ТОЖДЕСТВЕННО РАЗРЕШИМЫЕ ФИНСЛЕРОВЫ ГЕОМЕТРИИ

Г.И. Гарасько

ФГУП Всероссийский электротехнический институт, Москва, Россия
НИИ Гиперкомлексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия
gri9z@mail.ru, gri9z.wordpress.com

Предложен алгоритм поиска тождественно разрешимых финслеровых геометрий, который позволяет находить и некоторые разрешимые финслеровы геометрии, не являющиеся тождественно разрешимыми. Такой алгоритм тесно связан с отображением пространства, на единицу меньшей размерности, чем размерность самого финслерова пространства, на себя. Причем это отображение должно совпадать с себе обратным и обладать еще рядом свойств. Для пространств произвольной размерности тождественному отображению соответствует евклидово пространство, отображению с изменением знака у всех координат - псевдоевклидово пространство и отображению с инверсией всех координат соответствует пространство с метрикой Бервальда - Моора.

Ключевые слова: финслерова геометрия, тождественная разрешимость финслеровых пространств, отображение, евклидово пространство, псевдоевклидово пространство, пространство с метрикой Бервальда-Моора, метрическая функция.

1 Введение

Невырожденные квадратичные и поличисловые геометрии являются разрешимыми [1]. Это понятие было введено вначале для однородных форм и финслеровых пространств, определяемых через эти формы. Так если $m > 1$, $\xi^1\xi^2 ... \xi^n$ - касательное пространство в точке $M(x^1x^2 ... x^n)$ n-мерного финслерова пространства $x^1x^2 ... x^n$ с метрической функцией

$$L(\xi; x) = \sqrt[m]{g_{i_1 i_2 ... i_m}(x)\xi^{i_1}\xi^{i_2}...\xi^{i_m}} \tag{1}$$

и тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать в виде

$$g^{i_1 i_2 ... i_m}(x)p_{i_1 i_2 ... 1_m} - const = 0\,, \tag{2}$$

где p_i - компоненты обобщенного импульса, то финслерово пространство с метрической функцией (1) называется разрешимым. При условии, что найдется такая система координат в которой матрицы $(g_{i_1 i_2 ... i_m}(x))$, $\left(g^{i_1 i_2 ... i_m}(x)\right)$ совпадают и в формуле (2) $const = 1$, формально точечное уравнение индикатрисы и тангенциальное уравнение индикатрисы выражаются через метрическую функцию и записываются единообразно:

$$L(\xi; x) = 1\,, \qquad L(p; x) = 1\,.$$

В этом случае будем говорить, что финслерова геометрия с метрической функцией $L(\xi; x)$ ***тождественно разрешима***.

Определение 1. *Финслерова геометрия с метрической функцией $L(\xi; x)$* ***тождественно разрешима****, если найдется такая система координат, в которой точечное и тангенциальное уравнения индикатрисы можно записать в виде:*

$$L(\xi; x) = 1\,, \qquad L(p; x) = 1\,, \tag{3}$$

где L - в обоих случаях одна и та же функция $2n$ действительных переменных.

Замечание: одновременное выполнение уравнений (3) возможно не в любой систем координат, а лишь в специальной системе (или специальных системах) координат, так как ξ - контравариантный, а p - ковариантный тензор. Финслерова геометрия, описывающая движение нерелятивистской частицы массы m в потенциальном поле $U(t,x,y,z)$ имеет метрическую функцию [1]:

$$L(dt,dx,dy,dz) = mc^2\,dt - m\,\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2\,dt} + U(t,x,y,z)\,dt\,. \tag{4}$$

В касательном пространстве ξ_t,ξ_x,ξ_y,ξ_z точечное уравнение индикатрисы запишется следующим образом:

$$mc^2\,\xi_t - m\,\frac{\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2}{2\,\xi_t} + U(t,x,y,z)\,\xi_t = h_1\,, \tag{5}$$

где h_1 - единица длины в рассматриваемом финслеровом пространстве. Тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать в виде:

$$p_t = mc^2 + \frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2\,m} + U(t,x,y,z)\,, \tag{6}$$

