АНАЛОГ ФОРМУЛЫ КОШИ В ПРОСТРАНСТВАХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛИЧИСЕЛ

Д.Г. Павлов[1], Г.И. Гарасько[1,2]

[1] *НИИ Гиперкомлексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия*
[2] *ФГУП Всероссийский электротехнический институт, Москва, Россия*

geom2004@mail.ru, gri9z@mail.ru

Получен аналог формулы Коши для невырожденных коммутативно-ассоциативных гиперкомплексных чисел (поличисел), включающих в качестве подалгебры алгебру комплексных чисел или прямую сумму m комплексных алгебр. При этом выявляются причины трудностей получения формулы Коши в поличислах H_n, являющихся прямыми суммами одних только действительных алгебр.

Ключевые слова: обобщение формулы Коши, гиперкомплексные числа, финслеровы пространства.

1 Введение

В теории функций комплексной переменной теорема и формула Коши играют чрезвычайно важную роль. Напомним формулировку теоремы Коши.

Теорема Коши
Пусть в односвязной области $\mathcal{G}$ задана однозначная аналитическая функция $F(z)$. Тогда интеграл от этой функции $F(z)$ по любому замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в области $\mathcal{G}$, равен нулю.

Аналогичная теорема справедлива для любой системы поличисел $X, Y, Z, ... \in P_n$. В работе [1] доказано, что из требования независимости интеграла

$$I[F(X)] = \int_A^B F(X)\,dX = e_k \cdot \int_A^B f^i(x^1, x^2, ..., x^n) dx^j p_{ij}^k \equiv 0 \tag{1}$$

от пути интегрирования, соединяющего точки A, B в области $\mathcal{G}$, и равенства его нулю, следуют соотношения Коши - Римана для функции $F(X)$ поличисловой переменной X. Здесь $e_1, e_2, ..., e_n$ - некоторый базис,

$$e_i \cdot e_j = p_{ij}^k e_k\,, \tag{2}$$

x^i координаты поличисловой переменной X в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$. А так как условия Коши - Римана необходимы и достаточны, для того чтобы функция $F(X)$ поличисловой переменной была аналитической, то этот результат можно сформулировать как аналог теоремы Коши:

$$I[F(X)] = \oint_\Gamma F(X)\,dX = 0\,, \tag{3}$$

где замкнутый контур Γ лежит в области аналитичности функции $F(X)$ поличисловой переменной.

2 Формула Коши

На комплексной плоскости справедлива формула Коши:

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{F(z)}{z - z_0}\; dz\,, \tag{4}$$

для любой аналитической функции $F(z)$ комплексной переменной, если контур Γ лежит в области аналитичности функции $F(z)$ и охватывает точку z_0, при этом обход контура производится так, чтобы область внутри Г всегда находилась слева. Вывод формулы Коши сводится к вычислению интеграла

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{1}{z - z_0}\, dz = 2\pi i\,, \tag{5}$$

Имеет ли место аналогичная формула для аналитических функций поличисловой переменной? И если имеет, то какие дополнительные нюансы следует учесть?

3 Аналог формулы Коши для невырожденных поличисел

Формально запишем интеграл по замкнутому контуру, фигурирующий справа в (1), в пространстве невырожденных поличисел $P_{k+2\cdot m} \ni Z$ для аналитической функции $F(Z)$ поличисловой переменной и несколько его преобразуем:

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{F(Z)}{Z - Z_0}\, dZ = \oint\limits_{\Gamma} \frac{F(Z) - F(Z_0)}{Z - Z_0}\, dZ + \oint\limits_{\Gamma} \frac{F(Z_0)}{Z - Z_0}\, dZ\,. \tag{6}$$

Так как $F(Z)$ - аналитическая функция, то справедливо равенство

$$F(Z) - F(Z_0) = (Z - Z_0)\cdot \Phi(Z)\,, \tag{7}$$

где $\Phi(Z)$ - также аналитическая функция. Воспользовавшись теоремой Коши, получим

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{F(Z)}{Z - Z_0}\, dZ = F(Z_0) \oint\limits_{\Gamma} \frac{dZ}{Z - Z_0}\,. \tag{8}$$

Таким образом, все сводится к вычислению интеграла

$$I_0 \equiv \oint\limits_{\Gamma} \frac{dZ}{Z - Z_0} \tag{9}$$

по замкнутому контуру Г, "охватывающему" точку Z_0 в пространстве $P_{k+2\cdot m}$ (правило построения замкнутого контура "охватывающего" точку в многомерном поличисловом пространстве будет введено ниже).

Сделаем замену переменной интегрирования, тогда

$$I_0 \equiv \oint\limits_{\Gamma_0} \frac{dZ}{Z}\,, \tag{10}$$

где замкнутый контур Γ_0 "охватывает" точку начала координат.

