Бенуа Мандельброт. Фото с личной страницы Мандельброта, размещенной на сайте Йельского университета (http://users.math.yale.edu/mandelbrot/).

БЕНУА МАНДЕЛЬБРОТ: ПУТЬ К ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПРИРОДЫ

В.А. Панчелюга

НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия
Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, Пущино, Россия

panvic333@yahoo.com

14 октября 2010 г. в Кембридже, штат Массачусетс, в возрасте восьмидесяти пяти лет ушел из жизни создатель фрактальной геометрии — Бенуа Мандельброт. Нижеследующая статья — дань памяти выдающемуся ученому.

Ключевые слова: фрактал, фрактальная геометрия, фрактальная размерность, Бенуа Мандельброт.

Введение

Если составить краткий список основных научных достижений прошедшего двадцатого века, то в этом списке обязательно встретятся слова «фрактал», «фрактальная геометрия», «фрактальная размерность». Фракталы, как способ устройства природных систем, реализующий принцип подобия части и целого, существовали всегда. Но предметом научной рефлексии они стали только во второй половине прошедшего века, благодаря деятельности Бенуа Мандельброта, который и ввел этот термин в научный оборот.

Дерево, облако, береговая линия — привычные объекты ежедневного опыта на протяжении всей человеческой истории, между которыми, казалось бы, существует мало общего. Но после Мандельброта можно сказать, что все это — примеры фракталов и что все они «сконструированы» по одному принципу: подобия части и целого.

Сам этот принцип известен с древнейших времен. Он встречается уже в религиозно-философских учениях древности. Яркий пример — «Аватамсака-сутра»: «В небесах Индры есть, говорят, нить жемчуга, подобранная так, что если глянешь в одну жемчужину, то увидишь все остальные, отраженные в ней. И точно так же каждая вещь в мире не есть просто она сама, а заключает в себе все другие вещи и на самом деле есть все остальное». Не обходят его своим вниманием и более поздние философские системы. Так, Готфрид Вильгельм фон Лейбниц в своей «Монадологии» полагает, что все знание о целокупной Вселенной можно вывести из информации, относящейся к одной-единственной монаде [1]. Краеугольным камнем современной голографической парадигмы, созданной трудами Дэвида Бома и Карла Прибрама [2-4] также является принцип подобия части и целого. Свое название голографическая парадигма получила из известного свойства голограммы: любая ее часть содержит информацию об изображении, которое записано на голографической пластинке в целом.

Мандельброт, вспоминая прослушанную им в Принстоне лекцию Германа Вейля (которая в дальнейшем легла в основу его знаменитой книги «Симметрия» [5]) отмечает, что древние, до-классические греки использовали идею симметрии намного более богатую, чем современное узкое понятие зеркального отражения. Греки, в действительности считали, что симметрия выражает некий вид связи или гармонию между частью и целым [6].

Подобие части и целого или самоподобие (в случае если речь идет более чем об одном масштабном факторе — самоафинность) связано с инвариантностью относительно изменений масштаба и является одной из фундаментальных симметрий. В отличие привычных трансляционной, поворотной и зеркальной симметрий, связанных с инвариантностью при

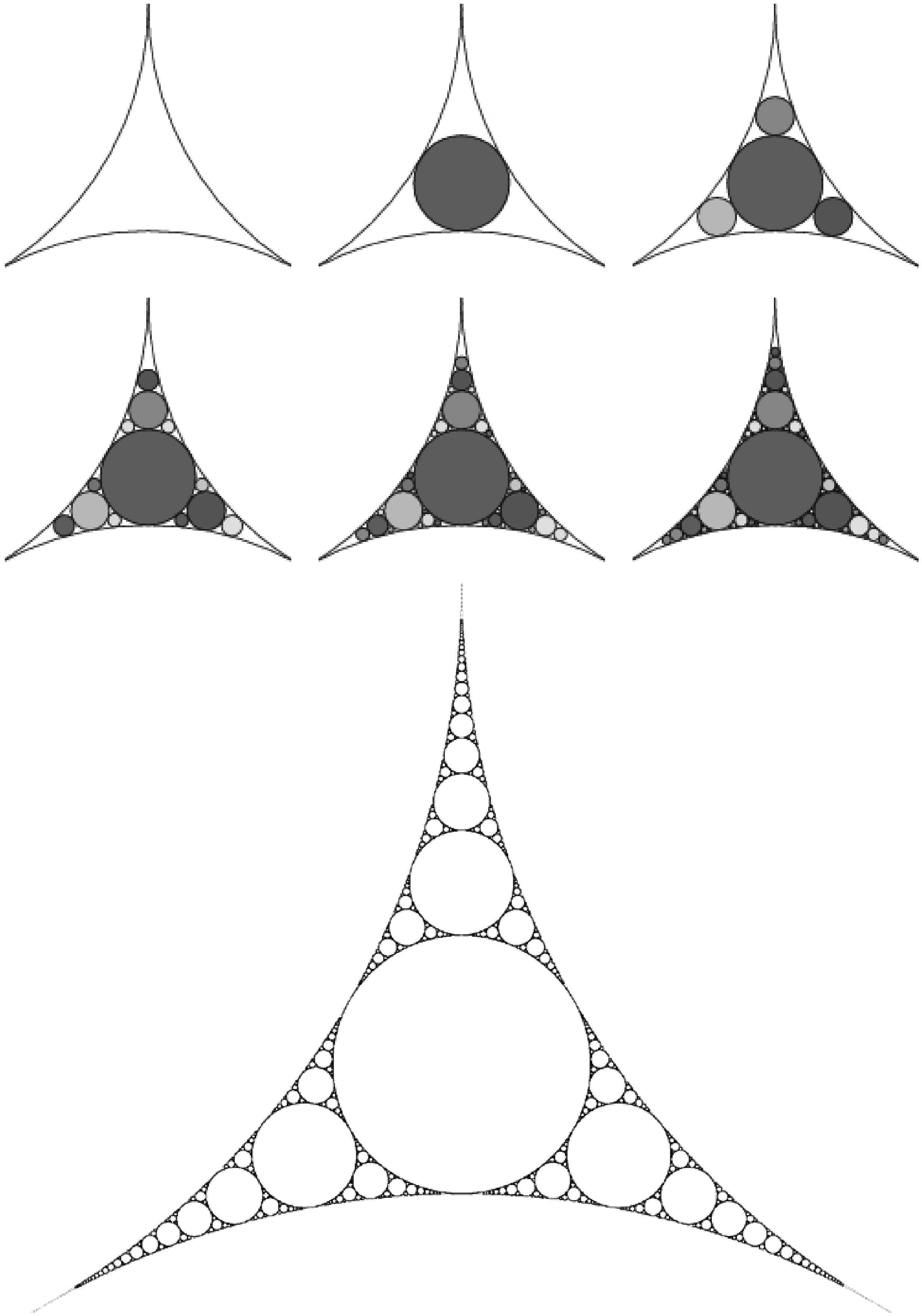

Рис. 1: Ковер Аполлония Пергского

аддитивных сдвигах самоподобие связано с инвариантностью при мультипликативных изменениях масштаба. Данный тип симметрии необычайно широко распространен в природе — от распределения атомов в веществе — до распределения галактик во Вселенной. Самоподобие — единственная из всех симметрий, порождающая хаос — состояние полного беспорядка и отсутствия какой-либо симметрии [7].

Изображения построенные с использованием принципа подобия части и целого также известны с древнейших времен. Как пример можно вспомнить геометрическое построение, известное, как ковер Аполлония Пергского, рис. 1, которое относят к 300 г. до н.э., произведения Альбрехта Дюрера (1520 г.), рис. 2, некоторые картины Эшера. Многократно повторяющийся самоподобный мотив в этих и многих других случаях был лишь способом построения эстетически привлекательного изображения. Сейчас мы бы назвали подобные изображения фракталами. Но до Мандельброта никто, глядя на эти изображения не мог предположить, что за ними скрывается интересная математическая задача или что они могут рассматриваться, как модели реальности.

