АНАЛИТИЧЕСКИЕ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ ПОЛИЧИСЛОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Д.Г.Павлов[1], С.С. Кокарев[1,2]

[1] *НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия*

[2] *Российский научно-образовательный центр "Логос", Ярославль, Россия*

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

Статья представляет собой небольшой обзор сведений по теории дифференцируемых функций поличисловой переменной $P_n \to P_n$ и ее приложениям. На основе специальной классификации вырожденных (т.е. необратимых в обычном смысле) поличисел и теоремы об общем виде R-линейного отображения $P_n \to P_n$, определяется понятие производной функции поличисловой переменной. Голоморфные функции поличисловой переменной выделяются среди дифференцируемых функций совокупностью условий (поличисловой аналог условий Коши-Римана), которые в изотропной системе координат имеют вид: $\overset{k}{\partial} f = 0$, $(k = 1, \dots, n-1)$ где $\overset{k}{\partial} = C^k \partial$, C — сопряжение в алгебре P_n. Рассмотрены различные обобщенные классы голоморфности, $\mathcal{G}^n_{k_{\alpha_1}, k_{\alpha_2}, \dots, k_{\alpha_r}}$, которые определяются мономными дифференциальными уравнениями и классифицируются набором векторов неотрицательной целочисленной n-мерной решетки Z^n_+. Рассмотрен вопрос о голоморфном и аналитическом продолжении гладких функций $P_n \to P_n$, заданных на подмногообразии P_n. Обсуждается поличисловая версия теоремы Коши и интегральной формулы Коши вместе с многомерным обобщением первой. На основе симметричной формы Бервальда-Моора развивается симметричный аналог исчисления внешних форм Картана (симметричное умножение, звезда Ходжа и дифференциал). Рассмотрены трансформационные свойства производных скалярной поличисловой функции и геометрических объектов, которые строятся из них. В частности, рассмотрены вещественные скаляры, из которых может строится лагранжиан поличисловой теории поля. На основе алгебры опор строится конструкция соприкосновения, играющая важную роль в физической интерпретации поличисловой теории поля. Выведены формулы для коэффициентов связности Леви-Чивиты, согласованной с формой Бервальда-Моора, а также формула для формы объема для n-корневых финслеровых метрик четного порядка. Рассмотрены некоторые деформационные аспекты гладких функций поличисловой переменной и показана вложимость любой R-алгебры в пространство билинейных форм над P_n. В целом статья может рассматриваться как предварительный набросок общей теории функций поличисловой переменной (ТФПП).

Ключевые слова: поличисла, аналитические функции, голоморфные функции.

1 Введение

Развитие теории относительности и квантовой теории привнесло в физику и математику комплекс идей, сформировавшихся в достаточно мощные и продуктивные принципы построения физических теорий. Речь идет о *принципе геометризации* и *принципе алгебраизации* [1]. Принцип геометризации вошел в физику со стороны теории относительности и ее первоначальных обобщений, развиваемых для объединения гравитации и электромагнетизма в рамках единой полевой теории [2, 3]. Его дальнейшая реализация послужила основанием для калибровочной концепции введения взаимодействий, лежащей в основе современной стандартной модели и ее важнейших обобщений [4]. Принцип алгебраизации, понимаемый в широком смысле, вошел в физику XX века со стороны квантовой механики и квантовой теории поля. Алгебра операторов квантовой механики представляет собой важнейший пример физического приложения абстрактных алгебраических структур [5]. Разумеется, алгебраический и геометрический подходы к исследованию природы взаимно дополняют друг друга. Наиболее яркий пример симбиоза идей геометрии и алгебры заключается в концепции группы Ли — основном инструменте изучения и использования непрерывных симметрий [6]. Другой пример — алгебра комплексных чисел и геометрия евклидовой плоскости [7], которая индуцируется этой алгеброй посредством формы[1]

$$\eta_C = \mathrm{Re}(dz_1 \otimes d\bar{z}_2) \tag{1}$$

Последнее обстоятельство представляется чрезвычайно интересным и неслучайным. Оно наводит на мысль об универсальной и фундаментальной связи между алгеброй и геометрией. Частные примеры такой связи, если ее понимать в широком смысле, хорошо известны [8, 9], но мы хотели бы заострить внимание именно на генетической связи геометрии и алгебры, яркую иллюстрацию которой мы можем наблюдать на примере формулы (1). Замечательно, что аналог формулы (1) работает и в алгебре так называемых двойных чисел P_2 [10]:

$$\eta_{P_2} = \mathrm{Re}(dh_1 \otimes d\bar{h}_2), \tag{2}$$

где $h = x + jy$, $j^2 = +1$, $x, y \in R$. Форма (2) является метрикой Минковского 2-мерной псевдоевклидовой плоскости. Хорошо известный факт существования делителей нуля в алгебре двойных чисел (именно этот факт не позволяет рассматривать эту алгебру как числовое поле) в геометрической интерпретации приводит к существованию изотропных направлений на плоскости двойных чисел, которые, в свою очередь, тесно связаны с кинематикой и физикой световых сигналов (в их усеченной 2-мерной версии) [11, 12].

Оказывается, у алгебры двойных чисел (в отличие от алгебры комплексных чисел) есть непосредственные многомерные коммутативно-ассоциативные обобщения [13, 14]. Они называются *алгебрами поличисел* или *алгебрами n-чисел* и мы далее будем обозначать их P_n. Несмотря на формальную простоту этих алгебр — в специальном базисе они устроены как прямая сумма одномерных алгебр вещественных чисел — их надлежащее исследование позволяет утверждать, что они обладают рядом специфических, интересных и содержательных свойств, не оставляющих сомнений в реальных возможностях их физических приложений [16]. В последнее время активность публикаций по алгебре поличисел, первоначальным попыткам ее физических приложений и смежным с ней направлениям заметно возросла [15, 16, 17, 18, 19] и потому, на наш взгляд, назрела необходимость привести в некоторую систему имеющиеся в этой области сведения.

Целью настоящей статьи является обзор физически ориентированных математических результатов, имеющихся на сегодняшний день по алгебре поличисел. Основной акцент в изложении материала сделан на аналитическом и голоморфном аспекте функций поличисловой переменной и связанными с ним вопросами. Часть результатов носит уточняющий и обобщающий характер и приводится впервые. Для удобства чтения статья разбита на достаточно мелкие разделы. Общий раздел 2 содержит все необходимые базовые сведения по алгебре и геометрии поличисел. В разделе 2.1 мы приводим сводку основных определений и базовых сведений по алгебре поличисел в специальном изотропном базисе, в котором свойства этой алгебры описываются наиболее просто. В разделе 2.2 предлагается классификация вырожденных поличисел с помощью понятия индекса Ind поличисла, которая позволяет несколько расширить операцию деления в алгебре P_n. В разделе 2.3 вводится набор $n-1$ операций комплексного сопряжения, действующих на координаты

[1]Мнимая часть этой формы индуцирует вещественную симплектическую метрику на плоскости.

поличисла в изотропном базисе как группа циклических перестановок, и определяется индуцируемая ими (псевдо)норма. Раздел 2.4 посвящен чисто алгебраическому определению n-корневой финслеровой метрики Бервальда-Моора ${}^{(n)}\epsilon$ в P_n и ее различным формам представления. Алгебра симметрий этой метрики (конформных симметрий и изометрий) приведена в разделе 2.5. В разделе 2.6 перечислены некоторые важные геометрические объекты (метрическая сфера S^n_{BM}, конус $\mathrm{Con}(x)$, полиуглы), определение которых опирается на метрику Бервальда-Моора и ее свойства.

Материал статьи, объединенный в общий раздел 3, посвящен свойствам дифференцируемых функций поличисловой переменной. В разделе 3.1 мы определяем сходящиеся степенные ряды поличисловой переменной в топологии прямой суммы одномерных евклидовых метрик. Сходящиеся ряды позволяют нам сформулировать в разделе 3.2 понятие аналитической функции поличисловой переменной и сформулировать общую теорему о соответствии между аналитическими функциями сопряженных поличисловых переменных и наборами вещественных функций многих вещественных переменных. В разделе 3.3 мы даем определение сходящейся (в топологии прямой суммы) поличисловой последовательности и непрерывной функции поличисловой переменной, а также обсуждаем в общих чертах некоторые необычные черты сходимости и непрерывности по метрике Бервальда-Моора. Аналоги теорем комплексного анализа об общем виде C-линейных и R-линейных функций комплексной переменной формулируется для линейных функций поличисловой переменной в разделе 3.4. С помощью понятия индекса поличисла мы уточняем классические определения классов функций o и O в точке в разделе 3.5. На основе теорем и формулировок предыдущих разделов определение дифференцируемой функции поличисловой переменной дается в разделе 3.6. В разделе 3.7 мы даем определение голоморфной функции поличисловой переменной, у которой производная не зависит от направления (определяемого посредством финслеровых полиуглов). В разделе 3.8 предлагается обобщение понятия голоморфности, посредством наборов определяющих мономных дифференциальных операторов. Возможность голоморфного или аналитического продолжения поличисловых функций, заданных на кривых или поверхностях, обсуждается в разделе 3.9. В разделе 3.10 мы приводим формулировку и доказательство поличисловой теоремы Коши и обсуждаем ее соответствие с результатами ряда предыдущих работ.

Общий раздел 4 содержит некоторые интересные и потенциально важные для приложений геометрические аспекты голоморфных функций поличисловой переменной. В разделе 4.1 мы даем определение голоморфных и голоморфно-замкнутых форм и на их основе формулируем многомерное обобщение теоремы Коши в P_n. Отличительной особенностью формулировок является их CH_n-ковариантность, а не общая ковариантность. Раздел 4.2 содержит некоторые важные определения и формулы, касающиеся алгебры симметричных тензоров (полиад и кополиад) и симметричных аналогов внешней производной и звезды Ходжа. Трансформационные законы для голоморфных производных и их комбинаций обсуждаются в разделе 4.3. В разделе 4.4 мы строим вещественные скалярные инварианты, необходимые для формулировки принципа наименьшего действия поличисловой теории поля. Важная для физической интерпретации конструкция соприкасающихся с финслеровой метрикой Бервальда-Моора геометрических объектов излагается в разделе 4.5. Мы вводим в этом разделе алгебру опор и рассматриваем в качестве примера соприкасающиеся геометрические объекты в H_3. Вывод формулы для коэффициентов связности Леви-Чивиты, согласованной с метрикой Бервальда-Моора, в произвольных координатах приведен в разделе 4.6. Вопрос о выражении для инвариантной формы объема в пространствах с многоиндексными метриками четного ранга обсуждается в разделе 4.7.

Небольшой заключительный общий раздел статьи 5 посвящен обсуждению некоторых интересных алгебраических аспектов голоморфных функций. В разделе 5.1 обсуждается связь голоморфных функций с абстрактной теорией деформационных структур, развитой в [20], а в разделе 5.2 приводится вариант "теоремы вложения" всякой алгебры над полем вещественных чисел в пространство поличисловых билинейных форм соответствующей размерности.

Хотя материал настоящей статьи нельзя считать завершенной частью исследований в области приложений поличисел, мы надеемся, что настоящая статья будет полезной заинтересованному читателю и, во всяком случае, сэкономит его время, необходимое на поиски разрозненных журнальных публикаций, список которых (неполный) приведен в конце статьи. К основным публикациям, которые послужили фактической основой настоящей статьи, следует отнести [12, 16, 21, 22, 23].

Вычисления с поличислами и функциями от них обнаруживает неудобство общепринятого правила суммирования Эйнштейна по повторяющимся индексам, поэтому на протяжении всей статьи во избежании путаницы мы прописываем суммы или знаки суммирования явно.

2 Основные сведения по алгебре и геометрии поличисел

2.1 Алгебра и операции

Ассоциативно-коммутативная алгебра P_n над полем R (алгебра поличисел или n-чисел) обобщает на высшие измерения хорошо известную алгебру двойных чисел на плоскости [10]. Ее общий элемент имеет вид:

$$A = A^1 e_1 + \ldots A^n e_n, \tag{3}$$

где базис $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ алгебры P_n удовлетворяет соотношениям:

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_i \quad \text{(нет суммирования!)}. \tag{4}$$

Из соотношения (4) вытекают простые правила умножения и деления поличисел:

$$AB = \sum_{i=1}^{n} A^i B^i e_i, \quad \frac{A}{B} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A^i}{B^i} e_i, \tag{5}$$

при этом деление определено только на т. н. *невырожденные элементы,* у которых все $B^i \neq 0$. Роль алгебраической единицы играет элемент $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$. Базис (или точнее класс базисов), в котором таблица умножения имеет вид (4), будем называть *изотропным.*

2.2 Вырожденные элементы

Упомянутые в предыдущем пункте вырожденные элементы (т.е. такие, у которых по крайней мере одна из компонент в базисе $\{e_i\}$ равна нулю) играют важную роль в самой алгебре P_n и в ее приложениях. Они допускают следующую очевидную классификацию. Назовем *индексом* $\mathrm{Ind}(A)$ элемента $A \in P_n$ элемент P_n, компоненты которого определяются по формуле:

$$\mathrm{Ind}(A)^i = \begin{cases} 1, & A^i \neq 0; \\ 0, & A^i = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Отображение Ind задает отношение эквивалентности на P_n: два элемента A и B эквивалентны ($A \overset{\mathrm{Ind}}{\sim} B$), если $\mathrm{Ind}(A) = \mathrm{Ind}(B)$. Классы эквивалентных элементов по отношению $\overset{\mathrm{Ind}}{\sim}$ и дают классификацию вырожденных элементов. Эти классы можно отождествить с дискретным множеством $\mathcal{I}_n$ двоичных последовательностей длины n, которое представляет собой n-кратное прямое произведение $\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$. Например, класс индекса $(1, 1, \ldots, 1)$

представляет собой множество невырожденных элементов, а класс $(0, \ldots, 0)$ одноэлементен и представляет нуль. На множестве индексов определена операция произведения (она наследуется из P_n). Нетрудно проверить справедливость следующего равенства:

$$\mathrm{Ind}(AB) = \mathrm{Ind}(A) \cdot \mathrm{Ind}(B). \qquad (7)$$

Это тождество, в частности, означает, что классы эквивалентности можно перемножать.

На множестве $\mathcal{I}_n$ можно ввести частичный порядок $\leq$: для всяких $i_1, i_2 \in \mathcal{I}_n$ будем говорить, что $i_1 \leq i_2$, если $i_1 \cdot i_2 = i_1$. Очевидно также, что $(1, 1, \ldots, 1)$ — наибольший элемент в $\mathcal{I}_n$, а $(0, \ldots, 0)$ — наименьший. Очевидно, что для суммы элементов, в отличие от (7), имеет место лишь неравенство вида:

$$\mathrm{Ind}(A + B) \leq \mathrm{Ind}(\mathrm{Ind}(A) + \mathrm{Ind}(B)). \qquad (8)$$

Теперь мы можем несколько расширить данное ранее в (5) определение операции деления. Мы доопределяем операцию деления A/B для всяких элементов A и B с упорядоченными индексами $\mathrm{Ind}(A) \leq \mathrm{Ind}(B)$ так, чтобы деление некоторой компоненты на ноль всегда сопровождалось наличием нуля в этой компоненте, причем мы полагаем $0/0 \equiv 0$. При этом $\mathrm{Ind}(A/B) = \mathrm{Ind}(A)$. Например, в частности, для равных индексов $\mathrm{Ind}(A) = \mathrm{Ind}(B) = (1, 1, \ldots, 0, 0)$, где на первых k местах стоят единицы, а на последних $n - k$ — стоят нули, результат деления будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{A}{B} = \frac{A^1 e_1 + \ldots A^k e_k + 0e_{k+1} + \ldots 0e_n}{B^1 e_1 + \ldots B^k e_k + 0e_{k+1} + \ldots 0e_n} \equiv \sum_{i=1}^{k} \frac{A^i}{B^i} e_i + \sum_{j=k+1}^{n} 0e_j \in \mathrm{Ind}^{-1}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k} \ldots, 0), \quad (9)$$

т.е. по существу он определяется на k-мерной подалгебре $P_k \subset P_n$ с невырожденными в ней элементами. Аналогично определяется деление элементов и с любыми другими упорядоченными индексами.

Отметим, что сделанное нами расширение операции деления важно для корректного определения дифференцирования функций полочисловой переменной (разделы 3.5 и 3.6). Для дальнейшего использования введем еще одну более грубую характеристику вырожденности элемента алгебры A:

$$\bar{A} \equiv (\mathrm{Tr} \circ \mathrm{Ind})(A) \equiv \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ind}(A)^i, \qquad (10)$$

которую назовем *сигнатурой* элемента A. Будем называть элемент A собственно невырожденным, если $0 < \bar{A} < n$.

2.3 Сопряжения и псевдонорма

На алгебре P_n определена операция сопряжения C: $P_n \to P_n$, действующая по правилу:

$$C(A) = C(\sum_{i=1}^{n} A^i e_i) = \sum_{i=1}^{n} A^{i-1} e_i, \qquad (11)$$

где $A^0 \equiv A^n$. Ее k-ая итерация действует по формуле:

$$C^k(A) = \sum_{i=1}^{n} A^{i-k} e_i, \qquad (12)$$

где A^s с $-n \leq s \leq 0$ определяется формулой $A^s \equiv A^{n+s}$, т. е. сложение и вычитание индексов производится в арифметике по модулю n. Это правило по умолчанию будет всегда подразумеваться и далее. Для $k = n$ имеет место тождество $C^n = \mathrm{id}$. Таким образом, фактически, на алгебре P_n определена $n-1$ операция комплексного сопряжения, что обобщает ситуацию для комплексных и двойных чисел.

Определенные нами комплексные сопряжения позволяют чисто алгебраически определить *(псевдо)норму* $\|A\|$ всякого элемента $A \in P_n$:

$$\prod_{k=1}^{n} C^k(A) = \prod_{k=1}^{n} A^k \sum_{s=1}^{n} e_s \equiv \|A\|^n I_n, \tag{13}$$

где первое равенство автоматически следует из определения комплексного сопряжения и таблицы умножения в P_n, а второй знак равенства следует понимать как определение $n-$ой степени псевдонормы элемента A. Отметим, что псевдонорма $\|A\|$ может принимать положительные отрицательные, нулевые и мнимые значения. Абсолютной величиной элемента A, будем называть вещественное число, равное

$$|A| = \sqrt[n]{|\,\|A\|^n\,|}. \tag{14}$$

Очевидно, что для всякого собственно вырожденного элемента A имеют место равенства: $\|A\| = |A| = 0$, в то время как для невырожденных элементов $\|A\| \neq 0$.

2.4 Скалярное полипроизведение и метрика Бервальда-Моора

Концепция нормы, определение которой опирается на форму n-ого порядка, легко обобщается до концепции *полискалярного произведения* элементов $(A_1, \ldots, A_n)$, опирающейся на n-линейную форму вида:

$$\sum_{\sigma(i_1,\ldots,i_n)} \prod_{k=1}^{n} C^k(A_{i_k}) \equiv (A_1, \ldots, A_n) I_n, \tag{15}$$

где суммирование выполняется по всем перестановкам $\sigma(i_1, \ldots, i_n)$ различных индексов $i_1, \ldots, i_n$. Из (15) легко получается следующая более явная формула:

$$(A_1, \ldots, A_n) \equiv \mathrm{perm} \begin{pmatrix} A_1^1 & \ldots & A_n^1 \\ & \ldots & \\ A_1^n & \ldots & A_n^n \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где perm — перманент квадратной матрицы, имеющий структуру определителя, все знаки в котором полагаются плюсами.

Скалярное полипроизведение (как и перманент) может быть записано в компонентах в следующем виде:

$$(A_1, \ldots, A_n) \equiv \epsilon_{i_1 \ldots i_n} A_1^{i_1} \ldots A_n^{i_n}, \tag{17}$$

где $\epsilon_{i_1 \ldots i_n}$ — симметричный символ Леви-Чивиты[2], совокупность компонент которого следует рассматривать как метрический тензор пространства P_n, отнесенный к базису $\{e_i\}$. Линейное пространство с полилинейной метрической формой (17) называется *пространством Бервальда-Моора* (обозначается H_n), а метрика в (17) называется *n-мерной метрикой Бервальда-Моора,* которую в настоящей статье мы будем обозначать ${}^{(n)}\epsilon$. Формулы (13) и (15) обнаруживают генетическую связь пространств P_n и H_n: алгебра поличисел индуцирует метрику Бервальда-Моора подобно тому, как алгебра комплексных чисел индуцирует евклидову метрику на плоскости (формула (1)). Отметим, что пространство Бервальда-Моора H_n относится к типу n-корневых финслеровых пространств, изучаемых финслеровой геометрией [24].

[2]Он определяется аналогично стандартному антисимметричному символу Леви-Чивиты, для которого мы оставляем обозначение $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$, с заменой знаков минус на плюс.

2.5 Изометрии и конформные симметрии

Рассмотрим некоторые дифференциально-геометрические аспекты пространства H_n, координаты которого будем обозначать здесь привычным образом посредством $(x^1, \dots, x^n)$. Метрика ${}^{(n)}\epsilon$ в этих координатах в соответствии с (16)-(17) принимает следующий вид:

$$ {}^{(n)}\epsilon = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes \dots \otimes dx^n), \tag{18} $$

где $\hat{\mathcal{S}}$ — оператор симметризации (без числового множителя). Непрерывные симметрии (конформные симметрии и изометрии) метрики Бервальда-Моора описываются алгеброй Ли векторных полей X, удовлетворяющих конформным уравнениям Киллинга:

$$ L_X {}^{(n)}\epsilon = \lambda \cdot {}^{(n)}\epsilon, \tag{19} $$

где λ — некоторая скалярная функция координат. Можно показать [25], что общее решение уравнений (19) исчерпывается следующими классами векторных полей:

1. $T_{(i)} = \partial_i,\ (i = 1, \dots, n)$ (трансляции);
2. $D_{(i)} = x^{i+1}\partial_{i+1} - x^i\partial_i,\ (i = \overline{1, n-1})$ — (унимодулярные дилатации, суммирования по i нет!);
3. $C_{(F_1,\dots,F_n)} = \sum\limits_{i=1}^{n} F_i(x^i)\partial_i$, где $F_i\ (i = 1, \dots, n)$ — произвольные гладкие функции одной переменной (конформные преобразования).

