ДВОЙНЫЕ ЧИСЛА

Д.Г. Павлов[1], Г.И. Гарасько[1,2]

[1] *НИИ Гиперкомлексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия*

[2] *ФГУП Всероссийский электротехнический институт, Москва, Россия*

geom2004@mail.ru, gri9z@mail.ru

Предпринята попытка доказать, что между комплексными и двойными (гиперболически комплексными) числами имеется существенно больше общего, чем принято считать. При этом, с одной стороны, раскрываются новые нетривиальные качества аналитических функций двойной переменной, например, их связь с гиперболически потенциальными и соленоидальными векторными полями на псевдоевклидовой плоскости, а с другой, показано каким образом многие структуры на комплексной плоскости могут взаимнооднозначно представляться их гиперболическими аналогами, что существенно дезавуирует "магические" свойства комплексных чисел, в частности, приводит к пониманию, что аналитические функции от них сводятся к двум скалярным функциям не от двух, а от одной вещественной переменной каждая.

Ключевые слова: гиперкомплексные числа, аналитические функции, h-аналитические функции, векторные поля.

1 Введение

Трудно найти математика, который не восхищался бы лаконичной красотой, гармонией и содержательностью теории функций комплексной переменной (ТФКП). Не оставляет эта теория равнодушными также и физиков, использующих ее в своих многочисленных математических моделях связанных с идеальными двумерными векторными полями. На фоне того совершенства, что представляют собой ТФКП и ее применения выглядит крайне несправедливым факт (тесно связанный с теоремой Фробениуса [1]), что перенос всех без исключения свойств комплексной плоскости на пространство или пространство-время с тремя и более измерениями принципиально не возможен.

Однако, как ни странно, по крайней мере, один вариант многомерного расширения ТФКП у физиков и математиков, все же, имеется. Правда, эта возможность связана не столько с самими комплексными числами, сколько с их гиперболическими аналогами, иногда именуемыми двойными или расщепляемыми числами [2]. Теория аналитических (вернее h-аналитических) функций на этих числах, хоть и имеет определенные нерешенные вопросы, как мы попробуем показать в настоящей работе мало, чем отличается от тех замечательных свойств, что обладает ТФКП. Не должны мешать этому ни иная топология, ни делители нуля, которых не было на комплексной плоскости. Более того, поскольку одна из компонент двойных чисел может интерпретироваться как временная координата двумерной псевдоевклидовой плоскости, делители нуля оказываются весьма полезными объектами, так как с ними естественно связывать точки и вектора светового конуса. Тоже самое касается вопросов сходимости и тесно связанной с ними топологии. Но что самое замечательное в идее построения гиперболического аналога ТФКП на двойных числах, так это возможность его дальнейшего расширения на многомерные пространства связанные с прямыми суммами n вещественных или комплексных алгебр, причем без малейших жертв качеством и даже с приобретением новых весьма интересных свойств. Что также важно, одно из неизотропных измерений связанных с такими алгебрами можно интерпретировать как время, тогда как оставшиеся образуют пространство, пусть даже иногда и необычное [3, 4].

Концептуальным фундаментом для построения гиперболического аналога ТФКП на двойных числах является наличие в соответствующем им двумерном псевдоевклидовом пространстве-времени бесконечнопараметрической группы конформных преобразований по мощности точно такой же, как конформная группа евклидовой плоскости, что, собственно, и обеспечивает нетривиальное разнообразие тесно связанных с этими непрерывными нелинейными симметриями h-аналитических функций.

Одним из основных, сдерживающих развитие гиперболического аналога ТФКП фактором, является отсутствие представлений, с какими физически реальными ситуациями можно было бы связывать идеальные векторные поля, получаемые из h-аналитических функций двойной переменной, аналогично тому, как из обычных аналитических функций получаются потенциальные и соленоидальные поля двумерной евклидовой плоскости. При этом, если гиперболической потенциальностью никого не удивишь, то вот вопрос, какое из известных физикам реальных полей могло бы обладать гиперболической соленоидальностью - пока остается без четкого ответа. Действительно, если б поля именно с парой свойств гиперболической соленоидальности и потенциальности были на сегодня известны физикам, то потребности их изучения неминуемо стимулировали бы математиков на исследования, в общем-то, достаточно простого h-анализа на двойных числах, а вслед за ним и его многомерных расширений в финслеровых линейных пространствах. Однако, поскольку ни одно из известных фундаментальных взаимодействий при своем упрощении до двух измерений не совпадает полностью по своим свойствам и симметриям с h-аналитическими функциями от двойных чисел, последние, в сколь ни будь полном объеме, пока так и не были востребованы. Но что самое печальное, вместе с ними остаются также до сих пор не востребованными и их многомерные расширения.

