Д и с к у с с и я.

К ВОПРОСУ О МНОЖЕСТВАХ ЖУЛИА И МАНДЕЛЬБРОТА НА ПЛОСКОСТИ ДВОЙНЫХ ЧИСЕЛ

И. Типунин[1], А. Топоренский[2]

[1] *Физический институт им. Лебедева, Москва, Россия*

[2] *Государственный астрономический институт им. Штернберга, Москва, Россия*

atopor@rambler.ru

Мы находим численно множество Мандельброта и наполненные множества Жулиа квадратичного отображения на плоскости двойных чисел. Обсуждаются отличие нашего определения данных множеств от ранее данного в работе Арчи и, как следствие, отличия в результатах. Найдено также условие, при котором наши результаты и результаты Арчи совпадают. Показано, что наше определение дает возможность получать нетривиальные графические структуры на плоскости двойных чисел, порожденные квадратичным отображением, тогда как определение Арчи такой возможности лишено.

Ключевые слова: динамические системы, двойные числа.

Известно что простое квадратичное отображение

$$x \to x^2 + c \tag{1}$$

на плоскости комплексной переменной служит источником разнообразных фрактальных структур имеющих кроме математической еще и признанную эстетическую ценность (см.например, [1]). Фрактальными являются инвариантные множества отображения (1) (называемые множествами Жулиа) для всех c отличных от 0 или -2 (точные определения и систематическое изложение стоящих за этими фактами математической теории см. в [2]), а также так называемые наполненные множества Жулиа (множества точек комплексной плоскости с ограниченной орбитой). Интересную и сложную структуру несамоподобного фрактала имеет и широко известное множество Мандельброта (множество тех c отображения (1) для которых орбита нуля ограничена). [1]

В противовес этому считается что аналогичное отображение на плоскости двойной переменной (подробнее о двойных числах см, например, в [3]) приводит к простым прямоугольным аналогам множеств Жулиа и Мандельброта В работе Арчи [4] эти множества были вычислены аналитически. Подход Арчи однако не является единственно возможным, и причина этого состоит в существовании разных вариантов определения ограниченности.

Напомним что двойные числа – это алгебра размерности 2 над полем действительных чисел, содержащая мнимую единицу i, подчиняющуюся условию $i^2 = 1$. Это значит, что произведение двух двойных чисел $x = Re(x)+iIm(x)$ и $y = Re(y)+iIm(y)$ дается формулой $xy = Re(x)Re(y)+Im(x)Im(y)+i(Re(x)Im(y)+Im(x)Re(y)$ (сумма двойных чисел определяется очевидным образом через сумму действительных и мнимых частей).

В этой алгебре можно ввести норму

$$|x|^2 = |Re^2(x) - Im^2(x)|. \tag{2}$$

Заметим, что в отличие от алгебры комплексных чисел с нормой $|x|^2 = Re^2(x) + Im^2(x)$, где стремление хотя бы одной из координат к бесконечности автоматически означает

[1]Для комплексно-аналитичных отображений это множество эквивалентно множеству тех c, для которых соответствующее множество Жулиа связно. В иных случаях эти два множества не обязяны совпадать, и мы пользуемся определением, данным в основном тексте. Множество, задаваемое вторым определением для отображений, не являющихся комплексно- аналитичными получило в англоязычной литературе название "connectedness locus".

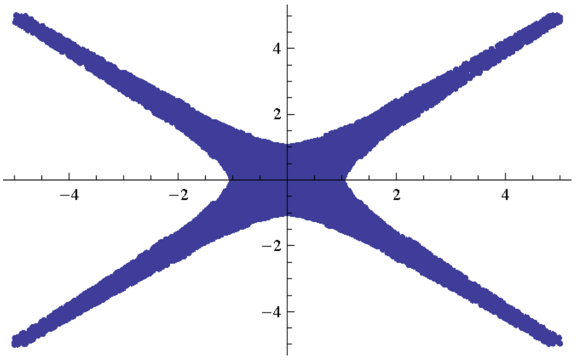

Рис. 1: Множество Жулиа для $c = 0$.

