ЭКСТРАВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП В ТЕОРИИ ПОЛЯ

С.С. Кокарев

НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия
Российский научно-образовательный центр "Логос", Ярославль, Россия

logos-center@mail.ru

В статье формулируется естественный алгоритм вычисления фундаментальных констант и лагранжианов в рамках любой фундаментальной теории, выводимой из вариационного принципа. Мы иллюстрируем идею метода примерами из классической механики, обобщенных теорий гравитации, единых h-голоморфных теорий поля и многомерных теоретико-полевых моделей. Статья в значительной степени имеет поисковый характер.

Ключевые слова: экстравариационный принцип, общая теория поля, фундаментальные константы, лагранжиан.

1 Введение

Практически любая физическая теория содержит неопределяемые из самой теории параметры — эмпирические константы модели или фундаментальные физические константы. Так, классическая электродинамика содержит две фундаментальные константы: e и c, квантовая электродинамика содержит три константы: $e, \hbar, c$, а единая теория электрослабого взаимодействия — около 20 констант. Ньютоновская теория гравитации содержит одну константу G, а эйнштейновская ОТО — две константы G и c. Механика Ньютона не содержит фундаментальных констант[1]. Следует отметить, что в вычислениях константы модели могут группироваться в определенные типичные для данной теории комбинации, которые и определяют экспериментально наблюдаемые величины. Такими комбинациями, к примеру, являются постоянная тонкой структуры $\alpha \equiv e^2/\hbar c$ в квантовой электродинамике и эйнштейновская гравитационная постоянная $8\pi G/c^4$ в ОТО.

Как правило, константы модели определяются из экспериментальных данных. Такой подход, однако, свидетельствует о принципиальной неполноте рассматриваемой теории. Было бы совершенно естественно ожидать, что полная фундаментальная "теория всего" (если она вообще существует!) должна давать средства для вычисления всех своих существенных параметров, т. е. тех, которые определяют экспериментально наблюдаемые величины. Более того, фундаментальная теория природы не должна содержать произвола в выборе некоторых фундаментальных зависимостей, определяющих динамические уравнения теории, например, вид потенциальной функции или даже вид лагранжиана.

В настоящей статье рассматривается одна из естественных возможностей решения этих задач, которая в принципиальном отношении существует в любой физической теории, допускающей вариационную формулировку. По сути дела, предлагается "продолжить" задачу оптимизации функционала действия по отношению к динамическим переменным на нединамические степени свободы теории — фундаментальные константы и сам лагранжиан. Для того, чтобы различать стандартную задачу на экстремум от оптимизации по константам и лагранжианам, мы будем называть последнюю процедуру задачей на суперэкстремум. Мы увидим, что задача на суперэкстремум имеет содержательное решение далеко не всегда. По самой идее такая задача вполне оправдана лишь в теориях, типа "теории всего", в которых суперэкстремум реализует некий универсальный и глобальный "телеологический принцип".

[1]Что лишний раз подтверждает тезис о том, что законы механики Ньютона на самом деле являются принципами [1].

2 Супервариационный принцип для фундаментальных констант

Опишем общую идею задачи на суперэкстремум для фундаментальных констант. Рассмотрим действие вида $\mathcal{S}_\alpha[\phi]$ для некоторой фундаментальной теории, где ϕ — коллективный символ для набора динамических переменных (относящихся к частицам, полям и т.д.), а α — коллективный символ для набора фундаментальных констант теории. Пусть $\phi_\beta(\alpha)$ — решение уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\delta_\phi \mathcal{S}_\alpha[\phi] = 0,$$

с некоторыми начально-краевыми условиями, фиксированными посредством набора параметров β. Подставляя это решение обратно в действие (и регуляризуя результат, если это необходимо), мы получаем функцию многих переменных вида:

$$\Phi(\alpha, \beta) \equiv \mathcal{S}_{\mathrm{reg}\ \alpha}[\phi_\beta(\alpha)]. \tag{2.1}$$

Ключевая идея излагаемого нами супервариационного принципа заключается в минимизации функции (2.1) по отношению к набору переменных α, для того чтобы получить выражения для набора параметров α или его части:

$$\alpha = \alpha_0(\beta), \tag{2.2}$$

связывающие значения фундаментальных констант с параметрами граничных условий.

Более кардинальный шаг заключается в минимизации (2.1) по отношению к полному набору переменных (α, β), что в принципе определяет как существенные фундаментальные постоянные, так и граничные условия "из ничего".

2.1 Пример: гармонический осциллятор

В качестве простейшего примера рассмотрим гармонический осциллятор с действием

$$\mathcal{S}[x(t)] = \int \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}\right] dt. \tag{2.3}$$

Общее решение уравнений движения, вытекающих из (2.3) хорошо известно:

$$x_0(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{k/m}, \tag{2.4}$$

где m — масса осциллятора, k — параметр его жесткости, A — амплитуда, φ — начальная фаза. Первые два параметра относятся к числу "фундаментальных постоянных" модели, вторые два — к числу начально-краевых условий. Подставляя (2.4) в (2.3), получаем для функции $\Phi_\beta(\alpha)$ ($\beta = \{A, \varphi, T\}$, $\alpha = \{m, k\}$) в (2.1):

$$\Phi_{(A,\varphi,T)}(k, m) \equiv \int\limits_0^T L(x_0(t), \dot{x}_0)\, dt = \tag{2.5}$$

$$\frac{kA^2}{4\omega}\left[\sin 2(\omega T + \varphi) - \sin 2\varphi\right].$$

Здесь появился еще один параметр T — "время существования" осциллятора, которое следует отнести к параметрам, задающим граничные условия (размер "пространственно-временного ящика", в котором происходит динамика системы).. Очевидно, что экстремумы по k и по A тривиальны и дают нулевое действие. Условия экстремума для параметров ω и φ принимают вид системы уравнений:

$$(\chi - 2\varphi)\cos\chi - \sin\chi + \sin 2\varphi = 0; \quad \cos\chi = \cos 2\varphi, \tag{2.6}$$

где $\chi \equiv 2(\omega T + \varphi)$. Общее решение второго уравнения имеет вид:

$$\chi_k = \pm 2\varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.7}$$

Ветвь с плюсом приводит к независимым спектру частот и спектру фаз:

$$\omega_k = \frac{\pi k}{T}; \quad \varphi_l = (2l+1)\frac{\pi}{4}, \quad k, l \in \mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

Ветвь с минусом приводит к спектру частот и спектру фаз на двумерной целочисленной решетке:

$$\omega_{kl} = \frac{\chi_{kl} - \pi k}{T}; \quad \varphi_{kl} = \pi k - \frac{\chi_{kl}}{2}, \quad k, l \in \mathbb{Z}, \tag{2.9}$$

