

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ ДВОЙНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Д.Г. Павлов¹, С.С. Кокарев^{1,2}

¹ НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

² Российский научно-образовательный центр "Логос", Ярославль, Россия

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

По аналогии с теорией гармонических полей на комплексной плоскости строится теория волновых полей на плоскости двойной переменной. Построены гиперболические аналоги точечных вихрей, источников, вихреисточников и их высших мультипольных обобщений. Обсуждаются физические аспекты теории и возможность ее обобщения на пространства поличисел высших измерений.

Ключевые слова: h -аналитическая функция, условия Коши-Римана, формула Коши, гиперкомплексный потенциал.

1 Введение

В работе [1] были сделаны наброски теории голоморфных функций двойной переменной. В качестве физического приложения теории были отмечены 2-мерные задачи, приводящие к волновому уравнению, для которого вместо начально-краевых условий задается форма пространственно-временной эквипотенциальной поверхности.

Логика перехода от комплексных чисел к двойным подсказывает, что на плоскости двойной переменной с помощью теории h -голоморфных функций можно построить теорию волновых полей, которые, по аналогии с гармоническими полями на комплексной плоскости, можно понимать как редуцированную с 4-х измерений систему полей, удовлетворяющих 4-мерным уравнениям Максвелла или их модификации, построенной на основе алгебры поличисел и (или) индуцируемой ей метрики Бервальда-Моора.

В настоящей статье мы развиваем такую теорию h -аналитических полей, обсуждаем их основные свойства и характеристики, аналогичные гармоническим полям на комплексной плоскости, рассматриваем ряд примеров и анализируем их возможный физический смысл и намечаем пути для обобщения рассмотренной конструкции на пространства \mathcal{H}_n .

2 C -аналитическая теория поля на R^2

Целью настоящего раздела является напоминание основных фактов стандартной теории функций комплексной переменной в виде, удобном для их последующей переформулировки на двойной плоскости. Все доказательства приводимых фактов можно найти в известных руководствах [2, 3].

2.1 Аналитическая интерпретация

Напомним, что произвольное гладкое отображение $f: R^2 \rightarrow R^2$ плоскости в себя можно представить парой компонент

$$(x, y) \mapsto (x', y') : \quad x' = f_1(x, y); \quad y' = f_2(x, y), \quad (1)$$

где f_1, f_2 — гладкие функции $R^2 \rightarrow R$. С помощью формул:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (2)$$

где $z = x + iy$, а черта обозначает операцию комплексного сопряжения, эти отображения можно всегда записать в виде

$$(z, \bar{z}) \mapsto (z', \bar{z}') : \quad z' = F_1(z, \bar{z}); \quad \bar{z}' = F_2(z, \bar{z}). \quad (3)$$

Среди всех гладких отображений рассматриваемого вида целым рядом замечательных свойств выделяются отображения, называемые *голоморфными*, которые удовлетворяют условию:

$$F_{,\bar{z}} = 0, \tag{4}$$

и отображения, называемые *антиголоморфными*, удовлетворяющие условию:

$$F_{,z} = 0. \tag{5}$$

Условия голоморфности или антиголоморфности могут выполняться в точке или в некоторой области на комплексной плоскости¹.

Напомним некоторые основные свойства голоморфных функций. Разделяя в функции F вещественную и мнимую часть: $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, используя связь операторов дифференцирования по комплексным и вещественным переменным:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \tag{6}$$

вытекающие из (2) и расписывая условие (4) в декартовых координатах, приходим к соотношению

$$\frac{dF}{d\bar{z}} = \frac{1}{2} [u_{,x} + iv_{,x} + i(u_{,y} + iv_{,y})] = 0, \tag{7}$$

вещественная и мнимая часть которого дает известные *условия голоморфности (комплексной аналитичности) Коши-Римана*:

$$u_{,x} = v_{,y}; \quad u_{,y} = -v_{,x}. \tag{8}$$

Аналогично для антиголоморфных функций получаем² условия антиголоморфности:

$$u_{,x} = -v_{,y}; \quad u_{,y} = v_{,x}. \tag{9}$$

Действуя на голоморфную или антиголоморфную функцию F 2-мерным вещественным оператором Лапласа

$$\Delta \equiv 4\partial_z\partial_{\bar{z}} = \partial_x^2 + \partial_y^2, \tag{10}$$

приходим к тождествам:

$$\Delta u = 0; \quad \Delta v = 0, \tag{11}$$

выражающим факт гармоничности вещественной и мнимой частей голоморфных или антиголоморфных функций.

Отметим, что в силу нашего определения производная от голоморфной функции (если она существует — факт существования производных любого порядка доказывается в стандартном курсе ТФКП) снова является голоморфной функцией:

$$F_{,\bar{z}} = 0 \Rightarrow (F_{,z})_{,\bar{z}} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow (F_{,z}^{(n)})_{,\bar{z}} = 0 \tag{12}$$

(аналогично и для антиголоморфной с заменой $z \leftrightarrow \bar{z}$.) С этим обстоятельством связана возможность представления голоморфной в окрестности некоторой точки z_0 функции степенным рядом Тейлора:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{13}$$

где комплексные коэффициенты

$$c_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k F}{dz^k} \right|_{z=z_0}. \tag{14}$$

¹Обычно под функцией, голоморфной в точке понимается комплексно дифференцируемая функция с условием (4), которое выполняется в некоторой окрестности этой точки.

²Фактически они получаются из условий (8) заменой знака у v на противоположный.

В окрестности точки z_0 , в которой условие голоморфности нарушается, функция F иногда может быть представлена более общим рядом Лорана:

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k. \quad (15)$$

Часть ряда Лорана с отрицательными степенями $(z - z_0)$ называется его *главной частью*, а часть с неотрицательными — *правильной частью*. При этом если главная часть имеет лишь конечное число членов и n — максимальная абсолютная величина степени, соответствующей отличному от нуля коэффициенту c_{-n} , то говорят, что функция F имеет в точке z_0 полюс n -го порядка. В случае, когда $n = \infty$, точка z_0 называется *существенно особой*. Другой тип особых точек — точки ветвления, при обходе которых голоморфная функция получает некоторое приращение. В окрестности таких точек ряд Лорана должен быть заменен обобщенным рядом Пуансо, содержащим нецелые степени $z - z_0$ или $\ln(z - z_0)$.

Пример 1. Функция $F(z) = \ln z$ голоморфна всюду на комплексной плоскости за исключением точек $z = 0$ и $z = \infty$. Ее координатное представление дается выражением:

$$\ln z = \ln \rho + 2\pi i k \varphi = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 2\pi i k \arctan(y/x), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (16)$$

Особые точки $z = 0$ и $z = \infty$ — точки ветвления логарифма.

Пример 2. Рассмотрим функцию $Z = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, называемую *функцией Жуковского*. Эта функция голоморфна всюду за исключением точек $z = 0$ и $z = \infty$, которые являются полюсами 1-ого порядка. Разложение этой функции на вещественную и мнимую часть имеет вид:

$$Z = \frac{x(x^2 + y^2 + 1)}{2(x^2 + y^2)} + i \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)}. \quad (17)$$

2.2 Топологическая интерпретация

Гладкие функции u и v , связанные условиями (8), не являются независимыми и определяют друг друга с точностью до констант. Действительно, приписывая функции v произвольное значение v_0 в точке (x_0, y_0) , ее значение в произвольной точке (x, y) в силу условий Коши-Римана можно определить через функцию u посредством следующего интеграла:

$$v(x, y) = v_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u_{,x} dy - u_{,y} dx, \quad (18)$$

который вычисляется по любому пути, соединяющему точки (x_0, y_0) и (x, y) и проходящему в области голоморфности функции $F = u + iv$.

На самом деле, результат интегрирования в (18) может зависеть от выбора пути, соединяющего начальную и конечную точки. В таком случае мы будем иметь дело с *многозначной аналитической функцией*, которая может иметь конечное или счетное число ветвей. Более точно на вопрос об однозначности определения сопряженных функций и вообще об однозначности интегралов от голоморфных функций позволяет ответить фундаментальная *теорема Коши*, которая для голоморфной в области D и непрерывно-дифференцируемой на кусочно-гладкой границе ∂D функции выражается равенством

$$\oint_{\partial D} F(z) dz = 0 \quad (19)$$

(для антиголоморфной функции следует заменить в этой формулировке z на \bar{z}). Эта теорема следует из условия голоморфности (4) и равенства:

$$\oint_{\partial D} F(z) dz = \int_D F_{, \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz, \quad (20)$$

выражающего комплексную форму теоремы Пуанкаре-Дарбу об интегрировании дифференциальных форм.

Рассмотрим пару точек z_1 и z_2 на комплексной плоскости и рассмотрим некоторую функцию, голоморфную на комплексной плоскости всюду за исключением счетного числа особых точек.

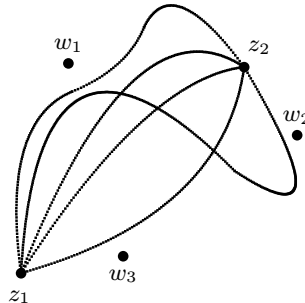


Рис. 1: Гомотопные по отношению к особым точкам w_1, w_2, w_3 голоморфной функции F пути.

Все семейство путей $\{\gamma_{z_1, z_2}\}$ с фиксированными начальной и конечной точками разбивается на классы путей гомотопных по отношению к особым точкам функции F . Именно, два пути γ_1 и γ_2 гомотопны друг другу: $\gamma_1 \stackrel{F}{\sim} \gamma_2$, если существует непрерывная деформация одного пути в другой, такая, что пути в процессе деформации не пересекают особых точек функции F . Обозначим класс путей, гомотопных γ , посредством $[\gamma]$. Тогда из теоремы Коши непосредственно вытекает следующее равенство:

$$\int_{\gamma} F(z) dz = \text{const}_{[\gamma]}, \tag{21}$$

выражающее факт независимости интеграла от пути в классе $[\gamma]$ путей, гомотопных γ .

Из равенства

$$\oint_{\mathcal{C}} (z - z_0)^m dz = 2\pi i \delta_{m, -1}, \tag{22}$$

которое справедливо для любого замкнутого контура \mathcal{C} , охватывающего точку z_0 и легко проверяется на контуре в форме окружности с центром в z_0 , и степенного представления голоморфной функции вытекает интегральная формула Коши

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{F(z)}{z - z_0} dz, \tag{23}$$

где \mathcal{C} — кусочно-гладкий замкнутый контур, ограничивающий область $D \subset \mathcal{C}$, $F(z)$ — произвольная голоморфная в области D функция, $z_0 \in D$. Формула (19) допускает обобщение на многосвязные области, а формула (23) допускает обобщение на контуры, содержащие бесконечно-удаленную точку и контуры, проходящие через точку z_0 и даже имеющие там точку излома.

Из формулы (22) и представления функции $F(z)$ в виде ряда Лорана (15) следует известное правило вычисления интегралов от голоморфных функций, имеющих особые точки:

$$\oint_{\mathcal{C}} F(z) dz = 2\pi i \sum_k c_{-1}^{(k)}, \tag{24}$$

где суммирование справа распространяется по всем особым точкам, попавшим во внутренность контура \mathcal{C} . Поскольку вклад в интеграл дают только коэффициенты c_{-1} (они называются *вычетами* функции F в соответствующих особых точках), то наше определение классов гомотопности путей, на которых интегралы постоянны, можно значительно ослабить: гомотопны все те пути, которые получаются друг из друга непрерывной деформацией, допускающей пересечение особых точек с равными нулю вычетами.

Многозначные аналитические функции удобно описывать с помощью их графиков в 4-мерном пространстве $C \times C$. Они называются *римановыми поверхностями* соответствующих функций. На своей римановой поверхности аналитическая функция по определению однозначна.

2.3 Геометрическая интерпретация

Рассмотрим квадратичную форму

$$\eta = \operatorname{Re}(dz \otimes d\bar{z}) = dx \otimes dx + dy \otimes dy. \quad (25)$$

Можно сказать, что комплексная структура алгебраически индуцирует на плоскости R^2 евклидову метрику. Относительно преобразований, задаваемых голоморфными функциями $F(z)$, форма η ведет себя следующим образом:

$$\eta \mapsto \eta' = |F'(z)|^2 \eta, \quad (26)$$

где $F'(z)/dz$. Формула (26) означает, что функция $F(z)$ в области своей голоморфности при условии $F'(z) \neq 0$ осуществляет конформное отображение комплексной плоскости на себя, т.е. сохраняет углы. Отметим, что $|F'|^2 = |\nabla u|^2 = |\nabla v|^2 = \Delta_F$, где ∇ — оператор градиента в евклидовой метрике, а Δ_F — якобиан отображения F . Как это следует из условий (8) или соображений конформности, линии $u = \operatorname{const}$ и линии $v = \operatorname{const}$ для всякой голоморфной функции $F(z)$ образуют на плоскости C ортогональную криволинейную систему координат, поскольку в каждой точке выполняется равенство:

$$\nabla u \cdot \nabla v = u_{,x}v_{,x} + u_{,y}v_{,y} = -u_{,x}u_{,y} + u_{,y}u_{,x} = 0. \quad (27)$$

Это проясняет геометрический смысл отношения сопряженности функций u и v : *сопряженные функции имеют взаимно-ортогональные поверхности уровня и равные нормы градиентов в каждой точке.*

Пример 3. В силу формулы $z^n = \rho^n e^{in\varphi}$ и формулы (16) для логарифма очевидно, что степенная функция отображает ортогональную сетку полярных координат в другую ортогональную сетку полярных координат на плоскости образов, а логарифм отображает полярную сетку в декартову сетку на плоскости образов. На рисунке показан образ полярной сетки при отображении, осуществляемом функцией Жуковского.

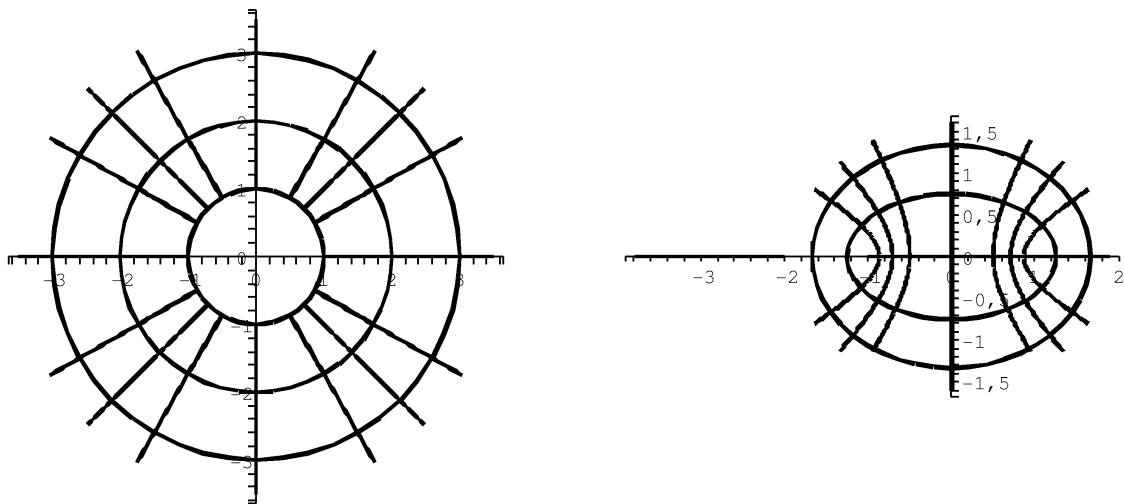


Рис. 2: На левом рисунке представлены линии полярной системы координат, на правом — их образы при отображении $z \mapsto (z + z^{-1})/2$.

Отметим, что конформное преобразование можно понимать как в активном (деформация плоскости), так и в пассивном (смена координат) смыслах. При этом независимо от интерпретации метрика η остается евклидовой, в отличие от конформных преобразований более общего вида: $\eta \rightarrow \eta' = e^{2\phi}\eta$, где ϕ — произвольная гладкая функция координат x и y . Можно показать, что условие обращения в нуль тензора кривизны для метрики $e^{2\phi}\eta$ (η — евклидова метрика) равносильно равенству $e^{2\phi} = |F'|^2$ для некоторой голоморфной функции $F(z)$.

2.4 Физическая интерпретация

В физических приложениях с каждой голоморфной функцией $F(z)$ можно связать 2-меризованную задачу электростатики, магнитостатики, задачу потенциального течения несжимаемой жидкости в гидродинамике и ряд других. Общим для всех задач рассматриваемого типа является уравнение Лапласа, которому удовлетворяет потенциальная функция (соответственно электростатический потенциал, магнитостатический потенциал и потенциал скоростей) в области свободной от источников.

Напомним основные факты приложений голоморфных функций на примере задач электростатики. В области голоморфности с функцией $F(z) = u + iv$ можно ассоциировать электростатическое поле в пространстве, свободном от зарядов. При этом вещественная часть u этой функции является потенциалом электростатического поля (*потенциальная функция*), а мнимая часть v является *силовой функцией* этого поля. Другими словами, линии $u = \text{const}$ являются эквипотенциальными линиями электростатического поля, а линии $v = \text{const}$ совпадают с линиями напряженности этого поля. Как это и должно быть из физических соображений, эти семейства линий взаимно-ортогональны (формула (27)), а каждая из функций u и v удовлетворяет уравнению Лапласа в рассматриваемой области. Основная идея, на которой базируются приложения ТФКП для решения плоских задач электростатики, заключается в отыскании такой голоморфной функции $F(z)$, которая переводит границы Γ_i всех проводников рассматриваемой задачи в прямые линии $\text{Re } F(z)|_{\Gamma_i} = \text{const}_i$. Действительно, при этом границы всех проводников станут эквипотенциалами, а в силу общей теоремы существования и единственности решения уравнения Лапласа с заданными граничными условиями полученное решение будет единственным (с точностью до физически несущественной перенормировки потенциала). Если требуемая голоморфная функция найдена (для ее отыскания не существует универсальных рецептов), то напряженность электростатического поля можно найти посредством формулы:

$$E = E_x + iE_y = -\frac{\overline{dF}}{dz} = \frac{d\bar{F}}{d\bar{z}} = -u_{,x} - iu_{,y}, \quad (28)$$

которую нужно понимать как комплексную форму для векторного поля градиента функции u . Отметим, что формула (28) получается с учетом соотношений (6) и условий Коши-Римана (8).

В силу соотношения $E = E(\bar{z})$ (антиголоморфность напряженности), вытекающего из (28), с учетом (6) приходим к тождеству:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{2}[E_{x,x} + E_{y,y} - i(E_{x,y} - E_{y,x})] = 0, \quad (29)$$

которое эквивалентно двум тождествам:

$$\text{div } E \equiv E_{x,x} + E_{y,y} = 0; \quad \text{rot } E \equiv E_{y,x} - E_{x,y} = 0, \quad (30)$$

выражающим соответственно *соленоидальность* и *потенциальность* электростатического поля. Отметим, что эти условия выполняются автоматически, если потенциал u является вещественной частью некоторой голоморфной функции.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\Phi[E, \gamma] = \int_{\gamma} E d\bar{z} = \int_{\gamma} E_x dx + E_y dy + i \int_{\gamma} E_y dx - E_x dy = \Gamma[E, \gamma] - i\Pi[E, \gamma] \quad (31)$$

по некоторому пути γ . Его вещественная часть $\Gamma[E, \gamma]$ называется *циркуляцией поля E вдоль пути γ* , а величина $\Pi[E, \gamma]$, противоположная мнимой части, называется *потокм поля E через линию γ* . С учетом определения (28) и условий Коши-Римана для этих величин получаются следующие выражения через приращения компонент комплексного потенциала:

$$\Gamma[E, \gamma] = -\delta_\gamma u; \quad \Pi[E, \gamma] = -\delta_\gamma v, \quad (32)$$

которые одновременно можно рассматривать как иллюстрирующие физический смысл компонент комплексного потенциала $F(z)$. Здесь использовано обозначение $\delta_\gamma Q \equiv Q(z_2) - Q(z_1)$ для приращения функции Q вдоль пути γ с начальной точкой z_1 и конечной точкой z_2 .

Рассмотрим несколько важных примеров.

Пример 6: поле точечного источника. Комплексный потенциал

$$F(z) = -q \ln z \quad (33)$$

описывает поле точечного заряда q на плоскости (в 3-мерном пространстве ему соответствует бесконечно протяженная заряженная нить с линейной плотностью заряда q). Из выражения (16) и формулы (28) следует формула для напряженности, которую можно привести к виду

$$E = q \frac{z}{|z|^2} \quad (34)$$

2-мерного закона Кулона. Из соотношений (32) получаем для любой окружности с центром в начале системы координат, где находится заряд (а значит и любого замкнутого контура, однократно обходящего точку $z = 0$),

$$\Gamma[E] = 0, \quad \Pi[E] = 2\pi q, \quad (35)$$

что выражает потенциальность электростатического поля и 2-мерную теорему Гаусса соответственно.

Пример 7: проводящий нейтральный цилиндр в постоянном поле. Комплексный потенциал $F(z) = 2iE_0 R Z(z/R) = iE_0(z + R^2 z^{-1})$ описывает электростатическое поле вокруг проводящего цилиндра радиуса R , помещенного в однородное электрическое поле E_0 , перпендикулярное его оси. Из выражения (17) и формулы (28) следует выражение для напряженности

$$E = iE_0 - iE_0 R^2 \frac{z^2}{|z|^4}. \quad (36)$$

Силовые линии этого поля проще получить исходя из вида силовой функции в (17) (с учетом множителя i это будет функция u). Они представлены на рисунке 3.

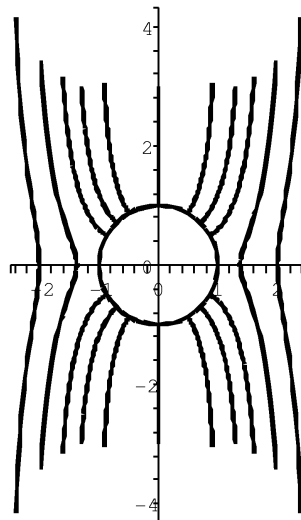


Рис. 3: Силовые линии электрического поля в окрестности цилиндра радиуса $R = 1$. Внешнее электрическое поле ориентировано вдоль мнимой оси.

