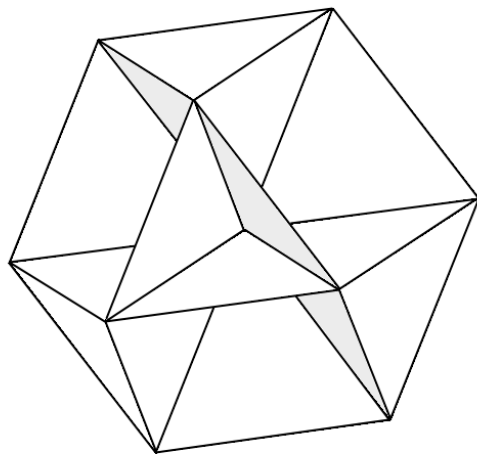


ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

№ 2 (18), том 9, 2012

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 2003 г.



www.polynumbers.ru

hypercomplex@mail.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Некоторые задачи математической физики в поличисловой теории поля	200
Гарасько Г.И. Лестничное представление невырожденных поличисел	256
Брандт Г. Дифференциальная геометрия касательных расслоений финслерова пространства-времени	263
Неагу М., Рейши-Дехкорди Х. Инвариантные группы метрики Бервальда-Моора второго и третьего порядка	270
Редьков В.М., Кисель В.В., Овсюк Е.М. Группа Лоренца – основа описания взаимодействия бозонов и фермионов с псевдоримановой структурой пространства. Что взамен при финслеровой геометризации пространства?	284
Горюнов А.В. Операторы дифференцирования бикомплексной функции и изотропные релятивистские и электродинамические уравнения	295
Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов в уравнениях математической и теоретической физики	316
Дарваш Ю. Финслеров подход к электромагнитному взаимодействию в присутствии изотопических зарядовых и кинетических полей	341
Рылов Ю.А. Финслерова геометрия в терминах мировой функции	360
Мушфик А. Геометрические свойства эйнштейновского закона сложения скоростей и его кватернионный аналог	377
Информация для авторов	383
Информация для авторов (на английском)	384

CONTENTS

Pavlov D.G., Kokarev S.S. Some problems of mathematical physics in polynumbers field theory	200
Garas'ko G.I. Ladder representation of nondegenerate polynumbers	256
Brandt H. Differential geometry of Finsler-spacetime tangent bundle	263
Neagu M., Raeisi-Dehkordi H. On the invariance groups of the Berwald-Moór metric of order two and three	270
Red'kov V.M., Kisel V.V., Ovsiyuk E.M. The Lorentz group is a base for describing interaction of bosons and fermions with pseudo-riemannian structure of a background space-time. What should be instead for Finslerian space-time models?	284
Goryunov A.V. Differential Operators of Bicomplex Function and Isotropic Relativistic and Electrodynamics Equations	295
Alexeyeva L.A. The differential algebra of biquaternions in equations of mathematical and theoretical physics	316
Darvas G. Finslerian Approach to the Electromagnetic Interaction in the Presence of Isotopic Field-Charges and a Kinetic Field	341
Rylov Yu.A. Finsler geometry in terms of world function	360
Mushfiq A. Geometric Properties of Einstein's Law of Addition of Velocities and Quaternionic Law of Addition.	377
Information for authors (in russian)	383
Information for authors	384

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ПОЛИЧИСЛОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Д.Г. Павлов¹, С.С. Кокарев^{1,2}

¹ НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

² Российский научно-образовательный центр “Логос”, Ярославль, Россия

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

В статье рассмотрены некоторые математические свойства инвариантного скалярного оператора \mathcal{O}_n поличисловой теории поля и его ядра (т.е. решений уравнения $\mathcal{O}_n \Phi = 0$). Приведены выражения для метрики Бевальда-Моора и оператора \mathcal{O}_n в гиперболических сферической, цилиндрической изотропной и цилиндрической неизотропной системах координат для случая $n = 3$. Часть результатов представлена через специальные функции, являющиеся гиперболическим аналогом тригонометрических функций, сферических гармоник и полиномов Лежандра. Вычислен общий вид радиальной части оператора \mathcal{O}_n для любого n . Решена задача о распределении гиперболического поля равномерно заряженного шара. Показано, что в 3-мерной гиперболической теории поля не существует цилиндрически-симметричных (в случае неизотропной оси симметрии) решений с разделенными переменными.

Ключевые слова: поличисла, пространство Бевальда-Моора, гиперболическая теория поля, функция Грина, криволинейная система координат, сферическая симметрия, разделение переменных.

1 Введение

Принцип алгебраизации является ключевым инструментом для унифицированного описания пространственно-временных отношений, материи и физических взаимодействий. Он вошел физику в первой половине XX века в период разработки основ и приложений квантовой теории, несколько уступая во времени принципу геометризации, лежащему в основе ОТО. Оба принципа сегодня тесно переплетаются и взаимно дополняют друг друга и, в действительности, (например, в теории суперструн) они работают совместно. Это плодотворное единство алгебры и геометрии наводит на мысль о существовании единой алгебро-геометрической основы физической реальности, которая раскрывается с различных сторон в зависимости от выбора точки зрения на реальность и средств ее описания [1–6].

Как принцип геометризации, так и принцип алгебраизации возвращают нас к идеям древних греков о первичности простых математических конструкций: в первом случае речь идет о теории Платоновых атомов — правильных геометрических фигур, во втором — об пифагоровом учении о числах, как основе природы [7]. Алгебра, по сути, и представляет собой глубокое обобщение числовых отношений и операций над числами. На сегодняшний день нам известны все числовые системы, допускающие стандартные арифметические операции: сумму, разность, умножение и деление с привычными свойствами ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности. Эти системы получили название *числовых полей*. Все числовые поля изоморфны одному из следующих полей: полю рациональных чисел Q , полю вещественных чисел R или полю комплексных чисел C [8]. Классический анализ, лежащий в основе гладких структур, на которых в основном и строится современная фундаментальная физика, опирается на свойства поля вещественных чисел или его многомерного расширения R^n . Интересные попытки аксиоматизации квантовой теории опираются на т.н. p -адический анализ, который строится на поле рациональных чисел [9]. Поле комплексных чисел лежит в основе общепринятой аксиоматики квантовой теории и ее многочисленных приложений [5]. Кроме того, множество задач

классической физики (электро- и магнитостатики, гидродинамики и теории упругости) эффективно решается с помощью методов комплексного анализа [10]. Последнее обстоятельство обусловлено наличием замечательных дифференциально-аналитических свойств комплексно-дифференцируемых функций, выражающихся т.н. условиями Коши-Римана. Эти последние принимают вид физических уравнений (условий потенциальности и соленоидальности соответствующих физических полей) и обеспечивают эффективный алгоритм отыскания решений задач двумерной математической физики.

Представляет интерес отыскание многомерных расширений поля комплексных чисел, которые позволяли бы решать пространственные задачи математической физики или даже задачи СТО и ОТО в 4-мерном пространстве-времени. Общая теорема алгебры, перечисляющая все числовые поля, закрывает вопрос о числовых полях размерности выше двух. Однако, простое наблюдение наводит на мысль о необходимости расширения условий на числовые системы, которые могут представлять интерес для физики. Речь идет о свойствах т.н. двойных чисел, которые давно известны математикам [11]. Двойные числа представляют собой 2-мерную алгебру над полем R с делителями нуля. Любое двойное число h можно представить в виде: $h = a + jb$, где $a, b \in R$, j — т.н. гиперболическая мнимая единица, удовлетворяющая условию: $j^2 = 1$. Вводя операцию комплексного сопряжения: $h \rightarrow \bar{h} = a - jb$ и образуя вещественную комбинацию $h\bar{h} = a^2 - b^2$, которую по аналогии с комплексными числами можно назвать квадратом нормы (или, точнее, псевдонормы) двойного числа, мы приходим к 2-мерной псевдоевклидовой квадратичной форме, которая лежит в основе геометрической структуры 2-мерного пространства-времени Минковского. При этом числа вида $h_0 = a(1 \pm j)$ не имеют обратных (с точки зрения алгебры они являются т.н. делителями нуля, т.е. отличными от нуля возможными решениями уравнения $h \cdot x = 0$), что препятствует отнесению алгебры двойных чисел к классу числовых полей. Однако с физической точки зрения именно делители нуля отражают факт существования в 2-мерном пространстве-времени фундаментальной конформной структуры — светового конуса. Делители нуля геометрически соответствуют точкам светового конуса (он представляет собой пару пересекающихся прямых) с вершиной в нуле. Физические аспекты алгебры двойных чисел были рассмотрены в ряде предыдущих работ [12–15].

n -мерным расширением алгебры двойных чисел является алгебра поличисел P_n . Соответствующие ей геометрические пространства H_n являются пространствами Бервальда-Моора с метриками Бервальда-Моора псевдофинслерова типа. Несмотря на весьма простые свойства этой алгебры, на ее основе можно строить соответствующий анализ вместе с обобщенной концепцией голоморфности, развивать дифференциальную геометрию соответствующих пространств H_n , строить теоретико-полевые лагранжианы и т.д. [16].

Настоящая статья посвящена исследованию различных представлений основного уравнения поличисловой теории поля:

$$\bigcirc_n F = 0, \quad (1)$$

и свойств его решений, где оператор \bigcirc_n в специальных (изотропных) координатах имеет вид:

$$\bigcirc_n = \frac{\partial^n}{\partial x^1 \dots \partial x^n} \quad (2)$$

и является своеобразным многомерным симбиозом операторов Лапласа и Даламбера высшего порядка.

В разделе 2 мы приводим необходимые сведения из алгебры и геометрии поличисел. В разделе 3 мы приводим явные выражения для решений уравнения (1) с сингулярной правой частью (в том числе для функции Грина оператора \bigcirc). Раздел 4 целиком посвящен исследованию 3-мерной сферической системы координат в H_3 в калибровочно-инвариантном виде и выводу явных выражений для метрики БМ и оператора \bigcirc_3 в этой системе коор-

динат. В разделе 5 мы концентрируем внимание на явном выражении радиальной части оператора \bigcirc_n для любого n . В разделе 6 изучается общий вид сферически-симметричного решения вне источников. Метод разделения переменных в уравнении $\bigcirc_3 f = 0$ и свойства гиперболических сферических гармоник исследуются в разделе 7. Задача о равномерно заряженном гиперболическом шаре рассматривается в разделе 8. Раздел 9 посвящен выводу основных формул в цилиндрической системе координат с неизотропной осью симметрии. Показано, что в H_3 не существует цилиндрически симметричных решений оператора \bigcirc_3 с разделяющимися переменными. Наконец, в приложении приведена подборка гиперболических аналогов евклидовых многогранников, кривых и поверхностей, определение которых опирается на функцию расстояния.

2 Алгебра и геометрия поличисел

2.1 Алгебра и операции

Напомним, что ассоциативно-коммутативная алгебра P_n над полем R (алгебра поличисел или n -чисел) обобщает на высшие измерения хорошо известную алгебру двойных чисел на плоскости [11]. Ее общий элемент имеет вид:

$$x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n, \quad (3)$$

где базис¹ $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ алгебры P_n удовлетворяет соотношениям:

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_i \quad (\text{нет суммирования!}). \quad (4)$$

Из соотношения (4) вытекают простые правила умножения и деления поличисел:

$$xy = \sum_{i=1}^n x^i y^i e_i, \quad \frac{x}{y} = \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{y^i} e_i, \quad (5)$$

при этом деление определено только на т. н. невырожденные элементы, у которых все $y^i \neq 0$. Роль алгебраической единицы играет элемент $I_n = \sum_{i=1}^n e_i$.

2.2 Степенные ряды

Правило (5) умножения поличисел в изотропном базисе позволяет определить любую целочисленную степень поличисла $x \in P_n$:

$$x^n = (x^1)^n e_1 + \dots + (x^n)^n e_n. \quad (6)$$

Формула (6) годится и для отрицательных значений n в случае, когда x невырождено. Эта формула позволяет легко определить формальные степенные поличисловые ряды вида:

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \equiv \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} c_{ks} (x^s)^k e_s, \quad (7)$$

где $P_n \ni c_k = \sum_{s=1}^n c_{ks} e_s$, $P_n \ni x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$. Равенство в (7), вытекающее из (6), означает, что степенной ряд поличисловой переменной в изотропном базисе распадается на сумму n независимых рядов вещественной переменной.

¹Этот базис (или, точнее, класс базисов) называется изотропным.

2.3 Сопряжения и псевдонорма

На алгебре P_n определена операция сопряжения $C: P_n \rightarrow P_n$, действующая по правилу:

$$C(x) = C\left(\sum_{i=1}^n x^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x^{i-1} e_i, \quad (8)$$

где $x^0 \equiv x^n$. Ее k -ая итерация действует по формуле:

$$C^k(x) = \sum_{i=1}^n x^{i-k} e_i, \quad (9)$$

где x^s с $-n \leq s \leq 0$ определяется формулой $x^s \equiv x^{n+s}$, т. е. сложение и вычитание индексов производится в арифметике по модулю n . Это правило по умолчанию будет всегда подразумеваться и далее. Для $k = n$ имеет место тождество $C^n = \text{id}$. Таким образом, фактически, на алгебре P_n определена $n - 1$ операция комплексного сопряжения, что обобщает ситуацию для комплексных и двойных чисел.

Определенные нами комплексные сопряжения позволяют чисто алгебраически определить (*псевдо*)норму $\|x\|$ всякого элемента $x \in P_n$:

$$\prod_{k=1}^n C^k(x) = \prod_{k=1}^n x^k \sum_{s=1}^n e_s \equiv \|x\|^n I_n, \quad (10)$$

где первое равенство автоматически следует из определения комплексного сопряжения и таблицы умножения в P_n , а второй знак равенства следует понимать как определение n -ой степени псевдонормы элемента x . Отметим, что псевдонорма $\|x\|$ может принимать положительные отрицательные, нулевые и мнимые значения. Абсолютной величиной элемента x , будем называть вещественное число, равное

$$|x| = \sqrt[n]{\|x\|^n}. \quad (11)$$

Очевидно, что для всякого собственно вырожденного элемента x имеют место равенства: $\|x\| = |x| = 0$, в то время как для невырожденных элементов $\|x\| \neq 0$.

2.4 Скалярное полипроизведение и метрика Бервальда-Моора

Концепция нормы, определение которой опирается на форму n -ого порядка, легко обобщается до концепции *полискалярного произведения* элементов (x_1, \dots, x_n) , опирающейся на n -линейную форму вида:

$$\sum_{\sigma(i_1, \dots, i_n)} \prod_{k=1}^n C^k(x_{i_k}) \equiv (x_1, \dots, x_n) I_n, \quad (12)$$

где суммирование выполняется по всем перестановкам $\sigma(i_1, \dots, i_n)$ различных индексов i_1, \dots, i_n . Из (12) легко получается следующая более явная формула:

$$(x_1, \dots, x_n) \equiv \text{perm} \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где perm — перманент квадратной матрицы, имеющий структуру определителя, все знаки в котором полагаются плюсами.

Скалярное полипроизведение (как и перманент) может быть записано в компонентах в следующем виде:

$$(x_1, \dots, x_n) \equiv \epsilon_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}, \quad (14)$$

где $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$ — симметричный символ Леви-Чивиты², совокупность компонент которого следует рассматривать как метрический тензор пространства P_n , отнесенный к базису $\{e_i\}$. Линейное пространство с полилинейной метрической формой (14) называется *пространством Бервальда-Моора* (обозначается H_n), а метрика в (14) называется *n -мерной метрикой Бервальда-Моора*, которую в настоящей статье мы будем обозначать ${}^{(n)}\epsilon$. Формулы (10) и (12) обнаруживают генетическую связь пространств P_n и H_n : алгебра поличисел индуцирует метрику Бервальда-Моора подобно тому, как алгебра комплексных чисел индуцирует евклидову метрику на плоскости [17]. Отметим, что пространство Бервальда-Моора H_n относится к типу n -корневых финслеровых пространств, изучаемых финслеровой геометрией [18].

2.5 Изометрии и конформные симметрии

Напомним некоторые дифференциально-геометрические аспекты пространства H_n . Метрика ${}^{(n)}\epsilon$ в этих координатах в соответствии с (13)-(14) принимает следующий вид:

$${}^{(n)}\epsilon = \hat{S}(dx^1 \otimes \dots \otimes dx^n), \quad (15)$$

где \hat{S} — оператор симметризации (без числового множителя). Непрерывные симметрии (конформные симметрии и изометрии) метрики Бервальда-Моора описываются алгеброй Ли векторных полей X , удовлетворяющих конформным уравнениям Киллинга:

$$L_X {}^{(n)}\epsilon = \lambda \cdot {}^{(n)}\epsilon, \quad (16)$$

где λ — некоторая скалярная функция координат. Можно показать [19], что общее решение уравнений (16) исчерпывается следующими классами векторных полей:

1. $T_{(i)} = \partial_i$, ($i = 1, \dots, n$) (трансляции);
2. $D_{(i)} = x^{i+1}\partial_{i+1} - x^i\partial_i$, ($i = 1, n-1$) — (унимодулярные дилатации, суммирования по i нет!);
3. $C_{(F_1, \dots, F_n)} = \sum_{i=1}^n F_i(x^i)\partial_i$, где F_i ($i = 1, \dots, n$) — произвольные гладкие функции одной переменной (конформные преобразования).

Первые два класса векторных полей индуцируют группу изометрии $\text{Iso}(H_n)$, которая является полупрямым произведением $T_n(H_n) \times D_{n-1}(H_n)$ двух абелевых подгрупп: абелевой подгруппы трансляций $T_n(H_n)$ и абелевой подгруппы унимодулярных дилатаций $D_{n-1}(H_n)$. В конечном виде в координатах преобразования изометрии метрики Бервальда-Моора имеют следующий общий вид:

$$\begin{aligned} T_n : x^i &\rightarrow x^i + c^i; \\ D_{n-1} : x^i &\rightarrow a^i x^i, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\prod_{i=1}^n a^i = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad c^i, a^i \in R.$$

²Он определяется аналогично стандартному антисимметричному символу Леви-Чивиты, для которого мы оставляем обозначение $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$, с заменой знаков минус на плюс.

Третий класс векторных полей индуцирует бесконечномерную неабелеву группу конформных преобразований $C(H_n)$, явный конечный вид которой в выбранном изотропном базисе определяется набором произвольных гладких функций $\{f^i\}_{i=1,\dots,n}$ одной переменной:

$$C(H_n) : x^i \rightarrow y^i = f^i(x^i) \quad i = 1, \dots, n. \quad (18)$$

При этом метрика ${}^{(n)}\epsilon$ преобразуется по закону:

$${}^{(n)}\epsilon = \prod_{k=1}^n \left(\frac{df^k}{dx^k} \right) {}^{(n)}\epsilon'. \quad (19)$$

Подчеркнем, что рассматриваемая нами группа $C(H_n)$ является весьма специальной подгруппой группы диффеоморфизмов, поэтому конформное преобразование вида (19) не приводит к появлению нетривиальной кривизны метрики Бервальда-Моора.

2.6 Некоторые метрические объекты в H_n

Как показано выше, группа изометрии $\text{Iso}(H_n)$ содержит полную подгруппу трансляций T_n . Это означает, что выбранная нами изотропная система координат допускает класс аффинно-эквивалентных ей систем координат (т.е. связанных с исходной невырожденным аффинным преобразованием), в котором компоненты метрики Бервальда-Моора остаются постоянными. Другими словами, мы можем работать в H_n с глобальными аффинными конструкциями (типа радиус-векторов, моментов различного порядка и т.д.), оставаясь в классе аффинно-эквивалентных систем координат (в котором, конечно, отнюдь не все представители будут являться изотропными системами). В силу возможности глобального отождествления касательного пространства $T_x H_n$ с самим H_n в любой точке x , по-линкалярное произведение тривиально переносится с дифференциально-геометрических (касательных) векторов в H_n на аффинные векторы.

Рассмотрим уравнение метрической единичной сферы S_{BM}^{n-1} в пространстве БМ:

$$|{}^{(n)}\epsilon(x, \dots, x)| = 1, \quad (20)$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$ понимается как аффинный вектор в пространстве H_n в изотропной системе координат с фиксированным началом. Определенная таким образом метрическая сфера имеет 2^n связных некомпактных компонент S_α^{n-1} :

$$S_{BM}^{n-1} = \bigsqcup_{\alpha=1}^{2^n} S_\alpha^{n-1}. \quad (21)$$

Эти компоненты можно классифицировать элементами вида $\{\tau_\alpha = (\pm 1, \dots, \pm 1)\}_{\alpha=1,\dots,2^n}$, каждый из которых принадлежит ровно одной из связных компонент сферы. В соответствии с этой классификацией, компоненты можно разделить на четные или нечетные, в зависимости от количества отрицательных компонент в классификаторе τ_α . Компоненту S_{BM}^{n-1} , соответствующую элементу $\tau_1 \equiv (1, \dots, 1)$, будем называть положительной³. По своим геометрическим свойствам сфера S_{BM}^{n-1} весьма близка к плоскому $n - 1$ -мерному пространству: в S_{BM}^{n-1} , например, через любую точку, не лежащую на данной экстремали длины (т.е. на гладкой кривой, доставляющей экстремум функционалу длины на S_{BM}^{n-1} , индуцированному вложением $S_{BM}^{n-1} \rightarrow H_n$) можно провести единственную экстремаль, не пересекающуюся с первой [20]. Отметим здесь еще одну важную аналогию сферы S_{BM}^{n-1}

³Также будем называть положительной часть P_n , содержащую все те элементы x , у которых $x^i > 0$ для всех $i = 1, \dots, n$.

с евклидовой сферой: точки, лежащие на четных компонентах сферы S_{BM}^{n-1} , рассматриваемые как элементы алгебры P_n , изображают подгруппу D_{n-1} (по умножению) группы изометрий $\text{Iso}(H_n)$.

Назовем *конусом* $\text{Con}(x_0)$ точки $x_0 \in H_n$ множество точек в H_n , удовлетворяющих уравнению:

$$|x - x_0| = 0. \quad (22)$$

Очевидно, конусы всех точек изоморфны и этот изоморфизм устанавливается символической формулой:

$$\text{Con}(x_1) = \text{Con}(x_0) + \overrightarrow{x_1 - x_0}.$$

Элементы $x \in \text{Con}(x_0)$, если их интерпретировать как элементы алгебры P_n , представляют собой в точности все те элементы, для которых $x - x_0$ не имеет обратного по умножению.

Непосредственной проверкой с помощью (5) легко убедиться в справедливости следующего представления любого невырожденного поличисла $x \in P_n$:

$$x = \sum_{s=1}^n x^s e_s = \Upsilon(x) |x| e^\chi, \quad (23)$$

где $\Upsilon(x) \equiv \Upsilon_{\alpha(x)}$ — классификатор той компоненты S_{BM}^{n-1} , которую пересекает луч λx , $R \ni \lambda > 0$,

$$\chi \equiv \sum_{s=1}^n \chi_x^s e_s \quad (24)$$

— полиугол x (т.е. угловая переменная, являющаяся по своей алгебраической природе поличислом того же типа, что и x),

$$\chi_x^s \equiv \ln \frac{\widehat{x}^s}{|\widehat{x}|} \quad (25)$$

т.н. *экспоненциальные углы элемента x* ,

$$\widehat{x} \equiv \frac{x}{\Upsilon_{\alpha(x)}} \quad (26)$$

приведенный (к положительной компоненте S_{BM}^{n-1}) элемент A , у которого все компоненты в изотропном базисе положительны. По самому своему определению экспоненциальные углы удовлетворяют тождеству:

$$\text{Tr}(\chi) \equiv \sum_{s=1}^n \chi^s = 0, \quad (27)$$

что, в свою очередь, обеспечивает тождество

$$|e^\chi| = 1, \quad (28)$$

аналогичное по смыслу условию единичности модуля комплексных чисел, лежащих на единичной окружности в комплексной плоскости. Можно показать, что величина

$$|\chi_x| = |\chi_x^1 \cdots \chi_x^n|^{1/n} \quad (29)$$

имеет смысл аналога евклидова угла⁴ между элементами(-векторами) x и $\Upsilon(x)$. Она называется *взаимным углом* между ними. Взаимный угол между невырожденными элементами $x \in P_n$ и $y \in P_n$ при $\Upsilon(x) = \Upsilon(y)$ определяется по формуле:

$$\phi(x, y) \equiv |\chi_{y/x}|. \tag{30}$$

Переход от элементов P_n к их полиуглам по формуле (25) можно понимать как некоторое отображение: $b : P_n \rightarrow P_n$. Наглядно образ $b(P_n) \equiv \Omega P_n$ изображается в пространстве P_n в виде гиперплоскости, ортогональной (в евклидовом смысле) пространственной биссектрисе (понимаемой также в евклидовом смысле) положительной компоненты P_n , проходящей через нулевой элемент алгебры P_n . Отображение b , которое мы называем b -проекцией (бипроекцией), представляет собой нелинейное отображение линейных пространств и допускает последующие итерации:

$$P_n \xrightarrow{b} \Omega P_n \xrightarrow{b} \Omega^2 P_n \dots \xrightarrow{b} \Omega^k P_n \xrightarrow{b} \dots \tag{31}$$

Каждый шаг итерации проецирует прообраз и понижает размерность образа (как подмногообразия P_n) на единицу. Таким образом, размерность многообразия полиуглов $\Omega^k P_n$ равна $n - k$, и всего существует $n - 1$ независимых взаимных углов $\chi_x^{(k)}$. Эта последовательность независимых взаимных углов позволяет записать лестничное экспоненциальное представление поличисла [20]:

$$x = \left(\prod_{p=0}^{n-2} \chi_x^{(p)} \exp \circ \right) \chi_x^{n-1}. \tag{32}$$

2.7 Некоторые общие свойства функций поличисловой переменной

Всякую функцию поличисловой переменной как отображение $f : P_n \rightarrow P_n$ можно задавать в изотропном базисе совокупностью вещественных компонент:

$$x \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x^1, \dots, x^n) e_i. \tag{33}$$

При этом значительная часть свойств и связанных с ними определений функций многих вещественных переменных переносится на функции поличисловой переменной.

2.7.1 Аналитические функции поличисловой переменной

Возможность определения степенных рядов (раздел 2.2) позволяет определить класс аналитических функций поличисловой переменной $C^\omega(P_n)$ как совокупность отображений $P_n \rightarrow P_n$, представимых в виде сходящихся поличисловых степенных рядов вида (7) (с произвольным центром разложения). Это определение допускает обобщение на отрицательные степени (поличисловые ряды Лорана) вне конуса центра разложения в ряд. При этом аналитическое продолжение аналитической вещественной функции одной переменной всегда существует и единственно [16]. На самом деле, справедливо более общее утверждение: *имеет место биективное соответствие между наборами $\{f_s\}_{s=1, \dots, n}$ n вещественных аналитических функций от k вещественных переменных $R^k \rightarrow R$ и аналитическими функциями $P_n \rightarrow P_n$ от k поличисловых переменных вида:*

$$P_n^{l_1} \times P_n^{l_2} \times \dots \times P_n^{l_k} \rightarrow P_n$$

⁴Он обладает свойством аддитивности и может быть определен как длина экстремали на единичной сфере S_{BM}^{n-1} , соединяющий точку $\Upsilon(x)$ и $e^{\chi(x)}$ на ней [16].

где

$$P_n \equiv C^{l_q}(P_n)$$

и все l_q для $q = 1, \dots, k$ попарно различны [16].

2.8 Голоморфные дифференциальные операторы

Мы не останавливаемся здесь на определении дифференцируемости функции поличисловой переменной (его можно найти в [16]). Интуитивно определение дифференцирования вдоль неизотропных направлений почти дословно повторяет классическое определение производной по направлению функции многих переменных, а дифференцирование вдоль изотропных направлений также, по сути, сводится к классическому, после некоторого доопределения операции деления и переходу в пространство БМ меньшего числа измерений.

Рассмотрим формальные дифференциальные операторы $\{\partial^k\}_{k=1, \dots, n}$, определяемые по формуле:

$$\partial^k \equiv C^k(\partial), \quad (34)$$

где $\partial \equiv \sum_{s=1}^n e_s \partial_s$. Введение этих операторов мотивируется следующими соображениями, аналогичными мотивирующим соображениям для введения операторов ∂_z и $\partial_{\bar{z}}$ в комплексном анализе [17]. Умножая равенства

$$x^k = x^{n-k+1} e_1 + x^{n-k+2} e_2 \dots + x^{2n-k} e_n, \quad (35)$$

которые можно понимать как формулы перехода от вещественных координат к поличисловым, последовательно на e_l ($l = 1, \dots, n$) получим серию равенств:

$$e_1 x^{n-k+1} = e_1 \frac{x^k}{x}; \quad e_2 x^{n-k+1} = e_2 \frac{x^{k+1}}{x}; \quad \dots \quad e_n x^{n-k+1} = e_n \frac{x^{k+n}}{x}, \quad (36)$$

откуда получаем обратные формулы перехода от поличисловых переменных к вещественным⁵:

$$x^l = \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-l}}{x} e_k, \quad (39)$$

где нумерация сопряжений как обычно производится по модулю n . Теперь, в соответствии с формулами (39) будем иметь по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial x} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^s} e_{k+s} \equiv \partial^k f \quad (40)$$

в соответствии с определением (34).

⁵Отметим для полноты картины, что формальная «якобиева матрица» задается компонентами:

$$\frac{\partial x^s}{\partial x^l} = \frac{\partial x^s}{\partial x} = e_{l+s}, \quad (37)$$

а якобианы — это невырожденные элементы из множества классификаторов $\Upsilon(P_n)$. Отметим также, что в силу (37) имеет место тождество:

$$\frac{\partial x^s}{\partial x} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial x^s}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x} = \sum_{m=1}^n e_{s+m} e_{l+m} = I_n \delta_l^s. \quad (38)$$

2.9 Голоморфные функции поличисловой переменной

Определим *голоморфные функции поличисловой переменной* как такие отображения приращение, которых можно представить в виде:

$$\Delta f = \alpha(x_0)\Delta x + \beta(x_0)o(\Delta x), \quad (41)$$

где α и β — некоторые непрерывные функции $P_n \rightarrow P_n$. Класс голоморфных функций является весьма узким подклассом дифференцируемых функций. С помощью формальных дифференциальных операторов $\{\partial\}^k$ условие голоморфности можно записать так:

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} f = 0, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (42)$$

В компонентах условия (42) принимают вид *поличисловых условий Коши-Римана в изотропном базисе*:

$$\frac{\partial f^s}{\partial x^k} = 0 \quad \text{при} \quad s \neq k. \quad (43)$$

Таким образом, *голоморфные функции поличисловой переменной в изотропном базисе характеризуются произвольным набором $\{f^s\}_{s=1,\dots,n}$ n вещественно-дифференцируемых функций одной переменной*:

$$f(x) = f_1(x^1)e_1 + \dots + f^n(x^n)e_n. \quad (44)$$

Как и в комплексном случае, условию голоморфности можно придать вид условия независимости производной от направления. Действительно, расписывая условие дифференцируемости в общей форме при фиксированном (невырожденном) направлении приращения $\Delta x = \mathbf{T}(\Delta x)\varrho e^\chi$, ($\chi = \text{const}_{P_n}$) получим:

$$\Delta f = \sum_{m=1}^n \alpha_m(x_0) \mathbf{T}(\Delta x)^m \varrho e^{\chi^m} + \beta_m(x_0, \chi) o_m(\varrho), \quad (45)$$

получим для производной по невырожденному направлению χ в точке x_0 :

$$\frac{df}{d\chi}(x_0) \equiv \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \mathbf{T}(\Delta x)\varrho e^\chi) - f(x_0)}{\mathbf{T}(\Delta x)\varrho e^\chi} = \sum_{m=1}^n \alpha_m(x_0) \mathbf{T}(\Delta x)^m / \Delta x e^{\chi^m - \chi}. \quad (46)$$

В общем случае значение производной df/dx дифференцируемой функции f при фиксированном направлении дифференцирования χ зависит от выбора этого направления. Если же функция f P_n -голоморфна, то зависимость от направления в (46) пропадает (аналогично комплексному случаю).

Мы приходим к выводу о том, что *голоморфные функции поличисловой переменной — это (с точностью до перестановки координат) как раз те функции, которые осуществляют конформные преобразования метрики Бервальда-Моора*. Инвариантность углов между невырожденными векторами X, Y касательного пространства $T_x H_n$ проверяется прямой выкладкой с учетом определения (30):

$$\phi(X, Y) = |\chi_{Y/X}| \xrightarrow{f} \phi(X', Y') = \phi(f'X, f'Y) = |\chi_{f'Y/f'X}| = |\chi_{X/Y}| = \phi(X, Y), \quad (47)$$

где $f' \equiv df/dx$ и учтено, что закон преобразования векторов при голоморфных преобразованиях координат задается простым алгебраическим правилом: $X' = f' \cdot X$.

Аналогично классическому комплексному анализу в точках, в которых модуль поличисловой производной f' голоморфной функции обращается в нуль:

$$|f'| = |\Delta_f|^{1/n} = 0, \quad (48)$$

где $\Delta_f = \prod_{s=1}^n \partial f^s / \partial x^s$ — (вещественный) якобиан преобразования координат, соответствующего голоморфной функции f , условие конформности преобразования может нарушаться. Например отображение $x \rightarrow x^2$ неконформно в точке $x = 0$ (рассуждение, приведенное в предыдущем пункте не пройдет ввиду того, что в определение экспоненциального угла входит норма векторов, которую мы на всех этапах рассуждения полагали отличной от нуля).

2.10 Обобщенно-голоморфные функции поличисловой переменной

Рассмотренное выше условие голоморфности в форме равенства нулю некоторого набора частных производных первого порядка (42) допускает многочисленные обобщения, которые могут быть полезными в приложениях. Обозначим посредством \mathcal{A}_k^n поличисловое линейное пространство гладких функций $f: P_n \rightarrow P_n$, удовлетворяющих уравнению:

$$\overset{k}{\partial} f = 0. \quad (49)$$

Другими словами, $\mathcal{A}_k^n = \ker \overset{k}{\partial}$. Нетрудно написать общий вид элемента $f \in \mathcal{A}_k^n$, переходя к вещественным координатам. Согласно (49)

$$\overset{k}{\partial} f = \sum_{s=1}^n \partial_{s-k} f_s e_s = 0, \quad (50)$$

откуда условие принадлежности f классу \mathcal{A}_k^n выражается формулами для компонент:

$$\frac{\partial f^s}{\partial x^{s-k}} = 0, \quad s = 1, \dots, n. \quad (51)$$

Теперь, с учетом соотношений (42), можно сказать, что определенный выше класс голоморфных функций описывается как пересечение ядерных подпространств вида:

$$\mathcal{G}_0^n \equiv \bigcap_{s=1}^{n-1} \mathcal{A}_s^n. \quad (52)$$

Аналогично, определим⁶ классы голоморфных функций \mathcal{G}_k^n $k = 1, \dots, n-1$ посредством соотношения:

$$\mathcal{G}_k^n \equiv \bigcap_{s \neq k} \mathcal{A}_s^n. \quad (53)$$

Будем называть множество функций из класса \mathcal{G}_k^n k -голоморфными. В координатном представлении общий k -голоморфный элемент описывается формулой:

$$f(x) = \sum_{s=1}^n f^s(x^{s-k}) e_s = C^k g(x), \quad (54)$$

⁶Здесь и далее предполагается, что все функции имеют непрерывные частные производные такого порядка, который необходим для корректности вводимых определений.

где $g(x) \in \mathcal{G}_0^n$.

Можно продолжить построенное обобщение и далее. Для этой цели рассмотрим обобщенное условие голоморфности в виде набора мономных дифференциальных уравнений вида:

$$\prod_{m=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial} \right)^{k_\alpha^m} f \equiv D^{k_\alpha} f = 0. \quad (55)$$

В выражении (55) k_α — элемент n -мерной целочисленной неотрицательной решетки Z_+^n , k_α^m — его целочисленные неотрицательные компоненты, $\alpha = 1, \dots, r$ — число условий типа (55). Для краткости мы ввели символическое обозначение D^{k_α} — «вектор в степени вектор», определение которого очевидно:

$$U^V = U_1^{V_1} U_2^{V_2} \dots U_n^{V_n}. \quad (56)$$

Ввиду того, что каждое условие вида (55) параметризуется целочисленным вектором, а композиция пары таких условий (которая является дифференциальным следствием исходных условий) характеризуется суммой целочисленных векторов, имеем взаимно-однозначное отображение дифференциальных операторов вида (55) в кольцо Z_+^n над Z_+ . Очевидно, задавая условие голоморфности набором элементов в Z_+^n , целесообразно ограничиваться линейно-независимыми⁷ в Z_+^n элементами кольца Z_+^n . Вводя обозначения:

$$\mathcal{A}_{k_\alpha}^n \equiv \ker D^{k_\alpha}, \quad (57)$$

получаем в качестве обобщенных классов голоморфных функций пересечения ядерных пространств вида:

$$\mathcal{G}_{(k_1, \dots, k_r)}^n \equiv \bigcap_{\alpha=1}^r \mathcal{A}_{k_\alpha}^n. \quad (58)$$

Рассмотренные выше классы $\mathcal{G}_k^n \equiv \mathcal{G}_{(E_1, \dots, \widehat{E}_k, \dots, E_n)}^n$, где $\{E_i\}_{i=1, \dots, n}$ — набор базисных векторов решетки Z_+^n (у E_i на i -ом месте стоит единица, на остальных местах — нули), а «шляпка», как обычно, означает принудительный пропуск соответствующего элемента.

Опишем более подробно структуру пространства $\mathcal{A}_{pE_k}^n$. Соответствующий ему аннулирующий оператор D^{pE_k} может быть представлен в виде:

$$D^{pE_k} \equiv \binom{k}{\partial}^p = \binom{k}{\partial}^{p-1} \circ \binom{k}{\partial}, \quad (59)$$

что вместе с определением (49) для \mathcal{A}_k^n дает следующее символическое равенство для общего элемента $f \in \mathcal{A}_{pE_k}^n$:

$$D^{(p-1)E_k} f = \mathcal{A}_k^n. \quad (60)$$

Снова используя представление

$$D^{(p-1)E_k} = \binom{k}{\partial}^{p-2} \circ \binom{k}{\partial}, \quad (61)$$

и выполняя символическое интегрирование (60), получим:

$$D^{(p-2)E_k} f = x \otimes \mathcal{A}_k^n + \mathcal{A}_k^n. \quad (62)$$

⁷Несмотря на конечномерность Z_+^n как подмножества в Z^n , Z_+^n бесконечномерно как кольцо над Z_+ . К примеру, бесконечная последовательность элементов $(0, 0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), (2, 0, \dots, 0), \dots$ линейно независима в Z_+^n .