где χ_{kl} — один из корней безразмерного трансцендентного уравнения:

$$\tan \chi = \chi - \pi k. \tag{2.10}$$

Разумеется, для обычного осциллятора в виде грузика на нити или на пружинке у нас нет никаких оснований применять супервариационный принцип, поскольку такого рода осцилляторы искусственны и их параметры в определенном смысле случайны. Однако для "фундаментальных осцилляторов" в виде частиц или квазичастиц, рассмотренная нами супервариационная процедура дает в принципиальном (но, конечно, не количественном!) плане правдоподобные результаты: элементарные возбуждения связаны с глобальными фундаментальными характеристиками системы. Более того, спектр колебаний такого осциллятора согласно (2.8)-(2.9) оказывается квантованным, причем в формуле (2.8) он, как и в квантовой механике, эквидистантен, а в формуле (2.9) при возрастании абсолютной величины l он очень быстро становится таковым:

$$\omega_{kl} \overset{\text{as}}{\approx} \omega_0 \left(l - k - \frac{1}{2} \right), \tag{2.11}$$

где $\omega_0 = \pi/T$.

2.2 Задача Кеплера

Рассмотрим действие для центральной задачи двух тел в кулоновом поле притяжения:

$$\mathcal{S}[\overrightarrow{r}(t)] = \int \left[\frac{m \dot{\overrightarrow{r}}^2}{2} + \frac{\alpha}{r} \right] dt, \tag{2.12}$$

где α — абсолютная величина константы взаимодействия. Общее решение уравнений движения, вытекающих из (2.12), описывается соотношениями:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad p = \frac{L^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}, \tag{2.13}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}. \tag{2.14}$$

Здесь p и ε — параметр и эксцентриситет орбиты, выражающиеся по приведенным выше формулам через константы задачи и интегралы момента L и полной энергии E. Теперь параметры α и m относятся к числу "фундаментальных постоянных", а L и E — к начальным данным. Рассмотрим подробно случай эллиптических орбит ($0 < \varepsilon < 1$ или $E < 0$),

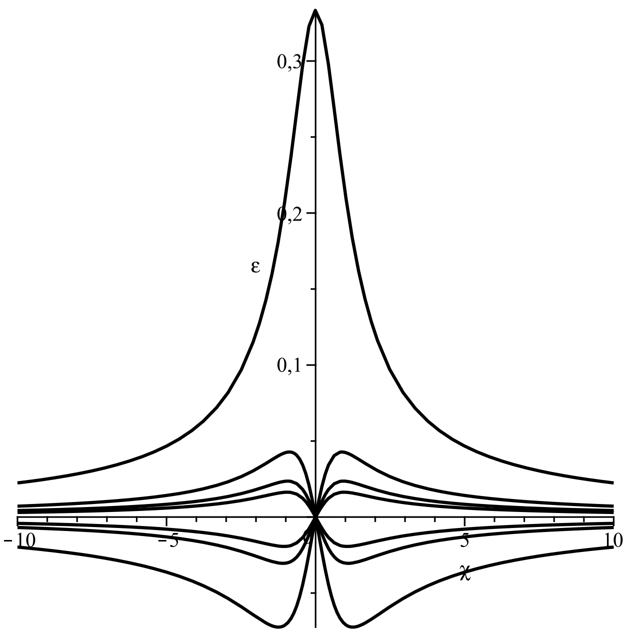

Рис. 1: Ветви зависимости $\varepsilon_k(\chi)$ для $k = 0$ (четная функция с максимумом), $k = \pm 1, \pm 2$ (нечетные функции, прижимающиеся к оси абсцисс с ростом k.)

который не требует регуляризации действия. Подставляя (2.13) в (2.12) и переходя с помощью (2.14) от интегрирования по t к интегрированию по φ, получаем для функции Φ в (2.1):

$$\Phi_{(L,\phi,E)}(m,\alpha) = \int\limits_0^{\phi} \frac{L}{2}\frac{\varepsilon^2 + 3 + 4\varepsilon\cos\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}\,d\varphi = \frac{L}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(3\arctan\chi + \frac{\varepsilon\chi}{1+\chi^2}\right), \tag{2.15}$$

где

$$\chi = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{\phi}{2}.$$

Таким образом, все параметры скомбинировались в один несущественный размерный нормировочный параметр L и два безразмерных параметра χ и ε. При монотонном изменении ϕ от $-\pi$ до π параметр χ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. При дальнейшем монотонном увеличении угла φ в знаменателе (2.15) появляется следующая ветвь арктангенса. Таким образом действие для частицы в кулоновом поле бесконечнолистно. Уравнения на экстремум (2.15) по ε и по χ принимают соответственно вид:

$$3\varepsilon\arctan\chi + \frac{\chi}{1+\chi^2} = 0; \quad 3(1+\chi^2) + \varepsilon(1-\chi^2) = 0. \tag{2.16}$$

Выражая χ через ε из второго уравнения, находим:

$$\chi^2 = -\frac{3+\varepsilon}{3-\varepsilon} < 0 \tag{2.17}$$

при $0 \le \varepsilon \le 1$. Таким образом, суперэкстремум действия по χ достигается при чисто мнимом значении χ. В задачах на обычный экстремум такой результат не имел бы смысла, однако в нашем случае мы вправе допустить, что "истинные" значения одних фундаментальных констант могут достигаться при комплексных значениях других параметров. Полагая $\chi = i\psi$ в (2.17) и первом уравнении (2.16), переходя в нем к гиперболическому арктангенсу и сокращая на мнимую единицу, приходим к следующему трансцендентному уравнению на ψ:

$$\mathrm{Arcth}\psi = \frac{\psi(1+\psi^2)}{9(1-\psi^2)^2}, \tag{2.18}$$

которое имеет ровно два противоположных решения: $\psi_\pm \approx \pm 0.797$. Подставляя это значение в (2.17), находим $\varepsilon \approx -0.67$.

Если же игнорировать суперэкстремум по переменной χ, то получаем следующий спектр значений ε:

$$\varepsilon_k(\chi) = -\frac{\chi}{3(1+\chi^2)(\arctan\chi + \pi k)}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2.19}$$

где мы явно указали ветви арктангенса посредством целочисленного параметра k. Характерный вид зависимостей $\varepsilon_k(\chi)$, которые напоминают зонный спектр в физике твердого тела, представлены на рисунке 1.