2.4.1 Магнитная интерпретация

Рассмотренные выше примеры и вообще любое решение плоской электростатической задачи, записанное с помощью комплексного потенциала, обладают замечательной *дуальной симметрией*. Для пояснения идеи дуальной симметрии рассмотрим комплексный потенциал $F(z)$ некоторой электростатической задачи и рассмотрим комплексный потенциал iF . Для напряженности нового поля B в силу (28) получим выражение

$$B = iE, \tag{37}$$

что геометрически означает поворот вектора напряженности E в каждой точке на угол $\pi/2$. Физически такое преобразование можно интерпретировать как *переход от электростатической задачи к сопряженной (дуальной) магнитостатической*. Применяя такой переход к ситуации с точечным зарядом (заряженной нитью) на плоскости, получаем магнитное поле линейного тока с потенциалом:

$$B = -q \arctan(y/x) + iq \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{38}$$

При этом силовые линии поля B — концентрические окружности, а эквипотенциальные поверхности — радиальные линии, исходящие из источника (силовая и потенциальная функции поменялись местами). Формулы (32) теперь дают $\Gamma[B] = 2\pi q$, $\Pi[B] = 0$, что выражает закон полного тока в магнитостатике и соленоидальность магнитного поля соответственно.

Переход к потенциалу iF в примере с цилиндром приводит к задаче о цилиндрическом диамагнетике, помещенном во внешнее однородное магнитное поле, перпендикулярное его оси. Силовые линии магнитного поля получаются теперь с помощью мнимой части формулы (17).

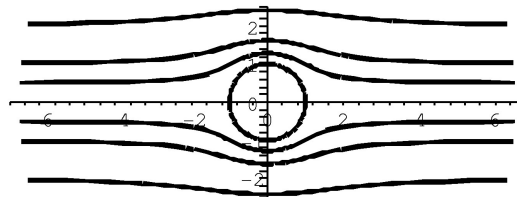


Рис. 4: Силовые линии магнитного поля в окрестности диамагнитного цилиндра радиуса $R = 1$. Внешнее однородное магнитное поле ориентировано вдоль вещественной оси.

2.4.2 Вихреисточник

Имеется интересная возможность объединить две дуально-сопряженные картины, рассмотренные выше, в одну. Обратимся сначала к решению с точечным зарядом и рассмотрим ситуацию, когда этот заряд является комплексным: $Q = q - im$. Очевидно, что логарифмический потенциал с таким зарядом:

$$F(z) = -Q \ln z = -q \ln \sqrt{x^2 + y^2} - m \arctan(y/x) - i(q \arctan(y/x) - m \ln \sqrt{x^2 + y^2}) \tag{39}$$

включает в себя как частные случаи как электрическую, так и магнитную картину, рассмотренные выше и описывает их суперпозицию. Для избежания физически некорректного суммирования электрического и магнитного полей, можно рассмотреть, к примеру, гипотетическую электростатику, в которой электростатическое поле может быть непотенциальным. Источником этой непотенциальности как раз и выступает мнимая часть m заряда Q . На языке полной электродинамики такое рассмотрение будет означать переход к расширенной дуально-симметричной электродинамике, в которой существуют магнитные заряды (монополи) и магнитные токи. Именно последние и будут интерпретироваться в плоских задачах как точечные или распределенные источники завихренности электростатического поля. В магнитной интерпретации у магнитного поля появляются источники — сами магнитные заряды.

На рисунке (5) показан вид силовых линий электростатического поля в суперпозиции, когда $q = m$.

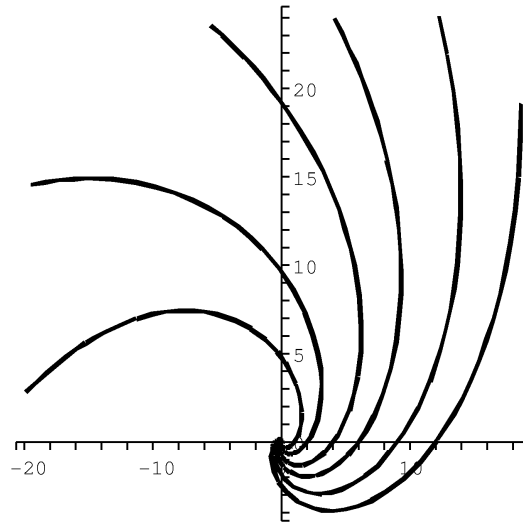


Рис. 5: Силовые линии электростатического поля в окрестности вихреисточника с равными мощностями вихря и источника.

2.4.3 Мультипольные обобщения

Рассмотрим два противоположных точечных заряда: отрицательный заряд поместим в начало координат, а положительный — на расстоянии p от него на положительной части вещественной оси. Согласно принципу суперпозиции комплексный потенциал такой системы зарядов будет определяться выражением:

$$F(z) = F_+ + F_- = -q \ln z + q \ln(z+p) = q(-\ln z + \ln z + \ln(1 + p/z)) = \frac{q}{z} + o(1/z). \quad (40)$$

Рассмотрим предел этого выражения при $p \rightarrow 0$, $q \rightarrow \infty$, и при конечной величине $p = q$. В результате приходим к потенциалу

$$F_1(z) = \frac{p}{z} = \frac{p\bar{z}}{|z|^2} \quad (41)$$

точечного диполя мощностью (или дипольным моментом) p . Точечный диполь является простейшей системой с равным нулю полным электрическим зарядом. В компонентах выражение (41) принимает вид:

$$F_1(x, y) = \frac{px}{x^2 + y^2} - i \frac{py}{x^2 + y^2} = \frac{pe^{-i\varphi}}{\rho}. \quad (42)$$

Линии напряженности поля диполя определяются силовой функцией (мнимой частью выражения (42)) и в полярной системе координат описываются семейством уравнений:

$$\rho = C \sin \varphi, \quad R \ni C > 0, \quad (43)$$

Часть линий показана на рис. 6

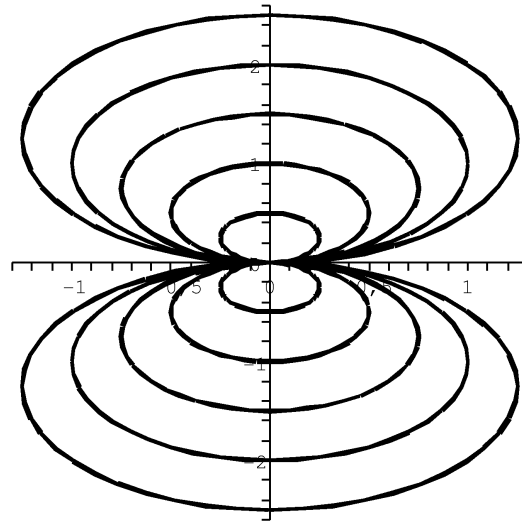


Рис. 6: Силовые линии электростатического поля в окрестности точечного диполя единичной мощности.

Рассмотрение диполя, порожденного зарядом вихреисточникового типа получается из предыдущего подстановкой $p \mapsto p_e - ip_m$. При этом формулы (42) и (43) примут несколько более общий вид:

$$F_1(x, y) = \frac{|p|e^{-i(\varphi-\delta)}}{\rho}; \quad \rho = C \sin(\varphi + \delta), \quad R \ni C > 0, \quad (44)$$

где $\delta = \arctan(p_m/p_e)$, $|p| = \sqrt{p_e^2 + p_m^2}$. Нетрудно видеть, что магнитная часть дипольного момента отвечает за поворот рисунка 6 на угол $-\delta$ и увеличение мощности диполя.

Аналогично, рассматривая пару противоположно ориентированных диполей одинаковой по модулю мощности p , сдвинутых друг относительно друга на (эту величину можно рассматривать как комплексное число) и переходя к пределу $\rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$, $p = Q^{(2)} < \infty$, приходим к *потенциалу точечного квадрупольной мощностью $Q^{(2)}$* :

$$F_2(z) = -\frac{Q^{(2)}}{z^2} = -\frac{|Q^{(2)}|e^{-i(2\varphi-\delta_2)}}{\rho^2}, \quad (45)$$

где $|Q^{(2)}| = \sqrt{(Q_e^{(2)})^2 + (Q_m^{(2)})^2}$, $\delta_2 = \arctan Q_m^{(2)}/Q_e^{(2)}$. Линии напряженности определяются семейством уравнений

$$\rho = \sqrt{C \sin(2\varphi - \delta_2)} \quad (46)$$

и показаны на рис. 7

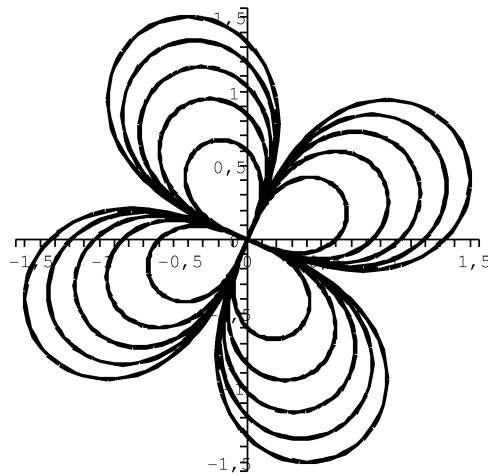


Рис. 7: Силовые линии электростатического поля в окрестности точечного квадруполь с $Q_e^{(2)} = Q_m^{(2)} = 1/\sqrt{2}$.

Далее по индукции, если определен потенциал F_{n-1} точечного $2(n-1)$ -мультиполя с мощностью $Q^{(n-1)}$, то потенциал F_n точечного $2n$ -мультиполя с мощностью $Q^{(n)}$ определяем по формуле:

$$F_n(z) = \frac{Q^{(n)}}{Q^{(n-1)}} \frac{dF_{n-1}}{dz}, \quad (47)$$

которая приводит к следующей явной формуле для потенциала $2n$ -мультиполя:

$$F_n(z) = (-1)^{n+1} \frac{Q^{(n)}}{z^n} = (-1)^{n+1} \frac{|Q^{(n)}| e^{-i(n\varphi - \delta_n)}}{\rho^n}, \quad (48)$$

где $|Q^{(n)}| = \sqrt{(Q_e^{(n)})^2 + (Q_m^{(n)})^2}$, $\delta_n = \arctan Q_m^{(n)}/Q_e^{(n)}$. Уравнение для силовых линий имеет в полярных координатах вид.

$$\rho = \sqrt[n]{\sin(n\varphi - \delta_n)} \quad (49)$$

Вид силовых линий для $n = 5$ показан на рисунке 8.

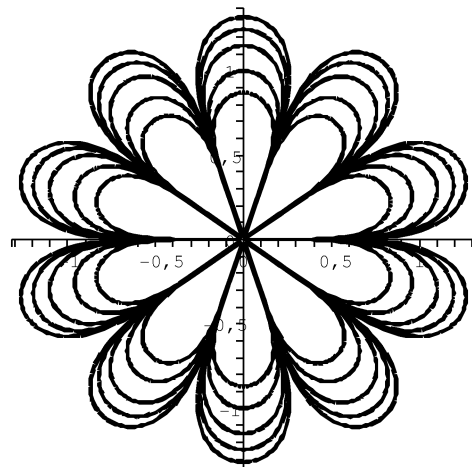


Рис. 8: Силовые линии электростатического поля в окрестности точечного декаполя при $Q_e^{(5)} = 1$, $Q_m^{(5)} = 0$.

3 h -аналитическая теория поля на плоскости \mathcal{H}

В настоящем разделе мы разрабатываем гиперболическую версию предыдущих конструкций на комплексной плоскости. Изначально мы не связываем получаемые h -аналитические поля с электромагнитным полем. Более того, теперь мы выбираем путь рассуждений, обратный к принятому в предыдущем разделе: в нем все построения шли в направлении от физики (электромагнитостатики) к формулировкам и определениям, мы же принимаем гиперболические аналоги этих формулировок за первоначальные определения, а об их физической интерпретации будем говорить впоследствии.

Прежде чем переходить непосредственно к теории поля, кратко напомним некоторые основные сведения, касающиеся двойной плоскости и h -голоморфных функций на них.

3.1 Двойные числа

Алгебру двойных чисел \mathcal{H} можно задать парой образующих $\{1, j\}$ с таблицей умножения:

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & j \\ \hline 1 & 1 & j \\ \hline j & j & 1 \end{array}. \tag{50}$$

Элементы \mathcal{H} будем записывать в виде: $\mathcal{H} \ni h = 1 \cdot t + jx$, где $t, x \in R$, имея ввиду дальнейшие приложения этой алгебры для описания 2-мерного пространства-времени³. Особенность алгебры двойных чисел с таблицей умножения (50) заключается в том, что она не образует числового поля, поскольку содержит делители нуля, т. е. уравнение $h_1 h_2 = 0$ может выполняться при отличных от нуля элементах h_1 и h_2 . Это обстоятельство послужило одной из причин, по которой двойные числа не получили столь широкого распространения в приложениях, как комплексные. Однако, именно это обстоятельство отражает на алгебраическом языке важнейший факт геометрии 2-мерного пространства-времени — наличие световых конусов. Другой причиной относительно слабого интереса к двойной переменной и функциям от нее является лежащая на поверхности возможность их физической интерпретации как суперпозиции двух произвольных волн, распространяющихся в противоположные стороны одномерного пространства [2]. Такой подход, безусловно, возможен, однако он не отражает всех интересных особенностей как самих h -голоморфных функций, так и их приложений. В частности, речь может идти о двумерных пространственно-временных полях, являющихся гиперболическими аналогами двумерных потенциальных и соленоидальных полей, традиционно связываемых с голоморфными функциями обычной комплексной переменной.

Инволютивная операция *комплексного сопряжения* для двойных чисел определяется по аналогии с комплексным случаем: $h = t + jx \mapsto \bar{h} = t - jx$. Геометрически эта операция описывает отражение гиперболической плоскости относительно оси $\text{Im } h = 0$. Аналогично комплексному случаю, пару $\{h, \bar{h}\}$ можно рассматривать как независимые двойные координаты на гиперболической плоскости, которые связаны с декартовыми координатами посредством формул (2) с заменой $z, \bar{z} \rightarrow h, \bar{h}$.

Переход к гиперболическим полярным координатам и экспоненциальной форме представления двойного числа имеет ряд особенностей, которых нет в случае комплексных чисел. Пара прямых $t \pm x = 0$, содержащих множество двойных чисел⁴ с нулевым скалярным квадратом, разбивает всю гиперболическую плоскость на четыре клиновидные области, обозначенные на рисунке цифрами I, II, III и IV (рис. 9).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что в каждой из отмеченных областей двойные числа допускают гиперболическое тригонометрическое представление вида:

$$h = t + jx = \varrho(\cosh \psi + j \sinh \psi), \tag{51}$$

³В дальнейшем скорость света полагается равной единице.

⁴Строго говоря, наличие делителей нуля и возможность отрицательных значений выражения $h\bar{h}$ не позволяют говорить о норме двойного числа в строгом смысле этого слова. Для экономии терминов и сохранения частичной аналогии с комплексными числами мы будем называть величину $\sqrt{|h\bar{h}|}$ нормой или модулем двойного числа (см. далее формулы 52). Знакопеременную величину $h\bar{h}$ будем называть скалярным квадратом двойного числа.

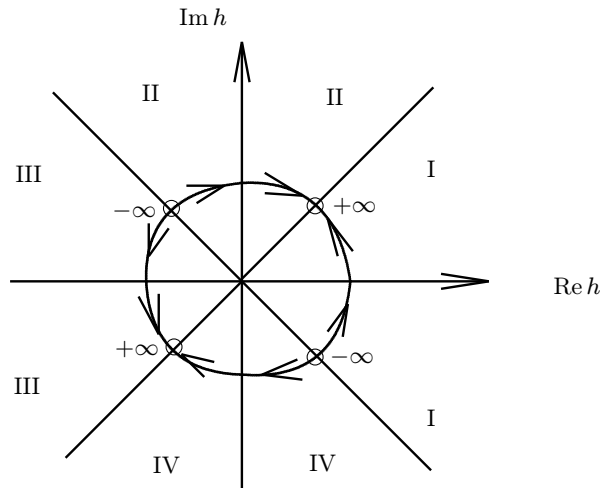


Рис. 9: Область $R \sqcup -R \sqcup R \sqcup -R$ изменения угла ψ на плоскости \mathcal{H} . Ориентация согласована в противоположных клиньях и противоположна в соседних. Для различия углов в различных клиньях можно нумеровать угол ψ индексом k : ψ_k , ($k = 1, 2, 3, 4$).

где для каждого из клиньев имеют место следующие определения величин:

$$\begin{aligned}
 \text{I} : &= 1, & \varrho &= \sqrt{t^2 - x^2}, & \psi &= \text{Arth}(x/t); \\
 \text{II} : &= j, & \varrho &= \sqrt{x^2 - t^2}, & \psi &= \text{Arth}(t/x); \\
 \text{III} : &= -1, & \varrho &= \sqrt{t^2 - x^2}, & \psi &= \text{Arth}(x/t); \\
 \text{IV} : &= -j, & \varrho &= \sqrt{x^2 - t^2}, & \psi &= \text{Arcth}(t/x).
 \end{aligned} \tag{52}$$

Величины ϱ и ψ , определенные в каждом из клиньев формулами (51), будем называть *модулем* и *аргументом* двойного числа h . Таким образом, в каждом из клиньев $0 \leq \varrho < \infty$, а сами клинья параметризуются отдельными экземплярами вещественных прямых, которые в совокупности образуют *многообразие Ψ угловых переменных* в виде ориентированной дизъюнктивной суммы $R \sqcup -R \sqcup R \sqcup -R$. Более наглядно многообразие Ψ можно представить себе, компактифицируя каждое из R в открытый интервал и склеивая интервалы в их концах в окружность с четырьмя выколотыми точками.

Отметим, что множество двойных чисел с нулевой нормой не описывается ни одной из координатных карт введенной выше гиперболической полярной системы координат. В дальнейшем множество двойных чисел вида

$$h_0 + h_1(1 \pm j), \tag{53}$$

(h_0, h_1 — произвольные двойные числа) будем называть *конусом числа h_0* и обозначать $\text{Con}(h_0)$. Все точки, лежащие в $\text{Con}(h_0)$, имеют равное нулю гиперболическое расстояние до точки h_0 .

Справедливость гиперболической формулы Эйлера: $\cosh \psi + j \sinh \psi = e^{j\psi}$ проверяется разложением левых и правых частей в формальные ряды Маклорена и сравнением их вещественных и мнимых частей. Гиперболическая формула Эйлера приводит к экспоненциальной форме представления двойных чисел:

$$h = t + jx = \varrho e^{j\psi} = e^{\Theta}, \tag{54}$$

где в последнем равенстве мы перешли к "гиперболическому комплексному углу"

$$\Theta = \ln \varrho + j\psi \equiv \ln h. \tag{55}$$

При этом произведение пары двойных чисел сводится к сложению их комплексных углов и перемножению знаковых множителей.

3.2 h -голоморфные функции двойной переменной: аналитическая интерпретация

Функция $\ln h$, определенная по формуле (55), является простым и важным представителем класса h -голоморфных функций двойной переменной, к определению которых можно прийти из соображений, аналогичных определению аналитической функции комплексной переменной. Произвольное гладкое отображение $f: R^2 \rightarrow R^2$ можно представлять парой вещественных компонент (1), а можно перейти к его представлению через пару двойных переменных $\{h, \bar{h}\}$:

$$(h, \bar{h}) \mapsto (h', \bar{h}') : h' = F_1(h, \bar{h}); \quad \bar{h}' = F_2(h, \bar{h}). \quad (56)$$

Теперь для интерпретации R^2 как плоскости двойной переменной \mathcal{H} естественно ограничиться отображениями, сохраняющими гиперболическую комплексную структуру плоскости, т. е. отображениями $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ вида: $h \mapsto s = F(h)$. Дифференцируемые⁵ функции $R^2 \rightarrow R^2$, удовлетворяющие условию:

$$F_{,\bar{h}} = 0 \quad (57)$$

будем называть h -голоморфными функциями двойной переменной h . Функции, удовлетворяющие условию:

$$F_{,h} = 0 \quad (58)$$

будем называть h -антиголоморфными функциями двойной переменной.

По аналогии с голоморфными функциями комплексной переменной голоморфные функции двойной переменной можно определять формальными степенными рядами, сходимость которых часто вытекает из сходимости соответствующих вещественных рядов.

Имеет место следующее утверждение: *всякая h -голоморфная или h -антиголоморфная функция двойной переменной отображает делители нуля в делители нуля*. Формально это свойство выражается равенством:

$$F(\text{Con}_h) = \text{Con}_{F(h)},$$

для всякой точки h из области голоморфности функции F . Доказательство см. в [1]. При этом голоморфная функция сохраняет компоненты конуса, а антиголоморфная переводит компоненты $\lambda(1 \pm j)$ друг в друга.

С учетом гиперболических аналогов формул (6):

$$\frac{\partial}{\partial h} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + j \frac{\partial}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{h}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - j \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (59)$$

условие (57) в декартовых координатах для h -голоморфной функции $F = U + jV$ принимает вид:

$$F_{,\bar{h}} = (U + jV)_{,\bar{h}} = \frac{1}{2} [(U + jV)_{,t} - j(U + jV)_{,x}] = U_{,t} - V_{,x} + j(V_{,t} - U_{,x}) = 0,$$

откуда следуют условия гиперболической аналитичности Коши-Римана:

$$U_{,t} = V_{,x}; \quad U_{,x} = V_{,t}. \quad (60)$$

Легко проверить, что из условий (60) следует гиперболическая гармоничность вещественной и мнимой частей аналитической функции F , которая выражается уравнениями:

$$\square U = \square V = 0, \quad (61)$$

где

$$\square \equiv 4\partial_h \partial_{\bar{h}} = \partial_t^2 - \partial_x^2 \quad (62)$$

— 2-мерный волновой оператор — даламбертиан ("гиперболический лапласиан").

