# ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

**Д.Г. Павлов**

*НИИ Гиперкомлексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия*

geom2004@mail.ru

На основании аналогии между аналитическими функциями от комплексных чисел и двумерными электро- и магнитостатическими полями выдвигается предположение о наличии в реальности подобного же соответствия между h-аналитическими функциями двойной переменной и некой иной парой двумерных физических полей, одно из которых является гиперболическим источниковым, а второе гиперболически вихревым полем. В отличие от электро- и магнитостатических полей данная пара реализуется не в пространстве, а в пространстве-времени, в связи с чем источниками первого поля являются события, а силовые линии второй вихревой составляющей представляют собой гиперболы. Существенной особенностью данной гипотетической пары полей является то, что она возможна лишь в двумерном псевдоевклидовом пространстве и принципиально несовместима с идеей четырехмерного пространства-времени Минковского. Отчасти, именно поэтому даже в теории такие поля не рассматривались физиками как потенциально возможные. Натурному же их обнаружению в определенной степени препятствуют укоренившиеся традиции экспериментаторов иметь дело с пространственными граничными условиями, тогда как в данном случае следовало бы работать с пространственно-временными. Хотя с пространством Минковского данная пара полей несовместима, она все же допускает свою реализацию в четырехмерии, в частности, обладающем финслеровой метрической функцией Бервальда-Моора, в связи с чем ее обнаружение в реальности автоматически явилось бы веским основанием к необходимости смены представлений о геометрии пространства-времени с квадратичной метрики на финслерову, связанную с формой четвертого порядка.

**Ключевые слова:** двойные числа, функции двойной переменной, потенциальные гиперболические поля, соленоидальные гиперболические поля.

## 1 Введение

Известно, что группа непрерывных симметрий уравнений Максвелла и пространства Минковского совпадают. Причем не только на уровне изометрических преобразований, но и конформных. При этом мало кто обращает внимание на факт, что если электромагнитное поле зависит лишь от двух пространственных координат, то редуцированные до этих двух измерений уравнения Максвелла инвариантны уже не относительно 15-параметрической группы (или относительно 6-параметрической, что было бы логично для круговых преобразований в двумерии), а относительно бесконечнопараметрической. При этом аналогичное упрощение уравнений Максвелла до двух пространственно-временных измерений не приводит к такой же метаморфозе и группа их симметрий в этом случае остается конечномерной. Подобная неравноправность сведения электромагнитных задач к пространственной или к пространственно-временной двумерности представляется крайне странной и заставляет задуматься о ее причинах.

Одно из возможных объяснений данного парадокса может заключаться в том, что уравнения Максвелла и пространство Минковского лишь частично описывают реальность, тогда как более адекватные конструкции как уравнений поля, так и метрики пространства-времени связаны с более содержательными на конформные симметрии финслеровыми геометриями. В настоящей работе предпринимается попытка взглянуть на обсуждаемую ситуацию не с позиций опыта или эксперимента, а отталкиваясь от одних только эвристических соображений, базирующихся на предположении о фундаментальной роли понятия числа не только в математике, но и в физике.

## 2 Число, геометрия и физическая реальность

Несмотря на то, что большинство ученых, оценивая роль физики и математики в отношении познания человеком окружающего мира, на первый план выдвигают практический опыт и эксперимент, то есть, исходят из первичности физических построений, за которыми лишь в качестве инструмента для описания следуют специально подобранные математические конструкции, некоторые исследователи убеждены в возможности и целесообразности прямо противоположного подхода. То есть, когда не опыт выступает источником идей и представлений ученого об окружающем его мире, а сама математика, причем в лице наиболее красивых и простых своих элементов. Конечно же, такой подход применим далеко не всегда, а лишь в отдельных и достаточно редких случаях, однако тем ценнее должны представляться те знания о Вселенной, которые выведены из чистых и достаточно абстрактных математических структур.

На первый взгляд представляется, что подобный подход имеет слишком незначительные шансы на успех из-за огромного количества различных математических конструкций, что могли бы выступать в качестве потенциальной основы для такого рода поисков. Однако, круг вероятных кандидатов можно весьма эффективно ограничить, если максимально внимательно подойти к предложению Эйнштейна, вынесенному в эпиграф данной статьи, то есть, отталкиваться не от всяких, но лишь от наиболее элементарных математических объектов. К таким простейшими объектам, в первую очередь, следует отнести числа. Однако различных классов чисел также довольно много. Помимо обычных, к которым, как правило, относят натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные, известны и такие, как кватернионы, октавы, $p$-адические числа, числа Клиффорда, Грассмана и т.д. и т.п. Попробуем не распылять наше внимание по всем числам вообще, а сосредоточить его на Числах "с большой буквы", то есть на таких, чьи свойства уже доказали свою непосредственную связь с теми или иными проявлениями реального физического мира.

Предлагается под Числами понимать представителей уже звучавшего выше ряда: натуральные, целые, рациональные, действительные, комплексные... Органическое переплетение свойств перечисленных классов Чисел с действительностью давно стало общепризнанным. Своей кульминации такое единство достигает на уровне комплексных чисел, свойства которых, как известно, не только имеют прямое отношение к геометрии двумерного евклидова пространства, (что, кстати, в свое время и послужило основным аргументом в согласии математиков считать комплексную алгебру естественным расширением действительных чисел), но и обладают красивыми связями с физикой, что происходит весьма естественным путем, когда от алгебры переходят к анализу на комплексной плоскости. Какую бы аналитическую функцию от комплексной переменной мы ни взяли, ей всегда можно поставить в соответствие конкретное двумерное физическое поле, (например, электро- или магнитостатическое). Равно как справедливо и обратное утверждение: для любой комбинации источников и вихрей, задающих идеальное двумерное поле в вакууме, можно всегда отыскать "свою" аналитическую функцию комплексной переменной. Считается, что на этом двумерном частном случае теснейшие переплетения свойств Чисел, геометрии и физики, только-только нетривиальным образом начавшиеся (ведь более простые Числа связаны либо с одномерными, либо вообще с дискретными пространствами), внезапно вдруг и заканчиваются. В алгебре доказана важная теорема, носящая имя Фробениуса, констатирующая, что числовых множеств с размерностью три и выше, наследующих все без исключения свойства действительных и комплексных алгебр, не существует. Вместе с этим фактом отсутствует и возможность связать между собой геометрию многомерных пространств с многокомпонентными "хорошими" алгебрами. Кватернионы, открытые Гамильтоном, не могут считаться полноценными обобщениями комплексных чисел, так как их произведения, в отличие от произведений остальных Чисел, некоммутативны. Кроме того, над кватернионами, которые в отличие от действительных и комплексных чисел образуют тело, а не числовое поле, отсутствуют нетривиальные аналитические функции. Самые "сложные" из них являются дробно-линейными функциями. Данное обстоятельство тесно связано с теоремой Лиувилля, которая, будучи примененной к четырехмерному евклидову пространству, ассоциированному с алгеброй кватернионов, утверждает, что конформная группа здесь всего 15-параметрическая, тогда как на комплексной плоскости и на вещественной прямой соответствующие группы преобразований бесконечномерны. Сравнивая данный факт с множеством аналитических функций действительной и комплексной переменных, становится понятным вывод о том, что отсутствие разнообразия в конформных преобразованиях приводит к резкому сокращению для кватернионов и функций над ними геометрических и физических приложений, сколь-нибудь соизмеримых с приложениями настоящих Чисел.