Подобие части и целого приводит к тому, что некоторый мотив повторяется снова и снова на разных масштабах. В качестве примера можно привести кривую, рис. 3, названную по имени ее создателя Хельге фон Коха (Helge von Koch) кривой Коха и состоящую из треугольников на сторонах которых построены треугольники, на сторонах которых, в свою очередь, построены меньшие треугольники и т.д. до бесконечности. На рис. 3 показаны первые несколько шагов итерационной процедуры, используемой для построения кривой. Легко видеть, что с каждым последующим шагом она становится все более и более изломанной на все меньших и меньших масштабах. В пределе мы получим парадоксальный с точки зрения обычной геометрии объект — бесконечно изломанную кривую: всюду непрерывную, но ни в одной точке не дифференцируемую, которая к тому же обладает бесконечной длиной [8].

В начале XX-го века подобные объекты начали привлекать внимание математиков: множество Кантора, кривые Пеано, функции Вейерштрасса. Но, как это часто бывает, их появление в математической литературе было встречено с неприязнью. Шарль Эрмит назвал их «патологическими монстрами», выражая общее мнение, что они представляют интерес только для исследователей, злоупотребляющих математическими причудами, а не для настоящих ученых [8]. С подобными объектами связан кризис в математике 1875-1925 г.г., выход из которого наметился после введения понятия дробной размерности Хаусдорфом в 1919 году [9].

Свойство изломанности фрактальных кривых послужило основой для создания родового имени подобных объектов. Термин родился в 1975 г., когда Мандельброт готовил первое издание Les objects fractals [10]. Как отмечается в книге Глейка [11][1], созвучие латинского прилагательного fractus, производного от глагола frangere — «ломать», с однокоренными английскими словами fracture и fraction показались Мандельброту подходящими кандидатами на роль искомого термина. Так появилось слово «фрактал».

Первое определение фрактала основывалось на дробной размерности Хаусдорфа. Фракталом называлось множество размерность Хаусдорфа которого строго больше его топологической размерности и, как правило, выражается нецелым числом [14]. Так, например, фрактальные кривые, вроде приведенной на рис. 1 кривой Коха, могут рассматриваться как нечто среднее между традиционной кривой и плоскостью. Топологическая размерность кривой — 1, плоскости — 2. Размерность фрактальной кривой на плоскости лежит между 1 и 2. Так, размерность кривой Коха равна 1.2618, а размерность береговой

[1]Существует также русский перевод книги Глейка [12]. К сожалению, он выполнен крайне непрофессионально и содержит множество ошибок. Анализ некоторых из этих ошибок см. в [13]. Поэтому, пользоваться русским переводом [12] лучше с оглядкой на оригинальный текст [11].

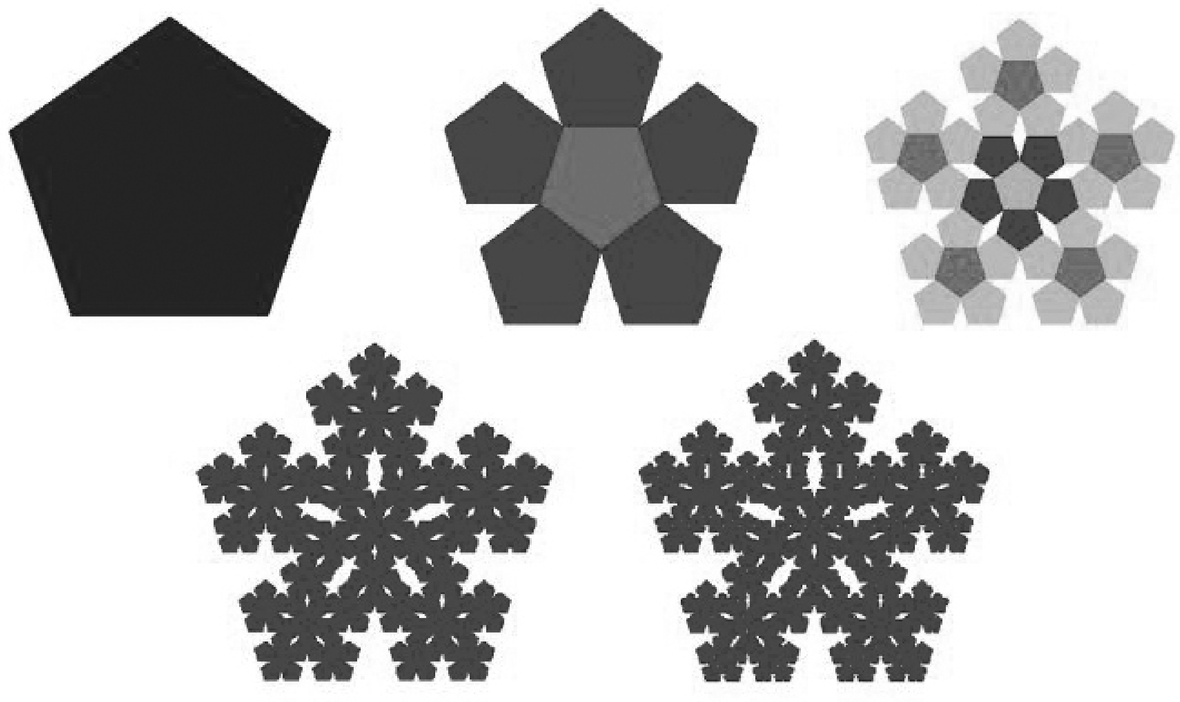

Рис. 2: Пентагон Альбрехта Дюрера.

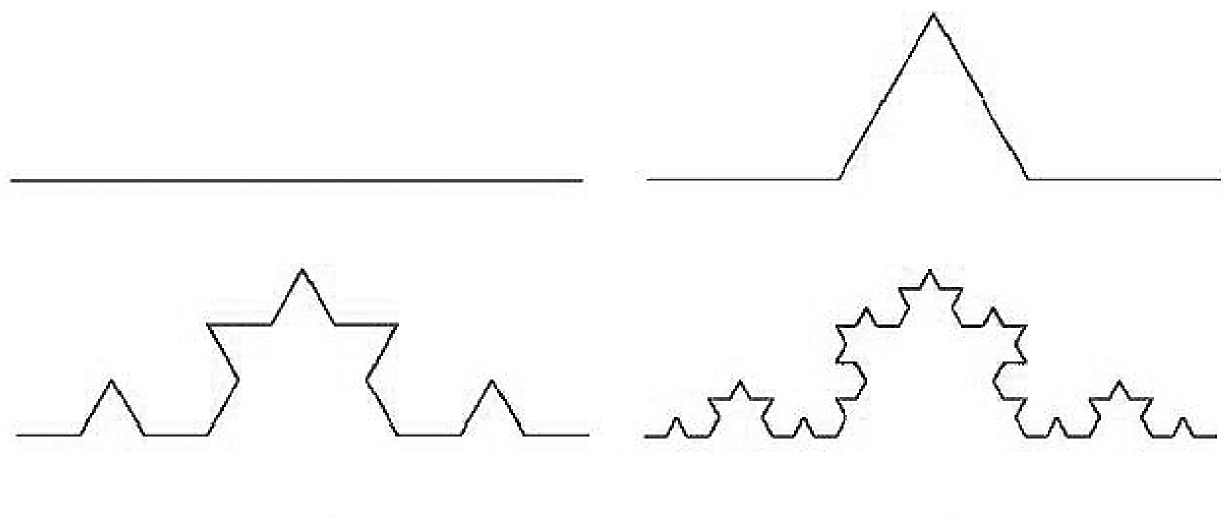

Рис. 3: Кривая Коха. Первые пять итераций.

линии может быть 1.213. В дальнейшем, с осознанием того, что размерность фрактала может выражаться также целым числом и что принятое определение не учитывает некоторые важные свойства фракталов, Мандельброт от него отказался. Размерность по Хаусдорфу позволяла различать категории «гладкий» и «хаотичный», но при этом оказывалась нечувствительной, не позволяла разделять категории «нерегулярный, но самоподобный» — хаос поддающийся изучению в рамках фрактальной геометрии и «геометрически хаотичный» — т.е. хаос полностью беспорядочный [15, 33]. Согласно более расширенному определению, фракталом называется такой объект, для которого существует свойство масштабной инвариантности — подобия части и целого [15, 16]. При этом имеется в виду именно подобие, а не точное соответствие части и целого. Такое определение фрактала значительно расширяет область его применимости, особенно для физических систем, которые, в отличие от математических построений, практически никогда не дают точного соответствия целого и его частей. Необходимо отметить, что самоподобие и дробная размерность связаны. Эта связь состоит в том, что с помощью самоподобия можно сконструировать множество дробной размерности самым простым способом [8].