или в виде:

$$mc^2\,\frac{1}{p_t} + \frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2\,m\,p_t} + U(t,x,y,z)\,\frac{1}{p_t} = 1\,. \tag{7}$$

Таким образом, в данном пространстве точечное и тангенциальное уравнения индикатрисы в некоторой специальной системе координат можно записать следующим образом:

$$L(\xi_t,\xi_x,\xi_y,\xi_z;t,x,y,z) = h_1\,, \qquad L'(p_t,p_x,p_y,p_z;t,x,y,z) = h_2\,, \tag{8}$$

где h_2 - некоторая константа, а

$$L(\eta_t,\eta_x,\eta_y,\eta_z;t,x,y,z)\,, \qquad L'(\eta_t,\eta_x,\eta_y,\eta_z;t,x,y,z) \tag{9}$$

- "весьма похожие" функции, принадлежащие, как мы будем говорить, некоторому фиксированному классу функций. Поэтому такую финслерову геометрию также можно считать разрешимой финслеровой геометрией.

Определение 2. *Финслерова геометрия с метрической функцией $L(\xi;x)$ **разрешима** в классе функций $\mathfrak{F}$, если найдется такая система координат, в которой точечное и тангенциальное уравнения индикатрисы можно записать в виде:*

$$L(\xi;x) = h_1\,, \qquad L'(p;x) = h_1\,, \tag{10}$$

где h_1,h_2 - числовые постоянные, а $L,L' \in \mathfrak{F}$.

Понятие *разрешимости* финслеровой геометрии содержит в себе некоторую неоднозначность, а именно: выбор класса функций $\mathfrak{F}$. Обычно бывает интуитивно понятно, как выбирать множество $\mathfrak{F}$ в каждом конкретном случае. Неразрешимыми финслеровыми пространствами будем называть пространства, для которых функция Финслера в любой системе координат и при любой записи тангенциального уравнения индикатрисы качественно отличается от метрической функции. Такие пространства не содержат "значимых" групп симметрии, хотя разрешимые пространства также могут не содержать "значимых" групп симметрии. Понятия разрешимости и особенно неразрешимости финслеровых пространств требуют уточнения. Понятие же *тождественно разрешимого* финслерова пространства вполне однозначно, поэтому удобнее (правильнее) искать *тождественно разрешимые* финслеровы пространства, а затем с их помощью строить *разрешимые* финслеровы пространства в некотором классе функций $\mathfrak{F}$. Например, если метрическая функция $L(x;\xi)$ определяет *тождественно разрешимую* финслерову геометрию, то метрическая функция

$$L'(x;\xi) \equiv \kappa(x) L(x;\xi)\,, \qquad \kappa(x) > 0\,,$$

конформно связанного [2] с исходным, финслерова пространства определяет в том же координатном пространстве *разрешимую* финслерову геометрию, так как точечное и тангенциальное уравнения индикатрисы имеют в этом случае вид:

$$L'(\xi;x) = h_1\,, \qquad L'(p;x) = h_1\cdot\kappa(x)\,.$$

Приведем пример финслеровой геометрии, которую можно обоснованно назвать *неразрешимой финслеровой геометрией.* В пространстве x^1, x^2, x^3, x^4 определим финслерову геометрию, задав элемент длины

$$ds = \sqrt[4]{(dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 + (dx^4)^4}\,. \tag{11}$$

Естественно выбрать класс функций $\mathfrak{F} \ni L, L'$ как множество функций от $P_4(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$, или $P'_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$ - однородных полиномов четверного порядка, например:

$$L(\xi) = \sqrt[4]{\omega_{i_1 i_2 i_3 i_4} \xi^{i_1} \xi^{i_2} \xi^{i_3} \xi^{i_4}}\,, \qquad L'(p) = \sqrt[4]{\omega^{i_1 i_2 i_3 i_4} p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3} p_{i_4}}\,, \tag{12}$$

где $\omega_{i_1 i_2 i_3 i_4}$, $\omega^{i_1 i_2 i_3 i_4}$ - числовые тензоры, а p_i - компоненты обобщённого импульса, в данном случае

$$p_i = \frac{(dx^i)^3}{[(dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 + (dx^4)^4]^{\frac{3}{4}}}\,. \tag{13}$$

Метрическая функция, фигурирующая в формуле (11), относится к определенному выше классу функций $\mathfrak{F}$.