Продолжая этот процесс далее, получим общий вид представителя класса голоморфности $\mathcal{G}_{pE_k}^n = \mathcal{A}_{pE_k}^n$:

$$\mathcal{A}_{pE_k}^n = \bigoplus_{q=0}^{p-1} x^q \otimes \mathcal{A}_k^n \quad (63)$$

или в явном виде:

$$\mathcal{A}_{pE_k}^n \ni f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + f_{p-1} x^{p-1}, \quad (64)$$

где все $f_i \in \mathcal{A}_k^n$. Формулы типа (63) будем называть *формулами приведения* $\mathcal{A}_{pE_k}^n$ к \mathcal{A}_k^n . Можно выписать аналогичную формулу приведения и общих ядерных пространств $\mathcal{A}_{k_\alpha}^n$ к пространствам \mathcal{A}_k^n :

$$\mathcal{A}_{k_\alpha}^n = \bigoplus_{s=1}^n \bigoplus_{q=0}^{k_\alpha^s-1} x^q \otimes \mathcal{A}_s^n, \quad (65)$$

справедливость которой вполне очевидна из предыдущего рассмотрения.

В заключение этого раздела опишем специальный класс $\mathcal{G}_{E_1+\dots+E_n}^n$ -голоморфных функций, определяемый инвариантным (полискалярным) дифференциальным оператором:

$$\bigcirc_n \equiv \|\partial\|^n I_n \equiv \prod_{s=1}^n \partial^s. \quad (66)$$

Оператор \bigcirc_n является поличисловой версией двумерного оператора Лапласа $\Delta_2 = 4\partial_z\partial_{\bar{z}}$ и многомерным обобщением 2-мерного волнового оператора $\square_2 = 4\partial_h\partial_{\bar{h}}$, где $h \in P_2$. По этой причине класс $\mathcal{G}_{E_1+\dots+E_n}^n$ будем для краткости называть *полигармоническими функциями* и обозначать $\text{Harm}(P_n)$. В соответствии с общей формулой приведения (65), мы получаем для этого класса следующее общее симметричное представление:

$$\text{Harm}(P_n) = \bigoplus_{k=1}^n \mathcal{A}_k^n \quad (67)$$

или в координатном виде:

$$\text{Harm}(P_n) \ni f = \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n f_k^s e_s, \quad (68)$$

где f_k^s — вещественные функции $R^{n-1} \rightarrow R$, удовлетворяющие условиям:

$$\frac{\partial f_k^s}{\partial x^k} = 0, \quad s, k = 1, \dots, n. \quad (69)$$

3 Функция Грина оператора \bigcirc_n и сингулярные уравнения

3.1 Некоторые вспомогательные конструкции

Определим несколько полезных в дальнейшем вспомогательных функций поличисловой переменной $P_n \rightarrow P_n$. Прежде всего, определим функцию

$$\text{abs}(x) \equiv \sum_{s=1}^n |x^s| e_s, \quad (70)$$

где $|x^s|$ — обычный модуль вещественного числа. Эта функция является поличисловой версией обычного модуля: она отображает все координатные n -мерные полукубы на первый (положительный) полукуб. Ее финслерова норма связана с модулем поличисла по формуле:

$$\|\text{abs}(x)\| = |x|. \quad (71)$$

Определим пару нормированных пикообразных функций:

$$\begin{aligned} \omega_a(x) &\equiv \begin{cases} C_a e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & \text{abs}(x) < \text{abs}(a) \\ 0, & \text{abs}(x) \geq \text{abs}(a) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \sum_{s=1}^n C_a^s e^{-\frac{(a^s)^2}{(a^s)^2-(x^s)^2}} e_s, & |x^s| < |a^s|, (s = 1, \dots, n) \\ 0, & |x^s| \geq |a^s|, (s = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned} \quad (72)$$

и

$$\sigma_a(x) \equiv \frac{a}{\pi} \frac{1}{x^2 + a^2} = \sum_{s=1}^n \frac{a_s}{\pi} \frac{1}{(x^s)^2 + (a^s)^2} e_s. \quad (73)$$

В (72) $C_a = C_a^1 e_1 + \dots + C_a^n e_n$ — поличисло с компонентами C_a^s , удовлетворяющими условию нормировки на единицу:

$$C_a^s \int_{-a_s}^{a_s} e^{-\frac{(a^s)^2}{(a^s)^2-\xi^2}} d\xi = 1. \quad (74)$$

Обе функции представляют собой поличисловую версию функций-«шапочек», широко используемых в теории обобщенных функций [21] и удовлетворяют поличисловому условию нормировки

$$\int_{\Gamma \in \mathcal{P}_n^+} \left\{ \begin{array}{c} \omega_a(x) \\ \sigma_a(x) \end{array} \right\} dx = \left\{ \begin{array}{c} I_n \\ I_n \end{array} \right\}, \quad (75)$$

где \mathcal{P}_n^+ — класс вещественно-подобных путей в P_n , который определяется требованиями:

- 1) $\text{abs}(\dot{x}_\Gamma(t)) = \dot{x}_\Gamma(t)$ и $|\dot{x}(t)| \neq 0$ для всех t из интервала параметризации пути $\Gamma \in \mathcal{P}_n^+$;
- 2) $\Gamma \sim \ell(I_n)$, где $\ell(I_n)$ — вещественная ось в P_n , \sim — отношение гомотопии. Поличисловой интеграл в (75) понимается покомпонентно:

$$\int_{\Gamma} f(x) dx \equiv \sum_{s=1}^n \int_{t_1}^{t_2} f_s(x_\Gamma^s(t)) \dot{x}_\Gamma^s(t) dt, \quad (76)$$

где $x_\Gamma(t)$ — параметризация пути интегрирования Γ .

Рассмотрим, наконец поличисловую версию ступенчатой функции Хевисайда:

$$\Theta(x) \equiv \sum_{s=1}^n \theta(x^s) e_s, \quad (77)$$

где в правой части определения стоят стандартные ступенчатые функции от вещественных аргументов. Финслерова норма этой функции определяет стандартную многомерную ступенчатую функцию:

$$\|\Theta(x)\|^n = \theta_n(x^1, \dots, x^n) = \prod_{s=1}^n \theta(x^s). \quad (78)$$

3.2 Дельта-функция над поличислами

Определим теперь поличисловую версию дельта-функции, рассматривая следующие пределы:

$$\Delta(x) \equiv \lim_{a \rightarrow 0} \omega_a(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \sigma_a(x). \quad (79)$$

Как и в вещественном случае, пределы в (79), интерпретируемые поточечно, не определяют никакой классической функции. С другой стороны, объекту $\Delta(x)$ можно придать смысл, если рассматривать вместо (79) слабые пределы:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\Gamma \in \mathcal{P}_n^+} f(x) \omega_a(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{\Gamma \in \mathcal{P}_n^+} f(x) \sigma_a(x) dx = f(0), \quad (80)$$

где f — некоторая голоморфная поличисловая функция. Соотношения (80) позволяют вполне строго определить $\Delta(x)$ как линейный поличисловой функционал по формуле:

$$\langle \Delta(x), f(x) \rangle_{\Gamma} \equiv \int_{\Gamma \in \mathcal{P}_n^+} \Delta(x) f(x) dx = f(0). \quad (81)$$

Переходя к компонентам, из (81) очевидно имеем следующее представление:

$$\Delta(x) = \sum_{s=1}^n \delta(x^s) e_s, \quad (82)$$

где в правой части стоят обычные дельта-функции вещественной переменной.

В связи с определением $\Delta(x)$ необходимо сделать несколько замечаний.

1. Функционал $\Delta(x)$ в отличие от стандартной многомерной дельта-функции $\delta_n(x^1, \dots, x^n)$ имеет сингулярность, сосредоточенную не в точке, а на конусе $\text{Con}(x)$. Многомерная дельта-функция возникает в излагаемом подходе естественным образом как n -ая степень нормы:

$$\delta_n(x^1, \dots, x^n) \equiv \prod_{s=1}^n \delta(x^s) = \|\Delta(x)\|^n. \quad (83)$$

2. Формулы (81) или (82) однозначно определяют линейный функционал лишь в том случае, когда жестко фиксирован класс путей интегрирования (мы фиксировали класс положительно ориентированных вещественно-подобных путей). В формуле (81) зависимость значения функционала $\Delta(x)$ от пути интегрирования указана явно. Здесь проявляется многомерная специфика \mathcal{P}_n . В случае пути общего положения (или даже многосвязного пути) формулу (81) следует обобщить следующим образом:

$$\langle \Delta, f \rangle_{\Gamma} = N_{\Gamma} f(0), \quad (84)$$

где поличисло N учитывает количество пересечений пути плоскостей конуса, на котором сосредоточена сингулярность $\Delta(x)$. Это число определяется формулой:

$$N_{\Gamma} = \sum_{s=1}^n \sum_m \text{sign}(\dot{x}_{\Gamma}^s(t_m))|_{t_m=(x^s)^{-1}(0)} e_s. \quad (85)$$

3. Выбор конкретного класса основных функций поличисловой переменной, над которыми определяется пространство обобщенных функций как пространство линейных функционалов, зависит от решаемых задач. Общее требование заключается в существовании

интегралов вида (81). Этого можно добиться, например вводя поличисловой аналог пространства гладких функций с финитным носителем (определение которого покомпонентно сводится к классическому определению), или ограничивая интегрирование гладких или голоморфных функций на «поличисловой многомерный ящик», с размером $L = \sum_{s=1}^n L^s e_s$. Там где это возможно, мы не конкретизируем конкретные свойства класса основных функций, предполагая лишь существование интегралов и законность производимых операций.

4. Нетрудно определить набор голоморфных дельта-функций $\{\Delta(x)^k\}$ посредством формулы:

$$\Delta(x)^k \equiv C^k(\Delta(x)), \tag{86}$$

а также поличисловую дельта-функцию, особенность которой сосредоточена на некотором подмногообразии \mathcal{M}_q в P_n :

$$\Delta_{\mathcal{M}_q} \equiv \Delta(x - x_{\mathcal{M}}), \tag{87}$$

где $x_{\mathcal{M}} : R^q \rightarrow P_n$ — параметризация \mathcal{M}_q .

3.3 Функция Грина оператора \bigcirc_n и сингулярные уравнения

Рассмотрим неоднородное уравнение вида:

$$\bigcirc_n \mathcal{G}(x, x_0) = \Delta(x - x_0), \tag{88}$$

в правой части которого стоит поличисловой аналог точечного источника с вершиной в точке x_0 . Поличисловое уравнение (88) распадается на совокупность n скалярных уравнений в компонентах:

$$\frac{\partial^n \mathcal{G}^s}{\partial x^1 \dots \partial x^n} = \delta(x^s - x_0^s). \tag{89}$$

С учетом известного в классической теории обобщенных функций соотношения [21]:

$$\frac{d\theta(\xi)}{d\xi} = \delta(\xi), \quad \xi \in R, \tag{90}$$

мы получаем с помощью непосредственного последовательного интегрирования:

$$\mathcal{G}^s = \theta(x^s - x_0^s) x^1 \dots \hat{x}^s \dots x^n + f_0^s, \tag{91}$$

где шляпка, как обычно, означает пропуск соответствующего члена последовательности, а f_0^s — s -ая компонента произвольной полигармонической функции $f_0 \in \text{Harm}(P_n)$. Решение (91) можно записать и в поличисловой симметричной форме:

$$\mathcal{G}(x - x_0) = (\Theta(x - x_0) \cdot \partial) \|x - x_0\|^n I_n + f_0, \tag{92}$$

где $f_0 \in \text{Harm}(P_n)$. Выражение (92) представляет общий вид функции Грина для поличислового гармонического оператора. Если в правой части (88) будет стоять распределенный поличисловой источник $J(x)$, то общее решение уравнения

$$\bigcirc_n \Phi = J \tag{93}$$

будет выражаться по общим формулам теории функций Грина через следующую (в отличие от теории поля в R^n , по существу одномерную) свертку:

$$\Phi(x) = \int_{\Gamma \subset \mathcal{P}_n^+} \mathcal{G}(x - x') J(x') dx' + f_0, \tag{94}$$

где функция $f_0 \in \text{Harm}(P_n)$ определяется граничными условиями.

Рассмотрим также еще пару сингулярных уравнений, которые могут встретиться в приложениях поличисловой теории поля. Одно из них описывает сингулярный источник, сосредоточенный на конусе метрики БМ, и учитывает эффект его убывания с расстоянием, совместимый с группой симметрии метрики БМ. Это уравнение имеет следующий вид:

$$\bigcirc_n G_n = \delta(\|x - x_0\|^n). \quad (95)$$

Здесь правая часть — скаляр, а G_n — скалярная функция Грина уравнения (95). С помощью правил обращения с дельта-функцией от функции, правую часть в (95) можно преобразовать к виду:

$$\delta(\|x - x_0\|^n) = \frac{1}{\|x - x_0\|^n} \sum_{s=1}^n (x^s - x_0^s) \delta(x^s - x_0^s). \quad (96)$$

Непосредственным последовательным интегрированием (95) с учетом (96) получаем:

$$G_n = \prod_{s=1}^n \ln(x^s - x_0^s) \sum_{k=1}^n \frac{\theta(x^k - x_0^k)}{\ln(x^k - x_0^k)} \quad (97)$$

с точностью до решения однородного уравнения.

Еще одну скалярную функцию Грина определяет скалярное уравнение следующего вида:

$$\bigcirc_n \mathcal{R}_n = \|\Delta(x - x_0)\|^n = \prod_{s=1}^n \delta(x^s - x_0^s). \quad (98)$$

Его непосредственное последовательное интегрирование приводит к следующему фундаментальному решению:

$$\mathcal{R}_n = \|\Theta(x - x_0)\| = \prod_{s=1}^k \theta(x^s - x_0^s). \quad (99)$$

4 Метрика БМ и оператор \bigcirc_3 в сферической и цилиндрической (изотропной) системах координат

В этом разделе мы рассмотрим общий вид метрики БМ и скалярного оператора \bigcirc_3 в финслеровой сферической и цилиндрической системах координат. В первом случае мы проведем рассмотрение для произвольного выбора угловых координат на индикатриссе, а так же для некоторых конкретных угловых калибровок.

Начнем с более простой финслеровой цилиндрической системы координат, которая связана с исходной изотропной системой посредством соотношений⁸:

$$x^1 = \rho e^\psi; \quad X^2 = \rho e^{-\psi}; \quad X^3 = z. \quad (100)$$

Для базисных 1-форм получаем:

$$dx^1 = d\rho e^\psi + \rho e^\psi d\psi; \quad dx^2 = d\rho e^{-\psi} - \rho e^{-\psi} d\psi; \quad dx^3 = dz, \quad (101)$$

⁸Поясним происхождение этих формул с алгеброй поличисел. Согласно общему выражению для метрического бингла (29) для $n = 2$ имеем: $\psi = [-\ln(x^1/\rho) \ln(x^2/\rho)]^{1/2} = \ln[x^1/\rho]$, где было учтено соотношение $\rho = \sqrt{x^1 x^2}$, справедливое в первом и третьем клиньях плоскости двойной переменной. Отсюда сразу получаются формулы (100).

а для интервала Бервальда-Моора после тензорного перемножения 1-форм в (101), сразу получаем:

$$ds_{BM}^3 = (d\rho^2 - \rho^2 d\psi^2)dz. \quad (102)$$

Записывая дуальные соотношения для операторов дифференцирования:

$$\begin{aligned} \partial_\rho &= e^\psi \partial_1 + e^{-\psi} \partial_2; \\ \partial_\psi &= r e^\psi \partial_1 - r e^{-\psi} \partial_2; \\ \partial_z &= \partial_3 \end{aligned} \quad (103)$$

и выражая изотропные операторы ∂_i :

$$\begin{aligned} \partial_1 &= \frac{e^{-\psi}}{2} \left(\partial_r + \frac{1}{r} \partial_\psi \right); \\ \partial_2 &= \frac{e^\psi}{2} \left(\partial_r - \frac{1}{r} \partial_\psi \right); \\ \partial_3 &= \partial_z, \end{aligned} \quad (104)$$

получаем после некоторых преобразований для инвариантного оператора \bigcirc_3 следующее представление в цилиндрической системе координат:

$$\bigcirc_3 = \frac{1}{4} (\bigcirc_{2\rho} - \rho^{-2} \partial_\psi^2) \partial_z, \quad (105)$$

где $\bigcirc_{2\rho} = \rho^{-1} \partial_\rho \rho \partial_\rho$ — радиальная часть 2-мерного оператора⁹ \bigcirc_2 .

Перейдем к выражениям в общей финслеровой сферической системе координат, связь которых с плоскими изотропными координатами задается посредством следующих общих формул:

$$\begin{aligned} x^1 &= r e^{F_1}; \\ x^2 &= r e^{F_2}; \\ x^3 &= r e^{-F_1 - F_2}, \end{aligned} \quad (106)$$

где функции $F_i = F_i(\xi^1, \xi^2)$ (пока произвольные гладкие независимые функции двух вещественных переменных) задают параметризацию индикатриссы в пространстве H_3 , $r^3 = x^1 x^2 x^3 = \|x\|^3$. Из (106) получаем для базисных 1-форм следующие соотношения:

$$\begin{aligned} dx^1 &= e^{F_1} (dr + r(F_{1,1} d\xi^1 + F_{1,2} d\xi^2)); \\ dx^2 &= e^{F_2} (dr + r(F_{2,1} d\xi^1 + F_{2,2} d\xi^2)); \\ dx^3 &= e^{-F_1 - F_2} (dr - r((F_{1,1} + F_{2,1}) d\xi^1 + (F_{1,2} + F_{2,2}) d\xi^2)), \end{aligned} \quad (107)$$

где запятая с номером i означает частное дифференцирование по переменной ξ^i ($i = 1, 2$). Якобиан преобразования (106) легко вычисляется через коэффициенты матрицы Якоби в (107):

$$\mathfrak{J}(r, \xi^1, \xi^2) \equiv \frac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(r, \xi^1, \xi^2)} = 3r^2 \frac{D(F_1, F_2)}{D(\xi^1, \xi^2)}. \quad (108)$$

⁹Который, с точностью до числового множителя, совпадает со стандартным волновым оператором в двумерном пространстве-времени Минковского.

Подставляя (107) в выражение

$${}^3\mathfrak{h} = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3),$$

и выделяя коэффициенты при различных тензорных степенях криволинейных базисных 1-форм $\{dr, d\xi^1, d\xi^2\}$, мы приходим к следующим выражениям для компонент метрики БМ в общей сферической системе координат:

$$\begin{aligned} {}^3\mathfrak{h}_{rrr} &= 1; \\ {}^3\mathfrak{h}_{111} &= -r^3 F_{1,1} F_{2,1} (F_{1,1} + F_{2,1}); \\ {}^3\mathfrak{h}_{222} &= -r^3 F_{1,2} F_{2,2} (F_{1,2} + F_{2,2}); \end{aligned} \quad (109)$$

$$\begin{aligned} {}^3\mathfrak{h}_{rr1} &= 0; \quad {}^3\mathfrak{h}_{rr2} = 0; \\ {}^3\mathfrak{h}_{r11} &= -\frac{r^2}{3} (F_{1,1} F_{2,1} + F_{1,1}^2 + F_{2,1}^2); \\ {}^3\mathfrak{h}_{r22} &= -\frac{r^2}{3} (F_{1,2} F_{2,2} + F_{1,2}^2 + F_{2,2}^2); \end{aligned} \quad (110)$$

$${}^3\mathfrak{h}_{r12} = -\frac{r^2}{6} (2F_{1,1} F_{1,2} + 2F_{2,1} F_{2,2} + F_{1,1} F_{2,2} + F_{1,2} F_{2,1}); \quad (111)$$

$${}^3\mathfrak{h}_{112} = -\frac{r^3}{3} (2F_{1,1} F_{2,1} F_{2,2} + F_{1,2} F_{2,1}^2 + 2F_{1,1} F_{2,1} F_{1,2} + F_{1,1}^2 F_{2,2}); \quad (112)$$

$${}^3\mathfrak{h}_{122} = -\frac{r^3}{3} (2F_{1,2} F_{2,2} F_{2,1} + F_{1,1} F_{2,2}^2 + 2F_{1,2} F_{2,2} F_{1,2} + F_{1,2}^2 F_{2,1}). \quad (113)$$

Приведем явный вид метрики БМ в трех калибровках:

экспоненциальная калибровка $F_1 = \xi^1$, $F_2 = \xi^2$:

$$ds^3 = dr^3 - r^2(3du^2 + dv^2) dr - 2r^3(du^2 - dv^2) du, \quad (114)$$

где $u = (\xi^1 + \xi^2)/2$, $v = (\xi^1 - \xi^2)/2$;

тригонометрическая калибровка $F_1 = 2\xi^1 \sin \xi^2/\sqrt{3}$, $F_2 = \xi^1(\cos \xi^2 - \sin \xi^2/\sqrt{3})$:

$$\begin{aligned} ds^3 &= dr^3 - r^2 dr(du^2 + u^2 dv^2) + \frac{2\sqrt{3}}{9} r^3 (\sin v(4 \cos^2 v - 1)(3u^2 dv^2 - du^2) du + \\ &+ \cos v(4 \cos^2 v - 3)(u^2 dv^2 - 3du^2) u dv), \end{aligned} \quad (115)$$

где для простоты чтения формулы мы положили $\xi^1 = u$, $\xi^2 = v$.

лестничная калибровка $F_1 = \xi^1 e^{\xi^2}$, $F_2 = \xi^1 e^{-\xi^2}$:

$$ds^3 = dr^3 - r^2 dr(4dw^2 + ds^2) + 2r^3 ds^2 dw, \quad (116)$$

где $w = \xi^1 \operatorname{ch} \xi^2$, $ds^2 = (\xi^1)^2 (d\xi^2)^2 - (d\xi^1)^2 - 2$ -мерная метрика БМ (2-мерная метрика Минковского в гиперболических полярных координатах).

Перейдем теперь к вычислению инвариантного оператора \bigcirc_3 в общей сферической системе координат (106). Запишем формулы, дуальные к (107), вытекающие непосредственно из (106):

$$\begin{aligned}\partial_r &= e^{F_1}\partial_1 + e^{F_2}\partial_2 + e^{-F_1-F_2}\partial_3; \\ \partial_u &= r(F_{1,1}e^{F_1}\partial_1 + F_{2,1}e^{F_2}\partial_2) - (F_{1,1} + F_{2,1})e^{-F_1-F_2}\partial_3; \\ \partial_v &= r(F_{1,2}e^{F_1}\partial_1 + F_{2,2}e^{F_2}\partial_2) - (F_{1,2} + F_{2,2})e^{-F_1-F_2}\partial_3,\end{aligned}\tag{117}$$

где $u = \xi^1$, $v = \xi^2$, $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$ ($i = 1, 2, 3$). Рассматривая (117) как систему линейных уравнений относительно дифференциальных операторов ∂_i и разрешая ее, находим:

$$\partial_1 = \frac{r^2 e^{-F_1}}{\mathfrak{J}} \left(\partial_r + \frac{F_{1,2} + 2F_{2,2}}{r} \partial_u - \frac{2F_{2,1} + F_{1,1}}{r} \partial_v \right); \tag{118}$$

$$\partial_2 = \frac{r^2 e^{-F_2}}{\mathfrak{J}} \left(\partial_r - \frac{F_{2,2} + 2F_{1,2}}{r} \partial_u + \frac{2F_{1,1} + F_{2,1}}{r} \partial_v \right); \tag{119}$$

$$\partial_3 = \frac{r^2 e^{F_1+F_2}}{\mathfrak{J}} \left(\partial_r + \frac{F_{1,2} - F_{2,2}}{r} \partial_u + \frac{F_{2,1} - F_{1,1}}{r} \partial_v \right); \tag{120}$$

Перемножая дифференциальные операторы (118)-(120) и выполняя все необходимые дифференцирования, получаем выражение для \bigcirc_3 в общих сферических координатах в виде суммы кубической \mathcal{Q}^3 , квадратичной \mathcal{Q}^2 и линейной \mathcal{Q} форм относительно операторов $\{\partial_r, \partial_u, \partial_v\}$:

$$\bigcirc_3 = \mathcal{Q}^3(\partial_r, \partial_u, \partial_v) + \mathcal{Q}^2(\partial_r, \partial_u, \partial_v) + \mathcal{Q}(\partial_r, \partial_u, \partial_v), \tag{121}$$

где отличные от нуля коэффициенты этих форм имеют следующий вид:

$$\mathcal{Q}_{rrr}^3 = \frac{1}{27}; \quad \mathcal{Q}_{rr}^2 = \frac{1}{9r}; \quad \mathcal{Q}_r^1 = \frac{1}{27r^2} \tag{122}$$

$$\mathcal{Q}_{ruu}^3 = -\frac{r^2(F_{1,2}^2 + F_{1,2}F_{2,2} + F_{2,2}^2)}{3\mathfrak{J}^2}; \quad \mathcal{Q}_{rvv}^3 = -\frac{r^2(F_{1,1}^2 + F_{1,1}F_{2,1} + F_{2,1}^2)}{3\mathfrak{J}^2}; \tag{123}$$

$$\mathcal{Q}_{ruv}^3 = \frac{r^2(F_{1,1}F_{2,2} + 2F_{2,2}F_{2,1} + 2F_{1,2}F_{1,1} + F_{1,2}F_{2,1})}{6\mathfrak{J}^2}; \tag{124}$$

$$\mathcal{Q}_{uuu}^3 = \frac{r^3(F_{1,2}^2F_{2,1} - 2F_{1,2}F_{2,1}F_{2,2} - 2F_{2,1}F_{2,2}^2 + 2F_{1,1}F_{1,2}^2 + 2F_{1,1}F_{1,2}F_{2,2} - F_{1,1}F_{2,2}^2)}{\mathfrak{J}^3}; \tag{125}$$

$$\mathcal{Q}_{vvv}^3 = \frac{r^3(F_{2,1}^2F_{1,2} - 2F_{1,1}F_{2,1}F_{1,2} - 2F_{1,2}F_{1,1}^2 + 2F_{2,2}F_{2,1}^2 + 2F_{1,1}F_{2,1}F_{2,2} - F_{1,1}^2F_{2,2})}{\mathfrak{J}^3}; \tag{126}$$

$$\begin{aligned}
Q_{uuu}^3 = \frac{9r^7}{\mathfrak{J}^5} & (3F_{2,2}^2 F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 + 6F_{1,2}^3 F_{2,2}^2 F_{1,1} F_{2,1} - 2F_{1,2}^3 F_{2,2}^2 F_{1,1}^2 - 4F_{2,2}^4 F_{1,1} F_{1,2} F_{2,1} + \\
& + 2F_{2,2}^5 F_{1,1}^2 - 2F_{1,2}^5 F_{2,1}^2 + 4F_{1,2}^4 F_{2,1} F_{2,2} F_{1,1} - 6F_{2,2}^3 F_{1,1} F_{1,2}^2 F_{2,1} + 2F_{2,2}^3 F_{1,2}^2 F_{2,1}^2 + \\
& + 3F_{1,2} F_{2,2}^4 F_{1,1}^2 - 3F_{1,2}^2 F_{2,2}^3 F_{1,1}^2 - 3F_{2,2} F_{1,2}^4 F_{2,1}^2); \tag{127}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{vvv}^3 = \frac{9r^7}{\mathfrak{J}^5} & (-2F_{2,1}^5 F_{1,2}^2 + 2F_{1,1}^5 F_{2,2}^2 + 2F_{1,1}^3 F_{2,2}^2 F_{1,1}^2 + 3F_{1,1}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1}^3 - 3F_{2,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1}^3 + \\
& + 6F_{1,1}^2 F_{2,1}^3 F_{1,2} F_{2,2} + 3F_{2,1} F_{1,1}^4 F_{2,2}^2 - 4F_{1,1}^4 F_{2,2} F_{1,2} F_{2,1} + 4F_{2,1}^4 F_{1,2} F_{2,2} F_{1,1} - \\
& - 6F_{1,1}^3 F_{2,2} F_{1,2} F_{2,1}^2 - 2F_{2,1}^3 F_{2,2}^2 F_{1,1}^2 - 3F_{1,1} F_{2,1}^4 F_{1,2}^2); \tag{128}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{uu}^2 = \frac{9r^7}{\mathfrak{J}^5} & (-3F_{2,2,2} F_{1,2}^3 F_{2,1}^3 - 6F_{2,1,2} F_{1,2}^4 F_{2,1}^2 - 6F_{2,2}^5 F_{1,1} F_{1,1,1} + 3F_{1,2,2} F_{2,2}^3 F_{1,1}^3 + \\
& + 6F_{1,2}^5 F_{2,1} F_{2,1,1} + 6F_{1,1,2} F_{2,2}^4 F_{1,1}^2 - 12F_{1,2} F_{1,1,2} F_{2,2}^3 F_{1,1}^2 - 9F_{2,2}^2 F_{1,2}^3 F_{2,1} F_{1,1,1} - \\
& - 9F_{1,2}^3 F_{2,2}^2 F_{1,1} F_{2,1,1} + 9F_{2,2}^3 F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{1,1,1} + 12F_{2,2}^4 F_{1,1,2} F_{2,1} F_{1,1} - \\
& - 9F_{2,2}^2 F_{1,2}^3 F_{2,1} F_{2,1,1} + 6F_{2,2,2} F_{1,2} F_{2,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1} - 6F_{1,2}^4 F_{2,1} F_{2,2} F_{1,1,1} + \\
& + 6F_{1,2} F_{1,2,2} F_{2,2}^2 F_{1,1}^3 - 6F_{1,2}^2 F_{2,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2} - 6F_{2,2} F_{1,1} F_{1,2}^3 F_{2,1,2} F_{2,1} + \\
& + 12F_{2,2} F_{2,1,2} F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 - 12F_{2,2}^3 F_{1,1,2} F_{2,1}^2 F_{1,2} + 6F_{2,2}^4 F_{1,1} F_{1,2} F_{2,1,1} - \\
& - 6F_{2,2} F_{2,2,2} F_{1,2}^2 F_{2,1}^3 - 9F_{1,2} F_{2,2}^4 F_{1,1} F_{1,1,1} + 3F_{1,2} F_{1,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,2,2} F_{2,1} - \\
& - 3F_{1,1}^2 F_{2,2,2} F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,2} - 6F_{2,2}^2 F_{1,1} F_{2,1,2} F_{1,2}^2 F_{2,1} - 3F_{2,2,2} F_{1,2}^2 F_{2,1}^2 F_{2,2} F_{1,1} + \\
& + 6F_{1,1} F_{2,2,2} F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 - 3F_{1,2} F_{2,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2}^2 + 6F_{2,2}^2 F_{1,2,2} F_{2,1}^3 F_{1,2} + \\
& + 6F_{1,2} F_{2,2}^3 F_{1,1,2} F_{2,1} F_{1,1} - 12F_{2,2}^2 F_{1,1,2} F_{2,1}^2 F_{1,2}^2 + 12F_{1,1}^2 F_{1,2}^3 F_{2,1,2} F_{2,2} + \\
& + 12F_{1,2}^3 F_{2,2} F_{1,1} F_{1,1,2} F_{2,1} + 3F_{2,2} F_{1,2,2} F_{2,1}^3 F_{1,2}^2 - 6F_{2,2}^3 F_{1,2,2} F_{2,1} F_{1,1} + \\
& + 6F_{2,2} F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 F_{1,1,2} - 6F_{1,2}^4 F_{2,2} F_{1,1} F_{2,1,1} - 6F_{2,2}^3 F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,1,1} - \\
& - 6F_{1,2,2} F_{2,2} F_{1,1}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1} + 6F_{1,2}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1} F_{1,1,2} F_{2,1} + 9F_{1,2}^2 F_{2,2}^3 F_{1,1} F_{1,1,1} + \\
& + 9F_{2,2}^3 F_{1,1} F_{1,2}^2 F_{2,1,1} + 3F_{1,2} F_{2,2}^2 F_{1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1} + 9F_{2,2} F_{1,2}^4 F_{2,1} F_{2,1,1} - \\
& - 12F_{1,1} F_{1,2}^4 F_{2,1,2} F_{2,1} - 6F_{1,2} F_{2,2}^3 F_{1,1}^2 F_{2,1,2} - 12F_{1,2}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1}^2 F_{1,1,2} + \\
& + 6F_{1,2}^3 F_{2,2,2} F_{1,1}^2 F_{2,1} + 12F_{1,2}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1}^2 F_{2,1,2} + 6F_{2,2}^4 F_{1,2} F_{2,1} F_{1,1,1} - \\
& - 6F_{1,1} F_{2,2} F_{1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,2}^2 + 6F_{1,1}^2 F_{2,2,2} F_{1,2} F_{2,1} F_{2,2}^2 + 6F_{1,2}^3 F_{2,2}^2 F_{1,1} F_{1,1,1} + \\
& + 12F_{2,2}^2 F_{2,1,2} F_{1,2}^2 F_{2,1}^2 - 6F_{1,1}^2 F_{2,2}^3 F_{1,2,2} F_{2,1} - 12F_{2,2}^3 F_{1,1} F_{2,1,2} F_{1,2} F_{2,1}); \tag{129}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{vv}^2 = & -\frac{9r^7}{\mathcal{J}^5}(-12F_{1,2}F_{1,1}^4F_{2,1,2}F_{2,2} + 12F_{2,1}^2F_{2,1,2}F_{1,1}^2F_{1,2}^2 + 9F_{1,1}^2F_{1,2}F_{2,1}^3F_{1,2,2}- \\
 & - 6F_{2,1}^3F_{2,2}^2F_{1,1,1}F_{1,2} + 12F_{2,1}^2F_{2,1,2}F_{1,1}^2F_{2,2}^2 + 6F_{1,1}^3F_{1,2}F_{2,1}^2F_{1,2,2}+ \\
 & + 6F_{1,2}F_{2,1,1}F_{2,2}^2F_{1,1}^3 - 12F_{2,1}^3F_{1,1,2}F_{2,2}^2F_{1,1} - 3F_{1,1}F_{1,2}^3F_{2,1}^2F_{2,1,1}- \\
 & - 9F_{1,1}F_{2,1}^4F_{1,2}F_{1,2,2} + 9F_{1,1}^2F_{1,2}F_{2,1}^3F_{2,2,2} - 6F_{1,2}F_{1,1}^4F_{2,1}F_{2,2,2}- \\
 & - 12F_{1,1}^2F_{2,1}^2F_{1,1,2}F_{1,2}^2 - 6F_{1,1}^2F_{1,2}^3F_{2,1,1}F_{2,1} - 12F_{1,1}F_{2,1}^3F_{1,1,2}F_{1,2}^2+ \\
 & + 6F_{2,1}^2F_{2,2}^3F_{1,1,1}F_{1,1} - 6F_{1,1}^4F_{2,2}F_{1,2,2}F_{2,1} - 6F_{2,1}^3F_{2,1,2}F_{1,1}F_{1,2}^2+ \\
 & + 12F_{2,1}^4F_{2,2}F_{1,1,2}F_{1,2} + 6F_{1,1}^3F_{1,1,2}F_{2,1}F_{2,2}^2 - 9F_{1,1}^3F_{1,2}F_{2,1}^2F_{2,2,2}+ \\
 & + 3F_{2,2}F_{1,1}F_{1,2}^2F_{2,1}^2F_{1,1,1} - 3F_{1,1}^2F_{2,2}F_{1,2}^2F_{2,1,1}F_{2,1} - 3F_{1,2}F_{2,1}F_{2,2}^2F_{1,1}^2F_{2,1,1}- \\
 & - 6F_{2,1}^3F_{2,2}F_{1,1,1}F_{1,2}^2 + 12F_{1,1}^3F_{2,1,2}F_{1,2}^2F_{2,1} + 6F_{1,1}^3F_{1,2}^2F_{2,1,1}F_{2,2}- \\
 & - 6F_{1,1}^3F_{1,2}^2F_{2,1,1}F_{2,2} - 12F_{1,1}^2F_{2,1}^2F_{1,1,2}F_{2,2}^2 - 9F_{2,1}^2F_{2,2}F_{1,1}^3F_{2,2,2}+ \\
 & + 6F_{2,1}^4F_{1,2}F_{2,2,2}F_{1,1} - 3F_{2,1,1}F_{2,2}^3F_{1,1}^3 - 6F_{1,1}^4F_{2,1,2}F_{2,2}^2 + 3F_{1,1,1}F_{2,1}^3F_{1,2}^3+ \\
 & + 6F_{1,1}F_{1,2}^3F_{2,1}^2F_{1,1,1} + 3F_{2,1}F_{2,2}^3F_{1,1}^2F_{1,1,1} + 6F_{2,1}^2F_{1,2}F_{2,1,1}F_{2,2}^2F_{1,1}- \\
 & - 6F_{2,1}^2F_{1,2}F_{2,1,2}F_{1,1}^2F_{2,2} - 12F_{2,1}^3F_{2,2}F_{2,1,2}F_{1,1}F_{1,2} + 6F_{1,1}^2F_{1,2}F_{2,1}^2F_{1,1,2}F_{2,2}- \\
 & - 9F_{1,1}^3F_{2,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^2 + 9F_{2,1}^3F_{2,2}F_{1,1}^2F_{1,2,2} + 12F_{1,1}^3F_{1,2}F_{1,1,2}F_{2,1}F_{2,2}+ \\
 & + 6F_{2,1}^4F_{1,1,2}F_{1,2}^2 - 6F_{2,1}^5F_{1,2}F_{1,2,2} + 6F_{1,1}^5F_{2,2}F_{2,2,2} + 6F_{1,2}F_{2,1}^3F_{1,1,2}F_{2,2}F_{1,1}+ \\
 & + 12F_{2,1}F_{2,1,2}F_{1,1}^3F_{2,2}^2 - 6F_{2,1}F_{2,2}^3F_{1,1}^2F_{2,1,1} + 3F_{2,1}^2F_{1,2}F_{2,2}^2F_{1,1,1}F_{1,1}+ \\
 & + 6F_{2,1}^2F_{1,2}^2F_{2,1,1}F_{2,2}F_{1,1} - 6F_{1,1}^2F_{2,2}F_{1,1,1}F_{1,2}^2F_{2,1} - 6F_{1,2}F_{2,1}F_{2,1,2}F_{1,1}^3F_{2,2}+ \\
 & + 9F_{2,1}F_{1,1}^4F_{2,2}F_{2,2,2} - 6F_{1,2}F_{2,1}F_{2,2}^2F_{1,1}^2F_{1,1,1} - 6F_{2,1}^3F_{2,2}F_{1,1}^2F_{2,2,2}+ \\
 & + 6F_{2,1}^4F_{2,2}F_{1,1}F_{1,2,2});
 \end{aligned} \tag{130}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{ru}^2 = & -\frac{3r^4}{2\mathcal{J}^3}(-F_{1,1,1}F_{2,2}^3 + F_{2,2}^2F_{1,1,2}F_{1,1} + F_{2,2}^2F_{1,2}F_{2,1,1} + 2F_{2,2}^2F_{1,1,2}F_{2,1}- \\
 & - F_{2,2}^2F_{1,2}F_{1,1,1} - F_{2,2}F_{1,2,2}F_{1,1}^2 + 2F_{2,2}F_{1,1}F_{1,2}F_{1,1,2} - F_{2,2}F_{1,1}F_{1,2,2}F_{2,1}- \\
 & - F_{2,2}F_{1,1}F_{1,2}F_{2,1,2} - F_{2,2}F_{1,2}^2F_{1,1,1} - F_{2,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^2 - 2F_{2,2}F_{2,1,2}F_{1,2}F_{2,1}+ \\
 & + F_{2,2}F_{1,2}^2F_{2,1,1} + F_{2,2}F_{1,2}F_{2,1}F_{1,1,2} + F_{1,2}F_{2,2,2}F_{1,1}^2 + F_{1,1}F_{2,2,2}F_{1,2}F_{2,1}- \\
 & - 2F_{1,1}F_{1,2}^2F_{2,1,2} + F_{1,2}^3F_{2,1,1} - F_{1,2}^2F_{2,1}F_{2,1,2} + F_{1,2}F_{2,2,2}F_{2,1}^2);
 \end{aligned} \tag{131}$$