⁵Понятие производной функции $F(h, \bar{h})$ по аргументам вводится аналогично определению вещественного анализа. Именно, мы определяем дифференцируемость функции F в точке (h, \bar{h}) как следующее свойство ее приращения: $\Delta F = A(h, \bar{h}) \Delta h + B(h, \bar{h}) \Delta \bar{h} + o(\|\Delta h\|_{\mathcal{H}})$, где $\|\Delta h\|_{\mathcal{H}} \equiv [|\Delta t^2 - \Delta x^2|]^{1/2}$ — псевдоевклидова норма приращения переменной. Переходя к различным пределам при $\|\Delta h\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$, получаем определения частных производных или "производных по направлениям". Проблема при таком определении возникает только в случае производных вдоль компонент конуса: $\partial_{\text{Con}} = \partial_{\lambda(1 \pm j)}$. Мы не останавливаемся подробно на этом вопросе в настоящей статье, хотя еще и вернемся к нему.

3.3 h -голоморфные функции двойной переменной: топологическая интерпретация

Криволинейные интегралы от функций на плоскости двойной переменной сводятся к паре стандартных интегралов от 1-форм на декартовой плоскости, поэтому мы не останавливаемся на их определении подробно. Формальное доказательство гиперболической теоремы Коши является почти дословным повторением соответствующего доказательства формулы (19) и как и в комплексном случае наиболее компактно выглядит на комплексном языке⁶:

$$\oint_{\Gamma} F(h) dh = \int_{\Sigma} F_{,\bar{h}} d\bar{h} \wedge dh = 0$$

ввиду (57). В силу чисто топологических соображений, аналогичных соображениям на комплексной плоскости, интеграл от голоморфной функции будет обращаться в нуль и по границе многосвязной области.

Интегральная формула Коши, опирающаяся на следующий гиперболический аналог формулы (22) [1]:

$$\oint_{\Gamma} (h - h_0)^{\alpha} dh = \begin{cases} 0, & \alpha \neq -1; \\ j\ell_H, & \alpha = -1. \end{cases} \quad (63)$$

где $\ell_H = \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi$ — размер пространства гиперболических углов ("фундаментальная константа" гиперболической геометрии, аналогичная константе 2π на евклидовой плоскости), имеет вид

$$\oint_{\Gamma} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = 0. \quad (64)$$

для контура типа, показанного на рис. 10. и вид

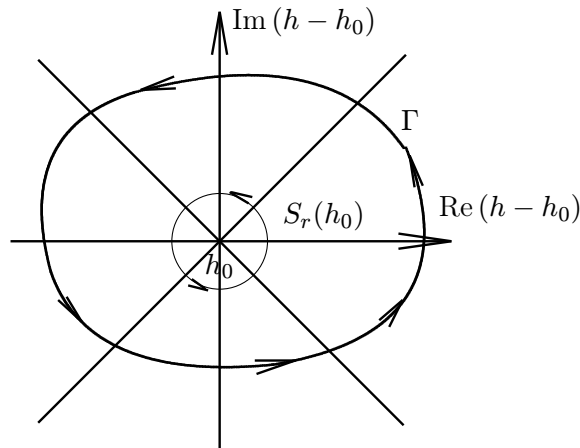


Рис. 10: К выводу интегральной теоремы Коши на плоскости двойной переменной.

$$F(h_0) = \frac{1}{\ell_H j} \oint_{\Gamma_0} \frac{F(h)}{h - h_0} dh, \quad (65)$$

для контура типа, показанного на рис. 11.

⁶Есть конечно проблема с определением производной $F_{,\bar{h}}$ вдоль направления конуса. Если контур выпуклый и криволинейный, то точек, в которых касательный вектор к контуру лежит на конусе будет лишь конечное или счетное число. Исключая ("выкалывая") такие точки из контура и вычисляя интегралы по оставшимся несвязным частям в смысле их главных значений, мы приходим к определению интеграла в некотором несобственном смысле. Мы не останавливаемся в настоящей статье на деталях подобных определений.

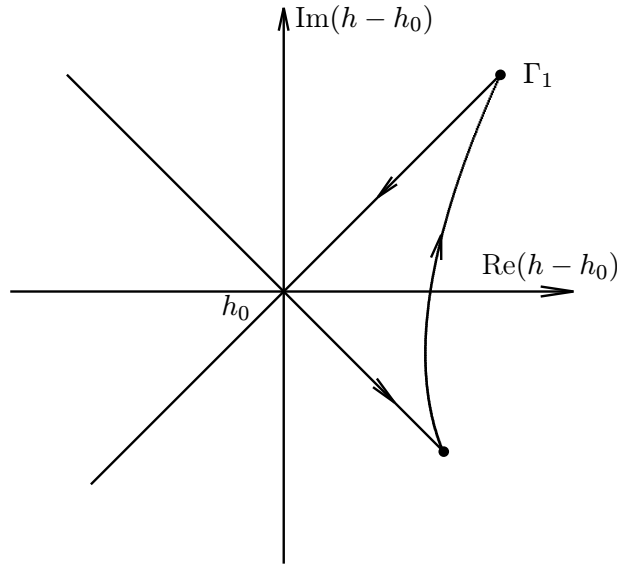


Рис. 11: К выводу интегральной теоремы Коши на плоскости двойной переменной: контуры Γ_n .

3.4 h -голоморфные функции двойной переменной: геометрическая интерпретация

Рассмотрим квадратичную форму

$$\Theta = \text{Re}(dh \otimes d\bar{h}) = dt \otimes dt - dx \otimes dx. \tag{66}$$

По аналогии с комплексным случаем можно сказать, что алгебра двойных чисел на плоскости R^2 алгебраически индуцирует псевдоевклидову метрику. Относительно преобразований, задаваемых голоморфными функциями $F(h)$, форма Θ ведет себя следующим образом:

$$\Theta \mapsto \Theta' = |F'(h)|^2 \Theta, \tag{67}$$

где $F'(h)/dh$. Формула (67) означает, что функция $F(h)$ в области своей голоморфности и в точках, где $|F'(h)|^2 \neq 0$ осуществляет конформное отображение комплексной плоскости на себя, т.е. сохраняет гиперболические углы. Это обстоятельство тесно связано с установленным выше фактом об инвариантности конусов Con относительно h -голоморфных отображений. Отметим, что $|F'|^2 = |\nabla U|^2 = |\nabla V|^2 = \Delta_F$, где ∇ — оператор градиента в псевдоевклидовой метрике, а Δ_F — якобиан отображения F , рассматриваемого как отображение $R^2 \rightarrow R^2$. Как это следует из условий (60) или соображений конформности, линии $U = \text{const}$ и линии $V = \text{const}$ для всякой голоморфной функции $F(h)$ образуют на плоскости \mathcal{H} ортогональную (в гиперболическом смысле) криволинейную систему координат, поскольку в каждой точке выполняется равенство:

$$\nabla U \cdot \nabla V = U_{,t}V_{,t} - U_{,x}V_{,x} = U_{,t}U_{,x} - U_{,x}U_{,t} = 0. \tag{68}$$

По аналогии с комплексным случаем это проясняет геометрический смысл отношения *гиперболической сопряженности* пары функций U и V , которые являются вещественной и мнимой частью некоторой h -голоморфной функции $F(h)$: *сопряженные функции имеют взаимно-ортогональные линии уровня и равные нормы градиентов в каждой точке.*

Отметим, что множество конформных преобразований псевдоевклидовой метрики, в отличие от евклидова случая, не исчерпывается h -голоморфными функциями. К этому вопросу мы вернемся в разделе (5)

3.5 Свойства некоторых элементарных функций двойной переменной

Ввиду того, что свойства гиперболических аналогов элементарных функций относительно слабо освещены в литературе, имеет смысл остановиться на некоторых из них. Более полный каталог элементарных функций двойной переменной рассмотрен в [1].

3.5.1 Степенные функции $F(h) = h^n$

В отличие от степенной функции комплексной переменной случаи четных n и нечетных n кардинально отличаются. Действительно, переходя к экспоненциальному представлению (54), получаем:

$$h = \varrho e^{j\psi} \mapsto^n \varrho^n e^{jn\psi} \tag{69}$$

Поскольку для любого четного n $n = 1$, можно заключить, что степенная функция $h \mapsto h^n$ при $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$ биективно отображает каждый из клиньев I, II, III, IV на клин I с отображением конусов $Con_{\pm} \rightarrow Con_{\pm}$. Напротив, при нечетном n каждый из координатных клиньев при отображении $h \mapsto h^n, n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$ биективно отображается в себя. При этом, как нетрудно видеть из (69) координатная сетка линий $\varrho = \text{const}, \psi = \text{const}$ переходит в координатную сетку линий $\varrho' = \varrho^n = \text{const}, \psi' = n\psi = \text{const}$ для всяких целых n . В случае положительных целых n радиальные линии растягиваются при $\varrho > 1$ и сжимаются при $\varrho < 1$, кроме того, они поворачиваются от значения $\psi = 0$ в сторону соответствующих им по знаку компонент конусов. Для целых отрицательных n дополнительно происходит еще инверсия относительно единичных сфер $\varrho = 1$ и инверсия пространства углов $\Psi \rightarrow -\Psi$. В качестве примера функции с четным n рассмотрим функцию $w = h^2 = x^2 + y^2 + 2jxy = \varrho^2 e^{2\psi}$.

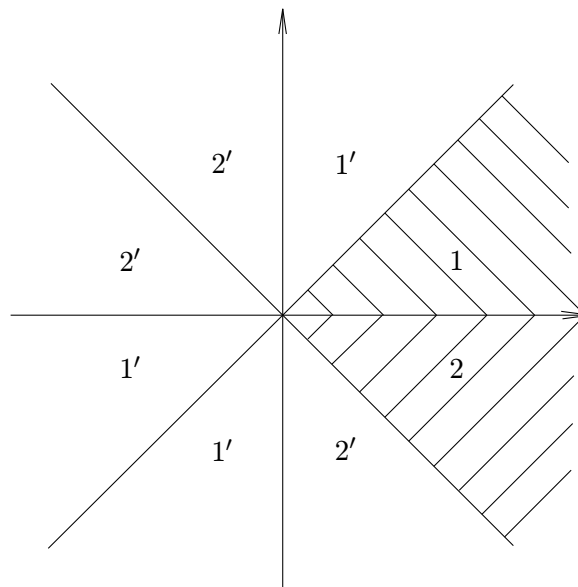


Рис. 12: Глобальная структура отображения $h \mapsto h^2$.

На рис. 12 представлена глобальная структура отображения $h \mapsto h^2$: клин 1-2 переходит сам в себя (его границы — в соответствующие границы), а отображения остальных клиньев в клин 1-2 показано соответствующими цифрами (цифры со штрихами, помечающими клин, показывают как именно соответствующий клин отображается в клин 1-2). Таким образом, отображение $h \mapsto h^2$ является 4-листным. Аналогичным образом устроено отображение: $h \mapsto h^{2k}, k \in \mathbb{Z}$.

Наглядное представление некоторых простых степенных отображений представлено на рис. 13-14.

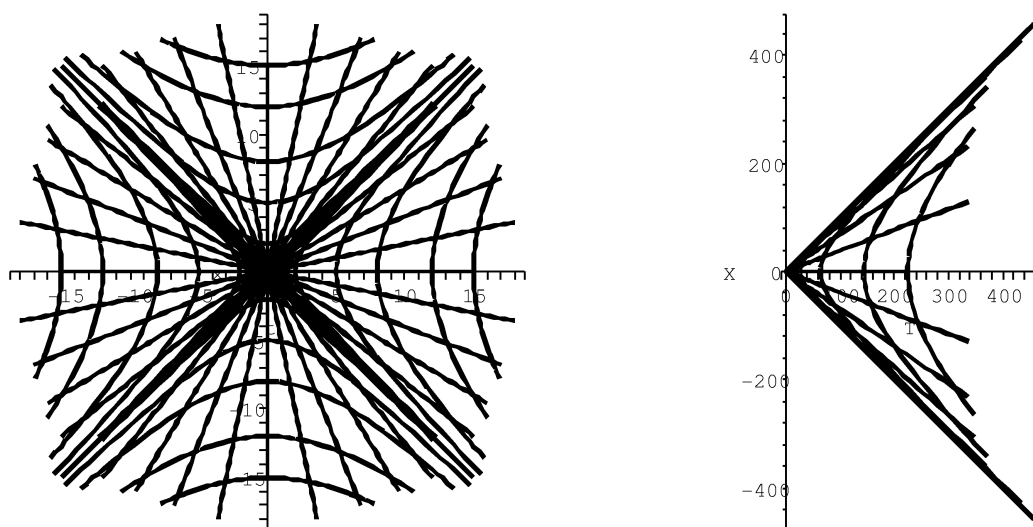


Рис. 13: Гиперболическая полярная система координат (слева) и образ ее первого клина при отображении $h \mapsto h^2$.

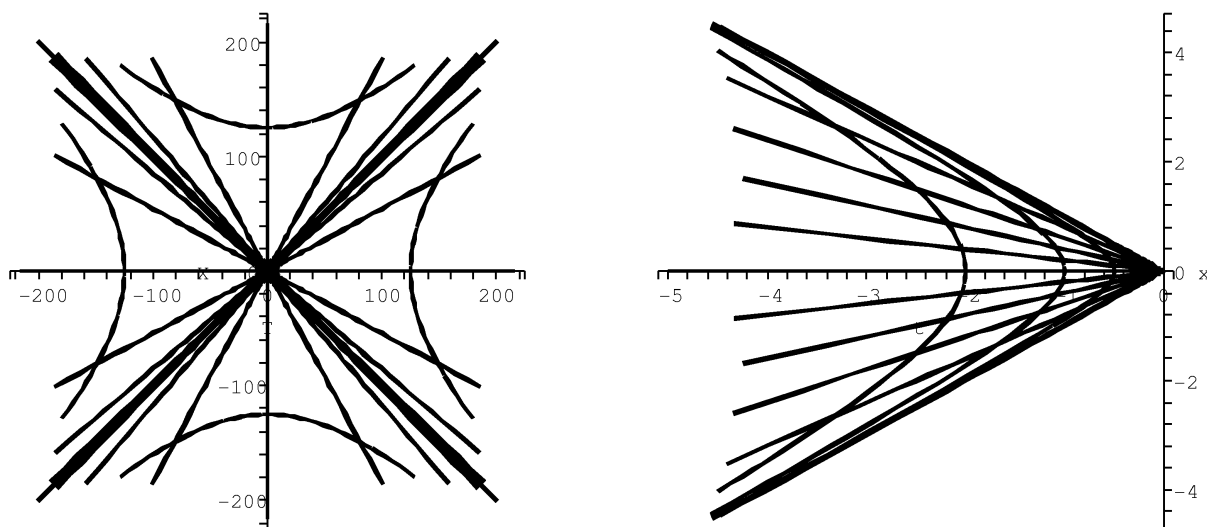


Рис. 14: Образ гиперболической полярной системе координат (рис. 13 слева) при отображении $h \mapsto h^3$ (слева) и образ первого клина при отображении $h \mapsto h^{-1}$ (справа).

Из свойств степенных функций легко вывести свойства корней различных порядков и рациональных степеней: $h \mapsto h^{1/n}$, $h \mapsto h^{m/n}$. Любой корень $\sqrt[n]{h}$ четного порядка определен в квадранте I. Такой корень будет 4-значной функцией. Каждый лист гиперболической римановой поверхности этой функции представляет собой идентичную копию клина I, показанного на рис. 12. На каждом из листов функция однозначна. Все листы склеиваются в риманову поверхность, представляющую собой R^2 , при этом точка $(0;0)$ принадлежит всем листам и является гиперболическим аналогом точки ветвления. Наглядно риманову поверхность корня четного порядка можно реализовать листом бумаги, сложенным вчетверо так, как показано на рис. 15.

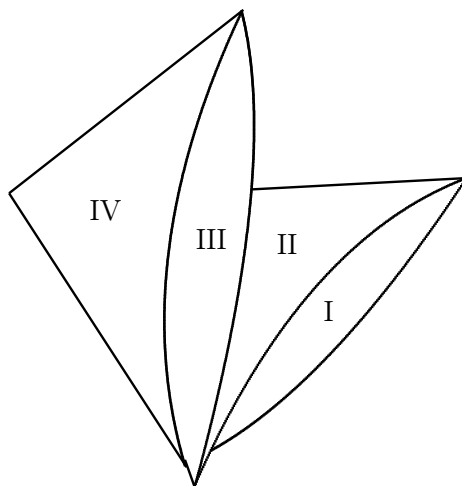


Рис. 15: Гиперболическая риманова поверхность 4-значного отображения $h \mapsto h^{1/2k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Корни нечетной степени — однозначны в каждом из 4 клиньев.

3.6 Экспонента двойной переменной $w = e^h$

Записывая $e^h = e^{t+jx} = e^t e^{jx}$ приходим к глобальной структуре экспоненциального отображения, представленной на рис.16.

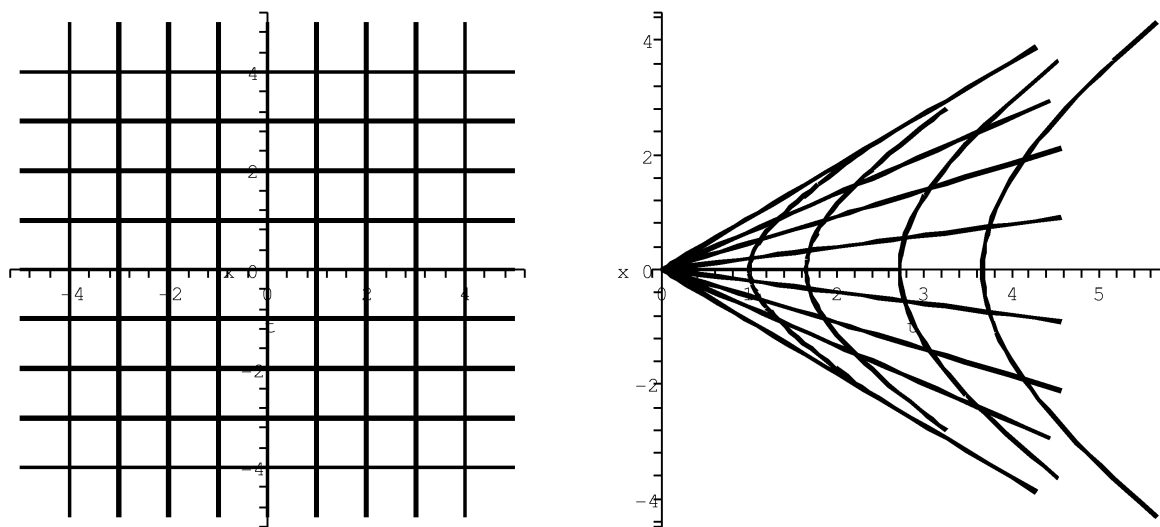


Рис. 16: Глобальная структура отображения $h \mapsto e^h$.

Прямоугольная псевдоортогональная сетка на плоскости переменной h отображается экспонентой в псевдоортогональную сетку, состоящую из лучей и гипербол в первом клине с вершиной в точке $h = 0$. Отображение $h \mapsto e^h$ — биективно. Очевидно, что обратная функция $\ln h = \ln \rho + j\psi$ определена во внутренности первого клина. На границах (т.е. на конусе $\text{Con}^\uparrow(0)$) полярная система координат не работает и требуется дополнительное исследование поведения отображения $h \mapsto e^h$, на котором мы здесь не останавливаемся.

3.6.1 Гиперболическая функция Жуковского: $h \mapsto (h + h^{-1})/2$

Рассмотрим, наконец, гиперболическую версию функции Жуковского:

$$Z(h) \equiv \frac{1}{2} \left(h + \frac{1}{h} \right).$$

Эта функция отображает единичную гиперболическую окружность $HS^1(0)$ в куски координатных осей, двукратно накрывая их (см. рис. 17).

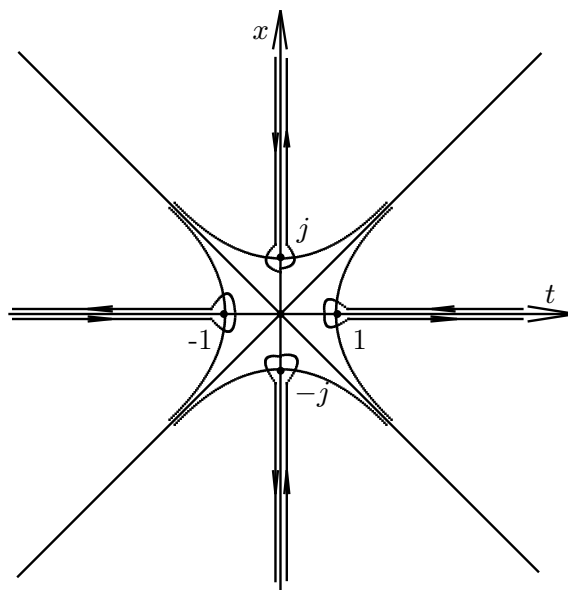


Рис. 17: Действие гиперболической функции Жуковского.

При этом, как и в случае комплексной переменной, функция Жуковского двулистка: внешность единичной окружности и ее внутренность она отображает на двойную плоскость. В точках $\pm 1, \pm j$ конформность функции $Z(h)$ нарушается, поскольку в этих точках $Z'(h) = 0$. Наглядный вид гиперболической функции Жуковского представлен на рис. 18.