Первые два класса векторных полей индуцируют группу изометрии $\mathrm{Iso}(H_n)$, которая является полупрямым произведением $T_n(H_n) \rtimes D_{n-1}(H_n)$ двух абелевых подгрупп: абелевой подгруппы трансляций $T_n(H_n)$ и абелевой подгруппы унимодулярных дилатаций $D_{n-1}(H_n)$. В конечном виде в координатах преобразования изометрии метрики Бервальда-Моора имеют следующий общий вид:

$$ T_n:\ x^i \to x^i + c^i; \quad D_{n-1}:\ x^i \to a^i x^i, \quad \prod_{i=1}^{n} a^i = 1,\ i = 1, \dots, n,\ c^i, a^i \in R. \tag{20} $$

Третий класс векторных полей индуцирует бесконечномерную неабелеву группу конформных преобразований $C(H_n)$, явный конечный вид которой в выбранном изотропном базисе определяется набором произвольных гладких функций $\{f^i\}_{i=1,\dots,n}$ одной переменной:

$$ C(H_n): x^i \to y^i = f^i(x^i) \quad i = 1, \dots, n. \tag{21} $$

При этом метрика ${}^{(n)}\epsilon$ преобразуется по закону:

$$ {}^{(n)}\epsilon = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{df^k}{dx^k} \right) {}^{(n)}\epsilon'. \tag{22} $$

Подчеркнем, что рассматриваемая нами группа $C(H_n)$ является весьма специальной подгруппой группы диффеоморфизмов, поэтому конформное преобразование вида (22) не приводит к появлению нетривиальной кривизны метрики Бервальда-Моора.

2.6 Некоторые метрические объекты в H_n

Как показано выше, группа изометрии $\mathrm{Iso}(H_n)$ содержит полную подгруппу трансляций T_n. Это означает, что выбранная нами изотропная система координат допускает класс аффинно-эквивалентных ей систем координат (т.е. связанных с исходной невырожденным аффинным преобразованием), в котором компоненты метрики Бервальда-Моора остаются постоянными. Другими словами, мы можем работать в H_n с глобальными аффинными конструкциями (типа радиус-векторов, моментов различного порядка и т.д.), оставаясь в классе аффинно-эквивалентных систем координат (в котором, конечно, отнюдь не все представители будут являться изотропными системами). В силу возможности глобального отождествления касательного пространства T_xH_n с самим H_n в любой точке x, полискалярное произведение тривиально переносится с дифференциально-геометрических (касательных) векторов в H_n на аффинные векторы.

2.6.1 Сфера S^{n-1}_{BM}

Рассмотрим уравнение метрической единичной сферы S^{n-1}_{BM} в пространстве БМ:

$$|^{(n)}\epsilon(x,\ldots,x)| = 1, \tag{23}$$

где $x = (x^1,\ldots,x^n)$ понимается как аффинный вектор в пространстве H_n в изотропной системе координат с фиксированным началом. Определенная таким образом метрическая сфера имеет 2^n связных некомпактных компонент S^{n-1}_α:

$$S^{n-1}_{BM} = \bigsqcup_{\alpha=1}^{2^n} S^{n-1}_\alpha. \tag{24}$$

Эти компоненты можно классифицировать элементами P_n вида $\{\mathsf{T}_\alpha{=}(\pm1,\ldots,\pm1)\}_{\alpha=1,\ldots 2^n}$, каждый из которых принадлежит ровно одной из связных компонент сферы. В соответствии с этой классификацией, компоненты можно разделить на четные или нечетные, в зависимости от количества отрицательных компонент в классификаторе T_α. Компоненту S^{n-1}_{BM}, соответствующую элементу $\mathsf{T}_1 \equiv (1,\ldots,1)$, будем называть положительной[3]. По своим геометрическим свойствам сфера S^{n-1}_{BM} весьма близка к плоскому $n-1$-мерному пространству: в S^{n-1}_{BM}, например, через любую точку, не лежащую на данной экстремали длины (т.е. на гладкой кривой, доставляющей экстремум функционалу длины на S^{n-1}_{BM}, индуцированному вложением $S^{n-1}_{BM} \to H_n$) можно провести единственную экстремаль, не пересекающуюся с первой [22]. Отметим здесь еще одну важную аналогию сферы S^{n-1}_{BM} с евклидовой сферой: точки, лежащие на четных компонентах сферы S^{n-1}_{BM}, рассматриваемые как элементы алгебры P_n, изображают подгруппу D_{n-1} (по умножению) группы изометрий $\mathrm{Iso}(H_n)$.

2.6.2 Конус Con(x)

Назовем *конусом* $\mathrm{Con}(x_0)$ точки $x_0 \in H_n$ множество точек в H_n, удовлетворяющих уравнению:

$$|x - x_0| = 0. \tag{25}$$

Очевидно, конусы всех точек изоморфны и этот изоморфизм устанавливается символической формулой:

$$\mathrm{Con}(x_1) = \mathrm{Con}(x_0) + \overrightarrow{x_1 - x_0}.$$

Элементы $x \in \mathrm{Con}(x_0)$, если их интерпретировать как элементы алгебры P_n, представляют собой в точности все те элементы, для которых $x - x_0$ не имеет обратного по умножению.

[3]Также будем называть положительной часть P_n, содержащую все те элементы A, у которых $A^i > 0$ для всех $i = 1,\ldots,n$.

2.6.3 Экспоненциальные углы и $\Omega^k P_n$-пространства

Непосредственной проверкой с помощью (5) легко убедиться в справедливости следующего представления любого невырожденного поличисла[4] $A \in P_n$:

$$A = \sum_{s=1}^{n} A^s e_s = \mathsf{T}(A)|A|e^{\chi}, \tag{26}$$

где $\mathsf{T}(A) \equiv \mathsf{T}_{\alpha(A)}$ — классификатор той компоненты S^{n-1}_{BM}, которую пересекает луч λA, $R \ni \lambda > 0$,

$$\chi \equiv \sum_{s=1}^{n} \chi^s_A e_s \tag{27}$$

— полиугол A (т.е. угловая переменная, являющаяся по своей алгебраической природе поличислом того же типа, что и A),

$$\chi^s_A \equiv \ln \frac{\overset{\frown}{A}{}^s}{|\overset{\frown}{A}|} \tag{28}$$

т.н. *экспоненциальные углы элемента A*,

$$\overset{\frown}{A} \equiv \frac{A}{\mathsf{T}_{\alpha(A)}} \tag{29}$$

приведенный (к положительной компоненте S^{n-1}_{BM}) элемент A, у которого все компоненты в изотропном базисе положительны. По самому своему определению экспоненциальные углы удовлетворяют тождеству:

$$\mathrm{Tr}(\chi) \equiv \sum_{s=1}^{n} \chi^s = 0, \tag{30}$$

что, в свою очередь, обеспечивает тождество

$$|e^{\chi}| = 1, \tag{31}$$

аналогичное по смыслу условию единичности модуля комплексных чисел, лежащих на единичной окружности в комплексной плоскости. Можно показать, что величина

$$|\chi_A| = |\chi^1_A \cdots \chi^n_A|^{1/n} \tag{32}$$

имеет смысл аналога евклидова угла[5] между элементами(-векторами) A и $\mathsf{T}(A)$. Она называется *взаимным углом* между ними. Взаимный угол между невырожденными элементами $A \in P_n$ и $B \in P_n$ при $\mathsf{T}(A) = \mathsf{T}(B)$ определяется по формуле:

$$\phi(A, B) \equiv |\chi_{B/A}|. \tag{33}$$

Переход от элементов P_n к их полиуглам по формуле (28) можно понимать как некоторое отображение: $\flat: \ P_n \to P_n$. Наглядно образ $\flat(P_n) \equiv \Omega P_n$ изображается в пространстве P_n в виде гиперплоскости, ортогональной (в евклидовом смысле) пространственной

[4]Здесь мы несколько забегаем вперед, используя понятие экспоненты от поличисла. Достаточно бегло просмотреть раздел 3.1, в котором обсуждаются степенные ряды поличисловой переменной и аналитические функции от нее.

[5]Он обладает свойством аддитивности и может быть определен как длина экстремали на единичной сфере S^{n-1}_{BM}, соединяющий точку $\mathsf{T}(A)$ и $e^{\chi(A)}$ на ней [22].

биссектриссе (понимаемой также в евклидовом смысле) положительной компоненты P_n, проходящей через нулевой элемент алгебры P_n. Отображение $\flat$, которое мы называем $\flat$-проекцией (бипроекцией), представляет собой нелинейное отображение линейных пространств и допускает последующие итерации:

$$P_n \xrightarrow{\flat} \Omega P_n \xrightarrow{\flat} \Omega^2 P_n \cdots \xrightarrow{\flat} \Omega^k P_n \xrightarrow{\flat} \dots \tag{34}$$

Каждый шаг итерации проективизирует прообраз и понижает размерность образа (как подмногообразия P_n) на единицу. Таким образом, размерность многообразия полиуглов $\Omega^k P_n$ равна $n-k$, и всего существует лишь $n-1$ независимых взаимных углов $\chi_A^{(k)}$. Эта последовательность независимых взаимных углов позволяет записать лестничное экспоненциальное представление поличисла [22].

Приведем без доказательства следующую очевидную формулу:

$$C^k A = \mathsf{T}(C^k A)|A|e^{C^k\chi}, \tag{35}$$

устанавливающую правило комплексного сопряжения поличисел в экспоненциальном представлении.

3 Аналитические и голоморфные функции поличисловой переменной

3.1 Степени и сходящиеся ряды

Правило (5) умножения поличисел в изотропном базисе позволяет определить любую целочисленную степень поличисла $A \in P_n$:

$$A^n = (A^1)^n e_1 + \dots + (A^n)^n e_n. \tag{36}$$

Формула (36) годится и для отрицательных значений n в случае, когда A невырождено. Эта формула позволяет легко определить формальные степенные поличисловые ряды вида:

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \equiv \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} c_{ks}(x^s)^k e_s, \tag{37}$$

где $P_n \ni c_k = \sum\limits_{s=1}^{n} c_{ks}e_s$, $P_n \ni x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$. Равенство в (37), вытекающее из (36), означает, что степенной ряд поличисловой переменой в изотропном базисе распадается на сумму n независимых рядов вещественной переменной. Естественно назвать ряд $R(x)$ сходящимся, если и только если каждый из вещественных рядов в правой части (37) сходится в обычном смысле. Аналогично можно ввести определения абсолютно и условно сходящихся рядов $R(x)$ (если абсолютно сходятся вещественные ряды и условно сходится хотя бы один из вещественных рядов). По сути дела, речь идет о сходимости рядов поличисловой переменной в прямоугольной метрической топологии R^n, в которой открытые ε-шары в окрестности некоторой точки $x_0 \in R^n$ задаются неравенством $\sum\limits_{k=1}^{n} |x - x_0| < \varepsilon$.

3.2 Аналитические функции поличисловой переменной

Возможность определения степенных рядов позволяет определить класс аналитических функций поличисловой переменной $C^\omega(P_n)$ как совокупность отображений $P_n \to P_n$, представимых в виде сходящихся поличисловых степенных рядов вида (37) (с произвольным центром разложения). Это определение допускает обобщение на отрицательные степени (поличисловые ряды Лорана) вне конуса центра разложения в ряд.

Пусть имеется некоторая аналитическая функция вещественной переменной $f: R \to R$, которая определяется своим разложением в ряд с некоторым центром разложения ξ_0:

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\xi - \xi_0)^k, \tag{38}$$

где коэффициенты c_k вещественны. Элементарно проверяется, что ее аналитическое продолжение на P_n всегда существует, единственно и определяется формулой:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - \xi_0 I_n)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} c_k (x^s - \xi_0)^k e_s = \sum_{i=1}^{n} f(x^i) e_i. \tag{39}$$

С учетом (37) аналогично имеем взаимно-однозначное соответствие между наборами $\{f_s\}_{s=1,\dots,n}$ аналитических функций вещественной переменной и аналитическими функциями одной поличисловой переменной, которое устанавливается формулой, обобщающей (39) и вытекающей из (37):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \equiv \sum_{s=1}^{n} f_s(x^s) e_s, \tag{40}$$

где

$$c_k = \sum_{s=1}^{n} c_{ks} e_s \quad \text{и} \quad f_s(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{ks} \xi^k,$$

$c_k \in P_n$, $c_{ks} \in R$. Дальнейшее обобщение (40) выражает следующая

Теорема 1. *Имеет место биективное соответствие между наборами $\{f_s\}_{s=1,\dots,n}$ n вещественных аналитических функций от k вещественных переменных $R^k \to R$ и аналитическими функциями $P_n \to P_n$ от k поличисловых переменных вида:*

$$\overset{l_1}{P_n} \times \overset{l_2}{P_n} \times \cdots \times \overset{l_k}{P_n} \to P_n$$

где

$$\overset{l_q}{P_n} \equiv C^{l_q}(P_n)$$

и все l_q для $q = 1, \dots, k$ попарно различны.

Доказательство. Достаточно провести доказательство для одной из выборок $\{l_q\}$ (доказательство для других выборок сводится к простой перенумерации переменных). Пусть $l_q = q - 1$ для $q = 1, \dots k$ Другими словами, рассмотрим аналитическую функцию f от k поличисловых переменных вида:

$$(x, \overset{1}{x}, \dots, \overset{k-1}{x}) \mapsto f(x, \overset{1}{x}, \dots, \overset{k-1}{x}) \in P_n, \text{ где } \overset{s}{x} \equiv C^s x. \tag{41}$$

В силу аналитичности f имеем представление этой функции через сходящийся (покомпонентно) степенной ряд с некоторым центром разложения $x_0 \in P_n$:

$$f(x, \overset{1}{x}, \dots, \overset{k-1}{x}) = \sum_{m_0,\dots,m_{k-1}=0}^{\infty} C_{m_0 \dots m_{k-1}} (x - x_0)^{m_0} (\overset{1}{x} - \overset{1}{x}_0)^{m_1} \cdots (\overset{k-1}{x} - \overset{k-1}{x}_0)^{m_{k-1}} \tag{42}$$

С учетом формулы (12) после перехода к разложениям по изотропному базису каждого сомножителя под знаком суммы в (42), получим:

$$f(x, \overset{1}{x}, \ldots, \overset{k-1}{x}) =$$

$$\sum_{m_0,\ldots,m_{k-1}=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} c_{m_0\ldots m_{k-1}s}(x^s - x_0^s)^{m_0}(x^{s-1} - x_0^{s-1})^{m_1} \cdots (x^{s-k+1} - x_0^{s-k+1})^{m_{k-1}} e_s$$

$$\sum_{s=1}^{n} f_s(x^s, x^{s-1}, \ldots, x^{s-k+1}) e_s, \qquad (43)$$

где мы обозначили

$$f_s(x^s, x^{s-1}, \ldots, x^{s-k+1}) \equiv$$

$$\sum_{m_0,\ldots,m_{k-1}=0}^{\infty} c_{m_0\ldots m_{k-1}s}(x^s - x_0^s)^{m_0}(x^{s-1} - x_0^{s-1})^{m_1} \cdots (x^{s-k+1} - x_0^{s-k+1})^{m_{k-1}} \qquad (44)$$

и $C_{m_0\ldots m_{k-1}} = \sum\limits_{s=0}^{n} c_{m_0\ldots m_{k-1}s} e_s$, $c_{m_0\ldots m_{k-1}s} \in R$. Набор функции $\{f_s\}_{s=1,\ldots,n}$, определяемый по (43) и есть искомый набор аналитических функций от k вещественных переменных. Проводя рассуждению в обратную сторону, можно по любому такому набору восстановить аналитическую функцию k n-числовых переменных.$\square$

Рассмотренные нами ситуации являются обобщением на n измерений ситуаций на двойной плоскости[6], которые, в свою очередь, являются алгебраическими аналогами аналитических, антианалитических и обобщенно-аналитических функций комплексной переменной [7].

3.3 Пределы и непрерывность

В основе анализа лежат операции предельного перехода. Перейдем к рассмотрению соответствующих конструкций в P_n. Назовем бесконечную поличисловую последовательность $\{x_q\}$: $\mathbb{N} \to P_n$ сходящейся, если соответствующие покомпонентные последовательности $\{x_q^s\}_{s=1,\ldots,n}$ сходятся в смысле обычного анализа. Можно выделить особо *равномерно* (по компонентам) сходящиеся поличисловые последовательности $\{x^n\}$, если двойная последовательность $\{x_n^s\}$ как отображение $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}_n \to R$ сходится равномерно по множеству $\mathbb{Z}_n$ в обычном смысле.

Данные нами определения сходимости никак не связаны с той геометрической структурой (метрикой Бервальда-Моора), которую индуцирует алгебра P_n и по сути, как уже отмечалось выше, индуцируются евклидовой метрикой в R_n (или, точнее, прямой суммой одномерных евклидовых метрик). Поэтому дадим еще одно определение сходимости: поличисло a называется *условным пределом* бесконечной поличисловой последовательности $\{x_q\}$, (мы будем обозначать этот факт в записи так: $\{x_q\} \rightsquigarrow a$, в отличие от записи традиционной сходимости: $\{x_q\} \to a$) если

$$\lim_{q\to\infty} |a - x_q|_{BM} = 0, \qquad (45)$$

где $|\bullet|_{BM}$ — норма в метрике Бервальда-Моора. Понятие условного предела обобщает понятие обычного, в том смысле, что любой классический предел является и условным,

[6] Их три: аналитические функции (раскладываются по положительным степеням h), антианалитические функции (раскладываются по положительным степеням $\bar{h}$) и обобщенно-аналитические функции (раскладываются по положительным степеням h и $\bar{h}$).

в то время как не всякий условный предел является классическим. Рассмотрим, к примеру, семейство поличисловых последовательностей $\{x_q^s\}_{s=1,\ldots,n}$, в котором последовательность $\{x_q^1\}$ сходится к нулю, а остальные последовательности ограничены (и не обязательно сходящиеся). В этом случае любой вырожденный элемент с индексом $(0, 1, 1, \ldots, 1)$ в соответствии с (45) является условным пределом поличисловой последовательности $\{x_q = \sum\limits_{s=1}^{n} x_q^s e_s\}$. Все такие условные пределы образуют гиперплоскость $x^1 = 0$ в классе изотропных базисов. Таким образом, отсутствие положительной определенности нормы, индуцируемой метрикой Бервальда-Моора, приводит к ряду необычных свойств условного предела. Например, возможна ситуация, когда все покомпонентные последовательности $\{x_q^s\}_{s=1,\ldots,n}$ расходятся, но поличисловая последовательность $\{x_q\}$ условно сходится. Рассмотрим семейство последовательностей $\{x_q^s = (-1)^{q+s}\}$. Условный предел поличисловой последовательности $\{x_q = \sum\limits_{s=1}^{n} x_q^s e_s\}$ совпадает с множеством вершин n-мерного куба $[-1;+1]^{\times n} = Q^n \subset P_n$ за исключением пары: вершины $(+1, -1, +1, -1 \ldots, +1, -1)$ и противоположной ей. Также, в общем случае не выполняются привычные правила обращения с пределами. К примеру, если $\{x_q\} \rightsquigarrow a$ и $\{y_q\} \rightsquigarrow b$, то последовательность $\{x_q + y_q\}$ может не иметь в качестве своего условного предела поличисло $a + b$.

Можно сказать, что понятие условного предела, связанное с метрикой Бервальда-Моора, обнаруживает неполноту пространства P_n, понимаемого как множества точек — условный предел последовательности элементов-точек P_n может не быть точкой. В классическом анализе и топологии пределом последовательности точек топологического пространства (в том случае если он существует), является точка — элемент той же природы (т.е. не имеющий собственных подмножеств). Если теперь перейти от исходного множества (в нашем случае P_n) к множеству 2^{P_n} всех его подмножеств, то мы имеем обычную ситуацию: некоторые (сходящиеся) последовательности специальных (одноточечных подмножеств) элементов множества 2^{P_n} сходятся к элементам того же множества 2^{P_n} (подмножествам). Другими словами, для корректного согласования свойств метрики Бервальда-Моора и топологии естественно топологизировать не исходное пространство P_n, а 2^{P_n}. При этом открытыми подмножествами 2^{P_n} будут специальные семейства подмножеств в 2^{P_n}. Мы ограничим обсуждение вопроса о метрической топологии Бервальда-Моора пространств H_n здесь лишь этими общими комментариями.

Назовем поличисло $A \in P_n$ пределом функции $f\colon P_n \to P_n$ в точке x_0, если его вещественные компоненты A^i являются пределами соответствующих компонент функции f^i в обычном смысле. Аналогично, назовем функцию $f\colon P_n \to P_n$ непрерывной в точке $x_0 \in P_n$, если в этой точке непрерывны в обычном смысле ее вещественные компоненты. Эквивалентное условие непрерывности:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{46}$$

Снова отметим, что пределы и непрерывность функций поличисловой переменной, формулировка которых опиралась бы на норму, ассоциируемую с метрикой Бервальда-Моора, будут обладать очень странными свойствами. Рассмотрим функцию поличисловой переменной, задаваемую формулой:

$$\mathcal{D}(x) = \sum_{s=1}^{n} ((1 - (-1)^s) D(x^s) + (1 - D(x^s))(1 - (-1)^{s+1}))e_s, \tag{47}$$

где D — стандартная функция Дирихле от вещественной переменной. Несмотря на то, что ни одна из компонент функции $\mathcal{D}(x)$ не имеет предела ни в одной точке, функция

$\mathcal{D}(x)$ имеет (условный) предел по метрике Бервальда-Моора в любой точке, поскольку, к примеру

$$\lim_{x \to x_0} |\mathcal{D}(x) - 0|_{BM} = 0.$$

Далее, несмотря на разрывность всех компонент функции $\mathcal{D}(x)$, эта функция "непрерывна" в "метрической топологии" , ассоциированной с метрикой Бервальда-Моора. Кавычки подчеркивают тот факт, что (псевдо)норма Бервальда-Моора не порождает никакой топологии в классическом смысле этого слова.

