

# ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $SL_2(\mathbb{R})$ И ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

**В.В. Кисиль**

*Университет Лидса, Лидс, Великобритания*

kisilv@maths.leeds.ac.uk

В работе рассматривается конструкция индуцированных представлений для группы  $G = SL_2(\mathbb{R})$ . Оказывается, что действие этой группы на однородном пространстве  $G/H$ , где  $H$  является произвольной однопараметрической подгруппой  $SL_2(\mathbb{R})$ , является дробно-линейным преобразованием двумерной алгебры гиперкомплексных чисел. Это наблюдение может быть распространено на дальнейшие соответствия между структурными компонентами  $SL_2(\mathbb{R})$  и гиперкомплексными системами. Соответственно мы рассматриваем вопрос о гиперкомплексных характерах подгруппы  $H$ . В частности мы приводим примеры индуцированных представлений группы  $SL_2(\mathbb{R})$  в пространствах функций с гиперкомплексными значениями, которые являются унитарными в определённом смысле.

**Ключевые слова:** индуцированные представления, унитарные представления,  $SL(2, \mathbb{R})$ , полупростые группы Ли, гиперкомплексные числа, дуальные числа, двойные числа, преобразования Мёбиуса, дробно-линейные преобразования, эллиптические числа, параболические числа, гиперболические числа, операторы рождения, деквантизация Маслова.

## 1 Группа $SL_2(\mathbb{R})$ и её подгруппы

Группа  $SL_2(\mathbb{R})$  состоит из квадратных  $2 \times 2$  матриц с действительными элементами и единичным определителем. Групповая операция задаётся матричным умножением.  $SL_2(\mathbb{R})$  является простейшей полупростой группой Ли. Произвольный элемент  $SL_2(\mathbb{R})$  допускает единственное разложение вида [10, Exer. I.14]:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (1)$$

с некоторыми параметрами  $\alpha \in (0, \infty)$ ,  $\nu \in (-\infty, \infty)$  и  $\phi \in (-\pi, \pi]$ . Эта формула (1) записанная в виде  $SL_2(\mathbb{R}) = ANK$  известна как разложение Ивасава [25, § III.1] и допускает обобщение на произвольную полупростую группу Ли.

Семейства матриц каждого из трёх видов в правой части (1) образуют однопараметрические подгруппы обычно обозначаемые  $A$ ,  $N$  and  $K$ . Они получаются экспоненцированием соответствующих матриц с нулевым следом:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad (2)$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad (3)$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}, t \in (-\pi, \pi] \right\}. \quad (4)$$

Следующий простой результат имеет поучительное доказательство:

**Предложение 1.** *Любая непрерывная однопараметрическая подгруппа  $SL_2(\mathbb{R})$  матрично сопряжена к одной из подгрупп  $A$ ,  $N$  или  $K$ .*

*Доказательство.* Любая непрерывная однопараметрическая подгруппа получается экспоненцированием

$$e^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X^n \tag{5}$$

элемента  $X$  алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_2$  группы  $SL_2(\mathbb{R})$ . Такой элемент представим  $2 \times 2$  матрицей с нулевым следом. Поведение ряда Тэйлора (5) зависит от свойств степеней  $X^n$ . Последние легко классифицируются непосредственным вычислением:

**Лемма 2.** Квадрат  $X^2$  матрицы  $X \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$  с нулевым следом есть единичная матрица умноженная на  $a^2 + bc = -\det X$ . Этот множитель может быть отрицательным, нулевым или положительным, что соответствует трём различным типам ряда Тэйлора (5) для  $e^{tX}$ .

Несложно видеть, что матричное подобие приводит элемент  $X$  к генератору

- подгруппы  $K$  если  $(-\det X) < 0$ ;
- подгруппы  $N$  если  $(-\det X) = 0$ ;
- подгруппы  $A$  если  $(-\det X) > 0$ .

Так как матричное подобие не меняет определителя матрицы, то эти три случая не сводятся друг к другу. □

**Пример 3.** Следующие две подгруппы сопряжены к  $A$  и  $N$  соответственно посредством матричного сопряжения с фиксированной матрицей  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ :

$$A' = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, \tag{6}$$

$$N' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}. \tag{7}$$

В дальнейшем мы будем, как правило, рассматривать подгруппы  $N'$  и  $A'$  вместо  $N$  и  $A$ , так как это приведёт к более естественной геометрической картине.

## 2 Действие $SL_2(\mathbb{R})$ приводит к гиперкомплексным числам

Пусть  $H$  является подгруппой группы  $G$ . Для соответствующего однородного пространства  $\Omega = G/H$  определим гладкое сечение  $s : \Omega \rightarrow G$  [12, § 13.2], которое является левым обратным для естественной проекции  $p : G \rightarrow \Omega$ . Выбор такого сечения не принципиален в том смысле, что наши дальнейшие построения определяются с точностью до гладкого отображения  $\Omega \rightarrow \Omega$ .

Каждый элемент  $g \in G$  может быть представлен единственным образом в виде  $g = s(\omega)h$ , где  $\omega = p(g) \in \Omega$  и  $h \in H$ . Соответственно, на  $\Omega$  определяется действие группы  $G$  следующим образом:

$$g : \omega \mapsto g \cdot \omega = p(g * s(\omega)), \tag{8}$$

где  $*$  обозначает групповое произведение. Это действие может быть также проиллюстрировано коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g^*} & G \\ s \uparrow & p \downarrow & s \uparrow \\ \Omega & \xrightarrow{g \cdot} & \Omega \end{array}$$

Для группы  $G = SL_2(\mathbb{R})$ , как и для остальных полупростых групп, принято рассматривать случай, когда  $H$  является максимальной компактной подгруппой  $K$ . Однако в данной работе мы рассмотрим все три возможности для однопараметрической подгруппы  $H$  описанных в Предложении 1 и Примере 3, а именно  $H = K$ ,  $N'$  или  $A'$ . В этом случае многообразии  $\Omega$  является двумерным и для всех трёх возможных подгрупп  $H$  мы определим [13, Ех. 3.7(a)]:

$$s : (u, v) \mapsto \frac{1}{\sqrt{v}} \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2, v > 0. \quad (9)$$

Непосредственное вычисление или использование компьютерной программы [18] приводит к следующему результату:

**Предложение 4.** Действие (8) группы  $SL_2(\mathbb{R})$  определённое сечением  $s$  (9) есть:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : (u, v) \mapsto \left( \frac{(au + b)(cu + d) - \sigma cav^2}{(cu + d)^2 - \sigma (cv)^2}, \frac{v}{(cu + d)^2 - \sigma (cv)^2} \right), \quad (10)$$

где  $\sigma = -1, 0$  или  $1$  для подгрупп  $K, N'$  или  $A'$  соответственно.

Выражение (10) не выглядит привлекательно, однако, введение гиперкомплексных чисел существенно его упрощает:

**Предложение 5.** Пусть единица  $\iota$  такова, что  $\iota^2 = \sigma$ , тогда действие группы  $SL_2(\mathbb{R})$  (10) может быть записано как дробно-линейное (мёбиусово) преобразование:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : w \mapsto \frac{aw + b}{cw + d}, \quad \text{где } w = u + \iota v, \quad (11)$$

для всех трёх возможных значений параметра  $\sigma$  из Предложения 4.

*Замечание 6.* Отметим что гиперкомплексные единицы не вводились нами умышленно, по произволу или из «чисто обобщательской попытки» [30, стр. 4]. Они естественно возникли из действия группы  $SL_2(\mathbb{R})$ .

Мнимая единица  $i^2 = -1$  порождает хорошо знакомые комплексные числа. Двумерная алгебра выражений  $x + jy$  с образующей  $j^2 = 1$  имеет много имён: гиперболические, двойные числа [2, 11, 32] и др., это один из простейших примеров гиперкомплексных чисел. Параболические гиперкомплексные числа, часто так же называемые двойными имеют вид  $x + \varepsilon y$  с нильпотентной единицей такой, что  $\varepsilon^2 = 0$  [35, 9, 3, 5]. Мы используем символ  $\iota$  для обозначения любой из трёх единиц  $i, \varepsilon$  или  $j$ .

