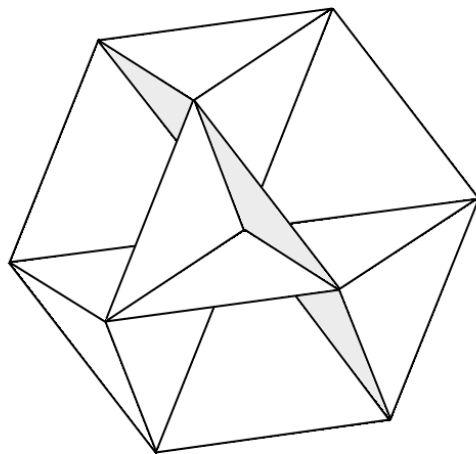


ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

№ 2 (20), том 10, 2013

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 2003 г.



www.polynumbers.ru

hypercomplex@mail.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Геометрия и физика голоморфных функций в поличисловой теории поля	190
Гарасько Г.И. Нерелятивистское движение материальной точки в сферически симметричном потенциальном поле с учетом расширения пространства-времени	213
Гарасько Г.И. Финслерова геометрия	219
Питер Роулантс Дуальные пространства, сингулярности частиц и геометрии четвертого порядка	234
Говард Брандт Финслеровы физические координаты для классического движения	246
Гальмак А.М. Полиадические операции на множествах матричнозначных функций	253
Елена Овсиук, Ольга Веко, Александру Оана, Мирче Неагу, Владимир Балан, Виктор Редьков О возможных проявлениях спинорных структур в квантовой физике	290
Елена Овсиук, Ольга Веко, Мирче Неагу, Владимир Балан, Виктор Редьков Спинорные, матричные структуры и проективная геометрия в поляризационной оптике	315
Нарасимхамурти С.К., Лата Кумари Г.Н. Очень специальная теория относительности в пространстве Финслера-Бервальда	329
Галаев С.В. Уравнения Эйнштейна для случая неголономного распределения с метрикой Бервальда-Моора	337
Букушева А.В. Неголономные геодезические пространства с метрикой Бервальда-Моора	345
Зарипов Р.Г. Гравитационное красное смещение для слабого поля тяготения в финслеровом пространстве событий Бервальда-Моора	351
Щербань В.Н. Исследование роли неприводимых компонент кручения при распространении в виде плоских волн в пространстве Римана-Картана	362
Информация для авторов	372
Информация для авторов (на английском)	373

CONTENTS

Pavlov D.G., Kokarev S.S. Geometry and physics of holomorphic functions in polynumbers field theory	190
Garas'ko G.I. Material point nonrelativistic movement in spherical potential field in view of space-time expansion	213
Garas'ko G.I. Finsler geometry	219
Peter Rowlands Dual spaces, particle singularities and quartic geometry	234
Howard E. Brandt Physical Finsler Coordinates for Classical Motion	246
Gal'mak A.M. Polyadic operations on the sets of matrix-valued functions	253
Elena Ovsyuk, Olga Veko, Alexandru Oană, Mircea Neagu, Vladimir Balan, Victor Red'kov On possible effects of the spinor structures in quantum physics	290
Elena Ovsyuk, Olga Veko, Mircea Neagu, Vladimir Balan, Victor Red'kov Spinors, matrix structures, and projective geometry in polarization optics	315
Narasimhamurthy S.K., G.N. Latha Kumari Finsler-Berwald space with very special relativity	329
Galaev S.V. The Einstein equations for case of nonholonomic distributions with Berwald-Moor metric	337
Bukusheva A.V. Nonholonomic geodesic in space with for Berwald-Moor metric	345
Zaripov R.G. Redshift for a weak gravitational field in Finsler space of events Berwald-Moor	351
Shcherban V.N. Investigation of role of irreducible torsion components under plane wave propagation in Riemannian-Cartan space	362
Information for authors (in russian)	372
Information for authors	373

ГЕОМЕТРИЯ И ФИЗИКА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ПОЛИЧИСЛОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Д.Г. Павлов¹, С.С. Кокарев^{1,2}

¹ НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

² РНОЦ “Логос”, Ярославль, Россия

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

На основе конструкции соприкосновения, изложенной в [5], исследуется физико-геометрическая интерпретация функций поличисловой переменной P_4 различных классов голоморфности по терминологии [5]. Показано, что конкретный выбор голоморфной функции (поличислового потенциала) определяет некоторую теоретико-полевую модель на фоне риманова многообразия ОТО, включающую тензорные поля различных рангов. Рассмотрен в общем виде вопрос о локальной причинной структуре псевдоримановых метрик, соприкасающихся с 4-мерной метрикой Бервальда-Моора. Показано, что конструкция соприкосновения порождает квадратичные метрики лишь с двумя типами сигнатур: $(+, -, -, -)$ и $(+, +, -, -)$. Выведены системы уравнений в частных производных, определяющих поличисловой потенциал для космологических метрик фридмановского типа и метрики Шварцшильда.

Ключевые слова: алгебра поличисел, метрика Бервальда-Моора, соприкосновение финслеровой и римановой метрик, ОТО, космологические модели Фрийдмана-Робертсона-Уокера, метрика Шварцшильда, обобщенно-голоморфные функции поличисловой переменной.

1 Введение

В работе [4] на основе предшествующих исследований по алгебре и геометрии двойных чисел [1–3] была построена теория поля для Гиперлэнда — двумерного мира Минковского, рассматриваемого в более широком, чем это делается в СТО, контексте конформной симметрии, связанной с h -голоморфными функциями двойной переменной. Модель Гиперлэнда оказалась привлекательной в первую очередь тем, что она представляет собой пример теории без свободных параметров и зависимостей: лагранжиан фундаментального поля, все существенные фундаментальные константы и типы простейших состояний этого поля (элементарные частицы материи Гиперлэнда — даблонa) оказались полностью вычислимыми (и вычисленными!) в рамках этой теории. Разумеется, теория Гиперлэнда является пробной игрушечной моделью, иллюстрирующей некоторые характерные особенности самой низкоразмерной версии поличисловой теории поля. Переход к более реалистичным 3-мерным и 4-мерным моделям в рамках поличислового подхода к описанию физической реальности требует использования алгебр тричисел P_3 и квадрачисел P_4 . Некоторые предварительные формальные разработки по алгебрам P_n были сделаны в [5], а более детальное исследование основного уравнения математической физики поличисловой теории поля в алгебре P_3 было проведено в [6]. Главным предметом рассмотрения настоящей статьи является алгебра поличисел P_4 и сопутствующие ей геометрические и аналитические объекты. Естественная геометрия алгебры P_4 связана с 4-мерной метрикой Бервальда-Моора 4-ого порядка, которая в специальных (т.н. изотропных) координатах имеет вид:

$${}^{(4)}G = \hat{S}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^4), \quad (1)$$

где \hat{S} — оператор симметризации без числового множителя. Метрика (1) относится к классу т.н. псевдофинслеровых метрик или m -корневых метрик [7]. Простейшим естественным

аналитическим объектом в P_n является т.н. h -голоморфная функция $P_4 \rightarrow P_4$ вида:

$$f(h) = f_1(x^1)e_1 + f_2(x^2)e_2 + f_3(x^3)e_3 + f_4(x^4)e_4, \quad (2)$$

где $h = x^i e_i$, $\{e_i\}_{i=1,4}$ — изотропный базис, в котором метрика Бервальда-Моора имеет вид (1), f_i — дифференцируемые функции вещественной переменной.

Мы исследуем вопрос о том, какие модели ОТО описываются в рамках концепции h -голоморфности. Отметим, что отношение алгебры P_4 к метрике (1) и функциям вида (2) вполне аналогично отношению алгебры комплексных чисел \mathbb{C} к евклидовой метрике и голоморфным функциям комплексной переменной. Имеются также поличисловые аналоги условий Коши-Римана и условий гармоничности (см. [5]). По этой причине в целом результаты настоящей статьи можно рассматривать как отдаленный поличисловой аналог стандартного метода конформных отображений в ТФКП, который посредством конструкции соприкосновения позволяет выходить на 4-мерные пространства-времена псевдориманова типа, изучаемые в рамках ОТО. С другой стороны, наше исследование представляет собой фрагмент будущей полной динамической теории поличислового потенциала, в которой конкретный его вид будет получаться путем решений динамических уравнений, выводимых из некоторых весьма общих принципов. Двумерный вариант такой теории, построенный на основе алгебры двойных чисел, представлен в работах [3, 4].

2 Алгебра кополиад

Рассмотрим пространство Бервальда-Моора H_n и метрику Бервальда-Моора ${}^{(n)}G$ в ней, отнесенную к некоторой изотропной системе координат (x^1, \dots, x^n) , в которой эта метрика имеет вид:

$${}^{(n)}G = \hat{S}(dx^1 \otimes \dots \otimes dx^n), \quad (3)$$

обобщающий (1). Рассмотрим тензор ${}^{(n)}\tilde{G}$ вида:

$${}^{(n)}\tilde{G} \equiv \hat{S}(\partial_1 \otimes \dots \otimes \partial_n), \quad (4)$$

который определяет “скалярное полипроизведение” в расслоении 1-форм $\wedge^1 H_n$ по формулам:

$$\tilde{G}(\omega_1, \dots, \omega_n) \equiv \epsilon^{k_1 \dots k_n} (\omega_1)_{k_1} \dots (\omega_n)_{k_n} \equiv \text{perm} \begin{pmatrix} (\omega_1)_1 & \dots & (\omega_1)_n \\ \dots & \dots & \dots \\ (\omega_n)_1 & \dots & (\omega_n)_n \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В (5) perm означает перманент матрицы, имеющий структуру обычного определителя, в котором все слагаемые берутся со знаком “плюс”. Таким образом, $\epsilon^{k_1 \dots k_n} = \tilde{G}^{k_1 \dots k_n}$ представляет собой симметричный аналог символа Леви-Чивиты (аналогично символ $\epsilon_{k_1 \dots k_n}$ с нижними индексами будет определять компоненты метрики Бервальда-Моора ${}^{(n)}G$ в изотропном базисе). Тензор (4) будем называть *дуальным* или *обратным* к ${}^{(n)}G$. Это название оправдывается следующим свойством компонент ${}^{(n)}G$ и ${}^{(n)}\tilde{G}$:

$$\sum_{k_{r+1}, \dots, k_n} \epsilon_{k_1 \dots k_r k_{r+1} \dots k_n} \epsilon^{m_1 \dots m_r k_{r+1} \dots k_n} = \frac{n!(n-1)!}{(n+r-1)!} \text{perm} \begin{pmatrix} \delta_{k_1}^{m_1} & \dots & \delta_{k_r}^{m_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k_1}^{m_r} & \dots & \delta_{k_r}^{m_r} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Равенства левой и правой частей (6) с точностью до коэффициента следуют из соображений симметрии, вид коэффициента следует из редукционной формулы для перманентов, вытекающей из простого подсчета перестановок:

$$\sum_{r=1}^n \begin{pmatrix} r & r_2 & \dots & r_s \\ r & m_2 & \dots & m_s \end{pmatrix} = (n+s-1) \begin{pmatrix} r_2 & \dots & r_s \\ m_2 & \dots & m_s \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где

$$\begin{pmatrix} r_1 & \dots & r_s \\ m_1 & \dots & m_s \end{pmatrix} \equiv \text{perm} \begin{pmatrix} \delta_{m_1}^{r_1} & \dots & \delta_{m_s}^{r_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{m_1}^{r_s} & \dots & \delta_{m_s}^{r_s} \end{pmatrix} \quad (8)$$

— сокращенное обозначение для перманента, составленного из упорядоченных дельта-символов. Таким образом, в каждом H_n имеется, как минимум, четыре типа полискалярного произведения: два полностью антисимметричных произведения n -ок векторов или 1-форм, ассоциированных с формами объемов в касательном и кокасательном расслоениях:

$$\text{vol} \equiv dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad \widetilde{\text{vol}} \equiv \partial_1 \wedge \dots \wedge \partial_n, \quad (9)$$

которые порождаются операцией внешнего (кососимметричного) произведения \wedge и два симметричных произведения n -ок векторов или 1-форм, задаваемых симметричными полилинейными формами (1) и (4). Отметим, что формы (9) существуют на любом гладком многообразии, в то время как наличие форм (1) и (4) — специфическая особенность пространств H_n . Для восстановления более полной симметрии между антисимметричными и симметричными метриками, определим операцию \vee симметрического произведения векторов или 1-форм по формулам:

$$X \vee Y \equiv X \otimes Y + Y \otimes X; \quad \omega \vee \lambda \equiv \omega \otimes \lambda + \lambda \otimes \omega, \quad (10)$$

для всяких $X, Y \in TH_n$ и $\omega, \lambda \in T^*H_n$. Теперь мы можем написать по аналогии с (9):

$${}^n G(X_1, \dots, X_n) \equiv \text{Vol}(X_1, \dots, X_n); \quad {}^n \widetilde{G}(\omega_1, \dots, \omega_n) \equiv \widetilde{\text{Vol}}(\omega_1, \dots, \omega_n), \quad (11)$$

где

$$\text{Vol} \equiv dx^1 \vee \dots \vee dx^n; \quad \widetilde{\text{Vol}} \equiv \partial_1 \vee \dots \vee \partial_n \quad (12)$$

— “симметричные формы объемов”.

Аналогию между антисимметричными тензорами (p -формами или p -векторами) и симметричными тензорами (p -полиады и p -кополиады) можно продолжить и далее. Определим расслоение p -полиад $\bigvee^p H_n$ как множество всех симметричных ковариантных тензорных полей. Они образуют $F(H_n)$ -модуль, базисом которого являются набор полиад $\{dx^{k_1} \vee \dots \vee dx^{k_p}\}_{k_i=1, \dots, n}$. Можно определить теперь градуированную алгебру полиад $\bigvee H_n$, в которой операция полиадного умножения \vee между полиадами $P = \sum_{k_1, \dots, k_p} P_{k_1 \dots k_p} dx^{k_1} \vee \dots \vee dx^{k_p} \in \bigvee^p H_n$ и $Q = \sum_{l_1, \dots, l_q} Q_{l_1 \dots l_q} dx^{l_1} \vee \dots \vee dx^{l_q} \in \bigvee^q H_n$ определяется по формуле:

$$P \vee Q = Q \vee P \equiv \sum_{k_1, \dots, k_p} \sum_{l_1, \dots, l_q} P_{k_1 \dots k_p} Q_{l_1 \dots l_q} dx^{k_1} \vee \dots \vee dx^{k_p} \vee dx^{l_1} \vee \dots \vee dx^{l_q}. \quad (13)$$

Очевидно

$$\bigvee H_n = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigvee^p H_n. \quad (14)$$

Аналогично определяется симметричная градуированная алгебра кополиад $\bigvee^* H_n$ (т.е. алгебра контравариантных симметричных тензоров).

По аналогии с операциями дуализации (звезда Ходжа), ассоциированными с антисимметричными формами объемов, можно определить дуализацию полиад (или кополиад).

Определим отображение $\otimes: \bigvee^p H_n \rightarrow \bigvee^{n-p} H_n$ (симметричная звезда Ходжа) как линейный оператор, действующий на базис полиад по формуле¹:

$$\otimes(dx^{k_1} \vee \dots \vee dx^{k_p}) \equiv \begin{cases} dx^{r_1} \vee \dots \vee dx^{r_{n-p}}, & \text{если все } k_1, \dots, k_p \text{ различны;} \\ 0, & \text{если хотя бы пара из набора } k_1, \dots, k_p \text{ совпадает.} \end{cases} \quad (15)$$

В первой строке n цифр $(k_1, \dots, k_p, r_1, \dots, r_{n-p})$ (возможно после надлежащей перестановки) образуют последовательность $1, \dots, n$ (определение симметризованной звезды Ходжа на кополиадах аналогично). (Отметим, что симметрия операции \vee позволяет не следить за знаками и ориентацией.) К примеру, формы Vol и $\widetilde{\text{Vol}}$ в (12) с помощью симметричной звезды Ходжа записываются более компактно:

$$\text{Vol} = \otimes 1; \quad \widetilde{\text{Vol}} = \otimes 1^*, \quad (16)$$

где 1^* — постоянная (единичная) функция на H_n , рассматриваемая как элемент формального пространства кополиад $\bigvee^{0^*} H_n$, которое мы отождествляем с $F(H_n)$.

По аналогии с тем, как стандартная звезда Ходжа $*$ в исчислении внешних форм связана с символом Леви-Чивиты, симметричная звезда Ходжа \otimes связана с симметричным аналогом символа Леви-Чивиты. Так, в компонентах операция дуализации полностью симметричного тензора (p -полиады) Q представляется выражением:

$$(\otimes Q)_{k_1 \dots k_{n-p}} = \frac{1}{p!} \sum_{r_1, \dots, r_p} \epsilon_{k_1 \dots k_{n-p} r_1 \dots r_p} Q_{r_1 \dots r_p}. \quad (17)$$

Отметим, что операция \otimes , в отличие от $*$, в силу своего определения (15) не обладает свойством инволютивности:

$$\otimes^2 \neq \text{id}. \quad (18)$$

Это связано с тем, что однократное применение \otimes стирает ту часть информации в тензоре, которая связана с компонентами, имеющими хотя бы пару одинаковых индексов. Эти части информации ковариантны относительно действия группы изометрий $\text{Iso}(H_n)$ и даже более широкой конформной группы $C(H_n)$, но не ковариантны относительно общей линейной группы.

Можно определить симметричные аналоги внешнего дифференцирования и теоремы Дарбу-Пуанкаре [5], но в настоящей статье они нам не понадобятся.

3 Соприкасающиеся объекты

Конструкция соприкосновения, которая служит мостиком между финслеровой геометрией пространств Бервальда-Моора и псевдоримановой геометрией современных теоретико-полевых моделей, включающих гравитацию, излагалась в статье [5]. Напомним кратко основные составляющие этой конструкции. Рассмотрим совокупность $\{X_1, \dots, X_{n-m}\}$ $n - m$ векторных полей в H_n (допускается повторение некоторых полей в этой совокупности). Будем называть эту совокупность *опорой* \mathcal{E}^{n-m} и обозначать ее посредством более подробной записи

$$\mathcal{E}^{n-m} \equiv \{X_1^{\alpha_1}, \dots, X_k^{\alpha_k}\}, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_k = n - m, \quad (19)$$

¹В статье [5] было дано немного другое определение, опирающееся на класс т.н. смешанных полиад. Настоящая версия определения, по существу эквивалентна предыдущей, но не требует ограничения на область определения операции \otimes .

где α_i кратность повторения векторного поля X_i . В случае с повторяющимися векторными полями опоры \mathcal{E}^{n-m} уже не описывается в терминах классического распределения. На опорах \mathcal{E}^{n-m} можно ввести $F(H_n)$ -алгебру, полагая

$$\mathcal{E}^{n-m_1} \uplus \mathcal{E}^{n-m_2} = \begin{cases} \mathcal{E}^{n-m_1-m_2}, & m_1 + m_2 \leq n \\ \mathcal{E}^\emptyset, & m_1 + m_2 > n \end{cases}, \quad (20)$$

где $\mathcal{E}^{n-m_1-m_2}$ получается из \mathcal{E}^{n-m_1} и \mathcal{E}^{n-m_2} объединением их элементов (для общих векторных полей их индексы-показатели α_i складываются), а \mathcal{E}^\emptyset — пустая опора. Умножение опор на скалярные функции производится покомпонентно (каждое векторное поле независимо от его кратности умножается на функцию). С помощью опор и метрики Бервальда-Моора можно строить соприкасающиеся с ней тензорные объекты более низкого ранга. А именно, назовем тензор

$$\mathcal{T}_{\mathcal{E}^{n-m}} = \mathcal{E}^{n-m} \uparrow {}^n G \equiv ({}^n G(X_1, \dots, X_{n-m}, \underbrace{}, \dots) \quad (21)$$

m пустых аргументов

соприкасающимся с метрикой Бервальда-Моора вдоль опоры $\mathcal{E}^{n-m} = \{X_1, \dots, X_{n-m}\}$. Очевидно, с что с точки зрения симметричной алгебры кополиад

$$\mathcal{T}_{\mathcal{E}^{n-m}} = \otimes(X_1 \vee \dots \vee X_{n-m}).$$

По определению полагаем, что

$$\mathcal{E}^\emptyset \uparrow {}^n G \equiv 0. \quad (22)$$

Алгебра опор следующим образом взаимодействует с операцией соприкосновения:

$$\mathcal{E}^{n-m_2} \uparrow (\mathcal{E}^{n-m_1} \uparrow {}^n G) = (\mathcal{E}^{n-m_1} \uplus \mathcal{E}^{n-m_2}) \uparrow {}^n G; \quad (f\mathcal{E}^{n-m}) \uparrow {}^n G = f^{n-m}(\mathcal{E}^{n-m} \uparrow {}^n G). \quad (23)$$

Более общая конструкция соприкосновения вдоль кополиады $Q = Q^\alpha \mathcal{E}_\alpha$ сводится к рассмотренной конструкции соприкосновения вдоль опоры с помощью операции усреднения по кополиадному базису $\{\mathcal{E}_\alpha\}$, который представляет собой набор соответствующих опор:

$$Q \uparrow ({}^n \epsilon) = \sum_{\alpha} Q^\alpha (\mathcal{E}_\alpha \uparrow ({}^n \epsilon)). \quad (24)$$

Все дальнейшее изложение будет посвящено применению конструкции соприкосновения для физической интерпретации поличислового потенциала в терминах тензорных полей в псевдоримановом пространстве-времени.

4 Псевдоримановы метрики, соприкасающиеся с метрикой Бервальда-Моора в H_4

Изучим более подробно типы псевдоримановых метрик, которые в принципе могут получаться с помощью конструкции соприкосновения в H_4 . В фиксированной точке такое исследование сводится к свойствам матрицы $(g_{\alpha\beta})$ метрического тензора, соприкасающегося с метрикой Бервальда-Моора вдоль опоры \mathcal{E}^2 , локально представляемой диадой $A \vee B \equiv \mathcal{F}$:

$$g_{\alpha\beta} \equiv (\mathcal{F} \uparrow ({}^4 G))_{\alpha\beta} = \otimes(A \vee B)_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} A^\gamma B^\delta. \quad (25)$$

В настоящем разделе нас будет интересовать тип (сигнатура) метрики g . Для упрощения исследования, во-первых, удалим из диады \mathcal{F} несущественные для конструкции соприкосновения диагональные компоненты:

$$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\circ = \otimes^2 \mathcal{F}. \quad (26)$$

У диады \mathcal{F}° — шесть независимых компонент (как и у тензора электромагнитного поля в пространстве Минковского). Используя свободу выбора координатной калибровки, допускаемую классом изотропных систем координат, мы можем использовать ее три степени свободы (т.к. $\dim \text{Iso}(H_4) = 3$) для приведения анзаца компонент \mathcal{F}° к виду:

$$\mathcal{F}_{12}^\circ = \mathcal{F}_{34}^\circ = \frac{a}{2}; \quad \mathcal{F}_{13}^\circ = \mathcal{F}_{24}^\circ = \frac{b}{2}; \quad \mathcal{F}_{14}^\circ = \mathcal{F}_{23}^\circ = \frac{c}{2}. \quad (27)$$

В выбранной координатной калибровке метрика g будет характеризоваться следующей матрицей компонент:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Ее характеристический полином $G(\lambda) = \det(g - \lambda I)$ имеет вид:

$$G(\lambda) = \lambda^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)\lambda^2 - 8\lambda abc + a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2). \quad (29)$$

Опираясь на обобщенную теорему Виета, из вида (29) можно сделать следующие заключения относительно собственных значений матрицы $(g_{\alpha\beta})$:

1. Коэффициент при λ^3 равный $-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = 0$, следовательно собственные значения обязательно имеют разные знаки. Это означает, что соприкасающаяся метрика g может быть (с точностью до перенумерации координат) лишь двух гиперболических типов: $(+, -, -, -)$ или $(+, +, -, -)$.
2. Гиперболический тип метрики g меняется всякий раз при пересечении поверхности в пространстве параметров a, b, c , определяемой нулем свободного члена в (29):

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 0. \quad (30)$$

На этой поверхности метрика g становится вырожденной: некоторые (может быть даже и все) собственные значения матрицы $(g_{\alpha\beta})$ обращаются на ней в нуль. Раскладывая левую часть (30) на множители, получаем:

$$(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) = 0, \quad (31)$$

что означает разложение поверхности вырождения в объединение 4-х плоскостей, симметрично проходящих через начало системы координат в пространстве параметров a, b, c .

Эта поверхность представлена на рисунке 1.

Простая проверка (например, подстановка $a = b = 0, c = 1$) обнаруживает, что четырехгранные компоненты на рис. 1 содержат гиперболический тип $(+, +, -, -)$, а трехгранные — гиперболический тип $(+, -, -, -)$. В дальнейшем, будем обозначать этот последний тип номером I, а первый — номером II. Нетрудно сообразить, что гиперболический тип метрики g определяется знаком σ многочлена слева в (31):

$$\text{Номер типа} = 2^{(1+\sigma)/2}, \quad \text{где } \sigma \equiv \text{sign}(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c). \quad (32)$$

Чтобы сформулировать инвариантную классификацию соприкасающихся гиперболических структур, заметим, что произведения:

$$\mathcal{F}_{ik}\mathcal{F}_{mn} \quad (33)$$

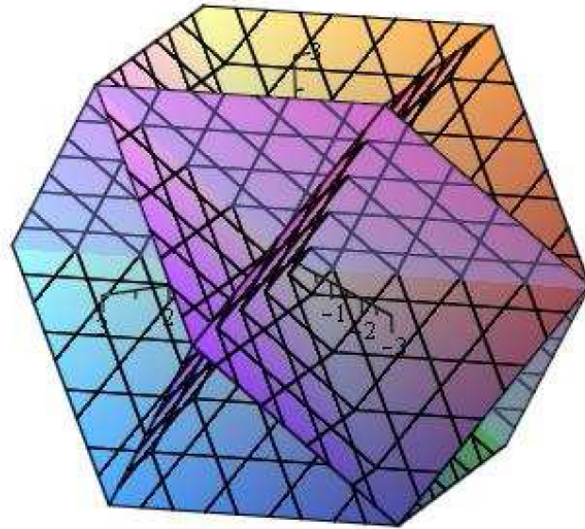


Рис. 1: Поверхность вырождения соприкасающейся метрики g — четыре плоскости, проходящих через начало. Множества направлений, содержащие оси (шесть 4-гранных пространственных углов) задают гиперболическую метрику типа $(+, +, -, -)$, в то время как дополнительные компоненты (восемь 3-гранных пространственных углов) задают гиперболическую метрику типа $(+, -, -, -)$.

являются инвариантами относительно группы $\text{Iso}(H_4)$, если совокупность индексов i, k, m, n образуют некоторую подстановку индексов 1, 2, 3, 4. Отсюда приходим к заключению, что

$$a^2 = \mathcal{F}_{12}\mathcal{F}_{34} = \text{inv} = I_1; \quad b^2 = \mathcal{F}_{13}\mathcal{F}_{24} = \text{inv} = I_2; \quad c^2 = \mathcal{F}_{14}\mathcal{F}_{23} = \text{inv} = I_3 \quad (34)$$

и знаковая функция σ определяется инвариантным соотношением:

$$\sigma = \text{sign}(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 - 2(I_1I_2 + I_1I_3 + I_2I_3)). \quad (35)$$

На рисунке 2 показан график поверхности $I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 - 2(I_1I_2 + I_1I_3 + I_2I_3) = 0$ в пространстве инвариантов I_1, I_2, I_3 .

5 Геометрия и физика логарифма в P_4

Хорошо известно, что функция $\ln z$ является комплексным потенциалом множества задач 2-мерной математической физики, связанных с наличием точечного источника или точечного вихря [8]. По методическим соображениям мы начнем изучение физико-геометрических свойств h -голоморфных функций на P_4 с функции

$$\ln h = \ln x^1 e_1 + \ln x^2 e_2 + \ln x^3 e_3 + \ln x^4 e_4. \quad (36)$$

Согласно общему подходу, намеченному в [4] и [5], функция $\ln h$ полностью “кодирует” на языке P_4 устройство некоторой конкретной 4-мерной вселенной с квадратичной метрикой. При этом сама по себе функция $\ln h$ устроена довольно просто: она сводится к прямой сумме вещественных логарифмов и потому определена в положительном октанте P_4 . Аналогом сферы Римана в комплексном анализе в случае P_4 является 4-мерный вещественный тор, который получается “склеиванием” бесконечно-удаленных точек на каждой из изотропных координатных осей после их предварительного сжатия посредством отображения $h \mapsto \tanh h$. Рассматривая функцию $\ln h$ на таком торе, мы можем заключить, что

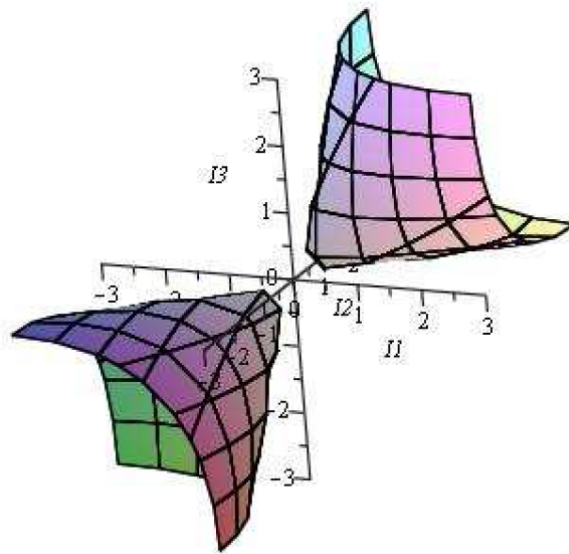


Рис. 2: Поверхность смены знака функции σ . Область внутри полостей соответствует типу I, область вне полостей — типу II. Полости смыкаются в начале системы координат (погрешность графопостроителя неявной функции в MAPLE).

она осуществляет гомеоморфизм внутренности $1/16$ части 4-тора на 4-тор с удаленными 3-торами, изображающими бесконечно-удаленные 3-плоскости в P_4 .

Дифференцируя функцию поличислового логарифма (36), получаем ее голоморфный дифференциал:

$$d \ln h = \frac{dx^1}{x^1} e_1 + \frac{dx^2}{x^2} e_2 + \frac{dx^3}{x^3} e_3 + \frac{dx^4}{x^4} e_4, \quad (37)$$

вещественные компоненты которого $\omega_i = dx^i/x^i$ позволяют построить систему опор различных порядков:

$$\tilde{\mathcal{E}}^1 = \{\omega_{(i)}\}; \quad \tilde{\mathcal{E}}^2 = \{\omega_{(i)}\omega_{(j)}\}; \quad \tilde{\mathcal{E}}^3 = \{\omega_{(i)}\omega_{(j)}\omega_{(k)}\}; \quad \tilde{\mathcal{E}}^4 = \{\omega_{(i)}\omega_{(j)}\omega_{(k)}\omega_{(s)}\}. \quad (38)$$

Опоры второго порядка образуют полиаду $\mathcal{F}_{ik} = 1/x^i x^k$, инварианты которой удовлетворяют соотношениям $I_1 = I_2 = I_3 = 1/x^1 x^2 x^3 x^4$, что позволяет сделать заключение, опираясь на исследования предыдущего раздела, о принадлежности соприкасающейся римановой метрики к типу I. Соприкасажая метрику Бервальда-Моора² ${}^{(4)}\tilde{G}$ вдоль этих опор, получаем физико-геометрические объекты следующего вида:

скалярное поле:

$$\phi \equiv \tilde{\mathcal{E}}^4 \uparrow {}^{(4)}\tilde{G} \equiv \epsilon^{ijkl} \omega_{(1)i} \omega_{(2)j} \omega_{(3)k} \omega_{(4)l} = \frac{1}{x^1 x^2 x^3 x^4}; \quad (39)$$

векторное поле³:

$$v \equiv \sum_s \tilde{\mathcal{E}}_s^3 \uparrow {}^{(4)}\tilde{G} \equiv \epsilon^{ijkl} (\omega_{(1)i} \omega_{(2)j} \omega_{(3)k} + \omega_{(1)i} \omega_{(2)j} \omega_{(4)k} + \omega_{(2)i} \omega_{(3)j} \omega_{(4)k} + \omega_{(1)i} \omega_{(3)j} \omega_{(4)k}) \partial_l = \quad (40)$$

²Отметим, что сейчас речь идет о контравариантной метрике Бервальда-Моора (это отмечено тильдой), определение которой в изотропном базисе P_n отличается от (1) заменой $dx^i \rightarrow \partial_i$. Многомерные матрицы, представляющие компоненты тензоров ${}^{(n)}G$ и ${}^{(n)}\tilde{G}$ удовлетворяют соотношениям: ${}^{(n)}G_{AB} {}^{(n)}\tilde{G}^{BA'} = n_B! \Delta(A, A')$, где A, A', B — коллективные индексы, n_B — число индексов, по которым производится суммирование, величина $\Delta(A, A')$ равна нулю, если в совокупности индексов A или A' по отдельности есть хотя бы одна пара повторяющихся, и равна единице в противоположном случае.

³Здесь и далее мы усредняем соприкосновение по всем опорам данного типа.

$$= \frac{1}{x^2 x^3 x^4} \partial_1 + \frac{1}{x^1 x^3 x^4} \partial_2 + \frac{1}{x^1 x^2 x^4} \partial_3 + \frac{1}{x^1 x^2 x^3} \partial_4;$$

симметричное тензорное поле валентности (2,0):

$$g \equiv \sum_s \tilde{\mathcal{E}}_s^2 \uparrow^{(4)} \tilde{G} \quad (41)$$

с матрицей компонент

$$(g^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/x^3 x^4 & 1/x^2 x^4 & 1/x^2 x^3 \\ 1/x^3 x^4 & 0 & 1/x^1 x^4 & 1/x^1 x^3 \\ 1/x^2 x^4 & 1/x^1 x^4 & 0 & 1/x^1 x^2 \\ 1/x^2 x^3 & 1/x^1 x^3 & 1/x^1 x^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

и симметричное тензорное поле валентности (3,0):

$$S \equiv \sum_s \tilde{\mathcal{E}}_s^1 \uparrow^{(4)} \tilde{G} \quad (43)$$

с отличными от нуля компонентами:

$$S^{123} = \frac{1}{x^4}; \quad S^{124} = \frac{1}{x^3}; \quad S^{134} = \frac{1}{x^2}; \quad S^{234} = \frac{1}{x^1}. \quad (44)$$

Для надлежащей интерпретации полученного набора геометрических объектов, обратимся прежде всего к тензору g , который мы отождествляем с метрикой риманова многообразия, кодируемого гиперкомплексным потенциалом $\ln h$. Ее ковариантные компоненты представляются матрицей:

$$(g_{ik}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2x^2 x^3 x^4 / x^1 & x^3 x^4 & x^2 x^4 & x^2 x^3 \\ x^3 x^4 & -2x^1 x^3 x^4 / x^2 & x^1 x^4 & x^1 x^3 \\ x^2 x^4 & x^1 x^4 & -2x^1 x^2 x^4 / x^3 & x^1 x^2 \\ x^2 x^3 & x^1 x^3 & x^1 x^2 & -2x^1 x^2 x^3 / x^4 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Полученная метрика имеет богатую группу симметрий. Решение уравнений Киллинга

$$L_X g = 0 \quad (46)$$

описывается следующим набором шести независимых полей:

$$\begin{aligned} X_{(1)} &= x^1 \ln \left(\frac{x^3}{x^4} \right) \partial_1 - x^3 \ln \left(\frac{x^1}{x^4} \right) \partial_3 + x^4 \ln \left(\frac{x^1}{x^3} \right) \partial_4; & X_{(2)} &= x^1 \partial_1 - x^4 \partial_4; \\ X_{(3)} &= x^1 \ln \left(\frac{x^2}{x^4} \right) \partial_1 - x^2 \ln \left(\frac{x^1}{x^4} \right) \partial_2 + x^4 \ln \left(\frac{x^1}{x^2} \right) \partial_4; & X_{(4)} &= x^2 \partial_2 - x^4 \partial_4; \\ X_{(5)} &= x^2 \ln \left(\frac{x^3}{x^4} \right) \partial_2 - x^3 \ln \left(\frac{x^2}{x^4} \right) \partial_3 + x^4 \ln \left(\frac{x^2}{x^3} \right) \partial_4; & X_{(6)} &= x^3 \partial_3 - x^4 \partial_4. \end{aligned} \quad (47)$$

Поля $X_{(2)}$, $X_{(4)}$, $X_{(6)}$ и $X_{(1)}$, $X_{(3)}$, $X_{(6)}$ по отдельности образуют подалгебры (первая тройка — абелеву). Следует ожидать, что рассматриваемое риманово многообразие имеет отношение к моделям ОТО космологического типа. Чтобы убедиться в справедливости этого предположения, сделаем замену координат: $u^i = \ln x^i$, $i = 1, 2, 3, 4$. В этих координатах метрика (45) принимает конформно-плоский вид:

$$g = e^{u^1 + u^2 + u^3 + u^4} g_0, \quad (48)$$

где

$$g_0 \equiv \frac{1}{3}(-2du^1 \otimes du^1 - 2du^2 \otimes du^2 - 2du^3 \otimes du^3 - 2du^4 \otimes du^4 + du^1 \vee du^2 + du^1 \vee du^3 + du^1 \vee du^4 + du^2 \vee du^3 + du^2 \vee du^4 + du^3 \vee du^4), \quad (49)$$

$a \vee b \equiv a \otimes b + b \otimes a$. Матрица метрики g_0 имеет собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 1/3$, что согласуется с заключением о локально-лоренцевом виде соприкасающейся метрики g , сделанным ранее. Соответствующие собственные векторы:

$$U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad U_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (50)$$

можно подвергнуть процедуре ортогонализации Шмидта, в результате чего получаем ортогональную матрицу R , диагонализующую матрицу g_0 :

$$R = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} \\ 1/2 & 0 & 2/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} \\ 1/2 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad (51)$$

(ее столбцы — это ортогонализированные собственные векторы g_0).

Выполняя теперь с помощью матрицы R замену переменных:

$$t = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{2\sqrt{3}}; \quad x = \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{2}}; \quad y = \frac{2u_3 - u_1 - u_2}{\sqrt{6}}; \quad z = \frac{\sqrt{3}(3u_4 - u_1 - u_2 - u_3)}{6} \quad (52)$$

во всех геометрических объектах, получим псевдориманову метрику космологического типа (t — конформное время):

$$g = e^{2\sqrt{3}t}(dt \otimes dt - dx \otimes dx - dy \otimes dy - dz \otimes dz); \quad (53)$$

космологическое скалярное поле:

$$\phi(t) = e^{-2\sqrt{3}t}; \quad (54)$$

космологическое векторное поле:

$$v = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-2\sqrt{3}t}\partial_t \quad (55)$$

и космологическое симметричное тензорное поле с отличными от нуля компонентами:

$$S^{ttt} = -S^{txx} = -S^{tyy} = -S^{tzz} = -S^{xxz} = -S^{yyz} = \frac{e^{-2\sqrt{3}t}}{\sqrt{3}}; \\ S^{yyy} = -S^{xxy} = \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-2\sqrt{3}t}; \quad S^{zzz} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-2\sqrt{3}t}. \quad (56)$$

Сделаем несколько пояснений к полученным результатам.

1. Космологическая метрика (53) описывает однородную изотропную вселенную с плоскими пространственными сечениями. В интерпретации эйнштейновской ОТО такая вселенная порождается веществом с баротропным уравнением состояния $p = -\varepsilon/3$ (уравнение состояния струноподобной материи).

2. Симметрия скаляра ϕ , вектора v и тензора S оказываются автоматически согласованными с симметриями метрики g , (все поля являются полями космологического типа).
3. Имеют место соотношения:

$$g(v, v) = \frac{4\phi}{3}; \quad \bar{S} = \text{Tr}S = \frac{4}{\sqrt{3}}\partial_t; \quad g(\bar{S}, \bar{S}) = \frac{16}{3\phi}. \quad (57)$$

4. Предыдущий пункт обнаруживает, что вселенная, кодируемая функцией $\ln h$, фактически, управляется скалярным полем $\phi = e^{-2\sqrt{3}t} \equiv \|h^{-1}\|$, поскольку

$$g = \phi^{-1}g_0; \quad v = \frac{2}{\sqrt{3}}\phi\partial_t; \quad S = \phi S_0, \quad (58)$$

где g_0 — метрика Минковского, S_0 — постоянный симметричный тензор валентности $(3, 0)$.

5. Вопрос о системе динамических уравнений, которые в совокупности делают систему геометрических объектов $\{\phi, v, g, S\}$ самосогласованной остается открытым. Согласно общей идеологии поличисловой теории поля, эти уравнения должны быть тождественными следствиями уравнений теории поличислового потенциала, которая изначально формулируется в P_4 .

6 Геометрия и физика общей 0-голоморфной функции в P_4 .

Рассмотрим теперь более общий случай произвольной h -голоморфной⁴ функции вида:

$$f(h) = f_1(x^1)e_1 + f_2(x^2)e_2 + f_3(x^3)e_3 + f_4(x^4)e_4, \quad (59)$$

где f_i — гладкие функции своих аргументов. Голоморфный дифференциал df порождает теперь совокупность 1-форм $\{df_i\}$, из которых можно строить опоры \mathcal{E}^q различных порядков q . Соприкасая по аналогии с предыдущим разделом метрику Бервальда-Моора вдоль этих опор, получаем физико-геометрические объекты:

скалярное поле:

$$\phi \equiv \tilde{\mathcal{E}}^4 \uparrow^{(4)} \tilde{G} \equiv \epsilon^{ijkl} df_{1i} df_{2j} df_{3k} df_{4l} = f'_1 f'_2 f'_3 f'_4; \quad (60)$$

векторное поле:

$$v \equiv \sum_s \tilde{\mathcal{E}}_s^3 \uparrow^{(4)} \tilde{G} \equiv \epsilon^{ijkl} (df_{1i} df_{2j} df_{3k} + df_{1i} df_{2j} df_{4k} + df_{1i} df_{3j} df_{4k} + df_{2i} df_{3j} df_{4k}) \partial_l = \quad (61)$$

$$= f'_2 f'_3 f'_4 \partial_1 + f'_1 f'_3 f'_4 \partial_2 + f'_1 f'_2 f'_4 \partial_3 + f'_1 f'_2 f'_3 \partial_4;$$

симметричное тензорное поле валентности $(2, 0)$:

$$g \equiv \sum_s \tilde{\mathcal{E}}_s^2 \uparrow^{(4)} \tilde{G} \quad (62)$$

с матрицей компонент

$$(g^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & f'_3 f'_4 & f'_2 f'_4 & f'_2 f'_3 \\ f'_3 f'_4 & 0 & f'_1 f'_4 & f'_1 f'_3 \\ f'_2 f'_4 & f'_1 f'_4 & 0 & f'_1 f'_2 \\ f'_2 f'_3 & f'_1 f'_3 & f'_1 f'_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (63)$$

⁴По терминологии работы [5] 0-голоморфной. Случаи k -голоморфности будут давать изоморфные картины, связанные друг с другом переобозначением координат.

и симметричное тензорное поле валентности (3, 0):

$$S \equiv \sum_s \tilde{\mathcal{E}}_s^1 \uparrow^{(4)} \tilde{G} \quad (64)$$

с отличными от нуля компонентами:

$$S^{123} = f'_4; \quad S^{124} = f'_3; \quad S^{134} = f'_2; \quad S^{234} = f'_1. \quad (65)$$

Отметим, что, ввиду сходной структуры $\ln h$ и f в (59), каждая из формул (60)-(65) получается из соответствующих формул (39)-(44) простой заменой: $x^i \mapsto 1/f'_i$. Это соответствие сохраняется в некоторой степени и в дальнейших рассуждениях и мы будем использовать его для сокращения выкладок. Для ковариантных компонент римановой метрики g из (45) мы получим матрицу:

$$(g_{ik}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2f'_1/f'_2f'_3f'_4 & 1/f'_3f'_4 & 1/f'_2f'_4 & 1/f'_2f'_3 \\ 1/f'_3f'_4 & -2f'_2/f'_1f'_3f'_4 & 1/f'_1f'_4 & 1/f'_1f'_3 \\ 1/f'_2f'_4 & 1/f'_1f'_4 & -2f'_3/f'_1f'_2f'_4 & 1/f'_1f'_2 \\ 1/f'_2f'_3 & 1/f'_1f'_3 & 1/f'_1f'_2 & -2f'_4/f'_1f'_2f'_3 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Сделаем теперь замену переменных $u^i = f_i(x^i)$. Как и раньше в этих координатах метрика (66) принимает конформно-плоский вид:

$$g = \phi^{-1}(u^1, u^2, u^3, u^4)g_0, \quad (67)$$

где g_0 — метрика плоского пространства-времени вида (49), а скалярное поле

$$\phi(u^1, u^2, u^3, u^4) \equiv f'_1(f^{-1}(u_1))f'_2(f^{-1}(u_2))f'_3(f^{-1}(u_3))f'_4(f^{-1}(u_4)) \quad (68)$$

и f_i^{-1} — обратная функция к f_i . Отметим, что функция $g(u) = f'(f^{-1}(u))$ локально может быть выбрана произвольной. Действительно, выбирая произвольную гладкую g и переходя к новой переменной $x = f^{-1}(u)$, мы приходим к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$f'(x) = g(f(x)) \quad (69)$$

относительно компоненты потенциала f . Таким образом, без ограничения общности можно считать, что

$$\phi(u^1, u^2, u^3, u^4) = g_1(u^1)g_2(u^2)g_3(u^3)g_4(u^4), \quad (70)$$

где g_i — произвольные гладкие функции своих аргументов.

Диагонализируя матрицу метрики g_0 с помощью матрицы (51), мы получим конформно-плоскую риманову метрику вида:

$$g = \Phi^{-1}(t, x, y, z)(dt \otimes dt - dx \otimes dx - dy \otimes dy - dz \otimes dz), \quad (71)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(t, x, y, z) = g_1 \left((3t - \sqrt{6}x - z - \sqrt{2}y)/\sqrt{12} \right) g_2 \left((3t + \sqrt{6}x - \sqrt{2}y - z)/\sqrt{12} \right) \times \\ g_3 \left(\sqrt{3}(3t + 2\sqrt{2}y - z)/6 \right) g_4 \left(\sqrt{3}(t + z)/2 \right). \end{aligned} \quad (72)$$

Метрика (71) описывает класс конформно-плоских моделей пространства времени ОТО некоторого специального вида. В качестве примера рассмотрим гиперболический потенциал⁵:

$$f(h) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{k_i} \ln(x^i + C^i) e_i, \quad (73)$$

где k_i, C^i — вещественные константы. После простых вычислений и преобразований скалярное поле Φ в (71) можно преобразовать к виду:

$$\Phi = e^{at+bx+cy+dz}, \quad (74)$$

где a, b, c, d — вещественные константы, линейно зависящие от k_i . В зависимости от знака выражения $s^2 = a^2 - b^2 - c^2 - d^2$ линейную форму в показателе экспоненты можно с помощью преобразований Лоренца (они не изменяют вида плоской метрики g_0) преобразовать к одному из трех видов: (1) e^{At} , (2) e^{Bx} , (3) $e^{A(t+x)}$. Первый случай соответствует вселенной, кодируемой поличисловым логарифмом, рассмотренной в предыдущем разделе, второй описывает неоднородную анизотропную статическую вселенную с отрицательной плотностью энергии и нарушенным условием энергодоминантности. Наконец, третий случай соответствует электровакуумной анизотропной вселенной, заполненной излучением, распространяющимся вдоль оси x .

Мы не останавливаемся на явных формулах для векторного и тензорного полей в рассматриваемом случае.

7 Поличисловой потенциал для метрик Фридмана-Робертсона-Уокера

В настоящем разделе мы исследуем вопрос о возможности получения стандартных космологических моделей фридмановского типа с метрикой из соприкасающихся конструкций в пространстве Бервальда-Моора. Поскольку любая соприкасающаяся риманова метрика, выводимая из метрики Бервальда-Моора, взятой в изотропных координатах, получается снова в изотропных координатах⁶, то для ответа на поставленный вопрос мы сначала перепишем метрику Фридмана в изотропных координатах. В обычных координатах (в калибровке конформного времени) метрики фридмановского типа имеют следующий общий вид:

$$g = a^2(t)(dt \otimes dt - dr \otimes dr - \frac{\sin^2(Kr)}{K^2}(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi)), \quad (75)$$

где t — конформное время, $a(t)$ — масштабный фактор, K — параметр кривизны пространственных сечений, который может иметь любые вещественные отличные от нуля значения (замкнутый мир Фридмана), чисто мнимые значения (открытый мир Фридмана) и нулевые значения (плоский мир Фридмана). Изотропная координата X для метрики Фридмана удовлетворяет уравнению:

$$g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \partial_\beta X = \frac{1}{a^2} \left((\partial_t X)^2 - (\partial_r X)^2 - \frac{K^2}{\sin^2(Kr)} \left((\partial_\theta X)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta} (\partial_\varphi X)^2 \right) \right) = 0. \quad (76)$$

Разделение переменных дает следующее общее решение для изотропных координат:

$$X = X_0 e^{At+c\varphi \pm f(A/K, b, Kr) \pm f(b, c, \theta)}, \quad (77)$$

⁵Он является аналитической функцией поличисловой переменной с поличисловыми коэффициентами.

⁶Во втором случае изотропность понимается уже относительно светового конуса псевдоримановой геометрии: координата X называется изотропной, если норма вектора нормали к гиперповерхности ее постоянного значения равна нулю: $(\partial X, \partial X) = 0$, что в координатном представлении приводит к уравнению $g^{XX} = 0$, где g^{XX} — диагональная X -компонента контравариантной метрики.

где A, b, c — константы разделения, а функция $f(b, c, x)$ является решением дифференциального уравнения:

$$\frac{df}{dx} = \sqrt{b^2 - \frac{c^2}{\sin^2 x}}. \quad (78)$$

В качестве набора независимых изотропных координат примем следующие зависимости:

$$X^1 = e^{t+r}; \quad X^2 = e^{t-r}; \quad X^3 = e^{At+f(A/K,1,Kr)+\theta}; \quad X^4 = e^{At+f(A/K,b,Kr)+f(b,1,\theta)+\varphi}. \quad (79)$$

Независимость координат $\{X^1, X^2, X^3, X^4\}$ проверяется непосредственным вычислением детерминанта матрицы Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} X^1 & X^1 & 0 & 0 \\ X^2 & -X^2 & 0 & 0 \\ AX^3 & X^3 \sqrt{A^2 - K^2/\sin^2(Kr)} & X^3 & 0 \\ AX^4 & X^4 \sqrt{A^2 - b^2 K^2/\sin^2(Kr)} & \sqrt{b^2 - 1/\sin^2 \theta} & X^4 \end{pmatrix}. \quad (80)$$

Он равен $-2X^1 X^2 X^3 X^4$ в допустимой области замены координат:

$$\theta \notin (-\arcsin(1/|b|), +\arcsin(1/|b|)), \quad r \notin (-\arcsin(|bK/A|/K), +\arcsin(|bK/A|/K)).$$

Преобразуя контравариантную метрику Фридмана:

$$g = \frac{1}{a^2(t)} \left(\partial_t \otimes \partial_t - \partial_r \otimes \partial_r - \frac{K^2}{\sin^2(Kr)} \left(\partial_\theta \otimes \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi \otimes \partial_\varphi \right) \right) \quad (81)$$

с помощью матрицы (80), приходим к метрике Фридмана в изотропных координатах с матрицей компонент:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2X^1 X^2}{a^2(t)} & \frac{X^1 X^3 (A-f_1)}{a^2(t)} & \frac{X^1 X^4 (A-f_2)}{a^2(t)} \\ \frac{2X^1 X^2}{a^2(t)} & 0 & \frac{X^2 X^3 (A+f_1)}{a^2(t)} & \frac{X^2 X^4 (A+f_2)}{a^2(t)} \\ \frac{X^1 X^3 (A-f_1)}{a^2(t)} & \frac{X^2 X^3 (A+f_1)}{a^2(t)} & 0 & \frac{X^3 X^4}{a^2(t)} \left(A^2 - f_1 f_2 - \frac{K^2 f_3}{\sin^2(Kr)} \right) \\ \frac{X^1 X^4 (A-f_2)}{a^2(t)} & \frac{X^2 X^4 (A+f_2)}{a^2(t)} & \frac{X^3 X^4}{a^2(t)} \left(A^2 - f_1 f_2 - \frac{K^2 f_3}{\sin^2(Kr)} \right) & 0 \end{pmatrix}, \quad (82)$$

где

$$f_1(r) = f_r(A/K, 1, Kr); \quad f_2(r) = f_r(A/K, b, Kr); \quad f_3(\theta) = f_{,\theta}(b, 1, \theta); \quad (83)$$

$$t = \frac{1}{2} \ln(X^1 X^2); \quad r = \frac{1}{2} \ln(X^1/X^2); \quad \theta = \ln \frac{X^3}{(X^1 X^2)^{A/2}} - f_1 \left(\frac{1}{2} \ln \frac{X^1}{X^2} \right).$$

Полагая теперь, что метрика (82) порождается соприкосновением с 1-формами dQ_i , связанными с компонентами поличислового потенциала:

$$Q = Q_1(X)e_1 + Q_2(X)e_2 + Q_3(X)e_3 + Q_4(X)e_4, \quad (84)$$

мы приходим к системе 6 нелинейных дифференциальных уравнений на 4 неизвестные функции:

$$2 \sum_{i=1}^4 \partial_3 Q_i \partial_4 Q_i = \frac{2X^1 X^2}{a^2}; \quad 2 \sum_{i=1}^4 \partial_2 Q_i \partial_4 Q_i = \frac{X^1 X^3 (A - f_1)}{a^2}; \quad (85)$$

$$2 \sum_{i=1}^4 \partial_2 Q_i \partial_3 Q_i = \frac{X^1 X^4 (A - f_2)}{a^2}; \quad 2 \sum_{i=1}^4 \partial_1 Q_i \partial_2 Q_i = \frac{X^3 X^4}{a^2} \left(A^2 - f_1 f_2 - \frac{K^2 f_3}{\sin^2(Kr)} \right); \quad (86)$$

$$2 \sum_{i=1}^4 \partial_1 Q_i \partial_4 Q_i = \frac{X^2 X^3 (A + f_1)}{a^2}; \quad 2 \sum_{i=1}^4 \partial_1 Q_i \partial_3 Q_i = \frac{X^2 X^4 (A + f_2)}{a^2}. \quad (87)$$

В настоящей статье мы не будем заниматься ее решением.

8 Поличисловой потенциал для метрики Шварцшильда

Для отыскания поличислового потенциала для метрики Шварцшильда мы будем действовать как и ранее: сначала перепишем метрику Шварцшильда в изотропных координатах, а затем будем рассматривать ее как соприкасающуюся вдоль 1-форм дифференциала неизвестного поличислового потенциала. Изотропная координата X для метрики Шварцшильда удовлетворяет уравнению:

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X\partial_\beta X = \frac{1}{F}(\partial_t X)^2 - F(\partial_r X)^2 - \frac{1}{r^2}(\partial_\theta X)^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}(\partial_\varphi X)^2 = 0. \quad (88)$$

Здесь $F = 1 - 2M/r$. Разделение переменных дает следующее общее решение для изотропных координат:

$$X = at + b\varphi \pm f_1(a, \mu, r) \pm f_2(b, \mu, \theta), \quad (89)$$

где a, b, μ — константы разделения, а функции f_1 и f_2 являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{df_1}{dr} = \sqrt{\frac{a^2}{F^2} - \frac{\mu}{Fr^2}}; \quad \frac{df_2}{d\theta} = \sqrt{\mu - \frac{b^2}{\sin^2 \theta}}. \quad (90)$$

В качестве набора независимых изотропных координат примем следующие зависимости:

$$X^1 = t + f_1(1, 0, r); \quad X^2 = t - f_1(1, 0, r); \quad (91)$$

$$X^3 = t + \varphi + f_1(1, \mu, r) + f_2(1, \mu, \theta); \quad X^4 = t + \varphi + f_1(1, \mu, r) - f_2(1, \mu, \theta).$$

Независимость координат $\{X^1, X^2, X^3, X^4\}$ проверяется непосредственным вычислением детерминанта матрицы Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1/F & 0 & 0 \\ 1 & -1/F & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{1/F^2 - \mu/r^2 F} & \sqrt{\mu - 1/\sin^2 \theta} & 1 \\ 1 & \sqrt{1/F^2 - \mu/r^2 F} & -\sqrt{\mu - 1/\sin^2 \theta} & 1 \end{pmatrix}. \quad (92)$$

Он равен $-4\sqrt{\mu - 1/\sin^2 \theta}/F \neq 0$ в допустимой области замены координат $\theta \notin (-\arcsin(1/\sqrt{\mu}), +\arcsin(1/\sqrt{\mu}))$. Преобразуя контравариантную метрику Шварцшильда:

$$g = \frac{1}{F}\partial_t \otimes \partial_t - F\partial_r \otimes \partial_r - \frac{1}{r^2}(\partial_\theta \otimes \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta}\partial_\varphi \otimes \partial_\varphi) \quad (93)$$

с помощью матрицы (92), приходим к метрике Шварцшильда в изотропных координатах с матрицей компонент:

$$(g)_{\text{iso}} = \begin{pmatrix} 0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_2 \\ \Phi_1 & 0 & \Phi_1 - \Phi_2 & \Phi_1 - \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_1 - \Phi_2 & 0 & \Psi \\ \Phi_2 & \Phi_1 - \Phi_2 & \Psi & 0 \end{pmatrix}, \quad (94)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{2}{F}; \quad \Phi_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \mu F/r^2}}{F}; \quad \Psi = \frac{2}{r^2} \left(\mu - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right). \quad (95)$$

При этом координаты r и θ в (94)-(95) должны быть заменены на свои выражения через $\{X^1, X^2, X^3, X^4\}$:

$$r = 2M(1 + L(-A^2 e^{U/2M})); \quad \theta = K(V), \quad U = X^1 - X^2; \quad V = X^3 - X^4, \quad (96)$$

L — функция Ламберта, определяемая трансцендентным уравнением: $L(x)e^{L(x)} = x$, K — обращение функции $f_2(1, \mu, \theta)$ относительно θ .

Полагая теперь, что метрика (94) порождается соприкосновением с 1-формами dQ_i , связанными с компонентами поличислового потенциала:

$$Q = Q_1(X)e_1 + Q_2(X)e_2 + Q_3(X)e_3 + Q_4(X)e_4, \quad (97)$$

мы приходим к системе 6 нелинейных дифференциальных уравнений на 4 неизвестные функции:

$$2 \sum_{i=1}^4 \partial_3 Q_i \partial_4 Q_i = \Phi_1; \quad 2 \sum_{i=1}^4 \partial_2 Q_i \partial_4 Q_i = 2 \sum_{i=1}^4 \partial_2 Q_i \partial_3 Q_i = \Phi_2; \quad (98)$$

$$2 \sum_{i=1}^4 \partial_1 Q_i \partial_2 Q_i = \Psi; \quad 2 \sum_{i=1}^4 \partial_1 Q_i \partial_4 Q_i = 2 \sum_{i=1}^4 \partial_1 Q_i \partial_3 Q_i = \Phi_1 - \Phi_2. \quad (99)$$

В настоящей статье мы не будем заниматься ее решением.

9 Физика и геометрия обобщенно-голоморфных функций

Рассмотрим в этом разделе соприкасающиеся метрики, порождаемые поличисловым потенциалом, ассоциированным с обобщенно-голоморфными или неголоморфными функциями поличисловой переменной. Отметим, что любое, даже незначительное усложнение вида голоморфной функции (59) весьма значительно усложняет структуру соприкасающихся объектов, в частности, структуру соприкасающейся ковариантной римановой метрики. Поэтому мы рассмотрим минимальные обобщения, объем вычислений в которых соизмерим с размерами журнальной статьи. Прежде всего рассмотрим потенциал вида:

$$F_1 = f_1(x^1, x^2)e_1 + f_2(x^2)e_2 + f_3(x^3)e_3 + f_4(x^4)e_4, \quad (100)$$

где f_i — набор гладких функций от указанных переменных. Очевидно, потенциал F_1 является обобщением потенциала f в (59) и относится к специальному типу $\mathcal{G}_{0, n-1}^n$ по терминологии [5]. Опора второго порядка порождается системой диад $\{df_i \vee df_j\}$, так что соприкасающаяся контравариантная риманова метрика будет иметь вид:

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\gamma f_i \partial_\delta f_j, \quad (101)$$

или в компонентах:

$$\begin{pmatrix} 0 & f'_3 f'_4 & f'_4(f'_2 + f_{1,2}) & f'_3(f'_2 + f_{1,2}) \\ f'_3 f'_4 & 0 & f'_1 f'_4 & f'_1 f'_3 \\ f'_4(f'_2 + f_{1,2}) & f'_3 f'_4 & 0 & f'_1(f'_2 + f_{1,2}) \\ f'_3(f'_2 + f_{1,2}) & f'_1 f'_3 & f'_1(f'_2 + f_{1,2}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (102)$$

где $f'_i \equiv \partial f_i / \partial x^i$, $f_{1,2} \equiv \partial f_1 / \partial x^2$. Вычисление ковариантной соприкасающейся метрики приводит к следующей матрице компонент:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -2f'_1/(f'_2+f_{1,2})f'_3f'_4 & 1/f'_3f'_4 & 1/(f'_2+f_{1,2})f'_4 & 1/(f'_2+f_{1,2})f'_3 \\ 1/f'_3f'_4 & -2(f'_2+f_{1,2})/f'_1f'_3f'_4 & 1/f'_1f'_4 & 1/f'_1f'_3 \\ 1/(f'_2+f_{1,2})f'_4 & 1/f'_1f'_4 & -2f'_3/f'_1(f'_2+f_{1,2})f'_4 & 1/f'_1(f'_2+f_{1,2}) \\ 1/(f'_2+f_{1,2})f'_3 & 1/f'_1f'_3 & 1/f'_1(f'_2+f_{1,2}) & -2f'_4/f'_1f'_2f'_3 \end{pmatrix}. \quad (103)$$

Очевидно, что (103) переходит в (66) при $f_{1,2} = 0$.

Вычисление компонент тензора кривизны и тензора Эйнштейна для метрики (103) в выбранных изотропных координатах приводят к довольно громоздким выражениям. Для примера приведем явный вид выражения скалярной кривизны для метрики (103):

$$\begin{aligned} R = & (-168f_{2,2}f_{3,3}^3f_{4,4}^5f_{1,1}f_{1,1,2}f_{1,1,1}f_{1,2} + 15f_{2,2}^3f_{3,3}f_{4,4}^7f_{1,1}^2 - \\ & 108f_{2,2}f_{4,4}^5f_{3,3}f_{1,1}^2f_{1,2}^2f_{1,1,1}f_{3,3} - 36f_{2,2}f_{4,4}^4f_{3,3}^2f_{1,1,1}f_{4,4,4}f_{1,1}^2f_{1,2}^2 - \\ & 84f_{3,3}^4f_{1,1}^3f_{4,4}^4f_{1,1,2}f_{2,2,2} + 4f_{1,1}^4f_{3,3}^3f_{1,2}^3f_{4,4,4,4}f_{4,4}^2 + \\ & 15f_{3,3}f_{4,4}^7f_{1,1,1}^3f_{1,2}^3 - 72f_{2,2}^2f_{1,1}^4f_{3,3}^3f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{3,3,3}f_{1,2} - \\ & 18f_{2,2}^2f_{4,4}^7f_{3,3}f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{1,2} - 27f_{2,2}f_{1,1}^4f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{3,3,3}f_{1,2}^2 - \\ & 9f_{3,3}^2f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{1,1}^4f_{1,2}f_{1,2,2} - 9f_{3,3}^2f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{1,1}^4f_{1,2}f_{2,2,2} - \\ & 144f_{2,2}^2f_{1,1}^2f_{4,4}^4f_{3,3}^3f_{1,1,1}f_{4,4,4}f_{1,2} - 28f_{2,2}^3f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{4,4,4}^3f_{3,3} - \\ & 144f_{2,2}^2f_{1,1}^2f_{4,4}^3f_{3,3}^3f_{1,1,1}f_{4,4,4}f_{1,2} - 180f_{2,2}f_{4,4}^4f_{3,3}^2f_{1,1,1}^2f_{1,2}^2 - \\ & 108f_{2,2}^2f_{4,4}^5f_{3,3}f_{1,1}^2f_{1,2}f_{1,1,1}f_{3,3} - 108f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{3,3,3}f_{4,4,4}f_{1,2} - \\ & 9f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{1,1}^2f_{2,2,2} - 9f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{1,1}^2f_{1,2,2} - \\ & 9f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{1,1}^2f_{4,4}^6f_{1,1,1}f_{2,2,2} - 9f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{1,1}^2f_{4,4}^6f_{1,1,1}f_{1,2,2} - \\ & 6f_{1,1}^4f_{3,3}f_{4,4,4,4}f_{4,4}^4f_{2,2}f_{1,2}^2 - 6f_{1,1}^4f_{3,3}f_{4,4,4,4}f_{4,4}^4f_{1,2}f_{2,2}^2 + \\ & 135f_{2,2}^2f_{4,4}^6f_{1,1,1}^2f_{3,3}^3f_{1,2} - 36f_{2,2}^2f_{4,4}^4f_{3,3}^2f_{1,1,1}f_{4,4,4}f_{1,1}^2f_{1,2} - \\ & 54f_{2,2}f_{4,4}^6f_{3,3}^2f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{1,2}^2 - 72f_{2,2}f_{1,1}^4f_{3,3}f_{4,4}^3f_{4,4,4}f_{3,3,3}f_{1,2}^2 - \\ & 180f_{2,2}^2f_{4,4}^4f_{3,3}^2f_{1,1,1}^2f_{1,2} - 27f_{2,2}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{3,3,3}f_{1,2} - \\ & 8f_{1,1}^4f_{3,3}^2f_{4,4,4,4}f_{4,4}^3f_{2,2}^3 - 36f_{3,3}^4f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{2,2,2}f_{4,4,4}f_{2,2} - \\ & 36f_{3,3}^4f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{1,2,2}f_{4,4,4}f_{2,2} + 45f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{4,4,4}^2f_{1,2}^2 + \\ & 112f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{2,2}f_{1,2} + 72f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{2,2}^2f_{1,2} + \\ & 72f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{2,2}f_{1,2}^2 - 184f_{2,2}f_{4,4}^4f_{3,3}^4f_{1,1}f_{1,1,2}f_{1,1,1}f_{1,2} - \\ & 24f_{1,1}^4f_{3,3}^2f_{4,4,4,4}f_{4,4}^3f_{1,2}f_{2,2}^2 + 45f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{4,4,4}^2f_{1,2} - \\ & 6f_{2,2}^2f_{1,1}^3f_{4,4}^3f_{3,3}^3f_{1,1,2}f_{4,4,4} - 36f_{2,2}^3f_{3,3}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{3,3,3}f_{4,4,4} - \\ & 48f_{2,2}^3f_{1,1}^2f_{4,4}^2f_{3,3}^3f_{1,1,1}f_{4,4,4} - 36f_{2,2}^3f_{4,4}^5f_{3,3,3}f_{1,1}^2f_{1,1,1}f_{3,3} - \\ & 84f_{2,2}^2f_{3,3}^3f_{4,4}^5f_{1,1}f_{1,1,2}f_{1,1,1} - 84f_{2,2}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{4,4,4}^3f_{3,3}f_{1,2} - \\ & 92f_{2,2}^2f_{4,4}^4f_{3,3}^4f_{1,1}f_{1,1,2}f_{1,1,1} - 180f_{2,2}^2f_{1,1}^2f_{4,4,4}^2f_{3,3}^4f_{1,2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4f_{3,3}f_{4,4}f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{2,2}f_{1,2} + 12f_{1,1}^4f_{3,3}f_{4,4}^2f_{4,4}^3f_{2,2}f_{1,2}^2 - \\
& 60f_{4,4}^4f_{3,3}^4f_{1,1,1}^2f_{1,2}^3 - 36f_{4,4}^4f_{3,3,3}^4f_{1,1}f_{1,2}f_{3,3}^2f_{1,2,2} - \\
& 36f_{4,4}^4f_{3,3,3}^4f_{1,1}f_{1,2}f_{3,3}^2f_{2,2,2} - 84f_{3,3}^3f_{4,4}^5f_{1,1}f_{1,1,2}f_{1,1,1}f_{1,2}^2 - \\
& 36f_{4,4}^5f_{3,3,3}^4f_{1,1}f_{1,2}f_{3,3}f_{2,2,2} + 24f_{1,1}^4f_{3,3}^4f_{1,2}f_{4,4,4,4}f_{4,4} - \\
& 36f_{3,3}^3f_{4,4,4}f_{1,1}^3f_{4,4}^3f_{1,2}f_{1,2} + 6f_{4,4}^6f_{3,3}^2f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{1,2}^2 - \\
& 36f_{3,3}^3f_{4,4,4}f_{1,1}^3f_{4,4}^3f_{2,2,2}f_{1,2} - 144f_{2,2}f_{1,1}^2f_{4,4}^2f_{3,3}^4f_{1,1,1}f_{4,4,4}f_{1,2}^2 - \\
& 60f_{2,2}^3f_{4,4}^4f_{3,3}^4f_{1,1,1}^2 - 36f_{2,2}f_{3,3}^3f_{1,1}^2f_{4,4}^5f_{1,1,1}f_{2,2,2} - \\
& 36f_{2,2}f_{3,3}^3f_{1,1}^2f_{4,4}^5f_{1,1,1}f_{1,2} + 45f_{2,2}^2f_{3,3}^3f_{4,4}^7f_{1,1,1}^2f_{1,2} + \\
& 45f_{2,2}f_{3,3}^3f_{4,4}^7f_{1,1,1}^2f_{1,2}^2 - 21f_{1,1}^3f_{3,3}^2f_{4,4}^6f_{1,1,2}f_{2,2,2} - \\
& 21f_{1,1}^3f_{3,3}^2f_{4,4}^6f_{1,1,2}f_{1,2,2} - 9f_{1,1}^4f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{3,3}^3f_{1,2}^2 - \\
& 6f_{2,2}f_{3,3}^3f_{4,4}^4f_{1,1}^3f_{1,1,2}f_{4,4,4}f_{1,2} - 24f_{1,1}^4f_{3,3}^3f_{4,4,4,4}f_{4,4}^3f_{2,2}f_{1,2}^2 - \\
& 18f_{2,2}f_{4,4}^7f_{3,3}f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{1,2}^2 - 30f_{2,2}f_{1,1}^6f_{4,4}f_{1,1,2}f_{3,3}^2f_{1,1,1}f_{1,2} + \\
& 12f_{1,1}^4f_{3,3}^3f_{4,4,4,4}f_{4,4}^2f_{1,2}f_{2,2}^2 + 6f_{4,4}^6f_{3,3}^2f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{2,2}^2 + \\
& 4f_{1,1}^4f_{3,3}^3f_{4,4,4,4}f_{4,4}^2f_{2,2}^3 - 108f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{4,4}^4f_{1,1}^2f_{1,1,1}f_{3,3,3}f_{1,2} - \\
& 33f_{2,2}f_{3,3}^3f_{1,1}^2f_{4,4}^5f_{1,1,2}^2 - 36f_{3,3}^3f_{1,1}^2f_{4,4}^5f_{1,1,1}f_{1,2}f_{2,2,2} - \\
& 36f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1,1}f_{1,2}f_{1,1}^2f_{1,2,2} - 36f_{2,2}f_{4,4}^4f_{3,3,3}^4f_{1,1}^2f_{3,3}^2f_{2,2,2} - \\
& 84f_{2,2}f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{4,4,4}^3f_{3,3}^2f_{1,2} + 15f_{2,2}^3f_{3,3}^2f_{1,1}^2f_{4,4}^2f_{4,4,4} - \\
& 144f_{2,2}f_{1,1}^2f_{4,4}^3f_{3,3}^3f_{1,1,1}f_{4,4,4}f_{1,2}^2 - 36f_{4,4}^5f_{3,3,3}^2f_{1,1}^3f_{1,2}f_{1,1,1}f_{3,3} + \\
& 45f_{4,4}^6f_{1,1,1}^2f_{3,3}^3f_{1,2}^3 - 36f_{2,2}f_{3,3}^4f_{4,4}f_{1,1,1}^2f_{1,1}^2f_{1,2,2} + \\
& 45f_{2,2}^3f_{4,4}^6f_{1,1,1}^2f_{3,3}^3 - 12f_{2,2}f_{1,1}^3f_{4,4}^3f_{3,3}^3f_{1,1,2}f_{4,4,4}f_{1,2} + \\
& 4f_{2,2}f_{3,3}f_{1,1}f_{4,4}^7f_{1,1,2}f_{1,1,1}f_{1,2} + 48f_{2,2}f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1}^3f_{1,1,2,2} - \\
& 50f_{2,2}f_{3,3}^4f_{1,1}^2f_{4,4}^4f_{1,1,2}^2 - 180f_{2,2}f_{1,1}^4f_{4,4,4}^2f_{3,3}^4f_{1,2}^2 - \\
& 9f_{3,3}^2f_{1,1}^2f_{4,4}^6f_{1,1,1}f_{1,2}f_{1,2,2} - 8f_{1,1}^4f_{3,3}^2f_{1,2}^3f_{4,4,4,4}f_{4,4}^3 + \\
& 24f_{1,1}^4f_{3,3}^3f_{4,4,4,4}f_{4,4}^3f_{2,2} - 60f_{2,2}^3f_{1,1}^2f_{4,4,4}^3f_{3,3} - \\
& 9f_{3,3}^2f_{1,1}^2f_{4,4}^6f_{1,1,1}f_{1,2}f_{2,2,2} - 3f_{3,3}^2f_{4,4}^4f_{1,1}^3f_{1,1,2}f_{4,4,4}f_{1,2}^2 + \\
& 2f_{3,3}f_{1,1}f_{4,4}^7f_{1,1,2}f_{1,1,1}f_{1,2}^2 - 3f_{2,2}^2f_{3,3}^2f_{4,4}^4f_{1,1}^3f_{1,1,2}f_{4,4,4} + \\
& 2f_{2,2}^2f_{3,3}f_{1,1}f_{4,4}^7f_{1,1,2}f_{1,1,1} - 54f_{2,2}^2f_{4,4}^6f_{3,3}^2f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{1,2} + \\
& 72f_{1,1}^4f_{3,3}^4f_{4,4,4,4}f_{4,4}^2f_{2,2}f_{1,2}^2 - 36f_{4,4}^5f_{3,3,3}^4f_{1,1}f_{1,2}f_{3,3}f_{1,2,2} + \\
& 15f_{3,3}^2f_{1,1}^2f_{4,4}^2f_{4,4,4}^3f_{1,2}^3 - 36f_{2,2}f_{3,3}^3f_{4,4,4}^4f_{1,1}^3f_{4,4}f_{1,2,2} - \\
& 24f_{2,2}^3f_{1,1}^3f_{3,3}^3f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{3,3,3} - 2f_{1,1}^4f_{3,3}f_{4,4,4,4}f_{4,4}^2f_{2,2} - \\
& 18f_{2,2}^3f_{4,4}^6f_{3,3}^2f_{1,1}f_{1,1,1,1} + 135f_{2,2}f_{4,4}^6f_{1,1,1}^2f_{3,3}^2f_{1,2}^2 - \\
& 60f_{1,1}^4f_{4,4,4}^2f_{3,3}^3f_{1,2}^3 - 108f_{2,2}f_{3,3}^2f_{4,4}^4f_{1,1}^2f_{1,1,1}f_{3,3,3}f_{1,2}^2 - \\
& 12f_{4,4}^4f_{3,3}^2f_{1,1,1}f_{4,4,4}^2f_{1,1}^3f_{1,2}^3 + 96f_{3,3}^3f_{4,4}^5f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{2,2}f_{1,2} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2f_{3,3}f_{4,4}^7f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{2,2}^2 + 4f_{1,1}^4f_{3,3}f_{1,2}^3f_{4,4,4}^2f_{4,4}^3 - \\
& 2f_{1,1}^4f_{3,3}f_{1,2}^3f_{4,4,4,4}f_{4,4}^4 - 2f_{3,3}f_{4,4}^7f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{1,2}^2 + \\
& 2f_{3,3}f_{1,1,2}^2f_{4,4}^7f_{1,1}^2f_{2,2} + 2f_{1,1}^2f_{3,3}f_{4,4}^7f_{1,1,2}^2f_{1,2} - \\
& 9f_{2,2}f_{4,4}^6f_{3,3,3}f_{1,1}^4f_{1,2} + 12f_{1,1}^4f_{3,3}f_{4,4,4}^2f_{4,4}^3f_{1,2}f_{2,2} - \\
& 36f_{3,3}^2f_{4,4}^4f_{1,1}^2f_{1,1,1}f_{3,3,3}f_{1,2}^3 - 36f_{2,2}^3f_{3,3}^2f_{4,4}^4f_{1,1}^2f_{1,1,1}f_{3,3,3} - \\
& 27f_{2,2}^2f_{1,1,1}f_{3,3,3}f_{4,4}^6f_{1,1}^2f_{1,2} - 27f_{2,2}f_{1,1,1}f_{3,3,3}f_{4,4}^6f_{1,1}^2f_{1,2}^2 + \\
& 48f_{2,2}f_{3,3}^3f_{4,4}^5f_{1,1}^3f_{1,1,2,2} - 36f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1,1}f_{1,2}f_{1,1,1}^2f_{2,2,2} - \\
& 36f_{3,3}^3f_{1,1}^2f_{4,4}^5f_{1,1,1}f_{1,2}f_{1,2,2} + 12f_{4,4}^6f_{3,3}^2f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{2,2}f_{1,2} - \\
& 24f_{1,1}^4f_{3,3}f_{4,4}^3f_{4,4,4}f_{3,3,3}f_{1,2}^3 - 48f_{1,1}^2f_{4,4}^2f_{3,3}^4f_{1,1,1}f_{4,4,4}f_{1,2}^3 + \\
& 48f_{3,3}^4f_{1,1}^3f_{4,4}^4f_{1,1,2,2}f_{1,2} + 48f_{3,3}^3f_{1,1}^3f_{4,4}^5f_{1,1,2,2}f_{1,2} - \\
& 36f_{2,2}f_{3,3}^3f_{4,4,4}f_{1,1}^4f_{4,4}^3f_{2,2,2} + 4f_{1,1}^4f_{3,3}f_{4,4,4}^2f_{4,4}^3f_{2,2}^3 - \\
& 9f_{2,2}f_{4,4}^6f_{3,3,3}f_{1,1}^4f_{2,2,2} - 9f_{2,2}^3f_{1,1}^4f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{3,3,3} - \\
& 36f_{2,2}f_{4,4}^5f_{3,3,3}f_{1,1}^4f_{3,3}f_{1,2,2} - 36f_{2,2}f_{4,4}^5f_{3,3,3}f_{1,1}^4f_{3,3}f_{2,2,2} - \\
& 36f_{2,2}f_{4,4}^4f_{3,3,3}f_{1,1}^4f_{3,3}^2f_{1,2,2} - 36f_{1,1}^4f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{4,4,4}f_{2,2,2}f_{1,2} - \\
& 36f_{1,1}^4f_{3,3}^4f_{4,4}^2f_{4,4,4}f_{1,2,2}f_{1,2} - 36f_{3,3}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^4f_{3,3,3}f_{4,4,4}f_{1,2}^3 - \\
& 92f_{4,4}^4f_{3,3}^4f_{1,1}f_{1,1,2}f_{1,1,1}f_{1,2}^2 - 15f_{2,2}^2f_{1,1}f_{4,4}^6f_{1,1,2}f_{3,3}^2f_{1,1,1} - \\
& 84f_{3,3}^3f_{1,1}^3f_{4,4}^5f_{1,1,2}f_{1,2,2} - 36f_{2,2}f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1,1}f_{1,1}^2f_{2,2,2} + \\
& 72f_{1,1}^4f_{3,3}^3f_{4,4,4,4}f_{4,4}f_{1,2}f_{2,2}^2 - 108f_{2,2}f_{3,3}^2f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{3,3,3}f_{4,4,4}f_{1,2}^2 + \\
& 12f_{1,1}^3f_{3,3}^2f_{4,4}^6f_{1,1,2,2}f_{1,2} - 6f_{4,4}^7f_{3,3}f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{1,2}^3 + \\
& 12f_{2,2}f_{4,4}^6f_{3,3}^2f_{1,1}^3f_{1,1,2,2} - 6f_{2,2}^3f_{4,4}^7f_{3,3}f_{1,1}f_{1,1,1,1} - \\
& 9f_{4,4}^6f_{3,3,3}f_{1,1}^4f_{1,2}f_{1,2,2} - 9f_{4,4}^6f_{3,3,3}f_{1,1}^4f_{1,2}f_{2,2,2} - \\
& 15f_{1,1}f_{4,4}^6f_{1,1,2}f_{3,3}^2f_{1,1,1}f_{1,2}^2 - 48f_{1,1}^2f_{4,4}^3f_{3,3}^3f_{1,1,1}f_{4,4,4}f_{1,2}^3 - \\
& 6f_{1,1}^3f_{4,4}^3f_{3,3}^3f_{1,1,2}f_{4,4,4}f_{1,2}^2 - 9f_{4,4}^6f_{3,3,3}f_{1,1}^3f_{1,2}f_{1,1,1} - \\
& 9f_{2,2}^3f_{1,1,1}f_{3,3,3}f_{4,4}^6f_{1,1}^2 + 48f_{3,3}^3f_{4,4}^5f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{2,2}^2 + \\
& 56f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{2,2}^2 - \\
& 84f_{3,3}^3f_{1,1}^3f_{4,4}^5f_{1,1,2}f_{2,2,2} - 50f_{3,3}^4f_{1,1}^2f_{4,4}^4f_{1,1,2}f_{1,2} - \\
& 33f_{3,3}^3f_{1,1}^2f_{4,4}^5f_{1,1,2}f_{1,2} - 84f_{3,3}^4f_{1,1}^4f_{4,4}^4f_{1,1,2}f_{1,2,2} - \\
& 48f_{2,2}^2f_{1,1}^3f_{4,4}^3f_{3,3}f_{1,1,1}f_{4,4,4} - 12f_{2,2}^3f_{4,4}^4f_{3,3}^2f_{1,1,1}f_{4,4,4}f_{1,1}^2 + \\
& 48f_{3,3}^3f_{4,4}^5f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{1,2}^2 + 12f_{1,1}^4f_{3,3}^3f_{4,4,4,4}f_{4,4}^2f_{2,2}f_{1,2}^2 + \\
& 56f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1}^2f_{1,1,1,2}f_{1,2}^2 - 28f_{1,1}^4f_{4,4}^2f_{4,4,4}^3f_{3,3}^3f_{1,2}^3 - \\
& 18f_{4,4}^6f_{3,3}^2f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{1,2}^3 + 24f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{2,2}^3 + \\
& 24f_{3,3}^4f_{4,4}^4f_{1,1}f_{1,1,1,1}f_{1,2}^3)/(f_{4,4}^3(f_{4,4} + 2f_{3,3})^3(f_{2,2} + f_{1,2})^2f_{1,1}^3)
\end{aligned}$$