Столкнувшись с данным обстоятельством, особенно досадным после впечатляющих успехов взаимодействия алгебры, геометрии и физики на примере комплексного анализа, большинство математиков отказалось от дальнейших поисков вариантов расширения списка Чисел. Лишь редкие энтузиасты продолжают заниматься этой проблемой, сосредоточив свое внимание на отыскании таких изменений в понятии аналитических функций, которые бы, с одной стороны, не противоречили алгебре кватернионов, а с другой, в той или в иной мере включали бы в себя теорию функций комплексной переменной. В частности, соответствующие попытки предпринимаются в рамках алгебры комплексных кватернионов или бикватернионов, как их иногда называют [1, 2, 3, 4]. Автору настоящей статьи такие усилия представляются излишне компромиссными (хотя и небезынтересными), так как они не в силах отменить факта некоммутативности произведений кватернионов и бикватернионов, а также не позволяют избавиться от относительной бедности групп аналитических функций и конформных преобразований в связанных с ними пространствах. Однако, как минимум, один вариант для пополнения списка Чисел, а, следовательно, и для появления новых оснований для продолжения поисков естественных аналогий, идущих от чистой математики к физике и не только в двумерном, но и в многомерных случаях, все же имеется.

## 3 Двойные числа

Рассмотрим так называемые двойные числа [5, 6]. Их еще иногда именуют расщепляемыми или гиперболически комплексными. Данная алгебра, которую договоримся обозначать $H_2$, а ее числа как $h = t + jx$, на первый взгляд, существенно более элементарна и проста, чем комплексная алгебра $C$. Такое впечатление определенным образом связано с тем, что их мнимая единица $j$ в квадрате дает не отрицательную, а положительную вещественную единицу:

$$j^2 = +1.$$

Законы сложения и умножения двойных чисел в базисе состоящем из 1 и $j$ имеют вид:

$$h_1 + h_2 = (t_1 + jx_1) + (t_2 + jx_2) = (t_1 + t_2) + j(x_1 + x_2);$$

$$h_1 \cdot h_2 = (t_1 + jx_1) \cdot (t_2 + jx_2) = (t_1t_2 + x_1x_2) + j(t_1x_2 + t_2x_1).$$

Разница в значении квадрата мнимой единицы комплексных и двойных чисел приводит к тому, что в геометрическом плане последним соответствуют точки и вектора не евклидовой, а псевдоевклидовой плоскости [6]. Это связано также с тем, что квадрат их модуля, получаемый аналогично комплексным числам путем умножения на сопряженное число:

$$|h|^2 = (t + jx) \cdot (t - jx) = t^2 - x^2$$

соответствует метрике двумерного пространства-времени, если величину скорости света положить равной единице.

Но самым замечательным является факт, что аналогия с комплексными числами у двойной переменной прослеживается на много глубже. При этом все, что связывало первые с геометрией евклидовой плоскости, вторые связывает с геометрией двумерного пространства-времени. Операциям сложения и умножения двойных чисел соответствуют трансляции, повороты и растяжения псевдоевклидовой плоскости. Имеют смысл понятия сопряженного числа, модуля и аргумента, алгебраической и экспоненциальной форм представления, справедливы аналоги формул Эйлера, Стокса, Остроградского, Коши и др., естественным образом вводится понятие производной независящей от направления и аналитичности функций [6, 7, 8]. Трудно вообще придумать качество, имеющее место на плоскости комплексной переменной, чтобы оно не нашло своего аналога на плоскости двойной переменной. Но, как ни странно, при всем при этом двойные числа практически никто не включает в классификацию Чисел и их не принято считать столь же естественными расширениями действительных чисел, какими давно признаны комплексные.

По-видимому, основная причина столь пренебрежительного отношения математиков к двойным числам кроется в слишком очевидной простоте их устройства, иногда граничащей с тривиальностью. Для этих чисел легко находится базис (он иногда называется изотропным), в котором они распадаются на две независимые действительные алгебры. В результате создается впечатление, что ничего, кроме свойств такой пары, плоскость двойной переменной не содержит. И все же, эта простота по сравнению с комплексными числами является кажущейся, ее тут ничуть не больше, чем во взаимоотношениях между псевдоевклидовой и евклидовой плоскостями. Утверждать обратное, равносильно попыткам доказательства, что геометрия евклидовой плоскости намного сложнее и интереснее, чем геометрия двумерного пространства-времени. Если уж такое сравнение и проводить, то большую сложность (во всяком случае, в субъективном восприятии), скорее, следовало бы приписать как раз псевдоевклидову варианту. В любом случае, двойные числа, как минимум, вдвое сложнее вещественных и потому проверка предположения, что они в отличие от кватернионов и бикватернионов должны быть включены в список Чисел, имеет достаточно веские причины.