Тангенциальное уравнение индикатрисы для финслеровой геометрии с элементом длины (11) можно записать как

$$p_1^{\frac{4}{3}} + p_2^{\frac{4}{3}} + p_3^{\frac{4}{3}} + p_4^{\frac{4}{3}} - 1 = 0\,. \tag{14}$$

Оно не может быть с помощью преобразования координат или перехода к эквивалентному уравнению приведено к виду

$$\sqrt[4]{\omega^{i_1 i_2 i_3 i_4} p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3} p_{i_4}} = h_2\,, \tag{15}$$

или к виду

$$F\left(\omega^{i_1 i_2 i_3 i_4} p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3} p_{i_4}\right) = h_2\,, \tag{16}$$

где $F(y)$ - функция одной действительной переменной y, а поэтому рассматриваемое финслерово пространство является неразрешимым в классе функций $\mathfrak{F}$.

Такое финслерово пространство, кроме группы сдвигов, не обладает другими непрерывными линейными преобразованиями, сохраняющими метрику. А группа конформных преобразований, кроме преобразований сдвига, содержит единственное непрерывное преобразование - общее масштабное преобразование.

2 Тождественно разрешимые двумерные финслеровы пространства

Рассмотрим двумерное финслерово пространство x, y с метрической функцией $L(\xi, \eta; x, y)$, где ξ, η - касательное пространство в точке (x, y) основного пространства. Так как функция $L(\xi, \eta; x, y)$ по первым двум аргументам является положительно однородной первого порядка, то в области $\xi > 0$

$$L(\xi, \eta; x, y) = \xi\, L\left(1, \frac{\eta}{\xi}; x, y\right) \equiv \xi\, f\left(\frac{\eta}{\xi}\right)\,, \tag{17}$$

где f - функция одного действительного аргумента, переменные x, y будем считать параметрами. Компоненты обобщенного импульса определяются формулами:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \xi} = f\left(\frac{\eta}{\xi}\right) - \left(\frac{\eta}{\xi}\right) \dot{f}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)\,, \qquad q = \frac{\partial L}{\partial \eta} = \dot{f}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)\,. \tag{18}$$

Для того чтобы метрическая функция $L(\xi, \eta; x, y)$ определяла тождественно разрешимую финслерову геометрию, необходимо выполнение условия

$$\left[f\left(\frac{\eta}{\xi}\right) - \left(\frac{\eta}{\xi}\right) \dot{f}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)\right] \cdot f\left[\frac{\dot{f}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}{f\left(\frac{\eta}{\xi}\right) - \left(\frac{\eta}{\xi}\right) \dot{f}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}\right] = 1\,. \tag{19}$$

Введем обозначение
$$z \equiv \frac{\eta}{\xi}\,. \tag{20}$$

Тогда уравнение (19) для функции $f(z)$ одной действительной переменной z перепишется следующим образом:
$$\left[f(z) - z\dot{f}(z)\right] \cdot f\left[\frac{\dot{f}(z)}{f(z) - z\dot{f}(z)}\right] = 1\,. \tag{21}$$

Перейдем к новой неизвестной функции
$$\varphi(z) \equiv \frac{\dot{f}(z)}{f(z) - z\dot{f}(z)}\,, \tag{22}$$

через которую, если $\varphi(z)$ не равна тождественно $\left(-\dfrac{1}{z}\right)$, функция $f(z)$ выражается по формуле:
$$f(z) = f_0 \exp\left(\int\limits_{z_0}^{z} \frac{\varphi(z)}{1 + z\varphi(z)}\,dz\right). \tag{23}$$