Метрику (103) целесообразно переписать в координатах $u^i = f_i$. В этих координатах эта метрика характеризуется следующей матрицей компонент:

$$(g_{\alpha\beta}) = \frac{2}{3\Phi_1\Phi_3\Phi_4(1+\Psi)} \begin{pmatrix} -1 & (1+3\Psi)/2 & 1/2 & 1/2 \\ (1+3\Psi)/2 & -(1+3\Psi+3\Psi^2) & (1+\Psi)/2 & (1+\Psi)/2 \\ 1/2 & (1+\Psi)/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & (1+\Psi)/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (105)$$

где

$$\Phi_i \equiv f'_i \circ f_i^{-1}, \quad \Psi(u^1, u^2) = \Phi_1(u^1, u^2) \left(S_1(u_2) + S_2(u_2) \int \frac{du^1}{\Phi_1(u^1, u^2)} + \int \frac{\Phi_{1,2}(u^1, u^2)}{\Phi_1^2(u^1, u^2)} du^1 \right).$$

Рассмотрим здесь также модель пространства-времени, порождаемую гиперболическим потенциалом вида:

$$F = \Phi(x^1, x^2, x^3, x^4)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = \Phi I_4. \quad (106)$$

Очевидно, что все физико-геометрические характеристики модели порождаются единственным скалярным полем Φ . Опора второго порядка порождается диадой $\{d\Phi \vee d\Phi\}$, при этом сопрягающаяся контравариантная риманова метрика будет иметь вид:

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\gamma \Phi \partial_\delta \Phi, \quad (107)$$

или в компонентах:

$$\begin{pmatrix} 0 & \Phi_{,3}\Phi_{,4} & \Phi_{,4}\Phi_{,2} & \Phi_{,3}\Phi_{,2} \\ \Phi_{,3}\Phi_{,4} & 0 & \Phi_{,1}\Phi_{,4} & \Phi_{,1}\Phi_{,3} \\ \Phi_{,4}\Phi_{,2} & \Phi_{,3}\Phi_{,4} & 0 & \Phi_{,1}\Phi_{,2} \\ \Phi_{,3}\Phi_{,2} & \Phi_{,1}\Phi_{,3} & \Phi_{,1}\Phi_{,2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (108)$$

Соответствующая контравариантная метрика имеет вид:

$$(g_{\alpha\beta}) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2\Phi_{,1}/\Phi_{,2}\Phi_{,3}\Phi_{,4} & 1/\Phi_{,3}\Phi_{,4} & 1/\Phi_{,2}\Phi_{,4} & 1/\Phi_{,2}\Phi_{,3} \\ 1/\Phi_{,3}\Phi_{,4} & -2\Phi_{,2}/\Phi_{,1}\Phi_{,3}\Phi_{,4} & 1/\Phi_{,1}\Phi_{,4} & 1/\Phi_{,1}\Phi_{,3} \\ 1/\Phi_{,2}\Phi_{,4} & 1/\Phi_{,1}\Phi_{,4} & -2\Phi_{,3}/\Phi_{,1}\Phi_{,2}\Phi_{,4} & 1/\Phi_{,1}\Phi_{,2} \\ 1/\Phi_{,2}\Phi_{,3} & 1/\Phi_{,1}\Phi_{,3} & 1/\Phi_{,1}\Phi_{,2} & -2\Phi_{,4}/\Phi_{,1}\Phi_{,2}\Phi_{,3} \end{pmatrix}. \quad (109)$$

Приведем явный вид выражения скалярной кривизны для метрики (109):

$$R = (2(-6\Phi_{,1}^2\Phi_{,2}^2\Phi_{,3}^2\Phi_{,4}^2\Phi_{,1,2,4} - 6\Phi_{,1}^2\Phi_{,2}^2\Phi_{,3}^2\Phi_{,4}^2\Phi_{,1,2,3} - 6\Phi_{,1}^2\Phi_{,2}^2\Phi_{,3}^2\Phi_{,4}^2\Phi_{,1,3,4} - 6\Phi_{,1}^3\Phi_{,2}^2\Phi_{,3}^2\Phi_{,4}^2\Phi_{,2,3,4} + 7\Phi_{,1,3}\Phi_{,2}^3\Phi_{,3}^2\Phi_{,4}^3\Phi_{,1,1} + 3\Phi_{,1,3}^2\Phi_{,2}^3\Phi_{,3}^3\Phi_{,4}^3\Phi_{,1} + 7\Phi_{,1}^3\Phi_{,2,3}\Phi_{,3}^2\Phi_{,4}^2\Phi_{,2,2} + 3\Phi_{,1}^3\Phi_{,2,3}^2\Phi_{,3}^3\Phi_{,4}^2\Phi_{,2} + 7\Phi_{,1}^3\Phi_{,3,3}\Phi_{,2}^2\Phi_{,4}^2\Phi_{,2,3} + 7\Phi_{,1}^2\Phi_{,3,3}\Phi_{,2}^3\Phi_{,4}^2\Phi_{,1,3} + 7\Phi_{,1,1}\Phi_{,2}^3\Phi_{,3}^2\Phi_{,4}^2\Phi_{,1,4} + 3\Phi_{,1}\Phi_{,1,4}^2\Phi_{,2}^3\Phi_{,3}^3\Phi_{,4} + 7\Phi_{,1}^2\Phi_{,1,4}\Phi_{,2}^3\Phi_{,3}^3\Phi_{,4,4} + 7\Phi_{,1}^3\Phi_{,3}^3\Phi_{,2,4}\Phi_{,4}^2\Phi_{,2,2} + 3\Phi_{,1}^3\Phi_{,3}^3\Phi_{,2,4}^2\Phi_{,4}\Phi_{,2} + 7\Phi_{,1}^3\Phi_{,3}^3\Phi_{,4,4}\Phi_{,2}^2\Phi_{,2,4} - 4\Phi_{,1}^3\Phi_{,2}\Phi_{,2}^2\Phi_{,3}^3\Phi_{,4}\Phi_{,2,2,3} - 4\Phi_{,1}^3\Phi_{,2}^2\Phi_{,3}\Phi_{,4}^2\Phi_{,2,3,3} - 4\Phi_{,1}\Phi_{,2}^3\Phi_{,3}^2\Phi_{,4}\Phi_{,1,1,4} - 4\Phi_{,1}^2\Phi_{,2}^3\Phi_{,3}\Phi_{,4}\Phi_{,1,4,4} - 4\Phi_{,1}^3\Phi_{,2}\Phi_{,2}^3\Phi_{,4}^2\Phi_{,2,2,4} - 4\Phi_{,1}^3\Phi_{,2}^2\Phi_{,3}\Phi_{,4}\Phi_{,2,4,4} - 4\Phi_{,1}\Phi_{,2}^3\Phi_{,2}^2\Phi_{,3}^3\Phi_{,4}\Phi_{,1,1,3} - 4\Phi_{,1}^2\Phi_{,2}^3\Phi_{,3}\Phi_{,4}^2\Phi_{,1,3,3} + 7\Phi_{,1}^3\Phi_{,3,3}\Phi_{,2}^2\Phi_{,4}^2\Phi_{,3,4} + 3\Phi_{,1}^3\Phi_{,3,4}^2\Phi_{,2}^3\Phi_{,3}\Phi_{,4} + 7\Phi_{,1}^3\Phi_{,3,4}\Phi_{,2}^3\Phi_{,2}^2\Phi_{,3}\Phi_{,4,4} +$$

$$\begin{aligned}
& 7\Phi_{,1,1}\Phi_{,2}^2\Phi_3^3\Phi_4^3\Phi_{,1,2} + 3\Phi_{,1}\Phi_{,1,2}^2\Phi_3^3\Phi_4^3\Phi_{,2} + 7\Phi_{,1}^2\Phi_{,1,2}\Phi_3^3\Phi_4^3\Phi_{,2,2} - \\
& 4\Phi_{,1}^3\Phi_2^3\Phi_3\Phi_4^2\Phi_{,3,3,4} - 4\Phi_{,1}^3\Phi_2^3\Phi_3^2\Phi_4\Phi_{,3,4,4} - 4\Phi_{,1}\Phi_2^2\Phi_3^3\Phi_4^3\Phi_{,1,1,2} - \\
& 4\Phi_{,1}^2\Phi_2\Phi_3^3\Phi_4^3\Phi_{,1,2,2} + 3\Phi_{,1,3}\Phi_2^3\Phi_3\Phi_4^2\Phi_{,1,3,4} + 3\Phi_{,1}^3\Phi_2\Phi_3\Phi_4^2\Phi_{,2,3,4} + \\
& 3\Phi_{,1}^3\Phi_3\Phi_2\Phi_4^3\Phi_{,2,2,2,3} + 3\Phi_{,1}\Phi_{,3,3}\Phi_2^3\Phi_4^3\Phi_{,1,1}\Phi_{,3} + 3\Phi_{,1,1}\Phi_2^3\Phi_3^3\Phi_4\Phi_{,1}\Phi_{,4,4} + \\
& 3\Phi_{,1}\Phi_{,1,2}\Phi_3^2\Phi_4^3\Phi_{,2,1,3} + 3\Phi_{,1}\Phi_{,1,2}\Phi_3^3\Phi_4^2\Phi_{,2,1,4} + 3\Phi_{,1}^2\Phi_4^3\Phi_{,2,3}\Phi_3^2\Phi_{,1,2}\Phi_{,2} + \\
& 3\Phi_{,3}^3\Phi_4^2\Phi_{,1,2}\Phi_{,2,4}\Phi_{,2} + 3\Phi_{,1}^3\Phi_3^3\Phi_{,4,4}\Phi_{,2}\Phi_{,2,2}\Phi_{,4} - 4\Phi_{,4}^2\Phi_{,1,3}\Phi_2^2\Phi_{,1}^2\Phi_{,3}\Phi_{,2,4} + \\
& 3\Phi_{,1,4}\Phi_2^3\Phi_3^2\Phi_4\Phi_{,1}^2\Phi_{,3,4} + 3\Phi_{,1}^3\Phi_{,2,4}\Phi_3^2\Phi_4\Phi_{,2}\Phi_{,3,4} - 4\Phi_{,3}^2\Phi_{,1,4}\Phi_2^2\Phi_{,1}^2\Phi_{,4}\Phi_{,2,3} + \\
& 3\Phi_{,1,3}\Phi_2^2\Phi_3\Phi_4^3\Phi_{,1}^2\Phi_{,2,3} + 3\Phi_{,1}^3\Phi_{,3,3}\Phi_2^3\Phi_4\Phi_{,4,4}\Phi_{,3} + 3\Phi_{,1,1}\Phi_2\Phi_3^3\Phi_4^3\Phi_{,1}\Phi_{,2,2} + \\
& 3\Phi_{,1}\Phi_{,1,3}\Phi_2^3\Phi_4^2\Phi_3^2\Phi_{,1,4} + 3\Phi_{,1}^3\Phi_4^2\Phi_{,2,3}\Phi_3^2\Phi_{,2,4}\Phi_{,2} - 4\Phi_{,4}^2\Phi_{,1,2}\Phi_3^2\Phi_{,1}^2\Phi_{,2}\Phi_{,3,4} + \\
& 3\Phi_{,1,4}\Phi_2^2\Phi_3^3\Phi_4\Phi_{,1}^2\Phi_{,2,4})) / \Phi_{,3}^2\Phi_{,4}^2\Phi_{,1}^2\Phi_{,2}^2
\end{aligned}$$

10 Заключение

На основе алгебры кополиад (разд. 2) и конструкции соприкосновения (разд. 3) мы рассмотрели взаимосвязь поличисловой теории поля с физически интерпретируемыми в рамках ОТО моделями пространства-времени в двух направлениях: от поличисловой теории поля в сторону ОТО (разделы 5,6,9) и в обратную сторону (разделы 7 и 8). Предварительный общий анализ, приведенный в разделе 4, обнаруживает замечательный факт соприкасающихся конструкций в H_4 : все невырожденные псевдоримановы метрики, получаемые методом соприкосновения с метрикой Бервальда-Моора, могут быть лишь двух типов — с сигнатурами $(+, -, -, -)$ или $(+, +, -, -)$. Возникновение пространств второго типа в рамках геометрий пространств Бервальда-Моора, индуцируемых алгебрами поличисел, иллюстрирует некоторую внутреннюю преемственность этих алгебр: ранее [4] пространство с сигнатурой $(+, +, -, -)$ было получено как векторное представление группы $SL(2, H)$ — группы изометрии пространства гиперболических спиноров (спиноры над двойными числами P_2). Алгебра P_2 , порождающая H_2 , является подалгеброй P_4 , порождающей H_4 , поэтому спинорный аспект соприкасающихся метрик в H_4 оказывается своеобразным образом распределенным между спинорами над комплексными числами в случае пространств $(+, -, -, -)$ и спинорами над двойными числами в случае пространств $(+, +, -, -)$. Мы оставляем исследование спинорных свойств поличисловых моделей для будущих исследований.

В нашей статье мы показали, что поличисловой потенциал допускает последовательную интерпретацию в рамках стандартных теоретико-полевых моделей на фоне искривленного пространства-времени ОТО. Между тем, остается неясным вопрос о том, всякую ли метрику ОТО можно реализовать как соприкасающуюся конструкцию с базисом из диад, построенных на основе некоторого поличислового потенциала. В своей общей постановке этот вопрос имеет некоторые аналогии с вопросом о вложимости 4-мерных римановых многообразий в многомерные плоские. В общем случае ответ на поставленный вопрос, по всей видимости будет отрицательным. Он может оказаться отрицательным даже для рассмотренных метрик фридмановского типа и метрики Шварцшильда, поскольку условия реализуемости в обоих случаях представляют собой систему шести нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных на четыре неизвестных функции, решение которых может существовать лишь благодаря высокой степени (скрытой!) симметрии этих систем. Но даже в случае несовместности упомянутых систем, поличисловая теория

поля остается интересным кандидатом на единую теорию пространства-времени-материи-взаимодействий, поскольку она не является обобщением существующих стандартных теорий, в которых метрика Шварцшильда или метрики фридмановского типа возникают и выводятся естественным образом, а представляет собой альтернативную теорию физической реальности. В ее рамках и в ее формализме опытные факты должны истолковываться на своем языке: языке уравнений поличисловой теории поля и правил перехода к наблюдаемым величинам. Формулировку этих уравнений и правил мы оставляем для будущих исследований.

Литература

- [1] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. h -голоморфные функции двойной переменной и их приложения // *Гиперболические числа в геометрии и физике*, 13, 2010, с. 44–77.
- [2] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной // *Гиперболические числа в геометрии и физике*, 13, 2010, с. 78–127.
- [3] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной // *Гиперболические числа в геометрии и физике*, 2(14), т. 7, 2010, с. 11–37.
- [4] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Алгебра, геометрия и физика двойных чисел // *Гиперболические числа в геометрии и физике*, 1(19), т. 10, 2013, с. 4–78.
- [5] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Аналитические, дифференциально-геометрические и алгебраические свойства гладких функций поличисловой переменной // *Гиперболические числа в геометрии и физике*, 2(16), т. 8, 2011, с. 4–53.
- [6] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Некоторые задачи математической физики в поличисловой теории поля // *Гиперболические числа в геометрии и физике*, 2012, 2(18), 9, с. 200–255.
- [7] Balan V. Spectral properties and applications of of numerical multilinear algebra of m -root structures // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 2(10), 5, 2008, 101.
- [8] Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели, М.: Наука, 1977.

GEOMETRY AND PHYSICS OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS IN POLYNUMBERS FIELD THEORY

D.G. Pavlov¹, S.S. Kokarev^{1,2}

¹ *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fрязино, Russia*

² *RSEC Logos, Yaroslavl, Russia*

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

A physical-geometric interpreting of holomorphic functions over polynumber variable for a number of holomorphicity classes is investigated with using tangent construction, developed in [5]. It is shown, that any concrete choice of holomorphic function (polynumber potential) defines some field-theoretical model with background space-time of GR together with tensor fields of a various ranges. The question on local causal structure of pseudo-Riemannian space-time, obtained by tangent construction in Berwald-Moor space, is investigated in general form. It is shown, that the only two causal types of space-times with signature $(+, -, -, -)$ and $(+, +, -, -)$ can be generated by tangent construction. The systems of differential equations, defining polynumber potential for Schwarzschild metric and cosmological FRW-metrics are derived.

Key Words: algebra of polynumber, Berwald-Moor metric, Riemannian metric tangent to Finslerian one, General Relativity (GR), Friedmann-Robertson-Walker (FRW) cosmological metrics, Schwarzschild metric, generalized holomorphic functions over polynumber variable.

НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОМ ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Г.И. Гарасько

ФГУП ВЭИ, Москва, Россия

gri9z@yandex.ru, gri9z.wordpress.com

Рассмотрено движение материальной точки в потенциале Ньютона с особенностью в начале координат при учете расширения пространства-времени. Получено дифференциальное уравнение, описывающее зависимость квадрата орбитальной скорости от расстояния до начала координат, и приближенное решение этого уравнения. При больших расстояниях от начала координат квадрат орбитальной скорости стремится к отличной от нуля величине, зависящей от инкремента расширения пространства-времени.

Ключевые слова: финслерова геометрия, ньютоновский потенциал, расширение пространства-времени

1 Введение

Наблюдаемые в галактиках массы M отклонения от классической зависимости квадрата орбитальной скорости v_φ^2 , вращающихся на периферии галактики вокруг “неподвижного” центра наблюдаемых объектов массы m , от расстояния r до центра описываемые формулой

$$v_\varphi^2 = \frac{kM}{r},$$

где k – гравитационная постоянная, сводятся в основном к тому, что при достаточно больших r квадрат орбитальной скорости v_φ^2 стремится к отличному от нуля асимптотическому значению

$$v_\varphi^2(r) \rightarrow v_{\varphi(\infty)}^2 = \text{const}.$$

За последние годы предложено много гипотетически возможных объяснений такому эффекту. Обзор многочисленных работ по этой тематике и собственные объяснения и теории представлены, например, в статьях [1, 2] и [3].

В данной работе мы рассмотрим задачу движения материальной точки массой m в поле ньютоновского потенциала

$$U(r) = \frac{kMm}{r},$$

где точечная масса $M \gg m$ покоится в начале координат, а r – расстояние от начала координат до движущейся материальной точки массой m , с учетом того, что пространство-время расширяется с инкрементом γ по закону $e^{\gamma t}$. Целью работы является определение зависимости орбитальной скорости $v_\varphi^2(r)$ от радиуса r .

Поясним, что мы понимаем под расширением пространства-времени в нерелятивистской физике и как это расширение пространства-времени приводит к общей диссипации. Запишем вначале не функцию Лагранжа, а метрическую функцию финслерова пространства Галилея для движения нерелятивистской материальной точки в некотором потенциальном поле U [4], [5]:

$$ds = e^{\gamma t} \left\{ mc^2 dt - m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2 dt} + U dt \right\}. \quad (1)$$

Для такой метрической функции индикатриса в касательном пространстве в каждой точке основного пространства с течением времени сжимается по экспоненциальному закону, что приводит к увеличению расстояния между точками основного пространства. Проще всего представлять себе неизменное координатное пространство-время, в каждой точке которого находятся эталоны единицы длины и единицы времени, и эти эталоны сжимаются по экспоненциальному закону. Считая параметром эволюции время, запишем для такой метрической функции функцию Лагранжа и уравнения движения:

$$L = e^{\gamma t} \left\{ m \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} - U \right\}, \quad (2)$$

$$\ddot{\vec{x}} + \gamma \dot{\vec{x}} + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = 0. \quad (3)$$

Таким образом, экспоненциальное растяжение пространства-времени (в указанном выше смысле) приводит к общей диссипации, силе “трения” (сопротивления), направленной против скорости движения, а по величине пропорциональной скорости. Коэффициент “трения” совпадает с инкрементом экспоненциального расширения пространства-времени.

2 Зависимость угловой скорости от радиуса

Считая потенциал сферически симметричным, запишем функцию Лагранжа и уравнения движения в сферических координатах:

$$L = e^{\gamma t} \left\{ m \frac{\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2}{2} - U(r) \right\}, \quad (4)$$

$$m \frac{d}{dt} e^{\gamma t} \dot{r} - e^{\gamma t} \left\{ m \left(r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 + r \dot{\vartheta}^2 \right) - \frac{dU}{dr} \right\} = 0, \quad (5)$$

$$m \frac{d}{dt} e^{\gamma t} r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = 0, \quad (6)$$

$$m \frac{d}{dt} e^{\gamma t} r^2 \dot{\vartheta} - m e^{\gamma t} r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 = 0. \quad (7)$$

Последнее уравнение автоматически удовлетворяется, если $\vartheta \equiv \frac{\pi}{2}$, иначе говоря, если движение происходит в плоскости $\vartheta \equiv \frac{\pi}{2}$. Принимая это упрощение и несколько преобразовывая оставшиеся два уравнения движения, получим

$$\ddot{r} + \gamma \dot{r} - r \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{m} \frac{dU}{dr} = 0, \quad (8)$$

$$e^{\gamma t} r^2 \dot{\varphi} = \mu, \quad (9)$$

где μ – постоянная.

Если $\gamma = 0$, то эта система уравнений разрешает равномерное движение по окружности:

$$\dot{\varphi} = \text{const}, \quad r = \text{const}, \quad v_\varphi \equiv r \cdot \dot{\varphi} = \text{const}, \quad (10)$$

где постоянные связаны соотношением

$$v_\varphi^2 = \frac{r}{m} \frac{dU}{dr}. \quad (11)$$

Если $\gamma \neq 0$, то эта система уравнений не разрешает движение по окружности.

3 НЬЮТОНОВСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

Рассмотрим теперь ньютоновский потенциал:

$$U(r) = -\frac{kmM}{r}, \quad (12)$$

k – гравитационная постоянная, M – покоящаяся масса в начале координат, “создающая” гравитационное поле. Тогда уравнения (8), (9) запишутся следующим образом:

$$\ddot{r} + \gamma\dot{r} - \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{kM}{r^2} = 0, \quad (13)$$

$$e^{\gamma t} r v_\varphi = \mu. \quad (14)$$

Если $\gamma = 0$, то эта система уравнений разрешает равномерное движение по окружности, при выполнении соотношения

$$v_\varphi^2 = \frac{kM}{r}. \quad (15)$$

При $\gamma \neq 0$ в качестве нулевого приближения можно взять $v_\varphi^2(r)$ (15). При этом мы стремимся получить решение $v_\varphi^2(r, \gamma)$, которое бы при $\gamma \rightarrow 0$ переходило бы в $v_\varphi^2(r)$ (15).

Будем считать, что

$$t = t(r), \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(r), \quad (16)$$

а в качестве неизвестной функции выберем

$$\zeta(r) \equiv \ln \left(\left(\frac{r v_\varphi}{\mu} \right)^2 \right). \quad (17)$$

Из уравнения (14) получим

$$t(r) = -\frac{1}{2\gamma} \zeta(r), \quad (18)$$

поэтому

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{1}{2\gamma} \frac{d\zeta}{dr}, \quad \frac{dr}{dt} = -2\gamma \frac{1}{\frac{d\zeta}{dr}}, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = -4\gamma^2 \frac{\frac{d^2 \zeta}{dr^2}}{\left(\frac{d\zeta}{dr} \right)^3}. \quad (19)$$

Тогда при выполнении условия

$$\frac{d\zeta}{dr} \neq 0 \quad (20)$$

уравнение (13) можно записать следующим образом:

$$-4\gamma^2 \frac{\frac{d^2 \zeta}{dr^2}}{\left(\frac{d\zeta}{dr} \right)^3} - 2\gamma^2 \frac{1}{\frac{d\zeta}{dr}} - \frac{\mu^2 e^\zeta}{r^3} + \frac{kM}{r^2} = 0, \quad (21)$$

или

$$4\gamma^2 \frac{d^2 \zeta}{dr^2} + 2\gamma^2 \left(\frac{d\zeta}{dr} \right)^2 + \left(\frac{\mu^2 e^\zeta}{r^3} - \frac{kM}{r^2} \right) \left(\frac{d\zeta}{dr} \right)^3 = 0. \quad (22)$$

Заметим, что это уравнение не изменяется при замене параметра γ на $(-\gamma)$. То есть и при сжатии пространства-времени по экспоненциальному закону с декрементом затухания γ

зависимость $v_\varphi^2(r)$ будет та же самая, что и для расширяющегося пространства-времени, при совпадении граничных и дополнительных условий.

Если $\gamma = 0$, то решением этого уравнения является

$$\zeta = \ln \left(\frac{kMr}{\mu^2} \right) \quad \Rightarrow \quad v_\varphi^2 = \frac{kM}{r}. \quad (23)$$

Будем считать это решение нулевым приближением по малому параметру γ , в этом случае следующее приближение дает

$$\zeta = \ln \frac{kMr + 2\gamma^2 r^4}{\mu^2} \quad \Rightarrow \quad v_\varphi^2 = \frac{kM}{r} + 2\gamma^2 r^2. \quad (24)$$

Для выполнения условия малости добавки следующего приближения необходимо, чтобы выполнялись неравенства:

$$\frac{kM}{r} \gg 2\gamma^2 r^2 \quad \Rightarrow \quad r \ll \left(\frac{kM}{2\gamma^2} \right)^{\frac{1}{3}} \equiv 2^{\frac{2}{3}} \left(\frac{kM}{8\gamma^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (25)$$

Функциональная зависимость квадрата орбитальной скорости от радиуса (24) имеет минимум

$$(v_\varphi^2)_{min} = 6\gamma^2 \left(\frac{kM}{4\gamma^2} \right)^{\frac{2}{3}} \equiv \frac{3}{2^{4/3}} \frac{kM}{\left(\frac{kM}{8\gamma^2} \right)^{\frac{1}{3}}}, \quad (26)$$

в точке r_* :

$$r_* = \left(\frac{kM}{4\gamma^2} \right)^{\frac{1}{3}} \equiv 2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{kM}{8\gamma^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (27)$$

При “больших” r , то есть при

$$r \gg 2^{\frac{2}{3}} \left(\frac{kM}{8\gamma^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (28)$$

уравнение (22) приобретает вид

$$2 \frac{d^2 \zeta}{dr^2} + \left(\frac{d\zeta}{dr} \right)^2 = 0, \quad (29)$$

и его общее решение -

$$\zeta = \ln \frac{(r + \alpha)^2}{\beta^2} \quad \Rightarrow \quad v_\varphi^2 = \eta \frac{(r + \alpha)^2}{r^2}, \quad (30)$$

где α , β и η - постоянные.

Теперь надо сшить два решения (24) и (30). Исходя из требований: монотонного убывания зависимости $v_\varphi(r)$ и гладкости шивки в точке

$$r_j = \left(\frac{kM}{8\gamma^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (31)$$

- получим приближенное решение уравнения (22) во всей области изменения переменной $r \in (0, \infty)$:

$$V^2 = \begin{cases} \frac{1}{R} + \frac{1}{4}R^2, & R < 1; \\ \frac{4}{5} \frac{\left(R + \frac{1}{4} \right)^2}{R^2}, & R \geq 1; \end{cases} \quad (32)$$

где R и V – безразмерные величины:

$$R \equiv \frac{r}{r_j}, \quad V \equiv \frac{v_\varphi}{\sqrt{\frac{kM}{r_j}}}. \quad (33)$$

Зависимость (32) квадрата нормированной орбитальной скорости V^2 материальной точки от нормированного расстояния R до точки нахождения массивного тела изображена на рис. 1.

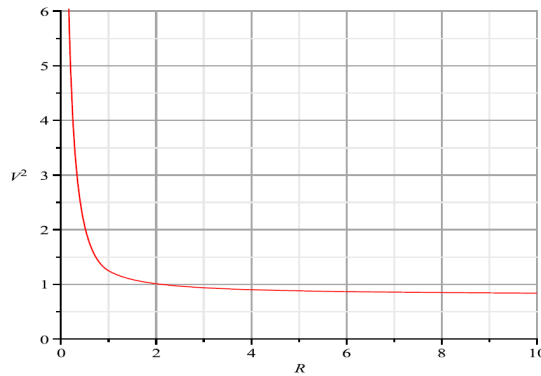


Рис. 1: Зависимость квадрата орбитальной скорости материальной точки от расстояния до покоящейся массы.

В нормированных величинах точка сшивки $R_j = 1$, а асимптотическое значение V_∞^2 при $R \rightarrow \infty$ равно $V_\infty^2 = \frac{4}{5}$, или в размерных величинах:

$$v_{\varphi(\infty)}^2 = \frac{4}{5} \frac{kM}{\left(\frac{kM}{8\gamma^2}\right)^{\frac{1}{3}}}. \quad (34)$$

Из-за того, что точка, где происходит сшивка решений, однозначно не определена и нет граничного условия для $r = \infty$, точность полученного приближенного решения (32) невелика. Сравним, например, величину $v_{\varphi(\infty)}^2$ (34) с $(v_\varphi^2)_{min}$ (26):

$$\frac{v_{\varphi(\infty)}^2}{(v_\varphi^2)_{min}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{2^{4/3}}} = 0,6719578933 \approx 0,7. \quad (35)$$

При выборе вместо r_j (31) точку сшивания $r_J > r_j$ получим асимптотическое значение квадрата орбитальной скорости большее, чем (34). Отношение (35) характеризует возможные отклонения.

4 Заключение

Предложенные рассуждения позволяют несколько иначе взглянуть на проблему движения материальных объектов во «вращающихся» галактиках.

Необходимо досконально изучить уравнение (22) и получить более точное решение во всей области изменения $r \in (0, \infty)$.

Литература

- [1] Сипаров С.В. Теория эффекта нулевого порядка для исследования геометрических свойств пространства-времени // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2006. Том 3, 2(6), стр. 155 – 172.
- [2] Сипаров С.В. Закон гравитации и модель источника в анизотропной геометродинамике // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2009. Том 6, 2(12), стр. 144 – 161.
- [3] Владимиров Ю.С., Ромашка М.Ю. Модифицированная ньютоновская динамика (MOND) и ее возможные интерпретации // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*, 2013. Вып. 1, стр. 64 – 77.
- [4] Рашевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М. – Л., ОГИЗ, 1947.
- [5] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., ТЕТРУ, 2009.

MATERIAL POINT NONRELATIVISTIC MOVEMENT IN SPHERICAL POTENTIAL FIELD IN VIEW OF SPACE-TIME EXPANSION

G.I. Garas'ko

Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia

gri9z@yandex.ru, gri9z.wordpress.com

Movement of material point in Newton potential with singularity in origin of coordinates is considered. Differential equation describing dependence of square of orbital velocity on distance from origin of coordinates is obtained and its approximate solution is presented. In the case of large distance from origin of coordinates, square of orbital velocity go to non-zero value, which depends on space-time expansion increment.

Key Words: Finsler geometry, Newton potential, space-time expansion

ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ

Г.И. Гарасько

ФГУП ВЭИ, Москва, Россия

gri9z@yandex.ru, gri9z.wordpress.com

Если раньше финслерова геометрия претендовала лишь на решение задачи геометризации классической механики, то после формулировки несколько лет назад *принципа самодостаточности финслеровой геометрии* можно говорить о том, что с помощью финслеровой геометрии, по-видимому, может быть решена проблема геометризации физики в целом.

Из принципа самодостаточности финслеровой геометрии получаются уравнения поля, причем гравитационное поле и электромагнитное поле естественным образом объединяются и в псевдоримановом четырехмерном пространстве, и в кривом четырехмерном пространстве Бервальда-Моора; а тензор энергии – импульса, связанный с законами сохранения, получается обычным образом по теореме Э. Нетер.

В приближении малых полей из принципа самодостаточности финслеровой геометрии в первом приближении могут получаться линейные уравнения поля для нескольких независимых полей. При усилении полей, то есть при переходе ко второму и следующим приближениям (или отсутствию приближений по малости полей), полевые уравнения становятся, вообще говоря, нелинейными, и поля перестают быть независимыми, что приводит к невыполнению закона суперпозиции для каждого отдельного поля и к дополнительному взаимодействию между разными полями.

В любом финслеровом пространстве существует поле или поля в этом пространстве можно дополнить полем, которое имеет смысл действия как функции координат и которое аналогично действительной части комплексного потенциала на евклидовой плоскости. Такой потенциал мы предлагаем называть конформным потенциалом, так как он обычно связан с положительным функциональным множителем перед некоторой исходной метрической функцией.

Невырожденные поличисла являются финслеровыми пространствами, интересными сами по себе, а также, возможно, и как пространства, которые будут применимы в физике.

Для любого финслерова пространства можно построить уравнение аналогичное уравнению Шредингера или уравнению Клейна Гордона. То есть финслерова геометрия позволяет и предполагает развитие в кваново-механическую область.

Ключевые слова: финслерова геометрия, финслерово пространство, принцип самодостаточности, теория поля, триединство ОТО, триединство финслеровой геометрии, невырожденные поличисла, конформный потенциал, электромагнитное поле, гравитационное поле.

1 Введение

Финслеровой геометрии не повезло. Созданная как геометризация классической механики, она не вызвала особого интереса у физиков, так как не затрагивала вначале геометризацию классической теории поля, а значит не приводила к глобальной геометризации физики. Это задержало ее (финслеровой геометрии) развитие на многие десятки лет. При этом получение уравнений поля в “кривых” пространствах под влиянием ОТО стали “жестко” связывать с параллельным переносом, ковариантной производной и тензором кривизны, то есть с обязательным дополнением основной геометрии еще и геометрией аффинной связности, или, иначе говоря, погружением основной геометрии в геометрию аффинной связности.

Евклидова геометрия и любая псевдоевклидова геометрия размерности n являются частными случаями финслеровой геометрии точно так же, как римановы и псевдоримановы геометрии.

Если в пространстве x^1, x^2, \dots, x^n расстояние между двумя бесконечно близкими точками $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и $M(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, \dots, x^n + dx^n)$ выражается по формуле

$$ds = L(dx^1, dx^2, \dots, dx^n; x^1, x^2, \dots, x^n),$$

то функцию $L(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n; x^1, x^2, \dots, x^n)$ принято называть метрической.

Финслерова геометрия определяется выбором метрической функции $L(\xi; x)$ при выполнении следующих условий:

1. $L(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n; x^1, x^2, \dots, x^n) > 0$ в каждой точке $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ основного пространства в конусообразной области изменения координат центрального касательного пространства $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ (все векторы этого конуса будут являться измеримыми векторами);
2. метрическая функция должна быть положительно однородной первой степени относительно первых n аргументов;
- 3.

$$\text{rang} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \right) = (n - 1). \quad (1)$$

Из третьего условия вытекает единственность функциональной зависимости

$$\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n; x^1, x^2, \dots, x^n) = 0, \quad (2)$$

где

$$p_i = \frac{\partial L(\xi; x)}{\partial \xi^i} \quad (3)$$

– координаты касательной к индикатрисе гиперплоскости, или в физической терминологии – компоненты обобщенного импульса. Саму функциональную зависимость (2) называют тангенциальным уравнением индикатрисы, точечное уравнение которой имеет вид

$$L(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n; x^1, x^2, \dots, x^n) = 1, \quad (4)$$

а функцию $\Phi(p; x)$ – функцией Финслера. Предполагается, что тангенциальное уравнение записывается таким образом, что в рассматриваемой области производные $\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}$ нигде не обращаются в нуль одновременно. Последнее позволяет записывать для экстремалей в основном пространстве канонические уравнения, не преобразуя тангенциальное уравнение индикатрисы.

В соответствии с выше принятыми соглашениями в финслеровой геометрии существует одна и только одна функциональная зависимость между компонентами p_1, p_2, \dots, p_n обобщенного импульса. Очень часто и математики, и физики забывают о третьем условии (формула (1)) и называют финслеровыми геометрии с метрическими функциями, обладающими первыми двумя свойствами, но не обладающими третьим свойством, что неверно и приводит к путанице.

На некоторых векторах касательного пространства метрическая функция может обращаться в нуль. Будем называть такие векторы *изотропными*. Нулевой вектор не будем относить ни к изотропным векторам, ни к измеримым. Однако, если нулевой вектор понимать как $0 = \varepsilon \xi$, где ξ – измеримый вектор, а действительная положительная переменная

$\varepsilon \rightarrow 0$, то в этом смысле длина нулевого вектора, конечно, всегда определена и равна нулю. Таким образом, в каждой точке основного пространства все множество векторов центраффинного касательного пространства является объединением четырёх не пересекающихся множеств: нулевого вектора, множества изотропных векторов, множества измеримых векторов и множества неизмеримых векторов, для последних длина не может быть определена.

Подчеркнем, что выбор (определение) метрической функции $L(\xi; x)$ включает в себя и задание области её определения, то есть задание в каждой точке основного пространства конической области измеримых векторов, возможно, за исключением некоторых точек, линий, ... или областей основного пространства.

2 Триединство финслеровой геометрии

Псевдориманова четырехмерная геометрия с сигнатурой $(+, -, -, -)$ в ОТО обладает *триединством* – задание метрической функции позволяет:

1. производить все необходимые геометрические вычисления и построения;
2. получать уравнения движения пробной частицы в гравитационном поле;
3. получать уравнения гравитационного поля для метрического тензора.

Именно это триединство поражает и покоряет в созданной А. Эйнштейном ОТО. Такое триединство обычно принято переносить на любые другие римановы и псевдоримановы пространства, а также более общие метрические пространства следующим образом: третий пункт обычно реализуется погружением рассматриваемого пространства тем или иным образом в геометрию аффинной связности, для чего конструируются такие понятия, как: параллельный перенос, ковариантная производная и тензор кривизны.

Для финслеровой геометрии указанное выше триединство существенно (качественно) изменяется в третьем пункте по сравнению с методом ОТО. Оказалось, что уравнения поля для финслеровых пространств можно получать с помощью принципа самодостаточности [2], не погружая финслерову геометрию в геометрию аффинной связности. При этом действием \mathbb{S} для получения полевых уравнений является с точностью до постоянного коэффициента инвариантный объем некоторой области \mathcal{O} финслерова пространства

$$\mathbb{S} = \text{const} \int_{\mathcal{O}}^{(n)} \frac{dx^1 dx^2 \dots dx^n}{(V_{ind})_{ev}}, \tag{5}$$

где V_{ind} – объем, ометаемый единичным вектором касательного пространства, когда он пробегает всю индикатрису, в предположении, что касательное пространство евклидово, а координаты – декартовы прямоугольные.

Таким образом, полевым лагранжианом в финслеровом пространстве является

$$\mathcal{L} = \frac{\text{const}}{(V_{ind})_{ev}}, \tag{6}$$

если действие понимать как

$$\mathbb{S} = \int_{\mathcal{O}}^{(n)} \mathcal{L} \cdot dx^1 dx^2 \dots dx^n. \tag{7}$$

Для римановых и псевдоримановых пространств это приводит к лагранжиану следующего вида:

$$\mathcal{L} = \text{const}' \cdot \sqrt[{}^n]{(-1)^m \det(g_{ij})}, \tag{8}$$

где $(-1)^m$ – знаковый множитель выбирается в зависимости от сигнатуры псевдориманова пространства.

В финслеровой геометрии движение физической системы с конечным числом степеней свобода описывается уравнениями Эйлера – Лагранжа для действия, которое пропорционально длине мировой линии. А эволюция физических полей (физических объектов с бесконечным числом степеней свободы) определяется уравнениями поля, которые получаются на основе действия, равного с точностью до постоянного коэффициента инвариантному объему некоторой области финслерова пространства.

Любая финслерова геометрия обладает *триединством* – задание метрической функции позволяет:

1. производить все необходимые геометрические вычисления и построения;
2. получать уравнения движения пробной частицы в любом поле, совместимом с рассматриваемой финслеровой геометрией;
3. получать уравнения любого поля, совместимого с рассматриваемой финслеровой геометрией.

3 Псевдориманово пространство с сигнатурой $(+, -, -, -)$

Рассмотрим псевдориманово пространство с сигнатурой $(+, -, -, -)$, явно выделив в метрическом тензоре $g_{ij}(x)$ этого пространства метрический тензор $\overset{o}{g}_{ij}$ пространства Минковского,

$$g_{ij}(x) = \overset{o}{g}_{ij} + h_{ij}(x). \quad (9)$$

Будем предполагать, что поле $h_{ij}(x)$ малое, то есть

$$|h_{ij}(x)| < \varepsilon \ll 1. \quad (10)$$

Лагранжиан (6), (8) псевдориманова пространства с сигнатурой $(+, -, -, -)$ равен

$$\mathcal{L} = \text{const} \sqrt{-\det(g_{ij})}. \quad (11)$$

Вычислим величину $[-\det(g_{ij})]$ до членов $|h_{ij}(x)|^2$ включительно:

$$-\det(g_{ij}) \simeq 1 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \quad (12)$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \overset{o}{g}{}^{ij} h_{ij} \equiv h_{00} - h_{11} - h_{22} - h_{33}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & -h_{00}(h_{11} + h_{22} + h_{33}) + \\ & + h_{11}h_{22} + h_{11}h_{33} + h_{22}h_{33} - h_{12}^2 - h_{13}^2 - h_{23}^2 + h_{03}^2 + h_{02}^2 + h_{01}^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда

$$\mathcal{L} \simeq 1 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 + \frac{1}{2} \left[\mathcal{L}_2 - \frac{1}{4} \mathcal{L}_1^2 \right]. \quad (15)$$

Для того, чтобы получить уравнения для малого поля в первом приближении надо использовать лагранжиан \mathcal{L}_1 , а во втором приближении – лагранжиан $(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - \frac{1}{4} \mathcal{L}_1^2)$.

4 Свободное электромагнитное поле и четырехмерное псевдориманово пространство с сигнатурой $(+, -, -, -)$

Для того, чтобы из ковариантного поля $A_i(x)$ построить симметрический дважды ковариантный тензор $h_{ij}(x)$, не прибегая к использованию объектов связности, вспомним, что альтернированная частная производная от один раз ковариантного тензора есть дважды ковариантный антисимметрический тензор:

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}. \quad (16)$$

Построим на основе тензора F_{ij} симметрический тензор. Для этого вначале запишем с точностью до мультипликативной постоянной общепринятый классический лагранжиан свободного электромагнитного поля:

$$\mathcal{L}_A \equiv \overset{o}{g}{}^{ij} \overset{o}{g}{}^{km} F_{ik} F_{jm} = 2 \overset{o}{g}{}^{ij} \overset{o}{g}{}^{km} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \right) \quad (17)$$

– откуда следуют выражения для двух симметрических тензоров

$$h_{ij}^{(1)} = \overset{o}{g}{}^{km} \left(2 \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{\partial A_k}{\partial x^j} \frac{\partial A_i}{\partial x^m} \right), \quad (18)$$

$$h_{ij}^{(2)} = \overset{o}{g}{}^{km} \left(2 \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k} \frac{\partial A_m}{\partial x^i} \right). \quad (19)$$

Пусть в формуле (9)

$$h_{ij} \equiv h_{ij}^{(A_k)} = \text{const}' \left\{ \chi(x) h_{ij}^{(1)} + [1 - \chi(x)] h_{ij}^{(2)} \right\}, \quad (20)$$

где $\chi(x)$ – некоторая скалярная функция. Тогда в первом приближении получим

$$\mathcal{L}_1 = \text{const}' \cdot 2 \overset{o}{g}{}^{ij} \overset{o}{g}{}^{km} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \right) \equiv \mathcal{L}_A, \quad (21)$$

то есть в первом приближении для поля $A_i(x)$ следует выполнение уравнений Максвелла:

$$\overset{o}{g}{}^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} A_k - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\overset{o}{g}{}^{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right) = 0. \quad (22)$$

Если принять лоренцевскую калибровку

$$\overset{o}{g}{}^{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} = 0, \quad (23)$$

то уравнения (22) принимают вид

$$\square A_k = 0. \quad (24)$$

5 Гравитационное и свободное электромагнитное поле в четырехмерном пространстве событий

Любое риманово или псевдориманово пространство можно представить как поверхность [3] размерности n в евклидовом или соответственно псевдоевклидовом пространстве достаточно большой размерности. Из этого следует, что любой метрический тензор четырехмерного псевдориманового пространства представим [3] в виде

$$g_{ij}(x^0, x^1, x^2, x^3) = \sum_{\alpha}^N \varepsilon_{\alpha} \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x^j}, \quad (25)$$

где ε_α – знаковые множители, а $\varphi_\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$ – скалярные функции. Представление (25) не является единственно возможным. Тогда метрический тензор пространства событий, описывающий эволюцию одновременно гравитационного и свободного электромагнитного полей можно представить следующим образом:

$$g_{ij}(x) = \overset{o}{g}_{ij} + \beta \cdot h_{ij}^{(grav)}(x) + \gamma \cdot h_{ij}^{(A_k)}(x). \quad (26)$$

Здесь β и γ – фундаментальные постоянные, тензор $h_{ij}^{(A_k)}(x)$ определяется формулой (20), а тензор $h_{ij}^{(grav)}(x)$ – формулой, по структуре аналогичной формуле (25).

Конечно, совместное сосуществование гравитационного поля, электромагнитного поля и некоторой конкретной финслеровой геометрии не всегда возможно, но для 4-мерного пространства Бервальда – Моора это осуществимо. В этом пространстве в изотропной системе координат элемент длины выражается формулой

$$ds = \sqrt[4]{dy^1 dy^2 dy^3 dy^4} \equiv \sqrt[4]{\overset{o}{g}_{ijkl} dy^i dy^j dy^k dy^l} \quad (27)$$

где

$$\overset{o}{g}_{ijkl} = \frac{1}{24} \begin{cases} 1, & \text{если индексы } i, j, k, l \text{ все разные;} \\ 0, & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases} \quad (28)$$

или в физической системе координат x^0, x^1, x^2, x^3 ,

$$\left. \begin{aligned} y^1 &= x^0 + x^1 + x^2 + x^3, \\ y^2 &= x^0 + x^1 - x^2 - x^3, \\ y^3 &= x^0 - x^1 + x^2 - x^3, \\ y^4 &= x^0 - x^1 - x^2 + x^3, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$ds = \sqrt[4]{\overset{o'}{g}_{ijkl} dx^i dx^j dx^k dx^l}. \quad (30)$$

Тогда метрический тензор “кривого” пространства Бервальда-Моора, описывающий одновременно и гравитационное, и электромагнитное поля имеет вид:

$$g_{ijkl}(x) = \overset{o'}{g}_{ijkl} + \beta \cdot h_{ijkl}^{(grav)}(x) + \gamma \cdot h_{(ijkl)}^{(A_k)}(x), \quad (31)$$

где

$$h_{ijkl} \equiv h_{ijkl}^{(A_k)} = \text{const}' \left\{ \chi(x) h_{ijkl}^{(1)} + [1 - \chi(x)] h_{ijkl}^{(2)} \right\} \quad (32)$$

– тензор, соответствующий электромагнитному полю, а

$$h_{ijkm}^{(1)} = 2 \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{\partial A_k}{\partial x^j} \frac{\partial A_i}{\partial x^m}, \quad (33)$$

$$h_{ijkm}^{(2)} = 2 \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k} \frac{\partial A_m}{\partial x^i}. \quad (34)$$

Тензор $h_{ijkl}^{(grav)}(x)$, отвечающий за гравитационное поле, не будем здесь подробно выписывать. Отметим лишь, что он строится аналогично (25) или более сложным образом так, чтобы быть симметричным по всем четырем индексам.

6 Конформный потенциал

Пусть x^1, x^2, \dots, x^n – финслерово пространство с метрической функцией

$$L(\xi; x) \equiv L(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n; x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (35)$$

где $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ – центроаффинное касательное пространство в точке $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ основного пространства. Тогда элемент длины определяется формулой

$$ds = L(dx^1, dx^2, \dots, dx^n; x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (36)$$

а компоненты обобщенного импульса

$$p_i = \frac{\partial L(dx; x)}{\partial(dx^i)} \quad (37)$$

связаны единственным функциональным соотношением

$$\Phi(p; x) = 0. \quad (38)$$

Тангенциальному уравнению индикатрисы (38) всегда можно придать специальную форму

$$\Phi_m(p; x) - 1 = 0, \quad (39)$$

где $\Phi_m(p; x)$ – однородная функция m -го порядка ($m > 0$) по первым n аргументам. Если функция $S(x)$ определяет в рассматриваемом финслеровом пространстве нормальную конгруэнцию геодезических, то она должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\Phi \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x^n}; x \right) = 0. \quad (40)$$

Функцию $S(x)$ в классической механике называют действием как функцией координат, а уравнение (40) – уравнением Гамильтона-Якоби. Если функция $S(x)$ известна, то поле обобщенных импульсов находится как

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}, \quad (41)$$

а экстремали (траектории движения, мировые линии, линии тока) этой нормальной конгруэнции находятся из системы уравнений

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \Phi(p; x)}{\partial p_i} \Big|_{p_k = \frac{\partial S}{\partial x^k}} \cdot \lambda(x), \quad (42)$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau}$, а τ – параметр вдоль экстремали, параметр эволюции.

Финслерово пространство, конформно связанное с исходным, имеет метрическую функцию вида

$$\tilde{L}(\xi; x) = \kappa(x)L(\xi; x), \quad (43)$$

где $\kappa(x) > 0$ – некая скалярная функция. Элемент длины в таком пространстве определяется формулой

$$d\tilde{s} = \kappa(x)L(dx; x). \quad (44)$$

Обобщенные импульсы

$$\tilde{p}_i = \kappa(x) \frac{\partial L(dx; x)}{\partial(dx^i)} \quad (45)$$

связаны соотношением

$$\Phi_m(\tilde{p}; x) - \kappa^m = 0, \quad (46)$$

то есть функция Финслера конформно связанного пространства определяется следующим образом:

$$\tilde{\Phi}(\tilde{p}; x) = \Phi_m(\tilde{p}; x) - \kappa^m, \quad (47)$$

где $\kappa(x) > 0$ – конформный коэффициент растяжения-сжатия.

Пусть $S_W(x)$ – скалярная функция, тогда в области, где выполняется неравенство

$$\Phi_m \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S_W}{\partial x^n}; x \right) > 0, \quad (48)$$

определена финслерова геометрия, конформно связанная с исходной, и полем коэффициента растяжения-сжатия

$$\kappa(x) = \sqrt[m]{\Phi_m \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S_W}{\partial x^n}; x \right)}, \quad (49)$$

причем в этой же области функция $S_W(x)$ определяет нормальную конгруэнцию геодезических

$$\dot{x}^i = \left. \frac{\partial \Phi_m(\tilde{p}; x)}{\partial \tilde{p}_i} \right|_{\tilde{p}_k = \frac{\partial S_W}{\partial x^k}} \cdot \tilde{\lambda}(x), \quad (50)$$

где $\tilde{\lambda}(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau'}$, а τ' – параметр эволюции. Таким образом, функция $S_W(x)$ является действием как функцией координат в конформно связанном пространстве.

Из принципа самодостаточности финслеровой геометрии следует, что функция S_W не может быть произвольной, а должна удовлетворять некоторому полевому фундаментальному уравнению. Если в исходном пространстве элемент объема имел вид

$$dV = \varrho(x) dx^1 dx^2 \dots dx^n, \quad (51)$$

то лагранжиан, из которого следует фундаментальное уравнение для поля S_W , имеет вид

$$\mathcal{L} = \varrho(x) \kappa^n(x) \equiv \varrho(x) \left[\Phi_m \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S_W}{\partial x^n}; x^1, \dots, x^n \right) \right]^{\frac{n}{m}}, \quad (52)$$

а фундаментальное уравнение соответственно запишется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \varrho(x) \Phi_m^{\frac{n-m}{m}} \frac{\partial \Phi_m}{\partial \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^i} \right)} \right\} = 0. \quad (53)$$

Если в качестве исходного финслерова пространства взять невырожденное поличисловое пространство $P_n \ni X$, то любая компонента произвольной аналитической функции $F(X)$ в нем удовлетворяет фундаментальному уравнению поля (53) для Мировой функции $S_W(x)$. Аналитические функции можно перемножать, брать их линейные комбинации, строить функцию от функции, при этом опять будут получаться аналитическая функция.

Если не оговорено другое, в качестве Мировой функции в невырожденном поличисловом пространстве выступает компонента $U(x^1, \dots, x^n)$ при единице

$$F(X) = U(x) \cdot 1 + V^1(x) \cdot j_1 + \dots + V^{n-1}(x) \cdot j_{n-1} \quad (54)$$

в базисе $1, j_1, \dots, j_{n-1}$, в котором имеет место экспоненциальное представление поличисел, то есть

$$X = |X|e^{\alpha^1 \cdot j_1 + \dots + \alpha^{n-1} \cdot j_{n-1}}, \quad (55)$$

где $|X|$ – модуль поличисла [2].

Конформный потенциал, таким образом построенный с помощью аналитической функции в поличисловом невырожденном пространстве, наиболее близок к понятию комплексного потенциала в теории функций комплексной переменной, поэтому функцию $F(X)$ можно называть гиперкомплексным потенциалом.

7 Примеры фундаментальных уравнений

Пространства, конформно связанные с евклидовыми пространствами

Пространство, конформно связанное с n -мерным евклидовым пространством, обладает элементом длины

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2}, \quad (56)$$

где $\kappa(x) > 0$, а уравнение поля (53) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \frac{\partial S_W}{\partial x^i} \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^n} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}-1} \right\} = 0. \quad (57)$$

Отметим, что для $n > 2$ это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.

Запишем для пространства, конформно связанного с двумерной евклидовой плоскостью (x, y) , уравнение (57),

$$\frac{\partial^2 S_W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_W}{\partial y^2} = 0, \quad (58)$$

то есть функция $S_W(x, y)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа, а значит она является компонентой аналитической функции комплексной переменной.

Пространства, конформно связанные с псевдоевклидовыми пространствами с сигнатурой $(+, -, -, \dots, -)$

Пространство, конформно связанное с n -мерным псевдоевклидовым пространством с сигнатурой $(+, -, -, \dots, -)$, обладает элементом длины

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - \dots - (dx^{n-1})^2}, \quad (59)$$

где $\kappa(x) > 0$, а уравнение поля (53) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \frac{\partial S_W}{\partial x^0} \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1} \right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^{n-1}} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}-1} \right\} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \frac{\partial S_W}{\partial x^\mu} \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^1 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2} \right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^{n-1}} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}-1} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Отметим, что для $n > 2$ это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.

Для пространства, конформно связанного с двумерной псевдоевклидовой плоскостью (x, y) , уравнение (60) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 S_W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_W}{\partial y^2} = 0, \quad (61)$$

то есть в двумерном случае уравнение поля (60) – это волновое уравнение.

Пространства, конформно связанные с пространством Минковского, играют важную роль, поэтому выпишем ряд формул для $n = 4$, используя в них метрический тензор пространства Минковского ${}^o g_{ij}$: связь между функцией $S_W(x)$ и коэффициентом растяжения-сжатия $\kappa(x)$ –

$${}^o g^{ij} \frac{\partial S_W}{\partial x^i} \frac{\partial S_W}{\partial x^j} = \kappa^2(x), \quad (62)$$

лагранжиан –

$$\mathfrak{L} = \left({}^o g^{ij} \frac{\partial S_W}{\partial x^i} \frac{\partial S_W}{\partial x^j} \right)^2, \quad (63)$$

уравнение поля –

$${}^o g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\partial S_W}{\partial x^l} \left({}^o g^{ij} \frac{\partial S_W}{\partial x^i} \frac{\partial S_W}{\partial x^j} \right) \right] = 0 \quad (64)$$

с дополнительным условием

$$\kappa(x) > 0. \quad (65)$$

Пространства, конформно связанные с четырехмерным пространством Бервальда-Моора

Элемент длины в таком пространстве в специальном изотропном базисе имеет вид

$$ds = \kappa(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \sqrt{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}. \quad (66)$$

Соответственно уравнение поля имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^4} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^4} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^4} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^4} \left(\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Любая функция S_W , зависящая не от всех координат $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ удовлетворяет этому уравнению, но не удовлетворяет необходимому условию

$$\kappa(x) > 0. \quad (68)$$

8 Два скалярных поля

Переход от малых к более сильным полям приводит к переходу от линейных уравнений поля для независимых полей к нелинейным уравнениям поля для взаимосвязанных взаимодействующих полей. Покажем это на примере двух скалярных полей $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, “включающих” гравитационное поле в пространстве Минковского.

Пусть метрический тензор (9) псевдориманового пространства с сигнатурой $(+, -, -, -)$ содержит тензор

$$h_{ij} = \varepsilon_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + \varepsilon_\psi \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^j}, \quad (69)$$

где $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\psi$ – независимые знаковые коэффициенты. Тогда точный лагранжиан может быть записан следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\varphi, \psi} = \sqrt{1 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}, \quad (70)$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \overset{\circ}{g}{}^{ij} \left(\varepsilon_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + \varepsilon_\psi \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right), \quad (71)$$

а

$$\mathcal{L}_2 = \varepsilon_\varphi \varepsilon_\psi \left[- \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \frac{\partial \psi}{\partial x^0} \right)^2 + \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \frac{\partial \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \frac{\partial \psi}{\partial x^0} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \frac{\partial \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} \right)^2 \right]. \quad (72)$$

В первом приближении в качестве лагранжиана следует использовать \mathcal{L}_1 , тогда уравнения поля суть система двух независимых волновых уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^3 \partial x^3} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^3 \partial x^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

При этом поля $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ независимы и для каждого из них выполняется закон суперпозиции.

Используя точный лагранжиан (70) для двух скалярных полей, получим систему двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \overset{\circ}{g}{}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \left(1 \pm \overset{\circ}{g}{}^{rs} \frac{\partial \psi}{\partial x^r} \frac{\partial \psi}{\partial x^s} \right) \mp \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \overset{\circ}{g}{}^{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial x^r} \frac{\partial \psi}{\partial x^s}}{\sqrt{1 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}} \right] &= 0, \\ \overset{\circ}{g}{}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x^j} \left(1 + \overset{\circ}{g}{}^{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial x^r} \frac{\partial \varphi}{\partial x^s} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \overset{\circ}{g}{}^{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial x^r} \frac{\partial \psi}{\partial x^s}}{\sqrt{1 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}} \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Теперь уже поля $\varphi(x)$, $\psi(x)$ зависят друг от друга, и принцип суперпозиции для них не выполняется. Переход от уравнений (73) к уравнениям (74) можно рассматривать как переход от малых полей к более сильным полям.

9 Невырожденные поличисла

Рассмотрим некоторую систему невырожденных поличисел P_n [2]. Соответствующее координатное пространство x^1, x^2, \dots, x^n является финслеровым метрическим плоским пространством с элементом длины вида

$$ds = \sqrt[n]{\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n}}, \quad (75)$$

$\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \dots i_n}$ – метрический тензор, не зависящий от точки пространства.

Компоненты обобщенного импульса в геометрии (75) вычисляются по формулам:

$$p_i = \frac{\overset{o}{g}_{i j_2 \dots j_n} dx^{j_2} \dots dx^{j_n}}{\left(\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n} \right)^{\frac{n-1}{n}}}. \quad (76)$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы в пространстве невырожденных поличисел P_n всегда можно записать [2] в виде

$$\overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 \dots i_n} p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_n} - \mu^n = 0, \quad (77)$$

где $\mu > 0$ – некоторая постоянная, причем всегда найдется такое $\mu > 0$ и такой специальный базис (и, вообще говоря, не один), в котором

$$\left(\overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 \dots i_n} \right) = \left(\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \dots i_n} \right). \quad (78)$$

Перейдем к новой финслеровой геометрии на основе пространства невырожденных поличисел P_n , которая (новая геометрия) уже не является плоской, но отличие новой геометрии от исходной бесконечно мало, причем элемент длины в такой геометрии пусть имеет вид

$$ds = \sqrt[n]{\left[\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \dots i_n} + \varepsilon h_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) \right] dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n}}, \quad (79)$$

где ε – бесконечно малая величина. Если в исходном плоском пространстве элемент объема определялся формулой

$$dV = dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n}, \quad (80)$$

то в новом пространстве с точностью до ε в первой степени имеем

$$dV_h \simeq \left[1 + \varepsilon \cdot C_0 \overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 \dots i_n} h_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) \right] dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n}, \quad (81)$$

то есть лагранжиан для малых полей в пространстве с элементом длины (79) в первом приближении по ε суть

$$\mathcal{L}_1 = \text{const} \overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 \dots i_n} h_{i_1 i_2 \dots i_n}(x). \quad (82)$$

Эта формула является обобщением формулы (13).

10 Квантовая механика

В каждом финслеровом пространстве можно записать некое дифференциальное уравнение с частными производными, которое совпадает или аналогично известным уравнениям квантовой механики, например, уравнению Шредингера или уравнению Клейна-Гордона.

В этом смысле каждое финслерово пространство “наделено” квантовой механикой, в которой состояние физической системы может быть описано в координатном представлении функцией координат $\Psi(x^1, x^2, \dots, x^n)$, вообще говоря, комплексной. Будем называть её *волновой функцией*, или *функцией состояния* физической системы. Все физически наблюдаемые величины при переходе к квантовой механике становятся операторами, действующими в пространстве функций состояния. При этом канонически сопряжённые величины переходят в канонически сопряжённые наблюдаемые. Если пространство плоское, обобщённые импульсы p_i в координатном представлении являются операторами вида

$$\hat{p}_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (83)$$

действующими на волновые функции. Координаты как наблюдаемые также являются операторами, причём

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [x^i, x^j] = 0, \quad [\hat{p}_i, x^j] = i\hbar \delta_i^j, \quad (84)$$

где

$$[\hat{a}, \hat{b}] \equiv \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}.$$

Таким образом, скобки Пуассона заменяются коммутаторами. Причём для канонически сопряжённых величин результат умножается на размерный мнимый коэффициент, но при этом надо учитывать зависимость, если таковая имеется, элемента объема от точки пространства. Когда элемент объема в пространстве x^0, x^1, x^2, x^3 имеет вид

$$dV = w^4(x) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3, \quad (85)$$

где $w(x)$ – некоторая функция координат, то

$$p_i \rightarrow \hat{p}_i = i\hbar \frac{1}{w^2} \frac{\partial}{\partial x^i} w^2 \quad \Rightarrow \quad [\hat{p}_i, x^j] = i\hbar \delta_i^j. \quad (86)$$

При таком подходе возникают проблемы с интерпретацией самой волновой функции $\Psi(x)$ и величины $\bar{\Psi}(x)\Psi(x)$. Это связано с тем, что время становится наблюдаемой, даже в нерелятивистских задачах. Тем не менее, на данный момент ряд квантово-механических задач может быть поставлен и решен, например, некоторые задачи на собственные значения.

При переходе от классической механики к квантовой тангенциальное уравнение индикатрисы также качественно видоизменяется: оно будет содержать канонически сопряжённые наблюдаемые, и поэтому его надо понимать следующим образом:

$$\Phi(\hat{p}; x)\Psi(x) = 0. \quad (87)$$

Это линейное уравнение в частных производных в том смысле, что любая линейная комбинация решений опять же является решением уравнения (87). Так как наблюдаемые \hat{p}_i, x^i не коммутируют, даже при заданной (фиксированной) функции Финслера, уравнение (87) может быть записано по-разному. Для нерелятивистской частицы в потенциальном поле уравнение (87) совпадает с уравнением Шредингера, если считать $w(x) \approx const$ в элементе объема (85), что для нерелятивистских квантовых задач вполне приемлемо. Для пространства Минковского уравнение (87) совпадает с уравнение Клейна - Гордона.

