РЕАЛЬНАЯ ЧАСТЬ НЕВЫРОЖДЕННОГО ПОЛИЧИСЛА И СПЕЦИАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФОРМА

Г.И. Гарасько

ФГУП Всероссийский электротехнический институт, Москва, Россия
НИИ Гиперкомлексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

gri9z@mail.ru, gri9z.wordpress.com

Из множества различных инвариантных полилинейных форм, которые могут быть построены в пространствах невырожденных поличисел, выделена линейная инвариантная форма, тесно связанная с понятиями реальной части невырожденных поличисел и временно́й координатой.

Ключевые слова: невырожденные поличисла, реальная часть, экспоненциальное представление, временная координата

1 Введение

Понятия реальной части комплексного числа $z \in C$ вводится естественно и при этом не возникает никаких неоднозначностей в силу самого определения комплексного числа, связанного со специальным базисом $1, i$:

$$z = x + iy\,, \qquad Re(z) \equiv x\,. \tag{1}$$

Для поличисел $X \in H_4$ [1, 2], рассматриваемых в специальном "ортонормированном" базисе $1, j, k, jk$, также все "понятно":

$$X = x^0 \cdot 1 + x^1 \cdot j + x^2 \cdot k + x^3 \cdot jk\,, \qquad Re(X) \equiv x^0\,. \tag{2}$$

Но что является реальной частью поличисел H_3 или в общем случае поличисел $P_{k+2\cdot m}$, и как эту реальную часть вычислить, находясь в произвольном базисе?

Понятно, что реальная часть поличисла должна быть координатой при единице алгебры, как и временна́я координата [1, 2]. Также как и в случае с временно́й координатой, значение ее будет зависеть от того, каким образом будут определены остальные базисные векторы. При определении временно́й координаты предложено [1, 2] выбирать базис, в котором имеет место экспоненциальное представление невырожденного поличисла: $E_0 \equiv 1, E_1, E_2, ..., E_{n-1}$. При этом любое невырожденное линейное преобразование базисных элементов $E_1, E_2, ..., E_{n-1}$ без использования элемента $E_0 \equiv 1$ не изменит значение коэффициента при $E_0 \equiv 1$.

Таким образом, естественно считать, что реальная часть невырожденного поличисла совпадает с временно́й координатой. Все же следует понимать, что дополнительные условия, налагаемые на выбор базисных элементов $E_1, E_2, ..., E_{n-1}$ в этих двух случаях могут быть различными.

Итак, для того чтобы вычислить $Re(X)$, $X \in P_{k+2\cdot m}$ надо перейти в базис $E_0 \equiv 1, E_1, E_2, ..., E_{n-1}$ [1, 2], координата при E_0 и будет реальной частью поличисла:

$$X = x^0 E_0 + x^1 E_1 + x^2 E_2 + ... + x^{n-1} E_{n-1}\,, \qquad x^0 \equiv Re(X)\,. \tag{3}$$

Такое определение $Re(X)$ и временно́й координаты является инвариантным, так как связано с выделенным специальным базисом. Поэтому естественно поставить задачу о возможности получения $Re(X)$, не переходя к базису $E_0 \equiv 1, E_1, E_2, ..., E_{n-1}$.

Поличисловая система в некотором базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ полностью определяется заданием структурного тензора p^r_{ij}:

$$e_i\, e_j = p^r_{ij}\, e_r\,. \tag{4}$$

С помощью структурного тензора и тензорных операций можно построить множество ковариантных тензоров, например:

$$q_{ij} = p^r_{il}\, p^l_{rj}\,, \qquad q_{ijk} = p^r_{il}\, p^l_{jm}\, p^m_{kr}\,. \tag{5}$$

Используя такие ковариантные тензоры, легко определить инвариантные полилинейные формы на множестве поличисел:

$$(X,Y) \equiv x^i y^j q_{ij}\,, \qquad (X,Y,Z) \equiv x^i y^j z^k q_{ijk}\,. \tag{6}$$

Важно, что значения таких форм не зависит от того, в каком базисе производятся вычисления.

2 Линейная форма в пространстве невырожденных поличисел

Покажем, что в пространстве невырожденных поличисел $X \in P_{k+2\cdot m}$ линейная инвариантная форма

$$R(X) \equiv r_i\, x^i\,, \qquad r_i \equiv \frac{1}{n}\, p^l_{il} \tag{7}$$

есть реальная часть поличисла, причем вычисления можно производить в любом базисе:

$$Re(X) = R(X) = r_i\, x^i = \frac{1}{n}\, p^l_{il}\, x^i\,. \tag{8}$$

Рассмотрим поличисло $X \in P_{k+2\cdot m}$ в изотропном базисе [1, 2] $e_1, e_2,\ ..., e_k,\ e_{k+1}, e_{k+2}, ..., e_{n-1}, e_n$. В этом же базисе вычислим свертки:

$$p^j_{1j} = 1,\ ...\ ,\ p^j_{kj} = 1,\ p^j_{k+1\,j} = 2,\ p^j_{k+2\,j} = 0,\ ...\ ,\ p^j_{n-1\,j} = 2,\ p^j_{nj} = 0\,. \tag{9}$$

Тогда, если ξ^i - координаты поличисла X в изотропном базисе, получим следующее выражение:

$$R(X) = \frac{1}{n}\left[\xi^1 + ... + \xi^k + 2\left(\xi^{k+1} + \xi^{k+3} + ... + \xi^{n-1}\right)\right]\,. \tag{10}$$

Осталось доказать, что выражение в правой части (10) для любой невырожденной системы поличисел есть $Re(X)$, или временна́я координата x^0. Для этого воспользуемся методом математической индукции. Так как невырожденные поличисла $P_{k+2\cdot m}$ суть прямая сумма k алгебр действительных чисел и m алгебра комплексных чисел, необходимо проверить выполнение утверждения для комплексных и двойных чисел, предположить, что оно верно для $P_{k+2\cdot m}$ и доказать его для алгебр $P_{(k+1)+2\cdot m}$ и $P_{k+2\cdot(m+1)}$.