*Замечание 7.* К сожалению, не существует устоявшихся обозначений для образующих гиперкомплексных алгебр. Более того, было бы затруднительно просто перечислить всё многообразие использованных символов и мы упомянем лишь некоторые из них. Стоит отметить, что даже наиболее традиционная мнимая единица  $i$  обозначается как  $j$  во многих инженерных текстах. Гиперболическая единица обозначается как  $j$  во многочисленных работах начиная, по крайней мере, с основополагающего текста [34]; однако, другое обозначение  $e$  употребляется в замечательной книге [35]. Для нильпотентной единицы часто используется символ  $\iota$  [7, 29], но наш выбор  $\varepsilon$  позаимствован у Яглома [35] и его последователей. Нам это обозначение кажется удачным в силу следующего Замечания.

*Замечание 8.* Нильпотентная единица  $\varepsilon$  близко связана с инфинитезимальным числом  $\varepsilon$  используемом в нестандартном анализе [4, 33]. Квадрат нильпотентной единицы в точности равен нулю в то время, как квадрат инфинитезимального числа есть «практически» ноль. Это сходство использовалось в работе [3] для вывода основных теорем дифференциального исчисления на основе нильпотентной единицы. Это же свойство стоит за построением классической механики из представлений группы Гейзенберга [20].

Действие (11) является групповым гомоморфизмом из  $SL_2(\mathbb{R})$  в преобразование «верхней полуплоскости» гиперкомплексной алгебры. Несмотря на то, что алгебраическая структура двойных и дуальных чисел достаточно вырождена, они интересны как однородные пространства для мёбиусовых преобразований. Построение соответствующих геометрий в духе Эрлангенской программы Ф. Клейна ободряюще необычно [19] и приводит к новым результатам даже в хорошо изученном случае геометрии Лобачевского [15].

Из-за делителей нуля корректное изучение мёбиусовых преобразований (11) должно рассматриваться на конформно пополненной плоскости [9, 16]. Физические приложения гиперкомплексных чисел простираются от классической механики [35] и специальной теории относительности [2, 32] до космологии [9, 6] и квантовой механики [11, 20, 7].

Стандартный способ линеаризации действия (8) заключается в переходе к представлению индуцированному с подгруппы  $H$  [12, § 13.2], [13, § 3.1]. Для этого мы определим отображение  $r : G \rightarrow H$  порожденное отображениями  $p$  и  $s$  через соотношения:

$$r(g) = (s(\omega))^{-1}g, \quad \text{где } \omega = p(g) \in \Omega. \quad (12)$$

Пусть  $\chi$  является неприводимым представлением подгруппы  $H$  в векторном пространстве  $V$ , тогда оно индуцирует представление  $G$  в смысле Макки [12, § 13.2]. Существует несколько реализаций индуцированного представления, мы будем рассматривать представление  $\rho_\chi$  в пространстве  $V$ -значных функций по формуле [12, § 13.2.(7)–(9)]:

$$[\rho_\chi(g)f](\omega) = \chi(r(g^{-1} * s(\omega)))f(g^{-1} \cdot \omega), \quad (13)$$

где  $g \in G$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $h \in H$  и  $r : G \rightarrow H$ ,  $s : \Omega \rightarrow G$  есть отображения определённые выше;  $*$  обозначает групповую операцию на  $G$  и  $\cdot$  является действием (8) группы  $G$  на  $\Omega$ .

Так как в нашем рассмотрении подгруппа  $H$  всегда одномерна, то её неприводимые представления обычно предполагаются комплексными характерами. Однако, если гиперкомплексные числа естественно появляются в действии группы  $SL_2(\mathbb{R})$  на однородных пространствах (11), почему мы не должны также рассмотреть гиперкомплексные характеры?

### 3 Гиперкомплексные характеры—алгебраический подход

Как уже отмечалось, традиционно основное внимание при изучении представлений группы  $SL_2(\mathbb{R})$  уделяется случаю  $H = K$  и, соответственно, комплекснозначным характерам  $K$ . Линейное преобразование определённое матрицами (4) из  $K$  представляют собой вращения  $\mathbb{R}^2$  на угол  $t$ . Идентификация  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  переводит это вращение в умножение на  $e^{it}$ , где  $i^2 = -1$ . Вращение является унитарным для эллиптической метрики:

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy). \quad (14)$$

Каждая орбита вращения являются окружностью («ободом колеса»), и любая прямая проходящая через начало координат («спица») переходит в другую прямую повернутую на угол  $t$ , см. Рис. 1(E).

Для гиперкомплексных чисел наиболее прямолинейное применение этой модели для характеров выглядит как на рисунке 1.

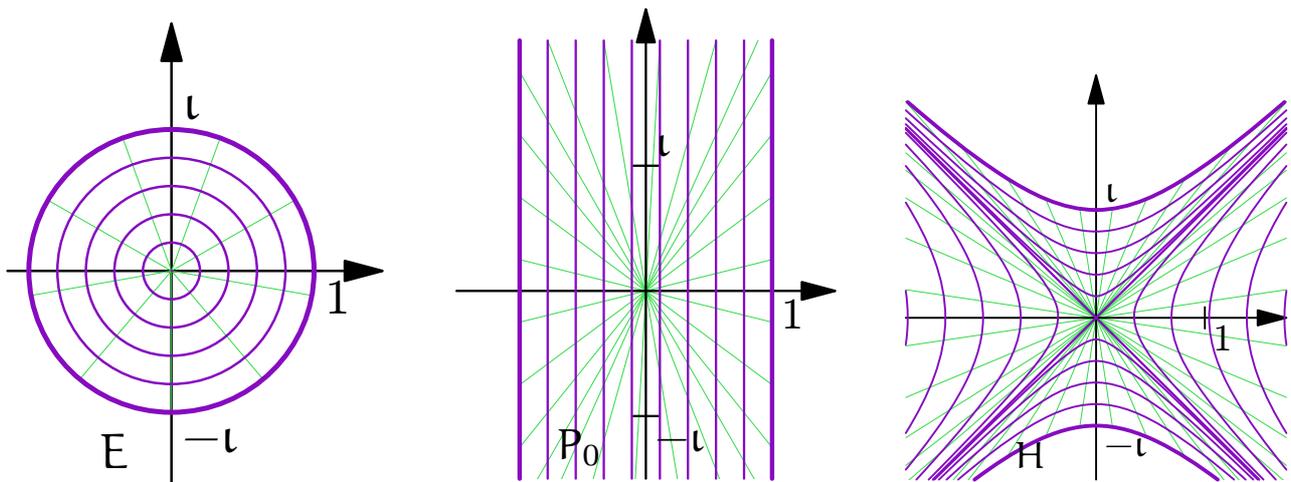


Рис. 1: Унитарные вращения, полученные алгебраическим способом, т.е. умножением на  $e^{lt}$ : эллиптические ( $E$ ), параболические ( $P_0$ ) и гиперболические ( $H$ ). Все фиолетовые орбиты определяются уравнением  $x^2 - l^2 y^2 = r^2$ . Зелёные «спицы» (прямые линии из начала координат к точке на орбите) получаются вращением горизонтальной оси.

**Предложение 9.** Нижеследующая таблица показывает алгебраическое соответствие между гиперкомплексными характеристиками:

Эллиптический	Параболический	Гиперболический
<i>Subgroup K</i>	<i>Subgroup N'</i>	<i>Subgroup A'</i>
$i^2 = -1$	$\varepsilon^2 = 0$	$j^2 = 1$
$w = x + iy$	$w = x + \varepsilon y$	$w = x + jy$
$\bar{w} = x - iy$	$\bar{w} = x - \varepsilon y$	$\bar{w} = x - jy$
$e^{it} = \cos t + i \sin t$	$e^{\varepsilon t} = 1 + \varepsilon t$	$e^{jt} = \cosh t + j \sinh t$
$ w _e^2 = w\bar{w} = x^2 + y^2$	$ w _p^2 = w\bar{w} = x^2$	$ w _h^2 = w\bar{w} = x^2 - y^2$
$\arg w = \arctan \frac{y}{x}$	$\arg w = \frac{y}{x}$	$\arg w = \tanh^{-1} \frac{y}{x}$
окружность $ w _e^2 = 1$	две прямые $x = \pm 1$	гипербола $ w _h^2 = 1$

Геометрическое действие умножения на  $e^{lt}$  показано Рис. 1 для всех трёх случаев.