В пространстве x^0, x^1, x^2, x^3 , конформно связанном с пространством Минковского, то есть в пространстве с элементом длины

$$dl = \kappa(x) \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}, \quad (88)$$

уравнение (87) принимает вид

$$g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \kappa^2 \Psi = -\frac{\kappa^4}{\hbar^2} \Psi, \quad (89)$$

где $\kappa(x)$ – поле коэффициента растяжения-сжатия.

11 Заключение

Принцип самодостаточности финслеровой геометрии [2], по-видимому, позволяет построить объединенную теорию поля и максимально геометризовать физику. Этот принцип не противоречит ОТО А. Эйнштейна [4], а дополняет и развивает ее, снимая некоторые трудности. Геометрический подход [2] в теории поля, который обычно дает нелинейные не разделяющиеся уравнения поля, для малых полей в первом приближении может приводить к системе независимых линейных уравнений поля. При усилении полей принцип суперпозиции полей нарушается, уравнения поля становятся нелинейными и поля начинают взаимодействовать между собой. Можно считать, что эти изменения уравнений поля при переходе от слабых к более сильным полям происходят за счет двух механизмов: во-первых, качественное изменение уравнений поля для свободных полей; во-вторых, появление дополнительных источников поля.

В рамках геометрического подхода в теории поля происходит естественное объединение электромагнитного и гравитационного полей как в четырехмерном псевдоримановом пространстве с метрическим тензором $g_{ij}(x)$, так и в четырехмерном кривом пространстве Бервальда-Моора с метрическим тензором $g_{ijkl}(x)$. Это говорит о том, что эти качественно различные пространства во многом схожи, а так же о том, что построение объединенной теории поля возможно.

Литература

- [1] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М. – Л., ОГИЗ, 1947.
- [2] Гарасько Г. И., Начала финслеровой геометрии для физиков, М., ТЕТРУ, 2009.
- [3] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ. М., “Наука”, 1967.
- [4] Эйнштейн А., Сущность теории относительности, М., И* Л, 1955.

FINSLER GEOMETRY

G.I. Garas'ko

Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia

gri9z@yandex.ru, gri9z.wordpress.com

If before Finsler geometry pretends only on geometrization of classical mechanics than after formulation of Finsler geometry self-sufficiency principle we can speaking that the geometry pretends on whole physics geometrization.

From that principle follow field theory equations and electromagnetic field and gravitational field naturally unified in four-dimensional pseudo-Riemannian space and in curved Berwald-Moore space. Energy momentum tensor concerned with conservation laws follows from E. Neter theorem.

In weak fields approach from Finsler geometry self-sufficiency principle follows linear field theory equations for several independent fields. In opposite case field equations becomes nonlinear and fields becomes non-independent that leads to superposition principle nonfulfillment.

In any Finsler space exists a field or some fields in that space may be supplemented with field, which make sense of action as function of coordinates and analogous to real part of complex potential on Euclidean plane. We propose name such potential as conformal potential.

Nondegenerate polynumbers are finslerian spaces, which are very interesting itself and possibly may use in physics.

For any finslerian space is possible to build equation analogous to Schrodinger equation or Klein-Gordon equation. This means that the geometry allows further quantum-mechanical development.

Key Words: Finsler geometry, Finsler space, self-sufficiency principle, field theory, nondegenerate polynumbers, conformal potential, electromagnetic field, gravitational field.

DUAL SPACES, PARTICLE SINGULARITIES AND QUARTIC GEOMETRY

Peter Rowlands

University of Liverpool, Liverpool, UK

p.rowlands@liverpool.ac.uk

Relativistic quantum mechanics and the properties of Dirac fermions can be generated in a particularly powerful way using two vector spaces which are commutative to each other and which contain identical information. The apparently broken symmetry between the two spaces observed through the quadratic geometry of ordinary space becomes a perfect and unbroken symmetry in the quartic geometry which defines the single physical quantity through which the two spaces can be combined.

Key Words: dual vector spaces, nilpotent quantum mechanics, vacuum space, fermion singularity, H4 algebra

1 Geometry and physics

Can we construct physics entirely in terms of geometry? This is a highly relevant question in view of the fact that our only way of apprehending Nature is through 3-dimensional space. Nothing else is directly observable. The attempt has been made many times – Cartesian philosophy general relativity, Kaluza-Klein theory, unified field theory, and string and membrane theories are examples - but never with completely satisfactory results. Whatever number of dimensions we add to our space-time structure, and however we contort it, we have to face the fact that the world we observe is 3-dimensional. Clearly something else is there, but we do not observe it. Can we find a geometrical way of constructing it, so that we create a larger geometry which still preserves the 3-dimensional nature of observation?

I am actually going to propose that the world is not 3-dimensional, or constructed from space of any other dimensionality. In fact, it has no structure whatsoever. It is a zero totality. To reconcile this with our view of a 3-dimensional spatial world, we have to imagine a dual 3-dimensional space, which in some subtle way cancels the effect of our observed space. Providing our known 3-dimensional Euclidean space with its dual partner allows us to construct an algebraic geometry which has a remarkable parallels to the one that seems to operate in the real world.

The only insight ever attained into the meaning of 3-dimensionality came with the discovery of quaternions. Here it is associated with anticommutativity. The four quaternion units, i , j , k , 1, follow the well-known multiplication rules:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (1)$$

$$ii = -ji = k \quad (2)$$

$$jk = -kj = i \quad (3)$$

$$ki = -ik = j. \quad (4)$$

If we make our units anticommutative but still associative, we are obliged to fix them at 3.

We can of course complexify quaternions, to create a set of units, (ii) , (ij) , (ik) , i , which are the complexified versions of the quaternion ones. So $(ii) = \mathbf{i}$, $(ij) = \mathbf{j}$, $(ik) = \mathbf{k}$, $(i1) = i$. The units follow the multiplication rules:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{1} \quad (5)$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{ik} \tag{6}$$

$$\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{ji} \tag{7}$$

$$\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{ij}. \tag{8}$$

The units, which are the complexified versions of the quaternion units, have acquired a number of names. They are called multivariate vectors by Hestenes [1], as they have all the properties of ordinary vectors, except that they also have a full (algebraic) product:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{ia} \times \mathbf{b} \tag{9}$$

from which all the rules concerning unit vector multiplication may be derived. They are isomorphic to Pauli matrices. In more general terms, however, they are the units of the Clifford (or geometrical) algebra of 3-dimensional space.

Of course, if we complexify the units of the multivariate or Clifford algebra, we revert to quaternions, so $\mathbf{ii} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ij} = \mathbf{j}$, $\mathbf{ik} = \mathbf{k}$, etc. However, terms like \mathbf{ii} , \mathbf{ij} , \mathbf{ik} are also recognisable as units of pseudovectors or axial vectors (e.g. area, angular momentum) and i is recognisable as a unit pseudoscalar (e.g. volume). All real vectors are of this type. There are no 'ordinary' vectors in nature.

2 A dual vector space

The units \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} define a complete Clifford algebra of 3D space:

\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}	<i>vector</i>		
\mathbf{ii}	\mathbf{ij}	\mathbf{ik}	<i>bivector</i>	<i>pseudovector</i>	<i>quaternion</i>
i			<i>trivector</i>	<i>pseudoscalar</i>	
1			<i>scalar</i>		

where the pseudovectors give us areas and the pseudoscalars volumes.

Let us suppose we have another such algebra, isomorphic with the first:

\mathbf{I}	\mathbf{J}	\mathbf{K}	<i>vector</i>		
\mathbf{iI}	\mathbf{iJ}	\mathbf{iK}	<i>bivector</i>	<i>pseudovector</i>	<i>quaternion</i>
i			<i>trivector</i>	<i>pseudoscalar</i>	
1			<i>scalar</i>		

If we combine these two algebras commutatively in a tensor product, that is, we take the algebraic product of the eight base units, $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, i, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$, we obtain 64 terms, which are + and - versions of:

\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}	\mathbf{ii}	\mathbf{ij}	\mathbf{ik}	i	1
\mathbf{I}	\mathbf{J}	\mathbf{K}	\mathbf{iI}	\mathbf{iJ}	\mathbf{iK}		
\mathbf{iI}	\mathbf{jI}	\mathbf{kI}	\mathbf{iiI}	\mathbf{ijI}	\mathbf{ikI}		
\mathbf{iJ}	\mathbf{jJ}	\mathbf{kJ}	\mathbf{iiJ}	\mathbf{ijJ}	\mathbf{ikJ}		
\mathbf{iK}	\mathbf{jK}	\mathbf{kK}	\mathbf{iiK}	\mathbf{ijK}	\mathbf{ikK}		

This becomes a double vector algebra or a double Clifford algebra of 3D space.

We can also take the algebraic product of the four quaternion units, $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, and the four vector units $i, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, to produce an exactly isomorphic vector quaternion algebra, whose units are + and - versions of:

$$\begin{array}{cccccc}
\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i}\mathbf{i} & \mathbf{i}\mathbf{j} & \mathbf{i}\mathbf{k} & \mathbf{i} & 1 \\
\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i}\mathbf{i} & \mathbf{i}\mathbf{j} & \mathbf{i}\mathbf{k} & & \\
\mathbf{i}\mathbf{i} & \mathbf{j}\mathbf{i} & \mathbf{k}\mathbf{i} & \mathbf{i}\mathbf{i}\mathbf{i} & \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{i} & \mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{i} & & \\
\mathbf{i}\mathbf{j} & \mathbf{j}\mathbf{j} & \mathbf{k}\mathbf{j} & \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{i} & \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{j} & \mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{j} & & \\
\mathbf{i}\mathbf{k} & \mathbf{j}\mathbf{k} & \mathbf{k}\mathbf{k} & \mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{i} & \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} & \mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{k} & &
\end{array}$$

Yet another isomorphic version of the same algebra appears when we take a complexified algebraic product of two commutative sets of quaternion units $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$. This complexified double quaternion algebra has units which are $+$ and $-$ versions of:

$$\begin{array}{cccccc}
\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i}\mathbf{i} & \mathbf{i}\mathbf{j} & \mathbf{i}\mathbf{k} & \mathbf{i} & 1 \\
\mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} & \mathbf{i}\mathbf{I} & \mathbf{i}\mathbf{J} & \mathbf{i}\mathbf{K} & & \\
\mathbf{i}\mathbf{I} & \mathbf{j}\mathbf{I} & \mathbf{k}\mathbf{I} & \mathbf{i}\mathbf{i}\mathbf{I} & \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{I} & \mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{I} & & \\
\mathbf{i}\mathbf{J} & \mathbf{j}\mathbf{J} & \mathbf{k}\mathbf{J} & \mathbf{i}\mathbf{i}\mathbf{J} & \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{J} & \mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{J} & & \\
\mathbf{i}\mathbf{K} & \mathbf{j}\mathbf{K} & \mathbf{k}\mathbf{K} & \mathbf{i}\mathbf{i}\mathbf{K} & \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{K} & \mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{K} & &
\end{array}$$

This dual vector space algebra is of immense physical significance, for it is isomorphic to the gamma algebra of the Dirac equation, which defines the relativistic quantum mechanics of the fermionic state. Though the gamma algebra is usually based on 4×4 matrices, all such matrices can, in fact, be derived from the products of two commuting sets of 2×2 Pauli matrices, say $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ and $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$. This is identical to deriving them from the units of two vector spaces: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ and $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$. Relativistic quantum mechanics, it seems, requires a dual vector space, in addition to the 'doubling' produced by the complex nature of each vector space.

The units also form a group of order 64, with a minimum of 5 generators. The 5 generators of the algebraic group can be matched to the 5 gamma matrices in a number of ways. There are many ways of doing this but the key sets of generators include all the individual units of the two 3-dimensional quantities (vector / quaternion) or two 'spaces' and the overall structure of these sets is always the same. Because 5 is not a truly symmetrical number in nature, the symmetry of one of the two spaces is preserved (here, represented by lower case characters), while that of the other (here, represented by upper case characters) is broken:

$$\begin{array}{llllll}
\gamma_0 = \mathbf{i}\mathbf{k}; & \gamma_1 = \mathbf{i}\mathbf{i}; & \gamma_2 = \mathbf{i}\mathbf{j}; & \gamma_3 = \mathbf{i}\mathbf{k}; & \gamma_5 = \mathbf{i}\mathbf{j}. \\
\gamma_0 = \mathbf{k}; & \gamma_1 = \mathbf{i}\mathbf{i}; & \gamma_2 = \mathbf{i}\mathbf{j}; & \gamma_3 = \mathbf{i}\mathbf{k}; & \gamma_5 = \mathbf{J}.
\end{array}$$

3 The H4 algebra

The 64-part algebra has a subalgebra which is particularly significant for physics, and this creates a symmetry between the two spaces which remains unbroken. The algebra can be constructed using coupled quaternions, with units $1, \mathbf{i}\mathbf{I}, \mathbf{j}\mathbf{J}, \mathbf{k}\mathbf{K}$, to produce a cyclic but commutative algebra with multiplication rules:

$$\mathbf{i}\mathbf{I}\mathbf{i}\mathbf{I} = \mathbf{j}\mathbf{J}\mathbf{j}\mathbf{J} = \mathbf{k}\mathbf{K}\mathbf{k}\mathbf{K} = 1 \quad (10)$$

$$\mathbf{i}\mathbf{I}\mathbf{j}\mathbf{J} = \mathbf{j}\mathbf{J}\mathbf{i}\mathbf{I} = \mathbf{k}\mathbf{K} \quad (11)$$

$$\mathbf{j}\mathbf{J}\mathbf{k}\mathbf{K} = \mathbf{k}\mathbf{K}\mathbf{j}\mathbf{J} = \mathbf{i}\mathbf{I} \quad (12)$$

$$\mathbf{k}\mathbf{K}\mathbf{i}\mathbf{I} = \mathbf{i}\mathbf{I}\mathbf{k}\mathbf{K} = \mathbf{j}\mathbf{J} \quad (13)$$

Again, there are alternative ways of constructing the algebra, one of which uses the negative values of the paired vector units $1, -\mathbf{i}\mathbf{I}, -\mathbf{j}\mathbf{J}, -\mathbf{k}\mathbf{K}$. (1 is equivalent here to $-\mathbf{i}\mathbf{i}$.) This time we have:

$$(-\mathbf{i}\mathbf{I})(-\mathbf{i}\mathbf{I}) = (-\mathbf{j}\mathbf{J})(-\mathbf{j}\mathbf{J}) = (-\mathbf{k}\mathbf{K})(-\mathbf{k}\mathbf{K}) = 1 \quad (14)$$

$$(-\mathbf{iI})(-\mathbf{jJ}) = (-\mathbf{jJ})(-\mathbf{iI}) = (-\mathbf{kK}) \tag{15}$$

$$(-\mathbf{jJ})(-\mathbf{kK}) = (-\mathbf{kK})(-\mathbf{jJ}) = (-\mathbf{iI}) \tag{16}$$

$$(-\mathbf{kK})(-\mathbf{iI}) = (-\mathbf{iI})(-\mathbf{kK}) = (-\mathbf{jJ}) \tag{17}$$

Using the symbols $I = \mathbf{iI} = -\mathbf{iI}$, $J = \mathbf{jJ} = -\mathbf{jJ}$, $K = \mathbf{kK} = -\mathbf{kK}$, 1, to represent the units of the algebra, we can structure the relationships between them in a group table:

*		1	I	J	K
1		1	I	J	K
I		I	1	K	J
J		J	K	1	I
K		K	I	J	1

This can be seen as a representation of the Klein-4 group, the noncyclic group of order 4.

4 Nilpotent quantum mechanics

The double vector algebra allows us to create relativistic quantum mechanics in a particularly efficient and streamlined way [2,3]. We can, for example, begin with Einstein’s energy-momentum conservation equation (with $c = 1$)

$$E^2 - p^2 - m^2 = 0 \tag{18}$$

factorize directly using the algebra, using any of the three isomorphic representations of the units. Here we will use the combination of four quaternion units ($1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) and four multivariate vector units ($i, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$), noting the similarity to Penrose’s twistors, their with four real or norm 1 components and four imaginary or norm $\sqrt{4}$ components [4,5].

The eight base units ($1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, i, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) have a similar structure. There is a significant difference, however, in that the connection between the units of space and time now comes from a quantum rather than a classically relativistic structure. In effect, because of the mediating gamma matrices or algebraic operators, which are different for the space and time components, the space-time connection is now no longer purely 4-vector. Using the vector-quaternion algebra, we now factorize (18) in the form

$$(ikE + \mathbf{iip}_x + \mathbf{ijp}_y + \mathbf{ikp}_z + jm)(ikE + \mathbf{iip}_x + \mathbf{ijp}_y + \mathbf{ikp}_z + jm) = \mathbf{0} \tag{19}$$

or

$$(ikE + \mathbf{ip} + jm)(ikE + \mathbf{ip} + jm) = \mathbf{0}. \tag{20}$$

The object $(ikE + \mathbf{ip} + jm)$ is a nilpotent, a square root of 0. It can be used to produce a powerful form of relativistic quantum mechanics. If we apply a canonical quantization procedure to the first such expression in equation (20), to replace the terms E and \mathbf{p} by the operators $E \rightarrow i\partial/\partial t$, $\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla$ (using units where $\hbar = 1$), and assume that the operators act on the phase factor for a free fermion, $e^{-i(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}$, we immediately obtain the nilpotent Dirac equation for a free fermion:

$$\left(\mp \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial t} \mp i\mathbf{i}\nabla + jm \right) (\pm ikE \pm \mathbf{ip} + jm) e^{-i(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} = \mathbf{0} \tag{21}$$

As Hestenes has shown [1], spin is automatically included when we take \mathbf{p} or ∇ as a multivariate vector through the extra \times term in the full product. This means that we can interchange \mathbf{p} with $\sigma\cdot\mathbf{p}$ and ∇ with $\sigma\cdot\nabla$ in equations such as (20) and (21).

The nilpotent formalism are also derivable from the conventional Dirac equation by pre-multiplication by γ_5 , and conversion of the gamma matrices to algebraic operators. All conventional results are accessible to both representations, but the nilpotent formalisms uncovers additional details which tend to lie hidden in the matrix representation. As usual, The nature of the four simultaneous solutions required for the wavefunction (2 for fermion / antifermion \times 2 for spin up / spin down) is immediately apparent. In the new formalism, we replace the 4×4 matrix differential operator and column vector wavefunction with a row vector operator and a column vector wavefunction, each of which may be represented in abbreviated form by $(\pm i\mathbf{k}E \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$. With choice of sign convention, the four solutions now become:

$$\begin{array}{lll} (i\mathbf{k}E + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) & \text{fermion} & \text{spin up} \\ (i\mathbf{k}E - \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) & \text{fermion} & \text{spin down} \\ (-i\mathbf{k}E + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) & \text{antifermion} & \text{spin down} \\ (-i\mathbf{k}E - \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) & \text{antifermion} & \text{spin up} \end{array}$$

The meaning of the four terms is now apparent. The first term in the column may represent the observed particle state, while the others become the accompanying vacuum states, or states into which the observed particle could transform by respective P , T and C transformations:

$$\begin{array}{lll} P & i(i\mathbf{k}E + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)\mathbf{i} & = (i\mathbf{k}E - \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) \\ T & \mathbf{k}(i\mathbf{k}E + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)\mathbf{k} & = (-i\mathbf{k}E + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) \\ C & -\mathbf{j}(i\mathbf{k}E + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)\mathbf{j} & = (-i\mathbf{k}E - \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) \end{array}$$

If we replace the observed fermion state spin up by any of the others using any of the transformations P , T or C we will simultaneously apply the same transformation to all the others. Since specifying the first term necessarily specifies all the others, it is often convenient to write the 4-component wavefunction as a single term and assume the sign changes follow automatically.

To demonstrate the relation between three additional states on the fermion, the P , T , C transformations, and vacuum we can take $(\pm i\mathbf{k}E \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$ and post-multiply it by the idempotent $\mathbf{k}(\pm i\mathbf{k}E \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$ any number of times. Since the only effect of this operation is to introduce a scalar multiple, which can be normalized away, then the idempotent $\mathbf{k}(\pm i\mathbf{k}E \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$ is clearly acting as a vacuum operator.

$$(\pm i\mathbf{k}E \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)\mathbf{k}(\pm i\mathbf{k}E \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)\mathbf{k}(\pm i\mathbf{k}E \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) \dots \rightarrow (\pm i\mathbf{k}E \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) \quad (22)$$

The same occurs with with $\mathbf{i}(\pm i\mathbf{k}E \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$ and $\mathbf{j}\mathbf{k}(\pm i\mathbf{k}E \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$, the extra vector terms in the first case being absorbed into the scalar multiple and disappearing with alternate multiplications. In effect, $\mathbf{k}(\pm i\mathbf{k}E \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$, $\mathbf{i}(\pm i\mathbf{k}E \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$ and $\mathbf{j}\mathbf{k}(\pm i\mathbf{k}E \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$ can be regarded as vacuum operators, and \mathbf{k} , \mathbf{i} and \mathbf{j} , or, equivalently, \mathbf{K} , \mathbf{I} and \mathbf{J} , as coefficients of a 'vacuum space'.

The most important consequence of adopting the nilpotent form of quantum mechanics, however, is that it produces an extra constraint which carries a wealth of new information about quantum systems, while reducing the information input required to a minimum. For example, an operator of the form $(i\mathbf{k}E + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$ will automatically generate the phase term on which it operates to produce a nilpotent amplitude of the form $(i\mathbf{k}E + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$, or one that squares to zero. This completely eliminates the need for an equation. Only the operator is required. Also, though equation (21) is specified for a free the fermion, the fermion need not be free. The method is equally valid when we incorporate field terms or covariant derivatives into the operator, for example, when we make the replacements $E \rightarrow i\partial/\partial t + e\phi + \dots$, and $\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla + e\mathbf{A} + \dots$. The operator here still retains the overall form $(i\mathbf{k}E + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$, but the phase term is now no longer be $e^{-i(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}$, but whatever is needed to create an amplitude

of the general form $(i\mathbf{k}E + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$, which squares to zero, and the eigenvalues E and \mathbf{p} in the amplitude will be more complicated expressions resulting from the presence of the field terms.

In principle, space and time are completely variable as long as we preserve the conservation principles which define a system. The phase factor determines the extent to which this happens. In the case of a completely free fermion, there is no restriction on spatial position over any time period, and this is reflected in the phase factor $e^{-i(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}$, because there is no restraining conservation principle (except that of charge). As soon as the fermion interacts with another system, however, say another fermion, conservation principles will be invoked (leading to terms added to the space and time differentials) and this will be reflected in a more complicated phase factor, with a more restricted range of spatial variation. The restrictions will increase as more fermions are brought within range of the originally free fermion, and so the range of variation in the phase factor will decrease even further. The classical limit will be reached when it shows virtually no variation with space over time. The nilpotent formalism makes the quantum / classical transition simply a consequence of the number of conservation principles that have to be applied.

Many new results also emerge from the nilpotent formalism. Particularly important are the structures of the three different boson-type states, considered as combinations of an original fermion state with any of the P , T or C transformed ones, the result being a scalar wavefunction.

$$\begin{array}{ll} (\pm i\mathbf{k}E \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)(\mp i\mathbf{k}\mathbf{E} \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) & \text{spin 1 boson} \\ (\pm i\mathbf{k}E \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)(\mp i\mathbf{k}\mathbf{E} \mp \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) & \text{spin 0 boson} \\ (\pm i\mathbf{k}E \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)(\pm i\mathbf{k}\mathbf{E} \mp \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) & \text{fermion-fermion combination} \end{array}$$

Significantly, a spin 1 boson can be massless, but a non-vanishing spin 0 boson must have a mass, as the massless $(\pm i\mathbf{k}E \pm \mathbf{i}\mathbf{p})(\mp i\mathbf{k}\mathbf{E} \mp \mathbf{i}\mathbf{p})$ would immediately become zero. So, massless Goldstone bosons must become massive Higgs bosons in the Higgs mechanism.

In principle, the nilpotent formalism defines the relativistic quantum mechanics for a fermion in any state, subject to any number of interactions, simply by creating an operator of the form $(\pm i\mathbf{k}E \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$, which then uniquely determines the phase factor which will make the amplitude nilpotent.

$$\text{operator acting on phase factor}^2 = \text{amplitude}^2 = 0. \quad (23)$$

This can be accomplished without defining any equation at all.

5 The fermion as singularity

But where does this formalism come from? Space is a nonconserved quantity, and so cannot define on its own a point. Two 'spaces' are the minimum needed to define a particle singularity. While mathematicians may discuss points in ordinary 3-D space, physically they have no meaning, as space is a nonconserved quantity whose units have no definable identity because they have translation and rotation symmetry. In effect, we cannot identify anything in a single space, but identification becomes possible if we have two spaces.

We can here apply a reverse argument from topology. The creation of a particle singularity using its intersection with a dual space can be seen as the creation of a multiply-connected space from a simply-connected space through the insertion of a topological singularity. For fermions, we can describe one of these as real space and the other as the 'vacuum space' which we have previously defined. This space is closely connected with charge and the weak, strong and electric interactions, as well as T , P and c transformations. In this sense, we can say that the fermion always exists in the two spaces from which it is constructed, real space and vacuum space, and the non-classical *zitterbewegung* motion, which Schrodinger found in the solution to

the free-particle Dirac equation, represents the switching between these spaces which makes it possible to define the fermion as creating a point singularity through the intersection of two spaces.

The creation of a singularity using these two spaces determines that they are precisely dual and that each contains the same information as the other, though in a different form as regards observation. But as observers *within* the system, we are forced to 'privilege' one space over the other, to maintain the symmetry of one while losing that of the other. It is similar to the way in which our most primitive form of numbering, binary arithmetic, 'privileges' 1 over $\mathbb{B}\mathbb{F}1$, making them dual in summing to 0, but appearing very different in the way they are perceived from within a system defined by unit 1.

An asymmetry or chirality appears in the fermionic structure because it results from an asymmetric combination of the space of observation with an unobserved dual vacuum space. Perfect symmetry would have been preserved if we had used 6 generators ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$), but this is not the minimum. The minimum number of generators of the combined 64-part algebra is 5, a number intrinsically suggesting asymmetry, and this, as we have seen, requires the symmetry of one space to be broken while the other is preserved:

K	iI iJ iK	iJ
<i>energy</i>	<i>momentum</i>	<i>mass</i>
<i>time</i>	<i>space</i>	<i>proper time</i>

The space, in this formulation, with the unbroken symmetry (represented by lower case characters) is real space, the space of observation. The space with the broken symmetry (represented by upper case characters) is 'vacuum space', and it seems to be the space which combines all the unobservable quantities (specifically, time, mass, charge). The zeroing produced by the nilpotent condition ensures, as we can show, that the information in the two spaces represented by the respective units $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ and $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ is identical. It also defines, in principle, the meaning of a point in either of the two spaces as the norm 0 crossover between them.

Pauli exclusion, a fundamentally nonlocal phenomenon, is an immediate and unavoidable consequence of the fact that, in nilpotent quantum mechanics, the total structure of the universe is exactly zero. A fermion with a wavefunction of the form $\psi_f = (ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$ created from *absolutely nothing* requires the simultaneous existence of a dual 'vacuum' term, $\psi_v = -(ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$, which is its precise negation in both superposition and combination:

$$\psi_f + \psi_v = (ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) - (ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) = \mathbf{0} \tag{24}$$

$$\psi_f\psi_v = -(ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)(ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) = \mathbf{0} \tag{25}$$

In this representation, Pauli exclusion ensures that no two fermions share the same vacuum.

Pauli exclusion is an obvious consequence of nilpotency. But, conventionally, we derive it from the fact that fermion wavefunctions are antisymmetric, so that:

$$(\psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1) = -(\psi_2\psi_1 - \psi_1\psi_2) \tag{26}$$

In nilpotent terms, we write $(\psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1)$ as

$$(\pm ikE_1 \pm \mathbf{i}\mathbf{p}_1 + \mathbf{j}m_1)(\pm ikE_2 \pm \mathbf{i}\mathbf{p}_2 + \mathbf{j}m_2) = \mathbf{4}\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 - \mathbf{4}\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1 = \mathbf{8}\mathbf{i}\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = -\mathbf{8}\mathbf{i} \times \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \tag{27}$$

This result is clearly antisymmetric, but it also has a quite astonishing consequence, for it requires any nilpotent wavefunction to have a \mathbf{p} vector, in *real space*, the one defined by the axes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, at a *different orientation* to any other. The wavefunctions of all nilpotent fermions

then instantaneously correlate because the planes of their \mathbf{p} vector directions must all intersect. This is the *only* source of the *entire* physical information relating to the fermion, for, at the same time, the nilpotent condition requires the iE , \mathbf{p} and m combinations to be unique, and we can visualize this as constituting a unique direction in vacuum space along a set of axes defined by \mathbf{k} , \mathbf{i} , \mathbf{j} or \mathbf{k} , \mathbf{i} , \mathbf{j} , with coordinates defined by the values of iE , \mathbf{p} and m .

Fermion singularity, in this context, can only ever result from spatial duality. The duality has to be made manifest, and specifically in a chiral manner, because the combination of the two spaces produces a chiral result. We see the duality in the characteristic spin $\frac{1}{2}$ which show fermion 'rotation' negotiating 2 spaces through the *zitterbewegung* motion and the chirality in the positive nonzero rest mass which results from this. This chirality is necessarily the same as that produced by that produced by the chirality of vacuum space in the Higgs mechanism. Berry phase in any of its manifestations (Aharonov-Bohm effect, Jahn-Teller effect, quantum Hall effect, Cooper pairing, etc.) [6] and can be seen as a consequence, or even an expression, of the singularity of the fermion state, leading to a topology with an extra twist, equivalent to spin $\frac{1}{2}$. The pole in the fermion propagator occurs at the precise 'boundary' between the two spaces, respectively characterised by positive and negative energies, ($+ E$) and vacuum space ($- E$), or forward and reverse times, ($+ t$) and ($- t$), the very combination which makes the singularity possible. The combination of two spaces becomes the same thing as the actual creation of point charges, the charges, in their extended form as sources of all gauge interactions [2], being a manifestation of the 'directions' of the vacuum space. Ultimately, through *zitterbewegung* and the Higgs mechanism, point charges are also the only source of invariant ('rest') mass, and, in the combined spaces, of relativistic quantization.

6 The nilpotent condition

So, what is the origin of this other space? Clifford algebra, significantly, has 3 subalgebras, which we can describe as scalar, complex and quaternion, or scalar, trivector and bivector. Each of these is an algebra in its own right, and it is difficult to see why only the full Clifford algebra should have a physical meaning. In fact, previous work suggests that all of the subalgebras have physical meanings on the same level as Clifford algebra, and that they represent the respective physical concepts of mass, time and charge [2,7]. That is, besides the vector algebra of space, we have three independent algebras which have a physical representation on the same level as space. If we combine these the three physical concepts as representing everything that is excluded from space as represented by \mathbf{I} , \mathbf{J} , \mathbf{K} , then the total structure is equivalent to a single vector space represented by these units, but *without anything which directly corresponds to them*:

charge	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}	bivector	pseudovector	quaternion
time	i			trivector	pseudoscalar	
mass	1			scalar		

Of course, when we refer here to 'charge', we mean the quantity that is the source of the electric, strong and weak gauge fields *before* the symmetry-breaking which will result from the 'compactification' of the units into the minimum number of group generators, a kind of 'grand unified' value.

The space represented by \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} or \mathbf{I} , \mathbf{J} , \mathbf{K} is then never observed directly, because it is a mathematical composite, not a physical quantity. In addition to its effect in generating the new combined quantized quantities of energy, momentum and rest mass, we can also see that the symmetry breaking between the units of the 'vacuum' space can be seen as generating the symmetry breaking that is observed in the units of weak, strong and electric charge, which are respectively associated with pseudoscalar, vector and scalar quantities, and the $SU(2)$, $SU(3)$ and $U(1)$ group symmetries which are ultimately derived from them: [2]

<i>ik</i>	<i>ii ij ik</i>	<i>lj</i>
K	iIi iJj iIk	iJ
<i>energy</i>	<i>momentum</i>	<i>mass</i>
<i>weak charge</i>	<i>strong charge</i>	<i>electric charge</i>
<i>SU(2)</i>	<i>SU(3)</i>	<i>U(1)</i>

We can even see how the Clifford algebra extends to 10 dimensions of the kind required by string theory (5 for energy, momentum and mass and 5 for charge), with 6 fixed or compactified (that is, all except energy and momentum) [2].

7 The physical significance of the H4 algebra

Besides the algebraic properties defined by their units, which may be described as real (norm 1) / imaginary (norm 1), and commutative (1D) / anticommutative (3D), the conserved and nonconserved natures of charge and space are related to the way they are combined in the 5 group generators creating the norm 0 overall structure, while the corresponding natures of mass and time are related to the fact that quantities with their algebraic characteristics are needed to complete the quaternion and vector properties of charge and space [2,7].

Work done over the last decade suggests that we should we take mass, time, charge and space as successive descriptions of the universe generated by a 'universal rewrite system', with their four commutative algebras existing as a simultaneous description [2,8,9]. The first two of these are scalar and complex, so the description reduces to a combination of scalar, complex and quaternion acting as though it were a vector space, together with another vector space. The combination, which we have called 'vacuum space', remains unobservable because it is not physical. However, the breaking of the symmetry of this 'space' which occurs when we create the 5 generators of the algebra becomes the ultimate source of the breaking of symmetry between the physical interactions.

In fact, this, along with previous work [2,7,10,12] suggests that the fundamental parameters mass, time, charge and space have a fundamental relationship (before combination) which can be identified as a Klein-4 symmetry:

mass	real (norm +1)	commutative	conserved
time	imaginary (norm -1)	commutative	nonconserved
charge	imaginary (norm -1)	anticommutative (3D))	conserved
space	real (norm +1)	anticommutative (3D)	nonconserved

This symmetry, as we have seen, is the same as that of the H4 double algebra in which the two spaces have equal status, and we can equally arrange the parameters mass (M), time (T), charge (C) and space (S) in equivalent tables reflecting this algebra, for example:

*		M	T	C	S
M		M	T	C	S
T		T	M	S	C
C		C	S	M	T
S		S	T	C	M

Similar considerations could be applied to identity and the *T*, *P* and *C* transformations, as these are related to the respective properties of mass, time, charge and space. Their fundamental algebraic units, which are respectively scalar, pseudoscalar, quaternion and vector, also have a Klein-4 symmetry when expressed as the Clifford algebra equivalents scalar, trivector, bivector and vector (where the last two are taken over a resultant dimension).

8 Defining a dual space spinor

Though the double quadratic nature of the parameters is manifested in these structures, we can, in fact, also relate this characteristic, as manifested in the spin property of point particles, to a quartic geometry which preserves the exact equivalence of the two spaces. One way of generating the four solutions for the wavefunction, say ψ , required by the Dirac equation is to multiply it by a 4-spinor, a summation of 4 terms which adds to 1. The four terms in the wavefunction then become ψ multiplied each of the 4 terms in the spinor, with individual terms in the spinor used as projection operators to project out individual states: fermion / antifermion and spin up / down. In the nilpotent formalism, spinors are not directly necessary because the terms are already projected, but the formalism can be set up in such a way that spinors can be used. The way which seems to be most convenient is to use both pre- and post-multiplication of ψ , as with the C, P, T operators.

A 4-spinor requires a set of primitive idempotents which add up to 1, and are orthogonal, with products between them being 0. In nilpotent quantum mechanics, we can define such idempotents in terms of the H4 algebra, constructed from the dual vector spaces:

$$\begin{aligned} & (1 - \mathbf{iI} - \mathbf{jJ} - \mathbf{kK})/4 \\ & (1 - \mathbf{iI} + \mathbf{jJ} + \mathbf{kK})/4 \\ & (1 + \mathbf{iI} - \mathbf{jJ} + \mathbf{kK})/4 \\ & (1 + \mathbf{iI} + \mathbf{jJ} - \mathbf{kK})/4 \end{aligned}$$

Here, we see immediately that the 4 terms add up to 1, and that they are orthogonal as well as idempotent.

We can generate the same terms using coupled quaternions rather than vectors:

$$\begin{aligned} & (1 + \mathbf{iI} + \mathbf{jJ} + \mathbf{iI})/4 \\ & (1 + \mathbf{iI} - \mathbf{jJ} - \mathbf{iI})/4 \\ & (1 - \mathbf{iI} + \mathbf{jJ} - \mathbf{iI})/4 \\ & (1 - \mathbf{iI} - \mathbf{jJ} + \mathbf{iI})/4 \end{aligned}$$

Though the 'spaces' in these structures are completely dual, since the corresponding units from the two spaces are always paired, the system is nevertheless unavoidably chiral, as the signs cannot be completely reversed. We can only reverse any two of them. For example:

$$\begin{aligned} & (1 + \mathbf{iI} - \mathbf{jJ} + \mathbf{kK})/4 \\ & (1 + \mathbf{iI} + \mathbf{jJ} - \mathbf{kK})/4 \\ & (1 - \mathbf{iI} - \mathbf{jJ} - \mathbf{kK})/4 \\ & (1 - \mathbf{iI} + \mathbf{jJ} + \mathbf{kK})/4 \end{aligned}$$

The full 'spinor' form of the nilpotent wavefunction can be recovered by pre- and post-multiplying a 'pre-spinor' form of the nilpotent either by the original set of double vector spinors, or the set with signs reversed. A typical result would be:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\mathbf{k}\mathbf{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\mathbf{i}\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\mathbf{j}\mathbf{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\mathbf{k}E + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m \\ i\mathbf{k}E + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m \\ i\mathbf{k}E + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m \\ i\mathbf{k}E + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\mathbf{k}\mathbf{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\mathbf{i}\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\mathbf{j}\mathbf{j} \end{pmatrix} \\ & = \left((i\mathbf{k}E + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) \quad (i\mathbf{k}E - \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) \quad (-i\mathbf{k}E + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) \quad (-i\mathbf{k}E - \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) \right) \end{aligned} \tag{28}$$

Here, the chirality is assigned to the mass term.

The spinor structures we have generated have the exact form of the components of the two forms of the Berwald-Moor metric, a structure in a quartic space:

$$(t - x - y - z)(t - x + y + z)(t + x - y + z)(t + x - y + z) \quad (29)$$

$$(t + x + y + z)(t + x - y - z)(t - x + y - z)(t - x - y + z) \quad (30)$$

The quartic Berwald-Moor metric can be seen as an expression of the fundamentally rotationally quartic nature of the underlying algebra. Multiplication of the units of the algebra produces rotations in the spaces and generates identity after a complete cycle. Multiplication of the spin metric, producing a zero product, shows that it describes a singularity. The perfect duality between the two component spaces manifested in the spinor structure (which ultimately conveys all the information in a fermionic system) means that, in principle, we could restructure physical equations to locate the singularity in real space, rather than spinor (or vacuum) space.

The generation of a quartic space from two quadratic ones is related to the fact that the spinor structure ultimately comes from 4×4 matrices which are themselves products two sets of 2×2 matrices, each of which are isomorphic to the units of the usual quadratic vector spaces. In the case of the primitive idempotent spinors, multiplying the 4 components in any order will always produce a zero product, in effect defining a singularity in 'spinor space'. This singularity is identifiable as the one produced by applying the nilpotent condition, which, as we have seen, distorts the vacuum (or spinor) space.

The significance of the H4 algebra and the Klein-4 group can be seen from their many manifestations at a fundamental level in physics. Another one may be seen in their general relevance to the creation of an information structure in any self-organizing system, of which the fermion is a classic example [12]. Many people have been interested in creating a picture of the physical world in terms of cellular automata. Here, we imagine a 3-dimensional grid of cells which are either occupied or unoccupied, with the state of occupation being determined according to a number of fixed rules. In a quantum mechanical world, however, composed of point-like particles, the cell size would have to be reduced to infinitesimal size, and there would be an infinite number of possible cells in any given space. The key fact here is that long-lived correlation in cellular automata can only be accomplished through the Klein-4 group, exactly as we have accomplished using the spin property of fermions.

9 Conclusion

While many people have thought that a redefinition of space might lead to a description of physics in terms of a single concept, a system constructed from dual vector spaces, each of which is commutative to the other, can be used immediately to construct relativistic quantum mechanics and a description of the fermion state with the required properties. Examination of the structure reveals that the two spaces contain identical information. The apparently broken symmetry between the two spaces observed through the quadratic geometry of ordinary space becomes a perfect and unbroken symmetry in the quartic geometry which defines the single physical quantity through which the two spaces can be combined. The symmetry appears broken to the observer using the quadratic geometry of ordinary space because the underlying group structure requires 5 generators, which automatically leads to a broken symmetry. However, the spin structure that connects the two spaces can be described by a quartic geometry which manifests a perfect and unbroken symmetry between the two component spaces. The Klein-4 group appears to be the symmetry which is most significant at the fundamental level, and its equivalent significance in the theory of cellular automata hints at another way in which the overall structure could be made manifest.

References

- [1] Hestenes D. *Space-Time Algebras*. Gordon and Breach, New York, 1966.
- [2] Rowlands P. *Zero to Infinity: The Foundations of Physics*, World Scientific, Singapore and Hackensack, NJ, 2007.
- [3] Rowlands P. Physical interpretations of nilpotent quantum mechanics, arXiv: 1004.1523, 2010.
- [4] Penrose R. Twistor quantization and the curvature of spacetime // *Int J Theor. Phys*, 1968, 1, 61–99.
- [5] Penrose R. *The Road to Reality*. Jonathan Cape, London, 2004.
- [6] Berry M.V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes // *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1984, 392 45–57.
- [7] Rowlands P. The fundamental parameters of physics // *Speculat Sci Tech*, 1983, 6, 69–80.
- [8] Rowlands P., Diaz B. A universal alphabet and rewrite system, arXiv:cs.OH/0209026, 2002.
- [9] Diaz B., Rowlands P. A computational path to the nilpotent Dirac equation // *Int J Comp Anticip Syst*, 2005, 16, 203–18.
- [10] Rowlands P. A foundational approach to physics, arXiv:physics/0106054 (2001)
- [11] Rowlands P. Are there alternatives to our present theories of physical reality?, arXiv:0912.3433, 2009.
- [12] Marcer P., Rowlands P. The 'logic' of self-organizing systems, AAAI Technical Reports 2010-08-020, 2010.

ДУАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, СИНГУЛЯРНОСТИ ЧАСТИЦ И ГЕОМЕТРИИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Питер Роуландс

Университет Ливерпуля, Ливерпуль, ЮК

p.rowlands@liverpool.ac.uk

Релятивистская квантовая механика и свойства фермионов Дирака могут быть получены с использованием коммутирующих между собой идентичных 2-векторных пространств. Очевидное нарушение симметрии между этими двумя пространствами, наблюдаемое через геометрию обычного пространства, становится совершенно симметричным в геометрии четвертого порядка, которая определяет единичную физическую величину через которую эти два пространства могут комбинироваться.

Ключевые слова: дуальное векторное пространство, нильпотентная квантовая механика, вакуумное пространство, фермионная сингулярность, N_4 -алгебра.

PHYSICAL FINSLER COORDINATES FOR CLASSICAL MOTION

Howard E. Brandt¹

U.S. Army Research Laboratory, Adelphi, USA

howard.e.brandt.civ@mail.mil

It was argued in earlier work that the four-velocity of a measured quantum particle excitation of a Finslerian quantum field in the tangent space manifold of spacetime is not a suitable Finsler coordinate, whereas the four velocity of the measuring device relative to the vacuum is a suitable Finsler coordinate. Furthermore, in the present work, it is argued that the physical Finsler coordinate for describing the classical motion of a macroscopic object is the four-velocity of the classical object, which in effect acts as a measuring device measuring the characteristics of the metric field. Specifically, geodesic motion of a macroscopic object in a Finslerian spacetime is considered, where the appropriate physical Finsler coordinate is the four-velocity of the object undergoing geodesic motion. It is also claimed that for a macroscopic object, such as a macroscopic measuring device, consisting of more than Avogadro's number of atoms, any supposed quantum state is negligibly small, so that for all practical purposes the object is best described by classical mechanics. It is argued that this and the above follow from a reasonable upper bound on physically possible proper acceleration.

Key Words: Finslerian spacetime, Finsler coordinates, spacetime tangent bundle, maximal proper acceleration, geodesics, quantum-classical boundary, Avogadro's number.

1 Introduction

It was argued in earlier work that physically meaningful coordinates of a point in the tangent bundle of spacetime are the spacetime coordinates and the four-velocity coordinates of the measuring device relative to the vacuum [1,2]. In the one case considered earlier, the moving device detected a relativistic vacuum particle excitation of a Finslerian quantum field. It was argued that the four-velocity of a measuring device is the physical Finsler coordinate, whereas the four-velocity of the measured quantum particle is not. The four-velocity of a measured quantum particle excitation of a Finslerian quantum field in the tangent space manifold of spacetime is not a suitable Finsler coordinate. This is related to the fact that, because of the quantum uncertainty principle, the particle velocity at a point in spacetime is intrinsically unknown.

In the present work, I argue that the physical Finsler coordinate for describing the classical motion of a macroscopic object is the four-velocity of the classical object with respect to the metric field. The object effectively acts as a measuring device measuring the metric field. In the case of standard classical electrodynamics, for example, the Lorentz force depends explicitly on the four-velocity of a classical charged particle with respect to the electromagnetic field and can serve as a measuring device in which its motion is effectively a measure of the strength of the electromagnetic field acting on the classical particle. Also, in the case of the classical Vlasov equation, including a gravitational field, the Finsler coordinates are the four-velocities of the classical particles in the Vlasov distribution of particles moving in spacetime, and the Vlasov distribution effectively measures the spacetime metric field [3], [4].

In the present work, I consider geodesic motion of a macroscopic object in a Finsler-spacetime tangent bundle, incorporating the constraint of a limiting proper acceleration [5],

¹Dedicated to the distinguished Finsler geometer, Prof. Dr. Lajos Tamassy, on his 90th birthday

in which the appropriate physical Finsler coordinate is the four-velocity of the object undergoing geodesic motion. The motion of the classical object effectively measures the presence of the spacetime metric field because, in the absence of non-gravitational forces, the motion of classical objects is determined by the spacetime metric through its appearance in the geodesic equation of motion [6]. It is significant to note that because the spacetime metric depends on the Finsler coordinate, the restriction of the four-velocity to the four-velocity shell may require, in general, a multi-sheeted structure [7].

It is also argued, on the basis of the Finsler coordinate and the associated maximal proper acceleration, that for macroscopic objects (including measuring devices) consisting of more than Avogadro's number of atoms, any supposed quantum state of the object is negligibly small, so that, for all practical purposes, the object is best described by classical relativistic mechanics.

2 Classical particle geodesic motion

Classical particle geodesic motion in the tangent bundle of spacetime with the constraint of a limiting proper acceleration was expounded in earlier work [6]. In the simple case of a Riemannian-spacetime base manifold, it was argued that the natural lift of a classical particle geodesic in spacetime is also geodesic in the tangent bundle of spacetime. In this case the geodesic motion in the tangent bundle of spacetime is given generally by [6]:

$$\frac{D^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \frac{c^4}{a_0^2} v^\lambda R_{\alpha\lambda\beta}{}^\mu \frac{Dv^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} = 0, \quad (1)$$

and

$$\frac{D^2 v^\mu}{d\sigma^2} = 0, \quad (2)$$

in which D denotes a covariant differential, $d\sigma$ is the invariant infinitesimal path length along the particle trajectory in the spacetime tangent bundle, namely,

$$d\sigma^2 = \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) ds^2, \quad (3)$$

where ds is the ordinary spacetime line element, a is the proper acceleration of the classical particle, a_0 is the limiting proper acceleration [8], c is the speed of light in vacuum, and $R^\alpha{}_{\lambda\mu\nu}$ is the spacetime curvature tensor. Here, it is to be emphasized that v^μ in Eqs. (1) and (2) is the Finsler coordinate, namely, the four-velocity of the classical particle relative to the frame in which the metric field is defined. It is reasonable to interpret the classical particle as a measuring device whose motion effectively measures the strength of the metric field as it appears in the curvature and connection. Thus v^μ is effectively the four-velocity of the measuring device, namely, if x^μ denotes the spacetime coordinates of the device, then

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}, \quad (4)$$

as was also the case in the analysis of quantum fields in the tangent bundle of spacetime [1], [2]. Also noteworthy is that the Finsler coordinate v^μ must lie on the four-velocity shell, namely, for spacetime metric $g_{\mu\nu}$, one requires [7]

$$g_{\mu\nu}(x, v)v^\mu v^\nu = 1, \quad (5)$$

which implies the possibility in a general Finslerian spacetime tangent bundle of a multi-sheeted structure consisting of multiple distributions in the fiber, associated with the respective roots of Eq. (5). Multivaluedness of the Finsler coordinate evidently corresponds to different possible

trajectories of the measuring device in four-velocity space. These correspond to trajectories of the measuring device on different sections of the bundle. Any measuring device lies at any instant not only in the neighborhood of a single point in spacetime but also in the neighborhood of a single point in four-velocity space. If the base manifold is Riemannian, this multivaluedness is not an issue because in this case, the spacetime metric is independent of the four-velocity coordinates.

In a canonical pure gravitational field, according to general relativity, one has in Riemannian spacetime the standard geodesic equation with vanishing four-acceleration in the absence of non-gravitational forces,

$$\frac{Dv^\mu}{ds} = \frac{dv^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = 0, \quad (6)$$

where $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ is the Riemannian Levi-Civita connection. In this case the proper acceleration is vanishing, as it is in general relativity in the absence of non-gravitational forces, namely,

$$a^2 = -c^4 g_{\mu\nu} \frac{Dv^\mu}{ds} \frac{Dv^\nu}{ds} = 0, \quad (7)$$

and according to Eq. (3), the bundle line element collapses to the ordinary spacetime line element,

$$d\sigma^2 = \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) ds^2 = ds^2, \quad (8)$$

or

$$\frac{d\sigma}{ds} = 1 \quad (9)$$

for the spacetime geodesic, Eq. (6). It then follows from Eqs. (9) and (6) that

$$\frac{Dv^\mu}{d\sigma} = \frac{Dv^\mu}{ds} = 0 \quad (10)$$

for the geodesic lift. Substituting Eqs. (10) and (4) in Eqs. (1)-(2), it follows that the geodesic natural lift trivially satisfies

$$\frac{Dv^\mu}{ds} + \frac{c^4}{a_0^2} R_{\alpha\lambda\beta}{}^\mu v^\lambda v^\beta \frac{Dv^\alpha}{ds} = 0, \quad (11)$$

and

$$\frac{D^2 v^\mu}{ds^2} = 0. \quad (12)$$

Thus according to Eq. (10), it follows that Eqs. (11) and (12), are both satisfied for a spacetime geodesic. One concludes that if the spacetime is Riemannian, then the natural lift of a spacetime geodesic, representing the path of the measuring device, is also a geodesic in the spacetime tangent bundle. However it is important to note that for non-Riemannian spacetimes (e.g. Finsler spacetime), any relation between geodesics in the bundle and in spacetime will generally be very complex.

The role of the Finsler coordinate as the four-velocity of a measuring device was also manifest in an earlier analysis of the intrinsic redshift of star light as measured at large distances, resulting from enforcing the constraint of a limiting proper acceleration, leading to a perturbed Schwarzschild solution for the metric outside a star [9], [7].

From the above, one can conclude that a measuring device for measuring both quantum and classical fields is generally a macroscopic object. In the following it is argued by means of a simplified quantum field theoretical model that a macroscopic object, such as a measuring device, is well described by classical mechanics, as is the case in the standard quantum mechanics of measurement in which the measuring device is treated as a classical macroscopic device [11].

3 The quantum-classical boundary

There is no generally accepted theory of why the world of macroscopic objects is not usefully described in terms of quantum states. For example, a planet is never observed to be in a quantum superposition state. It has however been speculated that for the description of classical macroscopic many-body systems of sufficient complexity, quantified by the number of atoms of which it is composed, quantum mechanics can be replaced by classical mechanics. (Of course for a highly correlated mesoscopic system such as a Bose condensate, which consists of a single quantum state, a quantum description is needed. Also, quantum mechanics is clearly needed to understand the atomic and molecular structure of macroscopic objects) It is here to be shown that for macroscopic objects consisting of more than Avogadro's number of atoms, any supposed quantum state of the object as a whole is negligibly small, so that for all practical purposes the system is best described by classical mechanics. This follows from the physics-based upper bound on physically possible proper acceleration [8–10].

A possible implication of the limiting proper acceleration a_0 is that for a free particle with four-momentum p^μ and for a measuring device with spacetime coordinates x^μ and four-velocity coordinates v^μ with respect to a particle excitation in flat Minkowski spacetime, the quantum state is given by [12–14]

$$\psi(x, v) = \langle 0 | \phi(x, v) | p \rangle, \quad (13)$$

in which $|0\rangle$ is the vacuum state, $|p\rangle$ is the state of the particle with four-momentum p^μ , and the scalar quantum field associated with the particle is given by

$$\begin{aligned} \phi(x, v) = 2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2} (2p^0 N)^{1/2}} & \left[e^{-ipx/\hbar} e^{-\rho_0 pv/\hbar} \theta(\rho_0 pv/\hbar) a(\mathbf{p}) \right. \\ & \left. + e^{ipx/\hbar} e^{\rho_0 pv/\hbar} \theta(-\rho_0 pv/\hbar) a^\dagger(\mathbf{p}) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Here θ is the Heaviside step function; \hbar is Planck's constant divided by 2π ; N is a normalization constant; $a^\dagger(\mathbf{p})$ and $a(\mathbf{p})$ are particle creation and annihilation operators for the spatial component of four-momentum \mathbf{p} , and ρ_0 is of the order of the Planck length, namely,

$$\rho_0 = \frac{c^2}{a_0}, \quad (15)$$

in which c is the speed of light in vacuum, and the limiting proper acceleration a_0 is given by

$$a_0 = 2\pi\alpha \left(\frac{c^7}{\hbar G} \right)^{1/2}, \quad (16)$$

where α is a number of order unity, and G is the universal gravitational constant. One notes that in the mathematical limit of infinite maximal proper acceleration a_0 , one has vanishing ρ_0 , and Eq. (14) reduces to the same form as a canonical Lorentz-invariant scalar quantum field (as it must).

It can be shown that both the positive and negative frequency terms in Eq. (14) and appearing in the quantum state Eq. (13) are proportional to [6, 14, 15]

$$\exp(-\rho_0 |pv|/\hbar) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi\alpha} \frac{\gamma m}{m_{Pl}} \left\{ \left(1 + \left| \frac{\vec{p}}{mc} \right|^2 \right)^{1/2} - \frac{\vec{p} \cdot d\vec{x}/dt}{mc^2} \right\} \right], \quad (17)$$

where m is the rest mass of the quantum particle, m_{Pl} is the Planck mass, and

$$\gamma = \left(1 - \left| \frac{d\vec{x}/dt}{c} \right|^2 \right)^{-1/2}, \quad (18)$$

where $d\vec{x}/dt$ is the spatial component of the four-velocity of the measuring device relative to the particle. For velocities of the measuring device much less than the velocity of light, and for particles masses much less than the Planck mass, Eq. (17) is for all practical purposes unity because ρ_0 is so small (of the order of the Planck length).

From Eqs. (13)–(18), it follows that the quantum state, in the case in which the measuring device is at rest with respect to a particle excitation from the vacuum is given by

$$\psi(x, d\vec{x}/dt = 0) = A \exp \left(-\frac{1}{2\pi\alpha} \frac{m}{m_{Pl}} \left(1 + \left| \frac{\vec{p}}{mc} \right|^2 \right)^{1/2} \right) \exp(-ipx/\hbar), \quad (19)$$

where A is a normalization constant. Equation (19) can be expected to hold for any nonrelativistic bosonic or fermionic state. Then suppose that this state (wave function) is taken to describe a macroscopic object containing more than Avogadro's number of atoms, in which case its mass m satisfies the following:

$$m > N_A m_n, \quad (20)$$

where N_A is Avogadro's Number, and m_n is the mass of a nucleon. Then according to Eqs. (19) and (20), one obtains for the quantum state of this macroscopic many-body object in this simplified model:

$$\psi < A' \exp \left(-\frac{1}{2\pi\alpha} N_A \frac{m_n}{m_{Pl}} \left(1 + \left| \frac{\vec{p}}{mc} \right|^2 \right)^{1/2} \right) \exp(-iN_A px/\hbar), \quad (21)$$

in which A' is the normalization constant for N_A particles. Equivalently, one can write the state as a product of N_A copies of Eq. (19), since the exponents add. Substituting $N_A = 6 \times 10^{23}$, $m_n = 1.7 \times 10^{-27} \text{kg}$, and $m_{Pl} = 2.2 \times 10^{-8} \text{kg}$ in Eq. (21), the many-body wave function is seen to be negligible. This suggests that, for all practical purposes, a macroscopic object, such as a macroscopic measuring device, should not be described by quantum mechanics, and instead is best described by classical mechanics.

4 Conclusion

It can be reasonably concluded that in both classical and quantum mechanics, the appropriate physically meaningful Finsler coordinate is the four-velocity of the measuring device relative to that which is being measured. Also, it is argued that the measuring device can be treated as a macroscopic many-body system described by classical mechanics.

References

- [1] Howard E. Brandt Physical Finsler Coordinates in Spacetime // *Bulletin of the Transilvania University of Brasov*, Vol. 4 (53), No. 2, Series III: Mathematics, Informatics, Physics, 2011, 1–12.
- [2] Howard E. Brandt Physical Finsler Coordinates in Spacetime // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 2(16), Vol. 8, 2011, 78–87.
- [3] Howard E. Brandt Finslerian Fields in the Spacetime Tangent Bundle // *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 10, Nos. 2-3, 1999, 267–282.
- [4] Howard E. Brandt Kinetic Theory in Maximal-Acceleration Invariant Phase Space // *Nuclear Phys. B, Proc. Suppl.*, Vol. 6, 1989, 367–369.

-
- [5] Howard E. Brandt Finsler-Spacetime Tangent Bundle // *Foundations of Physics Letters*, Vol. 5, No. 3, 1992, 221–248.
 - [6] Howard E. Brandt Particle Geodesics and Spectra in the Spacetime Tangent Bundle // *Reports on Mathematical Physics*, Vol. 45, 2000, 389–405.
 - [7] Howard E. Brandt Finslerian Spacetime // *Contemporary Mathematics*, Vol. 196, 1996, 273–287.
 - [8] Howard E. Brandt Maximal Proper Acceleration Relative to the Vacuum // *Lett. Nuovo Cimento*, 38, 1983, 522–524; 39, 1984, 192.
 - [9] Howard E. Brandt Structure of Spacetime Tangent Bundle // *Found. Phys. Lett.*, 4, 1991, 523–536.
 - [10] Howard E. Brandt Differential Geometry of Finsler-Spacetime Tangent Bundle // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 2 (18), Vol. 9, 2012, 263–269.
 - [11] John von Neumann *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1996.
 - [12] Howard E. Brandt Microcausality in Quantum Field Theory // *Physica Scripta*, Vol. T151, 014011, 5 pp. (and references therein), 2012.
 - [13] Howard E. Brandt Intrinsic Gravitational Regularization of Quantum Fields // *Found. Phys. Lett.* 17, 2004, 295–300.
 - [14] Howard E. Brandt Quantum Fields in the Spacetime Tangent Bundle // *Found. Phys. Lett.*, 11, 1998, 265–275.
 - [15] Howard E. Brandt Quantum Vacuum Heuristics // *J. Mod. Optics*, 50, 2003, 2455–2463.

ФИНСЛЕРОВЫ ФИЗИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Говард Брандт

Исследовательская лаборатория армии США, Адельфи, США

howard.e.brandt.civ@mail.mil

Как было показано ранее 4-скорость возбуждения квантовой частицы финслерова квантового поля в касательном многообразии пространства-времени не является подходящей финслеровой координатой, в то время как 4-скорость измерительного прибора по отношению к вакууму является таковой. Более того, в настоящей работе показывается, что физические финслеровы координаты для описания классического движения макроскопического объекта – это 4-скорость классического объекта, которая в действительности выступает, как измерительный прибор, измеряющий характеристики метрического поля. В частности, рассмотрено движение по геодезической макроскопического объекта в финслеровом пространстве-времени, где подходящими финслеровыми координатами является 4-скорость объекта, лежащая в основании движения по геодезической. Также утверждается, что для макроскопического объекта, такого как макроскопический измерительный прибор, состоящий из атомов число которых превышает число Авогадро любое мыслимое квантовое состояние является пренебрежимо малым и, поэтому, для любых практических целей такой объект лучше описывается классической механикой. Отмечается, что все вышесказанное следует из разумной верхней границы на физически возможное релятивистски равноускоренное движение.

Ключевые слова: финслерово пространство-время, финслеровы координаты, касательное расслоение пространства-времени, максимально возможное релятивистски равноускоренное движение, квантово-классические границы, число Авогадро.

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НА МНОЖЕСТВАХ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

А.М. Гальмак

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев, Белоруссия
halm54@mail.ru

Основными объектами изучения в данной статье являются полиадические операции на множестве $\mathbf{M}^J(P)$, элементами которого являются функции, определённые на непустом множестве J , у которых все значения принадлежат множеству $\mathbf{M}(P)$ всех матриц с элементами из некоторого кольца P . Такие полиадические операции впервые появились у Э. Поста, который рассматривал случай $J = \{1, \dots, m-1\}$, \mathbb{C} — поле комплексных чисел.

Ключевые слова: полиадическая операция, матрица, функция, полугруппа, группа.

1 Введение

Впервые полиадическая операция на множестве матричнозначных функций появилась в работе Э. Поста [1]. Эта операция возникла естественным образом на пути изучения m -арных матриц, которые Э. Пост определил [1, с. 331] как упорядоченные наборы (M_1, \dots, M_{m-1}) , все компоненты которых являются невырожденными квадратными матрицами n -го порядка над полем \mathbb{C} комплексных чисел. Понятно, что множество всех таких m -арных матриц совпадает с $(m-1)$ -ой декартовой степенью $\mathbf{GL}_n^{m-1}(\mathbb{C})$ полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Именно на множестве $\mathbf{GL}_n^{m-1}(\mathbb{C})$ Э. Пост и определил свою m -арную операцию, относительно которой, как он установил [1, с. 332], это множество является m -арной группой. При $m=2$ m -арные матрицы Э. Поста — это обычные матрицы, а m -арная группа $\mathbf{GL}_n^{m-1}(\mathbb{C})$ совпадает с группой $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Так как любой элемент (a_1, \dots, a_{m-1}) конечной декартовой степени A^{m-1} произвольного множества A можно отождествить с некоторой функцией $f: j \rightarrow a_j$ с областью определения $J = \{1, \dots, m-1\}$ и со значениями во множестве A , то можно считать, что операция Э. Поста, о которой идёт речь, определена на множестве $\mathbf{GL}_n^J(\mathbb{C})$ всех функций с областью определения $J = \{1, \dots, m-1\}$ и со значениями в полной линейной группе $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Конструкция, которую использовал Э. Пост при построении своей m -арной операции, допускает различные обобщения. Реализации некоторых из этих обобщений посвящены работы А.К. Слипенко [2, 3], а также ряд работ автора, ссылки на которые будут появляться далее в тексте по мере необходимости. Здесь же отметим только книгу [4], в которой, в частности, изучались свойства l -арного группоида $\langle A^J, []_{l,\sigma,J} \rangle$, где J — произвольное множество, σ — любая его подстановка, A — произвольный группоид. При этом l -арная операция $[]_{l,\sigma,J}$ определяется по следующей схеме: вначале на множестве A^J всех функций с областью определения J и со значениями в группоиде A равенством

$$(\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(\sigma(j)), \quad j \in J \quad (1.1)$$

определяется бинарная операция $\overset{\sigma}{\circ}$, а затем с её помощью — l -арная операция

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,J} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\dots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \dots)). \quad (1.2)$$

Понятно, что операция $[]_{2,\sigma,J}$ совпадает с операцией $\overset{\sigma}{\circ}$.

Замечание 1.1. Если $J = \{1, 2, \dots, k\}$, то операции $\overset{\sigma}{\circ}$ и $[]_{l,\sigma,J} = []_{l,\sigma,k}$ определены на k -ой декартовой степени A^k [5–7]. При этом равенство (1.1) может быть записано в виде

$$\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y} = (x_1 y_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)}, \dots, x_k y_{\sigma(k)}),$$

где

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k).$$

Легко заметить, что если σ — подстановка множества $\{1, 2, \dots, k\}$, то операция $\overset{\sigma}{\circ}$ совпадает с операцией

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \circ (y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1 y_2, x_2 y_3, \dots, x_{k-1} y_k, x_k y_1)$$

из [7, определение 2.2.3], а операция $[]_{l, \sigma, k}$ — с операцией $[]_{l, k}$ из того же определения.

Если в описанной схеме в качестве группоида A взять группу $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ и положить $J = \{1, 2, \dots, k\}$, $l = k + 1$, $\sigma = (12 \dots k)$, то получится конструкция Э. Поста.

В [4, следствие 2.2.4] установлено, что замена в определении операции $[]_{l, \sigma, J}$ группоида полугруппой позволяет переписать равенство (1.2) в виде

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, J}(j) = \mathbf{x}_1(j) \mathbf{x}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)) \mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j)), \quad j \in J. \quad (1.3)$$

Основными объектами изучения в данной статье являются полиадические операции на множестве $\mathbf{M}^J(P)$, элементами которого являются функции, определённые на множестве J , у которых все значения принадлежат множеству $\mathbf{M}(P)$ всех матриц с элементами из некоторого кольца P . Так как для одноэлементного множества J , в частности для множества $J = \{1\}$, множество $\mathbf{M}^J(P)$ совпадает с множеством $\mathbf{M}(P)$, то, возвращаясь к произвольному множеству J , можно сказать, что матричнозначные функции из $\mathbf{M}^J(P)$ вполне уместно рассматривать как обобщённые матрицы. Имея в виду это обстоятельство, матричнозначные функции из $\mathbf{M}^J(P)$ мы будем называть также J -матрицами. Если $J = \{1, 2, \dots, k\}$, то J -матрицы называют k -компонентными вектор-матрицами [8].

Определения некоторых понятий из теории полиадических групп будут приводиться в тексте статьи. Желаящим более подробно ознакомиться с данной тематикой, можно порекомендовать статью Э. Поста [1], а также книги [9–11] и статью [12]. Необходимую информацию о подстановках множеств произвольной мощности можно почерпнуть из книг [13, 14].

Для обозначения множества всех квадратных матриц порядка n с элементами из P будем использовать стандартный символ $\mathbf{M}_n(P)$, символом $\mathbf{M}_{m \times n}(P)$ обозначается множество всех матриц размера $m \times n$ над P . Множество всех подстановок множества J обозначается символом \mathbf{S}_J , в частности, \mathbf{S}_k — множество всех подстановок множества $J = \{1, 2, \dots, k\}$.

Как уже отмечалось, A^J — это множество всех функций с областью определения J и со значениями во множестве A , в частности,

$$\begin{aligned} A^{\{1, 2, \dots, k\}} &= A^k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_1, x_2, \dots, x_k \in A\}, \\ A^{\mathbf{N}} &= \{(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \mid x_i \in A\}, \\ A^{\mathbf{Z}} &= \{(\dots, x_{-k}, \dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \mid x_i \in A\}. \end{aligned}$$

Если $\langle A, * \rangle$ — группоид, то $\langle A^J, * \rangle$ — группоид с операцией $*$, которая определяется поточечно:

$$(\mathbf{x} * \mathbf{y})(j) = \mathbf{x}(j) * \mathbf{y}(j), \quad j \in J.$$

Если 0 — нуль группоида $\langle A, * \rangle$, то нулем группоида $\langle A^J, * \rangle$ является постоянная функция $\mathbf{0}$, ставящая в соответствие каждому $j \in J$ нуль группоида A : $\mathbf{0}(j) = 0$. Если же группоид $\langle A, * \rangle$ содержит единицу 1 , то единицей группоида $\langle A^J, * \rangle$ является постоянная функция \mathbf{e} , ставящая в соответствие каждому $j \in J$ единицу группоида A : $\mathbf{e}(j) = 1$.

Если A — кольцо (линейное пространство над полем P , линейная алгебра над полем P), то декартову степень A^J можно превратить в кольцо (линейное пространство над P ,

линейную алгебру над P), определив операции сложения и умножения элементов из A^J , а также умножение скаляров из P на элементы из A^J поточечно:

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})(j) = \mathbf{x}(j) + \mathbf{y}(j), \quad (\mathbf{x}\mathbf{y})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j), \quad (\lambda\mathbf{x})(j) = \lambda\mathbf{x}(j).$$

Замечание 1.2. Если A – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей 1 , то A^J – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей \mathbf{e} . Противоположный элемент — $\mathbf{x} \in A^J$ элемента $\mathbf{x} \in A^J$ ставит в соответствие каждому $j \in J$ противоположный элемент — $\mathbf{x}(j) \in A$ элемента $\mathbf{x}(j) \in A$: $(-\mathbf{x})(j) = -\mathbf{x}(j)$.

2 J -Матрицы

Следующее определение обобщает понятие вектор-матрицы из [8], в том числе понятие m -арной матрицы из работы Э. Поста [1].

Определение 2.1. Пусть P – ассоциативное кольцо, J – произвольное множество. Матричнозначная функция \mathbf{A} , определенная на множестве J , такая, что

$$\mathbf{A}(j) \in \mathbf{M}_{m_j \times n_j}(P), \quad j \in J, \tag{2.1}$$

называется J -матрицей размера $(m_j \times n_j, j \in J)$ над P .

Понятно, что если J – одноэлементное множество, то J -матрицы – это обычные матрицы. Если $J = \{1, 2, \dots, k\}$, то J -матрицы – это k -компонентные вектор-матрицы размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$, которые, как уже отмечалось, были определены в [1].

J -Матрица \mathbf{A} , у которой все значения (2.1) – матрицы одного и того же размера $m \times n$, называется J -матрицей размера $m \times n$.

J -Матрица \mathbf{A} , у которой все значения (2.1) – квадратные матрицы порядков n_j , называется *квадратной J -матрицей порядка $(n_j, j \in J)$* .

J -Матрица \mathbf{A} , у которой все значения (2.1) – квадратные матрицы одного и того же порядка n , называется *квадратной J -матрицей порядка n* .

Ясно, что множество всех J -матриц над P совпадает с множеством $\mathbf{M}^J(P)$, для обозначения которого мы будем использовать также безиндексный символ $\mathbf{M}(J, P)$, то есть полагаем $\mathbf{M}^J(P) = \mathbf{M}(J, P)$.

Определение 2.2. Если $l \geq 2$, σ – подстановка из \mathbf{S}_J ,

$$\mathbf{A}_i \in \mathbf{M}(J, P), i = 1, \dots, l$$

– такие J -матрицы над P , что для любого $j \in J$ определено произведение

$$\mathbf{Y}(j) = \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)), \tag{2.2}$$

то положим

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J} = \mathbf{Y}, \tag{2.3}$$

где J -матрица \mathbf{Y} определяется с помощью (2.2).

Таким образом, (2.2) и (2.3) определяют на множестве $\mathbf{M}(J, P)$ частичную l -арную операцию $[\]_{l,\sigma,J}$, которую иногда для краткости будем называть l -арным произведением.

Замечание 2.1. Если в определении 2.2 все значения J -матриц $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ являются матрицами 1-го порядка, то операция $[\]_{l,\sigma,J}$ определена на декартовой степени P^J . Таким образом, операцию $[\]_{l,\sigma,J}$ из определения 2.2 можно считать обобщением операции $[\]_{l,\sigma,J}$ из [4].

Аналогично бинарному случаю, l -арное произведение (2.3) определено не всегда, а только в тех случаях, когда для любых соседних сомножителей в правой части (2.2), число столбцов предшествующего сомножителя совпадает с числом строк последующего сомножителя.

Пример 2.1. Пусть $l=3$, $J=N$, σ – подстановка множества N , переводящее нечетное число в следующее за ним число, а четное число – в предшествующее ему число, то есть $\sigma(j) = j + (-1)^{j+1}$ для любого $j \in N$. Пусть также

$$\mathbf{A} = (A_1 = U_1, A_2 = U_1^{-1}, A_3 = U_2, A_4 = U_2^{-1}, \dots, A_{2k-1} = U_k, A_{2k} = U_k^{-1}, \dots)$$

– квадратная N -матрица над P , у которой компоненты

$$A_{2k-1} = U_k, \quad A_{2k} = U_k^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

являются обратимыми матрицами порядка n_k ;

$$\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4, \dots, B_{2k-1}, B_{2k}, \dots)$$

– квадратная N -матрица над P , у которой для любого $k = 1, 2, \dots$ компоненты B_{2k-1}, B_{2k} , являются матрицами порядка n_k , например, $n_k = k$.