Сказанное объясняет, почему было необходимо разрабатывать новую геометрию природы. До Мандельброта все кривые и поверхности от тех, которые демонстрировали детям в школе до тех, что использовали ученые в своих моделях, были гладкими. Если часть такой кривой или поверхности постепенно увеличивать, то она становится все более и более похожей на прямую линию. Такого рода кривые и основанная на них геометрия бесполезны, если стоит задача описать какой-либо природный объект, который, как правило, существует на различных масштабах. Если мы будем последовательно увеличивать часть такого объекта, то никогда не придем к прямой линии. Мы увидим изломанные линии, состоящие, в свою очередь, из изломанных линий, которые состоят из изломанных линий и т.д. вплоть до молекулярного уровня. Т.е. традиционные гладкие кривые и поверхности не могут дать адекватное описание таких природных объектов.

Только начиная с 1975 г. или около того, было признано, что фрактальные кривые могут рассматриваться, как вполне естественные и удобные модели природных процессов. И это признание пришло благодаря Б. Мандельброту, который к этому времени объединил подобного рода объекты под единым термином — фрактал. До этого времени фракталы – еще даже не названные им так — были его личной манией. Сегодня они являются стандартным инструментом во множестве областей науки. Как «отец фракталов» Мандельброт продемонстрировал их релевантность реальному миру, в то время как другие видели в них или бесполезную игрушку или патологических монстров.

Сейчас, наверное, проще сказать, где фракталы не используются, чем перечислить области их применения. Вот только некоторые из таких областей: распределение галактик во Вселенной, паттерны ошибок в линиях связи, поведение жидких кристаллов, рассеяние радиолокационного пучка горной грядой [6]. Фрактальные модели применяют в медицине, в геологии и почвоведении, в материаловедении при изучении процессов разрушения изделий, в ядерной физике для изучения элементарных частиц, процессов на Солнце, для анализа колебаний рыночных цен в экономике, сердечного ритма в кардиологии, погоды в метеорологии, в химии, искусствоведении…— перечень можно продолжать бесконечно [15]. Сегодня можно с уверенностью утверждать, что фрактальная геометрия вошла в серьезную инженерную фазу. Коммерческие приложения возникли в областях сжатия изображений и видео, для улучшения трафика в сети Интернет, в компьютерной графике и образовании [17] и даже для проектирования кораблей более устойчивых к опрокидыванию [18].

Величайшая заслуга Мандельброта состоит в объединении этого разрозненного многообразия качественно различных задач в единый подход, концентрированный в терминах «фрактал», «фрактальная размерность», «фрактальная геометрия».

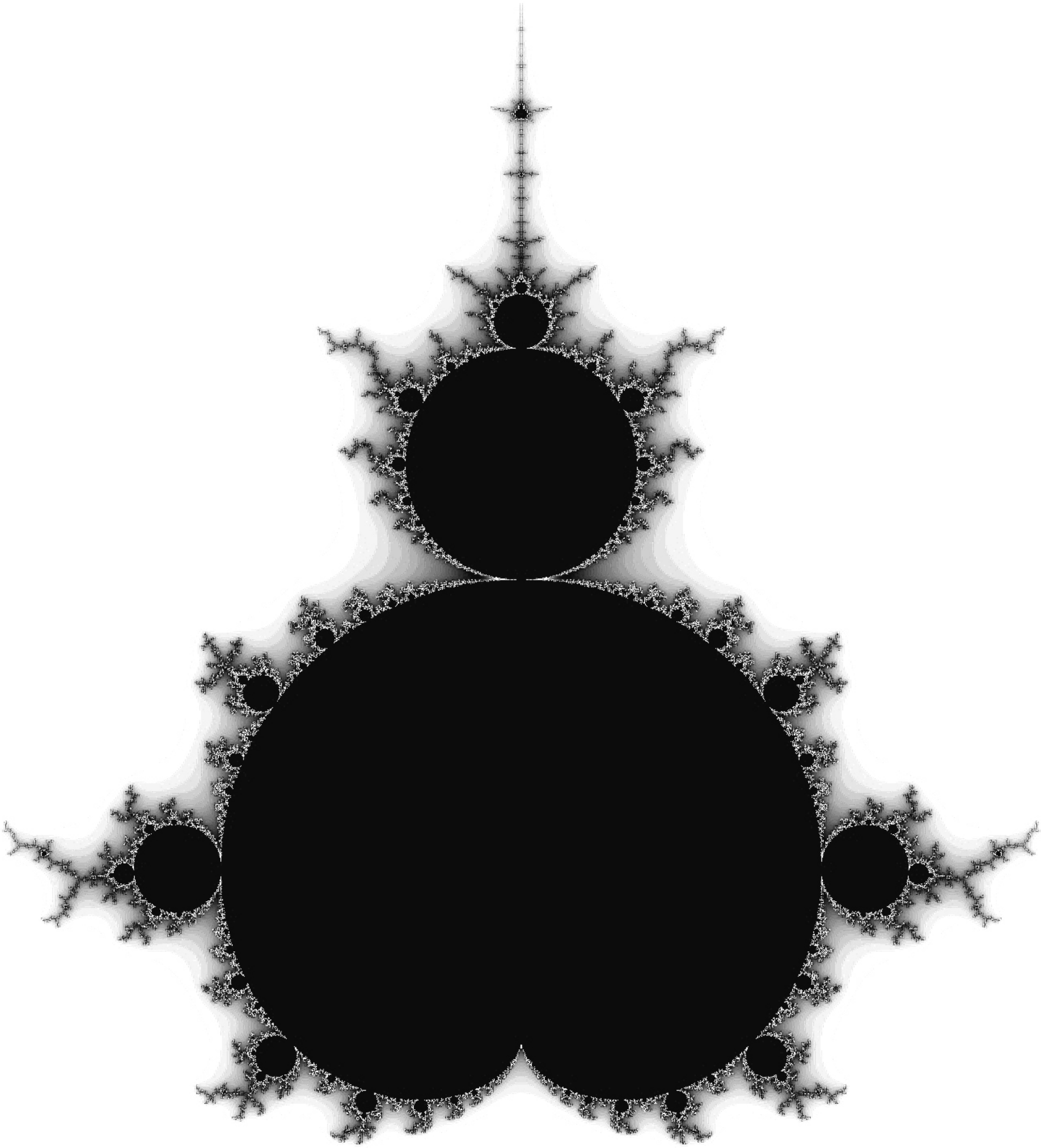

Рис. 4: Множество Мандельброта.

Биография

Бенуа Мандельброт родился 20 ноября 1924 г. в Варшаве. Его отец — Карл Мандельброт был галантерейщиком, родом из варшавских евреев, мать — Белла Лурие была врачом, родом из Литвы [19, 20]. Они поженились до первой мировой войны.

После того, как брат Мандельброта умер во время эпидемии, родители, опасаясь за здоровье и жизнь Мандельброта, не разрешили ему ходить в школу.

Дядя, который, по словам Мандельброта [20], был очень образованный человек, стал его домашним наставником. Учил он его очень своеобразно — никогда не заставлял запоминать ни таблицу умножения, ни алфавит. Мандельброт показал раннюю любовь к геометрии и большие успехи в шахматах. Позже он рассказывал, что воспринимал эту игру не логически, а скорее геометрически, как пространственную взаимосвязь участков. Географические карты были второй страстью Мандельброта. Его отец любил их коллекционировать, и дом был всегда ими наполнен [18]. Как отмечается в [6] его раннее математическое образование было нерегулярным и во многом основанным на старомодной классике девятнадцатого и начала двадцатого столетий.

Экономический кризис в Польше и ухудшение отношения к евреям привели к тому, что в 1936 году вся семья эмигрировала в Францию и поселилась в Париже. Здесь Мандельброт попал под влияние своего дяди Шолема Мандельбройта, эмигрировавшего в Францию в возрасте двадцати лет по причинам интеллектуального характера [21]. Дядя к тому времени был известным парижским математиком, профессором математики и механики в Коллеж де Франс, а также членом группы математиков, известной под общим псевдонимом «Николя Бурбаки» [19].

Рост нацизма в Германии в 1939 г. принудил семью Мандельброта оставить Париж и переехать в г. Тюль — бедную центральную часть Франции. [15] Здесь он пошел в школу и здесь же проявилось его великолепное пространственное воображение, позволявшее даже алгебраические задачи решать геометрическим путем [18].

