\sin\delta)+\mathrm{i}(\sin\beta\text{ch}\gamma\cos\delta+\cos\beta\text{sh}\gamma\sin\delta)]+ \\ &\quad +\mathrm{j}[(\cos\beta\text{sh}\gamma\cos\delta-\sin\beta\text{ch}\gamma\sin\delta)+\mathrm{i}(\sin\beta\text{sh}\gamma\cos\delta+\cos\beta\text{ch}\gamma\sin\delta)]\}= \\ &= a+\mathrm{i}b+\mathrm{j}c+\mathrm{ij}d=q \end{aligned} \tag{1.7.4}$$

Соотношения (7.4) можно рассматривать как *экспоненциальную форму* (кратко — *exp*-форму) $B$-числа, выраженную через действительные функции. Таким же образом *exp*-форму можно выразить и через функции от двух комплексных аргументов:

$$\exp\kappa=\exp(\xi+\mathrm{j}\eta)=\exp\xi\exp(\mathrm{j}\eta)=\exp\xi\,(\text{ch}\eta+\mathrm{j}\,\text{sh}\eta)=u+\mathrm{j}v=q \tag{1.7.5}$$

Поскольку экспонента от $B$-аргумента в итоге выражается через гиперболические и тригонометрические функции действительной (или комплексной) переменной, то и в случае $B$-аргумента будут выполняться основные тождества:

$$\begin{aligned} (\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)(\cos\beta-\mathrm{i}\sin\beta) &= \cos^2\beta+\sin^2\beta=1 \\ (\text{ch}\gamma+\mathrm{j}\,\text{sh}\gamma)(\text{ch}\gamma-\mathrm{j}\,\text{sh}\gamma) &= \text{ch}^2\gamma-\text{sh}^2\gamma=1 \\ (\cos\delta+\mathrm{ij}\sin\delta)(\cos\delta-\mathrm{ij}\sin\delta) &= \cos^2\delta+\sin^2\delta=1 \\ (\text{ch}\kappa+sh\kappa)(\text{ch}\kappa-sh\kappa) &= \text{ch}^2\kappa-\text{sh}^2\kappa=\exp(\kappa)\exp(-\kappa)=\exp(0)=1 \end{aligned} \tag{1.7.6}$$

Фактически здесь мы имеем дело с расширением экспоненты, а также гиперболических и тригонометрических функций на бикомплексное пространство $\mathbb{B}$, аналогично уже известному расширению этих функций на комплексное пространство $\mathbb{C}$. Все известные соотношения для этих функций от действительного или комплексного аргумента будут справедливы и для бикомплексного аргумента. Так, соотношения, аналогичные (1.7.2), будут выполняться не только для действительного аргумента $\alpha$, но и для комплексного аргумента (например, $\xi=\alpha+\mathrm{i}\beta$), и для $B$-аргумента ($\kappa=\alpha+\mathrm{i}\beta+\mathrm{j}\gamma+\mathrm{ij}\delta$). Вообще, справедливость любой экспоненциальной, гиперболической или тригонометрической формулы, записанной для бикомплексного аргумента, легко проверить, выразив этот аргумент через действительные переменные, а затем преобразовав формулу по стандартным правилам с учётом соотношений (1.7.2) – (1.7.3).

Функция (1.7.4) по переменным $\beta$ и $\delta$ имеет периоды $2n\pi$. Из тождеств (1.7.6) и формулы (1.7.4) следует, что ни при каких значениях аргументов $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ все четыре координаты $B$-вектора $q$ не принимают нулевого значения одновременно. Следовательно, ноль не входит в область значений функции $q = \exp\kappa$. Нет среди значений этой функции и вырожденных $B$-чисел, так как

$$\det q = q\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}} = \exp\left(\kappa + \bar{\kappa} + \tilde{\kappa} + \tilde{\bar{\kappa}}\right) = \exp 4\alpha > 0 \tag{1.7.7}$$

Отметим, что возможно и другое, связанное с экспонентой представление $B$-числа, которое будем называть *комплексно-экспоненциальным.* Такое *C-exp*-представление вытекает из того, что комплексные составляющие $u$ и $v$ $B$-числа $B$ каждая по отдельности выражаются в экспоненциальной форме. Так, если $u$ и $v$ не равны нулю, то

$$\begin{aligned} q = u + \mathrm{j}v &= \exp\left(\rho + \mathrm{i}\varphi\right) + \mathrm{j}\exp\left(\sigma + \mathrm{i}\psi\right) = \\ &= \exp\rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) + \mathrm{j}\exp\sigma(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) \end{aligned} \tag{1.7.8}$$

Функция (1.7.8) определена при любых действительных значениях $\rho$, $\varphi$, $\sigma$, $\psi$; имеет периоды $2\pi$ по переменным $\varphi$ и $\psi$. При $\rho = \sigma$ и $\varphi = \psi \pm n\pi$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ её значения вырождены и выполняется условие (1.5.1), $u = \pm v$:

$$q\tilde{q} = \exp 2\left(\rho + \mathrm{i}\varphi\right) - \exp 2\left(\sigma + \mathrm{i}\psi\right) = 0$$

## 1.8 Выражение параметров аргумента через параметры функции

По формуле (1.7.4) можно вычислить любую из составляющих $(a, b, c, d)$ экспоненциальной $B$-функции по известным значениям составляющих аргумента ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$). Найдём выражения, позволяющие решить обратную задачу. Из (1.3.12) и (1.7.4) получим:

$$\begin{aligned}
&\text{а) } q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \mathrm{j}2(ac + bd) = \exp 2(\alpha + \mathrm{j}\gamma) = e^{2\alpha}(\mathrm{ch}2\gamma + \mathrm{j}\,\mathrm{sh}2\gamma) \\
&\text{б) } \tilde{q}\tilde{\bar{q}} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - \mathrm{j}2(ac + bd) = \exp 2\left(\alpha - \mathrm{j}\gamma\right) = e^{2\alpha}(\mathrm{ch}2\gamma - \mathrm{j}\,\mathrm{sh}2\gamma) \\
&\text{в) } q\tilde{q} = a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + \mathrm{i}2(ab - cd) = \exp 2(\alpha + \mathrm{i}\beta) = e^{2\alpha}(\cos 2\beta + \mathrm{i}\sin 2\beta) \\
&\text{г) } \bar{q}\tilde{\bar{q}} = a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - \mathrm{i}2(ab - cd) = \exp 2(\alpha - \mathrm{i}\beta) = e^{2\alpha}\left(\cos 2\beta - \mathrm{i}\sin 2\beta\right) \\
&\text{д) } q\tilde{\bar{q}} = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + \mathrm{ij}2(ad - bc) = \exp 2(\alpha + \mathrm{ij}\delta) = e^{2\alpha}\left(\cos 2\delta + \mathrm{ij}\sin 2\delta\right) \\
&\text{е) } \bar{q}\tilde{q} = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - \mathrm{ij}2(ad - bc) = \exp 2\left(\alpha - \mathrm{ij}\delta\right) = e^{2\alpha}\left(\cos 2\delta - \mathrm{ij}\sin 2\delta\right)
\end{aligned} \tag{1.8.1}$$

Из (1.8.1 в, г) находим соотношение для $\beta$, а из (1.8.1 а, б) и (1.8.1 д, е) — для $\gamma$ и $\delta$:

$$\frac{2(ab - cd)}{a^2 - b^2 - c^2 + d^2} = \mathrm{tg}\,2\beta, \quad \frac{2(ac + bd)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \mathrm{th}\,2\gamma, \quad \frac{2(ad - bc)}{a^2 + b^2 - c^2 - d^2} = \mathrm{tg}\,2\delta. \tag{1.8.2}$$

Кроме того, непосредственно из (1.7.5) следует, что

$$\frac{v}{u} = \frac{c + \mathrm{i}d}{a + \mathrm{i}b} = \frac{(ac + bd) + \mathrm{i}(ad - bc)}{a^2 + b^2} = \mathrm{th}\,\eta = \mathrm{th}(\gamma + \mathrm{i}\delta) \tag{1.8.3}$$

Способ нахождения параметра $\alpha$ определяется формулой (1.7.7) вычисления детерминанта функции:

$$\alpha = \ln\left(\det q\right)/4 \tag{1.8.4}$$

Таким образом, любое невырожденное $B$-число может быть представлено в экспоненциальной форме.

## 1.9 $B$-пространство как евклидово

Пусть $q$ и $p$ — два произвольных $B$-вектора, представленных соответственно в алгебраической, комплексно-экспоненциальной и экспоненциальной формах:

$$\begin{aligned} q &= a_1 + \mathrm{i}b_1 + \mathrm{j}c_1 + \mathrm{ij}d_1 = u_1 + \mathrm{j}v_1 = \\ &= \exp(\rho_1 + \mathrm{i}\varphi_1) + \mathrm{j}\exp(\sigma_1 + \mathrm{i}\psi_1) \\ &= \exp(\alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1 + \mathrm{j}\gamma_1 + \mathrm{ij}\delta_1) \\ p &= a_2 + \mathrm{i}b_2 + \mathrm{j}c_2 + \mathrm{ij}d_2 = u_2 + \mathrm{j}v_2 = \\ &= \exp(\rho_2 + \mathrm{i}\varphi_2) + \mathrm{j}\exp(\sigma_2 + \mathrm{i}\psi_2) \\ &= \exp(\alpha_2 + \mathrm{i}\beta_2 + \mathrm{j}\gamma_2 + \mathrm{ij}\delta_2) \end{aligned} \tag{1.9.1}$$

тогда

$$\begin{aligned} q\bar{p} =& \ (a_1{+}\mathrm{i}b_1{+}\mathrm{j}c_1{+}\mathrm{ij}d_1)\,(a_2{-}\mathrm{i}b_2{+}\mathrm{j}c_2{-}\mathrm{ij}d_2) = \\ =& \ (a_1a_2{+}b_1b_2{+}c_1c_2{+}d_1d_2) + \mathrm{i}\,(-a_1b_2{+}b_1a_2{-}c_1d_2{+}d_1c_2) + \\ & + \mathrm{j}\,(a_1c_2{+}b_1d_2{+}c_1a_2{+}d_1b_2) + \mathrm{ij}\,(-a_1d_2{+}b_1c_2{-}c_1b_2{+}d_1a_2) = \\ =& \ (u_1 + \mathrm{j}v_1)(\bar{u}_2 + \mathrm{j}\bar{v}_2) = \\ =& \ u_1\bar{u}_2 + v_1\bar{v}_2 + \mathrm{j}(u_1\bar{v}_2 + v_1\bar{u}_2) \end{aligned}$$

Остальные, требующиеся в (1.9.2) слагаемые, получим $C$-, $B$- и $CB$-сопряжением этого выражения и введём следующее обозначение:

$$\begin{aligned} (q,p) =& (q\bar{p} + \bar{q}p + \tilde{q}\tilde{\bar{p}} + \tilde{\bar{q}}\tilde{p})/4 = \\ =& (u_1\bar{u}_2 + v_1\bar{v}_2 + \bar{u}_1u_2 + \bar{v}_1v_2)/2 = \\ =& a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 \end{aligned} \tag{1.9.2}$$

откуда

$$\begin{aligned} (q,q) &= (q\bar{q} + \tilde{q}\tilde{\bar{q}})/2 = u_1\bar{u}_1 + v_1\bar{v}_1 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 \\ (p,p) &= (p\bar{p} + \tilde{p}\tilde{\bar{p}})/2 = u_2\bar{u}_2 + v_2\bar{v}_2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2 \end{aligned} \tag{1.9.3}$$

Соотношение (1.9.2) будем рассматривать как определение *скалярного произведения* $B$-векторов, следствием которого является понятие *скалярного квадрата* $B$-вектора (1.9.3).

Для так заданного правила скалярного произведения, очевидно, выполняются следующие четыре аксиомы:

1°. $(q,p) = (pq)$.
2°. $(q_1{+}q_2,p) = (q_1,p) + (q_2,p)$.
3°. $(\lambda q, p) = \lambda(qp)$ при любом действительном $\lambda$.
4°. $(q,q) > 0$, если $q$ – ненулевой $B$-вектор;
$(q,q) = 0$, если $q$ — нулевой $B$-вектор,

что и позволяет рассматривать линейное $B$-пространство как *евклидово*, со всеми вытекающими из этого следствиями. В частности, *норма* $\|q\|$ $B$-вектора и *угол* $\theta$ между двумя $B$-векторами могут быть найдены из следующих соотношений:

$$\|q\| = \sqrt{(q,q)} = \sqrt{(q\bar{q}{+}\tilde{q}\tilde{\bar{q}})/2} = \sqrt{u\bar{u} + v\bar{v}} = \sqrt{a^2{+}b^2{+}c^2{+}d^2} \tag{1.9.4}$$

$$\cos\theta = \frac{(q,p)}{\|q\|\cdot\|p\|} \tag{1.9.5}$$

В свою очередь, введённая на основе скалярного произведения норма вектора евклидова пространства, автоматически удовлетворяет следующим трём аксиомам:

Таблица 1.9.1:

| $(q,p)$ | | $q$ | $\bar{q}$ | $\tilde{q}$ | $\tilde{\bar{q}}$ | | $p$ | $\bar{p}$ | $\tilde{p}$ | $\tilde{\bar{p}}$ | | $(q\bar{p}+\bar{q}p+\tilde{q}\tilde{\bar{p}}+\tilde{\bar{q}}\tilde{p})/4$ | $=$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(1,1)$ | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | | $(1+1+1+1)/4$ | 1 |
| $(1,\mathrm{i})$ | | 1 | 1 | 1 | 1 | | i | −i | i | −i | | $(-\mathrm{i}+\mathrm{i}-\mathrm{i}+\mathrm{i})/4$ | 0 |
| $(1,\mathrm{j})$ | | 1 | 1 | 1 | 1 | | j | j | −j | −j | | (j+j−j−j)/4 | 0 |
| $(1,\mathrm{ij})$ | | 1 | 1 | 1 | 1 | | ij | −ij | −ij | ij | | $(-\mathrm{ij}+\mathrm{ij}+\mathrm{ij}-\mathrm{ij})/4$ | 0 |
| $(\mathrm{i},\mathrm{i})$ | | i | −i | i | −i | | i | −i | i | −i | | $(1+1+1+1)/4$ | 1 |
| $(\mathrm{i},\mathrm{j})$ | | i | −i | i | −i | | j | j | −j | −j | | $(\mathrm{ij}-\mathrm{ij}-\mathrm{ij}+\mathrm{ij})/4$ | 0 |
| $(\mathrm{i},\mathrm{ij})$ | | i | −i | i | −i | | ij | −ij | −ij | ij | | $(\mathrm{j}+\mathrm{j}-\mathrm{j}-\mathrm{j})/4$ | 0 |
| $(\mathrm{j},\mathrm{j})$ | | j | j | −j | −j | | j | j | −j | −j | | $(1+1+1+1)/4$ | 1 |
| $(\mathrm{j},\mathrm{ij})$ | | j | j | −j | −j | | ij | −ij | −ij | ij | | $(-\mathrm{i}+\mathrm{i}-\mathrm{i}+\mathrm{i})/4$ | 0 |
| $(\mathrm{ij},\mathrm{ij})$ | | ij | −ij | −ij | ij | | ij | −ij | −ij | ij | | $(1+1+1+1)/4$ | 1 |

1° $\|q\| > 0$, если $q$ — ненулевой $B$-вектор; $\|q\| = 0$, если $q$ – нулевой $B$-вектор.

2° $\|\lambda q\| = |\lambda| \cdot \|q\|$ для любого $B$-вектора $q$ и любого действительного числа $\lambda$.

3° Для любых двух $B$-векторов $q_1$ и $q_2$ справедливо неравенство треугольника:

$$\|q_1 + q_1\| \leq \|q_1\| + \|q_2\|$$

Базис $\{1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{ij}\}$ $B$-пространства является ортонормированным. Это показано в таблице 1.9.1 при помощи бикомплексной части формулы (1.9.2).

Тем самым, каждая координатная плоскость имеет ортогональную координатную плоскость: $Oab \perp Ocd$, $Oac \perp Obd$, $Oad \perp Obc$, а у каждого координатного трёхмерного подпространства ортогональным дополнением является оставшаяся четвёртая ось координат: $Oabc \perp Od$, $Oabd \perp Oc$, $Oacd \perp Ob$, $Obcd \perp Oa$.

Исходя из ортогональности пар координатных плоскостей и используя тригонометрический способ записи комплексных чисел, представим $B$-вектор в *тригонометрической форме*:

$$\begin{aligned} q = u + \mathrm{j}v = r_1(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) + \mathrm{j}r_2(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) = \\ = r[\cos\chi(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) + \mathrm{j}\sin\chi(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)] = \\ = r(\cos\chi\cos\varphi + \mathrm{i}\cos\chi\sin\varphi + \mathrm{j}\sin\chi\cos\psi + \mathrm{ij}\sin\chi\sin\psi), \end{aligned} \tag{1.9.6}$$

где $r = \|q\|$ — норма (длина) вектора, $r_1 = \|u\| = \sqrt{u\bar{u}}$ и $r_2 = \|v\| = \sqrt{v\bar{v}}$ — (неотрицательные) длины его составляющих по ортогональным координатным плоскостям $Oab$ и $Ocd$. То есть, $r_1 = r\cos\chi$ и $r_2 = r\sin\chi$ при $0 \leq \chi \leq \pi/$, тогда как ориентацию этих составляющих в комплексных плоскостях $u$ и $v$ задают соответственно углы $0 \leq \varphi < 2\pi$ и $0 \leq \psi < 2\pi$. Кроме указанных, в качестве ортогональных координатных плоскостей могут быть взяты и остальные две пары. В этом случае тригонометрическая форма записи $B$-вектора примет несколько иной, но аналогичный вид.