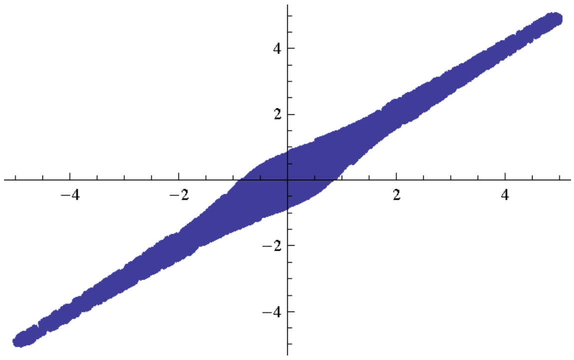

Рис. 2: Множество Жулиа для $c = 0.1 + 0.1i$

неограниченность нормы, это не так в случае двойных чисел. Например, норма двойного числа с равными действительными и мнимыми частями всегда равна нулю.

В работе [4] было принято обычное определение ограниченной последовательности как последовательности двойных чисел x_n с ограниченными $Re(x_n)$ и $Im(x_n)$. Оно, однако, игнорирует форму нормы (2). Такой подход может быть оправдан в задачах где двойные числа выступают в качестве частного случая более общей динамики (в качестве примеров см. [5, 6]), но является несколько неестественным при изучении собственно двойных чисел. В настоящей статье мы рассматриваем последовательности с точки зрения их ограниченности по норме (2). Ясно, что последовательность двойных чисел, ограниченная по Арчи ограниченна и по норме, обратное же, вообще говоря, неверно.

Мы проводили численное итерирование отображения (1), останавливая вычисления, когда норма очередного члена последовательности превосходила некое заранее выбранное число (в нашем случае 10). Основной проблемой являлась необходимость время от времени проводить вычисления с очень большими числами (т.к.норма двойного числа может быть малой при больших значениях действительной и мнимой частей). Чтобы избежать машинных эффектов работа велась в целочисленной арифметике системы Matematica, позволяющей выполнять арифметические операции с произвольно большими рациональными числами без округления (о других подходах к преодолению этой трудности см. [7, 8], следует отметить, что наши результаты не во всем совпадают с полученными в этих статьях, отличия будут оговорены ниже). Наибольшее число выполняемых итераций выбиралось из компромисса между требованием быть достаточно большим для того, чтобы структура получающихся множеств была достаточно проявлена, и, в то же время, вычисления не приводили к чрезмерному потреблению машинной памяти и времени. Мы ограничились числом итераций равным 12.

Наши результаты показаны на Рис. 1-5. Общие итоги можно описать следующим образом. Понятно, что множества, найденные Арчи являются подмножествами множеств, найденных нами. Отличие между ними наглядно видно для случая $c = 0$. Очевидно, что для ограниченности по норме это множество ограничено гиперболами (см. Рис.1), играющими роль единичной окружности в метрике, порожденной нормой (2), тогда как в работе Арчи мы имеем квадрат. Как справедливо отмечено в [8], воспроизведение этого результата на компьютере является естественным тестом правильности работы вычислительной процедуры. Для ненулевых c наши результаты существенно зависят от нормы $|c|$. Оказалось, что при ненулевой норме числа c наши множества и множества Арчи совпадают. Качественно причину этого можно объяснить следующим образом. Особенностью квадратичного отображения (1) на множестве двойных чисел (отличающей этот случай от комплексной динамики) является то, что прибавление фиксированного числа к двойному числу может произвольно сильно изменять его норму. Действительно, для произвольного фиксированного c с *евклидовой* нормой n и *евклидовым* углом с осью абсцисс ϕ мы имеем

$$|x + c|^2 - |x|^2 = 2n(Re(x)cos(\phi) - Im(x)sin(\phi)) + n^2(cos^2(\phi) - sin^2(\phi)). \quad (3)$$