В конце второй мировой войны он вернулся в Париж, где в лицее Людовика Великого готовился к вступительным экзаменам в университет [15]. Экзамены он сдал блестяще, поступив в Ecole Normale откуда затем перешел Ecole Polytechnique. Послее ее окончания он поступил в Калифорнийский технологический институт в Пасадене. Изучал аэронавтику, заинтересовался проблемой турбулентности. Там же получил степень магистра в аэронавтике [18].

Докторскую диссертацию, в которой выводились законы статистической структуры языка, Мандельброт защитил в Парижском университете в 1952 г. В основе докторской работы лежал закон Ципфа [22], утверждающий, что в любом достаточно объемном содержательном тексте частоты употребления слов описываются степенным законом. Мандельброт дал математическое обоснование того, что закон Ципфа может быть получен из принципа наименьших усилий (когда в процессе коммуникации обе стороны затрачивают минимальные усилия для передачи речевой информации, минимизируя таким образом среднюю стоимость слова) и сформулировал обобщенный закон Ципфа-Мандельброта. Улучшенный вариант формулы Ципфа позволял количественно оценить и ранжировать богатство словарного запаса как отдельного человека так и различных языков [16]. Но, возможно, самым главным результатом докторской работы Мандельброта было осознание важности степенных законов.

После получения степени доктора, он по приглашению Джона фон Неймана, вернулся в США в Институт высших исследований в Принстоне (Institute for Advanced Study in Princeton), штат Нью Джерси. Здесь он размышляет над идеей размерности Хаусдорфа-Безиковича и над явлениями, размерность которых лежит вне одномерного пространства, но, в то же время, она меньше чем два измерения. В Принстоне Мандельброт проработал

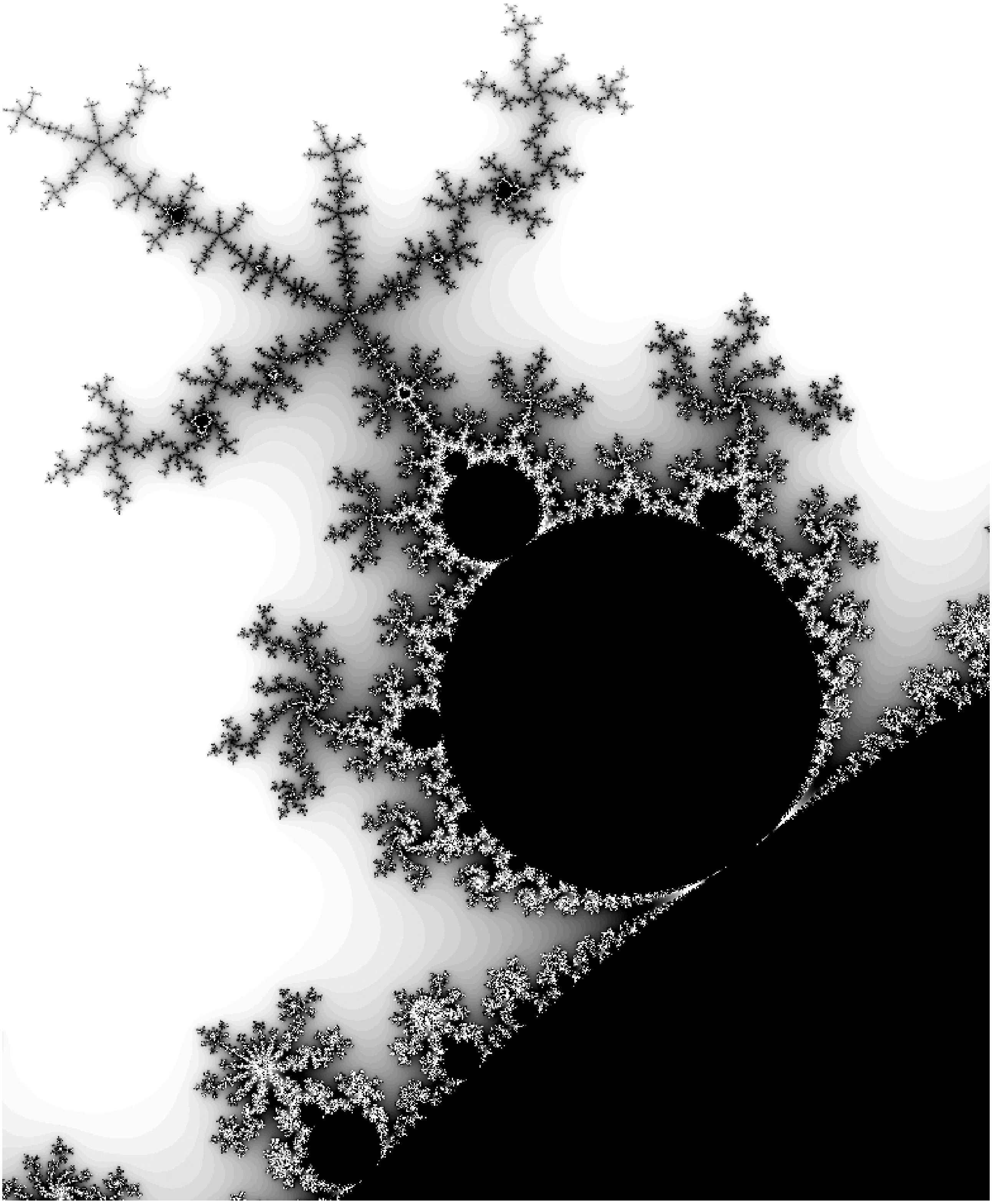

Рис. 5: Множество Мандельброта. Фрагмент границы.

два года.

В 1955 году он вернулся во Францию, женился на Альетт Каган (Aliette Kagan) и переехал в Женеву [19]. После этого некоторое время работал профессором в Университете Лилля, а затем в Национальном центре научных исследований (Centre National de la Recherche Scientifique) в Париже.

Несмотря на то, что его академическое будущее выглядело безоблачным, он чувствовал себя некомфортно в научной атмосфере тогдашней Франции и, поэтому, в 1958 г. он принял приглашение корпорации IBM поработать в Исследовательском центре в Йорктаун-Хейтс, штат Нью-Йорк. Этот шаг привел его к окончательному переезду в США.

В IBM Мандельброт работал над исключением случайных ошибок возникающих в телефонных линиях связи, используемых для передачи компьютерной информации. Такие линии характерны тем, что информация в них передается в форме импульсов (битов) фиксированной амплитуды. Если фоновые флуктуации остаются ниже определенной величины они не возмущают передаваемое сообщение. Если же они превышают этот порог, некоторые биты могут быть изменены с 0 на 1 или с 1 на 0. Возникает ошибка. Эти ошибки, в то время, воспринимались как совершенно случайные, вызванные внешними, неконтролируемыми условиями. Обычно говорилось о «парнях с отвертками» работающих где-то на линии и создающих тем самым неконтролируемые помехи, служащие причиной возникновения ошибок в передаваемых сообщениях. Но, как показал Мандельброт, помехи, в действительности, не были полностью случайными — они группировались в самоподобные кластеры [23]. Причем, степень кластеризации оставалась постоянной, если ее изобразить графически в масштабе месяца, недели или дня [18]. Т.е. ошибки можно было рассматривать как случайное явление с определенным типом внутреннего самоподобия. Их можно было представить, как канторову пыль элементы которой (ошибочные биты) перемешаны. Мандельброт исследовал математические процессы, которые позволяют создать случайную канторову пыль, которая прекрасно моделировала фрактальную структуру ошибок, возникающих в компьютерных линиях связи.

Ошибки, в результате, оказались неустранимыми, т.к. были присущи внутренней природе процесса. Понимание этого позволило отказаться от тактики увеличения отношения сигнал/шум путем увеличения мощности передаваемого в линию сигнала и заняться алгоритмами кодирования, повышающими надежность передачи информации. Рассмотренный выше пример позволяет нам отметить важную черту научного метода Мандельброта. Создание математической модели правильно отражающей особенности, структуру изучаемых объектов или явлений природных или искусственных тождественно определенной степени понимания этих явлений. Также необходимо отметить, что почти все модели, которые он использовал, имели вероятностную природу. Мандельброт не применял понятие «фрактал» к детерминированным объектам вплоть до 1979-1980 г.г.