В такой ситуации представляется рациональным поступить иным образом, а именно - предположить, что "нужные" для приложений h-аналитических функций от двойной переменной физические поля обладающие гиперболической соленоидальностью, все же, существуют и действовать в полной аналогии с имеющимися приложениями ТФКП, только с естественными поправками на имеющуюся гиперболичность. Как знать, быть может, после построения соответствующей математической теории и изучения основных свойств связанных с нею гиперболически потенциальных и гиперболически соленоидальных полей, а, особенно, после расширений получающейся теории на три и четыре измерения (естественно, уже с финслеровой метрикой), при более пристальном взгляде на окружающий нас реальный мир, вдруг, выяснится, что соответствующие поля, все же, действительно существуют и даже давно наблюдаются, просто, в силу ряда причин интерпретируются физиками не в полном объеме их истинных свойств.

2 Переход между комплексными и двойными числами

Давно уже отмечалось, что между комплексными числами и двойными числами существует некоторая "похожесть".

	Комплексные числа	**Двойные числа**
a)	$z = x + i\,y\,, \qquad i^2 = 1$	$Z = X + j\,Y\,, \qquad j^2 = 1$
b)	$F(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$	$\Phi(X,Y) = U(X,Y) + j\,V(X,Y)$
c)	$dF(z) = F'(z)\,dz$	$d\Phi(X,Y) = \Phi'(X,Y)\,dZ$
d)	$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$	$\dfrac{\partial U}{\partial X} = \dfrac{\partial V}{\partial Y}\,, \qquad \dfrac{\partial U}{\partial Y} = \dfrac{\partial V}{\partial X}$
e)	$u' = \dfrac{\partial u}{\partial x}\,, \qquad v' = \dfrac{\partial v}{\partial x}$	$U' = \dfrac{\partial U}{\partial X}\,, \qquad V' = \dfrac{\partial V}{\partial X}$
f)	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$	$\dfrac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2 V}{\partial X^2} - \dfrac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = 0$
g)	$x' = u(x,y), \quad y' = \pm\,v(x,y)$	$X' = U(X,Y), \;\; Y' = \pm\,V(X,Y)$
h)	$(dx')^2 + (dy')^2 = K^2\left[(dX)^2 - (dY)^2\right]$	$(dX')^2 - (dY)^2 = \kappa^2\left[(dx)^2 + (dy)^2\right]$
i)	$\kappa^2(x,y) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$	$K^2(X,Y) = \left(\dfrac{\partial U}{\partial X}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial U}{\partial Y}\right)^2$

(1)

Строка **c)** суть определение аналитической функции $F(z)$ комплексной переменной z и ее производной $F'(z)$, а также определение аналитической функции $\Phi(Z)$ двойной переменной Z

и ее производной $\Phi'(Z)$.

В строке **d)** записаны соотношения Коши - Римана для компонент аналитической функции комплексной переменной и для компонент аналитической функции двойной переменной.

Фундаментальные уравнения, которым подчиняются компоненты аналитических функций комплексной и двойной переменной, находятся в строке **f)**.

Строки **g) - i)** относятся к конформным преобразованиям на комплексной и гиперболической плоскостях.

Необходимо найти такие преобразования, которые позволяли бы переходить от комплексных чисел к двойным и обратно с минимальными дополнительными условиями. Минимум: при таких преобразованиях левый столбец формул (1) должен переходить в правый столбец и наоборот.

Переход между комплексными и двойными числами осуществляется преобразованиями:

$$\left.\begin{array}{l} x \to X\,, \\ y \to -j\,i\,Y\,; \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} X \to x\,, \\ Y \to j\,i\,y\,. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Будем считать, что символьные элементы i и j коммутируют.