$$\begin{aligned}
Q_{rv}^2 = & -\frac{3r^4}{2\mathfrak{J}^3}(F_{2,2}^2 F_{2,1,1} F_{1,1} - F_{2,2}^2 F_{2,1} F_{1,1,1} - F_{2,2} F_{2,1,2} F_{1,1}^2 - 2F_{2,2} F_{1,1} F_{2,1} F_{2,1,2} + \\
& + F_{2,2} F_{1,1} F_{1,1,2} F_{2,1} + F_{2,2} F_{1,1} F_{1,2} F_{2,1,1} - F_{2,2} F_{1,1,1} F_{1,2} F_{2,1} + 2F_{2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1,2} + \\
& + F_{2,2,2} F_{1,1}^3 - 2F_{1,1}^2 F_{1,2} F_{2,1,2} + F_{1,1}^2 F_{2,1} F_{2,2,2} - F_{1,1}^2 F_{1,2,2} F_{2,1} + F_{1,1} F_{1,2}^2 F_{2,1,1} + \\
& + 2F_{1,2} F_{2,1} F_{1,1,2} F_{1,1} + F_{1,1} F_{2,1}^2 F_{2,2,2} - F_{1,1} F_{2,1,2} F_{1,2} F_{2,1} - F_{1,1} F_{1,2,2} F_{2,1}^2 - \\
& - F_{2,1}^3 F_{1,2,2} - F_{1,2}^2 F_{1,1,1} F_{2,1} + F_{1,1,2} F_{2,1}^2 F_{1,2});
\end{aligned} \tag{132}$$

$$\begin{aligned}
Q_{uv}^2 = & \frac{9r^5}{2\mathfrak{J}^4}(-8F_{1,2}^2 F_{1,1}^2 F_{2,1,2} - 4F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,2} F_{1,1,1} - 2F_{1,2} F_{1,1} F_{2,2}^2 F_{1,1,1} - \\
& - 4F_{1,2} F_{2,1,1} F_{2,2}^2 F_{1,1} + 4F_{2,2}^2 F_{2,1} F_{1,1} F_{2,1,2} + 5F_{1,2} F_{2,1} F_{2,2,2} F_{1,1}^2 - \\
& - 2F_{2,2}^3 F_{1,1} F_{2,1,1} + 4F_{2,2} F_{1,2,2} F_{2,1}^3 + 2F_{2,2}^2 F_{1,1}^2 F_{1,1,2} + F_{2,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2} + \\
& + F_{2,2}^3 F_{1,1,1} F_{1,1} + 4F_{2,1} F_{2,2}^3 F_{1,1,1} + 4F_{1,2}^3 F_{1,1} F_{2,1,1} - 8F_{2,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1,2} - \\
& - 2F_{1,2} F_{2,1}^3 F_{2,2,2} + 4F_{1,2} F_{1,1}^3 F_{2,2,2} + 8F_{1,2} F_{2,1} F_{1,1,2} F_{2,2} F_{1,1} + \\
& + 8F_{1,2} F_{2,1} F_{2,2} F_{2,1,2} F_{1,1} - 2F_{1,2}^2 F_{2,2} F_{1,1} F_{1,1,1} + 4F_{1,2} F_{2,1}^2 F_{2,2} F_{2,1,2} - \\
& - 2F_{2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1} F_{2,2,2} - 6F_{2,2}^2 F_{2,1} F_{1,1} F_{1,1,2} - 6F_{1,2} F_{2,2} F_{1,1}^2 F_{2,1,2} - \\
& - 2F_{1,2} F_{2,1} F_{1,1}^2 F_{1,2,2} - 6F_{1,2} F_{2,1}^2 F_{2,2} F_{1,1,2} - 4F_{1,2} F_{2,1}^2 F_{2,2,2} F_{1,1} + \\
& + 4F_{1,2} F_{2,2} F_{1,1}^2 F_{1,1,2} + 5F_{2,1}^2 F_{1,2,2} F_{2,2} F_{1,1} - 2F_{1,2} F_{2,1} F_{2,2}^2 F_{2,1,1} + \\
& + 5F_{1,2} F_{2,1} F_{2,2}^2 F_{1,1,1} - 2F_{1,2} F_{2,1}^2 F_{1,1} F_{1,2,2} - 4F_{1,1}^2 F_{1,2,2} F_{2,1} F_{2,2} - \\
& - 6F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,1,2} F_{1,1} - 2F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,2} F_{2,1,1} + 4F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{1,1} F_{1,1,2} - \\
& - 2F_{1,1}^2 F_{2,1} F_{2,2,2} F_{2,2} + 5F_{1,2}^2 F_{2,1,1} F_{2,2} F_{1,1} + F_{1,2} F_{2,1}^3 F_{1,2,2} - \\
& - 2F_{2,2} F_{1,1}^3 F_{1,2,2} - 2F_{1,2}^3 F_{2,1} F_{1,1,1} + F_{1,2}^3 F_{2,1,1} F_{2,1} + 2F_{1,2}^2 F_{2,1}^2 F_{1,1,2} + \\
& + 2F_{1,2}^2 F_{2,1}^2 F_{2,1,2} + 2F_{2,2}^2 F_{2,1,2} F_{1,1}^2);
\end{aligned} \tag{133}$$

$$\begin{aligned}
Q_u = & \frac{9r^7}{\mathfrak{J}^5}(-2F_{2,2}^5 F_{1,1,1,1} F_{1,1} - 2F_{1,2,2,2} F_{2,2}^2 F_{1,1}^4 + 3F_{1,1,1} F_{2,2,2} F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 - 6F_{1,2} F_{2,2}^2 F_{1,1}^4 - \\
& - 3F_{2,1,2,2} F_{1,2}^3 F_{2,1}^3 + 2F_{1,2}^5 F_{2,1,1,1} F_{2,1} - 3F_{2,1,1,2} F_{1,2}^4 F_{2,1}^2 - 9F_{2,2} F_{1,2}^4 F_{2,1,1}^2 + \\
& + 6F_{1,1}^2 F_{1,2}^3 F_{2,1,1,2} F_{2,2} - 9F_{1,2}^2 F_{2,2}^3 F_{1,1,1}^2 + 24F_{2,2}^3 F_{1,1,2} F_{2,1}^2 + 6F_{2,2}^3 F_{1,2}^2 F_{2,1,1}^2 + \\
& + 9F_{1,2} F_{2,2}^4 F_{1,1,1}^2 - 6F_{1,1}^2 F_{1,1,2}^2 F_{2,2}^3 + 6F_{1,1} F_{2,1,2,2} F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 + 2F_{2,2,2,2} F_{1,2}^2 F_{2,1}^4 + \\
& + 3F_{1,1,2,2} F_{2,2}^3 F_{1,1}^3 - 6F_{1,2}^3 F_{2,2}^2 F_{1,1,1}^2 + 6F_{1,2}^3 F_{2,1,2,2} F_{1,1}^2 F_{2,1} - 6F_{1,1} F_{1,2}^4 F_{2,1,1,2} F_{2,1} +
\end{aligned} \tag{134}$$

$$\begin{aligned}
& + 3F_{1,2}^3 F_{2,2} F_{1,1,1,2} F_{2,1}^2 - 3F_{1,1,2} F_{2,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2}^2 + 6F_{2,2}^2 F_{2,1,1,2} F_{1,2}^2 F_{2,1}^2 + 6F_{2,2}^4 F_{1,1,1,2} F_{2,1} F_{1,1} - \\
& - 3F_{2,2}^3 F_{1,2} F_{2,1,1,2} F_{1,1}^2 - 12F_{2,2}^4 F_{1,2} F_{2,1,1} F_{1,1,1} + 12F_{1,2}^4 F_{2,1,1} F_{2,2} F_{1,1,1} + 6F_{1,2} F_{1,1,2,2} F_{2,2}^2 F_{1,1}^3 - \\
& - 24F_{1,2}^3 F_{2,1,1} F_{1,1,2} F_{2,2} F_{1,1} - 27F_{2,2}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1,1} F_{1,1,2} F_{1,1} + 18F_{2,2} F_{2,2,2} F_{1,1,2} F_{2,1}^3 F_{1,2} + \\
& + 6F_{1,2,2} F_{2,2} F_{1,1}^4 F_{2,2,2} - 3F_{1,1,1} F_{2,2} F_{1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,2}^2 + 12F_{2,2} F_{2,1,2} F_{1,2,2} F_{2,1}^3 F_{1,2} - \\
& - 6F_{1,2,2} F_{2,2} F_{1,1} F_{1,1,1} F_{1,2}^2 F_{2,1} + 3F_{2,2} F_{1,1,2,2} F_{2,1}^3 F_{1,2}^2 + 3F_{2,2} F_{1,2}^4 F_{2,1,1,1} F_{2,1} - \\
& - 3F_{2,2}^2 F_{2,1,1,2} F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{1,1} + 6F_{2,1,2} F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 F_{1,1,2} - 27F_{1,2} F_{2,2}^3 F_{1,1,2} F_{2,1} F_{1,1,1} + \\
& + 6F_{1,2}^3 F_{2,2,2} F_{1,1} F_{1,1,1} F_{2,1} - 18F_{2,1,2}^2 F_{1,2}^3 F_{1,1} F_{2,1} - 6F_{1,1}^2 F_{1,2}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1,1,2} + \\
& + 3F_{1,2} F_{2,2}^2 F_{1,1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1} - 3F_{1,1}^2 F_{2,1,2,2} F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,2} - 6F_{2,2}^3 F_{1,1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1} + \\
& + 9F_{2,2}^2 F_{1,2}^3 F_{2,1,1}^2 - 9F_{1,1}^2 F_{2,2,2} F_{1,2}^2 F_{2,1,1} F_{2,2} - 24F_{2,2}^4 F_{1,1,2} F_{2,1} F_{1,1,1} - 6F_{1,2,2} F_{2,1,2} F_{1,1}^3 F_{2,2}^2 - \\
& - 6F_{1,1}^2 F_{2,2}^3 F_{1,1,2,2} F_{2,1} - 9F_{1,2,2}^2 F_{2,2} F_{1,1}^2 F_{2,1}^2 + 6F_{2,1,2}^2 F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 + 6F_{2,2} F_{1,2,2}^2 F_{2,1}^4 + \\
& + 6F_{1,2,2} F_{2,2}^2 F_{1,1}^3 F_{1,1,2} - 12F_{2,2}^3 F_{1,1,2} F_{2,1} F_{2,1,2} F_{1,1} + 2F_{1,2}^3 F_{2,2}^2 F_{1,1,1,1} F_{1,1} - \\
& - 6F_{2,2,2} F_{1,2}^2 F_{2,1}^3 F_{2,1,2} - 3F_{2,1,2,2} F_{1,2}^2 F_{2,1}^2 F_{2,2} F_{1,1} - 6F_{1,2} F_{1,2,2} F_{2,2}^2 F_{1,1}^2 F_{1,1,1} - \\
& - 6F_{1,2}^2 F_{2,1,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2} - 6F_{1,2} F_{1,1,1,2} F_{2,2}^3 F_{1,1}^2 - 9F_{2,2} F_{1,2}^3 F_{2,1,1} F_{1,1,2} F_{2,1} + \\
& + 18F_{2,2}^2 F_{1,1,2} F_{2,1,1} F_{1,2}^2 F_{2,1} + 18F_{1,1,2}^2 F_{2,2}^3 F_{2,1} F_{1,1} - 6F_{1,2,2} F_{2,1,2} F_{1,1}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1} - \\
& - 18F_{2,2}^2 F_{2,1,2} F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,1,1} - 2F_{1,2}^4 F_{2,1,1,1} F_{2,2} F_{1,1} - 12F_{1,2}^3 F_{2,2,2} F_{1,1}^2 F_{2,1,1} + 6F_{2,2}^5 F_{1,1,1}^2 + \\
& + 3F_{2,2}^3 F_{1,1,1,1} F_{1,2}^2 F_{2,1} - 18F_{2,2}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1,1} F_{2,1,2} F_{1,1} - 12F_{1,2} F_{2,2}^2 F_{1,2,2} F_{2,1} F_{2,1,1} F_{1,1} + \\
& + 6F_{2,1,2}^2 F_{1,2} F_{1,1}^2 F_{2,2}^2 - 3F_{2,2} F_{1,1} F_{1,2}^3 F_{2,1,1,2} F_{2,1} + 3F_{2,1} F_{1,2} F_{2,2,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2} - \\
& - 42F_{1,2} F_{2,2}^2 F_{1,1,2} F_{2,1} F_{2,1,2} F_{1,1} + 18F_{1,2} F_{2,2}^3 F_{1,1,2} F_{2,1,1} F_{1,1} + 12F_{2,2}^3 F_{1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1,1} - \\
& - 6F_{1,1,2}^2 F_{2,2} F_{2,1}^2 F_{1,2}^2 - 9F_{1,1} F_{2,2,2} F_{1,2} F_{2,1}^3 F_{1,2,2} + 24F_{2,1,2}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,2} F_{1,1} + \\
& + 12F_{1,1,1} F_{2,2,2} F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,2} F_{1,1} - 18F_{1,2}^3 F_{2,2} F_{1,1,1} F_{2,1,2} F_{2,1} - 3F_{1,2} F_{2,1,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2}^2 + \\
& + 18F_{1,2}^3 F_{2,2}^2 F_{1,1,1} F_{2,1,1} - 9F_{1,1,2} F_{2,2}^4 F_{1,1} F_{1,1,1} - 36F_{2,2}^2 F_{1,1,2} F_{2,1}^2 F_{2,1,2} F_{1,2} - \\
& - 9F_{1,1,1} F_{2,2,2} F_{1,2} F_{2,1} F_{2,2}^2 F_{1,1} + 3F_{1,2} F_{2,2,2} F_{1,1}^2 F_{1,1,1} F_{2,2}^2 + 12F_{1,2,2} F_{2,2} F_{1,1}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1,1} - \\
& - 9F_{1,2} F_{2,2} F_{1,2,2} F_{2,1}^3 F_{1,1,2} + 9F_{1,2} F_{1,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,2,2} F_{2,1,1} - 24F_{2,2}^2 F_{1,2,2} F_{2,1}^3 F_{1,1,2} - \\
& - 12F_{1,2} F_{1,1}^2 F_{1,1,2}^2 F_{2,2}^2 - 24F_{2,2} F_{1,1,2} F_{2,1}^2 F_{2,1,2} F_{1,2}^2 - 3F_{1,2} F_{2,2}^4 F_{1,1,1,1} F_{1,1} + \\
& + 3F_{1,2} F_{2,2}^3 F_{1,1,1,2} F_{2,1} F_{1,1} + 2F_{2,2}^4 F_{1,2} F_{2,1,1,1} F_{1,1} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 6F_{2,2,2}F_{1,1,2}F_{2,1}^2F_{2,2}^2F_{1,1} + 3F_{2,2}^3F_{1,2}^2F_{2,1,1,1}F_{1,1} + 2F_{2,2}^2F_{1,2,2,2}F_{2,1}^3F_{1,1} + \\
& + 12F_{2,1,2}^2F_{1,2}F_{2,1}F_{2,2}^2F_{1,1} + 6F_{1,1}F_{1,2}^3F_{2,2}F_{1,1,1,2}F_{2,1} - 18F_{2,1,2}^2F_{1,2}^2F_{1,1}^2F_{2,2} + \\
& - 6F_{1,2}F_{2,2,2}F_{1,1}^3F_{1,2,2}F_{2,1} + 6F_{2,2,2}^2F_{1,2}F_{2,1}^3F_{1,1} + 24F_{1,2}^4F_{2,1,1}F_{2,1,2}F_{1,1} - \\
& - 3F_{1,2,2}F_{2,2}^3F_{1,1}^2F_{1,1,1} + 18F_{1,2,2}F_{2,2}^2F_{1,1}^2F_{1,1,2}F_{2,1} - 6F_{2,2,2}F_{1,2}F_{2,1}^4F_{1,1,2} + \\
& + 42F_{1,1,2}F_{2,2}F_{1,1}F_{2,1,2}F_{1,2}^2F_{2,1} + 24F_{1,2}^2F_{2,2,2}F_{1,1}^3F_{2,1,2} - 12F_{1,1}F_{1,1,2}^2F_{2,2}F_{1,2}^2F_{2,1} + \\
& + 6F_{1,2}^2F_{2,2,2}F_{1,1}^2F_{1,1,1}F_{2,2} - 3F_{2,2}^2F_{1,2}^3F_{2,1,1,1}F_{2,1} - 27F_{1,1}F_{2,2}^2F_{1,2,2}F_{2,1}^2F_{1,1,2} - \\
& - 3F_{2,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^2F_{2,1,1}F_{1,2}^2 - 18F_{2,2}F_{2,2,2}F_{1,2}F_{2,1}^2F_{2,1,2}F_{1,1} + 9F_{2,2}F_{1,2}F_{2,2,2}F_{1,1}^3F_{2,1,2} + \\
& + 6F_{2,2}F_{2,1,1,2}F_{1,2}^3F_{2,1}^2 + 27F_{2,2}F_{1,2}^3F_{2,1,1}F_{2,1,2}F_{1,1} + 2F_{1,2,2,2}F_{2,2}F_{1,1}^3F_{1,2}F_{2,1} + \\
& + 24F_{1,2}F_{1,1,2}F_{2,2}^2F_{1,1}^2F_{2,1,2} + 6F_{2,2}^2F_{1,1,2,2}F_{2,1}^3F_{1,2} - 3F_{1,1}^2F_{2,2}^3F_{1,2,2}F_{2,1,1} - \\
& - 9F_{2,1}F_{1,2}F_{2,2,2}^2F_{1,1}^3 + 18F_{1,2}F_{2,2}^2F_{1,1,2}^2F_{2,1}^2 + 2F_{2,2}^4F_{1,1,1,1}F_{1,2}F_{2,1} + \\
& + 3F_{1,1}^2F_{2,2}^2F_{1,2,2,2}F_{2,1}^2 - 2F_{2,2}^3F_{1,2}^2F_{2,1,1,1}F_{2,1} + 6F_{2,1,2,2}F_{1,2}F_{2,1}^2F_{2,2}^2F_{1,1} + \\
& + 18F_{1,2}^2F_{2,2}^2F_{1,1,1}F_{1,1,2}F_{2,1} + 18F_{1,2}F_{1,1,2}F_{2,2}^3F_{1,1}F_{1,1,1} - 6F_{2,2}^3F_{1,2}F_{2,1,1}F_{2,1,2}F_{1,1} - \\
& - 2F_{2,2}F_{1,2,2,2}F_{2,1}^4F_{1,2} + 12F_{1,1}^2F_{2,1,2}F_{1,2,2}F_{2,1}F_{2,2}^2 + 12F_{2,1,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^2F_{2,2}^2F_{1,1} + \\
& + 3F_{2,2,2}F_{1,2}^3F_{2,1}^2F_{2,1,1} + 9F_{2,1,2}F_{1,2}^4F_{2,1}F_{2,1,1} - 6F_{2,2}^3F_{1,2,2}F_{2,1}F_{2,1,1}F_{1,1} + \\
& + 9F_{1,1,1}F_{2,2}^3F_{1,2,2}F_{2,1}F_{1,1} - 6F_{1,1}F_{2,1,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^2F_{1,2}^2 + 9F_{1,1}F_{2,2}F_{1,2,2}F_{2,1,1}F_{1,2}^2F_{2,1} + \\
& + 6F_{2,2}^2F_{1,2}^2F_{2,1,1,2}F_{1,1}^2 + 6F_{2,2,2}F_{1,2}F_{2,1}F_{2,1,1}F_{2,2}^2F_{1,1} - 3F_{1,1}^2F_{2,2,2,2}F_{1,2}F_{2,1}^2F_{2,2} + \\
& + 6F_{2,2,2}F_{1,1,2}F_{2,1}^3F_{1,2}^2 - 6F_{2,2}^2F_{1,2,2}F_{2,1}^2F_{2,1,1}F_{1,2} + 3F_{1,1,1,2}F_{2,2}^4F_{1,1}^2 - \\
& - 18F_{2,2}F_{1,1}^2F_{2,2,2}F_{1,2}F_{2,1}F_{2,1,2} - 21F_{1,2}F_{1,1}^2F_{2,2,2}F_{1,1,2}F_{2,1}F_{2,2} - 24F_{1,2}F_{1,1,2}^2F_{2,2}^2F_{2,1}F_{1,1} - \\
& - 3F_{2,1}F_{1,2,2,2}F_{2,2}^2F_{1,1}^3 - 6F_{2,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^3F_{2,2,2}F_{1,1} - 18F_{2,2}^3F_{1,2}^2F_{2,1,1}F_{1,1,1} + \\
& + 36F_{1,1}^2F_{1,2}^2F_{2,1,2}F_{1,1,2}F_{2,2} + 3F_{2,1,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^3F_{1,2}^2 + 24F_{1,2}F_{2,2,2}F_{1,1,2}F_{2,1}^2F_{2,2}F_{1,1} - \\
& - 9F_{1,1}F_{2,2,2}F_{1,2}^3F_{2,1,1}F_{2,1} + 6F_{2,2}F_{2,2,2}F_{1,2}^2F_{2,1}^2F_{2,1,1} - 12F_{1,1}F_{2,2,2}F_{1,1,2}F_{2,1}^2F_{1,2}^2 + \\
& + 12F_{2,2}F_{2,1,2}^2F_{1,2}^2F_{2,1}^2 - 6F_{1,2,2}^2F_{2,2}F_{1,1}^3F_{2,1} + 12F_{1,1}F_{1,2}^3F_{2,1,2}F_{1,1,2}F_{2,1} - \\
& - 18F_{1,2}F_{1,2,2}F_{2,1,2}F_{1,1}^3F_{2,2} - 6F_{2,2}^3F_{1,1,1,2}F_{2,1}^2F_{1,2} - 24F_{1,1}^2F_{1,2}^3F_{2,1,2}^2 + \\
& + 18F_{2,2}^3F_{1,1,2}F_{2,1,1}F_{1,2}F_{2,1} - 3F_{1,2}^3F_{2,2}^2F_{1,1,1,1}F_{2,1} + 27F_{1,1}^2F_{2,2,2}F_{1,2}^2F_{2,1}F_{2,1,2} + \\
& + 9F_{2,1}F_{1,2,2}F_{2,2}F_{1,1}^3F_{2,2,2} + 21F_{1,2}F_{2,1,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^2F_{2,2}F_{1,1} - 18F_{1,1,1}F_{1,2}^3F_{2,1,2}F_{2,2}F_{1,1} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 6F_{2,2}F_{2,1,2,2}F_{1,2}^2F_{2,1}^3 + 2F_{1,2}F_{2,2,2,2}F_{1,1}^4F_{2,2} + 3F_{1,2}F_{1,1}^2F_{2,2}^2F_{1,1,2,2}F_{2,1} + \\
 & + 3F_{1,1}^2F_{2,2,2}F_{1,2}F_{2,1,1}F_{2,2}^2 + 3F_{1,1}F_{2,2,2,2}F_{1,2}^2F_{2,1}^3 - 6F_{2,2}^3F_{2,1,1,2}F_{1,2}F_{2,1}F_{1,1} - \\
 & - 3F_{1,2}^2F_{2,2,2,2}F_{1,1}^2F_{2,1}^2 - 24F_{1,2}F_{1,1}^2F_{2,1,2}F_{1,2,2}F_{2,1}F_{2,2} - 6F_{1,1,2,2}F_{2,2}F_{1,1}^2F_{1,2}^2F_{2,1} + \\
 & + 12F_{2,2,2}F_{1,2}^2F_{2,1}F_{2,1,1}F_{2,2}F_{1,1} + 6F_{1,1}^2F_{2,2,2}F_{1,1,2}F_{2,1}F_{2,2}^2 - 6F_{1,1,1}F_{1,2}^4F_{2,1,2}F_{2,1} - \\
 & - 9F_{2,2,2}F_{1,2}^2F_{2,1}^2F_{2,2}F_{1,1,1} + 3F_{1,1}F_{1,2}^2F_{2,2}^2F_{1,1,1,2}F_{2,1} + 9F_{1,1}^2F_{2,2,2}^2F_{1,2}F_{2,1}^2 - \\
 & - 12F_{1,2}F_{1,1,2}F_{2,2,2}F_{1,1}^3F_{2,2} - 9F_{1,1}^2F_{2,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^2F_{2,2,2} + 6F_{1,1}^2F_{2,1,2,2}F_{1,2}F_{2,1}F_{2,2}^2 - \\
 & - 2F_{2,2,2,2}F_{1,2}F_{2,1}^3F_{2,2}F_{1,1} + 18F_{1,2}F_{1,1}F_{2,2}F_{1,2,2}F_{2,1}^2F_{1,1,2} - 12F_{1,2}F_{1,1,1}F_{2,2}^2F_{1,2,2}F_{2,1}F_{1,1} + \\
 & + 9F_{1,2}F_{2,2,2}F_{1,1}^2F_{1,2,2}F_{2,1}^2 - 6F_{1,1}F_{2,2}F_{1,1,2,2}F_{2,1}^2F_{1,2}^2 + 6F_{1,2}^3F_{2,2}F_{1,1,1}F_{1,1,2}F_{2,1} + \\
 & + 9F_{1,1}F_{2,2}F_{1,2,2}^2F_{2,1}^3 - 6F_{1,1,2}F_{2,2}^3F_{1,1}^2F_{2,1,2} - 3F_{2,2}^2F_{1,2}^3F_{2,1,1,1}F_{1,1} + \\
 & + 27F_{2,2}^2F_{1,1,1}F_{2,1,2}F_{1,2}^2F_{2,1} - 18F_{1,2}^2F_{2,2}^2F_{1,1,1}F_{2,1,2}F_{1,1} - 2F_{1,2}^2F_{2,2,2,2}F_{1,1}^3F_{2,1} - \\
 & - 3F_{1,1}F_{2,2}F_{1,2,2,2}F_{2,1}^3F_{1,2} + 18F_{1,2}F_{1,2,2}F_{2,2}F_{1,1}^2F_{1,1,2}F_{2,1} + 3F_{1,2,2,2}F_{2,2}F_{1,1}^2F_{1,2}F_{2,1}^2 + \\
 & + 24F_{2,2}^3F_{1,1,1}F_{2,1,2}F_{1,2}F_{2,1} - 6F_{2,2}^2F_{1,1,1,2}F_{2,1}^2F_{1,2}^2 - 12F_{1,1,2}F_{2,2,2}F_{1,1}^2F_{1,2}^2F_{2,1} - \\
 & - 6F_{1,2}^5F_{2,1,1}^2 + 3F_{1,2}^2F_{2,2}^3F_{1,1,1,1}F_{1,1} + 9F_{1,2}F_{2,2}^3F_{1,1,1}F_{2,1,2}F_{1,1} + 9F_{1,2}F_{2,2}^2F_{1,2,2}F_{2,1}^2F_{1,1,1} - \\
 & - 12F_{2,2,2}F_{1,2}F_{2,1}^2F_{2,2}^2F_{1,1,1} - 18F_{2,2,2}F_{1,2}^2F_{2,1}^2F_{2,1,2}F_{1,1} - 18F_{2,2}F_{2,1,2}F_{1,2}^3F_{2,1}F_{2,1,1} + \\
 & + 18F_{1,1}F_{1,2}^2F_{2,2}^2F_{1,1,2}F_{1,1,1} + 6F_{2,2}^4F_{1,1,2}F_{2,1,1}F_{1,1} - 2F_{1,2}^4F_{2,2}F_{1,1,1,1}F_{2,1});
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_v = & - \frac{9r^7}{\mathfrak{J}^5} (-2F_{1,1,1,1}F_{1,2}^4F_{2,1}^2 - 2F_{2,1}^5F_{1,2,2,2}F_{1,2} - 6F_{2,2}^3F_{2,1}F_{2,1,1,2}F_{1,1}^2 - 9F_{2,1}F_{1,1}^4F_{2,2,2}^2 - \\
 & - 6F_{1,1,2}^2F_{2,1}^3F_{1,2}^2 - 9F_{2,2}F_{1,1}F_{1,2}^3F_{2,1,1}^2 - 9F_{2,2}^2F_{1,1,1}^2F_{1,2}^2F_{2,1} - 6F_{1,1}^2F_{1,1,2,2}F_{2,1}^2F_{1,2}^2 + \\
 & + 12F_{1,1}^2F_{2,2,2}F_{1,1,1}F_{1,2}^2F_{2,1} + 2F_{2,1}^4F_{2,2,2,2}F_{1,1}F_{1,2} - 6F_{2,2}F_{2,1}^3F_{1,1,1,2}F_{1,2}^2 + \\
 & + 9F_{1,2}^3F_{2,1}F_{2,1,2}F_{1,1}F_{2,1,1} - 2F_{1,1}^4F_{1,2,2,2}F_{2,1}F_{2,2} + 24F_{2,2}^2F_{2,1}^3F_{1,1,2}^2 - \\
 & - 24F_{1,2}F_{1,1}^3F_{2,2,2}F_{1,1,2}F_{2,1} - 3F_{2,2}^2F_{1,1}^2F_{1,2}^2F_{2,1,1,1} + 6F_{2,2}^3F_{2,1}^2F_{1,1,1,2}F_{1,1} - \\
 & - 6F_{2,2}F_{2,1}^3F_{2,2,2}F_{1,1,1}F_{1,2} + 9F_{1,1}F_{2,1}^4F_{1,2,2}^2 + 18F_{1,2}F_{2,2}^2F_{1,1}F_{1,1,2}F_{2,1}F_{1,1,1} + \\
 & + 3F_{2,2}^3F_{1,1}^2F_{2,1,2}F_{1,1,1} - 3F_{1,1,1}F_{2,1}^3F_{1,2,2}F_{1,2}^2 - 6F_{1,1,1}^2F_{1,2}^3F_{2,1}F_{2,2} + 3F_{2,2}^3F_{1,1}^2F_{1,1,1,2}F_{2,1} + \\
 & + 9F_{2,2}F_{1,1,1}F_{1,2}^3F_{2,1}F_{2,1,1} + 6F_{2,1}^4F_{2,2,2}F_{1,1,2}F_{1,2} + 6F_{1,1}F_{1,2}^3F_{2,1,1}F_{2,2}F_{1,1,1} + \\
 & + 27F_{2,2}F_{1,1}^2F_{2,1,2}F_{1,2}^2F_{2,1,1} - 9F_{1,2}F_{2,1}^4F_{1,2,2}F_{1,1,2} + 18F_{1,2}F_{1,1}F_{2,1}^3F_{1,2,2}F_{1,1,2} + \\
 & + 2F_{2,1}^2F_{2,2}^3F_{1,1,1,1}F_{1,2} + 18F_{1,1}F_{1,1,2}F_{1,2}^2F_{2,1}F_{2,2}F_{1,1,1} - 3F_{1,1}^2F_{1,2,2}F_{2,1}F_{1,1,1}F_{2,2}^2 +
 \end{aligned} \tag{135}$$