Работая в IBM, Мандельброт ушел далеко в сторону от чисто прикладных проблем компании. Он работал в области лингвистики, теории игр, экономики, аэронавтики, географии, физиологии, астрономии, физики. Ему нравилось переключаться с одной темы на другую, изучать различные направления. Этому способствовала академическая свобода, предоставленная IBM сотрудникам лаборатории в которой работал Мандельброт. Вот как он описывает свою работу в IBM: «Шел 1961 год. Я уже несколько лет работал в главной лаборатории IBM, расположенной недалеко от Манхэттена, если двигаться вверх по течению Гудзона. Это было удивительное место для ученого. Компания как раз занималась техническим перевооружением, чтобы сменить свой статус производителя механических табулирующих счетных машин на пионера электронно-вычислительных машин, или компьютеров. Для решения этой задачи создали большую лабораторию и набрали штат сотрудников; некоторые из них были блестящими чудаками-интеллектуалами, и им позволили заниматься любыми, самыми невероятными, темами на собственное усмотрение.

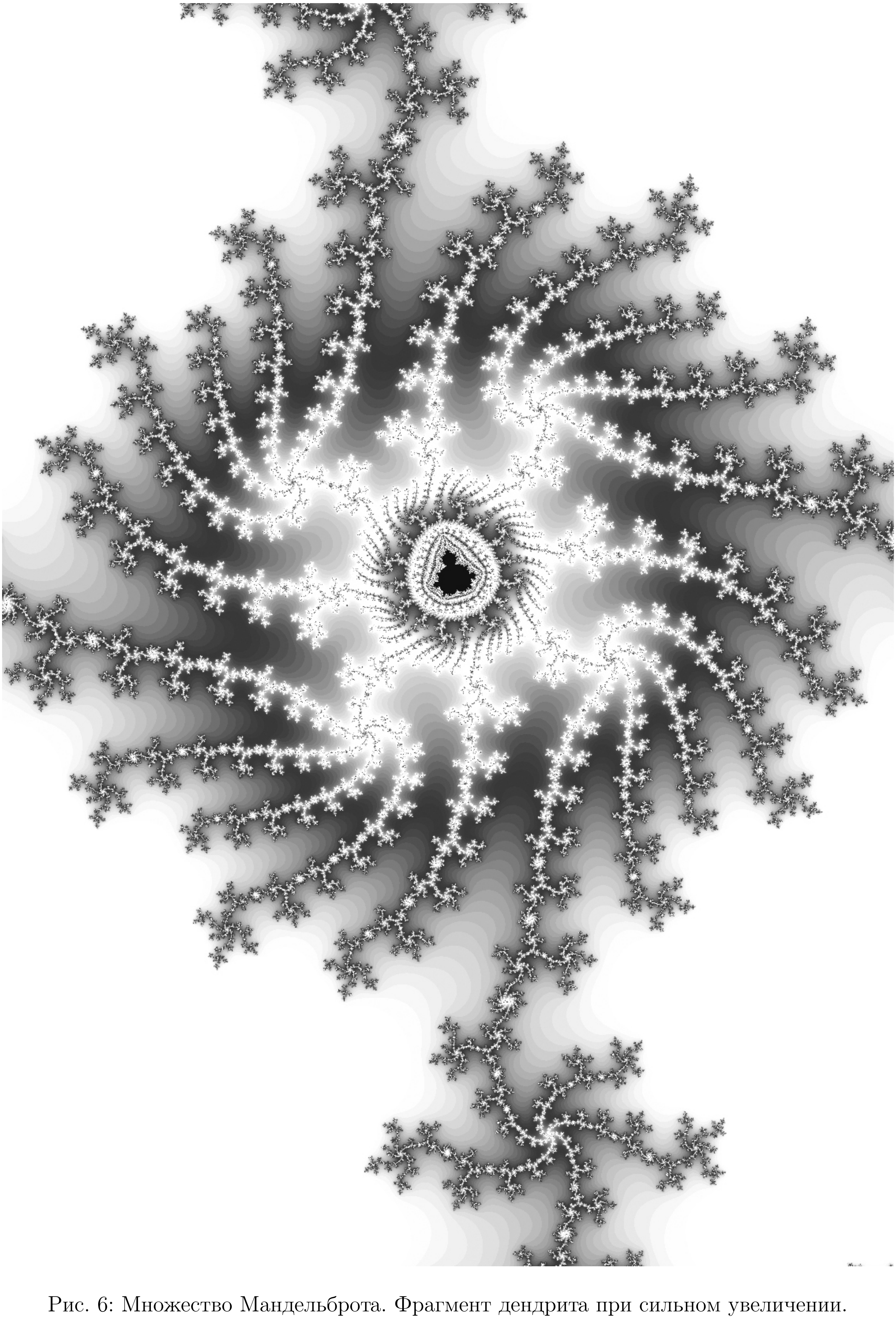

Рис. 6: Множество Мандельброта. Фрагмент дендрита при сильном увеличении.

Отдельные темы были явно связаны с компьютерами, но многие — нет» [16, с. 186]. Такой стиль работы вполне себя оправдал. Из промышленной исследовательской лаборатории IBM Research, в которой работал Мандельброт, пять человек стали Нобелевскими лауреатами. Говоря о работе в IBM Research, Мандельброт отмечает, что особого упоминания достоин Ральф Э. Гомори — руководитель Мандельброта на протяжении большей части его карьеры в IBM. [16]

Кроме задачи исследования структуры ошибок в компьютерных линиях связи, в составе IBM Research Мандельброт занимался также прикладным компьютерным анализом. Одна из его первых исследовательских задач в этой области — применение компьютеров в экономике.

«Экспериментальной основой» этих исследований был ряд ежедневных цен на хлопок за более чем столетний период. Этот ряд начал формировать «предшественник» Мандельброта по исследованию цен на хлопок профессор Хендрик Хаутеккер из Гарварда. Хаутеккер, используя стандартные инструменты статистического анализа и современные ему эконометрические методы, пытался найти хоть какой-то порядок, закономерности в ходе изменения хлопковых цен. Вот его высказывание, подытоживающее эту работу, которое приводит Мандельброт в [16]: «С меня хватит ... Я сделал все возможное, чтобы найти смысл в этих хлопковых ценах. Пытаюсь измерить неустойчивость, а она все время меняется. Все меняется. Нет ничего постоянного. Страшная путаница». [16, с. 189] В действительности цены изменялись не непрерывно, наблюдались большие скачки цен, чем следовало из стандартной экономической модели, вследствие чего их распределение имело «толстые хвосты» и не подчинялось распределению Гаусса, как того требовала модель. Также Мандельбротом отмечалось самоподобие графиков цен: изображения, построенные для различных масштабов времени выглядят подобными.

Мандельброт «выпросил для себя в компьютерном центре IBM программиста» [16, с. 189] и проанализировал данный ряд так же, как он анализировал до этого данные о личных доходах: подсчитывая число ценовых скачков различной величины. Результаты данной работы были представлены в статье 1963 года «Колебания определенных спекулятивных цен» [24], которая на то время стала одной из самых цитируемых в экономической литературе.

Чтобы прийти к адекватному пониманию полученного ряда хлопковых цен потребовалось свести воедино три направления: степенные (экспоненциальные) законы, закон распределения личных доходов и математику устойчивых распределений. Данные направления явились ключом, позволившим построить модель, адекватно описывающую поведение реальных финансовых временных рядов.

Как уже упоминалось впервые степенные законы (закон Ципфа) появились в докторской работе Мандельброта.

Закон распределения личных доходов был впервые получен Вильфредо Парето (1848-1923) когда он разбил людей на группы по величине личного дохода и подсчитал численность каждой группы. Оказалось, что полученная зависимость линейна в двойном логарифмическом масштабе с наклоном равным (по мнению Парето) $3/2$. Как выяснилось в дальнейшем, величина наклона может отличаться от $3/2$ и зависит от того, какой конкретный случай рассматривается. Необходимо отметить, что закон Парето также относится к степенным законам.