3.4 R-линейные и P_n-линейные отображения

Назовем отображение ℓ: $P_n \to P_n$ R-линейным (P_n-линейным), если

$$\ell(\lambda x + \mu y) = \lambda \ell(x) + \mu \ell(y) \tag{48}$$

для всяких $x, y \in P_n$ и всяких $\lambda, \mu \in R$ (всяких $\lambda, \mu \in P_n$.) Очевидно, что свойство P_n-линейности является более сильным, чем свойство R-линейности, поэтому класс P_n-линейных отображений является подмножеством (подпространством) R-линейных отображений. Общий вид R-линейных и P_n-линейных отображений устанавливает следующая

Теорема 2. *1) Общий вид R-линейного отображения ℓ: $P_n \to P_n$ имеет следующее представление:*

$$\ell(x) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \overset{s}{x}, \tag{49}$$

где $\alpha_s \in P_n$.
2) Общий вид P_n-линейных отображений имеет представление (49) с $\alpha_s = 0$ для всех $s = 1, \ldots, n-1$ и произвольным $\alpha_n \in P_n$.

Доказательство. 1) В силу R-линейности с одной стороны:

$$\ell(x) = \ell(\sum_{s=1}^{n} x^i e_i) = \sum_{s=1}^{n} x^i \ell(e_i) = \sum_{s,k=1}^{n} x^i \omega_i^k e_k, \tag{50}$$

где мы ввели обозначение ω_i^k для вещественных коэффициентов разложения поличисел $\ell(e_i)$ по изотропному базису: $\ell(e_i) = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_i^k e_k$. С другой стороны, для любого набора поличисловых величин $\{\alpha_s\}_{s=1,\ldots,n}$ мы будем иметь:

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_s \overset{s}{x} = \sum_{s,q=1}^{n} (\alpha_s^q e_q) \sum_{r,l=1}^{n} (\sigma_l^{sr} x^l e_r) \sum_{s,r,l=1}^{n} \alpha_s^r \sigma_l^{sr} x^l e_r, \tag{51}$$

где α_s^q — вещественные коэффициенты разложения α_s по изотропному базису, σ_l^{sr} — матрица s-ого сопряжения (сопряжение — R-линейная операция и ее действие на координаты поличисла в изотропном базисе определяется набором матриц циклических перестановок), а последнее звено равенства (51) было получено с учетом таблицы умножения (4) элементов изотропного базиса. Приравнивая коэффициенты в (50) и (51) при произвольной комбинации $x^l e_r$ мы получаем после надлежащих переобозначений индексов суммирования:

$$\omega_l^r = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s^r \sigma_l^{sr} \quad \text{(по } r \text{ нет суммирования!).} \tag{52}$$

Остается показать, что система матричных уравнений (52) разрешима относительно α_s^r. В этом случае, коэффициенты α_s^r будут однозначно выражаться через заданные самим

R-линейным отображением коэффициенты ω_l^r. Система (52) будет разрешима, если любое сечение пространственной кубической матрицы σ по второму верхнему индексу (т.е. квадратная матрица, составленная из элементов σ_l^{sr} при любом фиксированном r) будет обратимо в смысле обычном для квадратных матриц. Для выяснения вопроса об обратимости этих матриц заметим, что компоненты пространственной матрицы σ_l^{sr} задаются следующей общей формулой:

$$\sigma_l^{sr} = \delta_l^{r-s}, \tag{53}$$

при этом вычитание верхних индексов понимается по модулю n (т.е. $r-s = n+(r-s)$ при $r-s<0$). Формула (53) утверждает, что матрицы комплексных сопряжений C^s получаются из единичной матрицы последовательными циклическими перестановками ее строк (следовательно, они все невырожденны). Но любая квадратная матрица с компонентами σ_l^{sr} при фиксированном r имеет аналогичную структуру (верхний индекс δ-символа в (53) последовательно пробегает те же значения), следовательно матрицы сечения кубической матрицы в (53) при фиксированном s и фиксированном r — это один и тот же набор матриц, в котором сечения отличаются лишь порядком расположения. Стало быть интересующие нас сечения невырожденны, каждое из них обратимо, а система (52) однозначно разрешима.

2) Расписывая условие P_n-линейности для общего представления (49), получим с одной стороны для $\ell(\beta x)$:

$$\ell(\beta x) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \overset{s}{\beta}\overset{s}{x} = \sum_{s,k=0}^{n} (\alpha_s^k e_k) \sum_{r,q=1}^{n} (\sigma_r^{sq} \beta^r e_q) \sum_{l,p=1}^{n} (\sigma_l^{sp} x^l e_p)$$

$$\sum_{s,k,l,r=1}^{n} \alpha_s^k \sigma_r^{sk} \sigma_l^{sk} \beta^r x^l e_k. \tag{54}$$

С другой стороны

$$\beta\ell(x) = \sum_{r=1}^{n} \beta^r e_r \sum_{s,k=1}^{n} \alpha_s^k e_k \sum_{p,l=1}^{n} \sigma_p^{sl} x^p e_l \sum_{s,k,p=1}^{n} \alpha_s^k \beta^k \sigma_p^{sk} x^p e_k. \tag{55}$$

В силу произвольности β и x должны быть равны коэффициенты при одинаковых комбинациях $\beta^r x^p e_k$ в (54) и (55), откуда после надлежащего переобозначения индексов суммирования получается система ограничений на α_s^k следующего вида:

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_s^k \sigma_r^{sk} \sigma_l^{sk} = \sum_{s=1}^{n} \delta_r^k \alpha_s^k \sigma_l^{sk}. \tag{56}$$

Для случая $k=r$ равенство (56) принимает более простой вид:

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_s^r \sigma_r^{sr} \sigma_l^{sr} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s^r \sigma_l^{sr} \tag{57}$$

С учетом (53) соотношению (57) можно придать следующий вид:

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_s^r \delta_r^{r-s} \delta_l^{r-s} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s^r \delta_l^{r-s}. \tag{58}$$

В силу невырожденности матрицы-сечения δ_l^{r-s} при фиксированном r (см. обсуждение в предыдущем пункте доказательства), на компоненты δ_l^{r-s} можно "сократить" справа и слева в (58). В результате получим равенство без суммирования:

$$\alpha_s^r \delta_r^{r-s} = \alpha_s^r. \tag{59}$$

При $s = 0 \mod n$ соотношение (59) дает тождество $\alpha_0^r = \alpha_0^r$, а при $s \neq 0 \mod n$ оно выполняется только при $\alpha_s^k = 0$, $s = 1, 2, \ldots, n-1$. При $k \neq r$ мы получим из (56)

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_s^k \sigma_r^{sk} \sigma_l^{sk} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s^k \delta_r^{k-s} \delta_l^{k-s} = 0.$$

При $r \neq l$ дельта-символы в последней сумме отличны от нуля при разных s и мы получим тождество. При $r = l$ мы получим сумму с квадратом дельта-символа, которая равна сумме с первой степенью дельта-символа ($(\delta_s^k)^2 = \delta_s^k$), которая при условии $k \neq r$ и с учетом того, что $\alpha_s^k = 0$ при $s \neq 0 \mod n$, обращается в нуль тождественно. □

3.5 Классы o и O

Здесь и далее под ε-окрестностью точки x_0 будем понимать евклидов куб $Q_\varepsilon^n(x_0)$ с центром в точке x_0 и ребрами длины 2ε, параллельными координатным осям некоторой изотропной системы координат. Назовем индексом функции $f\colon P_n \to P_n$ в точке x поличисло $\mathrm{Ind}(f(x))$. Рассмотрим множество $\mathcal{C}_{(a,\varepsilon)}(P_n)$ функций $P_n \to P_n$ которые непрерывны (в топологии прямой суммы евклидовых метрик) в $Q_\varepsilon^n(a)$ и каждая из которых имеет постоянный индекс в $Q_\varepsilon^n(a)\backslash\{a\}$. Для пары функций f и g из $\mathcal{C}_{(a,\varepsilon)}(P_n)$ с упорядоченными индексами в $Q_\varepsilon^n(a)\backslash\{a\}$ (т.е. при условии $\mathrm{Ind}(f(x)) \leq \mathrm{Ind}(g(x))$ при $x \in Q_\varepsilon^n(a) \setminus \{a\}$), будем говорить, что $f = o(g)$ в точке a, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{60}$$

Если у пары функций f и g из $\mathcal{C}_{(a,\varepsilon)}(P_n)$ индексы совпадают на всей окрестности $Q_\varepsilon^n(a)$ и предел в (60) существует и отличен от нуля, то будем говорить, что $f = O(g)$ (или эквивалентно $g = O(f)$) в точке a. Очевидно, что отношения o и O между поличисловыми функциями в некоторой точке при условии упорядоченности значений индексов эквивалентны стандартным отношениям o и O между отличными в $Q_\varepsilon^n(a)\backslash\{a\}$ от тождественного нуля компонентами f и g.

3.6 Дифференцируемые функции

Назовем функцию $f\colon P_n \to P_n$ дифференцируемой в точке $x_0 \in P_n$, если ее приращение в этой точке представимо в виде:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = L(x_0, \Delta x) + B(x_0, \Delta x), \tag{61}$$

где $L(x_0, \Delta x)$ — R-линейная поличисловая функция относительно переменной Δx и непрерывная по x_0, а $B(x_0, \Delta x)$ — функция, находящаяся в отношении *"поли–о-малое"* с Δx, т.е. представимая в виде:

$$B(x_0, \Delta x) = \sum_{s=1}^{n} \beta_s(x_0) o(\Delta \overset{s}{x}), \tag{62}$$

где $\beta_s(x_0)$ — некоторые непрерывные поличисловые функции от переменной x_0. Функцию L мы, как обычно, называем дифференциалом функции f в точке x_0 на приращении Δx и обозначаем $df(x_0, \Delta x)$. Согласно утверждения теоремы 2, дифференциал представим в следующем виде:

$$df(x_0, \Delta x) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m(x_0) \Delta \overset{m}{x}\ . \tag{63}$$

Подставляя (62)-(63) в (61), получим с учетом (12) для компонент (61) следующее представление:

$$f^s(x_0^1+\Delta x_0^1,\dots)-f^s(x_0^1,\dots)=\sum_{m=1}^{n}(\alpha_{ms}\Delta x^{s-m}+\beta_{ms}o_s(\Delta \overset{m}{x})), \tag{64}$$

где по определениям (62) и (12) компоненты $o_s(\Delta \overset{m}{x})$ функций $o(\Delta \overset{m}{x})$ удовлетворяют равенствам:

$$\lim_{\Delta x^{s-m}\to 0}\frac{o_s(\Delta \overset{m}{x})}{\Delta x^{s-m}}=0. \tag{65}$$

Последовательно переходя к пределам при приращениях по одной из координат, получаем в качестве следствия условия дифференцируемости (61) существование всех частных производных и равенства:

$$\alpha_{ms}(x_0)\equiv\frac{\partial f^s}{\partial x^{s-m}}. \tag{66}$$

Рассмотрим формальные дифференциальные операторы $\{\overset{k}{\partial}\}_{k=1,\dots,n}$, определяемые по формуле:

$$\overset{k}{\partial}\equiv C^k(\partial), \tag{67}$$

где $\partial\equiv\sum\limits_{s=1}^{n}e_s\partial_s$. Введение этих операторов мотивируется следующими соображениями, аналогичными мотивирующим соображениям для введения операторов ∂_z и $\partial_{\bar z}$ в комплексном анализе [7]. Умножая равенства

$$\overset{k}{x}=x^{n-k+1}e_1+x^{n-k+2}e_2\dots+x^{2n-k}e_n, \tag{68}$$

которые можно понимать как формулы перехода от вещественных координат к поличисловым, последовательно на e_l $(l=1,\dots,n)$ получим серию равенств:

$$e_1x^{n-k+1}=e_1\overset{k}{x};\quad e_2x^{n-k+1}=e_2\overset{k+1}{x};\quad\dots\quad e_nx^{n-k+1}=e_n\overset{k+n}{x}, \tag{69}$$

откуда получаем обратные формулы перехода от поличисловых переменных к вещественным[7]:

$$x^l=\sum_{k=1}^{n}\overset{k-l}{x}e_k, \tag{72}$$

где нумерация сопряжений как обычно производится по модулю n. Теперь, в соответствии с формулами (72) будем иметь по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial}{\partial\overset{k}{x}}f=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial\overset{k}{x}}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^s}e_{k+s}\equiv\overset{k}{\partial}f \tag{73}$$

[7]Отметим для полноты картины, что формальная "якобиева матрица" задается компонентами:

$$\frac{\partial\overset{s}{x}}{\partial x^l}=\frac{\partial x^s}{\partial\overset{l}{x}}=e_{l+s}, \tag{70}$$

а якобианы — это невырожденные элементы из множества классификаторов $\mathsf{T}(P_n)$. Отметим также, что в силу (70) имеет место тождество:

$$\frac{\partial\overset{s}{x}}{\partial\overset{l}{x}}=\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\overset{s}{x}}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial\overset{l}{x}}=\sum_{m=1}^{n}e_{s+m}e_{l+m}=I_n\delta_l^s. \tag{71}$$

в соответствии с определением (67).

С учетом (12) и (66) будем иметь:

$$\overset{k}{\partial} f = \sum_{s=1}^{n} e_s \partial_{s-k} \sum_{m=1}^{n} f^m e_m = \sum_{m=1}^{n} \partial_{m-k} f^m e_m = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{km} e_m. \tag{74}$$

Соотношение (74) можно записать более компактно в матричном виде:

$$Df = \alpha \cdot e, \tag{75}$$

где D столбец, составленный из операторов $\overset{k}{\partial}$, Df — "произведение" столбца на поличисловой скаляр f, α — вещественная матрица с компонентами α_{km}, e — столбец, составленный из базисных элементов алгебры P_n, умножение в правой части (75) стандартное матричное (матрица на столбец).

3.7 Голоморфные функции поличисловой переменной

Определим теперь *голоморфные функции поличисловой переменной* как такие отображения $P_n \to P_n$, у которых линейная часть L в (61) является P_n-линейной, а $B = \beta(x_0)o(\Delta x)$. В соответствии со второй частью теоремы 2, приращение P_n-голоморфной функции можно представить в виде:

$$\Delta f = \alpha(x_0)\Delta x + \beta(x_0)o(\Delta x), \tag{76}$$

где α и β — некоторые непрерывные функции $P_n \to P_n$. Класс голоморфных функций является весьма узким подклассом дифференцируемых функций, который характеризуется равенствами $\alpha_{ms} = 0$ для всех $m = 1\ldots, n-1$. В соответствии с (75) эти условия можно записать с помощью формальных дифференциальных операторов $\{\overset{k}{\partial}\}$:

$$\overset{k}{\partial} f = 0,\ k = 1, \ldots, n-1. \tag{77}$$

В компонентах условия (77) принимают вид *поличисловых условий Коши-Римана в изотропном базисе*:

$$\frac{\partial f^s}{\partial x^k} = 0 \quad \text{при} \quad s \neq k. \tag{78}$$

Таким образом, *голоморфные функции поличисловой переменной в изотропном базисе характеризуются произвольным набором $\{f^s\}_{s=1,\ldots,n}$ n вещественно-дифференцируемых функций одной переменной:*

$$f(x) = f^1(x^1)e_1 + \cdots + f^n(x^n)e_n. \tag{79}$$

Сделаем несколько замечаний по поводу голоморфных функций поличисловой переменной.

1. Несмотря на внешнюю схожесть выражений (79) и (40), выражение (79) описывает существенно более широкий класс функций, поскольку в нем на компоненты f^s накладываются лишь условия гладкости, а не аналитичности в отличие от (40). Таким образом, в отличие от классического комплексного анализа, *классы аналитических и голоморфных функций поличисловой переменной существенно различны* (аналитические являются подмножеством голоморфных).

2. Как и в комплексном случае, условию голоморфности можно придать вид условия независимости производной от направления. Действительно, расписывая условие дифференцируемости в общей форме (64) при фиксированном (невырожденном) направлении приращения $\Delta x = \mathsf{T}(\Delta x)\varrho e^{\chi}$, ($\chi = \mathrm{const}_{P_n}$) получим:

$$\Delta f = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m(x_0)\, \mathsf{T}\,(\Delta \overset{m}{x})\varrho e^{\overset{m}{\chi}} + \beta_m(x_0,\chi) o_m(\varrho), \tag{80}$$

получим для производной по невырожденному направлению χ в точке x_0:

$$\frac{df}{d\chi}(x_0) \equiv \lim_{\varrho\to 0} \frac{f(x_0 + \mathsf{T}(\Delta x)\varrho e^{\chi}) - f(x_0)}{\mathsf{T}(\Delta x)\varrho e^{\chi}} = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m(x_0)\, \mathsf{T}\,(\Delta \overset{m}{x} /\Delta x) e^{\overset{m}{\chi}-\chi}. \tag{81}$$

В общем случае значение производной df/dx дифференцируемой функции f при фиксированном направлении дифференцирования χ зависит от выбора этого направления. Если же функция f P_n-голоморфна, то зависимость от направления в (81) пропадает (аналогично комплексному случаю).

3. Сопоставляя формулы (79) и (40) с общим видом элемента конформных преобразований (21), мы приходим к выводу о том, что *голоморфные функции поличисловой переменной — это как раз те функции, которые осуществляют конформные преобразования метрики Бервальда-Моора.* Далее мы увидим, что с точностью до перестановки координат голоморфные функции — это *в точности* те функции, которые осуществляют конформные преобразования метрики. Инвариантность углов между невырожденными векторами X, Y касательного пространства $T_x H_n$ проверяется прямой выкладкой с учетом определения (33):

$$\phi(X,Y) = |\chi_{Y/X}| \xrightarrow{f} \phi(X',Y') = \phi(f'X, f'Y) = |\chi_{f'Y/f'X}| = |\chi_{X/Y}| = \phi(X,Y), \tag{82}$$

где $f' \equiv df/dx$ и учтено, что закон преобразования векторов при голоморфных преобразованиях координат задается простым алгебраическим правилом: $X' = f' \cdot X$.

4. Аналогично классическому комплексному анализу в точках, в которых модуль поличисловой производной f' голоморфной функции обращается в нуль:

$$|f'| = |\Delta_f|^{1/n} = 0, \tag{83}$$

где $\Delta_f = \prod\limits_{s=1}^{n} \partial f^s/\partial x^s$ — (вещественный) якобиан преобразования координат, соответствующего голоморфной функции f, условие конформности преобразования может нарушаться. Например отображение $x \to x^2$ неконоформно в точке $x = 0$ (рассуждение, приведенное в предыдущем пункте не пройдет ввиду того, что в определение экспоненциального угла входит норма векторов, которую мы на всех этапах рассуждения полагали отличной от нуля).

5. Перенесение всех предыдущих рассмотрений на случай тех или иных вырождений может потребовать специального исследования. Мы проведем его в одной из будущих публикаций.

3.8 Обобщенно-голоморфные функции поличисловой переменной

Рассмотренное выше условие голоморфности в форме равенства нулю некоторого набора частных производных первого порядка (77) допускает многочисленные обобщения, которые могут быть полезными в приложениях. Обозначим посредством $\mathcal{A}_k^n$ поличисловое линейное пространство гладких функций $f\colon P_n \to P_n$, удовлетворяющих уравнению:

$$\overset{k}{\partial} f = 0. \tag{84}$$

Другими словами, $\mathcal{A}^n_k = \ker \overset{k}{\partial}$. Нетрудно написать общий вид элемента $f \in \mathcal{A}^n_k$, переходя к вещественным координатам. Согласно (84)

$$\overset{k}{\partial} f = \sum_{s=1}^{n} \partial_{s-k} f_s e_s = 0, \tag{85}$$

откуда условие принадлежности f классу $\mathcal{A}^n_k$ выражается формулами для компонент:

$$\frac{\partial f^s}{\partial x^{s-k}} = 0, \quad s = 1, \dots, n. \tag{86}$$

Теперь, с учетом соотношений (77), можно сказать, что определенный выше класс голоморфных функций описывается как пересечение ядерных подпространств вида:

$$\mathcal{G}^n_{\hat{0}} \equiv \bigcap_{s=1}^{n-1} \mathcal{A}^n_s. \tag{87}$$

Аналогично, определим[8] классы голоморфных функций $\mathcal{G}^n_{\hat{k}}$ $k = 1, \dots, n-1$ посредством соотношения:

$$\mathcal{G}^n_{\hat{k}} \equiv \bigcap_{s \neq k} \mathcal{A}^n_s. \tag{88}$$

Будем называть множество функций из класса $\mathcal{G}^n_{\hat{k}}$ *k-голоморфными.* В координатном представлении общий k-голоморфный элемент описывается формулой:

$$f(x) = \sum_{s=1}^{n} f^s(x^{s-k}) e_s = C^k g(x), \tag{89}$$

где $g(x) \in \mathcal{G}^n_{\hat{0}}$.

Можно продолжить построенное обобщение и далее. Для этой цели рассмотрим обобщенное условие голоморфности в виде набора мономных дифференциальных уравнений вида:

$$\prod_{m=1}^{n} \left(\overset{m}{\partial}\right)^{k^m_\alpha} f \equiv D^{k_\alpha} f = 0. \tag{90}$$

В выражении (90) k_α — элемент n-мерной целочисленной неотрицательной решетки Z^n_+, k^m_α — его целочисленные неотрицательные компоненты, $\alpha = 1, \dots, r$ — число условий типа (90). Для краткости мы ввели символическое обозначение D^{k_α} — "вектор в степени вектор" ("вектор" D был введен ранее в формуле (75)), определение которого очевидно:

$$U^V = U_1^{V_1} U_2^{V_2} \dots U_n^{V_n}. \tag{91}$$

Ввиду того, что каждое условие вида (90) параметризуется целочисленным вектором, а композиция пары таких условий (которая является дифференциальным следствием исходных условий) характеризуется суммой целочисленных векторов, имеем взаимно-однозначное отображение дифференциальных операторов вида (90) в кольцо Z^n_+ над Z_+.