Явным образом параболическое «вращение» порождённое умножением на  $e^{\varepsilon t}$  действует на дуальные числа так:

$$e^{\varepsilon x} : a + \varepsilon b \mapsto a + \varepsilon(ax + b). \quad (15)$$

Это связывает параболический случай с галилеевыми симметриями классической механики [35], в которой время абсолютно и независимо от пространства. Такое кинематическое обоснование предлагает следующие соответствия для параболического случая [8, 35]:

- Параболическая тригонометрия тривиальна:

$$\text{cosp } t = \pm 1, \quad \text{sinp } t = t; \quad (16)$$

- параболическое расстояние (при ненулевом  $x$ ) не зависит от  $y$ :

$$x^2 = (x + \varepsilon y)(x - \varepsilon y); \quad (17)$$

- полярное разложение дуального числа [35, App. C(30')]:

$$u + \varepsilon v = u\left(1 + \varepsilon \frac{v}{u}\right), \quad \text{поэтому} \quad |u + \varepsilon v| = u, \quad \arg(u + \varepsilon v) = \frac{v}{u}; \quad (18)$$

- параболическое «колесо» выглядит прямоугольным, см. Рис. 1( $P_0$ ).

Алгебраическая аналогия и кинематическое обоснование кажутся достаточно убедительными для единственно правильной параболической тригонометрии [26, 8, 35]. Более того, данные три типа вращений представляют собой все возможные линейные симплектические преобразования, что делает их и соответствующие мнимые единицы полезными в классической и квантовой механике [20, 22].

Однако геометрический подход и симметрии параболических уравнений математической физики предлагают менее вырожденную альтернативу изложенную ниже.

#### 4 Параболическое колесо из геометрического действия

Попробуем ввести нетривиальные параболические вращения другим способом. Если умножение в дуальных числах (линейные преобразования) слишком тривиальны, мы перейдём к следующему уровню сложности: дробно-линейным.

Действительно, нет необходимости рассматривать гиперкомплексные единицы как абстрактные сущности. Мы видели в Лемме 2, что генераторы подгрупп  $K$ ,  $N$  и  $A$  по сути представляют единицы для комплексных, дуальных и двойных чисел соответственно. Мы так же можем рассматривать выражения для однопараметрических подгрупп  $K$ ,  $N'$  и  $A'$  как матричные версии тождества Эйлера из пятой строки таблицы в Предложении 9.

Поэтому мы можем определить характеры подгрупп  $K$ ,  $N'$  и  $A'$  через геометрическое действие  $SL_2(\mathbb{R})$  посредством преобразований Мёбиуса. Однако действие (11) определено в верхней полуплоскости, а было бы желательно получить его унитарную форму, что возможно при конформном отображении на единичный круг. В эллиптическом случае это достигается преобразованием Келли, которое переводит подгруппу  $K$  в:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Диагональная матрица справа задаёт преобразование Мёбиуса, которое сводится к умножению на  $e^{2it}$ , то есть унитарному вращению комплексной плоскости.

Гиперболическая версия преобразования Келли выглядит так [19, § 8.1]:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Преобразование Мёбиуса с полученной матрицей так же сводится к умножению на  $e^{2jt}$ , что является унитарным преобразованием Лоренца двумерного пространства-времени Минковского.

В параболическом случае мы используем для преобразования Келли сходную матрицу [19, § 8.2]:

$$C_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда образом матрицы (3) из подгруппы  $N$  будет:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon t & t \\ 0 & 1 - \varepsilon t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\varepsilon t} & t \\ 0 & e^{-\varepsilon t} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Хотя этот результат не сильно отличается от двух предыдущих случаев (19) и (20), но присутствие ненулевого члена в позиции (1, 2) нарушает баланс. Тем не менее, мы по-прежнему определим параболическое вращение, как преобразование Мёбиуса с матрицей (21), которое уже не будет простым умножением на скаляр.

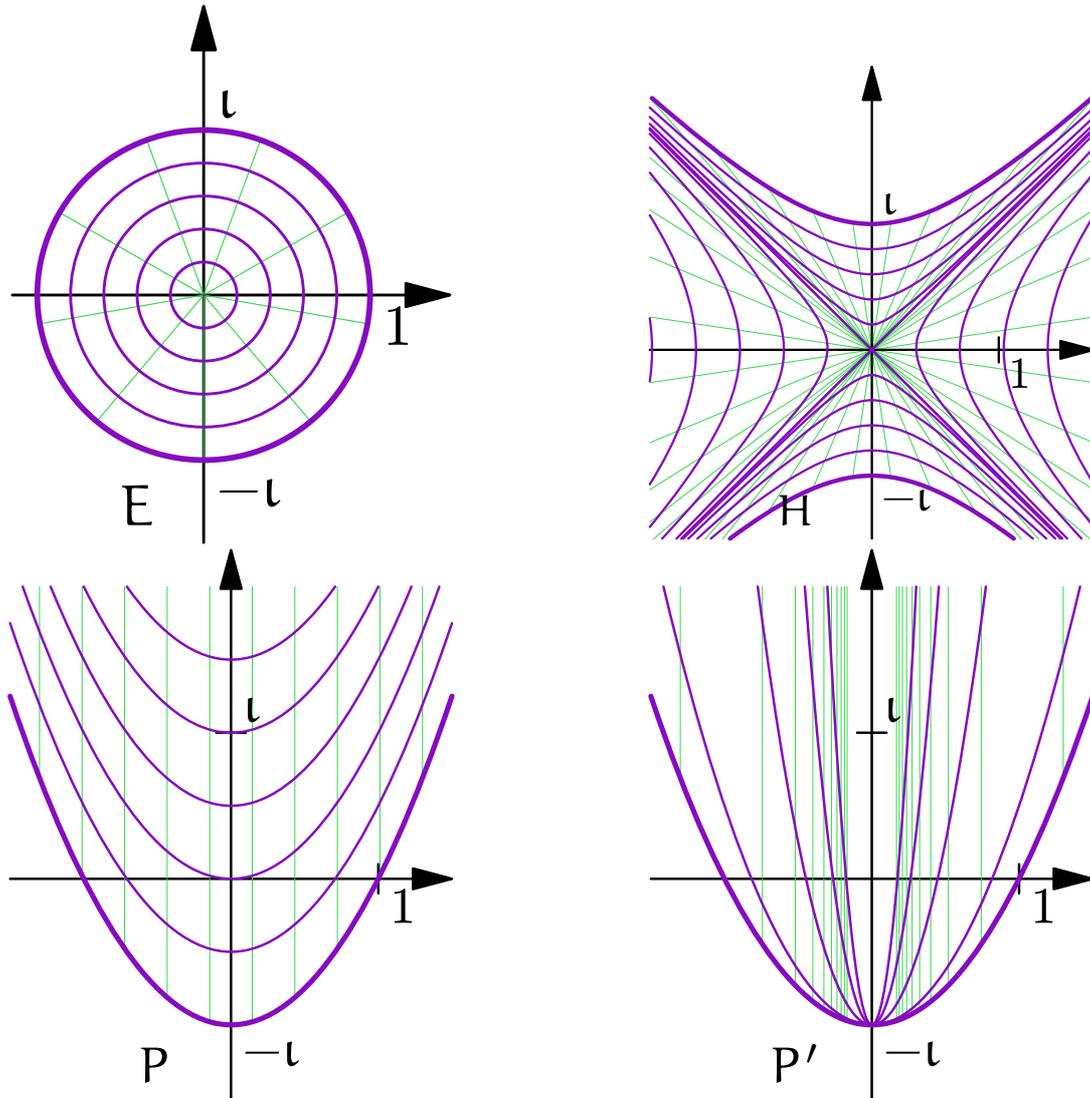


Рис. 2: Геометрическая версия унитарных вращений: эллиптические ( $E$ ), два варианта параболических ( $P$  и  $P'$ ), и гиперболические ( $H$ ). Фиолетовые орбиты являются линиями уровня для соответствующих функций модуля. Зелёные прямые линии соединяют точки с одинаковым значением аргумента, они нарисованы с постоянным шагом приращения аргумента для каждого случая.