Связь тригонометрической (1.9.6) и комплексно-экспоненциальной (1.7.8) форм достаточно очевидна:

$$\exp\rho = r\cos\chi, \quad \exp\sigma = r\sin\chi, \quad \operatorname{tg}\chi = \exp(\sigma - \rho) \tag{1.9.7}$$

Для нахождения скалярного произведения в $C$-*exp*-форме, сначала вычислим

$$\begin{aligned} q\bar{p} = {} & [\exp(\rho_1 + \mathrm{i}\varphi_1) + \mathrm{j}\exp(\sigma_1 + \mathrm{i}\psi_1)]\,[\exp(\rho_2 - \mathrm{i}\varphi_2) + \mathrm{j}\exp(\sigma_2 - \mathrm{i}\psi_2)] = \\ = {} & \exp(\rho_1 + \mathrm{i}\varphi_1)\exp(\rho_2 - \mathrm{i}\varphi_2) + \exp(\sigma_1 + \mathrm{i}\psi_1)\exp(\sigma_2 - \mathrm{i}\psi_2) + \\ & + \mathrm{j}\,[\exp(\rho_1 + \mathrm{i}\varphi_1)\exp(\sigma_2 - \mathrm{i}\psi_2) + \exp(\rho_2 - \mathrm{i}\varphi_2)\exp(\sigma_1 + \mathrm{i}\psi_1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q\bar{p} + \tilde{q}\tilde{\bar{p}} = {} & 2\,[\exp(\rho_1 + \mathrm{i}\varphi_1)\exp(\rho_2 - \mathrm{i}\varphi_2) + \exp(\sigma_1 + \mathrm{i}\psi_1)\exp(\sigma_2 - \mathrm{i}\psi_2)] = \\ = {} & 2\{\exp[\rho_1 + \rho_2 + \mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)] + \exp[\sigma_1 + \sigma_2 + \mathrm{i}(\psi_1 - \psi_2)]\} = \\ = {} & 2\,\{\exp(\rho_1 + \rho_2)\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \exp(\sigma_1 + \sigma_2)\cos(\psi_1 - \psi_2) + \\ & + \mathrm{i}\,[\exp(\rho_1 + \rho_2)\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \exp(\sigma_1 + \sigma_2)\sin(\psi_1 - \psi_2)]\} \end{aligned}$$

затем, складывая это выражение с его $C$-сопряжённым значением $\bar{q}p + \tilde{\bar{q}}\tilde{p}$, получим

$$\begin{aligned} (qp) = {} & \exp(\rho_1 + \rho_2)\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \exp(\sigma_1 + \sigma_2)\cos(\psi_1 - \psi_2) \\ (q,q) = {} & \exp 2\rho_1 + \exp 2\sigma_1 \end{aligned} \tag{1.9.8}$$

Таким образом, в $C$-*exp*-форме квадрат $B$-вектора $q$ есть просто сумма квадратов его составляющих по взаимно ортогональным комплексным плоскостям: $r^2 = r_1^2 + r_2^2$. $B$-векторы $q$ и $p$ ортогональны, если ортогональны их составляющие в этих комплексных плоскостях: $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ и $\cos(\psi_1 - \psi_2) = 0$. Во всех остальных случаях, исходя из (1.9.8), условию ортогональности $q$ и $p$ можно придать следующий вид:

$$\exp(\rho_1 + \rho_2 - \sigma_1 - \sigma_2) = -\cos(\psi_1 - \psi_2)\,/\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,. \tag{1.9.9}$$

С учётом положительности экспоненты, из (1.9.9) в частности следует, что для ортогональных $q$ и $p$ при остром угле $(\varphi_1 - \varphi_2)$ угол $(\psi_1 - \psi_2)$ должен быть тупым и наоборот.

Для невырожденных $B$-векторов запишем формулы (1.9.2) – (1.9.5) в *exp*-форме:

$$q\bar{p} = \exp[\alpha_1 + \alpha_2 + \mathrm{i}(\beta_1 - \beta_2) + \mathrm{j}(\gamma_1 + \gamma_2) + \mathrm{ij}(\delta_1 - \delta_2)] \equiv \exp(\alpha_\Sigma + \mathrm{i}\beta_\Delta + \mathrm{j}\gamma_\Sigma + \mathrm{ij}\delta_\Delta)$$

$$\bar{q}p = \exp[\alpha_1 + \alpha_2 - \mathrm{i}(\beta_1 - \beta_2) + \mathrm{j}(\gamma_1 + \gamma_2) - \mathrm{ij}(\delta_1 - \delta_2)] \equiv \exp(\alpha_\Sigma - \mathrm{i}\beta_\Delta + \mathrm{j}\gamma_\Sigma - \mathrm{ij}\delta_\Delta$$

$$\begin{aligned} q\bar{p} + \bar{q}p = {} & 2\exp(\alpha_\Sigma + \mathrm{j}\gamma_\Sigma)\mathrm{ch}\,(\mathrm{i}\beta_\Delta + \mathrm{ij}\delta_\Delta) = \\ = {} & 2\exp\alpha_\Sigma\,(\mathrm{ch}\,\gamma_\Sigma + \mathrm{j}\,\mathrm{sh}\,\gamma_\Sigma)\,(\cos\beta_\Delta\cos\delta_\Delta - \mathrm{j}\sin\beta_\Delta\sin\delta_\Delta) = \\ = {} & 2\exp\alpha_\Sigma[(\mathrm{ch}\,\gamma_\Sigma\cos\beta_\Delta\cos\delta_\Delta\,\mathrm{sh}\,\gamma_\Sigma\sin\beta_\Delta\sin\delta_\Delta) + \\ & + \mathrm{j}\,(\mathrm{sh}\,\gamma_\Sigma\cos\beta_\Delta\cos\delta_\Delta - \mathrm{ch}\,\gamma_\Sigma\sin\beta_\Delta\sin\delta_\Delta)] \end{aligned}$$

Складывая это выражение с его $B$-сопряжённым значением $\tilde{q}\tilde{\bar{p}} + \tilde{\bar{q}}\tilde{p}$, в итоге получим

$$(qp) = \exp\alpha_\Sigma\,(\cos\beta_\Delta\,\mathrm{ch}\,\gamma_\Sigma\cos\delta_\Delta - \sin\beta_\Delta\,\mathrm{sh}\,\gamma_\Sigma\sin\delta_\Delta) \tag{1.9.10}$$

$$\begin{aligned} (q,q) &= \exp 2\alpha_1\,\mathrm{ch}\,2\gamma_1 \qquad & \|q\| &= \exp\alpha_1\sqrt{\mathrm{ch}\,2\gamma_1} \\ (p,p) &= \exp 2\alpha_2\,\mathrm{ch}\,2\gamma_2 \qquad & \|p\| &= \exp\alpha_2\sqrt{\mathrm{ch}\,2\gamma_2} \end{aligned} \tag{1.9.11}$$

Из (1.9.10) и (1.9.11) следует, что

$$\cos\theta = (\cos\beta_\Delta\,\mathrm{ch}\,\gamma_\Sigma\cos\delta_\Delta - \sin\beta_\Delta\,\mathrm{sh}\,\gamma_\Sigma\sin\delta_\Delta)\,/\sqrt{\mathrm{ch}\,2\gamma_1\,\mathrm{ch}\,2\gamma_2} \tag{1.9.12}$$

Обратим внимание, что нормы $\|q\|$ и $\|p\|$ $B$-векторов в *exp*-форме не зависят от их тригонометрических параметров $\beta$ и $\delta$, и выражаются только через экспоненциальный и гиперболический параметры $\alpha$ и $\gamma$.

## 1.10 Разложение $B$-векторов. $B$-проекторы

Любой $B$-вектор $q$ может быть представлен в виде суммы двух других $B$-векторов: $q = q_1 + q_2$. Один из этих $B$-векторов, например $q_1$, может быть задан произвольно, а второй соответственно имеет значение $q_2 = q - q_1$.

Разложим $B$-вектор $q$ на две *взаимно ортогональные* составляющие $q_1$ и $q_2$, одна из которых ($q_1$) направлена по заданному $B$-вектору $q_0$. Поскольку $B$-вектор $q_0$ имеет конкретную, но произвольную величину, то $B$-векторы $q_1$ и $q_0$ будут пропорциональны:

$$\begin{cases} q_1 = \lambda q_0 \\ q_2 = q - \lambda q_0 \end{cases} \tag{1.10.1}$$

Здесь $\lambda$ — неизвестный действительный коэффициент, значение которого находим из равенства нулю скалярного произведения $B$-векторов $q_1$ и $q_2$:

$$\begin{gathered} (q_1, q_2) = \lambda(q_0, q_2) = \lambda(q_0,\ q - \lambda q_0) = \lambda(q_0, q) - \lambda^2(q_0, q_0) = 0 \\ \lambda = \frac{(q_0, q)}{(q_0, q_0)} = \frac{a_0 a + b_0 b + c_0 c + d_0 d}{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 + d_0^2} \end{gathered} \tag{1.10.2}$$

Формулы (1.10.1), (1.10.2) являются общими, справедливыми для любого евклидова пространства. В $B$-пространстве векторы подразделяются на вырожденные и невырожденные. Соотношения, учитывающие именно эту особенность, рассмотрим более подробно.

Так, "вырожденные плоскости" $B$-пространства являются взаимно ортогональными, поскольку ортогональны любые два $B$-вектора $q$ и $p$, принадлежащие этим плоскостям:

$$\begin{gathered} q = u + \mathrm{j}u = a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}a + \mathrm{ij}b, \\ p = v - \mathrm{j}v = c + \mathrm{i}d - \mathrm{j}c - \mathrm{ij}d \\ (q, p) = (u\bar{v} - u\bar{v} + \bar{u}v - \bar{u}v)/2 = ac + bd - ac - bd = 0. \end{gathered} \tag{1.10.3}$$

Отсюда возникает возможность разложения произвольного $B$-вектора $q$ на две вырожденные ортогональные составляющие, которые обозначим как $q^+$ и $q^-$:

$$\begin{cases} q^+ = (u+v)/2 + \mathrm{j}(u+v)/2 = (u+v)(1+\mathrm{j})/2 \\ q^- = (u-v)/2 - \mathrm{j}(u-v)/2 = (u-v)(1-\mathrm{j})/2 \end{cases} \tag{1.10.4}$$

В сумме эти вырожденные составляющие дают исходный невырожденный $B$-вектор $q$. Запишем также и разность этих составляющих:

$$\begin{cases} q^+ + q^- = u + \mathrm{j}v = q \\ q^+ - q^- = v + \mathrm{j}u = \mathrm{j}q \end{cases} \tag{1.10.5}$$

Из (1.10.5) мы получаем возможность найти вырожденные составляющие $B$-вектора непосредственно по его значению $q$:

$$\begin{cases} q^+ = (q + \mathrm{j}q)/2 = q\,(1+\mathrm{j})/2 = q\mathrm{P}_\mathrm{j}^+ \\ q^- = (q - \mathrm{j}q)/2 = q\,(1-\mathrm{j})/2 = q\mathrm{P}_\mathrm{j}^- \end{cases} \tag{1.10.6}$$

В (1.10.6) введены обозначения ***B*-проекторов** вектора на вырожденные плоскости $B$-пространства:

$$\mathrm{P}_\mathrm{j}^+ = (1+\mathrm{j})/2, \qquad \mathrm{P}_\mathrm{j}^- = (1-\mathrm{j})/2 \tag{1.10.7}$$

$B$-проекторы обладают следующими *свойствами*:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{P}_\mathrm{j}^+\mathrm{P}_\mathrm{j}^+ = \mathrm{P}_\mathrm{j}^+ : & [(1+\mathrm{j})/2]^2 = 1^2+\mathrm{j}^2+\mathrm{j}2)/4 = (1+\mathrm{j})/2 \\ \mathrm{P}_\mathrm{j}^-\mathrm{P}_\mathrm{j}^- = \mathrm{P}_\mathrm{j}^- : & [(1-\mathrm{j})/2]^2 = 1^2+\mathrm{j}^2-\mathrm{j}2)/4 = (1-\mathrm{j})/2 \\ \mathrm{P}_\mathrm{j}^+\mathrm{P}_\mathrm{j}^- = 0 \quad : & [(1+\mathrm{j})/2]\,[(1-\mathrm{j})/2] = (1^2-\mathrm{j}^2)/4 = 0 \end{array} \qquad (1.10.8)$$

$$\bar{\mathrm{P}}_{j}^+ = \mathrm{P}_\mathrm{j}^+, \quad \bar{\mathrm{P}}_{j}^- = \mathrm{P}_\mathrm{j}^-, \quad \tilde{\mathrm{P}}_{j}^+ = \mathrm{P}_\mathrm{j}^-, \quad \tilde{\mathrm{P}}_{j}^- = \mathrm{P}_\mathrm{j}^+ \qquad (1.10.9)$$

Геометрический смысл свойств (1.10.8) достаточно очевиден: повторное проектирование вектора на ту же плоскость не изменяет величину проекции, а проектирование уже имеющейся проекции на другую, ортогональную плоскость даёт ноль. По этой же причине действие $B$-проектора на уже вырожденный $B$-вектор зависит от типа его вырожденности:

$$q^+\mathrm{P}_\mathrm{j}^+ = q^+, \quad q^+\mathrm{P}_\mathrm{j}^- = 0, \quad q^-\mathrm{P}_\mathrm{j}^- = q^-, \quad q^-\mathrm{P}_\mathrm{j}^+ = 0. \qquad (1.10.10)$$

Свойства (1.10.9) вытекают непосредственно из определений (1.10.7). Они означают, что при $C$-сопряжении тип $B$-проектора не меняется, а при $B$-сопряжении тип $B$-проектора изменяется на противоположный. Эти свойства удобно использовать при получении сопряжённых выражений, содержащих $B$-проектор. Например, (1.10.11).

Отметим, что не только $B$-векторы, но и обычные комплексные (или действительные) векторы также могут быть разложены на бикомплексные составляющие, в том числе и на вырожденные. В последнем случае эти составляющие будут $B$-сопряжёнными. Например, для комплексного вектора $z$ получим:

$$\left.\begin{array}{l} z\mathrm{P}_\mathrm{j}^+ = z/2+\mathrm{j}z/2 = q^+ \\ z\mathrm{P}_\mathrm{j}^- = z/2-\mathrm{j}z/2 = q^- \end{array}\right\} \;\to\; q^+ + q^- = z$$

Рассмотрим следующие выражения, в которых $B$-проекторы действуют на $B$-векторы $q = u+\mathrm{j}v$ и $\tilde{q} = u-\mathrm{j}v$:

$$\begin{array}{l} (u+\mathrm{j}v)\mathrm{P}_\mathrm{j}^+ = (u+\mathrm{j}v+\mathrm{j}u+v)/2 = (u+v)(1+\mathrm{j})/2 = (u+v)\mathrm{P}_\mathrm{j}^+ \\ (u+\mathrm{j}v)\mathrm{P}_\mathrm{j}^- = (u+\mathrm{j}v-\mathrm{j}u-v)/2 = (u-v)(1-\mathrm{j})/2 = (u-v)\mathrm{P}_\mathrm{j}^- \\ (u-\mathrm{j}v)\mathrm{P}_\mathrm{j}^+ = (u-\mathrm{j}v+\mathrm{j}u-v)/2 = (u-v)(1+\mathrm{j})/2 = (u-v)\mathrm{P}_\mathrm{j}^+ \\ (u-\mathrm{j}v)\mathrm{P}_\mathrm{j}^- = (u-\mathrm{j}v-\mathrm{j}u+v)/2 = (u+v)(1-\mathrm{j})/2 = (u+v)\mathrm{P}_\mathrm{j}^- \end{array} \qquad (1.10.11)$$

Сравнивая левую и правую части этих соотношений, замечаем например, что $(u+\mathrm{j}v)\,\mathrm{P}_\mathrm{j}^+ = (u+v)\,\mathrm{P}_\mathrm{j}^+$. Здесь нет никакого противоречия. $\mathrm{P}_\mathrm{j}^+$ и $\mathrm{P}_\mathrm{j}^-$ — вырожденные сомножители и сокращать их (делить на них) нельзя. Это следует из того, что

$$\det(1+\mathrm{j}) = det\,(1-\mathrm{j}) = (1+\mathrm{j})(1+\mathrm{j})(1-\mathrm{j})(1-\mathrm{j}) = \left(1-\mathrm{j}^2\right)^2 = 0$$

Выражения (1.10.11) можно интерпретировать так: действие $B$-проектора на $B$-вектор даёт его комплексную проекцию на соответствующую вырожденную комплексную плоскость в бикомплексном пространстве, действие $B$-проектора на саму проекцию приводит к тому же результату. Формулы (1.10.11) показывают, что при нахождении вырожденных проекций $B$-вектора $q$ достаточно выделить его составляющие C1($q$) и C2($q$) и найти их сумму и разность. Например, для *exp*-формы $B$-числа (1.7.5) получим:

$$\begin{array}{l} \mathrm{P}_\mathrm{j}^+\exp(\xi+\mathrm{j}\eta) = \mathrm{P}_\mathrm{j}^+\exp\xi\,(\mathrm{ch}\,\eta+\mathrm{j}\,\mathrm{sh}\,\eta) = \mathrm{P}_\mathrm{j}^+\exp\xi\,(\mathrm{ch}\,\eta+\mathrm{sh}\,\eta) = \exp(\xi+\eta)(1+\mathrm{j})/2 \\ \mathrm{P}_\mathrm{j}^-\exp(\xi+\mathrm{j}\eta) = \mathrm{P}_\mathrm{j}^-\exp\xi\,(\mathrm{ch}\,\eta+\mathrm{j}\,\mathrm{sh}\,\eta) = \mathrm{P}_\mathrm{j}^-\exp\xi\,(\mathrm{ch}\,\eta-\mathrm{sh}\,\eta) = \exp(\xi-\eta)(1-\mathrm{j})/2 \end{array} \qquad (1.10.12)$$

Примечательно, что при помощи соотношений (1.10.12) мы как бы обходим неприменимость *exp*-формы (1.7.4), (1.7.5) для вырожденных $B$-чисел.

В заключение раздела отметим, что и сам вырожденный $B$-вектор, например, $q^+ = u + \mathrm{j}u$, в свою очередь тоже может быть разложен, как на две невырожденные составляющие

$$q_1 = u_1 + \mathrm{j}v_1 \quad \text{и} \quad q_2 = q^+ - q_1 = (u - u_1) + \mathrm{j}\,(u - v_1) = u_2 + \mathrm{j}v_2 \tag{1.10.13}$$

так и на две вырожденные составляющие

$$q_1^+ = u_1 + \mathrm{j}u_1 \quad \text{и} \quad q_2^+ = q^+ - q_1^+ = (u - u_1) + \mathrm{j}\,(u - u_1) = u_2 + \mathrm{j}u_2 \tag{1.10.14}$$

Согласно (1.10.14), раскладываемый $B$-вектор и его вырожденные составляющие принадлежат одной и той же вырожденной плоскости. Для того чтобы эти составляющие были ортогональны, следует выбрать направление ($q_0^+ = u_0 + \mathrm{j}u_0$) одной из них, а затем найти сами составляющие по формулам (1.10.1), (1.10.2).