$$\begin{aligned}
& + 12F_{2,1}^2 F_{2,2} F_{1,1,1} F_{2,1,2} F_{1,2}^2 - 6F_{1,1}^5 F_{2,2,2}^2 - 2F_{2,1,1,1} F_{2,2}^3 F_{1,1} F_{1,2} F_{2,1} - \\
& - 6F_{2,1}^3 F_{2,2,2} F_{1,1} F_{1,2} F_{2,1,2} + 6F_{1,1,1} F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 F_{1,1,2} + 3F_{2,1} F_{1,1}^4 F_{2,2,2,2} F_{2,2} - \\
& - 9F_{1,1}^2 F_{2,1} F_{1,2,2} F_{2,1,1} F_{2,2}^2 + 3F_{1,2} F_{1,1}^2 F_{2,1}^2 F_{1,1,2,2} F_{2,2} + 24F_{2,2} F_{2,1}^3 F_{1,2,2} F_{2,1,2} F_{1,1} - \\
& - 9F_{2,1} F_{2,2}^2 F_{1,1,1} F_{1,2}^2 F_{2,1,1} - 18F_{1,2} F_{1,1}^2 F_{2,1}^2 F_{1,2,2} F_{2,1,2} - 6F_{1,1}^3 F_{1,2,2}^2 F_{2,1}^2 - \\
& - 3F_{2,1,1,1} F_{2,2}^2 F_{1,1} F_{1,2}^2 F_{2,1} - 3F_{2,2}^3 F_{1,1}^3 F_{2,1,1,2} + 2F_{1,1} F_{1,2}^4 F_{2,1,1,1} F_{2,1} - \\
& - 3F_{1,2} F_{2,2}^2 F_{2,1} F_{2,1,1,2} F_{1,1}^2 + 6F_{2,1}^2 F_{2,1,2,2} F_{1,1}^2 F_{2,2}^2 - 3F_{1,1}^3 F_{1,2,2,2} F_{2,1}^2 F_{2,2} + \\
& + 12F_{2,1}^3 F_{1,2,2} F_{2,2}^2 F_{1,1,1} - 3F_{1,2} F_{2,1} F_{2,2}^3 F_{1,1,1,1} F_{1,1} - 3F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 F_{1,1,2} F_{2,1,1} + \\
& + 9F_{1,2} F_{2,1}^3 F_{1,2,2} F_{2,2} F_{1,1,1} + 24F_{1,2} F_{1,1}^4 F_{2,2,2} F_{2,1,2} + 6F_{2,1,2}^2 F_{1,1}^3 F_{2,2}^2 - 24F_{1,1}^3 F_{1,2}^2 F_{2,1,2}^2 + \\
& + 6F_{1,2} F_{2,2}^2 F_{1,1}^3 F_{2,1,1,2} + 6F_{2,1,1}^2 F_{2,2}^3 F_{1,1} F_{1,2} - 6F_{1,1}^2 F_{1,1,1,2} F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{2,2} + \\
& + 9F_{1,2} F_{2,1} F_{2,2,2} F_{1,1}^2 F_{1,1,1} F_{2,2} + 9F_{1,2} F_{2,1} F_{2,2}^3 F_{1,1,1}^2 + 3F_{2,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1,1,1} F_{1,2}^2 + \\
& + 6F_{2,1} F_{2,1,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2}^2 - 2F_{1,1}^2 F_{1,2}^3 F_{2,1,1,1} F_{2,2} - 6F_{1,2} F_{1,1}^4 F_{2,1,2,2} F_{2,2} + \\
& + 18F_{2,2} F_{2,1}^2 F_{2,2,2} F_{1,1}^2 F_{1,1,2} + 18F_{2,2} F_{2,1}^3 F_{2,2,2} F_{1,1} F_{1,1,2} + 3F_{1,1}^3 F_{1,1,2,2} F_{2,1} F_{2,2}^2 + \\
& + 6F_{2,2} F_{2,1}^2 F_{2,1,1,2} F_{1,1} F_{1,2}^2 + 3F_{2,1}^3 F_{2,2,2,2} F_{1,1}^2 F_{1,2} - 3F_{1,2} F_{2,1}^2 F_{2,1,2,2} F_{1,1}^2 F_{2,2} + \\
& + 3F_{1,1}^2 F_{1,2,2,2} F_{2,1}^3 F_{1,2} - 9F_{1,1}^2 F_{1,2,2}^2 F_{2,1}^3 + 3F_{2,1}^4 F_{1,1,2,2} F_{1,2}^2 + 12F_{1,1}^4 F_{2,2,2} F_{1,2,2} F_{2,1} + \\
& + 6F_{2,1}^5 F_{1,2,2}^2 + 18F_{2,2} F_{1,1}^2 F_{1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1,2} + 3F_{1,1} F_{2,1}^2 F_{1,2,2} F_{2,1,1} F_{1,2}^2 - \\
& - 6F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 F_{2,1,2} F_{1,1,1} + 6F_{2,1,2}^2 F_{2,1}^2 F_{1,1} F_{1,2}^2 - 3F_{2,2} F_{1,1}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1,1,2} F_{2,1} + \\
& + 3F_{2,2} F_{1,1}^3 F_{1,2}^3 F_{2,1,1,1} F_{2,1} - 12F_{1,1} F_{1,1,2}^2 F_{2,1}^2 F_{1,2}^2 + 12F_{2,1} F_{2,2}^3 F_{1,1,1} F_{2,1,2} F_{1,1} - \\
& - 2F_{2,1} F_{2,2}^4 F_{1,1,1,1} F_{1,1} + 3F_{2,2}^2 F_{1,1,1,1} F_{1,2}^2 F_{2,1} F_{1,1} + 9F_{2,1,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1} F_{1,2}^2 - \\
& - 6F_{2,1} F_{2,2}^3 F_{1,1,1} F_{1,2} F_{2,1,1} - 3F_{2,1} F_{2,2,2} F_{1,1}^2 F_{1,1,1} F_{2,2}^2 + 12F_{2,1,2}^2 F_{2,1} F_{1,1}^2 F_{2,2}^2 + \\
& + 6F_{2,2}^2 F_{2,1}^2 F_{2,1,1,2} F_{1,1} F_{1,2} - 6F_{2,1,2} F_{2,1}^3 F_{1,1,2} F_{1,2}^2 + 18F_{1,1}^3 F_{2,2,2} F_{1,2,2} F_{2,1}^2 - \\
& - 12F_{2,2} F_{2,1,2} F_{2,1}^3 F_{1,1,2} F_{1,2} - 3F_{2,1}^3 F_{2,2,2} F_{1,1,1} F_{1,2}^2 - 6F_{2,2} F_{2,1}^3 F_{2,1,2,2} F_{1,1} F_{1,2} + \\
& + 6F_{2,2}^2 F_{2,1}^2 F_{1,1,2} F_{2,1,1} F_{1,2} - 6F_{1,1}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1,2} F_{1,1,1} F_{2,2} - 24F_{2,2} F_{2,1}^4 F_{1,2,2} F_{1,1,2} - \\
& - 3F_{1,2}^3 F_{2,1}^2 F_{2,1,1,2} F_{1,1} - 6F_{2,1}^3 F_{1,1,2,2} F_{2,2}^2 F_{1,1} - 6F_{2,1,1} F_{2,2}^4 F_{1,1} F_{1,1,1} + \\
& + 3F_{1,1}^2 F_{2,1}^3 F_{1,2,2,2} F_{2,2} - 18F_{1,1} F_{1,2}^3 F_{2,1,2} F_{1,1,1} F_{2,1} - 12F_{1,1}^2 F_{1,1,2} F_{1,2}^2 F_{2,1,1} F_{2,2} + \\
& + 27F_{2,2} F_{1,1}^2 F_{2,1}^2 F_{1,2,2} F_{2,1,2} + 12F_{2,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1,1} F_{2,1,2} F_{1,2} - 6F_{1,2} F_{2,2}^2 F_{1,1}^2 F_{2,1,2} F_{1,1,1} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 9F_{1,2}F_{2,1,1}F_{2,2}^3F_{1,1}F_{1,1,1} - 3F_{2,1}^3F_{2,1,2,2}F_{1,1}F_{1,2}^2 - 18F_{2,1,2}^2F_{1,1}^2F_{1,2}^2F_{2,1} + \\
& + 6F_{1,1}^3F_{1,2}^2F_{2,1,1,2}F_{2,2} - 6F_{1,2}F_{2,2}^2F_{1,1}^2F_{1,1,1,2}F_{2,1} - 12F_{1,1}^3F_{2,2,2}F_{1,2}^2F_{2,1,1} - \\
& - 18F_{1,1}^2F_{2,1}^3F_{1,2,2}F_{2,2,2} + 18F_{1,2}^2F_{2,1}^2F_{1,1,2}F_{2,2}F_{1,1,1} - 6F_{2,2}^2F_{2,1}^3F_{1,1,1,2}F_{1,2} + \\
& + 18F_{1,2}F_{2,1}^3F_{2,2,2}F_{1,1}F_{1,1,2} - 3F_{1,1}^4F_{2,1,2,2}F_{2,2}^2 - 24F_{1,2}F_{1,1,2}^2F_{2,1}^2F_{2,2}F_{1,1} - \\
& - 12F_{1,1}F_{1,1,2}F_{1,2}^3F_{2,1,1}F_{2,1} + 24F_{1,2}F_{2,2}^2F_{2,1}F_{1,1,2}F_{2,1,1}F_{1,1} - 6F_{1,1}^2F_{2,1}^2F_{1,1,2,2}F_{2,2}^2 + \\
& + 6F_{2,2}F_{2,1}^2F_{2,2,2}F_{1,1}F_{2,1,1}F_{1,2} + 12F_{2,2}F_{2,1,2}^2F_{2,1}^2F_{1,1}F_{1,2} + 6F_{2,2}F_{2,1}^4F_{1,1,2,2}F_{1,2} + \\
& + 6F_{1,1,1}F_{1,2}^4F_{2,1}F_{2,1,1} + 6F_{1,1}^3F_{1,1,2}F_{2,1,2}F_{2,2}^2 + 12F_{1,2}F_{1,1}^2F_{2,1}F_{1,2,2}F_{2,1,1}F_{2,2} + \\
& + 12F_{1,2}F_{2,1}F_{2,2,2}F_{1,1}^2F_{2,1,1}F_{2,2} - 18F_{2,2}F_{1,1}^3F_{1,2,2}F_{2,1}F_{2,1,2} + 9F_{2,2}^2F_{1,1}F_{1,2}^2F_{2,1,1}F_{1,1,1} - \\
& - 9F_{1,2}F_{2,1,1}F_{2,2,2}F_{1,1}^3F_{2,2} + 24F_{1,1}^2F_{1,2}^3F_{2,1,2}F_{2,1,1} + 6F_{2,1}^3F_{2,2,2}F_{1,1}^2 - 3F_{2,2}F_{1,1,1,1}F_{1,2}^3F_{2,1}^2 + \\
& + 3F_{2,2}F_{1,1}F_{1,1,1,2}F_{1,2}^2F_{2,1}^2 - 9F_{2,2}F_{1,1}^3F_{2,2,2}F_{1,1,2}F_{2,1} - 3F_{1,1}^3F_{2,2,2,2}F_{1,2}F_{2,1}^2 + \\
& + 3F_{1,1}^3F_{1,2,2}F_{2,1,1}F_{2,2}^2 + 2F_{2,1,1,1}F_{2,2}^4F_{1,1}^2 - 18F_{1,2}F_{2,1,2}^2F_{1,1}^3F_{2,2} + \\
& + 21F_{1,2}F_{2,1}F_{2,2}^2F_{1,1,1}F_{2,1,2}F_{1,1} - 9F_{1,2}F_{2,1}^2F_{1,2,2}F_{2,1,1}F_{2,2}F_{1,1} - 12F_{2,1}^4F_{2,2,2}F_{1,1}F_{1,2,2} - \\
& - 2F_{1,1}^4F_{2,2,2,2}F_{1,2}F_{2,1} + 6F_{1,1}F_{1,1,1,2}F_{1,2}^3F_{2,1}^2 - 18F_{1,2}F_{1,1}^3F_{1,2,2}F_{2,1}F_{2,1,2} + \\
& + 27F_{1,2}F_{2,1}F_{2,2,2}F_{1,1}^3F_{2,1,2} + 6F_{2,1}F_{2,2,2}F_{1,1}^2F_{2,1,1}F_{2,2}^2 - 12F_{1,2}F_{2,2}^2F_{1,1}^2F_{1,1,2}F_{2,1,1} - \\
& - 24F_{2,1}^2F_{2,2}^3F_{1,1,1}F_{1,1,2} + 2F_{1,1}^5F_{2,2,2,2}F_{2,2} + 6F_{1,1}^2F_{1,2,2}F_{2,1,1}F_{1,2}^2F_{2,1} + \\
& + 12F_{1,2}F_{1,1}^3F_{1,1,2}F_{2,1,2}F_{2,2} - 6F_{1,1}^4F_{1,2,2}F_{2,1,2}F_{2,2} - 12F_{1,2}F_{1,1,1}F_{2,1}^2F_{1,2,2}F_{2,2}F_{1,1} + \\
& + 18F_{2,2}^3F_{2,1}F_{1,1,2}F_{2,1,1}F_{1,1} + 9F_{1,2}F_{2,1}^3F_{1,1,2}F_{2,1,2}F_{1,1} + 42F_{1,2}F_{2,2}F_{1,1}^2F_{2,1,2}F_{1,1,2}F_{2,1} + \\
& + 6F_{1,1}^3F_{2,1,2,2}F_{1,2}^2F_{2,1} + 6F_{2,1}^2F_{2,1,2,2}F_{1,1}^2F_{1,2}^2 + 24F_{1,2}^2F_{2,1}^2F_{1,1,2}F_{2,1,2}F_{1,1} + \\
& + 3F_{2,1}^2F_{2,2,2}F_{1,1}F_{2,1,1}F_{1,2}^2 - 6F_{1,1}F_{2,1}^3F_{1,1,2,2}F_{1,2}^2 + 3F_{1,2}^3F_{2,1}^3F_{1,1,1,2} - 12F_{1,2}F_{1,1}^2F_{1,1,2}^2F_{2,1}F_{2,2} - \\
& - 18F_{2,2}^2F_{2,1}F_{2,1,2}F_{1,1}F_{1,2}F_{2,1,1} - 9F_{2,2}^3F_{1,1}F_{1,1,2}F_{2,1}F_{1,1,1} - 24F_{2,2}F_{1,1}F_{2,1,2}F_{1,1,1}F_{1,2}^2F_{2,1} - \\
& - 18F_{1,2}F_{2,1}^2F_{2,2,2}F_{1,1}^2F_{2,1,2} + 2F_{2,1}^4F_{1,2,2,2}F_{2,2}F_{1,1} - 18F_{2,2}F_{2,1}F_{2,1,2}F_{1,1}F_{1,2}^2F_{2,1,1} + \\
& + 3F_{1,2}F_{2,1}^3F_{1,1,2,2}F_{2,2}F_{1,1} - 6F_{1,2}F_{1,1}^2F_{1,1,2}F_{2,1}F_{1,1,1}F_{2,2} - 21F_{2,2}F_{1,1}F_{1,1,2}F_{2,1,1}F_{1,2}^2F_{2,1} + \\
& + 6F_{1,1}^3F_{1,1,2,2}F_{2,1}F_{2,2}F_{1,1,2} - 12F_{1,2}F_{2,1}^2F_{2,2,2}F_{1,1,1}F_{2,2}F_{1,1} - 36F_{2,1,2}F_{2,1}^2F_{1,1,2}F_{2,2}^2F_{1,1} + \\
& + 2F_{1,1,1,1}F_{1,2}^3F_{2,1}F_{2,2}F_{1,1} + 9F_{2,1}^2F_{2,2,2}F_{1,1}F_{1,1,1}F_{1,2}^2 + 9F_{1,1,1}F_{2,1}^2F_{1,2,2}F_{2,2}^2F_{1,1} - \\
& - 24F_{2,2}^2F_{1,1}^2F_{2,1,2}F_{1,1,2}F_{2,1} + 6F_{2,2}^3F_{1,1}^2F_{1,1,2}F_{2,1,1} + 6F_{2,2}F_{2,1}^2F_{1,1,2}F_{2,1,1}F_{1,2}^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 3F_{2,1}^2 F_{2,2,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2} - 27F_{2,2} F_{1,1} F_{2,1}^3 F_{1,2,2} F_{1,1,2} + 18F_{1,2} F_{1,1}^2 F_{1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1,2} - \\
& - 3F_{1,2} F_{2,1} F_{2,1,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2} - 3F_{1,1} F_{2,1}^4 F_{1,2,2,2} F_{1,2} + 2F_{1,1}^3 F_{1,2,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,2} + \\
& + 18F_{1,1,2}^2 F_{2,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1} - 6F_{1,1} F_{1,2,2} F_{2,1}^2 F_{1,1,1} F_{1,2}^2 - 9F_{2,1,1} F_{2,2,2} F_{1,1}^2 F_{1,2}^2 F_{2,1} + \\
& + 6F_{2,1} F_{2,2}^4 F_{1,1,1}^2 - 27F_{1,2} F_{2,1}^2 F_{2,2,2} F_{1,1}^2 F_{1,1,2} + 3F_{1,2} F_{2,1,1,1} F_{2,2}^3 F_{1,1}^2 + \\
& + 36F_{1,1}^2 F_{1,1,2} F_{2,1,2} F_{1,2}^2 F_{2,1} - 42F_{1,2} F_{2,1,2} F_{2,1}^2 F_{1,1,2} F_{2,2} F_{1,1} + 6F_{1,2} F_{1,1}^3 F_{1,2,2} F_{2,1,1} F_{2,2} + \\
& + 3F_{2,1,1} F_{2,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,2}^2 - 6F_{1,1}^2 F_{1,2}^3 F_{2,1,1,2} F_{2,1} - 18F_{2,2} F_{2,1} F_{2,2,2} F_{1,1}^3 F_{2,1,2} - 6F_{1,1} F_{1,2}^4 F_{2,1,1}^2 + \\
& + 6F_{1,2} F_{1,1}^3 F_{1,1,2,2} F_{2,1} F_{2,2} - 6F_{2,1,1} F_{2,2}^3 F_{1,1}^2 F_{2,1,2} + 9F_{2,1}^2 F_{2,2,2}^2 F_{1,1}^3 - \\
& - 27F_{1,2} F_{2,1}^2 F_{2,2}^2 F_{1,1,1} F_{1,1,2} + 9F_{2,2} F_{1,1}^4 F_{2,2,2} F_{2,1,2} - 6F_{2,1}^2 F_{2,2,2} F_{1,1,1} F_{2,2}^2 F_{1,1} + \\
& + 3F_{1,2} F_{2,2}^2 F_{2,1}^2 F_{1,1,1,2} F_{1,1} - 6F_{1,1}^2 F_{1,1,2}^2 F_{2,1} F_{2,2}^2 - 18F_{1,2} F_{2,1,1} F_{2,2}^2 F_{1,1}^2 F_{2,1,2} + \\
& + 18F_{1,2} F_{2,2} F_{2,1}^3 F_{1,1,2}^2 - 18F_{2,2} F_{2,1}^2 F_{2,2,2} F_{1,1}^2 F_{2,1,2} - 2F_{2,1}^3 F_{2,2,2,2} F_{1,1}^2 F_{2,2} - \\
& - 12F_{2,1}^2 F_{1,2,2} F_{2,1,1} F_{2,2}^2 F_{1,1} + 24F_{1,2} F_{2,1,2} F_{2,1} F_{1,1}^2 F_{2,2}.
\end{aligned}$$

Приведем явные выражения для оператора \bigcirc_3 в трех рассмотренных выше калибровках.

Экспоненциальная калибровка:

$$\bigcirc_3 = \bigcirc_{3r} - \frac{1}{9r^2} (\partial_1^2 + \partial_2^2 - \partial_1 \partial_2) \partial_r + \frac{1}{27r^3} (2\partial_2^3 + 2\partial_2^3 - 3\partial_1 \partial_2^2 - 3\partial_1^2 \partial_2); \quad (136)$$

тригонометрическая калибровка:

$$\bigcirc_3 = \bigcirc_{3r} - \frac{1}{12r^2} (\partial_1^2 + (1/\xi^1) \partial_1 + (1/\xi^1)^2 \partial_2^2) \partial_r + \frac{1}{r^3} \sum_{k=0,3; s=0,3-k} \frac{\mathcal{P}_{ks}(\xi^2)}{(\xi^1)^{k-3}} \partial_1^k \partial_2^s; \quad (137)$$

лестничная калибровка:

$$\bigcirc_3 = \bigcirc_{3r} + \frac{1}{216r^3 e^{3\xi^2}} \sum_{k=0,3; s=0,3-k} \frac{\mathcal{K}_{ks}(e^{\xi^2})}{(\xi^1)^{k-3}} \partial_1^k \partial_2^s. \quad (138)$$

В (136)-(138) использованы следующие обозначения: \bigcirc_{3r} — радиальная часть оператора \bigcirc_3 , которая не зависит от выбора угловой калибровки и определяется соотношением:

$$\bigcirc_{3r} = \mathcal{Q}_{rrr}^3 \partial_r^3 + \mathcal{Q}_{rr}^2 \partial_r^2 + \mathcal{Q}_r^1 \partial_r = \frac{1}{27} (\partial_r^3 + (3/r) \partial_r^2 + (1/r^2) \partial_r); \quad (139)$$

$\partial_1 = \partial/\partial\xi^1$, $\partial_2 = \partial/\partial\xi^2$; полиномы \mathcal{P}_{ks} от тригонометрических функций переменной ξ^2 в (137) определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{30} &= -\frac{\sqrt{3}}{36} \sin \xi^2 (4 \cos^2 \xi^2 - 1); & \mathcal{P}_{20} &= -3\mathcal{P}_{30}; \\
\mathcal{P}_{21} &= -\frac{\sqrt{3}}{12} \cos \xi^2 (4 \cos^2 \xi^2 - 3); & \mathcal{P}_{12} &= \mathcal{P}_{20}; \\
\mathcal{P}_{11} &= -3\mathcal{P}_{21}; & \mathcal{P}_{20} &= -\mathcal{P}_{10}; \\
\mathcal{P}_{03} &= \frac{12}{27} \mathcal{P}_{21}; & \mathcal{P}_{02} &= 6\mathcal{P}_{30}; \\
\mathcal{P}_{01} &= \frac{8}{3} \mathcal{P}_{21}; & \mathcal{P}_{00} &= 0;
\end{aligned} \quad (140)$$

полиномы от e^{ξ^2} в (138) определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_{30}(x) &= 2x^6 - 3x^4 - 3x^2 + 2; \\
 \mathcal{K}_{20}(x) &= -6x^6 - 3x^4 - 3x^2 - 6; \\
 \mathcal{K}_{21}(x) &= -6x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 6; \\
 \mathcal{K}_{10}(x) &= -\mathcal{K}_{20}(x); \\
 \mathcal{K}_{11}(x) &= 18x^6 + 3x^4 - 3x^2 - 18; \\
 \mathcal{K}_{12}(x) &= -\mathcal{K}_{20}(x); \\
 \mathcal{K}_{00}(x) &= 0; \\
 \mathcal{K}_{01}(x) &= 16(1 - x^6); \\
 \mathcal{K}_{02}(x) &= 2\mathcal{K}_{20}(x); \\
 \mathcal{K}_{03}(x) &= -2x^6 - 3x^4 + 3x^2 + 2.
 \end{aligned} \tag{141}$$

5 Радиальная часть \bigcirc_{nr} .

Рассмотрим вопрос об общем виде радиальной части \bigcirc_{nr} оператора \bigcirc_n в пространстве H_n произвольной размерности. Простое наблюдение в H_2 и H_3 (а также наблюдение с классическим оператором Лапласа в R^n) обнаруживает, что \bigcirc_{nr} не зависит от угловых координат (формулы (105) и (122)). Этот результат можно доказать и в общем виде для произвольной размерности. Действительно, если функция $f: H_n \rightarrow R$ постоянна на финслеровых сферах, т.е. $f = f(r)$, то результат действия оператора \bigcirc_n на ней очевидно сводится к виду:

$$\bigcirc_n f = \bigcirc_{nr} f. \tag{142}$$

С другой стороны с учетом выражения $r = (x^1 \cdots x^n)^{1/n}$, мы можем непосредственно вычислить:

$$\partial_1 f = f' \partial_1 r = \frac{1}{nx^1} f' r; \quad \partial_2 \partial_1 f = \frac{1}{n^2 x^1 x^2} (f' r)' r; \quad \dots \tag{143}$$

и, стало быть, окончательно:

$$\bigcirc_n f = \partial_1 \cdots \partial_n f = \frac{1}{n^n r^n} \left(r \frac{d}{dr} \right)^n f. \tag{144}$$

Сравнивая правые части (142) и (144), приходим к заключению, что \bigcirc_{nr} не зависит от угловых переменных (независимо от выбора угловой калибровки) и общий вид радиальной части оператора \bigcirc_n дается следующим свернутым выражением:

$$\bigcirc_{nr} = \frac{1}{n^n r^n} \left(r \frac{d}{dr} \right)^n. \tag{145}$$

Для получения развернутого вида \bigcirc_{rn} можно использовать рекуррентное соотношение:

$$\bigcirc_{nr} = \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \left(\frac{n-1}{r} \bigcirc_{n-1,r} + \frac{d}{dr} \bigcirc_{n-1,r} \right), \tag{146}$$

которое вытекает непосредственно из вида (145). Мы выведем развернутое представление для \bigcirc_{nr} матричным методом. Для этого сначала представим оператор \bigcirc_{rn} в виде полинома по степеням d/dr с коэффициентами, удовлетворяющими соотношениям однородности

(оператор \bigcirc_{nr} (и даже оператор \bigcirc_n) однородны по r со степенью однородности $-n$):

$$\bigcirc_{nr} = \sum_{s=1}^n \frac{A_{ns}}{r^{n-s}} \left(\frac{d}{dr} \right)^s, \quad (147)$$

где A_{ns} — числовые коэффициенты, подлежащие определению. С помощью формулы (144) рассмотрим действие \bigcirc_{rn} на функции $\Phi_k(r) = r^k$. С одной стороны по формуле (144) сразу получаем:

$$\bigcirc_{nr} \Phi_k = \left(\frac{k}{n} \right)^n \frac{1}{r^{n-k}}. \quad (148)$$

С другой стороны по формуле (147) получаем:

$$\bigcirc_{nr} \Phi_k = \frac{1}{r^{n-k}} (A_{n1}k + A_{n2}k(k-1) + \dots + A_{ns}k!/(k-s)! + \dots + A_{nk}k!). \quad (149)$$

Приравнявая (148) и (149) приходим к системе уравнений:

$$A_{n1}k + A_{n2}k(k-1) + \dots + A_{ns}k!/(k-s)! + \dots + A_{nk}k! = \left(\frac{k}{n} \right)^n, \quad k = 1, \dots, n. \quad (150)$$

Разделив обе части (150) на $k!$ и переходя к матричным обозначениям, получаем матричное уравнение:

$$M_n \cdot A_n = F_n, \quad (151)$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n1} \\ \vdots \\ A_{nn} \end{pmatrix}; \quad F_n = \begin{pmatrix} 1/n^n \\ \vdots \\ 1/n! \end{pmatrix};$$

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2! & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1/3! & 1/2! & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1/4! & 1/3! & 1/2! & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/(n-1)! & 1/(n-2)! & \dots & 1/2! & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (152)$$

Общие элементы матриц F_n и M_n задаются следующими формулами:

$$(F_n)_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{k}{n} \right)^n; \quad (M_n)_{ik} = \begin{cases} 1/(i-k)!, & i \geq k; \\ 0, & i < k. \end{cases} \quad (153)$$

Матрица M_n является нижнетреугольной, поэтому и обратная к ней матрица M_n^{-1} также будет нижнетреугольной. Нетрудно проверить непосредственным вычислением, что эта обратная матрица имеет следующий вид:

$$M_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2! & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1/3! & 1/2! & -1 & 1 & 0 & \dots \\ 1/4! & -1/3! & 1/2! & -1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1}/(n-1)! & (-1)^n/(n-2)! & \dots & 1/2! & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (154)$$

или в компонентах:

$$(M_n^{-1})_{ik} = \begin{cases} (-1)^{i+k}/(i-k)!, & i \geq k; \\ 0, & i < k. \end{cases} \quad (155)$$

Произведение матриц M_n и M_n^{-1} записывается в компонентах следующим образом:

$$(M_n \cdot M_n^{-1})_{ik} = \sum_{s=1}^n (M_n)_{is} (M_n^{-1})_{sk} = \sum_{s=k}^i \frac{(-1)^{s+k}}{(i-s)!(s-k)!}, \quad (156)$$

где были учтены формулы (153) и (155). Заменяя индекс суммирования s на $p = s - k$ и полагая $i - k = N$, получаем:

$$\sum_{s=k}^i \frac{(-1)^{s+k}}{(i-s)!(s-k)!} = \sum_{p=0}^N \frac{(-1)^p}{(N-p)!p!} = \frac{1}{N!} \sum_{p=0}^N (-1)^p C_p^N = \frac{(1-1)^N}{N!}, \quad (157)$$

что равно нулю в случае $N \neq 0$, (т.е. при $i \neq k$) и равно единице при $N = 0$, (т.е. при $i = k$.) что и требуется для обратной матрицы. Теперь из (151) после умножения на обратную матрицу, получаем:

$$A_n = M_n^{-1} \cdot F_n, \quad (158)$$

или, с учетом (152) и (156), в компонентах

$$A_{nk} = \sum_{s=1}^n (M^{-1})_{ks} (F_n)_s = \sum_{s=1}^k \frac{(-1)^{k+s}}{(k-s)!} \frac{1}{s!} \left(\frac{s}{n}\right)^n = \frac{(-1)^k}{n^n k!} \sum_{s=0}^k (-1)^s C_s^k s^n. \quad (159)$$

При $n = 2$ и 3 полученная формула воспроизводит уже приведенные выше выражения для \bigcirc_{2r} и \bigcirc_{3r} .

6 Точечные центрально-симметричные источники

Переходя в формуле (144) к новой переменной $u = \ln r$, получим более простое выражение для оператора \bigcirc_{nr} :

$$\bigcirc_n f = \partial_1 \cdots \partial_n f = \frac{e^{-nu}}{n^n} \frac{d^n}{du^n} f. \quad (160)$$

Общее центрально-симметричное решение уравнения $\bigcirc_{nr} R_n = 0$ очевидно имеет вид полинома порядка $n - 1$ с произвольными вещественными коэффициентами или, в терминах исходной радиальной переменной r , полинома по логарифмам:

$$R_n(r) = c_0 + c_1 \ln r + c_2 \ln^2 r + \dots c_{n-1} \ln^{n-1} r. \quad (161)$$

Функция (161) удовлетворяет уравнению $\bigcirc_n R_n = 0$ всюду за исключением множества точек, конуса $r = 0$, на котором функция R_n неопределена. По аналогии с евклидовым пространством, решение (161) можно рассматривать как поле некоторого источника, локализованного на конусе¹⁰ $r = 0$. При этом физическим смыслом обладают не сами константы c_i , а их специальные комбинации, которые получаются сравнением выражения (161) и эквивалентного ему выражения:

$$R_n(r) = Q \left(\varepsilon_1 \ln \left[\frac{r}{r_1} \right] + \varepsilon_2 \ln^2 \left[\frac{r}{r_2} \right] + \dots + \varepsilon_{n-1} \ln^{n-1} \left[\frac{r}{r_{n-1}} \right] \right), \quad (162)$$

¹⁰Хотя функция (161) не является функцией Грина для оператора \bigcirc_n с сингулярным источником в правой части.

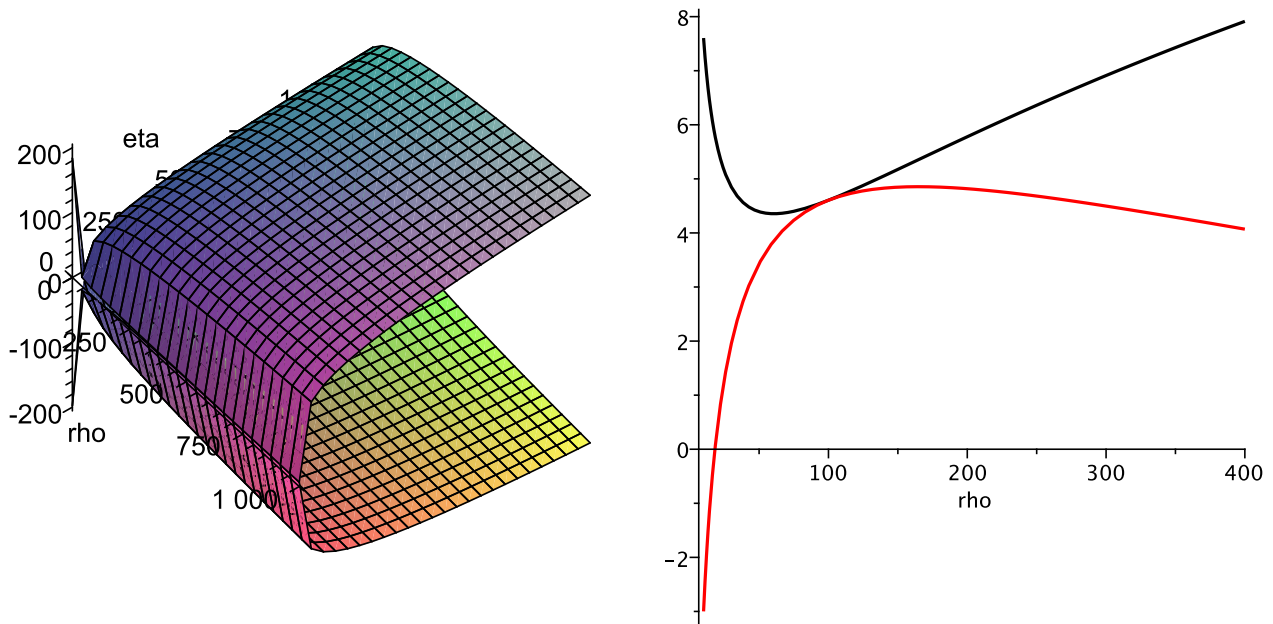


Рис. 1: Слева — зависимость приведенного потенциала $F_3(\rho, \eta)$ от параметров, справа — ее сечение при $\eta = 0.01$ ($\varepsilon = +1$ для верхней кривой и $\varepsilon = -1$ для нижней кривой).

в котором восстановлена правильная физическая размерность. Здесь $\varepsilon_i = \pm 1$ — знаковые множители. Таким образом, n констант интегрирования распределяются на одну физическую константу, имеющую смысл заряда источника, и $n - 1$ масштабных r_i констант, задающих различные масштабы длины. Для случаев $n = 3$ и $n = 4$ соответствующие формулы связи наборов $\{c_i\}$ и $\{Q, r_i\}$ даются выражениями:

$$Q = \frac{c_2}{\varepsilon_2}; \quad r_1 = \exp \left[\frac{(c_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 c_2)^2 - 4c_0 c_2}{4\varepsilon_1 \varepsilon_2 c_2^2} \right]; \quad r_2 = \exp \left[\frac{\varepsilon_1 c_2 - \varepsilon_2 c_1}{2\varepsilon_2 c_2} \right]; \quad (n = 3), \quad (163)$$

$$Q = \frac{c_3}{\varepsilon_3}; \quad r_3 = \exp \left[\frac{c_3 \varepsilon_2 - c_2 \varepsilon_3}{3\varepsilon_3 c_3} \right]; \quad r_2 = \exp \left[\frac{-3c_1 c_3 + 3\varepsilon_1 \varepsilon_3 c_3^2 + c_2^2 - 2c_2 c_2 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + c_3^2}{6\varepsilon_2 \varepsilon_3 c_3^2} \right];$$

$$r_1 = \exp \left[(-108\varepsilon_2 \varepsilon_3 c_0 c_3^3 + 27c_1^2 c_3^2 + (26 + 18\varepsilon_1 \varepsilon_3)c_3^4 + 3c_2^4 - 8\varepsilon_2 c_2^3 c_3 + \right. \\ \left. + (6 + 18\varepsilon_1 \varepsilon_2)c_2^2 c_3^2 - (18 + 54\varepsilon_1 \varepsilon_3)c_1 c_3^3 - 18c_1 c_2^2 c_3 + 36\varepsilon_2 \varepsilon_3 c_1 c_2 c_3^2 - \right. \\ \left. - 36\varepsilon_1 \varepsilon_2 c_2 c_3^3 \right] / (108\varepsilon_1 \varepsilon_2 c_3^4). \quad (164)$$

Исследуем подробнее приведенную зависимость R_3 вида

$$F_3 = \ln \rho + \varepsilon \ln^2(\eta \rho), \quad (165)$$

в которой оставлены лишь существенные параметры. Зависимость $F_3(\rho, \eta)$ получится из (162) при $Q = 1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$, $\rho = r/r_1$, $\eta = r_1/r_2$. График для $F_3(\rho, \eta)$ представлен на рисунке 1.

Из графиков видно, что различный выбор знаковых множителей определяет общий характер поведения потенциала (возрастание или убывание в окрестности нуля или на бесконечности). Характерной особенностью полиномиально-логарифмического потенциала является наличие точек равновесия (устойчивых на верхней кривой и неустойчивых на нижней). При этом для нижней ветви $\varepsilon = -1$ нуль и бесконечность разделены бесконечно

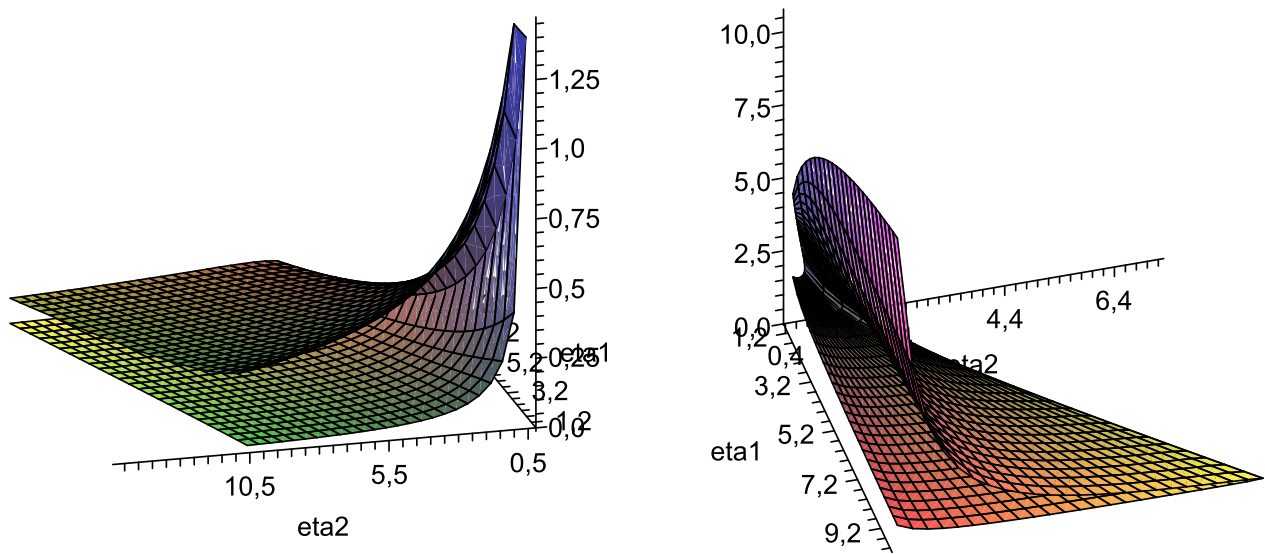


Рис. 2: Слева — зависимость положения экстремумов ρ_{--}^{\pm} потенциала F_4 , справа — экстремумов ρ_{-+}^{\pm} того же потенциала.

высоким потенциальным барьером. Координаты экстремумов легко получаются дифференцированием зависимости (165) по переменной ρ . Результат дается выражением:

$$\rho_{\pm} = \frac{\sqrt{e^{\mp 1}}}{\eta}, \tag{166}$$

где знак «плюс» соответствует минимуму верхней зависимости, а знак минус — максимуму нижней. Видно, что при увеличении параметра η экстремумы сдвигаются влево (графики сжимаются), а при уменьшении параметра η экстремумы сдвигаются вправо (графики растягиваются). Отметим, наконец, что визуальный эффект соприкосновения ветвей неслучаен: они действительно соприкасаются в точке $\rho = 1/\eta$.

Перейдем к приведенной зависимости F_4 , которая дается выражением:

$$F_4(\rho, \eta_1, \eta_2) = \ln \rho + \varepsilon_1 \ln^2(\eta_1 \rho) + \varepsilon_2 \ln^3(\eta_2 \rho). \tag{167}$$

Точки экстремума (нули производной $\partial F_4 / \partial \rho$) даются следующей общей формулой:

$$\rho_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}^{\pm} = \frac{e^{-2\varepsilon_1 \pm \sqrt{1 - 3\varepsilon_2 + 6\varepsilon_2 \ln(\eta_2/\eta_1)}}}{\eta_2}. \tag{168}$$

Теперь мы имеем четыре ветви потенциала (все случаи выбора знаковых констант $\varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1$) и для каждой из них мы будем иметь по две, одной или ни одной точки экстремума, в зависимости от знака подкоренного выражения в показателе экспоненты (это дискриминант квадратного уравнения). На графиках (рис. 2) приведена пара характерных зависимостей.

Из графиков видно, что вся область значений параметров η_1 и η_2 разбивается на под-область, где у F_4 нет экстремумов, подобласть, где у нее два экстремума и их границу — кривую, на которой экстремум один. Типичная зависимость F_4 с двумя экстремумами представлена на рисунке 3 (слева).

Вообще выбирая логарифмический полином $R_n(r)$ при достаточно большом n , можно получать довольно сложные немонотонные зависимости. На графике 3 справа представлен

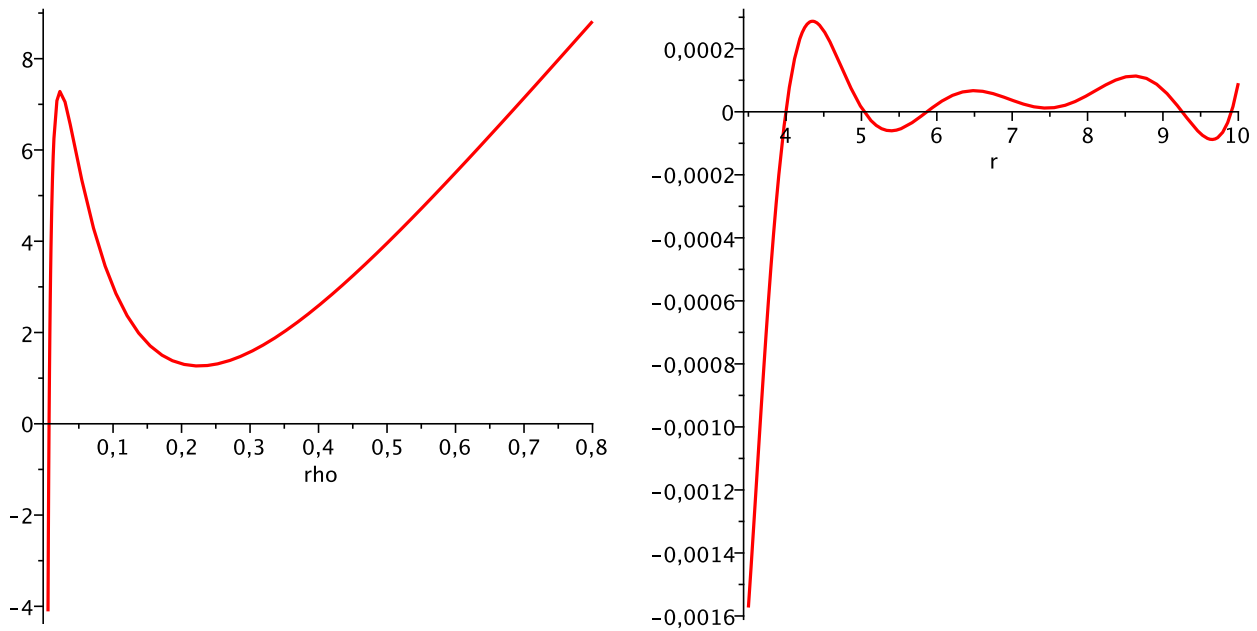


Рис. 3: Слева — зависимость $F_4(\rho)$ при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \eta_1 = 1$, $\eta_2 = 10$. Справа — фрагмент зависимости $R_{10}(r)$ при $c_1 \approx -62$, $c_2 \approx 383$, $c_3 \approx -1018$, $c_4 \approx 1545$, $c_5 \approx -1480$, $c_6 \approx 929$, $c_7 \approx -383$, $c_8 \approx 100$, $c_9 \approx -15$, $c_{10} \approx 1$.

фрагмент зависимости $R_{10}(r)$ при некотором специальном выборе констант c_i , $i = 1, \dots, 10$. Отметим, что асимптотическое поведение $R_n(r)$ при $r \rightarrow 0$ или $r \rightarrow \infty$ будет определяться старшей степенью логарифма. По этой причине коэффициент при старшей степени логарифма и следует отождествить с гиперболическим зарядом, в чем мы убедимся непосредственно в разделе 8.