Поскольку возможное отличие двух типов заполненных множеств Жулиа связано с существованием последовательностей с $Re(x) \to \infty$, но $|x|$ конечна, мы имеем либо $Re(x) \sim Im(x)$

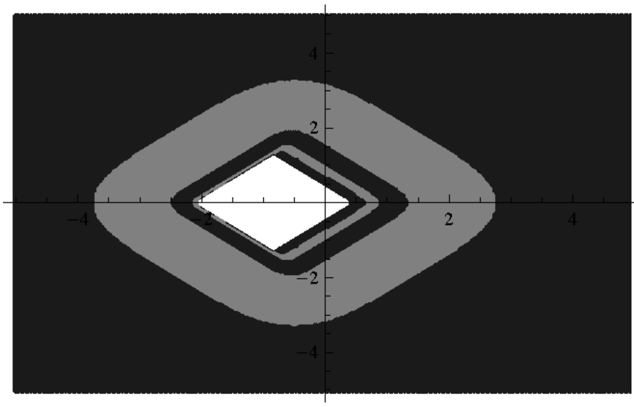

Рис. 3: Диаграмма, показывающая числа шагов (помечены разными оттенками серого) необходимых для достижения евклидовой нормы равной 10 при старте с точки 0. Незакрашенная область представляет собой множество Мандельброта отображения (1) в евклидовой метрике.

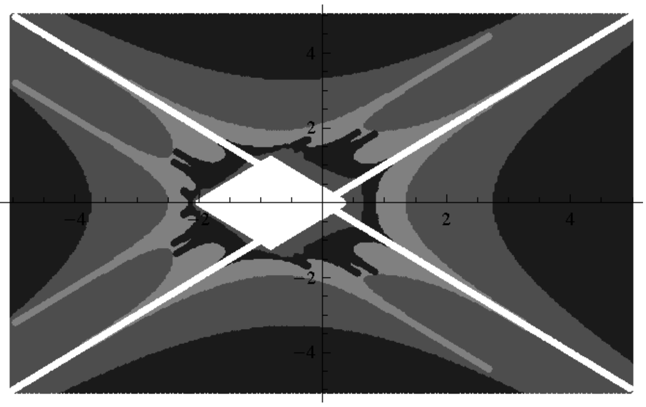

Рис. 4: Диаграмма, аналогичная Рис.3, построенная для нормы двойного числа (2). Видна нетривиальная структура времен ухода.

(более точно, $Re(x) - Im(x) < C^2/(Re(x) + Im(x))$, где C – фиксированная константа, либо $Re(x) \sim -Im(x)$.

В первом случае из (3) видно, что такие последовательности существуют только при $cos(\phi) = sin(\phi)$, что означает равенство нулю нормы $|c|$. Аналогично при $Re(x) \sim -Im(x)$ условие отсутствия линейного по $Re(x)$ члена имеет вид $cos(\phi) = -sin(\phi)$, что также требует $|c| = 0$. В противном случае какова бы ни была константа C всегда найдется такие большие $|Re(x)|, |Im(x)|$ что для двойных чисел с еще большими модулями действительной и мнимой частей по крайней мере одно из чисел x или $x + c$ имеет норму больше C. А это значит, что (записывая константу C как A^2 и пользуясь мультипликативностью нормы) для достаточно больших $|Re(x), |Im(x)|$ по крайней мере один из двух соседних членов последовательности (1) имеет норму больше A, и, следовательно, начальная точка такой последовательности не может принадлежать множеству Жулиа.

Для c с нулевой нормой наши результаты отличаются от результатов Арчи, как это видно из Рис.2. Обращает на себя внимание, однако, гладкость полученного наполненного множества Жулиа, показывающая, что его природа остается нефрактальной.

Сказанное выше также объясняет природу множества Мандельброта для двойных чисел, которое представляет собой объединение найденного Арчи прямоугольника и множества точек с нулевой нормой. Таким образом, множество Мандельброта также не является фрактальным.