Известно, что двойные числа удовлетворяют практически всем аксиомам, которые справедливы для Чисел рассматривавшегося фундаментального ряда, вообще, и для комплексных чисел, в частности. Сказанное относится и к наличию свойства коммутативности у их произведений, которое отсутствовало у кватернионов. Единственным отличием можно считать лишь появление в алгебре двойной переменной делителей нуля, то есть объектов с ненулевыми компонентами, модуль которых оказывается равным нулю и для которых не существует обратных по умножению, как и у обычного нуля. Математики данное качество часто считают "плохим" или как минимум, неудобным. Именно поэтому, упоминавшаяся выше теорема Фробениуса, не рассматривала алгебр с делителями нуля, в принципе. Подобное ограничение с позиций предлагаемого подхода, основанного на поиске Чисел, имевших бы тесную и естественную связь с геометрией и физикой, представляется совершенно неоправданным.

Алгебре двойных чисел соответствует геометрия двумерного псевдоевклидова пространства-времени [6], а в последнем, как известно, появляется фундаментальный объект, которого нет (во всяком случае, в вещественном виде) ни в одном евклидовом пространстве. Речь идет о световом конусе, или другими словами, о множестве точек, расстояния до которых (более правильно говорить об интервалах) от фиксированной точки равняются нулю. Именно точкам и векторам светового конуса естественным образом ставятся в соответствие делители нуля алгебры двойных чисел. То есть, основное препятствие, которое по мнению математиков не позволяет двойным числам рассматриваться в одном ряду с действительными и комплексными, на самом деле, является необходимым элементом как псевдоевклидовой геометрии, так и связанной с ней релятивистской физики. Но если из теоремы Фробениуса исключить требование отсутствия у интересных для физических приложений алгебр делителей нуля и иметь ввиду, что Числам могут соответствовать не только евклидовы, но и псевдоевклидовы пространства, то пессимистический вывод о замыкании комплексной алгеброй перечня фундаментальных Числовых объектов становится не вполне точным и появляются веские основания для пополнения рассматриваемого списка, прежде всего, за счет включения в него двойных чисел.

Немаловажным фактором, также свидетельствующим о необходимости считать двойные числа Числами, является наличие над ними бесконечно-параметрического множества аналитических функций (правильнее говорить об $h$-аналитичности [6], поскольку на плоскости $H_2$ переменной иная топология, чем на комплексной плоскости). Более того, понятие $h$-аналитической функции от двойной переменной можно определить таким образом, что их разнообразие оказывается ровно таким же как и разнообразие аналитических функций обычной комплексной переменной, причем любой функции из одного множества при этом соответствует одна и только одна функция другого [9]. В этом случае, аналитические функции обычной комплексной переменной можно однозначно связывать не только с двумя сопряженными гармоническими функциями от двух переменных, но и с парой произвольных аналитических функций от одной вещественной переменной каждая, на которые в изотропном базисе разлагается любая $h$-аналитическая функция. Тот факт, что на комплексной плоскости нет действительного базиса, в котором такое разложение осуществлялось бы так же, как и на двойной, ничего не меняет по существу, тем более, что, как показано в [9] и будет частично продемонстрировано ниже, соответствие между аналитическими и $h$-аналитическими функциями в двух рассматриваемых алгебрах намного более тесное, чем представлялось ранее. Кроме того, необходимо помнить о возможности перехода от пары независимых алгебр $H_2(R)$ и $C$ к объединенной четырехкомпонентной алгебре $H_2(C)$, в которой свойства двойных и комплексных чисел переплетаются наиболее естественным образом.

Одним из замечательных свойств комплексной плоскости, открытым совсем недавно, явилось построение на ней при помощи компьютерных алгоритмов фрактальных множеств Жюлиа и Мандельброта [10]. Красота, гармония и содержательность этих объектов [11] явились дополнительным подтверждением связей существующих между чистой математикой и геометрией, ну а от последней, как известно, совсем недалеко до физики. Существует мнение, что аналогичных по сложности фрактальных или фракталоподобных множеств на плоскости двойной переменной невозможно построить в принципе. У многих исследователей данной проблемы, вместо беспредельно изломанных границ комплексных фракталов получались тривиально гладкие квадраты и прямоугольники [12, 13, 14]. Однако, как показывают недавние исследования [15, 16, 17], ситуация и тут существенно интереснее. Если вместо предельных фрактальных множеств Жюлиа рассматривать так называемые предфракталы, отличающиеся от последних связью с конечным числом итераций, то вместо гладких границ прямоугольников на плоскости двойной переменной появляются объекты, практически ничем не отличающиеся от предфракталов на комплексной плоскости.

Таким образом, двойные числа все же следует признать заслуживающими звания Чисел с большой буквы, а также включить их в соответствующую классификацию между вещественной и комплексной алгебрами, а может, даже, и параллельно последней. Если этот достаточно формальный шаг окажется подкрепленным еще и указанием нетривиальных связей двойных чисел и функций над ними не только с геометрическими, но и с физическими свойствами двумерного пространства-времени, вопрос с классификацией двойных чисел можно будет считать в основном закрытым. Попробуем именно это проделать ниже.

С элементарной геометрией на уровне групп движений, или, что то же самое, изометрических преобразований, в паре "двойные числа" — "псевдоевклидова плоскость" все более-менее ясно. Как и на комплексной плоскости, группа движений здесь реализуется сложением двойных чисел и умножением на числа единичного модуля, с той естественной разницей, что вращения на двойной плоскости являются гиперболическими. Физическая интерпретация этих алгебраических и геометрических свойств двойных чисел также не вызывает трудностей и обычно связывается с задачами специальной теории относительности, когда есть лишь две значимых координаты: одна пространственная и одна временная [18]. Однако существенно более интересен вопрос о гипотетических связях между нелинейными $h$-аналитическими функциями и соответствующими уже им геометрическими и физическими интерпретациями. Подчеркнем, что речь идет об отыскании связей максимально аналогичных тем, что давно известны между аналитическими функциями комплексной переменной, конформными преобразованиями евклидовой плоскости и соответствующими тем и другим физическими приложениями. То обстоятельство, что двойные числа и функции от них давно нашли широкое применение в теории суперструн и в квантовой теории поля сейчас не обсуждается, так как мы сейчас рассматриваем приложения к классической полевой физике. Для исследования данной проблемы вспомним, как подобные связи реализуются на комплексной плоскости.