2.3 Вращающиеся заряженные источники в ОТО

Применим изложенные выше идеи суперэкстремума к некоторым хорошо известным точным решениям ОТО. Нетрудно понять, что попытка отыскать суперэкстремальные значения параметров керровской (а значит и шварцшильдовской) черной дыры (их два — параметр массы M и параметр вращения a), заведомо приведет к неудаче, поскольку на вакуумных решениях эйнштейновской ОТО лагранжиан гравитации $R = 0$. Этот аргумент не срабатывает для электровакуумных решений: хотя в электровакууме $R = 0$, лагранжиан электровакуумного решения будет отличным от нуля, поскольку имеется вообще говоря отличный от нуля вклад в него электромагнитного поля $-(1/16\pi)F^2$. Однако, как показывает простое вычисление, регуляризованное действие для простейшего электровакуумного решения — метрики Райсснера-Нордстрема, описывающей пространство-время невращающейся электрически-заряженной черной дыры, имеет следующий тривиальный вид:

$$S_{\text{R-N}} = \frac{Q^2}{2R}T,$$

где R и T — параметры регуляризации, имеющие смысл размеров "пространственно-временного ящика" , в котором заключена заряженная черная дыра, Q — параметр заряда. Все параметры скомбинировались в тривиальную мультипликативную комбинацию, минимизация по которым приведет к тривиальному результату: невращающиеся заряженные черные дыры должны отсутствовать!

Остановимся подробнее на стационарной черной дыре Керра-Ньюмена, представляющей собой общерелятивистский "симбиоз" решений Керра и решения Райсснера-Нордстрема. Такая черная дыра характеризуется уже тремя параметрами M, a, Q, которые нетривиально взаимодействуют и приводят к действию, которое имеет нетривиальные суперэкстремумы. Мы не приводим здесь явный вид метрики Керра-Ньюмена, который нам здесь не потребуется (вывод этой метрики вместе с обсуждением ее многих замечательных свойств можно найти в монографии [2]). Все, что нам нужно — это вычислить интеграл:

$$S_{\text{K-N}} = -\frac{1}{16\pi}\int\limits_{\mathcal{M}} F^2\sqrt{-g}\,dt\wedge dr\wedge d\theta\wedge d\varphi, \tag{2.20}$$

где компоненты тензора электромагнитного поля представляют собой электромагнитную часть решения Керра-Ньюмена. Опуская промежуточные детали, связанные с подстанов-

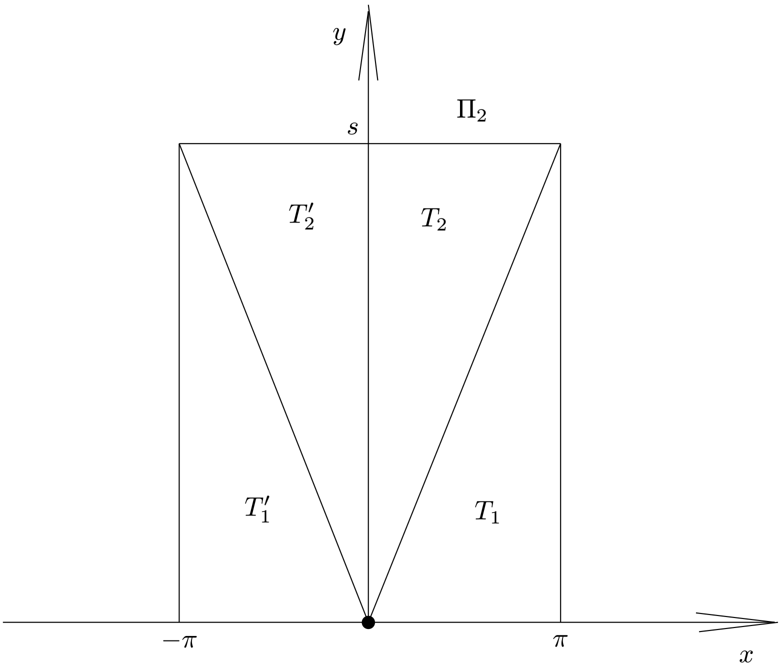

Рис. 2: Область интегрирования Π_2.

кой компонент[2] F в действие (2.20), приходим к выражению:

$$S_{\text{K-N}} = -\frac{Q^2}{8}T\int\limits_{\Pi_1}\frac{r^4 + a^4\cos^4\theta - 6a^2r^2\cos^2\theta}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)^3}\,dr\,\sin\theta\,d\theta \tag{2.21}$$

$$= -\frac{Q^2}{8a}T\int\limits_{\Pi_2}\frac{x^4 + y^4 - 6x^2y^2}{(x^2 + y^2)^3}\,dx\,dy.$$

Здесь T — времениподобный размер "пространственно-временного ящика", область интегрирования Π_1 на плоскости (θ, r) представляет собой прямоугольник с вершинами в точках $(\pi, 0)$, (π, R), $(-\pi, R)$, $(-\pi, 0)$, а область интегрирования Π_2 на плоскости (x, y) $(x = R/a,\ y = -\cos\theta)$ представляет собой прямоугольник с вершинами в точках $(1, 0)$, $(1, s)$, $(-1, s)$, $(-1, 0)$. Как и ранее, R — параметр регуляризации, $s = R/a$. В силу четности подынтегрального выражения интеграл (2.21) равен удвоенному интегралу, вычисленному по половине прямоугольника Π_2, лежащей в области $x \le 0$. Переходя в этом интеграле к полярной системе координат $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, приходим к интегралу вида:

$$S_{\text{K-N}} = \frac{Q^2}{4a}T\int\limits_{T_1\cup T_2}(1 - 8\cos^2\phi\sin^2\phi)\,\frac{d\rho}{\rho}\,d\phi, \tag{2.22}$$

где T_1 и T_2 — два прямоугольных треугольника, на которые разбивается область интегрирования (половина прямоугольника Π_2 — см. рис. 2).

Учитывая, что на T_1 переменная ρ меняется в пределах от 0 до $1/\cos\phi$, переменная ϕ меняется в пределах от 0 до $\arctan s$, а на T_2 переменная ρ меняется от 0 до $s/\sin\phi$, а переменная ϕ меняется от $\arctan s$ до $\pi/2$, интеграл (2.22) можно привести к сумме

[2]Следует иметь ввиду, что у автора [2] несколько иной порядок нумерации координат: $x^0 = t$, $x^1 = \varphi$, $x^2 = r$, $x^3 = \theta$. Кроме того, автор приводит тетрадные (а не координатные) компоненты F в жестком базисе, в котором тетрадные компоненты метрики имеют лоренцев вид.