[8]Здесь и далее предполагается, что все функции имеют непрерывные частные производные такого порядка, который необходим для корректности вводимых определений.

Очевидно, задавая условие голоморфности набором элементов в Z^n_+, целесообразно ограничиваться линейно-независимыми[9] в Z^n_+ элементами кольца Z^n_+. Вводя обозначения:

$$\mathcal{A}^n_{k_\alpha} \equiv \ker D^{k_\alpha}, \tag{92}$$

получаем в качестве обобщенных классов коломорфных функций пересечения ядерных пространств вида:

$$\mathcal{G}^n_{(k_1,\ldots,k_r)} \equiv \bigcap_{\alpha=1}^{r} \mathcal{A}^n_{k_\alpha}. \tag{93}$$

Рассмотренные выше классы $\mathcal{G}^n_{\hat{k}} \equiv \mathcal{G}^n_{(E_1,\ldots,\widehat{E_k},\ldots,E_n)}$, где $\{E_i\}_{i=1,\ldots,n}$ — набор базисных векторов решетки Z^n_+ (у E_i на i-ом месте стоит единица, на остальных местах — нули), а "шляпка" , как обычно, означает принудительный пропуск соответствующего элемента.

Опишем более подробно структуру пространства $\mathcal{A}^n_{pE_k}$. Соответствующий ему аннулирующий оператор D^{pE_k} может быть представлен в виде:

$$D^{pE_k} \equiv (\overset{k}{\partial})^p = (\overset{k}{\partial})^{p-1} \circ \overset{k}{\partial}, \tag{94}$$

что вместе с определением (84) для $\mathcal{A}^n_k$ дает следующее символическое уравнение для общего элемента $f \in \mathcal{A}^n_{pE_k}$:

$$D^{(p-1)E_k} f = \mathcal{A}^n_k. \tag{95}$$

Снова используя представление

$$D^{(p-1)E_k} = (\overset{k}{\partial})^{p-2} \circ \overset{k}{\partial}, \tag{96}$$

и выполняя символическое интегрирование (95), получим:

$$D^{(p-2)E_k} f = \overset{k}{x} \otimes \mathcal{A}^n_k + \mathcal{A}^n_k. \tag{97}$$

Продолжая этот процесс далее, получим общий вид представителя класса голомофности $\mathcal{G}^n_{pE_k} = \mathcal{A}^n_{pE_k}$:

$$\mathcal{A}^n_{pE_k} = \bigoplus_{q=0}^{p-1} \overset{k}{x}{}^q \otimes \mathcal{A}^n_k \tag{98}$$

или в явном виде:

$$\mathcal{A}^n_{pE_k} \ni f = f_0 + f_1 \overset{k}{x} + f_2 \overset{k}{x}{}^2 + \ldots f_{p-1} \overset{k}{x}{}^{p-1}, \tag{99}$$

где все $f_i \in \mathcal{A}^n_k$. Формулы типа (98) будем называть *формулами приведения* $\mathcal{A}^n_{pE_k}$ *к* A^n_k. Можно выписать аналогичную формулу приведения и общих ядерных пространств $\mathcal{A}^n_{k_\alpha}$ к пространствам $\mathcal{A}^n_k$:

$$\mathcal{A}^n_{k_\alpha} = \bigoplus_{s=1}^{n} \bigoplus_{q=0}^{k^s_\alpha - 1} \overset{s}{x}{}^q \otimes \mathcal{A}^n_s, \tag{100}$$

справедливость которой вполне очевидна из предыдущего рассмотрения.

В заключение этого раздела опишем специальный класс $\mathcal{G}^n_{E_1+\cdots+E_n}$-голоморфных функций, определяемый инвариантным (полискалярным) дифференциальным оператором:

$$\bigcirc_n \equiv \|\partial\|^n I_n \equiv \prod_{s=1}^{n} \overset{s}{\partial}\ . \tag{101}$$

[9] Несмотря на конечномерность Z^n_+ как подмножества в Z^n, Z^n_+ бесконечномерно как кольцо над Z_+. К примеру, бесконечная последовательность элементов $(0, 0 \ldots, 0), (1, 0, \ldots, 0), (2, 0, \ldots, 0), \ldots$ линейно независима в Z^n_+.

Оператор $\bigcirc_n$ является поличисловой версией двумерного оператора Лапласа $\Delta_2 = 4\partial_z\partial_{\bar z}$ и многомерным обобщением 2-мерного волнового оператора $\Box_2 = 4\partial_h\partial_{\bar h}$, где $h \in P_2$. По этой причине класс $\mathcal{G}^n_{E_1+\dots+E_n}$ будем для краткости называть *полигармоническими функциями* и обозначать $\mathrm{Harm}(P_n)$. В соответствии с общей формулой приведения (100), мы получаем для этого класса следующее общее симметричное представление:

$$\mathrm{Harm}(P_n) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathcal{A}^n_k \tag{102}$$

или в координатном виде:

$$\mathrm{Harm}(P_n) \ni f = \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f^s_k e_s, \tag{103}$$

где f^s_k — вещественные функции $R^{n-1} \to R$, удовлетворяющие условиям:

$$\frac{\partial f^s_k}{\partial x^k} = 0, \quad s, k = 1, \dots, n. \tag{104}$$

Сделаем несколько замечаний.

1. Концепция $\mathcal{G}^n$-голоморфности (обобщенной голоморфности) помимо формальной возможности оправдывает себя тем, что каждому типу этой голоморфности отвечает некоторая система дифференциальных уравнений на компоненты соответствующих голоморфных функций, играющих роль *обобщенных поличисловых условий Коши-Римана.* Так, для k-голоморфности они имеют вид

$$\frac{\partial f^s}{\partial x^l} = 0 \quad \text{при} \quad l \neq s - k, \quad s = 1, \dots, n, \tag{105}$$

вытекающий из (89); для $\mathcal{G}^n_{E_k}$-голоморфных функций эти условия выражаются уравнениями (86); для полигармонических функций "условия Коши-Римана" принимают вид

$$\frac{\partial^n f^s}{\partial x^1 \cdots \partial x^n} = 0, \quad s = 1, \dots, n, \tag{106}$$

вытекающий из (103). Отдельные интересные вопросы относятся к геометрической и физической интерпретациям этих условий. То обстоятельство, что эти интерпретации могут быть нетривиальными, можно заметить на некоторых частных случаях. К примеру, k-голоморфность характеризуется независимостью от направления производной k-голоморфной функции по переменной[10] $\overset{k}{x}$. Функции $\mathrm{Harm}(P_2)$ — это в точности все гладкие решения 2-мерного волнового уравнения в области вне источников.

2. Аналогично тому, как в комплексном анализе конформные отображения комплексной плоскости описываются как голоморфными так и антиголоморфными функциями комплексной переменной (в области их некритических точек), в случае P_n конформные отображения реализуются алгебраическими аналогами голоморфных и антиголоморфных функций на C — k-голоморфными функциями (также в области их некритических точек). Действительно, общий вид элемента конформных преобразований, содержащих тождественное преобразование в (21), совпадает с классом 0-голоморфных функций. Класс k-голоморфных функций получается из класса 0-голоморфных действием оператора C^k:

$$\mathcal{G}^n_{\hat k} = C^k(\mathcal{G}^n_{\hat 0}). \tag{107}$$

[10] В комплексном анализе функции, подчиняющиеся условию $\partial_z f = 0$ иногда называют *антиголоморфными.* Помимо конформного отображения они осуществляют локально изменение ориентации комплексной плоскости.

который геометрически действует на координаты многообразия H_n как оператор их циклической перестановки σ_k. Таким образом, если $f \in C_0(H_n) = \mathcal{G}^n_{\hat{0}}$, то из условия

$$f^*({}^{(n)}\epsilon) = \lambda \cdot {}^{(n)}\epsilon, \tag{108}$$

выражающего конформность f (f^* — кодифференциал отображения f), в силу известного свойства кодифференциала композиции следует:

$$(\sigma_k \circ f)^*({}^{(n)}\epsilon) = (f^* \circ \sigma_k^*)^{(n)*}({}^{(n)}\epsilon) = \lambda \cdot {}^{(n)}\epsilon, \tag{109}$$

— свойство конформности для класса $\mathcal{G}^n_{\hat{k}}$. Мы использовали в (109) факт инвариантности метрики Бервальда-Моора относительно циклических (на самом деле любых!) перестановок координат: $\sigma_k^*({}^{(n)}\epsilon) = {}^{(n)}\epsilon$. Отметим, что пополнение класса $C_0(H_n)$ классами $\mathcal{G}^n_{\hat{k}}$ с $k = 1, \ldots, n-1$ не исчерпывает семейства всех конформных преобразований метрики ${}^{(n)}\epsilon$: остаются в стороне функции $P_n \to P_n$ вида σf, где $f \in \mathcal{G}^n_{\hat{0}}$, а σ — оператор перестановки, не входящий в подгруппу циклических перестановок.

3. Остановимся немного на структуре кольца Z^n_+, которое классифицирует нам различные условия голоморфности. На этом кольце можно определить частичный порядок: назовем два различных элемента a и b из Z^n_+ упорядоченными ($a < b$), если найдется $c \in Z^n_+$, такой, что $b = a + c$. Структура порядка на Z^n_+ индуцирует включение соответствующих упорядоченным элементам Z^n_+ классов голоморфности: $\mathcal{G}^n_a \subset \mathcal{G}^n_b$, если $a < b$. Если для двух классов $\mathcal{G}^n_a$ и $\mathcal{G}^n_b$, входящих в совместное условие голоморфности (93), найдется элемент $M(a,b) \in Z^n_+$, такой что:

$$\mathcal{G}^n_a \cap \mathcal{G}^n_b = \mathcal{G}^n_{M(a,b)}, \tag{110}$$

то можно сократить число условий голоморфности на единицу, заменив классы, соответствующие элементам a и b, одним классом, соответствующим элементу $M(a,b)$. Это, очевидно возможно, только в том случае, когда у элементов a и b имеются общие меньшие элементы, при этом

$$M(a,b) \equiv \max_{c<a, c<b} c \tag{111}$$

— максимальный из них [11]. Отметим, что класс $\mathcal{G}^n_0$, состоящий из нулевой функции, лежит в пересечении любых классов голоморфности.

4. Назовем *модулем голоморфности класса* $\mathcal{G}^n_a$ число

$$|\mathcal{G}^n_a| \equiv \sum_{s=1}^{n} a^s, \quad a \in Z^n_+ \tag{112}$$

(это просто суммарный порядок соответствующего дифференциального монома). Число различных типов голоморфности модуля k в P_n дается следующей формулой:

$$B^n_k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}, \tag{113}$$

которую нетрудно доказать по индукции.

[11] Можно было бы также сказать, что объединению классов голоморфности, соответствующих элементам $a, b \in Z^n_+$, соответствует элемент $m(a,b)$, минимальный из элементов, одновременно больших a и b. Мы однако не рассматривали типов голоморфности, определяемых объединениями.

5. Рассматривая классы $\mathcal{G}^n_a$ $a \in Z^k_+$ как вершины n-мерной решетки и соединяя соседние классы стрелками, обозначающими вложения ι_i: $\mathcal{G}^n_a \to \mathcal{G}^n_{a+E_i}$, мы получим n-мерный цепной комплекс $\mathcal{C}(\iota, D)$ для операторов $\overset{k}{\partial}$, точный в каждом звене, поскольку

$$\mathrm{Im}\iota_i \subset \ker \overset{j}{\partial}\ . \tag{114}$$

Таким образом, на классах голоморфных функций определены (a, j)-когомологии

$$\mathfrak{H}^n_{(a,j)} \equiv \mathcal{G}^n_{a+E_j}/\mathcal{G}^n_a. \tag{115}$$

Формула приведения (100) фактически отражает строение $\mathcal{G}^n_a$ в терминах классов его когомологий. Мы не развиваем в настоящей статье когомологический аспект обобщенной голоморфности далее.

6. Можно определить классы голоморфности еще более общего вида, рассматривая, к примеру, формальные полиномы $P[D, \mathfrak{C}]$ от $2n$ переменных с постоянными (поличисловыми) коэффициентами. Здесь

$$D = (\overset{1}{\partial}, \dots, \overset{n}{\partial}); \quad \mathfrak{C} = (C^1, \dots, C^n) \tag{116}$$

наборы дифференцирований и комплексных сопряжений (они не коммутируют друг с другом). Получающиеся условия голоморфности будут представлять собой довольно сложные системы дифференциальных уравнений[12] общего вида. Мы оставляем изучение этих возможностей для будущих публикаций.

3.9 Голоморфное продолжение

Расмотрим гладкую кривую γ: $I \to P_n$, где I — любое связное подмножество вещественной прямой с граничными точками α_1 и α_2 (случаи $\alpha_i = \pm\infty$ не исключаются). Пусть на кривой γ задана функция f_0: $\gamma(I) \to P_n$. Возникает вопрос: существует ли голоморфная (в каком-нибудь смысле) функция f: $L \to P_n$, где $\gamma(I) \subset L \subseteq P_n$, такая, что ее ограничение $f|_{\gamma(I)}$ совпадает с f_0?

Рассмотрим сначала случай *неизотропной* кривой γ, т.е. такой, которая не содержит кусков со скоростью $\dot{x}$ нулевой нормы в метрике Бервальда-Моора. Здесь и далее точка обозначает дифференцирование по параметру $t \in I$. В этом случае, поличисловое представление кривой γ имеет вид[13]:

$$x(t) = \sum_{s=1}^{n} \varphi^s(t) e_s, \tag{118}$$

причем все $\varphi^s \neq \mathrm{const}$ ни на одном из кусков I. Гладкую функцию f_0: $P_n \to P_n$ на кривой $\gamma \subset P_n$ можно понимать как функцию $I \to P_n$ вида:

$$f_0 \equiv \sum_{s=1}^{n} f^s_0(t) e_s, \tag{119}$$

[12] В отличие от предыдущих случаев эти уравнения не будут расщепляться на отдельные уравнения для компонент

[13] Соотношение (118) можно интепретировать более наглядно, если ограничиться классом аналитических кривых. В этом случае

$$x(t) = \sum_{s=1}^{n} \varphi^s(t) e_s = F(tI_n), \tag{117}$$

где F — функция, определенная на части пространственной диагонали положительной компоненты P_n, имеющей смысл вещественной оси в P_n. Таким образом, в случае аналитических кривых мы можем рассматривать кривую γ как некоторую деформацию куска пространственной диагонали tI_n, $(t \in [\alpha_1; \alpha_2])$ в P_n.

т.е., фактически, тоже как кривую[14] в P_n. Предполагая (локальную) обратимость компонент в (118), можно записать (119) следующим образом:

$$f_0 \equiv \sum_{s=1}^{n} f_0^s \circ (\varphi^s)^{-1} \circ \varphi(t) e_s. \tag{120}$$

Полагая теперь в (120) $f^s \equiv f_0^s \circ (\varphi^s)^{-1}$ и заменяя $\varphi^s(t) \to x^s$ (в s-ом слагаемом $\varphi^s(t)$ заменяем на x^s), мы получим требуемое продолжение вида:

$$f(x) = \sum_{s=1}^{n} f^s(x^s) e_s. \tag{121}$$

Оно удовлетворяет условию 0-голоморфности и, что очевидно из самого построения, локально единственно. Элементарная область L, на которую продолжается f_0, представляет собой n-мерный евклидов параллелограмм

$$\mathcal{E}^n = [\varphi^1(\alpha_1'); \varphi^1(\alpha_2')] \times \cdots \times [\varphi^k(\alpha_1'); \varphi^k(\alpha_2')] \times \cdots \times [\varphi^n(\alpha_1'); \varphi^n(\alpha_2')] \subseteq P_n, \tag{122}$$

где $\alpha_1', \alpha_2' \in I$ — границы подмножества области определения кривой γ, внутри которой все компоненты одновременно обратимы. Если кривая γ устроена не патологично, то ее область определения можно разбить на конечное (или, в крайнем случае, быть может счетное) число частей, на каждой из которых будет справедливо представление голоморфного расширения вида (121) с некоторым набором функций $\{f^s\}$, зависящим от выбора ветвей обратных (многозначных) функций $\{(\varphi^s)^{-1}\}$. При этом полная область голоморфного расширения будет представлять собой объединение параллелепипедов вида (122). Очевидно, в случае кривой общего положения, продолжение f_0 на все пространство P_n невозможно. Однозначные k-голоморфные расширения функции f_0, заданной на кривой γ, получаются аналогично[15]

Рассмотрим теперь случай изотропной кривой. Предположим сначала, что только одна из компонент кривой имеет постоянное значение $x^q = \mathrm{const} = a^q$ на некотором связном подмножестве $I' \subseteq I$ с граничными точками $\beta_1 \geq \alpha_1$ и $\beta_2 \leq \alpha_2$. Пусть при $\alpha_1 \leq t \leq \beta_1$ q-ая компонента кривой γ описывается непостоянной функцией $\phi_1(t)$, а при $\beta_2 \leq t \leq \alpha_2$ q-ая компонента кривой γ описывается непостоянной функцией $\phi_2(t)$. Будем обозначать обе эти компоненты однообразно с остальными компонентами посредством $\varphi^q(t)$. Ввиду непрерывности кривой $\phi_1(\beta_1) = \phi_2(\beta_2) = a^q$. Пусть f_0 — гладкая функция на кривой, задаваемая посредством соотношения (119). Для дальнейшего продвижения нам потребуется аналитичность компонент $\{f_0^s\}$ и $\{\varphi^s\}$. Для аналитических зависимостей мы можем утверждать, что $f_0^q(t) = A^q = \mathrm{const}$ при $t \in [\beta_1; \beta_2]$. Рассмотрим произвольную гладкую функцию ϕ: $R \to R$, область определения которой включает a^q, и положим

$$f^s(x^s) \equiv \begin{cases} f_0^s \circ (\varphi^s)^{-1}, & \varphi^s(\alpha_1) \leq x^s \leq \varphi^s(\beta_1), \quad s = 1, \ldots, n; \\ A^q + \phi(x^q) - \phi(a^q), & s = q \text{ и } \varphi^s(\alpha_1) \leq x^s \leq \varphi^s(\alpha_2), \quad s = 1, \ldots, \hat{q}, \ldots, n; \\ f_0^s \circ (\varphi^s)^{-1}, & s \neq q \text{ и } \varphi^s(\alpha_1) \leq x^s \leq \varphi^s(\alpha_2), \quad s = 1, \ldots, \hat{q}, \ldots, n; \\ f_0^s \circ (\varphi^s)^{-1}, & \varphi^s(\beta_2) \leq x^s \leq \varphi^s(\alpha_2) \quad s = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{123}$$

в предположении, что соответствующие обратные функции существуют или выбраны их однозначные ветви. Тогда функция

$$f(x) = \sum_{s=1}^{n} \varphi^s(x^s) e_s, \tag{124}$$

[14]Которую, с учетом замечания предыдущей сноски, в случае аналитических функций можно понимать как последовательную деформацию отрезка $\lambda I_n \to \gamma \to \gamma'$.

[15]Для k-голоморфного расширения необходимо положить $f^s \equiv f_0^s \circ (\varphi^{s-k})^{-1}$.

у которой все компоненты за исключением q-ой фактически построены аналогично предыдущему случаю, а q-ая описывается формулой (123), совпадает на изотропной кривой γ с f_0 и является голоморфной. Произвол голоморфного продолжения функций с изотропных участков кривых заключается как в выборе функциональной зависимости, продолжающей постоянные компоненты (функция ϕ в (123) — произвольна), так и в выборе области голоморфного продолжения (ϕ как произвольная функция имеет произвольную область определения, включающую постоянное значение компоненты a^q). Область определения L функции (124) в общем случае остается объединением параллелепипедов. Действие операторов C^k на (124) позволяет получить соответствующие k-голоморфные расширения f_0.

