

h-ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ ДВОЙНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Д.Г. Павлов¹, С.С. Кокарев^{1,2}

¹ НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

² Российский научно-образовательный центр "Логос", Ярославль, Россия

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

Рассматриваются комплексно-дифференцируемые функции двойной переменной и их основные свойства, аналогичные свойствам голоморфных функций комплексной переменной: теорема Коши и формула Коши, гиперболическая гармоничность, свойства общих h -конформных отображений и свойства таких отображений, осуществляемых гиперболическими аналогами элементарных функций. Обсуждается вопрос о приложениях h -конформных отображений для решения двумеризованных гиперболических задач математической физики.

Ключевые слова: h -голоморфная функция, конформное преобразование, гиперболическая теорема Коши, гиперболические полярные координаты.

1 Введение

Двойные числа (или, как их иногда называют, гиперболически комплексные или расщепляемые числа) известны довольно давно и применяются как в математике, так и в физике [1, 2]. В связи с тем обстоятельством, что соответствующая им алгебра изоморфна прямой сумме двух алгебр вещественных чисел, свойства двойных чисел принято считать малоинтересными, а в сравнении с комплексными числами — даже тривиальными. В настоящей статье мы постараемся проиллюстрировать ошибочность подобного мнения и показать, что возможности алгебры и анализа (вернее, h -анализа) двойных чисел вместе с соответствующей им геометрией двумерной плоскости еще далеки от своего хоть в каком-нибудь смысле полного исследования. Мы увидим, что во многих отношениях двойные числа "ни в чем не уступают" комплексным числам. Учитывая то важное обстоятельство, что геометрия двойных чисел является псевдоевклидовой и по существу соответствует геометрии 2-мерного пространства-времени, мы получаем для физики новые плодотворные почву и идеи, имеющие чисто алгебраические основания. Важную особенность рассматриваемой нами ситуации выражает тот факт, что h -аналитические функции от двойной переменной образуют бесконечномерное пространство, — так же, как и аналитические функции комплексной переменной. Более того, каждой аналитической функции на комплексной плоскости соответствует одна и только одна h -аналитическая функция двойной переменной и наоборот.

Раздел 2 посвящен краткому напоминанию фактов комплексного анализа, аналоги которых будут рассматриваться далее на двойной плоскости. В разделе 3 мы кратко излагаем свойства плоскости двойной переменной и даем определения гиперболической системы координат, конусов, h -конформных отображений и обсуждаем их общие свойства. В разделе 4 мы даем определение h -голоморфных функций и обсуждаем их некоторые общие свойства вместе с гиперболическими аналогами формулы Коши и теоремы Коши, условиями Коши-Римана и h -конформными отображениями. В разделе 5 приводятся определения и свойства стандартных гиперболических элементарных функций двойной переменной. Наконец, в Заключении мы обсуждаем потенциальные приложения и перспективы разработки теории функций двойной переменной.

2 Аналитические функции комплексной переменной

Целью настоящего раздела является напоминание основных фактов стандартной теории функций комплексной переменной. Их гиперболические аналоги будут лежать в основе последующих рассмотрений на плоскости двойной переменной. Все доказательства приводимых фактов можно найти в известных руководствах [2, 5].

Алгебра комплексных чисел \mathcal{C} порождается парой образующих $\{1, i\}$ R -модуля с таблицей умножения

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & i \\ \hline 1 & 1 & i \\ i & i & -1 \end{array}. \tag{1}$$

Таким образом, элементы \mathcal{C} имеют вид: $\mathcal{C} \ni z = 1 \cdot x + iy$, где $x, y \in R$. При этом вещественное число $\operatorname{Re} z \equiv x$ называется *вещественной частью* комплексного числа z , а вещественное число $\operatorname{Im} z \equiv y$ называется *мнимой частью* комплексного числа z . Алгебра комплексных чисел с правилом умножения, определяемым таблицей (1), образует числовое поле, подполем которого является поле вещественных чисел. Геометрическая интерпретация комплексных чисел основана на очевидной биекции: $\mathcal{C} \leftrightarrow R^2$, действующей по правилу: $\mathcal{C} \ni z = x + iy \leftrightarrow (x, y)$. Другими словами, каждому комплексному числу z соответствует точка на декартовой плоскости с координатами $\{\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z\}$ (см. рис. 1).

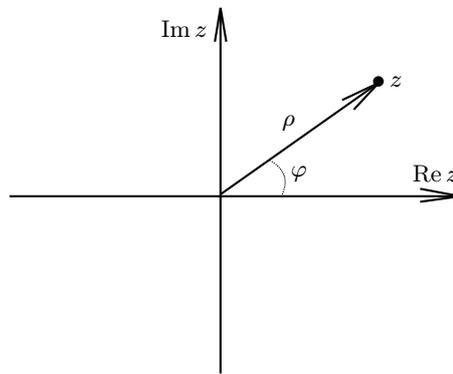


Рис. 1: Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

При этом сумма и разность комплексных чисел изображается стандартным правилом параллелограмма для соответствующих радиус-векторов на декартовой плоскости, которую принято называть *комплексной плоскостью*. Вводя на комплексной плоскости стандартную полярную систему координат $\{\rho, \varphi\}$, можно перейти к тригонометрической форме представления комплексного числа

$$z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \tag{2}$$

где $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \equiv |z|$ — *модуль* комплексного числа z , $\varphi = \arctan(y/x) \equiv \arg z$ — его *аргумент*, определенный с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Нетрудно проверить, что $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$. Знаменитая формула Эйлера: $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$ приводит к экспоненциальной форме представления комплексного числа

$$z = x + iy = \rho e^{i\varphi} = e^\theta, \tag{3}$$

где в последнем равенстве мы перешли к "комплексному углу"

$$\theta = \ln \rho + i\varphi \equiv \ln z. \tag{4}$$

При этом произведение двух комплексных чисел сводится к сложению их комплексных углов.

Важной и полезной операцией над комплексными числами является инволютивная операция *комплексного сопряжения*: $z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$. Геометрически эта операция описывает отражение комплексной плоскости относительно оси $\operatorname{Im} z = 0$. Пару $\{z, \bar{z}\}$ можно рассматривать как независимые комплексные координаты на плоскости, которые связаны с декартовыми координатами посредством очевидных формул

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \tag{5}$$

Комплексная координатная билинейная форма $\mathcal{B} \equiv dz \otimes d\bar{z}$ раскладывается на симметричную η и кососимметричную ω неприводимые компоненты следующим образом:

$$\mathcal{B} \equiv dz \otimes dz = \eta - i\omega, \quad (6)$$

где $\eta = dx \otimes dx + dy \otimes dy$ — евклидова метрическая форма, $\omega \equiv dx \wedge dy = idz \wedge d\bar{z}/2$ — 2-мерная симплектическая форма (евклидова форма площади). В частности, $\rho = \sqrt{z\bar{z}}$, а евклидов элемент длины $dl = \sqrt{dz d\bar{z}}$. Из комплексного представления формы \mathcal{B} следует, что эта форма инвариантна относительно произвольных трансляций комплексной плоскости и преобразований вида: $z \mapsto e^{i\delta}z$, описывающих евклидовы вращения комплексной плоскости. В совокупности эти преобразования составляют группу движений 2-мерного евклидова пространства. Отметим, что форма ω инвариантна относительно более широкой группы унимодулярных преобразований комплексной плоскости, для которых якобиан преобразования равен единице. Евклидову длину кривой $\gamma = z(\tau)$ и (ориентированную) площадь области Σ , ограниченной замкнутой кривой $\Gamma = \partial\Sigma$, можно вычислить с помощью формул

$$\text{length}[\gamma] = \int_{\tau_A}^{\tau_B} \sqrt{\dot{z} \bar{\dot{z}}} d\tau; \quad \text{area}[\Sigma] = \frac{i}{2} \int_{\Sigma} dz \wedge d\bar{z} = \frac{i}{4} \oint_{\Gamma} (z d\bar{z} - \bar{z} dz), \quad (7)$$

где в последнем равенстве мы использовали комплексный вариант фундаментальной теоремы Пуанкаре-Дарбу об интегрировании дифференциальных форм.

Функция $\ln z$, определенная соотношением (4), является простым и важным представителем класса т. н. *голоморфных функций* комплексной переменной. Напомним, что произвольное гладкое отображение $f: R^2 \rightarrow R^2$ можно представить парой компонент

$$(x, y) \mapsto (x', y') : \quad x' = f_1(x, y); \quad y' = f_2(x, y), \quad (8)$$

где f_1, f_2 — гладкие функции $R^2 \rightarrow R$. С помощью формул (5) эти отображения можно всегда записать в виде

$$(z, \bar{z}) \mapsto (z', \bar{z}') : \quad z' = F_1(z, \bar{z}); \quad \bar{z}' = F_2(z, \bar{z}). \quad (9)$$

Для интерпретации R^2 как комплексной плоскости \mathcal{C} естественно ограничиться отображениями, сохраняющими комплексную структуру плоскости, т. е. отображениями $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ вида: $z \mapsto w = F(z)$. Дифференцируемые функции $R^2 \rightarrow R^2$, удовлетворяющие в некоторой области $D \subseteq \mathcal{C}$ условию

$$F_{,\bar{z}} = 0, \quad (10)$$

называются голоморфными в области D функциями комплексной переменной z . Функции, удовлетворяющие условию

$$F_{,z} = 0, \quad (11)$$

называются *антиголоморфными*.

Напомним некоторые основные свойства голоморфных функций. Расписывая условие (10) в декартовых координатах, приходим к *условиям голоморфности (комплексной аналитичности) Коши-Римана*:

$$u_{,x} = v_{,y}; \quad u_{,y} = -v_{,x}, \quad (12)$$

где $u(x, y) = \text{Re } F(z)$, $v(x, y) = \text{Im } F(z)$. Аналогичные формулы имеют место и для представления функции через комплексный угол $F(z) = e^{\ln \rho(x,y) + i\psi(x,y)}$:

$$(\ln \rho)_{,x} = \psi_{,y}; \quad (\ln \rho)_{,y} = -\psi_{,x}. \quad (13)$$

Имеют место фундаментальные *теорема Коши*:

$$\oint_{\Gamma} F(z) dz = 0 \quad (14)$$

и формула Коши:

$$F(z_0) = \frac{1}{i\ell_E} \oint_{\Gamma} \frac{F(z)}{z - z_0} dz, \tag{15}$$

где Γ — кусочно-гладкий замкнутый контур, ограничивающий область $D \in \mathcal{C}$, $F(z)$ — произвольная голоморфная в области D функция, $z_0 \in D$, $\ell_E = 2\pi$ — евклидова длина единичной окружности, параметризующей пространство направлений¹. Формулы (14)-(15) вытекают непосредственно из условия аналитичности функции $F(z)$ в форме (10) или форме (12). При этом формула (14) допускает обобщение на многосвязные области, а формула (15) допускает обобщение на контуры, содержащие бесконечно-удаленную точку и контуры, проходящие через точку z_0 и даже имеющие там точку излома.

Голоморфные функции допускают разложение в ряд Тейлора вида

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{16}$$

где коэффициенты c_k можно вычислить по формуле

$$c_k = \frac{1}{i\ell_E} \oint_{\Gamma} \frac{F(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz. \tag{17}$$

Последняя формула опирается на интегральную формулу Коши (15) и тождество, справедливое для целых n :

$$\oint_{\Gamma} (z - z_0)^n dz = i\ell_E \delta_{n,-1}. \tag{18}$$

Введенная выше билинейная форма \mathcal{B} ведет себя относительно аналитического преобразования $F(z)$ как относительный скаляр

$$\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}' = |F'(z)|^2 \mathcal{B}, \tag{19}$$

где $F'(z)/dz$, откуда следуют законы преобразования элементов длины и площади:

$$dl' = |F'| dl; \quad (dz \wedge d\bar{z})' = |F'|^2 (dz \wedge d\bar{z}). \tag{20}$$

Относительная скалярность формы площади имеет место при всяких диффеоморфизмах, а вот первое равенство в (20) означает, что аналитические функции осуществляют конформные преобразования евклидовой плоскости, т. е. сохраняют углы между кривыми в каждой точке. Отметим, что $|F'| = |\nabla u|^2 = |\nabla v|^2 = \sqrt{\Delta_F}$, где ∇ — оператор градиента в евклидовой метрике, а Δ_F — якобиан отображения F , рассматриваемого как отображение $R^2 \rightarrow R^2$.

Каждый диффеоморфизм $f: R^2 \rightarrow R^2$ можно интерпретировать как гладкое векторное поле на плоскости R^2 по правилу: $F = f_1(x, y)\partial_x + f_2(x, y)\partial_y$ или в комплексной алгебраической версии: $F = f_1(x, y) + if_2(x, y)$, где f_i — компоненты отображения f . Векторные поля, соответствующие аналитическим функциям, обладают рядом интересных и важных для приложений свойств. Из условий (12) следует, что каждая из компонент векторного поля $F(z) = u + iv$ (стрелку опускаем) является гармонической функцией, т. е. удовлетворяет 2-мерному уравнению Лапласа

$$\Delta u = \Delta v = 0. \tag{21}$$

Гармонические функции, связанные друг с другом условиями Коши-Римана, называются *сопряженными*. Любая гармоническая на декартовой плоскости функция определяет (с точностью до постоянной) свою сопряженную. Условия Коши-Римана на языке векторного

¹Для дальнейшего нам важна именно такая (несколько отличная от традиционной) запись формулы Коши.

анализа имеют следующую интерпретацию: векторное поле $i\bar{F}$ потенциально² и соленоидально, т.е. компоненты $\{X, Y\} = \{v, u\}$ векторного поля $i\bar{F}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\bar{F}_{,z} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rot} i\bar{F} \equiv Y_{,x} - X_{,y} = 0; \quad \operatorname{div} i\bar{F} \equiv X_{,x} + Y_{,y} = 0. \quad (22)$$

Эти свойства обуславливают применение конформных отображений для решения задач гидродинамики потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости, электростатики и магнитостатики и ряда других, связанных с решением 2-мерного уравнения Лапласа. В этих задачах уравнению Лапласа удовлетворяет потенциал φ (поля или скорости). Сопряженная к нему функция χ имеет смысл *функции тока*. Семейство поверхностей $\varphi = \operatorname{const}$ определяет семейство эквипотенциальных линий в смешанной магнито-электростатической задаче, с одной из которых совмещен профиль цилиндрического заряженного проводника и (или) цилиндрического проводника с током, или семейство нормальных линий к плоскопараллельному потоку в гидродинамике. Уравнения $\chi = \operatorname{const}$ определяют линии напряженности или линии тока в соответствующих задачах. Линии $\varphi = \operatorname{const}$ и линии $\chi = \operatorname{const}$ образуют криволинейную ортогональную сетку на комплексной плоскости. В совокупности аналитическая функция $\Phi(z) = \varphi + i\chi$ определяет комплексный потенциал, дающий решение некоторой задачи магнито-электростатики, гидродинамики и т. д. Ортогональность криволинейной сетки линий уровня и линий напряженности следует непосредственно из условий Коши-Римана, т. е. из аналитичности $\Phi(z)$. На практике для решения краевых эллиптических задач в пространстве свободном от источников требуется подобрать такую аналитическую функцию $\Phi(z)$, вещественная или мнимая часть которой отображает границу области в прямую линию или в ее кусок.

3 Двойные числа

По аналогии с алгеброй комплексных чисел \mathcal{C} определим алгебру двойных чисел \mathcal{H} парой образующих $\{1, j\}$ 2-мерного R -модуля с таблицей умножения:

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & j \\ \hline 1 & 1 & j \\ \hline j & j & 1 \end{array}. \quad (23)$$

Элементы \mathcal{H} будем записывать в виде: $\mathcal{H} \ni h = 1 \cdot t + jx$, где $t, x \in R$, имея ввиду дальнейшие приложения этой алгебры для описания 2-мерного пространства-времени. По аналогии с комплексными числами, вещественное число $\operatorname{Re} h \equiv t$ называется *вещественной частью* двойного числа h , а вещественное число $\operatorname{Im} h \equiv x$ называется *мнимой частью* двойного числа h . Алгебра двойных чисел с таблицей умножения (23) не образует числового поля, поскольку содержит делители нуля, т. е. уравнение $h_1 h_2 = 0$ может выполняться при отличных от нуля элементах h_1 и h_2 . Это обстоятельство послужило одной из причин, по которой двойные числа не получили столь широкого распространения в приложениях, как комплексные. Однако, именно это обстоятельство отражает на алгебраическом языке важнейший факт геометрии 2-мерного пространства-времени — наличие световых конусов. Геометрическая интерпретация двойных чисел аналогична интерпретации комплексных чисел: на плоскости двойной переменной (коротко — гиперболической плоскости) каждому двойному числу соответствует радиус-вектор, координаты которого суть вещественная и мнимая часть этого числа. При этом сумма и разность двойных чисел изображается стандартным правилом параллелограмма для соответствующих радиус-векторов на гиперболической плоскости.