интегралов вида:

$$S_{\text{K-N}} = \frac{Q^2}{4a} T \left(\int\limits_0^{\arctan s} \ln \epsilon \cos\phi (8\cos^2\phi \sin^2\phi - 1)\, d\phi \right. \tag{2.23}$$

$$\left. + \int\limits_{\arctan s}^{\pi/2} \ln \left[\frac{\epsilon \sin\phi}{s} \right] (8\cos^2\phi \sin^2\phi - 1)\, d\phi \right),$$

где ϵ — параметр регуляризации со стороны малых ρ. Нетрудно видеть, что слагаемые с $\ln\epsilon$ в (2.23) собираются в одно слагаемое

$$\ln\epsilon \int\limits_0^{\pi/2} (8\cos^2\phi \sin^2\phi - 1)\, d\phi = \ln\epsilon \int\limits_0^{\pi/2} \cos 4\phi\, d\phi,$$

которое очевидно обращается в нуль. Оставшееся регуляризованное выражение для $S_{\text{K-N}}$ имеет вид (2.23), где нужно положить $\epsilon = 1$. Вычисляя производную $dS_{\text{K-N}}/ds$ и приравнивая ее к нулю, приходим после элементарных тригонометрических преобразований к уравнению:

$$\frac{dS_{\text{K-N}}}{ds} = \frac{Q^2}{4a} T \frac{s^2 - 1}{(1 + s^2)^2} = 0, \tag{2.24}$$

решения которого $s = \pm 1$ и $s = \infty$. Нетрудно убедиться, что суперэкстремум действия достигается именно при $s = \pm 1$ или $a = \pm R$.

3 Супервариационная процедура для потенциала

Рассмотренные выше идеи, касающиеся фундаментальных параметров теории, нетрудно распространить также и на фундаментальные зависимости теории, типа зависимостей ее потенциала от полевых переменных.

Пусть действие некоторой полевой теории имеет вид:

$$\mathcal{S}[\phi] = \int \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)\, d\text{vol}, \tag{3.1}$$

где лагранжиан $\mathcal{L} = (\partial\phi)^2 - U(\phi, \partial\phi)$. Пусть следствием уравнений Эйлера-Лагранжа является интеграл (или система интегралов) вида:

$$F(\phi, \partial\phi) = 0. \tag{3.2}$$

Если интеграл (3.2) это позволяет сделать, то исключим с помощью него кинетический член в лагранжиане $\mathcal{L}$. Обозначая совокупность переменных, от которых зависит потенциал U через y, а остальную совокупность через x', приведем действие (3.1) к виду:

$$\mathcal{S}[\phi]|_F = \int \mathcal{L}|_F\, d\text{vol} =$$

$$\int \mathcal{L}'(x', y, U(y), \partial U(y)) J(x', y)\, d\text{vol}_y \wedge d\text{vol}_{x'} \equiv \mathcal{S}'[U(y)] \tag{3.3}$$

— функционала относительно функции $\mathcal{U}(y)$. Новое действие (3.3) получается ограничением исходного действия (3.1) на интеграл (3.2) и переходом от координатных переменных

(x) к новой системе "полевых координат" (x', y) (J в (3.3) — якобиан перехода). При этом совокупность переменных x' представляет собой совокупность параметров, по которым в последнем знаке равенства в (3.3) произведено усреднение (интегрирование с регуляризацией, если она требуется). Таким образом, рассматривая теперь функционал $\mathcal{S}'[U(y)]$, приходим к уравнениям экстремума:

$$\delta_U \mathcal{S}'[U(y)] = 0, \tag{3.4}$$

определяющим потенциал с точностью до констант.

3.1 Пример 1: одномерные задачи классической механики

Попробуем определить потенциал для одномерных консервативных систем классической механики (1-мерная теория поля), которые описываются действием вида:

$$\mathcal{S}[x(t)] = \int \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)\right] dt. \tag{3.5}$$

Хорошо известно, что такая система допускает интеграл энергии:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U = E = \mathrm{const}. \tag{3.6}$$

Выражая из него кинетическую энергию и одномерный "якобиан перехода":

$$J = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2(E-U)/m},$$

приходим к новому функционалу:

$$\mathcal{S}[U] = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{E - 2U(x)}{\sqrt{E - U(x)}}\, dx. \tag{3.7}$$

Поскольку этот функционал не зависит от производных U', его экстремум может достигаться лишь на некоторой постоянной[3] $U = \mathrm{const}$. Простой расчет дает: $U = 5E/6$. Подстановка в исходное действие (3.5) приводит к выражению:

$$\mathcal{S}_0 = -\frac{2}{3}ET. \tag{3.8}$$

В силу неравенств $E \geq 0$, $T > 0$ можно заключить, что исходное действие (3.5) не имеет суперэкстремума по отношению к потенциалу!

С позиций экстравариационного принципа этот вывод означает определенного рода искусственность физических систем с действием вида (3.5).

[3]Традиционная точка зрения заключается в игнорировании полных производных в лагражианах, к которым относятся и постоянные добавки к ним. В суперварационных задачах игнорирование полных производных, вообще говоря, недопустимо, поскольку они влияют на граничные условия, которые теперь также подлежат определению.

3.2 Движение в центральном поле

Можно попытаться несколько обобщить ситуацию, рассмотренную в разделе 2.2 и в предыдущем разделе, рассмотрев движение пробной частицы в поле с центрально-симметричной потенциальной функцией $U(r)$. Вычисления и подстановки, вполне аналогичные тем, которые были выполнены в разделах 2.2 и 3.1, приводят к интегралу для действия:

$$S_c = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{E - 2U(r)}{\sqrt{(2/m)(E - U(r) - L^2/2mr^2)}}\, dr, \tag{3.9}$$

где были использованы интегралы энергии E и момента L:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = E = \mathrm{const}; \quad mr^2\dot{\phi} = L = \mathrm{const}. \tag{3.10}$$

Выражение (3.9) можно рассматривать как функционал относительно U. Приравнивая к нулю его первую вариацию по U, получаем в качестве решения:

$$U(r) = \frac{3}{2}E - \frac{L^2}{mr^2}. \tag{3.11}$$

Роль "констант взаимодействия" в выражении (3.11) играют константы, которые традиционно понимаются как случайные константы интегрирования. Такого рода связи констант взаимодействия и констант интегрирования получаются в другом контексте в рамках обобщенных преобразований Болина [3, 4]. Для нахождения констант подставим зависимость (3.11) обратно в (3.9). В результате приходим к интегралу:

$$S_{c1} = 2L \int\limits_{s}^{1} \sqrt{\frac{1}{\xi^2} - 1}\, d\xi, \tag{3.12}$$

где $s = \epsilon/r_{\max}$ — параметр обрезания со стороны малых r (в случае $E > 0$, который мы и рассматриваем траектория представляет собой спираль, наворачивающуюся на силовой центр; при этом максимальное удаление точки от центра равно $r_{\max} = L/\sqrt{mE}$). Дифференцируя (3.12) по s и приравнивая производную к нулю, приходим к простому результату $s = 1$ или $\epsilon = L/\sqrt{mE}$.