В случае, когда у изотропной кривой остаются постоянными несколько компонент, аналогичный произвол голоморфного расширения распространяется и на эти компоненты. При этом область голоморфного расширения "дробится" на параллелепипеды $\mathcal{E}^n$ вида (122), грани которых параллельны координатным гиперплоскостям изотропной системы координат, а число параллелепипедов и координаты их граней определяются конкретным положением "точек поворота" компонент кривой и положением ее изотропных участков. Отметим, что мы показали возможность *голоморфного продолжения поличисловой функции с неизотропной кривой* и *лишь аналитического продолжения с изотропной.*

Рассмотрим в общих чертах возможность голоморфного продолжения функции f_0 с двумерной гладкой регулярной поверхности $\mathcal{S}_2 \subset P_n$. Предположим, что поверхность $\mathcal{S}_2$: $G_2 \to P_n$ (G_2 — область в R^2) описывается параметрически поличисловой функцией вида:

$$x(u,v) = \sum_{s=1}^{n} \varphi^s(u,v) e_s, \tag{125}$$

где $\varphi^s(u,v)$ — гладкие компоненты, удовлетворяющие условиям:

$$(1)\ \partial_u \overrightarrow{x} \wedge \partial_v \overrightarrow{x} \neq 0 \quad \text{и} \quad (2)\ |x_u||x_v| \neq 0. \tag{126}$$

В первом условии (126) геометрический радиус-вектор $\overrightarrow{x}(u,v)$ получается из поличисловой зависимости $x(u,v)$ заменой в ней $e_s \to \overrightarrow{e}_s$, а само условие выражает регулярность поверхности (локальный базис на поверхности невырожден). Второе условие представляет собой аналог условия неизотропности для кривых, которое может нарушаться теперь лишь на множестве меры нуль в G_2. Регулярные поверхности с условием (2) в (126) будем называть *неизотропными.* Всякую поличисловую функцию на поверхности $\mathcal{S}_2$ можно рассматривать по аналогии со случаем кривых снова как поверхность S_2', получаемую деформацией $\mathcal{S}_2$ и, стало быть, заданную в той же параметризации, что и $\mathcal{S}_2$:

$$f_0 \equiv \sum_{s=1}^{n} f_0^s(u,v) e_s. \tag{127}$$

Сначала рассмотрим возможность 0-голоморфного продолжения зависимости (127). В этом случае мы должны построить поличисловую функцию вида (121), которая при ее ограничении на $\mathcal{S}_2$ давала бы (127). В компонентах вопрос сводится к исследованию совместности системы уравнений:

$$f^s(\varphi^s(u,v)) \equiv f_0^s(u,v)\ (s = 1, \ldots, n), \tag{128}$$

где φ^s и f_0^s заданные функции, а f^s подлежит отысканию. Из общих теорем многомерного вещественного анализа следует, что для локального существования функций f^s необходимо и достаточно обращение в нуль всех якобианов:

$$\frac{D(\varphi^s, f_0^s)}{D(u,v)} = 0, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{129}$$

Соотношения (129) можно записать более компактно на языке P_n-значных дифференциальных форм:

$$df_0 \wedge d\varphi = 0. \tag{130}$$

Условия (129) или (130) можно рассматривать как некоторые условия интегрируемости для голоморфного расширения. Мы видим, что, в отличие от 0-голоморфного продолжения с кривых, 0-*голоморфное продолжение с поверхностей возможно лишь при достаточно жестких ограничениях как на саму поверхность, так и на функцию* f_0 *на ней.* Очевидно, то же самое относится и ко всем типам k-голоморфных продолжений.

Более подходящим кандидатом на голоморфное продолжение с поверхности являются классы голоморфных функций $\mathcal{G}^n_{E_1,\dots,\hat{E}_i,\dots,\hat{E}_j,\dots E_n} \equiv \mathcal{G}^n_{\hat{E}_i,\hat{E}_j}$. Рассмотрим для определенности вопрос о продолжении с поверхности в классе $\mathcal{G}^n_{\hat{E}_0,\hat{E}_1}$ голоморфности. В этом случае в компонентах вопрос о продолжении сводится к исследованию совместности системы функциональных уравнений вида:

$$f^s(\varphi^s(u,v), \varphi^{s-1}(u,v)) \equiv f_0^s(u,v), \quad s = 1,\dots,n. \tag{131}$$

Нетрудно видеть, что локально вопрос о возможности $\mathcal{G}^n_{\hat{E}_0,\hat{E}_1}$-голоморфного продолжения решается положительно. Действительно, предполагая обратимость преобразований $(u,v) \mapsto (\varphi^s(u,v), \varphi^{s-1}(u,v))$ для всех $s = 1,\dots,n$, мы можем перейти в (131) к новым координатам: $x^s \equiv \varphi^s(u,v)$, $s = 1,\dots,n$. Тогда уравнения (131) фактически превращаются в определение искомых функций f^s, задающих искомое $\mathcal{G}^n_{\hat{E}_0,\hat{E}_1}$-голоморфное продолжение:

$$f^s(x^s, x^{s-1}) \equiv f_0^s(\psi_1^s(x^s, x^{s-1}), \psi_2^s(x^s, x^{s-1})), \tag{132}$$

где отображение Ψ^s: $R^2 \to R^2$ с компонентами (ψ_1^s, ψ_2^s) является обратным к отображению Φ^s: $R^2 \to R^2$ с компонентами $(\varphi^s, \varphi^{s-1})$. Вопрос о возможности голоморфных продолжений аналогичных типов $\mathcal{G}^n_{\hat{E}_i,\hat{E}_j}$ решается (локально!) также положительно. Элементарными областями голоморфного расширения остаются, как и в случае продолжений с кривых, евклидовы параллелепипеды.

Нетрудно сообразить, что аналогичным образом будут обстоять дела с возможностью $\mathcal{G}^n_{\hat{E}_{i_1},\dots,\hat{E}_{i_k}}$ (все i_r — различны, назовем такое продолжение *смешанным* функциональной размерности k) продолжений с неизотропных подмногообразий $\mathcal{S}_m \subset P_n$ различных размерностей $m < n$: *возможность смешанного голоморфного продолжения с функциональной размерностью* $k < m$ *имеется при выполнении достаточно жестких ограничений на подмногообразие* $\mathcal{S}_m$ *и функцию* f_0 *на нем, а смешанное голоморфное продолжение с функциональной размерностью* $k = m$ *локально всегда возможно и (локально) единственно.* При этом смешанные голоморфные продолжения с функциональной размерностью $m < k \leq n$ возможны и неединственны. Эти выводы проясняют общий характер корректных краевых задач, которые могут возникать в физических приложениях теории функций поличисловой переменной.

Мы не будем в настоящей статье касаться вопроса о голоморфных продолжениях более общего типа и вопроса о голоморфных продолжениях с изотропных подмногообразий $\mathcal{S}_m$ при $m > 1$.

3.10 Интегральная теорема и формула Коши в P_n

Определим *поличисловой интеграл от функции поличисловой переменной* по гладкой параметризованной кривой γ по формуле:

$$\int\limits_\gamma f\,dx \equiv \sum_{s=1}^n e_s \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f^s|_\gamma \dot{x}^s\,dt, \tag{133}$$

где $t \in [\alpha_1, \alpha_2] \subseteq R$ — параметр на кривой γ. В силу определения (133) существование и свойства поличислового интеграла от функции поличисловой переменной определяются существованием и свойствами обычных вещественных интегралов от компонент. Рассмотрим теперь некоторую 0-голоморфную поличисловую функцию f и рассмотрим поличисловой интеграл от нее по некоторому замкнутому контуру γ:

$$\langle \gamma, f \rangle \equiv \oint\limits_{\gamma} f(x)\, dx. \tag{134}$$

Ввиду определения (133), $s-$ая компонента интеграла (γ_s — проекция γ на ось x^s):

$$\oint\limits_{\gamma_s} f(x^s)\, dx^s = 0 \tag{135}$$

в силу формулы Ньютона-Лейбница. Очевидно, аналогичный вывод получится и для интегралов от k-голоморфных функций по замкнутым контурам, описываемым в терминах поличисловой переменной $\overset{k}{x}$:

$$\langle \overset{k}{\gamma}, f(\overset{k}{x}) \rangle \equiv \oint\limits_{\gamma} f(\overset{k}{x})\, d\overset{k}{x} = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{136}$$

Выражение (136) представляет собой ближайший алгебраический аналог классической теоремы Коши комплексного анализа.

Прежде чем перейти к поличисловой версии интегральной формулы Коши, рассмотрим поличисловой интеграл вида:

$$K^r \equiv \oint\limits_{\gamma} (x - a)^r\, dx, \tag{137}$$

где $a \in P_n$, $a \notin \gamma$ $r \in Z$, γ — некоторый замкнутый контур в P_n. Поскольку функция $(x-a)^r$ аналитична при $x \neq a$, можем перейти к покомпонентной форме (137):

$$K^r = \sum_{s=1}^{n} e_s \int\limits_{\gamma_s} (x^s - a^s)^r\, dx^s. \tag{138}$$

Если $r \geq 0$, то интеграл $K_r = 0$ в силу (136). Если проекция γ_s не включает в себя a^s, то соответствующая компонента $K^r_s = 0$ при всяком r. При $r < 0$ и $a^s \in \gamma^s$ интеграл K^r_s становится несобственным и строго говоря расходящимся. Его регуляризованное значение будет зависеть от выбора метода регуляризации. В настоящей статье мы выбираем регуляризацию, фактически основанную на приложении формулы Ньютона-Лейбница к расходящимся интегралам: несобственному интегралу от функции g приписывается значение $G(b) - G(a)$ (если оно существует в каком-нибудь смысле), где G — первообразная g, $a, b \in R$ — концевые точки. В нашем случае это правило дает $K^r_s = 0$, поскольку $a = b$. Поскольку смысл используемой нами регуляризации жестко привязан к изотропной системе координат, назовем выбранную нами регуляризацию *изотропной*[16].

[16]Отметим, что в работе [23] в пространстве P_2 использовалась другая регуляризация, привязанная к гиперболической полярной системе координат (*полярная регуляризация*). Она давала для замкнутых контуров, охватывающих точку $a \in P_2$, значение $K^r = 0$ при любых вещественных r, а для контуров, состоящих из элементов конуса $\mathrm{Con}(a)$ значение $K^r = 0$ при $r \neq -1$, а при $r = -1$ $K^{-1} = \pm j \ell_H$ (знаки $\pm$ отражают два выбора направления обхода), где $j = e_1 - e_2$ — гиперболическая мнимая единица ($j^2 = +1$), а ℓ_H — бесконечная "фундаментальная константа" двумерной псевдоевклидовой геометрии, имеющая смысл размера пространства гиперболических углов (аналог 2π на евклидовой плоскости).

Рассмотрим теперь поличисловой интеграл типа Коши от 0-голоморфной функции f:

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{f(x)}{x-a} = \sum_{s=1}^{n} e_s \oint\limits_{\gamma_s} \frac{f^s(x^s)}{x^s - a^s}, \tag{139}$$

где $a \notin \gamma$. Преобразуя подынтегральное выражение в (139):

$$\frac{f^s(x^s)}{x^s - a^s} = \frac{f^s(x^s) - f^s(a^s) + f^s(a^s)}{x^s - a^s} = f'^s(a^s) + \beta(x^s) + \frac{f^s(a^s)}{x^s - a^s}, \tag{140}$$

где в силу голоморфности f функция β — регулярна и непрерывна, и подставляя его в (139), получим с учетом (136) и равенства $K^{-1} = 0$ в изотропной регуляризации[17]:

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{f(x)}{x-a} = 0. \tag{141}$$

4 Геометрические аспекты H_n

В этом разделе мы остановимся на некоторых геометрических аспектах P_n или H_n, тесно связанных с введенными выше классами $\mathcal{G}^n$-голоморфных функций.

4.1 Многомерные версии теоремы Коши в P_n

Конструкции раздела (3.10) допускают многомерные обобщения. Прежде всего определим внешние P_n-значные дифференциальные *голоморфные* l-формы:

$$\omega_0^{k_1 \ldots k_l} \equiv d \overset{k_1}{x} \wedge \cdots \wedge d \overset{k_l}{x} = \sum_{s=1}^{n} dx^{s-k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{s-k_l} e_s. \tag{142}$$

В (142) все k_i различны, в левой части стоит элемент поличислового базиса P_n-значных голоморфных l-форм, а справа его разложение по базису в алгебре P_n. Очевидно, что не всякая P_n-значная дифференциальная l-форма является голоморфной. Например, таковой не будет 1-форма вида $dx^k I_n$. Нетрудно вывести необходимый критерий голоморфности l-формы вида:

$$\omega = \sum_{s=1}^{n} a_s dx^{k_1^s} \wedge \cdots \wedge dx^{k_n^s} e_s. \tag{143}$$

Заметим, что коэффициенты a_s (постоянные или функции $P_n \to P_n$) выносятся в (143) за знак суммы в виде поличисловой величины $a = \sum\limits_{s=1}^{n} a^s e_s$. Таким образом, ω можно всегда представить в виде $\omega = a\tilde{\omega}$, где $\tilde{\omega}$ дается формулой (143) при $a_s = 1$. Заметим теперь, что сумма значений индексов координат в $s-$ом слагаемом правой части (142) равна

$$t(s) = ls - (k_1 + \cdots + \ldots k_l) \bmod n, \tag{144}$$

следовательно разность соседних значений $t(s)$ равна:

$$t(s) - t(s-1) = ls - l(s-1) \bmod n = l \bmod n = \mathrm{const} \bmod n, \tag{145}$$

т.е. не зависит от s. Таким образом, для того чтобы исследуемая нами форма $\tilde{\omega}$ была (пропорциональна) голоморфной, необходимо, чтобы *суммы элементов k_j^i последовательных*

[17] На P_2 в полярной регуляризации, для контуров, опирающихся на конус, в правой части (141) будет стоять $j\ell_H f(a)$ (см. пред. сноску).

строк $n \times l$ матрицы индексов координат в (143) отличались на l по модулю n. Разумеется, любая l-форма вида (143) может быть разложена по базису из голоморфных l-форм вида (142):

$$\omega = \sum_{k_1,\ldots,k_l=1}^{n} a_{k_1\ldots k_l} \omega_0^{k_1\ldots k_l} \tag{146}$$

где $a_{k_1\ldots k_l}$ — голоморфные компоненты (гладкие функции голоморфных координат). Это очевидно уже из подсчета вещественных размерностей соответствующих линейных пространств (они совпадают и равны nC_k^n). Обозначим пространство ($\digamma(P_n)$-модуль, $\digamma(P_n)$ — кольцо гладких функций $P_n \to P_n$) дифференциальных форм степени l в P_n через $\bigwedge^l P_n$, а градуированную алгебру всех внешних форм $\bigwedge P_n$. Как и обычно

$$\bigwedge P_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigwedge{}^k P_n, \tag{147}$$

причем пространства $\bigwedge^0 P_n$ и $\bigwedge^n P_n$ изоморфны пространству функций $P_n \to P_n$. Определение внешнего дифференцирования d: $\bigwedge^l P_n \to \bigwedge^{l+1} P_n$ на $\bigwedge P_n$ очевидно. Приведем его выражение в голоморфных координатах:

$$d\omega \equiv \sum_{k,k_1,\ldots,k_l=1}^{n} \frac{\partial a_{k_1\ldots kl}}{\partial \overset{k}{x}}\, \omega_0^{kk_1\ldots k_l}. \tag{148}$$

Все свойства операции d, известные в вещественном анализе, остаются в силе и в P_n. Отметим лишь, что d коммутирует со всеми комплексными сопряжениями C^k.

Определим поличисловой интеграл от l-формы $\omega \in \bigwedge^l P_n$ по l-мерному подмногообразию $\mathcal{S}_l$ следующим образом:

$$\langle \mathcal{S}_l, \omega \rangle \equiv \oint_{\mathcal{S}_l} \omega \equiv \sum_{s=1}^{n} e_s \oint_{\mathcal{S}_l} \omega_s, \tag{149}$$

где ω_s — s—ая компонента ω и каждое слагаемое под знаком суммы справа представляет собой стандартный вещественный интеграл от l-формы по l-мерному подмногообразию. Ввиду линейности операции разложения по поличисловому базису теорема Пуанкаре-Дарбу имеет место и для форм на P_n:

$$\int_{\mathcal{S}_{l+1}} d\omega = \oint_{\partial\mathcal{S}_{l+1}} \omega \tag{150}$$

(интеграл от дифференциала l-формы по $l+1$-мерному подмногообразию в P_n равен интегралу от этой формы по l-мерной границе). Доказательство сводится к выписыванию поличисловых компонент (150) слева и справа и применению к ним стандартной вещественной версии теоремы Пуанкаре-Дарбу.

Перед тем как ввести следующее определение, напомним компактное доказательство теоремы Коши в комплексном анализе, основанное на комплексифицированной версии теоремы Пуанкаре-Дарбу [7]. Интеграл от произвольной гладкой функции $C \to C$ по замкнутому контуру $\gamma = \partial D$, где область D (и ее граница γ) не содержит особых точек, может быть сведен к интегралу по этой области:

$$\oint_{\gamma} f(z,\bar z)\, dz = \int_{D} \frac{\partial f}{\partial \bar z} d\bar z \wedge dz. \tag{151}$$

Если функция f — голоморфна в D (т.е. если всюду в D выполняется $\partial_{\bar{z}} f = 0$), то интеграл справа обращается в нуль и имеет место теорема Коши.

1-мерная версия именно этой ситуации фактически и была рассмотрена в предыдущем разделе. Ее многомерное обобщение в P_n мотивирует следующее определение. Назовем l-форму ω *голоморфно-замкнутой*, если в ее разложении (146) по голоморфному базису компоненты $a_{k_1\dots k_l} \in \mathcal{G}^n_{\hat{E}_{k_1},\dots,\hat{E}_{k_l}}$. Другими словами, голоморфно-замкнутые l-формы имеют вид:

$$\omega = \sum_{k_1,\dots,k_l=1}^{n} a_{k_1\dots k_l}(\overset{k_1}{x},\dots,\overset{k_l}{x})\omega_0^{k_1\dots k_l}. \tag{152}$$

Замкнутость форм вида (152) проверяется простым вычислением (она очевидна). Голоморфно-замкнутые формы являются и точными, поскольку топологически P_n гомеоморфно R^n, а все группы когомологий R^n тривиальны. Разумеется, класс голоморфно-замкнутых форм представляет собой подмножество всех замкнутых форм (например 1-форма $\overset{1}{x}\, d\overset{2}{x} + \overset{2}{x}\, d\overset{1}{x} = d(\overset{1}{x}\overset{2}{x})$ — очевидно замкнута, но не является голоморфно-замкнутой), но многомерное поличисловое обобщение теоремы Коши наиболее естественно формулируется именно для голоморфно-замкнутых форм[18]. Обозначим этот класс посредством $CH_{(x)} \bigwedge^l P_n$, где индекс x указывает на отнесенность свойства замкнутости к некоторой системе изотропных координат (см. сноску).

Прежде всего, заметим, что формула (136) является частным случаем очевидного обобщения: $\langle \gamma, \omega \rangle = 0$, где $\omega \in CH_{(x)} \bigwedge^1 P_n$. Действительно, в силу теоремы Пуанкаре-Дарбу имеем:

$$\langle \gamma, \omega \rangle = \oint_{\gamma} \omega = \int_{\partial^{-1}\gamma} d\omega = 0, \tag{153}$$

где $\partial^{-1}\gamma$ — любая гладкая регулярная поверхность, натянутая на контур γ. Соответственно, полным поличисловым обобщением теоремы Коши будет равенство нулю интеграла:

$$\langle \mathcal{S}_l, \omega \rangle = 0 \tag{154}$$

от всякой l-формы ω из класса $CH_{(x)} \bigwedge^l P_n$ по всякому замкнутому подмногообразию $\mathcal{S}_l$ в P_n.

4.2 Контравариантная симметричная метрика и исчисление (ко)полиад

Рассмотрим пространство Бервальда-Моора H_n и метрику Бервальда-Моора ${}^{(n)}\epsilon$ в ней, отнесенную к некоторой изотропной системе координат $(x^1,\dots,x^n)$, в которой эта метрика имеет вид (18). Рассмотрим тензор ${}^{(n)}\tilde{\epsilon}$ вида:

$${}^{(n)}\tilde{\epsilon} \equiv \hat{\mathcal{S}}(\partial_1 \otimes \dots \otimes \partial_n), \tag{155}$$

который определяет "скалярное полипроизведение" в расслоении 1-форм $\bigwedge^1 H_n$ по формулам:

$$(\omega_1,\dots,\omega_n) \equiv \epsilon^{k_1\dots k_n}(\omega_1)_{k_1}\dots(\omega_n)_{k_n} \equiv \mathrm{perm}\begin{pmatrix} (\omega_1)_1 & \dots & (\omega_1)_n \\ & \dots & \\ (\omega_n)_1 & \dots & (\omega_n)_n \end{pmatrix}. \tag{156}$$

[18]Несколько забегая вперед, отметим, что данное нами определение класса голоморфно-замкнутых 1-форм не является инвариантным относительно общекоординатных преобразований на P_n. Однако, оно является инвариантным относительно более узкого класса любых k-голоморфных преобразований, которые, как это было указано выше, являются конформными преобразованиями H_n.

В (156) мы использовали симметричный символ Леви-Чивиты с верхними индексами, определение которого аналогично (17). Тензор (155) будем называть *дуальным* или *обратным* к ${}^{(n)}\epsilon$. Это название оправдывается следующим свойством компонент ${}^{(n)}\epsilon$ и ${}^{(n)}\tilde{\epsilon}$:

$$\sum_{k_{r+1},\ldots,k_n} \epsilon_{k_1\ldots k_r k_{r+1}\ldots k_n}\epsilon^{m_1\ldots m_r k_{r+1}\ldots k_n} = \frac{n!(n-1)!}{(n+r-1)!}\mathrm{perm}\begin{pmatrix} \delta^{m_1}_{k_1} & \ldots & \delta^{m_1}_{k_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta^{m_r}_{k_1} & \ldots & \delta^{m_r}_{k_r} \end{pmatrix} \tag{157}$$

Равенства левой и правой частей (157) с точностью до коэффициента следуют из соображений симметрии, вид коэффициента следует из редукционной формулы для перманентов, вытекающей из простого подсчета перестановок:

$$\sum_{r=1}^{n}\begin{pmatrix} r & r_2 & \ldots & r_s \\ r & m_2 & \ldots & m_s \end{pmatrix} = (n+s-1)\begin{pmatrix} r_2 & \ldots & r_s \\ m_2 & \ldots & m_s \end{pmatrix}, \tag{158}$$

где

$$\begin{pmatrix} r_1 & \ldots & r_s \\ m_1 & \ldots & m_s \end{pmatrix} \equiv \mathrm{perm}\begin{pmatrix} \delta^{r_1}_{m_1} & \ldots & \delta^{r_1}_{m_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta^{r_s}_{m_1} & \ldots & \delta^{r_s}_{m_s} \end{pmatrix} \tag{159}$$

— сокращенное обозначение для перманента, составленного из упорядоченных дельта-символов. Таким образом, в каждом H_n имеется, как минимум, четыре типа полискалярного произведения: два полностью антисимметричных произведения n-ок векторов или 1-форм, ассоциированных с формами объемов в касательном и кокасательном расслоениях:

$$\mathrm{vol} \equiv dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n, \quad \widetilde{\mathrm{vol}} \equiv \partial_1\wedge\cdots\wedge\partial_n, \tag{160}$$

которые порождаются операцией внешнего (кососимметричного) произведения $\wedge$ и два симметричных произведения n-ок векторов или 1-форм, задаваемых симметричными полилинейными формами (18) и (155). Отметим, что формы (160) существуют на любом гладком многообразии, в то время как наличие форм (18) и (155) — специфическая особенность пространств H_n. Для восстановления более полной симметрии между антисимметричными и симметричными метриками, определим операцию $\vee$ симметрического произведения векторов или 1-форм по формулам:

$$X\vee Y \equiv X\otimes Y + Y\otimes X; \quad \omega\vee\lambda \equiv \omega\otimes\lambda + \lambda\otimes\omega, \tag{161}$$

для всяких $X, Y \in TH_n$ и $\omega, \lambda \in T^*H_n$. Теперь мы можем написать по аналогии с (160):

$${}^{n}\epsilon(X_1,\ldots,X_n) \equiv \mathrm{Vol}(X_1,\ldots,X_n); \quad {}^{n}\tilde{\epsilon}(\omega_1,\ldots,\omega_n) \equiv \widetilde{\mathrm{Vol}}(\omega_1,\ldots,\omega_n), \tag{162}$$

где

$$\mathrm{Vol} \equiv dx^1\vee\cdots\vee dx^n; \quad \widetilde{\mathrm{Vol}} \equiv \partial_1\vee\cdots\vee\partial_n \tag{163}$$

— "симметричные формы объемов" .