Подставим (23) в (21) и получим
$$\frac{f(z) \cdot f\left(\varphi(z)\right)}{1 + z \cdot \varphi(z)} = 1\,. \tag{24}$$

Из последних двух формул следует необходимость выполнения условия
$$1 + z \cdot \varphi(z) > 0\,. \tag{25}$$

Используя формулу (23), уравнение (22) можно свести к виду:
$$\frac{\dot{\varphi}(z) \cdot \varphi\left(\varphi(z)\right)}{1 + \varphi(z) \cdot \varphi\left(\varphi(z)\right)} = \frac{z \cdot \dot{\varphi}(z)}{1 + z \cdot \varphi(z)}\,. \tag{26}$$

Если $\dot{\varphi}(z) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(z) \equiv \varphi_0 = const$, то из формулы (23) получим, что функция (17) не может являться метрической функцией двумерного финслерова пространства. Так как в этом случае
$$L(\xi, \eta) = f_0 \cdot (\xi + \varphi_0 \eta) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \equiv 0\,.$$

Здесь $i, j = 1, 2, \quad \xi^1 \equiv \xi,\ \xi^2 \equiv \eta$. Таким образом,
$$r \equiv rang\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\right) = 0\,,$$

А для двумерного финслерово пространства необходимо выполнение требования $r = 1$. Поэтому, сокращая левую и правую части уравнения (26) на $\dot{\varphi}(z)$, избавляясь от знаменателей и приводя подобные, получим уравнение, которому должна удовлетворять (необходимое, но не достаточное условие) функция $\varphi(z)$:
$$\varphi\left(\varphi(z)\right) = z\,. \tag{27}$$

Если функция $\varphi(z)$ удовлетворяет этому уравнению, то из того, что в рассматриваемой области знаменатель в правой части формулы (26) не обращается в нуль и строго больше нуля, следует, что и знаменатель в левой части формулы (26) не обращается в нуль и строго больше нуля.

Линейная функция

Пусть

$$\varphi(z) = a + bz\,, \tag{28}$$

где a, b - действительные числа. Тогда

$$\varphi(\varphi(z)) = a + ab + b^2 z\,. \tag{29}$$

Так как $\varphi(z) = \mathrm{const}$ не дает метрическую функцию финслеровой геометрии, то считаем $b \neq 0$. Тогда на множестве линейных функций функциональное уравнение (27) имеет три решения:

$$\varphi(z) = z; \quad -z; \quad a - z. \tag{30}$$

Первое решение: $\varphi(z) = z$ - приводит к метрической функции $L(\xi, \eta) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ тождественно разрешимой финслеровой геометрии - евклидовой двумерной плоскости.

Второе решение: $\varphi(z) = -z$ - приводит к метрической функции $L(\xi, \eta) = \sqrt{\xi^2 - \eta^2}$ тождественно разрешимой финслеровой геометрии - гиперболической двумерной плоскости.

Третье решение: $\varphi(z) = a - z$ - исследуем более подробно. Используя формулу (23), получим

$$f(z) = f_0 \exp\left(\int\limits_{z_0}^{z} \frac{a - z}{1 + az - z^2}\, dz\right) = f_0' \,|z - z_1|^{-\frac{z_2}{z_1 - z_2}}\, |z - z_2|^{\frac{z_1}{z_1 - z_2}}\,, \tag{31}$$

где знаки модулей следует понимать как выбор области интегрирования, а

$$z_1 = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}\,, \qquad z_2 = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}\,. \tag{32}$$

Подставляя (31) в (24) и учитывая, что

$$a - z_1 = z_2\,, \qquad a - z_2 = z_1\,, \tag{33}$$

получим

$$(f_0')^2\, \frac{|z - z_1||z - z_2|}{1 + az - z^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad f_0' = 1\,, \quad z_2 < z < z_1\,. \tag{34}$$

Поэтому

$$f(z) = (z_1 - z)^{-\frac{z_2}{z_1 - z_2}}\, (z - z_2)^{\frac{z_1}{z_1 - z_2}} \tag{35}$$

и

$$L(\xi, \eta) = \xi f\left(\frac{\eta}{\xi}\right) = (z_1 \xi - \eta)^{-\frac{z_2}{z_1 - z_2}}\, (\eta - z_2 \xi)^{\frac{z_1}{z_1 - z_2}}\,. \tag{36}$$

При $a \neq 0$ пространство с такой метрической функцией не является гиперболической плоскостью. Метрическая функция (36) зависит от одного параметра a, который может быть функцией точки основного пространства.