Для любой системы невырожденных поличисел $P_{k+2\cdot m}$ существует базис [2], [3] $E_1 \equiv 1, E_2, ..., E_k, E_{k+1}, ..., E_n,$ в котором поличисла из конуса будущего можно записать в экспоненциальном виде

$$Z = |Z| \cdot \exp(\alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + ... + \alpha_n E_n)\,, \tag{11}$$

где $|Z|$ - модуль, а $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ - угловые переменные, причем эллиптические углы $\alpha_{k+2}, \alpha_{k+4}, ..., \alpha_n \in [0, 2\pi)$, и при изменении любого из них на 2π переменная Z возвращается в исходную точку поличислового пространства. Остальные угловые переменные гиперболические и изменяются от $-\infty$ до $+\infty$. При изменении всех или нескольких гиперболических углов на любые значения поличисловая переменная никогда не возвращается к исходной точке.

Замкнутый контур интегрирования Γ_0 в формуле (10) зададим параметрически: если φ - параметр, меняющийся вдоль замкнутого контура Γ_0 от 0 до 2π, тогда

$$\alpha_i = \alpha_i(\varphi)\,, \tag{12}$$

где $\alpha_i(\varphi)$ - функции одной действительной переменной. Модуль переменной Z будем считать постоянным и равным $R > 0$. Тогда, взяв интеграл (10) по замкнутому контуру Γ_0 , получим

$$I_0 = \int\limits_0^{2\pi} \sum_{i=2}^{n} [\dot{\alpha}_i E_i]\, d\varphi = \sum_{i=2}^{n} [\alpha_i(2\pi) - \alpha_i(0)]\, E_i\,. \tag{13}$$

Так как эллиптические углы при замыкании контура должны меняться на 0 или 2π, то для них

$$\alpha_i(2\pi) - \alpha_i(0) = 0,\, \pm 2\pi\,. \tag{14}$$

Гиперболические углы в начальной и конечной точке замкнутого контура должны иметь одинаковое значение, поэтому

$$\alpha_i(2\pi) - \alpha_i(0) = 0\,. \tag{15}$$

Таким образом,

$$I_0 = \sum_i{}' s_i \cdot 2\pi e_i \equiv 2\pi \cdot \sum_i{}' s_i e_i\,, \tag{16}$$

где индекс i при суммировании пробегает значения $i = k+2, k+4, ..., n$; $e_{k+2}, e_{k+4}, ...e_n$ - m базисных векторов изотропного базиса [2], [3]; величины s_i независимо могут иметь одно из трех значений $s_i = -1, 0, 1$, но не обращаются в нуль все одновременно.

В том случае, когда $I_0 \neq 0$ - будем говорить, что замкнутый контур Γ_0 в невырожденном поличисловом пространстве $P_{k+2\cdot m}$ "охватывает" точку Z_0. Поэтому для поличисел с $m = 0$ без их комплексификации получение аналога формулы Коши вызывает определенные трудности.

Если замкнутый контур Γ_0 в невырожденном поличисловом пространстве $P_{k+2\cdot m}$ размерности $n = k + 2\cdot m$ "охватывает" точку Z_0, то при $n > 2$ на этот контур всегда можно натянуть поверхность размерности r, $2 \leq r \leq (n-1)$ такую, что этой поверхности будет принадлежать не только сам контур Γ_0, разбивая поверхность на внутреннюю и внешнюю части, но и точка Z_0 будет принадлежать внутренней части. Поэтому для каждого контура Γ_0 из двух возможных выбирается единственное правило обхода: обход контура производится так, чтобы область внутри Γ_0 всегда находилась слева. Тогда число N различных типов контуров Γ_0 в невырожденном поличисловом пространстве $P_{k+2\cdot m}$ определяется формулой:

$$N = \frac{3^m - 1}{2}\,. \tag{17}$$

Для любой аналитической функции $F(Z)$ невырожденной поличисловой переменной, если контур Γ лежит в области аналитичности функции $F(Z)$ и охватывает точку Z_0, справедлива формула

$$\oint\limits_\Gamma \frac{F(Z)}{Z - Z_0}\, dZ = 2\pi \cdot \sum_i{}' s_i e_i \cdot F(Z_0)\,. \tag{18}$$

Эту формулу можно называть аналогом формулы Коши в пространстве невырожденных поличисел.

Если поличисло $\sum_i{}' s_i e_i$ не является делителем нуля, то аналог формулы Коши можно представить в виде:

$$F(Z_0) = \frac{1}{2\pi \cdot \sum_i{}' s_i e_i} \oint\limits_\Gamma \frac{F(Z)}{Z - Z_0}\, dZ\,. \tag{19}$$

Такая запись формулы Коши обычно используется и для комплексных чисел. Количество поличисел, не являющихся делителями нуля в суммах $\sum_i{}' s_i e_i$, равно 2^m, а с учетом принятого правила обхода контура - 2^{m-1}.