Так как для любого $k = 1, 2, \dots$ верно

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(2k-1)\mathbf{A}(\sigma(2k-1))\mathbf{B}(\sigma^2(2k-1)) &= A_{2k-1}A_{\sigma(2k-1)}B_{\sigma^2(2k-1)} = \\ &= A_{2k-1}A_{2k}B_{2k-1} = U_k U_k^{-1} B_{2k-1} = B_{2k-1}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}(2k)\mathbf{A}(\sigma(2k))\mathbf{B}(\sigma^2(2k)) = A_{2k}A_{\sigma(2k)}B_{\sigma^2(2k)} = A_{2k}A_{2k-1}B_{2k} = U_k^{-1}U_k B_{2k} = B_{2k},$$

то для любого $j \in N$ определено произведение

$$\mathbf{A}(j)\mathbf{A}(\sigma(j))\mathbf{B}(\sigma^2(j)) = \mathbf{B}(j).$$

Поэтому, согласно определению 2.2

$$[\mathbf{AAB}]_{3,\sigma,N} = \mathbf{B}.$$

В частности, если $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, то

$$[\mathbf{AAA}]_{3,\sigma,N} = \mathbf{A}.$$

Пример 2.2. Пусть $l=3$, $J=Z$, $\sigma(j) = -j$ для любого $j \in Z$. Пусть также

$$\mathbf{A} = (\dots, A_{-j} = U_j^{-1}, \dots, A_{-1} = U_1^{-1}, A_0 = E, A_1 = U_1, \dots, A_j = U_j, \dots)$$

– квадратная Z -матрица над P , у которой компонента $A_0 = E$ – единичная матрица порядка n_0 , и для любого $j = 1, 2, \dots$ компоненты A_j и A_{-j} являются взаимобратными матрицами порядка n_j ;

$$\mathbf{B} = (\dots, B_{-j}, \dots, B_{-1}, B_0, B_1, \dots, B_j, \dots)$$

– квадратная Z -матрица над P , у которой для любого $j \in Z$ компоненты B_j и B_{-j} являются матрицами порядка n_j .

Так как для $j \in Z$ определено произведение

$$\mathbf{A}(j)\mathbf{A}(\sigma(j))\mathbf{B}(\sigma^2(j)) = A_j A_{\sigma(j)} B_{\sigma^2(j)} = A_j A_{-j} B_j = U_j U_j^{-1} B_j = B_j = \mathbf{B}(j),$$

то, согласно определению 2.2

$$[\mathbf{AAB}]_{3,\sigma,Z} = \mathbf{B}.$$

В частности, если $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, то

$$[\mathbf{AAA}]_{3,\sigma,Z} = \mathbf{A}.$$

Пример 2.3. Пусть $l = 3$, $J = \mathbb{N}$, σ – та же подстановка множества \mathbb{N} , что и в примере 2.1. Пусть также

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{2k-1}, A_{2k}, \dots), \mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots, B_{2k-1}, B_{2k}, \dots), \\ \mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_{2k-1}, C_{2k}, \dots)$$

– такие \mathbb{N} -матрицы над P , что для любого $k = 1, 2, \dots$: у \mathbb{N} -матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} нечетные компоненты A_{2k-1} и B_{2k-1} имеют размер $m_k \times n_k$, а четные компоненты A_{2k} и B_{2k} имеют размер $n_k \times m_k$; у \mathbb{N} -матрицы \mathbf{C} нечетные компоненты C_{2k-1} имеют размер $m_k \times m_k$, а четные компоненты C_{2k} имеют размер $n_k \times n_k$.

Так как для любого $j \in \mathbb{N}$ определено произведение

$$\mathbf{A}(j)\mathbf{B}(\sigma(j))\mathbf{C}(\sigma^2(j)) = A_j B_{\sigma(j)} C_{\sigma^2(j)} = D_j = \mathbf{D}(j),$$

которое при нечётном j является матрицей размера $m_k \dots m_k$, а при чётном j является матрицей размера $n_k \times n_k$, то определена \mathbb{N} -матрица

$$[\mathbf{ABC}]_{3,\sigma,\mathbb{N}} = \mathbf{D},$$

которая имеет тот же размер, что и \mathbb{N} -матрица \mathbf{C} .

Пример 2.4. Пусть $l = 3$, $J = \mathbb{N}$, σ – та же подстановка множества \mathbb{N} , что и в примере 2.1. Пусть также

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{2k-1}, A_{2k}, \dots), \quad \mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots, B_{2k-1}, B_{2k}, \dots), \\ \mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_{2k-1}, C_{2k}, \dots)$$

– такие \mathbb{N} -матрицы над P , что для любого $k = 1, 2, \dots$ нечетные компоненты A_{2k-1} , B_{2k-1} и C_{2k-1} имеют размер $m_k \times n_k$, а четные компоненты A_{2k} , B_{2k} и C_{2k} имеют размер $n_k \times m_k$.

Так как для любого $j \in \mathbb{N}$ определено произведение

$$\mathbf{A}(j)\mathbf{B}(\sigma(j))\mathbf{C}(\sigma^2(j)) = A_j B_{\sigma(j)} C_{\sigma^2(j)} = D_j = \mathbf{D}(j),$$

которое при нечётном j является матрицей размера $m_k \times n_k$, а при чётном j является матрицей размера $n_k \times m_k$, то определена \mathbb{N} -матрица

$$[\mathbf{ABC}]_{3,\sigma,\mathbb{N}} = \mathbf{D},$$

которая имеет тот же размер, что и \mathbb{N} -матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} .

Приведённые примеры допускают различные обобщения. Прежде, чем привести одно из таких обобщений, напомним [15], что $m \times n$ матрица A^+ называется псевдообратной для $n \times m$ матрицы A , если

$$AA^+A = A, A^+ = UA^* = A^*V,$$

где U и V – некоторые матрицы, A^* – сопряженная матрица для A . Псевдообратные матрицы обладают рядом свойств, из которых нам понадобится следующее $(A^+)^+ = A$.

Пример 2.5. Пусть порядок подстановки σ множества J равен двум, а её носитель совпадает с множеством J , то есть множество J является дизъюнктивным объединением двухэлементных множеств $\{p_k, q_k\}$, где k пробегает некоторое множество Λ , на каждом из которых подстановка σ индуцирует транспозицию, то есть $\sigma(p_k) = q_k$, $\sigma(q_k) = p_k$. Определим J -матрицу \mathbf{A} над P таким образом, что если $\mathbf{A}(p_k)$ – матрица размера $m_k \times n_k$, то $\mathbf{A}(q_k)$ – псевдообратная для неё матрица размера $n_k \times m_k$, то есть $\mathbf{A}(q_k) = (\mathbf{A}(p_k))^+$.

Так как σ^2 – тождественная подстановка и, кроме того, $((\mathbf{A}(p_k))^+)^+ = \mathbf{A}(p_k)$, то для любого $k \in \Lambda$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(p_k) &= \mathbf{A}(p_k)(\mathbf{A}(p_k))^+ \mathbf{A}(p_k) = \mathbf{A}(p_k)\mathbf{A}(q_k)\mathbf{A}(p_k) = \mathbf{A}(p_k)\mathbf{A}(\sigma(p_k))\mathbf{A}(\sigma^2(p_k)), \\ \mathbf{A}(q_k) &= \mathbf{A}(q_k)(\mathbf{A}(q_k))^+ \mathbf{A}(q_k) = \mathbf{A}(q_k)((\mathbf{A}(p_k))^+)^+ \mathbf{A}(q_k) = \\ &= \mathbf{A}(q_k)\mathbf{A}(p_k)\mathbf{A}(q_k) = \mathbf{A}(q_k)\mathbf{A}(\sigma(q_k))\mathbf{A}(\sigma^2(q_k)), \end{aligned}$$

то для любого $j \in J$ определено произведение

$$\mathbf{A}(j)\mathbf{A}(\sigma(j))\mathbf{A}(\sigma^2(j)) = \mathbf{A}(j).$$

Поэтому, согласно определению 2.2

$$[\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}]_{3,\sigma,J} = \mathbf{A}.$$

Легко проверяется, что для любого нечетного l справедливо равенство

$$[\underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_l]_{l,\sigma,J} = \mathbf{A},$$

из которого при $l = 3$ получается предыдущее равенство.

Замечание 2.2. Если в примере 2.5 для любого $k \in \Lambda$ положить $m_k = n_k$, то J -матрицы $\mathbf{A}(p_k)$ и $\mathbf{A}(q_k)$ являются взаимобратными.

Замечание 2.3. Если в примере 2.5 положить $l = 3$, $J = \mathbb{N}$, $\Lambda = \mathbb{N}$, σ – та же подстановка множества \mathbb{N} , что и в примере 2.1, то множество \mathbb{N} является дизъюнктивным объединением двухэлементных множеств $\{2k - 1, 2k\}$, где $k \in \mathbb{N}$, на каждом из которых подстановка σ индуцирует транспозицию. Если далее $\mathbf{A}(p_k) = \mathbf{A}(2k - 1)$ – квадратная матрица порядка n_k , то $\mathbf{A}(q_k) = \mathbf{A}(2k)$ – обратная для неё матрица, то есть $\mathbf{A}(2k) = (\mathbf{A}(2k - 1))^{-1}$. В результате получаем равенство $[\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}]_{3,\sigma,\mathbb{N}} = \mathbf{A}$ из примера 2.1.

Предложение 2.1. Пусть P – ассоциативное кольцо,

$$\mathbf{A}_m \in \mathbf{M}(J, P), \quad m = 1, \dots, 2l - 1,$$

σ – подстановка из \mathbf{S}_J , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда, если определена J -матрица

$$[[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J} \mathbf{A}_{l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J}, \quad (2.4)$$

то для любого $i = 1, \dots, l - 1$ определена J -матрица

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i [\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,J} \mathbf{A}_{i+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J} \quad (2.5)$$

и верно равенство

$$\begin{aligned} & [[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J} \mathbf{A}_{l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J} = \\ & = [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i [\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,J} \mathbf{A}_{i+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Доказательство. Пусть определена J -матрица (2.4) и положим

$$\begin{aligned} & [[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J} \mathbf{A}_{l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J} = \mathbf{R}, \\ & [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J} = \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Тогда для любого $j \in J$, используя равенство $\sigma^l = \sigma$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(j) & = \mathbf{Y}(j) \mathbf{A}_{l+1}(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ & = \mathbf{A}_1(j) \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)) \mathbf{A}_{l+1}(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ & = \mathbf{A}_1(j) \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j)) \\ & \mathbf{A}_{i+1}(\sigma^i(j)) \mathbf{A}_{i+2}(\sigma^{i+1}(j)) \dots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)) \mathbf{A}_{l+1}(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_{i+l}(\sigma^i(j)) \\ & \mathbf{A}_{i+l+1}(\sigma^{i+1}(j)) \dots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ & = \mathbf{A}_1(j) \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j)) \\ & \mathbf{A}_{i+1}(\sigma^i(j)) \mathbf{A}_{i+2}(\sigma^{i+1}(j)) \dots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)) \mathbf{A}_{l+1}(\sigma^l(j)) \dots \mathbf{A}_{i+l}(\sigma^{l-1+i}(j)) \\ & \mathbf{A}_{i+l+1}(\sigma^{i+1}(j)) \dots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ & = \mathbf{A}_1(j) \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j)) \\ & \mathbf{A}_{i+1}(\sigma^i(j)) \mathbf{A}_{i+2}(\sigma(\sigma^i(j))) \dots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1-i}(\sigma^i(j))) \dots \mathbf{A}_{i+l}(\sigma^{l-1}(\sigma^i(j))) \\ & \mathbf{A}_{i+l+1}(\sigma^{i+1}(j)) \dots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)), \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(j) & = \mathbf{A}_1(j) \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j)) \\ & \mathbf{A}_{i+1}(\sigma^i(j)) \mathbf{A}_{i+2}(\sigma(\sigma^i(j))) \dots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1-i}(\sigma^i(j))) \dots \mathbf{A}_{i+l}(\sigma^{l-1}(\sigma^i(j))) \\ & \mathbf{A}_{i+l+1}(\sigma^{i+1}(j)) \dots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Положим в последнем равенстве

$$\mathbf{Z}(\sigma^i(j)) = \mathbf{A}_{i+1}(\sigma^i(j)) \mathbf{A}_{i+2}(\sigma(\sigma^i(j))) \dots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1+i}(\sigma^i(j))) \dots \mathbf{A}_{i+l}(\sigma^{l-1}(\sigma^i(j))). \quad (2.8)$$

Если j пробегает всё множество J , то $\sigma^i(j)$ также пробегает всё множество J . Поэтому из (2.8) следует, что определена J -матрица

$$[\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,J} = \mathbf{Z}.$$

Подставив (2.8) в (2.7), получим

$$\mathbf{R}(j) = \mathbf{A}_1(j) \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j)) \mathbf{Z}(\sigma^i(j)) \mathbf{A}_{i+l+1}(\sigma^{i+1}(j)) \dots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)),$$

а это значит, что существует J -матрица (2.5) и верно равенство (2.6). Предложение доказано.

Предложение 2.2. Пусть P – ассоциативное кольцо,

$$\mathbf{A}_m \in \mathbf{M}(J, P), \quad m = 1, \dots, 2l - 1,$$

σ – подстановка из \mathbf{S}_J , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда, если для некоторого $i = 1, \dots, l-1$ определена J -матрица (2.5), то определена J -матрица (2.4) и верно (2.6).

Доказательство. Пусть определена J -матрица (2.5) и положим

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i [\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,J} \mathbf{A}_{i+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J} = \mathbf{S},$$

пусть так же, как и в доказательстве предложения 2.2,

$$[\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,J} = \mathbf{Z}.$$

Тогда для любого $j \in J$ верно

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(j) &= \mathbf{A}_1(j) \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j)) \mathbf{Z}(\sigma^i(j)) \mathbf{A}_{i+l+1}(\sigma^{i+1}(j)) \dots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ &= \mathbf{A}_1(j) \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j)) \\ &\quad \mathbf{A}_{i+1}(\sigma^i(j)) \mathbf{A}_{i+2}(\sigma(\sigma^i(j))) \dots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1-i}(\sigma^i(j))) \dots \mathbf{A}_{i+l}(\sigma^{l-1}(\sigma^i(j))) \\ &\quad \mathbf{A}_{i+l+1}(\sigma^{i+1}(j)) \dots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ &= \mathbf{A}_1(j) \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j)) \\ &\quad \mathbf{A}_{i+1}(\sigma^i(j)) \mathbf{A}_{i+2}(\sigma^{i+1}(j)) \dots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)) \mathbf{A}_{l+1}(\sigma^l(j)) \dots \mathbf{A}_{i+l}(\sigma^{l-1+i}(j)) \\ &\quad \mathbf{A}_{i+l+1}(\sigma^{i+1}(j)) \dots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ &= \mathbf{A}_1(j) \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j)) \\ &\quad \mathbf{A}_{i+1}(\sigma^i(j)) \mathbf{A}_{i+2}(\sigma^{i+1}(j)) \dots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)) \mathbf{A}_{l+1}(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_{i+l}(\sigma^i(j)) \\ &\quad \mathbf{A}_{i+l+1}(\sigma^{i+1}(j)) \dots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ &= \mathbf{A}_1(j) \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)) \mathbf{A}_{l+1}(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)), \end{aligned}$$

то есть

$$\mathbf{S}(j) = \mathbf{A}_1(j) \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)) \mathbf{A}_{l+1}(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)). \quad (2.9)$$

Положим в последнем равенстве

$$\mathbf{Y}(j) = \mathbf{A}_1(j) \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)). \quad (2.10)$$

Из (2.10) видно, что существует J -матрица

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J} = \mathbf{Y}$$

со значениями (2.10). Подставив (2.10) в (2.9), получим

$$\mathbf{S}(j) = \mathbf{Y}(j) \mathbf{A}_{l+1}(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)),$$

а это значит, что существует J -матрица (2.4) и верно равенство (2.6). Предложение доказано.

Предложения 2.1 и 2.2 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.1. Пусть P – ассоциативное кольцо,

$$\mathbf{A}_m \in \mathbf{M}(J, P), \quad m = 1, \dots, 2l-1,$$

σ – подстановка из \mathbf{S}_J , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда, если для некоторого $i = 0, 1, \dots, l-1$ определена J -матрица

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i [\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,J} \mathbf{A}_{i+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J},$$

то для любого $j = 0, 1, \dots, l - 1$ определена J -матрица

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_j [\mathbf{A}_{j+1} \dots \mathbf{A}_{j+l}]_{l,\sigma,J} \mathbf{A}_{j+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J},$$

и верно равенство

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i [\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,J} \mathbf{A}_{i+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J} = \\ & = [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_j [\mathbf{A}_{j+1} \dots \mathbf{A}_{j+l}]_{l,\sigma,J} \mathbf{A}_{j+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J}. \end{aligned}$$

Полагая в теореме 3.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 2.1 [8]. Пусть

$$\mathbf{A}_m = (A_{m1}, \dots, A_{mk}), \quad m = 1, \dots, 2l - 1$$

– k -компонентные вектор-матрицы над ассоциативным кольцом P , σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда, если для некоторого $i = 0, 1, \dots, l - 1$ определена k -компонентная вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i [\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,k} \mathbf{A}_{i+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,k},$$

то для любого $j = 0, 1, \dots, l - 1$ определена k -компонентная вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_j [\mathbf{A}_{j+1} \dots \mathbf{A}_{j+l}]_{l,\sigma,k} \mathbf{A}_{j+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,k},$$

и верно равенство

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i [\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,k} \mathbf{A}_{i+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,k} = \\ & = [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_j [\mathbf{A}_{j+1} \dots \mathbf{A}_{j+l}]_{l,\sigma,k} \mathbf{A}_{j+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,k}. \end{aligned}$$

Так как любая подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$, порядок которой не превосходит 2 (каждый независимый цикл подстановки σ является либо тождественной подстановкой, либо транспозицией), удовлетворяет условию $\sigma^3 = \sigma$, то, полагая в теореме 2.1 $l = 3$, получим

Следствие 2.2. Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ и \mathbf{E} – J -матрицы над ассоциативным кольцом P , σ – подстановка из \mathbf{S}_J , порядок которой не превосходит 2. Тогда, если определена одна из J -матриц

$$[[\mathbf{ABC}]_{3,\sigma,J} \mathbf{DE}]_{3,\sigma,J}, [\mathbf{A}[\mathbf{BCD}]_{3,\sigma,J} \mathbf{E}]_{3,\sigma,J}, [\mathbf{AB}[\mathbf{CDE}]_{3,\sigma,J}]_{3,\sigma,J},$$

то определены и две другие J -матрицы и верны равенства

$$[[\mathbf{ABC}]_{3,\sigma,J} \mathbf{DE}]_{3,\sigma,J} = [\mathbf{A}[\mathbf{BCD}]_{3,\sigma,J} \mathbf{E}]_{3,\sigma,J} = [\mathbf{AB}[\mathbf{CDE}]_{3,\sigma,J}]_{3,\sigma,J}.$$

3 l -Арная полугруппа $\mathbf{M}_n(J, P)$

Обозначим через $\mathbf{M}_n(J, P)$ – множество всех квадратных J -матриц порядка n над ассоциативным кольцом P . Ясно, что множество $\mathbf{M}_n(J, P)$ совпадает с декартовой степенью множества $\mathbf{M}_n(P)$ всех квадратных матриц n -го порядка над P :

$$\mathbf{M}_n(J, P) = \prod_{j \in J} \mathbf{M}_n(P) = \mathbf{M}_n^J(P).$$

Напомним, что l -арный группоид $\langle A, [] \rangle$, в котором для любого $i = 1, 2, \dots, l - 1$ выполняется тождество

$$[[a_1 \dots a_i] a_{i+1} \dots a_{2l-1}] = [a_1 \dots a_i [a_{i+1} \dots a_{i+l}] a_{i+l+1} \dots a_{2l-1}],$$

называется l -арной полугруппой, а l -арная операция $[]$ в этом случае называется ассоциативной.

Согласно теореме 2.1, если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \mathbf{M}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$ – l -арная полугруппа. Строение этой l -арной полугруппы конкретизирует следующая

Теорема 3.1[4]. Пусть $l \geq 2$, подстановка σ из \mathbf{S}_J удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1. $\langle \mathbf{M}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$ – l -арная полугруппа;
2. если $n \geq 2$, то эта l -арная полугруппа неполуабелева;
3. если σ – нетождественная подстановка, то в этой l -арной полугруппе нет единицы.

Полагая в теореме 3.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 3.1. Пусть $l \geq 2$, подстановка σ из \mathbf{S}_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1. $\langle \mathbf{M}_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная полугруппа;
2. если $n \geq 2$, то эта l -арная полугруппа неполуабелева;
3. если σ – нетождественная подстановка, то в этой l -арной полугруппе нет единицы.

Полагая в теореме 3.1 $J = \mathbf{N}$, получим

Следствие 3.2. Пусть $l \geq 2$, подстановка σ из $\mathbf{S}_{\mathbf{N}}$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1. $\langle \mathbf{M}_n(\mathbf{N}, P), []_{l, \sigma, \mathbf{N}} \rangle$ – l -арная полугруппа;
2. если $n \geq 2$, то эта l -арная полугруппа неполуабелева;
3. если σ – нетождественная подстановка, то в этой l -арной полугруппе нет единицы.

Полагая в теореме 3.1 $J = \mathbf{Z}$, получим

Следствие 3.3. Пусть $l \geq 2$, подстановка σ из $\mathbf{S}_{\mathbf{Z}}$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1. $\langle \mathbf{M}_n(\mathbf{Z}, P), []_{l, \sigma, \mathbf{Z}} \rangle$ – l -арная полугруппа;
2. если $n \geq 2$, то эта l -арная полугруппа неполуабелева;
3. если σ – нетождественная подстановка, то в этой l -арной полугруппе нет единицы.

В любой полугруппе матриц все элементы являются квадратными матрицами одного и того же порядка. В то же время, как показывает следующая теорема, при $l \geq 3$ существуют l -арные полугруппы J -матриц такие, что все их элементы не только не являются квадратными J -матрицами, но и все компоненты этих элементов не являются квадратными матрицами.

Теорема 3.2. Пусть множество J является дизъюнктивным объединением двухэлементных множеств $\{p_k, q_k\}$, где k пробегает некоторое множество Λ , на каждом из которых подстановка σ индуцирует транспозицию, то есть $\sigma(p_k) = q_k$, $\sigma(q_k) = p_k$. Обозначим через \mathbf{L} множество всех J -матриц \mathbf{A} над ассоциативным кольцом P таких, что для любого $k \in \Lambda$ значение $\mathbf{A}(p_k)$ является матрицей размера $m_k \times n_k$, а значение $\mathbf{A}(q_k)$ является матрицей размера $n_k \times m_k$. Тогда для любого нечётного l множество \mathbf{L} замкнуто относительно l -арной операции $[]_{l, \sigma, J}$, а универсальная алгебра $\langle \mathbf{L}, []_{l, \sigma, J} \rangle$ является l -арной полугруппой. При этом J -матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{L}$, у которых для любого $k \in \Lambda$ значение $\mathbf{A}(q_k)$ – псевдообратная матрица для матрицы $\mathbf{A}(p_k)$, являются идемпотентами этой l -арной полугруппы.

Доказательство. Пусть

$$\mathbf{A}_m \in \mathbf{L}, \quad m = 1, \dots, l = 2s + 1, \quad s \geq 1.$$

Тогда для любого $j \in J$ имеем

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}(j) = \\ & = \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j))\mathbf{A}_3(\sigma^2(j))\mathbf{A}_4(\sigma^3(j)) \dots \mathbf{A}_{l-2}(\sigma^{l-3}(j))\mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)) = \\ & = \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j))\mathbf{A}_3(j)\mathbf{A}_4(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_{2-1}(j)\mathbf{A}_{2s}(\sigma(j))\mathbf{A}_{2s+1}(j), \end{aligned}$$

то есть

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}(j) = \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j))\mathbf{A}_3(j)\mathbf{A}_4(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_{2s-1}(j)\mathbf{A}_{2s}(\sigma(j))\mathbf{A}_{2s+1}(j).$$

Пусть для определённости $j \in \{p_k, q_k\}$ для некоторого $k \in \Lambda$. Если $j = p_k$, то

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}(p_k) = \mathbf{A}_1(p_k)\mathbf{A}_2(q_k)\mathbf{A}_3(p_k)\mathbf{A}_4(q_k) \dots \mathbf{A}_{2s-1}(p_k)\mathbf{A}_{2s}(q_k)\mathbf{A}_{2s+1}(p_k).$$

Так как матрицы

$$\mathbf{A}_1(p_k)\mathbf{A}_2(q_k), \mathbf{A}_3(p_k)\mathbf{A}_4(q_k), \dots, \mathbf{A}_{2s-1}(p_k)\mathbf{A}_{2s}(q_k)$$

являются квадратными и имеют размер $m_k \times m_k$, а матрица $\mathbf{A}_{2s+1}(p_k)$ имеет размер $m_k \times n_k$, то матрица $[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}(p_k)$ также имеет размер $m_k \times n_k$.

Аналогично, если $j = q_k$, то

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}(q_k) = \mathbf{A}_1(q_k)\mathbf{A}_2(p_k)\mathbf{A}_3(q_k)\mathbf{A}_4(p_k) \dots \mathbf{A}_{2s-1}(q_k)\mathbf{A}_{2s}(p_k)\mathbf{A}_{2s+1}(q_k).$$

Так как матрицы

$$\mathbf{A}_1(q_k)\mathbf{A}_2(p_k), \mathbf{A}_3(q_k)\mathbf{A}_4(p_k), \dots, \mathbf{A}_{2s-1}(q_k)\mathbf{A}_{2s}(p_k)$$

являются квадратными и имеют размер $n_k \times n_k$, а матрица $\mathbf{A}_{2s+1}(q_k)$ имеет размер $n_k \times m_k$, то матрица $[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}(q_k)$ также имеет размер $n_k \times m_k$.

Таким образом,

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J} \in \mathbf{L},$$

то есть множество \mathbf{L} замкнуто относительно l -арной операции $[\]_{l,\sigma,J}$. Согласно теореме 2.1 универсальная алгебра $\langle \mathbf{L}, [\]_{l,\sigma,J} \rangle$ является l -арной полугруппой.

Пусть теперь \mathbf{A} – J -матрица из \mathbf{L} , у которой для любого $k \in \Lambda$ значение $\mathbf{A}(q_k)$ является псевдообратной матрицей для матрицы $\mathbf{A}(p_k)$, то есть $\mathbf{A}(q_k) = (\mathbf{A}(p_k))^+$. Тогда

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A} \dots \mathbf{A}]_{l,\sigma,J}(j) = \\ & = \underbrace{(\dots (\mathbf{A}(j)\mathbf{A}(\sigma(j))\mathbf{A}(\sigma^2(j)))\mathbf{A}(\sigma^3(j))\mathbf{A}(\sigma^4(j))) \dots \mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{A}(\sigma^{l-1}(j))}_{s-1} = \\ & = \underbrace{(\dots (\mathbf{A}(j)\mathbf{A}(\sigma(j))\mathbf{A}(j))\mathbf{A}(\sigma(j))\mathbf{A}(j)) \dots \mathbf{A}(\sigma(j))\mathbf{A}(j)}_{s-1}, \end{aligned}$$

то есть

$$[\mathbf{A} \dots \mathbf{A}]_{l,\sigma,J}(j) = \underbrace{(\dots (\mathbf{A}(j)\mathbf{A}(\sigma(j))\mathbf{A}(j))\mathbf{A}(\sigma(j))\mathbf{A}(j)) \dots \mathbf{A}(\sigma(j))\mathbf{A}(j)}_{s-1}.$$

Пусть для определённости $j \in \{p_k, q_k\}$ для некоторого $k \in \Lambda$. Если $j = p_k$, то, используя равенство $\mathbf{A}(q_k) = (\mathbf{A}(p_k))^+$, получим

$$\begin{aligned} [\underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_l]_{l, \sigma, J}(p_k) &= (\dots (\underbrace{\mathbf{A}(p_k) \mathbf{A}(q_k) \mathbf{A}(p_k)}_{s-1}) \mathbf{A}(q_k) \mathbf{A}(p_k)) \dots \mathbf{A}(q_k) \mathbf{A}(p_k) = \\ &= (\dots (\underbrace{\mathbf{A}(p_k) (\mathbf{A}(p_k))^+ \mathbf{A}(p_k)}_{s-1}) (\mathbf{A}(p_k))^+ \mathbf{A}(p_k)) \dots (\mathbf{A}(p_k))^+ \mathbf{A}(p_k) = \\ &= (\dots (\underbrace{\mathbf{A}(p_k) (\mathbf{A}(p_k))^+ \mathbf{A}(p_k)}_{s-2}) \dots (\mathbf{A}(p_k))^+ \mathbf{A}(p_k) = \dots = \mathbf{A}(p_k) (\mathbf{A}(p_k))^+ \mathbf{A}(p_k) = \mathbf{A}(p_k), \end{aligned}$$

то есть

$$[\underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_l]_{l, \sigma, J}(p_k) = \mathbf{A}(p_k).$$

Аналогично, Если $j = q_k$, то, используя равенство $\mathbf{A}(p_k) = (\mathbf{A}(q_k))^+$, получим

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \dots \mathbf{A}]_{l, \sigma, J}(q_k) &= (\dots (\underbrace{\mathbf{A}(q_k) \mathbf{A}(p_k) \mathbf{A}(q_k)}_{s-1}) \mathbf{A}(p_k) \mathbf{A}(q_k)) \dots \mathbf{A}(p_k) \mathbf{A}(q_k) = \\ &= (\dots (\underbrace{\mathbf{A}(q_k) (\mathbf{A}(q_k))^+ \mathbf{A}(q_k)}_{s-1}) (\mathbf{A}(q_k))^+ \mathbf{A}(q_k)) \dots (\mathbf{A}(q_k))^+ \mathbf{A}(q_k) = \\ &= (\dots (\underbrace{\mathbf{A}(q_k) (\mathbf{A}(q_k))^+ \mathbf{A}(q_k)}_{s-2}) \dots (\mathbf{A}(q_k))^+ \mathbf{A}(q_k) = \dots = \mathbf{A}(q_k) (\mathbf{A}(q_k))^+ \mathbf{A}(q_k) = \mathbf{A}(q_k), \end{aligned}$$

то есть

$$[\underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_l]_{l, \sigma, J}(q_k) = \mathbf{A}(q_k).$$

Таким образом, для любого $j \in J$ верно

$$[\underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_l]_{l, \sigma, J}(j) = \mathbf{A}(j),$$

то есть

$$[\underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_l]_{l, \sigma, J} = \mathbf{A}.$$

Следовательно, \mathbf{A} – идемпотент l -арной полугруппы $\langle \mathbf{L}, []_{l, \sigma, J} \rangle$. Теорема доказана.

Полагая в теореме 3.2 $m_k = m$, $n_k = n$ для любого $k \in \Lambda$, получим

Следствие 3.4. Пусть множество J является дизъюнктивным объединением двухэлементных множеств $\{p_k, q_k\}$, где k пробегает некоторое множество Λ , на каждом из которых подстановка σ индуцирует транспозицию. Обозначим через \mathbf{L} множество всех J -матриц \mathbf{A} над ассоциативным кольцом P таких, что для любого $k \in \Lambda$ значение $\mathbf{A}(p_k)$ является матрицей размера $m \times n$, а значение $\mathbf{A}(q_k)$ является матрицей размера $n \times m$. Тогда для любого нечётного l множество \mathbf{L} замкнуто относительно l -арной операции $[]_{l, \sigma, J}$, а универсальная алгебра $\langle \mathbf{L}, []_{l, \sigma, J} \rangle$ является l -арной полугруппой. При этом J -матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{L}$, у которых для любого $k \in \Lambda$ значение $\mathbf{A}(q_k)$ – псевдообратная матрица для матрицы $\mathbf{A}(p_k)$, являются идемпотентами этой l -арной полугруппы.

Так как псевдообратная матрица для квадратной невырожденной матрицы совпадает с её обратной матрицей, то полагая в теореме 3.2 $m_k = n_k$ для любого $k \in \Lambda$, получим

Следствие 3.5. Пусть множество J является дизъюнктивным объединением двухэлементных множеств $\{p_k, q_k\}$, где k пробегает некоторое множество Λ , на каждом из

которых подстановка σ индуцирует транспозицию. Обозначим через \mathbf{L} множество всех J -матриц \mathbf{A} над ассоциативным кольцом P таких, что для любого $k \in \Lambda$ значения $\mathbf{A}(p_k)$ и $\mathbf{A}(q_k)$ являются квадратными матрицами размера $n_k \times n_k$. Тогда для любого нечётного l множество \mathbf{L} замкнуто относительно l -арной операции $[\]_{l,\sigma,J}$, а универсальная алгебра $\langle \mathbf{L}, [\]_{l,\sigma,J} \rangle$ является l -арной полугруппой. При этом J -матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{L}$, у которых для любого $k \in \Lambda$ значение $\mathbf{A}(q_k)$ – обратная матрица для невырожденной матрицы $\mathbf{A}(p_k)$, являются идемпотентами этой l -арной полугруппы.

Полагая в следствии 3.5 $n_k = n$ для любого $k \in \Lambda$, получим

Следствие 3.6. Пусть множество J является дизъюнктивным объединением двухэлементных множеств $\{p_k, q_k\}$, где k пробегает некоторое множество Λ , на каждом из которых подстановка σ индуцирует транспозицию. Обозначим через \mathbf{L} множество всех J -матриц \mathbf{A} над ассоциативным кольцом P таких, что для любого $j \in J$ значение $\mathbf{A}(j)$ является квадратной матрицей размера $n \times n$. Тогда для любого нечетного l множество \mathbf{L} замкнуто относительно l -арной операции $[\]_{l,\sigma,J}$, а универсальная алгебра $\langle \mathbf{L}, [\]_{l,\sigma,J} \rangle$ является l -арной полугруппой. При этом J -матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{L}$, у которых для любого $k \in \Lambda$ значение $\mathbf{A}(q_k)$ – обратная матрица для невырожденной матрицы $\mathbf{A}(p_k)$, являются идемпотентами этой l -арной полугруппы.

Считая в теореме 3.2

$$J = \{1, 2, \dots, 2r - 1, 2r\}, \quad \{p_k, q_k\} = \{2k - 1, 2k\}, \quad \Lambda = \{1, \dots, r\}, \quad r \geq 1,$$

$\sigma(j) = j + (-1)^{j+1}$ для любого $j \in J$, получим

Следствие 3.7. Пусть на множестве $\{1, 2, \dots, 2r - 1, 2r\}$, где $r \geq 1$, действует подстановка σ , переводящая нечетное число в следующее за ним число, а четное число – в предшествующее ему число. Обозначим через \mathbf{L} множество всех вектор-матриц

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{2r-1}, A_{2r})$$

над ассоциативным кольцом P таких, что для любого $k = 1, \dots, r$ компонента A_{2k-1} является матрицей размера $n_k \times n_k$, а компонента A_{2k} является матрицей размера $n_k \times n_k$. Тогда для любого нечётного l множество \mathbf{L} замкнуто относительно l -арной операции $[\]_{l,\sigma,2r}$, а универсальная алгебра $\langle \mathbf{L}, [\]_{l,\sigma,2r} \rangle$ является l -арной полугруппой. При этом вектор-матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{L}$, у которых для для любого $k = 1, \dots, r$ компонента A_{2k} – псевдообратная матрица для компоненты A_{2k-1} , являются идемпотентами этой l -арной полугруппы.

Полагая в следствии 3.7 $n_k = m$, $n_k = n$ для любого $k = 1, \dots, r$, получим

Следствие 3.8. Пусть на множестве $\{1, 2, \dots, 2r - 1, 2r\}$, где $r \geq 1$, действует подстановка σ , переводящая нечетное число в следующее за ним число, а четное число – в предшествующее ему число. Обозначим через \mathbf{L} множество всех вектор-матриц

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{2r-1}, A_{2r})$$

над ассоциативным кольцом P таких что для любого $k = 1, \dots, r$ компонента A_{2k-1} является матрицей размера $m \times n$, а компонента A_{2k} является матрицей размера $n \times m$. Тогда для любого нечётного l множество \mathbf{L} замкнуто относительно l -арной операции $[\]_{l,\sigma,2r}$, а универсальная алгебра $\langle \mathbf{L}, [\]_{l,\sigma,2r} \rangle$ является l -арной полугруппой. При

этом вектор-матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{L}$, у которых для любого $k = 1, \dots, r$ компонента A_{2k} – псевдообратная матрица для компоненты A_{2k-1} , являются идемпотентами этой l -арной полугруппы.

Полагая в следствии 3.8 $r = 1$, получим

Следствие 3.9. Пусть (12) $\in \mathbf{S}_2$, \mathbf{L} – множество всех вектор-матриц $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ над ассоциативным кольцом P таких что компонента A_1 является матрицей размера $t \times n$, а компонента A_2 является матрицей размера $n \times t$. Тогда для любого нечётного l множество \mathbf{L} замкнуто относительно l -арной операции $[]_{l,(12),2}$, а универсальная алгебра $\langle \mathbf{L}, []_{l,(12),2} \rangle$ является l -арной полугруппой. При этом вектор-матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{L}$, у которых компонента A_2 – псевдообратная матрица для компоненты A_1 , являются идемпотентами этой l -арной полугруппы.

Замечание 3.1. Из следствия 3.7 можно извлечь следствия, аналогичные следствиям 3.5 и 3.6.

4 Полная линейная l -арная группа

Напомним [1], что l -арная полугруппа $\langle A, [] \rangle$, в которой для любых $a_1, \dots, a_l, b \in A$ разрешимы уравнения

$$[xa_2 \dots a_l] = b, [a_1 \dots a_{l-1}y] = b,$$

называется l -арной группой.

Обозначим через $\mathbf{GL}_n(J, P)$ множество всех квадратных J -матриц n -го порядка над ассоциативным коммутативным кольцом P с единицей, у которых все значения обратимы в кольце $\mathbf{M}_n(P)$. Понятно, что множество $\mathbf{GL}_n(J, P)$ можно определить, как множество всех квадратных J -матриц n -го порядка над ассоциативным коммутативным кольцом P с единицей, у которых определитель каждой компоненты обратим в кольце P .

Ясно, что $\mathbf{GL}_n(J, P)$ совпадает с декартовой степенью $\mathbf{GL}_n^J(P)$ полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(P)$.

Далее во всех утверждениях этого раздела P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, для обозначения множества всех обратимых элементов которого используется символ P^* .

Имеет место

Теорема 4.1[4]. Пусть $l \geq 3$, $n \geq 2$, подстановка σ из \mathbf{S}_J удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

- 1) универсальная алгебра $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l,\sigma,J} \rangle$ является l -арной подгруппой l -арной полугруппы $\langle \mathbf{M}_n(J, P), []_{l,\sigma,J} \rangle$;
- 2) l -арная группа $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l,\sigma,J} \rangle$ имеет пустой полуцентр $\mathbf{HZ}(\mathbf{GL}_n(J, P), []_{l,\sigma,J})$ и является неполуабелевой, в частности, неабелевой;
- 3) если подстановка σ – нетождественная, то l -арная группа $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l,\sigma,J} \rangle$ имеет пустой центр и в ней нет единицы;
- 4) если подстановка σ – тождественная, то

$$\mathbf{Z}(\mathbf{GL}_n(J, P), []_{l,\sigma,J}) = \{ \mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(J, P) \mid \mathbf{A}(j) = u_j \mathbf{E}_n, \quad u_j \in P^*, j \in J \},$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{GL}_n(J, P), []_{l,\sigma,J}) = \{ \mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(J, P) \mid \mathbf{A}(j) = u_j \mathbf{E}_n, \quad u_j^{l-1} = 1, j \in J \},$$

где \mathbf{E}_n – единичная матрица из $\mathbf{GL}_n(P)$, 1 – единица поля P .

Таким образом, согласно утверждению 4) теоремы 4.1 J -матрица $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(J, P)$ принадлежит центру $\mathbf{Z}(\mathbf{GL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J})$ l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$ тогда и только тогда, когда все ее значения являются скалярными матрицами из $\mathbf{GL}_n(P)$; J -матрица $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(J, P)$ является единицей в $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$ тогда и только тогда, когда все ее значения являются скалярными матрицами из $\mathbf{GL}_n(P)$, порядок которых делит $l - 1$.

Полагая в утверждении 1) теоремы 4.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 4.1 [16]. *Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.*

Пост изучал [1] частный случай l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$ при $J = \{1, 2, \dots, k\}$, $l = k + 1$, $\sigma = (12 \dots k)$, $P = \mathbb{C}$ – поле комплексных чисел. При этом $(k + 1)$ -арную группу $\langle \mathbf{GL}_n(k, \mathbb{C}) []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ он называл полной линейной $(k + 1)$ -арной группой.

Следствие 4.2 [1]. *Если $k \geq 2$, $n \geq 2$, то $\langle \mathbf{GL}_n(k, \mathbb{C}), []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ – l -арная группа.*

Обозначим через $\mathbf{SL}_n(J, P)$ множество всех J -матриц из $\mathbf{GL}_n(J, P)$, у которых определители всех значений равны единице ассоциативного коммутативного кольца P с единицей. Ясно, что множество $\mathbf{SL}_n(J, P)$ совпадает с декартовой степенью $\mathbf{SL}_n^J(P)$ специальной линейной группы $\mathbf{SL}_n(P)$. Справедлива

Теорема 4.2 [4]. *Пусть $l \geq 3$, $n \geq 2$, подстановка σ из \mathbf{S}_J удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:*

- 1) универсальная алгебра $\langle \mathbf{SL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$ является l -арной подгруппой l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$;
- 2) l -арная группа $\langle \mathbf{SL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$ имеет пустой полуцентр $\mathbf{HZ}(\mathbf{SL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J})$ и является неполуабелевой, в частности, неабелевой;
- 3) если подстановка σ – нетождественная, то l -арная группа $\langle \mathbf{SL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$ имеет пустой центр и в ней нет единицы;
- 4) если подстановка σ – тождественная, то

$$\mathbf{Z}(\mathbf{SL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J}) = \{ \mathbf{A} \in \mathbf{SL}_n(J, P) \mid \mathbf{A}(j) = u_j \mathbf{E}_n, \quad u_j \in P^*, \quad j \in J \},$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{SL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J}) = \{ \mathbf{A} \in \mathbf{SL}_n(J, P) \mid \mathbf{A}(j) = u_j \mathbf{E}_n, \quad u_j^{l-1} = 1, \quad j \in J \},$$

где \mathbf{E}_n – единичная матрица из $\mathbf{GL}_n(P)$, 1 – единица поля P .

Замечание 4.1. Ясно, что

$$\mathbf{Z}(\mathbf{SL}_n(J, P)) = \mathbf{Z}(\mathbf{GL}_n(J, P)) \cap \mathbf{SL}_n(J, P),$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{SL}_n(J, P)) = \mathbf{E}(\mathbf{GL}_n(J, P)) \cap \mathbf{SL}_n(J, P).$$

l -Арную группу $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$ по аналогии с бинарным случаем естественно называть полной линейной l -арной группой, соответствующей данным J и σ , а l -арную группу $\langle \mathbf{SL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$ – специальной линейной l -арной группой, соответствующей тем же J и σ .

Полагая в утверждении 1) теоремы 4.2 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 4.3 [17]. *Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то*

$\langle \mathbf{SL}_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

Полагая в теоремах 4.1 и 4.2, $J = \{1, 2, \dots, k\}$, $J = \mathbb{N}$ или $J = \mathbb{Z}$, можно получить соответствующие следствия.

5 Косые элементы в $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$

Для любого элемента a l -арной группы $\langle A, [] \rangle$ решение уравнения $[x \underbrace{a \dots a}_{l-1}] = a$ обозначают символом \bar{a} и называют *косым элементом* для a .

Вообще говоря, в обозначении косоуго элемента должен присутствовать символ l -арной групповой операции, который, как правило, не указывают, чтобы не загромождать записи. Однако, в некоторых случаях, присутствие символа l -арной групповой операции в обозначении косоуго элемента желательно. В таких случаях для обозначения косоуго элемента a l -арной группы $\langle A, [] \rangle$ мы используем символ $\mathbf{A}^{\overline{[]}_{l, \sigma, J}}$. В частности, $\mathbf{A}^{\overline{[]}_{l, \sigma, J}}$ – косоуго элемент для J -матрицы \mathbf{A} l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$. Таким образом, любая J -матрица \mathbf{A} l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$ обладает косоуго элементом $\mathbf{A}^{\overline{[]}_{l, \sigma, J}}$, который естественно называть *косоуго J -матрицей*.

Подчеркнем, что косоуго J -матрицы определяются для J -матриц l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$, у которых, согласно определению все значения являются обратимыми квадратными матрицами одного и того же порядка n , а подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$.

Предложение 5.1. Пусть подстановка σ из \mathbf{S}_J удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда для любой J -матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(J, P)$ существует косоуго J -матрица $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\overline{[]}_{l, \sigma, J}}$, значения которой имеют следующий вид

$$\mathbf{B}(j) = (\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1}, \quad j \in J. \quad (5.1)$$

Доказательство. Так как J -матрица \mathbf{A} является элементом l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$, то существует косоуго элемент $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\overline{[]}_{l, \sigma, J}}$, для которого

$$[\mathbf{B} \underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{l-1}]_{l, \sigma, J} = \mathbf{A},$$

то есть

$$[\mathbf{B} \underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{l-1}]_{l, \sigma, J}(j) = \mathbf{A}(j), \quad j \in J,$$

откуда, используя определение операции $[]_{l, \sigma, J}$ и тождественность подстановки σ^{l-1} , получаем

$$\mathbf{B}(j) \mathbf{A}(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)) \mathbf{A}(j) = \mathbf{A}(j).$$

Из последнего равенства вытекает (5.1). Предложение доказано.

Замечание 5.1. Доказанное предложение может быть получена из предложения 2.7.2 [4], если в нем считать группу A полной линейной группой $\mathbf{GL}_n(J, P)$.

Полагая в предложении 5.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 5.1[16]. Пусть подстановка σ из \mathbf{S}_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда для любой вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k) \in \mathbf{GL}_n(k, P)$ существует косоуго вектор-матрица $\mathbf{A}^{\overline{[]}_{l, \sigma, k}} = (B_1, \dots, B_k)$, компоненты которой имеют следующий вид

$$B_j = A_{\sigma^{l-2}(j)}^{-1} \dots A_{\sigma(j)}^{-1}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Полагая в предложении 5.1 $J = N$, получим

Следствие 5.2. Пусть подстановка σ из S_N удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда для любой N -матрицы $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots) \in \mathbf{GL}_n(N, P)$ существует косая N -матрица $\mathbf{A}^{\lceil 1, \sigma, N} = (B_1, B_2, \dots)$, компоненты которой имеют следующий вид

$$B_j = A_{\sigma^{l-2}(j)}^{-1} \dots A_{\sigma(j)}^{-1}, \quad J \in N.$$

Полагая в предложении 5.1 $J = Z$, получим

Следствие 5.3. Пусть подстановка σ из S_Z удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда для любой Z -матрицы $\mathbf{A} = (\dots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \dots) \in \mathbf{GL}_n(Z, P)$ существует косая Z -матрица $\mathbf{A}^{\lceil 1, \sigma, Z} = (\dots, B_{-2}, B_{-1}, B_0, B_1, B_2, \dots)$, компоненты которой имеют следующий вид

$$B_j = A_{\sigma^{l-2}(j)}^{-1} \dots A_{\sigma(j)}^{-1}, \quad J \in Z.$$

6 Транспонированные J -матрицы

Определение 6.1. Для всякой J -матрицы \mathbf{A} над ассоциативным кольцом с единицей транспонированной называется J -матрица \mathbf{A}' , у которой для любого $j \in J$ значение $\mathbf{A}'(j)$ является транспонированной матрицей для соответствующего значения $\mathbf{A}(j)$ J -матрицы \mathbf{A} : $\mathbf{A}'(j) = (\mathbf{A}(j))'$.

Подчеркнем, что в определении 6.1 для различных i и j значения $\mathbf{A}(i)$ и $\mathbf{A}(j)$ могут быть матрицами разных размеров.

Если определить произведение элемента $\lambda \in P$ на J -матрицу \mathbf{A} и сумму J -матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} одинаковых размеров поточечно:

$$(\lambda \mathbf{A})(j) = \lambda \mathbf{A}(j), \quad \lambda \in P; \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})(j) = \mathbf{A}(j) + \mathbf{B}(j), \quad j \in J,$$

то, используя верные для обычных матриц равенства

$$(\lambda A)' = \lambda A', \quad \lambda \in P; \quad (A + B)' = A' + B',$$

можно убедиться в справедливости аналогичных равенств

$$(\lambda \mathbf{A})' = \lambda \mathbf{A}', \quad \lambda \in P; \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$$

для J -матриц.

Нам понадобится следующий бинарный результат.

Лемма 6.1. Если для матриц B_1, \dots, B_l над ассоциативным кольцом с единицей определено произведение $B_1 B_2 \dots B_l$, то определено произведение $B_1' \dots B_2' B_1'$ и верно равенство

$$(B_1 B_2 \dots B_l)' = B_1' \dots B_2' B_1'.$$

Теорема 6.1. Пусть подстановка σ из S_J удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ — такие J -матрицы над ассоциативным кольцом с единицей, что определена J -матрица

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{l-1} \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, J}. \tag{6.1}$$

Тогда определена J -матрица

$$[\mathbf{A}_l' \mathbf{A}_{l-1}' \dots \mathbf{A}_2' \mathbf{A}_1']_{l, \sigma^{-1}, J} \tag{6.2}$$

и верно равенство

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{l-1} \mathbf{A}_l]'_{l,\sigma,J} = [\mathbf{A}'_l \mathbf{A}'_{l-1} \dots \mathbf{A}'_2 \mathbf{A}'_1]_{l,\sigma^{-1},J}. \quad (6.3)$$

Доказательство. Если положить $\tau = \sigma^{-1}$, то из условия $\sigma^l = \sigma$ получаем

$$\tau = \sigma^{l-2}, \quad \tau^2 = \sigma^{l-3}, \quad \dots, \quad \tau^{l-2} = \sigma, \quad \tau^{l-1} = \varepsilon, \quad \tau^l = \tau. \quad (6.4)$$

Используя эти равенства, а также лемму 6.1, тождественность подстановки σ^{l-1} и равенства

$$(\mathbf{A}_i(r))' = \mathbf{A}'_i(r), \quad i = 1, \dots, l, \quad r \in J,$$

получим

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{l-1} \mathbf{A}_l]'_{l,\sigma,J}(j) &= (\mathbf{A}_1(j) \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)) \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)))' = \\ &= (\mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j))' (\mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)))' \dots (\mathbf{A}_2(\sigma(j)))' (\mathbf{A}_1(j))' = \\ &= (\mathbf{A}_l(j))' (\mathbf{A}_{l-1}(\tau(j)))' \dots (\mathbf{A}_2(\tau^{l-2}(j)))' (\mathbf{A}_1(j))' = \\ &= \mathbf{A}'_l(j) \mathbf{A}'_{l-1}(\tau(j)) \dots \mathbf{A}'_2(\tau^{l-2}(j)) \mathbf{A}'_1(\tau^{l-1}(j)) = \\ &= [\mathbf{A}'_l \mathbf{A}'_{l-1} \dots \mathbf{A}'_2 \mathbf{A}'_1]_{l,\tau,J}(j) = [\mathbf{A}'_l \mathbf{A}'_{l-1} \dots \mathbf{A}'_2 \mathbf{A}'_1]_{l,\sigma^{-1},J}(j). \end{aligned}$$

Таким образом, доказаны как существование J -матрица (6.2), так и само равенство (6.3). Теорема доказана.

Замечание 6.1. Равенство (6.3) является аналогом соответствующего бинарного равенства из леммы 6.1. Отличие состоит в том, что в правой части равенства (6.3) присутствует обратная подстановка. В бинарном равенстве это присутствие явно не проявляется, так как в этом случае подстановка σ – тождественная.

Если квадратные J -матрицы $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ таковы, что для любого $j \in J$ матрицы

$$\mathbf{A}_1(j), \mathbf{A}_2(\sigma(j)), \dots, \mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)), \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)) \quad (6.5)$$

имеют одинаковый порядок, то определена J -матрица (6.1). Поэтому из теоремы 6.1 вытекает.

Следствие 6.1. Пусть подстановка σ из \mathbf{S}_J удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, J -матрицы $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ являются квадратными, и для любого $j \in J$ матрицы (6.5) имеют одинаковый порядок. Тогда верно (6.3).

Следствие 6.2. Пусть подстановка σ из \mathbf{S}_J удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ – квадратные J -матрицы одного и того же порядка. Тогда верно (6.3).

Если подстановка σ из \mathbf{S}_J является тождественной или имеет порядок, равный двум, то $\sigma = \sigma^{-1}$, $\sigma^l = \sigma$ для любого нечетного l . Поэтому из теоремы 6.1 и следствий 6.1 и 6.2 получаются соответственно еще три следствия.

Следствие 6.3. Пусть подстановка σ из \mathbf{S}_J является тождественной или имеет порядок, равный двум; l – нечётное, $l \geq 3$; J -матрицы $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ таковы, что определена J -матрица (6.1). Тогда определена J -матрица $[\mathbf{A}'_l \mathbf{A}'_{l-1} \dots \mathbf{A}'_2 \mathbf{A}'_1]_{l,\sigma,J}$ и верно равенство

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{l-1} \mathbf{A}_l]'_{l,\sigma,J} = [\mathbf{A}'_l \mathbf{A}'_{l-1} \dots \mathbf{A}'_2 \mathbf{A}'_1]_{l,\sigma,J} \quad (6.6)$$

В частности, если $l=3$, то

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3]'_{3,\sigma,J} = [\mathbf{A}'_3 \mathbf{A}'_2 \mathbf{A}'_1]_{3,\sigma,J}. \quad (6.7)$$

Следствие 6.4. Пусть подстановка σ из \mathbf{S}_J является тождественной или имеет порядок, равный двум; l – нечётное, $l \geq 3$; квадратные J -матрицы $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ таковы, что для любого $j \in J$ матрицы (6.5) имеют одинаковый порядок. Тогда верно (6.6). В частности, если $l = 3$, то верно (6.7).

Следствие 6.5. Пусть подстановка σ из \mathbf{S}_J является тождественной или имеет порядок, равный двум; l – нечётное, $l \geq 3$; $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ – квадратные J -матрицы одного и того же порядка. Тогда верно (6.6). В частности, если $l = 3$, то верно (6.7).

Замечание 6.2. В следствиях 6.3 – 6.5 можно, например, в качестве множества J взять множество \mathbb{N} , а в качестве подстановки σ – подстановку из примера 2.1, действующую по правилу $\sigma(j) = j + (-1)^{j+1}$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Можно также в качестве множества J взять множество \mathbb{Z} , а в качестве подстановки σ – подстановку из примера 2.2, действующую по правилу $\sigma(j) = -j$ для любого $j \in \mathbb{Z}$.

В [16] приведено большое количество утверждений о транспонированных J -матрицах для случая $J = \{1, 2, \dots, k\}$. Сформулируем только одно из них.

Полагая в теореме 6.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 6.6 [16]. Пусть подстановка σ из \mathbf{S}_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), \quad i = 1, \dots, l$$

– такие вектор-матрицы над ассоциативным кольцом с единицей, что определена вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{l-1} \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}.$$

Тогда определена вектор-матрица

$$[\mathbf{A}'_1 \mathbf{A}'_{1-1} \dots \mathbf{A}'_2 \mathbf{A}'_1]_{l, \sigma^{-1}, k}$$

и верно равенство

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{l-1} \mathbf{A}_l]'_{l, \sigma, k} = [\mathbf{A}'_1 \mathbf{A}'_{1-1} \dots \mathbf{A}'_2 \mathbf{A}'_1]_{l, \sigma^{-1}, k}.$$

7 Связь между транспонированными и косыми J -матрицами

В l -арной группе $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$ между операциями транспонирования и взятия косого элемента существует связь, аналогичная связи в группе $\mathbf{GL}_n(P)$ между операциями транспонирования и взятия обратного элемента. Эта связь выражается приводимой ниже теоремой, из формулировки которой видно, что в отличие от бинарного случая, где операции транспонирования и взятия обратного элемента перестановочны, в полиадическом случае операции транспонирования и взятия косого элемента перестановочны с точностью до обратной подстановки. В бинарном случае это отличие не проявляется, так как в этом случае подстановка σ – тождественная.

Теорема 7.1. Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, \mathbf{A} – J -матрица из $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$, то

$$(\overline{\mathbf{A}}^{\lceil l, \sigma, J \rceil})' = (\mathbf{A}')^{\lceil l, \sigma^{-1}, J \rceil}. \tag{7.1}$$

Доказательство. Так как по предложению 5.1

$$\overline{\mathbf{A}}^{\lceil l, \sigma, J \rceil}(j) = (\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1}, \quad j \in J,$$

и, кроме того, согласно определению 6.1

$$(\mathbf{A}^{\overline{[l, \sigma, J]}})'(j) = (\mathbf{A}^{\overline{[l, \sigma, J]}(j)})', \quad j \in J,$$

то, используя лемму 6.1, получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^{\overline{[l, \sigma, J]}})'(j) &= (\mathbf{A}^{\overline{[l, \sigma, J]}(j)})' = ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})' = \\ &= ((\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})' \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1})', \end{aligned}$$

то есть

$$(\mathbf{A}^{\overline{[l, \sigma, J]}})'(j) = ((\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})' \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1})', \quad j \in J. \quad (7.2)$$

С другой стороны, так как, согласно определению 6.1

$$\mathbf{A}'(r) = (\mathbf{A}(r))', \quad r \in J,$$

то, полагая $\tau = \sigma^{-1}$, и, используя равенства (6.4), предложение 5.1 и соответствующий бинарный результат (операции транспонирования и взятия обратного элемента перестановочны), получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}')^{\overline{[l, \sigma^{-1}, J]}}(j) &= (\mathbf{A}'(\tau^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{A}'(\tau(j)))^{-1} = \\ &= ((\mathbf{A}(\tau^{l-2}(j)))')^{-1} \dots ((\mathbf{A}(\tau(j)))')^{-1} = \\ &= ((\mathbf{A}(\sigma(j)))')^{-1} \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))')^{-1} = ((\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})' \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1})', \end{aligned}$$

то есть

$$(\mathbf{A}')^{\overline{[l, \sigma^{-1}, J]}}(j) = ((\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})' \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1})', \quad j \in J. \quad (7.3)$$

Из (7.2) и (7.3) вытекает (7.1). Теорема доказана.

Следствие 7.1. Если подстановка σ из \mathbf{S}_J является тождественной или имеет порядок, равный двум; l – нечётное, $l \geq 3$; \mathbf{A} – J -матрица из $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$, то

$$(\mathbf{A}^{\overline{[l, \sigma, J]}})' = (\mathbf{A}')^{\overline{[l, \sigma, J]}}.$$

В частности, если $l = 3$, то

$$(\mathbf{A}^{\overline{[3, \sigma, J]}})' = (\mathbf{A}')^{\overline{[3, \sigma, J]}}.$$

Полагая в теореме 7.1 и следствии 7.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим ещё два следствия.

Следствие 7.2 [16]. Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$, удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, \mathbf{A} – вектор-матрица из $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$, то

$$(\mathbf{A}^{\overline{[l, \sigma, k]}})' = (\mathbf{A}')^{\overline{[l, \sigma^{-1}, k]}}.$$

Следствие 7.3. Если подстановка σ из \mathbf{S}_k является тождественной или имеет порядок, равный двум; l – нечётное, $l \geq 3$; \mathbf{A} – вектор-матрица из $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$, то

$$(\mathbf{A}^{\overline{[l, \sigma, k]}})' = (\mathbf{A}')^{\overline{[l, \sigma, k]}}.$$

В частности, если $l = 3$, то

$$(\mathbf{A}^{\overline{[3, \sigma, k]}})' = (\mathbf{A}')^{\overline{[3, \sigma, k]}}.$$

8 Комплексно сопряжённые и эрмитово сопряжённые J -матрицы

В данном разделе определяются и изучаются комплексно сопряжённые и эрмитово сопряжённые J -матрицы.

Определение 8.1. Для всякой J -матрицы \mathbf{A} над \mathbb{C} назовем *комплексно сопряжённой* J -матрицу $\bar{\mathbf{A}}$, у которой для любого $j \in J$ значение $\bar{\mathbf{A}}(j)$ является комплексно сопряжённой матрицей для соответствующего значения $\mathbf{A}(j)$ J -матрицы \mathbf{A} : $\bar{\mathbf{A}}(j) = \overline{\mathbf{A}(j)}$.

Определение 8.2. Для всякой J -матрицы \mathbf{A} над \mathbb{C} назовем *эрмитово сопряжённой* J -матрицу \mathbf{A}^* , у которой для любого $j \in J$ значение $\mathbf{A}^*(j)$ является эрмитово сопряжённой матрицей для соответствующего значения $\mathbf{A}(j)$ J -матрицы \mathbf{A} : $\mathbf{A}^*(j) = (\mathbf{A}(j))^*$.

Ясно, что для действительной J -матрицы \mathbf{A} , то есть J -матрицы, у которой все значения являются действительными матрицами, J -матрицы \mathbf{A}^* и \mathbf{A}' совпадают, где \mathbf{A}' – транспонированная J -матрица.

Замечание 8.1. Так как всякий элемент из \mathbb{C} можно рассматривать как квадратную матрицу первого порядка, то любая функция \mathbf{z} с областью определения J и со значениями в \mathbb{C} является J -матрицей первого порядка, для которой, согласно определениям 8.1 и 8.2

$$\bar{\mathbf{z}}(j) = \overline{\mathbf{z}(j)}, \quad \mathbf{z}^*(j) = (\mathbf{z}(j))^*, \quad j \in J.$$

Каждое из восьми равенств в следующем предложении является следствием соответствующего равенства для обычных матриц.

Предложение 8.1. Пусть \mathbf{A} и \mathbf{B} – произвольные J -матрицы над \mathbb{C} . Тогда:

1) если \mathbf{A} и \mathbf{B} имеют одинаковые размеры, то

$$\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}, \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*;$$

2) если $\lambda \in \mathbb{C}$, то

$$\overline{\lambda \mathbf{A}} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{A}}, \quad (\lambda \mathbf{A})^* = \bar{\lambda} \mathbf{A}^*;$$

3) операция транспонирования перестановочна и с операцией комплексного сопряжения и с операцией эрмитового сопряжения, то есть

$$\overline{\mathbf{A}'} = \bar{\mathbf{A}}', \quad (\mathbf{A}')^* = (\mathbf{A}^*)';$$

4) операции комплексного сопряжения и эрмитового сопряжения инволютивны, то есть

$$\overline{\bar{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}.$$

Нам понадобится следующий бинарный результат.

Лемма 8.1. Если для матриц B_1, \dots, B_l над \mathbb{C} определено произведение $B_1 B_2 \dots B_l$, то определено произведение $B_1^* \dots B_2^* B_1^*$ и верно равенство

$$(B_1 B_2 \dots B_l)^* = B_1^* \dots B_2^* B_1^*.$$

Теорема 8.1. Пусть подстановка σ из S_J удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ такие J -матрицы над \mathbb{C} , что определена J -матрица

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, J}. \tag{8.1}$$

Тогда определены J -матрицы

$$\overline{[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, J}}, [\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{A}}_2 \dots \bar{\mathbf{A}}_l]_{l, \sigma, J}, \quad (8.2)$$

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, J}^*, [\mathbf{A}_l^* \dots \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{l, \sigma^{-1}, J} \quad (8.3)$$

и верны равенства

$$\overline{[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, J}} = [\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{A}}_2 \dots \bar{\mathbf{A}}_l]_{l, \sigma, J}, \quad (8.4)$$

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, J}^* = [\mathbf{A}_l^* \dots \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{l, \sigma^{-1}, J}. \quad (8.5)$$

Доказательство. Так как $\overline{UV} = \bar{U}\bar{V}$ для обычных матриц, то

$$\overline{\mathbf{A}_1(j) \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j))} = \overline{\mathbf{A}_1(j)} \overline{\mathbf{A}_2(\sigma(j))} \dots \overline{\mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j))} \quad (8.6)$$

для любого $j \in J$. Левая часть последнего равенства совпадают со значением первой J -матрицы из (8.2) в точке j . Правая часть этого равенства совпадает со значением второй J -матрицы из (8.2) в точке j , так как согласно определению 8.1

$$\overline{\mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j))} = \bar{\mathbf{A}}_i(\sigma^{i-1}(j)), \quad i = 1, \dots, l.$$

Таким образом, обе указанные J -матрицы существуют. Тогда равенство (8.4) вытекает из равенства (8.6).

Существование первой J -матрицы в (8.3) является следствием существования J -матрицы (8.1).

Используя равенства (6.4), а также лемму 8.1, тождественность подстановки σ^{l-1} и равенства

$$(\mathbf{A}_i(r))^* = \mathbf{A}_i^*(r), \quad i = 1, \dots, l, \quad r \in J,$$

получим

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, J}^*(j) &= (\mathbf{A}_1(j) \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)) \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)))^* = \\ &= (\mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)))^* (\mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)))^* \dots (\mathbf{A}_2(\sigma(j)))^* (\mathbf{A}_1(j))^* = \\ &= (\mathbf{A}_l(j))^* (\mathbf{A}_{l-1}(\tau(j)))^* \dots (\mathbf{A}_2(\tau^{l-2}(j)))^* (\mathbf{A}_1(j))^* = \\ &= \mathbf{A}_l^*(j) \mathbf{A}_{l-1}^*(\tau(j)) \dots \mathbf{A}_2^*(\tau^{l-2}(j)) \mathbf{A}_1^*(\tau^{l-1}(j)) = \\ &= [\mathbf{A}_l^* \mathbf{A}_{l-1}^* \dots \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{l, \tau, J}(j) = [\mathbf{A}_l^* \mathbf{A}_l^* \dots \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{l, \sigma^{-1}, J}(j). \end{aligned}$$

Таким образом, доказаны как существование второй J -матрицы в (8.3), так и само равенство (8.5). Теорема доказана.

Замечание 8.2. Равенство (8.5) может быть получено как следствие равенства (8.4) и равенства (6.3).

Следствие 8.1. Пусть подстановка σ из \mathbf{S}_J удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, J -матрицы $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ над \mathbb{C} являются квадратными, и для любого $j \in J$ матрицы (6.4) имеют одинаковый порядок. Тогда верны равенства (8.4) и (8.5).

Следствие 8.2. Пусть подстановка σ из \mathbf{S}_J удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ – квадратные J -матрицы над \mathbb{C} одного и того же порядка. Тогда верны равенства (8.4) и (8.5).

Если подстановка σ из \mathbf{S}_J является тождественной или имеет порядок, равный двум, то из теоремы 8.1 и следствий 8.1 и 8.2 получаются соответственно еще три следствия.

Следствие 8.3. Пусть подстановка σ из \mathbf{S}_J является тождественной или имеет порядок, равный двум; l – нечётное, $l \geq 3$; J -матрицы $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ таковы, что определена

J -матрица (8.1). Тогда определена J -матрица $[\mathbf{A}_l^* \dots \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{l,\sigma,J}$, и верно равенство

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}^* = [\mathbf{A}_l^* \dots \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{l,\sigma,J}. \quad (8.7)$$

В частности, если $l=3$, то

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3]_{l,\sigma,J}^* = [\mathbf{A}_3^* \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{l,\sigma,J}. \quad (8.8)$$

Следствие 8.4. Пусть подстановка σ из \mathbf{S}_J является тождественной или имеет порядок, равный двум; l – нечётное, $l \geq 3$; квадратные J -матрицы $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ таковы, что для любого $j \in J$ матрицы (6.4) имеют одинаковый порядок. Тогда верно (8.7). В частности, если $l=3$, то верно (8.8).

Следствие 8.5. Пусть подстановка σ из \mathbf{S}_J является тождественной или имеет порядок, равный двум; l – нечётное, $l \geq 3$; $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ – квадратные J -матрицы одного и того же порядка. Тогда верно (8.7). В частности, если $l=3$, то верно (8.8).

Замечание 8.3. В следствиях 8.3 – 8.5, как и в следствиях 6.3 – 6.5, можно в качестве множества J взять множество \mathbb{N} , а в качестве подстановки σ – подстановку из примера 2.1 или можно в качестве множества J взять множество \mathbb{Z} , а в качестве подстановки σ – подстановку из примера 2.2.

В [18] приведено большое количество утверждений о комплексно сопряженных и эрмитово сопряженных J -матрицах для случая $J = \{1, 2, \dots, k\}$. Сформулируем только одно из них.

Полагая в теореме 8.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 8.6 [18]. Пусть подстановка σ из \mathbf{S}_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), \quad i = 1, \dots, l.$$

– такие вектор-матрицы над \mathbb{C} , что определена вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}.$$

Тогда определены вектор-матрицы

$$\overline{[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}}, [\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{A}}_2 \dots \bar{\mathbf{A}}_l]_{l,\sigma,k},$$

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}^*, [\mathbf{A}_l^* \dots \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{l,\sigma^{-1},k}$$

и верны равенства

$$\overline{[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}} = [\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{A}}_2 \dots \bar{\mathbf{A}}_l]_{l,\sigma,k},$$

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}^* = [\mathbf{A}_l^* \dots \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{l,\sigma^{-1},k}.$$

9 Связь между сопряжёнными и косыми J -матрицами

В следующей теореме обобщаются равенства

$$\overline{(\mathbf{A}^{-1})} = (\bar{\mathbf{A}})^{-1}, (\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1},$$

справедливые для квадратных невырожденных матриц.

Теорема 9.1. Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, \mathbf{A} – J -матрица из $\langle \mathbf{GL}_n(J, \mathbb{C}), []_{l,\sigma,J} \rangle$, то верны равенства

$$\overline{\mathbf{A}^{\lceil }]_{l,\sigma,J}} = (\bar{\mathbf{A}})^{\lceil }]_{l,\sigma,J}, (\mathbf{A}^{\lceil }]_{l,\sigma,J})^* = (\mathbf{A}^*)^{\lceil }]_{l,\sigma^{-1},J}. \quad (9.1)$$

Доказательство. Докажем второе равенство.

Так как по предположению 5.1

$$\mathbf{A}^{\overline{[]_{l,\sigma,J}}}(j) = (\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1}, \quad j \in J,$$

и, кроме того, согласно определению 8.2

$$(\mathbf{A}^{\overline{[]_{l,\sigma,J}}})^*(j) = (\mathbf{A}^{\overline{[]_{l,\sigma,J}}}(j))^*, \quad j \in J,$$

то, используя лемму 8.1, получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^{\overline{[]_{l,\sigma,J}}})^*(j) &= (\mathbf{A}^{\overline{[]_{l,\sigma,J}}}(j))^* = ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})^* = \\ &= ((\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})^* \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1})^*, \end{aligned}$$

то есть

$$(\mathbf{A}^{\overline{[]_{l,\sigma,J}}})^*(j) = ((\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})^* \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1})^*, \quad j \in J. \quad (9.2)$$

С другой стороны, так как, согласно определению 8.2

$$\mathbf{A}^*(r) = (\mathbf{A}(r))^*, \quad r \in J,$$

то, полагая $\tau = \sigma^{-1}$, и, используя равенства (6.4), предложение 5.1 и соответствующий бинарный результат (операции комплексного сопряжения и взятия обратного элемента перестановочны), получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^*)^{\overline{[]_{l,\sigma^{-1},J}}}(j) &= (\mathbf{A}^*(\tau^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{A}^*(\tau(j)))^{-1} = \\ &= ((\mathbf{A}(\tau^{l-2}(j)))^*)^{-1} \dots ((\mathbf{A}(\tau(j)))^*)^{-1} = \\ &= ((\mathbf{A}(\sigma(j)))^*)^{-1} \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^*)^{-1} = ((\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})^* \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1})^*, \end{aligned}$$

то есть

$$(\mathbf{A}^*)^{\overline{[]_{l,\sigma^{-1},J}}}(j) = ((\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})^* \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1})^*, \quad j \in J. \quad (9.3)$$

Из (9.2) и (9.3) вытекает (9.1).

Первое равенство из (9.1) доказывается аналогично. Теорема доказана.

Замечание 9.1. Второе равенство в (9.1) может быть получено как следствие первого равенства в (9.1) и равенства (6.3).

Следствие 9.1. Если подстановка σ из \mathbf{S}_J является тождественной или имеет порядок, равный двум; l – нечётное, $l \geq 3$; \mathbf{A} – J -матрица из $\langle \mathbf{GL}_n(J, \mathbb{C}), []_{l,\sigma,J} \rangle$, то

$$(\mathbf{A}^{\overline{[]_{l,\sigma,J}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[]_{l,\sigma,J}}}.$$

В частности, если $l = 3$, то

$$(\mathbf{A}^{\overline{[]_{3,\sigma,J}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[]_{3,\sigma,J}}}.$$

Полагая в теореме 9.1 и следствии 9.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим ещё два следствия.