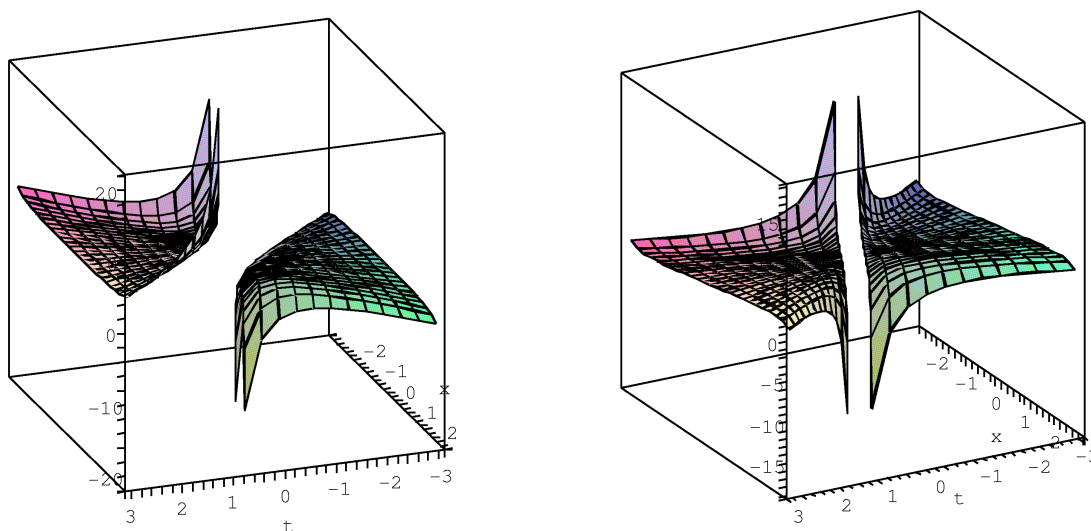


Рис. 18: Структура отображения $h \mapsto (h + h^{-1})/2$ (вещественная и мнимая части).

Риманова поверхность двузначной функции $Z^{-1}(h)$ представлена на рис. 19.

3.7 h -голоморфные функции двойной переменной: физическая интерпретация

Будем рассматривать теперь произвольную h -голоморфную функцию $F(h) = U + jV$ как комплексный h -потенциал некоторого 2-мерного векторного поля (h -поле) на плоскости двойной переменной. Будем ассоциировать вещественную часть U этой функции с потенциалом поля (h -потенциальная функция), а мнимую часть V с силовой функцией этого поля. Другими словами,

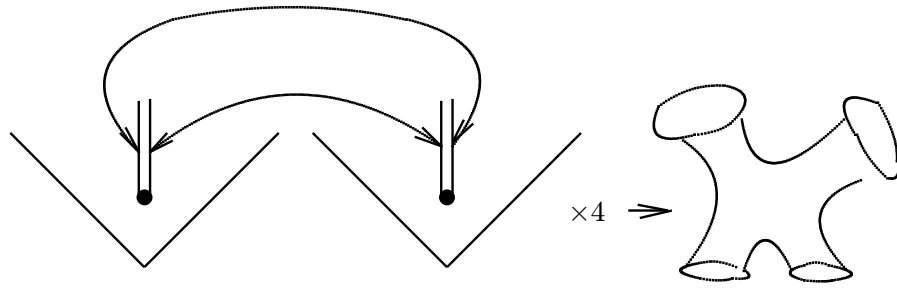


Рис. 19: Риманова поверхность обратной функции Жуковского Z^{-1} . Слева — правило склейки двух клиньев вдоль разреза на координатной оси. Четыре экземпляра таких "полуфабрикатов" склеиваются вместе в поверхность, топологически эквивалентную изображенной справа.

как и в комплексном случае, линии $U = \text{const}$ являются эквипотенциальными линиями h -поля, а линии $V = \text{const}$ совпадают с линиями напряженности этого поля. Эти семейства линий взаимно-ортогональны (формула (68)), а каждая из функций U и V удовлетворяет волновому уравнению (61) в силу гиперболических условий Коши-Римана.

Определим напряженность \mathcal{E} h -поля по формуле:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_t + j\mathcal{E}_x = -\frac{d\bar{F}}{dh} = -\frac{d\bar{F}}{d\bar{h}} = -U_{,t} + jU_{,x}, \quad (70)$$

которую можно рассматривать как двойную форму представления для векторного поля градиента функции U относительно псевдоевклидовой метрики. Формула (70) получается с учетом соотношений (59) и условий Коши-Римана (60).

В силу соотношения $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\bar{z})$ (антиголоморфность напряженности), вытекающего из определения (70), с учетом (59) приходим к следующему тождеству:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \bar{h}} = \frac{1}{2}[\mathcal{E}_{t,t} + \mathcal{E}_{x,x} + j(\mathcal{E}_{t,x} + \mathcal{E}_{x,t})] = 0, \quad (71)$$

которое эквивалентно двум тождествам:

$$\text{divh } \mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_{t,t} + \mathcal{E}_{x,x} = 0; \quad \text{roth } \mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_{t,x} + \mathcal{E}_{x,t} = 0, \quad (72)$$

выражающим соответственно *соленоидальность* и *h -потенциальность* электростатического поля⁷. Отметим, что условие h -потенциальности вытекает из коммутативности вторых частных производных гладкой скалярной функции, а условие соленоидальности эквивалентно волновому уравнению $\square U = 0$, которое выполняется автоматически, если потенциал U является вещественной частью некоторой h -голоморфной функции.

Как и в комплексном случае рассмотрим теперь интеграл

$$\Omega[\mathcal{E}, \gamma] = \int_{\gamma} \mathcal{E} d\bar{h} = \int_{\gamma} \mathcal{E}_t dt - \mathcal{E}_x dx + j \int_{\gamma} \mathcal{E}_x dt - \mathcal{E}_t dx = \Upsilon[\mathcal{E}, \gamma] - j\Xi[\mathcal{E}, \gamma] \quad (73)$$

по некоторому пути γ . Его вещественную часть $\Upsilon[\mathcal{E}, \gamma]$ назовем *циркуляцией поля \mathcal{E} вдоль пути γ* , а величину $\Xi[\mathcal{E}, \gamma]$, противоположную мнимой части, назовем *поток поля \mathcal{E} через кривую γ* . С учетом определения (70) и гиперболических условий Коши-Римана для этих величин получаются следующие выражения через приращения компонент комплексного потенциала:

$$\Upsilon[\mathcal{E}, \gamma] = -\delta_{\gamma} U; \quad \Xi[\mathcal{E}, \gamma] = -\delta_{\gamma} V, \quad (74)$$

которые можно рассматривать как иллюстрирующие физический смысл компонент комплексного h -потенциала $F(h)$.

⁷Отметим, что дивергенция векторного поля определяется одинаково в комплексном и гиперболическом случаях, в отличие операции ротора векторного поля, которая в гиперболическом случае включает симметричную комбинацию частных производных.

3.8 Поле гиперболического точечного источника

Рассмотрим h -потенциал вида

$$F(h) = -q \ln h, \tag{75}$$

который является очевидным гиперболическим обобщением кулоновского потенциала (33). Напряженность поля, которая ему соответствует, вычисляется по формуле (70) и имеет вид:

$$\mathcal{E} = \frac{q}{\bar{h}} = \frac{qh}{|h|^2} = q \left(\frac{t}{t^2 - x^2} + j \frac{x}{t^2 - x^2} \right). \tag{76}$$

Любопытным новым обстоятельством является разница в областях определения формулы (75) и (76): первая задает h -потенциал лишь в первом клине, в то время как вторая корректно определена во всех 4-х клиньях двойной плоскости. Формальное объяснение этого обстоятельства заключается в том, что логарифм от двойного числа, взятого из 2,3 или 4 клиньев можно представить в виде $\ln h + \ln$, где h — некоторое двойное число из первого клина, — один из знаковых множителей, определенных в (52). При этом \ln — это некоторая алгебраическая константа⁸, которая при дифференцировании "стирается" из конечного выражения (76). Силовые линии гиперболического точечного источника — это радиальные прямые с $\psi = \text{const}$, а эквипотенциальные линии — гиперболы $\varrho = \text{const}$. Картина силовых линий во всех 4-х клиньях представлена на рисунке 20.

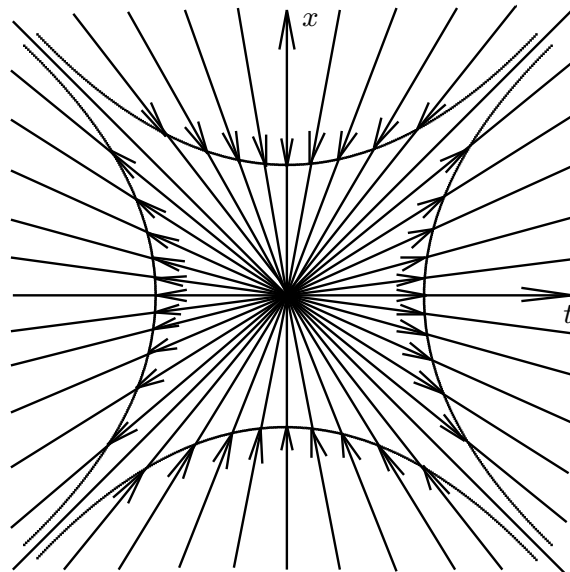


Рис. 20: Схематическая картина силовых линий гиперболического точечного источника. Поле постоянно по абсолютной величине на гиперболических окружностях (евклидовых гиперболах). На конусе Con_0 поле не определено, а в соседних клиньях меняет свой характер (источник или сток).

По формулам (74) получаем для гиперболических циркуляции и потока выражения:

$$\Upsilon[\mathcal{E}, \mathcal{C}] = 0; \quad \Xi[\mathcal{E}, \mathcal{C}] = 0 \tag{77}$$

для контура \mathcal{C} , представленного на рисунке 10 или гомотопных ему и выражения

$$\Upsilon[\mathcal{E}, \mathcal{C}] = 0; \quad \Xi[\mathcal{E}, \mathcal{C}] = \ell_{Hq} \tag{78}$$

для контура, представленного на рис. 11 или гомотопных ему. Формулы (78) выражают гиперболическую потенциальность и гиперболическую теорему Гаусса для поля \mathcal{E} .

⁸Отметим, что она не лежит в алгебре \mathcal{H} .

4 h -дуальная интерпретация

Дуальная интерпретация точечного гиперболического источника получается переходом от потенциала $F(h)$ в (75) к потенциалу $jF(h)$. При этом для нового дуального поля \mathcal{B} получается выражение:

$$\mathcal{B} = j \frac{d\bar{F}}{dh} = -\frac{qj}{h} = -q \frac{x + jt}{t^2 - x^2}. \quad (79)$$

Поле \mathcal{B} является гиперболическим аналогом точечного вихря. Его силовые линии — гиперболы — показаны на рисунке 21.

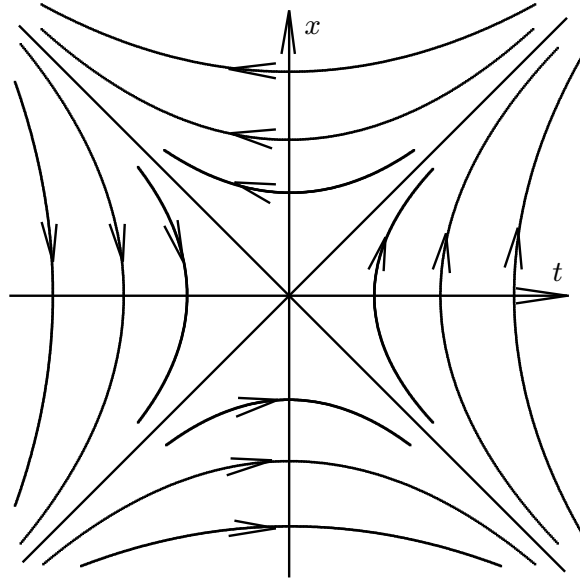


Рис. 21: Силовые линии точечного вихря. Ориентация линий — общая для всех 4-х клиньев (против часовой стрелки).

Как и в комплексном случае векторное поле \mathcal{B} оказывается ортогональным полю \mathcal{E} в смысле псевдоевклидовой метрики и получается "вращением" поля \mathcal{E} на гиперболический угол $-\ell_H + \psi$, где ψ — гиперболический угол для поля \mathcal{E} .

По формулам (74) получаем для гиперболических циркуляции и потока поля \mathcal{B} выражения:

$$\Upsilon[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = 0; \quad \Xi[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = 0 \quad (80)$$

для контура \mathcal{C} , представленного на рисунке 10 или гомотопных ему и выражения

$$\Upsilon[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = 0; \quad \Xi[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = \ell_H q \quad (81)$$

для контура, представленного на рис. 11 или гомотопных ему. Формулы (81) выражают гиперболическую соленоидальность и гиперболический аналог закона полного тока для поля \mathcal{E} .

4.1 h -вихреисточник

По аналогии с комплексным случаем можно объединить две предыдущие ситуации в одну, вводя в рассмотрение концепцию *гиперболического вихреисточника* с комплексным зарядом $\mathcal{Q} = q - jt$. Потенциал принимает вид:

$$F(z) = -\mathcal{Q} \ln h = -q \ln \varrho + m\psi - j(-m \ln \varrho + q\psi). \quad (82)$$

Такой потенциал наиболее естественно интерпретировать в рамках дуально-симметричной гиперболической теории поля, в которой гиперболические электрические и магнитные заряды и

токи присутствуют на "равных правах". Уравнение для силовых линий такого поля получается из (82) приравниванием мнимой части константе:

$$m \ln \varrho + q\psi = C \Leftrightarrow (t^2 - x^2)e^{-(2q/m)\text{Arth}(x/t)} = C, \quad (83)$$

или после некоторых простых преобразований:

$$(t + x)^{1-\alpha}(t - x)^{1+\alpha} = \text{const}, \quad (84)$$

где $\alpha = q/m$. Картина силовых линий для $\alpha = -2$ показана на рис. 22

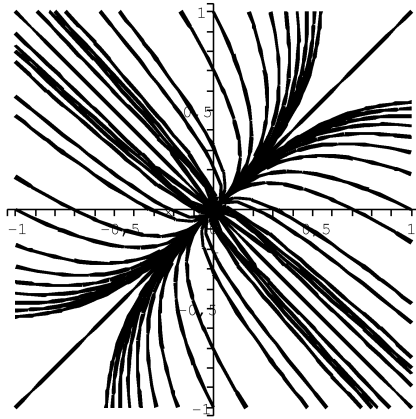


Рис. 22: Силовые линии точечного вихреисточника для $q/m = -2$. Линии исходят из центра во втором и четвертом координатных клиньях, и сходятся к центру в первом и третьем клиньях.

По формулам (74) получаем для гиперболических циркуляции и потока дуально-симметричного поля \mathcal{E} выражения:

$$\Upsilon[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = 0; \quad \Xi[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = 0 \quad (85)$$

для контура \mathcal{C} , представленного на рисунке 10 или гомотопных ему и выражения

$$\Upsilon[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = -\ell_H m; \quad \Xi[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = \ell_H q \quad (86)$$

для контура, представленного на рис. 11 или гомотопных ему. Формулы (86) выражают гиперболическую теорему Гаусса и гиперболический аналог закона полного тока для дуально-симметричного поля \mathcal{E} .

4.2 Гиперболический цилиндр в постоянном поле

Рассмотрим гиперболический аналог проводящего цилиндра в постоянном поле \mathcal{E}_0 . Эта задача описывается потенциалом

$$F(h) = -2\mathcal{E}_0 R Z(h/R) = -\mathcal{E}_0(h + R^2/h), \quad (87)$$

где R — постоянный гиперболический радиус цилиндра. Напряженность поля в окрестности такого цилиндра будет даваться формулой:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - \frac{\mathcal{E}_0 R^2}{h^2} = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_0 R^2 \left(\frac{t^2 + x^2}{(t^2 - x^2)^2} - j \frac{2tx}{(t^2 - x^2)^2} \right). \quad (88)$$

Линии напряженности поля \mathcal{E} , которые можно получить из силовой функции в (88), представлены на рисунке 23.

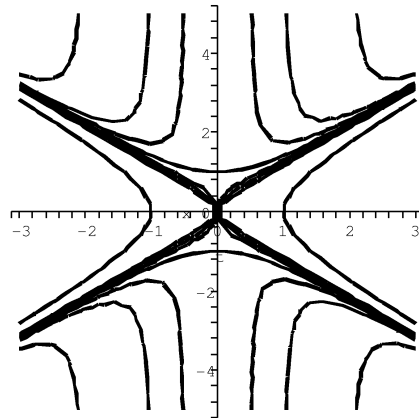


Рис. 23: Силовые линии в окрестности гиперболического цилиндра (две крайних гиперболы слева и справа) радиуса $R = 1$, помещенного в однородное силовое поле $\mathcal{E}_0 = 1$.

4.3 h -мультиполя

По аналогии с комплексным случаем определим с помощью индуктивной формулы

$$F_n(h) = \frac{\mathcal{Q}^{(n)}}{\mathcal{Q}^{(n-1)}} \frac{dF_{n-1}}{dh} = (-1)^{n+1} \frac{\mathcal{Q}^{(n)}}{h^n} - (-1)_Q^n \frac{|\mathcal{Q}^{(n)}| e^{-j(n\psi - \delta_n)}}{\varrho^n}, \quad (89)$$

потенциал точечного гиперболического $2(n-1)$ -мультиполя с мощностью $\mathcal{Q}^{(n)}$. Здесь $|\mathcal{Q}^{(n)}| = \sqrt{|(\mathcal{Q}_e^{(n)})^2 - (\mathcal{Q}_m^{(n)})^2|}$, $\delta_n = \text{Arth} \mathcal{Q}_m^{(n)} / \mathcal{Q}_e^{(n)}$, и Q — знаковые множители для h и комплексного заряда \mathcal{Q} соответственно. Уравнение для силовых линий имеет в полярных координатах вид.

$$\varrho = C \sqrt[n]{\sinh(n\psi - \delta_n)} \quad (90)$$

Вид силовых линий для $n = 2, 3$ показан на рисунке 24.

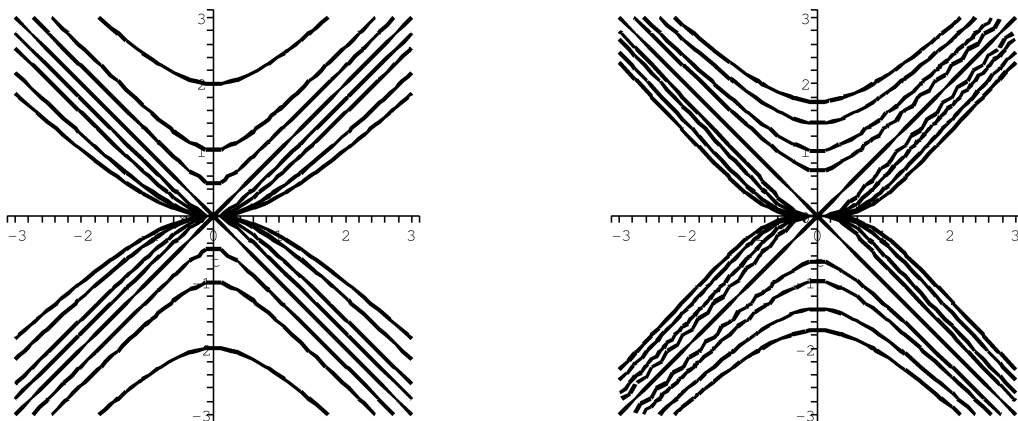


Рис. 24: Силовые линии гиперболического h -поля в окрестности точечного гиперболического диполя и квадруполь с единичной мощностью, ориентированного вдоль вещественной оси.

4.4 h -поле в изотропном базисе

Как уже отмечалось выше, замечательной особенностью двойной плоскости является наличие структуры вещественного конуса Con_h для каждой точки $h \in \mathcal{H}$. Геометрически точки конуса

Con_h удалены на нулевое гиперболическое расстояние от точки h . Алгебраически произведение $(h_1 - h)(h_2 - h) = 0$, где h_1 и h_2 лежат в различных компонентах конуса Con_h , т. е. структура конуса тесно связана с наличием делителей нуля в алгебре двойных чисел. Наличие структуры конуса позволяет переформулировать геометрию и алгебру двойной плоскости в терминах так называемых изотропных координат, в которых геометрические и алгебраические свойства двойной плоскости выглядят наиболее просто. Изотропный базис алгебры \mathcal{H} определяется следующими соотношениями:

$$e_1 = \frac{1+j}{2}; \quad e_2 = \frac{1-j}{2}. \quad (91)$$

Из определения (91) следует таблица умножения алгебры \mathcal{H} в изотропном базисе:

$$e_i \cdot e_i = e_i; \quad e_i \cdot e_j = 0 \quad (i \neq j). \quad (92)$$

Двойное число $h = t + jx$ в изотропном базисе записывается следующим образом:

$$h = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \quad (93)$$

где $\xi_1 = t + x$, $\xi_2 = t - x$ — опережающая и запаздывающая комбинация декартовых компонент двойного числа. Произведение двойных чисел $h_1 = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ и $h_2 = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2$ принимает простой вид:

$$h_1 \cdot h_2 = \xi_1 \eta_1 e_1 + \xi_2 \eta_2 e_2. \quad (94)$$

В частности, любая целая положительная степень двойного числа h^n в изотропном базисе принимает вид комбинации степеней компонент:

$$h^n = \xi_1^n e_1 + \xi_2^n e_2. \quad (95)$$

Легко проверяется, что операция комплексного сопряжения в изотропном базисе сводится к перестановке компонент:

$$\bar{h} = \overline{\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2} = \xi_2 e_1 + \xi_1 e_2. \quad (96)$$

Из (94) нетрудно видеть, что операция деления определена на любое двойное число, у которого все изотропные координаты не равны нулю, т.е. при условии $\xi_1 \xi_2 \neq 0$. В этом случае

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\eta_1 e_1 + \eta_2 e_2}{\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2} = \frac{\eta_1}{\xi_1} e_1 + \frac{\eta_2}{\xi_2} e_2. \quad (97)$$

Двойные числа с равной нулю одной из изотропных координат лежат на конусе Con_0 и имеют нулевую норму.