Тем не менее, отображение (1) для двойных чисел позволяет получить довольно интересные структуры если несколько расширить графические возможности. А именно, не только фиксировать, станет ли норма члена последовательности определяемой отображением (1) больше заранее фиксированного числа или нет но и (в случае, если это произойдет) сохранять в памяти номер шага, на котором это случилось. Помечая затем точки, пересекающие установленную границу за разное число шагов разными цветами, получаем то, что в англоязычной литературе называется "escaping time diagramm" и представляет собой широко используемый способ получения цветных фрактальных изображений (см., например, [10]). Для евклидовой нормы на множестве двойных чисел подобная диаграмма малоинтересна (см. Рис.3). При использовании же меры (2) получается довольно нетривиальная структура (см. Рис.4), чья природа требует дальнейшего анализа. Само множество Мандельброта (прямоугольник в центре) совпадает с построенным в более ранней работе [9], однако структура вокруг него кажется существенно отличной, что может быть связано с различием используемых численных методов и требует осмысления. Также важно понять почему метод, использованный в [7] указывает на фрактальность множеств Жулиа при ненулевых c, в то время как мы видим гладкие границы (см. выше). Эти вопросы мы оставляем для дальнейшей работы.

Мы рассмотрели заполненные множества Жулиа и множество Мандельброта для квадратичного отображения (1) на плоскости двойных чисел, понимая под ограниченностью соответствующей последовательности двойных чисел ограниченность по норме. В этом наш подход отличается от реализованного в работе Арчи, где под ограниченностью понималась ограниченность действительной и мнимой частей двойного числа. Мы показали, что наши результаты в части, касающейся формы наполненных множеств Жулиа отличаются от результатов Арчи только в случае нулевой нормы числа c. В то же время для множества Мандельброта картина распределения времен достижения заранее заданной величины нормы (2) существенно отличается от построенной для классической евклидовой нормы и имеет сложную структуру, требующую более детального изучения. Также необходимо отметить, что в настоящей работе мы ограничились наполненными множествами Жулиа, чьи границы являются собственно множествами Жулиа когда последние связны. Случай вполне несвязных множеств Жулиа требует использования иных численных алгоритмов.

Благодарности

Автор благодарен Павлову Д.Г. и Панчелюге В.А. за полезные обсуждения.

Литература

[1] Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Москва, 1993 — 176 стр.

[2] Милнор Дж. Голоморфная динамика. Ижевск, 2000 — 320 стр.

[3] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. Москва, 1973 — 144 стр.

[4] Artzy R. Dynamics of quadratic functions in cycle planes // *Journal of Geometry*, 44, 1992, p.26-32.

[5] Isaeva O., Kuznetsov S.On possibility of realization of the Mandelbrot set in coupled continuous system // nlin/0509013.

[6] Toporensky A. Quasi-Mandelbrot sets for perturbed complex analytic maps: visual patterns // *arXiv:0807.1667* [cs.GR].

[7] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Малыхин А.В., Панчелюга В.А. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной // // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике* 1(11), 6, 2009, p.135-145.

[8] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналога множества Жюлиа при нулевом значении параметра на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике* 6, 2009, p.146-151.

[9] Павлов Д.Г., Панчелюга В.А. О форме аналога множества Мандельброта на плоскости двойных чисел // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(7), 4, 2007, p.93-97.

[10] Sprott J.C., Pickover C.A. Automatic generation of general quadratic map basins // *Computers and Graphics*, 18, 1995, p.309.

ON JULIA AND MANDELBROT SETS IN DOUBLE NUMBERS PLANE

I.Tipunin[1], A.Toporensky[2]

[1] *Lebedev Physical Institute, Moscow, Russia*

[2] *Sternberg Astronomical Institute, Moscow, Russia*

atopor@rambler.ru

Mandelbrot set and filled-in Julia sets in double numbers plane have been found numerically. We discuss differences between our definition of these sets and the definition of Artzy. A condition for these two different types of sets to coincide have been found. We show also that our definition allows graphycally interesting escaping time diagramms to be constructed in the double numbers plane, in contrast to the Artzy's definition.

Key Words: dynamical systems, double numbers.