Следствие 9.2 [18]. Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$, удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, \mathbf{A} – вектор-матрица из $\langle \mathbf{GL}_n(k, \mathbb{C}), []_{l,\sigma,k} \rangle$, то

$$\overline{\overline{\mathbf{A}^{\overline{[]_{l,\sigma,k}}}}} = (\overline{\mathbf{A}})^{\overline{[]_{l,\sigma,k}}}, (\mathbf{A}^{\overline{[]_{l,\sigma,k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[]_{l,\sigma^{-1},k}}}.$$

Следствие 9.3. Если подстановка σ из \mathbf{S}_k является тождественной или имеет порядок, равный двум; l – нечётное, $l \geq 3$; \mathbf{A} – векто-матрица из $\langle \mathbf{GL}_n(k, \mathbb{C}), []_{l,\sigma,k} \rangle$, то

$$(\mathbf{A}^{\overline{[]_{l,\sigma,k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[]_{l,\sigma,k}}}.$$

В частности, если $l = 3$, то

$$(\mathbf{A}^{\overline{[]_{3,\sigma,k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[]_{3,\sigma,k}}}.$$

10 J -Определители, простейшие свойства

В теории обычных матриц каждой квадратной матрице над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей ставится в соответствие ее определитель, являющийся элементом этого кольца. Возникает естественный вопрос: *как определить для J -матрицы аналог обычного определителя?*

В данном разделе для каждой J -матрицы \mathbf{A} над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей определяется J -определитель $\mathbf{det}_{\mathbf{A}}$, который для обычной матрицы совпадает с ее определителем.

Определение 10.1. Пусть P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. J -определителем квадратной J -матрицы \mathbf{A} над P , то есть J -матрицы \mathbf{A} , у которой все значения $\mathbf{A}(j)$ являются квадратными матрицами над P , называется функция $\mathbf{det}_{\mathbf{A}} \in P^J$, ставящая в соответствие с каждому $j \in J$ определитель матрицы $\mathbf{A}(j)$:

$$\mathbf{det}_{\mathbf{A}}(j) = \det \mathbf{A}(j) \in P.$$

Замечание 10.1. В [19] для каждой квадратной k -компонентной вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей был определен вектор-определитель

$$\mathbf{det}_{\mathbf{A}} = \{\det A_1, \dots, \det A_k\},$$

который, как несложно заметить, является J -определителем, если множество J совпадает с множеством $\{1, 2, \dots, k\}$. Отметим, что в [19] вместо символа $\mathbf{det}_{\mathbf{A}}$ использовался символ $\mathbf{det} \mathbf{A}$. Употребление в общем случае символа $\mathbf{det}_{\mathbf{A}}$ в формулах, на наш взгляд, предпочтительнее, так как отпадает необходимость в расстановке лишних скобок.

По аналогии со случаем $J = \{1, 2, \dots, k\}$ N -определитель N -матрицы $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots)$ удобно записывать в виде

$$\mathbf{det}_{\mathbf{A}} = \{\det A_1, \det A_2, \dots\},$$

а Z -определитель Z -матрицы $\mathbf{A}_i = (\dots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \dots)$ удобно записывать в виде

$$\mathbf{det}_{\mathbf{A}} = \{(\dots, \det A_{-2}, \det A_{-1}, \det A_0, \det A_1, \det A_2, \dots)\}.$$

Ясно, что для одноэлементного множества J понятия J -определителя и определителя совпадают: $\mathbf{det}_{\mathbf{A}} = \det \mathbf{A}$.

Пример 10.1. Если $J = \{1, 2, 3\}$, $P = \mathbb{Z}$,

$$\mathbf{A} = \left(\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, 5, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \right),$$

то $\mathbf{det}_{\mathbf{A}} = (16, 5, -3)$.

Замечание 10.2. Понятно, что множество $\mathbf{SL}_n(J, P)$ совпадает с множеством всех J -матриц \mathbf{A} над P , у которых J -определитель $\mathbf{det}_{\mathbf{A}}$ является постоянной функцией $\mathbf{e} \in P^J$, ставящей в соответствие каждому $j \in J$ единицу кольца P : $\mathbf{det}_{\mathbf{A}} = \mathbf{e}$.

Далее все J -матрицы рассматриваются над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей.

Сформулированные ниже свойства J -определителей получаются с помощью соответствующих свойств обычных определителей.

Предложение 10.1. Если A' – транспонированная J -матрица для квадратной J -матрицы A , то $\det_{A'} = \det_A$.

В соответствии с соглашением в разделе 1, для обозначения функция из P^J , ставящей в соответствие каждому $j \in J$ нуль 0 кольца P будем использовать символ 0 .

Предложение 10.2. Если квадратная J -матрица A , такова, что для любого $j \in J$ в матрице $A(j)$ имеется строка или столбец, состоящий целиком из нулей кольца P , то $\det_A = 0 \in P^J$.

Предложение 10.3. Для любого $\lambda \in P$ и любой квадратной J -матрицы A над P верны равенства $\det_{\lambda A}(j) = \lambda^{n_j} \det A(j)$, $j \in J$, где n_j – порядок матрицы $A(j)$.

Доказательство. Используя равенство из определения 10.1, равенство $(\lambda A)(j) = \lambda A(j)$, определяющее произведение λA элемента $\lambda \in P$ на J -матрицу A над P , а также соответствующий бинарный результат, получим

$$\det_{\lambda A}(j) = \det(\lambda A)(j) = \det \lambda A(j) = \lambda^{n_j} \det A(j).$$

Предложение доказано.

Считая в предложении 10.3 A квадратной J -матрицей порядка n , то есть J -матрицей, у которой все значения – квадратные матрицы порядка n , получим

Следствие 10.1. Для любого $\lambda \in P$ и любой квадратной J -матрицы A порядка n над P верны равенства $\det_{\lambda A}(j) = \lambda^n \det A(j)$, $j \in J$.

Замечание 10.3. Так как всякий J -определитель $\det_A \in P^J$ можно рассматривать как J -матрицу первого порядка, то равенства

$$(\lambda A)(j) = \lambda A(j), \quad j \in J,$$

определяющие произведение λA элемента $\lambda \in P$ на J -матрицу A над P (раздел 6), позволяют определить произведение $\lambda \det_A$ формулой

$$(\lambda \det_A)(j) = \lambda \det_A(j), \quad j \in J. \quad (10.1)$$

Теперь следствие 10.1 можно переформулировать следующим образом.

Следствие 10.2. Для любого $\lambda \in P$ и любой квадратной J -матрицы A порядка n над P верно равенство $\det_{\lambda A} = \lambda^n \det_A$.

Доказательство. Последовательно используя определение 10.1, а затем равенство (10.1), получим

$$\lambda^n \det A(j) = \lambda^n \det_A(j) = (\lambda^n \det_A)(j),$$

то есть

$$\lambda^n \det A(j) = (\lambda^n \det_A)(j), \quad j \in J.$$

Тогда равенство из следствия 10.1 принимает вид

$$\det_{\lambda A}(j) = (\lambda^n \det_A)(j), \quad j \in J,$$

откуда следует $\det_{\lambda A} = \lambda^n \det_A$. Следствие доказано.

Для J -определителя \mathbf{det}_A любой квадратной J -матрицы A над P определим J -определитель $-\mathbf{det}_A$ по правилу

$$(-\mathbf{det}_A)(j) = -\mathbf{det}_A(j), \quad j \in J. \quad (10.2)$$

Предложение 10.4. Если в каждом значении $A(j)$ квадратной J -матрицы A переставить любые две строки или два столбца, то J -определитель полученной J -матрицы B равен J -определителю J -матрицы A , взятому со знаком минус: $\mathbf{det}_B = -\mathbf{det}_A$.

Доказательство. Согласно определению 10.1

$$\mathbf{det}_B(j) = \det B(j), \quad j \in J,$$

а так как матрица $B(j)$ получается из матрицы $A(j)$ перестановкой строк или столбцов, то согласно соответствующему бинарному результату

$$\det B(j) = -\det A(j).$$

Снова применяя определение 10.1, получим

$$-\mathbf{det}_A(j) = -\mathbf{det}_A(j),$$

а согласно (10.2)

$$-\mathbf{det}_A(j) = (-\mathbf{det}_A)(j).$$

Таким образом,

$$\mathbf{det}_B(j) = (-\mathbf{det}_A)(j), \quad j \in J.$$

откуда $\mathbf{det}_B = -\mathbf{det}_A$. Предложение доказано.

Пример 10.2. Если

$$A = \left(\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right), \quad B = \left(\left(\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \right), \right),$$

то есть вектор-матрица B получена из вектор-матрицы A перестановкой столбцов в первой компоненте и перестановкой первой и третьей строк во второй компоненте, то $\mathbf{det}_B = -\mathbf{det}_A$.

Предложение 10.5. Если в каждом значении квадратной J -матрицы A имеются две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то

$$\mathbf{det}_A = \mathbf{0} \in P^J.$$

Предложение 10.6. Если \bar{A} и A^* – соответственно комплексно сопряженная и эрмитово сопряженная J -матрицы для J -матрицы A , то

$$\mathbf{det}_{\bar{A}} = \overline{\mathbf{det}_A}, \quad \mathbf{det}_{A^*} = \overline{\mathbf{det}_A}.$$

Доказательство. Докажем, например, второе равенство.

Последовательно используя определение 10.1, второе равенство из замечания 8.1, бинарный результат о равенстве определителя эрмитово сопряженной матрицы сопряженному значению определителя, снова определение 10.1, а также первое равенство из замечания 8.1, получим для любого $j \in J$

$$\mathbf{det}_{A^*}(j) = \det A^*(j) = \det(A(j))^* = \overline{\det A(j)} = \overline{\mathbf{det}_A(j)} = \mathbf{det}_{\bar{A}}(j),$$

то есть верно второе равенство из формулировки предложения.

Первое равенство доказываются аналогично. Предложение доказано.

11 Аналог теоремы о произведении определителей

Следующая теорема обобщает бинарный результат о равенстве определителя произведения матриц произведению их определителей.

Теорема 11.1. Пусть подстановка σ из \mathbf{S}_J удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ – J -матрицы над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей, у которых для любого $j \in J$ матрицы

$$\mathbf{A}_1(j), \mathbf{A}_2(\sigma(j)), \dots, \mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)), \mathbf{A}_l(j)$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\det_{[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}} = [\det_{\mathbf{A}_1} \dots \det_{\mathbf{A}_l}]_{l,\sigma,J}. \quad (11.1)$$

Доказательство. Из условия теоремы вытекает, что J -матрица $[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}$ существует. Отметим также, что в правой и левой частях равенства (11.1) одним и тем же символом обозначены различные l -арные операции: в левой части l -арная операция определена на J -матрицах, а в правой части на элементах из P^J , где P – кольцо, над которым рассматриваются J -матрицы.

Последовательно используя определение 10.1, равенство (1.3) для J -матрицы $[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}$, бинарный результат о равенстве определителя произведения матриц произведению их определителей, снова определение 10.1, а затем равенство (1.3) для элемента $[\det_{\mathbf{A}_1} \dots \det_{\mathbf{A}_l}]_{l,\sigma,J} \in P^J$, получим для любого $j \in J$

$$\begin{aligned} \det_{[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}}(j) &= \det[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,j}(j) = \\ &= \det(\mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j))) = \\ &= \det \mathbf{A}_1(j) \det \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \det \mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)) \det \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)) = \\ &= \det_{\mathbf{A}_1}(j) \det_{\mathbf{A}_1}(\sigma(j)) \dots \det_{\mathbf{A}_{l-1}}(\sigma^{l-2}(j)) \det_{\mathbf{A}_l}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ &= [\det_{\mathbf{A}_1} \dots \det_{\mathbf{A}_l}]_{l,\sigma,J}(j), \end{aligned}$$

то есть верно (3.1). Теорема доказана.

Полагая в теореме 11.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 11.1 [19]. Пусть подстановка σ из \mathbf{S}_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), \quad i = 1, \dots, l$$

– k -компонентные вектор-матрицы, у которых для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ компоненты

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, A_{lj}$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\det_{[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}} = [\det_{\mathbf{A}_1} \dots \det_{\mathbf{A}_l}]_{l,\sigma,k}.$$

Полагая в следствии 11.1 σ – цикл длины k , получим

Следствие 11.2 [19]. Пусть σ – цикл длины k ,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), \quad i = 1, \dots, k+1$$

– k -компонентные вектор-матрицы, у которых для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ компоненты

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{k\sigma^{k-1}(j)}, A_{(k+1)j}$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\det_{[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{k+1}]_{k+1, \sigma, k}} = [\det_{\mathbf{A}_1} \dots \det_{\mathbf{A}_{k+1}}]_{k+1, \sigma, k}.$$

Полагая в следствии 11.2 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 11.3 [19]. Пусть

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), \quad i = 1, \dots, k+1$$

– k -компонентные вектор-матрицы, у которых для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ компоненты

$$A_{1j}, A_{2(j+1)}, \dots, A_{(k+1-j)k}, A_{(k+2-j)1}, \dots, A_{k(j-1)}, A_{(k+1)j}$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\det_{[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{k+1}]_{k+1, (12 \dots k), k}} = [\det_{\mathbf{A}_1} \dots \det_{\mathbf{A}_{k+1}}]_{k+1, (12 \dots k), k}.$$

Полагая в теореме 11.1 $J = \mathbb{N}$, получим

Следствие 11.4. Пусть подстановка σ из $\mathbf{S}_{\mathbb{N}}$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, A_{i2}, \dots), \quad i = 1, \dots, l$$

– \mathbb{N} -матрицы, у которых для любого $j \in \mathbb{N}$ компоненты

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, A_{lj}$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\det_{[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, \mathbb{N}}} = [\det_{\mathbf{A}_1} \dots \det_{\mathbf{A}_l}]_{l, \sigma, \mathbb{N}}.$$

Полагая в теореме 11.1 $J = \mathbb{Z}$, получим

Следствие 11.5. Пусть подстановка σ из $S_{\mathbb{Z}}$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{A}_i = (\dots, A_{i(-2)}, A_{i(-1)}, A_{i0}, A_{i1}, A_{i2}, \dots), \quad i = 1, \dots, l$$

– \mathbb{Z} -матрицы, у которых для любого $j \in \mathbb{Z}$ компоненты

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, A_{lj}$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\det_{[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, \mathbb{Z}}} = [\det_{\mathbf{A}_1} \dots \det_{\mathbf{A}_l}]_{l, \sigma, \mathbb{Z}}.$$

12 Гомоморфизм из $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), [\]_{l, \sigma, J} \rangle$

В следующей теореме символом P^* обозначается группа всех обратимых элементов кольца P .

Теорема 12.1. *Если подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то отображение $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{det}_{\mathbf{A}}$ является гомоморфизмом l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), [\]_{l, \sigma, J} \rangle$ на l -арную группу $\langle P^{*J}, [\]_{l, \sigma, J} \rangle$.*

Доказательство. Ясно, что γ отображает $\mathbf{GL}_n(J, P) = \mathbf{GL}_n^J(P)$ на всё P^{*J} . Пусть

$$\mathbf{A}_i \in \mathbf{GL}_n(J, P), \quad i = 1, \dots, l$$

и положим

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, J} = \mathbf{Y}.$$

Последовательно используя определение отображения γ , определение 10.1, равенство (1.3) для J -матрицы $[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, J}$, бинарный результат о равенстве определителя произведения матриц произведению их определителей, снова определение 10.1, затем равенство (1.3) для элемента $[\mathbf{det}_{\mathbf{A}_1} \dots \mathbf{det}_{\mathbf{A}_l}]_{l, \sigma, J} \in P^J$ и определение отображения γ , получим для любого $j \in J$

$$\begin{aligned} \gamma([\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, J})(j) &= \gamma(\mathbf{Y})(j) = \mathbf{det}_{\mathbf{Y}}(j) = \det \mathbf{Y}(j) = \\ &= \det(\mathbf{A}_1(j) \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)) \mathbf{A}_l(j)) = \\ &= \det \mathbf{A}_1(j) \det \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \dots \det \mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)) \det \mathbf{A}_l(j) = \\ &= \mathbf{det}_{\mathbf{A}_1}(j) \mathbf{det}_{\mathbf{A}_2}(\sigma(j)) \dots \mathbf{det}_{\mathbf{A}_{l-1}}(\sigma^{l-2}(j)) \mathbf{det}_{\mathbf{A}_l}(j) = \\ &= [\mathbf{det}_{\mathbf{A}_1} \dots \mathbf{det}_{\mathbf{A}_l}]_{l, \sigma, J}(j) = [\gamma(\mathbf{A}_1) \dots \gamma(\mathbf{A}_l)]_{l, \sigma, J}(j), \end{aligned}$$

то есть

$$\gamma([\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, J})(j) = [\gamma(\mathbf{A}_1) \dots \gamma(\mathbf{A}_l)]_{l, \sigma, J}(j), \quad j \in J,$$

откуда

$$\gamma([\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, J}) = [\gamma(\mathbf{A}_1) \dots \gamma(\mathbf{A}_l)]_{l, \sigma, J}.$$

Следовательно, γ – искомый гомоморфизм. Теорема доказана.

Полагая в теореме 12.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 12.1 [19]. *Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то отображение $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{det}_{\mathbf{A}}$ является гомоморфизмом l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ на l -арную группу $\langle P^{*k}, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$.*

Полагая в следствии 12.1 σ – цикл длины k , получим

Следствие 12.2 [19]. *Если цикл σ из S_k имеет длину, равную k , то отображение $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{det}_{\mathbf{A}}$ является гомоморфизмом $(k+1)$ -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), [\]_{k+1, \sigma, k} \rangle$ на $(k+1)$ -арную группу $\langle P^{*k}, [\]_{k+1, \sigma, k} \rangle$.*

Полагая в следствии 11.2 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 12.3 [19]. *Отображение $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{det}_{\mathbf{A}}$ является гомоморфизмом $(k+1)$ -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), [\]_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ на $(k+1)$ -арную группу $\langle P^{*k}, [\]_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$.*

Полагая в теореме 12.1 $J = \mathbf{N}$, получим

Следствие 12.4. *Если подстановка $\sigma \in S_{\mathbf{N}}$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то отображение $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{det}_{\mathbf{A}}$ является гомоморфизмом l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(\mathbf{N}, P), [\]_{l, \sigma, \mathbf{N}} \rangle$ на*

l -арную группу $\langle P^{*N}, []_{l,\sigma,N} \rangle$.

Полагая в теореме 11.1 $J = Z$, получим

Следствие 12.5. Если подстановка $\sigma \in S_Z$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то отображение $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{det}_{\mathbf{A}}$ является гомоморфизмом l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(Z, P), []_{l,\sigma,Z} \rangle$ на l -арную группу $\langle P^{*Z}, []_{l,\sigma,Z} \rangle$.

13 J -Определитель косо́й J -матрицы

Косую J -матрицу для J -матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(J, P)$ можно обозначать символом $\mathbf{A}^{[-1]}$, чем мы и будем пользоваться в данном разделе. Объяснение будет дано ниже.

Теорема 13.1. Пусть подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, \mathbf{A} – произвольный элемент l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l,\sigma,J} \rangle$. Тогда:

$$\mathbf{det}_{\mathbf{A}^{[-1]}} = (\mathbf{det}_{\mathbf{A}})^{[-1]}, \tag{13.1}$$

где в левой части присутствует косо́й элемент для \mathbf{A} в $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l,\sigma,J} \rangle$, а правая часть является косо́м элементом для элемента $\mathbf{det}_{\mathbf{A}}$ l -арной группы $\langle P^{*J}, []_{l,\sigma,J} \rangle$.

Доказательство. По предложению 5.1 для J -матрицы \mathbf{A} и элемента $\mathbf{det}_{\mathbf{A}}$ существуют косая J -матрица $\mathbf{A}^{[-1]}$ и косо́й элемент $(\mathbf{det}_{\mathbf{A}})^{[-1]}$, значения которых имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{[-1]}(j) &= (\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1}, \quad j \in J, \\ (\mathbf{det}_{\mathbf{A}})^{[-1]} &= (\mathbf{det}_{\mathbf{A}}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{det}_{\mathbf{A}}(\sigma(j)))^{-1}, \quad j \in J. \end{aligned}$$

Используя эти равенства, определение 10.1, бинарный результат о равенстве определителя произведения матриц произведению их определителей, а также бинарный результат об определителе обратной матрицы, получим для любого $j \in J$

$$\begin{aligned} \mathbf{det}_{\mathbf{A}^{[-1]}}(j) &= \mathbf{det} \mathbf{A}^{[-1]}(j) = \mathbf{det}((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1}) = \\ &= \mathbf{det}(\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \dots \mathbf{det}(\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1} = \\ &= (\mathbf{det} \mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{det} \mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1} = \\ &= (\mathbf{det}_{\mathbf{A}}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{det}_{\mathbf{A}}(\sigma(j)))^{-1} = (\mathbf{det}_{\mathbf{A}})^{[-1]}(j), \end{aligned}$$

то есть

$$\mathbf{det}_{\mathbf{A}^{[-1]}}(j) = (\mathbf{det}_{\mathbf{A}})^{[-1]}(j).$$

Следовательно, верно равенство (13.1). Теорема доказана.

Полагая в теореме 13.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, $J = N$ или $J = Z$, можно сформулировать соответствующие следствия. Случай $J = \{1, 2, \dots, k\}$ доказан в [19].

14 J -Определитель степени J -матрицы

Для всякого элемента a l -арной полугруппы $\langle A, [] \rangle$ естественным образом определяются натуральные степени

$$a^{[0]} = a, \quad a^{[1]} = \underbrace{[a \dots a]}_l, \quad a^{[2]} = \underbrace{[a \dots a]}_{2l-1}, \quad \dots, \quad a^{[s]} = \underbrace{[a \dots a]}_{s(l-1)+1}, \quad \dots$$

В частности,

$$\mathbf{A}^{[0]} = \mathbf{A}, \mathbf{A}^{[s]} = \underbrace{[\mathbf{A} \dots \mathbf{A}]}_{s(l-1)+1}$$

для всякого натурального s и любой J -матрицы \mathbf{A} l -арной полугруппы $\langle \mathbf{M}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$.

Теорема 11.1 позволяет сформулировать

Предложение 14.1. Пусть подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, \mathbf{A} – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle \mathbf{M}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$, где P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Тогда:

$$\det_{\mathbf{A}^{[s]}} = (\det_{\mathbf{A}})^{[s]}, \tag{14.1}$$

где в левой части присутствует степень элемент \mathbf{A} в $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$, а правая часть является степеню элемента $\det_{\mathbf{A}}$ l -арной группы $\langle P^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$.

Для всякого элемента a l -арной группы $\langle A, [] \rangle$ помимо положительных степеней, определяются [1, 9] и отрицательные степени: для любого целого $s < 0$ степень $a^{[s]}$ есть решение уравнения

$$[x \underbrace{a \dots a}_{-s(l-1)}] = a.$$

Отрицательную степень при $l \geq 3$ можно определить [10] с помощью косого элемента:

$$a^{[s]} = [\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{-2s} \underbrace{a \dots a}_{-s(l-3)+1}], \quad s < 0,$$

где \bar{a} – косо́й элемент для a . Так как при $s = -1$

$$a^{[-1]} = [\bar{a} \underbrace{a \dots a}_{l-2}] = \bar{a},$$

то $\bar{a} = a^{[-1]}$, что отмечалось выше.

Таким образом, $\mathbf{A}^{[-1]} = \bar{\mathbf{A}}$,

$$\mathbf{A}^{[s]} = [\underbrace{\mathbf{A}^{[-1]} \dots \mathbf{A}^{[-1]}}_{-2s} \underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{-s(l-3)+1}], \quad s < 0 \tag{14.2}$$

для всякого натурального s и любой J -матрицы \mathbf{A} l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$.

Теорема 14.1. Для любого целого s , любой подстановки $\sigma \in S_J$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, и любой J -матрицы \mathbf{A} l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(J, P), []_{l, \sigma, J} \rangle$ верно равенство (14.1).

Доказательство. Если $s \geq 0$, то применяется предложение 14.1. Для $s < 0$, используя равенство (14.2), теорему 11.1, а также определение отрицательной s -ой степени для элемента $\det_{\mathbf{A}}$, получим

$$\begin{aligned} \det_{\mathbf{A}^{[s]}}(j) &= \det \underbrace{[\mathbf{A}^{[-1]} \dots \mathbf{A}^{[-1]} \mathbf{A} \dots \mathbf{A}]}_{-s(l-3)+1}(j) = \\ &= \underbrace{[\det_{\mathbf{A}^{[-1]}} \dots \det_{\mathbf{A}^{[-1]}}]}_{-2s} \underbrace{[\det_{\mathbf{A}} \dots \det_{\mathbf{A}}]}_{-s(l-3)+1}(j) = (\det_{\mathbf{A}})^{[s]}(j), \quad j \in J, \end{aligned}$$

то есть

$$\det_{\mathbf{A}^{[s]}}(j) = (\det_{\mathbf{A}})^{[s]}(j), \quad j \in J.$$

Следовательно, верно равенство (14.1). Теорема доказана.

Замечание 14.1. Из теоремы 14.1 при $s = -1$ вытекает теорема 13.1.

Полагая в теореме 14.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, $J = \mathbb{N}$ или $J = \mathbb{Z}$, можно сформулировать соответствующие следствия. Случай $J = \{1, 2, \dots, k\}$ доказан в [19].

15 Аналогии и обобщения

15.1 J -Перманент.

Определитель $\det A$ матрицы $A \in \mathbf{M}_n(P)$ можно рассматривать как значение функции \det , определенной на $\mathbf{M}_n(P)$, со значениями в P . Точно также J -определитель $\det_{\mathbf{A}}$ J -матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_n(J, P)$ можно считать значением функции \mathbf{det} , которая определена на J -ой декартовой степени $\mathbf{M}_n(J, P) = \mathbf{M}_n^J(P)$, со значениями в P^J .

Беря за основу какую-либо функцию $u: \mathbf{M}_n(P) \rightarrow P$, отличную от функции \det , можно определить функцию $\mathbf{u}: \mathbf{M}_n^J(P) \rightarrow P^J$ аналогично тому, как это было сделано для функции $\det: \mathbf{M}_n(P) \rightarrow P$.

В качестве примера рассмотрим функцию $\text{per}: \mathbf{M}_n(P) \rightarrow P$, где

$$\text{per} A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(P)$. Значение $\text{per} A$ называют перманентом матрицы A . Перманентам посвящена книга Х. Минка [20].

Определение 15.1. Пусть P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. J -перманентом J -матрицы \mathbf{A} , у которой все значения являются квадратными матрицами над P , называется функция $\text{per}_{\mathbf{A}} \in P^J$, ставящая в соответствие каждому $j \in J$ перманент матрицы $\mathbf{A}(j)$:

$$\text{per}_{\mathbf{A}}(j) = \text{per} \mathbf{A}(j) \in P.$$

Замечание 15.1. В [19] для каждой квадратной k -компонентной вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей был определен вектор-перманент

$$\text{per}_{\mathbf{A}} = \{\text{per} A_1, \dots, \text{per} A_k\},$$

который, как несложно заметить, является J -перманентом, если множество J совпадает с множеством $\{1, 2, \dots, k\}$. Отметим, что в [19] вместо символа $\text{per}_{\mathbf{A}}$ использовался символ $\text{per} \mathbf{A}$.

Ясно, что при $J = \{1\}$ имеем $\text{per}_{\mathbf{A}} = \text{per} \mathbf{A}$, то есть в этом случае понятия J -перманента и перманента совпадают.

Используя свойства перманентов обычных матриц, можно получить их аналоги для J -перманентов J -матриц.

Так как перманент определяется [20] не только для квадратных матриц, но и для матриц размера $m \times n$, где $m < n$, то можно определить и изучать J -перманент J -матрицы \mathbf{A} , у которой для любого $j \in J$ значение $\mathbf{A}(j)$ является матрицей размера $m_j \times n_j$, где $m_j < n_j$.

15.2 J -Супердетерминант.

Множество $\mathbf{GL}(m, n | N)$ всех квадратных матриц $K = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где блоки A и D – обратимые матрицы порядков m и n соответственно, состоящие из четных элементов грассмановой алгебры G_N с N образующими, а блоки B и C – прямоугольные матрицы, состоящие из нечетных элементов этой же грассмановой алгебры, является группой [21]. *Супердетерминантом* называется [21] функция sdet из $\mathbf{GL}(m, n | N)$ со значениями в G_N , определяемая равенством

$$\text{sdet}K = \det(A - BD^{-1}C) \det D^{-1}.$$

Положим

$$\mathbf{GL}(m, n | N, J) = \mathbf{GL}^J(m, n | N).$$

Так как $\mathbf{GL}(m, n | N)$ – группа, то, ввиду теоремы 2.7.1 из [4], верна

Теорема 15.1. *Если подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \mathbf{GL}(m, n | N, J), [\]_{l, \sigma, J} \rangle$ – l -арная группа.*

Замечание 15.2. Из соответствующих результатов книги [4] следует, что l -арная группа $\langle \mathbf{GL}(m, n | N, J), [\]_{l, \sigma, J} \rangle$ не имеет единиц, если σ – нетождественная подстановка; и является ненулевой, в частности неабелевой, если $n \geq 2$.

Определение 15.2. J -супердетерминантом элемента

$$\mathbf{K} \in \mathbf{GL}(m, n | N, J)$$

называется функция $\text{sdet}_{\mathbf{K}} \in G_N^J$, ставящая в соответствие каждому $j \in J$ супердетерминант матрицы $\mathbf{K}(j)$:

$$\text{sdet}_{\mathbf{K}}(j) = \text{sdet}\mathbf{K}(j) \in G_N.$$

Замечание 15.3. В [19] для каждой k -компонентной вектор-матрицы $\mathbf{K} = (K_1, \dots, K_k)$ с компонентами из $\mathbf{GL}(m, n | N)$ был определен вектор-супердетерминант

$$\text{sdet}_{\mathbf{K}} = (\text{sdet}K_1, \dots, \text{sdet}K_k) \in G_N^k,$$

который, как несложно заметить, является J -супердетерминантом, если множество J совпадает с множеством $\{1, 2, \dots, k\}$. Отметим, что в [19] вместо символа $\text{sdet}_{\mathbf{K}}$ использовался символ $\text{sdet}\mathbf{K}$.

Ясно, что при $J = \{1\}$ понятия J -супердетерминанта и супердетерминанта совпадают: $\text{sdet}_{\mathbf{K}} = \text{sdet}\mathbf{K}$.

Полагая в теореме 15.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 15.1 [19]. *Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \mathbf{GL}(m, n | N, k), [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа. В частности, $\langle \mathbf{GL}(m, n | N, k), [\]_{k+1, (12\dots k), k} \rangle$ – $(k+1)$ -арная группа.*

Для супердетерминантов имеет место полный аналог теоремы 11.1.

Теорема 15.2. *Если подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то для любых $\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_l \in \mathbf{GL}(m, n | N, J)$ верно равенство*

$$\text{sdet}_{[\mathbf{K}_1 \dots \mathbf{K}_l]_{l, \sigma, J}} = [\text{sdet}_{\mathbf{K}_1} \dots \text{sdet}_{\mathbf{K}_l}]_{l, \sigma, J}. \quad (15.1)$$

Доказательство теоремы 15.2 почти дословно повторяет доказательство теоремы 11.1. Отличие состоит только в том, что при доказательстве равенства (15.1) вместо мультипликативности функции \det используется мультипликативность функции sdet [21]:

$$\text{sdet}(K_1 K_2) = \text{sdet} K_1 \cdot \text{sdet} K_2.$$

Полагая в теореме 15.2 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 15.2 [19]. *Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то для любых $\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_l \in \mathbf{GL}(m, n \mid N, k)$ верно равенство*

$$\text{sdet}_{[\mathbf{K}_1 \dots \mathbf{K}_l]_{l, \sigma, k}} = [\text{sdet}_{\mathbf{K}_1} \dots \text{sdet}_{\mathbf{K}_l}]_{l, \sigma, k}.$$

Полагая в теоремах 15.1 и 15.2 $J = N$ или $J = Z$, можно сформулировать соответствующие следствия.

15.3 Квантовый J -детерминант.

Можно ввести понятие квантового J -детерминанта, являющегося обобщением понятия квантового детерминанта, который определяется [22] для квантовой матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n над полем P и элемента $q \in P$, удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям, следующим образом:

$$\det(q, A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-q)^{\text{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

где $\text{inv}(\sigma)$ – число инверсий подстановки σ .

Пусть $\mathbf{q} \in P^J$. Если для каждого значения $\mathbf{A}(j)$ J -матрицы \mathbf{A} определен квантовый детерминант $\det(\mathbf{q}(j), \mathbf{A}(j))$, то *квантовым J -детерминантом* J -матрицы \mathbf{A} называется функция $\mathbf{det}_{(\mathbf{q}, \mathbf{A})}$, ставящая в соответствие каждому $j \in J$ квантовый детерминант матрицы $\mathbf{A}(j)$:

$$\mathbf{det}_{(\mathbf{q}, \mathbf{A})}(j) = \det(\mathbf{q}(j), \mathbf{A}(j)).$$

Если \mathbf{q} – постоянная функция, принимающая значение q , то рассматривают квантовый J -детерминант $\mathbf{det}_{(q, \mathbf{A})}$, определяемый равенствами

$$\mathbf{det}_{(q, \mathbf{A})}(j) = \det(q, \mathbf{A}(j)), \quad j \in J.$$

15.4 Аналоги J -детерминанта для некоммутативных колец.

В связи с существованием различных обобщений понятия определителя на случай некоммутативных колец возникает задача определения и изучения для каждого из этих обобщений соответствующего аналога J -детерминанта. Например, для квазидетерминантов [23, 24], которые находят широкое применение в физике, для детерминанта Дъёдонне [25, 26], для детерминанта Стади [27], для детерминанта Мура [28], для строчных и столбцовых определителей [29], а также для других обобщений классического детерминанта.

Литература

- [1] Post E.L. Polyadic groups // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1940, Vol. 48, №2, pp.208–350.
- [2] Слипенко А.К. Абстрактная характеристика матричных операторов // *Укр. мат. журнал.*, 1974, Т. 26, №1, с. 112–114.
- [3] Слипенко А.К. Про матрични оператори // *Доповіди АН УССР.*, 1975, А, №3, с. 207–208.

- [4] Гальмак А.М., Кулаженко Ю.И. Полиадические операции на множествах функций. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2013, 190 с.
- [5] Гальмак А.М. Об операции $[]_{l,\sigma,k}$. // *Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова*, Могилев, 2010, № 1 (35), с. 34–38.
- [6] Гальмак А.М. Многместные ассоциативные операции на декартовых степенях // *Весці НАН Беларусі*, 2008, № 3, с. 28–34.
- [7] Гальмак А.М. Многместные операции на декартовых степенях. Минск: Изд. центр БГУ, 2009, 265 с.
- [8] Гальмак А.М. Вектор-матрицы // *Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова.*, 2011, № 1 (37), серия В, с. 30–37.
- [9] Русаков С.А. Алгебраические n -арные системы. Мн.: Навука і тэхніка, 1992, 245 с.
- [10] Гальмак А.М. n -Арные группы. Часть 1. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003, 202с.
- [11] Гальмак А.М. n -Арные группы. Часть 2. Минск: Изд. центр БГУ, 2007, 324 с.
- [12] Гальмак А.М. n -Арные группы. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, Москва, 2007, т. 4, № 2 (18), с. 76–95.
- [13] Супруненко Д.А. Группы подстановок. Мн.: Навука і тэхніка, 1996, 366 с.
- [14] Wielandt H. Unendliche Permutationsgruppen. Vorlesungen an der Universität Tübingen WS 1959-1960, Tübingen, 1960, s. 1–45.
- [15] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988, 552 с.
- [16] Гальмак А.М. Транспонированные вектор-матрицы. // *Проблемы физики, математики и техники*, 2011, № 1 (6), с. 52–56.
- [17] Гальмак А.М. О σ -согласованных вектор-матрицах // *Проблемы физики, математики и техники*, 2011, № 4 (9), с. 92–99.
- [18] Гальмак А.М. Сопряженные вектор-матрицы и пространственные матрицы // *Проблемы физики, математики и техники*, 2012, № 4 (13), с. 40–49.
- [19] Гальмак А.М. Вектор-определители и определители вектор-матриц // *Проблемы физики, математики и техники*, 2011, № 2 (7), с. 58–64.
- [20] Минк Х. Перманенты. М.: Мир., 1982, 213 с.
- [21] Березин Ф.А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд-во МГУ, 1983, 208 с.
- [22] Manin Y. Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup // *Math. Phys.*, 1989, V. 123, pp. 163–175.
- [23] Гельфанд И.М., Ретах В.С. Детерминанты матриц над некоммутативными кольцами // *Функц. анализ и его приложения*, 1991, т. 25, № 2, с. 13–35.
- [24] Гельфанд И.М., Ретах В.С. Теория некоммутативных детерминантов и характеристических функций графов // *Функц. анализ и его приложения*, 1993, т. 26, № 4, с. 33–45.
- [25] Dieudonne J. Les determinants sur un corps non commutatif // *Bull. Math. Soc. France*, 1943, V. 71, pp. 27–45.
- [26] Дьёдонне Ж. Геометрия классических групп. М.: Мир., 1974, 204 с.
- [27] Study E. Zur Theorie der lineare Gleichungen. // *Math.*, 1920, V. 42, s. 1–61.
- [28] Moore E.H. On the determinant of an Hermitian matrix of quaternionic elements // *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1922, v. 28, pp. 161–162.
- [29] Кирчей И.И. Правило Крамера для кватернионных систем линейных уравнений // *Фундаментальная и прикладная математика*, 2007, т. 13, № 4, с. 67–94.

POLYADIC OPERATIONS ON THE SETS OF MATRIX-VALUED FUNCTIONS

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technology, Mogilev, Belarus

halm54@mail.ru

Main object of the present paper are polyadic operations on the set $\mathbf{M}^J(P)$. Elements of the set are functions defined on the nonempty set J with values, which belong to set of all matrix $\mathbf{M}(P)$ with elements from some ring P . Such polyadic operations for the first time introduce E. Post. He consider the case $J = \{1, \dots, m - 1\}$, where \mathbb{C} – field of complex number.

Key Words: polyadic operations, matrix, function, semigroup, group.

ON POSSIBLE EFFECTS OF THE SPINOR STRUCTURES IN QUANTUM PHYSICS

Elena Ovsiyuk¹, Olga Veko¹, Alexandru Oană², Mircea Neagu²,
Vladimir Balan³, Victor Red'kov⁴

¹ *Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus*

² *University Transilvania of Braşov, Braşov, Romania*

³ *University Politehnica of Bucharest, Bucharest, Romania*

⁴ *B.I. Stepanov Institute of Physics, NAS of Belarus*

v.redkov@dragon.bas-net.by

The paper discusses the following topics: the spinor structure of space models; the relation between the Dirac–Schwinger quantization rule and the superposition principle in quantum mechanics; the manifestation of spinor space structure in classifying the solutions of the Dirac equation and for the matrix elements which are related to physical quantities; spinors in polarization optics; the Jones formalism for completely and partly polarized light; General Relativity and Riemannian space-time models with spinor structure and tetrad (vierbein) formalism.

Key Words: spinors, tetrads, Dirac–Schwinger quantization, Dirac equation, superposition principle, polarized light, Majorana 4-spinors, Lorentz group, relativistic fermion parity.

General introduction

In the literature, there exist three different terminological approaches, whose intrinsic essence is similar: a space-time spinor structure (Penrose, Rindler et al.); the Hopf and the Kustaanheimo-Stiefel bundles.

In Hopf's technique, one uses only complex 2-spinors (ξ) and their conjugates (ξ^*), instead of real-valued 4-vector (tensor) objects. In the Kustaanheimo-Stiefel approach, there are used four real-valued coordinates – the real and imaginary parts of 2-spinor components.

The formalism developed in the present work exploits as well the possibilities given by spinors to construct 3-vectors; however, the emphasis is put on doubling the set of spatial points, so that we get an extended space model. In such a space, instead of the 2π -rotation, there is considered the 4π -rotation - which transfers the space into itself. The procedure of doubling the manifold is achieved here much easier, while using curvilinear coordinates.

Within the framework of applications of spinor theory to Relativistic and Non-relativistic Physics, Quantum Mechanics and Polarization Optics, we discuss several actual issues, as:

- the concept of spinor structure in space-time models;
- exact linear representations for spinor coverings of the full Lorentz group;
- internal space-time parity of a relativistic fermion;
- Euclidean 3-spaces with opposite P -properties and two kinds of Cartan spatial spinors;
- parametrization of Cartan's spatial spinors by curvilinear coordinates, non-relativistic physics;
- the role of spinor space structure in classification of solutions of the Klein-Fock-Gordon equation and the influence on the matrix elements related to physical quantities.

1 Spin covering for the full Lorentz group $L_{+-}^{\uparrow\downarrow}$ and the concept of relativistic fermion parity

To treat the problem of fermion parity, we will use 4-spinors instead of 2-spinors. Additional motivation for this approach is that among 4-spinors there exist real-valued ones – the so-called Majorana 4-spinors; moreover, in this way we will be able to describe discrete symmetries by linear transformations¹.

The obtained results will provide the grounds for a new discussion of the old fermion parity problem of investigating possible linear single-valued representations of spinor coverings of the extended Lorentz group. It is shown that in the frame of this theory, P -parity and T -parity for a fermion do not exist as separate concepts; instead of these, only some unified concept of (PT) -parity can be described in a group-theoretical language.

We attach to the proper orthochronous Lorentz matrices

$$\begin{aligned} L_a^b(k, k^*) &= \bar{\delta}_c^b(-\delta_c^b k^n k_n^* + k_c k^{b*} + k_c^* k^b + i\epsilon_c^{bmn} k_m k_n^*), \\ L(k, k^*) &= L(-k, -k^*) \end{aligned} \tag{1.1}$$

two linear operations

$$P : L_a^{(P)b} = +\bar{\delta}_a^b ; \quad +T : L_a^{(T)b} = -\bar{\delta}_a^b,$$

where $\bar{\delta}_a^b = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, of which one readily produces the full Lorentz group $L_{+-}^{\uparrow\downarrow}$. The commutation rules between $L_a^b(k, k^*)$ and the discrete elements P, T are

$$\bar{\delta}_a^b L_b^c(k, k^*) = L_a^b(\bar{k}^*, \bar{k}) \bar{\delta}_b^c. \tag{1.2}$$

The group $L_{+-}^{\uparrow\downarrow}$ has four types of vector representations:

$$T_a^b(L) = f(L) L_a^b, \quad L \in L_{+-}^{\uparrow\downarrow}. \tag{1.3}$$

namely

$$\begin{aligned} f_1(L) &= 1, & f_2(L) &= \det(L), \\ f_3(L) &= \text{sgn}(L_0^0), & f_4(L) &= \det(L) \text{sgn}(L_0^0). \end{aligned} \tag{1.4}$$

which have the explicit form

$$\begin{aligned} 1 : & \begin{aligned} T_1(L) &= L \\ T_1(P) &= +P \\ T_1(T) &= +T \end{aligned} & 2 : & \begin{aligned} T_2(L) &= L \\ T_2(P) &= -P \\ T_2(T) &= -T \end{aligned} \\ 3 : & \begin{aligned} T_3(L) &= L \\ T_3(P) &= +P \\ T_3(T) &= -T \end{aligned} & 4 : & \begin{aligned} T_4(L) &= L \\ T_4(P) &= -P \\ T_4(T) &= +T. \end{aligned} \end{aligned} \tag{1.5}$$

It should be emphasized that the above-described extension of the group $L_a^b(k, k^*)$ by adding the two discrete operations P and T is not an extension of the spinor group $SL(2, \mathbb{C})$: actually this is just an expansion of the orthogonal group L_+^{\uparrow} . From the spinor point of view, the operations P and T are transformations which act on the space of 2-rank spinors, and *not* on the space of 1-rank spinors. Evidently, a more comprehensive study of P, T -symmetry can be done in the framework of first-rank spinors, when one extends the covering group $SL(2, \mathbb{C})$ by adding spinor discrete operations.

¹Mainly, we will consider only the problem of accurate description of the single-valued representations of four different spinor groups, each of them covering the full Lorentz group $L_{+-}^{\uparrow\downarrow}$, including P and T -reflections.

Now we can start solving this task. A covering group for the total Lorentz group can be constructed by adding two specific 4×4 -matrices to the known set of 4-spinor transformations of the group $SL(2, \mathbb{C})$,

$$S(k, \bar{k}^*) = \begin{pmatrix} B(k) & 0 \\ 0 & B(\bar{k}^*) \end{pmatrix} \in \widetilde{SL}(2, \mathbb{C}). \tag{1.6}$$

Those two new matrices are to be taken from the following

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad M' = iM, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ +iI & 0 \end{pmatrix}, \quad 'N = iN. \tag{1.7}$$

Having added any two elements of the four ones, we provide the full extension of the group $\widetilde{SL}(2, \mathbb{C})$, by means of two new operations only. Also, we note that since the group $L(2, \mathbb{C})$ contains $-I$, the extension of the group by any two elements of $\{-M, -M', -N, -'N\}$, leads to the same result. However, if one takes any other phase factor, different from $+1, -1, +i, -i$ for $M, M', N, 'N$, then this will result in substantially new extended groups.

The multiplication table for these four discrete elements is

	M	M'	N	$'N$	
M	$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & iI \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & +I \end{pmatrix}$	
M'	$\begin{pmatrix} +iI & 0 \\ 0 & +iI \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & +I \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -iI & 0 \\ 0 & +iI \end{pmatrix}$	(1.8)
N	$\begin{pmatrix} -iI & 0 \\ 0 & +iI \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +I & 0 \\ 0 & +I \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +iI & 0 \\ 0 & +iI \end{pmatrix}$	
$'N$	$\begin{pmatrix} +I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +iI & 0 \\ 0 & +iI \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$	

Hence we obtain six covering groups,

$$\begin{aligned} G_M &= \{ S(k, \bar{k}^*) \uplus M \uplus M' \}, & G_N &= \{ S(k, \bar{k}^*) \uplus N \uplus 'N \}, \\ G' &= \{ S(k, \bar{k}^*) \uplus M' \uplus N \}, & 'G &= \{ S(k, \bar{k}^*) \uplus 'N \uplus M \}, \\ G &= \{ S(k, \bar{k}^*) \uplus M \uplus N \}, & 'G' &= \{ S(k, \bar{k}^*) \uplus M' \uplus 'N \}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

with the corresponding multiplication tables

$$\begin{aligned} G_M : & \quad M^2 = +I, \quad M'^2 = -I, & \quad MM' &= (M')M; \\ G_N : & \quad N^2 = +I, \quad 'N^2 = -I, & \quad N('N) &= ('N)N; \\ G' : & \quad M'^2 = -I, \quad N^2 = +I, & \quad (M')N &= -N(M'); \\ 'G : & \quad ('N)^2 = -I, \quad M^2 = +I, & \quad ('N)M &= -M('N); \\ G : & \quad M^2 = +I, \quad N^2 = +I, & \quad MN &= -NM; \\ 'G' : & \quad (M')^2 = -I, \quad N'^2 = -I, & \quad (M')('N) &= -('N)(M'), \end{aligned} \tag{1.10}$$

and

$$F S(k, \bar{k}^*) = S(\bar{k}^*, k) F, \quad F \in \{M, M', N, 'N\}. \tag{1.11}$$

One can notice that the multiplication laws for the groups G_M and G_N happen to coincide; the same happens for G' and $'G$. This implies that the groups G_M and G_N (and respectively

G' and $'G$) represent the same abstract group. Indeed, it is readily verified that G_M and G_N (and, also, G' and $'G$), can be transformed into each other by a similarity transformation:

$$\begin{aligned}
 G_N = A G_M A^{-1} : \quad & A S(k, \bar{k}^*) = S(\bar{k}^*, k) A , \\
 & A M A^{-1} = +N , \quad A M' A^{-1} = +'N , \\
 & A = \text{const} \cdot \begin{pmatrix} -iI & 0 \\ 0 & +I \end{pmatrix} ;
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}
 'G = A G' A^{-1} : \quad & A S(k, \bar{k}^*) = S(\bar{k}^*, k) A , \\
 & A M' A^{-1} = +'N , \quad A N A^{-1} = -M , \\
 & A = \text{const} \cdot \begin{pmatrix} -iI & 0 \\ 0 & +I \end{pmatrix} .
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

In other words, we define here only four different covering groups. Since in literature all the six variants are discussed, we shall accordingly trace all of them.

1.2. Representations of the extended spinor groups

We shall construct now the exact linear representations of the groups $G_M, G_N, G', 'G, G, 'G'$. It suffices to consider in detail only one group; for convenience, let this be G_M . Its multiplication table is

$$\begin{aligned}
 M^2 = -I , \quad M'^2 = -I , \quad M M' = M M , \\
 F S(k, \bar{k}^*) = S(\bar{k}^*, k) F , \quad (F = M , M') , \\
 (k_1, \bar{k}_1^*)(k_2, \bar{k}_2^*) = (< k_1, k_2 > , < \bar{k}_1^*, \bar{k}_2^* >) .
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

where the symbol $< , >$ stands for the known multiplication rule in the group $SL(2, \mathbb{C})$:

$$< k_1, k_2 > = (k_1^0 k_2^0 + \vec{k}_1 \vec{k}_2; \vec{k}_1 k_2^0 + k_2^0 \vec{k}_1 + i[\vec{k}_1 \vec{k}_2]) . \tag{1.15}$$

Let us look for solution of the problem $g \rightarrow T(g)$ in the form

$$T(g) = f(g) g , \quad g \in G_M , \quad f(g_1) \cdot f(g_2) = f(g_1 \cdot g_2) \tag{1.16}$$

where $f(g)$ is a numerical function on the group G_M . Substitution (1.16) into (1.14) yields

$$\begin{aligned}
 [f(M)]^2 = f(I) , \quad [f(M')]^2 = f(-I) , \quad f(S(k, \bar{k}^*)) = f(S(\bar{k}^*, k)) , \\
 f(S(k_1, \bar{k}_1^*)) f(S(k_2, \bar{k}_2^*)) = f(S(< k_1, k_2 > , < \bar{k}_1^*, \bar{k}_2^* >)) .
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

There exist four different such functions f_i , described by:

$$\begin{array}{ccccc}
 G_M & f_1(g) = & f_2(g) = & f_3(g) = & f_4(g) = \\
 S(k, \bar{k}^*) & +1 & +1 & +1 & +1 \\
 M & +1 & -1 & +1 & -1 \\
 M' & +1 & -1 & -1 & +1,
 \end{array} \tag{1.18}$$

which provide four representations $T_i(g)$ of the group G_M .

In the same manner, one can construct the analogous representation $T_i(g)$ of the remaining

five groups. All these are described by the following table

	g	$T_1(g)$	$T_2(g)$	$T_3(g)$	$T_4(g)$	
	$S(k, \bar{k}^*)$	$S(k, \bar{k}^*)$	$S(k, \bar{k}^*)$	$S(k, \bar{k}^*)$	$S(k, \bar{k}^*)$	
G_M	M	$+M$	$-M$	$+M$	$-M$	
	M'	$+M'$	$-M'$	$-M'$	$+M'$	
G_N	N	$+N$	$-N$	$+N$	$-N$	
	$'N$	$+'N$	$- 'N$	$- 'N$	$+'N$	
G'	M'	$+M'$	$-M'$	$+M'$	$-M'$	(1.19)
	N	$+N$	$-N$	$-N$	$+N$	
$'G$	$'N$	$+'N$	$- 'N$	$+'N$	$- 'N$	
	M	$+M$	$-M$	$-M$	$+M$	
G	M	$+M$	$-M$	$+M$	$-M$	
	N	$+N$	$-N$	$+N$	$-N$	
$'G'$	M'	$+M'$	$-M'$	$+M'$	$-M'$	
	$'N$	$+'N$	$- 'N$	$- 'N$	$+'N$	

For each of these groups, one can ask whether the four representations $T_i(g)$ are equivalent, or not. With the help of the relations

$$\begin{aligned}
 F = const \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & +I \end{pmatrix}, & \quad F S(k, \bar{k}^*) F^{-1} = S(k, \bar{k}^*), \\
 F M F^{-1} = -M, & \quad F M' F^{-1} = -M' F, \\
 N F^{-1} = -N, & \quad F 'N F^{-1} = - 'N,
 \end{aligned}
 \tag{1.20}$$

it easily follows that the type $T_2(g)$ is equivalent to the type $T_1(g)$, as well, $T_4(g)$ is equivalent to $T_3(g)$:

$$T_2(g) = F T_1(g) F^{-1}, \quad T_4(g) = F T_3(g) F^{-1}.
 \tag{1.21}$$

Summarizing, we have got to the following: for each of the six groups, only two non-equivalent representations $g \rightarrow T(g) = f(g) g$ are possible:

$$T_1(g) \sim T_2(g), \quad T_3(g) \sim T_4(g).
 \tag{1.22}$$

Evidently, this result does not depend on the explicit realization of the discrete spinor transformations.

The above study of the exact linear representations of the extended spinor groups leads to a new concept of a space-time intrinsic parity of a fermion. In group-theoretical terms P -parity and T -parity do not have any sense, instead only their joint characteristic, that might be called (PT) -parity, can be defined in the group-theoretic framework.

1.3. Representations of the coverings for partly extended groups L_{+-}^\uparrow and $L_+^{\uparrow\downarrow}$

Now we are going to consider the problem of linear representations of the spinor groups that cover the partly extended Lorentz groups L_{+-}^\uparrow and $L_+^{\uparrow\downarrow}$ (improper orthochronous and proper non-orthochronous, respectively). Such groups can be constructed by adding any matrix from $\{M, M', N, 'N\}$.

The case of the orthogonal group L_{+-}^\uparrow leads to

$$T_1 = T_3 ; L \implies L = (\text{sgn } L_0^0) L , \tag{1.23}$$

$$T_2 = T_4 ; L \implies L = (\det L)L = (\det L)(\text{sgn } L_0^0) L , \tag{1.24}$$

and the case of the group $L_+^{\uparrow\downarrow}$ looks as

$$T_1 = T_4 ; L \implies L = (\det L)(\text{sgn } L_0^0) L , \tag{1.25}$$

$$T_2 = T_3 ; L \implies L = (\det L) L = (\text{sgn } L_0^0) L . \tag{1.26}$$

With the use of one additional discrete operation, one can determine four extended spinor groups:

$$\widetilde{SL}(2, \mathbb{C})_M = \{ S(k, \bar{k}^*) \oplus M \} \text{ and so on .} \tag{1.27}$$

We conclude that the extended groups $\widetilde{SL}(2, \mathbb{C})_M$, $\widetilde{SL}(2, \mathbb{C})_N$ turn out to be isomorphic. Analogously, $\widetilde{SL}(2, \mathbb{C})_{M'}$ is isomorphic to $\widetilde{SL}(2, \mathbb{C})_{N'}$. Each of them covers both $L_+^{\uparrow\downarrow}$ and L_{+-}^\uparrow :

$$\widetilde{SL}(2, \mathbb{C})_M \sim \widetilde{SL}(2, \mathbb{C})_N , \quad \widetilde{SL}(2, \mathbb{C})_{M'} \sim \widetilde{SL}(2, \mathbb{C})_{N'} . \tag{1.28}$$

Now, we shall list the simplest representations of these groups. The obtained result is as follows: all the representations $T_i(g)$ from above, while confining them to sub-groups $SL(2, \mathbb{C})_{M(N)}$ and $SL(2, \mathbb{C})_{M',(N')}$, lead to representations changing into each other by a similarity transformation. In other words, in fact there exists only one representation of these partly extended spinor groups. This may be understood as the impossibility to determine any group-theoretical parity concept (P or T) within the limits of partly extended spinor groups.

1.4. On reducing spinor groups to a real form

Till now we have considered all the spinor groups $G_M \sim G_N$, $G' \sim G$, G , G' as possible group covering candidates to for the full Lorentz group $L_{+-}^{\uparrow\downarrow}$. It is desirable to formulate some extra arguments in order to choose only *one* spinor group as a natural (physical) covering.

Note that in the bispinor space a special basis can be found using the bispinor wave function

$$\Phi_M(x) = \varphi(x) + i\xi(x) , \tag{1.29}$$

which transforms under the action of the group $SL(2, \mathbb{C})$ by means of real (4×4) -matrices. Therefore, the real 4-spinors $\varphi(x)$ and $\xi(x)$, constituents of the complex-valued $\Phi_M(x)$, transform as independent irreducible representations. In physical context of real Majorana fermions, this reads as a group-theoretical permission to exist. But these arguments have been based only on continuous $SL(2, \mathbb{C})$ -transformations, while the idea is to extend them on discrete operations too. So we must find the answer to the question of which of the extended spinor groups can be reduced to a real form. With this goal in mind, we write down the bispinor matrix a the form that does not depend on the randomly chosen basis²:

$$S = \frac{1}{2}(k_0 + k_0^*) + \frac{1}{2}(k_0 - k_0^*)\gamma^5 + (k_1 + k_1^*)\sigma^{01} + (k_1 - k_1^*)i\sigma^{23} + (k_2 + k_2^*)\sigma^{02} + (k_2 - k_2^*)i\sigma^{31} + (k_3 + k_3^*)\sigma^{03} + (k_3 - k_3^*)i\sigma^{13} . \tag{1.30}$$

Any Majorana basis satisfies the relations

$$(\gamma_M^a)^* = -\gamma_M^a , \quad (\gamma_M^5)^* = -\gamma_M^5 , \quad (\sigma_M^{ab})^* = \sigma_M^{ab} \implies S^* = S . \tag{1.31}$$

²We employed above the Weyl basis.

It remains to write down all the used discrete operations $M, M'N, 'N$ in terms of Dirac matrices:

$$M = +\gamma^0, \quad M' = +i\gamma^0, \quad N = +i\gamma^5\gamma^0, \quad 'N = -\gamma^5\gamma^0. \quad (1.32)$$

In Majorana frames, the discrete operations obey the following properties

$$S^* = S, \quad M^* = -M, \quad (M')^* = +M', \quad N^* = -N, \quad ('N)^* = +'N. \quad (1.33)$$

Thus, the six spinor groups behave under complex conjugation as indicated below

$$\begin{array}{cccccc} G_M & G_N & G' & 'G & G & 'G' \\ S^* = S & S^* = S & S^* = S & S^* = S & S^* = S & S^* = S \\ M^* = -M & N^* = -N & M'^* = +M' & 'N^* = +'N & M^* = -M & M'^* = +M' \\ (M')^* = M' & 'N^* = +'N & N^* = -N & M^* = -M & N^* = -N & 'M^* = 'M \end{array} \quad (1.34)$$

Only the group $'G'$ can be reduced to a real-valued form, and only this group allows real-valued spinor representations, namely the Majorana fermions³.

Conclusion

The problem of fermion parity is considered on the base of investigating possible single-valued representations of spinor coverings of the extended Lorentz group. It is shown that in the frame of this theory, there do not exist – as separate concepts – P -parity and T -parity for a fermion; instead of this, only some unified concept of (PT) -parity can be determined in group-theoretical terms. Apparently, physics with spinor group significantly differs from the one based on the orthogonal group $L_{+-}^{\uparrow\downarrow}$, and only experiment can decide on this problem. It is needless to say that this task cannot be solved without a thorough theoretical analysis of possible experimental verifications, in both orthogonal and spinor approaches.

2 Geometry of 3-spaces with spinor structure

Our special approach to examine the spinor structure of 3-space is based on the concept of spatial spinor, defined through taking the "square root" of a real-valued 3-vector. Two sorts of spatial spinors, according to the P -orientation of an initial 3-space, are introduced: proper-vector or pseudo-vector ones. These spinors, η and ξ , turn out to be different functions of Cartesian coordinates. To have a spinor space model, one has to use a doubling vector space $\{ (x_1, x_2, x_3) \otimes (x_1, x_2, x_3)' \}$. The information which is reachable here in the first place concerns non-relativistic physics in the frames of ideas on spinor space structure.

Spinor functions are in one-to-one correspondence with coordinates $x_i \oplus x'_i$, with the whole axis

$$(0, 0, x_3) \oplus (0, 0, x_3)'$$

removed; they exhibit an exponential discontinuity. Due to this reason, we shall consider the properties of spinor fields $\xi(x_i \oplus x'_i)$ and $\eta(x_i \oplus x'_i)$ in terms of continuity with respect to geometrical directions in the neighborhood of every point. This points out the possible fruitful geometrization within the Finslerian framework.

We shall further examine two sorts of spatial spinors, with the use of: cylindrical parabolic, spherical and parabolic coordinates. Transition from vector to spinor models is achieved by doubling the parameterizing domain $G(y_1, y_2, y_3) \implies \tilde{G}(y_1, y_2, y_3)$ with new identification rules on the boundaries. The differential equations satisfied by spatial spinor fields have been explicitly constructed. The use of curvilinear coordinates makes it easier to extend the formalism to curved (pseudo-Riemannian) models.

³This variant coincides with the known in the literature Racah group.

2.1. Two sorts of spatial spinors

We will start with the well-known Cartan's classification of 2-spinors with respect to the spinor P -reflection:

$$\widetilde{SU}(2) = \left\{ g \in SU(2) \oplus J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \mid \det g = +1, \det J = -1 \right\}, \quad (2.1)$$

which provides 2-component spinors of two sorts T_A :

$$T_1 : T_1(g) = g, T_1(J) = +J, \quad T_2 : T_2(g) = g, T_2(J) = -J. \quad (2.2)$$

There exist two ways to construct 3-vectors (complex-valued, in general) in terms of these 2-spinors:

$$1. (\xi \otimes \xi^*) = a + a_j \sigma^j, \quad a = \sqrt{a_j a_j}, \text{ pseudo-vector}; \quad (2.3)$$

$$2. (\eta \otimes \eta) = (c_j + i b_j) \sigma^j, \text{ vector}. \quad (2.4)$$

According to the way of taking the square root of the three real numbers – components of a 3-vector (x_i) , one obtains two different spatial spinors

$$\xi \iff a_j, \quad \eta \iff c_j \text{ or } (b_j). \quad (2.5)$$

2.2. The pseudo-vector space Π_3 and the spatial spinor ξ

This spinor model is based on the mapping

$$\Pi_3 \implies (a_1, a_2, a_3) \oplus (a_1, a_2, a_3)'$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \sqrt{a + a_3} e^{-i\gamma/2} \\ \sqrt{a - a_3} e^{+i\gamma/2} \end{pmatrix}, \quad e^{i\gamma} = \frac{a_1 + ia_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}. \quad (2.6)$$

It should be noted that in describing Π_0^+ and Π_0^- there arise peculiarities: at the whole axis a_3 , the relations contain the ambiguity $(0 + i0)/0$ (and the expressions for ξ will contain a mute angle variable $\Gamma : \gamma \rightarrow \Gamma$)

$$\Pi_0^+ : \quad \xi_0^+ = \begin{pmatrix} \sqrt{+2a_3} e^{-i\Gamma/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi_0^- : \quad \xi_0^- = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{-2a_3} e^{+i\Gamma/2} \end{pmatrix},$$

$$e^{i\Gamma} = \lim_{a_1, a_2 \rightarrow 0} \frac{a_1 + ia_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad a_3 = 0, \quad \xi = \begin{pmatrix} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} e^{-i\gamma/2} \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} e^{+i\gamma/2} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

2.3. The proper vector space E_3 and the spinor \vec{E}_3

This type of spatial spinor is based on the map

$$(\eta \otimes \eta) = (c_j + i b_j) \sigma^j. \quad (2.8)$$

The vector \vec{b} covers the upper half-space E_3^+ twice; the spinor η^+ is given by

$$\eta^+ = \begin{pmatrix} \sqrt{b - (b_1^2 + b_2^2)^{1/2}} e^{-i\gamma/2} \\ \sqrt{b - (b_1^2 + b_2^2)^{1/2}} e^{+i\gamma/2} \end{pmatrix}, \quad e^{i\gamma} = \frac{b_1 + ib_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}. \quad (2.9)$$

The vector \vec{b} covers a down half-space E_3^- twice; the spinor η^- is

$$\eta^- = \begin{pmatrix} \sqrt{b - (b_1^2 + b_2^2)^{1/2}} \left[-\sqrt{\frac{b_1 + ib_2}{(b_1^2 + b_2^2)^{1/2}}} \right]^* \\ \sqrt{b + (b_1^2 + b_2^2)^{1/2}} \left[+\sqrt{\frac{b_1 + ib_2}{(b_1^2 + b_2^2)^{1/2}}} \right] \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

The spinor field η is continuous in the plane $b_3 = 0$:

$$\eta^{+\cap-} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2(b_1 + i b_2)} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

2.4. The spatial spinor $\xi_{a_3}(a_1 + ia_2)$ and Cauchy-Riemann analyticity

It is natural to regard the components of spinor $\xi = \xi(a_j)$ as complex-valued functions of $z = a_1 + ia_2$ and of a real-valued function a_3 :

$$\xi^1 = U^1 + iV^1, \quad \xi^2 = U^2 + iV^2. \quad (2.12)$$

We obtain the modified Cauchy-Riemann relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^1}{\partial a_1} - \frac{\partial V^1}{\partial a_2} &= \frac{1}{2}(a_1 \cos \frac{\gamma}{2} + a_2 \sin \frac{\gamma}{2}) \left[\frac{1}{a\sqrt{a+a_3}} + \frac{\sqrt{a+a_3}}{\rho^2} \right], \\ \frac{\partial U^1}{\partial a_2} + \frac{\partial V^1}{\partial a_1} &= \frac{1}{2}(a_2 \cos \frac{\gamma}{2} - a_1 \sin \frac{\gamma}{2}) \left[\frac{1}{a\sqrt{a+a_3}} + \frac{\sqrt{a+a_3}}{\rho^2} \right], \\ \frac{\partial U^2}{\partial a_1} - \frac{\partial V^2}{\partial a_2} &= \frac{1}{2}(a_1 \cos \frac{\gamma}{2} - a_2 \sin \frac{\gamma}{2}) \left[\frac{1}{a\sqrt{a-a_3}} - \frac{\sqrt{a-a_3}}{\rho^2} \right], \\ \frac{\partial U^2}{\partial a_2} + \frac{\partial V^2}{\partial a_1} &= \frac{1}{2}(a_2 \cos \frac{\gamma}{2} + a_1 \sin \frac{\gamma}{2}) \left[\frac{1}{a\sqrt{a-a_3}} - \frac{\sqrt{a-a_3}}{\rho^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

For $\rho \rightarrow \infty$, the Cauchy-Riemann conditions still hold true.

A special note should be given to the behavior of the spinor field ξ^i along the half-plane $\{a_1 \geq 0, a_2 = 0\}^{a_3}$. Here the spinor ξ is not a single-valued function of spatial points of the vector space Pi_3 because its values depend on the direction from which one approaches those points.

2.5. Calculating $\nabla \xi$ and $\nabla_{\vec{n}} \xi$. The differential equation

The spinor exhibit continuity properties. In order to point them out, let us calculate first the 2-gradient along an arbitrary direction

$$\nabla \xi = \left(\frac{\partial}{\partial a_1} \xi, \frac{\partial}{\partial a_2} \xi \right), \quad \nabla_{\vec{n}} \xi = (\vec{n} \nabla \xi) \quad (2.14)$$

in the neighborhood of an arbitrary point⁴:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{n}} \xi^1 &= \frac{1}{2} \left[\frac{(\vec{n} \vec{a})}{a(a+a_3)} + i \frac{\vec{n} \times \vec{a}}{\rho^2} \right] \xi^1, \\ \nabla_{\vec{n}} \xi^2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{(\vec{n} \vec{a})}{a(a-a_3)} - i \frac{\vec{n} \times \vec{a}}{\rho^2} \right] \xi^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

This can be considered as a basic equation that prescribes the explicit form of the spinor $\xi(\vec{a})$. This understanding seems to be interesting, since it allows the existing of a mathematical potential.

⁴we use the notation $\vec{n}\vec{a} = n_1a_1 + n_2a_2, \vec{n} \times \vec{a} = n_1a_2 - n_2a_1$.

2.6. Spinor η and its differential equation

Similar things can be done for other spatial spinors. Again, we derive the differential equations for a spatial spinor of that type

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{n}}\eta^1 &= \frac{1}{2\rho} \left[-\frac{1}{b}(\vec{n} \vec{b}) + \frac{i}{\rho}(\vec{n} \times \vec{b}) \right] \eta^1, \\ \nabla_{\vec{n}}\eta^2 &= \frac{1}{2\rho} \left[+\frac{1}{b}(\vec{n} \vec{b}) - \frac{i}{\rho}(\vec{n} \times \vec{b}) \right] \eta^2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.7. Comparison of the models ξ and η

We shall further describe several qualitative distinctions between the spinor models ξ and η . The two models of spinor spaces relative to the P -orientation rely on the different mappings ξ and η defined over the same extended domain $\tilde{G}(y_i)$. The natural question is: how do these two maps relate? An answer can be found by comparing the derived formulas for ξ and η .

One answer emerges straightforward:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - i \sigma^2 \xi^*) \quad \text{or inverse} \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta - i \sigma^2 \eta^*). \tag{2.17}$$

An issue which needs special attention is the fact that complex conjugation enters these relations explicitly, fact which correlates to the change in orientation properties of the models.

We have seen that the description of differently P -oriented geometries in terms of spinor fields η and ξ has made hardly noticeable the distinction between these two geometries - much more apparent and intuitively appreciable as connected with different types of spatial geometry.

2.8. Spinors ξ and η in cylindrical parabolic coordinates

This coordinate system in the vector E_3 -space is defined by

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{y_1^2 - y_2^2}{2}, \quad x_2 = y_1 y_2, \quad x_3 = y_3, \\ y_2 &\in [0, +\infty), \quad y_1, y_3 \in (-\infty, +\infty). \end{aligned} \tag{2.18}$$

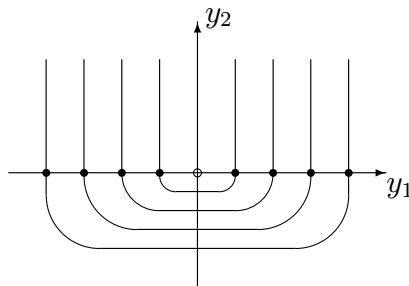


Fig. 1. Parabolic cylindrical coordinates

where the identified points on the boundary are connected by lines, and the domain $G(y_1, y_2)^{y_3}$ (at arbitrary y_3) ranging in the half-plane (y_1, y_2) covers the whole vector plane $(x_1, x_2)^{x_3}$.

The spinor ξ of the pseudo-vector Π_3 -model is given by

$$\xi = \left(\begin{array}{c} \sqrt{(y_3^2 + (y_1^2 + y_2^2)^2/4)^{1/2} + y_3} e^{-i\gamma/2} \\ \sqrt{(y_3^2 + (y_1^2 + y_2^2)^2/4)^{1/2} - y_3} e^{+i\gamma/2} \end{array} \right), \quad e^{i\gamma/2} = \frac{y_1 + iy_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}, \tag{2.19}$$

the factor $e^{i\gamma/2}$ runs through the upper complex half-plane in the case of vector space. At the x_3 -axis, we have:

$$\xi_0^+ = \sqrt{+2y_3} \begin{pmatrix} e^{-i\Gamma/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_0^- = \sqrt{-2y_3} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{+i\Gamma/2} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

For a proper vector model, the η -spinor looks as⁵

$$\eta^\sigma(y) = \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{y_3^2 + (y_1^2 + y_2^2)^2/4} - \frac{y_1^2 + y_2^2}{2}} \sigma e^{-i\gamma/2} \\ \sqrt{\sqrt{y_3^2 + (y_1^2 + y_2^2)^2/4} + \frac{y_1^2 + y_2^2}{2}} e^{-i\gamma/2} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

We construct the extended (spinor) models \tilde{E}_3 and $\tilde{\Pi}_3$ by doubling the range of the y_2 -variable:

$$y_2 \in [0, +\infty) \implies y_2 \in (-\infty, +\infty). \quad (2.22)$$

Then the above factor $e^{+i\gamma/2}$ will run through the full circle.

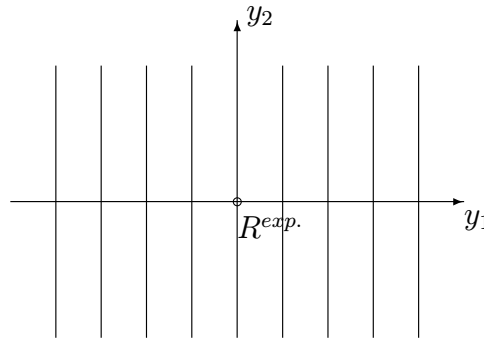


Fig. 2. Space with spinor structure

It is important to note the substantial change in the identification rules at the boundary set of $G(y_1, y_2, y_3)$: for the extended domain $\tilde{G}(y_1, y_2, y_3)$ one needs no special rules at all. Another issue needs to be emphasized: we have the same extended set $\tilde{G}(y_1, y_2, y_3)$ for both spinor models $\xi(y)$ and $\eta(y)$. This means that only the providing of the set with doubling dimension and the using of identification rules, do not determine in full the whole geometry of the spinor spaces. The specification of their P -orientation apparently requires additional information about this set. Evidently, P -orientation manifests itself in the explicitly different spinor functions $\xi(y)$ and $\eta(y)$. Moreover, a qualitative distinction between these spinor functions is revealed if one follows the orientation of a spinor (ξ_1, ξ_2) and (η_1, η_2) , while going from the x_3^+ - half-space to the x_3^- - half-space.