Аналогию между антисимметричными тензорами (p-формами или p-векторами) и симметричными тензорами (*p-полиады и p-кополиады*) можно продолжить и далее. Определим расслоение p-полиад $\bigvee^p H_n$ как множество всех симметричных ковариантных тензорных полей. Они образуют $\mathcal{F}(H_n)$-модуль, базисом которого являются набор полиад $\{dx^{k_1}\vee\cdots\vee dx^{k_p}\}_{k_1=1,\ldots,n}$. Можно определить теперь градуированную алгебру полиад $\bigvee H_n$, в которой операция полиадного умножения $\vee$ между полиадами $P = \sum\limits_{k_1,\ldots,k_p} P_{k_1\ldots k_p}dx^{k_1}\vee\cdots\vee dx^{k_p} \in \bigvee^p H_n$ и $Q = \sum\limits_{l_1,\ldots,l_q} Q_{l_1\ldots l_q}dx^{k_l}\vee\cdots\vee dx^{l_q} \in \bigvee^q H_n$ определяется по формуле:

$$P\vee Q = Q\vee P \equiv \sum_{k_1,\ldots,k_p}\sum_{l_1,\ldots,l_q} P_{k_1\ldots k_p}Q_{l_1\ldots l_q}dx^{k_1}\vee\cdots\vee dx^{k_p}\vee dx^{k_l}\vee\cdots\vee dx^{l_q}. \tag{164}$$

Очевидно

$$\bigvee H_n = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigvee{}^p H_n. \tag{165}$$

Аналогично определяется симметричная градуированная алгебра кополиад $\bigvee^* H_n$ (т.е. алгебра контравариантных симметричных тензоров).

По аналогии с операциями дуализации (звезда Ходжа), ассоциированной с антисимметричными формами объемов, можно определить дуализацию *смешанных полиад* (или кополиад). Назовем полиаду $P \in \bigvee^p H_n$ смешанной, если она в каждой точке представляется в виде линейной комбинации *элементарных смешанных p-полиад* вида $dx^{k_1} \vee \cdots \vee dx^{k_p}$, где все k_i различны[19] (для смешанных кополиад элементарной кополиадой будет $\partial_{k_1} \vee \cdots \vee \partial_{k_p}$, где все k_i различны). Линейное подпространство (оно не образует подалгебры) всех смешанных полиад степени p обозначим $\mathrm{Mx}_{(x)} \bigvee^p H_n$ $0 \le p \le n$ (подпространство смешанных кополиад будет $\mathrm{Mx}^*_{(x)} \bigvee^p H_n$) Определим отображение $\circledast$: $\mathrm{Mx}_{(x)} \bigvee^p H_n \to \mathrm{Mx}_{(x)} \bigvee^{n-p} H_n$ (*симметричная звезда Ходжа*) как линейный оператор, действующий на базис смешанных полиад по формуле:

$$\circledast(dx^{k_1} \vee \cdots \vee dx^{k_p}) \equiv dx^{r_1} \vee \cdots \vee dx^{r_{n-p}}, \tag{166}$$

где n цифр $(k_1, \ldots, k_p, r_1, \ldots, r_{n-p})$ (возможно после надлежащей перестановки) образуют последовательность $1, \ldots, n$ (определение симметризованной звезды Ходжа на кополиадах аналогично). (Отметим, что симметрия операции $\vee$ позволяет не следить за знаками и ориентацией.) К примеру, формы Vol и $\widetilde{\mathrm{Vol}}$ в (163) с помощью симметричной звезды Ходжа записываются более компактно:

$$\mathrm{Vol} = \circledast 1; \quad \widetilde{\mathrm{Vol}} = \circledast 1^*, \tag{167}$$

где 1^* — постоянная (единичная) функция на H_n, рассматриваемая как элемент формального пространства кополиад $\bigvee^{0*} H_n$, которое мы отождествляем с $\mathcal{F}(H_n)$.

Определим симметричный дифференциал ⓓ, как R-линейное отображение $\bigvee^p H_n \to \bigvee^{p+1} H_n$, действующее в координатах по формуле:

$$ⓓ\, P \equiv \sum_{k_1,\ldots,k_p} \frac{\partial P_{k_1\ldots k_p}}{\partial x^s} dx^s \vee dx^{k_1} \vee \cdots \vee dx^{k_p}, \tag{168}$$

где $P = \sum\limits_{k_1,\ldots,k_p} P_{k_1\ldots k_p} dx^{k_1} \vee \cdots \vee dx^{k_p}$ — произвольный элемент $\bigvee^p H_n$. Отметим следующие свойства ⓓ:

$$ⓓ(P_1+P_2) = ⓓP_1+ⓓP_2 \text{ (линейность)}; \quad ⓓ(P\vee Q) = ⓓP\vee Q+P\vee ⓓQ \text{(правило Лейбница)}; \tag{169}$$

$ⓓ\, f = df$, где $f \in \bigvee^0 H_n$.

В этой статье мы не будем развивать теорию интегрирования полиад и полиадные (симметричные) аналоги теоремы Пуанкаре-Дарбу.

[19]Снова отметим, что определение смешанных полиад и кополиад не является инвариантным относительно множества всех координатных преобразований на H_n, однако оно является инвариантным относительно ее бесконечномерного подмножества конформных преобразований, осуществляемых набором k-голоморфных функций.

4.3 Геометрия производных функции поличисловой переменной

Для физических приложений важно уметь строить инвариантные (скалярные, векторные, тензорные и т.д.) характеристики из поличисловых объектов и их производных. Выше уже отмечалось, что преобразования, осуществляемые множествами k-голоморфных функций (и даже их расширениями до конформных преобразований CH_n) играют особую роль в геометрии P_n (точнее в геометрии H_n и алгебре P_n), поэтому мы отдельно проанализируем вопрос тензориальности геометрических объектов относительно преобразований CH_n (класс таких объектов, естественно, существенно шире, чем класс общековариантных тензоров). Будем именовать общековариантные тензоры *G-тензорами,* а величины, являющиеся тензорами относительно конформных преобразований CH_n но не являющиеся тензорами относительно общекоординатных преобразований — *C-тензорами.* Прежде всего, рассмотрим голоморфную производную от некоторой скалярной поличисловой функции:

$$\overset{k}{\partial} f = \sum_{s=1}^{n} \partial_{s-k} f^s e_s. \tag{170}$$

Ее вещественные компоненты — это различные частные производные от (различных!) скалярных функций. Как это хорошо известно из дифференциальной геометрии, ни частная производная по отдельности, ни вся их совокупность от разных функций в (170) не образует геометрического объекта относительно общих координатных диффеоморфизмов. Общековариантным геометрическим объектом является совокупность всех частных производных от всех компонент f, которые можно объединить в один голоморфный дифференциал:

$$df = \sum_{k=1}^{n} \overset{k}{f}\ d\overset{k}{x} = \sum_{s=1}^{n} df^s e_s, \tag{171}$$

компоненты которого также представляют собой общековариантные геометрические объекты — 1-формы df^s. В отличие от римановой геометрии с квадратичной метрикой, в геометрии Бервальда-Моора нет никакого простого способа построить из df или df^s вектор градиента. Конструкция соприкосновения, которую мы рассмотрим в следующем разделе, позволяет каждой 1-форме ставить в соответствие градиент, как контравариантный тензор валентности $n-1$. Аналогично, векторным полям конструкция соприкосновения будет сопоставлять полиаду валентности $n-1$.

Остановимся подробнее на преобразованиях из множества CH_n, имеющих следующий общий вид:

$$(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x'^1, \ldots, x'^n) = (f^1(x^{\sigma^{-1}(1)}), \ldots, f^n(x^{\sigma^{-1}(n)})), \tag{172}$$

где σ — некоторая перестановка, действующая на множестве индексов $1, \ldots, n$. Оператор $\overset{k}{\partial}$ преобразуется при таких преобразованиях по закону:

$$\overset{k}{\partial} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f^{\sigma(s-k)}}{\partial x^{s-k}} \overset{s-\sigma(s-k)}{\partial'} e_s, \tag{173}$$

что легко устанавливается при помощи формул (172), (72) и обратной к ней. При m-голоморфных преобразованиях σ действует на индексы как циклическая перстановка C^m. В этом случае $\sigma(p) = p + m$, $\sigma^{-1}(p) = p - m$, и (173) принимает вид:

$$\overset{k}{\partial} = (\overset{k}{\partial} \overset{k-m}{f}) \overset{k-m}{\partial'}. \tag{174}$$

Наконец, при 0-голоморфных преобразованиях ($\sigma = \mathrm{id}$) (173) принимает диагональный вид:

$$\overset{k}{\partial} = (\overset{k}{\partial} \overset{k}{f}) \overset{k}{\partial'}, \tag{175}$$

что означает, что линейное пространство векторов голоморфного базиса приводится в этом случае к прямой сумме одномерных пространств и каждый из векторов $\overset{k}{\partial}$ ведет себя как вектор при 0-голоморфных преобразованиях координат. В промежуточной ситуации, когда перестановка σ имеет инвариантные подмножества индексов, линейное пространство векторов голоморфного базиса распадается на векторные подпространства и соответствующие подмножества множества $\{\overset{k}{\partial}\}$ становятся векторами относительно преобразований (171) с таким σ.

Опираясь на полученные результаты, обсудим роль преобразований $CH_n^0 \subset CH_n^k \subset CH_n$ (соответственно 0-голоморфных, k-голоморфных ($k = 2, \ldots, n-1$) и конформных), которую они играют в определенных ранее конструкциях. Тот факт, что преобразования из CH_n сохраняют углы, был доказан в замечании 2 раздела 3.8. Тесно связанный с этим факт — инвариантность конуса (в касательном пространстве) относительно преобразований из CH_n. Действительно, если в некоторой изотропной системе координат локальный конус определяется как объединение гиперплоскостей $dx^l = 0$, $l = 1, \ldots, n$, то и в новой системе координат уравнения этих гиперплоскостей будут иметь в совокупности такой же вид: $dx'^l = 0$, $l = 1, \ldots, n$. Очевидно, что множества CH_n^0, CH_n^k и CH_n замкнуты каждое по отдельности относительно композиций своих элементов, т.е. образуют группоиды. Если ограничиваться обратимыми голоморфными преобразованиями (для чего достаточно потребовать, чтобы производные всех f^s в (171) по своим единственным аргументам нигде не обращались в нуль), то преобразования CH_n^0, CH_n^k и CH_n образуют вложенные в друг друга группы. Подгруппа CH_n^k группы CH_n играет особую роль в определениях обобщенной голоморфности, данных в разделе 3.8. Действительно, дифференциальные мономы D^{k_α} смешанного типа (т.е. с $k_\alpha = E_{i_1} + E_{i_2} + \cdots + E_{i_m}$ с различными i_r), входящие в условие (90), являются тензорами относительно преобразований CH_n^k, и не являются таковыми относительно CH_n. Первый вывод прямо следует из формул (174)-(175), а второй — из рассмотрения простого примера в малой размерности. Таким образом, *CH_n^k-инвариантный смысл можно придать лишь смешанным типам голоморфности.* Остальные введенные типы инвариантны лишь относительно P_n-линейных преобразований, а их инвариантное описание относительно CH_n^k-преобразований возможно лишь в терминах соответствующих дифференциальных полиномов. Легко проверяется, что введенные в 3.10 голоморфные l-формы конформно инвариантны относительно CH_n, а голоморфно-замкнутые формы инвариантны относительно CH_n. Также инвариантными относительно CH_n являются пространства $\mathrm{Mx}_{(x)} \bigvee^p H_n$ $0 \le p \le n$ и $\mathrm{Mx}^*_{(x)} \bigvee^p H_n$ смешанных полиад и кополиад, введенные в 4.2.

4.4 Скалярные инварианты

Для построения поличисловой теории поля с помощью принципа наименьшего действия, необходимо иметь набор независимых скалярных вещественных инвариантов, функцией которых может являться лагранжиан теории. Опираясь на опыт построения алгебраической теории в H_2 [16], можно сформулировать следующие вопросы, на которые мы должны ответить, прежде чем записать принцип наименьшего действия в поличисловой теории поля произвольной размерности:

- Как строить вещественные комбинации полей и их производных?
- Как строить скалярные комбинации полей и их производных?

Наводящие общие соображения, и конкретные соображения, которые возникают при анализе структуры теории в H_2, мы перечислим в виде следующих пунктов.

1. Уравнения теории H_2 — второго порядка, они включают в себя скалярный волновой

оператор

$$\Box_2 = 4\frac{\partial}{\partial h}\frac{\partial}{\partial \bar{h}}. \tag{176}$$

В многомерных поличисловых теориях на место оператора $\Box_2$ естественным образом выступает оператор n-ого порядка $\bigcirc_n$, введенный ранее в (101).

2. Таким образом, внутренняя логика многомерных теорий обнаруживает, что их уравнения должны быть дифференциальными уравнениями n-ого порядка вида:

$$\bigcirc_n F = {}^{(n)}J, \tag{177}$$

где ${}^{(n)}J$ — источник поличислового потенциала.

3. По аналогии с H_2 источник ${}^{(n)}J$ должен выражаться через потенциал $\mathcal{U}$ самодействия поличислового поля.

4. Из общего вида уравнений Эйлера-Лагранжа теории поля и вида (177), следует, что искомый лагранжиан теории должен зависеть от производных $n-1$ порядка.

5. Лагранжиан теории должен также быть скаляром относительно координатных преобразований.

6. В теории H_2 неголоморфность X и кинетический член Y вариационно эквивалентны, т.е. интегралы от них по $\mathcal{H}_2$ отличаются только граничными членами. Это свойство оказывается существенным в H_2 для применимости экстравариационного принципа [26]. Можно ожидать, что подобное свойство должно выполняться и в H_n.

7. Одновременная подстановка $h \leftrightarrow \bar{h}$, $F \leftrightarrow \bar{F}$ в действии теории H_2 не меняет X, Y, а следовательно и всего действия. Можно ожидать, что одновременые подстановки:

$$h \to C(h) \to \dots C^n(h) \to h, \quad F \to C(F) \to \dots C^n(F) \to F, \tag{178}$$

обобщающие приведенную выше подстановку для H_2, также не должны менять соответствующих фундаментальных комбинаций и самого действия. Эта симметрия по существу отражает равноправие координат в исходном пространстве поличисел и вещественность выражений.

Простейшим (и, по всей видимости, единственным) набором фундаментальных комбинаций производных гиперкомплексного потенциала в H_n, удовлетворяющий всем перечисленным выше свойствам, является набор $\{X^{(k)}\}_{k=1,\dots,n}$, который описывается следующей общей формулой:

$$X^{(k)} \equiv \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \overset{k+s-2}{F}}{\partial \overset{s-1}{x}} \frac{\partial \overset{k+s-1}{F}}{\partial \overset{s}{x}\, \partial \overset{s+1}{x} \dots \partial \overset{s+n-2}{x}}. \tag{179}$$

Для $\mathcal{H}_2$ эта формула дает уже известные комбинации:

$$X^{(1)} = F_{,h}\bar{F}_{,\bar{h}}; \quad X^{(2)} = \bar{F}_{,h}F_{,\bar{h}} \tag{180}$$

— кинетический член и неголоморфность, ранее обозначавшиеся как Y и X соответственно.

Сделаем три замечания.

1. Инварианты $X^{(k)}$ являются C-скалярами, но не являются G-скалярами (это проще всего увидеть, на примере X и Y в H_2 (формула (180))). Таким образом, *поличисловая теория поля (теория первого уровня), построенная на основе лагранжиана вида* $L = L(X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$ *будет представлять собой не общековариантную теорию,*

а CH_n-инвариантную теорию. Это обстоятельство осталось незамеченным в работе ([16]). Тем не менее, после вывода уравнений поличислового потенциала, их решения и физической интерпретации посредством конструкции соприкосновения, мы приходим к общековариантной теории поля (теории второго уровня). Отметим, что G-скаляром является комбинация общековариантных обобщений $X^{(k)}$ вида:

$$X^{(1)} + \cdots + X^{(n)}, \tag{181}$$

где в каждом $X^{(k)}$ частные производные в вещественных компонентах заменены на ковариантные (см. раздел 4.6).

2. Легко указать фундаментальный вещественный (G)-скаляр ξ_n, зависящий от самого поля, а не его производных. Он будет иметь вид

$$\xi_n = \|F\|^n \equiv \prod_{s=1}^{n} \overset{s}{F}\, I_n. \tag{182}$$

В работе [16] он не использовался.

3. Нетрудно построить и другие вещественные (C-)скаляры, например:

$$K^{(s)} \equiv \|d \overset{s}{F}\|^n, \ldots \tag{183}$$

но они будут приводить к теории поля с низшими производными (меньшими n).

4.5 Соприкасающиеся объекты

Рассмотрим координатные m-плоскости L_m изотропной системы координат, которые определяются набором уравнений вида:

$$x^{i_1} = 0, \ldots \quad , x^{i_{n-m}} = 0. \tag{184}$$

Как это следует из (18), стандартная процедура ограничения метрики на подмногообразие дает тривиальный результат: ${}^{(n)}\epsilon|_{L_m} = 0$. Более корректный переход на подмногообразия L_m осуществляется посредством *конструкции соприкосновения:* мы говорим, что метрика

$${}^{(m)}\epsilon \equiv {}^{(n)}\epsilon(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_{n-m}}, \qquad \underbrace{\ ,\ldots,\ }_{m \text{ пустых аргументов}} \qquad) \tag{185}$$

соприкасается с метрикой ${}^{(n)}\epsilon$ *вдоль координатных векторных полей* $\{\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_{n-m}}\}$ и обозначаем этот факт следующим образом:

$${}^{(m)}\epsilon \equiv \mathcal{E}^{n-m} \Rsh {}^{(n)}\epsilon, \tag{186}$$

где $\mathcal{E}^{n-m} = (\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_{n-m}})$ — система $n-m$ векторных полей (задающая некоторое распределение в H_n). Тот факт, что выражение в правой части (185) является m-мерной метрикой Бервальда-Моора на m-плоскости L_m (что отражено в обозначениях левой части (185)), проверяется элементарно. Это означает в частности, что конструкция соприкосновения (185) устанавливает изоморфизм (изометрию) L_m и H_m.

Разумеется, конструкция соприкосновения распространяется не только на координатные векторные поля для решения проблемы ограничения метрики на изотропные подпространства. Конструкцию (185) можно обобщить на любую совокупность $\{X_1, \ldots, X_{n-m}\}$

векторных полей, причем некоторые поля в этой совокупности могут повторяться. Будем называть эту совокупность *опорой* и обозначать ее посредством более подробной записи

$$\mathcal{E}^{n-m} \equiv \{X_1^{\alpha_1}, \ldots, X_k^{\alpha_k}\}, \quad \alpha_1 + \ldots \alpha_k = n - m. \tag{187}$$

В случае с повторяющимися векторными полями опора $\mathcal{E}^{n-m}$ уже не описывается в терминах классического распределения. На опорах $\mathcal{E}^{n-m}$ можно ввести $\digamma(H_n)$-алгебру, полагая

$$\mathcal{E}_1^{n-m_1} \uplus \mathcal{E}^{n-m_2} = \left\{ \begin{array}{cc} \mathcal{E}^{n-m_1-m_2}, & m_1 + m_2 \leq n \\ \mathcal{E}^{\varnothing}, & m_1 + m_2 > n \end{array} \right., \tag{188}$$

где $\mathcal{E}^{n-m_1-m_2}$ получается из $\mathcal{E}^{n-m_1}$ и $\mathcal{E}^{n-m_2}$ объединением их элементов (для общих векторных полей их индексы-показатели α_i складываются), а $\mathcal{E}^{\varnothing}$ — пустая опора, для которой

$$\mathcal{E}^{\varnothing} \Rsh {}^n\epsilon \equiv 0. \tag{189}$$

Умножение опор на скалярные функции производится покомпонентно (каждое векторное поле независимо от его кратности умножается на функцию). Алгебра опор следующим образом взаимодействует с операцией соприкосновения:

$$\mathcal{E}^{n-m_2} \Rsh (\mathcal{E}^{n-m_1} \Rsh {}^n\epsilon) = (\mathcal{E}^{n-m_1} \uplus \mathcal{E}^{n-m_2}) \Rsh {}^n\epsilon; \quad (f\mathcal{E}^{n-m}) \Rsh {}^n\epsilon = f^{n-m}(\mathcal{E}^{n-m} \Rsh \epsilon). \tag{190}$$

Рассмотрим соприкасающиеся конструкции, основанные на применении идеи соприкосновения к результатам раздела (4.3). Исследование таких конструкций необходимо для формулировки поличисловой теории поля, в которой основным объектом является поличисловой скалярный потенциал, а наблюдаемые физические характеристики строятся из этого потенциала и его производных. Как было установлено выше, голоморфный дифференциал df от функции поличисловой переменной определяет набор обычных дифференциалов: $df = \sum\limits_{s=1}^{n} df^s e_s$. Мы можем рассмотреть совокупность

$$\widetilde{\mathcal{E}}^{n-m} = \{(df^{k_1})^{\alpha_1}, \ldots, (df^{k_r})^{\alpha_r}\}, \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_r = n - m \tag{191}$$

и образовать ее соприкосновение с метрикой ${}^{(n)}\tilde{\epsilon}$. В результате мы получим m-вектор

$$\widetilde{\mathcal{E}}^{n-m} \Rsh {}^n\tilde{\epsilon} \equiv \overrightarrow{df}_{k_\alpha}, \tag{192}$$

где $k_\alpha \in Z_+$ — вектор неотрицательной n-мерной решетки (обозначение как в разделе 3.8). Таким образом, голоморфный дифференциал, описывающийся в общем случае набором n 1-форм — вещественных дифференциалов от компонент поличислового потенциала — порождает множество полилинейных по этим 1-формам симметричных m-кополиад. В частности, ковариантные опоры вида $\widetilde{\mathcal{E}}^{n-1}$ порождают посредством конструкции соприкосновения различные векторные поля.