7 Разделение переменных в операторе \mathbb{O}_3

В этом разделе мы исследуем вопрос о разделении переменных в операторе \mathbb{O}_3 в экспоненциальной калибровке. Мы выведем явные формулы для гиперболических аналогов сферических гармоник и радиальных полиномов. Рассмотрим уравнение

$$\mathbb{O}_3 \Phi = 0, \quad (169)$$

которое представляет собой «гиперболический симбиоз» уравнения Лапласа и волнового уравнения. Оператор \mathbb{O}_3 возьмем в экспоненциальной калибровке (136), а решение представим в виде следующего произведения:

$$\Phi(r, \xi_1, \xi_2) = R(r) \Xi_1(\xi_1) \Xi_2(\xi_2). \quad (170)$$

Подставляя это выражение в (169) и разделяя переменные, получим (169) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{O}_{3r}}{R} - \frac{R'}{9r^2 R} \left(\frac{\Xi_1''}{\Xi_1} + \frac{\Xi_2''}{\Xi_2} - \frac{\Xi_1' \Xi_2'}{\Xi_1 \Xi_2} \right) + \\ + \frac{1}{27r^3} \left(2 \frac{\Xi_1'''}{\Xi_1} + 2 \frac{\Xi_2'''}{\Xi_2} - 3 \frac{\Xi_1' \Xi_2''}{\Xi_1 \Xi_2} - 3 \frac{\Xi_1'' \Xi_2'}{\Xi_1 \Xi_2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (171)$$

Общее условие разделения переменных в (171) имеет вид:

$$\Xi_1' = \sigma_1 \Xi_1; \quad \Xi_2' = \sigma_2 \Xi_2 \quad (172)$$

или эквивалентно:

$$\Xi_1 = \Xi_{01} e^{\sigma_1 \xi^1}; \quad \Xi_2 = \Xi_{20} e^{\sigma_2 \xi^2}, \quad (173)$$

где σ_1, σ_2 — произвольные вещественные константы. Таким образом, роль сферических гармоник играют вещественные экспоненты. Нетрудно убедиться, что каждая из функций (173) реализует неприводимое (1-мерное, как и должно быть для абелевой группы) представление группы гиперболических вращений. Действительно, произвольный элемент $e^{\chi^1 e_1 + \chi^2 e_2 - (\chi^1 + \chi^2) e_3}$ группы гиперболических вращений действует на угловые координаты $\{\xi^1, \xi^2\}$ по правилу:

$$\xi^1 \rightarrow \xi'^1 = \xi^1 + \chi^1; \quad \xi^1 \rightarrow \xi'^2 = \xi^2 + \chi^2. \quad (174)$$

Обозначая операцию гиперболического вращения оператором $\hat{\mathcal{D}}_{(\chi^1, \chi^2)}$, с учетом (174) находим для функций Θ_i :

$$\hat{\mathcal{D}}_{(\chi^1, \chi^2)} \Xi_1 = e^{\sigma_1 \chi^1} \Xi_1; \quad \hat{\mathcal{D}}_{(\chi^1, \chi^2)} \Xi_2 = e^{\sigma_2 \chi^2} \Xi_2, \quad (175)$$

т.е. функции Ξ_1, Ξ_2 являются собственными функциями оператора $\hat{\mathcal{D}}_{(\chi^1, \chi^2)}$.

С учетом явного вида угловой части решения, получаем для радиальной части уравнение вида:

$$R''' + \frac{3}{r} R'' + \frac{a}{r^2} R' + \frac{b}{r^3} R = 0, \quad (176)$$

где

$$a = 1 - 3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2) \leq 1; \quad b = 2(\sigma_1^3 + \sigma_2^3) - 3(\sigma_1 \sigma_2^2 + \sigma_2 \sigma_1^2). \quad (177)$$

Переходя к новой переменной $\tau = \ln r$, приводим уравнение (176) к уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{R} + (a - 1)\dot{R} + bR = 0 \quad (178)$$

Это уравнение можно немного упростить, сделав еще одну замену переменной:

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1-a}}. \quad (179)$$

При этом уравнение (178) переходит в уравнение с одним свободным непрерывным параметром:

$$\ddot{R} - \dot{R} + qR = 0, \quad (180)$$

где $q = b/(1-a)^{3/2}$ при $a \neq 1$ и $q = b$ при $a = 1$. В уравнении (180) мы сохранили штрих для производной по новой переменной τ' , при этом когда $a = 1$ мы полагаем в нем $\tau' = \tau$. Отметим, что значение $a = 1$ соответствует сферически-симметричному случаю $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, подробно разобранному в предыдущем разделе. По этой причине далее мы его не рассматриваем.

Дальнейшее исследование уравнения (180) сводится к изучению структуры корней характеристического уравнения:

$$\lambda^3 - \lambda + q = 0. \quad (181)$$

Три корня этого уравнения можно представить в следующем виде:

$$\lambda_0 = \frac{1}{6} \Delta_q^{1/3} + \frac{2}{\Delta_q^{1/3}}; \quad \lambda_{\pm} = -\frac{\Delta_q^{1/3}}{12} - \frac{\varepsilon}{\Delta_q^{1/3}} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\Delta_q^{1/3}}{6} - \frac{2\varepsilon}{\Delta_q^{1/3}} \right), \quad (182)$$

где $\Delta_q = -108q + 12\sqrt{81q^2 - 12}$. Рассмотрим все возможные случаи.

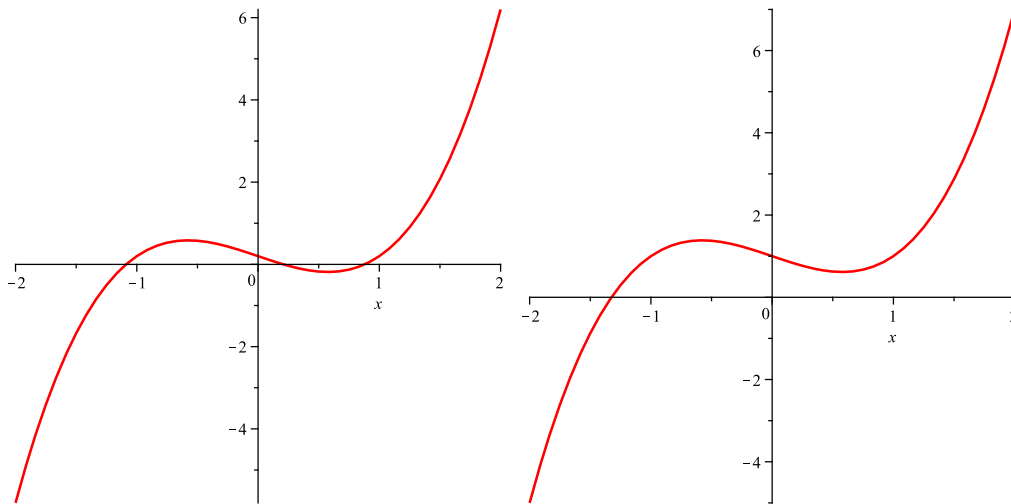


Рис. 4: Слева — типичный вид графика характеристического многочлена при $|q| < 2\sqrt{3}/9$. Все три корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — вещественны. Справа — типичный вид графика характеристического многочлена при $|q| > 2\sqrt{3}/9$. При этом один его корень λ_0 — вещественен, а два λ_{\pm} — комплексно-сопряжены.

1. $|q| < 2\sqrt{3}/9$. В этом случае график кубического трехчлена имеет вид, показанный на рисунке 4 (слева).

При этом, как это можно непосредственно проверить все три корня в (182) оказываются вещественными и различными. Общее решение уравнения (180) можно представить в виде:

$$R(\tau') = C_1 e^{\lambda_1 \tau'} + C_2 e^{\lambda_2 \tau'} + C_3 e^{\lambda_3 \tau'} \quad (183)$$

или возвращаясь к радиальной переменной:

$$R^{(\sigma_1, \sigma_2)}(r) = C_1 r^{\lambda_1 \sqrt{1-a}} + C_2 r^{\lambda_2 \sqrt{1-a}} + C_3 e^{\lambda_3 \sqrt{1-a}}, \quad (184)$$

где C_i ($i = 1, 2, 3$) — произвольные константы интегрирования.

2. $|q| > 2\sqrt{3}/9$. В этом случае график кубического трехчлена имеет вид, показанный на рисунке 4 (справа). Имеется один вещественный корень λ_0 и два комплексно-сопряженных λ_{\pm} . При этом общее решение будет иметь следующий вид:

$$R(\tau') = C_1 e^{\lambda_0 \tau'} + e^{\operatorname{Re} \lambda_{\pm} \tau'} (C_2 \sin[\sqrt{|\lambda_{\pm}|^2 - \operatorname{Re}^2 \lambda_{\pm} \tau'}] + C_3 \cos[\sqrt{|\lambda_{\pm}|^2 - \operatorname{Re}^2 \lambda_{\pm} \tau'}]) \quad (185)$$

или в радиальных координатах:

$$R^{(\sigma_1, \sigma_2)}(r) = C_1 r^{\lambda_0 \sqrt{1-a}} + r^{\operatorname{Re} \lambda_{\pm} \sqrt{1-a}} \times \quad (186)$$

$$(C_2 \sin[\sqrt{|\lambda_{\pm}|^2 - \operatorname{Re}^2 \lambda_{\pm} \sqrt{1-a} \ln r}] + C_3 \cos[\sqrt{|\lambda_{\pm}|^2 - \operatorname{Re}^2 \lambda_{\pm} \sqrt{1-a} \ln r}]).$$

3. $|q| = 2\sqrt{3}/9$. Вид графика характеристического трехчлена показан на рис. 5 слева.

Теперь все три корня вещественны, но один из корней двукратно вырожден: $\lambda_2 = \lambda_3$. Общее решение имеет вид:

$$R(\tau') = C_1 e^{\lambda_1 \tau'} + (C_2 + C_3 \tau') e^{\lambda_2 \tau'} \quad (187)$$

или в терминах радиальной координаты:

$$R(\tau') = C_1 r^{\lambda_1 \sqrt{1-a}} + (C_2 + C_3 \ln r) r^{\lambda_2 \sqrt{1-a}}. \quad (188)$$

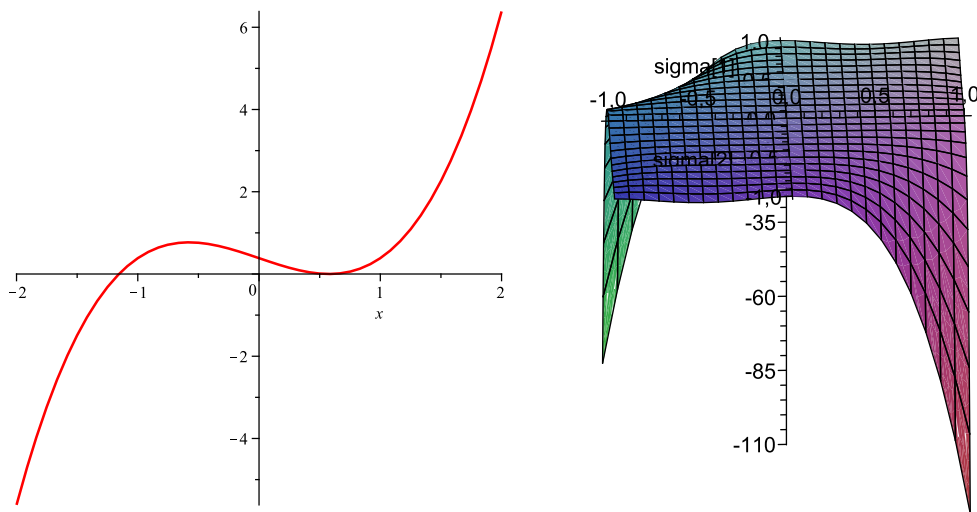


Рис. 5: Слева — вид графика характеристического многочлена при $q = 2\sqrt{3}/9$. Все корни вещественны, но два корня совпадают $\lambda_2 = \lambda_3$. При $q = -2\sqrt{3}/9$ график примыкает к оси абсцисс слева и снизу. Справа — зависимость функции $F'(q^2 - 12/81)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^3$ от параметров σ_1, σ_2 . Эта функция всюду неположительна, следовательно $q^2 \leq 12/81$.

Сделаем несколько замечаний по поводу полученных результатов.

1. Ввиду того, что именно равенство нулю величины $1 - a = 3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)$ определяет переход к сферически-симметричному случаю, величину $1 - a$ следует считать пропорциональной квадрату момента импульса поля ℓ^2 . Примечательно, что в экспоненциальной калибровке квадрат момента представляется евклидовой положительно-определенной формой компонент $\{\sigma_1, \sigma_2\}$:

$$\ell^2 = K(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) = K[(\sigma_1 - \sigma_2/2)^2 + 3\sigma_2^2/4] = K[(\sigma_2 - \sigma_1/2)^2 + 3\sigma_1^2/4]. \quad (189)$$

2. Сферически-симметричный случай не получается предельным переходом $a \rightarrow 1$ из формул (183)-(188).
3. Случай $b=0$ (или $q=0$) не является особым. Ему соответствуют решения: $\sigma_1 = 2\sigma_2$, $\sigma_2 = 2\sigma_1$ и $\sigma_1 = \sigma_2$.
4. Более детальный анализ зависимости параметра q от σ_1, σ_2 показывает, что случай $q^2 > 12/81$ на самом деле не реализуется, т.е. при всех значениях параметров σ_1 и σ_2 имеет место неравенство $q^2 \leq 12/81$. По этой причине решение (185)-(186) не реализуется в действительности. График на рис. 5 (справа) наглядно иллюстрирует сказанное. Неравенство превращается в равенство на осях $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0$ и на биссектриссе $\sigma_1 = \sigma_2$. Этим случаям соответствует решение вида (188). Всем остальным парам (σ_1, σ_2) соответствует решение (184). Наконец, имеется еще особая точка $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, которой соответствует сферически-симметричное решение, описанное в предыдущем разделе.

8 Гиперболическое поле однородно заряженного шара

Рассмотрим задачу о распределении потенциала в гиперболической теории поля в окрестности однородно заряженного гиперболического шара радиуса R . Основное уравнение для этой задачи принимает вид:

$$\bigcirc_{3r} \Phi = k\rho_0, \quad (190)$$

где $\rho_0 = \text{const}$ — плотность распределения гиперболического заряда, k — константа, зависящая от выбора системы единиц. Определение плотности ρ_0 требует некоторого допол-

нительного обсуждения, ввиду бесконечности площади любой компоненты индикатриссы (т.е. бесконечности полного телесного угла в пространстве БМ) и, как следствие, бесконечности объема шара любого отличного от нуля радиуса R . Для прояснения этого вопроса проинтегрируем уравнение (190) по объему шара радиуса $r > R$. При этом в соответствии с (108) элемент интегрирования можно представить в виде:

$$d^{(3)}V = r^2 dr d\Omega, \quad (191)$$

где $d\Omega$ — элемент интегрирования в пространстве направлений (элемент телесного угла), а в силу сферической симметрии интегрирование по радиусу и углам факторизуется:

$$\int \bigcirc_{3r} \Phi dV = \int k\rho_0 dV \Rightarrow \int \bigcirc_{3r} \Phi dV = k\rho_0 V = kQ, \quad (192)$$

где $V = R^3\Omega/3$ — объем заряженного шара, $\Omega = \int d\Omega$ — мера множества направлений (бесконечная!), Q — полный заряд шара. Следовательно плотность равномерно заряженного гиперболического шара следует определить как величину:

$$\rho_0 \equiv \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{R^3\Omega}, \quad (193)$$

содержащую бесконечную геометрическую константу Ω пространства H_3 . Далее, расписывая оператор \bigcirc_{3r} в левой части (192), получаем:

$$\int \bigcirc_{3r} \Phi dV = \int d\Omega \int_0^r \frac{1}{27\rho^3} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right)^3 \Phi(\rho) \rho^2 d\rho = \frac{\Omega}{27} \left(r \frac{d}{dr} \right)^2 \Phi(r) = kQ. \quad (194)$$

Уравнение (194) является гиперболическим аналогом электростатической теоремы Гаусса. Выберем систему единиц, в которой $k = \Omega/27$, в результате придем к уравнению:

$$\left(r \frac{d}{dr} \right)^2 \Phi(r) = Q, \quad (195)$$

последовательно интегрирование которого дает общее решение вне шара:

$$\Phi_{\text{ext}}(r) = Q \ln^2 r + C_1 \ln r + C_0, \quad (196)$$

содержащее две неопределенные константы. Это решение является членом общего класса (161)-(162) при $n = 3$.

Внутри заряженного шара уравнение (190) (с учетом наших определений ρ_0 и k) принимает следующий вид:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)^2 \Phi = \frac{3Qr^2}{R^3}. \quad (197)$$

Его непосредственное интегрирование приводит к следующему общему виду решения:

$$\Phi_{\text{in}}(r) = \frac{Q}{9R^3} r^3 + C'_2 \ln^2 r + C'_1 \ln r + C'_0. \quad (198)$$

Требование регулярности решения на конусе начала системы координат (оно в этой задаче ничем не выделено), т.е. при $r=0$ приводит к выбору констант $C'_1 = 0$, $C'_2 = 0$. Константа C'_0 отвечает за выбор начала отсчета потенциала. Мы потребуем, чтобы $\Phi_{\text{in}}(0) = 0$, откуда $C'_0 = 0$.

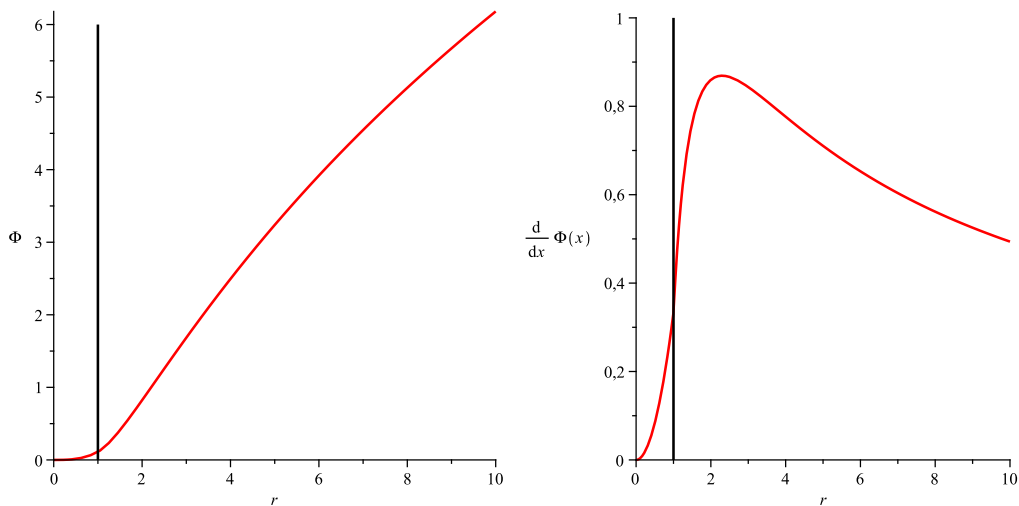


Рис. 6:

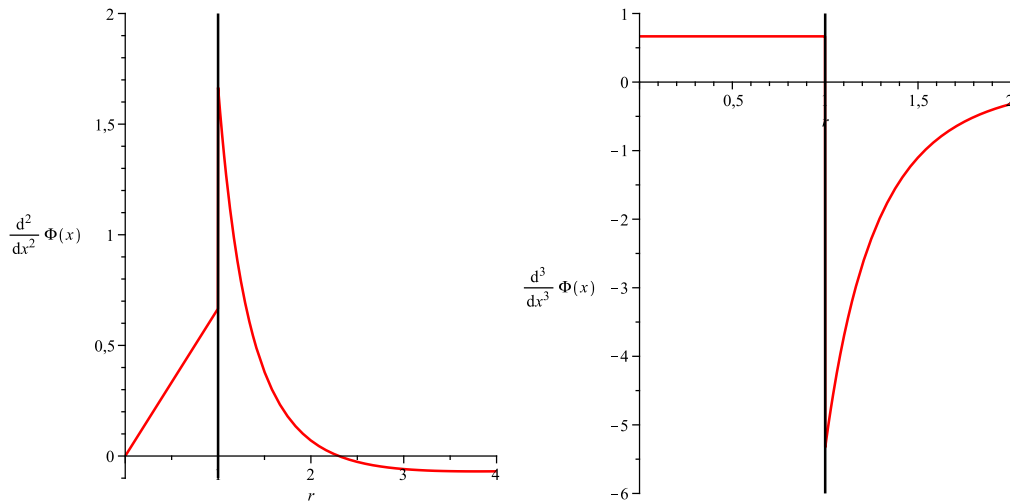


Рис. 7:

Теперь необходимо сшить части решения Φ_{in} и Φ_{ext} на границе шара при $r = R$. Полагая

$$\Phi_{\text{in}}(R) = \Phi_{\text{ext}}(R); \quad \Phi'_{\text{in}}(R) = \Phi'_{\text{ext}}(R), \tag{199}$$

находим

$$C'_1 = \frac{Q}{3} - 2Q \ln R; \quad C'_0 = Q \left(\frac{1}{9} - \ln^2 R - \frac{1}{3} \ln R \right). \tag{200}$$

Окончательно, решение задачи описывается следующей составной формулой:

$$\Phi = \begin{cases} \frac{Qr^3}{9R^3}, & r \leq R \\ Q \left(\ln^2(r/R) + \frac{1}{3} \ln(r/R) + \frac{1}{9} \right), & r \geq R \end{cases} \tag{201}$$

Для параметров $R = 1$ и $Q = 1$ соответствующие графики для потенциала и его производных, описываемых формулой (201) показаны на рисунках 6-7.

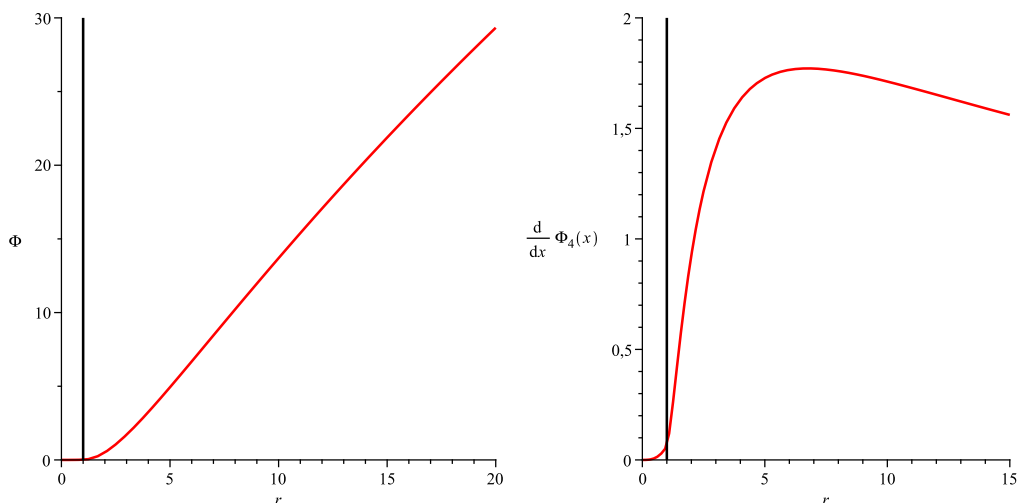


Рис. 8:

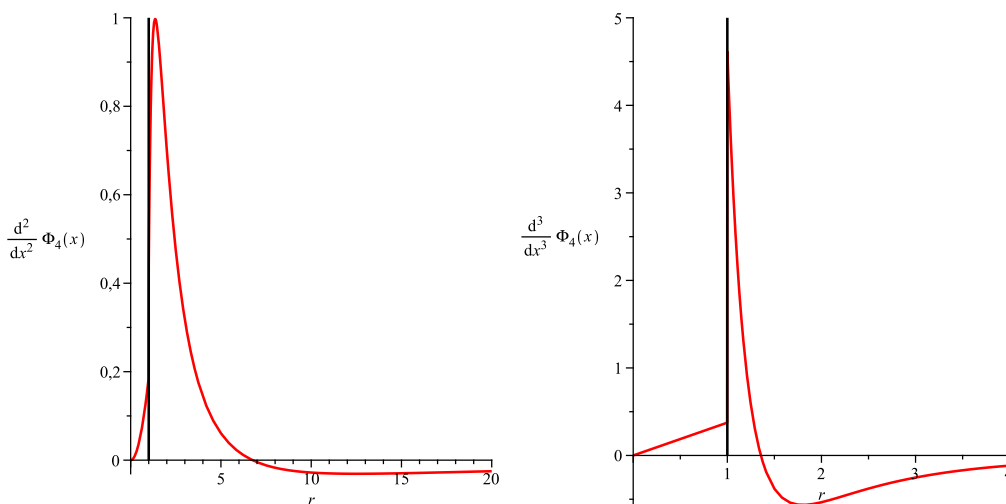


Рис. 9:

Аналогичным образом можно рассмотреть n -мерный заряженный шар, потенциал которого будет описываться скобкой:

$$\Phi_n = \begin{cases} \frac{Qr^n}{n^{n-1}R^n}, & r \leq R \\ Q \left(\ln^{n-1}(r/R) + c_{n-2} \ln^{n-2}(r/R) + \dots + c_0 \right), & r \geq R, \end{cases} \quad (202)$$

где константы c_i ($i = 0, \dots, n - 2$) определяются из условий непрерывности потенциала и его производных до $n - 2$ -ого включительно. Нетрудно проверить, что $c_0 = 1/n^{n-1}$, $c_1 = 1/n^{n-2}$, $c_2 = 1/2n^{n-3}$, ... Для $n = 4$ это дает решение вида:

$$\Phi_4 = \begin{cases} \frac{Qr^4}{64R^4}, & r \leq R \\ Q \left(\ln^3(r/R) + \frac{1}{4} \ln^2(r/R) + \frac{1}{16} \ln(r/R) + \frac{1}{64} \right), & r \geq R. \end{cases} \quad (203)$$

Зависимости потенциала (203) и его производных при $Q = 1$, $R = 1$ представлены на рис. 8-9.

9 Цилиндрическая симметрия — случай неизотропной оси симметрии

Рассмотрим теперь подробно цилиндрическую систему координат, ось которой является неизотропной прямой. Выкладки в этом случае оказываются существенно более сложными, чем в изотропном случае, поэтому мы посвящаем этому случаю отдельный параграф. Неизотропную ось OZ посредством вращений из группы $\text{Iso}(H_3)$ всегда можно совместить с единичным лучом $\ell(\mathbb{I}_3)$. Координату z вдоль этой оси можно выбрать в виде:

$$z = x^1 + x^2 + x^3, \quad (204)$$

где $\{x^i\}_{i=1,2,3}$ — система неизотропных координат. Оставшуюся пару координат необходимо выбрать таким образом, чтобы одна из них — координата ρ имела смысл расстояния от некоторой точки, цилиндрические координаты которой мы вычисляем, до оси OZ , отсчитанного вдоль плоскости с уравнением $z = \text{const}$. Вторая координата должна иметь смысл угловой координаты ψ на этой плоскости, точное определение которой мы сформулируем чуть позже. Отыскание координат ρ и ψ будем производить в два этапа. Сначала введем пару новых аффинных координат u и v согласно определениям:

$$u = 2x^2 - x^1 - x^3; \quad v = 2x^3 - x^1 - x^2. \quad (205)$$

Оставшаяся симметричная координата $w = 2x^1 - x^2 - x^3$ удовлетворяет условию:

$$w + u + v = 0, \quad (206)$$

т.е., другими словами, аффинный вектор V с координатами (w, u, v) лежит в плоскости $z = \text{const}$, поскольку $dz(V) = 0$. Нетрудно найти формулы обратного перехода от координат $\{u, v, z\}$ к изотропным координатам:

$$x^1 = \frac{-v - u + z}{3}, \quad x^2 = \frac{z + u}{3}, \quad x^3 = \frac{v + z}{3}. \quad (207)$$

Из формул (207) дифференцированием получаются соотношения, связывающие дуальные базисы. В новых аффинных координатах $\{z, u, v\}$ интервал метрики БМ в результате принимает вид:

$$ds^3 = dx^1 dx^2 dx^3 - \frac{1}{27} (dz(dv^2 + du^2 + du dv) + dv^2 du + du^2 dv - dz^3). \quad (208)$$

Теперь рассмотрим точку с произвольными изотропными координатами (x^1, x^2, x^3) . Через эту точку проходит координатная плоскость $z = x^1 + x^2 + x^3 = \text{const}$. Искомое расстояние ρ представляет собой финслерово расстояние от этой точки до точки пересечения луча $\ell(\mathbb{I}_3)$ с плоскостью $z = \text{const}$, которая, очевидно имеет координаты $(z/3, z/3, z/3)$. Таким образом, искомая координата ρ определяется уравнением:

$$\rho^3 = (x^1 - z/3) \cdot (x^2 - z/3)(x^3 - z/3), \quad (209)$$

которое с учетом (204) и (205) можно записать в виде:

$$\rho^3 = \frac{1}{27} uvw = -\frac{1}{27} uv(u + v). \quad (210)$$

Перейдем к определению угловой координаты ψ . По существу оно соответствует общей идее, предложенной в [20]. Угол ψ мы определим как длину окружности единичного радиуса, построенной на плоскости $z = \text{const}$, отсчитываемой от некоторого направления. Для перехода на эту плоскость перепишем (209) в виде:

$$\rho^3 = (x^1 - z)(x^2 - z)(2z/3 - x^1 - x^2) \quad (211)$$

(мы исключили координату x^3 , а координаты x^1 и x^2 используем как двумерную координатную карту на плоскости $z = \text{const}$). Уравнение (211) при фиксированном ρ представляет собой неявное уравнение гиперболического цилиндра единичного радиуса с осью Oz . Дифференцируя это уравнение при фиксированном z и ρ , находим связь базисных один форм на единичной окружности:

$$\frac{dx^2}{dx^1} \equiv \dot{x}^2 = \frac{-4x^2z + 6x^2x^1 + 3(x^2)^2 + z^2 - 2zx^1}{4zx^1 - 3(x^1)^2 - 6x^2x^1 - z^2 + 2x^2z}. \quad (212)$$

Теперь для элемента длины на единичной окружности (т.е. для угла ψ) получаем следующую цепочку равенств:

$$\psi = \frac{1}{\rho} \int_{S_{BM}} dl|_{z=\text{const}, \rho=\text{const}} \stackrel{(204)}{=} -\frac{1}{\rho} \int_{\rho=\text{const}} [dx^1 dx^2 (dx^1 + dx^2)]^{1/3} \quad (213)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho} \int_{\rho=\text{const}} [\dot{x}^2(1 + \dot{x}^2)]^{1/3} dx^1 \stackrel{(212)}{=} \\ & = -\frac{1}{\rho} \int_a^{X^1} \left[\frac{(-3x^2 + z)(z - x^2 - 2x^1)(x^1 - x^2)(-3x^1 + 2z - 3x^2)}{(-3x^1 + z)^2(z - x^1 - 2x^2)^2} \right]^{1/3} dx^1, \end{aligned} \quad (214)$$

где в последнем интеграле мы ввели переменный верхний предел X^1 , а x^2 понимается как функция x^1 , неявно заданная посредством (211). Уравнение (211) является квадратным относительно x^2 . Его решения можно представить следующей общей формулой:

$$x^2 = \frac{1}{2}(z - x^1) + \frac{\epsilon}{6}\sqrt{\Delta}, \quad (215)$$

где

$$\Delta = \frac{z^3 - 9x^1z^2 + 27(x^1)^2z + 108\rho^3 - 27(x^1)^3}{z - 3x^1}; \quad \epsilon = \pm 1.$$

Довольно громоздкая проверка с помощью формул (204) и (211) обнаруживает тождество:

$$\Delta = 9(x^2 - x^3)^2, \quad (216)$$

которое гарантирует корректность представления решения для x^2 в виде (215) на всем H_3 . Подстановка (215) в (214) после некоторых элементарных, но громоздких упрощений приводит к следующему интегралу для угловой переменной:

$$\psi = -\frac{1}{\rho} \int_a^{X^1} \left[\frac{27\rho^3(27\rho^3 + 54(x^1)^3 - 54(x^1)^2z + 18z^2x^1 - 2z^3)}{(-3x^1 + z)^3(z^3 - 9z^2x^1 + 27(x^1)^2z + 108\rho^3 - 27(x^1)^3)} \right]^{1/3} dx^1. \quad (217)$$

Переходя к новой переменной $\xi = x^1/\rho$ и новому параметру $\zeta = z/\rho$, получаем после простых преобразований:

$$\psi = -3 \int_a^{X^1/\rho} \left[\frac{(27 + 54\xi^3 - 54\xi^2\zeta + 18\zeta^2\xi - 2\zeta^3)}{(-3\xi + \zeta)^3(\zeta^3 - 9\zeta^2\xi + 27\xi^2\zeta + 108 - 27\xi^3)} \right]^{1/3} d\xi. \quad (218)$$

Сдвигая переменную интегрирования по формуле:

$$\xi = U + \zeta/3, \quad (219)$$

получаем более простой по виду интеграл:

$$\psi = \int_a^{x^1/\rho-\zeta/3} \frac{1}{U} \left[\frac{1+2U^3}{4-U^3} \right]^{1/3} dU. \quad (220)$$

Наконец, делая дополнительную замену переменной:

$$y = \frac{3 \ln |U| + \ln 2}{2}, \quad (221)$$

приходим к следующим интегральным представлениям для угла:

$$\psi_{\pm} = \begin{cases} -\left(\frac{2}{3}\right)^{5/3} \times \int_a^{(3 \ln[(3x^1-z)/\rho] + \ln 2)/2} \frac{1}{(\tanh y - 7/9)^{1/3}} dy, & (3x^1 - z)/\rho > 0; \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{5/3} \times \int_a^{(3 \ln[-(3x^1-z)/\rho] + \ln 2)/2} \frac{1}{(\coth y - 7/9)^{1/3}} dy, & (3x^1 - z)/\rho < 0, \end{cases} \quad (222)$$

где верхняя строчка определяет ψ_+ , а нижняя ψ_- в соответствующих областях, и мы вернулись в пределах интегрирования к старому обозначению x^1 . Граница раздела областей определения ψ_+ и ψ_- (это плоскость $w = 0$) не покрывается нашей параметризацией углов и для ее описания необходимо выбрать параметризацию окружности с помощью координаты x^2 или x^3 .

Интегралы в (222) вычисляются в элементарных функциях:

$$\psi_{\pm} \equiv \mp \text{ArcTH}_3(q), \quad (223)$$

где

$$q = \left(\frac{9 \tanh y - 7}{3} \right)^{1/3} \quad (224)$$

для ψ_+ и

$$q = \left(\frac{9 \coth y - 7}{3} \right)^{1/3} \quad (225)$$

для ψ_- , и где мы ввели основную функцию гиперболической тригонометрии (Hyperbolic Trigonometry) в H_3 :

$$\begin{aligned} \text{ArcTH}_3(q) = & -\frac{2^{1/3}}{6} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{(q-1)^4(q+2)^2}{(q^2+q+1)^2(q^2-2q+4)} - \sqrt{3} \arctan \left[\frac{10q+8+9q^3-3q^2}{\sqrt{3}q(3q+10)} \right] \right) + \\ & \frac{\pi}{2^{2/3}\sqrt{3}} (\theta(-q) + \theta(-q-10/3)) - \frac{2^{1/3}\sqrt{3}\pi}{12}. \end{aligned} \quad (226)$$

Здесь ступенчатые функции Хэвисайда обеспечивают¹¹ непрерывность функции ArcTH в точках разрыва главной ветви арктангенса ($q=0$, $q=10/3$), а аддитивная константа (константа интегрирования) обеспечивает нормировку $\psi_{\infty} \equiv \mp \text{ArcTH}_3(+\infty) = 0$. График зависимости $\text{ArcTH}_3(q)$ представлен на рис. 10 слева.

¹¹Фактически, они осуществляют аналитический выбор различных ветвей арктангенса, который обеспечивает непрерывность ψ как первообразной.

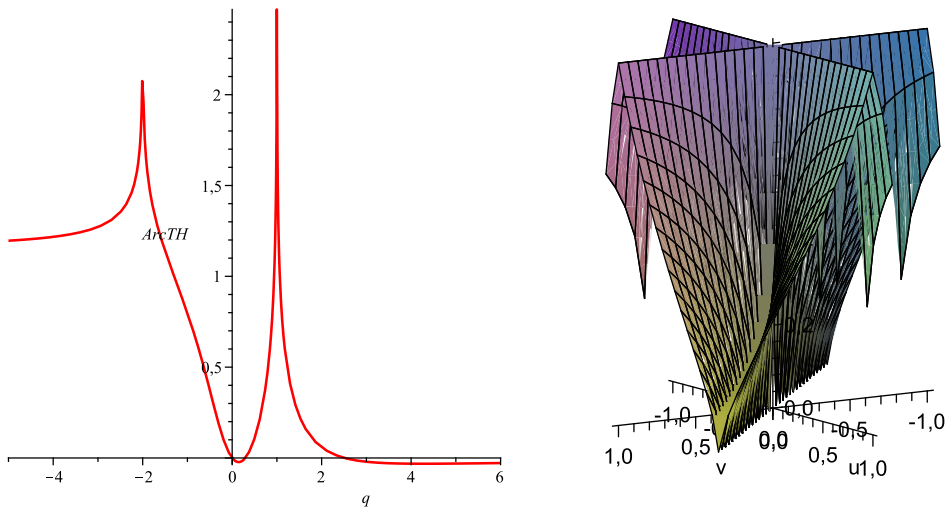


Рис. 10: Слева — вид функции $\text{ArcTH}_3(q)$ — основной функции гиперболической тригонометрии в H_3 . $\text{ArcTH}_3(\infty) = 0$, $\text{ArcTH}_3(-\infty) = 2^{1/3}\sqrt{3}\pi/6$. Вертикальные прямые $q=1$ и $q=-2$ — вертикальные асимптоты. Функция $\text{ArcTH}(q)$ монотонна на промежутках: $(-\infty; -2)(\uparrow)$, $(-2; 0.14536)(\downarrow)$, $(0.14536; 1)(\uparrow)$, $(1; 4.27828)(\downarrow)$ и на $(4.27828; +\infty)(\uparrow)$. Абсолютный минимум $\text{ArcTH}_3(4.27828) \approx -0.0317667341$. Справа — зависимость $q(u, v)$, определяемая формулой (230) ниже. Максимальное значение q достигается на осях $u = 0, v = 0$ и составляет $(2/3)^{1/3} \approx 0.87358$. Таким образом, функция ArcTH_3 слева практически работает лишь в области $q \leq q_{\max}$. В этой области она имеет три участка монотонности.