Дробно-линейная функция

Пусть $\varphi(z)$ - дробно-линейное преобразование

$$\varphi(z) = \frac{a + bz}{c + dz}\,, \tag{37}$$

причем $d \neq 0$, так как при $d = 0$ функция (37) превращается в линейную. Если $c = -b$ и $ad + b^2 \neq 0$, то необходимое условие (27) выполняется. Таким образом, строить тождественно разрешимые двумерные финслеровы геометрии можно, используя дробно линейные функции:

$$\varphi(z) = \frac{a + bz}{-b + dz}\,, \qquad ad + b^2 \neq 0\,, \quad d \neq 0\,. \tag{38}$$

В качестве примера рассмотрим лишь одну функцию из этого класса:

$$\varphi(z) = \frac{\gamma}{z}\,, \qquad \gamma > 0\,. \tag{39}$$

Подставим ее в формулу (23) и, считая $z > 0$, получим:

$$f(z) = f_0 \exp\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\int\limits_1^z \frac{dz}{z}\right) = f_0\, z^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\,. \tag{40}$$

Для того чтобы функция $f(z)$, построенная с помощью функции $\varphi(z)$, определяла тождественно разрешимую финслерову геометрию, необходимо выполнение соотношения (24), которое приводит нас к условию:

$$f_0^2\,\frac{\gamma^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}}{1+\gamma} = 1\,, \tag{41}$$

или

$$f_0 = \sqrt{\frac{1+\gamma}{\gamma^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}}}\,. \tag{42}$$

Таким образом, мы получили двумерную тождественно разрешимую финслерову геометрию с метрической функцией

$$L(\xi,\eta) = \sqrt{\frac{1+\gamma}{\gamma^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}}}\;\xi^{\frac{1}{1+\gamma}}\;\eta^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\,. \tag{43}$$

Если $\gamma = 1$, то

$$L(\xi,\eta) = \sqrt{2}\,\sqrt{\xi\eta}\,.$$

3 Тождественно разрешимые n-мерные финслеровы пространства

Распространим предложенный алгоритм нахождения тождественно разрешимых двумерных финслеровых пространств на размерности $n > 2$. Будем искать метрические функции в виде:

$$L(\xi^0,\xi^1,\xi^2,...,\xi^{n-1}) = \xi^0\cdot f(z^1,z^2,...,z^{n-1})\,, \tag{44}$$

где $\xi^0 > 0$, $z^\mu \equiv \dfrac{\xi^\mu}{\xi^0}$, $\mu = 1,2,...,n-1$. Тогда

$$p_0 = f - z^\mu\frac{\partial f}{\partial z^\mu}\,, \qquad p_\alpha = \frac{\partial f}{\partial z^\alpha}\,, \tag{45}$$

а из требования (3) получим уравнение для определения функции $f(z)$:

$$\left(f - z^\mu\frac{\partial f}{\partial z^\mu}\right)\cdot f\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial z^1}}{f - z^\mu\frac{\partial f}{\partial z^\mu}}, \frac{\frac{\partial f}{\partial z^2}}{f - z^\mu\frac{\partial f}{\partial z^\mu}}, ..., \frac{\frac{\partial f}{\partial z^{n-1}}}{f - z^\mu\frac{\partial f}{\partial z^\mu}}\right) = 1\,. \tag{46}$$

Рассмотрим функции

$$\varphi_\beta(z^1,z^2,...,z^{n-1}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z^\beta}}{f - z^\mu\frac{\partial f}{\partial z^\mu}}\,. \tag{47}$$