Инволютивную операцию *комплексного сопряжения* для двойных чисел определим следующим образом: $h = t + jx \mapsto \bar{h} = t - jx$. Геометрически эта операция описывает отражение гиперболической плоскости относительно оси $\operatorname{Im} h = 0$. Аналогично комплексному случаю, пару $\{h, \bar{h}\}$ можно рассматривать как независимые двойные координаты на гиперболической

²Напомним, что операция ротора, примененная к 2-мерному векторному полю на плоскости дает в результате (псевдо)скаляр.

плоскости, которые связаны с декартовыми координатами посредством формул (5) с заменой $z, \bar{z} \rightarrow h, \bar{h}$.

Комплексная координатная билинейная форма $\mathcal{G} \equiv dh \otimes d\bar{h}$ снова раскладывается на симметричную Ξ и кососимметричную Ω неприводимые компоненты следующим образом:

$$\mathcal{B} \equiv dh \otimes d\bar{h} = \Xi - j\Omega, \tag{24}$$

где $\Xi = dt \otimes dt - dx \otimes dx$ — псевдоевклидова метрическая форма, $\Omega \equiv dt \wedge dx = -jdh \wedge d\bar{h}/2$ — 2-мерная форма объема. Мы видим, что алгебра двойных чисел индуцирует на плоскости двойной переменной 2-мерную псевдоевклидову (гиперболическую) геометрию с метрической формой Ξ , что объясняет принятый нами термин "гиперболическая плоскость".

Переход к гиперболическим полярным координатам и экспоненциальной форме представления двойного числа имеет ряд особенностей, которых нет в случае комплексных чисел. Пара прямых $t \pm x = 0$, содержащих множество двойных чисел³ с нулевым квадратом нормы, разбивает всю гиперболическую плоскость на четыре клиновидные области, обозначенные на рисунке цифрами I, II, III и IV (рис. 2).

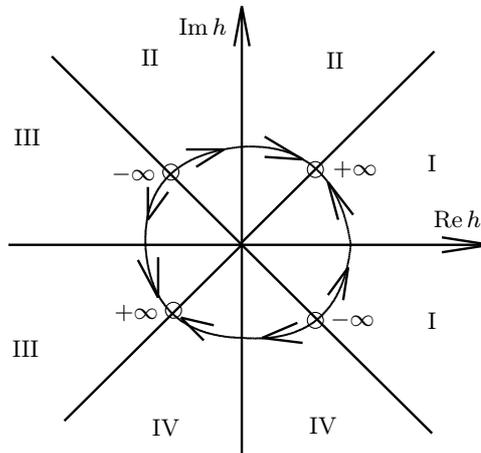


Рис. 2: Область $R \sqcup -R \sqcup R \sqcup -R$ изменения угла ψ на плоскости \mathcal{H} . Ориентация согласована в противоположных клиньях и противоположна в соседних. Для различия углов в различных клиньях можно нумеровать угол ψ индексом k : $\psi_k, (k = 1, 2, 3, 4)$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что в каждой из отмеченных областей двойные числа допускают гиперболическое тригонометрическое представление вида:

$$h = t + jx = \epsilon \rho (\cosh \psi + j \sinh \psi), \tag{25}$$

где для каждого из клиньев имеют место следующие определения величин:

$$\begin{aligned} \text{I} : \quad & \epsilon = 1, \quad \rho = \sqrt{t^2 - x^2}, \quad \psi = \text{Arth}(x/t); \\ \text{II} : \quad & \epsilon = j, \quad \rho = \sqrt{x^2 - t^2}, \quad \psi = \text{Arth}(t/x); \\ \text{III} : \quad & \epsilon = -1, \quad \rho = \sqrt{t^2 - x^2}, \quad \psi = \text{Arth}(x/t); \\ \text{IV} : \quad & \epsilon = -j, \quad \rho = \sqrt{x^2 - t^2}, \quad \psi = \text{Arcth}(t/x). \end{aligned} \tag{26}$$

Величины ρ и ψ , определенные в каждом из клиньев формулами (25), будем называть *модулем* и *аргументом* двойного числа h . Таким образом, в каждом из клиньев $0 \leq \rho < \infty$, а сами клинья параметризуются отдельными экземплярами вещественных прямых, которые в совокупности образуют *многообразие Ψ угловых переменных* в виде ориентированной дизъюнктивной суммы

³Строго говоря, наличие делителей нуля и возможность отрицательных значений выражения $h\bar{h}$ не позволяют говорить о норме двойного числа в строгом смысле этого слова. Для экономии терминов и сохранения частичной аналогии с комплексными числами мы будем называть величину $\sqrt{|h\bar{h}|}$ нормой или модулем двойного числа (см. далее формулы 26).

$R \sqcup -R \sqcup R \sqcup -R$. Более наглядно многообразие Ψ можно представить себе, компактифицируя каждое из R в открытый интервал и склеивая интервалы в их концах в окружность с четырьмя выколотыми точками.

Отметим, что множество двойных чисел с нулевой нормой не описывается ни одной из координатных карт введенной выше гиперболической полярной системы координат. В дальнейшем множество двойных чисел вида

$$h_0 + h_1(1 \pm j), \quad (27)$$

(h_0, h_1 — произвольные двойные числа) будем называть *конусом числа* h_0 и обозначать $\text{Con}(h_0)$. Все точки, лежащие в $\text{Con}(h_0)$, имеют равное нулю гиперболическое расстояние до точки h_0 . Иногда мы будем различать $\text{Con}_+(h_0)$ и $\text{Con}_-(h_0)$ в соответствии со знаками в (27). Также можно различать подконусы $\text{Con}_+^\uparrow(h_0)$ и $\text{Con}_+^\downarrow(h_0)$, для случаев $\text{Re}h_1 + \text{Im}h_1 > 0$ и $\text{Re}h_1 + \text{Im}h_1 < 0$ соответственно и подконусы $\text{Con}_-^\uparrow(h_0)$ и $\text{Con}_-^\downarrow(h_0)$ для случаев $\text{Re}h_1 - \text{Im}h_1 > 0$ и $\text{Re}h_1 - \text{Im}h_1 < 0$ соответственно. Все конусы и подконусы показаны на рис. 3.

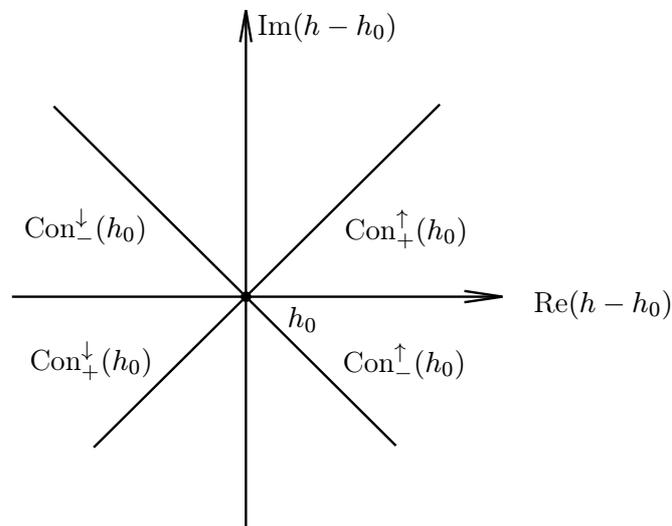


Рис. 3: К определению конусов и подконусов точки h_0 . $\text{Con}(h_0) = \text{Con}_+(h_0) \cup \text{Con}_-(h_0) = (\text{Con}_+^\uparrow(h_0) \cup \text{Con}_+^\downarrow(h_0)) \cup (\text{Con}_-^\uparrow(h_0) \cup \text{Con}_-^\downarrow(h_0))$.

Справедливость гиперболической формулы Эйлера: $\cosh \psi + j \sinh \psi = e^{j\psi}$ проверяется разложением левых и правых частей в формальные ряды Маклорена и сравнением их вещественных и мнимых частей. Гиперболическая формула Эйлера приводит к экспоненциальной форме представления двойных чисел:

$$h = t + jx = \epsilon \varrho e^{j\psi} = \epsilon e^\Theta, \quad (28)$$

где в последнем равенстве мы перешли к "комплексному гиперболическому углу"

$$\Theta = \ln \varrho + j\psi \equiv \ln h. \quad (29)$$

При этом произведение пары двойных чисел сводится к сложению их комплексных углов и перемножению знаковых множителей ϵ .

Формулы для вычисления длин кривых и площадей областей на \mathcal{H} повторяют формулы (7) с заменой $z \rightarrow h$, $\eta \rightarrow \Xi$.

Пример. Вычислим длину дуги евклидовой окружности евклидова радиуса r с центром в нуле, заключенную между точками 1 и j на плоскости двойной переменной. Подставляя в евклидово уравнение окружности $t^2 + x^2 = r^2$ полярные гиперболические координаты: $t = \varrho \cosh \psi$, $x = \varrho \sinh \psi$, получаем гиперболическое полярное уравнение евклидовой окружности:

$$\varrho(\psi) = \frac{r}{(\cosh^2 \psi + \sinh^2 \psi)^{1/2}}. \quad (30)$$

Составляя псевдоевклидов элемент длины: $dl^2 = |d\rho^2 - \rho^2 d\psi^2|$ вдоль окружности с учетом (30), получаем после некоторых элементарных преобразований и дифференцирований:

$$dl = \frac{rd\psi}{(\cosh^2 \psi + \sinh^2 \psi)^{3/2}} \tag{31}$$

В силу симметрии дуги относительно биссектриссы $t = x$ достаточно вычислить длину половинки, на которой ψ меняется от 0 до ∞ , а затем результат удвоить. Составляя интеграл, получаем:

$$L = 2 \int_0^\infty \frac{rd\psi}{(\cosh^2 \psi + \sinh^2 \psi)^{3/2}}.$$

С помощью подстановки: $\tanh \psi = \xi$, интеграл сводится к более простому виду и выражается через полные эллиптические интегралы 1-ого и 2-ого родов:

$$L = 2r \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2}} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = 2\sqrt{2}r[E(1/\sqrt{2}) - K(1/\sqrt{2})/2] \approx 1.2r$$

4 *h*-голоморфные функции двойной переменной

Функция $\ln h$, определенная по формуле (29), является простым и важным представителем класса т. н. *h*-голоморфных функций двойной переменной, к определению которых можно прийти из соображений, аналогичных определению аналитической функции комплексной переменной. Произвольное гладкое отображение $f: R^2 \rightarrow R^2$ можно представлять парой вещественных компонент (8), а можно перейти к его представлению через пару двойных переменных $\{h, \bar{h}\}$:

$$(h, \bar{h}) \mapsto (h', \bar{h}') : h' = F_1(h, \bar{h}); \quad \bar{h}' = F_2(h, \bar{h}). \tag{32}$$

Теперь для интерпретации R^2 как плоскости двойной переменной \mathcal{H} естественно ограничиться отображениями, сохраняющими гиперболическую комплексную структуру плоскости, т. е. отображениями $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ вида: $h \mapsto s = F(h)$. Дифференцируемые⁴ функции $R^2 \rightarrow R^2$, удовлетворяющие условию:

$$F_{,\bar{h}} = 0 \tag{33}$$

называются *h*-голоморфными функциями двойной переменной *h*. Функции, удовлетворяющие условию:

$$F_{,h} = 0 \tag{34}$$

называются *антиголоморфными* функциями двойной переменной.

По аналогии с голоморфными функциями комплексной переменной голоморфные функции двойной переменной можно определять формальными степенными рядами, сходимость которых часто вытекает из сходимости соответствующих вещественных рядов.

Пример. Элементарная проверка путем разложения в формальный ряд обнаруживает справедливость следующих тождеств:

$$S(jx) = jS(x); \quad C(jx) = C(x); \tag{35}$$

$$S(h) = S(t + jx) = S(t)C(x) + jC(t)S(x); \quad C(h) = C(t + jx) = C(t)C(x) - jS(t)S(x),$$

⁴Понятие производной функции $F(h, \bar{h})$ по аргументам вводится аналогично определению вещественного анализа. Именно, мы определяем дифференцируемость функции F в точке (h, \bar{h}) как следующее свойство ее приращения: $\Delta F = A(h, \bar{h}) \Delta h + B(h, \bar{h}) \Delta \bar{h} + o(\|\Delta h\|_E)$, где $\|\Delta h\|_E \equiv [\Delta t^2 + \Delta x^2]^{1/2}$ — евклидова норма приращения переменной. Переходя к различным пределам при $\|\Delta h\|_E \rightarrow 0$, получаем определения частных производных или "производных по направлениям". Имеется ряд серьезных проблем, связанных с определением сходимости и предела по естественной для двойных чисел гиперболической норме. В настоящей статье мы не останавливаемся на этих чисто математических вопросах и используем лишь те операции и свойства, которые имеют ясные, хотя, быть может, и несколько формальные определения.

где $x \in R$, S — синус (эллиптический или гиперболический), C — косинус (эллиптический или гиперболический) в левых и правых частях равенств соответственно, которые мы определяем их стандартными рядами.

На самом деле, приведенные выше равенства являются частными случаями более общего тождества:

$$f(jx) = S_f(x) + jA_f(x),$$

где $S_f \equiv [f(x) + f(-x)]/2$, $A_f \equiv [f(x) - f(-x)]/2$ — симметричная и антисимметричная части произвольной аналитической функции f .

Докажем, что голоморфная функция всегда отображает делители нуля в делители нуля. Доказательство опирается на следующее формальное тождество:

$$(1 \pm j)^\alpha \equiv 2^{\alpha-1}(1 \pm j), \quad \alpha \in R. \quad (36)$$

Для натуральных α тождество непосредственно вытекает из более простого: $(1 \pm j)^2 = 2(1 \pm j)$. Для произвольных α воспользуемся формальными разложениями в ряды Маклорена. С одной стороны

$$(1 \pm j)^\alpha = 1 \pm \alpha j + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \pm \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} + \dots \quad (37)$$

С другой

$$2^{\alpha-1} = (1+1)^{\alpha-1} = 1 + \alpha - 1 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{3!} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{4!} + \dots \quad (38)$$

Умножая этот ряд почленно на $(1 \pm j)$ получаем:

$$2^{\alpha-1}(1 \pm j) = 1 \pm j + (\alpha-1) \pm (\alpha-1)j + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!} \pm \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}j + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{3!} \pm \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{3!}j + \dots \quad (39)$$

Комбинируя в разложении (39) все последовательные пары четных слагаемых (содержащих j), получаем все последовательные четные слагаемые ряда (37), а комбинируя в (39) все последовательные пары нечетных слагаемых (начиная с пары "третье-пятое"), получаем все последовательные нечетные слагаемые ряда (37) (начиная с третьего). Таким образом, формальные ряды левой и правой части (36) совпадают, что и требовалось доказать.

Задавая теперь голоморфную функцию $F(h)$ в виде степенного ряда:

$$F(h) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (h - h_0)^k, \quad (40)$$

в силу тождества (36) будем иметь на конусе $\text{Con}(h_0)$ произвольной точки h_0 :

$$F(h)|_{h \in \text{Con}(h_0)} = F(h_0) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k ((t - t_0) \pm j(t - t_0))^k = F(h_0) + (1 \pm j) \sum_{k=0}^{\infty} c_k 2^{k-1} (t - t_0)^k \subset \text{Con}(F(h_0)),$$

что и требовалось доказать. При этом, как это видно из полученного выражения, голоморфная функция может осуществлять инверсию конуса (т.е. переводить компоненты Con_\pm^\uparrow в соответствующие компоненты $\text{Con}_\pm^\downarrow$ и наоборот), но не может переводить его ветви Con_+ и Con_- друг в друга.

4.1 Гиперболические условия Коши-Римана

Распишем условие (33) в декартовых координатах:

$$F_{,\bar{h}} = (U + jV)_{,\bar{h}} = \frac{(U + jV)_{,t}}{\bar{h}_{,t}} + \frac{(U + jV)_{,x}}{\bar{h}_{,x}} = U_{,t} - V_{,x} + j(V_{,t} - U_{,x}) = 0,$$

откуда следуют условия гиперболической аналитичности Коши-Римана:

$$U_{,t} = V_{,x}; \quad U_{,x} = V_{,t}. \quad (41)$$

Если функция F h -голоморфна в смысле данного выше определения, то h -голоморфна и функция $\ln F = \ln \varrho_F + j\psi_F + \ln \epsilon_F$. Отсюда следуют⁵ условия Коши-Римана в терминах модуля и аргумента функции двойной переменной:

$$(\ln \varrho_F)_{,t} = (\psi_F)_{,x}; \quad (\ln \varrho_F)_{,x} = (\psi_F)_{,t}. \quad (42)$$

Легко проверить, что из условий (41) следует гиперболическая гармоничность вещественной и мнимой частей аналитической функции F , которая выражается уравнениями:

$$\square U = \square V = 0, \quad (43)$$

где $\square \equiv \partial_t^2 - \partial_x^2$ — 2-мерный волновой оператор — даламбертиан ("гиперболический лапласиан").