Формул (2) не достаточно. Например, соотношения Коши - Римана **d)** (1) при таких преобразованиях не переходят друг в друга. Ограничимся пока аналитическими функциями, которые в областях аналитичности являются полиномами или сходящимися рядами комплексной или двойной переменной с коэффициентами - действительными числами. Тогда преобразования (2) следует дополнить также соответствующими преобразованиями компонент аналитических функций:

$$\left.\begin{array}{l} U(X,Y) \to u(X,-jiY)\,, \\ V(X,Y) \to ji\,v(X,-jiY)\,; \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} u(x,y) \to U(x,jiy)\,, \\ v(x,y) \to -ji\,V(x,jiy)\,. \end{array}\right\} \tag{3}$$

При преобразованиях (2), (3) соотношения Коши - Римана для аналитических функций комплексной переменной переходят в соотношения Коши - Римана для аналитических функций гиперболической переменной и наоборот. Более того, первый столбец и второй столбец формул (1) меняются местами.

Поясним как работать с представленными выше преобразованиями на примере. Рассмотрим две аналитические функции: комплексной переменной

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\,\sin y)\,, \tag{4}$$

и гиперболической переменной

$$e^{X+jY} = e^X\left(\operatorname{ch} Y + j\,\operatorname{sh} Y\right)\,. \tag{5}$$

Применим преобразования (2), (3) к формуле (4) и попытаемся получить их неё формулу (5), причем будем работать непосредственно с компонентами аналитической функции комплексной переменной:

$$u(x,y) = e^x\,\cos y\,, \qquad v(x,y) = e^x\,\sin y\,. \tag{6}$$

Заметим вначале, что комплексы символьных элементов $(\pm\,j\,i)$ ведут себя в алгебраическом плане как эллиптическая символьная единица:

$$(\pm\,j\,i)^2 = -1\,. \tag{7}$$

Воспользуемся первой парой формул (3):

$$\begin{aligned} & U(X,Y) = e^X\,\cos(-jiY) = \\ & = e^X\tfrac{1}{2}\left(e^{(-ji)(-jiY)} + e^{-(-ji)(-jiY)}\right) = e^X\tfrac{1}{2}\left(e^{-Y} + e^{Y}\right) = \\ & = e^X\,\operatorname{ch} Y\,, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} & V(X,Y) = ji\,e^X\,\sin(-jiY) = \\ & = -ji\,e^X\tfrac{1}{2ji}\left(e^{(ji)(jiY)} - e^{-(ji)(jiY)}\right) = -e^X\tfrac{1}{2}\left(e^{-Y} - e^{Y}\right) = \\ & = e^X\,\operatorname{sh} Y\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Замечания:

1. Если функции содержат комплексные (гиперболические) параметры, кроме комплексной (гиперболической) переменной, то эти параметры также необходимо подвергать преобразованиям (2), (3). При этом приходится рассматривать соответствующую функцию как функцию многих комплексных (двойных) переменных, например:

$$(a + i\,b)e^z \to (a + j\,b)e^Z\,.$$

2. Нельзя ожидать, что при преобразованиях (2), (3) любая формула имеет свой аналог, особенно, если эти формулы относятся к конкретным числам (содержат конкретные числа). Так, например,

$$e^{i\,\pi} = -1\,, \quad \text{но} \qquad e^{j\,\pi} \neq -1\,. \tag{10}$$

То есть при преобразованиях (2), (3) и $x = X$, $y = Y$, вообще говоря, $u \neq U$ и $v \neq V$.

3 Теорема Коши

В теории функций комплексной переменной имеет место теорема Коши [6].

Теорема Коши

Пусть в односвязной области $\mathcal{G}$ задана однозначная аналитическая функция $F(z)$. Тогда интеграл от этой функции $F(z)$ по любому замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в области $\mathcal{G}$, равен нулю.

Докажем, что аналогичная теорема справедлива и для аналитических функций двойной переменной. Интеграл по замкнутому контуру в этом случае запишется следующим образом:

$$\oint\limits_{\Gamma} \Phi(Z)\,dZ = \oint\limits_{\Gamma} UdX + VdY \; + j \oint\limits_{\Gamma} VdX + UdY\,. \tag{11}$$

Для криволинейных интегралов второго рода по замкнутому контуру [7] на плоскости X, Y справедлива формула:

$$\oint\limits_{\Gamma} PdX + QdY = \int\limits_{\mathcal{D}}^{(2)} \left\{ \frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial P}{\partial Y} \right\} dXdY\,, \tag{12}$$