**Пример 10.** Параболическое вращение с верхне-треугольной матрицей из подгруппы  $N$  есть:

$$\begin{pmatrix} e^{\varepsilon t} & t \\ 0 & e^{-\varepsilon t} \end{pmatrix} : -\varepsilon \mapsto t + \varepsilon(t^2 - 1). \quad (22)$$

Это совпадает с *циклическим вращением* определённым в [35, § 8]. Сравнение с тождеством Эйлера по-прежнему подтверждает определение параболического синуса как линейной функции  $\operatorname{sinp} t = t$ , но предлагает новое значение для параболического косинуса (квадратичное вместо постоянного):

$$\operatorname{cosp} t = 1 - t^2, \quad \operatorname{sinp} t = t.$$

Соответственно параболическая теорема Пифагора выглядит так:

$$\operatorname{sinp}^2 t + \operatorname{cosp} t = 1, \quad (23)$$

что неплохо соседствует с эллиптической с одной стороны и гиперболической—с другой версиями:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \quad \sinh^2 t - \cosh^2 t = -1.$$

Отметим также, что тождество (23) менее вырождено, чем выражение вообще без синуса  $\operatorname{cosp}^2 t = 1$  из [8] (см. так же (16), (17)).

**Пример 11.** Существует вторая возможность определить параболические вращения используя нижне-треугольные матрицы из подгруппы  $N'$ . Существенное отличие в том, что точка  $-\varepsilon$  теперь неподвижна (как и все точки вертикальной оси) и для получения орбиты мы будем использовать  $\varepsilon^{-1}$ , который является идеальным элементом (точкой в бесконечности) [35, App. C] потому, что  $\varepsilon$  — делитель нуля. Вопросы замыкания гиперкомплексных чисел идеальными элементами в физическом контексте рассматривались в [16].

Для подгруппы  $N'$  мы получаем:

$$\begin{pmatrix} e^{-\varepsilon t} & 0 \\ t & e^{\varepsilon t} \end{pmatrix} : \frac{1}{\varepsilon} \mapsto \frac{1}{t} + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{t^2}\right). \quad (24)$$

Сравнение с (22) показывает, что обе версии связаны отображением  $t \mapsto t^{-1}$ . Такое же соотношение связывает и параболические тригонометрические функции. Параболическая «единичная окружность» (или *цикл* [19, 35]) определяется уравнением  $x^2 - y = 1$  в обоих случаях, см. Рис. 2( $P$ ) и ( $P'$ ). Однако остальные орбиты различаются и мы опишем их в следующей секции.

Рис. 2 показывает преобразования Мёбиуса определённых матрицами (19), (20) и (21) с соответствующими «единичными кругами», которые являются образами верхней полуплоскости под действием соответствующих преобразований Келли [19, § 8].

## 5 Восстановление алгебраической структуры из геометрии

Мы хотим, чтобы индуцированные представления были линейными, для этого порождающий их характер должен также быть линейным. Вращения в эллиптическом и параболическом случае задаются произведениями с комплексными и двойными числами соответственно и потому — линейны. Однако, нетривиальные параболические вращения (22) и (24) (Рис. 2( $P$ ) и ( $P'$ )) — нелинейны и мы введём новые алгебраические операции на дуальных числах, которые линеаризуют преобразования Мёбиуса. Для этого мы будем систематически использовать хорошо известный приём «обращения теорем в определения».

### 5.1 Модуль и аргумент

В эллиптическом и гиперболическом случае орбиты вращений являются точками с постоянной нормой (модулем):  $x^2 + y^2$  или  $x^2 - y^2$  соответственно. В параболическом случае мы используем этот же признак:

**Определение 12.** Орбиты преобразований (22) и (24) являются линиями уровня для следующих функций, которые мы будем называть соответствующими *модулем (нормой)*:

$$\text{для } N : |u + \varepsilon v| = u^2 - v, \quad \text{для } N' : |u + \varepsilon v|' = \frac{u^2}{v + 1}. \quad (25)$$

*Замечание 13.*

1. Выражение  $|(u, v)| = u^2 - v$  равно параболическому расстоянию из  $(0, \frac{1}{2})$  to  $(u, v)$  к точке  $(u, v)$ , см. [19, Lem. 8.3], и так же соответствует «параболической теореме Пифагора» (23).
2. Модуль для подгруппы  $N'$  выражает параболическое фокальное расстояние из точки  $(0, -1)$  к  $(u, v)$ , см. [19, Lem. 8.4].

Единственные прямые, которые переходят в прямые под действием параболических вращений с подгруппами  $N$  и  $N'$ , это вертикальные прямые. Поэтому мы их будем использовать как множества точек с постоянным значением аргумента и дадим следующее:

**Определение 14.** Параболический *аргумент* определятся как:

$$\text{для } N : \arg(u + \varepsilon v) = u, \quad \text{для } N' : \arg'(u + \varepsilon v) = \frac{1}{u}. \quad (26)$$

Оба определения 12 и 14 задают свойства хорошо согласующиеся с параболическими вращениями:

**Предложение 15.** Пусть точка  $w_t$  получается из  $w$  параболическим вращением на угол  $t$  в (22) или в (24). Тогда:

$$|w_t|^{(t)} = |w|^{(t)}, \quad \arg^{(t)} w_t = \arg^{(t)} w + t,$$

где выражения со штрихом используются для подгруппы  $N'$ .

Все доказательства в этой и следующей секциях производятся вычислением либо непосредственно, либо с помощью пакета символьческих расчётов [17, 18].

*Замечание 16.* Отметим, что в традиционном изложении [35, App. C(30')] параболический модуль и аргумент выражаются как в (18), что в некотором смысле обратно к нашим соглашениям.

## 5.2 Параболический поворот как умножение

Для определение параболического произведения мы снова будем использовать известные свойства комплексного произведения в качестве определения. Действительно, параболическое вращение можно рассматривать как умножение на унимодулярное скаляр, таким образом мы приходим к следующему

**Определение 17.** Произведение двух векторов  $w_1$  и  $w_2$  определяется такими двумя условиями:

1.  $\arg^{(t)}(w_1 w_2) = \arg^{(t)} w_1 + \arg^{(t)} w_2$ ;
2.  $|w_1 w_2|^{(t)} = |w_1|^{(t)} \cdot |w_2|^{(t)}$ .

Параболическое сопряжение так же требует специального определения, которое основано на изменении знака аргумента.

**Определение 18.** Сопряжённый вектор задаётся равенством:

$$\overline{u + \varepsilon v} = -u + \varepsilon v. \quad (27)$$

Очевидно, мы имеем следующие свойства сопряжения:  $|\overline{w}|^{(t)} = |w|^{(t)}$  и  $\arg^{(t)} \overline{w} = -\arg^{(t)} w$ . Определения 12, 14 и 17 совместно задают значение для произведения двух векторов единственным образом.

**Предложение 19.** *Параболическое произведение двух векторов имеет следующие явные выражения:*

$$\text{для } N : \quad (u, v) * (u', v') (u + u', (u + u')^2 - (u^2 - v)(u'^2 - v')); \quad (28)$$

$$\text{для } N' : \quad (u, v) * (u', v') = \left( \frac{uu'}{u + u'}, \frac{(v + 1)(v' + 1)}{(u + u')^2} - 1 \right). \quad (29)$$

Несмотря на необычный вид оба произведения имеют хорошо знакомые свойства:

**Предложение 20.** *Оба произведения (28) и (29) удовлетворяют таким условиям:*

1. Они коммутативны и ассоциативны;
2. Соответствующие параболические повороты (22) и (24) совпадают с умножением на унимодулярный вектор.
3. Значение произведения  $w_1 \bar{w}_2$  не изменится если оба вектора  $w_1$  и  $w_2$  будут повернуты на тот же угол соответствующим вращением (22) или (24).
4. Для любого вектора  $w$  выполняется тождество:

$$|w \bar{w}| = |w|^2.$$

В частности, свойство (3) из этого Предложения будет важно для скалярного произведения (38), по отношению к которому наши индуцированные представления будут унитарны.