4.2 Гиперболические аналоги теорем Коши

Доказательство гиперболической теоремы Коши является почти дословным повторением соответствующего доказательства формулы (14). Чтобы подчеркнуть независимость этого доказательства от метрических свойств двойной (или комплексной) плоскости, проведем его на языке дифференциальных форм⁶. Для всякого простого замкнутого контура Γ , ограничивающего область $\Sigma \subset \mathcal{H}$ и аналитической функции двойной переменной $F = U + jV$ имеем следующую цепочку равенств:

$$\oint_{\Gamma} F(h) dh = \oint_{\Gamma} U dt + V dx + j \oint_{\Gamma} U dx + V dt = \int_{\Sigma} [(V_{,t} - U_{,x}) + j(U_{,t} - V_{,x})] dt \wedge dx = 0$$

в силу условий (41). Второй знак равенства выражает теорему Пуанкаре-Дарбу об интегрировании 1-форм по замкнутым путям. С использованием комплексного языка доказательство выглядит еще короче:

$$\oint_{\Gamma} F(h) dh = \int_{\Sigma} F_{\bar{h}} d\bar{h} \wedge dh = 0$$

ввиду (33). В силу чисто топологических соображений, аналогичных соображениям на комплексной плоскости, интеграл от голоморфной функции будет обращаться в нуль и по границе многосвязной области.

Для интеграла Коши в его гиперболической версии теперь имеем равенство⁷:

$$\oint_{\Gamma} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = \oint_{S_r(h_0)} \frac{F(h)}{h - h_0} dh, \quad (44)$$

вытекающее из гиперболической теоремы Коши. Здесь $S_r(h_0)$ — (евклидова) окружность радиуса r с центром в точке h_0 , причем интеграл не зависит от радиуса этой окружности (см. рис. 4). Сделаем замену переменной: $hh_0 + \epsilon \varrho(r, \psi) e^{j\psi}$, где функция $\varrho(r, \psi) e^{j\psi} = r f(\psi) e^{j\psi}$

⁵Следует оговориться, что ϵ_F в общем случае является определенной константой внутри каждого из клиньев на плоскости образов, которая скачкообразно меняется при пересечении границ клиньев. По этой причине формулы (42) корректно определены на \mathcal{H} с выколотым крестом делителей нуля.

⁶Мы не останавливаемся на определениях криволинейных интегралов от функций на плоскости двойной переменной, ввиду их сводимости к паре интегралов от 1-форм на декартовой плоскости, определение которых вполне стандартно.

⁷Следует отметить некоторую неопределенность записи (44): деление под интегралом теряет смысл на пересечении $\Gamma \cap \text{Con}(h_0)$. Таким образом, строго говоря, мы должны исключить точки $\text{Con}(h_0)$ из области определения подынтегральной функции, а интеграл понимать как предел интеграла по несвязному контуру, разрывы которого сосредоточены в окрестности $\text{Con}(h_0)$ и их (евклидова) протяженность стремится к нулю. Полученные нами результаты соответствуют такому интегралу, понимаемому в смысле его главного значения. Для его существования контур должен подходить к линии конуса трансверсально. Мы не останавливаемся на этих чисто математических вопросах в настоящей статье и откладываем их более детальное изложение для отдельной публикации.

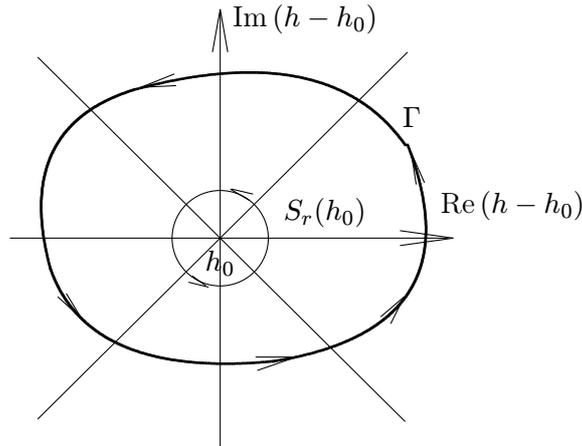


Рис. 4: К выводу интегральной теоремы Коши на плоскости двойной переменной.

является полярно-параметрическим заданием евклидовой окружности $S_r(0)$ в терминах гиперболической полярной системы координат. Как это следует из разобранных в разделе 3 примера, $f = r/\sqrt{\cosh^2 \psi + \sinh^2 \psi}$. При этом нам потребуется лишь только однозначность функции f . Переходя к интегрированию по ψ , получаем: $h-h_0 = \epsilon r f(\psi)e^{j\psi}$, $dh = \epsilon r(df + jf d\psi)e^{j\psi}$, а сам интеграл Коши принимает вид:

$$\oint_{S_r(h_0)} F(h)(d \ln f + j d\psi).$$

Используя независимость интеграла от r и переходя в нем к пределу при $r \rightarrow 0$, получаем:

$$\oint_{S_r(h_0)} F(h)(d \ln f + j d\psi) = \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{S_r(h_0)} F(h)(d \ln f + j d\psi) = F(h_0) \int_{\Psi} (d \ln f + j d\psi).$$

Интеграл от первого слагаемого равен нулю в силу однозначности функции $\ln f$. Таким образом, приходим к следующей формуле гиперболической версии интегральной формулы Коши:

$$\oint_{\Gamma} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = jF(h_0) \int_{\Psi} d\psi.$$

В обычном смысле интеграл, полученный справа, расходится. Однако ему можно придать смысл, вводя формальную величину ℓ_H размера гиперболического пространства направлений по формуле:

$$\frac{\ell_H}{2} \equiv \int_R d\psi. \quad (45)$$

С учетом ориентации кусков R в Ψ (см. рис. 2), получаем:

$$\int_{\Psi} d\psi = \ell_H/2 - \ell_H/2 + \ell_H/2 - \ell_H/2 = 0.$$

Таким образом, гиперболическая формула Коши в некотором (несобственном) смысле имеет вид более простой, чем в комплексном случае:

$$\oint_{\Gamma} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = 0. \quad (46)$$

Более содержательный аналог стандартной формулы Коши получится, если рассматривать замкнутый контур Γ_r вида, представленного на рисунке 5. Этот контур состоит из двух дуг

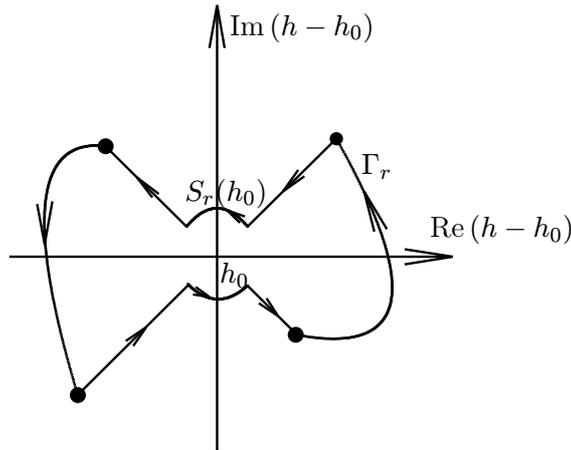


Рис. 5: К выводу интегральной теоремы Коши на плоскости двойной переменной: контур Γ_r .

произвольных кусочно-гладких простых кривых, лежащих в областях $|t - t_0| \geq |x - x_0|$ и опирающихся своими концами на компоненты конуса $\text{Con}(h_0)$, отрезков этого конуса, и пары двух дуг евклидовой окружности радиуса r с центром в h_0 , опирающихся на компоненты конуса $\text{Con}(h_0)$. Интеграл типа Коши по контуру Γ_r равен нулю в том же обобщенном смысле, что и (46), ввиду того, что контур Γ_r является гомотопией исходного контура Γ в области голоморфности функции $F(h)/(h - h_0)$. Теперь имеем

$$0 = \oint_{\Gamma_r} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = \oint_{S_r(h_0)} \frac{F(h)}{h - h_0} dh + \oint_{\Gamma'_r} \frac{F(h)}{h - h_0} dh, \tag{47}$$

где $\Gamma'_r \equiv \Gamma_r \setminus S_r(h_0)$. Вводя на $S_r(h_0)$ гиперболическую полярную систему координат, повторяя предыдущие рассуждения и используя свойства функции $f(\psi)$ (ее четность по ψ), задающей полярное уравнение евклидовой окружности, получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{S_r(h_0)} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = -j\ell_H F(h_0), \tag{48}$$

откуда из (47) получаем более прямой гиперболический аналог формулы Коши:

$$F(h_0) = \frac{1}{\ell_H j} \oint_{\Gamma_0} \frac{F(h)}{h - h_0} dh, \tag{49}$$

где контур $\Gamma_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \Gamma_r$. По своему виду полученная формула формально вполне эквивалентна стандартной формуле (15) с заменой размера пространства евклидовых направлений ℓ_E на размер пространства гиперболических направлений ℓ_H в паре клиньев с одинаковым знаком $h\bar{h}$. Величину ℓ_H можно считать "фундаментальной константой" геометрии двойных чисел. При вычислениях с этой константой надо аккуратно учитывать ее свойства и использовать процедуру регуляризации выражений.

Гиперболическую формулу Коши (49) можно записать в более общем виде:

$$F(h_0) = \pm \frac{1}{\ell_H j} \oint_{\Gamma_{\pm}} \frac{F(h)}{h - h_0} dh, \tag{50}$$

учитывающий возможность выбора контура Γ_- вместо $\Gamma_+ = \Gamma_0$, получающегося поворотом последнего на евклидов угол $+\pi/2$, и противоположность ориентации параметра ψ в области $|t - t_0| \leq |x - x_0|$ общему направлению положительного обхода контуров на \mathcal{H} (против часовой стрелки).

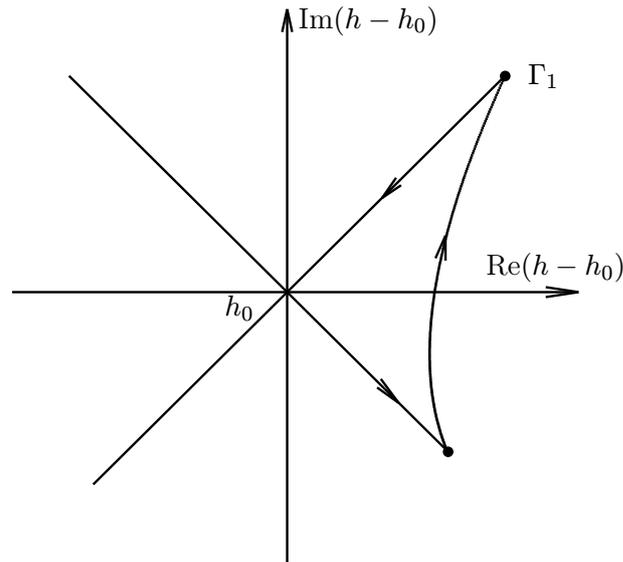


Рис. 6: К выводу интегральной теоремы Коши на плоскости двойной переменной: контуры Γ_n .

Аналогично получаются и следующие варианты формулы Коши:

$$F(h_0) = (-1)^{n+1} \frac{2}{\ell_{Hj}} \oint_{\Gamma_n} \frac{F(h)}{h - h_0} dh, \quad (51)$$

где $n = 1, 2, 3, 4$, контур Γ_1 представлен на рис. 6, а контуры Γ_n получаются из него поворотами на углы $\pi(n - 1)/2$ вокруг точки h_0 .

Пример. В качестве примера проиллюстрируем работу формулы Коши в виде (51) при $n = 1$ путем явного вычисления интеграла по контуру Γ_1 . Имеем

$$\frac{2}{\ell_{Hj}} \oint_{\Gamma_1} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = \frac{2}{\ell_{Hj}} \oint_{\Gamma_1} \frac{F(h) - F(h_0)}{h - h_0} dh + \frac{2F(h_0)}{\ell_{Hj}} \oint_{\Gamma_1} \frac{dh}{h - h_0}. \quad (52)$$

Подынтегральное выражение в первом интеграле — голоморфная функция в области, ограниченной контуром Γ_1 и на нем самом, поэтому этот интеграл обращается в нуль. На конусе $\text{Con}_\perp^\uparrow$ выберем в качестве переменной интегрирования переменную $t \in [t_0 + \tau_1, t_0]$, а на конусе $\text{Con}_\perp^\downarrow$ $t \in [t_0, t_0 + \tau_2]$, где τ_1, τ_2 — абсциссы конечных точек криволинейной части контура Γ_1 (соответственно верхнего и нижнего концов) в системе координат с началом в точке h_0 . Таким образом, интегралы дают следующий вклад:

$$\frac{2F(h_0)}{\ell_{Hj}} \left[\int_{t_0 + \tau_1}^{t_0} \frac{(1 + j) dt}{(1 + j)(t - t_0)} + \int_{t_0}^{t_0 + \tau_2} \frac{(1 - j) dt}{(1 - j)(t - t_0)} \right]$$

$$\frac{2F(h_0)}{\ell_{Hj}} (\ln 0 - \ln \tau_1 + \ln \tau_2 - \ln 0) = \frac{2F(h_0)}{\ell_{Hj}} \ln(\tau_2/\tau_1) = 0.$$

В предпоследнем равенстве было учтено сокращение двух одинаковых логарифмически сингулярных членов, а в последнем учтено "свойство бесконечности" фундаментальной константы ℓ_H . Таким образом, вклад в интеграл Коши дает только участок Γ' контура между компонентами конуса $\text{Con}(h_0)$. Переходя к полярной системе координат с центром в точке h_0 получаем:

$$\frac{2F(h_0)}{\ell_{Hj}} \int_{\Gamma'} \frac{dh}{h - h_0} = \frac{2F(h_0)}{\ell_{Hj}} \int_R (d \ln \rho + d\psi).$$

Интеграл от первого слагаемого дает нуль в силу того, что на концах контура $\Gamma' \rho = 0$. Интегрируя второе слагаемое с учетом (45), приходим к результату $F(h_0)$, что и утверждает гиперболическая формула Коши.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности вычисления коэффициентов ряда Тейлора h -голоморфной функции с помощью формулы, аналогичной (17). По существу, этот вопрос сводится к выяснению возможности обобщения тождества (18) на гиперболический случай. Рассмотрим интеграл вида:

$$\oint_{\Gamma} (h - h_0)^\alpha dh. \tag{53}$$

Продеформируем контур Γ таким образом, чтобы он принял вид Γ' , показанный на рисунке 7 (значение интеграла при этом, очевидно, не изменится).

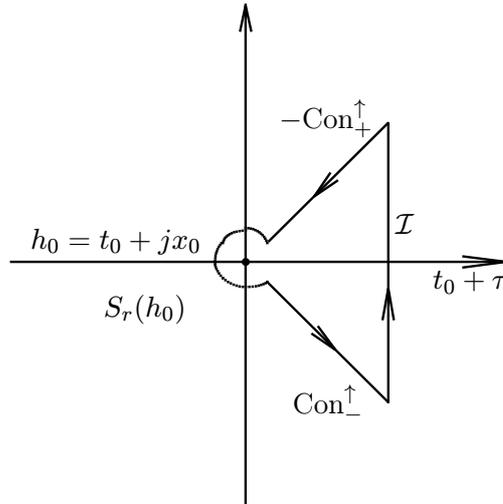


Рис. 7: К вопросу о коэффициентах ряда Тейлора для h -голоморфных функций.