## 4 Аналитические функции от комплексных чисел и h-аналитические от двойных

Рассмотрим простейшую нетривиальную аналитическую функцию комплексной переменной — натуральный логарифм с комплексным коэффициентом $a$:

$$F(z) = a\ln(z - z_0) = (q + iw)\ln((x - x_0) + i(y - y_0)) = u(x, y) + iv(x, y) =$$

$$q\ln\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - w\arctan\frac{y - y_0}{x - x_0} + i(w\ln\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + q\arctan\frac{y - y_0}{x - x_0}),$$

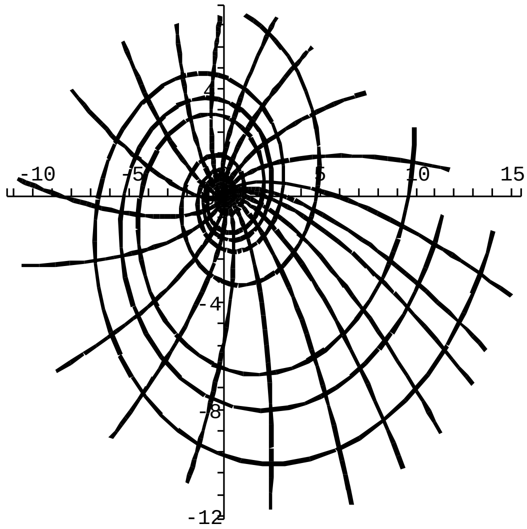


Рис. 1: Силовые линии (спирали, раскручивающиеся по часовой стрелке) и эквипотенциальные линии (спирали, раскручивающиеся против часовой стрелки) точечного вихреисточника на комплексной плоскости с $q = 1$, $w = 1/4$.

где $z = x + iy$ — комплексная переменная, $a = q + iw$ и $z_0 = x_0 + iy_0$ — некоторые фиксированные комплексные числа, $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — сопряженные гармонические функции, на которые всегда можно разложить аналитическую функцию.

В теории комплексного потенциала [6], имеющей дело с физическими интерпретациями аналитических комплекснозначных функций, с кривыми $v(x, y) = \mathrm{const}_1$ принято связывать силовые линии некоторого двумерного векторного поля, а с кривыми $u(x, y) = \mathrm{const}_2$ — эквипотенциальные линии этого же поля. Для рассматриваемой аналитической функции логарифм с комплексным множителем соответствующая ей пара полей имеет вид, представленный на рис. 4. Такое поле в гидродинамическом смысле интерпретируется как поле одиночного двумерного точечного вихреисточника, находящегося в точке с координатами $(x_0, y_0)$ с обильностью, пропорциональной величине $q$ и с завихренностью пропорциональной величине $w$.

Гидродинамическая трактовка не единственная и не самая лучшая, так как требует рассмотрения идеальной жидкости, которой не существует в природе и, к тому же, такой вариант сопряжен с определенными трудностями при его распространении на плоскость двойной переменной. Гораздо более удобна для последующих аналогий с псевдоевклидовым пространством-временем электромагнитная интерпретация векторного поля, получаемого из произвольной аналитической функции. При таком подходе, натуральному логарифму с комплексным множителем соответствует формальная сумма (так как вектора напряженностей электрического и магнитного полей, как известно, не складываются) двумерного электростатического поля, создаваемого одиночным зарядом с величиной, пропорциональной $q$, и двумерного магнитостатического поля, создаваемого одиночным проводником с током, пропорциональным величине $w$, текущим в перпендикулярном к плоскости направлении. Образы проводников с током, хотя бы чисто условно, удобно заменить на точечные двумерные магнитные вихри, как я буду их здесь называть.

Если множитель $a$ перед логарифмом взять чисто вещественным, то соответствующее такой "упрощенной" аналитической функции векторное поле можно интерпретировать как двумерное электростатическое, создаваемое одиночным электрическим зарядом (рис. 2 слева).

А если положить $a$ равным чисто мнимой величине $iw$, то результирующий комплексный потенциал порождает вихревое поле, которое можно интерпретировать как двумерное магнитостатическое поле, создаваемое одиночным точечным магнитным вихрем (рис.2 справа).

Замечательным свойством аналитических функций является то обстоятельство, что, оперируя

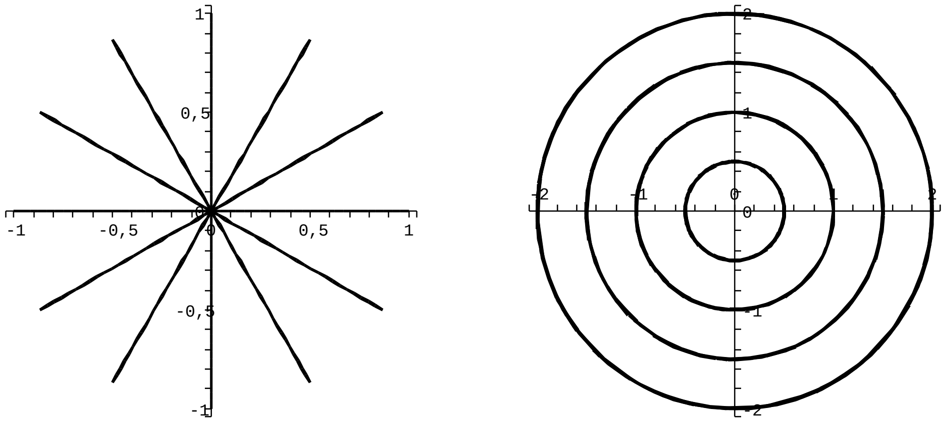


Рис. 2: На левом рисунке представлены линии напряженности точечного источника, на правом — точечного вихря.