The differential equations for spatial spinors are

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{v}} \xi^1 &= \frac{\xi^1}{2} \left[\frac{\rho}{a(a + a_3)} (\vec{n} \vec{y}) + \frac{i}{\rho} (\vec{n} \times \vec{y}) \right], \\ \nabla_{\vec{n}} \xi^2 &= \frac{\xi^2}{2} \left[\frac{\rho}{a(a - a_3)} (\vec{n} \vec{y}) - \frac{i}{\rho} (\vec{n} \times \vec{y}) \right], \end{aligned} \quad (2.23)$$

and⁶

$$\nabla_{\vec{n}} \eta^1 = \frac{\eta^1}{2} \left[-\frac{\vec{n} \vec{y}}{b} + \frac{i}{\rho} (\vec{n} \times \vec{y}) \right], \quad \nabla_{\vec{n}} \eta^2 = \frac{\eta^2}{2} \left[\frac{\vec{n} \vec{y}}{b} - \frac{i}{\rho} (\vec{n} \times \vec{y}) \right], \quad (2.24)$$

These equations have no peculiarities over the complex plane $y_1 + iy_2$, excluding the origin $0 + i0$.

⁵The values + and - taken by the symbol σ correspond to the $x_3 > 0$ and $x_3 < 0$ half-spaces, respectively.

⁶We denote $(\vec{n} \vec{y}) = n_1 y_1 + n_2 y_2$, $\vec{n} \times \vec{y} = n_1 y_2 - n_2 y_1$.

2.9. The spinors ξ and η in parabolic coordinates

We shall further describe the spinor approach relative to the well-known parabolic coordinates

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 y_2 \cos y_3, \quad x_2 = y_1 y_2 \sin y_3, \\ x_3 &= \frac{y_1^2 - y_2^2}{2}, \quad y_1, y_2 \in [0, +\infty), \quad y_3 \in [0, 2\pi] \end{aligned} \tag{2.25}$$

The spatial spinor η of the proper vector model is given by

$$\eta^+(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (y_1 - y_2) e^{-iy_3/2} \\ (y_1 + y_2) e^{+iy_3/2} \end{pmatrix}, \quad \eta^-(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (y_2 - y_1) (-e^{-iy_3/2}) \\ (y_2 + y_1) e^{+iy_3/2} \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

As for the pseudo-vector model Π_3 , we have

$$\xi = \begin{pmatrix} y_1 e^{-iy_3/2} \\ y_2 e^{+iy_3/2} \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} N e^{-i\gamma/2} \\ M e^{+i\gamma/2} \end{pmatrix}, \quad y_1 = N, y_2 = M, y_3 = \gamma. \tag{2.27}$$

We double the above domain $G(y) \Rightarrow \tilde{G}(y) (y_3 \in [-2\pi, +2\pi])$,

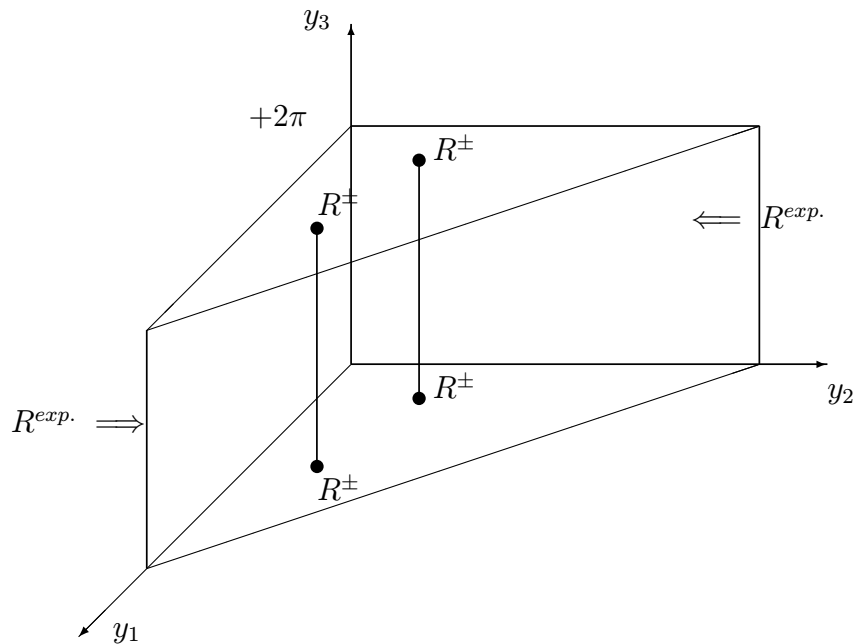


Fig. 3. Parabolic coordinates / vector space

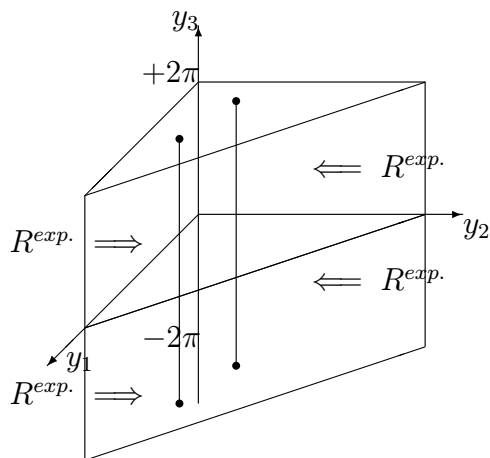


Fig. 4. Parabolic coordinates / spinor space

Instead of the domain $\tilde{G}(y)$ described below

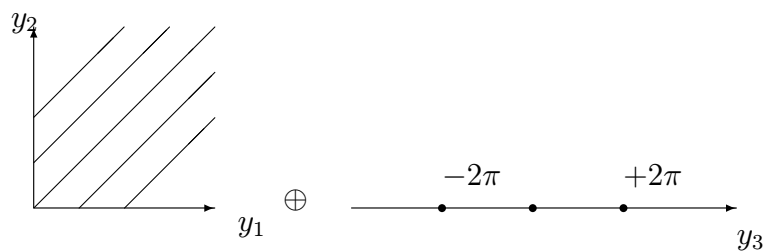


Fig. 5. Domain parameterizing the spinor space

one can use

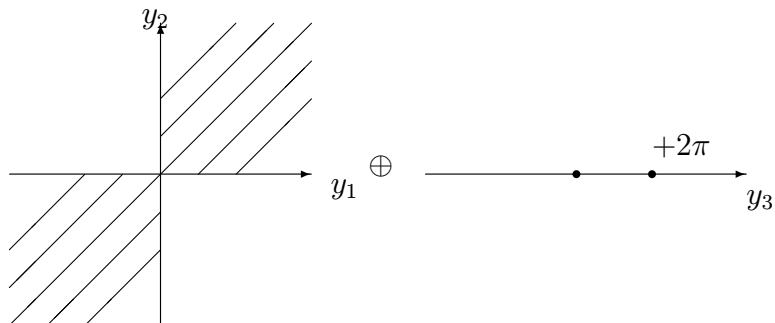


Fig. 6. Alternative domain to parameterize the spinor space

Actually, various domains $\tilde{G}(y)$ are acceptable for the correct parametrization of spinor spaces, and one may choose any of them.

2.10. Spatial spinors in spherical coordinates

We consider the system of spherical coordinates

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \sin y_2 \cos y_3, & x_2 &= y_1 \sin y_2 \sin y_3, & x_3 &= y_1 \cos y_2, \\ y_1 &\in [0, +\infty), & y_2 &\in [0, +\pi], & y_3 &\in [0, +2\pi]. \end{aligned} \tag{2.28}$$

A spinor $\eta(y)$ of the pseudo-vector model Π_3 is given by

$$\xi = \begin{pmatrix} \sqrt{y_1(1 + \cos y_2)} e^{-iy_3/2} \\ \sqrt{y_1(1 - \cos y_2)} e^{+iy_3/2} \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

In turn, a spinor $\eta(y)$ of the proper vector model E_3 is defined according to

$$\eta = \begin{pmatrix} \sqrt{y_1(1 - \sin y_2)} (\sigma e^{-iy_3/2}) \\ \sqrt{y_1(1 + \sin y_2)} e^{+iy_3/2} \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

The discontinuity properties of these spinors may be characterized by the diagram

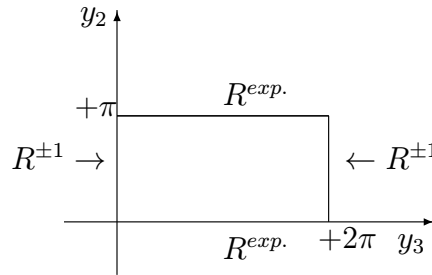


Fig. 7. Spherical coordinate / vector space

Evidently, the transition to extended models can be performed by formal doubling the range of angle variable y_3 ⁷

$$\tilde{G}(r, \theta, \phi) = \{ r \in [0, +\infty), \theta \in [0, +\pi], \phi \in [-2\pi, +2\pi] \}.$$

There are possible some alternative variants for the extended domain \tilde{G} , which can be used for covering spinor spaces. For instance, the most natural and symmetrical manner to do this, is to extend the range of radial variable:

$$\begin{aligned} \tilde{G}'(r, \theta, \phi) &= \{ r \in (-\infty, +\infty), \theta \in [0, +\pi], \phi \in [-\pi, -\pi] \}. \\ \xi(r, \theta, \phi) &= \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \cos \theta} (\sqrt{r} e^{i\phi})^* \\ \sqrt{1 - \cos \theta} (\sqrt{r} e^{i\phi}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

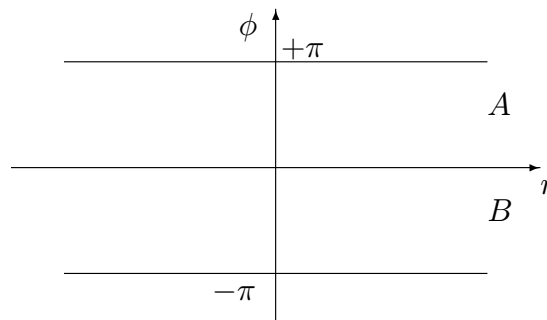


Fig. 8. Spherical coordinates / spinor space

⁷In the following we will use the more common notation $y_1 = r, y_2 = \theta, y_3 = \phi$

2.11. Conclusion

The results obtained for the 3-space with (x, y, z) coordinates may be extended to Minkowski 4-space with coordinates (t, x, y, z) . Mathematically, this means to use the relativistic $SL(2, \mathbb{C})$ spinors instead of non-relativistic $SU(2)$ spinors. The domains of curvilinear coordinates associated to spinor spaces can be used in order to examine possible quantum mechanical manifestation of the spinor structure, both in non-relativistic and relativistic theories. To this end, one should specially examine the analytical properties of the known solutions of the Schrödinger and Dirac equations in various coordinates.

3 Space with spinor structure and analytical properties of the solutions of the Klein–Fock–Gordon equation in cylindric parabolic coordinates

3.1. Parabolic cylindrical coordinates

Let us start with the cylindric parabolic coordinates

$$x = (u^2 - v^2)/2, \quad y = u v, \quad z = z. \quad (3.1)$$

In order to cover the vector space (x, y, z) , it suffices to make a choice out of the four possibilities:

$$\begin{aligned} v &= +\sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}, & u &= \pm\sqrt{+x + \sqrt{x^2 + y^2}}, \\ v &= -\sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}, & u &= \pm\sqrt{+x + \sqrt{x^2 + y^2}}, \\ v &= \pm\sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}, & u &= +\sqrt{+x + \sqrt{x^2 + y^2}}, \\ v &= \pm\sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}, & u &= -\sqrt{+x + \sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

For definiteness, let us use the first variant from the above:

$$v = +\sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad u = \pm\sqrt{+x + \sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3.3)$$

which is illustrated in Figure 9.

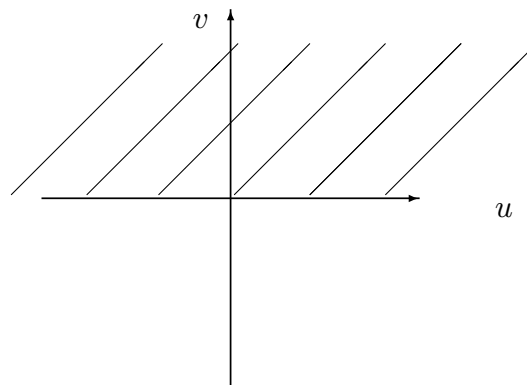


Fig. 9. The domain $G(u, v)$ used to parameterize the vector model

The correspondence between the points (x, y) and (u, v) can be illustrated by the following formulas and Figure 10:

$$\begin{aligned} u &= k \cos \phi, & v &= k \sin \phi, & \phi &\in [0, \pi]; \\ x &= (k^2/2) \cos 2\phi, & y &= (k^2/2) \sin 2\phi, & 2\phi &\in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

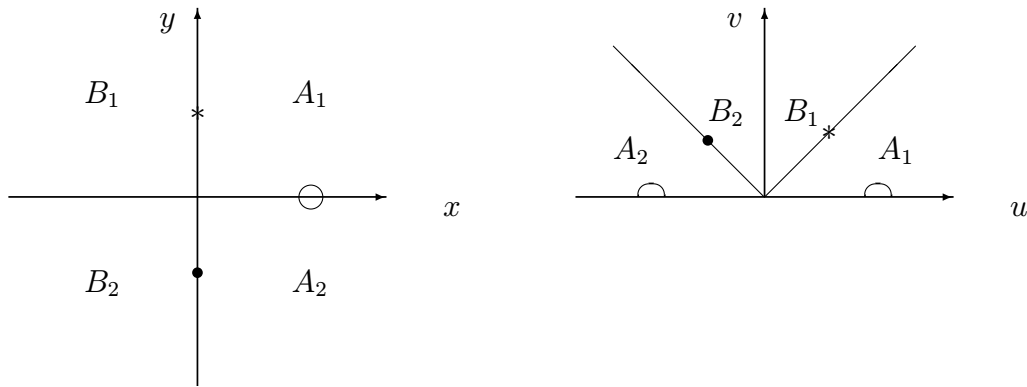


Fig. 10. The mapping $G(x, y) \implies G(u, v)$; identification rules

When turning to the case of spinor space, we will see the complete symmetry between the coordinates u and v ; they relate to the Cartesian coordinates of the extended model $(x, y, z) \oplus (x', y', z')$ through the formulas

$$v = \pm \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad u = \pm \sqrt{+x + \sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{3.5}$$

illustrated by Figure 11:

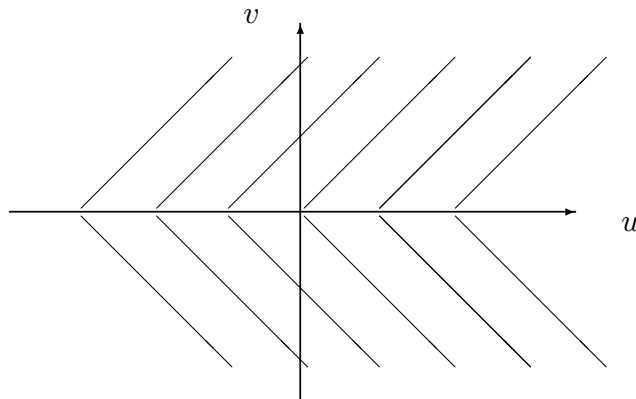


Fig. 11. $\tilde{G}(u, v)$ covering the spinor space

The metric of space-time in parabolic cylindrical coordinates has the form

$$dS^2 = c^2 dt^2 - (u^2 + v^2)(du^2 + dv^2) - dz^2. \tag{3.6}$$

3.1 3.2. Solutions of the Klein–Fock–Gordon equation and functions on the parabolic cylinder

Let us consider the KFG equation

$$\left[-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{u^2 + v^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \Psi = 0. \tag{3.7}$$

After separating the variables by the substitution

$$\Psi(t, u, v, \phi) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ipz/\hbar} U(u) V(v),$$

one gets

$$\left[\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{du^2} + \left(\frac{\epsilon^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{p^2}{\hbar^2} \right) u^2 \right] + \left[\frac{1}{V} \frac{d^2 V}{dv^2} + \left(\frac{\epsilon^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{p^2}{\hbar^2} \right) v^2 \right] = 0. \quad (3.8)$$

In the following, we shall use the notation

$$\lambda^2 = \left(\frac{\epsilon^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{p^2}{\hbar^2} \right), \quad [\lambda] = \frac{1}{\text{meter}}. \quad (3.9)$$

By introducing two separation constants, a and b ($a + b = 0$), we can derive from (3.8) two distinct equations:

$$\frac{d^2 U}{du^2} + (\lambda^2 u^2 - a) U = 0, \quad \frac{d^2 V}{dv^2} + (\lambda^2 v^2 - b) V = 0. \quad (3.10)$$

The transition in equations (3.10) to the canonical form is obtained by using dimensionless variables:

$$\sqrt{2\lambda} u \rightarrow u, \quad \frac{a}{2\lambda} \rightarrow a, \quad \sqrt{2\lambda} v \rightarrow v, \quad \frac{b}{2\lambda} \rightarrow b. \quad (3.11)$$

The equations (3.10) will take the form:

$$\frac{d^2 U}{du^2} + \left(\frac{u^2}{4} - a \right) U = 0, \quad \frac{d^2 V}{dv^2} + \left(\frac{v^2}{4} + a \right) V = 0. \quad (3.12)$$

The solutions of these similar equations can be found as series:

$$F(\xi) = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + \sum_{k=1,2,\dots} c_{2k+1} \xi^{2k+1} + \sum_{k=1,2,\dots} c_{2k+2} \xi^{2k+2}; \quad (3.13)$$

we note that in (3.13) the terms of even and odd powers of ξ are distinguished.

After tedious calculation, one derives two independent groups of recurrent relations:

for even powers

$$\begin{aligned} \xi^0 : & \quad 2 c_2 - \alpha c_0 = 0, \\ \xi^2 : & \quad c_4 4 \times 3 + \frac{c_0}{4} - \alpha c_2 = 0, \\ \xi^4 : & \quad c_6 6 \times 5 + \frac{c_2}{4} - \alpha c_4 = 0, \\ n = 3, 4, \dots, \xi^{2n} : & \quad c_{2n+2}(2n+2)(2n+1) + \frac{1}{4} c_{2n-2} - \alpha c_{2n} = 0; \end{aligned} \quad (3.14)$$

for odd powers

$$\begin{aligned} \xi^1 : & \quad c_3 3 \times 2 - \alpha c_1 = 0, \\ \xi^3 : & \quad c_5 5 \times 4 + \frac{c_1}{4} - \alpha c_3 = 0, \\ n = 3, 4, \dots, \xi^{2n-1} : & \quad c_{2n+1}(2n+1)(2n) + \frac{1}{4} c_{2n-3} - \alpha c_{2n-1} = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

So one can construct two linearly independent solutions

even

$$\begin{aligned}
 F_1(\xi^2) &= 1 + a_2 \frac{\xi^2}{2!} + a_4 \frac{\xi^4}{4!} + \dots, \\
 a_2 &= \alpha, \quad a_4 = \alpha^2 - \frac{1}{2}, \quad c_6 = \alpha^3 - \frac{7}{2}\alpha, \\
 n = 3, 4, \dots : \quad a_{2n+2} &= \alpha a_{2n} - \frac{(2n)(2n-1)}{4} a_{2n-2};
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

odd

$$\begin{aligned}
 F_2(\xi) &= \xi + a_3 \frac{\xi^3}{3!} + a_5 \frac{\xi^5}{5!} + \dots, \\
 a_3 &= \alpha, \quad a_5 = \alpha^2 - \frac{3}{2}, \\
 n = 3, 4, \dots : \quad a_{2n+1} &= \alpha a_{2n-1} - \frac{(2n-1)(2n-2)}{4} a_{2n-3}.
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

3.3. The basis wave functions. Manifestation of vector and spinor space structures

Having combined the two previous solutions F_1 and F_2 , we can obtain four types of wave functions⁸

$$\begin{aligned}
 (\text{even} \otimes \text{even}) : \quad \Phi_{++} &= E(a, u^2) E(-a, v^2), \\
 (\text{odd} \otimes \text{odd}) : \quad \Phi_{--} &= O(a, u) O(-a, v), \\
 (\text{even} \otimes \text{odd}) : \quad \Phi_{+-} &= E(a, u^2) O(-a, v), \\
 (\text{odd} \otimes \text{even}) : \quad \Phi_{-+} &= O(a, u) E(-a, v^2).
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Note the behavior of the constructed wave functions:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{++}(x = 0, y = 0) &\neq 0, \quad \Phi_{--}(x = 0, y = 0) = 0, \\
 \Phi_{+-}(x > 0, y = 0) &= 0, \quad \Phi_{-+}(x < 0, y = 0) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

Now let us consider which restrictions for the wave functions Ψ follow from the requirement of single-valuedness. Here two peculiarities of the parametrization are substantial:

$$\underline{v = 0} : x = +\frac{u^2}{2} \geq 0, y = 0; \quad \underline{u = 0} : x = -\frac{v^2}{2} \leq 0, y = 0.
 \tag{3.20}$$

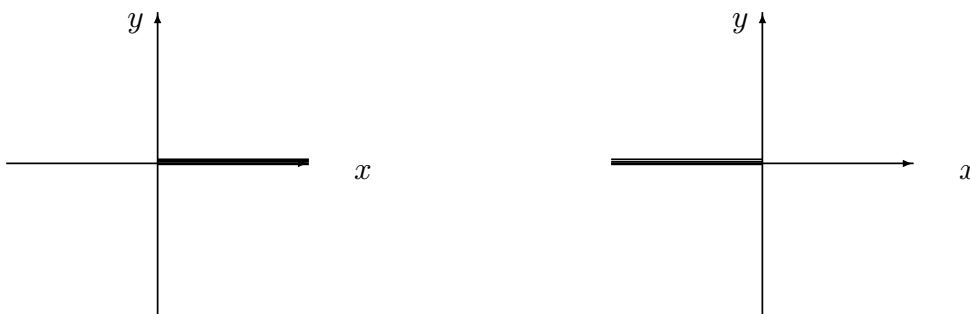


Fig. 12. The peculiarities of the parametrization

⁸We will change the notation: $F_1 \implies E$; $F_2 \implies O$.

Four solutions behave in special peculiar regions, as follows:

$$\Phi_{++}(a; u = 0, v) = + \Phi_{++}(a; u = 0, -v) , \tag{3.21}$$

$$\Phi_{++}(a; +u, v = 0) = + \Phi_{++}(a; -u, v = 0) , \tag{3.22}$$

$$\Phi_{--}(a; u = 0, +v) = + \Phi_{--}(a; u = 0, -v) = 0 \tag{3.23}$$

$$\Phi_{--}(a; u, v = 0) = + \Phi_{--}(a; -u, v = 0) = 0 , \tag{3.24}$$

$$\Phi_{+-}(a; u = 0, +v) = - \Phi_{+-}(a; u = 0, -v) , \tag{3.25}$$

$$\Phi_{+-}(a; u, v = 0) = \Phi_{+-}(a; -u, v = 0) = 0 , \tag{3.26}$$

$$\Phi_{-+}(a; u = 0, +v) = \Phi_{-+}(a; u = 0, -v) = 0 , \tag{3.27}$$

$$\Phi_{-+}(a; +u, v = 0) = - \Phi_{-+}(a; -u, v = 0) . \tag{3.28}$$

The boundary properties of the constructed wave functions can be illustrated by the following schemes:

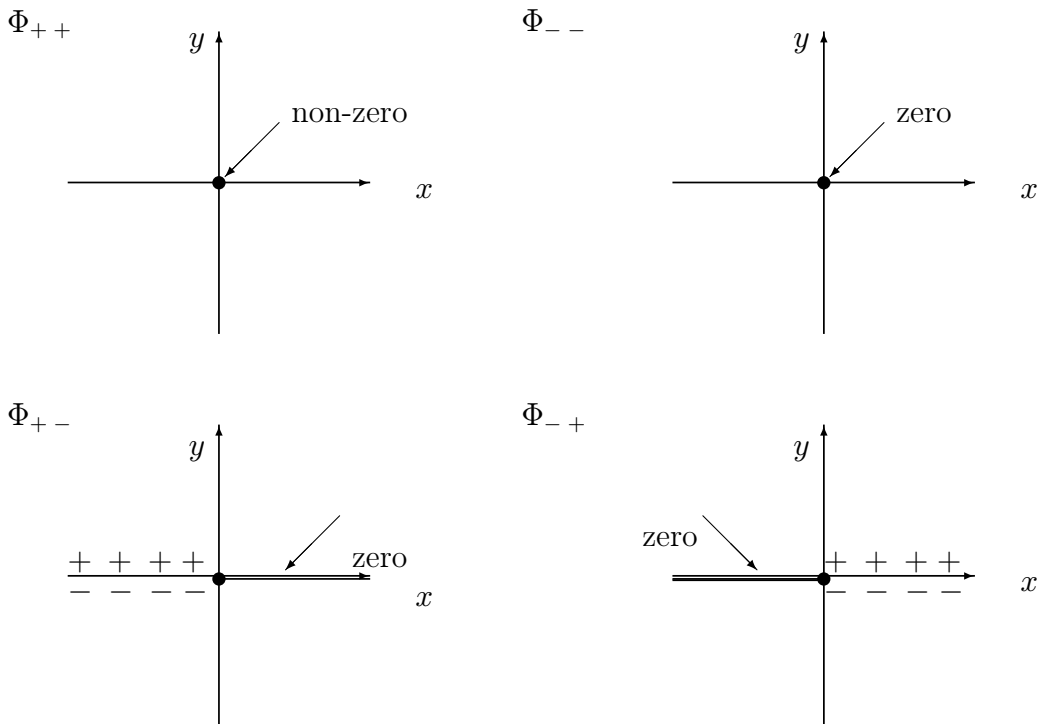


Fig 13. Boundary behavior of the wave functions in the (x, y) -plane

So we conclude that the solutions Ψ of the types $(++)$ and $(--)$ are single-valued in the space with vector structure, whereas the solutions of the types $(+-)$ and $(-+)$ are not single-valued in such a space, so these latter types $(+-)$ and $(-+)$ must be discarded. However, these solutions $((+-)$ and $(-+))$ must be retained in the space with *spinor* structure.

When using the spinor space model, two sets (u, v) and $(-u, -v)$ represent different geometrical points in the spinor space, so the requirement of single valuedness as applied in the case of spinor space does not assume that the values of the wave functions must be equal at the points (u, v) and $(-u, -v)$:

$$\Phi(u, v) = \Phi(x, y) \neq \Phi(-u, -v) = \Phi(x', y') . \tag{3.29}$$

The dividing of the basis wave functions into two subsets may be mathematically formalized with the help of the special discrete operator acting in the spinor space:

$$\hat{\delta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\delta} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \\ -v \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

It is easily verified that the solutions which are single-valued in the vector space model are eigenfunctions of δ for the eigenvalue $\delta = +1$:

$$\hat{\delta} \Phi_{++}(a; u, v) = + \Phi_{++}(a; u, v), \quad (3.31)$$

$$\hat{\delta} \Phi_{--}(a; u, v) = + \Phi_{--}(a; u, v), \quad (3.32)$$

and the additional ones - which are acceptable only in the spinor space model - are eigenfunctions for the eigenvalue $\delta = -1$:

$$\hat{\delta} \Phi_{+-}(a; u, v) = - \Phi_{+-}(a; u, v), \quad (3.33)$$

$$\hat{\delta} \Phi_{-+}(a; u, v) = - \Phi_{-+}(a; u, v). \quad (3.34)$$

3.4. The form of a diagonalized operator \hat{A}

Let us find an explicit form of the operator \hat{A} , introduced above by the equation $\hat{A}\Psi = a \Psi$.

In Cartesian coordinates one has the following representation

$$\hat{A} = x \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + 2y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} + x \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - m^2 \right); \quad (3.35)$$

which in (u, v, z) -coordinates has the form

$$\hat{A} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + m^2 \right) (u^2 - v^2) \right]. \quad (3.36)$$

3.5. Orthogonality and completeness of the bases for vector and spinor spaces

Now let us consider the scalar multiplication

$$\int \Psi_{\mu'}^* \Psi_{\mu} \sqrt{-g} dt dz du dv. \quad (3.37)$$

of the basic constructed wave functions:

$$\Psi_{++}(\epsilon, p, a) = e^{i\epsilon t} e^{ipz} \Phi_{++}(a; u, v), \quad (3.38)$$

$$\Psi_{--}(\epsilon, p, a) = e^{i\epsilon t} e^{ipz} \Phi_{--}(a; u, v), \quad (3.39)$$

$$\Psi_{+-}(\epsilon, p, a) = e^{i\epsilon t} e^{ipz} \Phi_{+-}(a; u, v), \quad (3.40)$$

$$\Psi_{-+}(\epsilon, p, a) = e^{i\epsilon t} e^{ipz} \Phi_{-+}(a; u, v). \quad (3.41)$$

where μ and μ' stand for generalized quantum numbers.

First of all, we note some interesting integrals⁹:

in vector space

$$I_0 = \int_0^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} du \Phi_{++}^* \Phi_{--} (u^2 + v^2), \quad (3.42)$$

⁹The arguments $(a; u, v)$ are omitted here.

in spinor space

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} du \Phi_{++}^* \Phi_{--} (u^2 + v^2) , \tag{3.43}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} du \Phi_{+-}^* \Phi_{-+} (u^2 + v^2) , \tag{3.44}$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} du \Phi_{++}^* \Phi_{+-} (u^2 + v^2) , \tag{3.45}$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} du \Phi_{++}^* \Phi_{-+} (u^2 + v^2) , \tag{3.46}$$

$$I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} du \Phi_{--}^* \Phi_{+-} (u^2 + v^2) , \tag{3.47}$$

$$I_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} du \Phi_{--}^* \Phi_{-+} (u^2 + v^2) . \tag{3.48}$$

All these seven integrals $I_0, I_1 \dots I_6$ are equal to zero, which means that the constructed functions provide us with an orthogonal basis for the Hilbert space $\Psi(t, z, u, v)$, where (u, v, z) belong to the extended (spinor) space model.

3.6. On matrix elements of physical observables, in vector and spinor spaces

The question of principle is to determine in which way the transition from vector to spinor space model can influence the results of calculation of matrix elements for physical quantities. As an example, let us consider matrix elements for operator of coordinates: one may calculate the matrix elements of the basic initial coordinates u, v or x, y :

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2} , \quad y = uv , \quad \text{or} \quad (u, v) . \tag{3.49}$$

Then simple selection rules for the matrix elements can be derived¹⁰:

in vector space

$$\begin{array}{cc} x_{\mu',\mu} & ++ \quad -- \\ ++ & \neq 0 \quad 0 \\ -- & 0 \quad \neq 0 \end{array} , \quad \begin{array}{cc} y_{\mu',\mu} & ++ \quad -- \\ ++ & 0 \quad \neq 0 \\ -- & \neq 0 \quad 0 \end{array} \tag{3.50}$$

in spinor space

$$\begin{array}{cccc} x_{\mu',\mu} & ++ & -- & +- & -+ \\ ++ & \neq 0 & 0 & 0 & 0 \\ -- & 0 & \neq 0 & 0 & 0 \\ +- & 0 & 0 & \neq 0 & 0 \\ -+ & 0 & 0 & 0 & \neq 0 \end{array} , \quad \begin{array}{cccc} y_{\mu',\mu} & ++ & -- & +- & -+ \\ ++ & 0 & \neq 0 & 0 & 0 \\ -- & \neq 0 & 0 & 0 & 0 \\ +- & 0 & 0 & 0 & \neq 0 \\ -+ & 0 & 0 & \neq 0 & 0 \end{array} \tag{3.51}$$

The same, for the coordinates u and v , looks like:

¹⁰For simplicity we restrict ourselves only to the degeneracy at the discrete quantum number $++$, $--$, $+-$, $-+$, by taking ϵ, p, a fixed.

in vector space

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{u_{\mu',\mu}} & ++ & -- \\
 ++ & 0 & \neq 0 \\
 -- & \neq 0 & 0
 \end{array}
 , ,
 \begin{array}{ccc}
 \underline{v_{\mu',\mu}} & ++ & -- \\
 ++ & \neq 0 & 0 \\
 -- & 0 & \neq 0
 \end{array}
 \tag{3.52}$$

in spinor space

$$\begin{array}{cccc}
 \underline{u_{\mu',\mu}} & ++ & -- & +- & -+ \\
 ++ & 0 & 0 & 0 & \neq 0 \\
 -- & 0 & 0 & \neq 0 & 0 \\
 +- & 0 & \neq 0 & 0 & 0 \\
 -+ & \neq 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 ,
 \begin{array}{cccc}
 \underline{v_{\mu',\mu}} & ++ & -- & +- & -+ \\
 ++ & 0 & 0 & \neq 0 & 0 \\
 -- & 0 & 0 & 0 & \neq 0 \\
 +- & \neq 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -+ & 0 & \neq 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \tag{3.53}$$

3.7. Schrödinger equation

The study of the analytical properties of the Klein-Fock-Gordon wave solutions in vector and spinor space models is still applicable, with slight changes, to the non-relativistic Schrödinger equation as well:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{u^2 + v^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \right] \Psi , \tag{3.54}$$

where the substitution for the wave functions is the same

$$\Psi(t, u, v, z) = e^{-iet/\hbar} e^{ipz/\hbar} U(u)V(v) , \tag{3.55}$$

and then, the equation for $U(u)V(v)$ is

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + \left(\epsilon - \frac{p^2}{2m} \right) (u^2 + v^2) \right] U(u)V(v) = 0 . \tag{3.56}$$

3.8. Results

We shall further infer several quantum mechanical consequences while changing the vector geometrical model of the physical space to the spinor one.

The extension procedure is performed in cylindrical parabolic coordinates, $G(t, u, v, z) \implies \tilde{G}(t, u, v, z)$. This is done through expansion twice as much of the domain G , so that instead of the half plane ($u, v > 0$) now the entire plane (u, v) should be used, accompanied with new identification rules for the boundary points. In the Cartesian picture, this procedure corresponds to taking the two-sheet surface $(x', y') \oplus (x'', y'')$ instead of the one-sheet surface (x, y) .

The solutions of the Klein-Fock-Gordon and Schrödinger equations $\Psi_{\epsilon, p, a} = e^{iet} e^{ipz} U_a(u) V_a(v)$ are constructed in terms of parabolic cylindrical functions¹¹. Given the quantum numbers ϵ, p, a , four types of solutions are possible: $\Psi_{++}, \Psi_{--}; \Psi_{+-}, \Psi_{-+}$.

The first two ones, Ψ_{++} and Ψ_{--} , provide us with single-valued functions of the vector space points, whereas the last two, Ψ_{+-} and Ψ_{-+} , have discontinuities in the frame of vector spaces, and therefore they must be discarded in this model. All the four types of functions are continuous ones while regarded in the spinor space.

¹¹We denoted the separating constant by a .

It is established that all solutions Ψ_{++} , Ψ_{--} , Ψ_{+-} and Ψ_{-+} , are orthogonal to each other, provided that integration is done over the extended domain of parametrization of the spinor space.

Some simple selection rules for matrix elements of the vector and spinor coordinates, (x, y) and (u, v) , respectively, are further derived. The selection rules for (u, v) are substantially different in vector spaces compared to spinor spaces.

4 Some relevant topics

In conclusion, within this paper we addressed the following topics: the spinor structure of space models; the relation between the Dirac–Schwinger quantization rule and the superposition principle in quantum mechanics; the manifestation of spinor space structure in classifying the solutions of the Dirac equation and for the matrix elements which are related to physical quantities; spinors in polarization optics; the Jones formalism for completely and partly polarized light; General Relativity and Riemannian space-time models with spinor structure and tetrad (vierbein) formalism.

Acknowledgment

The present work was developed under the auspices of Grant 1196/2012 - BRFFR-RA No. F12RA-002, within the cooperation framework between Romanian Academy and Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research.

The authors wish to thank to the organizers of the joint event *Colloquium on Differential Geometry*, and *The IX-th International Conference on Finsler Extensions of Relativity Theory (FERT 2013)*, held between 26 – 30 August 2013 in Debrecen, Hungary. for their warm hospitality. Also, V. Red'kov, O. Veko and V. Balan are thankful to Prof. D. Pavlov for the support provided for the participation in the event *FERT 2013*.

References

- [1] Abramowitz M., Stegun I.A. Handbook of Mathematical Functions, Moscow, 1979.
- [2] Aharonov Y., Susskind L. Observability of the sign change of spinors under 2π rotations // *Phys. Rev.*, 158, 1967, 1237–1238.
- [3] Bachas C.P., Green M.B. A classical manifestation of the Pauli exclusion principle. hep-th/9712187.
- [4] Bernstein H.J. Spin precession during interferometry of fermions and the phase factor associated with rotations through 2π radians. // *Phys. Rev. Lett.*, 1967, 1102–1103.
- [5] Biedenharn L.C., Braden H.W., Truini P., H. van Dam Relativistic wave-functions on spinor space // *J. Phys. A.*, 21, 1988, 3593–3610.
- [6] Borchers H.J., Hegerfeldt G.C. The structure of space-time transformations // *Commun. Math. Phys.*, 28, 1972, 259–266.
- [7] Bugajska K. Spinors as fundamental objects // *J. Math. Phys.*, 26, 1985, 588–592.
- [8] Bugajska K. Internal structure of fermions // *J. Math. Phys.*, 26, 1985, 1111–1117.
- [9] Bugajska K. Spinors and space-times // *J. Math. Phys.*, 27, 1986, 853–858.
- [10] Cartan E. Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane // *Bull. Soc. Math. France*, 41, 1913, 53–96.
- [11] Cartan E. La théorie des spineurs. I, II // *Actualités Sci. et Ind.*, 643, 1938; *Actualités Sci. et Ind.* 701, 1938.

- [12] Freund Peter G.O. Spin structures and gauge theory // *Lect. Notes Phys.*, 116, 1979, 308–310.
- [13] Geroch R. Spinor structure of space-time in General Relativity // *Int. J. Math. Phys.*, 9, 1968, 1739–1744.
- [14] Geroch R. Spinor structure of space-time in General Relativity II // *J. Math. Phys.*, 11, 1970, 343–348.
- [15] Hartung R.W. Pauli principle in Euclidean geometry // *Amer. J. Phys.*, 47, 1979, 900–910.
- [16] Held A., Newman E.T., Posadas R. The Lorentz group and the sphere // *J. Math. Phys.*, 11, 1970, 3145–3154.
- [17] Hopf H. Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche // *Math. Annalen*, 104, 1931, 637–665; *Selecta Heinz Hopf*, Springer, Berlin, 1964, 38–63.
- [18] Ishikawa H. On differentiation with respect to spinors // *Progr. Theor. Phys.*, 63, 1980, 2145–2147.
- [19] Klein A.G., Opat G.I. Observability of 2π rotations: a proposed experiment // *Phys. Rev. D.*, 11, 1975, 523–528.
- [20] Kurdgelaidze D.F. Spinor geometry (in Russian) // *Izvestia Vuzov, Fizika*, 2, 1977, 7–12.
- [21] Kustaanheimo P., Stiefel E. Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // *Journ. f. Reine Angew. Math.*, Berlin, 218, 1965, 204–219.
- [22] Lohe M.A. Spinor representations of the orthogonal groups // *J. Math. Phys.*, 14, 1973, 1959–1964.
- [23] Milnor J. Spin structure on manifolds // *L'Enseignement Math.*, 9, 1963, 198–203.
- [24] Penrose R. *Structure of Space-Time*. New York-Amsterdam, W.A. Benjamin Inc., 1968.
- [25] Penrose R., Rindler W. *Spinors and Space-Time. Volume I: Two-spinor calculus and relativistic fields*. Cambridge University Press, 1984.
- [26] Polubarinov I.V. Quantum mechanics and Hopf bundles // *Group Theoretical Methods in Physics*, 2, Proc. Intern. Seminar, Zvenogorod, 24-26 November 1982, 3–10.
- [27] Rauch H., Zelinger A., Badurek G. et al. Verification of coherent spinor rotation of fermions // *Phys. Lett. A.*, 54, 1975, 425–427.
- [28] Red'kov V.M. On spinor structure of pseudo-Riemannian space-time and global continuity property for fermion wave functions // *Vesti AN BSSR. Ser. fiz.-mat.*, 3, 1994, 49–55.
- [29] Red'kov V.M. On spinor P -oriented model of a 3-dimensional Euclidean space // *Vesti AN BSSR. Ser. fiz.-mat.*, 3, 1995, 56–62.
- [30] Red'kov V.M. On connection between assumption of spinor geometry and the concept of a fermion intrinsic parity // *Vesti AN BSSR. ser. fiz.-mat.*, 1, 1996, 36–43.
- [31] Red'kov V.M. P -orientation and spacial spinors // *Vesti AN BSSR. Ser. fiz.-mat.*, 2, 2000, 76–80.
- [32] Red'kov V.M. Linear representations of spinor coverings of the Lorentz group and intrinsic space-time parity of a fermion // *Vesti AN BSSR. ser. fiz.-mat.*, 2, 2003, 70–76.
- [33] Red'kov V.M. Geometry of 3-spaces with spinor structure // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 7, 2004, 2, 106–128.
- [34] Red'kov V.M. Spinor structure of P -oriented space, Kustaanheimo-Stiefel and Hopf bundle – connection between formalisms // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 8, 2005, 3, 222–239.
- [35] Sommers P. Space spinors // *J. Math. Phys.*, 21, 1980, 2567–2571.
- [36] Sternberg S. On the role of field theories in our physical concept of geometry // *Lect. Notes Math.*, 76, 1978, 1–80.

- [37] Stiefel E., Scheifele G. Linear and Regular Celestial Mechanics. (in Russian), Moscow, 1975.
[38] Weyl H. Elektron und Gravitation // *Zs. für Phys.*, 56, 1929, 330–352.
[39] Weyl H. Gravitation and the electron // *Proc. Nat. Acad. Sci. Amer.*, 15, 1929, 323–334.

О ВОЗМОЖНЫХ ПРОЯВЛЕНИЯХ СПИНОРНЫХ СТРУКТУР В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ

Елена Овсиюк¹, Ольга Веко¹, Алесандру Оана², Мирче Неагу²,
Владимир Балан³, Виктор Редьков⁴

¹ Мозырский Государственный Педагогический Университет, Мозырь, Беларусь

² Брашовский Трансильванский Университет, Брашов, Румыния

³ Бухарестский Политехнический Университет, Бухарест, Румыния

⁴ Институт Физики им. Б.И. Степанова, Национальная Академия Наук Беларуси, Минск,
Беларусь

v.redkov@dragon.bas-net.by

В работе обсуждаются следующие вопросы: спинорная накрывающая группы Лоренца, внутренняя четность фермиона, майорановские фермионы, модели пространств со спинорной структурой, параметризация спинорных пространств криволинейными координатами, проявление спинорной пространственной структуры в классификации решений квантово-механических уравнений и в матричных элементах физических величин

Ключевые слова: спиноры, группа Лоренца, четность релятивистского фермиона, 4-спиноры Майораны, пространство со спинорной структурой, уравнение Клейна-Фока-Гордона, квантовая механика

SPINORS, MATRIX STRUCTURES, AND PROJECTIVE GEOMETRY IN POLARIZATION OPTICS

Elena Ovsiyuk¹, Olga Veko¹, Mircea Neagu²,
Vladimir Balan³, Victor Red'kov⁴

¹ *Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus*

² *University Transilvania of Braşov, Braşov, Romania*

³ *University Politehnica of Bucharest, Bucharest, Romania*

⁴ *B.I. Stepanov Institute of Physics, NAS of Belarus*

v.redkov@dragon.bas-net.by

The paper discusses the role played by Mueller and Jones formalisms in polarization optics, by addressing the following aspects: restriction to the $SU(2)$ symmetry, non-relativistic Stokes 3-vectors; Cartan 2-spinors in polarization optics; Jones 4-spinors for partially polarized light; the linear group $SL(4, \mathbb{R})$ and the classification of 1-parametric Mueller matrices; semi-group structure and classification of degenerate Mueller matrices.

Key Words: spinors, Mueller formalism, Jones formalism, Stokes 3-vectors, Cartan 2-spinors, polarization optics, symmetry.

General introduction

The goal of the paper is to discuss the role played by Mueller (matrix) and Jones (spinor) formalisms in polarization optics, by addressing the following essential aspects:

- polarization of the light and Mueller formalism;
- polarized light and Jones formalism, restriction to the $SU(2)$ symmetry, and two types of non-relativistic Stokes 3-vectors;
- Cartan 2-spinors in polarization optics: two kinds of Jones complex 2-vectors;
- on possible Jones 4-spinors for partially polarized light;
- the linear group $SL(4, \mathbb{R})$ and the classification of 1-parametric Mueller matrices;
- semi-group structure and classification of degenerate Mueller matrices, projective geometry.

1 Polarization of the light and the Mueller formalism

To elucidate in which way mathematical theory of rotation and Lorentz groups may be applied to problems of polarization optics, and also which problems from this field await to be solved, we proceed with basic definitions concerning the light polarization.

Consider a plane electromagnetic wave spreading along the axis z ; then, at an arbitrary fixed point z , we have

$$E^1 = N \cos \omega t, \quad E^2 = M \cos(\omega t + \Delta), \quad E^3 = 0, \quad N \geq 0, \quad M \geq 0, \quad \Delta \in [-\pi, +\pi],$$

and the Stokes parameters $(S_a) = (I, S^1, S^2, S^3)$ are determined by

$$I = \langle E_1^2 + E_2^2 \rangle, \quad S^3 = \langle E_1^2 - E_2^2 \rangle, \quad S^1 = \langle 2E_1 E_2 \cos \Delta \rangle, \quad S^2 = \langle 2E_1 E_2 \sin \Delta \rangle;$$

where $M(t), N(t)$ are amplitudes of two electric components, $\Delta(t)$ is a phase shift and the symbol $\langle \dots \rangle$ stands for averaging in time.

If the amplitudes $N(t), M(t)$ and the phase shift $\Delta(t)$ do not substantially depend on time (or at all, as in the case of completely polarized light), during the measuring process the Stokes parameters equal to

$$S_{pol}^0 = I_{pol} = N^2 + M^2, \quad S_{pol}^3 = N^2 - M^2, \quad S_{pol}^1 = 2NM \cos \Delta, \quad S_{pol}^2 = 2NM \sin \Delta,$$

and the following identity holds

$$S_a S^a = I_{pol}^2 - \vec{S}_{pol}^2 = 0,$$

that is, $\vec{S} = I_{pol} \vec{n}$. In other words, for completely polarized light, the Stokes 4-vector is isotropic. For the natural (non-polarized) light, the Stokes parameters are trivial

$$S_{nat}^a = (I_{nat}, 0, 0, 0).$$

When summing two non-coherent light waves, their Stokes parameters behave in accordance with the following linear law: $I_{(1)} + I_{(2)}$, $\vec{S}_{(1)} + \vec{S}_{(2)}$. In particular, partially polarized light can be obtained as linear sum of natural and completely polarized light:

$$S_{nat}^a = (I_{nat}, 0, 0, 0), \quad S_{pol}^a = (I_{pol}, I_{pol} \vec{n}), \quad S^a = (I_{nat} + I_{pol}) \left(1, \frac{I_{pol}}{I_{nat} + I_{pol}} \vec{n} \right).$$

We further denote

$$I = I_{nat} + I_{pol}, \quad p = \frac{I_{pol}}{I_{nat} + I_{pol}},$$

and then, for the Stokes vector of the partially polarized light we have

$$S^a = (I, I p \vec{n}), \quad S_a S^a = I^2(1 - p^2) \geq 0,$$

where $I > 0$ is the general intensity, p is the degree of polarization (which runs within the $[0, 1]$ interval: $0 \leq p \leq 1$), and \vec{n} stands for any unit 3-vector. Due to the relations:

$$\begin{aligned} S_a S^a &= I_{pol}^2 - \vec{S}_{pol}^2 = 0 && \text{for completely polarized light;} \\ S_a S^a &= I^2(1 - p^2) \geq 0 && \text{for partially polarized light,} \end{aligned}$$

the behavior of Stokes 4-vectors for completely and partially polarized light under acting optic devices may be sometimes considered as isomorphic to the behavior of respectively the isotropic and the time-like vectors with respect to Lorentz group of Special Relativity:

$$\begin{aligned} S_a S^a &= \text{inv} = 0 && \text{completely polarized light;} \\ S_a S^a &= \text{inv} \geq 0 && \text{partially polarized light.} \end{aligned}$$

This simple observation leads to many consequences, of which some will be discussed below.

2 Polarized light and Jones formalism, restriction to the $SU(2)$ -symmetry, and two sorts of non-relativistic Stokes 3-vectors

Let us consider now the polarization Jones formalism and its connection with spinors for rotation and Lorentz groups. It is convenient to start with a relativistic 2-spinor Ψ , representation of the special linear group $GL(2, \mathbb{C})$, covering for the Lorentz group L_+^\uparrow :

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix}, \quad \Psi' = B(k)\Psi, \quad B(k) \in SL(2, \mathbb{C}), \\ B(k) &= k_0 + k_j \sigma^j, \quad \det = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = 1. \end{aligned}$$

From the spinor Ψ one may construct a 2-rank spinor $\Psi \otimes \Psi^*$, which in turn can be resolved in terms of Pauli matrices (we need two sets: $\sigma^a = (I, \sigma^j)$ and $\bar{\sigma}^a = (I, -\sigma^j)$):

$$\Psi \otimes \Psi^* = \frac{1}{2} (S_a \bar{\sigma}^a) = \frac{1}{2} (S_0 - S_j \sigma^j).$$

The spinor nature of Ψ generates a corresponding (Lorentz) transformation law for S_a :

$$S'_a \bar{\sigma}^a = S_a B(k) \bar{\sigma}^a B^+(k) ,$$

which - with the use of the well-known relation in the theory of the Lorentz group - can be written:

$$\begin{aligned} B(k) \bar{\sigma}^a B^+(k) &= \bar{\sigma}^b L_b^a \implies S'_b = L_b^a S_a , \\ L_b^a(k, k^*) &= \bar{\delta}_b^c [-\delta_c^a k^n k_n^* + k_c k^{a*} + k_c^* k^a + i \epsilon_c^{anm} k_n k_m^*] , \\ \bar{\delta}_b^c &= \begin{cases} +1, & c = b = 0 ; \\ -1, & c = b = 1, 2, 3 . \end{cases} \end{aligned}$$

Thus, the spinor transformation $B(k)$ for the spinor Ψ generates the linear transformation $L_b^a(k, k^*)$ over Stokes vectors, which preserve the (relativistic) length. We note that opposed by sign spinor matrices $\pm B$, lead to the same matrix L .

If we restrict ourselves to the case of the $SU(2)$ group, we get¹

$$L(\pm n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2(n_2^2 + n_3^2) & -2n_0n_3 + 2n_1n_2 & 2n_0n_2 + 2n_1n_3 \\ 0 & 2n_0n_3 + 2n_1n_2 & 1 - 2(n_1^2 + n_3^2) & -2n_0n_1 + 2n_2n_3 \\ 0 & -2n_0n_2 + 2n_1n_3 & 2n_0n_1 + 2n_2n_3 & 1 - 2(n_1^2 + n_2^2) \end{pmatrix} .$$

We introduce now a special parametrization for the Jones spinor Ψ :

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{pmatrix} N e^{i\alpha} \\ M e^{i\beta} \end{pmatrix}, \quad \Psi \otimes \Psi^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S^0 + S^3 & S^1 - iS^2 \\ S^1 + iS^2 & S^0 - S^3 \end{pmatrix}, \\ S^1 &= 2NM \cos(\beta - \alpha), \quad S^2 = 2NM \sin(\beta - \alpha), \\ S^3 &= N^2 - M^2, \quad S^0 = N^2 + M^2 = +\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}; \end{aligned}$$

which coincides with the above definition for the case of completely polarized light

$$\begin{aligned} S^0 &= N^2 + M^2 = +\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}, \quad S^3 = N^2 - M^2, \\ S^1 &= 2NM \cos \Delta, \quad S^2 = 2NM \sin \Delta . \end{aligned}$$

There exist two ways to construct a 3-vector in terms of 2-spinors:

$$\begin{aligned} (\Psi \otimes \Psi^*) &= r + x_j \sigma^j, \quad r = +\sqrt{x_j x_j}, \quad x_j - \text{pseudovector}; \\ (\Psi' \otimes \Psi') &= (y_j + i x_j) \sigma^j \sigma^2, \quad y_j, x_j - \text{vectors}. \end{aligned}$$

Evidently, the first variant provides us with a possibility to build a spinor model for the pseudo-vector 3-space, whereas the second variant leads to a spinor model of a proper vector 3-space². Correspondingly, there are possible two Jones spinors: $\Psi \iff S_j$, $\Psi' \iff S_j$. The Jones-like formulas for Stokes 3-vectors, in both cases, look as follows:

- (traditional) $\Psi(\mathbf{S})$

$$S^1 = \sqrt{\frac{NM}{2}} \cos \Delta, \quad S^2 = \sqrt{\frac{NM}{2}} \sin \Delta, \quad S^3 = N^2 - M^2;$$

- (alternative) $\Psi'(\mathbf{S})$

$$\begin{aligned} S^1 &= \sqrt{2 |M'^2 - N'^2|} \cos \Delta, \\ S^2 &= \sqrt{2 |M'^2 - N'^2|} \sin \Delta, \quad S^3 = \pm \sqrt{N'M'} . \end{aligned}$$

¹We assume here $k_0 = n_0$, $\vec{k} = i\vec{n}$.

²According to Cartan, a discret spinor reflection is given by the (2×2) -matrix iI .

3 Spinor representation of Stokes 4-vectors and 2-rank tensors for completely polarized light

A bi-spinor of second rank $U = \Psi \otimes \Psi$ can be resolved into scalar Φ , a vector Φ_b , a pseudoscalar $\tilde{\Phi}$, a pseudovector $\tilde{\Phi}_b$, and a skew-symmetric tensor Φ_{ab} , as follows

$$U = \Psi \otimes \Psi = \left[-i \Phi + \gamma^b \Phi_b + i \sigma^{ab} \Phi_{ab} + \gamma^5 \tilde{\Phi} + i \gamma^b \gamma^5 \tilde{\Phi}_b \right] E^{-1}, \quad E = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^a \\ \sigma^a & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & +I \end{pmatrix}, \quad \sigma^{ab} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^a \sigma^b - \bar{\sigma}^b \sigma^a & 0 \\ 0 & \sigma^a \bar{\sigma}^b - \sigma^b \bar{\sigma}^a \end{pmatrix}.$$

The inverse relations are

$$\Phi_a = \frac{1}{4} \text{Sp} [E \gamma_a U], \quad \tilde{\Phi}_a = \frac{1}{4i} \text{Sp} [E \gamma^5 \gamma_a U],$$

$$\Phi = \frac{i}{4} \text{Sp} [EU], \quad \tilde{\Phi} = \frac{1}{4} \text{Sp} [E \gamma^5 U], \quad \Phi_{mn} = -\frac{1}{2i} \text{Sp} [E \sigma_{mn} U].$$

The explicit expressions for tensors obtained from spinors are

$$\Phi_0 = \xi^1 \eta_2 - \xi^2 \eta_1, \quad \Phi_1 = \xi^1 \eta_1 - \xi^2 \eta_2,$$

$$\Phi_2 = i (\xi^1 \eta_1 + \xi^2 \eta_2), \quad \Phi_3 = -(\xi^1 \eta_2 + \xi^2 \eta_1),$$

$$\tilde{\Phi}_0 = 0, \quad \tilde{\Phi}_1 = 0, \quad \tilde{\Phi}_2 = 0, \quad \tilde{\Phi}_3 = 0, \quad \Phi = 0, \quad \tilde{\Phi} = 0,$$

and

$$\Phi^{01} = \frac{i}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) + (\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2)],$$

$$\Phi^{23} = \frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) - (\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2)],$$

$$\Phi^{02} = -\frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) + (\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2)],$$

$$\Phi^{31} = -\frac{1}{4i} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) - (\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2)],$$

$$\Phi^{03} = -\frac{i}{2} [\xi^1 \xi^2 + \eta_1 \eta_2], \quad \Phi^{12} = -\frac{1}{2} [\xi^1 \xi^2 - \eta_1 \eta_2].$$

By collecting the results, we infer:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \Psi \otimes \Psi \implies \Phi = 0, \quad \tilde{\Phi} = 0, \quad \tilde{\Phi}_a = 0, \quad \Phi_a \neq 0, \quad \Phi_{mn} \neq 0.$$

In order to obtain the vector and the tensor both real, one should impose additional restrictions:

$$\eta = -i \sigma^2 \xi^* \implies \eta_1 = -\xi^{2*}, \quad \eta_2 = +\xi^{1*},$$

which results in

$$\Phi_0 = (\xi^1 \xi^{1*} + \xi^2 \xi^{2*}) > 0, \quad \Phi_3 = -(\xi^1 \xi^{1*} - \xi^2 \xi^{2*}),$$

$$\Phi_1 = -(\xi^1 \xi^{2*} + \xi^2 \xi^{1*}), \quad \Phi_2 = -i (\xi^1 \xi^{2*} - \xi^2 \xi^{1*});$$

$$\Phi^{01} = \frac{i}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})], \quad \text{and so on.}$$

The last case seems to be the most appropriate to describe Stokes 4-vectors and to determine the Stokes 2-rank tensor. The main invariant turns to equal to zero, since:

$$S_0 S_0 - S_j S_j = 0,$$

and hence S_a may be considered as a Stokes 4-vector for completely polarized light.

In turn, the 4-tensor S_{mn} , being constructed from Jones bi-spinor Ψ , is a Stokes 2-rank tensor. We further calculate the two invariants for S_{mn} :

$$I_1 = -\frac{1}{2} S^{mn} S_{mn} = 0, \quad I_2 = \frac{1}{4} \epsilon_{abmn} S^{ab} S^{mn} = 0. \quad (3.1)$$

Instead of the Stokes 4-tensor S_{ab} , one may introduce a complex 3-vector,

$$s^1 = S^{01} + iS^{23}, \quad s^2 = S^{02} + iS^{31}, \quad s^3 = S^{03} = iS^{12},$$

$$s_1 + is_2 = -i \xi^2 \xi^2, \quad s_1 - is_2 = +i \xi^1 \xi^1, \quad s^3 - i \xi^1 \xi^2.$$

Additionally to Jones spinor and Mueller vector formalisms, the later considerations allow to introduce one other technique, which is based on the use of complex 3-vectors, under the complex rotation group $SO(3, \mathbb{C})$: This complex vector is isotropic, $\mathbf{s}^2 = 0$.

4 The Jones 4-spinor for partially polarized light

Now let us examine one more possibility of combining two spinors:

$$\Psi \otimes (-i\Psi^c) = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} +\eta_2^* \\ -\eta_1^* \\ -\xi_2^{2*} \\ +\xi_1^{1*} \end{pmatrix}.$$

With the notation

$$\xi = \begin{pmatrix} N_1 e^{in_1} \\ N_2 e^{in_2} \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} M_1 e^{im_1} \\ M_2 e^{im_2} \end{pmatrix},$$

we can prove that the corresponding 4-vector is time-like:

$$(N_1 M_1 - N_2 M_2)^2 < \Phi_0^2 - \vec{\Phi}^2 < (N_1 M_1 + N_2 M_2)^2.$$

This means that we have ground to consider the 4-vector Φ_a as a Stokes 4-vector S_a . Therefore, the 4-spinor is of Jones type and corresponds to partially polarized light.

It remains to explicitly find the form for the corresponding (real) Stokes 4-tensor S_{ab} ; its description with the help of complex 3-vectors looks most simple:

$$s^1 = \frac{i}{2} (\xi^1 \eta_2^* + \xi^2 \eta_1^*), \quad s^2 = -\frac{1}{2} (\xi^1 \eta_2^* - \xi^2 \eta_1^*), \quad s^3 = -\frac{i}{2} (\xi^2 \eta_2^* - \xi^1 \eta_1^*);$$

this complex 3-vector is not isotropic,

$$\mathbf{s}^2 = -\frac{1}{4} (\xi^1 \eta_1^* - \xi^2 \eta_1^*)^2 \neq 0.$$

One more last remark should be added: the results of Sections 1–4 can be of use not only in polarization optics, but also they may also be of interest to describe Maxwell theory in spinor approach, when instead of variables A_n, F_{mn} one introduces one fundamental electromagnetic bi-spinor $\Psi = (\xi, \eta)$. As well, these results can have a meaning in the context of explicitly constructing relativistic models for space-time with spinor structure.

5 The linear group $SL(4, \mathbb{R})$ and the classification of 1-parametric Mueller matrices

The main goal of this section is to develop a systematic method of identifying and classifying the Mueller matrices within the family of matrices of the real group $SL(4, \mathbb{R})$. We note that to construct the general transformation of the group $SL(4, \mathbb{R})$ is straightforward, but to analyze the adequacy of such a transformation for describing Mueller matrices is a highly nontrivial (practically impossible) task. However, using the technique of Dirac matrices, we can, quite easily explicitly describe all the 16 one-parametric subgroups, from which, using all the possible emerging products, one can produce the whole group $SL(4, \mathbb{R})$. For these distinct 1-parametric subgroups, the question of their adequacy of being Mueller matrices becomes sufficiently simple, and thus we obtain in each case a definite answer. In particular, diagonal subgroups are trivially simple and will not be further discussed as subcase of valid Mueller solutions. Any Mueller matrix of general type, $M_{ab}S_a = S'_a$, must obey the following restrictions

$$\begin{aligned} S_0 &\geq 0, & S^2 &\equiv S_0^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2 \geq 0, \\ S'_0 &\geq 0, & S'^2 &\equiv S'^2_0 - S'^2_1 - S'^2_2 - S'^2_3 \geq 0, \end{aligned}$$

or, in more detailed form,

$$\begin{aligned} M_{00}S_0 + M_{01}S_1 + M_{02}S_2 + M_{03}S_3 &\geq 0, \\ (M_{00}S_0 + M_{01}S_1 + M_{02}S_2 + M_{03}S_3)^2 & \\ - (M_{10}S_0 + M_{11}S_1 + M_{12}S_2 + M_{13}S_3)^2 & \\ - (M_{20}S_0 + M_{21}S_1 + M_{22}S_2 + M_{23}S_3)^2 & \\ - (M_{30}S_0 + M_{31}S_1 + M_{32}S_2 + M_{33}S_3)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

We shall further use the following notation:

$$S_0 = I, S_j = Ip_j, p_1 = a, p_2 = b, p_3 = c.$$

For describing the change of the degree of polarization, one can use the quantity D :

$$(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (a^2 + b^2 + c^2) = D.$$

Now we are ready to specify the 12 non-diagonal 1-parametric subgroups in $SL(4, \mathbb{R})$.

Variant (1):

$$M = U_1^\alpha(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix},$$

where the restrictions (in the variables $\tan \phi = x$) look like

$$a \sin \phi + \cos \phi \geq 0, \quad \frac{1 - x^2}{1 + x^2}(1 - a^2) + \frac{2x}{1 + x^2} 2a - b^2 - c^2 \geq 0,$$

and where the solution depends on the initial Stokes vector and is much simplified in the case of completely polarized light: $x \in [x_1, x_2]$, where

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2a - \sqrt{4a^2 + (1-p^2)(b^2 + c^2 + 1 - a^2)}}{b^2 + c^2 + 1 - a^2}, \\ x_2 &= \frac{2a + \sqrt{4a^2 + (1-p^2)(b^2 + c^2 + 1 - a^2)}}{b^2 + c^2 + 1 - a^2}. \end{aligned}$$

The possible values of the parameter D lead to subcases:

$$\begin{aligned} D < 0, & \implies 0 < \tan \phi < \frac{2a}{1-a^2} \text{ (decreasing) ,} \\ D > 0, & \implies \tan \phi > \frac{2a}{1-a^2} \text{ (increasing) ,} \\ D = 0 & \implies \tan \phi = \frac{2a}{1-a^2} \text{ (non-changing) .} \end{aligned}$$

We note that this result is typical. The appropriateness of the elementary matrix M to be of Mueller type depends on the parameters of the matrix and on the characteristics of the initial light beam. Hence, when combining more complex Mueller matrices by multiplying elementary 1-parametric ones, we must check each next step of the chain

$$(\dots M_n M_{n-1} \dots M_2 M_1) S = S' .$$

Variant (2):

$$M = U_2^\alpha(-\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} .$$

The restrictions are the following

$$\cos \phi + b \sin \phi \geq 0 , \quad \frac{1-x^2}{1+x^2}(1-b^2) + \frac{2x}{1+x^2} 2b - a^2 - c^2 \geq 0 ,$$

and they differ from the previous ones only by notation.

Variant (3):

$$M = U_3^\alpha(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & 0 & \sin \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\sin \phi & 0 & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} ,$$

$$\cos \phi + c \sin \phi \geq , \quad \frac{1-x^2}{1+x^2}(1-c^2) + \frac{2x}{1+x^2} 2c - a^2 - b^2 \geq 0 .$$

Variant (4):

$$M = U_1^\beta(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} ,$$

$$\cos \phi + a \sin \phi \geq 0 , \quad \frac{1-x^2}{1+x^2}(1-a^2) + \frac{2x}{1+x^2} 2a - b^2 - c^2 \geq 0 .$$

Variant (5):

$$M = U_2^\beta(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} ,$$

$$\cos \phi - b \sin \phi \geq 0 , \quad \frac{1-x^2}{1+x^2}(1-b^2) + \frac{2x}{1+x^2} 2b - a^2 - c^2 \geq 0 .$$

Variant (6):

$$M = U_3^\beta(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & 0 & \sin \phi \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\sin \phi & 0 & 0 & \cos \phi \end{pmatrix},$$

$$\cos \phi + c \sin \phi \geq 0, \quad \frac{1-x^2}{1+x^2}(1-c^2) + \frac{2x}{1+x^2} 2c - a^2 - b^2 \geq 0.$$

Variant (7):

$$U_2^A(-i\beta) = \begin{pmatrix} \cosh \beta & 0 & 0 & \sinh \beta \\ 0 & \cosh \beta & -\sinh \beta & 0 \\ 0 & -\sinh \beta & \cosh \beta & 0 \\ \sinh \beta & 0 & 0 & \cosh \beta \end{pmatrix},$$

for which we note that the restriction $\cosh \beta S_0 + \sinh \beta S_3 \geq 0$ is valid for arbitrary β .

The quadratic inequality in the variables a, b, c and $y = \text{th } \beta, y \in (-1, +1)$, takes the form

$$-y^2(a^2 + b^2 + 1 - c^2) + 4aby + (1 - a^2 - b^2 - c^2) \geq 0,$$

with the solution

$$y \in [y_1, y_2],$$

$$y_1 = \frac{2ab - \sqrt{4a^2b^2 + (1-p^2)(a^2+b^2+1-c^2)}}{a^2+b^2+1-c^2} < 0,$$

$$y_2 = \frac{2ab + \sqrt{4a^2b^2 + (1-p^2)(a^2+b^2+1-c^2)}}{a^2+b^2+1-c^2} > 0.$$

The results depend on the initial light. For completely polarized light, the formulas become much simpler. The degree of polarization changes according to the rules

$$D = \frac{(a - by)^2 + (b - ay)^2 + (c + y)^2}{(1 + cy)^2} - a^2 - b^2 - c^2.$$

This result is typical again for these six cases.

Variant (8):

$$U_3^A(i\beta) = \begin{pmatrix} \cosh \beta & 0 & -\sinh \beta & 0 \\ 0 & \cosh \beta & 0 & -\sinh \beta \\ -\sinh \beta & 0 & \cosh \beta & 0 \\ 0 & -\sinh \beta & 0 & \cosh \beta \end{pmatrix};$$

Variant (9):

$$U_1^B(i\beta) = \begin{pmatrix} \cosh \beta & 0 & 0 & -\sinh \beta \\ 0 & \cosh \beta & -\sinh \beta & 0 \\ 0 & -\sinh \beta & \cosh \beta & 0 \\ -\sinh \beta & 0 & 0 & \cosh \beta \end{pmatrix}.$$

Variant (10):

$$U_3^B(i\beta) = \begin{pmatrix} \cosh \beta & \sinh \beta & 0 & 0 \\ \sinh \beta & \cosh \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \beta & -\sinh \beta \\ 0 & 0 & -\sinh \beta & \cosh \beta \end{pmatrix}.$$

Variant (11):

$$U_1^C(i\beta) = \begin{pmatrix} \cosh \beta & 0 & \sinh \beta & 0 \\ 0 & \cosh \beta & 0 & -\sinh \beta \\ \sinh \beta & 0 & \cosh \beta & 0 \\ 0 & -\sinh \beta & 0 & \cosh \beta \end{pmatrix}.$$

Variant (12):

$$U_2^C(-i\beta) = \begin{pmatrix} \cosh \beta & -\sinh \beta & 0 & 0 \\ -\sinh \beta & \cosh \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \beta & -\sinh \beta \\ 0 & 0 & -\sinh \beta & \cosh \beta \end{pmatrix}.$$

The appropriateness of the elementary matrix M to be of Mueller type depends on the parameters of the matrix and on the characteristics of the initial light beam. While producing a more complex Mueller matrix by multiplying elementary 1-parametric Mueller matrices, we must check each next step in the chain

$$(\dots M_n M_{n-1} \dots M_2 M_1) S = S'.$$

6 The semi-group structure and classification of degenerate Mueller matrices; projective geometry

Preliminary remarks. The Mueller transformation formulas $p_j \implies p'_j$ can be presented as a law of a projective (15-parametric) group:

$$\begin{aligned} p'_1 &= \frac{m_{10} + m_{11}p_1 + m_{12}p_2 + m_{13}p_3}{1 + m_{01}p_1 + m_{02}p_2 + m_{03}p_3}, \\ p'_2 &= \frac{m_{20} + m_{21}p_1 + m_{22}p_2 + m_{23}p_3}{1 + m_{01}p_1 + m_{02}p_2 + m_{03}p_3}, \\ p'_3 &= \frac{m_{30} + m_{31}p_1 + m_{32}p_2 + m_{33}p_3}{1 + m_{01}p_1 + m_{02}p_2 + m_{03}p_3}; \end{aligned}$$

with the constraints

$$\begin{aligned} 1 + m_{01}p_1 + m_{02}p_2 + m_{03}p_3 &> 0, \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \leq 1, \quad p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2 &\leq 1. \end{aligned}$$

With respect to a spinor basis, any 4×4 matrix can be constructed by means of four 4-dimensional objects (vectors) (k, m, l, n) , as follows

$$\begin{pmatrix} k_0 + \mathbf{k} \vec{\sigma} & n_0 + \mathbf{n} \vec{\sigma} \\ l_0 + \mathbf{l} \vec{\sigma} & m_0 + \mathbf{m} \vec{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & N \\ L & M \end{pmatrix};$$

where we use the notation $k = (k_0, k_j)$ and so on. The symbol $\vec{\sigma} = (\sigma_j)$ stands for the three 2×2 Pauli matrices. The four 2×2 blocks are denoted as K, M, L, N .

In order to have matrices with real elements, it is necessary to require that the components which have the index 2, to be imaginary:

$$k_{2-} > ik_2, \quad m_{2-} > im_2, \quad n_{2-} > in_2, \quad l_{2-} > il_2,$$

leaving real the other components of the parameters.

By imposing linear constraints on the four 4-dimensional vectors, and by requiring that the group law for multiplication is valid for these parameters, we can obtain a large variety of simple subsets of matrices. All of them have a definite mathematical structure: either of sub-group or

of semi-group. A large part of these subsets consist of degenerate matrices. Otherwise speaking, one might obtain in this manner a large number of semigroups of 4-th order matrices (more than 40). However, the question of adequacy of such simple subsets of matrices for describing Mueller transformations has not been addressed until now. The purpose of this section is to perform such an analysis.

Below we shall present only a few typical examples of these sets.

One single independent vector (k_0, \mathbf{k}) . We shall examine the case when the independent 4-dimensional vector is (k_0, \mathbf{k}) :

$$\mathbf{n} = A \mathbf{k}, n_0 = \alpha k_0, \mathbf{m} = B \mathbf{k}, m_0 = \beta k_0, \mathbf{l} = D \mathbf{k}, l_0 = t k_0.$$

In this case, by imposing the requirement of satisfying the axioms of group law provides 7 distinct solutions: K1–K7, as described below.

Variant K1:

$$G = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 + k_3 & k_1 + k_2 & 0 & 0 \\ k_1 - k_2 & k_0 - k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ d & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

where all the (4×4) -matrices are degenerate. The rank of such a matrix is either 2 or 1 (while in the last case one should require $\det K = ab - cd = 0$). Transformations are of Mueller type only if

$$a + cx > 0, \quad x \in [-1, 1], \quad (cx + a)^2 - (bx + d)^2 \geq 0.$$

The projective transformation has the form

$$x' = \frac{d + bx}{a + cx}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

which leads to two systems of inequations

$$\begin{aligned} I \quad & a + cx > 0, \quad (c - b)x + a - d \geq 0, \quad (c + b)x + a + d \geq 0; \\ II \quad & a + cx > 0, \quad (c - b)x + a - d \leq 0, \quad (c + b)x + a + d \leq 0, \end{aligned}$$

where system II has no solutions.