Ввиду формул

$$t = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}; \quad x = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2}, \quad (98)$$

всякое отображение $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ локально можно представить парой функций $F_1(\xi_1, \xi_2)$ и $F_2(\xi_1, \xi_2)$:

$$F(h) = F_1(\xi_1, \xi_2) e_1 + F_2(\xi_1, \xi_2) e_2. \quad (99)$$

Покажем, что в случае аналитического отображения, т. е. такого, которое можно задать сходящимся в некоторой окрестности рядом Тейлора (или для простоты рядом Маклорена), функции F_1 и F_2 удовлетворяют соотношению:

$$F_1(\xi_1, \xi_2) = F_2(\xi_2, \xi_1). \quad (100)$$

Во-первых, в силу (95) имеем:

$$F(h) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\xi_1^k e_1 + \xi_2^k e_2) = F(\xi_1) e_1 + F(\xi_2) e_2 \quad (101)$$

для всякой аналитической функции переменной h . Для аналитической функции переменной \bar{h} аналогично имеем:

$$F(\bar{h}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \bar{h}^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\xi_2^k e_1 + \xi_1^k e_2) = F(\xi_2) e_1 + F(\xi_1) e_2. \quad (102)$$

Далее для аналитической функции $F(h, \bar{h})$ в силу (101)-(102) приходим к цепочке равенств:

$$F(h, \bar{h}) = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl} h^k \bar{h}^l = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl} (\xi_1^k e_1 + \xi_2^k e_2) (\xi_2^l e_1 + \xi_1^l e_2) = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl} (\xi_1^k \xi_2^l e_1 + \xi_2^k \xi_1^l e_2) \quad (103)$$

$$F(\xi_1, \xi_2) e_1 + F(\xi_2, \xi_1) e_2,$$

откуда и следует (100). Для базисных операторов дифференцирования нетрудно получить следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial h} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}; \quad \frac{\partial}{\partial \bar{h}} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1}. \quad (104)$$

Применяя оператор $\partial/\partial \bar{h}$ к формуле (103), приходим к условию h -голоморфности в изотропных координатах:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_2}(\xi_1, \xi_2) = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_1}(\xi_2, \xi_1) = 0, \quad (105)$$

что по существу приводит к формуле (101).

Рассмотрим в качестве примера точечный источник h -поля в изотропной системе координат. Его потенциал (75) в изотропной системе координат принимает вид:

$$F(h) = -q \ln h = -q(\ln \xi_1 e_1 + \ln \xi_2 e_2). \quad (106)$$

Напряженность h -поля

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \overline{F(h)}}{\partial \bar{h}} = q \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} e_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_1} e_2 \right) (\ln \xi_2 e_1 + \ln \xi_1 e_2) q \left(\frac{1}{\xi_2} e_1 + \frac{1}{\xi_1} e_2 \right). \quad (107)$$

Уравнения для его линий напряженности можно получить составляя уравнение характеристик:

$$\xi_2 d\xi_1 = \xi_1 d\xi_2, \quad (108)$$

которое имеет интеграл $\xi_1/\xi_2 = C = \text{const}$ — семейство прямых, проходящих через начало. Для точечного вихря напряженность

$$\mathcal{B} = j\mathcal{E} = (e_1 - e_2)\mathcal{E} = q \left(\frac{1}{\xi_2} e_1 - \frac{1}{\xi_1} e_2 \right) \quad (109)$$

и уравнение характеристик

$$\xi_2 d\xi_1 = -\xi_1 d\xi_2 \quad (110)$$

имеет интеграл $\xi_1 \xi_2 = C = \text{const}$ — семейство равнобочных гипербол.

5 Конформные h -поля

Рассмотрим некоторое обобщение голоморфных отображений двойной плоскости, которые в изотропном базисе задаются соотношением:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1(\xi_1) e_1 + \mathcal{F}_2(\xi_2) e_2, \quad (111)$$

где $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ — произвольные гладкие функции вещественной переменной или в компонентах:

$$\xi_1' = \mathcal{F}_1(\xi_1); \quad \xi_2' = \mathcal{F}_2(\xi_2). \quad (112)$$

В силу соотношений (101)-(103) такое отображение не может рассматриваться как аналитическая функция одной из переменных h, \bar{h} или даже их пары. Характерное свойство отображений вида (111) становится явным, если учесть, что метрика (66), индуцируемая алгеброй \mathcal{H} , в изотропных координатах принимает вид:

$$\Theta = \text{Re}(dh \otimes d\bar{h}) = d\xi_1 \otimes d\xi_2 + d\xi_2 \otimes d\xi_1. \quad (113)$$

Очевидно, что при преобразовании (112) метрика (113) преобразуется по закону:

$$\Theta' = \mathcal{F}'_1 \mathcal{F}'_2 \Theta, \quad (114)$$

т.е. конформно. Другими словами, преобразования вида (111) описывают общий класс конформных преобразований псевдоевклидовой метрики, оставляющих эту метрику плоской. Будем называть такой класс преобразований *конформно-изотропными*. Голоморфные (или антиголоморфные) функции являются лишь подмножеством этого класса.

Наличие класса конформно-изотропных преобразований является специфическим следствием алгебры двойных чисел, а точнее — наличием в ней делителей нуля и как следствие структуры конуса и изотропных координат. По этой причине аналог конформно-изотропных преобразований на плоскости комплексной переменной отсутствует. Другим неаналитическим обобщением класса голоморфных преобразований двойной плоскости были бы преобразования вида:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\xi_1, \xi_2)e_1 + \mathcal{F}(\xi_2, \xi_1)e_2, \quad (115)$$

где \mathcal{F} — гладкая функция пары вещественных переменных, причем $\mathcal{F}(\xi_1, \xi_2) \neq \mathcal{F}(\xi_2, \xi_1)$. Ввиду тождества (103) такую функцию нельзя рассматривать как функцию пары переменных $\mathcal{F}(h, \bar{h})$, представимую в виде сходящегося ряда Тейлора относительно переменных h и \bar{h} .

6 Обобщение на многомерный случай

Для физических приложений необходимо обобщение концепции h -поля на случай коммутативно-ассоциативных алгебр высших размерностей. Проиллюстрируем идею такого обобщения на примере P_n — алгебр поличисел. Наличие изотропного базиса стирает некоторые принципиальные различия между алгебрами P_n с различными n , поэтому для удобства мы рассмотрим сводку сведений по алгебре и геометрии поличисел P_3 . Большая часть из этих свойств тривиальным образом рапространяется на общие поличисла P_n .

6.1 Алгебра и операции

Ассоциативно-коммутативная алгебра P_3 над полем R (алгебра 3-чисел) обобщает хорошо известную алгебру двойных чисел на плоскости. Ее общий элемент имеет вид

$$A = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3, \quad (116)$$

где $\{e_i\}$ — специальный набор образующих алгебры, удовлетворяющих соотношениям:

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_i \quad (\text{нет суммирования!}) \quad (117)$$

Из соотношений (117) следуют простые правила умножения и деления поличисел:

$$AB = A_1B_1e_1 + A_2B_2e_2 + A_3B_3e_3; \quad \frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1}e_1 + \frac{A_2}{B_2}e_2 + \frac{A_3}{B_3}e_3,$$

при этом деление определено только на т. н. невырожденные элементы, у которых все $B_i \neq 0$. Роль единицы алгебры P_3 играет элемент $I = e_1 + e_2 + e_3$.

6.2 Комплексные сопряжения и (псевдо)норма

Определим в P_3 две операции комплексного сопряжения:

$$A^\dagger = (A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3)^\dagger \equiv A_3 e_1 + A_1 e_2 + A_2 e_3,$$

$$A^\ddagger = (A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3)^\ddagger \equiv A_2 e_1 + A_3 e_2 + A_1 e_3$$

и рассмотрим 3-число $AA^\dagger A^\ddagger$. Простое вычисление показывает, что оно вещественно и равно $A_1 A_2 A_3 I$. Таким образом по аналогии с модулем комплексного числа в P_3 можно ввести (псевдо)норму по формуле:

$$\|A\| \equiv (AA^\dagger A^\ddagger)^{1/3} = (A_1 A_2 A_3)^{1/3}. \quad (118)$$

Для невырожденных 3-чисел эта норма имеет практически все свойства обычной нормы, в частности, для таких 3-чисел имеет место равенство:

$$\|AB\| = \|A\| \cdot \|B\|. \quad (119)$$

6.3 Делители нуля и группа внутренних автоморфизмов

В отличие от поля комплексных чисел и тела кватернионов, алгебра P_3 имеет делители нуля, т. е. существуют не равные нулю элементы N , удовлетворяющие условию: $\|NA\| = 0$ для всякого $A \in P_3$. Такие элементы называются *вырожденными* и характеризуются тем, что в их представлении (116) имеются нулевые коэффициенты. Отметим, что множество вырожденных элементов замкнуто относительно умножения в P_3 . Мы будем обозначать это подмножество P_3° .

С операцией умножения на невырожденные элементы в P_3 связана группа внутренних автоморфизмов $\text{Aut}(P_3)$, которая изоморфна подгруппе (по умножению) невырожденных элементов:

$$\text{Aut}(P_3) \sim P_3 \setminus P_3^\circ, \quad \text{Aut}(P_3) \ni \sigma : A \rightarrow \sigma(A) \equiv \sigma A. \quad (120)$$

В этой группе выделяется подгруппа $D_2 \subset P_3$ группы изометрий $\text{Iso}(P_3)$, элементы которой сохраняют норму (118). Ввиду определения (120) и свойства (119), элементы этой подгруппы выделяются условием: $\|\sigma\| = 1$ или в компонентах: $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 1$. Группа D_2 — 2-параметрическая абелева, а группа $\text{Iso}(P_3)$ — 5-параметрическая неабелева. Кроме подгруппы D_2 она включает в себя подгруппу трансляций, изоморфную R^3 .

6.4 Ряды и экспоненциальное представление

В пространстве P_3 (и любом P_n) можно определять степени элементов любого порядка и аналитические функции поличисловой переменной. Например, функцию e^A можно определить стандартным рядом для экспоненты:

$$e^A \equiv I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots = e^{A_1} e_1 + e^{A_2} e_2 + e^{A_3} e_3. \quad (121)$$

Определим теперь экспоненциальное представление поличисла по формуле:

$$A = \|A\| e^B, \quad (122)$$

где B — некоторое 3-число, инвариантное относительно действия группы D_2 , сохраняющей норму $\|A\|$. Компоненты этого числа в некотором специальном базисе называются *экспоненциальными углами*. Независимых экспоненциальных углов будет два, поскольку, как мы увидим ниже, пространство чисел B для числа A с фиксированной нормой $\|A\|$ будет 2-мерным. Для выяснения явного вида экспоненциальных углов, выполним следующую цепочку тождественных преобразований:

$$A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 = (A_1 A_2 A_3)^{1/3} \times \left(\frac{A_1^{2/3}}{(A_2 A_3)^{1/3}} e_1 + \frac{A_2^{2/3}}{(A_1 A_3)^{1/3}} e_2 + \frac{A_3^{2/3}}{(A_1 A_2)^{1/3}} e_3 \right)$$

$$|A|(e^{\ln(A_1^{2/3}/(A_2A_3)^{1/3})}e_1 + e^{\ln(A_2^{2/3}/(A_1A_3)^{1/3})}e_2 + e^{\ln(A_3^{2/3}/(A_1A_2)^{1/3})}e_3)$$

$$|A|(e^{\chi_1}e_1 + e^{\chi_2}e_2 + e^{\chi_3}e_3) = |A|e^{\chi_1e_1 + \chi_2e_2 + \chi_3e_3}, \quad (123)$$

где величины

$$\chi_1 \equiv \ln \left[\frac{A_1^{2/3}}{(A_2A_3)^{1/3}} \right]; \quad \chi_2 \equiv \ln \left[\frac{A_2^{2/3}}{(A_1A_3)^{1/3}} \right]; \quad \chi_3 \equiv \ln \left[\frac{A_3^{2/3}}{(A_1A_2)^{1/3}} \right] \quad (124)$$

и есть искомые экспоненциальные углы. Ввиду соотношения:

$$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 = 0, \quad (125)$$

которое в силу формул (124) выполняются тождественно, независимых углов будет только два и представление (123) можно переписать в следующих эквивалентных формах:

$$A = |A|e^{-\chi_2E_3 + \chi_3E_2} = |A|e^{\chi_1E_3 - \chi_3E_1} = |A|e^{-\chi_1E_2 + \chi_2E_1},$$

где $E_1 = e_2 - e_3$, $E_2 = e_3 - e_1$, $E_3 = e_1 - e_2$ — комбинации базисных векторов, являющиеся генераторами группы D_2 .

Операции комплексного сопряжения действуют на экспоненциальные углы следующим образом:

$$\dagger: \quad \chi_1 \rightarrow \chi_3; \quad \chi_2 \rightarrow \chi_1; \quad \chi_3 \rightarrow \chi_2; \quad \ddagger: \quad \chi_1 \rightarrow \chi_2; \quad \chi_2 \rightarrow \chi_3; \quad \chi_3 \rightarrow \chi_1$$

и обеспечивают справедливость формулы (118) в экспоненциальном представлении.

6.5 Обобщения экспоненциальных углов

В предыдущем подразделе формулы (124) подразумевают, что все $A_i > 0$. Другими словами, формула (122) справедлива только для "положительного октанта". Нетрудно определить экспоненциальное представление и в других октантах, немного обобщив (122). Именно, определим экспоненциальное представление для поличисла из внутренности произвольного октанта по формуле

$$A = I_{(j)} \|A'\| e^{B'}, \quad (126)$$

где $I_{(j)}$ ($j = 1, \dots, 8$) — единичный вектор в направлении пространственной биссектриссы (в евклидовом смысле) соответствующего координатного октанта, число $A' = A/I_{(j)}$ лежит в положительном октанте, а B' получается из B по формулам предыдущего подраздела с заменой $A \rightarrow A/I_{(j)}$. Такое определение снимает искусственное ограничение на область определения экспоненциальных углов и более адекватно передает их смысл как величин, отсчитываемых от соответствующих направлений $I_{(j)}$. Отметим, что в наших обозначениях мы принимаем $I_1 \equiv I$. В дальнейшем, если не оговорено особо, все рассмотрения будут проводиться в положительном октанте.

Обобщение формул экспоненциального представления на поличисла P_n вполне элементарно. Для него имеет место формула (126), в которой индекс j может пробегать уже 2^n значений по числу разделенных координатными плоскостями областей (многомерных октантов). При этом в положительном октанте

$$\|A\| = \left[\prod_{i=1}^n A_i \right]^{1/n}; \quad \chi_k = \ln \left[\frac{A_k}{\|A\|} \right]$$

или имеют место аналогичные формулы для соответствующих штрихованных величин для любого из 2^n многомерных октантов.

6.6 Скалярное 3-произведение (полипроизведение)

С помощью операций \dagger и \ddagger можно определить вещественное число (A, B, C) , называемое *скалярным 3-произведением элементов A, B, C* , которое строится на любых трех векторах в P_3 по правилу:

$${}^{(3)}G(A, B, C) \equiv (A, B, C) \equiv \sum_{X, Y, Z \in S(ABC)} XY^\dagger Z^\ddagger = \text{perm} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}, \quad (127)$$

где $S(ABC)$ — множество перестановок элементов A, B, C , а $\text{perm}(M)$ — перманент матрицы M , который повторяет структуру ее детерминанта, но все 6 слагаемых в нем берутся со знаком "плюс".

Для поличисел P_n имеет место аналогичное определение n -произведения:

$${}^{(n)}G(X_1, \dots, X_n) \equiv \text{perm}(X_1, \dots, X_n),$$

где X_i — набор из n штук n -чисел.

6.7 Пространства Бервальда-Моора

Если теперь абстрагироваться от алгебры и с самого начала рассматривать векторное пространство с 3-скалярным произведением, которое в специальном базисе имеет вид (127), мы приходим к *финслеровому 3-мерному пространству Бервальда-Моора* (БМ), которое будем обозначать \mathcal{H}_3 . В отличие от P_3 , в нем не предполагается существования какой-либо мультипликативной алгебры. Можно сказать, что отношение между P_3 и \mathcal{H}_3 аналогично отношению между комплексной плоскостью C и евклидовой плоскостью R^2 .

6.8 Конструкция соприкосновения

Векторы \mathcal{H}_3 , имеющие нулевую норму, называются в геометрии БМ *изотропными*. Как видно из определения (118), всякий изотропный вектор лежит в какой-либо из 3-х координатных плоскостей изотропной системы координат. В частности, векторы $e_1 = \{1, 0, 0\}$, $e_2 = \{0, 1, 0\}$, $e_3 = \{0, 0, 1\}$ изотропного базиса этой системы являются изотропными. Таким образом, все координатное пространство \mathcal{H}_3 разбивается координатными плоскостями на 8 октантов, внутри которых нормы векторов отличны от нуля и имеют определенные знаки (рис. 25). На координатных плоскостях метрика (127) становится геометрически вырожденной, поскольку все векторы на них имеют нулевую норму. Для правильного описания геометрических свойств координатных плоскостей (это — 2-мерные псевдоевклидовы пространства) можно использовать конструкцию соприкосновения [5]. Ее суть заключается в переходе от финслеровой метрики ${}^{(3)}G$ вида (127) к соприкасающейся с ней вдоль вектора e_j квадратичной метрике:

$${}^{(2)}G_{(j)} \equiv {}^{(3)}G(e_j, \ , \),$$

действующей в гиперплоскости направлений $x^j = \text{const}$. Например, для случая $j = 3$ будем иметь:

$${}^{(2)}G_{(3)} \equiv {}^{(3)}G(e_3, \ , \) = dX_1 \otimes dX_2 + dX_2 \otimes dX_1$$

— метрику Бервальда-Моора на плоскостях $X_3 = \text{const}$, которая является 2-мерной метрикой Минковского.

6.9 Индикатрисса

Метрические свойства пространства \mathcal{H}_3 наглядно иллюстрируются видом единичной сферы $\mathcal{S}_{\text{БМ}}^2$ (индикатриссы \mathcal{H}_3), которая определяется уравнением:

$$\| \|X\| \| = |(X_1 X_2 X_3)^{1/3}| = 1, \quad (128)$$

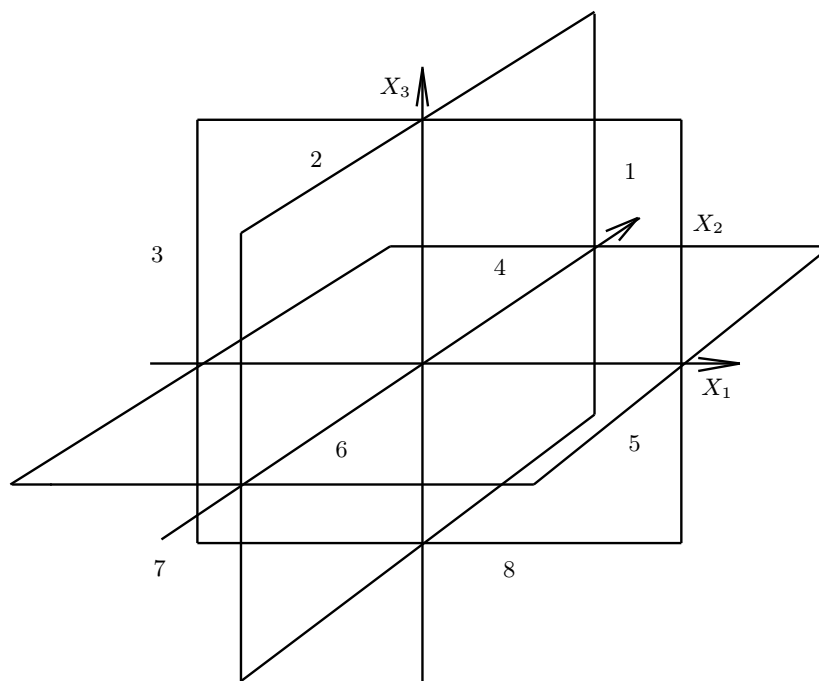


Рис. 25: Изотропные координатные плоскости и октанты в \mathcal{H}_3 .

где $X = \{X_1, X_2, X_3\}$ — радиус-вектор в \mathcal{H}_3 . Поверхность $\mathcal{S}_{\text{ВМ}}^2$ — 8-связная и некомпактная. Ее компоненты связности расположены симметрично во всех 8 октантах и обладают дискретной симметрией относительно любых перестановок координат. Сечения этой поверхности плоскостями $X_i = \text{const}$ — это семейство гипербол (понимаемых в евклидовом смысле). Наглядно одна из компонент индикатриссы в евклидовом представлении изображена на рис. 26.

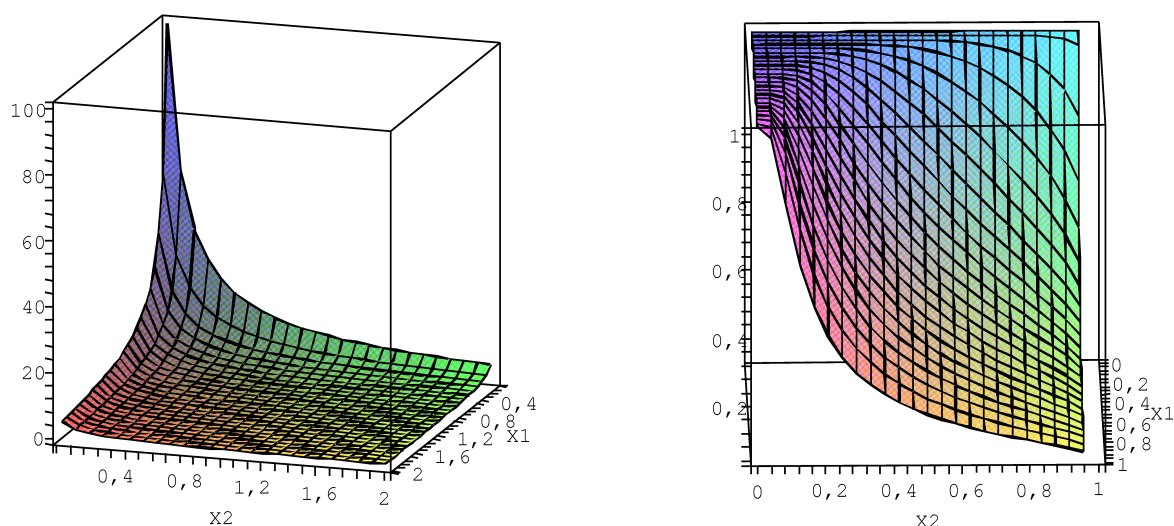


Рис. 26: Компонента индикатриссы $\mathcal{S}_{\text{ВМ}}^2$, лежащая в первом октанте. На правом рисунке эта компонента компактифицирована в единичный куб с помощью отображения $X_i \mapsto \tanh(X_i \ln 3/2)$. Коэффициент в аргументе гиперболического тангенса подобран так, чтобы точка $\{1, 1, 1\}$ переходила в точку $\{1/2, 1/2, 1/2\}$ единичного куба.