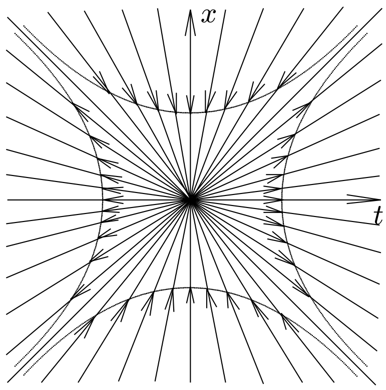


Рис. 3: Схематическая картина силовых линий гиперболического точечного источника. Поле постоянно по абсолютной величине на гиперболических окружностях (евклидовых гиперболах), а в соседних квадрантах светового конуса меняет свой характер (источник или сток).

одними только комплексными потенциалами точечных источников и вихрей на расширенной комплексной плоскости, можно получить поле, соответствующее любой конфигурации двух двумерных электро- и магнитостатических полей. Равно как верно и обратное: произвольной паре плоских потенциальных или соленоидальных векторных полей с точечными особенностями в них всегда можно подобрать соответствующую аналитическую функцию комплексной переменной.

Следует ли ожидать наличия столь же красивых и представляющих физический интерес связей между $h$-аналитическими функциями двойной переменной и некоторыми достаточно простыми (эффективно двумерными) реальными физическими явлениями? Если справедливы ожидания Эйнштейна и утверждение Пифагора, вынесенные в качестве эпиграфов данной статьи, а также работоспособен наш исходный тезис о возможности идти к физико-математическим теориям не только от опыта, но и исходя из свойств фундаментальных Числовых объектов, то такая связь представляется логически необходимой.

Для проверки этого предположения рассмотрим $h$-аналитическую функцию натуральный логарифм от двойных чисел:

$$F(h) = A\ln(h-h_0) = (Q+jW)\ln((t-t_0)+j(x-x_0)) = U(t,x)+jV(t,x) =$$

$$Q\ln\sqrt{(t-t_0)^2-(x-x_0)^2} + W\mathrm{Arth}\,\frac{x-x_0}{t-t_0} + j(W(\ln\sqrt{(t-t_0)^2+(x-x_0)^2} + Q\mathrm{Arth}\,\frac{x-x_0}{t-t_0},$$

где $h = t+jx$ — двойная переменная, $A = Q+jW$ и $h_0 = t_0+jx_0$ — некоторые фиксированные двойные числа, $U(t,x)$ и $V(t,x)$ — сопряженные $h$-гармонические функции, на которые всегда можно разложить $h$-аналитическую функцию.

Положим сперва $A = Q$, то есть возьмем $A$ чисто вещественным. Тогда наш гиперкомплексный потенциал принимает вид:

$$F(h) = A\ln(h-h_0) = Q\ln((t-t_0)+j(x-x_0)) =$$

$$U(t,x)+jV(t,x) = Q\ln\sqrt{(t-t_0)^2-(x-x_0)^2}+jQ\operatorname{Arth}\frac{x-x_0}{t-t_0}.$$

Поступая в полной аналогии с теорией комплексного потенциала и связывая с уравнениями $V(t,x) = \mathrm{const}_1$ линии тока (силовые линии), а с $U(t,x) = \mathrm{const}_2$ — линии уровня, мы получаем графический портрет некоего двумерного векторного поля на псевдоевклидовой плоскости (рис. 3).

Логично предположить, что данное пространственно-временное образование можно интерпретировать как поле точечного источника с обильностью (зарядом) $Q$, находящимся в точке-событии с координатами $(t_0, x_0)$. Силовые линии этого поля, как и для источника на комплексной плоскости — радиальные прямые, а линии уровня — концентрические окружности, только не евклидовы, а псевдоевклидовы, поскольку представляют собой квадратичные гиперболы. Естественно, что это совсем не такой источник, который был связан с логарифмом на комплексной плоскости, так как метрика на плоскости двойной переменной совершенно иная и перед нами не пространственное векторное поле, а пространственно-временное. Кроме того, если на комплексной плоскости логарифм терял аналитичность в единственной точке с координатами $(x_0, y_0)$, то на плоскости двойной переменной логарифм перестает быть $h$-аналитической функцией не только в точке $(t_0, x_0)$, но и на связанном с нею изотропном (световом) конусе. Несмотря на эти отличия, перед нами все же именно источник, который, чтобы не путать его с комплексным аналогом, договоримся именовать гиперболическим, а величину его заряда $Q$ для контрастности попробуем именовать разрядом.

Обозначим напряженность векторного поля, создаваемого одними лишь гиперболическими точечными разрядами как $P(t,x) = P_t + jP_x$. С исходной $h$-аналитической функцией, понимаемой как гиперкомплексный потенциал, такое поле по аналогии с теорией обычного комплексного потенциала можно связать соотношением: $P(t,x) = \overline{F'(z)}$ откуда следует, что $P_t = \partial U/\partial t = -\partial V/\partial x$ и $P_x = \partial U/\partial x = -\partial V/\partial t$ во всех точках, где исходная функция $F(h)$ $h$-аналитична. Квадрат модуля напряженности такого поля $|P|^2 = |\overline{F'(z)}|^2 = (P_t)^2 - (P_x)^2$, а направление ее вектора в каждой точке задается гиперболическим углом с осью $t$: $\alpha = \operatorname{Arth}(P_x/P_t)$. Как видим, у данного поля много общего с напряженностью двумерного электростатического поля $E(x,y) = E_x + iE_y$, имевшей практически аналогичные связи с аналитическими функциями комплексной переменной, с той разницей, что вместо пространства исследуемое поле реализуется в пространстве-времени, а его источниками являются не особые точки, а особые события. Для такого поля можно ввести понятие гиперболической потенциальности, связав его с конкретным выражением для дифференциального оператора: $\operatorname{roth} P = \partial P_t/\partial x + \partial P_x/\partial t = 0$, лишь немного отличающимся от своего прототипа на комплексной плоскости. Аналогичным образом вводится и понятие гиперболической дивергенции поля $\operatorname{divh} P = \partial P_t/\partial t + \partial P_x/\partial x = Q$, которая в случае гиперкомплексного потенциала в виде функции $F(z) = Q\ln(h-h_0)$ в точке $h_0$ имеет (интегрируемую особенность) и принимает нулевые значения во всех остальных точках плоскости. Таким образом, перед нами полный гиперболический аналог двумерного потенциального поля электрической напряженности $E$ создаваемого одиночным зарядом, только в данном случае поле $P$ создается одиночным разрядом и заполняет оно собой не пространство, а пространство-время.