Раскладывая интеграл на слагаемые, соответствующие различным участкам контура $\Gamma' = -\text{Con}_+^\uparrow(h_0) \cup S_r(h_0) \cup \text{Con}_-^\uparrow(h_0) \cup \mathcal{I}$, получим для вкладов по конусам (обозначения аналогичны использованным в предыдущем примере, причем $\tau_1 = \tau_2$):

$$\int_{-\text{Con}_+^\uparrow(h_0)} (h - h_0)^\alpha dh + \int_{\text{Con}_-^\uparrow(h_0)} (h - h_0)^\alpha dh + \int_{t_0+\tau}^{t_0+r} (t - t_0)^\alpha (1 + j)^{\alpha+1} dt + \int_{t_0+r}^{t_0+\tau} (t - t_0)^\alpha (1 - j)^{\alpha+1} dt.$$

Используя тождество (36) и приводя подобные слагаемые, получаем следующий результат:

$$\int_{\text{Con}_-^\uparrow(h_0) - \text{Con}_+^\uparrow(h_0)} (h - h_0)^\alpha dh = j \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha + 1} [r^{\alpha+1} - \tau^{\alpha+1}]. \tag{54}$$

Интеграл по прямолинейному отрезку вычисляется также легко:

$$\int_{\mathcal{I}} (h - h_0)^\alpha dh|_{h=h_0+\tau+jsx} = \int_{-1}^1 (\tau + js\tau)^\alpha j\tau ds = \tau^{\alpha+1} \int_{1-j}^{1+j} \xi^\alpha d\xi = j \frac{2^{\alpha+1} \tau^{\alpha+1}}{\alpha + 1}. \tag{55}$$

Сравнивая (54) и (55), приходим к выводу, что

$$\int_{\Gamma'} (h - h_0)^\alpha dh = \int_{S_r(h_0)} (h - h_0)^\alpha dh + j \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha + 1} r^{\alpha+1}, \quad (\alpha \neq -1).$$

Для интеграла по дуге окружности $S_r(h_0)$ имеем с учетом параметризации (26) представление:

$$\int_{S_r(h_0)} (h - h_0)^\alpha dh = [(-1)^{\alpha+1} - j^{\alpha+1} - (-j)^{\alpha+1}] \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho^{\alpha+1} e^{j(\alpha+1)\psi} (d \ln \varrho + j d\psi).$$

Полагая $\varrho = \varrho(\psi) = rf(\psi)$ (для нас не важен конкретный вид f , важно лишь, что эта функция зависит только от ψ , но не зависит от r), приходим к выражению:

$$\int_{S_r(h_0)} (h - h_0)^\alpha dh = r^{\alpha+1} K_1(\alpha)$$

и в целом:

$$\oint_{\Gamma_1} (h - h_0)^\alpha dh = r^{\alpha+1} K_2(\alpha), \quad (\alpha \neq -1). \quad (56)$$

где $K_1(\alpha), K_2(\alpha)$ — некоторые функции, зависящие только от α . В силу гомотопности контуров с различными r выражение (56) не должно зависеть от r . Это возможно только при условии $K_2(\alpha) = 0$ при $\alpha \neq -1$. Учитывая предыдущий результат при $\alpha = -1$, можно написать следующую окончательную формулу:

$$\oint_{\Gamma} (h - h_0)^\alpha dh = \begin{cases} 0, & \alpha \neq -1; \\ j\ell_H, & \alpha = -1. \end{cases} \quad (57)$$

Полученный результат обобщает формулы (18) и (17), поскольку интеграл от степени в гиперболическом случае обращается в нуль для всех вещественных α , а не только для целых. Это обстоятельство может послужить мотивом для поиска фундаментальных континуальных разложений h -голоморфных функций, отличных от разложения в классические ряды Тейлора (или Лорана).

4.3 Гиперболические конформно-аналитические отображения

Введенная выше билинейная форма \mathcal{G} ведет себя относительно h -голоморфного преобразования $F(h)$ как относительный скаляр:

$$\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}' = |F'(h)|^2 \mathcal{G}, \quad (58)$$

где $F'(h)/dh$, откуда следуют законы преобразования элементов гиперболической длины и площади:

$$dl' = |F'| dl; \quad (dh \wedge d\bar{h})' = |F'|^2 (dh \wedge d\bar{h}). \quad (59)$$

Аналогично комплексному случаю, относительная скалярность формы площади имеет место при всяких диффеоморфизмах, а первое равенство в (59) означает, что h -голоморфные функции осуществляют конформные преобразования гиперболической плоскости, т. е. сохраняют гиперболические углы между кривыми в каждой точке. Это обстоятельство тесно связано с установленным выше фактом об инвариантности конусов Con относительно h -голоморфных отображений. Отметим, что $|F'| = 2|\nabla u|^2 = 2|\nabla v|^2 = 2\sqrt{\Delta_F}$, где ∇ — оператор градиента в псевдоевклидовой метрике, а Δ_F — якобиан отображения F , рассматриваемого как отображение $R^2 \rightarrow R^2$.

Аналогично комплексному случаю, каждый диффеоморфизм $f: R^2 \rightarrow R^2$ можно интерпретировать как гладкое векторное поле. Векторные поля, соответствующие h -голоморфным функциям двойной переменной, обладают рядом интересных и важных для приложений свойств. Из условий (41) следует, что каждая из компонент векторного поля $F(h) = U + iV$ является гиперболической h -гармонической функцией, т. е. удовлетворяет 2-мерному волновому уравнению (43). h -гармонические функции, связанные друг с другом условиями Коши-Римана (41), будем называть h -сопряженными. Любая h -гармоническая на декартовой плоскости функция определяет (с точностью до постоянной) свою гиперболически сопряженную. Гиперболическим условиям Коши-Римана (41) на языке векторного анализа на псевдоевклидовой плоскости можно придать следующий геометрический смысл: векторное поле $\bar{F} = U - jV$ h -потенциально и h -соленоидально, т.е. компоненты $\{U, -V\}$ векторного поля F удовлетворяют соотношениям:

$$\bar{F}_{,h} = 0 \Leftrightarrow \text{roth } F \equiv U_{,x} - V_{,t} = 0; \quad \text{divh } F \equiv U_{,t} - V_{,x} = 0. \quad (60)$$

Физический смысл этих условий и соответствующие начально-краевые задачи, которые естественно решать с помощью гиперболических конформных преобразований, мы обсудим далее в отдельном разделе. Отметим здесь, что семейство поверхностей $U = \text{const}$ и $V = \text{const}$ определяет на декартовой плоскости R^2 псевдоортогональные семейства линий, для которых $\nabla U \cdot \nabla V \equiv U_t V_t - U_x V_x = 0$ всюду в силу условий (41).

5 Свойства некоторых элементарных функций двойной переменной

Рассмотрим подробнее свойства основных элементарных функций двойной переменной.

5.1 Степенные функции $F(h) = h^n$

В отличие от степенной функции комплексной переменной случаи четных n и нечетных n кардинально отличаются. Действительно, переходя к экспоненциальному представлению (28), получаем:

$$h = \epsilon \rho e^{j\psi} \mapsto \epsilon^n \rho e^{jn\psi} \tag{61}$$

Поскольку для любого четного n $\epsilon^n = 1$, можно заключить, что *степенная функция $h \mapsto h^n$ при $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$ биективно отображает каждый из клиньев II, III, IV на клин I с отображением конусов $\text{Con}_\pm \rightarrow \text{Con}_\pm$* . Напротив, *при нечетном n каждый из координатных клиньев при отображении $h \mapsto h^n, n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$ биективно отображается в себя*. При этом, как нетрудно видеть из (61) координатная сетка линий $\rho = \text{const}, \psi = \text{const}$ переходит в координатную сетку линий $\rho' = \rho^n = \text{const}, \psi' = n\psi = \text{const}$ для всяких целых n . В случае положительных целых n радиальные линии растягиваются при $\rho > 1$ и сжимаются при $\rho < 1$, кроме того, они поворачиваются от значения $\psi = 0$ в сторону соответствующих им по знаку компонент конусов. Для целых отрицательных n дополнительно происходит еще инверсия относительно единичных сфер $\rho = 1$ и инверсия пространства углов $\Psi \rightarrow -\Psi$. В качестве примера функции с четным n рассмотрим функцию $w = h^2 = x^2 + y^2 + 2jxy = \rho^2 e^{2j\psi}$.

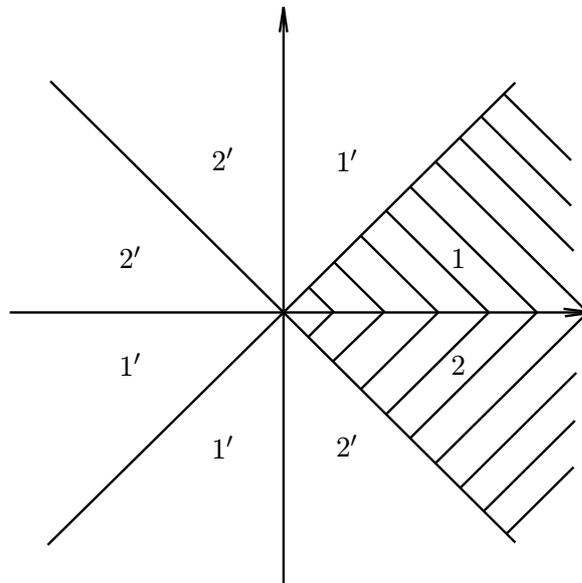


Рис. 8: Глобальная структура отображения $h \mapsto h^2$.

На рис. 8 представлена глобальная структура отображения $h \mapsto h^2$: клин 1-2 переходит сам в себя (его границы — в соответствующие границы), а отображения остальных клиньев в клин 1-2 показано соответствующими цифрами (цифры со штрихами, помечающими клин, показывают как именно соответствующий клин отображается в клин 1-2). Таким образом, отображение $h \mapsto h^2$ является 4-листным. Аналогичным образом устроено отображение: $h \rightarrow h^{2k}, k \in \mathbb{Z}$.

Наглядное представление некоторых простых степенных отображений представлено на рис. 9-10.

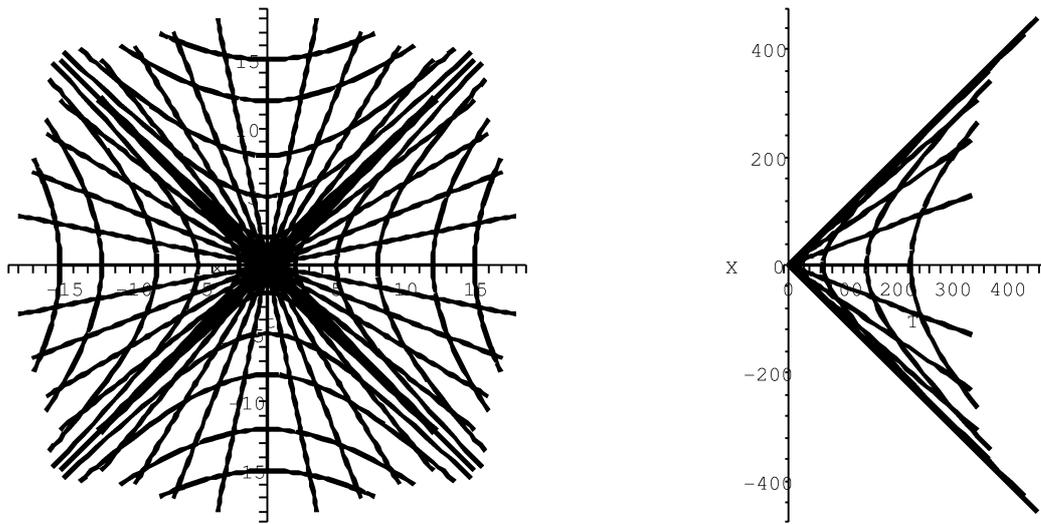


Рис. 9: Гиперболическая полярная система координат (слева) и образ ее первого клина при отображении $h \mapsto h^2$.

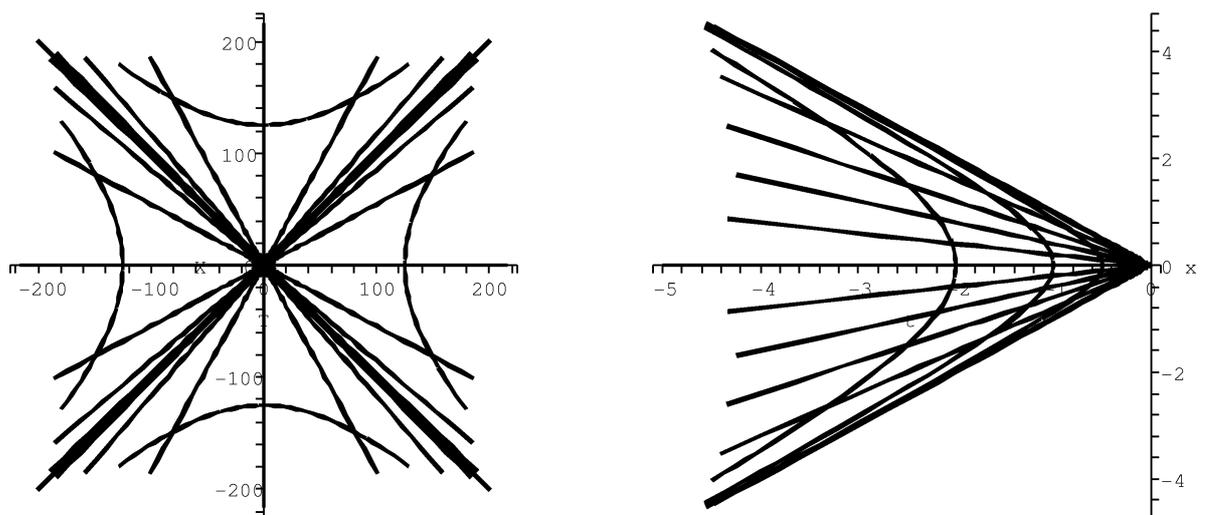


Рис. 10: Образ гиперболической полярной системе координат (рис. 9 слева) при отображении $h \mapsto h^3$ (слева) и образ первого клина при отображении $h \mapsto h^{-1}$ (справа).

Из свойств степенных функций легко вывести свойства корней различных порядков и рациональных степеней: $h \mapsto h^{1/n}$, $h \mapsto h^{m/n}$. Любой корень $\sqrt[n]{h}$ четного порядка определен в квадранте I. Такой корень будет 4-значной функцией. Каждый лист гиперболической римановой поверхности этой функции представляет собой идентичную копию клина I, показанного на рис. 8. На каждом из листов функция однозначна. Все листы склеиваются в риманову поверхность, представляющую собой R^2 , при этом точка $(0;0)$ принадлежит всем листам и является гиперболическим аналогом точки ветвления. Наглядно риманову поверхность корня четного порядка можно реализовать листом бумаги, сложенным вчетверо так, как показано на рис. 11.

Корни нечетной степени — однозначны в каждом из 4 клиньев.

5.2 Экспонента двойной переменной $w = e^h$

Записывая $e^h = e^{t+jx} = e^t e^{jx}$ приходим к глобальной структуре экспоненциального отображения, представленной на рис.12.

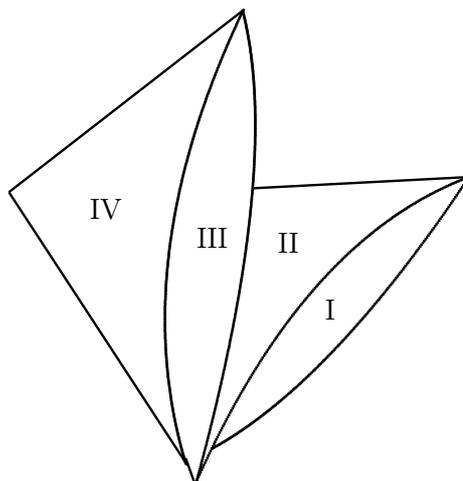


Рис. 11: Гиперболическая риманова поверхность 4-значного отображения $h \mapsto h^{1/2k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

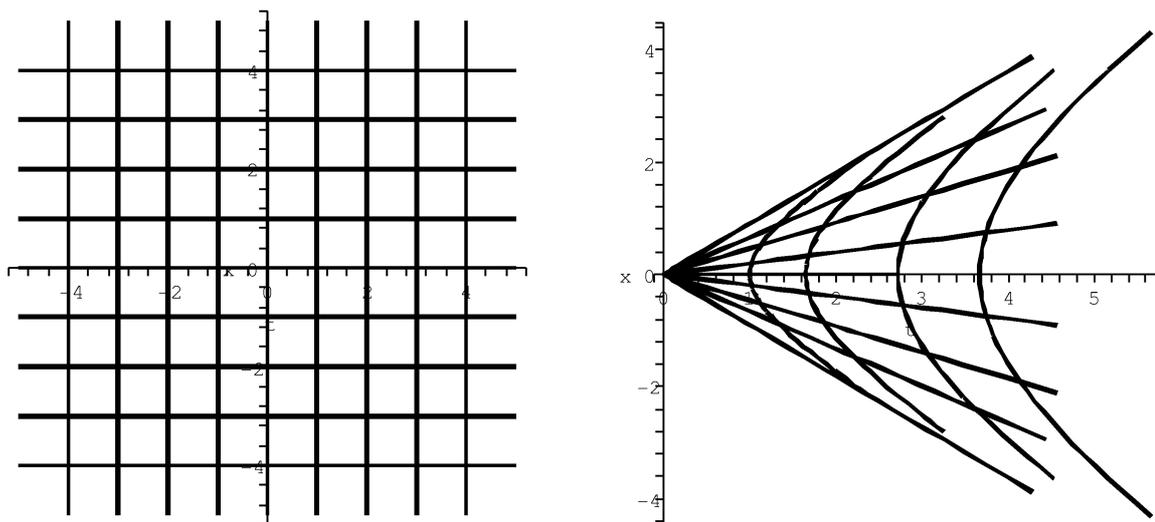


Рис. 12: Глобальная структура отображения $h \mapsto e^h$.