An important point concerns the appropriateness of these matrices to be of Mueller type. This depends on the properties of the initial light beam. The roots of the above quadratic equation are

$$x_{1,2} = \frac{(ac - bd) \mp (ab - cd)}{b^2 - c^2}.$$

If the coefficient $(c^2 - b^2)$ at x^2 is negative, then the solution of the inequation has the form

$$x \in [x_1, x_2].$$

If this coefficient is positive, then the solution is of the form

$$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2, +\infty).$$

It makes sense to impose the requirement $\det K = ab - cd = +1^3$. Then the formulas for the roots simplify to

$$x_{1,2} = \frac{\mp 1 + (ac - bd)}{b^2 - c^2}.$$

³This happens due to the fact that the norming by the determinant can be always considered, by using a factor applied to the matrix K

Moreover, we can separately tract the case of matrices of rank 1; to this aim we need to impose the condition

$$ab - cd = 0 \implies d = \frac{ab}{c},$$

which leads to a very special projective transformation

$$x' = \frac{d + bx}{a + cx} = \frac{ab/c + bx}{a + cx} = \frac{b}{c} = \frac{d}{a} = \mu, \quad |\mu| \leq 1.$$

For this case, the requirements for being Mueller type matrices are

$$a + cx > 0, \quad 1 - \frac{b}{c} \geq 0, \quad 1 + \frac{b}{c} \geq 0,$$

where the last two inequalities are equivalent to $|\mu| \leq 1$.

Variant K2:

$$G = \begin{pmatrix} k_0 + k_3 & k_1 + k_2 & 0 & 0 \\ k_1 - k_2 & k_0 - k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_0 + k_3 & k_1 + k_2 \\ 0 & 0 & k_1 - k_2 & k_0 - k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ d & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & d & b \end{pmatrix}.$$

This set consists of non-degenerate matrices. By imposing the conditions $\det K = 0$, we get a semi-group of rank 1. The corresponding projective transformation is given by:

$$x' = \frac{d + bx}{a + cx}, \quad y' = \frac{ay + cz}{a + cx}, \quad z' = \frac{ay + bz}{a + cx}.$$

While limiting ourselves to degenerate matrices of rank 1 ($ab - cd = 0$), we get a simpler projective transformation

$$x' = \frac{b}{c}, \quad y' = \frac{ay + cz}{a + cx}, \quad z' = \frac{b}{c} \frac{ay + cz}{a + cx} = \frac{b}{c} y'.$$

For Mueller transformations, the following conditions should be fulfilled

$$\begin{cases} a + cx > 0, & x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \\ (c^2 - b^2)x^2 + 2(ac - bd)x - (a^2 + d^2)y^2 - (c^2 + b^2)z^2 - 2(ac + bd)yz + a^2 - d^2 \geq 0. \end{cases}$$

We notice that the obtained quadratic inequalities can be considerably simplified if we limit ourselves to matrices of rank 1:

$$\begin{cases} a + cx > 0, & x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \\ \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)(cx + a)^2 - \left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right)(ay + cz)^2 \geq 0. \end{cases}$$

We must assume that $b^2 < c^2$, and consequently we get

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}}(cx + a) - \sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2}}(cz + ay) &\geq 0, \\ \sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}}(cx + a) + \sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2}}(cz + ay) &\geq 0. \end{aligned}$$

We shall examine several more such special particular cases:

$$\begin{aligned} x = +1, y = 0, z = 0, & \quad a + c > 0, (a + c)^2 \geq (b + d)^2; \\ x = -1, y = 0, z = 0, & \quad a - c > 0, (a - c)^2 \geq (b - d)^2; \\ x = 0, y = +1, z = 0, & \quad a > 0, d = 0; \\ x = 0, y = -1, z = 0, & \quad a > 0, d = 0; \\ x = 0, y = 0, z = +1, & \quad a > 0, a^2 \geq b^2 + c^2 + d^2; \\ x = 0, y = 0, z = -1, & \quad a > 0, a^2 \geq b^2 + c^2 + d^2. \end{aligned}$$

In the general case we get the quadratic inequality

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad a + cx > 0, \\ (a + cx)^2 - (d + bx)^2 - (ay + cz)^2 - (dy + bz)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

This quadratic form can be diagonalized (we omit the details of this procedure). Let us express the fundamental constraint $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ in terms of new variables X, Y, Z . We get

$$\left(X - \frac{ac - bd}{c^2 - b^2} \right)^2 + Y^2 + Z^2 \leq 1.$$

The linear inequality $a + cx > 0$ gets the form

$$cX - \frac{b \det K}{c^2 - b^2} > 0.$$

We see, that the task of description of all Mueller matrices of this type is solvable, and it is a quite definite problem in the frames of a particular projective group.

Variant K3

$$G = \begin{pmatrix} K & 0 \\ DK & 0 \end{pmatrix}, \quad G'G = \begin{pmatrix} K'K & 0 \\ DK'K & 0 \end{pmatrix};$$

here D is an arbitrary numeric parameter. This set of matrices is a set of degenerate matrices of rank 2 with the structure of a semi-group. We start with

$$G = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ d & b & 0 & 0 \\ Da & Dc & 0 & 0 \\ Dd & Db & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

then the corresponding projective transformation looks like:

$$x' = \frac{d + bx}{a + cx}, \quad y' = D, \quad z' = D \frac{d + bx}{a + cx} = Dx'.$$

By limiting ourselves to the semi-group of rank 1, the projective transformation becomes simpler:

$$\det K = 0, \quad x' = \frac{b}{c} = \frac{d}{a}, \quad y' = D, \quad z' = Dx'.$$

The restrictions for having Mueller matrices are

$$\begin{aligned} a + cx > 0, \quad Ax^2 + 2Bx + C \geq 0, \\ A = (1 - D^2)c^2 - (1 + D^2)b^2, \\ B = (1 - D^2)ac - (1 + D^2)bd, \\ C = (1 - D^2)a^2 - (1 + D^2)d^2. \end{aligned}$$

The roots of this quadratic equation are

$$x_{1,2} = \frac{-bd(1+D^2) + ac(1-D^2) \pm \sqrt{(ab-cd)^2(1-D^4)}}{b^2(1+D^2) - c^2(1-D^2)}.$$

If $A > 0$ (positive) then $x \in [x_1, x_2]$, and if $A < 0$, then $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2, +\infty)$. The requirement of having real roots $x_{1,2}$ leads to $D^2 \leq 1$. In particular, if $D^2 = 1$, the inequalities from above get the form

$$\begin{cases} -(1+1)(bx+d)^2 \geq 0 & \implies x = -\frac{d}{b}. \\ a+cx > 0 & \implies a - \frac{d}{b}c > 0. \end{cases}$$

In the case of zero determinant $\det K = 0$, we get

$$a+cx > 0, \quad \left[(1-D^2) - (1+D^2)\frac{b^2}{c^2} \right] (a+cx)^2 \geq 0.$$

We note that the Mueller matrix identifying task involves many details, which are physically interpretable within polarization optics, and at the same time are relevant in terms of properties of special projective transformations. There exist yet about 40 special cases of matrices (mainly with semi-group structure) which provide special projective transformations and can describe sets of Mueller matrices.

Acknowledgment

The present work was developed under the auspices of Grant 1196/2012 - BRFFR-RA No. F12RA-002, within the cooperation framework between Romanian Academy and Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research.

The authors wish to thank to the organizers of the joint event *Colloquium on Differential Geometry*, and *The IX-th International Conference on Finsler Extensions of Relativity Theory (FERT 2013)*, held between 26 – 30 August 2013 in Debrecen, Hungary. for their warm hospitality. Also, V. Red'kov, O. Veko and V. Balan are thankful to Prof. D. Pavlov for the support provided for the participation in the event *FERT 2013*.

References

- [1] Bogush A.A., Red'kov V.M. On Unique parametrization of the linear group $GL(4, \mathbb{C})$ and its subgroups by using the Dirac algebra basis // *NPCS*, 11, 1, 2008, 1–24.
- [2] Fedorov F.B. *The Lorentz Group*. Moscow 1979.
- [3] Ovsyuk E.M. Transitivity in tree-dimensional rotation group and Stokes–Mueller formalism in polarization optics // *Vestnik Mogilev State University named after A.A. Kulshov. Ser. Natural Sci.: Matematika, Fizika, Biologiya*, 1, 37, 2011, 69–75.
- [4] Ovsyuk E.M., Red'kov V.M. Degenerate 4-dimensional matrices with semi-group structure and polarization optics, XLVIII All-Russia conference on problems in Particle Physics, Plasma Physics, Condensed Matter, and Optoelectronics; Russia, Moscow, 15-18 May 2012 // *Vestnik RUDN, Ser. Mathematics, Informatics and Physics*, 1, 1, 2013, 245–259.
- [5] Ovsyuk E.M., Red'kov V.M. Is there possible Finsler geometrization of the polarization optics? Report to VIII-th International Conference Finsler Extensions of Relativity Theory (FERT-2012) June 25th- July 1st 2012 Moscow-Fryazino, Russia // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 9, 1 (17), 2012, 106–161.

- [6] Ovsiyuk E.M., Veko O.V., Red'kov V.M. Mueller's semi-groups of the rank 1 and 2 // *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2, 11, 2012, 34–40.
- [7] Red'kov V.M. Lorentz group and polarization of the light // *Advances in Applied Clifford Algebras*, 21, 2011, 203–220.
- [8] Red'kov V.M., Ovsiyuk E.M. Transitivity in the theory of the Lorentz group and Stokes–Mueller formalism in polarization optics // *Vestnik Brest University, Ser. Fiz.-Mat.*, 1, 2012, 18–23.

СПИНОРНЫЕ, МАТРИЧНЫЕ СТРУКТУРЫ И ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКЕ

Елена Овсиюк¹, Ольга Веко¹, Алесандру Оана², Мирче Неагу²,
Владимир Балан³, Виктор Редьков⁴

¹ Мозырский Государственный Педагогический Университет, Мозырь, Беларусь

² Брашовский Трансильванский Университет, Брашов, Румыния

³ Бухарестский Политехнический Университет, Бухарест, Румыния

⁴ Институт Физики им. Б.И. Степанова, Национальная Академия Наук Беларуси, Минск,
Беларусь

v.redkov@dragon.bas-net.by

В работе обсуждаются формализмы Мюллера и Джонса в поляризационной оптике с акцентом на следующие вопросы: ограничение симметрии к группе $SU(2)$, нерелятивистские 3-векторы Стокса; 2-спиноры Картана; 4-спиноры Джонса для частично поляризованного света; линейная группа $SL(4;R)$ и классификация 1-параметрических матриц Мюллера; структуры полу-групп и классификация вырожденных матриц Мюллера.

Ключевые слова: спиноры, формализм Мюллера, формализм Джонса, 3-векторы Стокса, 2-спиноры Картана, поляризационная оптика, проективная геометрия.

FINSLER-BERWALD SPACE WITH VERY SPECIAL RELATIVITY

S.K. Narasimhamurthy, G.N. Latha Kumari

Kuvempu University, Shimoga, Karnataka, India.

nmurthysk@hotmail.com, nslathams@gmail.com

The symmetry of space time is described by using the so called isometric group. The generators of isometric group are directly connected with the Killing vectors [18]. In this paper, we present an explicit connection between the symmetries in the VSR and isometric group of Finsler space. The Killing vectors in Finsler space are constructed in a systematic way. Further, the solutions of Killing equations are present explicitly in the isometric symmetry of Finsler spaces. The Killing vectors of Finsler-Berwald space are given and we proved that the 4-dimensional Finsler-Berwald space with constant curvature has 15 independent Killing vectors.

Key Words: Finsler-Berwald space, Very Special relativity, Killing vectors, Lorentz violation, Isometric group.

1 Introduction

Finsler geometry as a natural generalization of Riemannian geometry could provide new sight on modern physics. The model of gravity and cosmology based on Finsler geometry is in good agreement with the recent astronomical observations. In the past few years, two interesting theories were proposed for investigating the violation of Lorentz invariance. One is the so called doubly special relativity(DSR) [1–3, 13, 14], another one is the very special relativity(VSR) developed by Cohen and Glashow [6]. This theory suggested that the exact symmetry group of nature may be isomorphic to a subgroup SIM(2) of the Pioncare group. Also the SIM(2) group semi direct product with the spacetime translation group gives an 8-dimensional subgroup of the Poincare group called ISIM(2) [11].

Recently, physicists found that both two theories mentioned above are related to Finsler geometry. Girelli, Liberati and Sindoni [8] showed that the Modified Dispersion Relation(MDR) in DSR can be studied through the frame work of Finsler geometry. Very recently, the authors Xin Li, Zhe Chang and Xiaohuon Mo [19], have studied Isometric group of (α, β) type Finsler space and the symmetry of very special relativity. They also found that the Killing vectors of Finsler-Funk space and proved that the 4 dimensional Finsler-Funk space with constant curvature has just 6 independent Killing vectors.

Thus, the symmetry of Finslerian space time is important for further study. Therefore, the way of describing spacetime symmetry in a covariant language i.e., the symmetry should not depend on any particular choice of coordinate system, involves the concept of isometric transformation. In fact, the symmetry of space time is described by the so called isometric group. The generators of isometric group is directly connected with the Killing vectors [12]. In this paper, we use solutions of the Killing equation to find the symmetry of a class of Finslerian spacetime. In particular, the Killing vectors of Finsler-Berwald space are given and further we showed that the 4-dimensional Finsler-Berwald space with constant curvature has 15 independent Killing vectors.

2 Killing vectors in Riemannian space

In this section, we give a brief introduction of the Killing vectors in Riemannian space. The terminology and notation are referred as in [18]. For a given coordinate transformation $x \rightarrow \bar{x}$,

the Riemannian metric $g_{ij}(x)$ is defined as

$$\bar{g}_{ij}(\bar{x}) = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} g_{kl}(x). \quad (2.1)$$

Any transformation $x \rightarrow \bar{x}$ is called isometry if and only if the transformation of the metric $g_{ij}(x)$ satisfies

$$\begin{aligned} g_{ij}(\bar{x}) &= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} g_{kl}(x), \\ \text{i.e., } \bar{g}_{ij}(\bar{x}) &= g_{ij}(\bar{x}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

It is easy to check that the isometric transformations do form a group. Now it is convenient to investigate the isometric transformation under the infinitesimal coordinate transformation

$$\bar{x}^i = x^i + \epsilon V^i, \quad (2.3)$$

where $|\epsilon| \ll 1$. To first order in $|\epsilon|$, the equation (2.2) reads

$$V^m \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} + g_{mi} \frac{\partial V^m}{\partial x^j} + g_{mj} \frac{\partial V^m}{\partial x^i} = 0. \quad (2.4)$$

By making use of the covariant derivatives with respect to Riemannian connection, we can write the above equation as

$$V_{i|j} + V_{j|i} = 0, \quad (2.5)$$

where “ $|$ ” denotes the covariant derivative. Any vector field V_i satisfies equation (2.5) is called Killing vector. Thus, the problem of finding all isometries of a given metric $g_{ij}(x)$ is equivalent to find the dimension of the linear space formed by Killing vectors.

Ricci identities in Riemann geometry can be written as

$$V_{k|i|j} - V_{k|j|i} = -V_l R_{kji}^l, \quad (2.6)$$

where R_{kji}^l is the Riemannian curvature tensor. And the first Bianchi identity for the Riemannian curvature tensor gives

$$R_{kji}^l + R_{jik}^l + R_{ikj}^l = 0. \quad (2.7)$$

From equations (2.6) and (2.7), we obtain

$$V_{k|i|j} = V_l R_{jik}^l. \quad (2.8)$$

Thus, all the derivatives of V_i will be determined by the linear combinations of V_i and $V_{i|j}$. Once the V_i and $V_{i|j}$ at an arbitrary point of Riemannian space is given, then V_i and $V_{i|j}$ at any other point is determined by integration of the system of ordinary differential equations. Therefore, the dimension of linear space formed by Killing vector can be at most $n(n+1)/2$ in n dimensional Riemannian space. If a metric admits that the maximum number $n(n+1)/2$ of Killing vectors, its Riemannian space must be homogeneous and isotropic. Such space is called maximally symmetry space.

The best example of maximally symmetry space is the Minkowskian space. The Killing equation (2.5) of a given Minkowskian metric $\eta_{ij}(x)$ reduces to

$$\frac{\partial V_i}{\partial x^j} + \frac{\partial V_j}{\partial x^i} = 0. \quad (2.9)$$

The solution of (2.9) is

$$V^i = Q_j^i x^j + C^i, \quad (2.10)$$

where $Q_{ij} = \eta_{ki}Q_j^k$ is an arbitrary constant skew symmetric matrix and C^i is an arbitrary constant vector. Thus, substituting the solution (2.10) into the coordinate transformation (2.3), we obtain

$$\bar{x}^i = (\delta_j^i + \epsilon Q_j^i)x^j + \epsilon C^i. \tag{2.11}$$

The term $\delta_j^i + \epsilon Q_j^i$ in the above equation is just the Lorentz transformation matrix and the term ϵC^i is related to the spacetime translation. Expanding the matrix $\delta_j^i + \epsilon Q_j^i$ and the vector ϵC^i near identity, we obtain the famous Poincare algebra.

Other two types of maximally symmetry spaces are spherical and hyperbolic case. Without loss of generality, we set its constant sectional curvature to be ± 1 for spherical and hyperbolic case respectively. The length element of both the case is given in a unified form as

$$ds^2 = \frac{\sqrt{(1 + k(x.x))(dx.dx) - k(x.dx)^2}}{1 + k(x.x)}, \tag{2.12}$$

where the “.” denotes the inner product with respect to Minkowskian metric and $k = \pm 1$ for spherical and hyperbolic case respectively. The metric is given as

$$g_{ij} = \left(\frac{\eta_{ij}}{1 + k(x.x)} - k \frac{x_i x_j}{(1 + k(x.x))^2} \right), \tag{2.13}$$

where $x_i \equiv \eta_{ij}x^j$. The Christoffel symbols of the above length element is given as

$$\gamma_{ij}^k = -k \frac{x_i \delta_j^k + x_j \delta_i^k}{1 + k(x.x)}. \tag{2.14}$$

Thus, the Killing equation (2.5), now reads as

$$\frac{\partial V_i}{\partial x^j} + \frac{\partial V_j}{\partial x^i} + \frac{2k}{1 + k(x.x)}(x_i V_j + x_j V_i) = 0. \tag{2.15}$$

The solution of the above equation is

$$V^i = g^{ij}V_j = Q_j^i x^j + C^i + k(x.c)x^i, \tag{2.16}$$

where the index of Q and C are raised and lowered by Minkowskian metric μ^{ij} and its inverse matrix μ_{ij} .

3 Killing vectors in Finsler space

In this section, we derive the Killing vectors in Finsler space. Now, we introduce the Finsler structure.

Let M be an n -dimensional manifold, let $T_x M$ denote the tangent space at $x \in M$, and by TM the tangent bundle of M . Each element of TM has the form (x, y) , where $x \in M$ and $y \in T_x M$. The natural projection $\Pi : TM \rightarrow M$ is given by $\pi(x, y) = x$.

A Finsler space on the manifold M is a function $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ with the following properties:

- (i) Regularity: F is C^∞ on the entire tangent bundle $TM \setminus \{0\}$.
- (ii) Positive homogeneity: $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$ for all $\lambda > 0$.
- (iii) Strong convexity: The $n \times n$ Hessian matrix

$$g_{ij} = \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial y^j} (1/2F^2), \tag{3.1}$$

is positive definite at every point of $TM \setminus \{0\}$, where $TM \setminus \{0\}$ denotes the tangent vector y is non-empty in the tangent bundle TM .

Like Riemannian space, we shall now, find the Killing vectors in the Finsler space, for this we should construct the isometric transformation of Finsler structure.

Let us consider the coordinate transformation (2.3) together with the corresponding transformation for y .

$$\bar{y}^i = y^i + \epsilon \frac{\partial V^i}{\partial x^j} y^j, \quad (3.2)$$

Under the coordinate transformation (2.3) and (3.2), to first order in $|\epsilon|$, we obtain the expansion of the Finsler structure,

$$\bar{F}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{F}(x, y) + \epsilon V^i \frac{\partial F}{\partial x^i} + \epsilon y^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \frac{\partial F}{\partial y^i}, \quad (3.3)$$

where $\bar{F}(\bar{x}, \bar{y})$ should be equal to $F(x, y)$. Under the transformation (2.3) and (3.2), a Finsler structure is called isometry if and only if

$$F(x, y) = \bar{F}(x, y). \quad (3.4)$$

Then, deducing from (3.3), we obtain Killing equation $K_V(F)$ in Finsler space

$$K_V(F) = V^i \frac{\partial F}{\partial x^i} + y^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \frac{\partial F}{\partial y^i} = 0. \quad (3.5)$$

Searching the Killing vectors for general Finsler manifold is a difficult task. Here, we give the Killing vectors for a class of Finsler space- (α, β) space with metric defining as in [16]

$$F = \alpha \phi(s), \quad s = \frac{\beta}{\alpha}, \quad (3.6)$$

where $\alpha = \sqrt{a_{ij} y^i y^j}$ is a Riemannian metric and $\beta = b_i(x) y^i$ is a differential one form, and $\phi(s)$ is a smooth function. Then, the Killing equation (3.5) in (α, β) space is given as follows

$$\begin{aligned} 0 &= K_V(\alpha) \phi(s) + \alpha K_V(\phi(s)), \\ &= \left(\phi(s) - s \frac{\partial \phi(s)}{\partial s} \right) K_V(\alpha) + \frac{\partial \phi(s)}{\partial s} K_V(\beta). \end{aligned} \quad (3.7)$$

By making use of the Killing equation (3.5), we obtain

$$K_V(\alpha) = \frac{1}{2\alpha} (V_{i|j} + V_{j|i}) y^i y^j, \quad (3.8)$$

$$K_V(\beta) = (V^i \frac{\partial b_j}{\partial x^i} + b_i \frac{\partial V_i}{\partial x^j}) y^j, \quad (3.9)$$

where “ $|$ ” denotes the covariant derivative with respect to the Riemannian metric α . The solutions of the Killing equation (3.7) have been expressed in three cases:

Case-1: The first one is

$$\phi(s) - s \frac{\partial \phi(s)}{\partial s} = 0 \quad \text{and} \quad K_V(\beta) = 0, \quad (3.10)$$

which implies $F = \lambda \beta$ for all $\lambda \in R$.

Case-2: If

$$\frac{\partial \phi(s)}{\partial s} = 0 \quad \text{and} \quad K_V(\alpha) = 0, \quad (3.11)$$

which implies $F = \lambda\alpha$ for all $\lambda \in R$. The above two cases hold true for any trivial space. Next, we merely consider the following case:

Case-3: If $\phi(s) - s\frac{\partial\phi(s)}{\partial s} \neq 0$ and $\frac{\partial\phi(s)}{\partial s} \neq 0$, then we have solutions

$$V_{i|j} + V_{j|i} = 0, \tag{3.12}$$

$$V^i \frac{\partial b_j}{\partial x^j} + b_i \frac{\partial V_i}{\partial x^j} = 0. \tag{3.13}$$

The first equation (3.12) is none other than the Riemannian Killing equation(2.5). The second equation (3.13) can be regarded as the constraint for the Killing vectors that satisfy the Killing equation (3.12). Therefore, in general, the dimension of the linear space formed by Killing vectors of (α, β) metric is lower than the Riemannian one.

4 Symmetry of VSR

One important physical example of (α, β) space is VSR. When we take $\phi(s) = s^m$, where m is an arbitrary constant, the Finsler structure takes the form proposed by Gibbons et al [9].

$$\begin{aligned} F &= \alpha^{1-m} \beta^m, \\ &= (\eta_{ij} y^i y^j)^{(1-m)/2} (b_k y^k)^m, \end{aligned} \tag{4.1}$$

where η_{ij} is Minkowskian metric and b_k is a constant vector, the metric (4.1) is called VSR metric. One immediately obtain from the first Killing equation (3.12) of (α, β) space as,

$$V^i = Q_j^i x^j + C^i. \tag{4.2}$$

And the second Killing equation (3.13) gives the constraint for Killing vector V^i ,

$$b_i Q_j^i = 0. \tag{4.3}$$

We use the following result proved by [11]:

Lemma: The VSR metric is invariant under the group of two-dimensional Euclidean motion $(E(2))$.

The above investigation and the Killing equations (3.12) and (3.13) obtained in section-3 are under the premise that the direction of y^i is arbitrary. It means that no preferred direction exists in spacetime. If the spacetime does have a special direction, the Killing equation (3.7) will have a special solution. The VSR metric is first suggested by Bogoslovsky [4]. Following the assumption and taking the null direction to be preferred direction, we deduce from Killing equation (3.7) that

$$\begin{aligned} 0 &= s^m \left(\frac{1-n}{2\alpha} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x^j} + \frac{\partial V_j}{\partial x^i} \right) y^i y^j + m s^{-1} b_k \frac{\partial V^k}{\partial x^r} y^r \right), \\ &= s^m \frac{1}{\alpha\beta} \left(\frac{1-n}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x^j} + \frac{\partial V_j}{\partial x^i} \right) b_r + m \eta_{ij} b^k \frac{\partial V_k}{\partial x^r} \right) y^i y^j y^r. \end{aligned} \tag{4.4}$$

The above equation has a special solution

$$V_+ = (Q_{+-} + m\eta_{+-})x^- + C_+, \tag{4.5}$$

where Q_{+-} is not only an antisymmetrical matrix, but also satisfying the property

$$b_- = -b^+ Q_{+-}. \tag{4.6}$$

It implies that the Lorentz transformation for b^+ is

$$(\delta_+^+ + \epsilon(m\delta_+^+ + Q_+^+))b^+ = (1 + \epsilon(n + 1))b^+, \quad (4.7)$$

which means the null direction b^+ (or b_-) is invariant under the Lorentz transformation. Therefore, if the spacetime has a preferred direction in null direction, the symmetry corresponded to Q_{+-} is restored. In such case, the VSR metric is invariant under the transformations of the group $\text{DISIM}_b(2)$ proposed by Gibbons et al [9]. Another important physical example of (α, β) -space is Randers space [15], where we set $\Phi(s) = 1 + s$, the Finsler structure takes the form

$$F = \alpha + \beta. \quad (4.8)$$

Then, in Randers space the Killing equation (3.7) leads to

$$K_V(\alpha) + K_V(\beta) = 0. \quad (4.9)$$

Since the $K_V(\alpha)$ contains irrational term of y^i and $K_V(\beta)$ only contains rational term of y^i , the equation (4.9) satisfies if and only if $K_V(\alpha) = 0$ and $K_V(\beta) = 0$. If Randers space is flat, its Killing vectors satisfies the same Killing equation with VSR metric.

5 Killing vectors in Finsler-Berwald space

In this section, we have investigate a special Berwald metric with constant flag curvature $K = 0$. Further, we find the number of independent Killing vectors for a Berwald metric. We prove the following main result.

Theorem: The Finsler-Berwald metric with constant flag curvature $K=0$ has maximum 15 independent Killing vectors.

Proof: Now, consider the special Berwald metric given by [17];

$$F = \frac{(\sqrt{(y.y)(1 - x.x) + (x.y)^2} + (x.y))^2}{(1 - (x.x))^2 \sqrt{(y.y)(1 - x.x) + (x.y)^2}}, \quad (5.1)$$

where \cdot denotes the inner product with respect to Minkowskian metric. By using the equation (2.16) and the first Killing equation $K_V(\alpha) = 0$, (3.12) implies

$$V^i = Q_j^i x^j + C^i - (x.c)x^i. \quad (5.2)$$

The Funk metric θ and Berwald's metric B are related and they can be expressed in the form

$$\theta = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad B = \frac{(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})^2}{\tilde{\alpha}}.$$

Here,

$$\bar{\alpha} = \frac{\sqrt{(y.y)(1 - x.x) + (x.y)^2}}{1 - (x.x)^2}, \quad \bar{\beta} = \frac{(x.y)}{1 - (x.x)^2}.$$

$\tilde{\alpha} = \lambda\bar{\alpha}$, $\tilde{\beta} = \lambda\bar{\beta}$, where $\lambda = \frac{1}{1 - (x.x)^2}$.
And from Berwald metric, we have

$$b_i = \frac{x_i}{(1 - (x.x))^2}.$$

Then, we obtain the partial derivative for $b_i(x)$,

$$\frac{\partial b_i}{\partial x^j} = \frac{\eta_{ij}}{(1 - (x.x))^2} + \frac{4x_i x_j}{(1 - x.x)^3}, \quad (5.3)$$

and the corresponding partial derivative for Killing vectors V^i is

$$\frac{\partial V^i}{\partial x^j} = Q_j^i - \delta_j^i(x.C) - x^i C_j. \quad (5.4)$$

By making use of the equation (5.2), (5.3) and (5.4), we derive the second Killing equation (3.13) of the form

$$\frac{4Q_{ji}x^i}{1 - x.x} + C_j = 0. \quad (5.5)$$

Substituting the equation (5.5) into (5.2), we obtain

$$V^i = Q_j^i x^j \left(\frac{5 - x.x}{1 - x.x} \right). \quad (5.6)$$

Hence, the dimension of the linear space formed by the Killing vectors of Finsler-Berwald metric is 15. And the space time translation generators corresponded to C^i depends on the generators of Lorentz group corresponded to Q_j^i .

6 Conclusion

Lorentz Invariance (LI) is one of the foundations of the standard models of particle physics. Of course, it is very interesting to test the fate of the LI both on experiments and theories. The theoretical approach of investigating the LI violation is studying the possible spacetime symmetry and some parts of special relativity. In this paper, we have presented an explicit relation between the isometric group of a specific Finsler space and symmetries of the VSR proposed by Cohen and Glashow [6]. We showed that the Killing vectors satisfy the same Killing equation of a Riemannian metric, and the major difference is the Killing vectors of (α, β) need to satisfy the constraints (3.13). Further, we consider the Finsler-Berwald metric with constant flag curvature $K = 0$ and we showed that the number of Killing vectors of Finsler-Berwald metric is 15. Finally, we conclude that, “the determination for the maximal number of independent Killing vectors of (α, β) -space or any general Finsler space is still an open problem. We hope, it could be solved in the future”.

References

- [1] Amelino-Camelia G. Testable scenario for relativity with minimum-length // *Phys. Lett.*, B 510, 255, 2001.
- [2] Amelino-Camelia G. Relativity in space-times with short-distance structure governed by an observer-independent (Planckian) length scale // *Int. J. Mod. Phys.*, D 11, 35, 2002.
- [3] Amelino-Camelia G. Relativity: Special treatment // *Nature.*, 418, 34, 2002.
- [4] Bogoslovsky G. Some physical displays of the space anisotropy relevant to the feasibility of its being detected at a laboratory // arXiv:gr-qc/0706.2621.
- [5] Bao D., Chern S.S., Shen Z. An introduction to Riemann Finsler Geometry., Graduate Texts in Mathematics 200, Springer, New York, 2000.
- [6] Cohen A.G., Glashow S.L. Very Special Relativity // *Phys. Rev. Lett.*, 97, 021601, 2006.
- [7] Einstien A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper // *Ann. de Phys.* 17, 891, 1905.

- [8] Girelli F., Liberati S., Sindoni L. Planck-scale modified dispersion relations and Finsler geometry // *Phys. Rev.*, D 75, 064015, 2007.
- [9] Gibbons G.W., Gomis J., Pope C.N. General very special relativity is Finsler geometry// *Phys. Rev.*, D 76, 081701, 2007.
- [10] Hamel G. Uber die Geometrieen in denen die Geraden die Kurzesten sind // *Math. Ann.* 57, 231, 1903.
- [11] Kogut J.B., Soper D.E. Quantum Electrodynamics in the Infinite-Momentum Frame // *Phys. Rev.*, D 1, 2901, 1970.
- [12] Killing W. Ueber die Grundlagen der Geometrie // *J. f. d. reine u. angew. Math.(Crelle).*, 109, 121, 1892.
- [13] Magueijo J., Smolin L. Lorentz Invariance with an Invariant Energy Scale // *Phys. Rev. Lett.*, 88, 190403, 2002.
- [14] Magueijo J., Smolin L. Generalized Lorentz invariance with an invariant energy scale // *Phys. Rev.*, D 67, 044017, 2003.
- [15] Randers G. On an Asymmetrical Metric in the Four-Space of General Relativity // *Phys. Rev.*, 59, 195, 1941.
- [16] Shen Z. Some perspectives in Finsler geometry. MSRI Publication Series. Cambridge: Cambridge university press, 2004.
- [17] Z. Shen and G. Civi Yildirim. On a class of projectively flat metrics with constant flag curvature. 2005.
- [18] Xin Li, Zhe Chang. Symmetry and special relativity in Finsler spacetime with constant curvature. arXiv:gr-qc/1010.2020v2.
- [19] Xin Li, Zhe Chang, Xiaohuan Mo. Isometric group of (α, β) -type Finsler space and the symmetry of Very special relativity., arXiv:gr-qc/1001.2667v2.
- [20] Xin Li, Zhe Chang. Towards a gravitation theory in Berwald-Finsler space. // *Chinese Physics C*, 34, 2010, 28–34.
- [21] Xin Li, Zhe Chang, Xiaohuan Mo. Symmetries in very special relativity and isometric group of Finsler space // *Chinese Physics C*, 33, 2009, 1–5.

ОЧЕНЬ СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ФИНСЛЕРА-БЕРВАЛЬДА

С.К. Нарасимхамурти, Г.Н. Лата Кумари

Университет им. Кувемпу, Шимога, Карнатака, Индия

nmurthysk@hotmail.com, nslathams@gmail.com

Симметрия пространства-времени описывается с использованием так называемой изометрической группы. Генератор изометрической группы связан с векторами Киллинга [18]. В настоящей статье мы даем явную связь между симметриями очень специальной теории относительности и изометрической группой пространства Финслера. Векторы Киллинга в пространстве Финслера сконструированы на систематической основе. Решения уравнений Киллинга даны в явном виде, как изометрические симметрии пространства Финслера. Даны векторы Киллинга для пространства Финслера-Бервальда и доказано, что 4-мерное пространство Финслера-Бервальда с постоянной кривизной имеет 15 независимых векторов Киллинга.

Ключевые слова: пространство Финслера-Бервальда, очень специальная теория относительности, векторы Киллинга, нарушение лоренц-инвариантности, изометрическая группа.

УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕГОЛОНОМНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С МЕТРИКОЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА

С.В. Галаев

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

sgalaev@mail.ru

Вводится понятие продолженной связности оснащенного субфинслерова пространства коразмерности 1. На распределении субфинслерова пространства с метрикой Бервальда-Моора нулевой кривизны определяется структура почти контактного кэлера пространства.

Ключевые слова: внутренняя связность, продолженная связность, почти контактное кэлерово пространство, субфинслерово пространство с метрикой Бервальда-Моора нулевой кривизны.

1 Введение

Изучение оснащенных субфинслеровых пространств коразмерности 1 с метрикой Бервальда-Моора мотивировано, главным образом, работами [1, 2, 3]. В работе [1] в качестве модели четырехмерного пространства-времени общей теории относительности предлагается подходящее подмногообразие Коши-Римана многообразия с почти контактной метрической структурой. Авторы работы [2] получают уравнение движения заряженной частицы в общей теории относительности как уравнение Эйлера-Лагранжа функционала длины для некоторого четырехмерного неголономного распределения, задаваемого 4-потенциалом электромагнитного поля. Уравнения допустимых (горизонтальных) геодезических для этого распределения совпадают с уравнениями движения заряженной частицы общей теории относительности. На распределении определен метрический тензор лоренцевой сигнатуры $(+, -, -, -)$, что позволяет определять причинность, как в общей теории относительности. Авторы вводят ковариантное дифференцирование (линейную связность) и тензор кривизны для распределения. И, наконец, в работе [3] профессор Мирон в качестве модельного пространства в ОТО рассматривает касательное расслоение финслерова многообразия. В настоящей работе развивается дифференциально-геометрический аппарат, использование которого позволит, с одной стороны, взглянуть на работы [1, 2, 3] с несколько более общих позиций, а с другой - продолжить полученные там результаты на случай распределения с финслеровой метрикой. Мы определяем 9-мерное многообразие с почти контактной метрической структурой как модельное пространство общей теории относительности.

Помимо введения работа содержит два раздела.

Во втором разделе вводится понятие почти контактной кэлеровой структуры. Приводятся основные результаты внутренней геометрии почти контактных кэлеровых пространств. Обсуждаются понятия связности над распределением и продолженной связности. По сути, продолженная связность в несколько ином контексте и в других терминах впервые, по-видимому, была определена профессором Вагнером в [4] с целью построения тензора кривизны неголономного многообразия. Раздел завершает важный для дальнейшего пример одного класса почти контактных кэлеровых пространств. В третьем разделе строится модель девятимерного пространства-времени общей теории относительности.

2 Почти контактная кэлерова структура

Пусть X – гладкое многообразие нечетной размерности n , $\Xi(X)$ – $C^\infty(X)$ -модуль гладких векторных полей на X . Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . Почти контактной метрической структурой на X называется совокупность $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ тензорных полей на X , где φ – тензор типа $(1, 1)$, называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η – вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g – (псевдо) риманова метрика. При этом

$$\eta(\vec{\xi}) = 1, \quad \varphi(\vec{\xi}) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad \varphi^2 \vec{x} = -\vec{x} + \eta(\vec{x})\vec{\xi}, \quad g(\varphi \vec{x}, \varphi \vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y}),$$

$\vec{x}, \vec{y} \in \Xi(X)$. Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi \vec{y})$ называется фундаментальной формой структуры. Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется почти контактным метрическим многообразием. В случае, когда $\Omega = d\eta$, почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой.

Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где N_φ – кручение Нейенхейса, образованное тензором φ . Нормальная контактная метрическая структура называется сасакиевой структурой. Многообразие, с заданной на нем сасакиевой структурой, называется сасакиевым многообразием.

Пусть D – гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η , $D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$ – его оснащение. Если ограничение формы $\omega = d\eta$ на распределении D дает невырожденную форму, то в этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker \omega = \text{Span}(\vec{\xi})$ и называется вектором Роба.

Будем говорить, что почти контактная метрическая структура почти нормальная, если выполняется условие $N_\varphi + 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi} = 0$.

Почти нормальные почти контактные метрические пространства в дальнейшем будем называть почти контактными эрмитовыми пространствами. Почти контактное эрмитово пространство назовем почти контактным кэлеровым пространством, если его фундаментальная форма замкнута. Почти контактное метрическое пространство назовем почти K -контактным метрическим пространством, если $L_{\vec{\xi}}g = 0$ и $L_{\vec{\xi}}\varphi = 0$. Различие в понятиях нормальной почти контактной метрической структуры и почти контактной эрмитовой структуры раскрывается следующей очевидной теоремой.

Теорема 1. Почти контактная эрмитова структура является нормальной тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: $\omega(\varphi \vec{u}, \varphi \vec{v}) = \omega(\vec{u}, \vec{v})$, $\vec{u}, \vec{v} \in \Gamma D$.

Почти нормальная контактная метрическая структура очевидным образом является сасакиевой структурой. Сасакиевы пространства пользуются большой популярностью у исследователей почти контактных метрических пространств по двум основным причинам. С одной стороны, существует большое количество интересных и содержательных примеров сасакиевых структур (см., например, [5]), с другой стороны – многообразия Сасаки обладают очень важными и естественными свойствами.

Карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$) ($a, b, c, e = 1, \dots, n-1$) на многообразии X будем называть адаптированной к неголономному многообразию D , если $D^\perp = \text{Span}(\frac{\partial}{\partial x^n})$ [6].

Пусть $P : TX \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему D : $D = \text{Span}(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии X неголономное поле базисов $\vec{e}_\alpha = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^\alpha, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Непосредственно проверяется,

что $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = M_{ab}^n \partial_n$, где компоненты M_{ab}^n образуют так называемый тензор неголономности [4]. Если потребовать, чтобы во всех используемых адаптированных картах выполнялось равенство $\xi = \partial_n$, то, в частности, окажется справедливым равенство $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n$, где $\omega = d\eta$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ как базис, определяемый адаптированной картой. Заметим, что имеет место равенство $\partial_n \Gamma_a^n = 0$.

Тензорное поле типа (p, q) , заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если его координатное представление в адаптированной карте имеет вид:

$$t = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}.$$

По-видимому, в теории почти контактных метрических пространств адаптированные координаты по существу использовались только в работах [6-8].

Назовем *допустимое тензорное поле интегрируемым*, если в окрестности каждой точки многообразия X найдется адаптированная карта, относительно которой компоненты поля постоянны. Форма $\omega = d\eta$ является одним из примеров интегрируемой допустимой тензорной структуры. Следующие две теоремы раскрывают значение понятия интегрируемой допустимой тензорной структуры в контексте наших исследований.

Теорема 2 [7]. *Допустимая почти комплексная структура интегрируема тогда и только тогда, когда имеет место равенство $P(N_\varphi) = 0$.*

Теорема 3 [7]. *Почти контактная метрическая структура является почти контактной эрмитовой структурой тогда и только тогда, когда допустимая почти комплексная структура φ интегрируема.*

Используя адаптированные координаты, введем следующие допустимые тензорные поля: $h_b^a = \frac{1}{2} \partial_n \varphi_b^a$, $C_{ab} = \frac{1}{2} \partial_n g_{ab}$, $C_b^a = g^{da} C_{db}$, $\psi_a^b = g^{db} \omega_{da}$. Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивита тензора g : $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 4 *Коэффициенты связности Леви-Чивита почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид:*

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c, \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab}, \quad \tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b - \psi_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{na}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^a = 0,$$

где $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$.

В случае контактного метрического пространства выражение для коэффициентов связности Леви-Чивита приведены в [6].

Под внутренней линейной связностью в неголономном многообразии D [4] понимается отображение $\nabla : \Gamma D \times \Gamma D \rightarrow \Gamma D$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{f_1 \vec{u}_1 + f_2 \vec{u}_2} = f_1 \nabla_{\vec{u}_1} + f_2 \nabla_{\vec{u}_2}$;
- 2) $\nabla_{\vec{u}} f \vec{v} = f \nabla_{\vec{u}} \vec{v} + (\vec{u} f) \vec{v}$,

где ΓD - модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c$. Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} - \nabla_{\vec{y}} \vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}].$$

Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем

$$S_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c.$$

Действие внутренней линейной связности естественным образом продолжается на произвольные допустимые тензорные поля. Важным примером внутренней линейной связности является внутренняя метрическая связность, однозначно определяемая условиями $\nabla g = 0$ и $S = 0$ [4]. В адаптированных координатах мы имеем: $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$. Заметим, что $\Gamma_{bc}^a = \tilde{\Gamma}_{bc}^a$ (см. теорему 4).

Так же как и связность в объемлющем пространстве, внутренняя линейная связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством некоторого векторного расслоения. В случае внутренней связности в качестве такого расслоения выступает распределение D . Понятие *связности над распределением* использовалось применительно к неголономному многообразию с допустимой финслеровой метрикой в работе [8]. Говорят, что над распределением D задана связность, если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \rightarrow X$ разбивается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD - вертикальное распределение на тотальном пространстве D .

Введем на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ на многообразии X сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+\alpha})$ на многообразии D , где $x^{n+\alpha}$ - координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G_b^a(x^a, x^{n+a})$ такого, что $HD = \text{Span}(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$. В случае, когда $G_b^a(x^a, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^a)x^{n+c}$, связность над распределением определяется внутренней линейной связностью.

В работе [8] было введено понятие продолженной связности. Продолженная связность всегда рассматривается относительно некоторой связности над распределением и определяется разложением $TD = \tilde{H}\tilde{D} \oplus VD$, где $HD \subset \tilde{H}\tilde{D}$. По существу, продолженная связность является связностью в векторном расслоении. Как следует из определения продолженной связности, для ее задания (при условии уже существующей связности над распределением) достаточно задать векторное поле \vec{u} на многообразии D , имеющее следующее координатное представление $\vec{u} = \partial_n + G_n^a \partial_{n+a}$. Компоненты объекта G_n^a преобразуются как компоненты вектора на базе. Полагая, что $G_n^a = 0$, получим продолженную связность, обозначаемую ∇^1 .

В работе [4] допустимое тензорное поле, определяемое равенством $R(\vec{u}, \vec{v})\vec{w} = \nabla_{\vec{u}}\nabla_{\vec{v}}\vec{w} - \nabla_{\vec{v}}\nabla_{\vec{u}}\vec{w} - \nabla_{P[\vec{u}, \vec{v}]}\vec{w}$ названо Вагнером первым тензором кривизны Схоутена. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид: $R_{bcd}^a = 2\vec{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e]}\Gamma_{b]c}^e$. В случае, когда распределение D не содержит интегрируемое распределение размерности $n - 2$, обращение в нуль тензора кривизны Схоутена равносильно тому, что параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых не зависит от пути переноса [4]. Назовем тензор Схоутена *тензором кривизны распределения D* , а распределение D , в случае обращения в нуль тензора Схоутена, - распределением нулевой кривизны. Нетрудно установить, что частные производные $\partial_n \Gamma_{bc}^a = P_{bc}^a$ являются компонентами допустимого тензорного поля [4].

Пусть $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ - почти контактная метрическая структура. Имеет место следующая теорема [7]:

Теорема 7. Почти контактное метрическое многообразие допускает внутреннюю связность ∇ без кручения, такую, что $\nabla^1 \varphi = 0$, тогда и только тогда, когда допустимая

структура φ интегрируема.

Теорема 8. Почти контактная метрическая структура является почти контактной кэлеровой структурой тогда и только тогда, когда $\nabla^1\varphi = 0$, где ∇ – внутренняя метрическая связность без кручения.

Доказательство. Воспользуемся равенством, имеющим место для любого почти контактного метрического пространства [5]:

$$2g((\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\varphi)\vec{y}, \vec{z}) = 3d\Omega(\vec{x}, \varphi\vec{y}, \varphi\vec{z}) - 3d\Omega(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + g(N^{(1)}(\vec{y}, \vec{z})\varphi\vec{x}) + N^{(2)}(\vec{y}, \vec{z})\eta(\vec{x}) + 2d\eta(\varphi\vec{y}, \vec{x})\eta(\vec{z}) - 2d\eta(\varphi\vec{z}, \vec{x})\eta(\vec{y}), \quad (1)$$

где $N^{(1)} = N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi}$, $N^{(2)} = (L_{\varphi\vec{x}}\eta)\vec{y} - (L_{\varphi\vec{y}}\eta)\vec{x}$.

С учетом теоремы 2 и определения почти контактной кэлеровой структуры далее полагаем, что почти контактная метрическая структура $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ является почти нормальной. В этом случае $P(N_\varphi) = N_\varphi + 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi} = 0$ и, таким образом, $N^{(1)} = 2(d\eta \otimes \vec{\xi} - (d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi})$, и равенство (1) принимает более простой вид:

$$2g((\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\varphi)\vec{y}, \vec{z}) = 3d\Omega(\vec{x}, \varphi\vec{y}, \varphi\vec{z}) - 3d\Omega(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + N^{(2)}(\vec{y}, \vec{z})\eta(\vec{x}) + 2d\eta(\varphi\vec{y}, \vec{x})\eta(\vec{z}) - 2d\eta(\varphi\vec{z}, \vec{x})\eta(\vec{y}). \quad (2)$$

Достаточность. Подставив в (2) $\vec{x} = \vec{e}_a$, $\vec{y} = \vec{e}_b$, $\vec{z} = \vec{e}_c$, а затем $\vec{x} = \vec{e}_a$, $\vec{y} = \vec{e}_b$, $\vec{z} = \vec{e}_c$, получаем $d\Omega_{abn} = 0$ и $d\Omega_{abc} = 0$ соответственно, что и означает, что $d\Omega = 0$.

Необходимость. Предполагая, что имеет место $d\Omega = 0$, переписываем (1) в виде

$$2g((\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\varphi)\vec{y}, \vec{z}) = N^{(2)}(\vec{y}, \vec{z})\eta(\vec{x}) + 2d\eta(\varphi\vec{y}, \vec{x})\eta(\vec{z}) - 2d\eta(\varphi\vec{z}, \vec{x})\eta(\vec{y}). \quad (3)$$

Подставляя в (3) $\vec{x} = \vec{e}_a$, $\vec{y} = \vec{e}_b$, $\vec{z} = \vec{e}_c$, получаем $\nabla_a\varphi_c^b = 0$. Что и требовалось доказать.

В заключение раздела мы сформулируем и докажем теорему, обобщающую следующий классический результат [5]: почти контактное метрическое пространство является сасакиевым пространством тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$(\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = g(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} - \eta(\vec{y})\vec{x}.$$

Теорема 9. Почти контактная эрмитова структура является почти контактной кэлеровой структурой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$(\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = d\eta(\varphi\vec{y}, \vec{x})\vec{\xi} + \eta(\vec{y})(\varphi \circ \psi)(\vec{x}) - \eta(\vec{x})(\varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi)\vec{y}. \quad (4)$$

Доказательство. Равенство (4) эквивалентно выполнению следующих условий: $\nabla\varphi = 0$, $\partial_n\varphi_b^a = 0$, $\partial_n g_{ab} = 0$. Последние два равенства записаны в адаптированных координатах. Первые два равенства можно объединить условием $\nabla^1\varphi = 0$, которое, в свою очередь, влечет равенство $\partial_n g_{ab} = 0$, что и доказывает теорему.

Проводя необходимые вычисления, получаем выражение для ненулевых компонент тензора кривизны почти контактного кэлерова пространства: $\tilde{R}_{abc}^d = R_{abc}^d + 2\psi_{[a}^d\omega_{b]c} - 2\omega_{ab}\psi_c^d$, $\tilde{R}_{abc}^n = 2\nabla_{[b}\omega_{a]c}$, $\tilde{R}_{nbc}^d = \nabla_b\psi_c^d$, $\tilde{R}_{nbc}^n = \psi_c^d\omega_{db}$, $\tilde{R}_{abn}^d = 2\nabla_{[b}\psi_{a]}^d$, $\tilde{R}_{nbn}^c = \psi_a^c\psi_b^d$. В случае сасакиева пространства выражение для ненулевых компонент тензора кривизны примет вид: $\tilde{R}_{abc}^d = R_{abc}^d + 2\psi_{[a}^d\omega_{b]c} - 2\omega_{ab}\psi_c^d$, $\tilde{R}_{nbc}^n = g_{bc}$, $\tilde{R}_{nbn}^c = -\delta_b^c$. Компоненты тензора кривизны связности Леви-Чивита, таким образом, выражаются через

компоненты тензора кривизны Схоутена и компоненты допустимых тензорных полей ψ , ω и их производные относительно внутренней метрической связности ∇ .

Примеры. Первый пример – пример многообразия Сасаки с распределением нулевой кривизны – важен для понимания второго основного примера.

Примеры 1. Рассмотрим арифметическое пространство R^5 , $x^2x^4 \neq 0$ со структурой Сасаки, определяемой следующим образом: $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_5$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \partial_3 - x^4\partial_5$, $\vec{e}_4 = \partial_4$, $\eta = 2(dx^5 + x^2dx^1 + x^4dx^3)$, $\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_3$, $\varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_4$. Очевидно, что $\omega(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}) = \omega(\vec{x}, \vec{y})$. Метрику определим с помощью равенства $g(\vec{x}, \vec{y}) = \omega(\varphi\vec{y}, \vec{x})$. Очевидно, что данное пространство является сасакиевым пространством с распределением нулевой кривизны. В адаптированных координатах мы имеем $\tilde{R}_{abc}^d = 2\varphi_{[a}\omega_{b]c}^d - 2\omega_{ab}\varphi_c^d$, $\tilde{R}_{nbc}^n = g_{bc}$, $\tilde{R}_{nbn}^c = -\delta_b^c$. Пример 2. Рас-

смотрим векторное расслоение (D, π, X) , где D – распределение контактной метрической структуры $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$. Если распределение D является распределением нулевой кривизны и не содержит интегрируемое распределение размерности $n - 2$, то, как известно [4], выполняется равенство $P_{bc}^a = 0$. До конца работы будем предполагать, что $n > 3$. На тотальном пространстве D рассматриваемого векторного расслоения определим почти контактную метрическую структуру $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, d(\pi^* \circ \eta), D)$ полагая $\tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = \tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = g(\vec{e}_a, \vec{e}_b)$, $\tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n) = \tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_n) = 0$, $J(\vec{\varepsilon}_a) = \partial_{n+a}$, $J(\partial_{n+a}) = -\vec{\varepsilon}_a$, $J(\partial_n) = 0$, где $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, $\tilde{D} = HD \oplus VD$, VD – вертикальное распределение на тотальном пространстве D , а HD – горизонтальное распределение, определяемое внутренней линейной связностью. Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a})$ определяют на D поле неголономных базисов, а формы $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+b} dx^c)$ – соответствующее поле кобазисов. Векторное поле ∂_n является полем Рибба для почти контактной метрической структуры $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, d(\pi^* \circ \eta))$. Имеет место

Теорема 10. Почти контактная метрическая структура $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, d(\pi^* \circ \eta))$ является почти контактной эрмитовой структурой тогда и только тогда, когда распределение D является распределением нулевой кривизны.

Доказательство. Проводя необходимые вычисления, получаем:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n + R_{abc}^e x^{n+c} \partial_{n+e}, \quad (5)$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = x^{n+c} P_{ac}^b \partial_{n+b}, \quad (6)$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c}. \quad (7)$$

Непосредственным следствием равенств (5-7) являются следующие равенства:

$$\begin{aligned} N_J(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) &= -R_{abc}^e x^{n+c} \partial_{n+e}, \\ N_J(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) &= 2\omega_{ba}\partial_n + R_{abc}^e x^{n+c} \partial_{n+e}, \\ N_J(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) &= 0, \\ N_J(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n) &= N_J(\partial_{n+a}, \partial_n) = -x^{n+c} P_{ac}^b \partial_{n+b}. \end{aligned}$$

Из полученных равенств следует справедливость теоремы.

Покажем, что структура $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, d(\pi^* \circ \eta))$ не является нормальной.

Имеем: $N_J(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) + 2d\tilde{\eta}(\partial_{n+a}, \partial_{n+b})\partial_n = 2\omega_{ba}\partial_n + R_{abc}^e x^{n+c} \partial_{n+e}$.

Понятно, что независимо от кривизны распределения D последнее выражение не может быть нулем.

Теорема 11. Почти контактная метрическая структура $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, d(\pi^* \circ \eta))$ является почти контактной кэлеровой структурой тогда и только тогда, когда структура $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ – сасакиева структура с распределением нулевой кривизны.

Доказательство. Непосредственными вычислениями подтверждается справедливость следующего утверждения: $d\Omega = 0 \Leftrightarrow d\tilde{\Omega} = 0$, где $\tilde{\Omega}(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, J\vec{y})$, что и доказывает теорему.

Источником почти контактных метрических пространств внутренней нулевой кривизны является классическая механика и физика.

3 Оснащенные субфинслеровы пространства коразмерности 1

Рассмотрим оснащенное субфинслерово пространство коразмерности 1 (X, D, F, D^\perp) [8]. По аналогии с тем, как это сделано во втором разделе, определим на D , как на тотальном пространстве векторного расслоения, структуру почти контактного метрического пространства. Далее будем полагать, что размерность многообразия X равна 5, а D является распределением с метрикой Бервальда-Моора нулевой кривизны [9]. Как показано в [9], можно добиться обращения в нуль кривизны распределения D полагая, например, $g_{1234} = e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4}$. При данных предположениях оказывается справедливой теорема 12, аналогичная теореме 11.

Теорема 12. Почти контактная метрическая структура $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, d(\pi^* \circ \eta))$, порождаемая метрикой Бервальда-Моора нулевой кривизны, является почти контактной кэлеровой структурой.

Далее, для получения уравнений Эйнштейна, достаточно воспользоваться рассуждениями, проведенными в [3] и результатом следующей теоремы.

Теорема 13. Тензор Риччи многообразия с почти контактной кэлеровой структуры совпадает с тензором Риччи соответствующего распределения.

Литература

- [1] Duggal K.L. Space time manifolds and contact structures // *Internat. J. Math. Math. Sci.*, Vol. 13, №3, 1990, p. 545–554.
- [2] Krym V.R., Petrov N.N The curvature tensor and the Einstein equations for a four-dimensional nonholonomic distribution // *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*, Vol. 41, №3, 2008, p. 256–265.
- [3] Miron R. On the Finslerian theory of relativity // *Tensor (N.S.)*, Vol. 44, 1987, p. 63–84.
- [4] агнер В.В. Геометрия $(n - 1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // *Тр. семинара по векторному и тензорному анализу*. Вып. 5, 1941, с. 173–255.
- [5] Blair D.E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1976.
- [6] Bejancu A. Kahler contact distributions // *Journal of Geometry and Physics* 60, 2010, p. 1958–1967.
- [7] Галаев С.В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика* 12 (1), 2012, p. 16–22.
- [8] Букушева А.В., Галаев С.В. Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер.* 2012. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 3. с. 17–22.

- [9] Букушева А.В. Неголономные геодезические пространств с метрикой Бервальда-Моора // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(20), том 10, 2013, с. 345–350.

THE EINSTEIN EQUATIONS FOR CASE OF NONHOLONOMIC DISTRIBUTIONS WITH BERWALD-MOOR METRIC

S.V. Galaev

Saratov State University, Saratov, Russia

sgalaev@mail.ru

The notion of an extended connection closing sub-Finslerian space codimension 1 is introduced. On the zero-curvature distribution of sub-Finslerian space with the Finsler metric an almost contact Kählerian space is obtained.

Key Words: interior connection, extended connection, almost contact Kählerian space, zero-curvature sub-Finslerian space with Berwald-Moor metric.

НЕГОЛОНОМНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА С МЕТРИКОЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА

А.В. Букушева

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

bukusheva@list.ru

На гладком пятимерном многообразии рассматривается распределение коразмерности 1 с финслеровой метрикой типа Бервальда-Моора. Определяется внутренняя связность, ассоциированная с заданной метрической структурой.

Ключевые слова: метрика Бервальда-Моора, внутренняя связность, неголономное многообразие Бервальда-Моора.

1 Введение

В n -мерном линейном пространстве с заданным базисом естественным образом определяется коммутативная ассоциативная алгебра (алгебра поличисел), согласованная с метрической функцией Бервальда-Моора (БМ) [1]. Алгебра поличисел P_n является обобщением алгебры двойных чисел. Таким образом, в алгебре поличисел P_n существует базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ такой, что $\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha$. Если алгебру поличисел рассматривать как гладкое многообразие X , то соответствующая метрика Бервальда-Моора определяется функцией, не зависящей от выбора точки многообразия X [1]. В более общей ситуации, метрическая функция БМ определяется некоторым гладким полем полиформ. По-видимому, такая попытка обобщения многообразия БМ впервые была предпринята в работе [2]. Настоящая статья является продолжением этой работы. Переход от алгебры поличисел к многообразию с заданным полем полиформ в некотором смысле аналогичен продолжению специальной теории относительности до ОТО. В предлагаемой статье делается новый шаг на пути обобщения геометрии пространств с метрикой БМ. Идеи Калуцы-Клейна подтолкнули исследователей к построению моделей физического пространства, основанных на использовании геометрии почти контактных метрических структур. Авторы работы [3] предполагают, что пространство скоростей частиц является четырехмерным неголономным распределением на многообразии более высокой размерности. Это распределение задается 4-потенциалом электромагнитного поля. Уравнения допустимых (горизонтальных) геодезических для этого распределения совпадают с уравнениями движения заряженной частицы общей теории относительности. На распределении определен метрический тензор лоренцевой сигнатуры $(+, -, -, -)$, что позволяет определять причинность, как в общей теории относительности. Авторы вводят ковариантное дифференцирование (линейную связность) и тензор кривизны для распределения. Впрочем, связность в распределении и ее инварианты были исследованы задолго до этого профессором Вагнером [4]. Применительно к распределению с финслеровой метрикой задачи построения связности и ее инвариантов решались в работах [5, 6]. Помимо введения работа содержит три раздела. Во втором разделе дается краткое изложение работы [2]. В третьем разделе обсуждается понятия внутренней связности. В четвертом разделе содержится введение в геометрию распределения с финслеровой метрикой типа БМ.

2 Многообразия с полиаффинорной структурой и метрикой Бервальда-Моора

Пусть X - связное C^∞ - многообразие размерности n . Все встречающиеся на X функции и геометрические объекты будем считать бесконечно дифференцируемыми. В дальнейшем

для удобства всякое тензорное поле мы будем называть тензором и, в частности, поле полиформ – полиформой. При исследовании пространств БМ, как правило, используются методы финслеровой геометрии. Однако, учитывая, что в основе определения метрики БМ лежит полилинейная форма, при изучении пространств БМ можно использовать линейную ковариантную производную и соответствующие ей дифференциальные инварианты – кривизну, кручение и т.д. В работе [2] на многообразии X с метрикой Бервальда-Моора, определяемой полилинейной формой g , была задана полиаффинорная алгебра с аффинорами $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$. Оба объекта (полиформа и алгебра) были определены таким образом, чтобы при определенных условиях пространство $(X, g, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ свелось бы к уже известному пространству поличисел. В дальнейшем тройку $(X, g, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ будем называть многообразием Бервальда-Моора (БМ). Алгебра аффиноров определяется следующим образом [2]. На многообразии X задается поле одномерных распределений D_α таким образом, чтобы $TX = \bigoplus_{\alpha=1}^n D_\alpha$. Не нулевая алгебраическая метрика называется метрикой Бервальда-Моора, если существует поле базисов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ таких, что каждый вектор \vec{e}_α базиса, с одной стороны, задает нулевое направление формы g [2], а с другой – порождает соответствующее одномерное распределение: $D_\alpha = \langle \vec{e}_\alpha \rangle$. Такое поле базисов будем называть адаптированным полем базисов формы g , или, просто адаптированным базисом. Форма g в адаптированном базисе имеет единственную, с точностью до перестановки индексов, отличную от нуля компоненту $g_{12\dots n}$.

Рассмотрим n распределений $D_{\hat{\alpha}}$ определяемых следующим образом:

$$D_{\hat{\alpha}} = D_1 \oplus \dots \oplus D_{\alpha-1} \oplus D_{\alpha+1} \oplus \dots \oplus D_n.$$

Таким образом, для любого α получаем разложение $TX = D_{\hat{\alpha}} \oplus D_\alpha$, задающее семейство проекторов $\varphi_\alpha : TX \rightarrow D_\alpha$.

Совокупность аффиноров φ_α относительно операции композиции образует n -мерную полиаффинорную алгебру, обозначаемую нами AH_n , изоморфную алгебре P_n . Будем говорить, что алгебра AH_n и метрика g - согласованы.

В адаптированном базисе аффинор φ_α имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Если на многообразии X существует атлас, состоящий из карт, адаптированных к метрике g , т.е., задающих адаптированный базис: $\partial_\alpha = \vec{e}_\alpha$, то алгебра AH_n оказывается интегрируемой. В этом случае многообразие X может рассматриваться как многообразие над алгеброй поличисел P_n [7].

Теорема 1 [2]. *На многообразии X существует единственная связность нулевого кручения, совместимая с метрикой БМ g , коэффициенты которой определяются равенствами $\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha = \frac{\partial_\alpha g_{12\dots n}}{g_{12\dots n}}$. (Суммирование по α нет.)*

Тензорной структурой на гладком многообразии называется определенная совокупность тензорных полей. Таким образом, в нашем рассмотрении находится тензорная структура, включающая в себя систему полиаффиноров и согласованную с этой системой полилинейную форму.

Тензорная структура называется интегрируемой, если на многообразии можно найти такой атлас, что всякий тензор структуры имеет в любой карте из этого атласа постоянные компоненты. Кручкович Г.И. в своей работе [7] сформулировал следующее утверждение: “Если тензорная структура допускает совместимую связность нулевой кривизны без

кручения, то такая структура интегрируема. Всякая интегрируемая тензорная структура допускает связность нулевой кривизны без кручения, по крайней мере, локально”.

Предложение Кручковича позволяет сформулировать следующую теорему

Теорема 2 [2]. *Тензорная структура $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, g)$ интегрируема тогда и только тогда, когда тензор кривизны совместимой с ней связности равен нулю.*

Используя выражение в координатах тензора кривизны R связности ∇ , получаем, что единственными отличными от нуля компонентами тензора R являются

$$R_{\alpha\gamma\gamma}^{\alpha} = \partial_{\alpha} \frac{\partial_{\gamma} g_{12\dots n}}{g_{12\dots n}}$$

($\alpha \neq \gamma$, по γ суммирования нет).

3 Внутренняя связность

Рассмотрим многообразие X с заданным на нем с помощью 1-формы η гладким распределением (неголономным многообразием) D коразмерности 1. Будем полагать, что распределение D оснащено, т.е. определено одномерное распределение D^{\perp} такое, что $TX = D \oplus D^{\perp}$, при этом, потребуем существование векторного поля $\vec{\xi}$, такого, что $D^{\perp} = Span(\vec{\xi})$.

Карту $K(x^{\alpha})$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$) ($a, b, c, e = 1, \dots, n-1$) на многообразии X будем называть адаптированной к неголономному многообразию D , если $D^{\perp} = Span(\frac{\partial}{\partial x^n})$ [5].

Пусть $p : TX \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^{\perp}$, и $K(x^{\alpha})$ – адаптированная карта. Векторные поля $p(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему D : $D = Span(\vec{e}_a)$.

Таким образом, мы имеем на многообразии X неголономное поле базисов (\vec{e}_a, ∂_n) и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = M_{ab}^n \partial_n$, где компоненты M_{ab}^n образуют так называемый тензор неголономности [4]. Если потребовать, чтобы для всех адаптированных координат выполнялось равенство $\vec{\xi} = \partial_n$, то окажется справедливым равенство $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n$, где $\omega = d\eta$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ как базис, определяемый адаптированной картой. Заметим, что имеет место равенство $\partial_n \Gamma_a^n = 0$.

Тензорное поле назовем допустимым (к распределению D), если оно обращается в нуль каждый раз, когда его векторный аргумент принадлежит оснащению D^{\perp} , а ковекторный аргумент коллинеарен форме η . Координатное представление допустимого тензорного поля типа (p, q) в адаптированной карте имеет вид:

$$t = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}.$$

Так, в частности, под допустимым векторным полем будем понимать такое векторное поле, все значения которого лежат в распределении D , а под допустимой 1-формой будем понимать всякую 1-форму, обращающуюся в нуль на оснащении D^{\perp} .

Назовем допустимое тензорное поле интегрируемым, если в окрестности каждой точки многообразия X найдется адаптированная карта, относительно которой компоненты поля постоянны. Форма $\omega = d\eta$ является одним из примеров интегрируемой допустимой тензорной структуры. Если распределение D интегрируемо, то всякая допустимая интегрируемая структура является интегрируемой структурой на многообразии X . Естественность понятия интегрируемой допустимой тензорной структуры косвенно подтверждается следующими обстоятельствами. Интегрируемое оснащение D^{\perp} определяет, как известно, слоение с одномерными слоями. Если на этом слоении каким-нибудь разумным образом

задать структуру гладкого многообразия, то всякая допустимая интегрируемая тензорная структура естественным образом определит на таком многообразии интегрируемую тензорную структуру уже в обычном смысле.

Под внутренней линейной связностью в неголономном многообразии D понимается отображение

$$\nabla : \Gamma D \times \Gamma D \rightarrow \Gamma D$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$1) \nabla_{f_1 \vec{u}_1 + f_2 \vec{u}_2} = f_1 \nabla_{\vec{u}_1} + f_2 \nabla_{\vec{u}_2},$$

$$2) \nabla_{\vec{u}} f \vec{v} = f \nabla_{\vec{u}} \vec{v} + (\vec{u} f) \vec{v},$$

где ΓD – модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения

$$\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c.$$

Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным

$$S(\vec{X}, \vec{Y}) = \nabla_{\vec{X}} \vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}} \vec{X} - p[\vec{X}, \vec{Y}].$$

Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем $S_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c$.

Действие внутренней линейной связности естественным образом продолжается на произвольные допустимые тензорные поля. Важным примером внутренней линейной связности является внутренняя метрическая связность, однозначно определяемая условиями $\nabla g = 0$, $S = 0$ [4]. В адаптированных координатах мы имеем:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

В работе [4] допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{u}, \vec{v}) \vec{w} = \nabla_{\vec{u}} \nabla_{\vec{v}} \vec{w} - \nabla_{\vec{v}} \nabla_{\vec{u}} \vec{w} - \nabla_{p[\vec{u}, \vec{v}]} \vec{w} - p[q[\vec{u}, \vec{v}], \vec{w}],$$

где $q = 1 - p$, названо Вагнером первым тензором кривизны Схоутена. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид:

$$R_{abc}^d = 2\vec{e}_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}^d \Gamma_{b]c}^e.$$

В случае, когда распределение D не содержит интегрируемое распределение размерности $n - 2$, обращение в нуль тензора кривизны Схоутена равносильно тому, что параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых не зависит от пути переноса [4]. Назовем тензор Схоутена тензором кривизны распределения D , а распределение D , в случае обращения в нуль тензора Схоутена, – распределением нулевой кривизны. Нетрудно установить, что частные производные $\partial_n \Gamma_{bc}^a = P_{bc}^a$ являются компонентами допустимого тензорного поля [4].

4 Основные понятия геометрии распределения с финслеровой метрикой типа Бервальда-Моора

Пусть X – гладкое многообразие размерности 5. Как и в предыдущем разделе, будем считать, что $TX = D \oplus D^\perp$, где D – распределение коразмерности 1. Не нарушая общности, сразу перейдем к случаю, когда $X = R^5$, а распределение D порождается векторными полями

$$\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_5, \quad \vec{e}_2 = \partial_2, \quad \vec{e}_3 = \partial_3 - x^4\partial_5, \quad \vec{e}_4 = \partial_4.$$

Зададим семейство допустимых аффиноров (φ_a) , полагая

$$\varphi_a(\vec{e}_b) = \begin{cases} \vec{0}, & a \neq b, \\ \vec{e}_a, & a = b. \end{cases}$$

Пусть, далее, g – поле симметрических форм, все компоненты которых равны нулю, за исключением (с точностью до перестановки) $g_{1234} = g$. Здесь $g_{1234} = g(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Назовем четверку $(X, D, g, \varphi_1, \dots, \varphi_4)$ неголономным многообразием Бервальда-Моора. Имеет место

Теорема 3. *Существует единственная внутренняя связность ∇ с нулевым кручением такая, что $\nabla g = 0$.*

Доказательство. Единственность. Для всех a равенство $\nabla g = 0$ сведется к равенствам $\Gamma_{ab}^b = \frac{\vec{e}_a g_{1234}}{g_{1234}}$. Если потребовать обращения в нуль кручения, то окажется, что отличными

от нуля компонентами искомой связности будут, лишь $\Gamma_{aa}^a = \frac{\vec{e}_a g_{1234}}{g_{1234}}$ (по a суммирования нет). Существование заявленной связности проверяется непосредственно. \square

Проводя необходимые вычисления, получаем следующие выражения для отличных от нуля компонент тензора кривизны Схоутена $R_{acc}^c = \vec{e}_a \frac{\vec{e}_c g_{1234}}{g_{1234}}$ ($a \neq c$, по c суммирования нет).

Условие интегрируемости формы g эквивалентно обращению в нуль тензора кривизны. Приравнивая к нулю нужные компоненты, получаем дифференциальные уравнения в частных производных следующего вида $\partial_a \frac{\partial_c g_{1234}}{g_{1234}} = 0$, ($a \neq c$). Среди решений данной системы находятся функции вида $g_{1234} = e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4}$. По сути дела, в случае обращения в нуль тензора кривизны, каждую точку многообразия X можно снабдить двумя координатами. Одна из которых - действительное число, другая – поличисло.

Уравнения геодезических допустимой связности запишем в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c &= 0, \\ \dot{x}^n &= -\dot{x}^a \Gamma_a^n \partial_n. \end{aligned}$$

Или, с учетом проведенных вычислений,

$$\begin{aligned} \ddot{x}^a + \frac{\vec{e}_a g_{1234}}{g_{1234}} (\dot{x}^a)^2 &= 0, \\ \dot{x}^n &= -\dot{x}^a \Gamma_a^n \partial_n. \end{aligned}$$

Литература

- [1] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Конформные калибровки геометрии Бервальда-Моора и индуцированные ими нелинейные симметрии // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, №10, 2008, с. 3–14.
- [2] Букушева А.В. О пространстве над алгеброй поличисел с метрикой Бервальда-Моора // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(15), том 8, 2011, с. 99–103.
- [3] Крым В. Р., Петров Н.Н. Тензор кривизны и уравнения Эйнштейна для четырехмерного неголономного распределения // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1.*, 2008. Вып. 3. с. 68–80.

- [4] Вагнер В.В. Геометрия $(n - 1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // *Тр. семинара по векторному и тензорному анализу*, вып. 5, 1941, с. 173-255 .
- [5] Букушева А.В., Галаев С.В. Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер.* 2012. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. с. 17-22.
- [6] Букушева А.В. О геометрии слоений на распределениях с финслеровой метрикой // *Известия Пензенского государственного педагогического университета имени В.Г. Беллинского. (Серия физико-математические и технические науки)*. №30, 2012, с. 33–38.
- [7] Кручкович Г.И. Гиперкомплексные структуры на многообразиях, I // *Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу* М. 1972. Т. 16. с. 174–201.

NONHOLONOMIC GEODESIC IN SPACE WITH FOR BERWALD-MOOR METRIC

A.V. Bukusheva

Saratov State University, Saratov, Russia

bukusheva@list.ru

On a smooth five-dimensional manifold is considered distribution of codimension 1 with the Finsler metric type Berwald-Moor. We define the intrinsic connection associated with a given metric structure.