Понятие устойчивых распределений впервые появились в работах Поля Леви, когда вскоре после Первой мировой войны его попросили прочесть курс лекций о точности прицельной артиллерийской стрельбы. Это подтолкнуло его к выполнению самобытной работы по исследованию «устойчивых» вероятностных распределений, т.е. таких распределений, форма которых остается неизменной независимо от того, какие действия мы выполняем над объектом описания. Леви показал, что существует семейство устойчивых

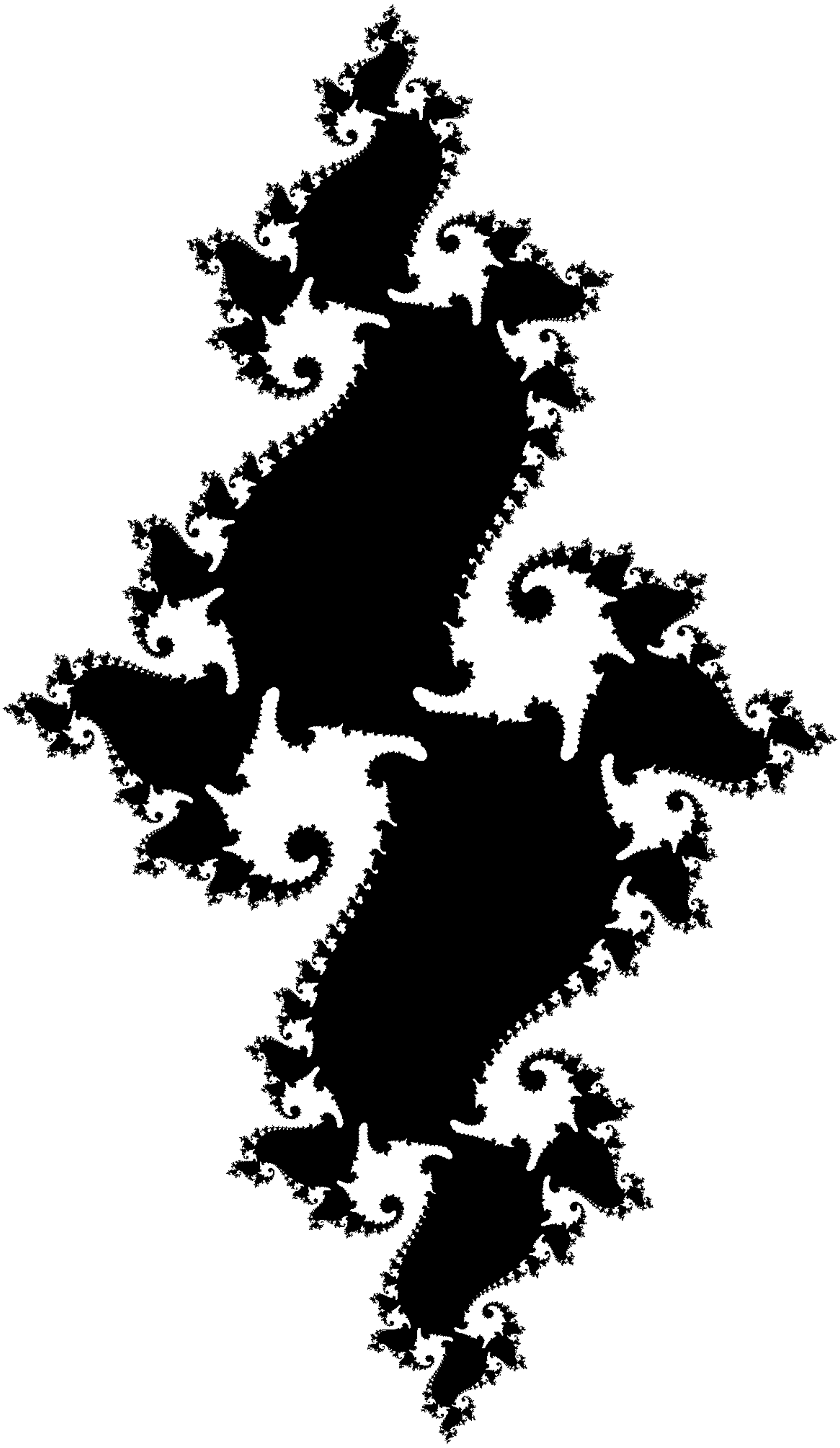

Рис. 7: Множество Жюлиа для значения комплексного параметра $c = -0.7454 + 0.1130i$.

распределений, члены которого отличаются друг от друга относительной важностью наибольших отдельных измерений. Такие распределения Мандельброт назвал L-устойчивыми в честь Поля Леви. [16]

Эти распределения были использованы Мандельбротом в 1963 году когда пришло понимание того, что цены не изменяются непрерывно и что для описания их динамики лучше подходит не модель Гаусса, а более общее понятие L-устойчивых распределений, обладающих бесконечной дисперсией, вследствие чего скачки цен, подобно ошибкам при передаче данных, склонны группироваться в кластеры. Также было показано существование степенной зависимости между размером скачков и частотой их появления, а также, что в формировании цены существенную роль играет предыстория. [15] Вот образное описание внутренней динамики ценового ряда, данное Мандельбротом: «Крупные изменения часто следуют быстро одно за другим, подобно артиллерийским залпам; затем наступает очередь длинных периодов мелких изменений, вроде треска игрушечных пистолетов. Но и здесь есть самоповторение в масштабе: если рассмотреть в деталях любую группу крупных изменений, то можно увидеть, что она состоит из меньших групп. При переходе к еще более мелким деталям мы обнаружим новые, еще меньшие группы. А это уже фрактальная структура». [16, с. 245]

В дальнейшем развитии экономического подхода Мандельброта можно отметить модель ценовых пузырей (1966 г.), концепцию дополнительного торгового времени (1967 г.) и, наконец, мультифрактальную модель (1972 г.), включившую и обобщивную предыдущие концепции и названную Мандельбротом «Мультифрактальной моделью доходности активов». [16]

Построение масштабных моделей рынков было тем горнилом, в котором ковались многие базовые понятия фрактальной геометрии. Через сорок лет после начала своей экономической эпопеи Мандельброт скажет: «На пути к моей основной работе, разработке фрактальной геометрии, экономические исследования и финансовые модели стали ключевыми вехами. ... Но я еще не закончил свое дело; и я до сих пор не верю, что нам когда-нибудь удастся полностью понять такую сложную систему, как глобальная денежная машина. ... Но я верю, что с каждой попыткой мы все больше приближаемся к правильному пониманию принципов работы рынков». [16, с. 244]

Около 1968 года Мандельброт взялся за проблему Нила. И хотя этой проблемой он начал заниматься после того как вышли первые публикации по экономическим моделям, результаты данной работы в дальнейшем тоже нашли применение в экономических изысканиях Мандельброта.

Проблема Нила состояла в том, что периоды засух и наводнений, связанные с разливами Нила, чередовались крайне неравномерно и имели разную длительность. [15] Ключевой фигурой сформулировавшей эту проблему был англичанин Гарольд Эдвин Херст, который в 1906 году прибыл в Каир, предполагая пробыть там недолго, но в результате задержался на 62 года. И все эти годы были преимущественно посвящены изучению разливов Нила. От уровня воды во время разливов зависело будет год урожайным или нет. А от этого, в свою очередь, на протяжении тысячелетий зависела жизнь Египта.

С колонизацией Египта англичанами возникла идея строительства «хранилища столетия» — резервуара, в котором можно было бы накапливать воду на случай засухи. Встала задача, которую поручили Херсту, расчета необходимого объема такого хранилища. Для этого необходимо было научиться описывать уровень воды в Ниле во время разливов.

Херст проанализировал записи о поведении реки, накопленные за несколько тысяч лет, и пришел к выводу, о невозможности спрогнозировать не только момент начала или конца засухи, но даже средний уровень воды в Ниле. Уровень реки выглядел как случайный шум, наложенный на фон, также полный шума. [15]