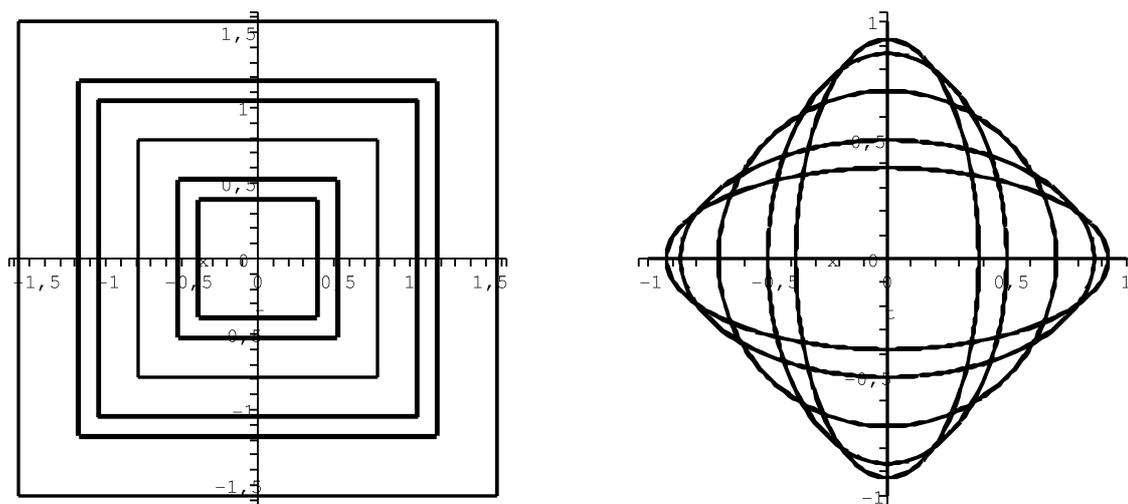
Прямоугольная псевдоортогональная сетка на плоскости переменной h отображается экспонентой в псевдоортогональную сетку, состоящую из лучей и гипербол в первом клине с вершиной в точке $h = 0$. Отображение $h \mapsto e^h$ — биективно. Очевидно, что обратная функция $\ln h = \ln \varrho + j\psi$ определена во внутренности первого клина. На границах (т.е. на конусе $\text{Con}^\uparrow(0)$) полярная система координат не работает и требуется дополнительное исследование поведения отображения $h \mapsto e^h$, на котором мы здесь не останавливаемся.

5.3 Тригонометрические функции $\sin h$, $\cos h$ и обратные к ним

Расписывая синус двойной переменной:

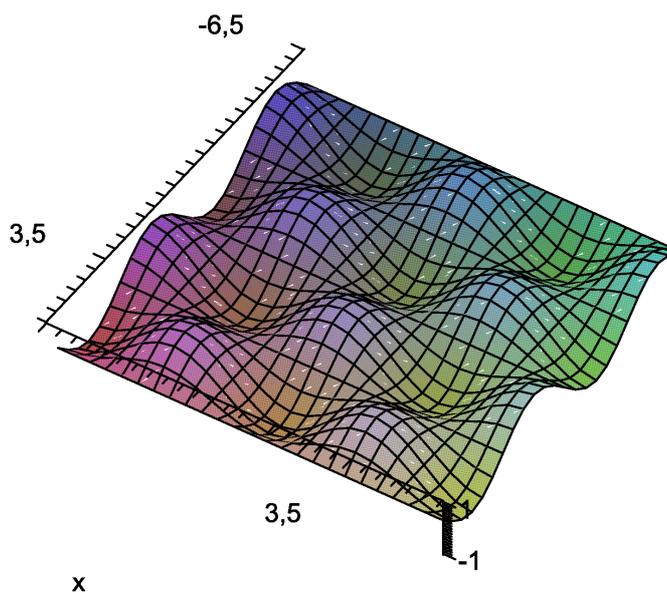
$$\sin h = \sin(t + jx) = \sin t \cos x + j \sin x \cos t, \tag{62}$$

замечаем, что линии $x = \text{const}$ и $t = \text{const}$ отображаются в семейства эллипсов с центром в точке $(0; 0)$. Эти линии наматываются на соответствующие эллипсы бесконечное число раз. На рис. 13 (справа) показаны образы квадратов с различными сторонами с центром в точке $(0; 0)$ (слева).

Рис. 13: Структура отображения $h \mapsto \sin h$.

Каждый квадрат переходит в четырех-лучевую звездообразную фигуру, причем квадрат со стороной $\pi/2$ отображается в окружность, а квадрат со стороной π отображается в координатный крест с вершинами с точках $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$. Из рисунка видно, что функция $h \mapsto \sin h$ отображает внутренность квадратов со стороной, не превышающей $\pi/2$ во внутренность звезд. Начиная с квадратов со стороной большей $\pi/2$ однолиственность функции $\sin h$ нарушается.

Вся плоскость переменной h покрывается квадратами со стороной π , которые получаются из наибольшего квадрата на рис. 13 слева трансляциями на векторы $\pi(m + nj)$, где $m, n \in \mathbb{Z}$. При этом отображение $h \mapsto \sin h$ в двух соседних квадратах отличается знаком (инверсией правой картинки на рис. 13). На рис. 14 представлена вещественная часть выражения (62).

Рис. 14: Вещественная часть отображения $h \mapsto \sin h$.

Нетрудно убедиться, что отображение $h \mapsto \cos h$ устроено аналогично, только все семейство "фундаментальных квадратов" сдвинуто на плоскости переменной h влево на $\pi/2$ (поскольку $\cos h = \sin(h + \pi/2)$.)

Соответственно функцию \arcsin (и \arccos) можно определить на квадрате с вершинами в точках $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$ (на таком квадрате, сдвинутом на $\pi/2$ влево). Явные формулы для арксинуса и арккосинуса имеют вид:

$$\arcsin h = \frac{1}{2} [\arcsin((t+x)\sqrt{1-(t-x)^2} + (t-x)\sqrt{1-(t+x)^2}) +$$

$$j \arcsin((t+x)\sqrt{1-(t-x)^2} - (t-x)\sqrt{1-(t+x)^2})]$$

$$\arccos h = \frac{1}{2} [\arccos(t^2 - x^2 - \sqrt{1-(t-x)^2}\sqrt{1-(t+x)^2}) +$$

$$j \arccos(t^2 - x^2 + \sqrt{1-(t-x)^2}\sqrt{1-(t+x)^2})].$$

Вещественная и мнимая часть первого выражения представлена на рис. 15.

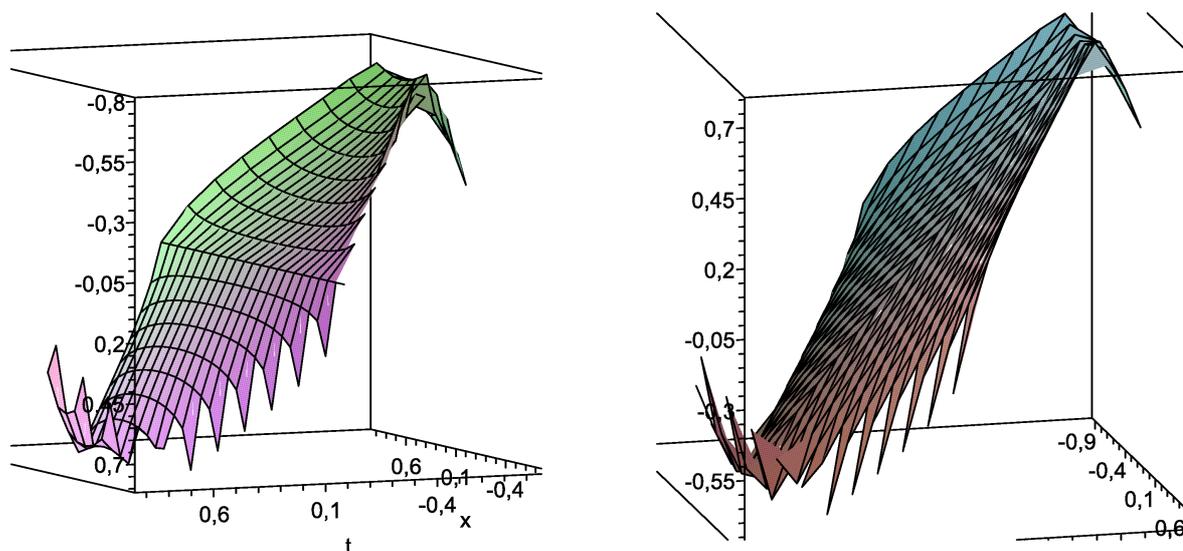


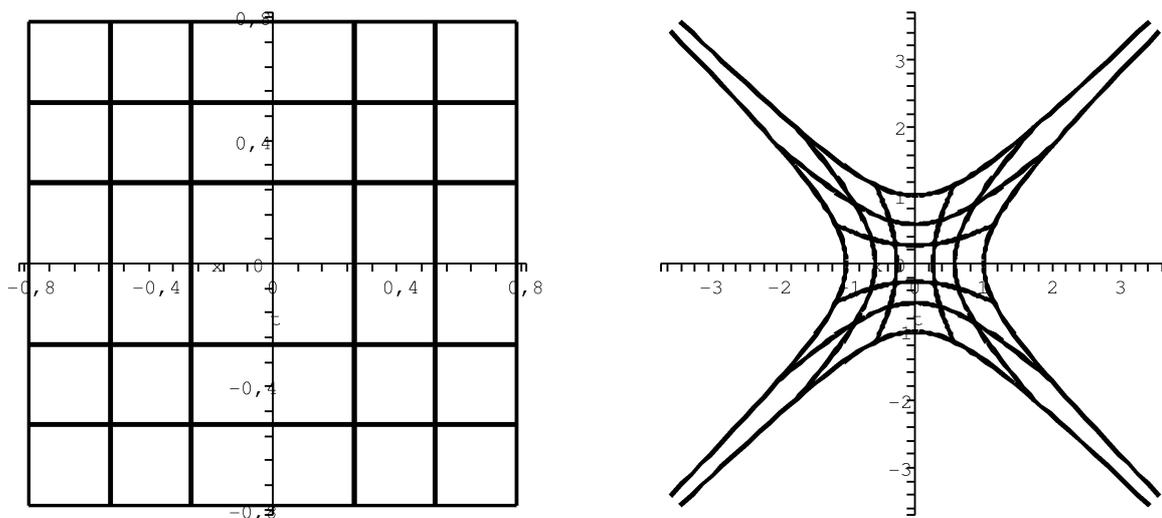
Рис. 15: Отображение $h \mapsto \arcsin h$ (вещественная и мнимая части).

5.4 Тригонометрические функции $\tan h$, $\cot h$ и обратные к ним

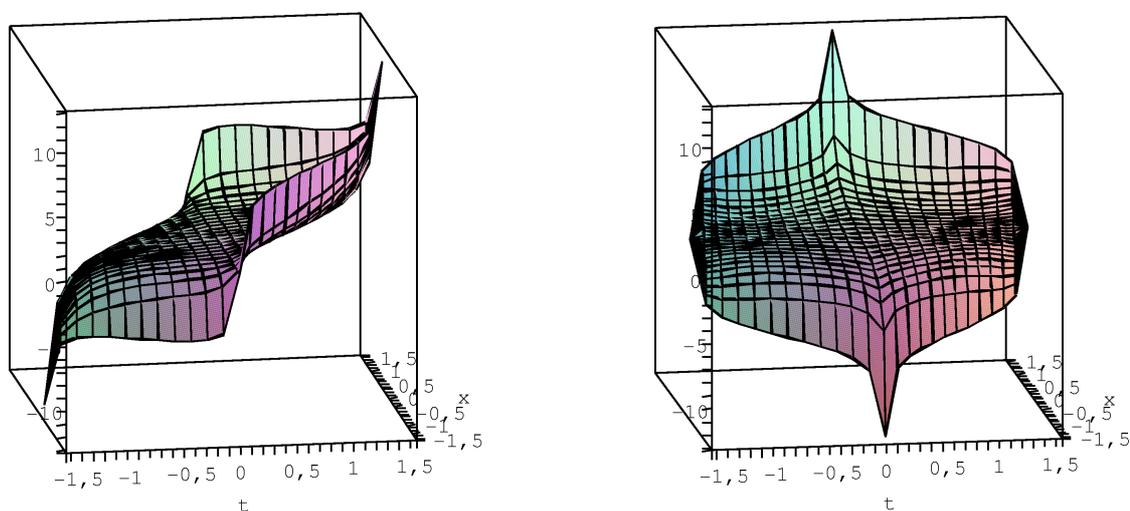
Выделяя в функции $w = \tan h$ вещественную и мнимую часть после элементарных преобразований получаем:

$$\tan h = \frac{\sin 2t + j \sin 2x}{\cos 2t + \cos 2x}.$$

Эта функция отображает квадрат с центром в точке $(0; 0)$ и стороной $\pi/2$ в область, ограниченную гиперболами, а прямоугольную сетку в исходном квадрате — в симметричную гиперболическую сетку внутри области (рис. 16).

Рис. 16: Структура отображения $h \mapsto \tan h$.

В целом функция $h \rightarrow \tan h$ бесконечнолистка. Ее листы представляют собой квадраты, получаемые из фундаментального квадрата $(\pi/2; 0), (0; \pi/2), (-\pi/2; 0), (0; -\pi/2)$ трансляциями на векторы кратные π по t и x . Графики вещественной и мнимой части тангенса двойной переменной

Рис. 17: 3-мерная структура отображения $h \mapsto \tan h$ (вещественная и мнимая части).

Ввиду тождества $\cot h = -\tan(h - \pi/2)$, аналогично устроена функция $w = \cot h$. Функции \arctan и arccot — многозначны, их однозначные ветви можно выделить на любом из фундаментальных квадратов. К примеру, функция $\arctan h$ имеет следующий явный вид в координатах:

$$\arctan h = \frac{1}{2} \left\{ \arctan \left[\frac{2t}{1-t^2+x^2} \right] + j \arctan \left[\frac{2x}{1+t^2-x^2} \right] \right\}.$$

Графики вещественной и мнимой части этого отображения представлены на рис. 18

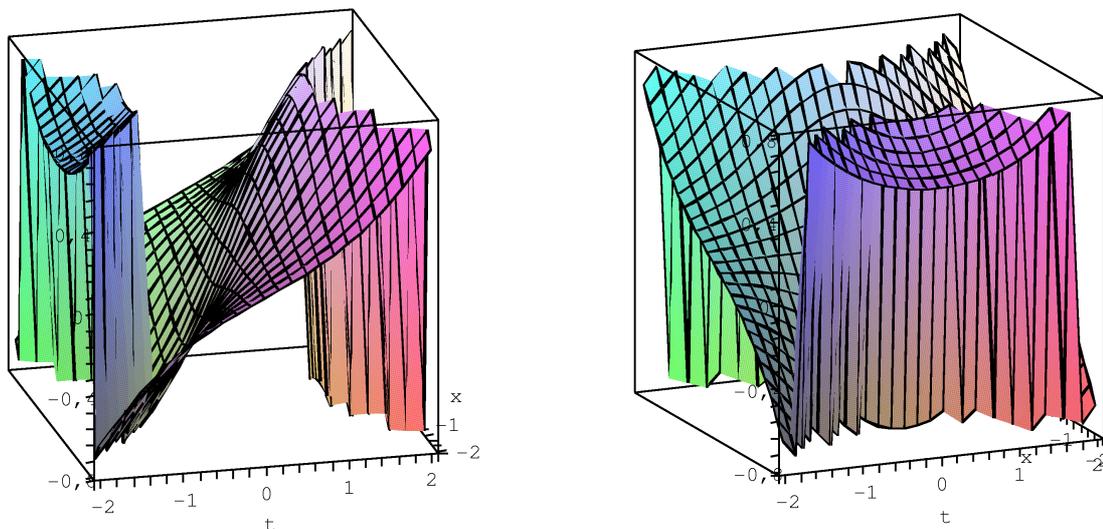


Рис. 18: Структура отображения $h \mapsto \arctan h$ (вещественная и мнимая части).