Для вырожденных $B$-векторов $q^+$, $q_0^+$, $q_1^+$, $q_2^+$, формулы (1.10.1), (1.10.2) выражаются через комплексные числа $u$, $u_0$, $u_1$, $u_2$ (где $u = a + \mathrm{i}b$ с соответствующими индексами) и принимают такой вид:

$$\lambda = \frac{u_0\bar{u} + \bar{u}_0 u}{2u_0\bar{u}_0} = \frac{a_0 a + b_0 b}{a_0^2 + b_0^2} \tag{1.10.15}$$

$$\begin{cases} u_1 = \lambda u_0 \\ u_2 = u - \lambda u_0 \end{cases} \tag{1.10.16}$$

### 1.11 $B$-пространство как неевклидово

В линейном (векторном) пространстве имеются только операции сложения его элементов и операции их умножения на элементы поля или кольца, над которым это пространство задано. Введение метрических понятий (нормы векторов и угла между ними), выраженных через определение скалярного произведения, существенно обогащает операционную базу — дополняет сложение элементов линейного пространства некоторым подобием их умножения. В $B$-пространстве операция умножения (1.3.5) определена уже непосредственно для $B$-векторов, а скалярное произведение оказывается всего лишь одним из её следствий. В такой ситуации вычислительная ценность скалярного произведения незначительна, и на первый план выступает другой его аспект — возможность придать $B$-пространству наглядный евклидов геометрический смысл. То же можно сказать и о тригонометрической форме $B$-вектора.

Учтём, однако, что в предыдущих разделах, без привлечения каких-либо метрических построений, была получена *exp*-форма $B$-вектора, включающая в себя тригонометрические и гиперболические функции. Это само по себе накладывает на связанные с ними выражения некоторый геометрический оттенок.

Для обычного комплексного числа $u = a + \mathrm{i}b$ тригонометрическая и экспоненциальная формы практически совпадают:

$$u = a + \mathrm{i}b = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

$$u = \exp\,(\rho + i\varphi) = e^{\rho}(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

различия имеются в единственной точке $u = a = b = 0$, когда $\det u = 0$ и $C$-вектор является вырожденным:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\det u} = |u| = \begin{cases} e^{\rho}, & \det u > 0 \\ 0, & \det u = 0 \end{cases} \tag{1.11.1}$$

Сравним евклидову тригонометрическую форму $B$-вектора (1.9.6), характеризующуюся параметрами $r$, $\varphi$, $\psi$, ch, с *exp*-формой $B$-вектора (1.7.4), задаваемой параметрами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. В тригонометрической форме (1.9.6) вырожденный $B$-вектор не отличается от невырожденного. При $\cos\chi(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi) = \pm\sin\chi(\cos\psi+\mathrm{i}\sin\psi)$ норма вырожденного $B$-вектора $\|q\| = r$, как и при прочих значениях углов $\varphi$, $\psi$, $\chi$. Тогда как *exp*-формы вырожденного $B$-вектора вообще не существует. Если же рассматривать именно невырожденный $B$-вектор, то согласно (1.9.11) его евклидова норма

$$r = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = \|q\| = e^{\alpha}\sqrt{\operatorname{ch}2\gamma}$$

В случае евклидовых поворотов $B$-вектора через вырожденные значения, постоянство радиуса $r$ обеспечивается тем, что $\alpha \to -\infty$ при $\gamma \to \pm\infty$ ($e^{\alpha} \to 0$ при $\operatorname{ch}2\gamma \to \infty$), и возникающая предельная “неопределённость” $[0\cdot\infty]$ имеет вполне определённую величину $r$.

Если, аналогично правой части соотношения (1.11.1), за норму произвольного $B$-вектора принять выражение

$$[\![q]\!] = \sqrt[4]{\det q} = \begin{cases} e^{\alpha}, & \det q>0 \\ 0, & \det q = 0 \end{cases} \tag{1.11.2}$$

то нулевую норму будут иметь не только нулевой $B$-вектор, но и все остальные вырожденные $B$-векторы. Из соотношений (1.10.4) и (1.10.13), для так определённой нормы, вытекают следующие неравенства:

$$\begin{aligned} q &= q^+ + q^- : \quad [\![q]\!] = [\![q^+ + q^-]\!] > [\![q^+]\!] + [\![q^-]\!] \\ q^+ &= q_1 + q_2 \;\;: \quad [\![q^+]\!] = [\![q_1+q_2]\!] < [\![q_1]\!] + [\![q_2]\!] \end{aligned} \tag{1.11.3}$$

где $[\![q]\!] = e^{\alpha}>0$, $[\![q_1]\!] = e^{\alpha_1} > 0$, $[\![q_2]\!] = e^{\alpha_2} > 0$, а $[\![q^+]\!] = [\![q^-]\!] = 0$. Из *отсутствия* (1.11.3) неравенства треугольника для нормы (1.11.2) следует, что эта норма не является евклидовой.

Таким образом, характеристики вектора, практически совпадавшие (1.11.1) в $C$-плоскости, для $B$-пространства “расходятся”. И расхождение это продолжается именно по линии разграничения вырожденных и невырожденных векторов. Тем не менее, все координаты невырожденного $B$-вектора в *exp*-форме (1.7.4) пропорциональны $e^{\alpha}$. Это позволяет рассматривать параметры $\beta$, $\gamma$, $\delta$ как угловые характеристики, а их изменение интерпретировать как повороты вектора — тригонометрические и гиперболические — в неевклидовом $B$-пространстве, сохраняющие неевклидову норму $[\![q]\!]$ (1.11.2) неизменной. При любых изменениях параметров $\beta$, $\gamma$, $\delta$ (и $\alpha$) исходно невырожденный $B$-вектор (1.7.4) остаётся невырожденным, а вырожденный $B$-вектор (1.10.12) — вырожденным.

## 1.12 $T$-вектор и его матрицы

Матрица N-комплексного вектора имеет порядок $2^{\mathrm{N}}$. Для того чтобы отличать однотипные (например, единичные) матрицы, соответствующие базисным элементам N-комплексных векторов, проставим это число (N) как верхний индекс базисного элемента. Так, матрицы (моно)комплексных векторов имеют порядок $2^1 = 2$, а их базисные и нулевой элементы обозначим:

$$1^{(1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{i}^{(1)} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad 0^{(1)} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.12.1}$$

Базисные элементы бикомплексных векторов имеют четвёртый порядок и строятся как блочные матрицы из комплексных базисных элементов следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&1^{(2)}=\begin{Vmatrix} 1^{(1)} & 0^{(1)} \\ 0^{(1)} & 1^{(1)} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad \mathrm{i}^{(2)}=\begin{Vmatrix} \mathrm{i}^{(1)} & 0^{(1)} \\ 0^{(1)} & \mathrm{i}^{(1)} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \\
&\mathrm{j}^{(2)}=\begin{Vmatrix} 0^{(1)} & 1^{(1)} \\ 1^{(1)} & 0^{(1)} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \mathrm{ij}^{(2)}=\begin{Vmatrix} 0^{(1)} & \mathrm{i}^{(1)} \\ \mathrm{i}^{(1)} & 0^{(1)} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.12.2}
$$

По аналогичному (1.12.2) принципу построим матрицы восьмого порядка для трикомплексных векторов:

$$
\begin{aligned}
&1^{(3)}=\begin{Vmatrix} 1^{(2)} & 0^{(2)} \\ 0^{(2)} & 1^{(2)} \end{Vmatrix}, \ \mathrm{i}^{(3)}=\begin{Vmatrix} \mathrm{i}^{(2)} & 0^{(2)} \\ 0^{(2)} & \mathrm{i}^{(2)} \end{Vmatrix}, \ \mathrm{j}^{(3)}=\begin{Vmatrix} \mathrm{j}^{(2)} & 0^{(2)} \\ 0^{(2)} & \mathrm{j}^{(2)} \end{Vmatrix}, \ \mathrm{ij}^{(3)}=\begin{Vmatrix} \mathrm{ij}^{(2)} & 0^{(2)} \\ 0^{(2)} & \mathrm{ij}^{(2)} \end{Vmatrix} \\
&\mathrm{k}^{(3)}=\begin{Vmatrix} 0^{(2)} & 1^{(2)} \\ 1^{(2)} & 0^{(2)} \end{Vmatrix}, \mathrm{ik}^{(3)}=\begin{Vmatrix} 0^{(2)} & \mathrm{i}^{(2)} \\ \mathrm{i}^{(2)} & 0^{(2)} \end{Vmatrix}, \mathrm{jk}^{(3)}=\begin{Vmatrix} 0^{(2)} & \mathrm{j}^{(2)} \\ \mathrm{j}^{(2)} & 0^{(2)} \end{Vmatrix}, \mathrm{ijk}^{(3)}=\begin{Vmatrix} 0^{(2)} & \mathrm{ij}^{(2)} \\ \mathrm{ij}^{(2)} & 0^{(2)} \end{Vmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.12.3}
$$

Базисные $T$-элементы, аналогичные бикомплексным, получаем, располагая блоки соответствующих $B$-элементов на главной диагонали. Для получения четырёх новых элементов — те же блоки расположим на побочной диагонали. В развёрнутом виде матрицы базисных элементов $T$-вектора представлены на отдельной странице в таблице 1.12.1.

Таким образом, переход к N-комплексному числу следующего порядка увеличивает количество базисных элементов и порядок соответствующих им матриц вдвое. В алгебраической форме записи N-комплексного числа это выражается в появлении одного нового символа (i, j, k, ...), присоединяющего к N-комплексному числу исходного уровня ещё один аналогичный блок:

$$
\begin{aligned}
&\textbf{действительное:} && a \\
&\textbf{комплексное:} && u = a + \mathrm{i}b, \\
&\textbf{бикомплексное:} && q = u + \mathrm{j}v = (a + \mathrm{i}b) + \mathrm{j}(c + \mathrm{i}d), \\
&\textbf{трикомплексное:} && r = q_1 + \mathrm{k}q_2 \\
& && \quad = (u_1{+}\mathrm{j}v_1) + \mathrm{k}\,(u_2{+}\mathrm{j}v_2) = \\
& && \quad = (a_1{+}\mathrm{i}b_1{+}\mathrm{j}c_1{+}\mathrm{ij}d_1) + \mathrm{k}\,(a_2{+}\mathrm{i}b_2{+}\mathrm{j}c_2{+}\mathrm{ij}d_2) \\
& && \quad = a_1{+}\mathrm{i}b_1{+}\mathrm{j}c_1{+}\mathrm{ij}d_1{+}\mathrm{k}a_2{+}\mathrm{ik}b_2{+}\mathrm{jk}c_2{+}\mathrm{ijk}d_2
\end{aligned}
\tag{1.12.4}
$$

Соответствующие матричные формы записи $T$-числа тоже включены в таблицу 1.12.1. Закон произведения базисных элементов таков:

$$
\mathrm{ii} = -1, \ \ \mathrm{jj} = \mathrm{kk} = 1, \tag{1.12.5}
$$

чем и определяется произведение $T$-чисел в алгебраической форме.

Таким образом, исчисление $T$-векторов в алгебраической форме аналогично исчислению $B$-векторов. При этом в матричной форме все вычисления (не только $T$-, но и $B$-, $C$- и $R$-векторные) выполняется на матрицах порядка $2^3 = 8$.

Учитывая указанную аналогию, мы не будем заново рассматривать для $T$-векторов все операции, уже изложенные для $B$-векторов, а развитие некоторых из этих операций и обозначений в $T$-пространстве опишем кратко.

Таблица 1.12.1:

Матрицы базисных элементов $T$-вектора

$$1^{(3)} = \begin{Vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & 0^{(2)} \\ 0^{(2)} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{i}^{3} = \begin{Vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} & 0^{(2)} \\ 0^{(2)} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} \end{Vmatrix}$$

$$\mathrm{j}^{(3)} = \begin{Vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} & 0^{(2)} \\ 0^{(2)} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{ij}^{(3)} = \begin{Vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0^{(2)} \\ 0^{(2)} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{Vmatrix}$$

$$\mathrm{k}^{(3)} = \begin{Vmatrix} 0^{(2)} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0^{(2)} \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{ik}^{(3)} = \begin{Vmatrix} 0^{(2)} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0^{(2)} \end{Vmatrix}$$

$$\mathrm{jk}^{(3)} = \begin{Vmatrix} 0^{(2)} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0^{(2)} \end{Vmatrix}, \mathrm{ijk}^{(3)} = \begin{Vmatrix} 0^{(2)} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0^{(2)} \end{Vmatrix}$$

Матрицы $T$-числа в бикомплексной, комплексной и действительной формах

$$\begin{Vmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

## 1.13 Сопряжённые формы и определитель T-вектора

При $C$-, $B$- или $T$-сопряжении $T$-чисел происходит смена знака только у соответствующего символа — i, j или k. Операции различных типов сопряжения независимы. Обозначать $T$-сопряжение $T$-вектора $r$ будем как $\dddot{r}$, то есть

$$r = q_1 + \mathrm{k}q_2, \quad r = q_1 - \mathrm{k}q_2 \tag{1.13.1}$$

В обозначениях (1.13.1) получение двух $B$-координат $T$-вектора будет выглядеть так:

$$\mathrm{B1}\,(r) = q_1,\;\; \mathrm{B2}\,(r) = q_2;\quad \mathrm{B1}\,(\dddot{r}) = q_1,\;\; \mathrm{B2}\,(\dddot{r}) = -q_2 \tag{1.13.2}$$

Отсюда, с учётом обозначений (1.12.4), получим четыре $C$-координаты:

$$\begin{aligned} &\mathrm{C1}\,(q_1) = \mathrm{C1}\,[\mathrm{B1}\,(\mathrm{r})] = u_1, &&\mathrm{C2}\,(q_1) = \mathrm{C2}\,[\mathrm{B1}\,(\mathrm{r})] = v_1;\\ &\mathrm{C1}\,(q_2) = \mathrm{C1}\,[\mathrm{B2}\,(\mathrm{r})] = u_2, &&\mathrm{C2}\,(q_2) = \mathrm{C2}\,[\mathrm{B2}\,(\mathrm{r})] = v_2 \end{aligned} \tag{1.13.3}$$

При помощи операций Re(...) и Im(...), которые в нашей системе обозначений выглядели бы как R1(...) и R2(...), можем выделить из (1.13.3) восемь действительных координат $T$-вектора $r$.

Определитель $\det r$ — действительное число, которое получается в результате произведения всех восьми сопряжённых форм $T$-вектора:

$$\det r = r\,\bar{r}\,\tilde{r}\,\tilde{\bar{r}}\,\dddot{r}\,\dddot{\bar{r}}\,\dddot{\tilde{r}}\,\dddot{\tilde{\bar{r}}} \tag{1.13.4}$$

## 1.14 Экспонента от $T$-аргумента

Опираясь на ряд (1.7.1), при $x = \mathrm{k}\alpha$, $x = \mathrm{ik}\alpha$, $x = \mathrm{jk}\alpha$ и $x = \mathrm{ijk}\alpha$, аналогично (1.7.2) и (1.7.3) получим:

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{k}\alpha) &= \mathrm{ch}\,(\mathrm{k}\alpha) + \mathrm{sh}\,(\mathrm{k}\alpha) &&= \mathrm{ch}\,\alpha + \mathrm{k}\,\mathrm{sh}\,\alpha\\ \exp(\mathrm{ik}\alpha) &= \mathrm{ch}\,(\mathrm{ik}\alpha) + \mathrm{sh}\,(\mathrm{ik}\alpha) &&= \cos\alpha + \mathrm{ik}\sin\alpha\\ \exp(\mathrm{jk}\alpha) &= \mathrm{ch}\,(\mathrm{jk}\alpha) + \mathrm{sh}\,(\mathrm{jk}\alpha) &&= \mathrm{ch}\,\alpha + \mathrm{jk}\,\mathrm{sh}\,\alpha\\ \exp(\mathrm{ijk}\alpha) &= \mathrm{ch}\,(\mathrm{ijk}\alpha) + \mathrm{sh}\,(\mathrm{ijk}\alpha) &&= \cos\alpha + \mathrm{ijk}\sin\alpha \end{aligned} \tag{1.14.1}$$

и соответствующие им формулы Эйлера:

$$\begin{gathered} \begin{cases} \dfrac{e^{\mathrm{k}\alpha} + e^{-\mathrm{k}\alpha}}{2} = \mathrm{ch}\,(\mathrm{k}\alpha) = \mathrm{ch}\,\alpha\\ \dfrac{e^{\mathrm{k}\alpha} - e^{-\mathrm{k}\alpha}}{2} = \mathrm{sh}\,(\mathrm{k}\alpha) = \mathrm{k}\,\mathrm{sh}\,\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{e^{\mathrm{ik}\alpha} + e^{-\mathrm{ik}\alpha}}{2} = \mathrm{ch}\,(\mathrm{ik}\alpha) = \cos\alpha\\ \dfrac{e^{\mathrm{ik}\alpha} - e^{-\mathrm{ik}\alpha}}{2} = \mathrm{sh}\,(\mathrm{ik}\alpha) = \mathrm{ik}\sin\alpha \end{cases}\\ \begin{cases} \dfrac{e^{\mathrm{jk}\alpha} + e^{-\mathrm{jk}\alpha}}{2} = \mathrm{ch}\,(\mathrm{jk}\alpha) = \mathrm{ch}\,\alpha\\ \dfrac{e^{\mathrm{jk}\alpha} - e^{-\mathrm{jk}\alpha}}{2} = \mathrm{sh}\,(\mathrm{jk}\alpha) = \mathrm{jk}\,\mathrm{sh}\,\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{e^{\mathrm{ijk}\alpha} + e^{-\mathrm{ijk}\alpha}}{2} = \mathrm{ch}\,(\mathrm{ijk}\alpha) = \cos\alpha\\ \dfrac{e^{\mathrm{ijk}\alpha} - e^{-\mathrm{ijk}\alpha}}{2} = \mathrm{sh}\,(\mathrm{ijk}\alpha) = \mathrm{ijk}\sin\alpha \end{cases} \end{gathered} \tag{1.14.2}$$

Если в качестве аргумента экспоненты взять $T$-число

$$\rho = \rho_1 + \mathrm{i}\rho_2 + \mathrm{j}\rho_3 + \mathrm{ij}\rho_4 + \mathrm{k}\rho_5 + \mathrm{ik}\rho_6 + \mathrm{jk}\rho_7 + \mathrm{ijk}\rho_8 \tag{1.14.3}$$

где $\rho_1, \ldots, \rho_8$ — действительные числа, то с учётом (1.7.2) и (1.14.1) exp-форма $T$-числа $r$ примет следующий вид:

$$\begin{aligned} r = \exp\rho &= \exp(\rho_1 + \mathrm{i}\rho_2 + \mathrm{j}\rho_3 + \mathrm{ij}\rho_4 + \mathrm{k}\rho_5 + \mathrm{ik}\rho_6 + \mathrm{jk}\rho_7 + \mathrm{ijk}\rho_8) =\\ &= e^{\rho_1}(\cos\rho_2 + \mathrm{i}\sin\rho_2)(\mathrm{ch}\,\rho_3 + \mathrm{j}\,\mathrm{sh}\,\rho_3)(\cos\rho_4 + \mathrm{ij}\sin\rho_4)(\mathrm{ch}\,\rho_5 + \mathrm{k}\,\mathrm{sh}\,\rho_5)\,\times\\ &\quad\times(\cos\rho_6 + \mathrm{ik}\sin\rho_6)(\mathrm{ch}\,\rho_7 + \mathrm{jk}\,\mathrm{sh}\,\rho_7)(\cos\rho_8 + \mathrm{ijk}\sin\rho_8) \end{aligned} \tag{1.14.4}$$

После раскрытия скобок в (1.14.4) и группировки, каждая из восьми действительных координат $T$-вектора $r$ окажется выраженной через действительные гиперболические и тригонометрические функции параметров $\rho_2, \ldots, \rho_8$.