Переходя от действительного значения множителя $A$ к чисто мнимому $A = jW$, будем иметь следующее выражение для гиперкомплексного потенциала:

$$F(h) = A\ln(h-h_0) = jW\ln((t-t_0)+j(x-x_0)) = U(t,x)+jV(t,x) =$$

$$W\operatorname{Arth}\frac{x-x_0}{t-t_0}+jW\ln\sqrt{(t-t_0)^2-(x-x_0)^2}.$$

В итоговой картине векторного поля такая замена вещественной величины разряда на гиперболически мнимую приводит к тому, что силовые линии и линии уровня меняются местами

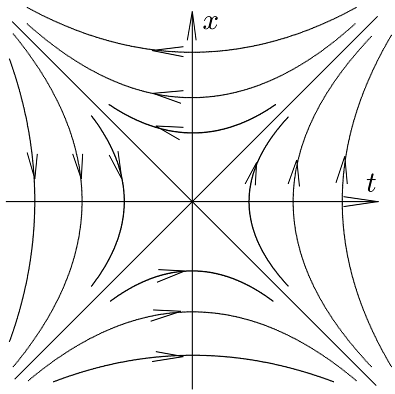


Рис. 4: Силовые линии двумерного точечного гиперболического вихря. Ориентация линий — общая для всех 4-х квадрантов светового конуса (против часовой стрелки).

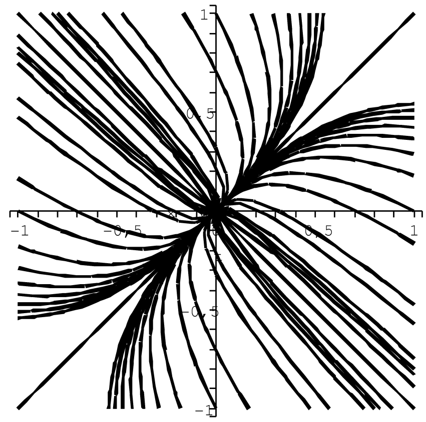

Рис.5: Силовые линии точечного вихреисточника для $Q/W = -2$. Линии исходят из центра во втором и четвертом квадрантах светового конуса, и сходятся к центру в первом и третьем.

(рис. 4), то есть силовые линии поля теперь представляют собой семейства концентрических гипербол, а линии уровня превращаются в пучок радиальных прямых. В данном случае такое поле мы имеем полное право интерпретировать как гиперболический точечный вихрь обильностью $W$, находящийся в точке-событии с координатами $(t_0, x_0)$ двумерного пространства-времени.

Обозначим напряженность векторного поля, создаваемого гиперболическими точечными вихрями (или, другими словами, гиперболически мнимыми разрядами) как $G(t,x) = G_t + jG_x$. С исходной $h$-аналитической функцией это гиперболически вихревое поле связано соотношением: $G(t,x) = \overline{F'(z)}$ откуда следует, что $G_t = \partial U/\partial t = -\partial V/\partial x$ и $G_x = \partial U/\partial x = -\partial V/\partial t$ во всех точках, где исходная функция $F(z)$ $h$-аналитична. Квадрат модуля напряженности такого поля $|G| = |\overline{F'(z)}| = (G_t)^2 - (G_x)^2$, а направление ее вектора в каждой точке задается гиперболическим углом с осью $t$: $\alpha = \mathrm{Arth}(G_x/G_t)$. В отличии от рассмотренного выше потенциального векторного поля $P$, оно обладает не времени-, а пространственноподобными силовыми линиями, откуда и модуль, и гиперболический угол для векторов его напряженности оказываются мнимыми величинами. С другой стороны, у данного поля много общего с напряженностью двумерного магнитного поля $H(x,y) = H_x + iH_y$, имевшей практически аналогичные связи с аналитическими функциями комплексной переменной, с той разницей, что вместо пространства данное поле реализуется в пространстве-времени, его вихрями являются не особые точки, а особые события, а силовые линии таких вихрей являются псевдоевклидовыми окружностями, то есть гиперболами. Для такого поля можно ввести понятие гиперболической соленоидальности, связав его с равенством нулю во всех точках поля гиперболической дивергенции: $\mathrm{divh}\, G = dG_t/dt + dG_x/dx = 0$. Гиперболический ротор для данного вида двумерного поля в случае гиперкомплексного потенциала в виде функции $F(z) = jW\ln(h - h_0)$ в точке $h_0$ оказывается сингулярным (с интегрируемой особенностью), а во всех остальных точках плоскости имеет нулевое значение. Таким образом, перед нами полный гиперболический аналог двумерного соленоидального поля магнитной напряженности , связанного с одиночным вихрем, только в данном случае вихрь имеет гиперболическую природу и реализуется в пространстве-времени.

Когда множитель $A$ перед функцией натурального логарифма от двойной переменной принимает гиперкомплексное значение $A = Q + jW$, то в соответствии с принятыми правилами геометрической интерпретации, мы имеем векторное поле двумерного точечного гиперболического вихреисточника (рис. 5). В этом случае получаются сразу два сосуществующих поля: гиперболически потенциальное $P(t,x)$, связанное с разрядом $Q$ в точке-событии $(t_0, x_0)$, и гиперболически соленоидальное $G(t,x)$, порождаемое гиперболически мнимым разрядом $W$, произошедшим в той же пространственно-временной точке.

Симметрия между напряженностями пары полей $E(x,y)$ и $H(x,y)$ на комплексной плоскости и напряженностями $P(t,x)$ и $G(t,x)$ на плоскости двойной переменной — удивительно гармоничная и полная. Было бы странно, что для первой пары в физическом мире существует двумерная реализация (причем не единственная!), а для второй таковой не существовало бы вовсе. В связи с этим совершенно логично выглядит гипотеза, что поля $P(t,x)$ и $G(t,x)$ также реализуются в физическом мире, причем одно из них является гиперболическим дубликатом двумерного электрического поля, а другое — магнитного.