Теперь мы можем немного преобразовать выражение для переменной q в (223)-(225). Для $\tanh y$ в (224)-(225) имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \tanh y &\stackrel{(221)}{=} \tanh \left[\ln(\sqrt{2}|U|^{3/2}) \right] = \frac{2|U|^3 - 1}{2|U|^3 + 1} \stackrel{(219)}{=} \frac{2|x^1 - z/3|^3 - |\rho|^3}{2|x^1 - z/3|^3 + |\rho|^3} \stackrel{(204)}{=} \\ &= \frac{2|2x^1 - x^2 - x^3|^3 - 27|\rho|^3}{2|2x^1 - x^2 - x^3|^3 + 27|\rho|^3} \stackrel{(205),(211)}{=} \frac{2(u+v)^2 - |uv|}{2(u+v)^2 + |uv|}. \end{aligned} \tag{227}$$

Соответственно для аргумента q из (224)-(225) получается следующее выражение:

$$q^3 = \frac{4(u+v)^2 - 4|uv|}{3 \cdot 2(u+v)^2 + |uv|}, \tag{228}$$

где положительная ветвь модуля берется для ψ_+ , а отрицательная — для ψ_- . При этом неравенство в (222), определяющее ветвь угловой переменной ψ , можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{sign} \left(\frac{3x^1 - z}{\rho} \right) &\stackrel{(204)}{=} \text{sign} \left(\frac{2x^1 - x^2 - x^3}{\rho} \right) \stackrel{(211)}{=} \\ &= \text{sign} \left(\frac{w}{(uvw)^{1/3}} \right) = \text{sign} \left(\frac{w^2}{uv} \right) = \text{sign}(uv). \end{aligned} \tag{229}$$

Следовательно ветвь ψ_+ характеризует угол в той части, где единичная гиперболическая окружность пересекает косоугольные квадранты $u > 0, v > 0$ или $u < 0, v < 0$, а ветвь ψ_- характеризует угол при $u > 0, v < 0$ и $u < 0, v > 0$. С учетом этого условия выражение (228) для переменной q можно записать в следующем универсальном виде:

$$q = \left(\frac{4(u+v)^2 - 4|uv|}{3 \cdot 2(u+v)^2 + |uv|} \right)^{1/3}. \tag{230}$$

График зависимости $q(u, v)$ представлен на рис. 10 справа.

Теперь мы имеем следующие формулы для зависимости криволинейных координат ρ и ψ от аффинных координат u, v :

$$\rho^3 = -\frac{uv(u+v)}{27}; \quad \psi_{\pm} = \mp \text{ArcTH}_3 \left[\left(\frac{4(u+v)^2 - 4|uv|}{3 \cdot 2(u+v)^2 + |uv|} \right)^{1/3} \right]. \quad (231)$$

Для вычисления вида метрик БМ в цилиндрических координатах с помощью (208) необходимы обратные соотношения. Для их вывода перейдем сначала к промежуточным криволинейным симметрическим координатам:

$$uv = \epsilon x^2, \quad (\epsilon = \pm 1); \quad u + v = y. \quad (232)$$

Из (231)-(232) получаем:

$$x^2 y = -27\epsilon \rho^3; \quad \frac{y^2 - 4x^2}{2y^2 + x^2} = \frac{3}{4} \text{TH}_3^3(\mp \psi_{\pm}). \quad (233)$$

При этом функция TH_3 геометрически определена на промежутке $[-0.0227; +\infty)$, однозначна на промежутке $[0.693; 1.143]$ и двузначна на промежутках $[-0.227; 0.693]$ и $[1.143; +\infty)$. Решением системы уравнений (233) будет пара зависимостей:

$$x = \pm 3 \cdot 2^{1/6} \left(\frac{2 - 3\text{TH}_3^3(\psi)}{16 + 3\text{TH}_3^3(\psi)} \right)^{1/6} \rho; \quad y = -\frac{3}{2^{1/3}} \left(\frac{2 - 3\text{TH}_3^3(\psi)}{16 + 3\text{TH}_3^3(\psi)} \right)^{-1/3} \rho, \quad (234)$$

где $\psi = \mp \psi_{\pm}$. Далее решением системы уравнений (232) при (234) будет пара выражений:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{3 \cdot 2^{2/3} \rho}{4A} (1 + \sqrt{1 - 8\epsilon A^3}), \\ v &= -\frac{3 \cdot 2^{2/3} \rho}{4A} (1 - \sqrt{1 - 8\epsilon A^3}), \\ \epsilon &= \pm 1, \quad A = \left(\frac{2 - 3T^3}{16 + 3T^3} \right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (235)$$

Теперь мы можем вычислить компоненты матрицы Якоби $J(u, v | \rho, \psi)$:

$$J_{u\rho} = \frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{3 \cdot 2^{2/3}}{4A} (1 + \sqrt{1 - 8\epsilon A^3}); \quad J_{v\rho} = \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{3 \cdot 2^{2/3}}{4A} (1 - \sqrt{1 - 8\epsilon A^3}); \quad (236)$$

$$J_{u\psi} = \frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{\partial u}{\partial A} \cdot \frac{\partial A}{\partial \text{TH}_3(\psi)} \cdot \left(\frac{\partial \text{ArcTH}_3(q)}{\partial q} \right)^{-1} \Bigg|_{q=\text{TH}_3(\psi)}; \quad (237)$$

$$J_{v\psi} = \frac{\partial v}{\partial \psi} = \frac{\partial v}{\partial A} \cdot \frac{\partial A}{\partial \text{TH}_3(\psi)} \cdot \left(\frac{\partial \text{ArcTH}_3(q)}{\partial q} \right)^{-1} \Bigg|_{q=\text{TH}_3(\psi)}. \quad (238)$$

Мы не приводим явный вид двух последних выражений, ввиду того, что они носят промежуточный результат и несколько громоздки. Теперь у нас есть все необходимые формулы для вывода вида метрики БМ в неизотропной цилиндрической системе координат. Используя представление:

$$du = J_{u\rho} d\rho + J_{u\psi} d\psi; \quad dv = J_{v\rho} d\rho + J_{v\psi} d\psi, \quad (239)$$

а также (236)-(238), из (208) получаем путем выделения коэффициентов при различных степенях $\{dz, d\rho, d\psi\}$:

$$\mathfrak{h}_{zzz} = \frac{1}{27}; \quad \mathfrak{h}_{\rho\rho\rho} = 1; \quad \mathfrak{h}_{zz\psi} = \mathfrak{h}_{zz\rho} = \mathfrak{h}_{\rho\rho\psi} = 0; \quad (240)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{\psi\psi\psi} = & \frac{2^6 \cdot 3^9 \epsilon}{N} \rho^3 T^6 (T-1)^3 (T+2)^3 (T^2+T+1)^3 (T^2-2T+4)^3 \times \\ & \times (9T^2+6T+4)^3 (-3T^3+3\epsilon T^3+2+16\epsilon); \end{aligned} \quad (241)$$

$$\mathfrak{h}_{z\rho\rho} = \frac{2^{1/3}}{36} B \frac{6T^3+3\epsilon T^3-4+16\epsilon}{3T^3-2}; \quad (242)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{z\psi\psi} = & \frac{2^{8/3} \cdot 3^4 A}{N} \rho^2 T^4 (3T^6-3T^5-2T^4-136T^3-132T^2-88T+16) \times \\ & \times (16+3T^3)(T-1)^2 (T+2)^2 (T^2+T+1)^2 (T^2-2T+4)^2 (9T^2+6T+4)^2 \times \\ & \times (6\epsilon T^3+3T^3-4\epsilon+16)^2; \end{aligned} \quad (243)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{\rho\psi\psi} = & -\frac{2^{10/3} \cdot 3^6 \epsilon}{N} \rho^2 T^4 (6T^3-4+3\epsilon T^3+16\epsilon)(3T^3-2) \times \\ & \times (3T^6-3T^5-2T^4-136T^3-132T^2-88T+16) \times \\ & \times (16+3T^3)(T^2+T+1)^2 (T^2-2T+4)^2 (9T^2+6T+4)^2 (T-1)^2 (T+2)^2; \end{aligned} \quad (244)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{\rho\psi z} = & -\frac{6A}{N} \rho T^2 (T-1)(T+2)(T^2+T+1)(T^2-2T+4)(9T^2+6T+4)(3T^3-2) \times \\ & \times (3T^6-3T^5-2T^4-136T^3-132T^2-88T+16)^2 (16+3T^3)^2 \times \\ & \times (-63T^6+63\epsilon T^6+192T^3+294\epsilon T^3+224-224\epsilon), \end{aligned} \quad (245)$$

где

$$\begin{aligned} A = & \left(\frac{2-3T^3}{16+3T^3} \right)^{1/3}, \\ N = & (3T^6-3T^5-2T^4-136T^3-132T^2-88T+16)^3 \times \\ & \times (3T^3-2)^3 (16+3T^3-16\epsilon+24\epsilon T^3)(16+3T^3)^3, \\ T \equiv & \text{TH}_3(\psi). \end{aligned} \quad (246)$$

Перейдем к выводу вида оператора \bigcirc_3 в неизотропной цилиндрической системе координат. Для промежуточной аффинной системы $\{u, w, z\}$ имеем:

$$\partial_1 = -\partial_u - \partial_v + \partial_z; \quad \partial_2 = 2\partial_u - \partial_v + \partial_z; \quad \partial_3 = -\partial_u + 2\partial_v + \partial_z. \quad (247)$$

Для производных ∂_v и ∂_u в свою очередь имеем:

$$\partial_u = \frac{\partial \rho}{u} \partial_\rho + \frac{\partial \psi}{\partial u} \partial_\psi; \quad \partial_v = \frac{\partial \rho}{v} \partial_\rho + \frac{\partial \psi}{\partial v} \partial_\psi. \quad (248)$$

Используя соотношения (231) и (235) после довольно громоздких вычислений с учетом вида (226) функции ArсTH_3 и (228), можно составить оператор \bigcirc_3 . Как и в случае сферической симметрии результат можно представить в виде следующей суммы форм по $\{\partial_z, \partial_\rho, \partial_\psi\}$:

$$\bigcirc_3 = \mathcal{C}^3(\partial_z, \partial_\rho, \partial_\psi) + \mathcal{C}^2(\partial_z, \partial_\rho, \partial_\psi) + \mathcal{Q}(\partial_z, \partial_\rho, \partial_\psi). \quad (249)$$

Мы не будем приводить здесь выражения для коэффициентов форм $\mathcal{C}^3, \mathcal{C}^2, \mathcal{C}$, ввиду их чрезвычайной громоздкости. Обсудим структуру цилиндрически-симметричных решений уравнения $\bigcirc_3 f = 0$ в общем виде. Цилиндрически-симметричное решение по определению не зависит от координат z и ψ . Из общих соображений (непосредственные вычисления с помощью (249) подтверждают это) радиальная часть оператора \bigcirc_3 в неизотропной цилиндрической системе координат будет иметь вид:

$$\bigcirc_{3\rho} = F_3(T) \frac{\partial^3}{\partial \rho^3} + F_2(T) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + F_1(T) \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad (250)$$

где F_1, F_2, F_3 — функции переменной $T = \text{TH}_3(\psi)$. Условие разделения переменных в уравнении $\bigcirc_{3\rho} f(\rho) = 0$ имеет вид:

$$f(\rho) = C_0 \rho^C, \quad (251)$$

где C и C_0 — произвольные вещественные константы. Подстановка (251) в (250) приводит к соотношению:

$$C(C-1)(C-2)F_3(T) + C(C-1)F_2(T) + CF_1(T) = 0, \quad (252)$$

что означает специальную линейную зависимость функций F_1, F_2, F_3 . Непосредственная проверка с помощью явного вида (249) обнаруживает, что такая зависимость не имеет места в действительности. Отсюда вытекает любопытный вывод: *в H_3 (аналогично и в H_n) не существует цилиндрически симметричных решений уравнения $\bigcirc_3 f = 0$ с разделяющимися переменными!*¹² Это обстоятельство тесно связано с размерностью группы гиперболических вращений в H_3 . Цилиндрическую симметрию можно рассматривать как нарушенную сферическую симметрию. Выбор оси симметрии требует фиксации двух параметров (два независимых угла). В евклидовом случае после фиксации оси симметрии остается еще один свободный параметр — полярный угол φ , в то время как в H_3 все вращательные параметры после задания оси симметрии оказываются уже исчерпанными (группа гиперболических вращений в H_3 — двумерна).

Рассмотрим также с общих позиций структуру решения, описывающего цилиндрический вихрь, которое зависит от пары координат ρ и ψ , а от координаты z не зависит. Такое решение не исключается соображениями групповой симметрии. Оператор $\bigcirc_{3\perp}$, в котором формально $\partial_z = 0$, будет иметь следующую общую структуру:

$$\begin{aligned} \bigcirc_{3\perp} = & F_{30}(T) \frac{\partial^3}{\partial \rho^3} + F_{20}(T) \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + F_{10}(T) \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} + F_{21}(T) \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3}{\partial \psi \partial \rho^2} + \\ & + F_{11}(T) \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \rho} + F_{12}(T) \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^3}{\partial \psi^2 \partial \rho} + \frac{1}{\rho^3} \left(F_{01}(T) \frac{\partial}{\partial \psi} + F_{02}(T) \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + F_{03}(T) \frac{\partial^3}{\partial \psi^3} \right), \end{aligned} \quad (253)$$

где $\{F_{ij}\}$ — набор вполне определенных функций переменной T (они дробно-иррациональные). Представляя решение $f(\rho, \psi)$ в разделенном виде:

$$f(\rho, \psi) = R(\rho)\Psi(\psi) \quad (254)$$

¹²На самом деле, несложный анализ обнаруживает, что такого решения не существует и в классе несе-парабельных решений.

в (253) приходим после некоторого предварительного анализа к условию разделения переменных: $R(\rho) = C_0 r^C$, что после подстановки в (254) и приведения подобных слагаемых дает уравнение на угловую часть вида:

$$G_3(T)\ddot{\Psi} + G_2(T)\dot{\Psi} + G_1(T)\Psi + G_0\Psi = 0, \quad (255)$$

где точка означает дифференцирование по ψ . Переходя к новой переменной $x = T(\psi)$, с помощью формулы:

$$\frac{d}{d\psi} = \frac{dx}{d\psi} \frac{d}{dx} = 2^{2/3} \frac{(x+2)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-2x+4)(9x^2+6x+4)}{3x^6-3x^5-2x^4-136x^3-132x^2-88x+16} \frac{d}{dx}, \quad (256)$$

которая получается из (226) с помощью правила дифференцирования обратной функции, получаем из (255) уравнение вида:

$$\bar{G}_3(x)\Phi'''(x) + \bar{G}_2(x)\Phi''(x) + \bar{G}_1(x)\Phi'(x) + \bar{G}_0\Phi(x) = 0, \quad (257)$$

где функции $\bar{G}_i(x)$ являются линейными комбинациями функций G_i из (255) с дробно-рациональными коэффициентами. Уравнение (257) является определяющим для угловой части оператора \mathcal{O}_3 , а его решения являются гиперболическими аналогами цилиндрических гармоник.

А Некоторые геометрические объекты в H_3

В этом приложении мы приведем иллюстрации гиперболических аналогов некоторых привычных евклидовых геометрических объектов.

А.1 Правильные многогранники

Даже на плоскости двойной переменной, метрические отношения на которой описываются 2-мерной метрикой Минковского, адекватное восприятие привычных отношений простейших фигур затруднено из-за столкновения евклидовой интуиции с неевклидовыми метрическими отношениями. На рис. 11 слева красным цветом показаны два равнобедренных треугольника, которые, кроме того, конгруэнтны (т.е. могут быть совмещены друг с другом посредством преобразований из группы движений псевдоевклидовой плоскости). Зеленым цветом показаны траектории потока одного из возможных движений — псевдоевклидового вращения, которое переводит вершины одного треугольника в вершины другого без изменения их метрических отношений. Отметим, что правая верхняя сторона каждого треугольника имеет квадрат длины, противоположный по знаку квадратам длин двух других сторон.

На рис. 11 справа аналогичная ситуация показана для многогранников в H_3 . Красным цветом изображены два гиперболических куба, которые конгруэнтны между собой. Условие ортогональности ребер в вершинах имеет вид:

$$\mathfrak{h}(A, B, C) = 0 \quad (258)$$

— триортогональности векторов A, B, C , изображающих ребра куба. Каждый из кубов может быть переведен в другой посредством комбинации трансляции и гиперболического вращения.

А.2 Некоторые замечательные кривые

Определения евклидовых геометрических объектов, опирающиеся лишь на функцию расстояния, оказываются пригодными и для определения соответствующих им гиперболических аналогов. Рассмотрим несколько конкретных примеров.

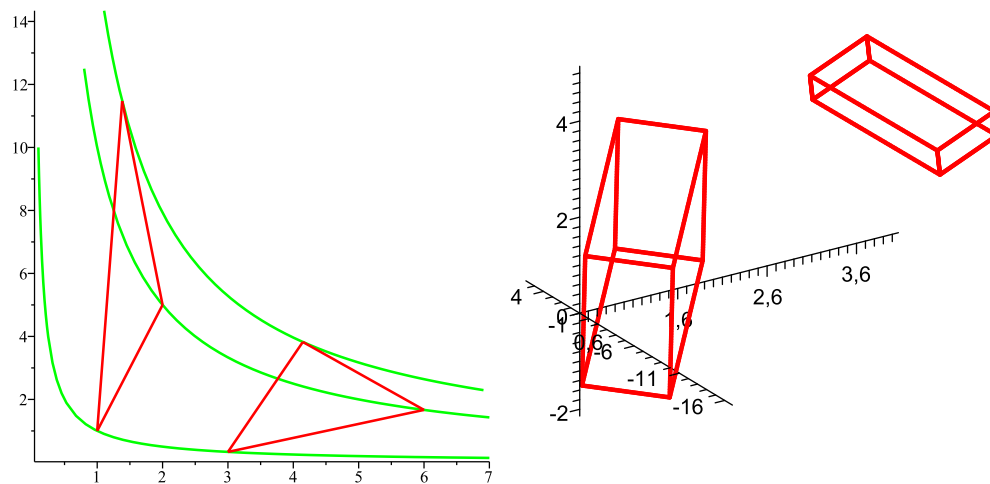


Рис. 11: Слева — пара конгруэнтных равносторонних треугольников на псевдоевклидовой плоскости, связанных преобразованием из группы движения, справа — пара конгруэнтных кубов в H_3 , связанных преобразованием из группы движения H_3 (в вершинах выполняется условие 3-ортогональности).

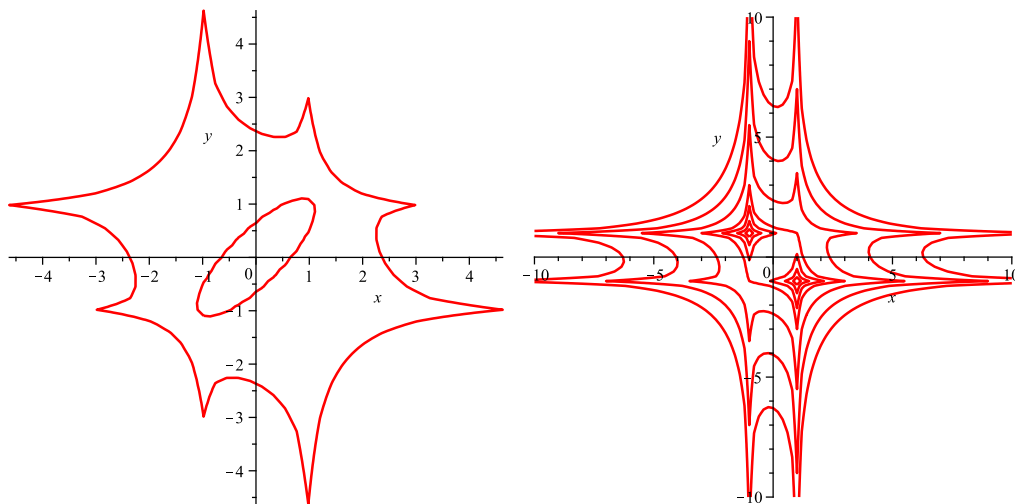


Рис. 12: Слева — евклидов и псевдоевклидов эллипсы с одинаковым уравнением $r_1 + r_2 = 3$, (r_1, r_2 — расстояния до точек $(1; 1)$ и $(-1; -1)$). Справа — семейство гиперболических эллипсов $r_1 + r_2 = C$. При некотором (малом) C изменяется связность кривой.

А.2.1 Гиперболический эллипс

Рассмотрим известное фокальное определение эллипса, которое определяет его как множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных является величиной постоянной:

$$r_1 + r_2 = \text{const.} \tag{259}$$

Если под расстояниями r_1 и r_2 понимать их гиперболические версии в H_2 , то приходим к определению гиперболического эллипса. Их характерный вид представлен на рис. 12.

А.2.2 Гиперболическая гипербола

Рассмотрим теперь известное фокальное определение гиперболы, которое определяет его как множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух за-

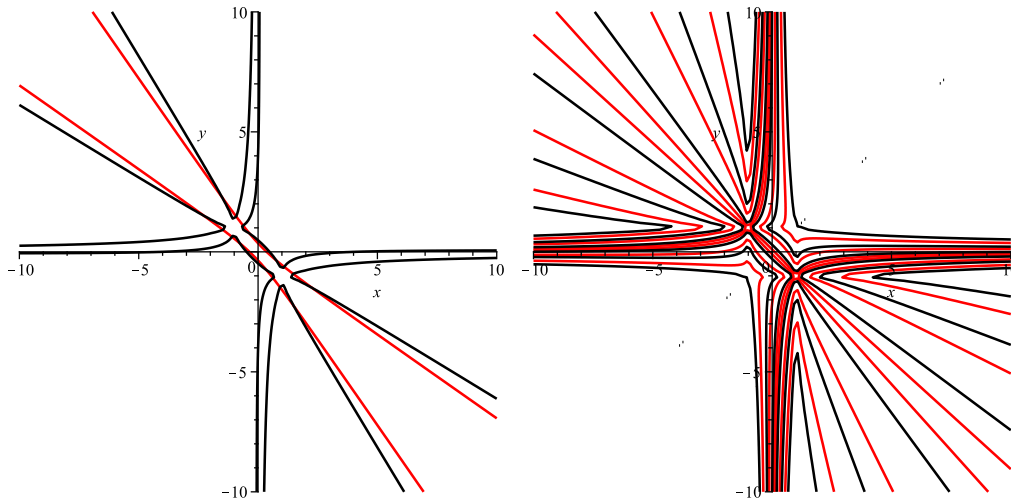


Рис. 13: Слева — евклидовы и псевдоевклидовы гиперболы с одинаковым уравнением $r_1 - r_2 = \pm 0.5$, (r_1, r_2 — расстояния до точек $(1; 1)$ и $(-1; -1)$). Справа — семейство гиперболических гипербол $r_1 - r_2 = C$.

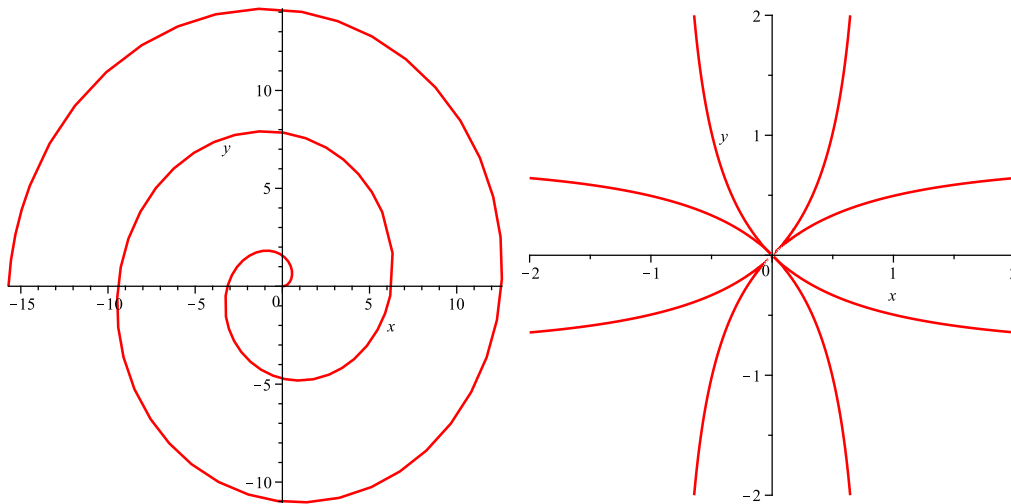


Рис. 14: Слева — равномерная евклидова спираль, справа — равномерная гиперболическая спираль с одинаковым уравнением $r = \varphi$.

данных является величиной постоянной:

$$r_1 - r_2 = \text{const.} \quad (260)$$

Аналогично предыдущему случаю, в H_2 приходим к определению гиперболических гипербол. Их общий вид представлен на рис. 13.

А.3 Спирали

Определение равномерной евклидовой спирали:

$$r = C\varphi \quad (261)$$

без изменения переносится на двойную плоскость, если под расстоянием и углом понимать их гиперболические аналоги. На рис. 14 показаны евклидова (слева) и гиперболическая (справа) спирали.

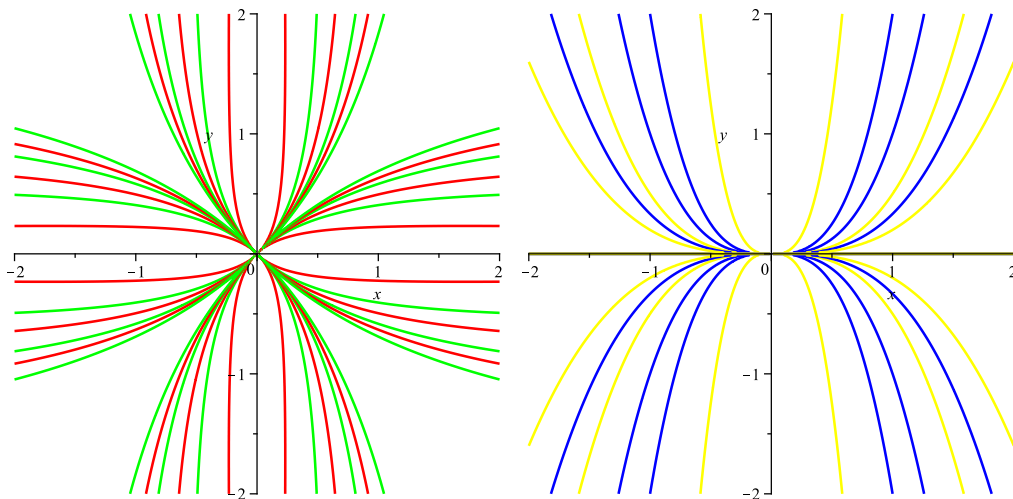


Рис. 15: Слева — семейство равномерных гиперболическая спиралей с уравнением $\rho = C\psi$, справа — семейство гиперболических спиралей Архимеда с уравнением $\rho = e^{k\psi}$.

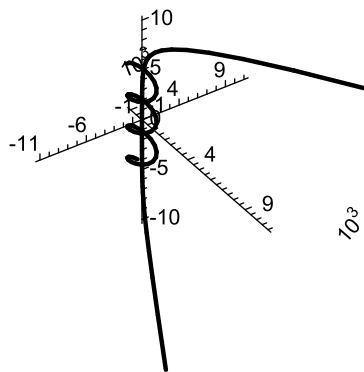


Рис. 16: Эллиптическая и гиперболическая равномерные спирали.

На рисунке 15 (слева) показано семейство равномерных гиперболических спиралей (261) с различными C , а справа показан вид спирали Архимеда с уравнением:

$$r = e^{k\varphi}. \tag{262}$$

На рис. 16 представлены круговая эллиптическая и гиперболическая пространственные спирали. Первая задается уравнением:

$$x(t) = x_0 + R \cos t; \quad y = y_0 + R \sin t; \quad z = z_0 + at, \tag{263}$$

а уравнение второй получается из (263) заменой тригонометрических \sin и \cos на гиперболические \sinh и \cosh .

А.3.1 Астроиды

Если в каноническом уравнении евклидовой астроиды:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \tag{264}$$

изменить знак перед одним из слагаемых в левой части, то получим семейство гиперболических астроид. Их общий вид показан на рис. 17.

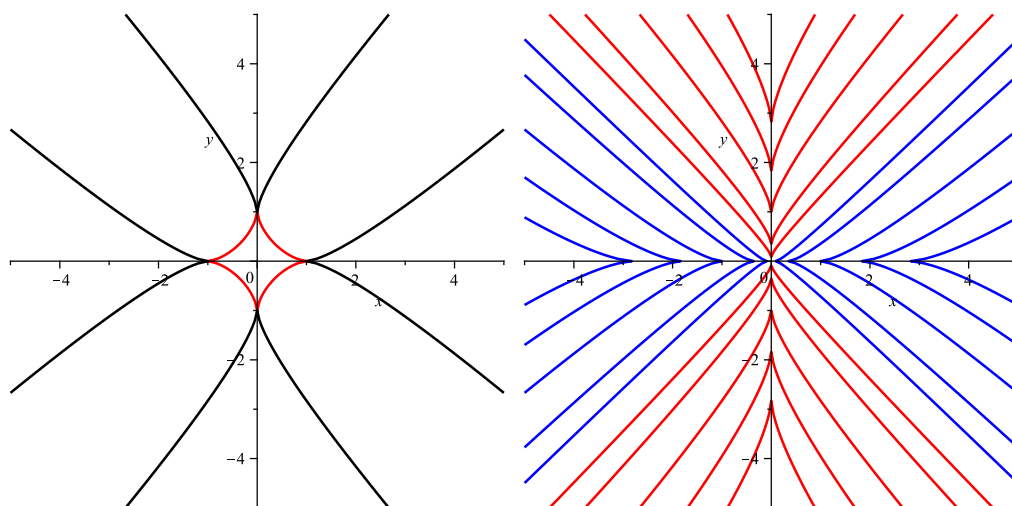


Рис. 17: Слева — эллиптическая и гиперболическая астроида, справа семейство астронд вида $y^{2/3} - x^{2/3} = C$.

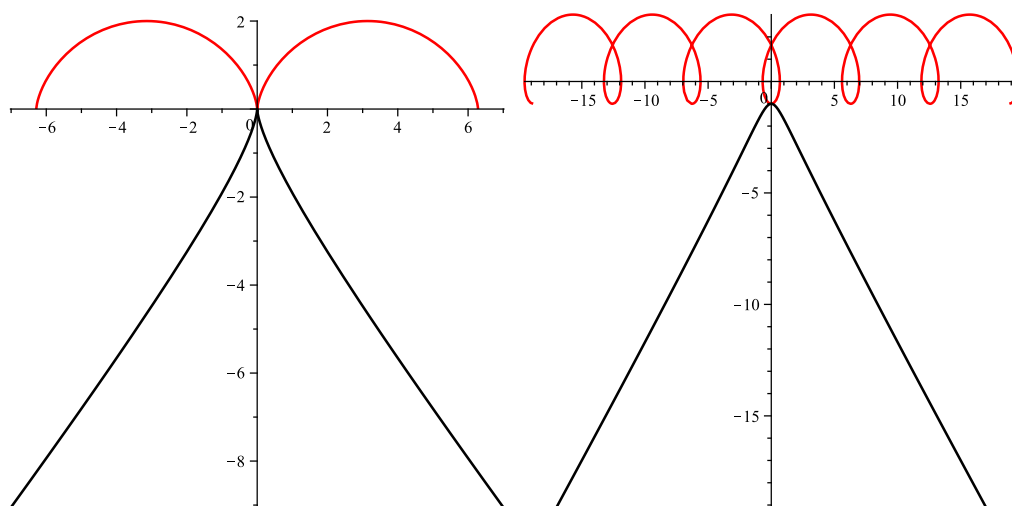


Рис. 18: Слева — эллиптическая и гиперболическая циклоиды, справа — эллиптическая и гиперболические трохоиды.

А.3.2 Циклоиды

Если в каноническом параметрическом уравнении циклоиды:

$$x(t) = t - \sin t; \quad y(t) = 1 - \cos t \quad (265)$$

заменить тригонометрические \sin и \cos на гиперболические \sinh и \cosh , то получим параметрическое уравнение гиперболической циклоиды. Аналогично обстоит дело и для трохоидальных кривых, уравнение которых обобщает (265)

$$x(t) = t - C \sin t; \quad y(t) = 1 - C \cos t. \quad (266)$$

Вид эллиптических и гиперболических циклоиды и трохоиды представлен на рис. 18.

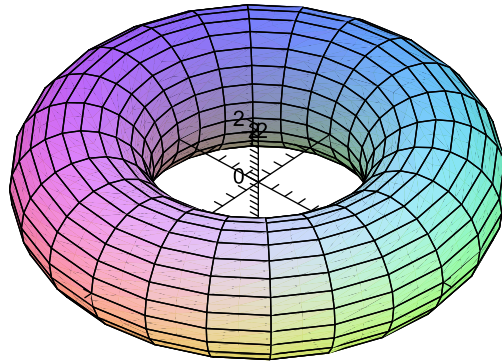


Рис. 19: Эллиптический тор с отношением радиусов 5/2.

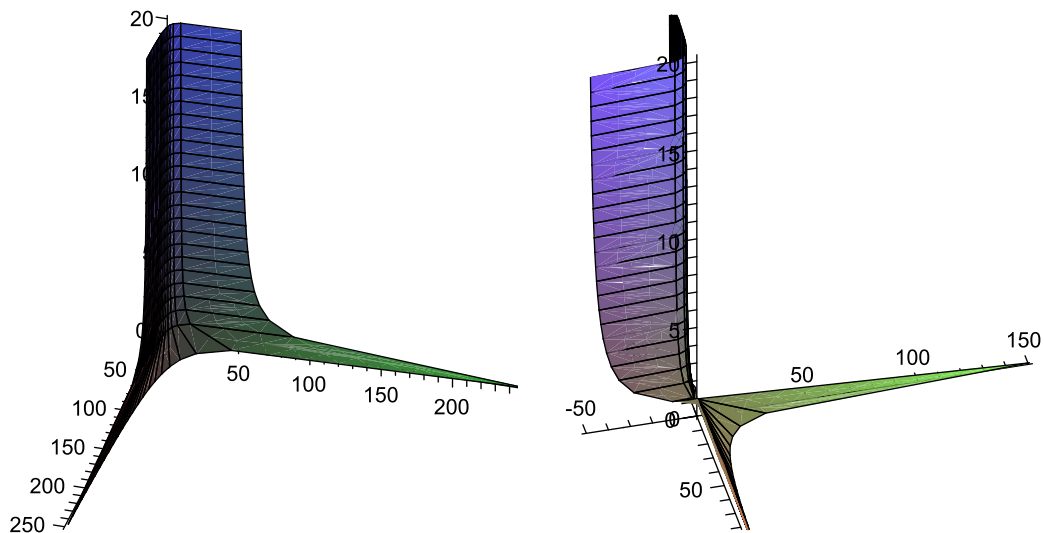


Рис. 20: Слева — компонента гиперболического тора с двумя радиусами одного знака, справа — компонента - с радиусами разных знаков.

А.4 Торы

Каноническое уравнение тора, описывающее вращение одной окружности вдоль другой имеет вид:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= x_0 + r_1 \cos u + r_2 \cos u \cos v; \\ y(u, v) &= r_1 \sin u + r_2 \sin u \cos v; \\ z(u, v) &= r_2 \sin v. \end{aligned} \tag{267}$$

Эллиптический тор представлен на рис. 19.

Если в этом определении заменить тригонометрические функции на гиперболические и под радиусами понимать гиперболические расстояния, то формально приходим к определению гиперболического тора. Чтобы получить полную картину, необходимо учесть что квадраты радиусов могут иметь различные знаки и определение типа (267) может включать в себя радиусы, квадраты которых имеют один и тот же знак, или противоположные знаки. Эти возможные ситуации представлены на рис. 20.

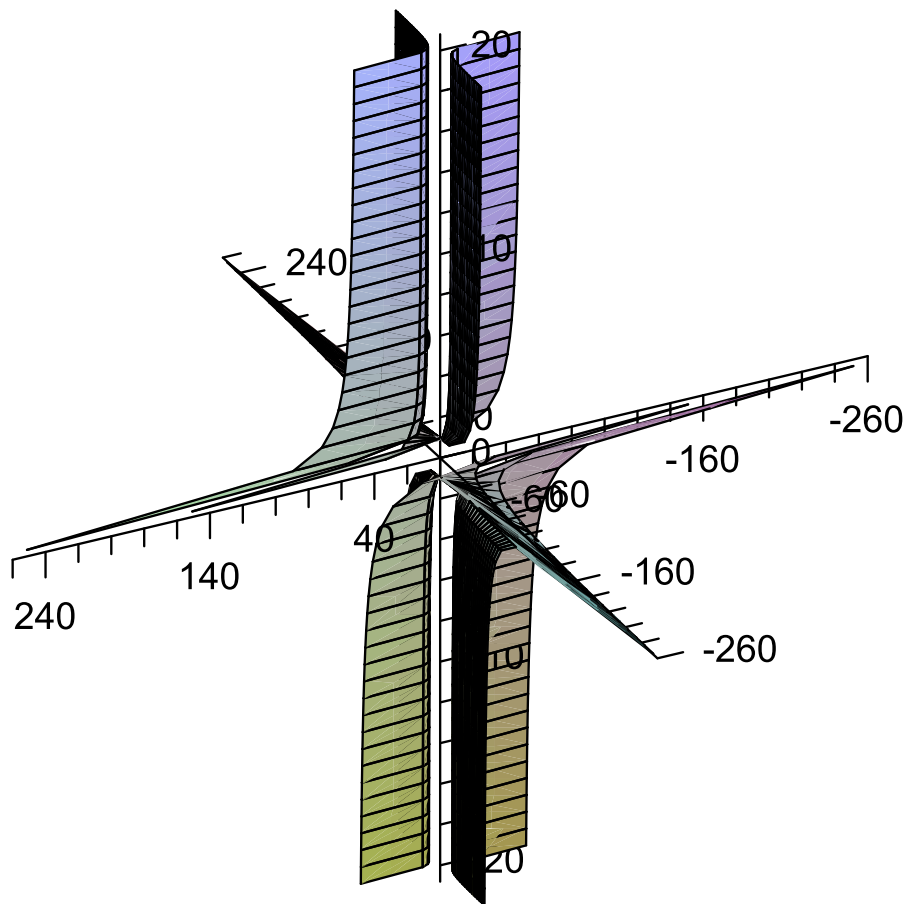


Рис. 21: Гиперболическое полноторие

Для получения полной картины (полнотория) необходимо объединить все компоненты поверхности на одной иллюстрации (рис. 21).