Из множества других возможных форм записи $T$-вектора отметим ещё только необходимую в дальнейшем $B$-*exp*-форму

$$\begin{aligned} r = q_1 + \mathrm{k}q_2 &= \exp\kappa_1 + \mathrm{k}\exp\kappa_2 = \\ &= \exp(\alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1 + \mathrm{j}\gamma_1 + \mathrm{ij}\delta_1) + \mathrm{k}\exp(\alpha_2 + \mathrm{i}\beta_2 + \mathrm{j}\gamma_2 + \mathrm{ij}\delta_2) \end{aligned} \tag{1.14.5}$$

и напомним, что параметры *exp*-формы и $B$-*exp*-формы $T$-вектора отнюдь не совпадают друг с другом: $\rho_1 + \mathrm{i}\rho_2 + \mathrm{j}\rho_3 + \mathrm{ij}\rho_4 \neq \alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1 + \mathrm{j}\gamma_1 + \mathrm{ij}\delta_1$ и т.п.

## 1.15 Вырожденные $T$-векторы. $T$- и $BT$-проекторы

Пусть $T$-вектор $r = q_1 + \mathrm{k}q_2 = (u_1 + \mathrm{j}v_1) + \mathrm{k}\,(u_2 + \mathrm{j}v_2)$. Запишем его определитель (1.13.4) в развёрнутом виде:

$$\begin{aligned} \det r = & \\ &= (q_1{+}\mathrm{k}q_2)\,(\bar{q}_1{+}\mathrm{k}\bar{q}_2)\,(\tilde{q}_1{+}\mathrm{k}\tilde{q}_2)\,(\bar{\tilde{q}}_1{+}\mathrm{k}\bar{\tilde{q}}_2)\,(q_1{-}\mathrm{k}q_2)\,(\bar{q}_1{-}\mathrm{k}\bar{q}_2)\,(\tilde{q}_1{-}\mathrm{k}\tilde{q}_2)\,(\bar{\tilde{q}}_1{-}\mathrm{k}\bar{\tilde{q}}_2) = \\ &= (q_1^2{-}q_2^2)\,(\bar{q}_1^2{-}\bar{q}_2^2)\,(\tilde{q}_1^2{-}\tilde{q}_2^2)\,(\bar{\tilde{q}}_1^2{-}\bar{\tilde{q}}_2^2) \end{aligned} \tag{1.15.1}$$

Выражение (1.15.1) равно нулю при $q_1 = \pm q_2$. Если $q_1 \neq \pm q_2$, но сами $B$-числа $q_1$ и $q_2$ вырождены ($q_1 = u + \mathrm{j}u$, $q_2 = v + \mathrm{j}v$, $u \neq v$), то

$$q_1^2{-}q_2^2 = (u{+}\mathrm{j}u)^2 - (v{+}\mathrm{j}v)^2 = (u^2 - v^2)\,(1+\mathrm{j})^2$$

$$\tilde{q}_1^2{-}\tilde{q}_2^2 = (u{-}\mathrm{j}u)^2 - (v{-}\mathrm{j}v)^2 = (u^2 - v^2)\,(1-\mathrm{j})^2$$

$$\left(q_1^2{-}q_2^2\right)\left(\tilde{q}_1^2{-}\tilde{q}_2^2\right) = \left[\left(u^2 - v^2\right)(1+\mathrm{j})\,(1-\mathrm{j})\right]^2 = 0$$

и произведение (1.15.1) опять оказывается равным нулю. Таким образом, условия вырожденности $T$-числа принимают следующий вид:

$$\det r = 0 \quad \text{при} \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 = +q_2 \\ q_1 = -q_2 \\ u_1 = +v_1,\ u_2 = +v_2 \\ u_1 = -v_1,\ u_2 = -v_2 \end{array} \right. \tag{1.15.2}$$

Отметим, что если $B$-числа $q_1$ и $q_2$ имеют различный тип вырожденности ($q_1 = q_1^+$ при $q_2 = q_2^-$ или $q_1 = q_1^-$ при $q_2 = q_2^+$), то $\det r \neq 0$.

**$T$-проекторы**

$$\mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{+} = (1+\mathrm{k})/2, \qquad \mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{-} = (1-\mathrm{k})/2 \tag{1.15.3}$$

осуществляют проектирование 8-мерного $T$-вектора в два ортогональных вырожденных 4-мерных $B$-подпространства и обладают следующими *свойствами*:

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{+}\mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{+} = \mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{+} & : & [(1+\mathrm{k})/2]^2 = (1^2 + \mathrm{k}^2 + \mathrm{k}2)/4 = (1+\mathrm{k})/2 \\ \mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{-}\mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{-} = \mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{-} & : & [(1-\mathrm{k})/2]^2 = (1^2 + \mathrm{k}^2 - \mathrm{k}2)/4 = (1-\mathrm{k})/2 \\ \mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{+}\mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{-} = 0 & : & [(1+\mathrm{k})/2]\,[(1-\mathrm{k})/2] = (1^2 - \mathrm{k}^2)/4 = 0 \end{array} \tag{1.15.4}$$

$$\tilde{P}_{\mathrm{k}}^{+} = \bar{P}_{\mathrm{k}}^{+} = \mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{+}, \quad \tilde{P}_{\mathrm{k}}^{-} = \bar{P}_{\mathrm{k}}^{-} = \mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{-}, \quad \ddot{P}_{\mathrm{k}}^{+} = \mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{-}, \quad \ddot{P}_{\mathrm{k}}^{-} = \mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{+} \tag{1.15.5}$$

Смысл свойств (1.15.4), (1.15.5) аналогичен смыслу свойств (1.10.8), (1.10.9) $B$-проекторов.

**Действие T-проекторов на T-вектор :**

$$\begin{aligned} r\mathrm{P}_\mathrm{k}^+ = (q_1 + \mathrm{k}q_2)(1+\mathrm{k})/2 =& (q_1 + q_2)(1+\mathrm{k})/2 = \\ =& [(u_1+u_2) + \mathrm{j}(v_1+v_2)]\mathrm{P}_\mathrm{k}^+ = r_{(\mathrm{k})}^+ \equiv r^+ \\ r\mathrm{P}_\mathrm{k}^- = (q_1 + \mathrm{k}q_2)\,(1-\mathrm{k})/2 =& (q_1 - q_2)\,(1-\mathrm{k})/2 = \\ =& [(u_1-u_2) + \mathrm{j}\,(v_1-v_2)]\,\mathrm{P}_\mathrm{k}^- = r_{(\mathrm{k})}^- \equiv r^- \end{aligned} \tag{1.15.6}$$

Если $q_1 = \pm q_2$, то $T$-вектор $r$ является вырожденным и полностью расположен в одном из двух вырожденных $B$-подпространств. Его проекция во второе $B$-подпространство при этом равна нулю. Например, при $q_1 = q_2$ проекция $r\mathrm{P}_\mathrm{k}^- = r^- = 0$, а $r\mathrm{P}_\mathrm{k}^+ = r^+ = r$. Непосредственно для $T$-проектирования $T$-вектора запись формул (15.6) через комплексные координаты $u$ и $v$ не является необходимой и приведена здесь для сравнения со следующим абзацем.

**Действие B-проекторов на $T$-вектор.**

Действие B-проекторов на $T$-вектор заключается в их действии на каждую из $B$-координат $q_1$ и $q_2$ $T$-вектора $r$ согласно формулам (1.10.11):

$$\begin{aligned} r\mathrm{P}_\mathrm{j}^+ &= (q_1+\mathrm{k}q_2)\,\mathrm{P}_\mathrm{j}^+ = [(u_1+\mathrm{j}v_1) + \mathrm{k}\,(u_2+\mathrm{j}v_2)]\,\mathrm{P}_\mathrm{j}^+ = [(u_1+v_1) + \mathrm{k}\,(u_2+v_2)]\,\mathrm{P}_\mathrm{j}^+ = r_{(\mathrm{j})}^+ \\ r\mathrm{P}_\mathrm{j}^- &= (q_1+\mathrm{k}q_2)\,\mathrm{P}_\mathrm{j}^- = [(u_1+\mathrm{j}v_1) + \mathrm{k}\,(u_2+\mathrm{j}v_2)]\,\mathrm{P}_\mathrm{j}^- = [(u_1-v_1) + \mathrm{k}\,(u_2-v_2)]\,\mathrm{P}_\mathrm{j}^- = r_{(\mathrm{j})}^- \end{aligned} \tag{1.15.7}$$

Таким образом, здесь происходит проектирование каждой из двух 4-мерных $B$-координат 8-мерного $T$-вектора на две соответствующие вырожденные 2-мерные $C$-плоскости. В итоге имеем две ортогональные 4-мерные суммы пар $C$-подпространств. Если $B$-координаты $q_1$ и $q_2$ $T$-вектора $r$ сами являются вырожденными (по j, с одинаковым типом вырожденности), то одна из двух $B$-проекций (1.15.7) $T$-вектора равна нулю, а вторая представляет собой весь $T$-вектор. Например, при $u_1 = v_1$ и $u_2 = v_2$ проекция $r\mathrm{P}_\mathrm{j}^- = 0$, а

$$r\mathrm{P}_\mathrm{j}^+ = 2\,(u_1 + \mathrm{k}u_2)\,\mathrm{P}_\mathrm{j}^+ = (u_1 + \mathrm{k}u_2)\,(1+\mathrm{j}) = u_1 + \mathrm{j}u_1 + \mathrm{k}u_2 + \mathrm{jk}u_2 = r_{(\mathrm{j})}^+ = r$$

***BT*-проекторы.**

Как следует из двух предыдущих подразделов, для $T$-вектора возможно разложение на две различные (по k и по j) пары вырожденных 4-мерных составляющих. Эти разложения обеспечиваются соответственно проекторами $\mathrm{P}_\mathrm{k}^+$, $\mathrm{P}_\mathrm{k}^-$ и $\mathrm{P}_\mathrm{j}^+$, $\mathrm{P}_\mathrm{j}^-$. Суперпозиция обоих типов проекторов имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_\mathrm{j}^+\mathrm{P}_\mathrm{k}^+ &= (1+\mathrm{j})\,(1+\mathrm{k})/4 = (1+\mathrm{j}+\mathrm{k}+\mathrm{jk})\,/4 \equiv \mathrm{P}_\mathrm{jk}^{++} \\ \mathrm{P}_\mathrm{j}^+\mathrm{P}_\mathrm{k}^- &= (1+\mathrm{j})\,(1-\mathrm{k})/4 = (1+\mathrm{j}-\mathrm{k}-\mathrm{jk})\,/4 \equiv \mathrm{P}_\mathrm{jk}^{+-} \\ \mathrm{P}_\mathrm{j}^-\mathrm{P}_\mathrm{k}^+ &= (1-\mathrm{j})\,(1+\mathrm{k})/4 = (1-\mathrm{j}+\mathrm{k}-\mathrm{jk})\,/4 \equiv \mathrm{P}_\mathrm{jk}^{-+} \\ \mathrm{P}_\mathrm{j}^-\mathrm{P}_\mathrm{k}^- &= (1-\mathrm{j})\,(1-\mathrm{k})/4 = (1-\mathrm{j}-\mathrm{k}+\mathrm{jk})\,/4 \equiv \mathrm{P}_\mathrm{jk}^{--} \end{aligned} \tag{1.15.8}$$

и обеспечивает разложение $T$-вектора на четыре комплексные вырожденные составляющие. В евклидовом $T$-пространстве эти составляющие попарно ортогональны, поскольку действие проекторов (1.15.8) друг на друга даёт следующие результаты (см. таблицу 1.15.1).

Таблица 1.15.1:

| $\times$ | $\mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{++}$ | $\mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{+-}$ | $\mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{-+}$ | $\mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{--}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{++}$ | $\mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{++}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{+-}$ | 0 | $\mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{+-}$ | 0 | 0 |
| $\mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{-+}$ | 0 | 0 | $\mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{-+}$ | 0 |
| $\mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{--}$ | 0 | 0 | 0 | $\mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{--}$ |

В таблице 1.15.1 на пересечении строк и столбцов отображены произведения соответствующих $BT$-проекторов. Справедливость таблицы можно проверить прямым вычислением на основе самих формул (1.15.8). Из этих же формул следуют и свойства сопряжения $BT$-проекторов:

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}_{\mathrm{jk}}^{++} = \mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{-+},\ \tilde{P}_{\mathrm{jk}}^{+-} = \mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{--},\ \tilde{P}_{\mathrm{jk}}^{-+} = \mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{++},\ \tilde{P}_{\mathrm{jk}}^{--} = \mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{+-}\\
&\overset{\frown}{P}_{\mathrm{jk}}^{++} = \mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{+-},\ \overset{\frown}{P}_{\mathrm{jk}}^{+-} = \mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{++},\ \overset{\frown}{P}_{\mathrm{jk}}^{-+} = \mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{--},\ \overset{\frown}{P}_{\mathrm{jk}}^{--} = \mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{-+}\\
&\tilde{\overset{\frown}{P}}_{\mathrm{jk}}^{++} = \mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{--},\ \tilde{\overset{\frown}{P}}_{\mathrm{jk}}^{+-} = \mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{-+},\ \tilde{\overset{\frown}{P}}_{\mathrm{jk}}^{-+} = \mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{+-},\ \tilde{\overset{\frown}{P}}_{\mathrm{jk}}^{--} = \mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{++}
\end{aligned} \tag{1.15.9}$$

Комплексное сопряжение на тип $BT$-проекторов не влияет и в формулах (1.15.9) не отражено.

Для нахождения той или иной вырожденной проекции достаточно записать $T$-вектор в комплексной алгебраической форме, а затем сложить его $C$-координаты с учётом смены соответствующих знаков проектором (как при вычислении скалярного произведения в координатном виде). Например,

$$r\mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{+-} = (u_1 + \mathrm{j}v_1 + \mathrm{k}u_2 + \mathrm{jk}v_2)\,(1 + \mathrm{j} - \mathrm{k} - \mathrm{jk})\,/4 = (u_1 + v_1 - u_2 - v_2)\,\mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{+-}$$

$$\tilde{r}\mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{--} = (u_1 - \mathrm{j}v_1 + \mathrm{k}u_2 - \mathrm{jk}v_2)\,(1 - \mathrm{j} - \mathrm{k} + \mathrm{jk})\,/4 = (u_1 + v_1 - u_2 - v_2)\,\mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{--}$$

В приведённом примере при помощи разных проекторов ($\mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{+-}$ и $\mathrm{P}_{\mathrm{jk}}^{--}$) мы получили одинаковые комплексные значения $(u_1 + v_1 - u_2 - v_2)$ координат проекций разных $T$-векторов ($r$ и $\tilde{r}$) на различные вырожденные $C$-плоскости в $T$-пространстве. Разумеется, такой результат можно получить и непосредственным выполнением умножения, группировки и вынесения за скобки.

Этот же пример иллюстрирует и свойства (1.15.9), так как вторую строку примера можно получить $B$-сопряжением его первой строки (значение комплексной проекции $u_1 + v_1 - u_2 - v_2$ от $B$-сопряжения не зависит).

## 1.16 $F$-вектор

$F$-вектор $f$ получим объединением двух $T$-векторов $r_1$ и $r_2$ в единую систему при помощи новой базисной единицы $\mathrm{l}$ (при $\mathrm{l}^2 = 1$):

$$\begin{aligned}
f = r_1 + \mathrm{l}r_2 &= (q_1 + \mathrm{k}q_2) + \mathrm{l}\,(q_3 + \mathrm{k}q_4) = \\
&= (u_1 + \mathrm{j}v_1) + \mathrm{k}\,(u_2 + \mathrm{j}v_2) + \mathrm{l}\,(u_3 + \mathrm{j}v_3) + \mathrm{kl}\,(u_4 + \mathrm{j}v_4)
\end{aligned} \tag{1.16.1}$$

где $q_i$ обозначают его бикомплексные, а $u_i$ и $v_i$ — комплексные координаты. $F$-сопряжение $F$-вектора заключается в смене знака перед базисной единицей l и будет обозначаться следующим образом:

$$f = r_1 + \mathrm{l}r_2, \quad \check{f} = r_1 - \mathrm{l}r_2 \tag{1.16.2}$$

Определитель $F$-вектора является действительным неотрицательным числом и может быть вычислен как произведение всех шестнадцати его сопряженных значений:

$$\det f = f\,\bar{f}\,\tilde{f}\,\tilde{\bar{f}}\,\dddot{f}\,\dddot{\bar{f}}\,\dddot{\tilde{f}}\,\dddot{\tilde{\bar{f}}}\,\check{f}\,\check{\bar{f}}\,\check{\tilde{f}}\,\check{\tilde{\bar{f}}}\,\dddot{\check{f}}\,\check{\dddot{\bar{f}}}\,\check{\dddot{\tilde{f}}}\,\check{\dddot{\tilde{\bar{f}}}} \tag{1.16.3}$$

Из входящего в определитель произведения

$$f\check{f} = (r_1 + \mathrm{l}r_2)\,(r_1 - \mathrm{l}r_2) = r_1^2 - r_2^2 \tag{1.16.4}$$

следует, что при $r_1 = \pm r_2$ $F$-вектор будет вырожденным. Для произвольного $F$-вектора разложение на вырожденные составляющие найдём при помощи соответствующих проекторов.