4 Пример

Рассмотрим пространство $P_{0+2\cdot 2}$ $(k=0, m=2)$. Таблица умножения для элементов изотропного базиса [2], [3] e_1, e_2, e_3, e_4 имеет вид:

$\times$	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$	$\mathbf{e_4}$
$\mathbf{e_1}$	e_1	e_2	0	0
$\mathbf{e_2}$	e_2	$-e_1$	0	0
$\mathbf{e_3}$	0	0	e_3	e_4
$\mathbf{e_4}$	0	0	e_4	$-e_3$

. (20)

Если не выбирать правило обхода контура Γ, получим восемь различных значений суммы $\sum_i{}' s_i e_i$ в формуле (18):

$$\sum_i{}' s_i e_i = -e_2,\ e_2,\ -e_4,\ e_4,\ e_2+e_4,\ e_2-e_4\ , -e_2+e_4,\ -e_2-e_4\,. \tag{21}$$

Перейдем к базису $1, i, j, ij$, в котором очевидно, что рассматриваемая алгебра поличисел является удвоением комплексных чисел с помощью гиперболической мнимой единицы j, или удвоением двойных чисел с помощью эллиптической мнимой единицы i:

$$1 = e_1 + e_3, \quad i = e_2 + e_4, \quad j = e_1 - e_3, \quad ij = e_2 - e_4\,, \tag{22}$$

$\times$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{ij}$
$\mathbf{1}$	1	i	j	ij
$\mathbf{i}$	i	-1	ij	$-j$
$\mathbf{j}$	j	ij	1	i
$\mathbf{ij}$	ij	$-j$	i	-1

. (23)

В новом базисе те же самые значения (21) суммы $\sum_i{}' s_i e_i$ перепишутся следующим образом:

$$\sum_i{}' s_i e_i = -\frac{1}{2}(i+ij),\ \frac{1}{2}(i+ij),\ -\frac{1}{2}(i-ij),\ \frac{1}{2}(i-ij),\ i,\ ij\ , -ij,\ -i\,. \tag{24}$$

Выбранному правилу обхода контура Γ будут соответствовать четыре из этих значений:

$$\sum_i{}'^{+} s_i e_i = \frac{1}{2}(i+ij),\ \frac{1}{2}(i-ij),\ i,\ ij\,. \tag{25}$$

Таким образом, формула (18) в пространстве $P_{0+2\cdot 2}$ существует в четырех вариантах:

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{F(Z)}{Z-Z_0}\,dZ = 2\pi i F(Z_0)\,, \tag{26}$$

$$\oint_{\Gamma_2} \frac{F(Z)}{Z-Z_0}\,dZ = 2\pi ij F(Z_0)\,, \tag{27}$$

$$\oint_{\Gamma_3} \frac{F(Z)}{Z-Z_0}\,dZ = \pi(i+ij) F(Z_0)\,, \tag{28}$$

$$\oint_{\Gamma_4} \frac{F(Z)}{Z - Z_0}\, dZ = \pi(i - ij)F(Z_0)\,. \tag{29}$$

Так как поличисла $\frac{1}{2}(i+ij)$, $\frac{1}{2}(i-ij)$ являются делителями нуля, то для формулы (19) возможны лишь два варианта:

$$F(Z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{F(Z)}{Z - Z_0}\, dZ\,, \tag{30}$$

$$F(Z_0) = \frac{1}{2\pi ij} \oint_{\Gamma_2} \frac{F(Z)}{Z - Z_0}\, dZ\,. \tag{31}$$

5 Заключение

Получение аналога формулы Коши для невырожденных поличисел, включающих в качестве подалгебры алгебру комплексных чисел или прямую сумму m комплексных алгебр, по-видимому, открывает путь к построению обобщения теории функций комплексной переменной на соответствующие многокомпонентные алгебры и связанные с ними многомерные финслеровы пространства. Особый интерес представляет изучение алгебры являющейся прямой суммой четырех комплексных алгебр, которой соответствует финслерово пространство с метрической функцией Бервальда-Моора над полем комплексных чисел.

Литература

[1] Гарасько Г.И. Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(1), том 1, 2004, стр. 75 - 88.

[2] Гарасько Г.И., Павлов Д.Г. Геометрия невырожденных поличисел // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(7), том 4, 2007, стр. 3 - 25.

[3] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., ТЕТРУ, 2009.

ANALOG OF THE CAUCHY'S FORMULA IN NON-DEGENERATE POLYNUMBERS SPACES

D.G. Pavlov[1], G.I. Garasko[1,2]

[1] *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia*
[2] *Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia*

geom2004@mail.ru, gri9z@mail.ru

Obtained was an analog for Cauchy's formula for non-degenerate commutative-associative hypercomplex numbers (polynumbers), including algebra of complex numbers or direct summ of complex algebras as means of subalgebra. Therewith manifested are the reasons why Cauchy's formula in polynumbers H_n which are the direct sums of nothing but actual algebras is so hard to obtain.

Key Words: Cauchy's formula generalization, hypercomplex numbers, Finsler spaces.