где функции $P(X, Y)$ и $Q(X, Y)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{\mathcal{D}}$, ограниченной кусочно-гладким контуром Γ, а их частные производные первого порядка непрерывны в $\mathcal{D}$. Частные производные функций $U(X, Y)$ и $V(X, Y)$ связаны соотношениями Коши - Римана, поэтому

$$\oint\limits_{\Gamma} UdX + VdY = \int\limits_{\mathcal{D}}^{(2)} \left\{ \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right\} dXdY = 0 \tag{13}$$

и

$$\oint\limits_{\Gamma} VdX + UdY = \int\limits_{\mathcal{D}}^{(2)} \left\{ \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial V}{\partial Y} \right\} dXdY = 0\,. \tag{14}$$

Таким образом,

$$\oint\limits_{\Gamma} \Phi(Z)\,dZ = 0\,, \tag{15}$$

если функция $\Phi(Z)$ - однозначная аналитическая функция двойной переменной, а контур Γ лежит в односвязной области аналитичности.

4 Скорости

Для того, чтобы записать уравнения, которым подчиняются мировые линии материальных объектов, [8] надо определиться с выбором функции Финслера и функции $\lambda(X,Y)$. И хотя наблюдаемые величины не зависят от этого выбора, от него зависит конкретный вид некоторых формул.

Так как элемент длины в пространстве, конформно связанном с пространством двойных чисел, определяется формулой

$$ds = K(X,Y)\sqrt{(dX)^2-(dY)^2}\,, \tag{16}$$

то компоненты импульса запишутся как

$$P_0 = K(X,Y)\,\frac{dX}{\sqrt{(dX)^2-(dY)^2}}\,,\quad P_1 = -\,K(X,Y)\,\frac{dY}{\sqrt{(dX)^2-(dY)^2}}\,. \tag{17}$$

Если мы хотим, чтобы получающиеся формулы напоминали формулы теории комплексного потенциала, то следует выбрать

$$\tilde{\Phi}(P;X) = P_0^2 - P_1^2 - K^2(X,Y)\,,\qquad \lambda(X,Y)=\frac{1}{2}\,, \tag{18}$$

тогда канонические уравнения для нахождения мировых линий [8] имеют вид:

$$\acute{X} = \frac{\partial U}{\partial X}\,,\qquad \acute{Y} = -\frac{\partial U}{\partial Y}\,, \tag{19}$$

где

$$\acute{X} \equiv \frac{dX}{d\acute{\tau}}\,,\qquad \acute{Y} \equiv \frac{dY}{d\acute{\tau}}\,, \tag{20}$$

а $\acute{\tau}$ - некий параметр вдоль мировой линии, параметр эволюции. В теории комплексного потенциала $\acute{\tau}$ - это абсолютное галилеево время. В теории гиперболического потенциала уже есть время

$$X \equiv X^0 \equiv c\cdot t\,, \tag{21}$$

где t - время, а c - скорость света. Выясним смысл параметра $\acute{\tau}$:

$$\sqrt{\acute{X}^2-\acute{Y}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2} \equiv K(X,Y)\,, \tag{22}$$

где $K(X,Y)$ - коэффициент растяжения-сжатия конформного преобразования в пространстве H_2, которое (преобразование) определяется аналитической функцией с компонентой $U(X,Y)$ при единице базисе $1,j$. Таким образом, вдоль мировой линии в данном случае

$$\sqrt{dX^2-dY^2} = K(X,Y)\,d\acute{\tau}\,. \tag{23}$$

То есть $\acute{\tau}$ - это собственное время, умноженное на скорость света и отнесенное к конформному коэффициенту растяжения-сжатия:

$$d\acute{\tau} = \frac{\sqrt{dX^2-dY^2}}{K(X,Y)}\,. \tag{24}$$

Если мы хотим, чтобы уравнения, определяющие мировые линии в пространстве двойных чисел, по форме и физической интерпретации соответствовали формулам СТО, то следует выбрать

$$\tilde{\Phi}(P;X) = \sqrt{P_0^2-P_1^2} - K(X,Y)\,,\qquad \lambda(X,Y)=1\,, \tag{25}$$

тогда

$$\dot{X} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial X}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial U}{\partial X}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial U}{\partial Y}\right)^2}}\,, \qquad \dot{Y} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial Y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial U}{\partial X}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial U}{\partial Y}\right)^2}}\,, \tag{26}$$