Для комплексных чисел $z = x + iy$ в базисе $1, i$ имеем

$$p^j_{1j} = 2,\ \ p^j_{2j} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R(z) = x \equiv Re(z)\,. \tag{11}$$

Для двойных чисел $z = x + jy$ в базисе $1, j$ -

$$p^j_{1j} = 2,\ \ p^j_{2j} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R(z) = x \equiv Re(z)\,; \tag{12}$$

или в изотропном базисе e_1, e_2, $z = \xi\, e_1 + \eta\, e_2$ -

$$p^j_{1j} = 1,\ \ p^j_{2j} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad R(z) = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \equiv Re(z)\,. \tag{12^a}$$

Предположим, что для $P_{k+2\cdot m}$ уже введен базис $E_0, E_1, ..., E_{n-1}$, тогда координата при E_0 в этом базисе есть $Re(X)$ для $X \in P_{k+2\cdot m}$. При переходе к алгебре гиперкомплексных чисел $X' \in P_{(k+1)+2\cdot m}$,

$$P_{(k+1)+2\cdot m} = P_{k+2\cdot m} \bigoplus R \tag{13}$$

построение базиса $E'_0, E'_1, ..., E'_{n-1}, E'_n$ осуществляется блочной матрицей, которая содержит единичную матрицу и матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}\,. \tag{14}$$

Преобразование координат осуществляется соответствующей обратной транспонированной матрицей:

$$\begin{pmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{1}{n+1} \\ -\frac{n}{n+1} & \frac{n}{n+1} \end{pmatrix}\,. \tag{15}$$

Поэтому

$$Re(X') = \frac{n}{n+1}\,Re(X) + \frac{1}{n+1}\,\xi\,, \tag{16}$$

и формула

$$Re(X) = \frac{1}{n}\left[\xi^1 + ... + \xi^k + 2\left(\xi^{k+1} + \xi^{k+3} + ... + \xi^{n-1}\right)\right] \tag{17}$$

сохраняет свой вид при переходе от $P_{k+2\cdot m}$ к $P_{(k+1)+2\cdot m}$. Аналогично при переходе к алгебре гиперкомплексных чисел $X' \in P_{k+2\cdot(m+1)}$,

$$P_{k+2\cdot(m+1)} = P_{k+2\cdot m} \bigoplus C \tag{18}$$

построение базиса $E'_0, E'_1, ..., E'_{n-1}, E'_n, E'_{n+1}$ осуществляется блочной матрицей, которая содержит единичную матрицу и матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{n} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Преобразование координат осуществляется соответствующей обратной транспонированной матрицей:

$$\begin{pmatrix} \frac{n}{n+2} & \frac{2}{n+2} & 0 \\ -\frac{n}{n+2} & \frac{n}{n+2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Поэтому

$$Re(X') = \frac{n}{n+2}\,Re(X) + \frac{2}{n+2}\,\xi^n\,, \tag{21}$$

и формула (17) сохраняет свой вид при переходе от $P_{k+2\cdot m}$ к $P_{k+2\cdot(m+1)}$.

3 Заключение

В настоящей работе доказано, что реальная часть $Re(X)$ любого невырожденного поличисла $X \in P_{k+2\cdot m}$ в произвольном базисе вычисляется по формуле

$$Re(X) = \frac{1}{n}\,p^l_{il}\,x^i\,, \tag{22}$$

где x^i - координаты поличисла X, а p^l_{il} - структурный тензор алгебры $P_{k+2\cdot m}$. Если E_0 - единица алгебры, то для невырожденных поличисел полезным является разбиение поличисла X на действительную и мнимую составляющие:

$$X = Re(X)E_0 + [X - Re(X)E_0]\,. \tag{23}$$

Так для любого поличисла X справедлива следующая формула:

$$\left|e^X\right| = e^{Re(X)}, \tag{24}$$

- и поличисло

$$Y = e^{X - Re(X)E_0} \tag{25}$$

является унимодулярным.

Так как временна́я координата $x^0 = Re(X)$ также является инвариантной величиной и вычисляется по тем же формулам, что и реальная часть невырожденного поличисла, формулы (22 - 25) можно переписать следующим образом:

$$x^0 = \frac{1}{n}\,p^l_{il}\,x^i\,, \tag{26}$$

$$X = x^0 E_0 + \left[X - x^0 E_0\right]\,, \tag{27}$$

$$\left|e^X\right| = e^{x^0}\,, \tag{28}$$

$$Y = e^{X - x^0 E_0} \tag{29}$$

является унимодулярным поличислом при любом X.

Литература

[1] Гарасько Г.И., Павлов Д.Г. Геометрия невырожденных поличисел // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(7), т. 4, 2007, стр. 3-25.

[2] Гарасько Г. И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., ТЕТРУ, 2009.

REAL PART OF THE NON-DEGENERATE POLY NUMBER AND A SPECIAL LINEAR FORM

G.I. Garasko

Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia
Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia
gri9z@mail.ru

The set of the various poly linear forms that can be constructed in the spaces of the non-degenerate poly numbers contains the linear invariant form closely related to the notion of real part of the non-degenerate poly number and to the time coordinate.

Key Words: non-degenerate polynumbers, real part, scientific notation, time coordinate.