## 5 Потенциальные и соленоидальные гиперболические поля

Перебор известных современной физике фундаментальных взаимодействий показывает, что на непосредственную связь с рассматриваемой парой $P(t,x)$ и $G(t,x)$, похоже, не может претендовать ни одно. Значит, мы должны выдвинуть версию о существовании в реальности дополнительного фундаментального взаимодействия, свойства которого при переходе к ситуациям, где значимыми остаются лишь два измерения, одно из которых — время, оказываются именно такими, как подсказывают нам $h$-аналитические функции двойной переменной. Назовем объединение этой пары полей гиперболическим полем.

Таким образом, на основании одних только математических построений и их сравнении с известными электромагнитными явлениями мы приходим сразу к нескольким достаточно интересным по своим последствиям для физики гипотезам, естественно, требующим соответствующей экспериментальной проверки.

1. Источниками гиперболического поля оказываются не элементарные частицы, как это имело место в случае электрического поля, а точечные события в пространстве-времени, при этом место зарядов занимают разряды.

2. Напряженность поля, порождаемого разрядами, имеет гиперболический характер, то есть силовые линии заполняют собой не пространство, а пространство-время, при этом эквипотенциальные линии поля (в случае двух измерений) являются гиперболами.

3. У гиперболического поля как и у обычного электрического поля на евклидовой плоскости имеется своя вихревая пара — гиперболический аналог магнитного поля, силовые линии которого псевдоевклидовы окружности, то есть, гиперболы.

4. Заряды гиперболического поля, которые выше мы договорились называть разрядами, как и заряды обычного электрического или гравитационного взаимодействия, можно характеризовать величиной полной энергии, однако в данном случае это понятие относится не к частице, а к точечному элементарному событию или, другими словами, к пространственно-временной сингулярности.

5. Разряды гиперболического поля могут быть не только положительными или отрицательными, но вещественными, мнимыми и гиперкомплексными величинами.

6. Напряженности обеих компонент гиперболического поля связанного с двумерным одиночным вихреисточником спадают обратно пропорционально величине интервала от точки, в которой тот находится.

7. Вихревая часть гиперболического поля, скорее всего, не может быть обнаружена прямыми экспериментами с обычными частицами, так как его силовые линии оказываются пространственноподобными по отношению к направлению собственного времени наблюдателя и к мировым линиям пробных частиц. Для обнаружения такого взаимодействия требуются измерения связанные с событиями, или иными словами, детектирование проявлений гиперболического поля должно осуществляться при помощи часов.

8. Естественные расширения гиперболического поля на три и четыре измерения следует строить не путем переходов к пространству Минковского или его псевдоримановым обобщениям (у которых мало общего с Числами), а в тесной связи с естественными расширениями двойных чисел $H_2$ на тройные $H_3$ и четверные $H_4$. Такие алгебры порождают уже не псевдоевклидово пространство-время, а линейные финслеровы пространства с метрикой Бервальда-Моора [19,

20, 21, 22, 23].

9. В многомерных финслеровых пространствах с метрикой Бервальда-Моора, кроме длин и углов естественными метрическими инвариантами являются еще и так называемые тринглы и полиуглы [24, 25], с которыми можно связать уже не только $h$-аналитические, но и более сложные функции. Разнообразие последних существенно богаче, а их свойства намного интересней. Возможно, что при рассмотрении таких функций станет понятно как объединяются гиперболическое и электромагнитное поля, причем в неразрывном единстве с понятием многокомпонентного гиперкомплексного Числа.

10. На основании предлагаемого подхода к гиперболическому полю можно сделать прогноз в отношении скорости распространения соответствующего взаимодействия. Судя по линиям напряженности поля, связанного с точечным разрядом, гиперболическое взаимодействие распространяется со всевозможными скоростями от нулевой, до предельной равной скорости света. Формально можно говорить даже и о сверхсветовых скоростях, однако, по отношению к наблюдателю это будут уже мнимые, не регистрируемые величины скорости.

11. Для пространств с метрикой Бервальда-Моора, в частности для четырехмерного случая, лучше говорить не о трехмерной скорости, а о финслеровом аналоге понятия четырехскорости. Последняя в отличие от четырехскорости специальной теории относительности не остается постоянной по модулю вдоль мировой линии пробной частицы, а может менять свою величину, оставаясь всегда касательной к ней.

На плоскости двойной переменной также как и на комплексной, мы не связаны ограничением иметь дело с одними только источниками и вихрями. Параллельно с такими точечными особенностями можно рассматривать гиперболические диполи, квадруполи и прочие мультиполи, а также континуальные их распределения по пространству-времени. Иными словами, мы можем дать гиперболически полевую интерпретацию любой $h$-аналитической функции двойной переменной, в полном соответствии с тем, как это имело место между аналитическими функциями комплексной переменной и двумерными электро- и магнитостатическими полями.

Возникающая на основе алгебры и анализа на двойных числах модель физического поля, являющегося зеркальным двойником двумерного стационарного электромагнитного поля, требует внимательного к ней отношения и самой тщательной проверки в экспериментах и космологических наблюдениях. Если в процессе таких исследований наша гипотеза о существовании гиперболического поля с вполне конкретными и a'priory предсказываемыми свойствами действительно подтвердится, то с полным основанием можно будет поставить вопрос о необходимости расширений двумерных уравнений данного поля уже на три и четыре пространственно-временных измерения. При этом поиск многомерных физических моделей гиперболического и других фундаментальных полей следует вести не только отталкиваясь от наблюдений и экспериментов, но и изучая математическую структуру многокомпонентных обобщений двойных и комплексных чисел, а также выделенных функций над ними, которые, скорее всего, будут устроены намного сложнее и интереснее, чем обычные аналитические и $h$-аналитические функции. Соответствующие Числа известны: они представляют собой прямые суммы $n$ действительных и $m$ комплексных алгебр, нужно только научиться смотреть на них в неразрывной связи с порождаемыми ими линейными финслеровыми пространствами, непрерывными симметриями, выделенными функциями от гиперкомплексных чисел и с уверенностью в возможность физической интерпретации всего этого.