## 6 Инвариантная линейная алгебра

Теперь мы хотим определить линейную структуру на  $\mathbb{R}^2$ , которая будет совместима с параболическим умножением из предыдущей секции и, потому, с параболическими вращениями, см. Предложение 20(2). Умножение на положительный действительный скаляр задаётся прямолинейно: оно не должно менять аргумент и соответственно масштабировать норму вектора. Поэтому для  $a > 0$  мы имеем:

$$a \cdot (u, v) = (u, av + u^2(1 - a)) \quad \text{для } N, \quad (30)$$

$$a \cdot (u, v) = \left( u, \frac{v + 1}{a} - 1 \right) \quad \text{для } N'. \quad (31)$$

С другой стороны, сложение векторов может быть задано несколькими существенно отличными свойствами. Мы приведём две возможности: тропическую и экзотическую.

### 6.1 Тропическая форма

Введём лексиграфический порядок на  $\mathbb{R}^2$ :

$$(u, v) \prec (u', v') \quad \text{тогда и только тогда,} \quad \begin{cases} \text{когда } u < u'; \\ \text{или } u = u', v < v'. \end{cases}$$

Соответственно мы можем задать функции  $\min$  и  $\max$  для любой пары векторов из  $\mathbb{R}^2$  соответственно. Тогда сумма двух векторов определяется как их минимум (или максимум). Такое же определение используется в *тропической математике*, так же известной как «деквантизация» Маслова или алгебры  $\mathbb{R}_{\min}$  и  $\mathbb{R}_{\max}$ , см. превосходный обзор [27]. Легко проверить, что такое сложение совместно с умножением (30)–(31) удовлетворяет дистрибутивному закону и потому будет инвариантно относительно параболических вращений. Это направление выглядит интересным и обещающим, однако мы больше не будем его рассматривать в данной работе.

## 6.2 Экзотическая форма

Сложение двух векторов может быть задано одной формулой для обеих подгрупп  $N$  и  $N'$  таким образом, что их отличие будет спрятано в соответствующих Определениях 12 (норма) и 14 (аргумент).

**Определение 21.** Параболическое сложение векторов задаётся в (экзотической) форме:

$$\arg^{(t)}(w_1 + w_2) = \frac{\arg^{(t)} w_1 \cdot |w_1|^{(t)} + \arg^{(t)} w_2 \cdot |w_2|^{(t)}}{|w_1 + w_2|^{(t)}}, \quad (32)$$

$$|w_1 + w_2|^{(t)} = |w_1|^{(t)} \pm |w_2|^{(t)}, \quad (33)$$

где штрихованные версии формул соответствуют подгруппе  $N'$ .

На первый взгляд формула для нормы суммы (33) выглядит слишком тривиально. В её защиту мы можем отметить, что она располагается как раз между эллиптическим  $|w + w'| \leq |w| + |w'|$  и гиперболическим  $|w + w'| \geq |w| + |w'|$  неравенствами треугольника для норм.

Правило для сложения аргументов (32) тоже не является произвольным. Из теоремы синусов евклидовой геометрии мы можем получить

$$\sin(\phi - \psi') = \frac{|w| \cdot \sin(\psi - \psi')}{|w + w'|}, \quad \sin(\psi' - \phi) = \frac{|w'| \cdot \sin(\psi - \psi')}{|w + w'|},$$

где  $\psi^{(t)} = \arg w^{(t)}$  и  $\phi = \arg(w + w^{(t)})$ . Используя значение (16) параболического синуса  $\operatorname{sinp} \theta = \theta$  мы получаем (32).

Аккуратность в обращении с нулями в знаменателе выражения (32) достигается при переходе от вектора  $w = u + \varepsilon v$  к паре однородных полярных координат  $[a, r] = [|w|^{(t)} \cdot \arg^{(t)} w, |w|^{(t)}]$  (штрихованная версия соответствует подгруппе  $N'$ ). Тогда сложение задаётся покомпонентно в однородных координатах:

$$w_1 + w_2 = [a_1 + a_2, r_1 + r_2], \quad \text{где } w_i = [a_i, r_i].$$

Умножение из Определения 17 в однородных координатах есть:

$$w_1 \cdot w_2 = [a_1 r_2 + a_2 r_1, r_1 r_2], \quad \text{где } w_i = [a_i, r_i].$$

Таким образом, однородные координаты линеаризуют сложение (32)–(33) и умножение на скаляр (30). Переход к более прозрачным координатам может быть рассмотрен в контексте бирациональной геометрии [23].

Параболическое сложение определяется условиями (32)–(33) однозначно, но явные формулы достаточно сложны. Во многих случаях без них можно обойтись используя следующие свойства:

**Предложение 22.** Векторное сложение для подгрупп  $N$  и  $N'$  заданное выражением (32)–(33) обладает следующими свойствами:

1. Они коммутативны и ассоциативны.
2. Выполняется дистрибутивный закон для умножений (28) и (29); соответственно:
3. Сложения перестановочны с поворотами;
4. Выполняются дистрибутивные законы для умножения на скаляр (30) и (31) соответственно:

$$a \cdot (w_1 + w_2) = a \cdot w_1 + a \cdot w_2, \quad (a + b) \cdot w = a \cdot w + b \cdot w.$$

Что бы завершить построение действительного векторного пространства нам надо описать нулевой и обратный вектора. В частности, мы определим обратный элемент как имеющий тот же аргумент и противоположную норму.

**Предложение 23.**

(N) Нулевой вектор есть  $(0, 0)$  и соответственно противоположный элемент для  $(u, v)$  есть  $(u, 2u^2 - v)$ .

(N') Нулевой вектор есть  $(\infty, -1)$  и соответственно противоположный элемент для  $(u, v)$  есть  $(u, -v - 2)$ .

Теперь используя равенство  $-w = (-1) \cdot w$  можно убедиться, что та же формула (30) и (31) может быть использована для умножения на отрицательные действительные скаляры.

*Замечание 24.* Обычная линейная структура является неподходящей и в других вопросах, например, в кажущейся «неконформности» длин из параболического фокуса, то есть с параметром  $\dot{\sigma} = 0$  в [19, Prop. 3]. Однако подходящая выбор определений восстанавливает искомые свойства.

Первоначальное определение конформности [19, Defn. 5.4] рассматривало традиционный предел  $y' \rightarrow y$  вдоль прямых линий, т.е. «спиц» изображённых на Рис. 1. Хорошо известно, что этот подход полностью работает в эллиптическом и гиперболическом случае. Однако, в параболическом случае вертикальные линии больше подходят на роль «спиц», см. Рис. 2(P) и (P'), таким образом обоснованно рассматривать конформный предел вдоль них [19, Prop. 5.2].

## 7 Индуцированные представления

Теперь мы можем применить гиперкомплексные характеры построенные выше к индуцированным представлениям заданным формулой (13). Заметим, что только компактная подгруппа  $K$  требует комплексно-значных характеров, так как для однозначности представления образ матрицы из (4) при  $t = 2\pi$  должен быть единицей. Для подгрупп  $N'$  и  $A'$  такого ограничения нет и мы можем рассмотреть характеры всех трёх типов: эллиптические, параболические и гиперболические. Более того, параболические характеры могут быть любого типов: алгебраические (15) или одного из геометрических (22) и (24). Таким образом мы имеем семь существенно разных типов индуцированных представлений, или даже одиннадцати (если отличать разновидности параболических характеров).