где

$$\dot{X} \equiv \frac{dX}{d\tau}\,, \qquad \dot{Y} \equiv \frac{dY}{d\tau}\,, \tag{27}$$

а τ - параметр вдоль мировой линии. В этом случае параметр эволюции суть собственное время, умноженное на скорость света, так как

$$\sqrt{\dot{X}^2 - \dot{Y}^2} = 1\,, \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{dX^2 - dY^2} = d\tau\,. \tag{28}$$

Как в первом случае выбора функции Финслера (18), так и во втором выборе (25) пространственная скорость, отнесенная к скорости света, материальных объектов, движение которых описывается аналитической функцией гиперболической переменной, имеет одну компоненту

$$\mathcal{V} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial Y}}{\dfrac{\partial U}{\partial X}}\,. \tag{29}$$

Подставим это выражение в формулы (26), получим

$$\dot{X} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathcal{V}^2}}\,, \qquad \dot{Y} = \frac{\mathcal{V}}{\sqrt{1-\mathcal{V}^2}}\,, \tag{30}$$

то есть (30) - две компоненты 2-скорости материального объекта.

Формулу (29) перепишем следующим образом:

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial Y}}{\dfrac{\partial U}{\partial X}}\,. \tag{31}$$

Можно решить это дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $Y(X)$, и тогда мировые линии будут описываться уравнением

$$Y = Y(X)\,.$$

Воспользоваться более простым путем, каким в теории комплексного потенциала находят линии тока. Используем соотношениями Коши - Римана для аналитической функции $U + jV$, тогда из (31) следует

$$\frac{\partial V}{\partial X}\,dX + \frac{\partial V}{\partial Y}\,dY = 0\,. \tag{32}$$

В левой части уравнения стоит полный дифференциал функции $V(X,Y)$, поэтому мировые линии задаются неявным уравнением

$$V(X,Y) = V_0\,, \tag{33}$$

где V_0 - действительный параметр, постоянный вдоль мировой линии. Разрешая уравнение (33) относительно Y, получим явную формулу для мировых линий на гиперболической плоскости:

$$Y = Y(X;V_0)\,. \tag{34}$$

Формула (33) совпадает с формулой для неявного задания линий тока в теории комплексного потенциала.

5 Законы сохранения

Любая компонента аналитической функции двойной переменной удовлетворяет фундаментальному уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0 \tag{35}$$

- волновому двумерному уравнению, которое может быть получено из принципа экстремальности действия с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{C_0}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2\right], \tag{36}$$

где C_0 - действительное число. Очевидно, что такой лагранжиан инвариантен относительно сдвигов по координатам X, Y и гиперболического поворота на плоскости X, Y. А это означает, что имеют место три закона сохранения для физической системы, описываемой потенциалом $U(X, Y)$.

Введем обозначения:

$$X^0 \equiv X\,, \qquad X^1 \equiv Y\,, \qquad\qquad X^i \equiv (X, Y)\,, \quad i = 0,\, 1\,. \tag{37}$$

Тогда тензор энергии импульса

$$T_i^j = \frac{\partial U}{\partial X^i}\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial U}{\partial X^j}\right)} - \mathcal{L}\,\delta_i^j \tag{38}$$

запишется следующим образом:

$$T_i^j = C_0\left\{\frac{\partial U}{\partial X^i}\ \overset{o}{g}{}^{jk}\ \frac{\partial U}{\partial X^k} - \frac{1}{2}\,\delta_i^j\left[\left(\frac{\partial U}{\partial X^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial X^1}\right)^2\right]\right\}. \tag{39}$$

Законы сохранения импульса

$$\mathbb{P}_i = \int\limits_{-\infty}^{\infty} T_i^0 dX^1\,, \qquad\qquad \frac{d\,\mathbb{P}_i}{dX^0} = 0\,. \tag{40}$$

для поля, описываемого лагранжианом (36), принимают вид:

$$\mathbb{E} \equiv c\,\mathbb{P}_0\ = C_0\,\frac{c}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2\right] dY\,, \tag{41}$$

$$\mathbb{P}_1 = C_0\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial U}{\partial X}\ \frac{\partial U}{\partial Y}\ dY\,. \tag{42}$$