## 6 Заключение

На первый взгляд может показаться, что необходимость включения двойных чисел в один ряд с другими фундаментальными Числовыми объектами — является излишним обстоятельством, а все проделанные выше теоретические построения могли быть получены и без этого. Так ли уж важно, поставим мы двойные числа рядом с вещественными и комплексными или будем считать их самостоятельным классом чисел? Думаю, что в контексте основной идеи данной работы, то есть, возможности получения знаний о реальном физическом мире на основании изучения простейших математических объектов, вопрос о месте двойных чисел — принципиальный. И дело даже не в том, сможем и захотим ли мы разглядеть за алгеброй двойной переменной, а также за $h$-анализом над ней геометрию и физику реальных двумерных физических полей. Более важной проблемой является возможность аналогичного подхода к трех- и четырехмерной геометрии и физике. Если окажется, что достаточно простые двойные числа при подробном рассмотрении свойств $h$-аналитических функций над ними в отношении к приложениям в геометрии и физике могут давать неизвестные и неожиданные знания о структуре двумерных пространственно-временных полей, то это автоматически должно означать аналогичную актуальность исследований других коммутативно-ассоциативных алгебр с делителями нуля на предмет уже их собственных физических интерпретаций. Учитывая, что таким многокомпонентным алгебрам соответствуют не евклидовы или псевдоевклидовы пространства, а их линейные финслеровы расширения [24], замена ими пространства-времени Минковского может оказаться вполне плодотворной.

Многие современные физики, скорее всего, отнесутся к такой перспективе скептически. Тому есть много объективных и субъективных причин, одна из которых, связана с принятыми на сегодня методологическим принципом развития прикладных наук, а именно, от эксперимента к физической модели, и только затем к математической. При этом иногда упускается из виду альтернативный путь. Да, вероятно в подавляющем большинстве ситуаций, кроме как на опыт и эксперимент физик больше ни на что не должен полагаться, но это вовсе не означает, что из данного правила нет исключений и в некоторых случаях, особенно когда у обычной стратегии возникают серьезные проблемы, более продуктивным может оказаться прямо противоположный путь, ведущий от простой и красивой математической конструкции сначала к геометрии, а затем и к физике.

## Литература


[1] Казанова Г. Векторная алгебра. М., Мир, 1979 — 120 с.

[2] Ефремов А.П. Кватернионные пространства, системы отсчета и поля. М., РУДН, 2005 — 374 стр.

[3] Кассандров В.В. Кватернионный анализ и алгебродинамика // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(6), том. 3, 2006, с. 58-84.

[4] Элиович А.А., Санюк В.И. Некоторые аспекты применения полинорм в теории поля // *ТМФ*, 2, том 162, 2010, с. 163-178.

[5] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973.

[6] Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1977.

[7] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. $h$-голоморфные функции двойной переменной и их приложения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(13), том. 7, 2010, с.44-77.

[8] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. $h$-аналитическая теория поля в 2-мерном пространстве-времени // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(13), том. 7, 2010, с.78-127.

[9] Павлов Д.Г., Гарасько Г.И. Двойные числа // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(13), том. 7, 2010, с.16-25.

[10] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М., Институт компьютерных исследований, 2002 — 656 с.

[11] Пайтген Х.О., Рихтер П. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М., Мир, 1993 — 176 с.

[12] Senn P. The Mandelbrot set for binary numbers // *American Journal of Physics*, Vol. 58, 1989, p.1018.

[13] Metzler W. The "mystery" of the quadratic Mandelbrot set // *American Journal of Physics*, 62 (9), 1994, pp. 813-814.

[14] Artzy R. Dynamics of quadratic functions in cycle planes // *Journal of Geometry*, Vol. 44, 1992, pp. 26-32.

[15] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Малыхин А.В., Панчелюга В.А. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(11), т.6, 2009, с. 135-145.

[16] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналога множества Жюлиа при нулевом значении параметра на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(11), т.6, 2009, с. 146-151.

[17] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналогов множества Жюлиа на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(12), т.6, 2009, с. 163-176.

[18] Ивлев Д.Д. О двойных числах и их функциях // Сб. Математическое просвещение. Вып.6. Под.ред. И.Н.Бронштейна, Ф.Л.Верпаховского, М., 1961, с. 197-203.

[19] Павлов Д.Г. Обобщение аксиом скалярного произведения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(1), т.1, 2004, с.5-19.

[20] Павлов Д.Г. Хронометрия трехмерного времени // *Гиперкомплексные чисел в геометрии и физике*, 1(1), т.1, 2004, с. 20-32.

[21] Павлов Д.Г. Четырехмерное время // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(1), т.1, 2004, с. 33-42.

[22] Гаранько Г.И., Павлов Д.Г. Геометрияя невырожденных поличисел // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(7), т.4, 2007, с.3-25.

[23] Гаранько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., Тетру, 2009 — 265 с.

[24] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Аддитивные углы в пространстве $H_3$ // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(10), т.5, 2008, с.25-43.

[25] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Метрические бинглы и тринглы в $H_3$ // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(11), т.6, 2009, с. 42-67.

# HYPERBOLICAL ANALOG OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD

**D.G. Pavlov**

*Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia*

geom2004@mail.ru

On the basis of the analogy of complex numbers analytical functions with two-dimensional electro- and magnetostatic fields there was made an assumption considering the existence of such correspondence between h-analytical functions of the binary variable and some other pair of binary physical fields in reality, one of which is hyperbolical source field and another is hyperbolically vortex field. Unlike electro- and magnetostatic fields, this pair is not realized in space but rather in space-time; thus, the sources of the first field are events while force lines of the second vortex constituent are hyperbolas. Essential feature of this hypothetical pair of fields is that it is feasible only in two-dimensional pseudo-Euclidian space and that it is fundamentally incompatible with the Minkowski idea of 4-dimensional space-time. Partially this is the very reason why such fields weren't considered potentially feasible by physicians even in theory. Their immediate discovery is hampered by experimentalists' being used to space-boundary conditions, while they had better work with space-time ones here. Although this pair is incompatible with Minkowskyi space, still it can possibly be realized in 4-dimesional space possessing, in particular, Berwald-Moor Finsler metric function, its discovery in reality, thus, serving a valid reason to substitute the quadratic metric idea of space-time geometry for Finsler one, connected with quartic form.

**Key Words:** double numbers, double numbers function, hyperbolical potential field, hyperbolical solenoidal field.