Если

$$1 + \varphi_\mu\cdot z^\mu \neq 0\,, \tag{48}$$

то

$$\frac{\partial f}{\partial z^\alpha} = \frac{\varphi_\alpha}{1+\varphi_\mu\cdot z^\mu}\cdot f\,. \tag{49}$$

Это означает, что

$$dU = \frac{\varphi_\alpha}{1+\varphi_\mu\cdot z^\mu}\cdot dz^\alpha \tag{50}$$

суть полный дифференциал и что

$$f(z) = f_0 \cdot \exp\big(U(z)\big) \,, \qquad f_0 = const > 0\,. \tag{51}$$

Уравнение (46) перепишется следующим образом:

$$\frac{f(z) \cdot f\,(\varphi(z))}{1 + z^\mu \cdot \varphi_\mu(z)} = 1\,. \tag{52}$$

Откуда видно, что знаменатель в этой формуле не только не равен нулю (48), но и должен быть строго положительным:

$$1 + \varphi_\mu \cdot z^\mu > 0\,. \tag{53}$$

Прологарифмируем уравнение (52), а затем продифференцируем по x^α, получим систему из $(n-1)$-го соотношения:

$$\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z^\alpha}\left[\varphi_\beta(\varphi) - z^\beta + \varphi_\mu z^\mu \varphi_\beta(\varphi) - \varphi_\mu \varphi_\mu(\varphi) z^\beta\right] = 0\,. \tag{54}$$

Если

$$det\left(\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z^\alpha}\right) \neq 0\,, \tag{55}$$

то из соотношений (54) следует, что все выражения, стоящие в квадратных скобках, равны нулю. Откуда получим

$$\varphi_\beta\left(\varphi\left(z\right)\right) = z^\beta\,. \tag{56}$$

Результат

Чтобы метрическая функция (44) определяла *тождественно разрешимое* n-мерное финслерово пространство, функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_{n-1}(z)$ должны удовлетворять системе функциональных уравнений (56).

Алгоритм

Чтобы найти метрическую функцию *тождественно разрешимой* n-мерной финслеровой геометрии необходимо:

1. Найти преобразование $(n-1)$-мерного пространства на себя, которое бы совпадало с обратным (56) и для которого бы dU (50) являлся полным дифференциалом.
2. Построить функцию $f(z)$ (51).
3. Выполнить уравнение (52).
4. Проверить, что метрическая функция (44) определяет финслерову геометрию.

Пусть $\varphi_\mu(z) = z^\mu$, то есть имеет место тождественное преобразование $z^\mu \stackrel{1}{\to} z^\mu$, тогда как следствие получаем метрическую функцию евклидова n-го пространства:

$$L(\xi) = \sqrt{(\xi^0)^2 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + ... + (\xi^{n-1})^2}\,. \tag{57}$$

Пусть $\varphi_\mu(z) = -z^\mu$, то есть имеет место преобразование $z^\mu \stackrel{j}{\to} -z^\mu$, которое изменяет только знак у всех координат, тогда как следствие получаем метрическую функцию псевдоевклидова n-го пространства с сигнатурой $(+,-,-,...,-)$:

$$L(\xi) = \sqrt{(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - ... - (\xi^{n-1})^2}\,. \tag{58}$$

Пусть $\varphi_\mu(z) = \dfrac{1}{z^\mu}$, то есть имеет место преобразование инверсии каждой координаты $z^\mu \stackrel{k}{\to} \dfrac{1}{z^\mu}$, тогда как следствие получаем метрическую функцию n-го пространства Бервальда - Моора:

$$L(\xi) = f_0 \sqrt[n]{\xi^0 \xi^1 \xi^2 ... \xi^{n-1}}\,. \tag{59}$$

Для того чтобы преобразования $1, j, k$ составляли группу, их следует дополнить при $n > 2$ преобразованием jk:

$$\varphi_\mu(z) = -\frac{1}{z^\mu}\,, \tag{60}$$

то есть преобразованием $z^\mu \overset{jk}{\to} -\dfrac{1}{z^\mu}$. Та как для такого преобразования не выполняется условие (53), то оно не приводит к тождественно разрешимой финслеровой геометрии. Покажем, что все же ему соответствует разрешима финслерова геометрия.