Литература

- [1] Пенроуз Р. Путь к реальности или законы, управляющие вселенной, РХД, Москва-Ижевск, 2007.
- [2] Владимиров Ю.С. Пространство-время: явные и скрытые размерности. (Изд-е 2-е переработанное) М., Книжный дом «Либроком» 2010.
- [3] Кокарев С.С. Три лекции о законах Ньютона. В сб. трудов РНОЦ «Логос», Ярославль, вып.1, 2006, с. 45–72, arXiv: 0905.3285v1[gr-qc].
- [4] Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля (в 4-х томах). М., УРСС, 1996–2000.
- [5] Боголюбов Н.Н., Логунов А.А. Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М., Наука, 1987.
- [6] Б.А.Дубровин, Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М., Наука, 1979.
- [7] Гайденок П.П. История греческой философии в ее связи с наукой. М., УРСС, 2009.
- [8] ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М., Наука, 1979.
- [9] Zelenov E. p-adic mathematical physics and space-time. // *Grav. & Cosm.*, v1, N3, 1995, pp. 243–246.
- [10] Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1977.

- [11] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973.
- [12] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. h -голоморфные функции двойной переменной и их приложения. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(13), т. 7, 2010, с. 44–77.
- [13] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(13), т. 7, 2010, с. 78–127.
- [14] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(14), т. 7, 2010, с. 11–37.
- [15] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналогов множества Жюлиа на плоскости двойной переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(12), т. 6, 2009, с. 163–176.
- [16] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Аналитические, дифференциально-геометрические и алгебраические свойства гладких функций поличисловой переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(16), том 8, 2011, с. 4–53.
- [17] Шабат Б.О. Введение в комплексный анализ. М., Наука, 1985.
- [18] Balan V. Spectral properties and applications of of numerical multilinear algebra of m -root structures. // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 2(10), v. 5, 2008, p. 101.
- [19] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Конформные калибровки геометрии Бервальда-Моора и индуцируемые ими нелинейные симметрии. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(10), т. 5, 2008, с. 3.
- [20] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Метрические бинглы и тринглы в H_3 . // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(11), т. 6, 2009, с. 42–67.
- [21] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., Наука, 1981.

SOME PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS IN POLYNUMBERS FIELD THEORY

D.G. Pavlov¹, S.S. Kokarev^{1,2}

¹ *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fрязино, Russia*

² *RSEC Logos, Yaroslavl, Russia*

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

Some mathematical aspects of the invariant scalar operator \bigcirc_n , that appears in polynumbers field theory, are considered together with some characteristic properties of its kernel. Concrete expressions for Berwald-Moor metrics and operator \bigcirc_n in isotropic cylindrical, non-isotropic cylindrical and general spherical coordinate systems are derived in case $n=3$. Part of the results is expressed in terms of special functions, which are hyperbolic analogies of trigonometric ones, spherical harmonics and Legendre polynomials. General kind of radial part of \bigcirc_n is calculated for arbitrary n . The problem of finding of hyperbolic field, generated by homogeneously charged hyperbolic sphere, is solved. We show, that there is no separable solutions to hyperbolic wave equation with cylindrical symmetry.

Key Words: polynumbers, Berwald-Moor space, hyperbolic field theory, Green functions, curvilinear coordinates, spherical symmetry, separation of variables.

ЛЕСТНИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛИЧИСЕЛ

Г.И. Гарасько

ФГУП ВЭИ, Москва, Россия

gri9z@mail.ru, gri9z.wordpress.com

В работе предложено обобщение экспоненциального представления невырожденных поличисел, которое названо *лестничным*, на примере гиперкомплексных чисел H_4 . Возникающий при этом итерационный процесс может обрываться или быть бесконечным. Предложен новый подход к осмыслению цепочки понятия: длина, угол, новые объекты – в поличисловых пространствах.

Ключевые слова: невырожденные поличисла, экспоненциальное представление, лестничное представление, гиперкомплексные числа, итерационный процесс.

1 Введение

Любое не равное нулю комплексное число $z = x + iy$ представимо в экспоненциальном виде однозначно

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad i^2 = -1, \quad (1)$$

если потребовать, чтобы ρ и φ были действительными числами, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\rho > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (2)$$

При снятии всех условий можно многими способами представить не равное нулю комплексное число в виде «экспоненциальной лесенки»

$$z = w_{(1)} e^{w_{(2)} e^{w_{(3)} e^{\dots}}} \quad (3)$$

конечной или бесконечной. Таким образом, вместо единственного начального числа z мы получаем набор комплексных чисел:

$$z \rightarrow w_{(1)} \rightarrow w_{(2)} \rightarrow w_{(3)} \rightarrow \dots \rightarrow w_{(c)} \rightarrow \dots \quad (4)$$

Поэтому, для того чтобы построение (3) было однозначным, необходимо на каждом этапе (при каждой итерации) придерживаться экспоненциального представления. Тогда для комплексного числа z получим:

$$z \rightarrow \rho \rightarrow \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow i \frac{\pi}{2}, \quad (5)$$

если оборвать итерационный процесс, и

$$z \rightarrow \rho \rightarrow \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{\pi}{2} \dots, \quad (6)$$

если его не обрывать.

Для двойных чисел $z = x + jy \in H_2$, где $j^2 = 1$, экспоненциальное представление возможно, если

$$x + y > 0, \quad x - y > 0. \quad (7)$$

Тогда найдутся действительные числа ρ , α такие, что

$$z = \rho e^{j\alpha}, \quad \rho = \sqrt{x^2 - y^2}, \quad \rho > 0, \quad -\infty < \alpha < +\infty; \quad (8)$$

а вместо (5), (6) имеем

$$z \rightarrow \varrho \rightarrow j \alpha \tag{9}$$

или

$$z \rightarrow \varrho \rightarrow j \alpha \rightarrow 0, \tag{10}$$

и ничего более.

Обобщение таких построений, как (5), (6) для комплексных чисел и (9), (10) для двойных чисел, на алгебры произвольных невырожденных чисел $P_{k+2 \cdot m}$ с учетом понятия экспоненциального представления последних [1] является содержанием настоящей работы. Такое обобщение экспоненциального представления невырожденных поличисел будем называть *лестничным представлением* поличисел. Хотя оборвать процесс можно на любой итерации, для поличисел $P_{k+2 \cdot m}$ размерности $n \equiv k + 2 \cdot m$ выделенной конечной последовательностью всегда будет последовательность, состоящая из n чисел. Для комплексных чисел это

$$z \rightarrow \varrho \rightarrow i\varphi, \quad \{\varrho, \varphi\},$$

для двойных чисел —

$$z \rightarrow \varrho \rightarrow j \alpha, \quad \{\varrho, j \alpha\},$$

а для $P_{k+2 \cdot m}$ —

$$X \equiv X_{(1)} \rightarrow X_{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow X_{(n)}, \quad \{W_{(1)}, W_{(2)}, \dots, W_{(n)}\}. \tag{11}$$

Так как в общем случае поличисел $P_{k+2 \cdot m}$ построение *лестничного представления* довольно громоздко, проведем его последовательно для поличисел H_4 . Для других систем невырожденных поличисел *лестничное представление* строится аналогично.

Как известно [1], поличисло $X \in H_4$ может быть представлено в экспоненциальном виде

$$X = |X| \cdot e^{\alpha j + \beta k + \gamma jk} \cdot 1, \tag{12}$$

где $1, j, k, jk$ - "ортонормированный" базис,

$$j^2 = 1, \quad k^2 = 1, \quad (jk)^2 = 1, \quad j \cdot k = jk, \quad j \cdot jk = k, \quad k \cdot jk = j; \tag{13}$$

который связан с изотропным базисом e_1, e_2, e_3, e_4 следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \\ j &= e_1 + e_2 - e_3 - e_4, \\ k &= e_1 - e_2 + e_3 - e_4, \\ jk &= e_1 - e_2 - e_3 + e_4, \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

если все координаты $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ поличисла X в изотропном базисе e_1, e_2, e_3, e_4 являются действительными положительными числами:

$$\xi^i > 0. \tag{15}$$

Запишем формулу (12) в изотропном базисе:

$$X = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \cdot |X| \cdot e^{\eta^1 e_1 + \eta^2 e_2 + \eta^3 e_3 + \eta^4 e_4}, \tag{16}$$

где

$$|X| = \sqrt[4]{\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4}, \quad \eta_i = \ln \left(\frac{\xi^i}{|X|} \right). \quad (17)$$

Величины η^i не являются независимыми, так как

$$\eta^1 + \eta^2 + \eta^3 + \eta^4 = 0, \quad (18)$$

и выражаются через угловые переменные α, β, γ следующим образом:

$$\eta^1 = \alpha + \beta + \gamma, \quad \eta^2 = \alpha - \beta - \gamma, \quad \eta^3 = -\alpha + \beta - \gamma, \quad \eta^4 = -\alpha - \beta + \gamma. \quad (19)$$

Обратные формулы имеют вид:

$$\alpha = \frac{1}{2}(\eta^1 + \eta^2), \quad \beta = \frac{1}{2}(\eta^1 + \eta^3), \quad \gamma = \frac{1}{2}(\eta^1 + \eta^4). \quad (20)$$

2 Лестничное представление поличисел H_4

Из анализа формул (15) – (17) вытекает естественное обобщение экспоненциального представления поличисел $X \in H_4$, для которых вместо условия (15) должно выполняться более слабое условие:

$$\xi^i \neq 0. \quad (21)$$

Такое представление можно записать следующим образом:

$$X = \overset{s}{X} \cdot \left| \overset{m}{X} \right| \cdot e^{\eta^1 e_1 + \eta^2 e_2 + \eta^3 e_3 + \eta^4 e_4}, \quad (22)$$

где

$$\overset{s}{X} \equiv \text{sign}(\xi^1) e_1 + \text{sign}(\xi^2) e_2 + \text{sign}(\xi^3) e_3 + \text{sign}(\xi^4) e_4, \quad (23)$$

$$\overset{m}{X} \equiv |\xi^1| e_1 + |\xi^2| e_2 + |\xi^3| e_3 + |\xi^4| e_4, \quad (24)$$

$$\left| \overset{m}{X} \right| \equiv \varrho = \sqrt[4]{|\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4|}, \quad \overset{1}{X} \equiv \frac{\overset{m}{X}}{\left| \overset{m}{X} \right|}, \quad (25)$$

$$\eta^i = \frac{1}{8} \ln \left(\frac{(\xi^i)^8}{(\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4)^2} \right), \quad \eta^1 + \eta^2 + \eta^3 + \eta^4 = 0. \quad (26)$$

Из последней формулы следует, что η^i не могут быть все положительными или все отрицательными. Если хотя бы одна из η^i обращается в нуль, то далее процесс построения лестничного представления продолжен быть не может, то есть он обрывается. Формулу (22) можно записать более кратко:

$$X = \overset{s}{X}_{(1)} \cdot \left| \overset{m}{X}_{(1)} \right| \cdot e^{\ln \left(\overset{1}{X}_{(1)} \right)}, \quad X_{(1)} \equiv X. \quad (27)$$

Число различных поличисел $\overset{s}{X} \equiv J_1$ равно 16. В это множество J_a , $a = 1, 2, \dots, 16$ входят все базисные элементы $1, j, k, jk$. Произведение двух произвольных элементов J_{a_1} и J_{a_2} дает опять элемент J_{a_3} того же множества. Для каждого J_a существует обратный элемент из того же множества. Все J_a обладают свойством:

$$J_a^2 = 1. \quad (28)$$

Поэтому множество элементов J_a образует группу, которую естественно назвать группой символьных гиперболических единиц.

Если

$$X_{(2)} \equiv \ln \left(\overset{1}{X}_{(1)} \right) \quad (29)$$

не есть делитель нуля, то процесс можно продолжить:

$$X_{(2)} \rightarrow X_{(3)} \equiv \ln \left(\overset{1}{X}_{(2)} \right). \quad (30)$$

Если

$$X_{(3)} \equiv \ln \left(\overset{1}{X}_{(2)} \right) \quad (31)$$

не есть делитель нуля, то процесс можно продолжить:

$$X_{(3)} \rightarrow X_{(4)} \equiv \ln \left(\overset{1}{X}_{(3)} \right). \quad (32)$$

Тогда мы получим набор из 4-х действительных положительных чисел:

$$\varrho_1 = \left| \overset{m}{X}_{(1)} \right|, \quad \varrho_2 = \left| \overset{m}{X}_{(2)} \right|, \quad \varrho_3 = \left| \overset{m}{X}_{(3)} \right|, \quad \varrho_4 = \left| \overset{m}{X}_{(4)} \right|, \quad (33)$$

которые назовём модулем, углом, тринглом и 4-инглом соответственно. Каждой из этих величин соответствует некоторое направление в четырехмерном пространстве H_4 :

$$J_1 = \overset{s}{X}_{(1)}, \quad J_2 = \overset{s}{X}_{(2)}, \quad J_3 = \overset{s}{X}_{(3)}, \quad \overset{s}{X}_{(4)} \overset{1}{X}_{(4)} \equiv J_4 \overset{1}{X}_{(4)}. \quad (34)$$

Итак, вместо поличисла X мы получили набор из 4-х поличисел:

$$\left\{ J_1 \varrho_1, J_2 \varrho_2, J_3 \varrho_3, J_4 \varrho_4 \overset{1}{X}_{(4)} \right\}. \quad (35)$$

Поличисло J_1 - указывает один из 16-ти конусов, на которые разбивается координатное пространство H_4 делителями нуля. Каждое поличисло J_2, J_3, J_4 - указывает на один из конусов из меньшего, чем 16-ть, множества, так как в это множество заведомо не входят конусы $(+, +, +, +)$ и $(-, -, -, -)$. Можно считать, что унимодулярное поличисло

$$\overset{1}{X}_{(4)} = e^{\alpha_4 j + \beta_4 k + \gamma_4 j k} \quad (36)$$

указывает направление в конусе, который определяется поличислом J_4 .

Итак, для поличисел $X \in H_4$, у которых координаты в изотропном базисе на каждой итерации отличны от нуля, то есть они не являются делителями нуля, получается представление следующего вида

$$X = J_1 \varrho_1 \cdot e^{J_2 \varrho_2} \cdot e^{J_3 \varrho_3} \cdot e^{J_4 \varrho_4 \overset{1}{X}_{(4)}}, \quad (37)$$

или для координат в изотропном базисе

$$\xi^i = j_1^i \varrho_1 \cdot e^{j_2^i \varrho_2} \cdot e^{j_3^i \varrho_3} \cdot e^{\varrho_4 j_4^i \zeta^i}. \quad (38)$$

Здесь по индексу i нет суммирования, $j_k^i = \pm 1$ - независимые знаковые коэффициенты,

$$J_k = j_k^1 e_1 + j_k^2 e_2 + j_k^3 e_3 + j_k^4 e_4; \quad (39)$$

$$\overset{1}{X}_{(4)} = \zeta^1 e_1 + \zeta^2 e_2 + \zeta^3 e_3 + \zeta^4 e_4, \quad (40)$$

$$\overset{1}{X}_{(4)} = e^{\alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4} e_1 + e^{\alpha_4 - \beta_4 - \gamma_4} e_2 + e^{-\alpha_4 + \beta_4 - \gamma_4} e_3 + e^{-\alpha_4 - \beta_4 + \gamma_4} e_4. \quad (41)$$

Представление (37) будем называть *лестничным представлением* поличисел H_4 .

Если итерационный процесс обрывается раньше, то вместо (37) можем получить

$$X = J_1 \varrho_1 \cdot e^{J_2 \varrho_2 \overset{1}{X}_{(2)}} \quad \text{или} \quad X = J_1 \varrho_1 \cdot e^{J_2 \varrho_2} \cdot e^{J_3 \varrho_3 \overset{1}{X}_{(3)}}, \quad (42)$$

соответственно.

3 Бесконечный итерационный процесс

Лестничное представление (37) можно продолжить до сколь угодно большого $(m + 1)$:

$$X = J_1 \varrho_1 e^{J_2 \varrho_2 e^{\dots e^{\varrho_m J_m e^{\alpha_m j + \beta_m k + \gamma_m jk}}}}, \quad (43)$$

$$\alpha_m, \beta_m, \gamma_m \rightarrow \alpha_{m+1}, \beta_{m+1}, \gamma_{m+1}, \quad (44)$$

если все $X_{(a)}$, $a \leq m$ не являются делителями нуля. Трехмерное координатное пространство $\alpha \equiv x$, $\beta \equiv y$, $\gamma \equiv z$ можно рассматривать как пространственную гиперплоскость в четырехмерном пространстве H_4 , которое мы отождествляем с пространством событий. Задавая различные начальные значения $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, получим последовательность точек в трехмерном пространстве x, y, z , которое, для наглядности, будем считать евклидовым, а сами координаты - декартовыми прямоугольными:

$$(x_4, y_4, z_4), (x_5, y_5, z_5), \dots, (x_m, y_m, z_m), \dots \quad (45)$$

Если перейти к сферическим координатам r, ϑ, φ , то такие последовательности точек можно изображать на небесной сфере координатами ϑ, φ .

Из выше изложенного следуют конкретные формулы для указанного итерационного процесса в трехмерном пространстве x, y, z :

$$\left. \begin{aligned} x_{m+1} &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(x_m + y_m + z_m)(x_m - y_m - z_m)}{(-x_m + y_m - z_m)(-x_m - y_m + z_m)} \right|, \\ y_{m+1} &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(x_m + y_m + z_m)(-x_m + y_m - z_m)}{(x_m - y_m - z_m)(-x_m - y_m + z_m)} \right|, \\ z_{m+1} &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(x_m + y_m + z_m)(-x_m - y_m + z_m)}{(x_m - y_m - z_m)(-x_m + y_m - z_m)} \right|. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Если дополнить эти формулы формулой

$$\begin{aligned} x_{m+1}^0 &= \left| \ln \frac{|x_m + y_m + z_m|}{\rho_m} \cdot \ln \frac{|x_m - y_m - z_m|}{\rho_m} \times \right. \\ &\quad \left. \times \ln \frac{|-x_m + y_m - z_m|}{\rho_m} \cdot \ln \frac{|-x_m - y_m + z_m|}{\rho_m} \right|^{\frac{1}{4}}, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\rho_m = |(x_m + y_m + z_m)(x_m - y_m - z_m)(-x_m + y_m - z_m)(-x_m - y_m + z_m)|^{\frac{1}{4}}, \quad (48)$$

получим итерационный процесс в 4-мерном пространстве x^0, x, y, z . Отметим, что в правой части формулы (47) отсутствует величина x_m^0 , а в формулах (46) величины $x_{m+1}, y_{m+1}, z_{m+1}$ выражаются только через сферические углы ϑ_m, φ_m . Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{m+1} &= \Theta(\vartheta_m, \varphi_m), \\ \varphi_{m+1} &= \Phi(\vartheta_m, \varphi_m), \\ r_{m+1} &= R(\vartheta_m, \varphi_m), \\ x_{m+1}^0 &= X^0(r_m, \vartheta_m, \varphi_m). \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

На наш взгляд, особенно интересен итерационный процесс

$$\vartheta_m, \varphi_m \rightarrow \vartheta_{m+1}, \varphi_{m+1}. \quad (50)$$

При этом удобно в качестве промежуточных формул использовать формулы (46), где положить

$$x_m \equiv \sin(\vartheta_m) \cos(\varphi_m), \quad y_m \equiv \sin(\vartheta_m) \sin(\varphi_m), \quad z_m \equiv \cos(\vartheta_m). \quad (51)$$

Углы $\vartheta_{m+1}, \varphi_{m+1}$ вычисляются по формулам:

$$\vartheta_{m+1} = \arccos \frac{z_{m+1}}{r_{m+1}}, \quad \varphi_{m+1} = \text{sign}(y_{m+1}) \arccos \frac{x_{m+1}}{r_{m+1} \sqrt{1 - \left(\frac{z_{m+1}}{r_{m+1}}\right)^2}}, \quad (52)$$

где

$$r_{m+1} \equiv \sqrt{x_{m+1}^2 + y_{m+1}^2 + z_{m+1}^2}. \quad (53)$$

4 Заключение

Используя для произвольных невырожденных поличисел $P_{k+2\cdot m}$ экспоненциальное представление [1] и следуя алгоритму построения *лестничного представления* для поличисел H_4 , изложенному выше; теперь мы можем построить *лестничное представление* для поличисел любой алгебры $P_{k+2\cdot m}$.

Литература

- [1] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., ТЕТРУ, 2009.

LADDER REPRESENTATION OF NONDEGENERATE POLYNUMBERS

G.I. Garas'ko

Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia

gri9z@mail.ru, gri9z.wordpress.com

The paper gives a generalization of exponential representation of nondegenerate polynumbers, which are named as ladder representation. It given on the base of hypercomplex numbers H_4 . The representation arise an iterative process, which can be finite or infinite. Also a new approach to understanding of notions of length and angle in polynumber spaces are proposed.

Key Words: nondegenerate polynumbers, exponential representation, ladder representation, hypercomplex numbers, iterative process.

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF FINSLER-SPACETIME TANGENT BUNDLE

Howard E. Brandt

U.S. Army Research Laboratory, Adelphi, USA

howard.e.brandt.civ@mail.mil

I draw on my earlier work to review various aspects of the differential geometry of a Finsler-spacetime tangent bundle, all based on the possible existence of a physical upper bound on proper acceleration. In particular, the bundle connection and associated differential geometric fields are calculated for a Finsler-spacetime tangent bundle particularized for the case of a stationary measuring device.

Key Words: Finsler geometry, spacetime tangent bundle, maximal proper acceleration, physical Finsler coordinates, spacetime structure, Kaehler spacetime, complex spacetime, torsion.

1 Introduction

In the present work, I draw on my earlier work to review various aspects of the differential geometry of a Finsler-spacetime tangent bundle, all based on the possible existence of a physical upper bound on proper acceleration. The appropriate bundle coordinates are the spacetime coordinates of the measuring device in the base manifold and the four-velocity coordinates of the measuring device in the tangent space manifold [1]. Of particular interest is the case of a stationary measuring device in which it is implicit that the gravitational force on the device is balanced by a non-gravitational force, as in the case of an ordinary scale measuring weight. For a Finsler-spacetime tangent bundle, the Levi-Civita connection coefficients reduce to the form given by Yano and Davies for a generic tangent bundle of a Finsler manifold [2, 3]. The components of the connection in the spacetime-spacetime-fiber sector have a form consistent with Cartan's theory of Finsler space, provided that the gauge curvature field vanishes. A vanishing gauge curvature field is equivalent to the condition that the four-velocity of the measuring device be a parallel vector field. The latter is equivalent to Cartan's condition that there be absolute parallelism of the line elements, and that the tangent space coordinates form a parallel vector field [3]. This is consistent with Deicke, who proved that a Finsler space cannot be represented as a nonholonomic subspace of a Riemannian space unless the latter condition is imposed [3, 4]. Deicke subsequently proved that a Finsler space can always be represented as a nonholonomic subspace of a space with torsion [3, 5, 6]. If bundle torsion is included in the Finsler-spacetime tangent bundle, then the bundle connection becomes compatible with Cartan's connection for Finsler space if a component of the contorsion is made to cancel the contribution of the gauge curvature field to the connection in the spacetime-spacetime-fiber sector [7]. The spacetime tangent bundle of a Finsler spacetime is almost complex [8]. Also provided that the gauge curvature field is vanishing, then the Finsler-spacetime tangent bundle is Kaehlerian with vanishing covariant derivative of the almost complex structure [8]. The vanishing of the gauge curvature field is also the condition that the Finsler-spacetime tangent bundle have a vanishing Nijenhuis tensor (torsion of the almost complex structure) in the anholonomic frame adapted to the spacetime connection, and that it be complex [9]. If bundle torsion satisfying prescribed conditions is introduced, the Finsler-spacetime tangent bundle can be made to remain almost complex, and the covariant derivative of the almost complex structure can be made to remain vanishing, without the need to impose the relatively restrictive condition of vanishing gauge curvature field [7, 10]. However, the Finsler-spacetime tangent bundle cannot be complex unless the gauge curvature field is vanishing. In the present work,

drawing on this earlier work, the bundle connection and associated differential geometric fields are calculated for a Finsler-spacetime tangent bundle particularized for the case of a stationary measuring device.

2 Bundle connection

The gauge curvature field for the Finsler-spacetime tangent bundle is given by [2]

$$F_{\mu\nu}^{\alpha} = \rho_0 v^{\lambda} \bar{R}_{\lambda\mu\nu}^{\alpha}, \quad (1)$$

where Greek indices range from 0 to 3, corresponding to the time component and the three space components, respectively; ρ_0 is a constant of the order of the Planck length; v^{λ} is the four-velocity of the measuring device; and $\bar{R}_{\lambda\mu\nu}^{\alpha}$ is the spacetime Riemann curvature tensor

$$\bar{R}_{\lambda\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\beta\delta}^{\mu} - \Gamma_{\mu\delta}^{\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu}, \quad (2)$$

written in an anholonomic basis adapted to the spacetime affine connection $\Gamma_{\beta\delta}^{\alpha}$. In the anholonomic basis, a comma followed by a lower-case Greek index implicitly denotes

$$,_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \rho_0^{-1} A^{\beta}_{\mu} \frac{\partial}{\partial v^{\beta}}, \quad (3)$$

expressed in terms of the gauge potential

$$A^{\beta}_{\mu} = \rho_0 v^{\lambda} \Gamma_{\lambda\mu}^{\beta}. \quad (4)$$

The condition of vanishing gauge curvature field, Eq. (1), for the stationary measuring device is thus given by

$$F_{\mu\nu}^{\alpha} = \rho_0 v^0 \bar{R}_{0\mu\nu}^{\alpha} = 0. \quad (5)$$

The four-velocity v^{μ} of the measuring device satisfies

$$g_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} = 1, \quad (6)$$

and the Finsler metric function L then becomes [2]

$$L^2 = g_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} = 1, \quad (7)$$

which is satisfied by the indicatrix. From Eq. (6), it follows that for the stationary measuring device, v^0 is a solution to

$$g_{00}(x, v^0, 0, 0, 0) v^{02} = 1. \quad (8)$$

It is to be noted that for a Finsler metric $g_{\mu\nu}(x, v)$, there may be multiple stationary frames for the measuring device satisfying Eq. (8).

Thus for a stationary measuring device, the four-velocity is

$$\{v^0, v^1, v^2, v^3\} = \{v^0, 0, 0, 0\}, \quad (9)$$

and the gauge curvature field, Eq. (1), becomes

$$F_{\mu\nu}^{\alpha} = \rho_0 v^0 \bar{R}_{0\mu\nu}^{\alpha}. \quad (10)$$

Also, the gauge potential, Eq. (4), becomes

$$A^{\beta}_{\mu} = \rho_0 v^0 \Gamma_{0\mu}^{\beta}. \quad (11)$$

It follows from the homogeneity of the Finsler metric function that

$$v^\alpha \frac{\partial}{\partial v^\alpha} g_{\mu\nu}(x, v) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial v^\alpha} g_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial v^\mu} g_{\alpha\nu}, \quad (13)$$

and

$$v^\alpha \frac{\partial}{\partial v^\alpha} g_{\mu\nu} = v^\alpha \frac{\partial}{\partial v^\mu} g_{\alpha\nu} = 0. \quad (14)$$

Thus, for a stationary measuring device, it follows from Eqs. (12) - (14) that

$$v^0 \frac{\partial}{\partial v^0} g_{\mu\nu} = v^0 \frac{\partial}{\partial v^\mu} g_{0\nu} = 0. \quad (15)$$

Also from Eq. (6), it follows that

$$\frac{\partial}{\partial v^\mu} L^2(x, v) = v^{02} \frac{\partial}{\partial v^\mu} g_{00} + 2v^0 g_{0\mu} = 0, \quad (16)$$

and

$$\frac{\partial^2}{\partial v^\mu \partial v^\nu} L^2(x, v) = v^{02} \frac{\partial^2}{\partial v^\mu \partial v^\nu} g_{00} + 4v^0 \frac{\partial}{\partial v^\nu} g_{0\mu} + 2g_{\mu\nu} = 0. \quad (17)$$

For the Finsler spacetime, the Christoffel symbols for the four-velocity tangent space are given by [2]

$$\Pi^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \rho_0^{-1} g^{\mu\lambda} \frac{\partial}{\partial v^\lambda} g_{\alpha\beta}, \quad (18)$$

which for the stationary measuring device, according to Eq. (15), for non-vanishing v^0 , becomes

$$\Pi^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \rho_0^{-1} g^{\mu k} \frac{\partial}{\partial v^k} g_{\alpha\beta}, \quad (19)$$

in which the lower-case Latin index k ranges from 1 to 3.

If the spacetime connection $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ is of the Levi-Civita form, then in the adapted anholonomic basis, the gauge potential is given by [2]

$$A^\beta_{\ \mu} = \rho_0 v^\lambda \overline{\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}}, \quad (20)$$

in which the Christoffel symbols are given by

$$\overline{\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (g_{\alpha\lambda,\beta} + g_{\beta\lambda,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda}), \quad (21)$$

and for the stationary measuring device, the gauge potential becomes

$$A^\beta_{\ \mu} = \rho_0 v^0 \overline{\left\{ \begin{matrix} \beta \\ 0\mu \end{matrix} \right\}}. \quad (22)$$

The bundle connection in the spacetime sector of the Finsler-spacetime tangent bundle is given by [2]

$${}^{(8)}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \overline{\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} - g^{\mu\nu} (A^\lambda_{\ \alpha} \Pi_{\lambda\beta\nu} + A^\lambda_{\ \beta} \Pi_{\lambda\alpha\nu} - A^\lambda_{\ \nu} \Pi_{\lambda\alpha\beta}), \quad (23)$$

in which $\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}$ is the canonical Levi-Civita symbol written in a coordinate basis. Next substituting Eq. (23) in Eq. (20), one has

$$A^\lambda_{\ \alpha} = \rho_0 v^\delta \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \delta\alpha \end{matrix} \right\} - \rho_0 v^\delta g^{\lambda\phi} \left(A^\psi_{\ \delta} \Pi_{\psi\alpha\phi} + A^\psi_{\ \alpha} \Pi_{\psi\delta\phi} - A^\psi_{\ \phi} \Pi_{\psi\delta\alpha} \right). \quad (24)$$

From Eq. (18), one has

$$\rho_0^{-1} \frac{\partial}{\partial v^\lambda} g_{\alpha\beta} = 2\Pi_{\lambda\alpha\beta}, \tag{25}$$

and also, from the symmetry of the spacetime metric,

$$\Pi_{\mu\alpha\beta} = \Pi_{\alpha\mu\beta} = \Pi_{\beta\alpha\mu} = \Pi_{\mu\beta\alpha}. \tag{26}$$

Next substituting Eq. (25) in Eq. (14) and using Eq. (26), one obtains for a Finsler spacetime:

$$v^\alpha \Pi_{\alpha\mu\nu} = v^\alpha \Pi_{\mu\alpha\nu} = v^\alpha \Pi_{\mu\nu\alpha} = 0. \tag{27}$$

Also, substituting Eqs. (27) and (20) in Eq. (24), and solving for the gauge potential, one obtains

$$A^\lambda{}_\alpha = \rho_0 v^\delta \{^\lambda{}_{\delta\alpha}\} - \rho_0^2 v^\gamma v^\delta \overline{\left\{ \begin{matrix} \psi \\ \gamma\delta \end{matrix} \right\}} \Pi_{\psi\alpha}{}^\lambda. \tag{28}$$

Furthermore, from Eq. (23) it follows that

$$v^\gamma v^\delta \overline{\left\{ \begin{matrix} \psi \\ \gamma\delta \end{matrix} \right\}} = v^\gamma v^\delta \left\{ \begin{matrix} \psi \\ \gamma\delta \end{matrix} \right\} - v^\gamma v^\delta g^{\psi\alpha} \left(A^\beta{}_\gamma \Pi_{\beta\delta\alpha} + A^\beta{}_\delta \Pi_{\beta\gamma\alpha} - A^\beta{}_\alpha \Pi_{\beta\gamma\delta} \right). \tag{29}$$

Next using Eq. (27) in Eq. (29), one obtains

$$v^\gamma v^\delta \overline{\left\{ \begin{matrix} \psi \\ \gamma\delta \end{matrix} \right\}} = v^\gamma v^\delta \left\{ \begin{matrix} \psi \\ \gamma\delta \end{matrix} \right\}, \tag{30}$$

and then substituting Eq. (30) in Eq. (28), and using Eq. (26), one gets

$$A^\lambda{}_\alpha = \rho_0 v^\delta \{^\lambda{}_{\delta\alpha}\} - \rho_0^2 v^\gamma v^\delta \left\{ \begin{matrix} \psi \\ \gamma\delta \end{matrix} \right\} \Pi^\lambda{}_{\alpha\psi}. \tag{31}$$

For a stationary measuring device, this becomes

$$A^\lambda{}_\alpha = \rho_0 v^0 \{^\lambda{}_{0\alpha}\} - \rho_0^2 v^{02} \left\{ \begin{matrix} \psi \\ 00 \end{matrix} \right\} \Pi^\lambda{}_{\alpha\psi}. \tag{32}$$

The bundle connection in the spacetime-spacetime-fiber and spacetime-fiber-spacetime sectors is given by [2]

$${}^{(8)}\Gamma^\mu{}_{ab} = {}^{(8)}\Gamma^\mu{}_{b\alpha} = \Pi^\mu{}_{ab} + \frac{1}{2} \overline{R}_{b\lambda\alpha}{}^\mu \rho_0 v^\lambda, \tag{33}$$

and for a stationary measuring device, this becomes

$${}^{(8)}\Gamma^\mu{}_{ab} = {}^{(8)}\Gamma^\mu{}_{b\alpha} = \Pi^\mu{}_{ab} + \frac{1}{2} \rho_0 v^0 \overline{R}_{b0\alpha}{}^\mu. \tag{34}$$

The bundle connection in the base-fiber-fiber sector is given by [2]

$${}^{(8)}\Gamma^\mu{}_{ab} = \rho_0 v^\phi \frac{\overline{D}}{Dx^\phi} \Pi_{ab}{}^\mu, \tag{35}$$

in which

$$\frac{\overline{D}}{Dx^\phi} \Pi_{ab}{}^\mu = \Pi_{ab, \phi}{}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\delta\phi} \Pi_{ab}{}^\delta - \Gamma^\delta{}_{a\phi} \Pi_{\delta b}{}^\mu - \Gamma^\delta{}_{b\phi} \Pi_{a\delta}{}^\mu \tag{36}$$

in the anholonomic basis. Alternatively, one has [2]

$${}^{(8)}\Gamma^\mu{}_{ab} = \nabla_o A_{ab}{}^\mu, \tag{37}$$

where

$$\nabla_0 \equiv \frac{1}{L} \rho_0 v^\phi \frac{\overline{D}}{Dx^\phi}, \quad (38)$$

and

$$A_{a\delta}{}^\mu = L \Pi_{a\phi}{}^\mu. \quad (39)$$

For a stationary measuring device, Eqs. (35) and (37), using Eq. (6), become

$${}^{(8)}\Gamma_{ab}^\mu = \rho_0 v^0 \frac{\overline{D}}{Dx^0} \Pi_{ab}{}^\mu. \quad (40)$$

The bundle connection in the fiber-base-base sector is [2]

$${}^{(8)}\Gamma_{\alpha\beta}^m = -\Pi_{\alpha\beta}{}^m + \frac{1}{2} \overline{R}^m{}_{\lambda\alpha\beta} \rho_0 v^\lambda, \quad (41)$$

which for a stationary measuring device becomes

$${}^{(8)}\Gamma_{\alpha\beta}^m = -\Pi_{\alpha\beta}{}^m + \frac{1}{2} \rho_0 v^0 \overline{R}^m{}_{0\alpha\beta}. \quad (42)$$

In the fiber-base-fiber sector, the bundle connection is [2]

$${}^{(8)}\Gamma_{ab}^m = -\rho_0 v^\phi \frac{\overline{D}}{Dx^\phi} \Pi_b{}^m{}_\alpha, \quad (43)$$

or alternatively

$${}^{(8)}\Gamma_{ab}^m = -\nabla_o A_{b\alpha}{}^m. \quad (44)$$

For a stationary measuring device, Eqs. (43) and (44) become, using Eq. (6),

$${}^{(8)}\Gamma_{ab}^m = -\rho_0 v^0 \frac{\overline{D}}{Dx^0} \Pi_\phi{}^m{}_\alpha. \quad (45)$$

The bundle connection in the fiber-fiber-base sector is [2]

$${}^{(8)}\Gamma_{b\alpha}^m = \overline{\{m{}_{b\alpha}\}}, \quad (46)$$

and this will clearly also hold for a stationary measuring device.