**F-проекторы**

$$\mathrm{P}_\mathrm{l}^+ = (1 + \mathrm{l})/2, \quad \mathrm{P}_\mathrm{l}^- = (1 - \mathrm{l})/2 \tag{1.16.5}$$

осуществляют проектирование 16-мерного $F$-вектора в два ортогональных вырожденных 8-мерных $T$-подпространства. В обозначениях (1.16.1) запишем

**действие F-проекторов на F-вектор:**

$$\begin{aligned} f\mathrm{P}_\mathrm{l}^+ &= (r_1 + \mathrm{l}r_2)\,(1 + \mathrm{l})/2 = (r_1 + r_2)\,(1 + \mathrm{l})/2 = f_{(\mathrm{l})}^+ \equiv f^+ \\ f\mathrm{P}_\mathrm{l}^- &= (r_1 + \mathrm{l}r_2)\,(1 - \mathrm{l})/2 = (r_1 - r_2)\,(1 - \mathrm{l})/2 = f_{(\mathrm{l})}^- \equiv f^- \end{aligned} \tag{1.16.6}$$

Если $r_1 = \pm r_2$, то $F$-вектор $f$ является вырожденным и полностью расположен в одном из двух вырожденных $T$-подпространств. Его проекция во второе $T$-подпространство при этом равна нулю. Например, при $r_1 = r_2$ проекция $f\mathrm{P}_\mathrm{l}^- = f^- = 0$, а $f\mathrm{P}_\mathrm{l}^+ = f^+ = f$.

**Действие $T$-проекторов на $F$-вектор**

заключается в их действии на каждую из $T$-координат $r_1$ и $r_2$ $F$-вектора $f$:

$$\begin{aligned} f\mathrm{P}_\mathrm{k}^+ &= (r_1 + \mathrm{l}r_2)\,\mathrm{P}_\mathrm{k}^+ = [(q_1 + \mathrm{k}q_2) + \mathrm{l}\,(q_3 + \mathrm{k}q_4)]\,\mathrm{P}_\mathrm{j}^+ = [(q_1 + q_2) + \mathrm{l}\,(q_3 + q_4)]\,\mathrm{P}_\mathrm{k}^+ = f_{(\mathrm{k})}^+ \\ f\mathrm{P}_\mathrm{k}^- &= (r_1 + \mathrm{l}r_2)\,\mathrm{P}_\mathrm{k}^- = [(q_1 + \mathrm{k}q_2) + \mathrm{l}\,(q_3 + \mathrm{k}q_4)]\,\mathrm{P}_\mathrm{j}^- = [(q_1 - q_2) + \mathrm{l}\,(q_3 - q_4)]\,\mathrm{P}_\mathrm{k}^- = f_{(\mathrm{k})}^- \end{aligned} \tag{1.16.7}$$

Таким образом, здесь происходит проектирование каждой из двух 8-мерных $T$-координат 16-мерного $F$-вектора в два соответствующих вырожденных 4-мерных $B$-пространства. В итоге имеем две ортогональные 8-мерные суммы пар вырожденных $B$-подпространств. Если $T$-координаты $r_1$ и $r_2$ $F$-вектора $f$ сами являются вырожденными (по k, с одинаковым типом вырожденности), то одна из двух $T$-проекций (1.16.7) $F$-вектора равна нулю, а вторая представляет собой весь $F$-вектор. Например, при $q_1 = q_2$ и $q_3 = q_4$ проекция $f\mathrm{P}_\mathrm{k}^- = 0$, а

$$\begin{aligned} f\mathrm{P}_\mathrm{k}^+ &= 2\,(q_1 + \mathrm{l}q_3)\,\mathrm{P}_\mathrm{k}^+ = (q_1 + \mathrm{l}q_3)\,(1 + \mathrm{k}) = q_1 + \mathrm{k}q_1 + \mathrm{l}q_3 + \mathrm{kl}q_3 = \\ &= u_1 + \mathrm{j}v_1 + \mathrm{k}u_1 + \mathrm{jk}v_1 + \mathrm{l}u_3 + \mathrm{jl}v_3 + \mathrm{kl}u_3 + \mathrm{jkl}v_3 = f \end{aligned}$$

при умножении такого $F$-вектора на его $T$-сопряжённое значение получим

$$f\dddot{f} = (q_1 + \mathrm{l}q_3)^2\,(1 + \mathrm{k})\,(1 - \mathrm{k}) = 0 \tag{1.16.8}$$

**Действие $B$-проекторов на $F$-вектор**

заключается в их действии на каждую из $B$-координат $q_1$, $q_2$, $q_3$ и $q_4$ $F$-вектора $f$:

$$\begin{aligned} f\mathrm{P}_{\mathrm{j}}^{+} &= (r_1 + \mathrm{l}r_2)\,\mathrm{P}_{\mathrm{j}}^{+} = [(u_1 + \mathrm{j}v_1) + \mathrm{k}\,(u_2 + \mathrm{j}v_2) + \mathrm{l}\,(u_3 + \mathrm{j}v_3) + \mathrm{kl}\,(u_4 + \mathrm{j}v_4)]\,\mathrm{P}_{\mathrm{j}}^{+} = f\mathrm{P}_{\mathrm{j}}^{-} = (r_1 + \mathrm{l}r_2)\,\mathrm{P}_{\mathrm{j}}^{-} = \\ &= [(u_1 + v_1) + \mathrm{k}\,(u_2 + v_2) + \mathrm{l}\,(u_3 + v_3) + \mathrm{kl}\,(u_4 + v_4)]\,\mathrm{P}_{\mathrm{j}}^{+} = f_{(\mathrm{j})}^{+} \qquad = [(u_1 - v_1) + \mathrm{k}\,( \end{aligned} \tag{1.16.9}$$

Таким образом, здесь происходит проектирование каждой из четырёх 4-мерных $B$-координат 16-мерного $F$-вектора на две соответствующие вырожденные 2-мерные $C$-плоскости. В итоге имеем две ортогональные 8-мерные суммы четвёрок $C$-подпространств. Если $B$-координаты $q_1$, $q_2$, $q_3$ и $q_4$ $F$-вектора $f$ сами являются вырожденными (по j, с одинаковым типом вырожденности), то одна из двух $B$-проекций (1.16.8) $F$-вектора равна нулю, а вторая представляет собой весь $F$-вектор. Например, при $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $u_3 = v_3$ и $u_4 = v_4$ проекция $f\mathrm{P}_{\mathrm{j}}^{-} = 0$, а

$$\begin{aligned} f\mathrm{P}_{\mathrm{j}}^{+} = (r_1 + \mathrm{l}r_2)\,\mathrm{P}_{\mathrm{j}}^{+} &= (u_1 + \mathrm{k}u_2 + \mathrm{l}u_3 + \mathrm{kl}u_4)\,(1 + \mathrm{j}) = \\ &= u_1 + \mathrm{j}u_1 + \mathrm{k}u_2 + \mathrm{jk}u_2 + \mathrm{l}u_3 + \mathrm{jl}u_3 + \mathrm{kl}u_4 + \mathrm{jkl}u_4 = f_{(\mathrm{j})}^{+} = f \end{aligned}$$

при умножении такого $F$-вектора на его $B$-сопряжённое значение получим

$$f\tilde{f} = (u_1 + \mathrm{k}u_2 + \mathrm{l}u_3 + \mathrm{kl}u_4)^2\,(1 + \mathrm{j})\,(1 - \mathrm{j}) = 0 \tag{1.16.10}$$

Собирая вместе результаты (1.16.4), (1.16.8), (1.16.10), с учётом (1.16.3) будем иметь следующий перечень условий вырожденности $F$-вектора:

$$\det f = 0 \quad \text{при} \begin{cases} r_1 = +\,r_2 \\ r_1 = -\,r_2 \\ q_1 = +\,q_2,\ q_3 = +\,q_4 \\ q_1 = -\,q_2,\ q_3 = -\,q_4 \\ u_1 = +\,v_1,\ u_2 = +\,v_2,\ u_3 = +\,v_3,\ u_4 = +\,v_4 \\ u_1 = -\,v_1,\ u_2 = -\,v_2,\ u_3 = -\,v_3,\ u_4 = -\,v_4 \end{cases} \tag{1.16.11}$$

В $F$-пространстве действуют три парные суперпозиции проекторов: $BT$, $BF$ и $TF$. $BT$-проектор действует на каждую $T$-векторную составляющую $F$-вектора способами (1.15.8), рассмотренными в предыдущем разделе. Остальные две суперпозиции имеют следующий вид:

**$TF$-проекторы**

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{+}\mathrm{P}_{\mathrm{l}}^{+} &= (1 + \mathrm{k})\,(1 + \mathrm{l})/4 = (1 + \mathrm{k} + \mathrm{l} + \mathrm{kl})\,/4 \;\equiv\; \mathrm{P}_{\mathrm{kl}}^{++} \\ \mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{+}\mathrm{P}_{\mathrm{l}}^{-} &= (1 + \mathrm{k})\,(1 - \mathrm{l})/4 = (1 + \mathrm{k} - \mathrm{l} - \mathrm{kl})\,/4 \;\equiv\; \mathrm{P}_{\mathrm{kl}}^{+-} \\ \mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{-}\mathrm{P}_{\mathrm{l}}^{+} &= (1 - \mathrm{k})\,(1 + \mathrm{l})/4 = (1 - \mathrm{k} + \mathrm{l} - \mathrm{kl})\,/4 \;\equiv\; \mathrm{P}_{\mathrm{kl}}^{-+} \\ \mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{-}\mathrm{P}_{\mathrm{l}}^{-} &= (1 - \mathrm{k})\,(1 - \mathrm{l})/4 = (1 - \mathrm{k} - \mathrm{l} + \mathrm{kl})\,/4 \;\equiv\; \mathrm{P}_{\mathrm{kl}}^{--} \end{aligned} \tag{1.16.12}$$

**$BF$-проекторы**

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{\mathrm{j}}^{+}\mathrm{P}_{\mathrm{l}}^{+} &= (1 + \mathrm{j})\,(1 + \mathrm{l})/4 = (1 + \mathrm{j} + \mathrm{l} + \mathrm{jl})\,/4 \;\equiv\; \mathrm{P}_{\mathrm{jl}}^{++} \\ \mathrm{P}_{\mathrm{j}}^{+}\mathrm{P}_{\mathrm{l}}^{-} &= (1 + \mathrm{j})\,(1 - \mathrm{l})/4 = (1 + \mathrm{j} - \mathrm{l} - \mathrm{jl})\,/4 \;\equiv\; \mathrm{P}_{\mathrm{jl}}^{+-} \\ \mathrm{P}_{\mathrm{j}}^{-}\mathrm{P}_{\mathrm{l}}^{+} &= (1 - \mathrm{j})\,(1 + \mathrm{l})/4 = (1 - \mathrm{j} + \mathrm{l} - \mathrm{jl})\,/4 \;\equiv\; \mathrm{P}_{\mathrm{jl}}^{-+} \\ \mathrm{P}_{\mathrm{j}}^{-}\mathrm{P}_{\mathrm{l}}^{-} &= (1 - \mathrm{j})\,(1 - \mathrm{l})/4 = (1 - \mathrm{j} - \mathrm{l} + \mathrm{jl})\,/4 \;\equiv\; \mathrm{P}_{\mathrm{jl}}^{--} \end{aligned} \tag{1.16.13}$$

Проекторы (1.16.12) и (1.16.13) раскладывают 16-мерный $F$-вектор на четыре 4-мерных вырожденных составляющих. Свойства этих проекторов аналогичны свойствам, отражённым в таблице 1.15.1 и формулах (1.15.9).

Сходные по сути свойства имеют и $BTF$-проекторы, которые позволяют найти восемь 2-мерных вырожденных (комплексных) координат 16-мерного $F$-вектора:

**$BTF$-проекторы**

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_\mathrm{j}^+\mathrm{P}_\mathrm{k}^+\mathrm{P}_\mathrm{l}^+ &= (1+\mathrm{j})\,(1+\mathrm{k})\,(1+\mathrm{l})/8 = (1+\mathrm{j}+\mathrm{k}+\mathrm{jk}+\mathrm{l}+\mathrm{jl}+\mathrm{kl}+\mathrm{jkl})\,/8 \equiv \mathrm{P}_\mathrm{jkl}^{+++}\\
\mathrm{P}_\mathrm{j}^+\mathrm{P}_\mathrm{k}^+\mathrm{P}_\mathrm{l}^- &= (1+\mathrm{j})\,(1+\mathrm{k})\,(1-\mathrm{l})/8 = (1+\mathrm{j}+\mathrm{k}+\mathrm{jk}-\mathrm{l}-\mathrm{jl}-\mathrm{kl}-\mathrm{jkl})\,/8 \equiv \mathrm{P}_\mathrm{jkl}^{++-}\\
\mathrm{P}_\mathrm{j}^+\mathrm{P}_\mathrm{k}^-\mathrm{P}_\mathrm{l}^+ &= (1+\mathrm{j})\,(1-\mathrm{k})\,(1+\mathrm{l})/8 = (1+\mathrm{j}-\mathrm{k}-\mathrm{jk}+\mathrm{l}+\mathrm{jl}-\mathrm{kl}-\mathrm{jkl})\,/8 \equiv \mathrm{P}_\mathrm{jkl}^{+-+}\\
\mathrm{P}_\mathrm{j}^+\mathrm{P}_\mathrm{k}^-\mathrm{P}_\mathrm{l}^- &= (1+\mathrm{j})\,(1-\mathrm{k})\,(1-\mathrm{l})/8 = (1+\mathrm{j}-\mathrm{k}-\mathrm{jk}-\mathrm{l}-\mathrm{jl}+\mathrm{kl}+\mathrm{jkl})\,/8 \equiv \mathrm{P}_\mathrm{jkl}^{+--}\\
\mathrm{P}_\mathrm{j}^-\mathrm{P}_\mathrm{k}^+\mathrm{P}_\mathrm{l}^+ &= (1-\mathrm{j})\,(1+\mathrm{k})\,(1+\mathrm{l})/8 = (1-\mathrm{j}+\mathrm{k}-\mathrm{jk}+\mathrm{l}-\mathrm{jl}+\mathrm{kl}-\mathrm{jkl})\,/8 \equiv \mathrm{P}_\mathrm{jkl}^{-++}\\
\mathrm{P}_\mathrm{j}^-\mathrm{P}_\mathrm{k}^+\mathrm{P}_\mathrm{l}^- &= (1-\mathrm{j})\,(1+\mathrm{k})\,(1-\mathrm{l})/8 = (1-\mathrm{j}+\mathrm{k}-\mathrm{jk}-\mathrm{l}+\mathrm{jl}-\mathrm{kl}+\mathrm{jkl})\,/8 \equiv \mathrm{P}_\mathrm{jkl}^{-+-}\\
\mathrm{P}_\mathrm{j}^-\mathrm{P}_\mathrm{k}^-\mathrm{P}_\mathrm{l}^+ &= (1-\mathrm{j})\,(1-\mathrm{k})\,(1+\mathrm{l})/8 = (1-\mathrm{j}-\mathrm{k}+\mathrm{jk}+\mathrm{l}-\mathrm{jl}-\mathrm{kl}+\mathrm{jkl})\,/8 \equiv \mathrm{P}_\mathrm{jkl}^{--+}\\
\mathrm{P}_\mathrm{j}^-\mathrm{P}_\mathrm{k}^-\mathrm{P}_\mathrm{l}^- &= (1-\mathrm{j})\,(1-\mathrm{k})\,(1-\mathrm{l})/8 = (1-\mathrm{j}-\mathrm{k}+\mathrm{jk}-\mathrm{l}+\mathrm{jl}+\mathrm{kl}-\mathrm{jkl})\,/8 \equiv \mathrm{P}_\mathrm{jkl}^{---}
\end{aligned} \tag{1.16.14}$$

Отметим, что различные произведения “двойных” проекторов $BT$, $BF$ и $TF$ дают в $F$-пространстве либо один из “тройных” $BTF$-проекторов, либо — ноль. Например,

$$\mathrm{P}_\mathrm{kl}^{++}\,\mathrm{P}_\mathrm{jl}^{++} = \left(\mathrm{P}_\mathrm{k}^+\mathrm{P}_\mathrm{l}^+\right)\left(\mathrm{P}_\mathrm{j}^+\mathrm{P}_\mathrm{l}^+\right) = \mathrm{P}_\mathrm{j}^+\mathrm{P}_\mathrm{k}^+\left(\mathrm{P}_\mathrm{l}^+\mathrm{P}_\mathrm{l}^+\right) = \mathrm{P}_\mathrm{j}^+\mathrm{P}_\mathrm{k}^+\mathrm{P}_\mathrm{l}^+ = \mathrm{P}_\mathrm{jkl}^{+++}$$
$$\mathrm{P}_\mathrm{kl}^{++}\,\mathrm{P}_\mathrm{jl}^{+-} = \left(\mathrm{P}_\mathrm{k}^+\mathrm{P}_\mathrm{l}^+\right)\left(\mathrm{P}_\mathrm{j}^+\mathrm{P}_\mathrm{l}^-\right) = \mathrm{P}_\mathrm{j}^+\mathrm{P}_\mathrm{k}^+\left(\mathrm{P}_\mathrm{l}^+\mathrm{P}_\mathrm{l}^-\right) = \mathrm{P}_\mathrm{j}^+\mathrm{P}_\mathrm{k}^+\,(0) = 0$$

Таким образом, система $BTF$-проекторов (1.16.14) позволяет однозначно разложить 16-мерный $F$-вектор на восемь попарно ортогональных двухмерных комплексных составляющих, расположенных в вырожденных плоскостях $F$-пространства. На четырёхмерные вырожденные составляющие $F$-вектор может быть разложен тремя способами — посредством $BT$-, $BF$- и $TF$-проекторов. Каждый из этих проекторов раскладывает $F$-вектор на четыре попарно ортогональных составляющих, расположенных в соответствующих четырёхмерных подпространствах. На пары восьмимерных вырожденных ортогональных составляющих $F$-вектор может быть разложен также тремя способами — путём воздействия $B$-, $T$- и $F$-проекторов.

Резюмируя изложенные выше выкладки, констатируем, что каждый невырожденный $B$-, $T$- или $F$-вектор может быть разложен на полностью определённые вырожденные составляющие.