6.10 Геометрическая интерпретация группы $\text{Iso}(\mathcal{H}_3)$.

Как, собственно, уже отмечалось выше группа изометрий $\text{Iso}(\mathcal{H}_3)$ метрики (127) состоит из 3-параметрической абелевой подгруппы трансляций с элементами $T_A : X \rightarrow X + A$ и 2-параметрической абелевой подгруппой унимодулярно-согласованных дилатаций D_2 с элементами $D_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} : \{X_1, X_2, X_3\} \rightarrow \{\sigma_1 X_1, \sigma_2 X_2, \sigma_3 X_3\}$ и соотношением

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 1. \quad (129)$$

С алгебраической точки зрения на \mathcal{H}_3 группа D_2 есть ни что иное, как описанная выше подгруппа из $\text{Iso}(P_3)$ умножений на элементы с единичной нормой. Отметим еще раз, что группа $\text{Iso}(\mathcal{H}_3)$ — неабелева и имеет структуру полупрямого произведения: $\text{Iso}(\mathcal{H}_3) = \mathcal{R}^3 \times D_2$. Группа D_2 играет роль вращений в пространстве \mathcal{H}_3 и обобщает гиперболические вращения псевдоевклидовой плоскости. В частности, действие группы D_2 на индикатриссе транзитивно: $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2 \xrightarrow{D_2} \mathcal{S}_{\text{BM}}^2$.

Для высших пространств БМ \mathcal{H}_n аналогично имеем $\text{Iso}(\mathcal{H}_n) = R^n \times D_{n-1}$.

6.11 h -аналитические поля в пространстве \mathcal{H}_3 .

Как и в рассмотренных выше двумерных случаях, общее гладкое отображение $\mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3$ можно представить в виде $F = F(h, h^\dagger, h^\ddagger)$. Назовем отображение F :

1. h -голоморфным, если

$$\frac{\partial F}{\partial h^\dagger} = \frac{\partial F}{\partial h^\ddagger} = 0; \quad (130)$$

2. h^\dagger -голоморфным, если

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\partial F}{\partial h^\ddagger} = 0; \quad (131)$$

3. h^\ddagger -голоморфным, если

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\partial F}{\partial h^\dagger} = 0; \quad (132)$$

4. hh^\dagger -голоморфным, если

$$\frac{\partial F}{\partial h^\ddagger} = 0; \quad (133)$$

5. hh^\ddagger -голоморфным, если

$$\frac{\partial F}{\partial h^\dagger} = 0; \quad (134)$$

6. $h^\dagger h^\ddagger$ -голоморфным, если

$$\frac{\partial F}{\partial h} = 0. \quad (135)$$

Как это видно из данных определений, с увеличением размерности коммутативно-ассоциативной алгебры число типов голоморфности возрастает. Очевидно, что первое определение является аналогом комплексной голоморфности или h -голоморфности на двойной плоскости. Второе и третье определения являются аналогами комплексной или двойной антиголоморфности, а последние три определения не имеют аналогов в двух измерениях и представляют собой "ослабленные" варианты голоморфности. В настоящей статье мы сконцентрируемся на h -голоморфности, ее свойствах и следствиях.

Будем стартовать с изотропного базиса в \mathcal{H}_3 , в котором h -голоморфная функция имеет следующее представление:

$$F(h) = F(\xi_1)e_1 + F(\xi_2)e_2 + F(\xi_3)e_3. \quad (136)$$

Операторы дифференцирования по переменным h, h^\dagger, h^\ddagger имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial h} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3}; \quad \frac{\partial}{\partial h^\dagger} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + e_3 \frac{\partial}{\partial \xi_2}; \quad \frac{\partial}{\partial h^\ddagger} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + e_3 \frac{\partial}{\partial \xi_1}. \quad (137)$$

В силу (137) непосредственной проверкой в компонентах легко убедиться в справедливости равенств для функции F в виде (136):

$$\frac{\partial F}{\partial h^\dagger} = \frac{\partial F}{\partial h^\ddagger} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} e_1 + \frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} e_2 + \frac{\partial F_3}{\partial \xi_3} e_3, \quad (138)$$

где здесь и далее $F_i \equiv F(\xi_i)$ — одна и та же функция от разных изотропных переменных. Цель дальнейшего рассмотрения — записать условия голоморфности в каком-нибудь неизотропном базисе, т.е. вывести многомерный аналог стандартных условий Коши-Римана. Среди всех возможных неизотропных базисов алгебры \mathcal{H}_3 своей симметрией выделяется базис, состоящий из трех гиперболических мнимых единиц $\{j_1, j_2, j_3\}$, связанный с изотропным базисом соотношениями:

$$j_1 = e_1 - e_2 - e_3; \quad j_2 = -e_1 + e_2 - e_3; \quad j_3 = -e_1 - e_2 + e_3, \quad (139)$$

из которых следуют правила умножения этих единиц:

$$j_i^2 = -(j_1 + j_2 + j_3); \quad j_i \cdot j_k = j_l \quad (j \neq k \neq l). \quad (140)$$

Записывая число h в виде разложения $h = x_1 j_1 + x_2 j_2 + x_3 j_3$, выражая j -базис через e -базис по формулам (139), собирая коэффициенты при e_i и приравнивая их ξ_i , получаем следующую связь координат 3-числа в e -базисе и j -базисе:

$$\xi_1 = x_1 - x_2 - x_3; \quad \xi_2 = -x_1 + x_2 - x_3; \quad \xi_3 = -x_1 - x_2 + x_3. \quad (141)$$

В дальнейшем нам потребуются также формулы обратных преобразований для базисов и координат:

$$e_1 = -\frac{j_2 + j_3}{2}; \quad e_2 = -\frac{j_1 + j_3}{2}; \quad e_3 = -\frac{j_1 + j_2}{2}; \quad (142)$$

$$x_1 = -\frac{\xi_2 + \xi_3}{2}; \quad x_2 = -\frac{\xi_1 + \xi_3}{2}; \quad x_3 = -\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}. \quad (143)$$

Легко проверить, что действие комплексных сопряжений сводится к правилам:

$$j_1^\dagger = j_2; \quad j_2^\dagger = j_3; \quad j_3^\dagger = j_1; \quad j_1^\ddagger = j_3; \quad j_2^\ddagger = j_1; \quad j_3^\ddagger = j_2. \quad (144)$$

В качестве следующего шага запишем операторы дифференцирования по 3-числу в j -базисе. Для этой цели в формулах (137) сделаем подстановки e_i из (142), и операторов дифференцирования $\partial/\partial \xi_i$ по формулам:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_l} \right), \quad (145)$$

где i, k, l — принимают все не равные друг другу значения. После таких подстановок и элементарных преобразований получаем искомые формулы:

$$\frac{\partial}{\partial h} = \frac{1}{4} [j_1(\bar{\partial} + \partial_1) + j_2(\bar{\partial} + \partial_2) + j_3(\bar{\partial} + \partial_3)], \quad (146)$$

где $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$, $\bar{\partial} \equiv \sum_i \partial_i$ и еще пара формул, получающаяся из (146) действием операций \dagger и \ddagger и использованием формул (144):

$$\frac{\partial}{\partial h^\dagger} = \frac{1}{4} [j_2(\bar{\partial} + \partial_1) + j_3(\bar{\partial} + \partial_2) + j_1(\bar{\partial} + \partial_3)], \quad (147)$$

$$\frac{\partial}{\partial h^\ddagger} = \frac{1}{4} [j_3(\bar{\partial} + \partial_1) + j_1(\bar{\partial} + \partial_2) + j_2(\bar{\partial} + \partial_3)]. \quad (148)$$

Рассмотрим теперь некоторую h -голоморфную функцию, которая в j -базисе имеет представление

$$F(h) = U_1 j_1 + U_2 j_2 + U_3 j_3. \quad (149)$$

Действуя на нее операторами (147) и (148), расписывая результат в компонентах с учетом правил (140), приходим к следующей паре систем уравнений в частных производных, которым должна удовлетворять всякая h -голоморфная функция:

$$\begin{pmatrix} -(\bar{\partial} + \partial_3) & \partial_{2-1} & \partial_{1-2} \\ \partial_{2-3} & -(\bar{\partial} + \partial_1) & \partial_{3-2} \\ \partial_{1-3} & \partial_{3-1} & -(\bar{\partial} + \partial_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = 0; \quad (150)$$

$$\begin{pmatrix} -(\bar{\partial} + \partial_2) & \partial_{1-3} & \partial_{3-1} \\ \partial_{1-2} & -(\bar{\partial} + \partial_3) & \partial_{2-1} \\ \partial_{3-2} & \partial_{2-3} & -(\bar{\partial} + \partial_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (151)$$

Для сокращения записи система приведена к матричной форме, в которой умножение "операторной матрицы" на столбец компонент производится по обычным правилам матричного умножения. При этом $\partial_{i-j} \equiv \partial_i - \partial_j$. Ввиду инвариантности свойства h -голоморфности относительно выбора базиса алгебры, можно утверждать, что общее решение системы (150)-(151) записывается с помощью представления U_i через F_i , выраженные через x -координаты:

$$U_1 = F(x_2 - x_1 - x_3) + F(x_3 - x_1 - x_2); \quad U_2 = F(x_1 - x_2 - x_3) + F(x_3 - x_1 - x_2);$$

$$U_3 = F(x_1 - x_2 - x_3) + F(x_2 - x_1 - x_3). \quad (152)$$

Этот факт можно проверить непосредственной подстановкой (152) в (150)-(151). Комбинации координат в аргументах функции F являются высшими аналогами запаздывающего и опережающего аргументов на двойной плоскости.

Оператор третьего порядка

$$\Delta^{(3)} \equiv \frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial}{\partial h^\dagger} \frac{\partial}{\partial h^\ddagger} = (e_1 + e_2 + e_3) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \quad (153)$$

пропорционален алгебраической единице, поэтому

$$\Delta^{(3)} F = (\Delta^{(3)} U_1) j_1 + (\Delta^{(3)} U_2) j_2 + (\Delta^{(3)} U_3) j_3 \quad (154)$$

для всякой гладкой функции $F(h, h^\dagger, h^\ddagger)$. Если функция F — h -голоморфная, то ввиду того, что оператор $\Delta^{(3)}$ содержит дифференцирования по h^\dagger и h^\ddagger , имеет место соотношение $\Delta^{(3)} F \equiv 0$, эквивалентное трем его компонентам:

$$\Delta^{(3)} U_i \equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (155)$$

Соотношения (155) является 3-мерным аналогом условий гармоничности или гиперболической гармоничности, которым тождественно удовлетворяют голоморфные функции комплексной или соответственно двойной переменной. В x -координатах оператор $\Delta^{(3)}$ имеет следующий вид:

$$\Delta^{(3)} = -\frac{1}{8}(\partial_1 + \partial_2)(\partial_2 + \partial_3)(\partial_3 + \partial_1) = -\frac{1}{8}(2\partial_{123} + \partial_{112} + \partial_{221} + \partial_{113} + \partial_{331} + \partial_{223} + \partial_{332}), \quad (156)$$

где $\partial_{ijk} \equiv \partial_i \partial_j \partial_k$.

7 Физическая интерпретация h -поля

Физическая интерпретация результатов, касающихся плоскости двойной переменной, будет существенно зависеть от точки зрения на статус пространства \mathcal{H}_2 . Таких точки зрения можно отметить по меньшей мере три.

1. Плоскость \mathcal{H}_2 является 2-мерным сечением 4-мерного пространства-времени Минковского. При этом плоские (т.е. двумеризуемые) задачи теории поля в пространстве Минковского можно переложить на язык h -голоморфных функций, подобно тому как плоские эллиптические задачи 3-мерного евклидова пространства допускают эффективную формулировку в терминах комплексной переменной.

2. Плоскость \mathcal{H}_2 является "игрушечным" 2-мерным пространством-временем, на котором законы геометрии и физики можно сформулировать в терминах алгебры двойных чисел.
3. Плоскость \mathcal{H}_2 является двумерной проекцией иерархии пространств \mathcal{H}_n . При этом многомерные обобщения двойной плоскости вовлекают в круг рассмотрения метрики с неквадратичными интервалами и уравнения поля высших порядков, а соответствующие поля имеют статус фундаментальных.

Обсудим каждую из точек зрения по отдельности.

7.1 Двумеризуемые задачи теории поля в 4-мерном пространстве-времени Минковского

По аналогии с приложениями конформных преобразований на стандартной (эллиптической) комплексной плоскости, h -аналитические функции могут использоваться для решения задач теории поля, связанных с 2-мерным волновым уравнением: $\square_2 \varphi = 0$. Непопулярность гиперболических конформных преобразований связана, в первую очередь, с нетрадиционностью постановки начально-краевых задач, которые решаются методом гиперболических конформных преобразований. Действительно, применение конформных преобразований на плоскости комплексной переменной для решения задач эллиптического типа, связанных с уравнением Лапласа, опирается на отмечавшееся выше обстоятельство: аналитическая функция $w = f(z)$, вещественная часть которой представляет решение некоторой краевой задачи, отображает границу области вне источников поля на прямую $\operatorname{Re} w = \operatorname{const}$. Это требование отражает условие постоянства потенциала на границе области, в которой решается уравнение Лапласа и обеспечивает единственность решения с точностью до произвольного выбора значения потенциала на границе.

В начально-краевых задачах гиперболического типа используется другая постановка задачи: обычно рассматривается пространственно-временная область в виде полуограниченного цилиндра⁹ $D^3 \times R_+$ (или топологически эквивалентная ей) и задаются начальные условия на начальной поверхности $D^3 \times \{0\}$ (начальные значения для поля и его производных по времени) и граничные условия на боковой поверхности $\partial D^3 \times R_+$ (значения поля и его пространственных производных). Если задача поставлена корректно, то эти начально-краевые данные определяют единственное решение с хорошими свойствами во все моменты времени $t > 0$. В 2-мерном пространстве времени граница области представляет собой времениподобный прямоугольник $I \times R_+$ или топологически эквивалентную ему фигуру

Использование конформных преобразований, осуществляемых h -аналитическими функциями, предполагает перенос постановки эллиптической задачи на плоскости на гиперболические задачи на плоскости. Другими словами, h -аналитическая функция $w = f(h)$ представляет решение некоторой начально-краевой задачи гиперболического типа, а именно той, для которой эта функция переводит 1-мерную границу области вне источников в линию $\operatorname{Re} w = \operatorname{const}$. Очевидно, такая постановка задачи отличается от стандартной, поскольку начально-краевые условия заменяются на задание формы поверхности (линии) постоянного потенциала. Эта поверхность имеет пространственно-временной характер. В принципиальном отношении она может быть получена с помощью измерений волнового поля φ в разных точках пространства в разные моменты времени с помощью надлежащего (достаточно большого) числа приборов. Точки-события пространства-времени, для которых показания приборов дают $\varphi = \operatorname{const}$ и образуют искомую поверхность. Согласно проведенным выше рассмотрениям, форма этой поверхности однозначно определяет решение волнового уравнения. Однако такая постановка задачи обычно не используется на практике, поскольку данные "размазаны" в пространстве и времени.

В качестве примера рассмотрим задачу об определении волнового поля, которое на гиперболической окружности $t^2 - x^2 = R^2$ принимает постоянное значение φ_0 . В соответствии с

⁹Здесь D^3 — 3-мерный шар, $R_+ = [0, \infty)$.

результатами раздела 3.6, подходящее решение имеет вид: $\varphi = \varphi_0 + \ln[(t^2 - x^2)/R^2] = \text{Re}(\ln h + \varphi_0)$. Его 3-мерный график и последовательные временные сечения представлены на рисунке 27.

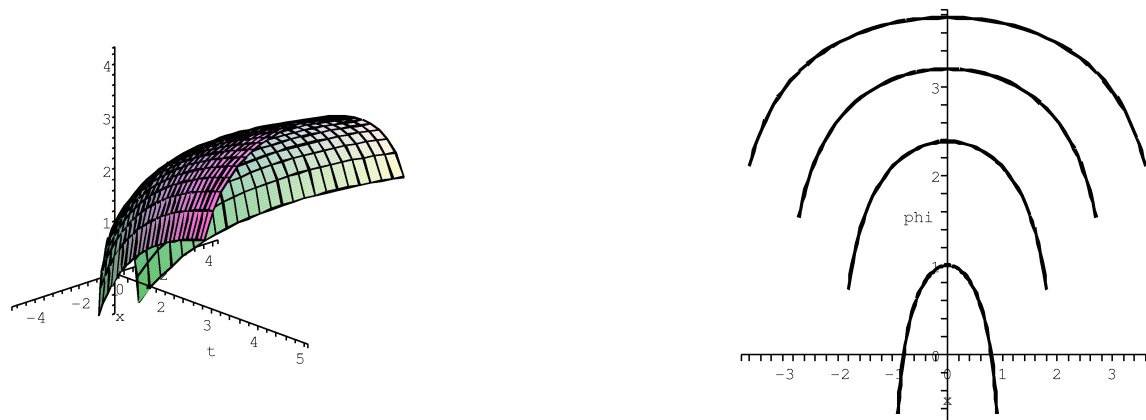


Рис. 27: Волновое решение, постоянное на гиперболической окружности ($R = 1, \varphi_0 = 1$). На правом рисунке представлены последовательные временные сечения поверхности, изображенной на левом рисунке $t = 1, 2, 3, 4$.

7.2 2-мерный мир Минковского

В настоящем разделе мы покажем, что алгебра двойных чисел является естественной и достаточной для изложения фактов 2-мерной СТО и 2-мерной электродинамики. Несмотря на некоторую кажущуюся искусственность такого рассмотрения, оно во многих отношениях полезно и поучительно. В частности, оно оттеняет алгебраический аспект псевдоевклидовой геометрии и геометрические аспекты алгебры двойных чисел и представляет собой естественную основу для дальнейших обобщений.

7.2.1 2-мерное пространство-время и векторные операции в нем

Будем отождествлять элементы \mathcal{H}_2 с точками-событиями 2-мерного пространства-времени Минковского \mathcal{M}_2 . Таким образом, с каждым элементом $h \in \mathcal{H}_2$ мы ассоциируем 2-мерный радиус-вектор $h = t + jx$. Элементы \mathcal{H}_2 как элементы алгебры образуют 2-мерное вещественное линейное пространство. Рассмотрим пару элементов $h_1 = t_1 + jx_1$ и $h_2 = t_2 + jx_2$ и комплексно-значную полуторалинейную форму на них:

$$h_1 \bar{h}_2 = t_1 t_2 - x_1 x_2 + j(t_2 x_1 - t_1 x_2). \quad (157)$$

Очевидно, что такая форма, с одной стороны, полностью определяется средствами алгебры \mathcal{H}_2 , с другой — определяет вещественные симметричное $h_1 \star h_2$ и антисимметричное (косое) $h_1 \times h_2$ скалярные произведения по формулам:

$$h_1 \star h_2 \equiv \text{Re}(h_1 \bar{h}_2); \quad h_1 \times h_2 \equiv -\text{Im}(h_1 \bar{h}_2). \quad (158)$$

Симметричное произведение¹⁰ является 2-мерным вариантом псевдоевклидовой метрики Минковского, а антисимметричное — 2-мерным вариантом векторного произведения, которое теперь является (псевдо)скаляром и отвечает за геометрию ориентированных объемов (т. е. площадей) пространства \mathcal{M}_2 .

7.2.2 Алгебра изометрий

Группы изометрий Iso^* и Iso^\times билинейных форм (158) хорошо известны¹¹: первая представляет собой 2-мерную группу Лоренца Lor_2 , вторая — группу унимодулярных преобразований

¹⁰Мы оставляем обычную точку \cdot за операцией умножения в алгебре \mathcal{H}_2 .

¹¹Мы игнорируем трансляции. Их включение приводит к группам Пуанкаре P_2 и аффинно-унимодулярной группе $\text{SAff}(2, \mathbb{R})$

$SL(2, R)$. Рассмотрим произвольный (невырожденный) внутренний автоморфизм алгебры \mathcal{H}_2 , порождаемый умножениями $h \mapsto h' = \alpha \cdot h$, где $\alpha = \alpha_1 + j\alpha_2 \in \mathcal{H}_2$ и запишем его в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}. \quad (159)$$

Далее непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости формул:

$$(\alpha h_1) \star (\alpha h_2) = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) h_1 \star h_2; \quad (\alpha h_1) \times (\alpha h_2) = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) h_1 \times h_2.$$

Отсюда с учетом (159) следует важное равенство:

$$\text{Aut}^{\text{int}}(\mathcal{H}_2) \supset \text{Iso}^* = \text{Iso}^\times \cap \text{Aut}^{\text{int}}(\mathcal{H}_2),$$

где $\text{Aut}^{\text{int}}(\mathcal{H}_2)$ — группа внутренних автоморфизмов алгебры \mathcal{H}_2 , порожденная умножениями на невырожденные элементы. Отметим, что наличие метрики, ассоциированной с косым произведением, позволяет интерпретировать элементы \mathcal{H}_2 как вещественные спиноры.