Для того чтобы получить закон сохранения, который следует из инвариантности лагранжиана (36) относительно гиперболических поворотов, выпишем тензор момента количества движения

$$M^{jki} = \frac{1}{c}\left(X^j T_m^k - X^k T_m^j\right)\overset{o}{g}{}^{mi} \tag{43}$$

и связанный с ним закон сохранения

$$\mathbb{M}^{01} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} M^{010} dX^1 = \frac{1}{c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(X^0 T_0^1 - X^1 T_0^0\right) dX^1\,, \quad \frac{d\,\mathbb{M}^{01}}{dX^0} = 0\,. \tag{44}$$

Для лагранжиана (36) этот закон сохранения принимает вид:

$$\mathbb{M}^{01} = -\,\frac{C_0}{c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{X\frac{\partial U}{\partial X}\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{1}{2}\,Y\left[\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2\right]\right\} dY\,. \tag{45}$$

6 Пример

Рассмотрим аналитическую функцию гиперболической переменной

$$\Phi(Z) = \Phi_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{X + jY}{a}\right) \equiv U(X,Y) + j\,V(X,Y)\,, \tag{46}$$

где Φ_0, a - действительные числа. Тогда

$$\Phi'(Z) = \Phi_0 \,\frac{a}{a^2 + (X + jY)^2} \equiv \frac{\partial U}{\partial X} + j\,\frac{\partial U}{\partial Y}, \tag{47}$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial X} = a\Phi_0 \,\frac{a^2 + X^2 + Y^2}{(X^2 - Y^2)^2 + 2a^2(X^2 + Y^2) + a^4}\,, \tag{48}$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = a\Phi_0 \,\frac{-\,2\,XY}{(X^2 - Y^2)^2 + 2a^2(X^2 + Y^2) + a^4}\,. \tag{49}$$

Пространственная скорость, отнесенная к скорости света, материальных объектов, из которых состоит поле U, вычисляется по формуле (29):

$$\mathcal{V} = \frac{2\,XY}{a^2 + X^2 + Y^2}\,. \tag{50}$$

От точки к точке меняется не только скорость, но и масса покоя материальных объектов, составляющих рассматриваемое поле. С точностью до постоянной эта масса равна коэффициенту растяжения сжатия $K(X,Y)$ (22). Для данного поля

$$K(X,Y) = |a\Phi_0| \,\frac{1}{\sqrt{(X^2 - Y^2)^2 + 2a^2(X^2 + Y^2) + a^4}}\,. \tag{51}$$

Для того чтобы найти мировые линии, воспользуемся формулой (33), но для этого нам вначале следует получить функцию $V(X,Y)$ в формуле (46). Возьмем тангенс от левой и правой части этой формулы, получим

$$\frac{X + jY}{a} = \frac{\sin\left(\dfrac{U + jV}{\Phi_0}\right)}{\cos\left(\dfrac{U + jV}{\Phi_0}\right)}\,. \tag{52}$$

Откуда имеем

$$\frac{X}{a} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{U}{\Phi_0} + \operatorname{tg}\dfrac{U}{\Phi_0}\;\operatorname{tg}^2\dfrac{V}{\Phi_0}}{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{U}{\Phi_0}\;\operatorname{tg}^2\dfrac{V}{\Phi_0}}, \qquad \frac{Y}{a} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{V}{\Phi_0} + \operatorname{tg}\dfrac{V}{\Phi_0}\;\operatorname{tg}^2\dfrac{U}{\Phi_0}}{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{U}{\Phi_0}\;\operatorname{tg}^2\dfrac{V}{\Phi_0}}\,. \tag{53}$$

Из второго соотношения (53) находим

$$\operatorname{tg}^2\frac{U}{\Phi_0} = \frac{\dfrac{Y}{a} - \operatorname{tg}\dfrac{V}{\Phi_0}}{\operatorname{tg}\dfrac{V}{\Phi_0} + \dfrac{Y}{a}\;\operatorname{tg}^2\dfrac{V}{\Phi_0}}\,. \tag{54}$$