# 2 Релятивистские интерпретации

## 2.1 Соотношение $B$-вектор — изотропный 4-вектор

Введём для действительных выражений в произведениях (1.8.1) следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
T &= e^{2\alpha}\,\mathrm{ch}\,2\gamma && = (a^2+b^2+c^2+d^2) && = (q\bar{q}+\tilde{q}\bar{\tilde{q}})/2 && = (u\bar{u}+v\bar{v})\\
X &= e^{2\alpha}\,\mathrm{sh}\,2\gamma && = 2\,(ac+bd) && = \mathrm{j}\,(q\bar{q}-\tilde{q}\bar{\tilde{q}})\,/2 && = (u\bar{v}+\bar{u}v)\\
\\
Y &= e^{2\alpha}\cos 2\delta && = (a^2+b^2-c^2-d^2) && = (q\bar{\tilde{q}}+\bar{q}\tilde{q})/2 && = (u\bar{u}-v\bar{v})\\
Z &= e^{2\alpha}\sin 2\delta && = 2\,(ad-bc) && = -\mathrm{ij}(q\bar{\tilde{q}}-\bar{q}\tilde{q})/2 && = \mathrm{i}(u\bar{v}-\bar{u}v)\\
\\
F &= e^{2\alpha}\cos 2\beta && = (a^2-b^2-c^2+d^2) && = (q\tilde{q}+\bar{q}\bar{\tilde{q}})/2 && = (u^2-v^2+\bar{u}^2-\bar{v}^2)\,/2\\
G &= e^{2\alpha}\sin 2\beta && = 2\,(ab-cd) && = -\mathrm{i}(q\tilde{q}-\bar{q}\bar{\tilde{q}})/2 && = -\mathrm{i}\,(u^2-v^2-\bar{u}^2+\bar{v}^2)\,/2
\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Формулы (2.1.1) каждому значению $B$-вектора $q$ однозначно ставят в соответствие шесть действительных переменных $\{T,\ X,\ Y,\ Z,\ F,\ G\}$, совокупность которых далее будем кратко обозначать как $\{T..G\}$. Соответствие может быть выражено в $R$-форме, то есть через действительные координаты $(abcd)$ $B$-вектора, в $C$-форме — через комплексные величины $(u,\ v,\ \bar{u},\ \bar{v})$ или в $B$-форме — через сопряжённые значения самого $B$-вектора $(q\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}})$. Формы эти эквивалентны и выбор их применения определяется лишь спецификой рассматриваемого вопроса. Экспоненциальная форма ($exp$-форма), когда переменные $\{T..G\}$ выражены через параметры $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)$, применима только в случае невырожденного $B$-вектора $q$.

Соотношения, связывающие аналогично (2.1.1) четыре координаты $(T,\ X,\ Y,\ Z)$ изотропного 4-вектора с парой комплексных переменных $(u,\ v)$, можно найти ещё в классической монографии Г. Вейля [12] или в более поздней книге Р. Пенроуза и В. Риндлера [13]. В нашем случае, комплексные переменные $(u,\ v)$ являются составными частями $B$-вектора, что привносит свои закономерности в систему получаемых соотношений.

Так, в $B$-форме все переменные $\{T..G\}$ являются билинейными комбинациями различных сопряжённых значений $B$-вектора $q$ и в этом смысле совершенно равноправны. В силу той же билинейности указанное выше однозначное соответствие не является взаимным, так как противоположным $B$-векторам $(\pm q)$ соответствуют одинаковые значения этих переменных. Как функции от $(a,\ b,\ c,\ d)$ они определены во всём $B$-пространстве. Переменная $T$, являясь евклидовым скалярным квадратом (1.9.3) $B$-вектора $q$, принимает только неотрицательные значения. Область значений остальных пяти функций — всё множество действительных чисел, $(-\infty, \infty)$. В $exp$-форме переменные $\{T..G\}$ пропорциональны $\exp 2\alpha$ и каждая пара в (2.1.1) зависит ещё только от одного параметра: $\beta$, $\gamma$ или $\delta$.

Запишем соотношения (1.8.1) и их произведения в обозначениях (2.1.1):

$$\begin{aligned} q\bar{q} &= T + \mathrm{j}X, & \tilde{q}\tilde{\bar{q}} &= T - \mathrm{j}X, & (q\bar{q})\,(\tilde{q}\tilde{\bar{q}}) &= T^2 - X^2 \\ q\tilde{\bar{q}} &= Y + \mathrm{ij}Z, & \bar{q}\tilde{q} &= Y - \mathrm{ij}Z, & (q\tilde{\bar{q}})\,(\bar{q}\tilde{q}) &= Y^2 + Z^2 \\ q\tilde{q} &= F + \mathrm{i}G, & \bar{q}\tilde{\bar{q}} &= F - \mathrm{i}G, & (q\tilde{q})\,(\bar{q}\tilde{\bar{q}}) &= F^2 + G^2 \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

откуда следует

$$T^2 - X^2 = Y^2 + Z^2 = F^2 + G^2 = \det q = e^{4\alpha} \tag{2.1.3}$$

Из (2.1.3) можно составить следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} &T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 0 \\ &T^2 - X^2 - F^2 - G^2 = 0 \\ &Y^2 + Z^2 = F^2 + G^2 \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

первые два из которых имеют структуру, характерную для *изотропного* (светоподобного) 4-вектора. В качестве временной компоненты этих 4-векторов выступает переменная, обозначенная как $T$, а остальные три — $X$, $Y$, $Z$ или $X$, $F$, $G$ — как пространственные. (Третье уравнение в (2.1.4) независимым не является и вытекает из двух первых). Отметим, что *сигнатура* $(+\,-\,-\,-)$, характерная для (псевдоевклидова) скалярного квадрата 4-вектора, здесь возникает естественным образом, без привлечения понятий ковариантности и контравариантности координат. Временная составляющая 4-вектора — переменная $T$ — единственная из шести переменных $\{T..G\}$, которая принимает только *неотрицательные* значения. Тем самым, любому $B$-вектору сопоставляется 4-вектор *будущего.*

$B$-пространство — четырёхмерно, а $B$-вектор характеризуется четырьмя действительными параметрами — $(a,\ b,\ c,\ d)$ или $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)$. Изотропный 4-вектор, хотя и является объектом четырёхмерного пространства-времени, фактически определяется только тремя параметрами. Например, задание трёх координат $X$, $Y$, $Z$ позволяет определить четвёртую координату $T$ из первого уравнения (2.1.4). В соотношении $B$-вектора и изотропного 4-вектора эта особенность проявляется в том, что для задания четырёх координат ($T$, $X$, $Y$, $Z$) используются только три параметра $B$-вектора — ($\alpha$, $\gamma$, $\delta$). Аналогично, при задании координат ($T$, $X$, $F$, $G$) задействованы параметры ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$). В этой связи сделаем два замечания. Во-первых, ни один из изотропных 4-векторов, удовлетворяющих (2.1.4), не несёт информации обо всех параметрах исходного $B$-вектора. Лишь совокупность этих 4-векторов характеризует $B$-вектор в целом. И, во-вторых, указанные 4-векторы не являются независимыми — они имеют общие составляющие. Подчеркнём, что в данном случае мы говорим о самих координатах изотропных 4-векторов, а не об уравнениях, в которые они входят. Так, в соотношениях (2.1.3) уже отсутствуют зависимости от параметров ($\beta$, $\gamma$, $\delta$), а уравнения (2.1.4) вообще не содержат характеристик конкретного $B$-вектора — этим уравнениям удовлетворяет *любой* $B$-вектор.

Физически, координаты мирового вектора описывают не положение, а состояние, процесс, характеристикой которого является скорость. На основе (2.1.1), получим

$$V_x = X/T = \operatorname{sh} 2\gamma / \operatorname{ch} 2\gamma = \operatorname{th} 2\gamma \tag{2.1.5}$$

$$\begin{aligned} V_y &= Y/T = \cos 2\delta / \operatorname{ch} 2\gamma, & V_z &= Z/T = \sin 2\delta / \operatorname{ch} 2\gamma \\ V_f &= F/T = \cos 2\beta / \operatorname{ch} 2\gamma, & V_g &= G/T = \sin 2\beta / \operatorname{ch} 2\gamma \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Как из (2.1.4), так и непосредственно из (2.1.5), (2.1.6) следует, что

$$\begin{aligned} (X^2 + Y^2 + Z^2)/T^2 &= V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = c^2 = 1 \\ (X^2 + F^2 + G^2)/T^2 &= V_x^2 + V_f^2 + V_g^2 = c^2 = 1 \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Выражение (2.1.7) определяет полную скорость $c$, величина которой постоянна и равна единице, а направление в системах координат $Oxyz$ или $Oxfg$ может быть любым, в зависимости от значений координат $X$, $Y$, $Z$) или ($X$, $F$, $G$). Здесь $V_xV_yV_z$ и $V_xV_fV_g$ — составляющие скорости $c$ по соответствующим осям координат. Из формул (2.1.5) и (2.1.6) следует, что каждая из составляющих скорости может принимать значения из интервала $[-1, 1]$, но не независимо друг от друга — в совокупности они должны удовлетворять уравнениям (2.1.7).

Пространственные 3-векторы $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ и $\mathbf{c} = (V_xV_yV_z)$ параллельны. В случае вырожденного $B$-вектора, когда $T = \pm X$ и $Y = Z = 0$, вектор $R$ направлен строго по оси $Ox$. Если же $B$-вектор не вырожден, то положение вектора $R$ можно охарактеризовать углом $\theta$ между осью $Ox$ и вектором $R$. Так, из (2.1.1) получим

$$\sin\theta = R_{yz}/R = \sqrt{Y^2 + Z^2}\Big/T = 1/\operatorname{ch} 2\gamma \tag{2.1.8}$$

$$\operatorname{tg}\theta = R_{yz}/X = \sqrt{Y^2 + Z^2}\Big/X = 1/\operatorname{sh} 2\gamma \tag{2.1.9}$$

откуда следует, что наибольшее значение $\sin\theta = 1$ и наибольшее отклонение вектора $R$ от оси $Ox$ при $\theta = \pi/2$ достигаются, когда $\gamma = 0$. При $\gamma \to \pm\infty$ угол $\theta \to 0$, а сам вектор $R$ всё ближе прилегает к оси $Ox$ (по или против её направления).

## 2.2 $B$-число как оператор. Преобразование Лоренца

Пусть $q_2 = q_1 q$, где $q$ рассматривается как оператор, преобразующий операнд $q_1$ в результат $q_2$. Значения $\bar{q}_2 = \bar{q}_1\bar{q}$, $\tilde{q}_2 = \tilde{q}_1\tilde{q}$ и $\tilde{\bar{q}}_2 = \tilde{\bar{q}}_1\tilde{\bar{q}}$ получим $C$-, $B$- и $CB$-сопряжением исходного выражения, а произведения сопряжённых результатов преобразования вычислим следующим образом:

$$q_2\bar{q}_2 = (q_1 q)\,(\bar{q}_1\bar{q}) = (q_1\bar{q}_1)\,(q\bar{q})\,, \quad q_2\tilde{q}_2 = (q_1\tilde{q}_1)\,(q\tilde{q})\,, \quad q_2\bar{\tilde{q}}_2 = (q_1\bar{\tilde{q}}_1)\,(q\bar{\tilde{q}}) \qquad (2.2.1)$$

Представим оператор $q$ $(\det q \neq 0)$ в экспоненциальной форме, согласно (1.7.4):

$$q = \exp(\alpha + \mathrm{i}\beta + \mathrm{j}\gamma + \mathrm{ij}\delta) = e^{\alpha}(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)(\operatorname{ch}\gamma + \mathrm{j}\operatorname{sh}\gamma)(\cos\delta + \mathrm{ij}\sin\delta) \qquad (2.2.2)$$

Из (2.2.2) видно, что полное $B$-преобразование является произведением четырёх операций, которые будем называть соответственно $\alpha$-, $\beta$-, $\gamma$- и $\delta$-преобразованиями. Преобразование с $\det q = 1$, которое имеет место при $\alpha = 0$, будем называть $\alpha 0$-преобразованием.

Теперь запишем выражения (2.2.1) в обозначениях (2.1.2):

$$\begin{aligned} T_2 + \mathrm{j}X_2 = {} & (T_1 + \mathrm{j}X_1)\exp 2(\alpha + \mathrm{j}\gamma) = e^{2\alpha}(T_1 + \mathrm{j}X_1)(\operatorname{ch}2\gamma + \mathrm{j}\operatorname{sh}2\gamma) = \\ & = e^{2\alpha}\left[(T_1\operatorname{ch}2\gamma + X_1\operatorname{sh}2\gamma) + \mathrm{j}\,(T_1\operatorname{sh}2\gamma + X_1\operatorname{ch}2\gamma)\right] \\ Y_2 + \mathrm{ij}Z_2 = {} & (Y_1 + \mathrm{ij}Z_1)\exp 2(\alpha + \mathrm{ij}\delta) = e^{2\alpha}(Y_1 + \mathrm{ij}Z_1)(\cos 2\delta + \mathrm{ij}\sin 2\delta) = \\ & = e^{2\alpha}\left[(Y_1\cos 2\delta - Z_1\sin 2\delta) + \mathrm{ij}\,(Y_1\sin 2\delta + Z_1\cos 2\delta)\right] \\ F_2 + \mathrm{i}G_2 = {} & (F_1 + \mathrm{i}G_1)\exp 2(\alpha + \mathrm{i}\beta) = e^{2\alpha}(F_1 + \mathrm{i}G_1)(\cos 2\beta + \mathrm{i}\sin 2\beta) = \\ & = e^{2\alpha}\left[(F_1\cos 2\beta - G_1\sin 2\beta) + \mathrm{i}\,(F_1\sin 2\beta + G_1\cos 2\beta)\right] \end{aligned} \qquad (2.2.3)$$

При $\alpha = 0$ отсюда следует

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1\operatorname{ch}2\gamma + X_1\operatorname{sh}2\gamma, & X_2 &= X_1\operatorname{ch}2\gamma + T_1\operatorname{sh}2\gamma \\ Y_2 &= Y_1\cos 2\delta - Z_1\sin 2\delta, & Z_2 &= Z_1\cos 2\delta + Y_1\sin 2\delta \\ F_2 &= F_1\cos 2\beta - G_1\sin 2\beta, & G_2 &= G_1\cos 2\beta + F_1\sin 2\beta \end{aligned} \qquad (2.2.4)$$

Умножив соотношения (2.2.3) на сопряжённые выражения $T_2 - \mathrm{j}X_2$, $Y_2 - \mathrm{ij}Z_2$, $F_2 - \mathrm{i}G_2$, (при $\alpha = 0$) получим

$$\left(T_2^2 - X_2^2 = T_1^2 - X_1^2\right) = \left(Y_2^2 + Z_2^2 = Y_1^2 + Z_1^2\right) = \left(F_2^2 + G_2^2 = F_1^2 + G_1^2\right) = \det q_1 \qquad (2.2.5)$$

что согласуется с ранее полученным соотношением (2.1.3). В скобках в (2.2.5) сгруппированы выражения, сохраняющиеся при преобразованиях по отдельности.

Выразим $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ через $\operatorname{th} x$, исходя из основного гиперболического тождества, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$:

$$1 - \operatorname{th}^2 x = 1/ch^2 x; \quad \operatorname{ch} x = 1\Big/\sqrt{1 - th^2 x}; \quad \operatorname{sh} x = \operatorname{th} x \operatorname{ch} x = \operatorname{th} x\Big/\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}$$

Тогда, применяя обозначения скорости (2.1.5), $\operatorname{th} 2\gamma = V_x \equiv V$, из (2.2.3) при $\alpha = 0$ получим:

$$\begin{aligned} T_2 + \mathrm{j}X_2 = {} & (T_1 + \mathrm{j}X_1)(\operatorname{ch}2\gamma + \mathrm{j}sh2\gamma) = (T_1 + \mathrm{j}X_1)(1 + \mathrm{j}V)\Big/\sqrt{1 - V^2} = \\ = {} & \left[(T_1 + X_1 V) + \mathrm{j}\,(X_1 + T_1 V)\right]\Big/\sqrt{1 - V^2} \end{aligned} \qquad (2.2.6)$$

Это бикомплексное равенство можно записать в виде двух, более наглядных действительных равенств:

$$T_2 = (T_1 + X_1 V)\Big/\sqrt{1 - V^2}, \qquad X_2 = (X_1 + T_1 V)\Big/\sqrt{1 - V^2} \qquad (2.2.7)$$

Таким образом, $B$-преобразованию $B$-вектора соответствует активное преобразование изотропного 4-вектора. При этом, $\alpha$-преобразование задаёт изменение масштаба координат векторов (в случае $\alpha = 0$, коэффициент изменения равен единице). $\delta$- и $\beta$-преобразования определяют обычные повороты 4-векторов в плоскостях $(Y, Z)$ и $(F, G)$ соответственно на углы $2\delta$ и $2\beta$, согласно (2.2.4). Тогда как $\gamma$-преобразование соответствует преобразованию Лоренца (2.2.7) для координат $(T, X)$ 4-векторов при изменении скорости вдоль оси $Ox$ на величину $V$. Все указанные преобразования — независимы.

Двоякое применение $B$-вектора (операнд и оператор) порождает двоякую интерпретацию (изотропный 4-вектор и преобразование Лоренца). Отчасти, именно сочетание этих интерпретаций и служит их взаимному обоснованию.

Таким образом, каждому $B$-вектору $(a,\ b,\ c,\ d)$ в базисе $\{1,\ \mathrm{i},\ \mathrm{j},\ \mathrm{ij}\}$ может быть сопоставлен изотропный 4-вектор, если мы будем рассматривать четвёрку чисел $(T, X, Y, Z)$ как координаты этого 4-вектора в некотором базисе $\{\mathbf{t},\ \mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z}\}$. Тем самым, базису $\{1,\ \mathrm{i},\ \mathrm{j},\ \mathrm{ij}\}$ сопоставляется базис $\{\mathbf{t},\ \mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z}\}$. Преобразуя (умножением на $q$) $B$-вектор $q_1$ в $q_2$, мы получаем преобразование 4-вектора из состояния $(T_1, X_1, Y_1, Z_1)$ в состояние $(T_2, X_2, Y_2, Z_2)$ в том же базисе $\{\mathbf{t},\ \mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z}\}$. Это преобразование является *активным*, так как связано с изменением не базиса, а самого 4-вектора.