Key Words: a Berwald-Moor metric, intrinsic connection, nonholonomic manifold Berwald-Moor.

ГРАВИТАЦИОННОЕ КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ ДЛЯ СЛАБОГО ПОЛЯ ТЯГОТЕНИЯ В ФИНСЛЕРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБЫТИЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Р.Г. Зарипов

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики и машиностроения Казанского научного центра Российской академии наук, Казань, Россия

zaripov@mail.knc.ru

Рассматривается слабое поле тяготения в искривленном финслеровом пространстве событий Бервальда-Моора. Из уравнения геодезической линии определяются классические уравнения движения частицы в предельном случае для ньютонового трёхмерного пространства в гравитационном поле. Приводятся линейные уравнения для метрического тензора и их решения. Обсуждается вопрос о красном смещении.

Ключевые слова: слабое поле тяготения, геометрический объект, уравнения геодезической линии, красное смещение.

1 Введение

В настоящее время происходит становление теории тяготения в финслеровом пространстве событий Бервальда-Моора. Рассматриваются различные подходы (см. например, [1–3]). Вне поля тяготения метрическая функция локального четырёхмерного пространства-времени Бервальда-Моора имеет форм-инвариантное выражение [4]

$$F = ds = (g_{ijkl} dx^i dx^j dx^k dx^l)^{1/4} = \left[\prod_m^4 (cdt + \varepsilon^m dx) \right]^{1/4} \quad (1.1)$$

для инерциальных систем. Элемент физического времени

$$\begin{aligned} dT &= [dt^4 - 2dt^2 dx^2 / c^2 + 4dt (dx \{dx dx\}) / 3c^3]^{1/4} = \\ &= [dt^4 - 2(dt^2 dx^2 + dt^2 dy^2 + dt^2 dz^2) + 8dt dx dy dz]^{1/4} \end{aligned} \quad (1.2)$$

определяется слагаемыми с координатным временем.

Известные значения компонентов векторов $\varepsilon^1 = (1, 1, 1)$, $\varepsilon^2 = (-1, 1, -1)$, $\varepsilon^3 = (1, -1, -1)$, $\varepsilon^4 = (-1, -1, 1)$ выделенных направлений в трехмерном пространстве удовлетворяют равенствам [5]

$$\begin{aligned} \sum_m^4 \varepsilon_\alpha^m = 0, \quad \frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon_\alpha^m \varepsilon_\beta^m = \delta_{\alpha\beta}, \quad \frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon_\alpha^m \varepsilon_\beta^m \varepsilon_\gamma^m = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}, \\ 1 + (\varepsilon^m)^2 = 4, \quad 1 + (\varepsilon^m \varepsilon^r) = 0 \quad (m \neq r), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера, $(dx dx) = dx^2 = \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ – скалярное произведение для $dx = \{dx, dy, dz\}$, $\{dx dx\}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} dx^\beta dx^\gamma$ являются компонентами нового векторного произведения [5] и $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ есть трехмерный абсолютно симметричный символ со свойством $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 1$ при $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, а остальные значения являются нулевыми, m – номер вектора, а α, β и γ пробегают значения 1, 2, 3. Важно отметить, что, согласно (1.3), имеет место только три независимых выделенных направлений и их число равняется четырем.

Метрическая функция (1.1) в известных формах запишется так

$$\begin{aligned}
 F = ds &= [c^4 dt^4 + dx^4 + dy^4 + dz^4 - \\
 &- 2(c^2 dt^2 dx^2 + c^2 dt^2 dy^2 + c^2 dt^2 dz^2 + dx^2 dy^2 + dy^2 dz^2 + dz^2 dx^2) + 8cdtdxdydz]^{1/4} = \\
 &= \{[(cdt + dx)^2 - (dy + dz)^2][(cdt - dx)^2 - (dy - dz)^2]\}^{1/4} = \\
 &= [(cdt + dx + dy + dz)(cdt - dx + dy - dz) \cdot \\
 &\cdot (cdt + dx - dy - dz)(cdt - dx - dy + dz)]^{1/4} = \\
 &= \begin{vmatrix} cdt & dx & dy & dz \\ dx & cdt & dz & dy \\ dy & dz & cdt & dx \\ dz & dy & dx & cdt \end{vmatrix}^{1/4} = \\
 &= (\varepsilon_{1234} H_i^1 H_j^2 H_k^3 H_l^4 dx^i dx^j dx^k dx^l)^{1/4} = \left(\frac{1}{4!} \varepsilon_{abcd} H_i^a H_j^b H_k^c H_l^d dx^i dx^j dx^k dx^l\right)^{1/4},
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

где символ ε_{abcd} есть абсолютно симметричный символ со свойством $\varepsilon_{abcd} = 1$ если $a \neq b \neq c \neq d$, остальные значения нулевые, $dx^i = (cdt, d\mathbf{x})$, H_i^a есть нормализованная матрица Адамара порядка четыре

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & -\mathbf{H}_2 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{H}_2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & -\mathbf{H}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = 1, \quad \mathbf{H}\mathbf{H}^T = 4\mathbf{I},
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

со свойством $H_i^a H_a^j = 4\delta_i^j$ и четырехмерным символом Кронекера δ_i^j , \mathbf{I} – единичная четырехмерная матрица, также определитель есть определитель характеристической матрицы алгебры квадратов. Интервал ds интерпретируется как полунорма четырехмерного вектора dx^i .

Таким образом, из (1.4) вытекает выражение для метрического тензора

$$g_{ijkl} = \frac{1}{4!} \varepsilon_{abcd} H_i^a H_j^b H_k^c H_l^d. \tag{1.6}$$

Перепишем дифференциальную форму (1.1) в виде

$$\begin{aligned}
 (ds)^4 &= g_{ijkl} dx^i dx^j dx^k dx^l = g_{0000} (dx_0)^4 + g_{00\alpha\beta} (dx_0)^2 dx^\alpha dx^\beta + \\
 &+ g_{0\alpha\beta\gamma} dx_0 dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma + g_{\alpha\beta\gamma r} dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma dx^r
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

с $g_{0000} = 1$, $g_{00\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$, $g_{0\alpha\beta\gamma} = 4\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}/3$, $g_{\alpha\beta\gamma r} = \frac{1}{2!} [\delta_{\alpha(\beta} \delta_{\gamma)r} - \varepsilon_{m\alpha(\beta} \varepsilon_{\gamma)r}^m]$.

При наличии поля тяготения компоненты метрического тензора зависят от времени и координат. Поэтому сначала следует рассмотреть уравнение геодезической. Оно должно быть такими, чтобы для слабого поля, когда компоненты метрического тензора мало отличались от значений в (1.7), соответствовало в пределе $c \rightarrow \infty$ классической механике с уравнением движения в неньютоновом трехмерном пространстве. Далее перейдем к самим уравнениям гравитационного поля в линейном приближении.

2 Уравнения движения частицы в классической неньютоновой механике для собственного пространства

В релятивистской механике действие связано с метрической функцией

$$S = -\alpha \int_a^b ds = \int_{t_1}^{t_2} L dt = - \int_{t_1}^{t_2} \alpha c^4 \sqrt{g_{ijkl} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt}} dt. \quad (2.1)$$

Рассмотрим переход от релятивистской механики, в которой действие имеет вид

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = - \int_{t_1}^{t_2} \alpha c^4 \sqrt{\left(\frac{dT}{dt}\right)^4 + \frac{(\mathbf{v}\mathbf{v})^2 - \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}^2}{c^4}} dt \quad (2.2)$$

к классической механике. В предельном переходе $c \rightarrow \infty$ координатное время, согласно (1.2), приблизительно равняется физическому, то есть имеем $dT \approx dt$. Тогда лагранжиан L при разложении по степеням $\mathbf{v}/c = d\mathbf{x}/cdt$ запишется так

$$L \approx -\alpha c^4 \sqrt{1 + \left[\frac{(\mathbf{v}\mathbf{v})^2 - \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}^2}{c^4}\right]} \approx -\alpha c + \frac{\alpha}{4c^3} [(\mathbf{v}\mathbf{v})^2 - \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}^2], \quad (2.3)$$

где координатная скорость приблизительно равняется физической. Действие имеет размерность энергии умноженной на время, что приводит к значению $\alpha = m_0 c$. Опуская в лагранжиане постоянную ($-m_0 c^2$), получим выражение

$$L = \frac{m_0}{4c^2} [(\mathbf{v}\mathbf{v})^2 - \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}^2] = \frac{m_0}{4c^2} \prod_m^4 (\varepsilon^m \mathbf{v}), \quad (2.4)$$

отличающееся от $L = m_0 (\mathbf{v}\mathbf{v})/2$ в ньютоновой механике. Этого следовало ожидать, так как для ньютоновой механики имеет место изотропная евклидова геометрия. В нашем случае исходным является неизотропная геометрия событий с выделенными направлениями, которые естественно сохраняются и в случае новой классической механики. В этой механике движение пробной частицы в гравитационном поле определяется посредством лагранжиана

$$L = \frac{m_0}{4c^2} [(\mathbf{v}\mathbf{v})^2 - \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}^2] - \frac{m_0}{c^2} \phi. \quad (2.5)$$

Согласно уравнениям Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}, \quad (2.6)$$

получим импульс частицы, уравнения движения и энергию

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m_0}{c^2} [\mathbf{v} (\mathbf{v}\mathbf{v}) - \{\mathbf{v} \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}\}], \quad (2.7)$$

$$m_0 \frac{d[\mathbf{v} (\mathbf{v}\mathbf{v}) - \{\mathbf{v} \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}\}]}{dt} = -m_0 \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}}. \quad (2.8)$$

$$E = (\mathbf{p}\mathbf{v}) - L = \frac{3m_0}{4c^2} [(\mathbf{v}\mathbf{v})^2 - \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}^2] + \frac{m_0}{c^2} \phi. \quad (2.9)$$

В лагранжиане (2.5) перед потенциалом введён множитель $(1/c^2)$ с целью, чтобы в уравнениях движения частицы (2.8) не имелось значения скорости света. В координатном виде уравнения движения (2.8) запишутся так

$$m_0 g_{\alpha\beta\gamma r} \frac{d}{dt} (v^\alpha v^\alpha v^\beta) = m_0 \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}. \quad (2.10)$$

Гравитационный потенциал ϕ , зависящий только от координат, удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$\Delta_4 \phi = \beta \rho \quad (2.11)$$

со скалярным оператором [6]

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \Delta \Delta - (\{\nabla \nabla\} \{\nabla \nabla\}) = \\ &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} - 2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial x^2} \right) = \prod_m^4 (\epsilon^m \nabla). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Величина ρ есть плотность массы источника, а β – пока не определенный постоянный коэффициент, Δ – лапласиан, ∇ – оператор градиента.

Уравнение для гравитационного потенциала при наличии источника в классической механике выводится вариационным методом. Для чего рассмотрим действие

$$\begin{aligned} I &= \int L dx dy dz = \\ &= \int \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \right] - \beta \rho \phi \right\} dx dy dz \end{aligned} \quad (2.13)$$

с плотностью лагранжиана L . При варьировании действия по потенциалу $\delta \phi$ получим уравнение

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} - 2 \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^2 \partial x^2} \right) = \beta \rho, \quad (2.14)$$

совпадающее с уравнением (2.11).

3 Геодезические линии

Рассмотрим задачу геодезических линий в финслеровом пространстве, которые являются кривыми экстремальной длины. Для чего находим экстремум интеграла

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} ds = \delta \int_A^B F \left(x^i, \frac{dx^i}{d\tau} \right) d\tau = \delta \int_A^B \left[\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial (dx^i/d\tau)} \right] \delta x^i d\tau \quad (3.1)$$

и получим уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial (dx^i/d\tau)} - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0, \quad F = \left(g_{ijkl} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} \right)^{1/4}, \quad (3.2)$$

где τ – произвольный параметр. Для производных имеем выражения

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{1}{4} \frac{\partial g_{jklm}}{\partial x^i} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} \frac{dx^m}{d\tau}, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial (dx^i/d\tau)} &= \frac{d}{d\tau} \left[g_{ijkl} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^{-3/4} \right] = \\ &= \frac{\partial g_{ijkl}}{\partial x^m} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} \frac{dx^m}{d\tau} \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^{-3/4} + \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$+ 3g_{ijkl} \frac{d^2 x^j}{d\tau^2} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^{-3/4} - \frac{3}{4} g_{ijkl} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} \frac{d^2 s}{d\tau^2} \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^{-7/4}$$

и, соответственно, уравнения (3.2) в виде

$$\begin{aligned} 3g_{ijkl} \frac{d^2 x^j}{d\tau^2} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} + \left[\frac{\partial g_{ijkl}}{\partial x^m} - \frac{1}{4} \frac{\partial g_{jklm}}{\partial x^i} \right] \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} \frac{dx^m}{d\tau} - \\ - \frac{3}{4} g_{ijkl} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} \frac{d^2 s}{d\tau^2} \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^{-1} = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

которые после симметризации по индексам j и m , k и m , j и l в квадратной скобке окончательно запишутся так

$$g_{ijkl} \frac{d^2 x^j}{d\tau^2} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} + \Gamma_{i,jklm} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} \frac{dx^m}{d\tau} - \frac{3}{4} g_{ijkl} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} \frac{d^2 s}{d\tau^2} \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^{-1} = 0. \quad (3.6)$$

Система функций в уравнении геодезической (3.6)

$$\Gamma_{i,jklm} = \frac{1}{12} \left(\frac{\partial g_{klmi}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lmij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mijk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ijkl}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{jklm}}{\partial x^i} \right) \quad (3.7)$$

образуют геометрический объект, являющийся аналогом символа Кристоффеля. Уравнения геодезической и 5-и индексный объект рассматриваются в [7-9]. Пусть параметр является каноническим и имеет значение $\tau = s$. Тогда уравнение (3.6) с $dx^i/ds = u^i$ преобразуется к виду

$$g_{ijkl} \frac{du^j}{ds} u^k u^l + \Gamma_{i,jklm} u^j u^k u^l u^m = 0 \quad (3.8)$$

и совпадает с уравнением геодезической из работы [8, 9], что и следовало ожидать. Запишем уравнение геодезической (3.8) в следующем виде

$$g_{ijkl} \frac{du^j u^k u^l}{ds} + \Gamma_{i,jklm} u^j u^k u^l u^m = 0 \quad (3.9)$$

при обобщении нерелятивистского аналога (2.8). Здесь в объекте (3.7) стоит множитель (1/4). Приведем некоторые известные и неизвестные свойства:

- а) свойство симметрии по индексам j, k, l и m ;
- б) свойство суммы объектов

$$\begin{aligned} &\Gamma_{i,jklm} + \Gamma_{j,klmi} + \Gamma_{k,lmij} + \Gamma_{l,mijk} + \Gamma_{m,ijkl} = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial g_{ijkl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ijlm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ijkm}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ijkl}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{jklm}}{\partial x^i} \right); \end{aligned} \quad (3.10)$$

в) решение системы (3.7), с учетом (3.10), относительно производной

$$\frac{\partial g_{jklm}}{\partial x^i} = 2(\Gamma_{j,klmi} + \Gamma_{k,lmij} + \Gamma_{l,mijk} + \Gamma_{m,ijkl}) - 4\Gamma_{i,jklm}; \quad (3.11)$$

г) тождество

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Gamma_{j,klmi}}{\partial x^r} + \frac{\partial \Gamma_{k,lmij}}{\partial x^r} + \frac{\partial \Gamma_{l,mijk}}{\partial x^r} + \frac{\partial \Gamma_{m,ijkl}}{\partial x^r} - 2\frac{\partial \Gamma_{i,jklm}}{\partial x^r} = \\ & = \frac{\partial \Gamma_{j,klmr}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma_{k,lmrj}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma_{l,mrjk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma_{m,rjkl}}{\partial x^i} - 2\frac{\partial \Gamma_{r,jklm}}{\partial x^i}; \end{aligned} \quad (3.12)$$

д) свойство с антисимметризацией индексов i и j

$$\Gamma_{i,jklm} - \Gamma_{j,iklm} = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial g_{klmi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jklm}}{\partial x^i} \right); \quad (3.13)$$

е) свойство свёртки

$$\Gamma_{i,jklm} u^i u^j u^k u^l u^m = \frac{1}{4} \frac{\partial g_{jklm}}{\partial x^i} u^i u^j u^k u^l u^m = \frac{1}{4} \frac{dg_{jklm}}{ds} u^j u^k u^l u^m; \quad (3.14)$$

ж) полунорма вектора dx^i/ds сохраняется на геодезической линии, что приводит к равенству

$$\frac{d}{ds} g_{ijkl} u^i u^j u^k u^l = 0. \quad (3.15)$$

Дифференцирование левой части в (3.15) дает выражение

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} g_{ijkl} u^i u^j u^k u^l = \frac{1}{4} \frac{dg_{ijkl}}{ds} u^i u^j u^k u^l + g_{ijkl} \frac{du^j}{ds} u^i u^k u^l = \\ & = g_{ijkl} \frac{du^j}{ds} u^i u^k u^l + \frac{1}{12} \left(4 \frac{\partial g_{ijkl}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{ijkl}}{\partial x^m} \right) u^i u^j u^k u^l u^m. \end{aligned} \quad (3.16)$$

После симметризации по индексам в круглой скобке имеем

$$\frac{d}{ds} g_{ijkl} u^i u^j u^k u^l = \left(g_{ijkl} \frac{du^j}{ds} u^i u^k u^l + \Gamma_{i,jklm} u^j u^k u^l u^m \right) u^i. \quad (3.17)$$

В скобках имеем уравнение геодезической и в силу произвольности dx^i/ds окончательно получим равенство нулю выражения (3.17), что дает равенство (3.15).

з) закон преобразования

Из инвариантности $ds = ds'$ получим равенство

$$g_{ijkl} dx^i dx^j dx^k dx^l = g_{i'j'k'l'} dx^{i'} dx^{j'} dx^{k'} dx^{l'}, \quad (3.18)$$

которое при преобразовании координат

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m} dx^m, \quad \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}} = \delta_{j'}^{i'}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^j} = \delta_j^i \quad (3.19)$$

приводит к преобразованию метрического тензора

$$g_{i'j'k'l'} = g_{ijkl} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}. \quad (3.20)$$

Дифференцируя (3.20), находим производную

$$\frac{\partial g_{i'j'k'l'}}{\partial x^{m'}} = \frac{\partial g_{ijkl}}{\partial x^m} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}} + 4g_{ijkl} \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{m'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \right) \quad (3.21)$$

и с учетом (3.7) получим закон преобразования объекта

$$\begin{aligned} \Gamma_{i',j'k'l'm'} = & \Gamma_{ijklm} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}} + \frac{1}{3} \left(g_{iklm} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{m'} \partial x^{j'}} + \right. \\ & + g_{ijlm} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{m'} \partial x^{k'}} + g_{ijkl} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{m'} \partial x^{l'}} + \\ & \left. + g_{ijkl} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{l'} \partial x^{m'}} - g_{ijlm} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{m'} \partial x^{i'}} \right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

из которого следует, что функции (3.7) не являются компонентами 5-и индексного тензора.

4 Поле тяготения в линейном приближении

Рассмотрим метрическую функцию в финслеровом пространстве Бервальда-Моора

$$\begin{aligned} ds = & \left[g_{0000} (dx^0)^4 - 2(dx^0)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) + dx^4 + dy^4 + dz^4 - \right. \\ & \left. - 2(dx^2 dy^2 + dy^2 dx^2 + dz^2 dx^2) + 8dx^0 dx^1 dx^3 dx^4 \right]^{1/4}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

в которой лишь одна величина g_{0000} слабо отличается от единицы. В приближении к классической механике остается слагаемое с $(dx^0)^4$, что приводит функцию (4.1) к виду

$$ds = g_{0000} (dx^0)^4 + dx^4 + dy^4 + dz^4 - 2(dx^2 dy^2 + dy^2 dx^2 + dz^2 dx^2). \quad (4.2)$$

Тогда отличные от нуля значения компонент объекта (3.7) имеют вид

$$\Gamma_{i,0000} = -\frac{1}{12} \frac{\partial g_{0000}}{\partial x^i}. \quad (4.3)$$

Уравнение геодезической (3.9), представленное в виде

$$\frac{d[(\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{v})) - \{\mathbf{v}\{\mathbf{v}\mathbf{v}\}]}{dt} = \frac{c^2}{4} \frac{\partial g_{0000}}{\partial \mathbf{r}}, \quad (4.4)$$

позволяет, с учетом (2.8), получить выражение силы

$$\mathbf{F} = \frac{c^2}{4} \frac{\partial g_{0000}}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}}. \quad (4.5)$$

Из (4.5) вытекает значение рассматриваемой компоненты

$$g_{0000} \approx 1 - \frac{4\phi}{c^2}, \quad \left(0 < \frac{4\phi}{c^2} < 1 \right) \quad (4.6)$$

и после подстановки её в (4.2) имеем

$$ds = \left(1 - \frac{4\phi}{c^2} \right) c^4 dt^4 + dx^4 + dy^4 + dz^4 - 2(dx^2 dy^2 + dy^2 dx^2 + dz^2 dx^2). \quad (4.7)$$

Таким образом, g_{0000} есть гравитационный потенциал, а $\Gamma_{i,0000}$ – напряженность гравитационного поля. Наконец, запишем уравнение для g_{0000}

$$\Delta_4 g_{0000} = -\frac{4}{c^2} \beta \rho. \quad (4.8)$$

В общем случае, когда компоненты g_{ijkl} зависят от времени, уравнения поля имеют нелинейные члены

$$\square_4 g_{ijkl} + \text{“нелинейные члены”} = \frac{4}{c^2} \beta T_{ijkl}, \quad (4.9)$$

нахождение которых требует отдельного рассмотрения. Здесь $T_{ijkl} = \rho c^2 u^i u^j u^k u^l$ есть 4-ёх индексный тензор энергии-импульса и скалярный оператор [7]

$$\begin{aligned} \square_4 &= \frac{\partial^4}{c^4 \partial t^4} - 2 \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \Delta + \frac{4}{3} \frac{\partial}{c \partial t} (\nabla \{ \nabla \nabla \}) + \Delta \Delta - (\{ \nabla \nabla \} \{ \nabla \nabla \}) = \\ &= \frac{\partial^4}{c^4 \partial t^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} - 2 \left(\frac{\partial^4}{c^2 \partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{c^2 \partial t^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{c^2 \partial t^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial x^2} \right) + 8 \frac{\partial^4}{c \partial t \partial x \partial y \partial z} = \prod_m^4 \left[\frac{\partial}{c \partial t} + (\varepsilon^m \nabla) \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

5 Решение уравнений для потенциала

Рассмотрим случай уравнения четвертого порядка с оператором (4.10) для потенциала $\phi = \phi(s)$

$$\square_4 \phi = 0, \quad (5.1)$$

который зависит только от s

$$\begin{aligned} s &= [(ct + x + y + z)(ct - x + y - z)(ct + x - y - z)(ct - x - y + z)]^{1/4} = \\ &= [c^4 t^4 + x^4 + y^4 + z^4 - 2(c^2 t^2 x^2 + c^2 t^2 y^2 + c^2 t^2 z^2 + x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2) + 8ctxyz]^{1/4} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Подставим $\phi(s)$ в (5.1) и получим следующее уравнение

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial s^4} + \frac{6}{s} \frac{\partial^3 \phi}{\partial s^3} + \frac{7}{s^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + \frac{1}{s^3} \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0. \quad (5.3)$$

Решая его, находим явный вид функции

$$\phi = A \ln \frac{s}{s_0}, \quad (5.4)$$

где A и s_0 есть постоянные величины. При $s = s_0$ имеет место равенство $\phi(s_0) = 0$.

Далее перейдем к случаю исходного уравнения

$$\Delta_4 \phi = 0, \quad (5.5)$$

вытекающего из (2.14) с $\rho = 0$. Согласно (5.2), запишем

$$s = [(x + y + z) R^3]^{1/4}, \quad (5.6)$$

где функция R , согласно (1.3), зависит только от трех независимых векторов $\varepsilon^2 = (-1, 1, -1)$, $\varepsilon^3 = (1, -1, -1)$, $\varepsilon^4 = (-1, -1, 1)$ выделенных направлений и имеет вид

$$\begin{aligned} R &= [(-x + y - z)(x - y - z)(-x - y + z)]^{1/3} = \\ &= [x^3 + y^3 + z^3 - (x^2 z + z^2 x) - (y^2 x + x^2 y) - (z^2 y + y^2 z) + 2xyz]^{1/3}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Следовательно, уравнение (5.5) запишется так

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial R^3} + \frac{3}{R} \frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \phi}{\partial R}\right) = 0 \quad (5.8)$$

и его решением является функция

$$\phi = A \ln \frac{R}{B} + C_1 x + C_2 y + C_3 z, \quad (C_1 + C_2 + C_3 = 0), \quad (5.9)$$

где A , C_1 , C_2 , C_3 и B есть постоянные величины. Равенство $\phi(R_0) = 0$ имеет место при $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ и $B = eR_0$. Тогда из (5.9), согласно (4.6), получим следующее выражение для потенциала

$$\frac{4\phi}{c^2} = \ln \frac{eR_0}{R}, \quad (R \geq eR_0). \quad (5.10)$$

Аналогично, имеем выражение

$$s = [(-x + y - z) \xi^3]^{1/4} = [(x - y - z) \eta^3]^{1/4} = [(-x - y + z) \nu^3]^{1/4}, \quad (5.11)$$

где функции ξ , η , ν также зависят только от трех независимых векторов выделенных направлений и имеют вид

$$\begin{aligned} \xi &= [(x + y + z)(x - y - z)(-x - y + z)]^{1/3}, \\ \eta &= [(x + y + z)(-x + y - z)(-x - y + z)]^{1/3}, \\ \nu &= [(x + y + z)(-x + y - z)(x - y - z)]^{1/3}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Таким образом, наряду с (5.8) имеем следующие уравнения

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3} + \frac{3}{\xi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial \eta^3} + \frac{3}{\eta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right) &= 0, \\ \left(-\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial \nu^3} + \frac{3}{\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu^2} + \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

и их решениями являются функции

$$\begin{aligned} \phi_1 &= A_1 \ln \frac{\xi}{B_1} + C_1 x + C_2 y + C_3 z, \quad (-C_1 + C_2 - C_3 = 0), \\ \phi_2 &= A_2 \ln \frac{\eta}{B_2} + C_1 x + C_2 y + C_3 z, \quad (C_1 - C_2 - C_3 = 0), \\ \phi_3 &= A_3 \ln \frac{\nu}{B_3} + C_1 x + C_2 y + C_3 z, \quad (-C_1 - C_2 + C_3 = 0). \end{aligned} \quad (5.14)$$

6 Гравитационное красное смещение

Рассмотрим, согласно (4.7) и решения (5.10), промежуток координатного времени между последовательными импульсами некоторого источника сигналов в некоторой фиксированной точке $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ для R_1

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta s}{\left[1 - \frac{4\phi(R_1)}{c^2}\right]^{1/4}} \quad (6.1)$$

Аналогично в другой точки \mathbf{r}_2 для R_2 имеем

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta s}{\left[1 - \frac{4\phi(R_2)}{c^2}\right]^{1/4}} \quad (6.2)$$

Координатная частота сигналов $\nu_2 = (\Delta t_2)^{-1}$ в точке \mathbf{r}_2 связана с частотой $\nu_1 = (\Delta t_1)^{-1}$ в точке \mathbf{r}_1 приближенным равенством

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt[4]{\frac{1 - \frac{4\phi(R_1)}{c^2}}{1 - \frac{4\phi(R_2)}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{c^2} [\phi(R_2) - \phi(R_1)] \quad (6.3)$$

с точностью до $(1/c^2)$. Из (6.3) получим сдвиг частоты сигналов соответствующих значениям R_2 и R_1

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = \frac{\nu_1}{c^2} [\phi(R_2) - \phi(R_1)] = \frac{\nu_1}{c^2} \ln \frac{R_1}{R_2}. \quad (6.4)$$

Если R_2 есть функция с координатой какого-либо тела вне тяготеющего тела, а R_1 – на теле, то формула (6.4) показывает сдвиг частоты в красную сторону при $R_2 > R_1$ поскольку $\phi(R_2) < \phi(R_1)$. Согласно (5.7), данное гравитационное красное смещение спектральных линий зависит от трех независимых векторов выделенных направлений в собственном трехмерном пространстве.

Аналогично, учитывая (5.14), рассматриваемое смещение также будет зависеть от других трех независимых векторов выделенных направлений. Здесь же выбрано только одно решение, зависящее от функции R . Общее решение уравнения (5.5) есть линейная комбинация четырех решений (5.9) и (5.14).

Заключение

Приближение слабого поля тяготения в финслеровом пространстве событий Бервальда-Моора позволило определить гравитационное красное смещение. Решение уравнения (2.8) представляет собой отдельную задачу, как и вообще рассмотрение движений и траекторий пробных частиц в приближении ньютоновской классической физики. Представляется необходимым найти тензоры, которые в линейном приближении относительно метрического тензора, независимого от времени, приводят к уравнению (4.8) четвертого порядка. Построение такой теории требует специального рассмотрения. Поэтому здесь ограничились лишь вопросом геодезических линий и слабого поля тяготения.

Литература

- [1] Гарасько Г.И. Теория поля и финслеровы пространства // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2006, № 2 (6), т. 3, с. 6–20.
- [2] Гарасько Г.И. Слабые поля // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2007, № 2 (8), т. 4, с. 3–12.
- [3] Павлов Д.Г., Гарасько Г.И. Об аналоге решения Фридмана в финслеровом пространстве-времени с анизотропной метрикой Бервальда-Моора // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2007, № 1 (7), т. 4, с. 52–62.
- [4] Зарипов Р.Г. Физическое время и расстояние в пространстве-времени Бервальда-Моора // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2007, № 2 (8), т. 4, с. 24–40.
- [5] Зарипов Р.Г. Отношение одновременности в финслеровом пространстве-времени // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2006, № 1 (5), т. 3, с. 27–46.

- [6] Зарипов Р.Г. Модель физического поля в собственном трехмерном пространстве для геометрии событий Бервальда-Моора // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2008, № 2 (10), т. 5, с. 124–130.
- [7] Лебедев С.В. Обобщение метрического тензора финслерова пространства // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2005, № 2 (4), с. 44–50.
- [8] Balan V., Brînzei N., Lebedev S. Geodetics, connections and Jacobi fields for Berwald-Moor quartic metrics // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2006, № 2 (6), т. 3, с. 113–122.
- [9] Catoni F., Cannata R., Zampetti P. An introduction to constant curvature spaces in the commutative (Segre) quaternion geometry // *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2006, vol. 16, № 2, pp. 85–101.

REDSHIFT FOR A WEAK GRAVITATIONAL FIELD IN FINSLER SPACE OF EVENTS BERWALD-MOOR

R.G. Zaripov

*Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences,
Kazan, Russia*

zaripov@mail.knc.ru

The weak gravitational field in curved Finsler space of events Berwald-Moor is considered. From the equations of a geodesic line classical equations of motion of a particle in a limiting case for non-Newtonian three-dimensional space in a gravitational field are given. Linear equations for a metric tensor and their solutions are reduced. The problem on redshift is considered.

Key Words: weak gravitational field, geometrical plant, the equation of a geodesic line.

ИССЛЕДОВАНИЕ РОЛИ НЕПРИВОДИМЫХ КОМПОНЕНТ КРУЧЕНИЯ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ВИДЕ ПЛОСКИХ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕ РИМАНА–КАРТАНА

В.Н. Щербань

Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия

vovan-ru1@yandex.ru

Для квадратичных лагранжианов общего вида получены вариационные уравнения гравитационного поля в пространстве Римана–Картана в формализме внешних форм методом неопределенных множителей Лагранжа. Исследована структура неприводимых компонент кручения при распространении в виде плоских волн в пространстве Римана–Картана.

Ключевые слова: внутренняя связность, продолженная связность, почти контактное кэлерово пространство, субфинслерово пространство с метрикой Бервальда-Моора нулевой кривизны.

1 Введение

Значительный интерес представляет собой изучение точных решений уравнений поля в пространствах, наделенных более сложной структурой, чем риманово пространство ОТО. Особое место здесь занимает поиск волновых решений, что обладает как теоретическим, так и возможным практическим значением [1-6]. Так, в [1] изучались гравитационные волны в пространстве с отличным от нуля кручением в теории с лагранжианом специального вида, состоящим из линейного лагранжиана теории Эйнштейна-Картана, одного из шести возможных квадратов тензора кривизны и всех возможных квадратов тензора, кручения. В [2] волны кручения исследовались на фоне плоского пространства в теории с квадратичным по кривизне лагранжианом. В [3] авторы рассматривали плоские волны в теории с квадратичным по кручению и кривизне лагранжианом без линейной части. Работа [4] была посвящена исследованию волн кручения для 2-формы кручения алгебраически специального N-типа. В [5] исследована структура плоских волн бесследовой части кручения, а в работе [6] кратко приведены результаты по исследованию свойств плоских волн также следа и псевдоследа кручения.

Целью данной работы является исследование структуры неприводимых компонент кручения при распространении в виде плоских волн в пространстве Римана–Картана.

Построение современной пуанкаре-калибровочной теории гравитации основано на существенном использовании нелинейных по кривизне и кручению лагранжианов [7-13]. Использование квадратичных лагранжианов в теории гравитационного поля стимулируется также построением перенормируемой теории гравитации в пространстве Римана–Картана. Большинство квадратичных теорий гравитации в пространстве Римана–Картана могут быть описаны как частные случаи общего 10-параметрического лагранжиана, введенного в [7, 8] в виде суммы линейного лагранжиана теории Эйнштейна–Картана и квадратов неприводимых частей тензоров кривизны и кручения.

На современном этапе теория гравитации описывается на языке внешних дифференциальных форм Картана. Мы будем использовать вариационный формализм на языке внешних форм, основанный на лемме, сформулированной и доказанной в [5], о коммутации операторов варьирования и дуализации Ходжа.

В пространстве Римана–Картана получение уравнений гравитационного поля может быть осуществлено несколькими методами. Данные уравнения могут быть получены как

частный случай уравнений поля в общем аффинно-метрическом пространстве при наложении условия метричности (согласованности метрики и связности) после варьирования и получения уравнений поля. Другой метод состоит в получении этих уравнений при наложении условия метричности до вариационной процедуры с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа. Наконец, третий метод состоит в явном разрешении условий метричности и построении лагранжиана гравитационного поля непосредственно в пространстве Римана–Картана. Одной из целей данной работы является обоснование эквивалентности последних двух методов варьирования и неэквивалентности этих методов первому методу.

2 Уравнения гравитационного поля в пространстве Римана–Картана в формализме внешних форм

Под общим аффинно-метрическим пространством (L_4, g) будем понимать связное четырехмерное ориентированное дифференцируемое многообразие \mathcal{M} , наделенное метрическим тензором \check{g} индекса 3, 4-формой объема η , 1-формой линейной связности Γ^a_b , не согласованной с метрикой, 2-формой кривизны \mathcal{R}^a_b , 2-формой кручения \mathcal{T}^a и 1-формой неметричности \mathcal{Q}_{ab} .

2-форма кручения и 2-форма кривизны задаются на основе первого и второго структурных уравнений Картана:

$$\mathcal{T}^a = \frac{1}{2} \mathcal{T}^a_{bc} \theta^b \wedge \theta^c = D\theta^a = d\theta^a + \Gamma^a_b \wedge \theta^b, \quad (1)$$

$$\mathcal{R}^a_b = \frac{1}{2} R^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d = d\Gamma^a_b + \Gamma^a_c \wedge \Gamma^c_b. \quad (2)$$

Здесь θ^a ($a = 0, 1, 2, 3$) – кобазис 1-форм пространства (L_4, g) , \wedge – оператор внешнего умножения, D – обобщенный внешний ковариантный дифференциал: $D = d + \Gamma \wedge \dots$ (d – оператор внешнего дифференцирования). Будем использовать локальный неголономный векторный базис \mathbf{e}_b ($b = 0, 1, 2, 3$), причем $\mathbf{e}_b \rfloor \theta^a = \delta^a_b$, \rfloor – операция внутреннего произведения (свертка) и $g_{ab} = \check{g}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Мерой несогласованности метрики и связности является отличие от нуля 1-формы

$$\mathcal{Q}_{ab} = -Dg_{ab} = -(dg_{ab} - \Gamma^c_a g_{cb} - \Gamma^c_b g_{ac}) = 2\Gamma_{(ab)}. \quad (3)$$

Пространство Римана–Картана RC_4 представляет собой частный случай общего аффинно-метрического пространства при равной нулю 1-форме неметричности \mathcal{Q}_{ab} . В этом случае равное нулю выражение (3) будет представлять собой связь, налагаемую на 1-форму связности Γ^a_b , разрешение которой приводит к условию $\Gamma_{ab} = -\Gamma_{ba}$.

Удобно использовать вспомогательные поля: 3-формы η_a , 2-формы η_{ab} , 1-формы η_{abc} и 0-формы η_{abcd} , определенные следующим образом [10]:

$$\begin{aligned} \eta_a &= \mathbf{e}_a \rfloor \eta = * \theta_a, & \eta_{ab} &= \mathbf{e}_b \rfloor \eta_a = *(\theta_a \wedge \theta_b), \\ \eta_{abc} &= \mathbf{e}_c \rfloor \eta_{ab} = *(\theta_a \wedge \theta_b \wedge \theta_c), \\ \eta_{abcd} &= \mathbf{e}_d \rfloor \eta_{abc} = *(\theta_a \wedge \theta_b \wedge \theta_c \wedge \theta_d), \\ \theta^a \wedge \eta_b &= \delta^a_b \eta, & \theta^a \wedge \eta_{bc} &= -2\delta^a_{[b} \eta_{c]}, \\ \theta^d \wedge \eta_{abc} &= 3\delta^d_{[a} \eta_{bc]}, & \theta^f \wedge \eta_{abcd} &= -4\delta^f_{[a} \eta_{bcd]}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $*$ – оператор дуального сопряжения Ходжа.

В пространстве (L_4, g) 2-форма кривизны, 2-форма кручения и 1-форма неметричности могут быть разбиты на части, являющиеся неприводимыми представлениями группы псевдоортогональных преобразований четырехмерного пространства-времени:

$$\mathcal{R}_{ab} = \sum_{i=1}^6 \mathcal{R}_{[ab]}^{(i)} + \sum_{i=1}^5 \mathcal{R}_{(ab)}^{(i)}, \quad \mathcal{T}^a = \sum_{i=1}^3 \mathcal{T}^a{}^{(i)}, \quad \mathcal{Q}_{ab} = \sum_{i=1}^4 \mathcal{Q}_{ab}^{(i)}. \quad (5)$$

Конкретный вид указанного разложения, а также частный случай свойств этих разложений в пространстве Римана–Картана RC_4 может быть найден в обзоре [10]. Неприводимые части ортогональны относительно скалярного произведения $*(\mathcal{A}_{a_1 \dots a_r} \wedge *\mathcal{B}^{a_1 \dots a_r})$.

В дальнейшем будет использовано разложение 2-формы кручения на неприводимые части (1-форму бесследовой части $\mathcal{T}^a{}^{(1)}$, 1-форму следа $\mathcal{T}^a{}^{(2)}$ и 1-форму псевдоследа $\mathcal{T}^a{}^{(3)}$):

$$\mathcal{T}^a{}^{(1)} = \mathcal{T}^a - \mathcal{T}^a{}^{(2)} - \mathcal{T}^a{}^{(3)}, \quad \mathcal{T}^a{}^{(2)} = \frac{1}{3} \theta^a \wedge (\mathbf{e}_b \lrcorner \mathcal{T}^b), \quad \mathcal{T}^a{}^{(3)} = \frac{1}{3} * (\theta^a \wedge *(\mathcal{T}^b \wedge \theta_b)). \quad (6)$$

При этом неприводимые слагаемые кручения обладают свойствами:

$$\mathcal{T}^a{}^{(1)} \wedge \theta_a = 0, \quad \mathcal{T}^a{}^{(2)} \wedge \theta_a = 0, \quad \mathbf{e}_a \lrcorner \mathcal{T}^a{}^{(1)} = 0, \quad \mathbf{e}_a \lrcorner \mathcal{T}^a{}^{(3)} = 0. \quad (7)$$

В качестве лагранжевой плотности теории выберем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & f_0 \mathcal{R}^a{}_b \wedge \eta^b{}_a + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \mathcal{R}^{ab} \wedge *\mathcal{R}_{[ab]}^{(i)} + \sum_{i=1}^3 \chi_i \mathcal{T}^a \wedge *\mathcal{T}^a{}^{(i)} + \mathcal{Q}_{ab} \wedge \Lambda^{ab} + \\ & + \sum_{i=1}^5 \kappa_i \mathcal{R}^{ab} \wedge *\mathcal{R}_{(ab)}^{(i)} + \sum_{i=1}^4 \xi_i \mathcal{Q}^{ab} \wedge *\mathcal{Q}_{ab}^{(i)} + \sum_{i=1}^3 \zeta_i \mathcal{Q}_{ab} \wedge \theta^{(a} \wedge *\mathcal{T}^{b)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $f_0 = 1/(2\kappa)$ ($\kappa = 8\pi G/c^4$), $\lambda_i, \kappa_i, \chi_i, \xi_i, \zeta_i$ – константы связи, а (i) – индекс, перечисляющий неприводимые компоненты кривизны, кручения и неметричности.

Данное выражение представляет собой сумму общей квадратичной лагранжевой плотности в пространстве (L_4, g) (линейной лагранжевой плотности, пропорциональной скаляру кривизны, квадратов всех неприводимых частей кривизны, кручения и неметричности) и слагаемого с неопределенным множителем Лагранжа Λ^{ab} .

Для получения уравнений гравитационного поля в пространстве Римана–Картана RC_4 в вакууме проведем при помощи вариационного формализма первого порядка независимое варьирование лагранжевой плотности (8) по базисным формам θ^a , 1-форме связности $\Gamma^a{}_b$ пространства (L_4, g) и 3-форме множителя Лагранжа Λ^{ab} . Метод варьирования в формализме внешних форм основан на использовании леммы о коммутации операторов варьирования и дуального сопряжения Ходжа [5].

В результате варьирования плотности (8) по Λ^{ab} получим условие метричности

$$\mathcal{Q}_{ab} = 0. \quad (9)$$

Данное условие приводит к следующим свойствам связности и кривизны в RC_4 :

$$\Gamma_{ab} = -\Gamma_{ba}, \quad \mathcal{R}_{ab} = \mathcal{R}_{[ab]}. \quad (10)$$

Как следствие свойств (9) и (10) результат варьирования последних трех слагаемых лагранжевой плотности (8) обнулится за исключением выражений вида

$$\delta \mathcal{Q}_{ab} \wedge (\Lambda^{ab} + \zeta_i \theta^{(a} \wedge *\mathcal{T}^{b)}) = \delta \Gamma^a{}_b \wedge (\Lambda_a{}^b + 2\zeta_i \theta_{(a} \wedge *\mathcal{T}^{b)}), \quad (11)$$

которое дает вклад в Γ -уравнение, исчезающий после антисимметризации по a, b .

Используя выражения для неприводимых частей кривизны и кручения, первые три слагаемых плотности (8) преобразуем к виду, более удобному для варьирования:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_P = & f_0 \mathcal{R}^a_b \wedge \eta^b_a + \tau_1 \mathcal{R}^a_b \wedge * \mathcal{R}^b_a + \tau_2 (\mathcal{R}^{ab} \wedge \theta_a) \wedge * (\mathcal{R}^{cb} \wedge \theta_c) + \\ & + \tau_3 (\mathcal{R}^{ab} \wedge \theta_c) \wedge * (\mathcal{R}^c_b \wedge \theta_a) + \tau_4 (\mathcal{R}^a_b \wedge \theta_a \wedge \theta^b) \wedge * (\mathcal{R}^c_d \wedge \theta_c \wedge \theta^d) + \\ & + \tau_5 (\mathcal{R}^a_b \wedge \theta_a \wedge \theta^d) \wedge * (\mathcal{R}^c_d \wedge \theta_c \wedge \theta^b) + \\ & + \tau_6 (\mathcal{R}^a_b \wedge \theta_c \wedge \theta^d) \wedge * (\mathcal{R}^c_d \wedge \theta_a \wedge \theta^b) + \\ & + \varrho_1 \mathcal{T}^a \wedge * \mathcal{T}_a + \varrho_2 (\mathcal{T}^a \wedge \theta_a) \wedge * (\mathcal{T}^b \wedge \theta_b) + \varrho_3 (\mathcal{T}^a \wedge \theta_b) \wedge * (\mathcal{T}^b \wedge \theta_a). \end{aligned} \quad (12)$$

Данная часть лагранжевой плотности сохраняет свой вид (при учете (10)) также в пространстве Римана–Картана RC_4 и представляет собой лагранжеву плотности пуанкаре калибровочной теории гравитации [7-13].

Константы связи лагранжевых плотностей (12) и (8) связаны линейными соотношениями [11], из которых в дальнейшем будут использованы следующие:

$$\varrho_1 = \frac{1}{3}(2\chi_1 + \chi_2), \quad \varrho_2 = \frac{1}{3}(-\chi_1 + \chi_3), \quad \varrho_3 = \frac{1}{3}(\chi_1 - \chi_2). \quad (13)$$

Уравнение, полученное путем варьирования по связности Γ^a_b (Γ -уравнение), после учета свойств (9) и (10) и антисимметризации по a, b будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & f_0 D \eta^b_a + 2\tau_1 D * \mathcal{R}^b_a + \tau_2 D (\theta_a \wedge * (\mathcal{R}^{cb} \wedge \theta_c) - \theta^b \wedge * (\mathcal{R}^c_a \wedge \theta_c)) + \\ & + \tau_3 D (\theta^c \wedge * (\mathcal{R}^b_c \wedge \theta_a) - \theta^c \wedge * (\mathcal{R}_{ca} \wedge \theta^b)) + \\ & + 2\tau_4 D (\theta_a \wedge \theta^b \wedge * (\mathcal{R}^{cd} \wedge \theta_c \wedge \theta_d)) + \\ & + \tau_5 D (\theta_a \wedge \theta^d \wedge * (\mathcal{R}^c_d \wedge \theta_c \wedge \theta^b) - \theta^b \wedge \theta^d \wedge * (\mathcal{R}^c_d \wedge \theta_c \wedge \theta_a)) + \\ & + 2\tau_6 D (\theta_c \wedge \theta^d \wedge * (\mathcal{R}^c_d \wedge \theta_a \wedge \theta^b)) + \\ & + \varrho_1 (\theta^b \wedge * \mathcal{T}_a - \theta_a \wedge * \mathcal{T}^b) + 2\varrho_2 \theta^b \wedge \theta_a \wedge * (\mathcal{T}^c \wedge \theta_c) + \\ & + \varrho_3 (\theta^b \wedge \theta^c \wedge * (\mathcal{T}_c \wedge \theta_a) - \theta_a \wedge \theta^c \wedge * (\mathcal{T}_c \wedge \theta^b)) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом симметризация по a, b не приводит к новому уравнению, а позволяет определить 1-форму лагранжевого множителя Λ^b_a .

После варьирования по базисным формам θ^a и учета (9) и (10) получим уравнение

$$\begin{aligned} & f_0 \mathcal{R}^{bc} \wedge \eta_{abc} + \tau_1 (\mathcal{R}^n_b \wedge * (\mathcal{R}^b_n \wedge \theta_a) + * (* \mathcal{R}^b_n \wedge \theta_a) \wedge * \mathcal{R}^n_b) + \\ & + \tau_2 (2\mathcal{R}_{an} \wedge * (\mathcal{R}^{mn} \wedge \theta_m) - (\mathcal{R}^{rb} \wedge \theta_r) \wedge * (\mathcal{R}^m_b \wedge \theta_m \wedge \theta_a)) - \\ & - \tau_2 (* (* (\mathcal{R}^{mn} \wedge \theta_m) \wedge \theta_a) \wedge * (\mathcal{R}^{rb} \wedge \theta_r)) + \\ & + \tau_3 (-2\mathcal{R}^t_n \wedge * (\mathcal{R}^n_a \wedge \theta_t) - (\mathcal{R}^b_l \wedge \theta_m) \wedge * (\mathcal{R}^m_b \wedge \theta^l \wedge \theta_a)) - \\ & - \tau_3 (* (* (\mathcal{R}^m_b \wedge \theta^l) \wedge \theta_a) \wedge * (\mathcal{R}^b_l \wedge \theta_m)) + \\ & + \tau_4 (4\mathcal{R}_{ab} \wedge \theta^b \wedge * (\mathcal{R}^{ln} \wedge \theta_l \wedge \theta_n) + * (* (\mathcal{R}^l_n \wedge \theta_l \wedge \theta^n) \wedge \theta_a) \wedge * (\mathcal{R}^t_b \wedge \theta_t \wedge \theta^b)) + \\ & + \tau_5 (4\mathcal{R}_{[a|b|} \wedge \theta^l \wedge * (\mathcal{R}^n_l \wedge \theta_n \wedge \theta^b) + * (* (\mathcal{R}^n_l \wedge \theta_n \wedge \theta^b) \wedge \theta_a) \wedge * (\mathcal{R}^t_b \wedge \theta_t \wedge \theta^l)) + \\ & + \tau_6 (4\mathcal{R}^n_b \wedge \theta^l \wedge * (\mathcal{R}_{al} \wedge \theta_n \wedge \theta^b) + * (* (\mathcal{R}^l_n \wedge \theta^t \wedge \theta^b) \wedge \theta_a) \wedge * (\mathcal{R}_{tb} \wedge \theta_t \wedge \theta^n)) + \\ & + \varrho_1 (2D * \mathcal{T}_a + \mathcal{T}_n \wedge * (\mathcal{T}^n \wedge \theta_a) + * (* \mathcal{T}^n \wedge \theta_a) \wedge * \mathcal{T}_n) + \\ & + \varrho_2 (4D \mathcal{T}_a \wedge * (\mathcal{T}^b \wedge \theta_b) - 2\theta_a \wedge D * (\mathcal{T}^b \wedge \theta_b) - (\mathcal{T}^l \wedge \theta_l) \wedge * (\mathcal{T}^b \wedge \theta_b \wedge \theta_a)) - \\ & - \varrho_2 (* (* (\mathcal{T}^b \wedge \theta_b) \wedge \theta_a) \wedge * (\mathcal{T}^l \wedge \theta_l)) + \\ & + \varrho_3 (2\mathcal{T}^b \wedge * (\mathcal{T}_a \wedge \theta_b) + 2D (\theta^b \wedge * (\mathcal{T}_b \wedge \theta_a)) - (\mathcal{T}_l \wedge \theta_n) \wedge * (\mathcal{T}^n \wedge \theta^l \wedge \theta_a)) - \\ & - \varrho_3 (* (* (\mathcal{T}^n \wedge \theta^l) \wedge \theta_a) \wedge * (\mathcal{T}_l \wedge \theta_n)) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения поля (14), (15) совпадают с вариационными уравнениями, полученными в работах [5, 6], в которых лагранжева плотность строилась непосредственно в пространстве RC_4 . Это обосновывает эквивалентность указанных во введении второго и третьего методов варьирования при получении уравнений гравитационного поля в пространстве RC_4 . Неэквивалентность этих методов первому методу очевидна, так как в этом случае ввиду отсутствия Λ_a^b симметризация приводит к дополнительному уравнению поля. Заметим также, что уравнения (14), (15) представляют собой частный случай уравнений поля конформной теории гравитации в пространстве Картана–Вейля, развитой в [14–18], если в них приравнять нулю след 1-формы неметричности \mathcal{Q} , для скалярного поля Дезера–Дирака положить $\beta = 1$ и произвести замену $\varrho_2 \longleftrightarrow \varrho_3$.

Связность в пространстве RC_4 может быть разложена на риманову часть и конторсию, линейно зависящую от тензора кручения [10]:

$$\overset{C}{\Gamma}_b^a = \overset{R}{\Gamma}_b^a + \mathcal{K}_b^a, \quad \mathcal{T}^a = \mathcal{K}_b^a \wedge \theta^b, \quad (16)$$

$$\mathcal{K}_{ab} = 2\mathbf{e}_{[a} \mathcal{T}_{b]} - \frac{1}{2}\mathbf{e}_a \mathbf{e}_b (\mathcal{T}_c \wedge \theta^c), \quad (17)$$

где $\overset{R}{\Gamma}_b^a$ есть 1-форма связности Римана и \mathcal{K}_b^a представляет собой 1-форму конторсии.

Разложение связности (16) индуцирует разложение кривизны:

$$\overset{C}{\mathcal{R}}_b^a = \overset{R}{\mathcal{R}}_b^a + \overset{R}{D} \mathcal{K}_b^a + \mathcal{K}_c^a \wedge \mathcal{K}_b^c, \quad (18)$$

где $\overset{R}{\mathcal{R}}_b^a$ – 2-форма кривизны Римана и $\overset{R}{D}$ есть внешний ковариантный дифференциал относительно 1-формы связности Римана $\overset{R}{\Gamma}_b^a$.

Для скаляра кривизны имеем разложение:

$$\mathcal{R}_b^a \wedge \eta_a^b = \overset{R}{\mathcal{R}}_b^a \wedge \eta_a^b - \overset{R}{D} \left(* \overset{(2)}{\mathcal{T}}_a \wedge \theta_a \right) + \overset{(1)}{\mathcal{T}}^a \wedge * \overset{(1)}{\mathcal{T}}_a - 2 \overset{(2)}{\mathcal{T}}^a \wedge * \overset{(2)}{\mathcal{T}}_a - \frac{1}{2} \overset{(3)}{\mathcal{T}}^a \wedge * \overset{(3)}{\mathcal{T}}_a. \quad (19)$$

3 Плоские волны кручения в пространстве Римана–Картана

Нас будут интересовать те ограничения на гравитационный лагранжиан (8), к которым может привести существование плоских волн кручения, так как общий гравитационный лагранжиан (12) в пространстве Римана–Картана содержит девять произвольных параметров, и важной задачей теории гравитации с квадратичными лагранжианами является нахождение критериев уменьшения числа свободных параметров.

В соответствии с работой [1] введем координатный базис, образованный двумя нулевыми векторами $\mathbf{e}_0 = \partial_v$, $\mathbf{e}_1 = \partial_u$ и двумя пространственно подобными векторами $\mathbf{e}_2 = \partial_x$, $\mathbf{e}_3 = \partial_y$. Вектор \mathbf{e}_0 выбирается ковариантно постоянным и направленным вдоль волнового луча, причем волновая поверхность $(u, v) = const$ параметризована координатами x и y .

Плоская волна метрики имеет вид

$$\check{g} = 2H(x, y, u)du^2 + 2dudv - dx^2 - dy^2, \quad (20)$$

и представляет собой частный случай метрики плоскофронтных гравитационных волн с параллельными лучами (pp-волн) [1, 4], где координата u имеет смысл запаздывающего времени и интерпретируется как фаза волны.

Если образовать кобазис в касательном пространстве из 1-форм

$$\theta^0 = H(x, y, u)du + dv, \quad \theta^1 = du, \quad \theta^2 = dx, \quad \theta^3 = dy, \quad (21)$$

то метрике (20) будет соответствовать метрический тензор

$$\check{g} = g_{ab}\theta^a \otimes \theta^b, \quad g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Риманово пространство R_4 с метрикой плоской волны допускает группу симметрий G_5 , порождаемую векторными полям X со структурой [1]:

$$X = (a + b'x + c'y)\partial_v + b\partial_x + c\partial_y, \tag{22}$$

где $a = const$, а $b(u)$, $c(u)$ – произвольные функции и b' c' – их производные.

Группа движений G_5 оставляет неизменной изотропную гиперповерхность в R_4 , описывающую фронт волны с постоянной амплитудой [1]. Как pp-волны, плоские волны метрики обладают нулевыми сдвигом, вращением и растяжением.

Определение [5]. Назовем пространство Римана–Картана RC_4 пространством RC_4 типа плоской волны, а его метрику и кручение – плоскими волнами метрики и кручения, если метрика g_{ab} и 2-форма кручения \mathcal{T}^a этого пространства допускают группу симметрий G_5 , что означает выполнение условий: $L_X g_{ab} = 0$, $L_X \mathcal{T}^a = 0$, где L_X – производная Ли вдоль векторного поля X , порождающего группу симметрий G_5 .

Доказана следующая теорема [6].

Теорема 1. *2-форма кручения пространства RC_4 типа плоской волны имеет следующую структуру: бесследовая часть зависит от двух произвольных функций $t_1(u)$ и $t_2(u)$ запаздывающего аргумента u , а след и псевдослед зависят каждый от одной произвольной функции от u , соответственно, $t_3(u)$ и $t_4(u)$:*

$$\overset{(1)}{\mathcal{T}^0} = t_1(u)\theta^1 \wedge \theta^2 + t_2(u)\theta^1 \wedge \theta^3, \tag{23}$$

$$\overset{(2)}{\mathcal{T}^0} = t_3(u)\theta^0 \wedge \theta^1, \quad \overset{(2)}{\mathcal{T}^2} = -t_3(u)\theta^1 \wedge \theta^2, \quad \overset{(2)}{\mathcal{T}^3} = -t_3(u)\theta^1 \wedge \theta^3, \tag{24}$$

$$\overset{(3)}{\mathcal{T}^0} = t_4(u)\theta^2 \wedge \theta^3, \quad \overset{(3)}{\mathcal{T}^2} = t_4(u)\theta^1 \wedge \theta^3, \quad \overset{(3)}{\mathcal{T}^3} = -t_4(u)\theta^1 \wedge \theta^2. \tag{25}$$

Для доказательства подставим векторное поле (22) в уравнение $L_X \mathcal{T}^a = 0$. В результате приходим к системе уравнений, следствием которой ввиду произвольности функций b , c , b' и c' будет равенство нулю всех компонент кручения за исключением тех, которые выражены формулами (23)–(25) через четыре произвольных функций от u .

Данная теорема обобщает результат работы [5], в которой плоские волны кручения зависели только от двух произвольных функций, определяющих его бесследовую часть. В [1], а затем в [5] из аналогии с плоскими электромагнитными волнами было введено дополнительное условие $\Gamma_b^a = \Gamma_{b1}^a \theta^1$. Следствием данного условия было то, что свойством плоских волн кручения могла обладать только бесследовая компонента кручения (23), содержащая две произвольные функции. После того, как в [6] в соответствии с [2] это условие уже не налагалось, свойством плоских волн стали обладать также след (24) и псевдослед (25) кручения.

Рассмотрим теперь вариационные уравнения гравитационного поля (14), (15) в пространстве Римана–Картана RC_4 . Данные уравнения с помощью разложений (16)–(19) могут быть разбиты на слагаемые, относящиеся к пространству Римана R_4 и на дополнительные слагаемые, определяемые компонентами кручения вида (23)–(25). При этом ненулевые компоненты кривизны и тензор Риччи пространства Римана оказываются равными

(остальные компоненты равны нулю, $R_{ab} = R_{acb}^c$)

$$\overset{R}{\mathcal{R}}_2^0 = \overset{R}{\mathcal{R}}_1^2 = H_{xx}\theta^2 \wedge \theta^1 + H_{xy}\theta^3 \wedge \theta^1, \quad (26)$$

$$\overset{R}{\mathcal{R}}_3^0 = \overset{R}{\mathcal{R}}_1^3 = H_{xy}\theta^2 \wedge \theta^1 + H_{yy}\theta^3 \wedge \theta^1, \quad (27)$$

$$\overset{R}{R}_{11} = H_{xx} + H_{yy}, \quad (28)$$

где H_{xx} , H_{xy} и H_{yy} – вторые частные производные от функции $H(u, x, y)$ по соответствующим координатам. Вычисляя для компонент кручения (23)–(25) конторсию на основе представления (17)), находим для компонент кривизны в пространстве RC_4 :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2^0 = \mathcal{R}_1^2 = & (H_{xx} - \partial_u t_3 + (t_3)^2 - (1/4)(t_4)^2)\theta^2 \wedge \theta^1 + \\ & + (H_{xy} + (1/2)\partial_u t_4 - t_3 t_4)\theta^3 \wedge \theta^1, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_3^0 = \mathcal{R}_1^3 = & (H_{xy} - (1/2)\partial_u t_4 + t_3 t_4)\theta^2 \wedge \theta^1 + \\ & + (H_{yy} - \partial_u t_3 + (t_3)^2 - (1/4)(t_4)^2)\theta^3 \wedge \theta^1. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя эти выражения в θ -уравнение поля (15), найдем, что единственной ненулевой компонентой этого уравнения будет u -компонента, имеющая вид

$$\begin{aligned} & (-2f_0(H_{xx} + H_{yy}) + 2\partial_u t_3(u)(f_0 - \rho_1 + 2\rho_2) - 2(t_3(u))^2(f_0 - \rho_1 + 2\rho_2) + \\ & + (1/2)(t_4(u))^2(f_0 - 4\rho_1 - 4\rho_2 + 12\rho_3))du \wedge dx \wedge dy = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

При этом все квадратичные по кривизне слагаемые оказываются равными нулю.

В силу произвольности функций $t_3(u)$, $\partial_u t_3(u)$, $t_4(u)$ из уравнения (31) следует равенство нулю следующих величин:

$$f_0 - \rho_1 + 2\rho_2 = 0, \quad f_0 - 4\rho_1 - 4\rho_2 + 12\rho_3 = 0, \quad f_0(H_{xx} + H_{yy}) = 0. \quad (32)$$

Принимая во внимание связь констант (13), найдем, что первые два равенства (32) означают справедливость соотношений

$$2f_0 - \chi_2 = 0, \quad f_0 - 2\chi_3 = 0, \quad (33)$$

а на основании (28) из последнего равенства (32) вытекает равенство

$$f_0 \overset{R}{R}_{ab} = 0. \quad (34)$$

Обратимся теперь к Γ -уравнению (14) и подставим в него выражения (29), (30). Выпишем одну из ненулевых компонент этого уравнения, например, (u, x) -компоненту:

$$\begin{aligned} & -t_4(u)(f_0 - 2\rho_1 - 6\rho_2 - 2\rho_3)dv \wedge du \wedge dx - t_3(u)(2f_0 - \rho_1 + 2\rho_3)dv \wedge du \wedge dy + \\ & + (2f_0(\tau_1 - \tau_3)(H_{xyy} + H_{xxx}) - t_1(u)(f_0 + \rho_1 + \rho_3))du \wedge dx \wedge dy = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Первое слагаемое во второй строке этого уравнения обращается в нуль как следствие последнего равенства в (32). Из второго слагаемого во второй строке этого уравнения вследствие произвольности функции $t_1(u)$ вытекает равенство

$$f_0 + \rho_1 + \rho_3 = 0. \quad (36)$$

Дальнейшие вычисления показывают, что в уравнении (14) слагаемые с коэффициентами τ_2 , τ_4 , τ_5 и τ_6 тождественно равны нулю, а слагаемые с коэффициентом τ_1 равны

$$\begin{aligned} 2\tau_1 D * \overset{R}{\mathcal{R}}_2^0 &= 2\tau_1 D * \overset{R}{\mathcal{R}}_1^2 = 2\tau_1 (H_{xxx} + H_{xyy})\eta^1 = 0, \\ 2\tau_1 D * \overset{R}{\mathcal{R}}_3^0 &= 2\tau_1 D * \overset{R}{\mathcal{R}}_1^3 = 2\tau_1 (H_{xxy} + H_{yyy})\eta^1 = 0. \end{aligned}$$

Здесь равенство нулю является следствием последнего из равенств (32). Слагаемые с коэффициентом τ_3 также определяются равными нулю выражениями $(H_{xxx} + H_{xyy})$ и $(H_{xxy} + H_{yyx})$. Остальные слагаемые уравнения (14) также оказываются равными нулю вследствие равенств (32) и (36). Наконец, в силу соотношений (13) равенство (36) эквивалентно равенству

$$f_0 + \chi_1 = 0. \quad (37)$$

Полученные результаты могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пространство Римана–Картана RC_4 типа плоской волны с четырьмя произвольными функциями является решением вариационных уравнений гравитационного поля в этом пространстве тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия для гравитационного лагранжиана (8):*

$$a) \quad f_0 \overset{R}{R}_{ab} = 0, \quad (38)$$

$$b) \quad f_0 + \chi_1 = 0, \quad 2f_0 - \chi_2 = 0, \quad f_0 - 2\chi_3 = 0. \quad (39)$$

Данная теорема имеет важное следствие.

Следствие. *В пространстве Римана–Картана RC_4 плоские волны неприводимых компонент кручения (бесследовой компоненты, следа и псевдоследа) могут переносить информацию, распространяющуюся со скоростью света.*

Первая часть этого утверждения обосновывается тем, что решение для плоских волн неприводимых компонент кручения содержит произвольные функции, что характерно для асимптотического поведения волн в волновой зоне (две произвольных функции для бесследовой компоненты и по одной для следа и псевдоследа). Это позволяет производить амплитудную модуляцию плоской волны, что означает согласно А. Траутману [19] возможность для этого типа волн переносить информацию.

Вторая часть утверждения указанного следствия вытекает из того, что массы покоя квантов неприводимых компонент поля кручения типа плоской волны равны нулю. Для обоснования этого в исходную лагранжеву плотность (8) подставим (с учетом (9) и (10)) разложение (19) и убедимся, что вследствие соотношений (39) все слагаемые с квадратами неприводимых компонент кручения в (8) оказываются равными нулю, что означает безмассовость квантов соответствующих компонент поля кручения.

Установленные в теореме условия (39) на константы гравитационного лагранжиана оказываются важным еще в связи с тем, что при этих условиях сферически симметричное решение для кручения, порождаемого островной системой материи, имеет асимптотику $1/r$ [20]. Такая асимптотика необходима для правильного истолкования закона сохранения энергии-импульса гравитационного поля в пространстве Римана–Картана [11]. Найденные условия на константы лагранжиана важны также с квантовой точки зрения как одно из возможных условий отсутствия в теории духов и тахионов.

Благодарности

Автор благодарит Б.Н. Фролова за активную помощь и поддержку при написании работы и В.В. Житникова за предоставление возможности использовать разработанную им программу символьных вычислений на компьютере GRG [21].

Литература

- [1] Adamovich W. Plane waves in gauge theories of gravitation // *Gen. Rel. Grav.*, 1980, V. 12, pp. 677–691.
- [2] Sipper R, Goenner H. Symmetry classes of pp-waves // *Gen. Relat. Grav.*, 1986, V. 18, pp. 1229–1243.
- [3] Jorgia S., Griffiths J. B. // *Gen. Rel. Grav.*, 1980, V. 12, pp. 597–617.
- [4] Zhytnikov V.V. Wavelike exact solutions of $R + R^2 + Q^2$ gravity // *J. Math. Phys.*, 1994, V. 35, pp. 6001–6017.
- [5] Babourova O.V., Frolov B.N., Klimova E.A. Plane torsion waves in quadratic gravitational theories in Riemann-Cartan space // *Class. Quantum Grav.*, 1999, V. 16, pp. 1149–1162.
- [6] Бабурова О.В., Фролов Б.Н., Щербань В.Н. Плоские волны кручения в пуанкаре калибровочной теории гравитации // *Известия высших учебных заведений. Физика.*, 2012, Т. 55, № 6, с. 114–116.
- [7] Frolov B.N. // *Вестник Моск. ун-та, сер. физ., астрон.*, 1963, № 6, с. 48–58.
- [8] Hayashi K. Gauge Theories of Massive and Massless Tensor Fields // *Prog. Theor. Phys.*, 1968, V. 39, pp. 494–515.
- [9] Frolov B.N. Tetrad Palatini formalism and quadratic Lagrangians in the gravitational field theory // *Acta Phys. Polon.*, 1978, V. B9, pp. 823–829.
- [10] Hehl F.W., McCrea J.D., Mielke E.W., Neeman Y. Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance // *Phys. Rep.*, 1995, V. 258, pp. 1–171.
- [11] Фролов Б.Н. Пуанкаре калибровочная теория гравитации. М.: МПГУ, Прометей, 2003, 160 с.
- [12] Frolov B.N. On Foundations of Poincare-Gauge Theory of Gravity // *Grav. Cosmol. (Гравитация и космология)*, 2004, V. 6, N. 4(24), pp. 116–120.
- [13] Obukhov Yu.N. Poincaré gauge gravity: selected topics // *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 2006, V. 3, pp. 95–138 (gr-qc/0601090v1).
- [14] Babourova O.V., Frolov B.N., Kostkin R.S. Dirac’s scalar field as dark energy with the frameworks of conformal theory of gravitation in Weyl–Cartan space. ArXiv: 1006.4761[gr-qc], 2010.
- [15] Babourova O.V., Frolov B.N. Dark energy, Dirac’s scalar field and the cosmological constant problem. ArXiv: 1112.4449 [gr-qc], 2011.
- [16] Бабурова О.В., Косткин Р.С., Фролов Б.Н. Эксперимент ”GRAVITY PROBE B”, взаимодействие орбитального момента с калибровочным полем и гравидиамагнитный эффект // *Известия вузов. Физика.*, 2011, Т. 54, № 1, С. 111–112.
- [17] Бабурова О.В., Липкин К.Н., Фролов Б.Н. Теория гравитации со скалярным полем Дирак и проблема космологической постоянной // *Известия вузов. Физика.*, 2012, Т. 55, № 7, с. 113–115.
- [18] Babourova O.V., Frolov B.N., Lipkin K.N. Theory of gravity with a Dirac scalar field in the exterior form formalism and the cosmological constant problem // *Grav. Cosm.*, 2012, V. 18, No 4, pp. 225–231.
- [19] Trautman A. In: Recent development in general relativity (Pergamon Press, Oxford–London–New York–Paris, PNN–Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1962), pp. 459–464.
- [20] Zhang Y.Z. Approximate solution for general Riemann-Cartan-type $R + R^2$ theories of gravitation // *Phys. Rev. D.*, 1983, V. 28, pp. 1866–1871.

- [21] Zhytnikov V.V. GRG. Computer algebra system for differential geometry, gravity and field theory. Ver. 3.2, Moscow, 1997.

**INVESTIGATION OF ROLE OF IRREDUCIBLE TORSION
COMPONENTS UNDER PLANE WAVE PROPAGATION IN
RIEMANNIAN-CARTAN SPACE**

V.N. Shcherban

Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia

vovan-ru1@yandex.ru

For quadratic lagrangian of general type obtained variational equations of gravitational field in Riemannian-Catran space. Structure of irreducible torsion components under plane wave propagation in Riemannian-Catran space is investigated.

Key Words: connection, Kaeler space, Berwald-Moore space.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных алгебр в физике, е) Экспериментальные исследования возможной анизотропии пространства-времени и иных проявлений финслеровой геометрии.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.
2. Объем статьи не должен превышать 1 печ. листа (24 усл. маш. стр.)
3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате \LaTeX (версия $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$, для набора формул используется $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$) и файл статьи в формате PostScript или PDF.
4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).
5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок), ключевые слова. Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.
6. Название статьи, аннотация, ключевые слова, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.
7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.
8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи.
9. Публикация бесплатна для всех авторов.

INFORMATION FOR AUTHORS

In the journal published are the original articles and reviews of the Russian and foreign authors on the following topics: a) Hypercomplex numbers; b) Geometries connected with hypercomplex numbers; c) Finsler spaces; d) Fractals based on hypercomplex numbers; e) Application of the hypercomplex algebras in physics; f) Experimental investigation of the possible space-time anisotropy and other manifestations of Finsler geometry.

Editorial staff informs authors of the articles about the journal rules:

1. Articles are published either in Russian or in English.
2. The size of the article should not exceed that of a printed sheet (24 conventional typewritten pages)
3. Author makes his article file available for the editorial board in \LaTeX format ($\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ version, $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$ is used for formulas) as well as in either PostScript or PDF format.
4. Accepted picture formats are as follows: TIFF, GIF, PNG for bit images (encapsulation in EPS should be possible); EPS, PDF, TEX for vector images. Each image should be represented as a separate file. Colour scheme may be either black and white or grey (8 bit).
5. Article should contain an abstract (no lengthy formulas or references) and keywords.
6. Title of the article, abstract, keywords, names and affiliation of the authors should be available both in Russian and in English.
7. Author should give his or her e-mail and telephone number to make operative communication possible. If the article is sent back to the author for him or her to improve it, it doesn't mean that the article is accepted.
8. Any deviation from the given rules makes the chance of the publication lower.
9. Publication is free for all authors.

**ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА
В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ**

Научный журнал. Основан в 2003 г.

№ 2 (20), том 10, 2013

Главный редактор Павлов Д. Г.

Зам. главного редактора Панчелюга В. А.

Технический секретарь Панчелюга М.С.

www.polynumbers.ru

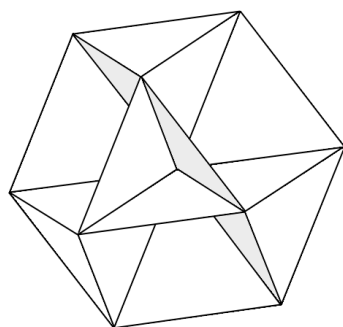
hypercomplex@mail.ru

Свидетельство о регистрации

ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.

ISSN 1814-3946

© НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике,
Российское гиперкомплексное общество, ОАО "МОЗЭТ"



Типографские данные