Исключая из первого соотношения (53) $\operatorname{tg}\dfrac{U}{\Phi_0}$, приходим к квадратному уравнению относительно $\operatorname{tg}\dfrac{V}{\Phi_0}$:

$$\frac{Y}{a}\;\operatorname{tg}^2\frac{V}{\Phi_0} + \left[1 + \left(\frac{X}{a}\right)^2 - \left(\frac{Y}{a}\right)^2\right]\operatorname{tg}\frac{V}{\Phi_0} - \frac{Y}{a} = 0\,. \tag{55}$$

Для нахождения мировых линий можно разрешить это уравнение относительно $\operatorname{tg}\dfrac{V}{\Phi_0}$ и воспользоваться формулой (33), но можно воспользоваться формулой (33), и не решая квадратное уравнение (55). Перепишем формулу (55) следующим образом:

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{V}{\Phi_0}}{\operatorname{tg}\dfrac{V}{\Phi_0}} = \frac{1+\left(\dfrac{X}{a}\right)^2-\left(\dfrac{Y}{a}\right)^2}{\dfrac{Y}{a}}\,. \tag{56}$$

Приравняем правую часть (56) к постоянному параметру вдоль мировой линии, например, к $(-2\nu_0)$ и получим уравнение описывающее мировые линии:

$$\left.\left(\frac{Y}{a}\right)\right|_{1,2} = \nu_0 \pm \sqrt{\nu_0^2+1+\left(\frac{X}{a}\right)^2}\,. \tag{57}$$

Законы сохранения

Вычислим энергию поля (41):

$$\mathbb{E} = \frac{C_0}{2}\, c\, a^2\Phi_0^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(a^2+X^2+Y^2)^2+4X^2Y^2}{((X^2-Y^2)^2+2a^2(X^2+Y^2)+a^4)^2}\, dY = C_0\frac{\pi\Phi_0^2 c}{4\,a^2}\,. \tag{58}$$

Остальные два закона сохранения дают нули:

$$\mathbb{P}_1 = 0\,, \qquad \mathbb{M}^{01} = 0\,. \tag{59}$$

Таким образом, поле $U(X,Y)$ (46) имеет конечную положительную энергию и как целое покоится, хотя отдельные его материальные точки движутся.

7 Заключение

В защиту такой необычной логики построений, что использовалась авторами выше и которая идет несколько вразрез со сложившейся практикой построения физических теорий, когда отталкиваются не столько от математики, сколько от опытов и наблюдений - можно привести известные слова А.Эйнштейна: "Весь предшествующий опыт убеждает нас в том, что природа представляет собой реализацию простейших математически мыслимых элементов. Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерные связи между ними, которые дадут нам ключ к пониманию явлений природы. Опыт может подсказать нам соответствующие математические понятия, но они ни в коем случае не могут быть выведены из него. Конечно, опыт остается единственным критерием пригодности математических конструкций в физике. Но настоящее творческое начало присуще именно математике. Поэтому я считаю в известной мере оправданной веру древних в то, что чистое мышление в состоянии постигнуть реальность." [5]

Как знать, быть может, в случае двойных чисел мы и увидим один из таких примеров, о которых предупреждал Эйнштейн?

Литература

[1] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973.

[2] Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1977.

[3] Павлов Д.Г. Хронометрия трехмерного времени // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (1), 2004, стр. 20-32.

[4] Павлов Д.Г. Четырехмерное время // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (1), 2004, стр. 33-42.

[5] Эйнштейн А. О методе теоретической физики. Собрание научных трудов, Том 4, М., Наука, 1967.

[6] Свешников А.Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. М., Наука, 1967.

[7] Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М., Наука, 1967.

[8] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., ТЕТРУ, 2009.

DOUBLE NUMBERS

D.G. Pavlov[1], G.I. Garasko[1,2]

[1] *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia*
[2] *Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia*

geom2004@mail.ru, gri9z@mail.ru

There is an attempt to show that there is much more in common between the complex numbers and the double (hyperbolically complex) numbers than it is usually thought to be. With this the new and non-trivial properties of the analytical functions of the double number variable are discovered. For example, there is a relation between these functions and the hyperbolic potential and solenoidal vector fields on the pseudo Euclidean plane. Besides, it is shown how many structures on the complex plane can be one-to-one mapped at their hyperbolical analogues. This repudiates the “magic” properties of the complex numbers, and particularly, leads to the understanding that the analytical functions of complex numbers can be given by two scalar functions not of two but of one real variable each.

Key Words: hypercomplex numbers, analytical functions, h-analytical functions, vector fields.