## 2.3 Преобразование скорости

Изменения пар координат $(T, X)$, $(Y, Z)$ и $(F, G)$ зависят каждое от своего параметра — $\gamma$, $\delta$ и $\beta$. Поэтому они преобразуются независимо друг от друга. В отличие от этого, все составляющие скорости (2.1.6) зависят от параметра $\gamma$. Тем самым, при $\gamma$-преобразовании будут изменяться не только $x$-, но также $y$- и $z$-составляющие скорости. В отсутствие поворота в плоскости $(Y, Z)$, когда $\delta_2 = \delta_1$, а $\gamma_2 = \gamma_1 + \gamma$, из (2.1.5) и (2.1.6) получим:

$$V_{2x} = \operatorname{th} 2\gamma_2 = \operatorname{th} 2\left(\gamma_1 + \gamma\right) = \frac{\operatorname{th} 2\gamma_1 + \operatorname{th} 2\gamma}{1 + \operatorname{th} 2\gamma_1 \operatorname{th} 2\gamma} = \frac{V_{1x} + V}{1 + V_{1x} V} \tag{2.3.1}$$

$$V_{2y} = \frac{\cos 2\delta_2}{\operatorname{ch} 2\gamma_2} = \frac{\cos 2\delta_1 / \operatorname{ch} 2\gamma_1}{\operatorname{ch} 2\gamma (1 + \operatorname{th} 2\gamma_1 \operatorname{th} 2\gamma)} = \frac{V_{1y}\sqrt{1 - V^2}}{1 + V_{1x} V},\ V_{2z} = \frac{\sin 2\delta_2}{\operatorname{ch} 2\gamma_2} = \frac{V_{1z}\sqrt{1 - V^2}}{1 + V_{1x} V} \tag{2.3.2}$$

Эти формулы преобразования скорости совпадает с релятивистскими. Соотношения для $V_{2f}$ и $V_{2g}$ будут иметь аналогичный вид:

$$V_{2f} = \frac{\cos 2\beta_2}{\operatorname{ch} 2\gamma_2} = \frac{V_{1f}\sqrt{1 - V^2}}{1 + V_{1x} V},\ V_{2g} = \frac{\sin 2\beta_2}{\operatorname{ch} 2\gamma_2} = \frac{V_{1g}\sqrt{1 - V^2}}{1 + V_{1x} V} \tag{2.3.3}$$

Любое $\alpha 0$-преобразование соответствует в 4-пространстве изменению скорости только вдоль оси $Ox$. Однако сам 4-вектор в начальном состоянии может быть ориентирован по отношению к оси $Ox$ произвольным образом. В этом состоит, с одной стороны, специфичность, а с другой стороны — общность полученных формул.

## 2.4 Уравнения на основе квадрата $B$-вектора. Изотропные 4-тензоры

Введём обозначения для составляющих квадрата $B$-вектора (1.3.6):

$$\begin{aligned} q^2 =& (u + \mathrm{j}v)^2 = u^2 + v^2 + \mathrm{j}2uv = \exp 2(\alpha + \mathrm{i}\beta + \mathrm{j}\gamma + \mathrm{ij}\delta) = \\ =& \left(a^2 - b^2 + c^2 - d^2\right) + \mathrm{i}2\left(ab + cd\right) + \mathrm{j}2\left(ac - bd\right) + \mathrm{ij}2\left(ad + bc\right) \equiv \\ \equiv& K + \mathrm{i}L + \mathrm{j}M + \mathrm{ij}N \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Теперь мы имеем совокупность десяти переменных — (2.1.1) и (2.4.1). Всё множество этих переменных и два его основных подмножества кратко обозначим так:

$$\{T,X,Y,Z,F,G,K,L,M,N\} = \{T..N\},$$
$$\{T,X,Y,Z,F,G\} = \{T..G\},$$
$$\{F,G,K,L,M,N\} = \{F..N\},$$

а связь между переменными $\{T..G\}$ и $\{K,L,M,N\}$ найдём из соотношений:

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\quad (q\bar{q})\,(q\tilde{\bar{q}}) = q^2(\bar{q}\tilde{\bar{q}})\\
&\quad (T+\mathrm{j}X)(Y+\mathrm{ij}Z) = (K+\mathrm{i}L+\mathrm{j}M+\mathrm{ij}N)\,(F-\mathrm{i}G)\\
&\quad TY+\mathrm{i}XZ+\mathrm{j}XY+\mathrm{ij}TZ = (FK+GL)+\mathrm{i}\,(FL-GK)+\\
&\qquad\qquad +\mathrm{j}\,(FM+GN)+\mathrm{ij}(FN-GM)\\
&\text{б)}\quad (q\bar{q})\,(q\tilde{q}) = q^2(\bar{q}\tilde{q})\\
&\quad (T+\mathrm{j}X)(F+\mathrm{i}G) = (K+\mathrm{i}L+\mathrm{j}M+\mathrm{ij}N)\,(Y-\mathrm{ij}Z)\\
&\quad TF+\mathrm{i}TG+\mathrm{j}XF+\mathrm{ij}XG = (YK+ZN)+\mathrm{i}\,(YL-ZM)+\\
&\qquad\qquad +\mathrm{j}\,(YM+ZL)+\mathrm{ij}(YN-ZK)\\
&\text{в)}\quad (q\tilde{q})\,(q\tilde{\bar{q}}) = q^2(\tilde{q}\tilde{\bar{q}})\\
&\quad (Y+\mathrm{ij}Z)(F+\mathrm{i}G) = (K+\mathrm{i}L+\mathrm{j}M+\mathrm{ij}N)\,(T-\mathrm{j}X)\\
&\quad YF+\mathrm{i}YG-\mathrm{j}ZG+\mathrm{ij}ZF = (TK-XM)+\mathrm{i}\,(TL-XN)-\\
&\qquad\qquad -\mathrm{j}\,(XK-TM)+\mathrm{ij}(TN-XL)
\end{aligned}\tag{2.4.2}$$

и

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\quad (q\bar{q})^2 = q^2\bar{q}^2\\
&\quad T^2+X^2+\mathrm{j}2TX = K^2+L^2+M^2+N^2+\mathrm{j}2(KM+LN)\\
&\text{б)}\quad (q\tilde{\bar{q}})^2 = q^2\tilde{\bar{q}}^2\\
&\quad Y^2-Z^2+\mathrm{ij}2YZ = K^2+L^2-M^2-N^2+\mathrm{ij}2(KN-LM)\\
&\text{в)}\quad (q\tilde{q})^2 = q^2\tilde{q}^2\\
&\quad F^2-G^2+\mathrm{i}2FG = K^2-L^2-M^2+N^2+\mathrm{i}2(KL-MN)
\end{aligned}\tag{2.4.3}$$

Приравнивая соответствующие составляющие $B$-векторов, из уравнений (2.4.2) получим 12 действительных соотношений, а из (2.4.3) — ещё 6. Так, из (2.4.2 б) и (2.4.3 в) вытекает следующая система четырёх уравнений:

$$\begin{aligned}
&XF-YM-ZL=0\\
&XG-YN+ZK=0\\
&FG+MN-LK=0\\
&F^2+M^2+L^2-G^2-N^2-K^2=0
\end{aligned}\tag{2.4.4}$$

Учитывая, что $(X,Y,Z)=B$ — пространственный 3-вектор, введём обозначения

$$(F,-M,-L)=(\mathcal{A}_x,\mathcal{A}_y,\mathcal{A}_z)=\boldsymbol{\mathcal{A}} \quad \text{и} \quad (G,-N,K)=(\mathcal{B}_x,\mathcal{B}_y,\mathcal{B}_z)=\boldsymbol{\mathcal{B}}\tag{2.4.5}$$

и запишем уравнения (2.4.4) в обозначениях (2.4.5):

$$\begin{aligned}
&X\mathcal{A}_x+Y\mathcal{A}_y+Z\mathcal{A}_z=0\\
&X\mathcal{B}_x+Y\mathcal{B}_y+Z\mathcal{B}_z=0\\
&\mathcal{A}_x\mathcal{B}_x+\mathcal{A}_y\mathcal{B}_y+\mathcal{A}_z\mathcal{B}_z=0\\
&\left(\mathcal{A}_x^2+\mathcal{A}_y^2+\mathcal{A}_z^2\right)-\left(\mathcal{B}_x^2+\mathcal{B}_y^2+\mathcal{B}_z^2\right)=0
\end{aligned}\tag{2.4.6}$$

Первые три уравнения в (2.4.6) представляют собой скалярные произведения трёхмерных векторов. Из равенства этих произведений нулю следует, что векторы $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ взаимно ортогональны и расположены в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{R}$. Тем самым векторы $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ перпендикулярны и вектору $\mathbf{c} = (V_x, V_y, V_z)$, совпадающему согласно (2.1.7) по направлению с $\mathbf{R}$. Из четвёртого же уравнения (2.4.6) следует, что векторы $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ равны по абсолютной величине. Именно такая картина характерна для поперечной бегущей электромагнитной волны.

Из (2.4.2 а) и (2.4.3 а) находим следующую группу соотношений:

$$\begin{aligned} TX &= NL + KM = \mathcal{B}_y\mathcal{A}_z - \mathcal{B}_z\mathcal{A}_y = S_x \\ TY &= KF + GL = \mathcal{B}_z\mathcal{A}_x - \mathcal{B}_x\mathcal{A}_z = S_y \\ TZ &= NF - GM = \mathcal{B}_x\mathcal{A}_y - \mathcal{B}B_y\mathcal{A}_x = S_z \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Формулы (2.4.7) представляют аналог компонентов вектора Пойнтинга $\mathbf{S}$ и согласуются с вычислением векторного произведения $[\boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{\mathcal{A}}]$ непосредственно на основе обозначений (2.4.5). С другой стороны, как произведения координат, выражения (2.4.7) сопоставляются с соответствующими компонентами симметричного 4-тензора энергии-импульса электромагнитного поля:

$$(TX, TY, TZ) = (S_x, S_y, S_z) = \mathbf{S} = [\boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{\mathcal{A}}] \tag{2.4.8}$$

В данном случае компоненты 4-тензора являются произведениями координат одного и того же изотропного 4-вектора:

$$\begin{pmatrix} TT & TX & TY & TZ \\ XT & XX & XY & XZ \\ YT & YX & YY & YZ \\ ZT & ZX & ZY & ZZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & S_x & S_y & S_z \\ S_x & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.4.9}$$

В тензоре (2.4.9) элемент $TT = W$ соответствует плотности энергии. Прямым вычислением на основе формул (2.1.1) и (2.4.1) можно показать, что

$$\begin{aligned} W = T^2 =&F^2 + M^2 + L^2 = G^2 + N^2 + K^2 = \\ &=a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) \\ W = \mathcal{A}^2 =& \mathcal{B}^2 = (\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2)/2 \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

где учтены в итоге обозначения (2.4.5). Переменные $(W, S_x, S_y, S_z)$ пропорциональны 4-вектору $(T, X, Y, Z)$:

$$(W, \mathbf{S}) = (TT, TX, TY, TZ) = T(T, X, Y, Z) = T(T, \mathbf{R}) \tag{2.4.11}$$

Из (2.4.3 а), с учётом (2.4.10), и из (2.4.3 б) найдём

$$\begin{aligned} X^2 =&K^2 + L^2 + M^2 + N^2 - T^2 = \\ &=K^2 + L^2 + M^2 + N^2 - (F^2 + M^2 + L^2 + G^2 + N^2 + K^2)/2 \\ X^2 =&(M^2 + L^2 - F^2 + N^2 + K^2 - G^2)/2 = \\ &=(\mathcal{A}_y^2 + \mathcal{A}_z^2 - \mathcal{A}_x^2 + \mathcal{B}_y^2 + \mathcal{B}_z^2 - \mathcal{B}_x^2)/2 \\ Y^2 - Z^2 =& K^2 + L^2 - M^2 - N^2 = (\mathcal{A}_z^2 - \mathcal{A}_y^2 + \mathcal{B}_z^2 - \mathcal{B}_y^2) \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

что определяет остальные составляющие тензора (2.4.9), расположенные на главной диагонали. Смешанные компоненты тензора находим из (2.4.2 а) и (2.4.3 б):

$$\begin{aligned} XY &= FM + GN = -(\mathcal{A}_x\mathcal{A}_y + \mathcal{B}_x\mathcal{B}_y) \\ YZ &= NK - ML = -(\mathcal{A}_y\mathcal{A}_z + \mathcal{B}_y\mathcal{B}_z) \\ ZX &= LF - KG = -(\mathcal{A}_z\mathcal{A}_x + \mathcal{B}_z\mathcal{B}_x) \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

Из остальных, ещё не использованных соотношений (2.4.2) и (2.4.3) получим:

$$\begin{array}{llll} TF{=}KY{+}NZ, & \mathcal{A}_x{=}\mathcal{B}_zV_y{-}\mathcal{B}_yV_z; & TG{=}-MZ + LY, & \mathcal{B}_x{=}\mathcal{A}_yV_z{-}\mathcal{A}_zV_y \\ -TM{=}GZ{+}KX, & \mathcal{A}_y{=}\mathcal{B}_xV_z{-}\mathcal{B}_zV_x; & -TN{=}-LX - FZ, & \mathcal{B}_y{=}\mathcal{A}_zV_x{-}\mathcal{A}_xV_z \\ -TL{=}-NX - GY, & \mathcal{A}_z{=}\mathcal{B}_yV_x{-}\mathcal{B}_xV_y; & TK{=}FY{+}MX, & \mathcal{B}_z{=}\mathcal{A}_xV_y{-}\mathcal{A}_yV_x \end{array} \tag{2.4.14}$$

Здесь кроме обозначений (2.4.5) учтены обозначения скорости (2.1.5) и (2.1.6), а соотношения для переменных $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ и $V$ получены делением исходных уравнений на $T$.

Переменные (2.4.5) являются компонентами антисимметричного 4-тензора второго ранга, аналогичного тензору электромагнитного поля. Мы не будем записывать этот тензор в виде таблицы, а приведём вместо этого более полезную сводку различных форм записи самих переменных (2.4.5):

$$\begin{aligned} q\tilde{q} &= u^2 - v^2 = \exp 2(\alpha + \mathrm{i}\beta) &&= F + \mathrm{i}G = (\mathcal{A}_x + \mathrm{i}\mathcal{B}_x) \\ \bar{q}\tilde{\bar{q}} &= \bar{u}^2 - \bar{v}^2 = \exp 2(\alpha - \mathrm{i}\beta) &&= F - \mathrm{i}G = (\mathcal{A}_x - \mathrm{i}\mathcal{B}_x) \\ (q^2 + \tilde{q}^2)/2 &= u^2 + v^2 = \exp 2(\alpha + \mathrm{i}\beta)\,\mathrm{ch}\,(\gamma + \mathrm{i}\delta) &&= K + \mathrm{i}L = -\mathrm{i}(\mathcal{A}_z + \mathrm{i}\mathcal{B}_z) \\ (\bar{q}^2 + \tilde{\bar{q}}^2)/2 &= \bar{u}^2 + \bar{v}^2 = \exp 2(\alpha - \mathrm{i}\beta)\,\mathrm{ch}\,(\gamma - \mathrm{i}\delta) &&= K - \mathrm{i}L = \mathrm{i}(\mathcal{A}_z - \mathrm{i}\mathcal{B}_z) \\ \mathrm{j}(q^2 - \tilde{q}^2)/2 &= 2uv = \exp 2(\alpha + \mathrm{i}\beta)\,\mathrm{sh}\,(\gamma + \mathrm{i}\delta) &&= M + \mathrm{i}N = -(\mathcal{A}_y + \mathrm{i}\mathcal{B}_y) \\ \mathrm{j}(\bar{q}^2 - \tilde{\bar{q}}^2)/2 &= 2\bar{u}\bar{v} = \exp 2(\alpha - \mathrm{i}\beta)\,\mathrm{sh}\,(\gamma - \mathrm{i}\delta) &&= M - \mathrm{i}N = -(\mathcal{A}_y - \mathrm{i}\mathcal{B}_y) \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Из (2.4.15) следует, что переменные (2.4.5) могут быть представлены в другой известной форме — в виде комплексного вектора $\mathbf{f} = \boldsymbol{\mathcal{A}} + \mathrm{i}\boldsymbol{\mathcal{B}}$:

$$(F, -M, -L) + \mathrm{i}(G, -N, K) = (\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y, \mathcal{A}_z) + \mathrm{i}(\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y, \mathcal{B}_z) = \boldsymbol{\mathcal{A}} + \mathrm{i}\boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{2.4.16}$$

где пара $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ должна обозначать аксиальный и полярный 3-векторы. Отметим однако, что как раз полярный или аксиальный характер векторов (2.4.5) пока не установлен: в соотношения (2.4.6) они входят "симметричным" образом и выбор "безразличных" обозначений $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ (вместо обозначений электромагнитного поля $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$) призван на данном этапе, в том числе и для того, чтобы подчеркнуть эту неопределённость.