Конструкцию соприкосновения можно распространить и на вторую метрику — форму объема vol или $\widetilde{\mathrm{vol}}$. Теперь, правда, соприкасающиеся конструкции будут отличны от нуля только в том случае, если опоры не содержат повторяющихся элементов (индексы α_i в (37) либо 1 либо 0). Получающиеся конструкции на ковариантных опорах $\widetilde{\mathcal{E}}^{n-m}$ будут давать m-векторы (антисимметричные тензоры валентности m). Комбинируя эти m-векторы с симметричными m-кополиадами, можно получать контравариантные тензоры с различными типами симметрии.

Составляя опору $\eth^{n-m}$ из дифференциальных операторов ∂_i $(i = 1, \ldots, n)$:

$$\eth^{n-m} = \{\partial_{k_1}, \ldots, \partial_{k_{n-m}}\} \tag{193}$$

(все k_i различны) и соприкасая вдоль нее метрику Бервальда-Моора, получим тензорный дифференциальный оператор $n-m$ порядка валентности m:

$$\widetilde{\eth}^{n-m} \Rsh {}^{n}\epsilon \equiv \overrightarrow{D}_{(n-m)}, \tag{194}$$

или в компонентах:

$$D^{i_1 \ldots i_m}_{(n-m)} \equiv \epsilon^{i_1 \ldots i_m j_1 \ldots j_{n-m}} \partial_{j_1} \ldots \partial_{j_{n-m}}. \tag{195}$$

Заменой ∂_i на ∇_i (см. следующий раздел) эти операторы превращаются в общековариантные. Относительно преобразований CH_n эти операторы ведут себя как тензоры и с частными производными. Отметим, что оператор $\overrightarrow{D}_{(n)}$ совпадает с оператором $\bigcirc_n$, введенным в разделе 3.8.

В качестве наглядного примера рассмотрим соприкасающиеся конструкции в H_3. Выберем в качестве поличислового потенциала функцию ln:

$$f(x) = \ln x = \sum_{s=1}^{3} \ln x^s \, e_s. \tag{196}$$

Голоморфный дифференциал дает 1-формы $\omega_s = dx^s/x^s$, $s = 1,2,3$. Опоры $\mathcal{E}^1_s = \{\omega_s\}$ и $\mathcal{E}^2_s = \{\omega_i, \omega_j\}$, (все i, j, s — различны), порождают вырожденные соприкасающиеся объекты, поэтому рассмотрим усредненные симметричные объекты в H_3:

$$\widetilde{g} \equiv \sum_{s=1}^{3} \widetilde{\mathcal{E}}^1_s \Rsh {}^{(3)}\epsilon; \quad V \equiv \sum_{s=1}^{3} \widetilde{\mathcal{E}}^2_s \Rsh {}^{(3)}\epsilon; \quad S \equiv \widetilde{\mathcal{E}}^3 \Rsh {}^{(3)}\epsilon, \tag{197}$$

где $\widetilde{\mathcal{E}}^3 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ — единственная опора третьего порядка, дающая отличный от нуля скаляр S. В явном виде компоненты симметричного тензора $\tilde{g}$, векторного поля V и скаляра S выражаются следующими формулами:

$$(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/x^3 & 1/x^2 \\ 1/x^3 & 0 & 1/x^1 \\ 1/x^2 & 1/x^3 & 0 \end{pmatrix}; \quad (V) = \left(\frac{2}{x^2 x^3}, \frac{2}{x^1 x^3}, \frac{2}{x^1 x^2} \right); \quad S = \frac{6}{x^1 x^2 x^3}. \tag{198}$$

Представляет интерес более подробно рассмотреть свойства 3-мерного риманова многообразия, которое порождает конструкция соприкосновения с поличисловым логарифмом. Ковариантная метрика g имеет вид:

$$(g) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2 x_3}{x_1} & x_3 & x_2 \\ x_3 & -\frac{x_1 x_3}{x_2} & x_1 \\ x_2 & x_1 & -\frac{x_1 x_2}{x_3} \end{pmatrix}. \tag{199}$$

Алгебра изометрий метрики (199) 3-мерна и представляется следующими векторными полями:

$$X_{(1)} = x^1 \partial_1 - x^3 \partial_3; \; X_{(2)} = x^2 \partial_2; \; X_{(3)} = x^1 \ln \left[\frac{x^2}{x^3} \right] \partial_1 + x^2 \ln \left[\frac{x^3}{x^1} \right] \partial_2 + x^3 \ln \left[\frac{x^1}{x^2} \right] \partial_3. \tag{200}$$

Можно сделать вывод о том, что риманово многообразие, соприкасающееся с метрикой Бервальда-Моора вдоль голоморфной 1-формы поличислового логарифма, однородно. Если в качестве координаты T мирового времени выбрать комбинацию $\Delta^{1/2} = (x^1 x^2 x^3)^{1/2}$ (для компоненты в положительном октанте), то на поверхности $\mathcal{S}^2_T$ одновременных событий $T = \text{const}$ и мы будем иметь

$$dx^3 = -T^2 \left(\frac{dx^1}{(x^1)^2 x^2} + \frac{dx^2}{(x^2)^2 x^1} \right). \tag{201}$$

Таким образом, ограничение метрики g на $\mathcal{S}^2_T$ примет вид:

$$h_T = \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik} dx^i \otimes dx^k|_{x^1x^2x^3=T^2} \stackrel{201}{=} \cdots = -2T^2((du^1)^2 + (du^2)^2 + du^1\, du^2), \qquad (202)$$

где $u^1 = \ln x^1$, $u^2 = \ln x^2$. Из вида (202) следует, что подмногообразия $\mathcal{S}^2_T$ одновременных событий — плоские и евклидовы (!), что еще раз подтверждает вывод об аналогичности свойств сферы $\mathcal{S}^2_{BM}$ свойствам 2-мерного евклидова пространства, упомянутый в разделе 2.6.1, а также иллюстрирует факт о нетривиальном включении в многомерные гиперболические пространства евклидовых пространств с компактной группой вращений.

4.6 Ковариантная производная

Рассмотрение предыдущих конструкций в произвольной криволинейной (т.е. неизотропной) системе координат требует введения ковариантной производной ∇. Минимальная ее версия получится, если мы потребуем обращения в нуль ее кручения:

$$\mathrm{Tors}_\nabla(X,Y) \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0, \qquad (203)$$

потребуем коммутативность ковариантного дифференцирования со сверткой (т.е. согласованность ковариантного дифференцирования векторов и 1-форм) и ковариантное постоянство метрики Бервальда-Моора:

$$\nabla\, {}^{(n)}\epsilon = 0. \qquad (204)$$

Переходя к координатному представлению связности с помощью символов Кристоффеля:

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij}\partial_k, \quad i,j,k = 1,\ldots,n, \qquad (205)$$

где ∂_i — координатные векторные поля, и дифференцируя компоненты метрики Бервальда-Моора (в произвольной системе координат), получим[20]:

$$\frac{\partial E_{k_1\ldots k_n}}{\partial x^l} \equiv \nabla_{\partial_l}{}^{(n)}\epsilon(\partial_{k_1},\ldots,\partial_{k_n}) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \Gamma^r_{k_s l} E_{k_1\ldots r\ldots k_n}, \qquad (206)$$

где была использована симметричность символов Кристоффеля по нижним индексам, вытекающая из равенства нулю кручения и ковариантное постоянство метрики Бервальда-Моора. Из формулы (206) и формулы (157) для сверток многомерной матрицы метрики Бервальда-Моора и обратной к ней, легко получить следующую формулу:

$$\sum_{k_1,\ldots,k_{n-1}} E^{mk_1\ldots k_{n-1}} \frac{\partial E_{rk_1\ldots k_{n-1}}}{\partial x^s} = \frac{2n(n-1)!}{n+1}\Gamma^m_{sr} + \frac{(n-1)(n-1)!}{n+1}\sum_{l=1}^{n}\Gamma^l_{ls}\delta^m_r. \qquad (207)$$

Образуя свертку выражения (207) по индексам m и s и выражая свернутые символы Кристоффеля, находим:

$$\sum_{l=1}^{n}\Gamma^l_{lr} = \frac{n+1}{(3n-1)(n-1)!}\sum_{m,k_1,\ldots,k_{n-1}} E^{mk_1\ldots k_{n-1}}\frac{\partial E_{rk_1\ldots k_{n-1}}}{\partial x^m}. \qquad (208)$$

[20] Для экономии букв мы оставляем для метрики Бервальда-Моора обозначение ${}^{(n)}\epsilon$, а для ее компонент принимаем обозначение $E_{k_1,\ldots k_n}$, поскольку в произвольной системе координат эти компоненты отнюдь не совпадают с компонентами симметричного символа Леви-Чивиты. При этом и компоненты $E^{k_1\ldots k_n}$ обратной метрики ${}^{(n)}\tilde{\varepsilon}$ не совпадают с ними, однако соотношения обратности (157) (с заменой ϵ на E) имеют место в любой системе координат, поскольку смешанный дельта-символ — общековариантный тензор.

Подставляя это в (207) и выражая символы Кристоффеля, получаем окончательно для коэффициентов симметричной связности, согласованной с метрикой Бервальда-Моора:

$$\Gamma^m_{sr} = \frac{n+1}{2n(n-1)!}\left(\sum_{k_1,\ldots,k_{n-1}} E^{mk_1\ldots k_{n-1}}\frac{\partial E_{rk_1\ldots k_{n-1}}}{\partial x^s} - \frac{n-1}{3n-1}\delta^m_r \sum_{q,k_1,\ldots,k_{n-1}} E^{qk_1\ldots k_{n-1}}\frac{\partial E_{sk_1\ldots k_{n-1}}}{\partial x^q}\right) \tag{209}$$

при $n > 2$. При $n = 2$ имеет место стандартная формула.

4.7 Формы объема для вложенных объектов

В геометриях финслерова типа возникает проблема конструирования инвариантной (общековариантной) формы объема. Координатная форма vol, построенная ранее является скаляром лишь относительно подгруппы унимодулярных диффеоморфизмов. С другой стороны, прямолинейное применение рассуждений, позволяющих в римановой геометрии рассматривать в качестве формы объема величину $\sqrt{|\Delta|}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ Δ (детерминант матрицы метрического тензора) в нашем случае не проходит, ввиду проблемы конструирования относительного скаляра из компонент финслеровой метрики, матрица которой является многомерной. В настоящем разделе мы рассмотрим одну достаточно общую конструкцию, которая позволяет строить формы объема для всяких метрических форм четной валентности [20]. Напомним, что в случае римановой геометрии имеется невырожденная метрика с квадратной матрицей компонент (g). Закон преобразования метрики при смене системы координат в матричной форме имеет вид:

$$(g) = J^T \cdot (g)' \cdot J, \tag{210}$$

где J — матрица Якоби. Вычисляя детерминант левой и правой частей, получаем:

$$\Delta = (\det J)^2 \Delta', \tag{211}$$

откуда

$$\sqrt{\Delta'} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\det J}. \tag{212}$$

Равенство (212) означает, что величина $\sqrt{\Delta}$ ведет себя как относительный скаляр с весом -1, в то время как координатная форма объема — это относительный скаляр с весом +1. Следовательно их произведение является скаляром с весом нуль (на самом деле это будет псевдоскаляр, поскольку он "чувствует" ориентацию системы координат). Идея нашей конструкции заключается в приведении многомерных матриц к квадратным и использованию (211)-(212).

Рассмотрим пространство $(T^*_x\mathcal{M})^{\otimes p}$ всех форм (ковариантных тензоров) степени p в некоторой фиксированной точке $x \in \mathcal{M}$ многообразия $\mathcal{M}$, $\dim \mathcal{M} = d$. После фиксации базиса это множество можно отождествить с пространством p-кубических вещественных матриц $M_{d^{\times p}}$ размерности d. Пусть теперь $d = 2k$ и пусть зафиксировано некоторое произвольное разбиение множества векторных аргументов всех $2k$-форм на два подмножества по k элементов. Без ограничения общности мы можем считать, что первые k аргументов отнесены к первому подмножеству, а вторые k элементов — ко второму. Определим отображение χ: $(Z^+_d)^{\times k} \to \{1, \ldots, d^k\}$, которое упорядочивает множество элементов k-мерного куба целочисленной (неотрицательной) решетки. Это отображение упорядочивания индуцирует изоморфизм (неканонический, поскольку он зависит от выбора χ) χ_*: $M_{d^{\times 2k}} \leftrightarrow M_{d^k \times d^k}$ между пространствами $2k$- кубических матриц размерности d и квадратных матриц размерности d^k, который каждому элементу $A_{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha_{k+1}\alpha_{2k}}$ всякой p-кубической матрицы A

ставит в соответствие элемент $\chi_*(A)_{ab}$ по правилу[21]:

$$\chi_*(A)_{ab} \equiv A_{\chi^{-1}(a)\chi^{-1}(b)}. \tag{213}$$

Построенный изоморфизм позволяет перенести все операции из стандартной алгебры квадратных матриц с $M_{d^k \times d^k}$ в $M_{d^{\times 2k}}$. А именно, пусть $\hat{\alpha}$: $M_{d^k \times d^k} \to M_{d^k \times d^k}$ — оператор на $M_{d^k \times d^k}$, β: $M_{d^k \times d^k} \to R$ — числовая функция на $M_{d^k \times d^k}$ и $\star$: $M_{d^k \times d^k} \times M_{d^k \times d^k} \to M_{d^k \times d^k}$ — бинарная операция на $M_{d^k \times d^k}$. Тогда изоморфизм χ_* индуцирует оператор $\hat{\alpha}_\chi$: $M_{d^{\times 2k}} \to M_{d^{\times 2k}}$, числовую функцию β_χ: $M_{d^{\times 2k}} \to R$ и бинарную операцию $\overset{\chi}{\star}$ $M_{d^{\times 2k}} \times M_{d^{\times 2k}} \to M_{d^{\times 2k}}$ согласно следующих формул:

$$\hat{\alpha}_\chi \equiv \chi_*^{-1} \circ \hat{\alpha} \circ \chi_*;\ (I) \quad \beta_\chi \equiv \beta \circ \chi_*;\ (II) \quad \bullet \overset{\chi}{\star} \bullet \equiv \chi_*^{-1}(\chi_*(\bullet) \star \chi_*(\bullet))\ (III). \tag{214}$$

Формулы I, II, III в (214) как частные случаи включают в себя операции суммы, умножения, транспонирования матриц[22] и различные числовые характеристики матрицы (например, ее детерминант или перманент).

Пусть теперь j будет матрицей Якоби некоторого невырожденного преобразования координат на исходном многообразии $\mathcal{M}$:

$$j^\alpha_\beta \equiv \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \tag{215}$$

и пусть j^{-1} будет обратная к ней. В пространстве $2k$-форм $(T^*_x)^{\otimes 2k}$ это преобразование индуцирует $2k$-кубическую матрицу J^{-1}, такую, что

$$\Theta'_{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{2k}} = (J^{-1})^{\beta_1\ldots\beta_k}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\Theta_{\beta_1\ldots\beta_k\beta_{k+1}\ldots\beta_{2k}}(J^{-1})^{\beta_{k+1}\ldots\beta_{2k}}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{2k}}, \tag{216}$$

для всякой формы $\Theta \in (T^*_x)^{\otimes 2k}$. Очевидно, что $J^{-1} = (j^{-1})^{\otimes k}$. Выражение (216) посредством χ_* может быть переведено в $M_{d^k \times d^k}$:

$$\chi_*(\Theta') = \chi_*(\Theta)' = \chi_*(J^{-1})^T \chi_*(\Theta)\chi_*(J^{-1}). \tag{217}$$

Формула (217) аналогична (210). Вычисляя детерминант от обеих частей (217), получаем:

$$\det \chi_*(\Theta)' = \frac{\det \chi_*(\Theta)}{[\det \chi_*(J)]^2}, \tag{218}$$

где было использовано соотношение $\chi_*(J^{-1}) = \chi_*(J)^{-1}$, которое в свою очередь, непосредственно следует из (214)-I. Из (218) следует, что для формы Θ скалярная плотность веса -1 существует, при условии (достаточном, но не необходимом!), что $[\det \chi_*(J)]^2$ является некоторой степенью детерминанта $\det j$. В этом случае, степени выражений $[\det \chi_*(J)]^2$ и $\det j$ как однородных полиномов относительно производных $\partial x'/\partial x$ должны быть связаны соотношением:

$$\deg_{(\partial x'/\partial x)}[\det \chi_*(J)]^2 = l\deg_{(\partial x'/\partial x)} \det j, \tag{219}$$

[21]Например, в качестве a и b могут быть взяты k-значные цифры d-адичного представления соответствующей половины группы индексов:

$$a = \alpha_1 d^0 + \alpha_2 d^1 + \cdots + \alpha_k d^{k_1}; \quad b = \beta_1 d^0 + \beta_2 d^1 + \cdots + \beta_k d^{k_1}.$$

[22]Умножение матриц на число сводится к произведению матрицы на матрицу, пропорциональную единичной.

где $l \in R$. Поскольку

$$\deg_{(\partial x'/\partial x)} \det j = d, \quad \deg_{(\partial x'/\partial x)} [\det \chi_*(J)]^2 = 2 \cdot \deg J \cdot \deg \det |_{M_{d^k \times d^k}} = 2kd^k, \tag{220}$$

мы приходим к соотношению:

$$l = 2kd^{k-1}, \tag{221}$$

которое означает, что величина

$$|\det \chi_*(\Theta)|^{1/l} = |\det{}_\chi \Theta|^{1/2kd^{k-1}} \tag{222}$$

является подходящим кандидатом на скалярную плотность веса -1 относительно общих координатных преобразований. В частном (выделенном) случае квадратичных форм ($k = 1$), $l = 2$ и мы приходим к стандартному выражению для формы объема, которое не зависит от размерности многообразия (при этом форма не обязана быть симметричной).

Разумеется, условие (219) не является достаточным для справедливости всех наших рассуждений, поскольку мы должны убедиться в том, что выражение $|\det \chi_*(J)|^{2/l}$ с l из (221) есть в действительности с точностью до знака $\det j$. Рассмотрим преобразование $\varsigma_{\mu\nu} : j \to \tilde{j}$, которое осуществляет перестановку строк в j: ν-ой и μ-ой. Перестановка строк (как оператор) индуцирует преобразование $\varsigma'_{\mu\nu}$: $J \to \tilde{J}$ в $M_{d \times 2k}$, которое переставляет любой матричный элемент J верхний индекс которого содержит μ и (или) ν с элементами, которые в на тех же позициях имеют индексы ν и (или) μ соответственно. Это преобразование, в свою очередь, индуцирует преобразование $(\varsigma'_{\mu\nu})_*$: $\chi_*(J) \to \widetilde{\chi_*(J)}$, действующее по правилу: $(\varsigma'_{\mu\nu})_*(\chi_*(J)) = \chi_*(\varsigma'_{\mu\nu} J)$. Оно взаимно переставляет строки матрицы $\chi_*(J)$, с номерами, прообразы которых $\chi^{-1}(a) = \alpha_1 \ldots \alpha_k$ содержат μ и (или) ν. Полное число таких перестановок в матрице $\chi_*(J)$ равно:

$$P = \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} C_i^k = (3^k - 1)/2. \tag{223}$$

Таким образом, при любой перестановке двух строк матрицы j (для столбцов все рассуждения дословно повторяются), $\det \chi_*(J)$, рассматриваемый как однородный полином от производных $\partial x'/\partial x$ будет преобразовываться по правилу: $\det(\varsigma'_{\mu\nu})_*(\chi_*(J)) = (-1)^P \det \chi_*(J)$. Это значит, что детерминант $\det \chi_*(J)$ с точностью до постоянного множителя есть $P + 2m$-ая (m — любое целое) степень $\det j$ который является единственной (с точностью до множителя) функцией $\partial x'/\partial x$, обладающий свойством антисимметрии по отношению к перестановке любых пар строк или столбцов. Ввиду вида самого изоморфизма χ_* (отождествление соответствующих элементов) и структуре тензорного произведения $j^{\otimes l}$ матрицы J, постоянный множитель не может зависеть от самой матрицы j. Тот факт, что он равен единице, непосредственно проверяется вычислением детерминанта образа тождественного координатного преобразования:

$$\det \chi_*(E) = \det I_{d \times d} = 1. \tag{224}$$

Теперь мы должны сравнить выражения:

$$\det \chi_*(J) = (\det\, j)^{P+2m} \tag{225}$$

с (220) и (222). Сравнивая, приходим к равенству: $P + 2m = l/2$ или с учетом (221) и (223):

$$3^k - 2kd^{k-1} = 4m + 1, \tag{226}$$

которое следует рассматривать как условие на размерность многообразия d и степень $2k$-формы, для которых форма объема может быть записана используемым нами методом. Все решения (227) представляют собой тройки (m, k, d). Для $-5 \leq m \leq 5$ имеются следующие решения (226):

$$(0, 1, d) \text{ (— стандартный случай)}, \ (0, 2, 2), \ (1, 2, 1), \ (-1, 2, 3), \ (2, 2, 0), \tag{227}$$

$$(-2, 2, 4), \ (-3, 2, 5), \ (4, 4, 2), \ (-4, 2, 6), \ (5, 3, 1), \ (-5, 2, 7).$$

Для метрик типа метрики Бервальда-Моора подход работает только в четных размерностях. Полагая в (226) $d = 2k$, приходим к формуле:

$$3^k - (2k)^k = 4m + 1. \tag{228}$$

Решения для $d = 2, 4, 8$ имеют вид:

$$(0, 1, 2), \ (-2, 2, 4), \ (-1004, 4, 8). \tag{229}$$

Любопытно, что для $d = 6$ (H_6) уравнение (228) не имеет решений.