Матрица преобразования в (159), описывающая внутренние автоморфизмы умножений алгебры \mathcal{H}_2 , обладает свойством симметрии при ее транспонировании как относительно главной, так и относительно побочной диагонали. Назовем такую матрицу *абсолютно симметричной*. Из тривиального равенства $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_3 \in \mathcal{H}_2$, выражающего алгебраическую замкнутость \mathcal{H}_2 , следует, что *абсолютно симметричные матрицы образуют группу относительно матричного умножения*. Эта группа представляет собой прямое произведение $R \times \text{Log}_2$ и, помимо преобразований Лоренца, включает в себя однородные дилатации: $h \mapsto \lambda h$, $\lambda \in R$. В дальнейшем для краткости мы будем обозначать эту группу Sp_2 и называть ее *однородной конформной группой на \mathcal{H}_2* . Очевидно, что инвариантными геометрическими объектами для этой группы будут конуса $\text{Con}(h)$, $h \in \mathcal{H}_2$.

Рассмотрим теперь дискретные преобразования \mathcal{H}_2 : $h = t + jx \mapsto \sigma_i h$ следующих независимых типов:

$$\sigma_t h \equiv -t + jx; \quad \sigma_x h \equiv t - jx; \quad \sigma_I \equiv x + jt. \quad (160)$$

Очевидно, что на алгебраическом языке эти операции записываются следующим образом:

$$\sigma_x h = \bar{h}; \quad \sigma_t h = -\bar{h}; \quad \sigma_I = j \cdot h,$$

откуда видно, что лишь операция σ_I допускает представление (159).

7.2.3 Коалгебра \mathcal{H}_2^*

Рассмотрим алгебру \mathcal{H}_2^* , двойственную к \mathcal{H}_2 , элементами которой служат линейные функционалы (1-формы, ковекторы) над \mathcal{H}_2 . Введем обозначение $\omega(h)$ для значения 1-формы $\omega \in \mathcal{H}_2^*$ на элементе $h \in \mathcal{H}_2$ (это вещественное число). Выбирая базис $\{1_*, j_*\}$ в алгебре \mathcal{H}_2^* дуальным к базису $\{1, j\}$ в \mathcal{H}_2 , будем иметь систему соотношений¹²:

$$1_*(1) = 1; \quad 1_*(j) = 0; \quad j_*(1) = 0; \quad j_*(j) = 1. \quad (161)$$

Тогда значение произвольной 1-формы $\omega = T1_* + Xj_*$ на элементе $h = t + jx$ будет равно:

$$\omega(h) = Tt + Xx. \quad (162)$$

Имея в распоряжении две невырожденные метрики, ассоциированные с операциями \star и \times , можно ввести два отображения сопряжения $\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2^*$ по формулам:

$$h \mapsto h^* \in \mathcal{H}_2^*: \quad h^*(q) \equiv h \star q; \quad \text{и} \quad h \mapsto h^\times \in \mathcal{H}_2^*: \quad h^\times(q) \equiv h \times q. \quad (163)$$

¹²Теперь, строго говоря, следует различать единицу алгебры $1_H \in \mathcal{H}_2$ и вещественную единицу $1 \in R$. В скобках левых частей соотношений (161) стоят именно единицы алгебры \mathcal{H}_2 , а в правых частях стоят вещественные единицы из R . В случаях, когда это не приводит к путанице, мы сохраняем обозначение 1 за обеими единицами.

Будем называть первое сопряжение *векторным*, а второе — *спинорным*. В компонентах с учетом (161) и (163) для произвольного $h = t + jx$ будем иметь:

$$\operatorname{Re}(h^*) = t; \quad \operatorname{Im}(h^*) = -x; \quad \operatorname{Re}(h^\times) = -x; \quad \operatorname{Im}(h^\times) = t. \quad (164)$$

Формулы (164) соответствуют известным правилам "жонглирования индексами" с помощью псевдоевклидовой и спинорной метрик в индексном представлении и устанавливают известные изоморфизмы линейных метризованных пространств с невырожденными метриками.

Коалгебра \mathcal{H}_2^* так же как и \mathcal{H}_2 индуцирует пару операций скалярного произведения: \star и \times соответственно¹³ по правилам:

$$\omega_1 \star \omega_2 \equiv \operatorname{Re}(\omega_1 \bar{\omega}_2); \quad \omega_1 \times \omega_2 \equiv -\operatorname{Im}(\omega_1 \bar{\omega}_2), \quad (165)$$

которые мы будем называть *коскалярным* и *кокосым* или *коспинорным*.

Алгебры \mathcal{H}_2 или \mathcal{H}_2^* взаимно сопряжены, т.е. $(\mathcal{H}_2^*)^* = \mathcal{H}_2$. Это означает, что элементы \mathcal{H}_2 можно интерпретировать как 1-формы по отношению к элементам \mathcal{H}_2^* . Элементарно проверяются следующие тождества:

$$\begin{aligned} h_1^* \star h_2^* &= h_1 \star h_2; & h_1^\times \times h_2^\times &= h_1 \times h_2; & h_1^\times \star h_2^\times &= -h_1 \star h_2; & h_1^* \times h_2^* &= -h_1 \times h_2; \\ h_1^* \star h_2^\times &= -h_1 \times h_2; & h_1^\times \star h_2^\times &= h_1 \star h_2; & h_1^\times \times h_2^* &= -h_1 \star h_2; & h_1^\times \star h_2^* &= h_1 \times h_2. \end{aligned}$$

Символически эти правила записываются короче, если определить *таблицы сопряжений* с помощью пары элементов $\{(\star), (\times)\}$ над парой операций $\{\star, \times\}$:

$$\star : \begin{array}{c|c|c} 2 \setminus 1 & (\star) & (\times) \\ \hline \star & \star & \times \\ \times & -\times & -\star \end{array} \quad \times : \begin{array}{c|c|c} 2 \setminus 1 & (\star) & (\times) \\ \hline \star & -\times & -\star \\ \times & \star & \times \end{array} \quad (166)$$

7.2.4 Системы отсчета на \mathcal{M}_2

С позиций стандартной СТО элементы введенной коалгебры \mathcal{H}_2^* представляют собой различные системы отсчета. Более точно, определим *класс \mathcal{IR} инерциальных систем отсчета на \mathcal{M}_2 как совокупность элементов проективной подкоалгебры \mathcal{PH}_2^** . Ее элементы, в свою очередь, можно интерпретировать как точки на единичной гиперболической окружности $|\omega \bar{\omega}| = 1$ на \mathcal{H}_2^* . При этом эта окружность на \mathcal{H}_2^* имеет 4 несвязные компоненты: на двух из них $\omega \bar{\omega} = +1$, а на двух других $\omega \bar{\omega} = -1$. Будем называть подкласс систем отсчета из первых двух компонент *причинным* (ему соответствуют системы отсчета с досветовыми скоростями) и обозначать его \mathcal{IR}_+ , а класс систем отсчета из вторых двух компонент *апричинным* (ему соответствуют системы отсчета со сверхсветовыми скоростями) и обозначать его \mathcal{IR}_- . Внутри каждого из названных подклассов выделяются еще по две связанные компоненты: в положительных и отрицательных полуплоскостях $\operatorname{Im} \omega \geq 0$ для \mathcal{IR}_+ и $\operatorname{Re} \omega \geq 0$ для \mathcal{IR}_- . Мы будем обозначать их соответственно \mathcal{IR}_+^\uparrow и $\mathcal{IR}_+^\downarrow$ и называть *положительными* и *отрицательными* компонентами. Таким образом, полный класс \mathcal{IR} всех инерциальных систем отсчета допускает следующее разбиение:

$$\mathcal{IR} = \mathcal{IR}_+^\uparrow \cup \mathcal{IR}_+^\downarrow \cup \mathcal{IR}_-^\uparrow \cup \mathcal{IR}_-^\downarrow. \quad (167)$$

Нетрудно убедиться, что компоненты разбиения получаются из класса \mathcal{IR}_+^\uparrow положительных причинных систем отсчета с помощью дискретных операций (160):

$$\mathcal{IR}_+^\downarrow = \sigma_t \mathcal{IR}_+^\uparrow; \quad \mathcal{IR}_-^\uparrow = \sigma_I \mathcal{IR}_+^\uparrow; \quad \mathcal{IR}_-^\downarrow = \sigma_x \sigma_I \mathcal{IR}_+^\uparrow. \quad (168)$$

Следует отметить, что ввиду формального равноправия всех координатных клиньев на плоскости \mathcal{H}_2 или \mathcal{H}_2^* разбиение (168) выглядит в значительной степени условным.

¹³Их следовало бы обозначить \star^* и \times^* , поскольку они определяются между элементами \mathcal{H}_2^* , имеющими природу, отличную от \mathcal{H}_2 . Из контекста в дальнейшем всегда будет ясно, на каких элементах действуют эти операции и мы для избежания усложнения обозначений используем одни и те же символы.

Рассмотрим теперь "нормальную" (т.е. досветовую и ориентированную в будущее) систему отсчета, взятую из компоненты \mathcal{IR}_+^\uparrow . Ей соответствует некоторый элемент $\tau \in \mathcal{H}_2^*$, который в выбранном нами базисе имеет вид: $\tau = T1_* + Xj_*$, причем его компоненты T и X удовлетворяют условиям:

$$T > 0; \quad T^2 - X^2 = 1. \quad (169)$$

Первое условие выражает факт положительной ориентации отсчета времени, второе — факт его универсального (постоянного) "единичного темпа". Формально последнее связано с единичной нормировкой ковектора τ . Условия (169) автоматически удовлетворяются параметризацией:

$$T = \cosh \psi; \quad X = \sinh \psi, \quad (170)$$

где параметр ψ имеет геометрический смысл гиперболического угла в гиперболической полярной системе координат и физический смысл известного параметра быстроты ($\tanh \psi = v$, v — пространственная скорость системы отсчета). В компонентах (в параметризации скорости v) 1-форма τ принимает вид:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}1_* - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}j_* \quad (171)$$

Теперь, для заданной системы отсчета $\tau \in \mathcal{H}_2^*$ и для любого элемента-события $h \in \mathcal{H}_2$ мы можем определить его *временную компоненту* h_T^τ по отношению к системе отсчета τ с помощью простой формулы:

$$h_T^\tau \equiv \tau(h). \quad (172)$$

Для произвольного $h = t + jx$ с помощью формул (162), (170) и (171) определение (172) дает временную часть преобразований Лоренца:

$$h_T^\tau \equiv \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Для вектора $\Delta h = \Delta t + j \cdot 0$, характеризующего временной интервал в системе покоя некоторых часов, получаем формулу релятивистского растяжения промежутков времени:

$$h_T^\tau(\Delta h) = \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Чтобы перейти к определению пространственных проекций событий, необходимо определить единичную 1-форму s из компоненты \mathcal{IR}_-^\uparrow , ортогональную τ , т. е. удовлетворяющую соотношению: $s \star \tau = 0$. С помощью формул (165) и (171) нетрудно найти ее координатный вид:

$$s = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}1_* + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}j_*. \quad (173)$$

Теперь для *пространственной проекции произвольного события* $h \in \mathcal{H}_2$ по отношению к системе отсчета τ с помощью формул (162), (173) мы можем дать следующее определение:

$$h_X^\tau \equiv s(h) = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (174)$$

что дает по существу пространственную часть преобразований Лоренца.

Рассмотрим тождественный линейный оператор $\hat{I} \equiv 1 \otimes 1_* + j \otimes j_*$. Непосредственной проверкой с помощью формул (171) и (173) можно убедиться в справедливости следующего разложения этого оператора:

$$\hat{I} = \tau^\star \otimes \tau - s^\star \otimes s. \quad (175)$$

Действуя этим оператором на векторы-события или 1-формы получаем их разложение на пространственные и временные компоненты:

$$h = h_T^\tau \tau^\star + h_X^\tau s^\star; \quad \omega = \omega_T^\tau \tau + \omega_X^\tau s,$$

где $h \in \mathcal{H}_2$, $\omega \in \mathcal{H}_2^*$ и

$$h_T^\tau \equiv \tau(h); \quad h_X^\tau \equiv s(h); \quad \omega_T^\tau \equiv \omega(\tau^*); \quad \omega_X^\tau \equiv \omega(s^*).$$

Аналогично, вводя разложение единичного оператора в тензорном расслоении $T^{(r,s)}(\mathcal{H}_2)$:

$$\hat{I}^{\otimes(r+s)} = (\tau^* \otimes \tau - s^* \otimes s)^{\otimes(r+s)}$$

можно всякий тензор на \mathcal{H}_2 разложить на пространственно-временные компоненты. Например, метрические тензоры g^* и g^\times , ассоциированные с симметричным и косым произведениями соответственно имеют следующие представления:

$$g^* = \tau \otimes \tau - s \otimes s; \quad g^\times = \tau \wedge s,$$

которые по существу имеют смысл 2-мерного (диадного) аналога тетрадного описания величин в СТО и ОТО [6]. Отметим, что специфика 2-мерия заключается в наличии взаимно-однозначного пространственных и временных элементов диады $\{\tau, s\}$.

Рассмотрим пару элементов τ_1 и τ_2 из \mathcal{H}_2^* , которые параметризуются скоростями v_1 и v_2 по формуле (171). Легко убедиться, что их произведение в двойной алгебре \mathcal{H}_2^* определяет элемент

$$\tau = \tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} 1_* - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} j^*,$$

где

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 - v_1 v_2}. \quad (176)$$

Другими словами, последовательная смена систем отсчета описывается умножением в алгебре двойных чисел соответствующих элементов из \mathcal{H}_2^* . Это умножение автоматически индуцирует релятивистский закон сложения скоростей. Интересное следствие этого факта связано с алгебраической интерпретацией активных и пассивных преобразований: *умножения нормированных на единицу элементов в коалгебре \mathcal{H}_2^* описывают пассивные преобразования Лоренца (смену точки зрения на одни и те же события), в то время как умножения нормированных на единицу элементов в алгебре \mathcal{H}_2 описывают активные преобразования Лоренца (переход к другим событиям, на которые мы смотрим с той же точки зрения)*. Отсюда, в частности, следуют тождества:

$$\tau_v(\alpha_v \cdot h) = t; \quad s_v(\alpha_v \cdot h) = x$$

для всякого элемента $h = t + jx$ и элементов $\alpha_v \in P\mathcal{H}_2$, $\tau_v, s_v \in P\mathcal{H}_2^*$, параметризуемых одним и тем же параметром v . Эти тождества являются математическим выражением следующего утверждения: *событие, переведенное активным бустом в новое событие, не изменяет своих пространственно-временных проекций в системе отсчета, соответствующей этому бусту*.

Все приведенные выше построения допускают локализацию т. е. переход к дифференциально-геометрическим объектам (касательным векторам и дифференциальным 1-формам). Для этого достаточно допустить зависимость параметра v от t и x , а все конструкции рассматривать в касательных и кокасательных пространствах $T_{(t,x)}\mathcal{H}_2$ и $T_{(t,x)}^*\mathcal{H}_2 = T_{(t,x)}\mathcal{H}_2^*$. Такой переход позволяет рассматривать протяженные деформирующиеся системы отсчета и даже включать гравитацию.

7.2.5 Динамика СТО в представлении двойных чисел

Гладкую кривую Γ на \mathcal{H}_2 можно описывать с помощью параметрической зависимости $h(w) = t(w) + jx(w)$ где w — вещественный параметр, а $t(w), x(w)$ — гладкие функции от него. Вектор (координатной) скорости на этой кривой имеет вид:

$$\dot{h} = \frac{dh}{dw} = \dot{t} + j\dot{x},$$

при этом физическая скорость v определяется отношением:

$$v = \frac{\text{Im}\dot{h}}{\text{Re}\dot{h}} = \frac{\dot{x}}{\dot{t}} \quad (177)$$

и не зависит от параметризации. Назовем кривую *причинной и ориентированной в будущее*, если для всякой системы отсчета $\tau \in \mathcal{IR}_+^\uparrow$ $\tau(\dot{h}) > 0$ для всех w . Всякая такая кривая допускает натуральную параметризацию

$$s = \int_{w_0}^w \sqrt{\dot{h} \star \dot{h}} dw = \int_{t_0}^t \sqrt{1 - v^2} dt \quad (178)$$

в которой $\dot{h} \star \dot{h} = 1$. Вектор \dot{h} в натуральной параметризации назовем *2-скоростью* V на кривой Γ . Как это нетрудно получить из соотношений (177) и (178), он имеет представление:

$$V \equiv \frac{dh}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2(s)}} + j \frac{v(s)}{\sqrt{1 - v^2(s)}}. \quad (179)$$

Причинные и ориентированные кривые можно интерпретировать как мировые линии массивных точечных частиц, помещенных в 2-мерное пространство время. Для каждой такой частицы можно определить 2-импульс:

$$P \equiv mV = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2(s)}} + j \frac{mv(s)}{\sqrt{1 - v^2(s)}},$$

где m — масса покоя частицы, которая определяет значение инварианта

$$P \star P = P \cdot \bar{P} = m^2. \quad (180)$$

Определим 2-силу F_0 в системе отсчета, сопутствующей частице как элемент \mathcal{H}_2 вида:

$$F_0 = jf, \quad (181)$$

где f — 1-мерный скаляр силы, измеряемый динамометром в сопутствующей системе. Вектор 2-скорости V_0 в этой системе имеет вид: $V_0 = 1$ и, очевидно, что

$$F_0 \star V_0 = 0. \quad (182)$$

В лабораторной системе отсчета 2-скорость описывается элементом V , который связан с V_0 активным бустом α_v : $\alpha_v \cdot V_0 = V$. Таким же соотношением связаны элементы F и F_0 : $\alpha_v \cdot F_0 = F$, откуда средствами алгебры \mathcal{H}_2 получаем:

$$F = \alpha_v \cdot F_0 = \frac{vf}{\sqrt{1 - v^2}} + j \frac{f}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (183)$$

Ввиду лоренц-инвариантности операции \star и соотношения (182), имеем общее соотношение ортогональности:

$$F \star V = 0, \quad (184)$$

выражающее принятый в СТО факт локальной пространственноподобности действующих на точку сил. Этот факт, на самом деле, заложен в структуру релятивистских уравнений динамики:

$$\dot{P} = F \quad (185)$$

ввиду соотношения $\dot{P} \star P = 0$, вытекающего из (180). В компонентах уравнения (185) принимают вид

$$\frac{d}{ds} m(1 - v^2)^{-1/2} + j \frac{d}{ds} mv(1 - v^2)^{-1/2} = vf + jf. \quad (186)$$

Вещественная часть этого равенства описывает закон сохранения релятивистской энергии $E = \text{Re}P = m(1 - v^2)^{-1/2}$ с учетом мощности vf действующей силы, который является следствием мнимой части (186), выражающей релятивистский второй закон Ньютона.

7.2.6 Частицы в "электромагнитном поле" на двойной плоскости

2-мерным аналогом потенциала "электромагнитного поля" в двумерном пространстве-времени СТО является 1-форма вида $\mathcal{A} = A_0 1_* + A_1 j_*$. Ее внешний дифференциал (ротатор) принимает вид

$$d\mathcal{A} \equiv \nabla \times \mathcal{A} = \frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x} \equiv \mathcal{E}$$

и является единственным (псевдо)скаляром, описывающим напряженность электромагнитного поля на двойной плоскости. Здесь введен комплексный оператор $\nabla \equiv \partial_t + j\partial_x$. Псевдоевклидов квадрат тензора $\mathcal{E} 1_* \times j_*$ определяет первый (и в данном случае единственный) инвариант:

$$I = F_{ik} F^{ik} = -2F_{01}^2 = -2\mathcal{E}^2,$$

знак которого отрицателен. Это означает, что в двумерном пространстве-времени электромагнитное поле существует лишь в своей "электрической ипостаси".

Движение распределенных на \mathcal{H}_2 зарядов описывается 2-вектором плотности тока

$$J = \rho_0 V = \rho + j\rho v, \quad (187)$$

где ρ_0 — плотность заряда в системе его покоя, $\rho = \rho_0/\sqrt{1-v^2}$ — плотность заряда в лабораторной системе, V — поле 2-скорости заряда, v — поле физической скорости заряда. Действие для системы "заряды + электрическое поле" принимает вид:

$$S = - \sum_k m_k \int \sqrt{dh_k \star dh_k} - \sum_k q_k \mathcal{A}(dh_k) + \frac{j}{8\pi} \int \mathcal{E}^2 dh \wedge d\bar{h}. \quad (188)$$

Варьирование действия (188) по координатам частиц приводит к уравнениям движения частиц во внешнем поле:

$$\dot{V} = j \frac{q}{m} \mathcal{E} \cdot V \quad \text{или} \quad \frac{dE}{dt} + j \frac{t}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}} = q\mathcal{E}v + jq\mathcal{E}, \quad (189)$$

которое в качестве мнимой компоненты содержит уравнение движения заряженной частицы под действие чисто электрической силы Лоренца. Варьирование же действия (188) по компонентам потенциала \mathcal{A} приводит к уравнениям Максвелла вида:

$$\bar{\nabla} \mathcal{E} = -2\pi j J \quad \text{или} \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - j \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = -2\pi \rho(v + j). \quad (190)$$

Мнимая часть этих уравнений соответствует 1-мерной версии теоремы Гаусса, а вещественная — закону "полного тока", который просто выражает факт равенства нулю полного тока. Применяя к обеим частям первого уравнения (190) операцию $\bar{\nabla} \times$, получаем в силу тождества $\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} = 0$ закон сохранения электрического заряда:

$$\bar{\nabla} \times jJ = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0. \quad (191)$$

7.3 Теория фундаментального \hbar -аналитического поля

В настоящем разделе мы сделаем наброски теоретико-полевого подхода к \hbar -аналитическим полям, основанного на принципе наименьшего действия. При конструировании лагранжиана мы будем исходить из соображений ковариантности, симметрии и простоты. Рассмотрим формальную теорию поля $F(\hbar, \bar{\hbar})$ на плоскости двойной переменной, действие в которой задается выражением:

$$S[F, j] = \frac{j}{2} \int_{\mathcal{H}_2} (F_{,h} \star F_{,h} - \mu^2 F \star F - F \star j) dh \wedge d\bar{h}, \quad (192)$$

где j — гипертон-источник поля F , μ — параметр массы поля F . Выражение (192) в целом вещественно и обладает 2-мерной релятивистской инвариантностью. Переходя к компонентам

$F = U + jV$ и расписывая \star -произведения по формулам (158), приходим к действию для пары "невоздействующих" друг с другом массивных скалярных полей:

$$\mathcal{S}[F, \bar{F}, j, \bar{j}] = \mathcal{S}[U, j^0] - \mathcal{S}[U, j^1], \quad (193)$$

где

$$\mathcal{S}[\phi, X] \equiv \int_{R^2} \frac{1}{2} (\phi_{,t}^2 - \phi_{,x}^2 - \mu^2 \phi^2 - \phi X) dt \wedge dx. \quad (194)$$

Стандартная вариационная процедура для действия (192) по F и \bar{F} приводит к уравнению Клейна-Гордона:

$$(\square + \mu^2)F = -j \quad (195)$$

и комплексно-сопряженному уравнению. Покомпонентная запись уравнения (195) эквивалентна системе уравнений Клейна-Гордона для скалярных полей U и V , которые можно вывести непосредственно из (193) варьированием по U и V . Из уравнения (195) и формулы (62) следует, что в пространстве вне источников при $\mu = 0$ решение уравнений поля представляет собой некоторую h -аналитическую или h -антианалитическую функцию.