Подставим (60) в (50), тогда

$$L(\xi) = f_0 \sqrt[n-2]{\frac{\xi^1\xi^2...\xi^{n-1}}{\xi^0}}\,, \tag{61}$$

$$p_0 = -\frac{1}{n-2}\cdot\frac{L}{\xi^0}\,, \qquad p_\mu = \frac{1}{n-2}\cdot\frac{L}{\xi^\mu}\,. \tag{62}$$

Определим функцию

$$L'(\xi) = f_0 \sqrt[n-2]{-\frac{\xi^1\xi^2...\xi^{n-1}}{\xi^0}}\,, \tag{63}$$

и выберем $f_0 = \sqrt{n-2}$, тогда тангенциальное уравнение индикатрисы для рассматриваемого финслерова пространства имеет вид

$$L'(p) = 1\,, \tag{64}$$

и такую геометрию вполне можно назвать разрешимой. Она обладает $(n-1)$-параметрической однородной линейной непрерывной группой изометрической симметрии и бесконечно параметрической группой конформных преобразований.

Отметим следующий занимательный факт. Рассмотренные выше преобразования $1, j, k, jk$ $(n-1)$-мерного пространства образуют группу. Составим для них таблицу Кели

×	**1**	**j**	**k**	**jk**
1	1	j	k	jk
j	j	1	jk	k
k	k	jk	1	j
jk	jk	k	j	1

. (65)

Она совпадает с таблицей Кели для "ортонормированного" (физического) базиса $1, j, k, jk$ поличисел H_4. Как известно, четырехмерное пространство H_4 является финслеровым с метрикой Бервальда - Моора.

4 Заключение

В настоящей работе дан алгоритм поиска *тождественно разрешимых финслеровых геометрий*, который позволяет находить и некоторые разрешимые финслеровы геометрии, не являющиеся тождественно разрешимыми. Такой алгоритм тесно связан с отображением пространства, на единицу меньшей размерности, чем размерность самого финслерова пространства, на себя. Причем это отображение должно совпадать с обратным и обладать еще рядом свойств. При обосновании алгоритма для финслеровых пространств размерности больше двух без доказательства использовалась гипотеза, которая для двумерных пространств выполняется очевидным образом.

Гипотеза

При невыполнении условия (55) метрическая функция (44) не соответствует финслерову пространству.

Другая формулировка

Для того чтобы метрическая функция (44) определяла финслерову геометрию необходимо выполнение условия (55).

Тождественному отображению соответствуют евклидовы пространства. Отображению с изменением знака у всех координат соответствуют псевдоевклидовы пространства с сигнатурами $(+,-,-,...,-)$. Отображению, сводящемуся к инверсии каждой координаты, соответствуют пространства Бервальда - Моора.

Литература

[1] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., ТЕТРУ, 2009.

[2] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., Наука, 1967.

IDENTICALLY SOLVABLE FINSLER GEOMETRIES

G.I. Garasko

Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia
Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia
gri9z@mail.ru

We suggest an algorithm to search for the identically solvable Finsler geometries which provides the possibility to find some solvable Finsler geometries that are not identically solvable. This algorithm is closely related to the reflection on the space whose dimension is one unit less than the dimension of the Finsler space on itself. This reflection must coincide to its own reverse and possess some other properties. For the spaces of arbitrary dimension, the identical reflection corresponds to the Euclidean space, the reflection with the simultaneous change of the sign of all coordinates – to the pseudo Euclidean space, and the reflection with the inversion of all the coordinates corresponds to the space with Berwald-Moor metric.

Key Words: Finsler geometry, identical solvability of the Finsler spaces, mapping, Euclidean space, pseudo-Euclidean space, Berwald-Moor metrics space, metric function.