5.5 Гиперболические функции $\sinh h$, $\cosh h$, $\tanh h$, $\coth h$ и обратные к ним

Выделяя по аналогии с эллиптическим синусом в функции $w = \sinh h$ вещественную и мнимую часть, приходим к выражению:

$$\sinh h = \sinh t \cosh x + j \sinh x \cosh t.$$

Наглядный 3-мерный вид этого отображения представлен на рис. 19

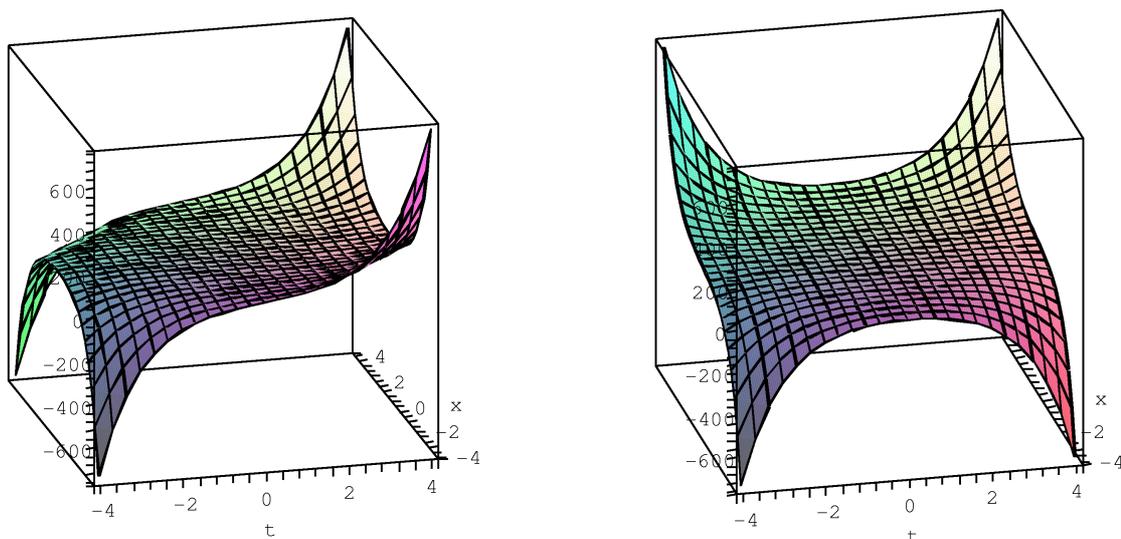
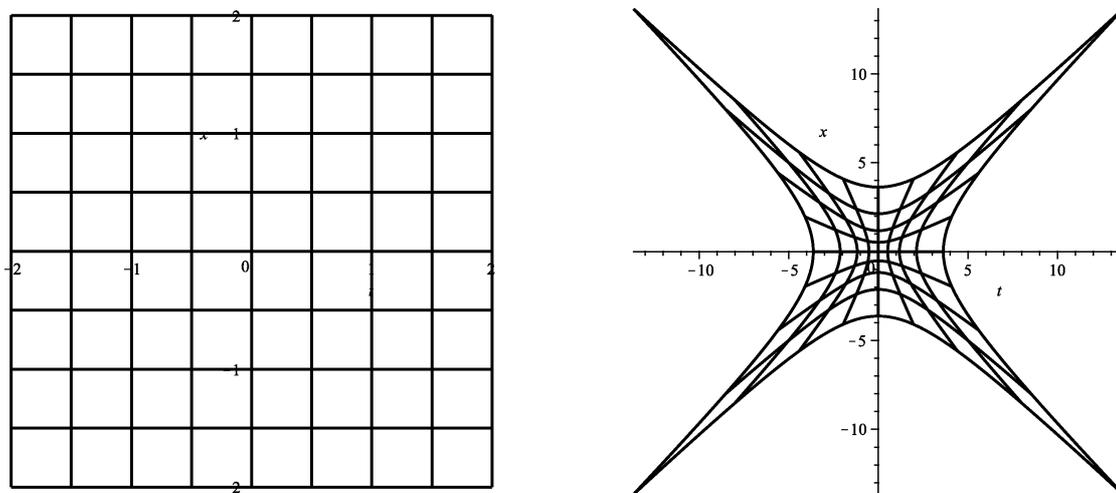


Рис. 19: 3-мерная структура отображения $h \mapsto \sinh h$ (вещественная и мнимая части).

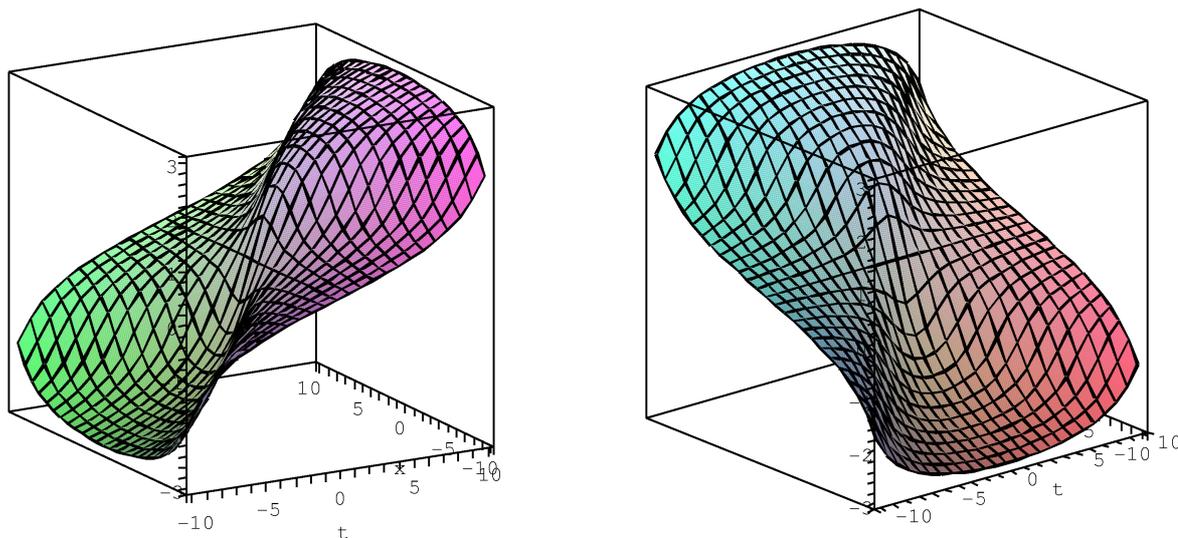
Нетрудно видеть, что прямоугольная координатная сетка (t, x) отображается в гиперболическую сетку на плоскости образов w (рис. 20).

Рис. 20: Структура отображения $h \mapsto \sinh h$.

Отображение $h \mapsto \sinh h$ — взаимно-однозначно, поэтому обратное отображение Arsinh определено на всей двойной плоскости. Его явный координатный вид дается формулой:

$$\text{Arsinh } h = \frac{1}{2} \left(\text{Arsh}[(t+x)\sqrt{1+(t-x)^2} + (t-x)\sqrt{1+(t+x)^2}] + \right. \\ \left. j \text{Arsinh}[(t+x)\sqrt{1+(t-x)^2} - (t-x)\sqrt{1+(t+x)^2}] \right),$$

а вид вещественной и мнимой части этого отображения представлен на рис. 21.

Рис. 21: Структура отображения $h \mapsto \text{Arsinh } h$ (вещественная и мнимая части).

Ввиду двулиственности гиперболического косинуса отображение

$$\cosh h = \cosh t \cosh x - j \sinh t \sinh x$$

устроено иначе. Его наглядный 3-мерный вид представлен на рис. 22.

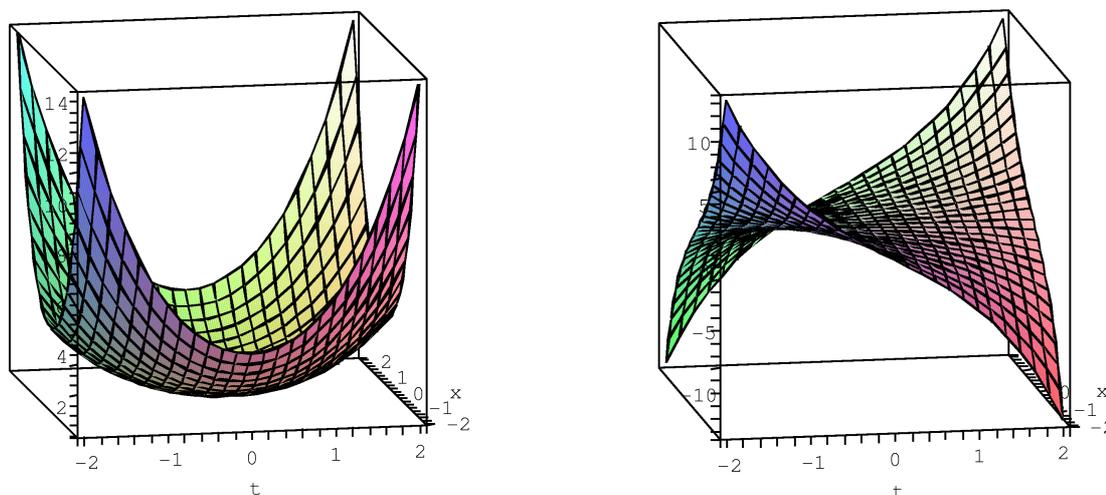


Рис. 22: 3-мерная структура отображения $h \mapsto \cosh h$ (вещественная и мнимая части).

Первый клин с вершиной в нуле отображение \cosh биективно отображает в первый клин с вершиной в точке 1. При этом декартова сетка переходит в сетку ортогональных гипербол. В этот же клин переходят и остальные клинья с вершиной в точке 0 (рис. 23).

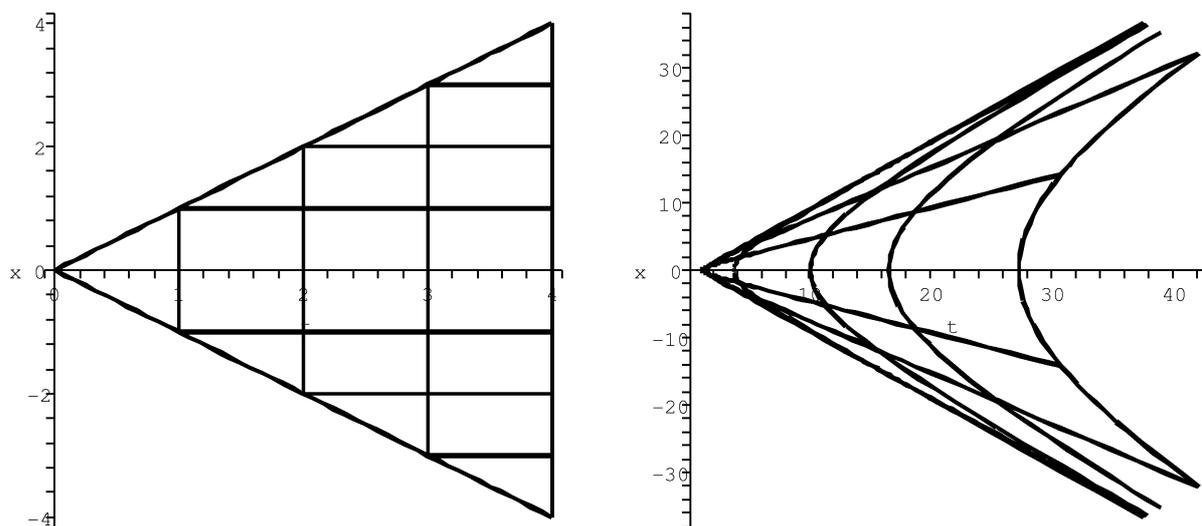


Рис. 23: Структура отображения $h \mapsto \cosh h$.

В целом глобальная структура отображения $\cosh h$ иллюстрируется рисунком 8, в котором заштрихованный клин сдвинут на единицу вправо. Таким образом, гиперболический косинус — 4-листная функция, а гиперболический арккосинус — 4-значная с римановой поверхностью, представленной на рис. 11. его явное координатное представление дается формулой:

$$\text{Arcosh } h = \frac{1}{2}(\text{Arcosh}[t^2 - x^2 - \sqrt{(t+x)^2 - 1}\sqrt{(t-x)^2 - 1}] + j\text{Arcosh}[t^2 - x^2 + \sqrt{(t+x)^2 - 1}\sqrt{(t-x)^2 - 1}]),$$

а наглядный вид представлен на рис. 24.

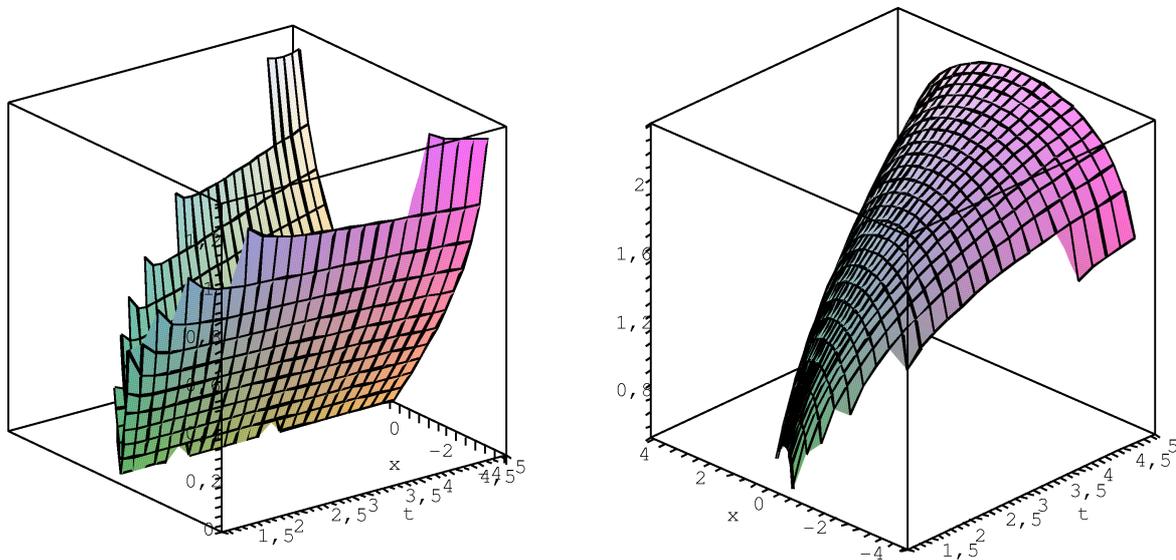


Рис. 24: Структура отображения $h \mapsto \text{Arcosh } h$ (вещественная и мнимая части).

Функция

$$\tanh h \equiv \frac{\sinh h}{\cosh h} = \frac{\tanh t(1 + \tanh^2 x)}{1 - \tanh^2 t \tanh^2 x} + j \frac{\tanh x(1 + \tanh^2 t)}{1 - \tanh^2 t \tanh^2 x}$$

отображает двойную плоскость на внутренность гиперболической окружности $|t^2 - x^2| = 1$, близкую к изображенной на рис. 25 (справа). Наклонные "острия" продолжаются неограниченно.

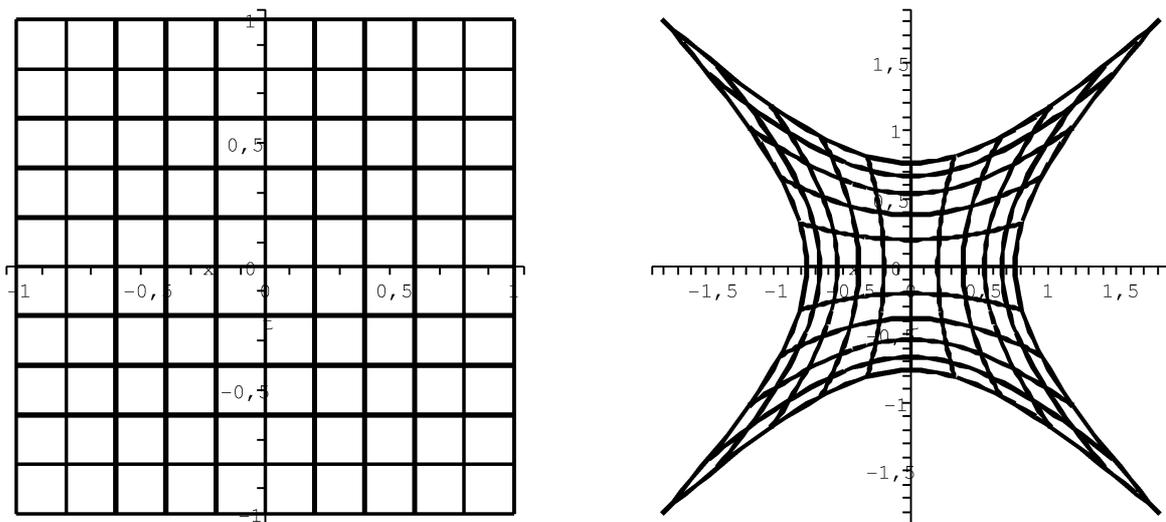


Рис. 25: Структура отображения $h \mapsto \tanh h$.

Наглядный 3-мерный вид гиперболического тангенса представлен на рис. 26.