Мандельброт разработал статистическую модель, основанную на самоподобии времен-

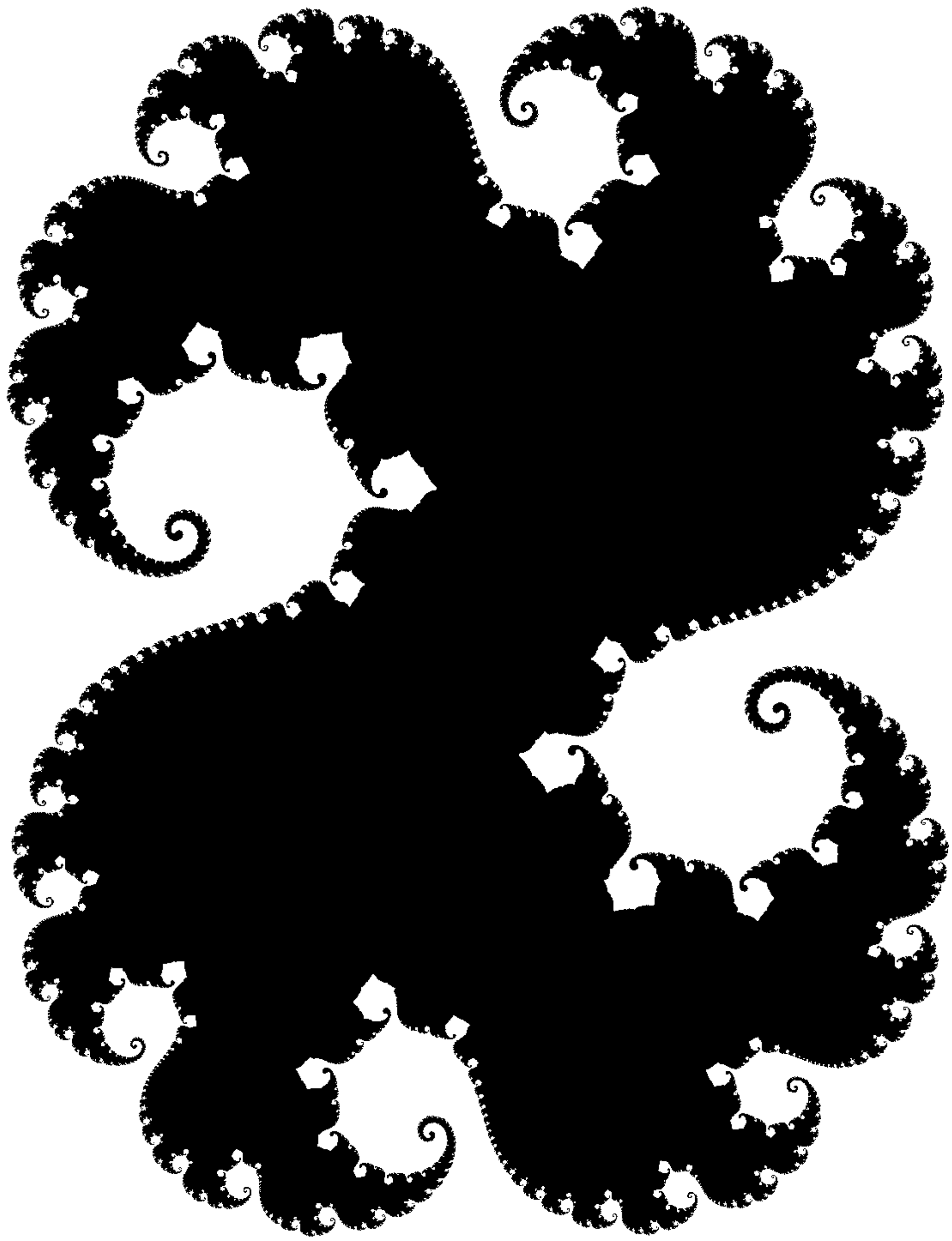

Рис. 8: Множество Жюлиа для значения комплексного параметра $c = 0.27334 - 0.00742i$.

ных рядов и включающую базовые свойства Нила и других рек. С помощью этой модели были получены графики колебаний уровня воды. Когда эти графики, вперемешку с реальными временными рядами, а также графиками, полученными на основе стандартных гидрологических моделей, были предъявлены профессиональному гидрологу Уолтеру Лэнгбейну он не смог отличить графики Мандельброта от графиков, на которые были нанесены реальные данные. [16]

Также нельзя не отметить уже ставшую классикой статью [23] «Какова длина побережья Британии?» Статья являлась продолжением исследований английского ученого Льюиса Ричарсона и демонстрировала фрактальную природу береговой линии и, как следствие, неприменимость понятия длины к такого рода объектам, а также вводила основанный на дробной размерности параметр, характеризующий степень изрезанности береговой линии. Позднее этот параметр стал рассматриваться, как фрактальная размерность.

Наверное, в большинстве случаев, когда человек слышит слово «фрактал» в его сознании возникают образы множества Мандельброта, множеств Жюлиа. Непостижимая эстетическая привлекательность этих, казалось бы, чисто математических объектов, притягивает к ним внимание как профессионалов так и людей далеких от математики.

Термин «множество Мандельброта **M**» предложил Адриен Дуади, «потому что первым изображения этого множества получил с помощью компьютера Бенуа Мандельброт, и он же первым описал некоторые его свойства». [21, с. 30] Путь, приведший Мандельброта к открытию этого множества начался с интереса к фракталам инвариантным относительно нелинейных преобразований. Первым было предельное множество группы Клейна, остающееся неизменным при всех инверсиях относительно любой из нескольких заданных на плоскости окружностей, затем Мандельброта заинтересовали работы Гастона Жюлиа и Пьера Фату [25-26], выполненные еще в 1918-1919 годы, по теории итераций рациональных отображений комплексной плоскости. [15] Впервые с этими работами Мандельброт познакомился в 1945 году получив авторские препринты от своего дяди Шолема Мандельбройта. Тогда они не произвели на него должного впечатления. Вернувшись к этим работам через 35 лет он расширил рассматриваемые преобразования с вещественной прямой на комплексную плоскость и применил компьютер для построения получаемых множеств. Так было получено множество Мандельброта. [15]

Данное множество — один из сложнейших объектов современной математики. Так, известно, что оно связно и его фрактальная размерность равна 2, но до сих пор не выяснено, является ли оно локально связным и имеет ли положительную площадь. Проблема описания множества Мандельброта остается открытой, и множество исследователей по всему миру продолжают работают над ней.

Говоря о множествах Мандельброта и Жюлиа, Мандельброт подчеркивает, что для него наиболее впечатляющим в данной работе было то, что очень простые формулы приводят к необычайно сложному результату. Он проводит сравнение с законом Ньютона, который тоже выражается очень простой формулой — всего несколько символов, — но после упорной работы позволяет объяснить движение планет вокруг Солнца и многое, многое другое. То же и с этими множествами – они могут служить архетипами для многих природных структур, когда простой и, как следствие надежный, принцип их образования приводит к необычайно сложному конечному результату. [6]

В заключение хотелось бы упомянуть классическую книгу Мандельброта «Фрактальная геометрия природы», первое издание которой вышло в 1977 году. Русский перевод этой книги запоздал на четверть века — он вышел в 2002 году. За время прошедшее с момента ее написания книга совсем не устарела и остается лучшим и основным введением в теорию фракталов и фрактальную геометрию.

Книга написана в жанре научного эссе и содержит все идеи, о которых рассказывалось выше. Выход этой книги разделил историю фрактальной геометрии на два периода. В