**Пример 25.** Рассмотрим подгруппу  $H = K$ , как отмечено выше, в силу её компактности характер может быть только комплексно-значным. Тогда унитарный характер  $\chi_k$  имеет вид:

$$\chi_k \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = e^{-ikt}, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}. \tag{34}$$

Используя явный вид (9) отображения  $s$  вычисляем функцию  $r$  заданную в (12):

$$r \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{c^2 + d^2}} \begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix} \in K.$$

Тогда:

$$r(g^{-1} * s(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{(cu + d)^2 + (cv)^2}} \begin{pmatrix} cu + d & -cv \\ cv & cu + d \end{pmatrix}, \quad \text{где } g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Подставляя это выражение в (34) и комбинируя с мёбиусовым преобразованием аргумента (11) получаем явную реализацию  $\rho_k$  индуцированного представления (13):

$$\rho_k(g)f(w) = \frac{|cw + d|^k}{(cw + d)^k} f\left(\frac{aw + b}{cw + d}\right), \quad \text{где } g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad w = u + iv. \quad (35)$$

Это представление действует на комплексно-значных функциях в верхней полуплоскости  $\mathbb{R}_+^2 = SL_2(\mathbb{R})/K$  и является унитарным из дискретной серии [25, § IX.2].

**Предложение 26.** Пусть  $f_k(w) = \frac{|w-i|^k}{(w-i)^k}$  for  $k = 2, 3, \dots$ , тогда

1.  $f_k$  является собственным вектором операторов  $\rho_k(h)$ , для любого  $h \in K$ , с собственным значением  $\chi_k(h)$  [25, § IX.2].
2. Функция  $K(z, w) = \rho_k(s(z))f_k(w)$ , где  $s(z)$  определяется в (9), есть воспроизводящее ядро Бергмана в верхней полуплоскости [13, § 3.2] умноженное на  $\left|\frac{z-i}{w-i}\right|^k$ .

Сходным образом мы получаем ядро Коши если рассмотрим предельный случай  $k = 1$  ложной дискретной серии [25, Ch. IX]. Существует много других связей представления (35) с комплексным анализом [13] и теорией операторов. К примеру, преобразования Мёбиуса операторов определяют функциональное исчисление Данфорда–Рисса и соответствующий спектр [14].

**Пример 27.** Для подгруппы  $N'$  возможен более широкий выбор характеров.

1. Традиционно рассматриваются комплекснозначные характеры подгруппы  $N'$ , т.е.:

$$\chi_\tau^{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = e^{i\tau t}, \quad \text{где } \tau \in \mathbb{R}. \quad (36)$$

Непосредственные вычисления в этом случае показывают, что:

$$r \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{d} & 1 \end{pmatrix} \in N'.$$

Поэтому:

$$r(g^{-1} * s(u, v)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{cv}{d+cu} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Подставляя это значение в характер (36) и соединяя с мёбиусовым преобразованием (11) получаем соответствующую реализацию формулы (13):

$$\rho_\tau^{\mathbb{C}}(g)f(w) = \exp\left(i\frac{\tau cv}{cu + d}\right) f\left(\frac{aw + b}{cw + d}\right), \quad \text{где } w = u + \varepsilon v, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Соответствующее индуцированное представление действует в пространстве комплекснозначных функций в верхней полуплоскости  $\mathbb{R}_+^2$ , которая является подмножеством однородного пространства  $SL_2(\mathbb{R})/N$  состоящего из дуальных чисел. Соседство комплексных и дуальных чисел в одном выражении является непривычным.

2. Возьмём параболический характер  $\chi_\tau$  алгебраического типа заданный умножением дуальных чисел (15):

$$\chi_\tau \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = e^{\varepsilon\tau t} = 1 + \varepsilon\tau t, \quad \text{где } \tau \in \mathbb{R}.$$

По прежнему подставляем в него значение (37) и получаем такое выражение:

$$\rho_\tau(g)f(w) = \left(1 + \varepsilon \frac{\tau cv}{cu + d}\right) f\left(\frac{aw + b}{cw + d}\right),$$

где  $w$ ,  $\tau$  и  $g$  те же что и раньше.

Это индуцированное представление действует в пространстве функций определённых на верхней полуплоскости, как подмножестве дуальных чисел, и со значениями в дуальных числах. То есть, оно использует только дуальные числа и обычные алгебраические операции над ними. Естественным образом это представление является линейным.

3. Рассмотрим параболический характер  $\chi_\tau^g$  заданный геометрическим действием (22). Тогда представление действует в том же пространстве, что и в последнем случае, но формула будет другой:

$$\rho_\tau^g(g)f(w) = \left(1 + \varepsilon \frac{2\tau cv}{cu + d}\right) f\left(\frac{aw + b}{cw + d}\right) + \frac{\tau cv}{cu + d} + \varepsilon \frac{(\tau cv)^2}{(cu + d)^2},$$

где  $w$ ,  $\tau$  и  $g$  описаны выше. Это представление линейно по отношению к операциям (30), (32) и (33).

Все характеры использованные в предыдущих примерах являются унитарными: два первых в традиционном смысле, последний — как объяснено в Предложении 20. Соответственно общая конструкция индуцированных представлений [12, § 13.2] гарантирует унитарность полученных представлений в соответствующих смыслах.

**Теорема 28.** *Все три индуцированных представления  $\rho_\tau^{\mathbb{C}}$ ,  $\rho_\tau$  и  $\rho_\tau^g$  группы  $SL_2(\mathbb{R})$  из Примера 27 являются унитарными в пространстве функций заданных на верхней полуплоскости  $\mathbb{R}_+^2$  как подмножестве дуальных чисел с внутренним произведением:*

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}_+^2} f_1(w) \bar{f}_2(w) \frac{du dv}{v^2}, \quad \text{где } w = u + \varepsilon v, \quad (38)$$

и мы используем

1. сопряжение и умножение значений функций в алгебре комплексных и дуальных чисел для представлений  $\rho_\tau^{\mathbb{C}}$  и  $\rho_\tau$  соответственно;
2. сопряжение (27) и умножение (28) значений функций для представления  $\rho_\tau^g$ .

Внутреннее произведение (38) положительно определено для представления  $\rho_\tau^{\mathbb{C}}$ , но не для двух других. Соответствующие пространства с вырожденным внутренним произведением являются параболическими аналогами пространств Крейна [1]. Сами пространства Крейна в нашей классификации являются гиперболическими.

## 8 Принцип сродства и соответствия: операторы повышения

Приведённые выше наблюдения позволяют сформулировать следующий эмпирический принцип, который должен представлять эвристический интерес:

- Принцип 29** (Сходство и соответствие). 1. Подгруппы  $K$ ,  $N'$  и  $A'$  играют сходную роль в структуре группы  $SL_2(\mathbb{R})$  и её представлений;
2. Перемена подгруппы должна производиться с одновременной соответствующей заменой гиперкомплексных единиц  $i$ ,  $\varepsilon$  или  $j$ .

Безусловно, первая часть Принципа (сходство) способна вызвать удивление у любого, кто знаком с группой  $SL_2(\mathbb{R})$ . Однако, к настоящему моменту мы видели, что совместно со второй частью (соответствие), принцип уже проявился следующим образом:

- Действие  $SL_2(\mathbb{R})$  на однородном пространстве  $SL_2(\mathbb{R})/H$  для  $H = K, N'$  или  $A'$  задаётся дробно-линейными преобразованиями комплексных, дуальных или двойных чисел соответственно (Предл. 5).
- Подгруппы  $A', N'$  или  $K$  изоморфны группам унитарных вращений соответствующих единичных «окружностей» на плоскостях двойных, дуальных или комплексных чисел (Предл. 9).
- Представления индуцированные с подгруппы  $K, N'$  или  $A$  являются унитарными если скалярное произведение функций определяется посредством произведения и сопряжения значений функций как комплексных, дуальных или двойных чисел (Теор. 28).

*Замечание 30.* Принцип сходства и соответствия близок к суперсимметрии между бозонами и фермионами в физике, но в нашем случае сходство устанавливается между тремя различными типами объектов.