Как и в предыдущем разделе, с позиций экстравариационного принципа полученные результаты следует интепретировать как некоторую искусственность (неполноту) физических систем с действием вида (3.9).

3.3 Пример 2: суперэкстремум в теории h-поля

Обратимся к действию 2-мерной гиперболической теории поля:

$$\mathcal{S}[F, \bar{F}] = \alpha \int\limits_{\mathcal{H}_2} \{|F_{,h}|^2 - \mathcal{U}(|F_{,\bar{h}}|^2)\}\, dh \wedge d\bar{h}, \tag{3.13}$$

где h, $\bar{h}$ - гиперболически комплексно сопряженные координаты, F - гиперболический потенциал, $\mathcal{U}(X)$ - потенциальная функция, зависящая только от гиперболического квадрата модуля неголоморфности $X = N\bar{N}$, где $N = F_{,\bar{h}}$ (см. [5]). Сейчас мы покажем, что оно обеспечивает существование вполне определенного суперэкстремума, который мы найдем с точностью до пары фундаментальных констант. В [5] показано, что уравнения Эйлера-Лагранжа, вытекающие из (3.13), допускают первый интеграл вида:

$$F_{,\bar{h}}(1-\mathcal{U}') = \varphi(\bar{h}) \tag{3.14}$$

где $\varphi(\bar{h})$ — произвольная антиголоморфная функция двойной переменной. Из интеграла (3.14), выведенного в этой работе, можно вывести следующее выражение для квадрата модуля неголоморфности:

$$X = \frac{|\varphi|^2}{(1-\mathcal{U}')^2}. \tag{3.15}$$

Подставляя его[4] в действие (3.13) и переходя от переменных $(h, \bar{h})$ к новым переменным[5] (X, X'), приходим к новому действию вида:

$$\mathcal{S}'[\mathcal{U}(X)] = \int \left[\frac{|\varphi|^2}{(1-\mathcal{U}')^2} - U\right] dX \wedge dX'.$$

Варьируя его по U и исключая $|\varphi|^2$ посредством (3.15), мы приходим к уравнению суперэкстремума теории:

$$\frac{d}{dX}\left(\frac{X}{1-\mathcal{U}'}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Его решение имеет вид:

$$\mathcal{U}(\xi) = \mathcal{U}_0(3\xi - 2\ln(1+\xi)), \quad \xi = X/\mathcal{U}_0 + C, \tag{3.16}$$

где $\mathcal{U}_0, C$ — пара "фундаментальных констант" теории.

Рассмотрим статическую вселенную с 1-мерным стержнем, описанную в работе [5] в качестве примера. Прежде всего, необходимо убедиться, что отбрасывание граничных членов является законной операцией в такой вселенной. Для кинетического члена в действии (3.13) имеем цепочку равенств:

$$F_{,h}\bar{F}_{,\bar{h}} = (F\bar{F}_{,\bar{h}})_{,h} - F\bar{F}_{,\bar{h},h} = (F\bar{F}_{,\bar{h}})_{,h} - (F\bar{F}_{,h})_{,\bar{h}} + X, \tag{3.17}$$

где $X = F_{,\bar{h}}\bar{F}_{,h}$ — квадрат гиперболического модуля неголоморфности. Рассмотрим интеграл по плоскости двойной переменной от полных производных в (3.17) (т.е. от первых двух слагаемых):

$$\int\limits_{\mathcal{H}_2} [(F\bar{F}_{,\bar{h}})_{,h} - (F\bar{F}_{,h})_{,\bar{h}}]\, dh \wedge d\bar{h} = \oint\limits_{\Gamma_\infty} F\cdot\bar{F}_{,\bar{h}}\, d\bar{h} + F\cdot\bar{F}_{,h}\, dh = \oint\limits_{\Gamma_\infty} F d\bar{F}, \tag{3.18}$$

где Γ_∞ — квадратный контур с центром в начале координат, сторонами, параллельными координатным осям и удаленными на бесконечность. Последнее равенство было получено с учетом интегральной теоремы Стокса и гиперболической дифференцируемости потенциала F. Подынтегральное выражение можно расписать следующим образом:

$$Fd\bar{F} = (U + jV)(dU - jdV) = \frac{1}{2}d(U^2 - V^2) + j(VdU - UdV). \tag{3.19}$$

[4]При этом мы, как обычно игнорируем граничные члены, делая определенные предположения о поведении решений на бесконечности. Для самосогласованности суперэкстремума следовало бы проверить эти предположения для решений, вытекающих из модели с суперэкстремальным потенциалом.

[5]Таким, что $\frac{D(X,X')}{D(h,\bar{h})} = \mathrm{const}$. Доказательство существования такой системы координат представляет собой полезное упражнение с 1-формами!

Контурный интеграл от первого слагаемого справа в (3.19) равен нулю. Для установления равенства нулю контурного интеграла от второго слагаемого в (3.19) достаточно заметить, что в рассматриваемой нами статической вселенной $dU = U_{,x}\,dx$, $dV = V_x\,dx$. Таким образом интегрирование второго слагаемого по Γ_∞ фактически сводится к двукратному интегрированию некоторой функции вещественной переменной x по вещественной прямой (на самом деле по отрезку $[-L/2; L/2]$) в противоположных направлениях, что в результате даст ноль. Мы установили тем самым, что в рассматриваемой нами статической вселенной пренебрежение граничными членами в процедуре вывода суперэкстремума законно.

Подставим теперь функцию (3.16) в действие (3.13), в котором кинетический член заменен на X. Интеграл по двойной плоскости фактически сводится к интегралу по мировой ленте стержня. Переходя к переменной $\xi = x/L$, получаем:

$$S = X_0 LT \int\limits_0^1 \left(\frac{32\xi^2(1-\xi)^2}{\cosh^2(\xi - 1/2)} - 3\eta C + 2\eta \ln\left[1 + C - \frac{16\xi^2(1-\xi)^2}{\eta\cosh^2(\xi-1/2)}\right]\right) d\xi, \tag{3.20}$$

где $X_0 = -X(L/2)$ — значение абсолютной величины неголономности в центре стержня, $\eta = U_0/X_0$. Составляя уравнения экстремума:

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial C} = 0,$$

(они будут существенно трансцендентными), и численно решая их, приходим к паре значений "фундаментальных констант" рассматриваемой вселенной: $\eta \approx -10^{10}$, $C \approx 0.364$. Даже в рассматриваемой нами "игрушечной вселенной" мы обнаруживаем "иерархию фундаментальных констант"!