Обобщение действия (193) на \mathcal{H}_3 (на \mathcal{H}_n далее оно очевидно) имеет вид:

$$\mathcal{S}[F, j] = \frac{j}{2} \int_{\mathcal{H}_3} \left\{ F_{,h} (F_h)^\dagger (F_h)^\ddagger - \mu^3 F F^\dagger F^\ddagger - (F, j) \right\} dh \wedge dh^\dagger \wedge dh^\ddagger, \quad (196)$$

где j — тензорный гипертот (j теперь симметричный тензор с компонентами $j^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$), а круглые скобки обозначают скалярное произведение (127) в метрике Бервальда-Моора. Уравнения поля, получающиеся из действия (196) будут нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Мы не выписываем их здесь, имея ввиду, что посвятим им специально одну из будущих публикаций.

8 Заключение

Наряду с общепринятой методологической установкой, согласно которой движущей силой и окончательным критерием истинности научного знания является опыт (эксперимент), в практике современных научных исследований широко применяется противоположная "неопифагорейская методология", в которой математика выступает источником идей и представлений об окружающем мире. На первый взгляд может показаться, что подобный подход имеет слишком незначительные шансы на успех из-за огромного количества различных математических конструкций, которые могли бы выступать в качестве потенциальной основы для такого рода поисков. Однако, множество кандидатов можно весьма эффективно ограничить, если отталкиваться не от всяких, но лишь от наиболее элементарных и фундаментальных математических объектов. К таким простейшими объектам, в первую очередь, следует отнести числа. Однако различных классов чисел также довольно много. Помимо обычных, к которым, как правило, относят натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные, известны и такие, как кватернионы, октавы, p -адические числа, числа Клиффорда, Грассмана и т.д. и т.п. Органическое переплетение свойств перечисленных классов чисел с действительностью давно стало общепризнанным. Своей кульминации такое единство достигает на уровне комплексных чисел, свойства которых не только имеют прямое отношение к геометрии двумерного евклидова пространства, (что, кстати, в свое время и послужило основным аргументом в согласии математиков считать комплексную алгебру естественным расширением действительных чисел), но и обладают красивыми и плодотворными связями с физикой, в особенности в области комплексного анализа. Какую бы аналитическую функцию от комплексной переменной мы ни взяли, ей всегда можно поставить в соответствие конкретное двумерное физическое поле, (например, электро- или магнитостатическое). Равно как справедливо и обратное утверждение: для любой комбинации источников и вихрей, задающих идеальное двумерное поле в вакууме, можно всегда отыскать "свою" аналитическую

функцию комплексной переменной. Принято считать, что на этом двумерном частном случае теснейшие переплетения свойств чисел, геометрии и физики и заканчиваются. В алгебре доказана важная теорема, доказательство которой принадлежит Фробениусу, констатирующая, что числовых множеств с размерностью три и выше, наследующих все без исключения свойства действительных и комплексных алгебр, не существует. Вместе с этим фактом отсутствует и возможность связать между собой геометрию многомерных пространств с многокомпонентными "хорошими" алгебрами. Кватернионы, открытые Гамильтоном, не образуют числового поля, поскольку их произведение, в отличие от произведений вещественных и комплексных чисел, некоммутативно. Кроме того, нетривиальные аналитические функции над кватернионами отсутствуют — самые "сложные" из них являются дробно-линейными функциями. Данное обстоятельство тесно связано с теоремой Лиувилля, которая, будучи примененной к четырехмерному евклидову пространству, ассоциированному с алгеброй кватернионов, утверждает, что конформная группа здесь 15-параметрическая, в то время как на комплексной плоскости и на вещественной прямой соответствующие конформные группы бесконечномерны. Сравнивая данный факт с множеством аналитических функций действительной и комплексной переменных, становится понятным вывод о том, что отсутствие разнообразия в конформных преобразованиях приводит к резкому сокращению геометрических и физических приложений для кватернионов и функций над ними, сколь-нибудь соизмеримых с приложениями числовых полей.

Столкнувшись с данным обстоятельством, несколько досадным после впечатляющих успехов взаимодействия алгебры, геометрии и физики в области комплексного анализа, большинство математиков отказалось от дальнейших поисков вариантов расширения списка чисел. Лишь редкие энтузиасты продолжают заниматься этой проблемой, сосредоточив свое внимание на отыскании таких изменений в понятии аналитической функции, которые бы совмещали в себе алгебру кватернионов и теорию аналитических функций. В частности, соответствующие попытки предпринимаются в рамках алгебры комплексных кватернионов или бикватернионов, как их иногда называют [8, 9, 10, 11], которые не образуют числового поля и имеют относительно бедную группу симметрий.

В настоящей статье мы сделали обзор свойств двойных чисел и функций над ними. При этом выяснился замечательный факт: аналогия двойных чисел с комплексными намного глубже, чем простое формальное сходство. Можно сказать, что все связи комплексных чисел с геометрией евклидовой плоскости имеют аналоги в виде связей двойных чисел с геометрией двумерного пространства-времени. Операциям сложения и умножения двойных чисел соответствуют трансляции, повороты и растяжения псевдоевклидовой плоскости. Имеют смысл понятия сопряженного числа, модуля и аргумента, алгебраической и экспоненциальной форм представления, справедливы аналоги формул Эйлера, Стокса, Остроградского, Коши и др., естественным образом вводится понятие производной независимой от направления и аналитичности функций [2, 1]. Трудно вообще придумать свойство, имеющее место на плоскости комплексной переменной и не имеющего аналога на плоскости двойной переменной. Как ни странно, при всем при этом двойные числа имеют относительно немного практических приложений и мало популярны по сравнению с комплексными.

По-видимому, основная причина столь пренебрежительного отношения математиков и физиков к двойным числам кроется в слишком очевидной простоте их устройства, иногда граничащей с тривиальностью. Для этих чисел легко находится базис (он называется изотропным, см. раздел 4.4), в котором они распадаются на две независимые действительные алгебры. В результате создается впечатление, что ничего, кроме свойств такой пары, плоскость двойной переменной не содержит. В настоящей статье мы постарались показать очевидную ошибочность такой точки зрения. Хорошо известно, что двойные числа удовлетворяют практически всем аксиомам числового поля, за исключением того, что допускает делители нуля, то есть объекты с ненулевыми компонентами, модуль которых оказывается равным нулю и для которых не существует обратных по умножению, как и у обычного нуля. Математики данное качество часто считают "плохим" или как минимум, неудобным. Именно поэтому упоминавшаяся выше теорема Фробениуса не рассматривала алгебр с делителями нуля в

принципе. Подобное ограничение с позиций предлагаемого подхода, основанного на поиске чисел, имеющих тесную и естественную связь с геометрией и физикой, представляется совершенно не оправданным. Алгебре двойных чисел соответствует геометрия двумерного псевдоевклидова пространства-времени [2], а в последнем, как известно, появляется фундаментальный объект, которого нет (во всяком случае, в вещественном виде) ни в одном евклидовом пространстве. Речь идет о световом конусе, или другими словами, о множестве точек, расстояния до которых (более правильно говорить об интервалах) от фиксированной точки равняются нулю. Именно точкам и векторам светового конуса естественным образом ставятся в соответствие делители нуля алгебры двойных чисел. То есть, основное препятствие, которое по мнению математиков не позволяет двойным числам рассматриваться в одном ряду с действительными и комплексными, на самом деле, является необходимым элементом как псевдоевклидовой геометрии, так и связанной с ней релятивистской физики. Но если из условия теоремы Фробениуса исключить требование отсутствия у алгебр делителей нуля и иметь в виду, что числам могут соответствовать не только евклидовы, но и псевдоевклидовы пространства, то пессимистический вывод о замыкании комплексной алгеброй перечня фундаментальных числовых объектов становится неверным и появляются веские основания для пополнения списка числовых систем, прежде всего, за счет включения в него двойных чисел.

Немаловажным фактором, свидетельствующим о необходимости считать двойные числа фундаментальными объектами, является наличие над ними бесконечно-параметрического множества аналитических функций (правильнее говорить об h -аналитичности [2], поскольку на плоскости \mathcal{H}_2 переменной естественная топология неевклидова). Более того, понятие h -аналитической функции от двойной переменной мы определяем таким образом, что их разнообразие оказывается ровно таким же как и разнообразие аналитических функций комплексной переменной, причем любой функции из одного множества соответствует одна и только одна функция другого [14].

Одним из замечательных свойств комплексной плоскости, открытым совсем недавно, явилось построение на ней при помощи компьютерных алгоритмов фрактальных множеств Жюлиа и Мандельброта [15]. Красота, гармония и содержательность этих объектов [16] явились дополнительным подтверждением связей, существующих между чистой математикой и геометрией. Существует мнение, что аналогичных по сложности фрактальных или фракталоподобных множеств на плоскости двойной переменной невозможно построить в принципе. У многих исследователей данной проблемы, вместо беспредельно изломанных границ комплексных фракталов получались тривиально гладкие квадраты и прямоугольники [17, 18, 19]. Однако, как показывают недавние исследования [20, 21, 22], ситуация тут существенно интереснее. Если вместо предельных фрактальных множеств Жюлиа рассматривать так называемые предфракталы, отличающиеся от последних связью с конечным числом итераций, то вместо гладких границ прямоугольников на плоскости двойной переменной появляются объекты, практически ничем не отличающиеся от предфракталов на комплексной плоскости.

Обсудим в общих чертах интересные потенциальные физические интерпретации полей, задаваемых h -аналитическими функциями. Как и на комплексной плоскости, группа движений двойной плоскости реализуется сложением двойных чисел и умножением на числа единичного модуля, с той естественной разницей, что вращения на двойной плоскости являются гиперболическими. Прямолинейная физическая интерпретация этих алгебраических и геометрических свойств двойных чисел также не вызывает трудностей и обычно связывается с задачами специальной теории относительности, когда есть лишь две значимых координаты: одна пространственная и одна временная [23] (см. также раздел 7.2). Существенно более интересен вопрос о физической реализации полей, задаваемых h -аналитическими функциями и наблюдаемыми физическими эффектами, связанными с ними. Подчеркнем, что речь идет об отыскании связей, в некотором смысле аналогичных тем, которые давно известны между аналитическими функциями комплексной переменной, конформными преобразованиями евклидовой плоскости и соответствующими тем и другим физическими приложениями. Следует ли ожидать наличия столь же красивых и представляющих физический интерес связей между h -аналитическими функциями двойной переменной и некоторыми достаточно простыми

(эффективно двумерными) реальными физическими явлениями? Рассмотрение разделов 3.7-4.3 наводит на мысль о положительном ответе на этот вопрос. Представляется естественным предположить, что пространственно-временное образование, показанное на рис. 20 можно интерпретировать как поле точечного источника с обильностью (зарядом) q , находящимся в точке-событии с координатами $(0,0)$. Силовые линии этого поля, как и для источника на комплексной плоскости — радиальные прямые, а линии уровня — концентрические окружности, только не евклидовы, а псевдоевклидовы, поскольку представляют собой квадратичные гиперболы. Разумеется, этот источник несколько иного рода, чем тот, который был связан с логарифмом на комплексной плоскости, так как метрика на плоскости двойной переменной совершенно иная и перед нами не пространственное векторное поле, а пространственно-временное. Кроме того, если на комплексной плоскости логарифм терял аналитичность в единственной точке с координатами $(0,0)$, то на плоскости двойной переменной логарифм перестает быть h -аналитической функцией не только в точке $(0,0)$, но и на связанном с ней изотропном (световом) конусе $\text{Con}(0)$. Несмотря на эти отличия, перед нами все же именно источник, который, чтобы не путать его с комплексным аналогом, договоримся именовать гиперболическим, а величину его заряда q будем называть гиперзарядом.

Напряженность \mathcal{E} векторного поля (76), создаваемого одними лишь гиперзарядом имеет много общего с напряженностью двумерного электростатического поля $E(x,y) = E_x + iE_y$. У них общие формулы связи с потенциалами и общая картина силовых и потенциальных линий, если интерпретировать ее с помощью аналогичных геометрических объектов (прямых и окружностей). Аналогичны и количественные характеристики этих полей, выражаемые формулами (35) и (77)-(78). Таким образом, перед нами полный гиперболический аналог двумерного потенциального поля электрической напряженности E создаваемого одиночным зарядом, только в данном случае поле P создается одиночным разрядом и заполняет оно собой не пространство, а пространство-время. Аналогичным образом можно говорить об аналогии дуальных величин \mathcal{B} и B в дуальной интерпретации электрических полей.

Дуальная и гиперболически-эллиптическая симметрия между напряженностями пары полей E и B на комплексной плоскости и напряженностями \mathcal{E} и \mathcal{B} на плоскости двойной переменной — удивительно гармоничная и полная. Было бы странно, что для первой пары в физическом мире существует двумерная реализация, а для второй таковой не было бы вовсе. Простой перебор известных современной физике фундаментальных взаимодействий показывает, что прямолинейной реализации рассматриваемой пары \mathcal{E} и \mathcal{B} в природе, по всей видимости, не существует. Следовательно, можно предположить, что рассматриваемые поля связаны с полями известных взаимодействий лишь косвенно или опосредованно (через некоторые их комбинации) или представляют дополнительные фундаментальные взаимодействия, свойства которого при переходе к ситуациям, где значимыми остаются лишь два измерения, одно из которых — время, оказываются именно такими, как предписывают h -аналитические функции двойной переменной. Назовем для краткости пару полей \mathcal{E} и \mathcal{B} гиперболическим полем.

Таким образом, на основании одних только математических соображений и глубоких математических аналогий с известным электромагнитным полем, мы приходим к интересным гипотезам, разумеется, требующим дальнейшей теоретической разработки и экспериментальной проверки.

1. Источниками гиперболического поля оказываются не элементарные частицы, как это имело место в случае электрического поля, а точечные события в пространстве-времени, при этом место зарядов занимают гиперзаряды, связь которых с зарядами и массами еще предстоит выяснить.
2. Напряженность электрического гиперболического поля, порождаемого гиперзарядами, имеет гиперболический характер, то есть силовые линии заполняют собой не пространство, а пространство-время, при этом эквипотенциальные линии поля (в случае двух измерений) являются гиперболами.
3. У гиперболического электрического поля как и для обычного электрического поля на евклидовой плоскости имеется свой дуальный аналог — гиперболическое магнитное поле,

силовые линии которого псевдоевклидовы окружности, то есть гиперболы, а источники — гипервихри.

4. Гиперзаряды и гипервихри относятся не к частице, а к точечному элементарному событию.
5. Источники гиперболического поля могут быть не только положительными или отрицательными, но вещественными, мнимыми и гиперкомплексными величинами.
6. Напряженности обеих компонент гиперболического поля, связанного с двумерным одиночным вихреисточником, спадают обратно пропорционально величине интервала от точки, в которой тот находится.
7. Экспериментальное обнаружение дополнительного взаимодействия, связанного с гиперболическими полями, требует, по всей видимости специальных экспериментов с измерением промежутков времени, отнесенных к различным физическим процессам. Мы остановимся подробнее на описании подобных экспериментов в отдельной публикации.
8. Естественные расширения гиперболического поля на три и четыре измерения следует связывать с естественными расширениями двойных чисел \mathcal{H}_2 на три-числа \mathcal{H}_3 и квадра-числа \mathcal{H}_4 . Такие алгебры порождают уже не псевдоевклидово пространство-время, а линейные финслеровы пространства с метрикой Бервальда-Моора [24, 25, 26, 27, 28].
9. В многомерных финслеровых пространствах с метрикой Бервальда-Моора, кроме длин и углов естественными метрическими инвариантами являются еще и так называемые тринглы и полиуглы [29, 30], с которыми можно связывать не только \hbar -аналитические, но и более сложные функции. Разнообразие последних существенно шире, а их свойства намного интересней. Возможно, что при рассмотрении таких функций станет понятным объединение гиперболического и электромагнитного поля в рамках концепции многокомпонентного гиперкомплексного числа.

Дальнейшие исследования должны пролить свет на правдоподобность отмеченных выше гипотез. Уже сейчас детальное рассмотрение свойств \hbar -аналитических функций над двойными числами в их отношении к приложениям в геометрии и физике наводят на мысль о необходимости исследований других коммутативно-ассоциативных алгебр с делителями нуля на предмет их собственных физических интерпретаций. Учитывая, что таким многокомпонентным алгебрам соответствуют не евклидовы или псевдоевклидовы пространства, а их линейные финслеровы расширения [29], частичная или полная замена ими пространства-времени Минковского может оказаться содержательной и плодотворной.

Литература

- [1] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. \hbar -голоморфные функции двойной переменной и их приложения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(13), т.7, 2010, с.44-77.
- [2] Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1977.
- [3] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ (в 2-х томах). М., Наука, 1985.
- [4] Кокарев С.С. Введение в общую теорию относительности. Ярославль, Изд-во ЯрГУ, 2010.
- [5] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Конформные калибровки геометрии Бервальда-Моора и индуцированные ими нелинейные симметрии // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, №2(10), т.5, 2008, с.3-14.
- [6] Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. М., Энергоиздат, 1982.
- [7] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973.
- [8] Казанова Г. Векторная алгебра. М., Мир, 1979.
- [9] Ефремов А.П. Кватернионные пространства, системы отсчета и поля. М., РУДН, 2005.
- [10] Кассандров В.В. Кватернионный анализ и алгебродинамика // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(6), том. 3, 2006, с. 58-84.

- [11] Элиович А.А., Санюк В.И. Некоторые аспекты применения полиномов в теории поля // *ТМФ*, 2, том 162, 2010, с. 163-178.
- [12] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа, М., Наука, 1973.
- [13] Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1977.
- [14] Павлов Д.Г., Гарасько Г.И. Двойные числа // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(13), т.7, 2010, с.16-25.
- [15] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М., Институт компьютерных исследований, 2002.
- [16] Пайтген Х.О., Рихтер П. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М., Мир, 1993.
- [17] Senn P. The Mandelbrot set for binary numbers // *American Journal of Physics*, V.58, 1989, p. 1018.
- [18] Metzler W. The "mystery" of the quadratic Mandelbrot set // *American Journal of Physics*, 62 (9), 1994, pp. 813-814.
- [19] Artzy R. Dynamics of quadratic functions in cycle planes // *Journal of Geometry*, V.44, 1992, pp. 26-32.
- [20] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Малыхин А.В., Панчелюга В.А. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(11), т.6, 2009, с. 135-145.
- [21] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналога множества Жюлиа при нулевом значении параметра на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(11), т. 6, 2009, с. 146-151.
- [22] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналогов множества Жюлиа на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(12), т.6, 2009, с.163-176.
- [23] Ивлев Д.Д. О двойных числах и их функциях // *Сб. Математическое просвещение*. Вып.6. Под.ред. И.Н.Бронштейна, Ф.Л.Верпаховского, М., 1961, с.197-203.
- [24] Павлов Д.Г. Обобщение аксиом скалярного произведения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(1), т.1, 2004, с. 5-19.
- [25] Павлов Д.Г. Хронометрия трехмерного времени // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(1), т.1, 2004, с. 20-32.
- [26] Павлов Д.Г. Четырехмерное время // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(1), т.1, 2004, с. 33-42.
- [27] Гарасько Г.И., Павлов Д.Г. Геометрия невырожденных поличисел // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(7), т.4, 2007, с. 3-25.
- [28] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., Тетру, 2009 — 265с.
- [29] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Аддитивные углы в пространстве H_3 // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(10), т.5, 2008, с. 25-43.
- [30] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Метрические бинглы и тринглы в H_3 // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(11), т.6, 2009, с.42-67.

HYPERBOLIC THEORY OF FIELD ON THE PLANE OF DOUBLE VARIABLE

D.G. Pavlov¹, S.S. Kokarev^{1,2}

¹ *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fрязино, Russia*

² *RSEC Logos, Yaroslavl, Russia*

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

By analogy with the theory of harmonic fields on the complex plane the theory of wave fields on the plane of double variable is developed. The hyperbolic analogies of point-like sources, curls, source-curls and their multipoles generalizations are constructed. Some important physical aspects of the theory together with possible generalizations on higher polynumber dimensions are discussed.

Key Words: *h*-analytic field, Cauchy-Riemannian conditions, Cauchy formula, hypercomplex potential.