Приведём ещё одну иллюстрацию Принципа. Рассмотрим алгебру Ли  $\mathfrak{sl}_2$  группы  $SL_2(\mathbb{R})$ . Один из возможных базисов в  $\mathfrak{sl}_2$  таков [31, § 8.1]:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда коммутационные соотношения будут следующими:

$$[Z, A]_+, \quad [Z, B] = -2A, \quad [A, B] = -\frac{1}{2}Z. \quad (39)$$

Пусть у нас есть представление  $\rho$  группы  $SL_2(\mathbb{R})$  в пространстве  $V$ . Рассмотрим производное представление  $d\rho$  алгебры  $\mathfrak{sl}_2$  [25, § VI.1] и будем использовать обозначение  $\tilde{X} = d\rho(X)$  для  $X \in \mathfrak{sl}_2$ . Для анализа представления  $\rho$  оказывается полезным разложить  $V$  по собственным векторам оператора  $\tilde{X}$  для некоторого  $X \in \mathfrak{sl}_2$ , см. Предл. 26 и ряд Тейлора в комплексном анализе.

**Пример 31.** Уже не должно быть удивительным, что мы собираемся рассмотреть три случая:

1. Пусть  $X = Z$  будет генератором подгруппы  $K$  (4). Так как эта подгруппа компактна, то собственные вектора  $\tilde{Z}v_k = ikv_k$  параметризованы дискретным параметром  $k \in \mathbb{Z}$ . Особую роль играют операторы  $L^\pm$  повышения/понижения [25, § VI.2], [31, § 8.2], определённые коммутационными соотношениями:

$$[\tilde{Z}, L^\pm] = \lambda_\pm L^\pm. \quad (40)$$

Таким образом  $L^\pm$  являются собственными для операторов  $\text{ad}Z$  присоединённого представления  $\mathfrak{sl}_2$  [25, § VI.2]. Важно, что вектор  $L^+v_k$  так же является собственным для  $\tilde{Z}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(L^+v_k) &= (L^+\tilde{Z} + \lambda_+L^+)v_k = L^+(\tilde{Z}v_k) + \lambda_+L^+v_k = ikL^+v_k + \lambda_+L^+v_k \\ &= (ik + \lambda_+)L^+v_k. \end{aligned}$$

Полагая  $L^+ = a\tilde{A} + b\tilde{B} + c\tilde{Z}$  из коммутационного соотношений (39) и определяющего равенства (40) получаем систему уравнений:

$$c = 0, \quad 2a = \lambda_+b, \quad -2b = \lambda_+a.$$

Эта система совместима тогда и только тогда, когда  $\lambda_+^2 + 4 = 0$ . В этом случае операторы повышения/понижения  $L^\pm = \pm i\tilde{A} + \tilde{B}$  действуют на одномерной цепочке собственных подпространств:

$$\dots \xrightleftharpoons[L^-]{L^+} V_{k-2} \xrightleftharpoons[L^-]{L^+} V_k \xrightleftharpoons[L^-]{L^+} V_{k+2} \xrightleftharpoons[L^-]{L^+} \dots$$

2. Рассмотрим случай  $X = B$  генератора подгруппы  $A'$  (6). Эта подгруппа некомпактна и собственные значения для  $\tilde{B}$  могут быть произвольным числом, однако операторы повышения/понижения по прежнему могут играть важную роль [10, § II.1], [28, § 1.1]. Будем опять искать решение в форме  $L_h^+ = a\tilde{A} + b\tilde{B} + c\tilde{Z}$  для коммутатора  $[\tilde{B}, L_h^+] = \lambda L^+$ . Получаем систему:

$$2c = \lambda a, \quad b = 0, \quad \frac{a}{2} = \lambda c.$$

Она совместима только если  $\lambda^2 = 1$ . Очевидные значения  $\lambda = \pm 1$  приводят к операторам  $L_h^\pm = \pm \tilde{A} + \tilde{Z}/2$ , которые и используются в [10, § II.1], [28, § 1.1]. В этом случае неприводимый  $\mathfrak{sl}_2$ -модуль представляется одномерной цепочкой собственных значений. Допуская двойные числа мы можем удовлетворить условие совместимости  $\lambda^2 = 1$  дополнительными значениями  $\lambda = \pm j$ . Тогда возникает дополнительная пара операторов повышения/понижения  $L_j^\pm = \pm j\tilde{A} + \tilde{Z}/2$ , которая сдвигает собственные значения в «ортогональном» направлении к действию традиционных операторов  $L_h^\pm$ . Следовательно неприводимый  $\mathfrak{sl}_2$ -модуль может параметризоваться уже двумерной решёткой собственных значений на плоскости двойных чисел:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \dots & & \dots & & \dots \\ & & \updownarrow L_j^+ & & \updownarrow L_j^+ & & \updownarrow L_j^+ \\ \dots & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & V_{(n-2)+j(k-2)} & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & V_{n+j(k-2)} & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & V_{(n+2)+j(k-2)} & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & \dots \\ & & \updownarrow L_j^+ & & \updownarrow L_j^+ & & \updownarrow L_j^+ & & \\ \dots & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & V_{(n-2)+jk} & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & V_{n+jk} & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & V_{(n+2)+jk} & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & \dots \\ & & \updownarrow L_j^+ & & \updownarrow L_j^+ & & \updownarrow L_j^+ & & \\ \dots & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & V_{(n-2)+j(k-2)} & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & V_{n+j(k-2)} & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & V_{(n+2)+j(k-2)} & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & \dots \\ & & \updownarrow L_j^+ & & \updownarrow L_j^+ & & \updownarrow L_j^+ & & \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \end{array}$$

3. Рассмотрим, наконец, случай  $X = -B + Z/2$  генератора подгруппы  $N'$  (7). По описанной ранее процедуре получаем систему:

$$b + 2c = \lambda a, \quad -a = \lambda b, \quad \frac{a}{2} = \lambda c$$

с условием совместимости  $\lambda^2 = 0$ . Если мы ограничимся действительным (комплексным) корнем  $\lambda = 0$ , то соответствующие операторы  $L_p^\pm = -\tilde{B} + \tilde{Z}/2$  не будут менять собственные значения и будут бесполезны в таком контексте. Однако дуальные значения  $\lambda = \pm \varepsilon$  позволяют использовать операторы  $L_\varepsilon^\pm = \pm \varepsilon \tilde{A} - \tilde{B} + \tilde{Z}/2$  для построения  $\mathfrak{sl}_2$ -модулей с одномерной цепочкой собственных значений в дуальных числах.

*Замечание 32.* Стоит отметить, что

- введение комплексных чисел необходимо для *существования* операторов повышения/понижения в эллиптическом случае;
- в параболическом случае введение дуальных чисел необходимо для *полезности* этих операторов;
- в гиперболическом случае двойственные числа выглядят необязательными.

Подытожим рассмотренный пример подчеркнув в нём роль принципа сходства и соответствия:

**Предложение 33.** Пусть вектор  $X \in \mathfrak{sl}_2$  порождает подгруппу  $K$ ,  $N'$  или  $A'$ , то есть векторами  $X = Z$ ,  $B - Z/2$ , или  $B$  соответственно. Пусть  $\iota$  есть соответствующая гиперкомплексная единица.

Тогда операторы повышения/понижения  $L^\pm$  удовлетворяющие коммутационным соотношениям:

$$[X, L^\pm] = \pm \iota L^\pm, \quad [L^-, L^+] = 2\iota X.$$

имеют вид:

$$L^\pm = \pm \iota \tilde{A} + \tilde{Y}.$$

Здесь  $Y \in \mathfrak{sl}_2$  является линейной комбинацией  $B$  и  $Z$  а так же удовлетворяет следующим условиям:

- $Y = [A, X]$ .
- $X = [A, Y]$ .
- форма Киллинга  $K(X, Y)$  [12, § 6.2] равна нулю.

Любое из приведённых выше условий совместно с  $Y \in \text{span}\{B, Z\}$  определяет  $Y$  с точностью до действительного множителя.

Кажется правдоподобным, что применение Принципа сходства и соответствия не ограничивается приведёнными здесь случаями. Например, сходным образом могут быть рассмотрены операторы рождения/уничтожения для гармонического осциллятора и представлений группы Гейзенберга [22].