С учетом формул (221)-(222) имеем следующее представление для инвариантной формы объема в H_4:

$$\mathrm{vol} = |\det_{\chi}({}^{(4)}\epsilon)|^{1/16} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4. \tag{230}$$

Отметим, что конкретный выбор χ влияет на значение $\det_\chi {}^4\epsilon$, (и вообще детерминантов многомерных кубических матриц) но не влияет на трансформационные свойства этого выражения.

5 Алгебраические аспекты поличисловых голоморфных функций

5.1 Деформации подмногообразий P_n.

В разделе 3.9 мы уже касались деформационных аспектов голоморфных функций поличисловой переменной. В настоящем разделе мы остановимся на этом вопросе немного подробнее. Напомним некоторые общие сведения из абстрактной теории деформационных структур на гладких многообразиях [20].

Свободной деформационной структурой $\mathfrak{D}$ называется совокупность $\langle \mathcal{B}, \mathcal{M}, \mathcal{E}, \Theta \rangle$, где:
$\mathcal{B}$ и $\mathcal{M}$ — гладкие связные замкнутые многообразия, $\dim \mathcal{B} = d$, $\dim \mathcal{M} = n \geq d$;
$\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{M})$ — некоторое подмножество гладких вложений $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{M}$;
$\Theta \in (T^*\mathcal{M})^{\otimes p}$ — некоторая гладкая вещественно-значная форма степени p на $\mathcal{M}$. Примем следующую деформационную терминологию: $\mathcal{B}$ — *d-тело*, $\mathcal{M}$ — *d-многообразие*, Θ — *d-метрика*, образ $\iota(\mathcal{B}) \equiv \mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ для некоторого $\iota \in \mathcal{E}$ — *d-объект* или *деформант*.

Всякое вложение ι индуцирует форму $(d\iota)^* \in (T^*\mathcal{B})^{\otimes p}$, где $(d\iota)^*$ — кодифференциал вложения ι, отображающий $(T^*\mathcal{M})^{\otimes p} \to (T^*\mathcal{B})^{\otimes p}$. Рассмотрим некоторое другое вложение $\iota' \in \mathcal{E}$, которое имеет свой собственный d-объект $\iota'(\mathcal{B}) \equiv \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{M}$. На расслоении $(T^*\mathcal{B})^{\otimes p}$ мы получим форму $(d\iota')^*\Theta$. Легко видеть, что композиция

$$\iota' \circ \iota^{-1} \equiv \zeta \tag{231}$$

есть диффеоморфизм $\mathcal{S} \to \mathcal{S}' = \zeta(\mathcal{S})$, который мы будем называть *деформацией* d-тела в $\mathcal{M}$. Всякая деформация имеет ζ имеет естественную локальную меру — разность двух форм (перенесенных на d-тело d-метрик), взятых в одной и той же точке $b \in \mathcal{B}$:

$$(d\iota')^*\Theta(b) - (d\iota)^*\Theta(b) \equiv \Delta_{\mathcal{B}}(b), \tag{232}$$

где мы ввели обозначение $\Theta_{\mathcal{B}}$ для *формы деформации* на $\mathcal{B}$. Используя определение (231) и известное свойство кодифференциала от композиции отображений:

$$(d(\alpha \circ \beta))^* = (d\beta)^* \circ (d\alpha)^*, \tag{233}$$

приходим к эквивалентному представлению формы деформаций:

$$\Delta_{\mathcal{B}} = (d\iota)^*((d\zeta)^*\Theta - \Theta) \tag{234}$$

и определяем форму деформации

$$\Delta_{\mathcal{S}} \equiv ((d\iota)^*)^{-1}\Delta_{\mathcal{B}} = (d\zeta)^*\Theta - \Theta \tag{235}$$

на деформанте $\mathcal{S}$.

Отметим, что описанная выше абстрактная конструкция обобщает базовые концепции физики сплошных сред и теории упругости [27, 28] (упругие тела, тензор деформаций, материальное и относительное (лагранжево) описание кинематики сплошных сред и т.д.) и является основой для представления многих современных полевых теорий [29, 30, 31, 32]. В работе [20] показано, что деформации образуют специальную алгебру, допускают классификацию и описание деформационной истории.

Для нашей статьи представляет интерес случай, когда $\mathcal{M}{=}P_n$ (или $\mathcal{M}{=}H_n$), и $\Theta = {}^{(n)}\epsilon$. Пусть задана некоторая деформация d-тела: ζ: $\mathcal{S} \to \mathcal{S}'$. Оказывается, что средства поличисловой алгебры и голоморфных функций позволяют интепретировать эту деформацию как сужение на $\mathcal{S}$ некоторой голоморфной функции f: $P_n \to P_n$. Действительно, тот факт, что такое сужение можно интерпретировать как деформацию уже обсуждался в разделе 3.9. Коротко повторяя рассуждения, мы можем констатировать следующее: любая функция $P_n \to P_n$, ограниченная на подмногообразие, будет в качестве образа иметь подмногообразие, т.е. может рассматриваться как деформация[23]. Мы должны лишь убедиться, что *всякая деформация может быть реализована как отображение* $P_n \to P_n$. Для наглядности рассуждений удобно перейти к координатам. Пара вложений d-тела описывается парой функций $\mathcal{B} \to P_n$ вида:

$$\Phi = \sum_{s=1}^{n} \varphi^s(u_1, \ldots, u_d)e_s, \quad \Psi = \sum_{s=1}^{n} \psi^s(u_1, \ldots, u_d)e_s, \tag{236}$$

где $\{u_k\}_{k=1,\ldots,d}$ — координаты на $\mathcal{B}$. Наша цель заключается в том, чтобы показать, что для всяких Φ и Ψ найдется f: $P_n \to P_n$, удовлетворяющее условию:

$$\Psi = f \circ \Phi. \tag{237}$$

В дальнейших рассуждениях ограничимся неизотропными деформантами и их общими положениями. Рассмотрим в качестве функции f функцию из класса голоморфности $\mathcal{G}^n_{E_{i_1},\ldots,E_{i_{n-d}}}$, где все i_s — различны. В координатах такая функция будет иметь вид

$$f = \sum_{s=1}^{n} f^s(x^{k_1^s}, \ldots, x^{k_d^s}), \tag{238}$$

где все $\{k_i^s\}$ различны для каждого фиксированного s, и $k_i^{s+1} = k_i^s + 1$. С учетом вида (238), уравнение (237) покомпонентно будет приводить к вещественным функциональным уравнениям вида:

$$\varphi^s(u_1, \ldots, u_d) = f^s(\psi^{k_1^s}(u_1, \ldots, u_d), \ldots, \psi^{k_d^s}(u_1, \ldots, u_d)) \quad s = 1, \ldots, n, \tag{239}$$

[23]Мы должны исключить из рассмотрения деформации, сопровождающиеся изменением размерности (склеивания и сплющивания).

относительно функций f^s. Для некоторого фиксированного s в (239) перейдем к новой системе координат на $\mathcal{B}$:

$$y^1 = \psi^{k_1^s}(u_1, \ldots, u_d); \ldots y^d = \psi^{k_d^s}(u_1, \ldots, u_d). \tag{240}$$

Такой переход возможен в силу максимальности ранга дифференциала вложения (он равен d) и предположению об общем положении деформанта в P_n. Подставляя обращения (240) в левую часть (239) получим:

$$\varphi^s(\chi^1(y^1, \ldots, y^d), \ldots, \chi^d(y^1, \ldots, y^d)) = f^s(y^1, \ldots, y^d) \tag{241}$$

мы приходим к явному выражению искомой функции f^s (функции φ^s и χ^i известны). Повторяя аналогичные рассуждения для остальных компонент f, мы придем к некоторому полному ее выражению. Таким образом, деформации d-тел общего положения в P_n можно описывать голоморфными функциями класса $\mathcal{G}^n_{E_{i_1}, \ldots, E_{i_{n-d}}}$. Если на каком-то шаге предположение об общности положения не работает и замена координат не проходит, следует рассмотреть функцию f другого класса того же типа $\mathcal{G}^n_{E_{i_1}, \ldots, E_{i_{n-d}}}$ (т.е. класс с другим набором различных индексов $\{i_1, \ldots, i_{n-d}\}$). Замечательным обстоятельством является *локальная единственность голоморфной функции f, осуществляющей деформацию.* Этот факт следует из рассмотрения в разделе 3.9 вопроса о голоморфном продолжении с подмногообразий. Описание деформаций изотропных деформантов с помощью голоморфных функций возможно, но технически оно устроено более сложно и, в соответствии с рассмотрениями раздела 3.9, оно не будет обладать свойство единственности. Мы не будем в настоящей статье подробно останавливаться на этом вопросе.

Деформационная структура $\langle \mathcal{B}, P_n, \mathcal{E}, {}^{(n)}\epsilon \rangle$ представляет собой естественную основу для построения специального финслерова аналога теории сплошных сред и специальной финслеровой теории поля в деформационном представлении.

5.2 Поличисловые реализации абстрактных алгебр

В настоящем разделе мы покажем, что между R-алгебрами и квадратичными функциями $P_n \to P_n$ (билинейными формами голоморфных координат) имеется взаимно-однозначное соответствие. Таким образом, алгебра поличисел представляет собой в этом смысле универсальный инструмент для описания и исследования R-алгебр.

Как известно, всякая n-мерная R-алгебра $\mathcal{A}_n$ задается в некотором базисе своими структурными постоянными $\{c^k_{ij}\}_{k=1,\ldots,n}$:

$$\delta_i \cdot \delta_j = \sum_{k=1}^{n} c^k_{ij} \delta_k, \tag{242}$$

где $\{\delta_i\}_{i=1,\ldots,n}$ — некоторый базис алгебры $\mathcal{A}_n$. Произведение двух элементов $a = \sum\limits_{i=1}^{n} a^i \delta_i$ и $b = \sum\limits_{i=1}^{n} b^i \delta_i$ из $\mathcal{A}_n$ имеет с учетом (242) вид:

$$a \cdot b = \sum_{i,j,k=1}^{n} c^k_{ij} a^i b^j \delta_k. \tag{243}$$

Рассмотрим теперь алгебру $\mathcal{A}_n$ и алгебру P_n. Фиксируем в $\mathcal{A}_n$ некоторый произвольный базис $\{\delta_i\}_{i=1,\ldots,n}$, а в P_n некоторый изотропный базис $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ и построим биективное отображение ρ: $\mathcal{A}_n \to P_n$ по равенству координат элементов:

$$a = \sum_{i=1}^{n} a^i \delta_i \mapsto \rho(a) = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i. \tag{244}$$

Очевидно, отображение ρ согласовано с линейными операциями в $\mathcal{A}$ (сумма отображается в сумму, а умножение на скаляр — в умножение на скаляр). Покажем, что операция умножения $\cdot$ отображением ρ переводится в операцию $\overset{\rho}{\cdot}$, которая описывается следующей формулой:

$$a \cdot b = c \overset{\rho}{\mapsto} \rho(a) \overset{\rho}{\cdot} \rho(b) = \rho(c), \tag{245}$$

где

$$\rho(a) \overset{\rho}{\cdot} \rho(b) = (X_{\rho(a)})^T (\mathcal{Q}^{\mathcal{A}})(X_{\rho(b)}), \tag{246}$$

где (X_A) — вектор-столбец составленный из голоморфных координат $\{\overset{1}{A}, \cdots \overset{n}{A}\}$ элемента $A \in P_n$, $(\mathcal{Q}^{\mathcal{A}})$ — некоторая поличисловая матрица, которая при фиксированных базисах в $\mathcal{A}_n$ и P_n однозначно определяется алгеброй $\mathcal{A}_n$, точнее ее кубической матрицей структурных констант.

Для доказательства (245)-(246) и вывода явной формулы для $\mathcal{Q}^{\mathcal{A}}$, вычислим правую часть (246) с учетом того, что $\rho(a)^i = a^i$, $\rho(b)^i = b^i$:

$$(X_{\rho(a)})^T (\mathcal{Q}^{\mathcal{A}})(X_{\rho(b)}) \sum_{l,m=1}^{n} \mathcal{Q}^{\mathcal{A}}_{lm} \overset{l}{a}\overset{m}{b} = \sum_{l,m,s=1}^{n} \mathcal{Q}^{\mathcal{A}\,s}_{lm} a^{s-l} b^{s-m} e_s. \tag{247}$$

Сравнивая (247) с (243) (для сравнения удобно сделать замену индексов суммирования в (247): $l \to k = s - l$, $m \to p = s - m$), приходим к выводу, что правые части выражений (247) и (243) будут переходить друг в друга при отображении ρ, если

$$c^s_{kp} = (\mathcal{Q}^{\mathcal{A}})^s_{s-k,s-p} \tag{248}$$

(вычитания индексов как обычно производятся по модулю n). Таким образом, умножение в любой алгебре, посредством отображения ρ действительно можно описывать поличисловыми билинейными формами.

Приведем явный вид соответствующих поличисловых матриц для некоторых известных R-алгебр:

$$\mathcal{Q}^{\mathcal{A}^k_2} = \begin{pmatrix} ke_1 & e_2 \\ e_2 & e_1 \end{pmatrix}, \tag{249}$$

где $\mathcal{A}^{-1}_2 = C$, $\mathcal{A}^{+1}_2 = P_2$ и $\mathcal{A}^0_2$ — алгебра дуальных чисел (базис $\{1, \omega\}$, $\omega^2 = 0$.)

Для алгебры кватернионов с стандартном базисе получаем матрицу

$$\mathcal{Q}^{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} -e_1 & -e_4 & -e_3 & e_2 \\ e_4 & -e_1 & -e_2 & e_3 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & e_4 \\ e_2 & e_3 & e_4 & -e_1 \end{pmatrix}. \tag{250}$$

Отметим, что формула (248) имеет место только в классе изотропных базисов, т.е. она инвариантна лишь относительно абелевой подгруппы D_{n-1} группы $GL(n, R)$ унимодулярных дилатаций. Произвольная смена базиса в алгебре $\mathcal{A}_n$ изменит конкретный вид формулы (248), но сам факт биективного соответствия алгебры $\mathcal{A}_n$ и алгебры P_n с умножением посредством некоторой билинейной формы от выбора базисов не зависит[24].

[24]Использование изотропного базиса упрощает доказательство и дает относительно простую формулу связи матрицы $\mathcal{Q}^{\mathcal{A}}$ с матрицей структурных констант. Переходя на язык аналогий с физикой, можно сказать, что класс изотропных базисов соответствует классу инерциальных систем отсчета, а возможность локального описания произвольного движения в терминах инерциальных систем отсчета (посредством перехода в локально сопутствующую инерциальную систему) соответствует нашему приему описания произвольной алгебры в терминах алгебры поличисел в изотропном базисе посредством покомпонентной биекции ρ.

Литература

[1] Пенроуз Р. Путь к реальности или законы, управляющие вселенной. РХД, Москва-Ижевск, 2007.

[2] Владимиров Ю.С. Пространство-время: явные и скрытые размерности. (изд-е 2-е переработанное) М., Книжный дом «Либроком», 2010.

[3] Кокарев С.С. Три лекции о законах Ньютона, В сб. трудов РНОЦ "Логос Ярославль, вып.1, с. 45-72, 2006; arXiv: 0905.3285v1[gr-qc].

[4] Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля (в 4-х томах), М., УРСС, 1996-2000.

[5] Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М., Наука, 1987.

[6] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М., Наука, 1979.

[7] Шабат Б.О. Введение в комплексный анализ. М., Наука, 1985.

[8] Балк М.Б., Балк Г.Д. Реальные применения мнимых чисел. Киев, Радянска школа, 1988.

[9] Элиович А.А., Санюк В.И. Некоторые аспекты применения полинорм в теории поля // *ТМФ*, 2010, 2, 162, с. 163-178.

[10] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973.

[11] Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. М., Наука, 1969.

[12] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(13), т. 7, с. 78-126, 2010.

[13] Гарасько Г.И., Павлов Д.Г. Геометрияя невырожденных поличисел. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(7), 4, с. 3-25, 2007.

[14] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., Тетру, 2009, 265 с.

[15] Balan V., Bogoslovskiy G.Yu., Kokarev S.S., Pavlov D.G., Siparov S.V., Voicu N. Geometrical Models of the Locally Anisotropic Space-Time. // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 1 (15), том 8, с. 4-37, 2011; arXiv: 1111.4346.

[16] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (14), том 7, с. 11-37, 2010.

[17] Siparov S. Anisotropic geometrodynamics in cosmological problems. // *AIP. Conf. Proc.*, 1283, 222, 2010.

[18] Balan V., Lebedev S. On the Legendre transform and Hamiltonian formalism in Berwald-Moor Geometry. // *Dyff.Geom.Dyn.Syst.* 12, 1, 4, 2010.

[19] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналогов множества Жюлиа на плоскости двойной переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (12), том. 6, с. 163-176, 2009.

[20] Kokarev S.S. Deformational structures on smooth manifolds. In "Trends in Mathematical Physics Research" , Nova Science Publisher Inc., (Charles V. Benton), New-York, pp. 113-154.

[21] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Римановы метрики, соприкасающиеся с 3-мерной финслеровой метрикой Бервальда-Моора. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (10), т. 5, с. 15-24, 2008.

[22] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Метрические бинглы и тринглы в H_3. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(11), т. 6, с. 42-67, 2009.

[23] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. h-голоморфные функции двойной переменной и их приложения. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (13), т. 7, с. 44-77, 2010.

[24] Balan V. Spectral properties and applications of of numerical multilinear algebra of m-root structures. // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 2 (10), v. 5, p. 101-107, 2008.

[25] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Конформные калибровки геометрии Бервальда-Моора и индуцируемые ими нелинейные симметрии. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (10), 5, с. 3-14, 2008.

[26] Кокарев С.С. Экстравариационный принцип в теории поля. В сб. трудов РНОЦ «Логос», вып. 6, с. 123-146, 2011.

[27] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., Мир, 1975.

[28] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. Т. 7, Теория упругости. М., Наука, 1987.

[29] Kokarev S.S. Space-time as multidimensional elastic plate. // *Nuovo Cimento*, B113, pp. 1339-1350, 1998.

[30] Kokarev S.S. Space-time as strongly bent plate. // *Nuovo Cimento.* B114, pp. 903-921, 1999.

[31] Kokarev S.S. Classical solids dynamics as 4D static of elastic strings. // *Nuovo Cimento*, B116, pp. 915-936, 2001.

[32] Kokarev S.S. Nematic structure of space-time and its topological defects in 5D Kaluza-Klein theory. // *GRG*, 35, pp. 1399-1415, 2003.

ANALYTIC, DIFFERENTIAL-GEOMETRIC AND ALGEBRAIC PROPERTIES OF SMOOTH FUNCTION OVER POLYNUMBERS.

D.G. Pavlov[1], S.S. Kokarev[1,2]

[1] *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia*
[2] *RSEC Logos, Yaroslavl, Russia*

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

The paper is a brief review of results on the theory of differentiable functions of polynumbers variable $P_n \to P_n$ and of its applications. We define derivative of a function of polynumbers variable, basing on special classification of degenerated (i. e. irreversible) polynumbers and on the theorem stating general form of R-linear mapping $P_n \to P_n$. Then we define holomorphic function of polynumbers variable as subclass of differentiable functions by the set of differential conditions (polynumbers analog of Cauchy-Riemannian conditions), which in isotropic basis have the form: $\overset{k}{\partial} f = 0$, $(k = 1, \ldots, n-1)$ where $\overset{k}{\partial} = C^k \partial$, C — conjugation in algebra P_n. Some generalized classes of holomorphic functions $\mathcal{G}^n_{k_{\alpha_1}, k_{\alpha_2}, \ldots, k_{\alpha_r}}$ are defined by monomic differential equations, which can be classified by the set of vectors of non-negative integer n-dimensional lattice Z^n_+. The question of holomorphic continuation of some smooth function from submanifolds of P_n to P_n is discussed. We derive polynumbers version of Cauchy theorem and Cauchy integral formulae together with possible multidimensional generalization the first one. Using symmetric Berwald-Moor form we develop symmetric analog of differential forms calculus (Symmetric product, Hodge star and external differential). We analyze transformation properties of derivatives of scalar polynumbers functions and of those geometrical objects, that can be constructed from these derivatives. In particular, we construct real scalar invariants, appropriate for Lagrangian formalism in polynumbers field theory. Basing on supports algebra we formulate tangent construction, playing important role in physical interpreting of polynumbers field theory. The formula for Levi-Civita connections coefficients concordant with Berwald-Moore form and formula for volume form based on n-root metric of Finsler type in even dimensions are derived. Also we consider some deformational aspects of smooth function of polynumbers variable and prove the statement, that any R-algebra can be embedded into space of bilinear forms over P_n. The paper can be treated as preliminary sketch of general theory of functions of polynumbers variable (TFPV).

Key Words: polynumbers, analytic function, holomorphic functions.