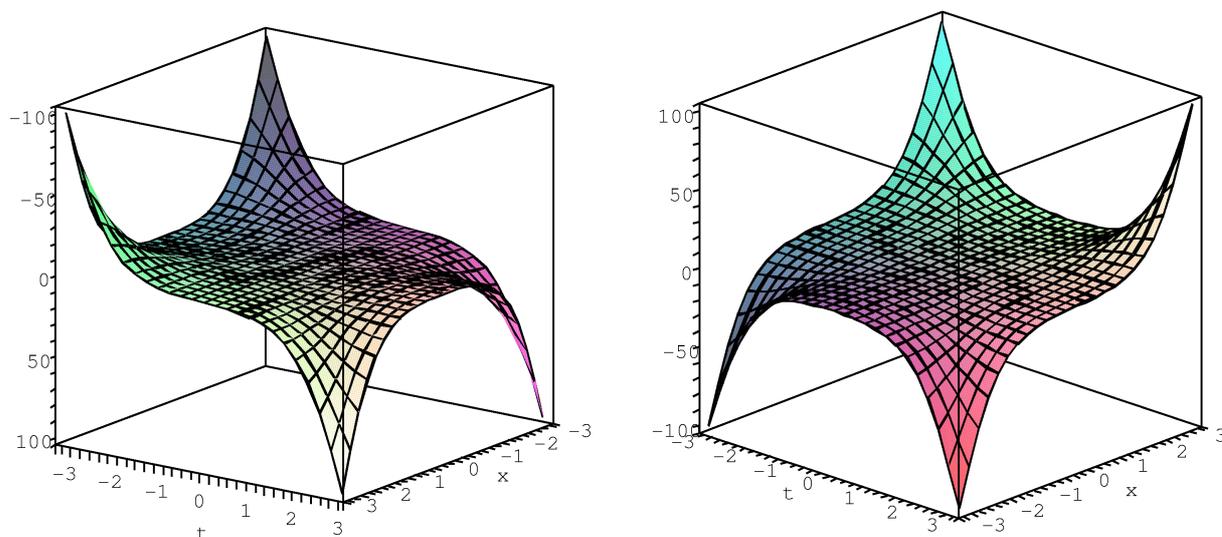


Рис. 26: Структура отображения $h \mapsto \tanh h$ (вещественная и мнимая части).

Гиперболический тангенс — функция однолистная, поэтому обратная функция Arctanh однозначна на области определения. Ее выражение в координатах дается формулой:

$$\text{Arctanh } h = \frac{1}{2}(\text{Arctanh}(t+x) + \text{Arctanh}(t-x) + j(\text{Arctanh}(t+x) - \text{Arctanh}(t-x))),$$

а наглядный вид представлен на рис. 27.

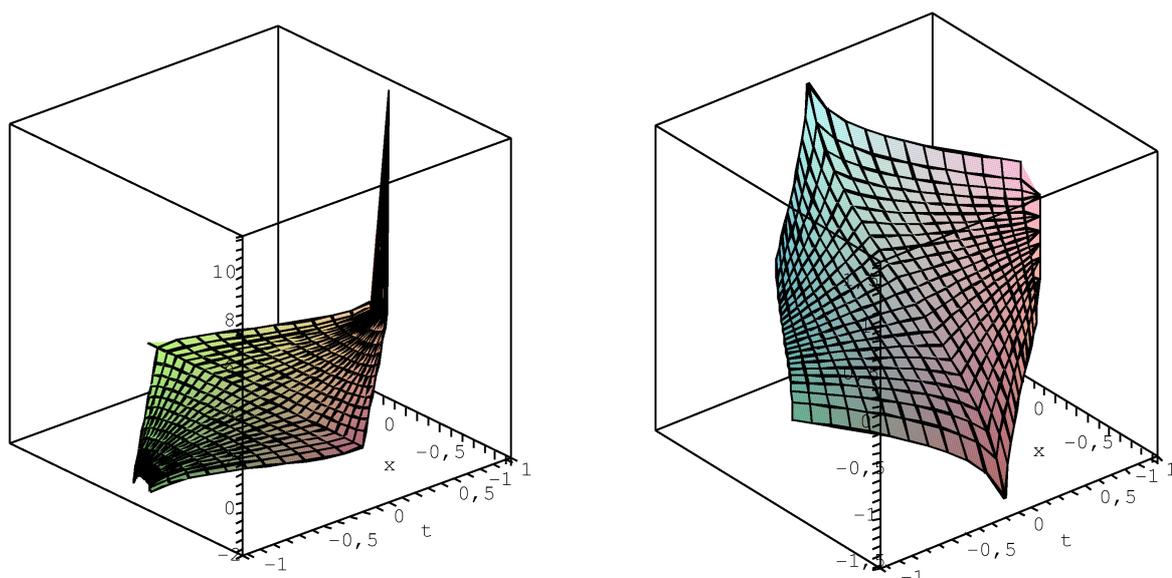


Рис. 27: Структура отображения $h \mapsto \text{Arctanh} h$ (вещественная и мнимая части).

Функция

$$\coth h \equiv \frac{\cosh h}{\sinh h} = \frac{\coth t(1 + \coth^2 x) - j \coth x(1 + \coth^2 t)}{\coth^2 x - \coth^2 t}$$

является в определенном смысле дополнительной к функции $\tanh h$: она отображает всю плоскость \mathcal{H} на внешность гиперболической окружности $|t^2 - x^2| = 1$, близкую к внешности области, изображенной на рис. 25 (справа). При этом прямоугольная координатная сетка переходит в ортогональное семейство гипербол, которые пересекаются в бесконечно-удаленной точке. Наглядный 3-мерный вид двух (из четырех) ветвей гиперболического котангенса представлен на рис. 28.

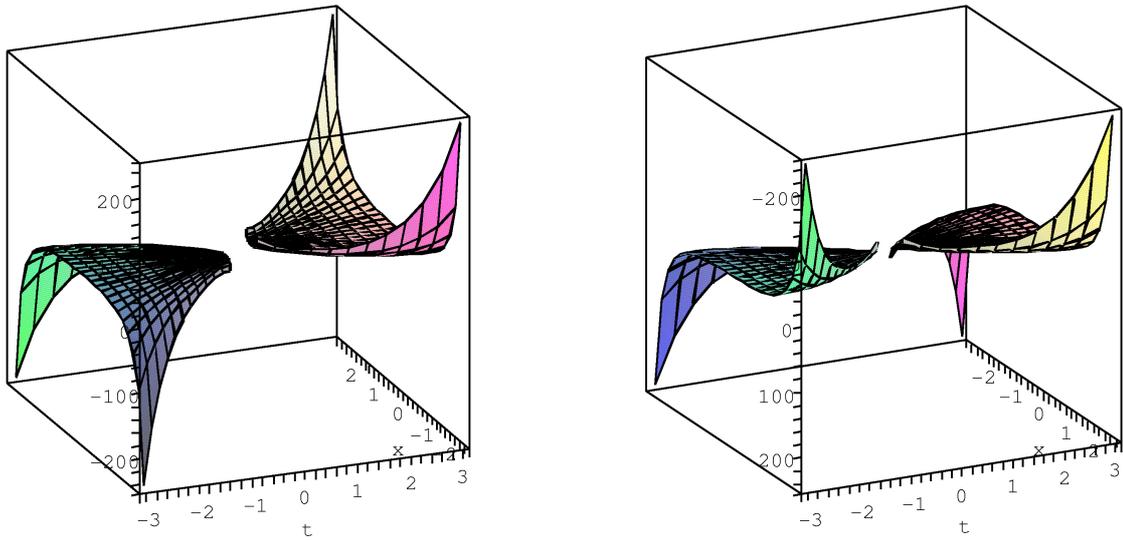


Рис. 28: Структура отображения $h \mapsto \coth h$ (вещественная и мнимая части).

Функция \coth — однолистная и обратная к ней функция $\operatorname{Arccoth}$ — однозначная в своей области определения. Ее выражение в координатах дается формулой:

$$\operatorname{Arccoth} h = \frac{1}{2} (\operatorname{Arccoth}(t+x) + \operatorname{Arccoth}(t-x) + j(\operatorname{Arccoth}(t+x) - \operatorname{Arccoth}(t-x))),$$

а наглядный вид представлен на рис. 29.

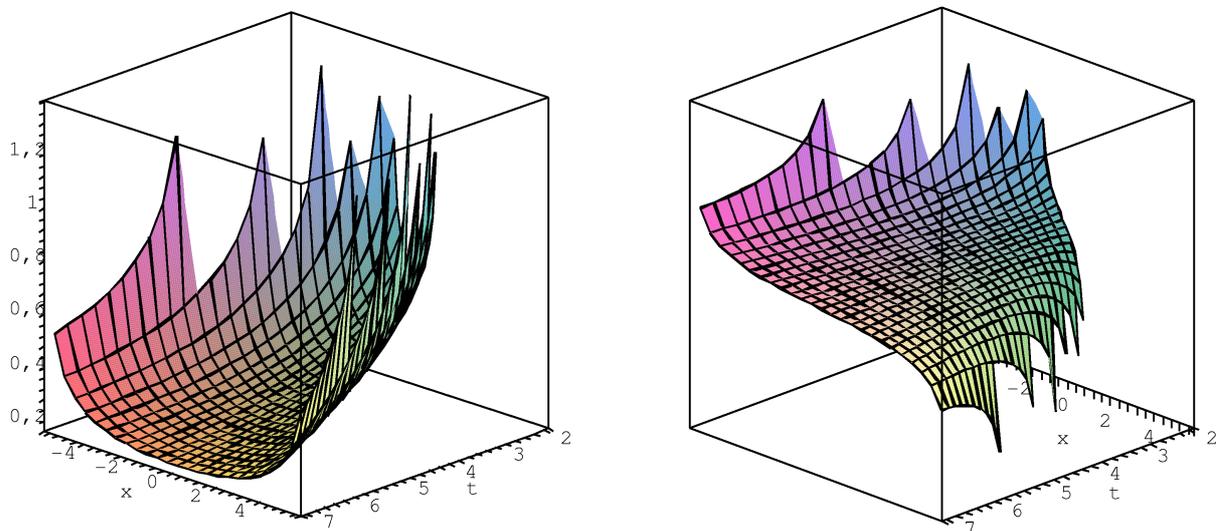


Рис. 29: Структура отображения $h \mapsto \operatorname{Arccoth} h$ (вещественная и мнимая части).

5.6 Дробнолинейное преобразование: $h \mapsto (ah + b)(ch + d)^{-1}$

Определим дробно-линейную функцию соотношением:

$$w = \frac{ah + b}{ch + d} = D_{cd}^{ab}(h), \tag{63}$$

где a, b, c, d — произвольные двойные числа, удовлетворяющие условию $ad - bc \neq 0$. Будем называть дробно-линейное преобразование (63) *неособым*, если $a \notin \text{Con}(0)$ и $c \notin \text{Con}(0)$. В дальнейшем будем рассматривать только неособые дробнолинейные преобразования. Особенностью определения (63) (даже в рассматриваемом нами случае неособого дробно-линейного преобразования) является наличие конуса $\text{Con}(-d/c)$ на котором это определение теряет смысл. Далее мы будем исключать из области определения функции (63) линию конуса $\text{Con}(-d/c)$. Имеют место следующие утверждения:

1. Неособая дробно-линейная функция в своей области определения осуществляет взаимно-однозначное и непрерывное отображение $\mathcal{H} \setminus \text{Con}(-d/c)$ на \mathcal{H} , которое является конформным. Обратная функция также является дробно-линейной и имеет вид:

$$h = \frac{dw - b}{a - cw} = D_{-c,a}^{d,-b}(w) = (D^{-1})_{cd}^{ab}(h). \tag{64}$$

2. Композиция дробно-линейных отображений $D_2 \circ D_1$ является дробно-линейным отображением. При этом совокупность всех дробно-линейных преобразований образует группу, изоморфную $SL(2, \mathcal{H})$. Отметим, что неособые дробно-линейные преобразования подгруппы не образуют.
3. Дробно-линейная функция отображает гиперболическую окружность $HS_R(h_0)$ с уравнением $|h - h_0|^2 = \pm R^2$ в гиперболическую окружность.
4. Вводя определение точек h и h^\vee сопряженных относительно окружности $HS_R(h_0)$, аналогичное определению на комплексной плоскости (сопряженные точки лежат на одном луче, исходящем из центра — одна внутри, другая снаружи окружности и их гиперболические расстояния до окружности удовлетворяют соотношению: $|h - h_0| \cdot |h^\vee - h_0| = R^2$), можно сформулировать еще одно геометрическое свойство дробно-линейных отображений: точки, сопряженные относительно $HS_R(h_0)$, переходят в точки сопряженные относительно окружности $D(HS_R(h_0))$.

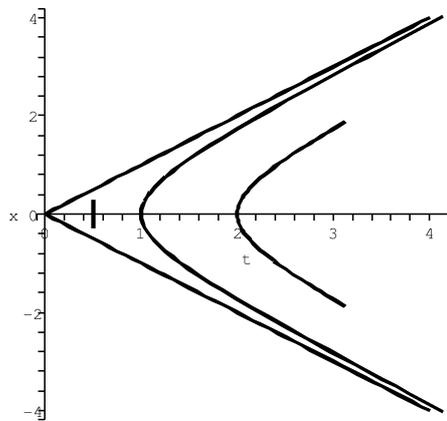


Рис. 30: Сопряженные относительно единичной гиперболической окружности кривые (вертикальный отрезок сопряжен правой гиперболе относительно левой).

Доказательство вышеперечисленных утверждений формально повторяет доказательство аналогичных утверждений в теории дробно-линейных функций комплексной переменной. Единственное отличие, которое необходимо оговаривать на каждом шаге, заключается в

исключении из рассмотрения делителей нуля в тех случаях, когда используется операция деления.

Наглядное действие операции сопряжения относительно гиперболической окружности показано на рис. 30.

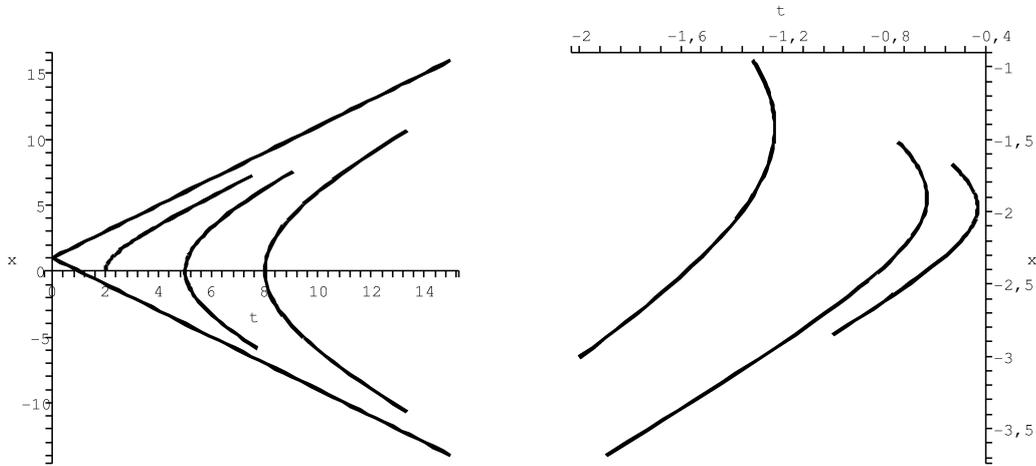


Рис. 31: Отображение дуг гиперболических окружностей в дуги окружностей при дробно-линейном отображении $h \mapsto (2h + j)/(1 - jh)$. Пара прямых линий на левом рисунке изображает конус $\text{Con}(j)$.

Наглядный вид рассмотренного отображения представлен на рис. 32.

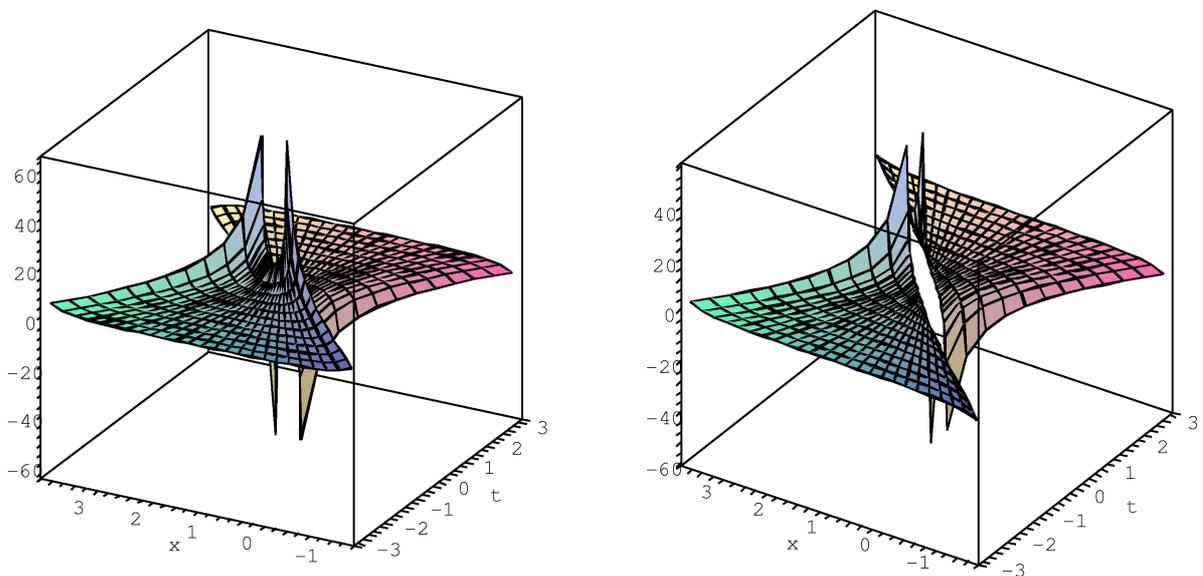


Рис. 32: Структура отображения $h \mapsto (2h + j)/(1 - jh)$ (вещественная и мнимая части).