## Заключение

Введенные индуцированные представления заслуживают пристального исследования. Среди важных вопросов можно отметить следующие:

- прояснение связи с тремя основными сериями (дискретной, непрерывной, дополнительной) представлений группы  $SL_2(\mathbb{R})$  [25];
- связь со многими  $\mathfrak{sl}_2$  модулями [10, 28] (включая новые возможности для их унитаризации);
- приложение к теории обобщённых аналитических функций [13] и уравнений в частных производных [24];
- соответствующие функциональные исчисления [14], и т.д.

Эти направления являются частями Эрлангенской программы в широком смысле [15, 21] и должны быть продолжены в последующих работах. Ожидается, что Принцип сходства и соответствия окажет направляющую роль в поисках наиболее гармоничных конструкций.

## Благодарности

Автор благодарен проф. Н.А. Громову за полезное обсуждение данной работы и многочисленные ценные замечания.

## Литература

- [1] Arov D.Z., Dym H. J-contractive matrix valued functions and related topics. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Vol. 116, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [2] Boccaletti D., Catoni F., Cannata R., Catoni V., Nichelatti E., Zampetti P. The mathematics of Minkowski space-time and an introduction to commutative hypercomplex numbers. Springer Verlag, 2007.
- [3] Catoni F., Cannata R., Nichelatti E. The parabolic analytic functions and the derivative of real functions // *Advances in Applied Clifford algebras* 14, 2004, N. 2, pp. 185–190.
- [4] Davis M. Applied nonstandard analysis, Wiley-Interscience [John Wiley Sons], New York, 1977.
- [5] Громов Н.А. Контракции и аналитические продолжения классических групп. Единый подход. Акад. Наук СССР Урал. Отдел. Коми Научн. Центр, Сыктывкар, 1990.
- [6] Gromov N.A., Kuratov V.V. Noncommutative space-time models // *Czechoslovak J. Phys.* 55, 2005, N. 11, pp. 1421–1426.
- [7] Gromov N.A., Kuratov V.V. Possible quantum kinematics // *J. Math. Phys.* 47, 2006, N. 1, 013502, 9.
- [8] Herranz F.J., Ortega R., Santander M. Trigonometry of spacetimes: a new self-dual approach to a curvature/signature (in)dependent trigonometry // *J. Phys. A* 33, 2000, N. 24, pp. 4525–4551. E-print: arXiv:math-ph/9910041.
- [9] Herranz F.J., Santander M. Conformal compactification of spacetimes // *J. Phys. A* 35, 2002, N. 31, pp. 6619–6629. E-print: arXiv:math-ph/0110019.
- [10] Roger Howe and Eng Chye Tan Non-abelian harmonic analysis: Applications of  $SL(2, \mathbb{R})$ , Universitext, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [11] Khrennikov A., Segre G. Hyperbolic quantization. Quantum probability and infinite dimensional analysis, 2007, pp. 282–287.
- [12] Kirillov A.A. Elements of the theory of representations, Springer-Verlag, Berlin, 1976. Translated from the Russian by Edwin Hewitt, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 220.
- [13] Kisil V.V. Analysis in  $\mathbb{R}^{1,1}$  or the principal function theory // *Complex Variables Theory Appl.* 40, 1999, N. 2, 93–118. E-print: arXiv:funct-an/9712003.
- [14] Kisil V.V. Spectrum as the support of functional calculus // *Functional analysis and its applications*, 2004, pp. 133–141. E-print: arXiv:math.FA/0208249.
- [15] Kisil V.V. Erlangen program at large–0: Starting with the group  $SL_2(\mathbb{R})$  // *Notices Amer. Math. Soc.* 54 (2007), N. 11, pp. 1458–1465. E-print: arXiv:math/0607387
- [16] Kisil V.V. Two-dimensional conformal models of space-time and their compactification // *J. Math. Phys.* 48, 2007, N. 7, 073506, 8. E-print: arXiv:math-ph/0611053
- [17] Kisil V.V. Erlangen program at large–2 1/2: Induced representations and hypercomplex numbers, submitted (2009). E-print: arXiv:0909.4464.
- [18] Kisil V.V. Erlangen program at large–2: Inventing a wheel. The parabolic one. Trans. Inst. Math. of the NAS of Ukraine, 2010, pp. 89–98. E-print: arXiv:0707.4024.

- [19] Kisil V.V. Erlangen program at large-1: Geometry of invariants, SIGMA, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 6, 2010, N. 076, 45 pages. E-print: arXiv:math.CV/0512416.
- [20] Kisil V.V. Erlangen Programme at Large 3.1: Hypercomplex representations of the Heisenberg group and mechanics, submitted (2010). E-print: arXiv:1005.5057.
- [21] Kisil V.V. Erlangen Programme at Large: A brief outline (2010). E-print: arXiv:1006.2115.
- [22] Kisil V.V. Erlangen Programme at Large 3.2: Ladder Operators in Hypercomplex Mechanics, Acta Polytechnica, v. 51, 2011, N. 4, pp. 44–53, E-print: arXiv:1103.1120.
- [23] Kollar J., Mori S. Birational geometry of algebraic varieties. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti. Paperback reprint of the hardback edition 1998., Cambridge Tracts in Mathematics 134. Cambridge: Cambridge University Press. viii, 254 p., 2008 (English).
- [24] Kononenko N. Projective structures and algebras of their differential invariants // *Acta Applicandae Mathematicae* 109, 2010, N. 1, pp. 87–99.
- [25] Lang S.  $SL_2(\mathbb{R})$ , Graduate Texts in Mathematics, vol. 105, Springer-Verlag, New York, 1985. Reprint of the 1975 edition.
- [26] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. Второе издание, Москва, “Наука”, 1977.
- [27] Litvinov G.L. The Maslov dequantization, and idempotent and tropical mathematics: a brief introduction, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 326, 2005, N. Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 13, pp. 145–182, 282. E-print: arXiv:math/0507014.
- [28] Mazorchuk V. Lectures on  $sl_2$ -modules, World Scientific, 2009.
- [29] Пименов Р.И. Единая аксиоматика пространств с максимальной группой движений // *Литовский математический сборник*, 1965, Т. 5, № 3.
- [30] Понтрягин Л.С. Обобщения чисел. Библиотека “Квант”, том 54, “Наука”, Москва, 1986.
- [31] Taylor M.E. Noncommutative harmonic analysis. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 22, American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- [32] Ulrych S. Relativistic quantum physics with hyperbolic numbers // *Phys. Lett. B* 625 (2005), no. 3-4, 313–323.
- [33] Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? Москва, “Наука”, 1987. В прил.: “Нестандартное” построение степного ряда / В. Г. Кановой.
- [34] Vignaux J.C., A. Duranona y Vedia Sobre la teoria de las funciones de una variable compleja hiperbolica., Univ. nac. La Plata. Publ. Fac. Ci. fis. mat. 104, 1935, pp. 139–183 (Spanish). Zbl 62.1122.03.
- [35] Yaglom I.M. A simple non-Euclidean geometry and its physical basis, Springer-Verlag, New York, 1979.

## INDUCED REPRESENTATIONS AND HYPERCOMPLEX NUMBERS

V.V. Kisil

*University of Leeds, Leeds, Great Britain*

kisilv@maths.leeds.ac.uk

We review the construction of induced representations of the group  $G = SL_2(\mathbb{R})$ . Firstly we note that  $G$ -action on the homogeneous space  $G/H$ , where  $H$  is any one-dimensional subgroup of  $SL_2(\mathbb{R})$ , is a linear-fractional transformation on hypercomplex numbers. This observation can be extended to further correspondences between structural components of  $SL_2(\mathbb{R})$  and hypercomplex systems. Thus we investigate various hypercomplex characters of subgroups  $H$ . In particular we give examples of induced representations of  $SL_2(\mathbb{R})$  on spaces of hypercomplex valued functions, which are unitary in some sense.

**Key Words:** induced representation, unitary representations,  $SL(2, \mathbb{R})$ , semisimple Lie group, complex numbers, dual numbers, double numbers, Möbius transformations, split-complex numbers, parabolic numbers, hyperbolic numbers, raising/lowering operators, creation/annihilation operators, tropical mathematics.