3.4 Нелинейная гравитация со скалярным полем

В этом разделе мы рассмотрим достаточно общий класс моделей, описывающих самосогласованную систему взаимодействующих нелинейных гравитационного и скалярного полей на D-мерном многообразии $\mathcal{M}_D$. Действие модели запишем в виде:

$$S[g,\varphi] = \int\limits_{\mathcal{M}_D} [F_1(R,\phi) + F_2(R,\phi)(\nabla\phi)^2]\sqrt{|g|}\, d^D x, \tag{3.21}$$

где F_1 и F_2 — пока произвольные функции пары вещественных переменных, R — скалярная кривизна многообразия, вычисленная по метрике g, ϕ — скалярное поле, ∇ — ковариантная производная, согласованная с метрикой g, $|g| = \det(g)$, $d^D x = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^D$.

Уравнения движения для действия (3.21) имеют вид:

$$G_1 + G_2(\nabla\phi)^2 + F_2 \nabla\phi \otimes \nabla\phi = 0 \tag{3.22}$$

для экстремума (3.21) по метрике и

$$\dot{F}_1 + \dot{F}_2(\nabla\phi)^2 - 2(\nabla F_2 \cdot \nabla\phi) - 2F_2\Box\phi = 0, \tag{3.23}$$

для экстремума по ϕ. Здесь и далее точка будет обозначать производную функций F_1 и F_2 по ϕ, а штрих будет обозначать производную этих функций по R. В (3.22) G_i — это обобщенные тензоры Эйнштейна, возникающие в любой нелинейной теории гравитации:

$$G_i \equiv (\mathrm{Rc} - \nabla\otimes\nabla + g\Box)F_i' - \frac{1}{2}F_i g \quad (i = 1, 2). \tag{3.24}$$

Здесь Rc — тензор Риччи многообразия $\mathcal{M}_D$, $\Box \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta$. Вычисляя след (3.22), приходим к следствию:

$$\mathrm{Tr}G_1 + (\mathrm{Tr}G_2 + F_2)(\nabla\phi)^2 = 0. \tag{3.25}$$

В случае "модели общего положения" скобка при $(\nabla\phi)^2$ не обращается в нуль, следовательно скаляр $(\nabla\phi)^2$ можно выразить из (3.25) и подставить в (3.21). В результате приходим к следующему действию для суперэкстремума модели:

$$S[F_1, F_2] = \int\limits_{\mathcal{M}_D} \frac{F_1F_2 + F_1\mathrm{Tr}G_2 - F_2\mathrm{Tr}G_1}{F_2 + \mathrm{Tr}G_2}\sqrt{|g|}\, d^Dx. \tag{3.26}$$

Для более явного выражения действия, пригодного для варьирования по потенциалам модели F_1 и F_2, примем во внимание явное выражение для следа обобщенного тензора Эйнштейна:

$$\mathrm{Tr}G_i = ((D-1)\Box + R)F_i' - \frac{D}{2}F_i. \tag{3.27}$$

Подставляя (3.27) в (3.26), приходим к действию следующего вида:

$$S[F_1, F_2] = \int\limits_{\mathcal{M}_D} \frac{F_1F_2 + F_1((D-1)\Box + R)F_2' - F_2((D-1)\Box + R)F_1'}{(1-D/2)F_2 + ((D-1)\Box + R)F_2'}\sqrt{|g|}\, d^Dx. \tag{3.28}$$

Довольно громоздкая процедура варьирования (3.28) по F_1 и F_2 приводит к паре уравнений, которые после надлежащих преобразований можно привести к следующему компактному операторному виду:

$$\hat{\Sigma}_D\psi = -1 - \frac{D}{2}\psi, \tag{3.29}$$

$$\hat{\Sigma}_D\psi\chi = \left(1 - \frac{D}{2}\right)\psi\chi - \chi, \tag{3.30}$$

где

$$\hat{\Sigma}_D \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial R}\sqrt{|g|}((D-1)\Box + R) \tag{3.31}$$

— дифференциальный оператор 3-ого порядка, а функции ψ и χ определяются формулами:

$$\psi = \frac{F_2}{(1-D/2)F_2 + ((D-1)\Box + R)F_2'}; \tag{3.32}$$

$$\chi = \frac{(D/2)F_1 - ((D-1)\Box + R)F_1'}{(1-D/2)F_2 + ((D-1)\Box + R)F_2'} = (\nabla\phi)^2. \tag{3.33}$$

Последнее равенство следует из (3.25) и (3.27).

Обратимся к операторному уравнению (3.29). Прежде всего, вычислим значение оператора $\hat{\Sigma}_D$ на 1:

$$\hat{\Sigma}_D 1 = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial R}\sqrt{|g|}((D-1)\Box + R) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial R}\sqrt{|g|}R = 1 + \frac{\partial \ln\sqrt{|g|}}{\partial \ln R}. \tag{3.34}$$

Наложим теперь калибровочное условие $|g| = 1$ на координаты многообразия. Оно соответствует специальной системе координат, в которой физический объем совпадает с координатным, а его возможность связана с относительной тензориальностью величины детерминанта метрики. Тогда из (3.34) получим:

$$\hat{\Sigma}_D 1 = 1. \tag{3.35}$$

Записав уравнение (3.29) в виде рекуррентного соотношения

$$\psi = -\frac{2}{D}(1 + \hat{\Sigma}_D \psi),$$

приходим в выбранной калибровке с учетом (3.35) и линейности оператора $\hat{\Sigma}_D$ к цепочке равенств:

$$\psi = -\frac{2}{D}(1 + \hat{\Sigma}_D \psi) = -\frac{2}{D} + \left(-\frac{2}{D}\right)^2 \hat{\Sigma}_D (1 + \hat{\Sigma}_D \psi) = \tag{3.36}$$

$$\cdots = -\frac{2}{D} + \left(-\frac{2}{D}\right)^2 + \left(-\frac{2}{D}\right)^3 + \cdots + \left(-\frac{2}{D}\right)^k (1 + \hat{\Sigma}^k_D \psi).$$