Рассмотрим, наконец, гиперболическую версию функции Жуковского:

$$Z(h) \equiv \frac{1}{2} \left(h + \frac{1}{h} \right).$$

Эта функция отображает единичную гиперболическую окружность $\text{HS}_1(0)$ в куски координатных осей, двукратно накрывая их (см. рис. 33).

При этом, как и в случае комплексной переменной, функция Жуковского двулистка: внешность единичной окружности и ее внутренность она отображает на двойную плоскость. В точках $\pm 1, \pm j$ конформность функции $Z(h)$ нарушается, поскольку в этих точках $Z'(h) = 0$. Наглядный вид гиперболической функции Жуковского представлен на рис. 34.

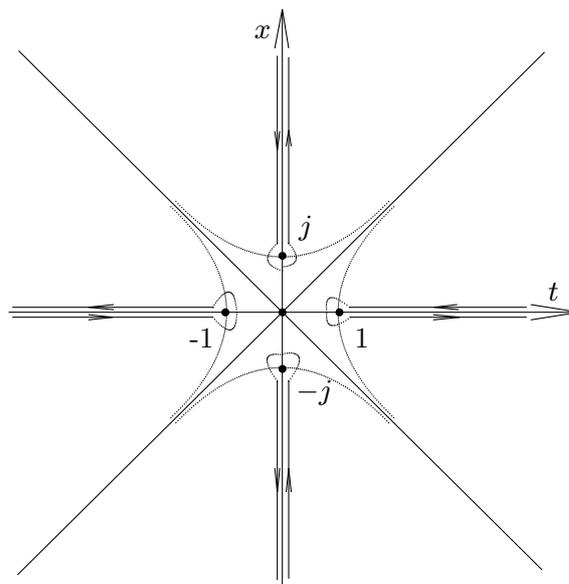


Рис. 33: Действие гиперболической функции Жуковского.

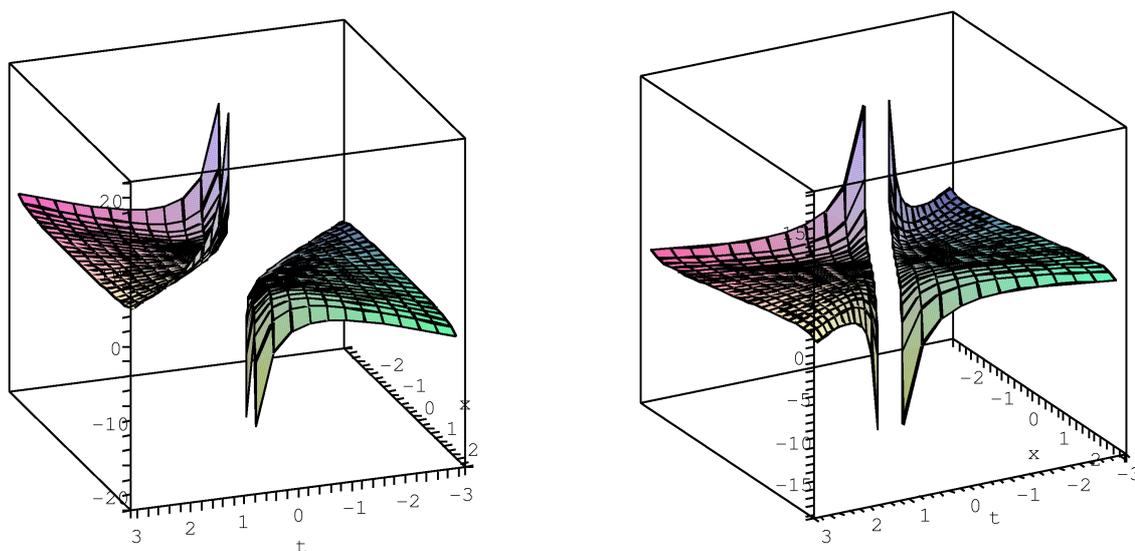


Рис. 34: Структура отображения $h \mapsto (h + h^{-1})/2$ (вещественная и мнимая части).

Риманова поверхность двузначной функции $Z^{-1}(h)$ представлена на рис. 35.

6 Решение плоских начально-краевых задач 2-мерной теории поля

По аналогии с приложениями конформных преобразований на стандартной (эллиптической) комплексной плоскости, h -аналитические функции могут использоваться для решения задач теории поля, связанных с 2-мерным волновым уравнением: $\square_2 \varphi = 0$. Непопулярность гиперболических конформных преобразований связана, в первую очередь, с нетрадиционностью постановки начально-краевых задач, которые решаются методом гиперболических конформных преобразований. Действительно, применение конформных преобразований на плоскости комплексной переменной для решения задач эллиптического типа, связанных с уравнением Лапласа, опирается на отмечавшееся выше обстоятельство: аналитическая функция $w = f(z)$,

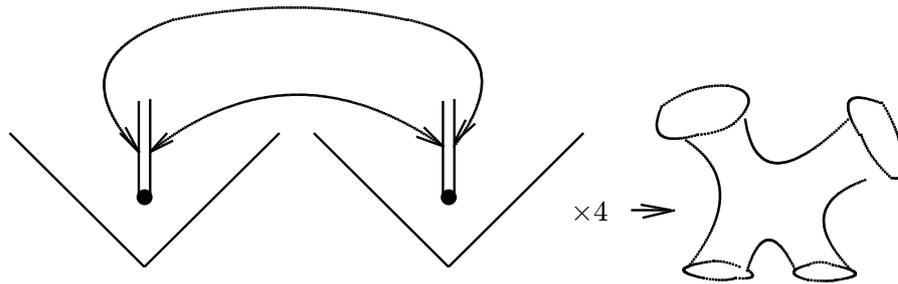


Рис. 35: Риманова поверхность обратной функции Жуковского Z^{-1} . Слева — правило склейки двух клиньев вдоль разреза на координатной оси. Четыре экземпляра таких "полуфабрикатов" склеиваются вместе в поверхность, топологически эквивалентную изображенной справа.

вещественная часть которой представляет решение некоторой краевой задачи, отображает границу области вне источников поля на прямую $\operatorname{Re} w = \operatorname{const}$. Это требование отражает условие постоянства потенциала на границе области, в которой решается уравнение Лапласа и обеспечивает единственность решения с точностью до произвольного выбора значения потенциала на границе.

В начально-краевых задачах гиперболического типа используется другая постановка задачи: рассматривается пространственно-временная область в виде полуограниченного цилиндра⁸ $D^3 \times R_+$ (или топологически эквивалентная ей) и задаются начальные условия на начальной поверхности $D^3 \times \{0\}$ (начальные значения для поля и его производных по времени) и граничные условия на боковой поверхности $\partial D^3 \times R_+$ (значения поля и его пространственных производных). Если задача поставлена корректно, то эти начально-краевые данные определяют единственное решение с хорошими свойствами во все моменты времени $t > 0$. В 2-мерном пространстве времени граница области представляет собой времениподобный прямоугольник $I \times R_+$ или топологически эквивалентную ему фигуру

Использование конформных преобразований, осуществляемых h -аналитическими функциями, предполагает перенос постановки эллиптической задачи на плоскости на гиперболические задачи на плоскости. Другими словами, h -аналитическая функция $w = f(h)$ представляет решение некоторой начально-краевой задачи гиперболического типа, а именно той, для которой эта функция переводит 1-мерную границу области вне источников в линию $\operatorname{Re} w = \operatorname{const}$. Очевидно, такая постановка задачи отличается от стандартной, поскольку начально-краевые условия заменяются на *задание формы поверхности (линии) постоянной фазы*. Эта поверхность имеет пространственно-временной характер. В принципиальном отношении она может быть получена с помощью измерений волнового поля φ в разных точках пространства в разные моменты времени с помощью надлежащего (достаточно большого) числа приборов. Точки-события пространства-времени, для которых показания приборов дают $\varphi = \operatorname{const}$ и образуют искомую поверхность. Согласно проведенным выше рассмотрениям, форма этой поверхности однозначно определяет решение волнового уравнения. Однако такая постановка задачи обычно не используется на практике, поскольку данные "размазаны" в пространстве и времени.

В качестве примера рассмотрим задачу об определении волнового поля, которое на гиперболической окружности $t^2 - x^2 = R^2$ принимает постоянное значение φ_0 . В соответствии с результатами раздела 5.2, подходящее решение имеет вид: $\varphi = \varphi_0 + \ln[(t^2 - x^2)/R^2] = \operatorname{Re}(\ln h + \varphi_0)$. Его 3-мерный график и последовательные временные сечения представлены на рисунке 36.

⁸Здесь D^3 — 3-мерный шар, $R_+ = [0, \infty)$.

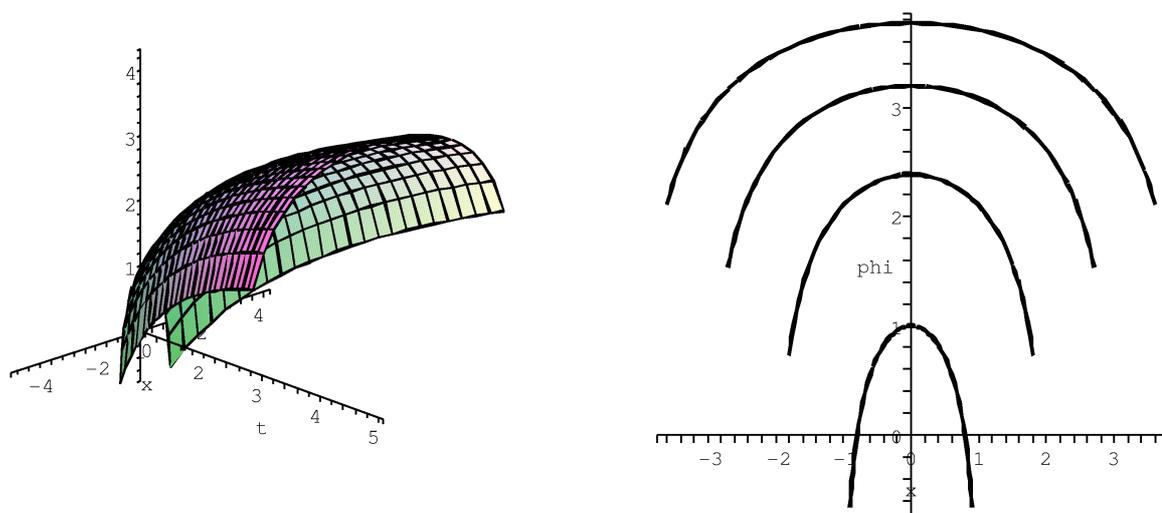


Рис. 36: Волновое решение, постоянное на гиперболической окружности ($R = 1$, $\varphi_0 = 1$). На правом рисунке представлены последовательные временные сечения поверхности, изображенной на левом рисунке $t = 1, 2, 3, 4$.

7 Заключение

Мы показали в общих чертах фундаментальную для физики аналогию между комплексными и двойными числами. Алгебраическое описание геометрии и физики в 2-мерном пространстве-времени с помощью двойных чисел не менее привлекательно, чем описание задач на евклидовой плоскости с помощью комплексных чисел. Мы оставили без внимания ряд проблем (в основном чисто математического характера), возникающих на этом пути, апеллируя более к соображениям наглядности, чем строгости. Трудности разработки анализа на основе естественной метрической (т. е. в рассматриваемом нами случае — псевдоевклидовой) топологии хорошо известны специалистам в области математической теории относительности и именно они (наряду с трудностями психологического характера) послужили причиной сравнительно слабого интереса к двойным числам у физиков и математиков в отношении их физических приложений. На наш взгляд эти трудности принципиально преодолимы и, более того, то, что принято считать "трудностями" на самом деле является выражением некоторых новых фундаментальных концепций, которые геометрия пространства-времени привносит в физику и математику.

Отмеченное выше сходство между комплексной и двойной плоскостью продолжается и на векторные поля. Аналогично тому как каждой аналитической функции на комплексной плоскости сопоставляется то или иное потенциальное и соленоидальное векторное поле, связанное с источниками, вихрями, диполями, квадрупольями и т.п. в точках, где утрачивается аналитичность, любой h -аналитической функции можно также придать смысл некоторого векторного поля в 2-мерном пространстве-времени, точечные особенности которого обладают уже не эллиптическими, а гиперболическими свойствами. У нас появляется возможность говорить о гиперболических источниках и стоках, гиперболических вихрях и вихреисточниках, мультиполях, гиперболической функции Жуковского и т.д. и т.п. Генерируемые этими h -аналитическими функциями векторные поля обладают такими замечательными свойствами, как потенциальность и соленоидальность, понимаемыми, разумеется, в гиперболическом смысле. И если гиперболическая потенциальность рассматривалась в физике и раньше, то гиперболическая соленоидальность, насколько нам известно, как самостоятельное понятие, характеризующее идеальные векторные поля в пространстве-времени, возникает в обсуждаемом нами контексте впервые.

Среди известных физикам фундаментальных полей нет ни одного, для описания которого понятие гиперболической соленоидальности являлось бы необходимым. Возможно, именно

поэтому оно и оказалось невостребованным. Возникает весьма интригующий вопрос, вполне закономерный в рамках обсуждаемого нами подхода: таких полей не существует в реальности объективно, или это лишь субъективный пробел в наших современных знаниях о фундаментальных взаимодействиях? Разработка данного вопроса приводит к идее проведения экспериментов, которые подтвердили бы факт существования или отсутствия в природе полей, обладающих гиперболической соленоидальностью. Отметим, что в математическом плане такие векторные поля могут быть описаны и изучены с помощью h -аналитических функций двойной переменной так же детально и естественно, как и их аналоги на комплексной плоскости.

Еще одно интересное следствие, которое предоставляют h -аналитические функции двойной переменной, связано с возможностью трактовать задаваемые ими конформные преобразования как переходы между неинерциальными системами отсчета в плоском двумерном пространстве-времени. Такое рассмотрение группы конформных симметрий естественным образом раздвигает рамки двумерной специальной теории относительности, в которой обычно задействуются лишь изометрические преобразования, трактуемые как переходы между инерциальными системами отсчета. Подобной возможности (из-за отсутствия соответствующей бесконечномерной конформной группы симметрий) нет в трех- и четырехмерном псевдоевклидовых пространствах, зато она есть в двумерии, а также в некоторых трех- и четырехмерных плоских финслеровых геометриях, например, в пространствах с метрикой Бервальда-Моора, частным случаем которых, кстати, является и пространство двойных чисел [3, 4]. Идея фундаментальной роли групп симметрий (как линейных изометрических, так и нелинейных конформных) получила широкое распространение в физике, однако использование бесконечномерных конформных групп было по существу ограничено использованием лишь двумерных геометрий с квадратичными метриками. При переходе от квадратичных метрических форм пространства-времени к n -арным метрическим формам это ограничение на низкую размерность иногда снимается и проблема финслеровых расширений СТО и ОТО приобретает актуальность и перспективу. Следует подчеркнуть, что речь идет именно о расширении, а не о радикальном отказе от старых представлений, так как предполагается, что группы симметрий, на которых базировались предыдущие физико-математические конструкции, должны оказаться частными (предельными) случаями (или подгруппами) новых бесконечномерных групп симметрий и связанных с ними n -арных геометрий. Однако ввиду ограниченности рамок журнальной статьи авторы планируют развить данную тему уже в следующей публикации.

Авторы выражают свою благодарность сотрудникам НИИ ГСГФ В.М.Чернову и Г.И.Гарасько за обсуждение материала статьи и ценные замечания.

Литература

- [1] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973.
- [2] Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1977.
- [3] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., Тетру, 2009.
- [4] Павлов Д.Г. Обобщение аксиом скалярного произведения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (1), 2004, с.5-19.
- [5] Шабат Б.О. Введение в комплексный анализ. М., Наука, 1985.

h -HOLOMORPHIC FUNCTIONS OF DOUBLE VARIABLE AND THEIR APPLICATIONS

D.G. Pavlov¹, S.S. Kokarev^{1,2}

¹ *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fрязино, Russia*

² *RSEC Logos, Yaroslavl, Russia*

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

We consider complex-differentiable functions of double variable and their essential properties analogical to the properties of functions of standard complex variable: Cauchy theorem and Cauchy formula, hyperbolic harmonicity, general properties of h -conformal transformations and such transformations, yielded by elementary functions. The question on applications of h -conformal transformations for solving of 2-dimensional problems of mathematical physics is discussed.

Key Words: h -holomorphic function, conformal transformation, hyperbolic Cauchy theorem, hyperbolic polar coordinates.