## 2.5 Соотношение преобразований квадрата $B$-вектора и 4-тензора

При $B$-преобразовании, $q_2 = q_1 q$, квадрат $B$-вектора преобразуется как $q_2^2 = q_1^2 q^2$. Выразив само преобразование $q$ в $exp$-форме, получим

$$\begin{aligned} K_2 + \mathrm{i}L_2 + \mathrm{j}M_2 + \mathrm{ij}N_2 &= (K_1 + \mathrm{i}L_1 + \mathrm{j}M_1 + \mathrm{ij}N_1) \exp 2\,(\alpha + \mathrm{i}\beta + \mathrm{j}\gamma + \mathrm{ij}\delta) = \\ &= [(K_1 + \mathrm{i}L_1) + \mathrm{j}\,(M_1 + \mathrm{i}N_1)] \exp 2(\alpha + \mathrm{i}\beta) \exp \mathrm{j}2(\gamma + \mathrm{i}\delta) = \\ &= \exp 2(\alpha + \mathrm{i}\beta)\,[(K_1 + \mathrm{i}L_1) + \mathrm{j}\,(M_1 + \mathrm{i}N_1)]\,[\mathrm{ch}\,2\,(\gamma + \mathrm{i}\delta) + \mathrm{j}sh2\,(\gamma + \mathrm{i}\delta)] = \\ &= \exp 2\,(\alpha + \mathrm{i}\beta)\{[(K_1 + \mathrm{i}L_1)\,\mathrm{ch}\,2\,(\gamma + \mathrm{i}\delta) + (M_1 + \mathrm{i}N_1)\,\mathrm{sh}\,2\,(\gamma + \mathrm{i}\delta)] + \\ &\quad + \mathrm{j}\,[(M_1 + \mathrm{i}N_1)\,\mathrm{ch}\,2\,(\gamma + \mathrm{i}\delta) + (K_1 + \mathrm{i}L_1)\,\mathrm{sh}\,2\,(\gamma + \mathrm{i}\delta)]\} \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Запишем это бикомплексное соотношение в виде двух комплексных уравнений

$$\begin{aligned} M_2 + \mathrm{i}N_2 &= \exp 2\,(\alpha + \mathrm{i}\beta)\,[(M_1 + \mathrm{i}N_1)\,\mathrm{ch}\,2\,(\gamma + \mathrm{i}\delta) + (K_1 + \mathrm{i}L_1)\,\mathrm{sh}\,2\,(\gamma + \mathrm{i}\delta)] \\ K_2 + \mathrm{i}L_2 &= \exp 2\,(\alpha + \mathrm{i}\beta)\,[(K_1 + \mathrm{i}L_1)\,\mathrm{ch}\,2\,(\gamma + \mathrm{i}\delta) + (M_1 + \mathrm{i}N_1)\,\mathrm{sh}\,2\,(\gamma + \mathrm{i}\delta)] \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Для случая $\delta$-преобразования (при $\alpha = \beta = \gamma = 0$) из (2.5.2) следует

$$\begin{aligned} M_2 + \mathrm{i}N_2 &= (M_1 + \mathrm{i}N_1)\cos 2\delta + \mathrm{i}\,(K_1 + \mathrm{i}L_1)\sin 2\delta \\ K_2 + \mathrm{i}L_2 &= (K_1 + \mathrm{i}L_1)\cos 2\delta + \mathrm{i}\,(M_1 + \mathrm{i}N_1)\sin 2\delta \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Эти уравнения представляют собой комплексное преобразование комплексных векторов $(M + \mathrm{i}N)$ и $(K + \mathrm{i}L)$ друг через друга. С другой стороны, ранее мы уже установили, что в 4-пространстве $\delta$-преобразование соответствует повороту в плоскости $(Y, Z)$, а смысл участвующих в преобразовании переменных интерпретирован в предыдущем разделе. Для того чтобы получить из (2.5.3) уравнения, описывающие поворот интересующих нас векторов, умножим обе части первого уравнения (2.5.3) на $-1$, а второго — на i. Тогда

$$\begin{aligned} -M_2 - \mathrm{i}N_2 &= (-M_1 - \mathrm{i}N_1)\cos 2\delta - (-L_1 + \mathrm{i}K_1)\sin 2\delta \\ -L_2 + \mathrm{i}K_2 &= (-L_1 + \mathrm{i}K_1)\cos 2\delta + (-M_1 - \mathrm{i}N_1)\sin 2\delta \\ \\ \mathcal{A}_{2y} + \mathrm{i}\mathcal{B}_{2y} &= (\mathcal{A}_{1y} + \mathrm{i}\mathcal{B}_{1y})\cos 2\delta - (\mathcal{A}_{1z} + \mathrm{i}\mathcal{B}_{1z})\sin 2\delta \\ \mathcal{A}_{2z} + \mathrm{i}\mathcal{B}_{2z} &= (\mathcal{A}_{1z} + \mathrm{i}\mathcal{B}_{1z})\cos 2\delta + (\mathcal{A}_{1y} + \mathrm{i}\mathcal{B}_{1y})\sin 2\delta \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Теперь полученная пара уравнений описывает обычное тригонометрическое преобразование, характеризующее поворот на угол $2\delta$, который естественно отнести к плоскости $(Y, Z)$ 4-пространства. Это преобразование является ортогональным и действительным:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2y} &= \mathcal{A}_{1y}\cos 2\delta - \mathcal{A}_{1z}\sin 2\delta, \qquad & \mathcal{B}_{2y} &= \mathcal{B}_{1y}\cos 2\delta - \mathcal{B}_{1z}\sin 2\delta \\ \mathcal{A}_{2z} &= \mathcal{A}_{1z}\cos 2\delta + \mathcal{A}_{1y}\sin 2\delta, \qquad & \mathcal{B}_{2z} &= \mathcal{B}_{1z}\cos 2\delta + \mathcal{B}_{1y}\sin 2\delta \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Координаты $F$ и $G$ от параметра $\delta$ не зависят, что подтверждает интерпретацию их направления по оси $Ox$.

В случае $\gamma$-преобразования (при $\alpha = \beta = \delta = 0$) из (2.5.2) следует:

$$\begin{aligned} M_2 + \mathrm{i}N_2 &= (M_1 + \mathrm{i}N_1)\,\mathrm{ch}\,2\gamma + (K_1 + \mathrm{i}L_1)\,\mathrm{sh}\,2\gamma \\ K_2 + \mathrm{i}L_2 &= (K_1 + \mathrm{i}L_1)\,\mathrm{ch}\,2\gamma + (M_1 + \mathrm{i}N_1)\,\mathrm{sh}\,2\gamma \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

что соответствует следующему (активному) преобразованию Лоренца:

$$\begin{aligned} M_2 + \mathrm{i}N_2 &= [M_1 + \mathrm{i}N_1 + V\,(K_1 + \mathrm{i}L_1)]\,/\sqrt{1 - V^2} \\ K_2 + \mathrm{i}L_2 &= [K_1 + \mathrm{i}L_1 + V\,(M_1 + \mathrm{i}N_1)]\,/\sqrt{1 - V^2} \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Система двух комплексных уравнений (2.5.7) может быть записана в виде системы четырёх действительных уравнений. Координаты $F$ и $G$ от параметра $\gamma$ не зависят и в результате преобразований Лоренца не изменяются. Таким образом, с учётом обозначений (2.4.5), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} F_2 &= F_1, & G_2 &= G_1, \\ -M_2 &= (-M_1 - VK_1)/\sqrt{1 - V^2}, & -N_2 &= (-M_1 - VK_1)/\sqrt{1 - V^2}, \\ -L_2 &= (-L_1 + V(-N_1))/\sqrt{1 - V^2}, & -K_2 &= (-L_1 + V(-N_1))/\sqrt{1 - V^2} \\ \\ \mathcal{A}_{2x} &= \mathcal{A}_{1x}\cos 2\beta - \mathcal{B}_{1x}\sin 2\beta, & \mathcal{B}_{2x} &= \mathcal{B}_{1x}\cos 2\beta - \mathcal{A}_{1x}\sin 2\beta, \\ \mathcal{A}_{2y} &= \mathcal{A}_{1y}\cos 2\beta - \mathcal{B}_{1y}\sin 2\beta, & \mathcal{B}_{2y} &= \mathcal{B}_{1y}\cos 2\beta - \mathcal{A}_{1y}\sin 2\beta, \\ \mathcal{A}_{2z} &= \mathcal{A}_{1z}\cos 2\beta - \mathcal{B}_{1z}\sin 2\beta, & \mathcal{B}_{2z} &= \mathcal{B}_{1z}\cos 2\beta - \mathcal{A}_{1z}\sin 2\beta, \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Уравнения (2.5.8) описывают активное преобразование Лоренца компонентов антисимметричного тензора (2.4.15) при изменении скорости вдоль оси $Ox$ на величину $V$. Как и в случае 4-вектора, преобразование этого тензора определяется активным преобразованием соответствующего $B$-вектора в $B$-пространстве.

Для случая $\beta$-преобразования (при $\alpha = \gamma = \delta = 0$) вернёмся к уравнению (2.5.1) и запишем его в следующем перегруппированном виде:

$$\begin{gathered}
(K_2 + \mathrm{j}M_2) + \mathrm{i}\,(L_2 + \mathrm{j}N_2) = [(K_1 + \mathrm{j}M_1) + \mathrm{i}\,(L_1 + \mathrm{j}N_1)]\,(\cos 2\beta + \mathrm{i}\sin 2\beta) = \\
= [(K_1 + \mathrm{j}M_1)\cos 2\beta - (L_1 + \mathrm{j}N_1)\sin 2\beta] + \mathrm{i}\,[(K_1 + \mathrm{j}M_1)\sin 2\beta + (L_1 + \mathrm{j}N_1)\cos 2\beta] \\
K_2 + \mathrm{j}M_2 = (K_1 + \mathrm{j}M_1)\cos 2\beta - (L_1 + \mathrm{j}N_1)\sin 2\beta \\
L_2 + \mathrm{j}N_2 = (K_1 + \mathrm{j}M_1)\sin 2\beta + (L_1 + \mathrm{j}N_1)\cos 2\beta
\end{gathered} \tag{2.5.9}$$

Приравняем соответствующие составляющие в уравнениях (2.5.9), $\beta$-преобразование переменных $(F, G)$ возьмём из (2.2.4) и запишем результат в обозначениях (2.4.5):

$$\begin{aligned}
F_2 &= F_1\cos 2\beta - G_1\sin 2\beta, & G_2 &= G_1\cos 2\beta + F_1\sin 2\beta,\\
-M_2 &= -M_1\cos 2\beta - (-N_1)\sin 2\beta, & -N_2 &= -N_1\cos 2\beta + (-M_1)\sin 2\beta,\\
-L_2 &= -L_1\cos 2\beta - K_1\sin 2\beta, & K_2 &= K_1\cos 2\beta + (-L_1)\sin 2\beta,\\
\mathcal{A}_{2x} &= \mathcal{A}_{1x}\cos 2\beta - \mathcal{B}_{1x}\sin 2\beta, & \mathcal{B}_{2x} &= \mathcal{B}_{1x}\cos 2\beta - \mathcal{A}_{1x}\sin 2\beta,\\
\mathcal{A}_{2y} &= \mathcal{A}_{1y}\cos 2\beta - \mathcal{B}_{1y}\sin 2\beta, & \mathcal{B}_{2y} &= \mathcal{B}_{1y}\cos 2\beta - \mathcal{A}_{1y}\sin 2\beta,\\
\mathcal{A}_{2z} &= \mathcal{A}_{1z}\cos 2\beta - \mathcal{B}_{1z}\sin 2\beta, & \mathcal{B}_{2z} &= \mathcal{B}_{1z}\cos 2\beta - \mathcal{A}_{1z}\sin 2\beta,
\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

Итак, каждому $B$-вектору $(a, b, c, d)$ в базисе $\{1, i, j, ij\}$ , кроме изотропного 4-вектора $(T, X, Y, Z)$ в базисе $\{t, x, y, z\}$, может быть сопоставлено шесть переменных ($\boldsymbol{\mathcal{AB}}$), обладающих свойствами тензора электромагнитного поля. Через параметры $\gamma$ и $\delta$, а также через скалярные произведения (2.4.4) компоненты этого тензора тоже приобретают "привязку" к базису $\{t, x, y, z\}$. Таким образом изотропному 4-вектору сопоставляется 4-тензор с характеристиками поперечной бегущей волны. Обе эти 4пространственные конструкции являются двумя разными аспектами проявления одного и того же $B$-вектора. Обе они характеризуются одной и той же скоростью $c = 1$. Именно поэтому 4тензор, соответствующий изотропному 4-вектору, мы тоже называем *изотропным.*

Ещё одна важная особенность состоит в том, что все переменные (2.4.5), в отличие от переменных $(T, X, Y, Z)$, зависят от параметра $\beta$. Этот параметр характеризует ортогональное преобразование (2.5.10) в некоторой евклидовой плоскости с базисом $\{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}$. Как следует из формул (2.1.1), плоскость $Ofg$ по алгебраическим свойствам практически не отличается от плоскости $Oyz$, хотя и не принадлежит 4-пространству $Otxyz$.

## Заключение

Сделаем несколько замечаний обобщённого характера, имеющих отношение к тематике нашей работы.

### Алгебра с делением

В настоящее время термины "алгебра с делением" и "алгебра без делителей нуля" используются как синонимы [2]. Каждая N-комплексная алгебра (при $\mathrm{N} > 1$) содержит делители нуля. При этом деление *любых* ${}^{\mathrm{N}}C$-чисел на *любые невырожденные* ${}^{\mathrm{N}}C$-числа полностью определено. С позиций N-комплексной алгебры, ноль является всего лишь одним из представителей *вырожденных* $^{\mathrm{N}}C$-чисел, а деление на него не определено и в “алгебрах с делением”. Таким образом, в $^{\mathrm{N}}C$-алгебрах отсутствует деление на вырожденные $^{\mathrm{N}}C$-числа, включая ноль, но присутствует деление на любые невырожденные $^{\mathrm{N}}C$-числа. Учитывая чёткий критерий вырожденности — равенство нулю определителя N-комплексного числа, — никаких вычислительных проблем здесь не возникает.

### Метрика $^{\mathrm{N}}C$-пространств

В разделах 1.9 и 1.11 продемонстрирована возможность наделения *одного и того же* линейного $B$-пространства как евклидовой, так и неевклидовой метрикой. В частности, *одному и тому же* $B$-вектору $q$ сопоставлены *различные* нормы: евклидова, $\|q\|$ и неевклидова, $[\![q]\!]$. Обычное комплексное число ($z = x + iy$) тоже может быть охарактеризовано и евклидовым, тригонометрическим квадратом нормы: $z\bar{z} = x^2 + y^2$, и неевклидовым, гиперболическим квадратом нормы: $\mathrm{Re}\,(z^2) = x^2 - y^2$. На собственно комплексную алгебру эти соотношения (оба являющиеся её неотъемлемой частью) никак дополнительно не влияют. Тем самым мы подчёркиваем: $n$-мерное число и соответствующая алгебра — более развитая структура, чем $n$-мерное линейное пространство и введённая в нём метрика. Таким образом, если математический аппарат физической теории удалось вывести на уровень $n$-мерной алгебры, то метрические (и тензорные) соотношения приобретают преимущественно иллюстративный характер, и вряд ли стоит закладывать их в основу построения этой физической теории.

### Размерности физического и математических пространств

. Достаточно естественно, когда та или иная 4-мерная гиперкомплексная алгебра оказывается подходящей для описания тех или иных аспектов реального пространства-времени. Учитывая опыт общей теории относительности (ОТО), можно ожидать, что четырёхмерная математика способна описать не только само 4-пространство, но и физические явления в нём (пример — гравитация). С другой стороны, именно неспособность ОТО включить в себя электродинамику и другие негравитационные взаимодействия послужила в своё время поводом для построения 5-мерных теорий (Т. Калуца (1921 г.), О. Клейн (1926 г.)). Сейчас многомерные теории — будни физики. Однако вопрос о соотношении размерностей физического и математических пространств по-прежнему актуален. Как показывает настоящая статья, соотношение между 4-мерным $B$-пространством и 4-мерным пространством-временем не столь “прямолинейно”. Координатам 4-пространства сопоставлены не сами переменные $B$-пространства, а их билинейные и квадратичные комбинации. В результате четырёхмерная $B$-алгебра порождает 10 физических переменных. Именно бикомплексные соотношения между этими переменными позволяют интерпретировать их как координаты пространственно-временного 4-вектора и как компоненты антисимметричного 4-тензора. Эти же соотношения определяют их трансформационные свойства релятивистского и электродинамического характера.

Выходя за рамки материала данной работы, заметим, что $B$-переменная, её $B$-векторная функция, производные этой функции различного порядка — математически все они будут относиться к разным $B$-пространствам. Однако, все они взаимосвязаны. Физика пространства-времени лишь отражает эти взаимосвязи. Какие-то соотношения воспринимаются как обычные координаты, какое-то — как время, другие — как компоненты электрического и магнитного полей, а третьи — как составляющие энергии-импульса и т. п. Совсем не обязательно, чтобы все такие взаимосвязи воплощались в виде *геометрических* измерений физического пространства — общепризнанных или дополнительных, явных или “свёрнутых”.

### Новые соотношения

В основном, эта работа посвящена созданию N-комплексной (главным образом, бикомплексной) алгебры и демонстрации её применимости для построения существующих релятивистских и электродинамических закономерностей. Мы полагаем, что эти цели достигнуты.

В физической части работы, кроме уже известных формул, тоже получен ряд новых соотношений. Эти соотношения *не противоречат* общепринятым понятиям. Некоторые из них позволяют по-новому взглянуть на уже известные закономерности, а другие и сами по себе оказываются достаточно неожиданными. Формальный аспект таких новых соотношений рассмотрен непосредственно в тексте статьи. А вот их подробный физический анализ мы отложим на будущее, когда, в дополнение к алгебраическим изотропным соотношениям этой работы, будут рассмотрены также дифференциальные и времениподобные закономерности. Однако, уже сейчас можно заметить, что предлагаемый новый математический язык не просто описывает, но фактически *порождает* релятивистские и электродинамические соотношения без привлечения какой-либо физической аргументации. Это указывает как на адекватность, так и на перспективность разрабатываемого нами подхода.

## Литература

[1] Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. М., Наука, 1987, 431 с.
[Перевод: Felix Klein. Elementarmathematik vom höheren Standpunkte. Aus erster Band. Arithmetik. Algebra. Analysis. Berlin, Verlag von Julius Springer, 1924.]

[2] Математический энциклопедический словарь. М., Советская энциклопедия, 1988.

[3] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973, 144 с.

[4] Медведев Б.В. Начала теоретической физики. М., Наука, 1977, 496 с.

[5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Теоретическая физика. Т. 2. М., Наука, 1973, 504 с.

[6] Olariu S. Complex numbers in n dimensions. // arXiv:math/0011044[math.CV], 2000.

[7] Rochon D., Shapiro M. On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers. // *Anal. Univ. Oradea, fasc. math.* 11, 2004, pp. 71 – 110.

[8] Dattoli G., Sabia E., M. Del Franco The pseudo-hyperbolic functions and the matrix representation of Eisenstein complex numbers. // arXiv:1003.2698[math-ph], 2010.

[9] Babusci D., Dattoli G., E. Di Palma, Sabia E. Complex-type numbers and generalizations of the Euler identity. // arXiv:1103.2321[math.CA], 2011.

[10] Смирнов А.В. Некоторые свойства скалярных кватернионов. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.*, № 1(3), 2005, с. 36 – 46.

[11] Павлов Д.Г. Гиперкомплексные числа и связанные с ними пространства. // http://hyper-complex.ru

[12] Вейль Г. Теория групп и квантовая механика. М., Наука, 1986, 495 с.
[Библиотека теоретической физики. Перевод: Hermann Weyl. The theory of groups and quantum mechanics. Dover Publications, inc., 1931]

[13] Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. М., Мир, 1987, 528 с.

[14] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Теоретическая физика, Т. 1. М., Наука, 1973, 208 с.

# N-COMPLEX ALGEBRA AND ISOTROPIC RELATIVISTIC AND ELECTRODYNAMICS EQUATIONS

**A.V. Goryunov**

*Turan-Astana University, Astana, Kazakhstan*

avgor@hotbox.ru

The version of system of hypercomplex numbers called as N-complex numbers is suggested. In this framework a new concept of bicomplex numbers is introduced and algebraic component of bicomplex calculus is thoroughly developed. The elements of algebras of tricomplex and tetracomplex numbers described briefly, as development of bicomplex concepts and notation. The relationship of elements of bicomplex space with elements of the pseudoeuclidean 4-space is investigated. It is shown that all the basic isotropic (light-like) algebraic formulas of the special theory of relativity and electrodynamics can be obtained as a direct consequence of the properties of bicomplex numbers.

**Key Words:** hypercomplex numbers, N-complex numbers, bicomplex numbers, N-complex algebra, bicomplex algebra, STR, electrodynamics.