Решение, для которого $\Sigma^\infty_D \psi < \infty$, легко получается из (3.36) суммированием геометрической прогрессии: $\psi = \psi_0 = -2/(2+D)$. Тот факт, что полученное постоянное значение ψ является решением (3.29) в выбранной калибровке, проверяется и непосредственно подстановкой в (3.29). Разумеется, вопрос о существовании других решений остается открытым. Теперь подставляя решение $\psi = \psi_0$ в (3.30), получаем более простое операторное уравнение для χ:

$$\hat{\Sigma}_D \chi = 2\chi. \tag{3.37}$$

С учетом определений (3.32) и вида решения ψ_0, приходим теперь к следующим уравнениям на F_1 и F_2, обеспечивающим суперэкстремум действия (3.28) в калибровке $|g| = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial R}((D-1)\Box + R)\chi = 2\chi, \tag{3.38}$$

$$\chi = \frac{[2((D-1)\Box + R)F_1' - DF_1]}{(D+2)F_2} = (\nabla\phi)^2; \tag{3.39}$$

$$((D-1)\Box + R)F_2' = -2F_2. \tag{3.40}$$

Приведем также для полноты явный вид уравнений экстремума (3.22)-(3.23):

$$(\mathrm{Rc} - \nabla\otimes\nabla + g\Box)F_1' - \frac{1}{2}F_1 g + [(\mathrm{Rc} - \nabla\otimes\nabla + g\Box)F_2' - \frac{1}{2}F_2 g]\times \tag{3.41}$$

$$\frac{[2((D-1)\Box + R)F_1' - DF_1]}{(D+2)F_2} + F_2 \nabla\phi\otimes\nabla\phi = 0;$$

$$\dot{F}_1 - F_2 \frac{2((D-1)\Box + R)F_1' - DF_1}{(D+2)F_2} - 2F_2'(\nabla R\cdot\nabla\phi) - 2F_2'\Box\phi = 0. \tag{3.42}$$

Система уравнений (3.38)-(3.42), рассматриваемая совместно с условием калибровки $|g| = 1$ и составляет предмет для дальнейшего исследования на суперэкстремум. Мы проведем полное исследование системы (3.38)-(3.42) для 2-мерных римановых многообразий в отдельной публикации, а здесь ограничимся частичным исследованием многообразий с $D \geq 5$, которое в достаточной мере проиллюстрирует нетривиальный характер суперэкстремальных теорий гравитации. Ограничение $D \geq 5$ связано с дополнительными калибровочными условиями, которые мы собираемся наложить для упрощения уравнений (3.38)-(3.42). Прежде всего, в предположении независимости скаляров ϕ и R выберем систему координат на многообразии $\mathcal{M}$ таким образом, чтобы $y^1 = \phi$, $y^2 = R$, а остальные координаты подчинены единственному условию $|g| = 1$, чтобы выводы, сделанные ранее на основе этого условия, оставались в силе. В новой системе координат справедливы следующие равенства:

$$\nabla\phi\cdot\nabla\phi = g^{\phi\phi} = \chi; \quad \nabla\phi\cdot\nabla R = g^{\phi R}; \quad \nabla R\cdot\nabla R = g^{RR}. \tag{3.43}$$

Далее, наложим еще два условия:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} g^{\alpha R} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g^{\alpha \phi} = 0. \tag{3.44}$$

Наложенные условия обеспечивают простой вид волнового оператора, примененного к функциям F_i:

$$\Box F_i = g^{\phi\phi} \ddot{F}_i + 2g^{R\phi} \dot{F}'_i + g^{RR} F''. \tag{3.45}$$

Таким образом, нам потребовалось 5 калибровочных условий, что не ограничивает общности многообразий лишь при размерности $D \geq 5$. В рассматриваемой калибровке уравнения (3.40), (3.38) принимают следующий вид:

$$(D-1)(g^{\phi\phi} \ddot{F}'_2 + 2g^{\phi R} \dot{F}''_2 + g^{RR} F'''{}_2) + RF'_2 + 2F_2 = 0; \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[(D-1)(g^{\phi\phi} \ddot{g}^{\phi\phi} + 2g^{R\phi} (\dot{g}^{\phi\phi})' + g^{RR} (g^{\phi\phi})'' + Rg^{\phi\phi} \right] - 2g^{\phi\phi} = 0; \tag{3.47}$$

$$\dot{F}_1 - \dot{F}_2 g^{\phi\phi} - 2F'_2 g^{\phi R} = 0. \tag{3.48}$$

Гравитационные уравнения (3.41) нам здесь не потребуются. Очевидно, что частным решением операторного уравнения (3.38) является тривиальное решение $\chi = 0$, которое дает $g^{\phi\phi} = (\nabla\phi)^2 = 0$ (изотропное скалярное поле) и тождественно удовлетворяет уравнению (3.47). Из уравнения (3.48) при $g^{\phi\phi} = 0$ выразим $g^{\phi R}$:

$$g^{\phi R} = \frac{\dot{F}_1}{2F'_2}$$

и результат подставим в (3.46) при $g^{\phi\phi} = 0$. Рассмотрим класс моделей, у которых функция F_2 удовлетворяет уравнению $F'''_2 = 0$, т. е. таких, у которых F_2 является квадратичной функцией скалярной кривизны:

$$F_2 = A_2(\phi)R^2 + A_1(\phi)R + A_0(\phi). \tag{3.49}$$

Тогда компонента g^{RR} выпадает из уравнения (3.46) и оно превращается в уравнение, связывающее F_1 и F_2:

$$(D-1)\left(\frac{2\dot{F}_1 \dot{A}_2}{2A_2 R + A_1} \right) + 4A_2 R^2 + 3A_1 R + 2A_0 = 0, \tag{3.50}$$

а система (3.46)-(3.48) в целом отщепляется от системы гравитационных уравнений. Общее решение для F_1, вытекающее из (3.50), имеет вид:

$$F_1 = B_3(\phi)R^3 + B_2(\phi)R^2 + B_1(\phi)R + B_0(\phi) + f(R), \tag{3.51}$$

где

$$B_3 = -\frac{4}{D-1} \int \frac{A_2^2}{\dot{A}_2} d\phi; \quad B_2 = -\frac{5}{D-1} \int \frac{A_1 A_2}{\dot{A}_2} d\phi;$$

$$B_1 = -\frac{1}{D-1} \int \frac{2A_0 A_2 + 3A_1^2/2}{\dot{A}_2} d\phi; \quad B_0 = -\frac{1}{D-1} \int \frac{A_1 A_0}{\dot{A}_2} d\phi,$$

$f(R)$ — произвольная функция скалярной кривизны. Оставшиеся неопределенными функции скалярного поля A_i и B_i и функция $f(R)$ могут быть частично или полностью определены из системы гравитационных уравнений (3.41).

Таким образом, мы описали достаточно общий класс нелинейных моделей гравитации с изотропным скалярным полем при $D \geq 5$. Он включает в себя как предельный случай нелинейную гравитацию без скалярного поля ($F_1 = f(R),\ F_2 = 0$), но не включает традиционный лагранжиан системы гравитационного и скалярного полей ($\dot{F}_1' = 0,\ F_2 = 1$). Изучение физических свойств рассмотренного класса моделей выходит за рамки настоящей статьи.

Для случаев многообразий малой размерности $D < 5$ использование части калибровочных (координатных) условий становится невозможным, однако при этом сама система уравнений экстремума и суперэкстремума становится проще. Поэтому исследование низкоразмерных теорий представляет собой отдельную задачу для каждого $D < 5$. Мы оставляем ее решение для будущих исследований.