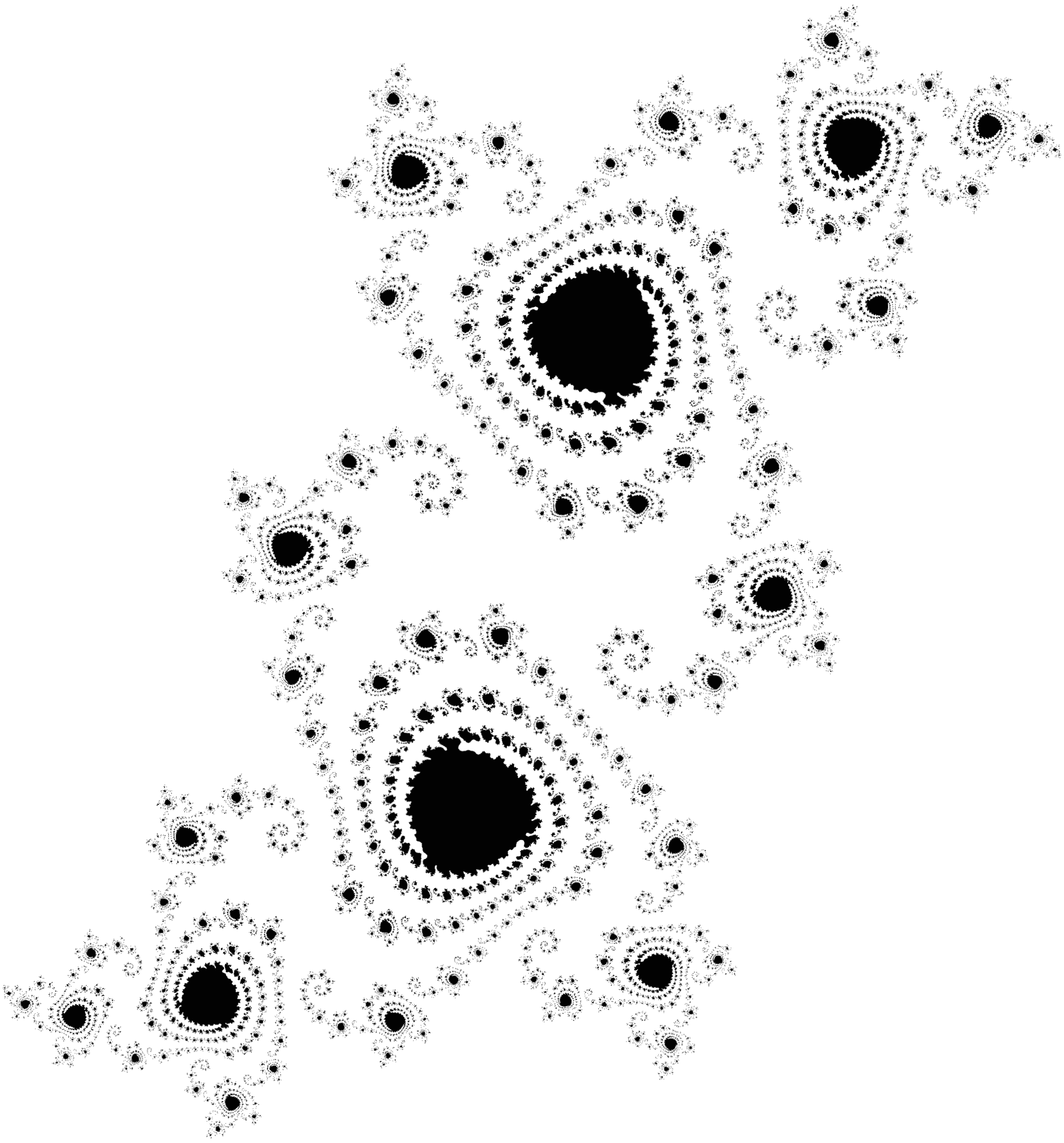

Рис. 9: Множество Фату для значения комплексного параметра $c = -0.194 + 0.6557i$

первом, до выхода книги, существование и развитие фрактальной геометрии было неразрывно связано с личностью ее создателя — с его усилиями по развитию и популяризации своих идей. Второй период знаменуется лавинообразным увеличением числа сторонников фрактальной геометрии, числом научных публикаций, содержащих в названии слово «фрактал», проникновением методов фрактальной геометрии практически во все разделы не только естественных наук, но и гуманитарных и даже искусства.

Но голос Бенуа Мандельброта не потерялся в этом тысячеголосом хоре. Он до последних дней продолжал активно и плодотворно работать. В работе [16], подводящей промежуточный итог его работ в экономике он пишет: «Несмотря на 40 лет исследований, работа продолжается. Она не только не закончена — она едва началась». [16, с. 157]

Ставшие классикой работы Мандельброта особенно важны, когда возникает задача, исследовать новые типы фракталов, связанные с той или иной гиперкомплексной числовой системой [27]. Как пример можно привести работы по фракталам на поличислах [28-31]. В ходе работ над этими и подобными задачами постоянно возникают проблемы, требующие для своего решения обращения к истокам — оригинальным работам отца фрактальной геометрии Бенуа Б. Мандельброта.

Мандельброт прожил всю свою жизнь с Aliette и имел двух сынов Laurent и Didier. Он умер 14 октября 2010 года в Кембридже (Массачусетс, США), в возрасте 85 лет, по сообщению жены, от рака поджелудочной железы. [32]

Литература

[1] Лейбниц Г.В. Сочинения в четырех томах. Том 1. М., Мысль, 1982, с. 413-429.

[2] David Bohm Wholeness and the implicate order. London and N.-Y., Routledge Classics, 2002 — 284 p.

[3] Прибрам К. Языки мозга. Экспериментальные парадоксы и принципы нейропсихологии. М., «Прогресс», 1975 — 464 с.

[4] Талбот Майкл Голографическая Вселенная. М., Изд. дом «София», 2004 – 368 с.

[5] Герман Вейль Симметрия. М., Наука, 1968 — 192 с.

[6] Monte Davis Profile of Benoit B. Mandelbrot. // Omni Magazine, February 1984.

[7] Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001 — 528 с.

[8] Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. М., Техносфера, 2006 — 488 с.

[9] Felix Hausdorff Dimension und Ausseres Mass. // Mathematische Annalen, Vol. 79, 1919 — pp. 157-179.

[10] Mandelbrot B.B. Les objects fractals: forme, hasard et dimension. Paris, Flammarion, 1975 — 192 p.

[11] Gleick J. Chaos: Making a New Science. N.-Y., Viking Penguin, 1987, 352 p.

[12] Дж. Глейк Хаос: Создание новой науки. СПб, Амфора, 2001 — 398с.

[13] Шлык В. А. В защиту «Хаоса», фрактальной геометрии, Бенуа Мандельброта и Анри Пуанкаре. // Педагогические и информационные технологии в образовании. 2002, Вып. 5. http://scholar.urc.ru:8002/ped_journal

[14] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М., Институт компьютерных исследований, 2002 — 656 с.

[15] Шлык В.А. Он оставил царапину на поверхности всего: к 80-летию Бенуа Мандельброта. // Известия Челябинского научного центра, вып. 3 (29), 2005, с. 107-124.

[16] Мандельброт Б., Хадсон Р.Л. (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах. М., Издательский дом «Вильямс», 2006 — 400 с.

[17] Barnsley M.F. Fractals everywhere. Morgan Kaufmann, 2000 - 534p.

[18] Nigel Lesmoir-Gordon Benoit Mandelbrot obituary. Mathematician whose fractal geometry helps us find patterns in the irregularities of the natural world. // guardian.co.uk, Sunday 17 October 2010.

[19] Бенуа Мандельброт http://ru.wikipedia.org/wiki/

[20] Benoit Mandelbrot Family background and early education. // Web of Stories (http://www.webofstories.com/play/9596?o=MS)

[21] Мандельброт Б.Б. Фракталы и Хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. М.-Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009 — 392 с.

[22] Alexander Saichev, Yannick Malevergne, Didier Sornette Theory of Zipf's Law and Beyond. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010 — 171p.

[23] Benoit Mandelbrot How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. // Science, 1967, 156, pp. 636-638.

[24] Benoit Mandelbrot The variation of certain speculative prices. // The Journal of Business of the University of Chicago: 36, 1963, pp. 394-419.

[25] Gaston Julia Mémoire sur l'Itération des Fonctions Rationnelles. // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 4 (83), 1918 — pp. 47-245.

[26] Pierre Fatou Sur les Equations Fonctionnelles // Bulletin Societé. Math. France, Vol. 47, 1919 — pp. 161-271.

[27] Павлов Д.Г. Обобщение аксиом скалярного произведения. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (1), 2004 — с. 5-19.

[28] Павлов Д.Г., Просандеева М.С., Панчелюга В.А. О построении аналога множества Мандельброта на плоскости двойных чисел. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. №1, (7), том 4, 2007, с. 93-97.

[29] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Малыхин А.В., Панчелюга В.А. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2009, 1(11), том. 6, — с. 135-145.

[30] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналога множества Жюлиа при нулевом значении параметра на плоскости двойной переменной. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2009, 1(11), том. 6, — с. 146-151.

[31] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналогов множества Жюлиа на плоскости двойной переменной. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2009, 2(12), том. 6 — с. 161-175.

[32] Jascha Hoffman Benoît Mandelbrot, Novel Mathematician, Dies at 85 // The New York Times, October 17, 2010, p. A28. (http://www.nytimes.com/2010/10/17/us/17mandelbrot.html?_r=1)

[33] Бенуа Б. Мандельброт Фракталы и возрождение теории итераций. // Пайтген Х.-О., Рихтер П. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М., Мир, 1993, с. 131-140.

BENOIT MANDELBROT: THE WAY TO FRACTAL GEOMETRY OF NATURE

V.A. Panchelyuga

Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia
Institute of Theoretical and Experimental Biophysics of the RAS, Pushchino, Russia

panvic333@yahoo.com

October 14, 2010 in Cambridge, Massachusetts died founder of fractal geometry Benoît Mandelbrot at the age of 85. Following paper is writing in memory of prominent scientist.

Key Words: fractal, fractal geometry, fractal dimension, Benoît Mandelbrot.