4 Заключение

Опираясь на проведенное исследование, которое нужно рассматривать как "предварительную разведку" , попробуем сформулировать некоторые предварительные выводы.

1. Примеры с суперэкстремальными константами наводят на мысль, что модель с нетривиальными суперэкстремумами должна быть в определенном смысле "достаточно богатой" . Это означает, что модель должна включать достаточное число независимых параметров и они должны входить в лагранжиан нетривиальным образом. Поскольку размерность действия совпадает с размерностью постоянной Планка, то выделив эту постоянную из действия мультипликативным образом, мы придем к ситуации, в которой все остальные параметры модели под интегралом действия комбинируются в некие безразмерные комбинации, которые (опять-таки, возможно не все!) в принципе и подлежат определению из условия суперэкстремума. Интересно, что сама постоянная Планка оказывается таким образом в принципе не вычислимой! Физически это означает, что ее конкретное числовое значение имеет условный (нормировочный) характер — важно лишь то, что она отлична от нуля и то, к каким значениям безразмерных параметров она приводит в комбинации с другими размерными константами модели.

2. Рассмотренные примеры обнаруживают необходимость разумной регуляризации действия. Такая необходимость связана в основном с пространственно-временной некомпактностью моделей. Ввиду некоторой искусственности процедуры регуляризации, можно предположить, что фундаментальная "теория всего" должна иметь дело с компактными моделями, в которых все основные параметры конечны и процедура регуляризации не требуется.

3. В частности, в примере с гармоническим осциллятором мы обнаружили интересное проявление "временной компактности" модели: суперэкстремальные частоты подчиняются закону квантования, весьма близкому к известному квантово-механическому спектру одномерного гармонического осциллятора. Таким образом, потенциально условие суперэкстремума заключает в себе существенно больше, чем в него закладывалось: уравнения суперэкстремума могут порождать дискретный спектр решений. Возникает еще одна интересная точка зрения на процедуру квантования физических систем: квантово-механические спектры физических величин можно рассматривать как наборы точек суперэкстремума действия соответствующей физической системы.

4. Обычно в задачах теории поля начально-краевые условия считаются произвольными, либо случайными. Рассмотренные примеры обнаруживают, что функционал действия допускает оптимизацию и по этим условиям. Разумеется, такая оптимизация не имеет смысла в рамках частной феноменологической теории, изучающей узкий класс явле-

ний. В рамках же любой фундаментальной теории, оптимизация по начально-краевым условиям правомерна. Более того, по существу идея суперэкстремума или ее надлежащие модификации — это по существу единственный (хотя и в значительной степени спекулятивный) теоретический метод исследования объектов, напрямую недоступных экспериментам и наблюдениям. К примеру, так обстоят дела в космологических решениях уравнений Эйнштейна, содержащих произвольные константы интегрирования и гипотезы о глобальной топологии пространства-времени. Отметим еще раз, что идея оптимальности по начально-краевым условиям вводит в физику некоторый новый принцип, который выходит за рамки классического принципа наименьшего действия и требует дальнейшего изучения в рамках конкретных "теорий всего".

5. Очевидно, что идея о суперэкстремуме по лагранжианам не столь проста, как идея суперэкстремума по константам. С технической точки зрения можно ожидать, что не во всякой теории поля существует возможность ввести в качестве координат на многообразии поля, от которых зависит потенциальная функция. Простым примером, когда это сделать невозможно, является классическая механика точки на плоскости (одномерная "теория поля" с двумя "полями" — компонентами закона движения). В общем случае, необходимо (но недостаточно!), чтобы размерность базы конфигурационного расслоения была не меньше, чем число независимых полевых инвариантов, от которых может зависеть потенциал. Могут возникнуть и другие проблемы: отсутствие явно решаемых интегралов, функциональная зависимость инвариантов и т.д. Рассмотренный нами пример с 2-мерной теорией поля на двойных числах, обнаруживает что эта теория "идеальна" для задач суперэкстремума: нам удалось вычислить в ней как потенциал, общий вид которого навеян соображениями гиперболической голоморфности и некоторыми аналогиями с физическими приложениями теории функций комплексного переменного, так и фундаментальные константы для конкретной статической вселенной, деформированной самодействующим упругим стержнем.

6. Несмотря на очевидные трудности, идея суперэкстремума действия по лагранжиану выглядит весьма привлекательной: ее полная реализация означает, что, вопреки сложившемуся мнению, на самом деле у нас нет никакой свободы в выборе лагранжианов. Принцип суперэкстремума по лагранжиану определяет его общий вид с точностью до фундаментальных констант, которые появляются как константы интегрирования уравнений суперэкстремума. Далее, решая систему уравнений Эйлера-Лагранжа с найденным лагранжианом, мы получаем решения, выражающиеся через начально-краевые условия. Подставляя их обратно в действие и оптимизируя его по фундаментальным константам и параметрам начально-краевых условий, мы восстанавливаем всю физику. Весь произвол, который оставляет нам как исследователям, принцип суперэкстремума, заключается в выборе системы единиц, определяющих несущественную мультипликативную константу, имеющую размерность действия (постоянная Планка?). При этом получающаяся теория должна быть внутренне самосогласованной и с точки зрения квантовой теории: суперэкстремальный лагранжиан теории уже содержит в себе все "квантовые поправки" и попытка вычислить их на основе надлежащей схемы квантования такой теории должна приводить к тривиальному, т.е. нулевому результату.

Разумеется, все вышесказанное в заключении надо рассматривать скорее как заметки на будущее и программу действий, а не окончательный результат.

Литература

[1] Кокарев С.С. Три лекции о законах Ньютона. В сб. трудов РНОЦ "Логос" , Ярославль, вып.1, 2006, с. 45-72. E-print: arXiv: gr-qc/0905.3285v1.

[2] Чандрассекар С. Математическая теория черных дыр (в 2-х томах). Новокузнецк, НФМИ, 1998

[3] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., ГИФМЛ, 1989.

[4] Кокарев С.С. Обощение теоремы Болина-Арнольда и её применение в ОТО // *Изв. вузов (физика)*, 11, 2000, с. 36.

[5] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (14), том 7, 2010, с. 11-37

EXTRA-VARIATIONAL PRINCIPLE IN THE THEORY OF FIELD

S.S. Kokarev

Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia
RSEC Logos, Yaroslavl, Russia

logos-center@mail.ru

We formulate natural algorithm for calculation of fundamental constants and Largrangians within every fundamental theory, which can be derived from standard variational principle. We illustrate the method by multiple examples in classical mechanics, generalized gravitational theories, unified h-holomorpfic theories, law dimensional and high dimensional field-theoretical models.

Key Words: extravariational principle, unified field theory, fundamental constants, lagrangians.