In the fiber sector, the bundle connection is [2]

$${}^{(8)}\Gamma_{ab}^m = \Pi_{ab}^m. \quad (47)$$

Summarizing the expressions for the connection in the various sectors of the Finsler-spacetime bundle in the anholonomic frame and for a stationary measuring device, one has

$${}^{(8)}\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \overline{\{^\mu{}_{\alpha\beta}\}}, \quad (48)$$

$${}^{(8)}\Gamma_{ab}^\mu = {}^{(8)}\Gamma_{b\alpha}^\mu = \Pi_{ab}^\mu + \frac{1}{2} \rho_0 v^0 \overline{R}_{b0\alpha}{}^\mu, \quad (49)$$

$${}^{(8)}\Gamma_{ab}^\mu = \rho_0 v^0 \frac{\overline{D}}{Dx^0} \Pi_{ab}{}^\mu, \quad (50)$$

$${}^{(8)}\Gamma_{\alpha\beta}^m = -\Pi_{\alpha\beta}{}^m + \frac{1}{2} \rho_0 v^0 \overline{R}^m{}_{0\alpha\beta}, \quad (51)$$

$${}^{(8)}\Gamma_{ab}^m = -\rho_0 v^0 \frac{\overline{D}}{Dx^0} \Pi_b{}^m{}_\alpha, \quad (52)$$

$${}^{(8)}\Gamma^m_{b\alpha} = \overline{\{^m_{b\alpha}\}}. \quad (53)$$

$${}^{(8)}\Gamma^m_{ab} = \Pi^m_{ab}. \quad (54)$$

in which the Christoffel symbols of four-velocity space are given by

$$\Pi^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\rho_0^{-1}g^{\mu\lambda}\frac{\partial}{\partial v^\lambda}g_{\alpha\beta}, \quad (55)$$

and one also has

$$\overline{\{^\mu_{\alpha\beta}\}} = \{^\mu_{\alpha\beta}\} - A^\lambda{}_\alpha\Pi_{\lambda\beta}{}^\mu - A^\lambda{}_\beta\Pi_{\lambda\alpha}{}^\mu - A^{\lambda\mu}\Pi_{\lambda\alpha\beta}, \quad (56)$$

in which the gauge potential is given by

$$A^\lambda{}_\alpha = \rho_0 v^0 \{^\lambda{}_{0\alpha}\} - \rho_0^2 v^{02} \{\psi{}_{00}\} \Pi^\lambda{}_{\alpha\psi}. \quad (57)$$

3 Curvature scalar

The Riemann curvature scalar of a Finsler-spacetime tangent bundle is [2]

$$\begin{aligned} {}^{(8)}R &= \bar{R} - \frac{1}{4}F^{\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta\gamma} - 2\Pi^{\alpha\gamma}{}_\alpha\Pi^\beta{}_{\gamma\beta} - 2\frac{D}{D\rho_0 v_\beta}\Pi^\alpha{}_{\beta\alpha} \\ &\quad - \nabla\Pi^{\alpha\beta\gamma}\nabla\Pi_{\alpha\beta\gamma} - \nabla\Pi^{\alpha\gamma}{}_\alpha\nabla\Pi^\beta{}_{\gamma\beta} + 2\frac{\bar{D}}{Dx_\beta}\nabla\Pi^\alpha{}_{\beta\alpha}. \end{aligned} \quad (58)$$

A special case of the Finsler-spacetime tangent bundle is the Riemannian-spacetime tangent bundle, for which the four-velocity space Christoffel symbols $\Pi^\mu{}_{\gamma\beta}$ are vanishing. In this case Eq. (58) reduces to

$${}^{(8)}R = \bar{R} - \frac{1}{4}F^{\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta\gamma}. \quad (59)$$

For a stationary measuring device, using Eqs. (1), (7), and (9), this becomes

$${}^{(8)}R = \bar{R} - \frac{1}{4}\rho_0^2\bar{R}^{\alpha 0\beta\gamma}\bar{R}_{\alpha 0\beta\gamma}. \quad (60)$$

Equation (60) was used earlier in a perturbative calculation of possible corrections to the gravitational red shift for a static emitter on a Schwarzschild star and for a stationary measuring device at a large distance from the star [11]. A stationary measuring device was also invoked in reducing the action for the spacetime tangent bundle to the ordinary vacuum Einstein's field equations in a Riemannian spacetime in the mathematical limit of infinite maximal proper acceleration [12].

References

- [1] Brandt H.E. Physical Finsler coordinates in spacetime // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 2 (16), Vol. 8, pp. 78-87, 2011.
- [2] Brandt H.E. Finsler-spacetime tangent bundle // *Foundations of Physics Letters*, 5, pp. 221-248, 1992.
- [3] Yano K., Davies E.T. On the tangent bundles of Finsler and Riemannian manifolds // *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 12, pp. 211-228, 1963.
- [4] Deicke A. Über die Darstellung von Finsler-Räumen durch nichtholonome Mannigfaltigkeiten in Riemannschen Räumen // *Arch. Math.*, 4, pp. 234-238, 1953.

- [5] Deicke A. Finsler spaces as non-holonomic subspaces of Riemann spaces // *J. London Marth. Soc.*, 30, pp. 53-58, 1955.
- [6] Yano K., Davies E.T. On the connection in Finsler space as an induced connection // *Rend. Circ. Mat. Palermo*, (2) 3, pp. 409-417, 1955.
- [7] Brandt H.E. Spacetime tangent bundle with torsion // *Foundations of Physics Letters* 6, pp. 339-369, 1993.
- [8] Brandt H.E. Kaehler spacetime tangent bundle // *Foundations of Physics Letters*, 5, pp. 315-336, 1992.
- [9] Brandt H.E. Complex spacetime tangent bundle // *Foundations of Physics Letters*, 6, pp. 245-255, 1993.
- [10] Brandt H.E. Solution to torsion relations in Finsler-spacetime tangent bundle // *Foundations of Physics Letters*, 7, pp. 297-301, 1994.
- [11] Brandt H.E. Structure of spacetime tangent bundle // *Foundations of Physics Letters*, 4, pp. 523-536, 1991.
- [12] Brandt H.E. Finslerian spacetime // *Contemporary Mathematics*, 196, pp. 273-287, 1996.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ ФИНСЛЕРОВОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Говард Брандт

Исследовательская лаборатория армии США, Адельфи, США

howard.e.brandt.civ@mail.mil

В своих более ранних работах автор рассмотрел различные аспекты дифференциальной геометрии касательных расслоений финслерова пространства-времени, которые основываются на возможном существовании верхней границы релятивистски равноускоренного движения. В частности, вычислены связность расслоения и ассоциированные дифференциально-геометрические поля для касательного расслоения финслерова пространства-времени для случая стационарного измерительного прибора.

Ключевые слова: финслерова геометрия, касательное расслоение пространства-времени, максимальное собственное ускорение, физические финслеровы координаты, структура пространства-времени, пространство-время Кэлера, комплексное пространство-время, вращение.

ON THE INVARIANCE GROUPS OF THE BERWALD-MOÓR METRIC OF ORDER TWO AND THREE

M. Neagu¹, H. Raeisi-Dehkordi²

¹University Transilvania of Braşov, Braşov, Romania

²Amirkabir University of Technology (Tehran Polytechnic), Tehran, Iran

mircea.neagu@unitbv.ro, hengameh_62@aut.ac.ir

In this paper we describe the groups of local transformations of coordinates which preserve unchanged on tangent bundles the two and three dimensional Berwald-Moór metrics. Some algebraic properties of these groups are studied. Finally, we suggest the possible structure of these transformations in the general n -dimensional case.

Key Words: tangent bundles, Berwald-Moór metrics of order two and three, local transformation groups of invariance.

1 Introduction

The geometrical Berwald-Moór structure [4, 10] was intensively investigated by P.K. Rashevski [14] and further physically substantiated and developed by G.S. Asanov [1], D.G. Pavlov and G.I. Garas'ko [5, 12, 13]. These physical studies emphasize the importance of the Finsler geometry characterized by the total equality in rights of all non-isotropic directions in the theory of space-time structure, gravitation and electromagnetism. For this a reason, one underlines the important role played by the Berwald-Moór metric

$$F_n : TM^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_n(y) = \sqrt[n]{y^1 y^2 \dots y^n}, \quad n \geq 2,$$

whose Finslerian geometry is studied on tangent bundles by M. Matsumoto and H. Shimada [8], and, in a jet geometrical approach, by V. Balan and M. Neagu [3]. From a physical point of view, an Einstein relativistic law says that the form of all physical laws must be the same in any inertial reference frame (local chart of coordinates). For such a reason, we study in this paper the geometrical transformations which keep unchanged the Berwald-Moór metrics of order two and three. Notice that the geometrical translation of the previous Einstein's physical law is that any geometrical object used in theory must have the same local form in any local chart of coordinates.

In this perspective, let us remind that $(x, y) = (x^i, y^i)$ are the coordinates of the tangent bundle TM^n (associated to an n -dimensional real manifold M^n), which transform by the rules (the Einstein convention of summation is assumed everywhere):

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j), \quad \tilde{y}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} y^j, \quad (1.1)$$

where $i, j = \overline{1, n}$ and $\text{rank}(\partial \tilde{x}^i / \partial x^j) = n$.

2 The invariance group of the Berwald-Moór metric of order two

Let us consider the Berwald-Moór metric of order two on the tangent vector bundle TM^2 , which is expressed by

$$F_2(y) = \sqrt{y^1 y^2}, \quad y^1 y^2 \geq 0. \quad (2.1)$$

We recall that the general transformations of coordinates on the tangent bundle TM^2 are given by

$$\begin{aligned} \tilde{x}^1 &= \tilde{x}^1(x^1, x^2), & \tilde{x}^2 &= \tilde{x}^2(x^1, x^2), \\ \tilde{y}^1 &= \partial_1^1 y^1 + \partial_2^1 y^2, & \tilde{y}^2 &= \partial_1^2 y^1 + \partial_2^2 y^2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

where $\partial_j^i := \partial \tilde{x}^i / \partial x^j, \forall i, j = \overline{1, 2}$. Consequently, the Berwald-Moór metric of order two (2.1) has a global geometrical character if the equality $F_2(\tilde{y}) = F_2(y)$ is true. This means that for any y^1 and y^2 we must have

$$\tilde{y}^1 \tilde{y}^2 = y^1 y^2 = \partial_1^1 \partial_1^2 (y^1)^2 + \partial_2^1 \partial_2^2 (y^2)^2 + (\partial_1^1 \partial_2^2 + \partial_2^1 \partial_1^2) y^1 y^2.$$

Proposition 2.1. *The local transformations of coordinates that preserve invariant the Berwald-Moór metric of order two (2.1) are given by the affine transformations*

$$\mathcal{T}_{(a,b,c)} : \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1/a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

and

$$\mathcal{S}_{(A,B,C)} : \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1/A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

where $a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}$, with $a \neq 0$ and $A \neq 0$.

Proof. The local transformations of coordinates which invariate the Berwald-Moór metric of order two (2.1) verify the following first order PDE system:

$$\begin{cases} \partial_1^1 \partial_1^2 = 0 \\ \partial_2^1 \partial_2^2 = 0 \\ \partial_1^1 \partial_2^2 + \partial_2^1 \partial_1^2 = 1. \end{cases}$$

Case 1. If we consider that $\partial_1^1 = 0$, then we deduce that $\tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^2)$ and $\tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^1)$.

Moreover, the following equality is true:

$$\partial_2^1 = \frac{1}{\partial_1^2} = a \in \mathbb{R}^*.$$

It follows that

$$\mathcal{T}_{(a,b,c)} : \begin{cases} \tilde{x}^1 = ax^2 + b \\ \tilde{x}^2 = \frac{1}{a}x^1 + c, \end{cases}$$

where $b, c \in \mathbb{R}$.

Case 2. By analogy, if we consider that we have $\partial_1^1 \neq 0$, then we find

$$\mathcal{S}_{A,B,C} : \begin{cases} \tilde{x}^1 = Ax^1 + B \\ \tilde{x}^2 = \frac{1}{A}x^2 + C, \end{cases}$$

where $A, B, C \in \mathbb{R}$ and $A \neq 0$. ■

Remark 2.2. *The affine transformations $\mathcal{S}_{A,B,C}$ include all translations of the plane \mathbb{R}^2 , which are defined by \mathcal{S}_{1,x_0,y_0} . The plane rotations from the set of the affine transformations (2.3) and (2.4) are only the following rotations:*

$$\mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Corollary 2.3. *The set of the local transformations of coordinates (which are given by $\mathcal{T}_{a,b,c}$ and $\mathcal{S}_{A,B,C}$), that invariates the Berwald-Moór metric of order two (2.1), has an algebraic structure of non-commutative group with respect to the operation of composition of functions.*

Proof. By direct computations, we observe that we have the following relations:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(a,b,c)} \circ \mathcal{T}_{(a',b',c')} &= \mathcal{S}_{(a/a',b+ac',c+b'/a)}, \\ \mathcal{T}_{(a,b,c)} \circ \mathcal{S}_{(A,B,C)} &= \mathcal{T}_{(a/A,b+aC,c+B/a)}, \\ \mathcal{S}_{(A,B,C)} \circ \mathcal{T}_{(a,b,c)} &= \mathcal{T}_{(Aa,Ab+B,c/A+C)}, \\ \mathcal{S}_{(A,B,C)} \circ \mathcal{S}_{(A',B',C')} &= \mathcal{S}_{(AA',B+AB',C+C'/A)}. \end{aligned}$$

The neutral element of this group is $\mathcal{S}_{(1,0,0)}$. Moreover, we have

$$\mathcal{T}_{(a,b,c)}^{-1} = \mathcal{T}_{(a,-ac,-b/a)}, \quad \mathcal{S}_{(A,B,C)}^{-1} = \mathcal{S}_{(1/A,-B/A,-AC)}.$$

■

Using the form of the affine transformations (2.3) and (2.4), let us introduce the following sets of matrices:

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ \mathfrak{T} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1/a & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}^* \right\}$$

and

$$\mathcal{H}_2 = \left\{ \mathfrak{S} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1/A \end{pmatrix} \middle| A \in \mathbb{R}^* \right\},$$

where we have $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$. In this context, we can prove the following algebraic results of characterization:

Proposition 2.4. *A matrix $\mathfrak{M} \in M_2(\mathbb{R})$ belongs to the set \mathcal{H}_1 if and only if it verifies the following conditions:*

- (1) $\mathfrak{M}^{-1} = \mathfrak{M}$;
- (2) $\det \mathfrak{M} = -1$;
- (3) $\mathfrak{M}^T = E \cdot \mathfrak{M} \cdot E$, where $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proof. It is easy to see that any matrix $\mathfrak{T} \in \mathcal{H}_1$ verifies the relations (1), (2) and (3). Conversely, let us consider a matrix

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

which verifies the relations (1), (2) and (3). It follows that we obtain

$$\begin{cases} ad - bc = -1, & a = -d \\ a = d, & bc = 1. \end{cases}$$

Solving this system, we find what we were looking for. ■

Proposition 2.5. *A matrix $\mathfrak{X} \in M_2(\mathbb{R})$ belongs to the set \mathcal{H}_2 if and only if it verifies the following conditions:*

- (1) $\mathfrak{X}^T = \mathfrak{X}$;
- (2) $\det \mathfrak{X} = 1$;

(3) $\mathfrak{X}^{-1} = E \cdot \mathfrak{X} \cdot E$.

Proof. It is easy to see that any matrix $\mathfrak{S} \in \mathcal{H}_2$ verifies the relations (1), (2) and (3). Conversely, let us consider a matrix

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

which verifies the relations (1), (2) and (3). It follows that we obtain

$$\begin{cases} B = C, & AD - BC = 1 \\ B = -C, & AD = 1. \end{cases}$$

Solving this system, we get $B = C = 0$ and $AD = 1$. ■

3 The invariance group of the Berwald-Moór metric of order three

Let us consider the Berwald-Moór metric of order three on the tangent vector bundle TM^3 , which is expressed by

$$F_3(y) = \sqrt[3]{y^1 y^2 y^3}. \tag{3.1}$$

The general transformations of coordinates on TM^3 are given by

$$\begin{aligned} \tilde{x}^1 &= \tilde{x}^1(x^1, x^2, x^3), & \tilde{x}^2 &= \tilde{x}^2(x^1, x^2, x^3), & \tilde{x}^3 &= \tilde{x}^3(x^1, x^2, x^3), \\ \tilde{y}^1 &= \partial_1^1 y^1 + \partial_2^1 y^2 + \partial_3^1 y^3, \\ \tilde{y}^2 &= \partial_1^2 y^1 + \partial_2^2 y^2 + \partial_3^2 y^3, \\ \tilde{y}^3 &= \partial_1^3 y^1 + \partial_2^3 y^2 + \partial_3^3 y^3, \end{aligned} \tag{3.2}$$

where $\partial_j^i := \partial \tilde{x}^i / \partial x^j, \forall i, j = \overline{1, 3}$.

It follows that the Berwald-Moór metric of order three (3.1) has a global geometrical character if the equality $F_3(\tilde{y}) = F_3(y)$ is true. This means that for any y^1, y^2 and y^3 we must have

$$\begin{aligned} \tilde{y}^1 \tilde{y}^2 \tilde{y}^3 &= y^1 y^2 y^3 = \\ &= (\partial_1^1 \partial_2^2 \partial_3^3 + \partial_1^1 \partial_3^2 \partial_2^3 + \partial_2^1 \partial_1^2 \partial_3^3 + \partial_2^1 \partial_3^2 \partial_1^3 + \partial_3^1 \partial_1^2 \partial_2^3 + \partial_3^1 \partial_2^2 \partial_1^3) y^1 y^2 y^3 + \\ &\quad + \partial_1^1 \partial_1^2 \partial_1^3 (y^1)^3 + \partial_2^1 \partial_2^2 \partial_2^3 (y^2)^3 + \partial_3^1 \partial_3^2 \partial_3^3 (y^3)^3 + \\ &\quad + (\partial_1^1 \partial_1^2 \partial_2^3 + \partial_1^1 \partial_2^2 \partial_1^3 + \partial_2^1 \partial_1^2 \partial_1^3) (y^1)^2 y^2 + \\ &\quad + (\partial_1^1 \partial_1^2 \partial_3^3 + \partial_1^1 \partial_3^2 \partial_1^3 + \partial_3^1 \partial_1^2 \partial_1^3) (y^1)^2 y^3 + \\ &\quad + (\partial_2^1 \partial_2^2 \partial_1^3 + \partial_2^1 \partial_1^2 \partial_2^3 + \partial_1^1 \partial_2^2 \partial_2^3) (y^2)^2 y^1 + \\ &\quad + (\partial_2^1 \partial_2^2 \partial_3^3 + \partial_2^1 \partial_3^2 \partial_2^3 + \partial_3^1 \partial_2^2 \partial_2^3) (y^2)^2 y^3 + \\ &\quad + (\partial_3^1 \partial_3^2 \partial_1^3 + \partial_3^1 \partial_1^2 \partial_3^3 + \partial_1^1 \partial_3^2 \partial_3^3) (y^3)^2 y^1 + \\ &\quad + (\partial_3^1 \partial_3^2 \partial_2^3 + \partial_3^1 \partial_2^2 \partial_3^3 + \partial_2^1 \partial_3^2 \partial_3^3) (y^3)^2 y^2. \end{aligned}$$

Inspired by the form of the affine transformations (2.3) and (2.4), we will use the following matrix notations for three dimensional affine maps:

$$\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \in M_3(\mathbb{R}), \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^3 \end{pmatrix}.$$

In this context, we can give the following geometrical result:

Proposition 3.1. *The local transformations of coordinates that preserve invariant the Berwald-Moór metric of order three (3.1) are given by the following affine transformations:*

$$\mathcal{T}_{(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3)} : \tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{A}_1 \mathcal{X} + \mathcal{B}_1, \tag{3.3}$$

$$\mathcal{S}_{(a_3, a_4, b_4, b_5, b_6)} : \tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{A}_2 \mathcal{X} + \mathcal{B}_2, \tag{3.4}$$

$$\mathcal{R}_{(a_5, a_6, b_7, b_8, b_9)} : \tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{A}_3 \mathcal{X} + \mathcal{B}_3, \tag{3.5}$$

$$\mathcal{M}_{(a_7, a_8, b_{10}, b_{11}, b_{12})} : \tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{A}_4 \mathcal{X} + \mathcal{B}_4, \tag{3.6}$$

$$\mathcal{N}_{(a_9, a_{10}, b_{13}, b_{14}, b_{15})} : \tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{A}_5 \mathcal{X} + \mathcal{B}_5, \tag{3.7}$$

$$\mathcal{O}_{(a_{11}, a_{12}, b_{16}, b_{17}, b_{18})} : \tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{A}_6 \mathcal{X} + \mathcal{B}_6, \tag{3.8}$$

where $0 \neq a_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, 12}, b_j \in \mathbb{R}, \forall j = \overline{1, 18}$, and we have

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_1 a_2} \end{pmatrix}, & \mathcal{A}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \\ \frac{1}{a_3 a_4} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_5 \\ a_6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_5 a_6} & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{A}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_7 \\ 0 & a_8 & 0 \\ \frac{1}{a_7 a_8} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}_5 &= \begin{pmatrix} a_9 & 0 & 0 \\ 0 & a_{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_9 a_{10}} \end{pmatrix}, & \mathcal{A}_6 &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} \\ 0 & \frac{1}{a_{11} a_{12}} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B}_r &= \begin{pmatrix} b_{3r-2} \\ b_{3r-1} \\ b_{3r} \end{pmatrix}, \quad \forall r = \overline{1, 6}. \end{aligned}$$

Proof. The local transformations of coordinates which invariate the Berwald-Moór metric of order three (3.1) verify the following first order PDE system:

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_1^1 \partial_1^2 \partial_1^3 &= 0 & (I) \\ \partial_2^1 \partial_2^2 \partial_2^3 &= 0 & (II) \\ \partial_3^1 \partial_3^2 \partial_3^3 &= 0 & (III) \\ \partial_1^1 \partial_1^2 \partial_2^3 + \partial_1^1 \partial_2^2 \partial_1^3 + \partial_2^1 \partial_1^2 \partial_1^3 &= 0 & (IV) \\ \partial_1^1 \partial_1^2 \partial_3^3 + \partial_1^1 \partial_3^2 \partial_1^3 + \partial_3^1 \partial_1^2 \partial_1^3 &= 0 & (V) \\ \partial_2^1 \partial_2^2 \partial_1^3 + \partial_2^1 \partial_1^2 \partial_2^3 + \partial_1^1 \partial_2^2 \partial_2^3 &= 0 & (VI) \\ \partial_2^1 \partial_2^2 \partial_3^3 + \partial_2^1 \partial_3^2 \partial_2^3 + \partial_3^1 \partial_2^2 \partial_2^3 &= 0 & (VII) \\ \partial_3^1 \partial_3^2 \partial_1^3 + \partial_3^1 \partial_1^2 \partial_3^3 + \partial_1^1 \partial_3^2 \partial_3^3 &= 0 & (VIII) \\ \partial_3^1 \partial_3^2 \partial_2^3 + \partial_3^1 \partial_2^2 \partial_3^3 + \partial_2^1 \partial_3^2 \partial_3^3 &= 0 & (IX) \\ \partial_1^1 \partial_2^2 \partial_3^3 + \partial_1^1 \partial_3^2 \partial_2^3 + \partial_2^1 \partial_1^2 \partial_3^3 + \partial_2^1 \partial_3^2 \partial_1^3 + \partial_3^1 \partial_1^2 \partial_2^3 + \partial_3^1 \partial_2^2 \partial_1^3 &= 1. & (X) \end{aligned} \right.$$

It follows that we have the situations:

$$I : \begin{cases} \partial_1^1 = 0, & II : \begin{cases} \partial_2^1 = 0 \\ \partial_3^1 = 0 \end{cases} \\ \partial_1^2 = 0, & II : \begin{cases} \partial_2^2 = 0 \\ \partial_3^2 = 0 \end{cases} \\ \partial_1^3 = 0, & II : \begin{cases} \partial_2^3 = 0 \\ \partial_3^3 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

For more convenience, let us rewrite the above relations as follows:

$$\partial_1^1 = 0, \quad \partial_2^1 = 0 \tag{1}$$

$$\partial_1^1 = 0, \quad \partial_2^2 = 0 \tag{2}$$

$$\partial_1^1 = 0, \quad \partial_2^3 = 0 \tag{3}$$

$$\partial_1^2 = 0, \quad \partial_2^1 = 0 \tag{4}$$

$$\partial_1^2 = 0, \quad \partial_2^2 = 0 \tag{5}$$

$$\partial_1^2 = 0, \quad \partial_2^3 = 0 \tag{6}$$

$$\partial_1^3 = 0, \quad \partial_2^1 = 0 \tag{7}$$

$$\partial_1^3 = 0, \quad \partial_2^2 = 0 \tag{8}$$

$$\partial_1^3 = 0, \quad \partial_2^3 = 0. \tag{9}$$

Consequently, we have the following nine cases¹:

Case (i):

$$(1), (III) : \begin{cases} \partial_3^2 = 0, (V) : \begin{cases} \partial_1^2 = 0 \rightarrow \partial_2^3 = 0 \rightarrow \partial_3^3 = 0 \quad \checkmark \\ \partial_1^3 = 0, (VII) : \begin{cases} \partial_2^2 = 0 \rightarrow \partial_3^3 = 0 \quad \checkmark \\ \partial_2^3 = 0 \rightarrow \partial_1^2 = 0 \quad \# \end{cases} \\ \partial_3^3 = 0, (V) : \begin{cases} \partial_1^2 = 0, (VII) : \begin{cases} \partial_2^2 = 0 \rightarrow \partial_3^3 = 0 \quad \# \\ \partial_2^3 = 0 \rightarrow \partial_1^2 = 0 \quad \checkmark \end{cases} \\ \partial_1^3 = 0 \rightarrow \partial_2^2 = 0 \rightarrow \partial_3^3 = 0 \quad \checkmark. \end{cases} \end{cases}$$

The sets of the corresponding solutions are given by

$$\begin{cases} \partial_1^1 = \partial_2^1 = \partial_2^2 = \partial_3^2 = \partial_1^3 = \partial_3^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^3), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^1), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^2) \\ \partial_1^1 = \partial_2^1 = \partial_1^2 = \partial_3^2 = \partial_2^3 = \partial_3^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^3), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^2), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^1). \end{cases}$$

Case (ii):

$$(2), (III) : \begin{cases} \partial_3^1 = 0, (IV) : \begin{cases} \partial_1^2 = 0 \rightarrow \partial_2^3 = 0 \rightarrow \partial_3^3 = 0 \quad \checkmark \\ \partial_1^3 = 0, (VI) : \begin{cases} \partial_2^1 = 0 \rightarrow \partial_3^3 = 0 \quad \# \\ \partial_2^3 = 0 \rightarrow \partial_1^2 = 0 \quad \checkmark \end{cases} \\ \partial_2^2 = 0, (IV) : \begin{cases} \partial_1^2 = 0 \rightarrow \partial_1^3 = 0 \rightarrow \partial_3^3 = 0 \quad \checkmark \\ \partial_1^3 = 0, (VI) : \begin{cases} \partial_2^1 = 0 \rightarrow \partial_3^3 = 0 \quad \checkmark \\ \partial_2^3 = 0 \rightarrow \partial_1^2 = 0 \quad \checkmark \end{cases} \\ \partial_2^1 = 0, (V) : \begin{cases} \partial_1^2 = 0 \rightarrow \partial_1^3 = 0 \quad \# \\ \partial_1^3 = 0 \rightarrow \partial_2^3 = 0 \quad \checkmark \end{cases} \\ \partial_3^3 = 0, (IV) : \begin{cases} \partial_1^2 = 0, (VII) : \begin{cases} \partial_2^1 = 0 \rightarrow \partial_1^3 = 0 \quad \# \\ \partial_2^3 = 0 \rightarrow \partial_1^2 = 0 \quad \checkmark \end{cases} \\ \partial_1^3 = 0, (VI) : \begin{cases} \partial_2^1 = 0 \rightarrow \partial_3^3 = 0 \quad \checkmark \\ \partial_2^3 = 0 \rightarrow \partial_1^2 = 0 \quad \# \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

¹In this proof, the symbols \checkmark and $\#$ show the acceptable and non-acceptable solutions of our PDE system.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_1^1 = \partial_3^1 = \partial_2^2 = \partial_3^2 = \partial_1^3 = \partial_2^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^2), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^1), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^3) \\ \partial_1^1 = \partial_3^1 = \partial_1^2 = \partial_2^2 = \partial_2^3 = \partial_3^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^2), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^3), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^1) \\ \partial_1^1 = \partial_2^1 = \partial_2^2 = \partial_3^2 = \partial_1^3 = \partial_3^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^3), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^1), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^2). \end{array} \right.$$

Case (iii):

$$(3), (III) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_3^1 = 0, (IV) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \\ \partial_1^3=0 \rightarrow \partial_2^2=0 \quad \# \\ \partial_1^3=0 \rightarrow \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \end{array} \right. \\ \partial_3^2 = 0, (IV) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_2^2=0, (V) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_1^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \\ \partial_1^3=0 \rightarrow \partial_2^2=0 \quad \# \end{array} \right. \\ \partial_1^2=0, (VI) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_3^3=0 \rightarrow \partial_2^2=0 \quad \checkmark \\ \partial_1^3=0 \rightarrow \partial_2^2=0 \quad \# \end{array} \right. \\ \partial_1^3=0, (VII) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \\ \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \end{array} \right. \\ \partial_2^1=0 \rightarrow \partial_1^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \end{array} \right. \\ \partial_3^3 = 0, (IV) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_2^2=0, (VI) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_1^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \\ \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_1^1 = \partial_3^1 = \partial_2^2 = \partial_3^2 = \partial_1^3 = \partial_2^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^2), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^1), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^3) \\ \partial_1^1 = \partial_2^1 = \partial_1^2 = \partial_3^2 = \partial_2^3 = \partial_3^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^3), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^2), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^1) \\ \partial_1^1 = \partial_3^1 = \partial_1^2 = \partial_2^2 = \partial_2^3 = \partial_3^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^2), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^3), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^1). \end{array} \right.$$

Case (iv):

$$(4), (III) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_3^1 = 0, (IV) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_1^3=0 \rightarrow \partial_{33}=0 \quad \checkmark \\ \partial_1^3=0, (VI) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \\ \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \partial_3^2 = 0, (IV) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_1^1=0 \rightarrow \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \\ \partial_1^3=0, (VI) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_1^1=0 \rightarrow \partial_2^2=0 \quad \# \\ \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \end{array} \right. \\ \partial_1^1=0, (VII) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_1^3=0 \quad \# \\ \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \end{array} \right. \\ \partial_2^1=0, (V) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_1^1=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \# \\ \partial_1^3=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \end{array} \right. \\ \partial_1^3=0, (VI) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_1^1=0 \rightarrow \partial_2^2=0 \quad \# \\ \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \partial_3^3 = 0, (IV) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_2^2=0, (V) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_1^1=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \# \\ \partial_1^3=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \end{array} \right. \\ \partial_1^3=0, (VI) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_1^1=0 \rightarrow \partial_2^2=0 \quad \# \\ \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_2^1 = \partial_3^1 = \partial_1^2 = \partial_3^2 = \partial_1^3 = \partial_2^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^1), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^2), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^3) \\ \partial_2^1 = \partial_3^1 = \partial_1^2 = \partial_2^2 = \partial_1^3 = \partial_3^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^1), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^3), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^2) \\ \partial_1^1 = \partial_2^1 = \partial_1^2 = \partial_3^2 = \partial_2^3 = \partial_3^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^3), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^2), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^1). \end{array} \right.$$

Case (v):

$$(5), (III) : \begin{cases} \partial_3^1 = 0, (V) : \begin{cases} \partial_1^1=0 \rightarrow \partial_2^3=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \\ \partial_1^3=0, (VII) : \begin{cases} \partial_2^1=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \\ \partial_2^3=0 \rightarrow \partial_1^1=0 \quad \# \end{cases} \\ \partial_3^3 = 0, (V) : \begin{cases} \partial_1^1=0, (VII) : \begin{cases} \partial_2^1=0 \rightarrow \partial_3^1=0 \quad \# \\ \partial_3^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \end{cases} \\ \partial_1^3=0 \rightarrow \partial_2^1=0 \rightarrow \partial_3^1=0 \quad \checkmark. \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} \partial_1^1 = \partial_3^1 = \partial_1^2 = \partial_2^2 = \partial_2^3 = \partial_3^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^2), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^3), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^1) \\ \partial_2^1 = \partial_3^1 = \partial_1^2 = \partial_2^2 = \partial_1^3 = \partial_3^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^1), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^3), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^2). \end{cases} \end{cases}$$

Case (vi):

$$(6), (III) : \begin{cases} \partial_3^1 = 0, (IV) : \begin{cases} \partial_1^1=0, (VI) : \begin{cases} \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \\ \partial_1^3=0 \rightarrow \partial_2^2=0 \quad \# \end{cases} \\ \partial_2^2=0, (V) : \begin{cases} \partial_1^1=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \\ \partial_1^3=0 \rightarrow \partial_1^1=0 \quad \# \end{cases} \\ \partial_1^3=0, (VII) : \begin{cases} \partial_2^1=0 \rightarrow \partial_3^2=0 \quad \checkmark \\ \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_1^1=0 \quad \# \end{cases} \end{cases} \\ \partial_3^2 = 0, (IV) : \begin{cases} \partial_1^1=0, (VI) : \begin{cases} \partial_2^1=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \\ \partial_1^3=0 \rightarrow \partial_2^2=0 \quad \# \end{cases} \\ \partial_1^3=0 \rightarrow \partial_2^1=0 \rightarrow \partial_3^1=0 \quad \checkmark \end{cases} \\ \partial_3^3 = 0, (IV) : \begin{cases} \partial_1^1=0, (VI) : \begin{cases} \partial_2^1=0 \rightarrow \partial_3^2=0 \quad \checkmark \\ \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^1=0 \quad \checkmark \end{cases} \\ \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_1^1=0 \rightarrow \partial_3^1=0 \quad \checkmark. \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} \partial_2^1 = \partial_3^1 = \partial_1^2 = \partial_3^2 = \partial_1^3 = \partial_2^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^1), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^2), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^3) \\ \partial_1^1 = \partial_2^1 = \partial_1^2 = \partial_3^2 = \partial_2^3 = \partial_3^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^3), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^2), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^1) \\ \partial_1^1 = \partial_3^1 = \partial_1^2 = \partial_2^2 = \partial_2^3 = \partial_3^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^2), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^3), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^1). \end{cases} \end{cases}$$

Case (vii):

$$(7), (III) : \begin{cases} \partial_3^1 = 0, (IV) : \begin{cases} \partial_1^1=0, (VI) : \begin{cases} \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \\ \partial_2^3=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \end{cases} \\ \partial_2^3=0 \rightarrow \partial_1^1 \rightarrow \partial_3^2=0 \quad \checkmark \end{cases} \\ \partial_3^2 = 0, (IV) : \begin{cases} \partial_1^1=0, (VII) : \begin{cases} \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \\ \partial_2^3=0 \rightarrow \partial_1^1=0 \quad \# \end{cases} \\ \partial_2^2=0, (VI) : \begin{cases} \partial_1^1=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \# \\ \partial_2^3=0 \rightarrow \partial_3^1=0 \quad \checkmark \end{cases} \\ \partial_2^3=0, (V) : \begin{cases} \partial_1^1=0 \rightarrow \partial_1^2=0 \quad \# \\ \partial_1^2 \rightarrow \partial_3^1=0 \quad \checkmark \end{cases} \end{cases} \\ \partial_3^3 = 0, (IV) : \begin{cases} \partial_1^1=0 \rightarrow \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^2=0 \quad \checkmark \\ \partial_1^2=0, (VI) : \begin{cases} \partial_1^1=0 \rightarrow \partial_2^2=0 \quad \# \\ \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_1^1=0 \quad \# \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} \partial_2^1 = \partial_3^1 = \partial_1^2 = \partial_2^2 = \partial_1^3 = \partial_3^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^1), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^3), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^2) \\ \partial_2^1 = \partial_3^1 = \partial_1^2 = \partial_3^2 = \partial_1^3 = \partial_2^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^1), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^2), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^3) \\ \partial_1^1 = \partial_2^1 = \partial_2^2 = \partial_3^2 = \partial_1^3 = \partial_3^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^3), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^1), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^2). \end{cases} \end{cases}$$

Case (viii):

$$(8), (III) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_3^1 = 0, (IV) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_1^1=0, (VI) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \# \\ \partial_3^3=0 \rightarrow \partial_2^2=0 \quad \checkmark \end{array} \right. \\ \partial_1^2=0, (VII) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_2^1=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \\ \partial_3^3=0 \rightarrow \partial_1^1=0 \quad \# \end{array} \right. \\ \partial_2^3=0, (V) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_1^1=0 \rightarrow \partial_2^2=0 \quad \checkmark \\ \partial_1^2=0 \rightarrow \partial_1^1=0 \quad \# \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \partial_3^2 = 0, (IV) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_1^1=0, (VI) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \\ \partial_3^3=0 \rightarrow \partial_2^2=0 \quad \checkmark \end{array} \right. \\ \partial_2^3=0 \rightarrow \partial_1^1=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \end{array} \right. \\ \partial_3^3 = 0, (IV) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_1^1=0, (VI) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \\ \partial_1^2=0 \rightarrow \partial_2^1=0 \quad \# \end{array} \right. \\ \partial_1^2=0 \rightarrow \partial_2^1=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_1^1 = \partial_3^1 = \partial_2^2 = \partial_3^2 = \partial_1^3 = \partial_2^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^2), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^1), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^3) \\ \partial_1^1 = \partial_2^1 = \partial_2^2 = \partial_3^2 = \partial_1^3 = \partial_3^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^3), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^1), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^2) \\ \partial_2^1 = \partial_3^1 = \partial_2^2 = \partial_2^3 = \partial_1^3 = \partial_3^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^1), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^3), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^2) \end{array} \right.$$

Case (ix):

$$(9), (III) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_3^1 = 0, (V) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_1^1=0 \rightarrow \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \\ \partial_1^2=0, (VII) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_2^1=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \\ \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_1^1=0 \quad \# \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \partial_3^2 = 0, (V) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_1^1=0, (VII) : \left\{ \begin{array}{l} \partial_2^2=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \# \\ \partial_2^3=0 \rightarrow \partial_3^1=0 \quad \checkmark \end{array} \right. \\ \partial_1^2=0 \rightarrow \partial_2^1=0 \rightarrow \partial_3^3=0 \quad \checkmark \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_1^1 = \partial_3^1 = \partial_2^2 = \partial_3^2 = \partial_1^3 = \partial_2^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^2), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^1), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^3) \\ \partial_2^1 = \partial_3^1 = \partial_2^2 = \partial_3^2 = \partial_1^3 = \partial_2^3 = 0 \\ \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^1), \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^2), \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^3). \end{array} \right.$$

Finally, by eliminating the repetitive situations and replacing them into relation (X), we obtain the following sets of solutions:

$$\mathcal{T}_{(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3)} : \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}^1 = a_1 x^2 + b_1 \\ \tilde{x}^2 = a_2 x^1 + b_2 \\ \tilde{x}^3 = \frac{1}{a_1 a_2} x^3 + b_3 \end{array} \right. \iff \tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{A}_1 \mathcal{X} + \mathcal{B}_1,$$

$$\mathcal{S}_{(a_3, a_4, b_4, b_5, b_6)} : \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}^1 = a_3 x^2 + b_4 \\ \tilde{x}^2 = a_4 x^3 + b_5 \\ \tilde{x}^3 = \frac{1}{a_3 a_4} x^1 + b_6 \end{array} \right. \iff \tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{A}_2 \mathcal{X} + \mathcal{B}_2,$$

$$\mathcal{R}_{(a_5, a_6, b_7, b_8, b_9)} : \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}^1 = a_5 x^3 + b_7 \\ \tilde{x}^2 = a_6 x^1 + b_8 \\ \tilde{x}^3 = \frac{1}{a_5 a_6} x^2 + b_9 \end{array} \right. \iff \tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{A}_3 \mathcal{X} + \mathcal{B}_3,$$

$$\mathcal{M}_{(a_7, a_8, b_{10}, b_{11}, b_{12})} : \begin{cases} \tilde{x}^1 = a_7 x^3 + b_{10} \\ \tilde{x}^2 = a_8 x^2 + b_{11} \\ \tilde{x}^3 = \frac{1}{a_7 a_8} x^1 + b_{12} \end{cases} \iff \tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{A}_4 \mathcal{X} + \mathcal{B}_4,$$

$$\mathcal{N}_{(a_9, a_{10}, b_{13}, b_{14}, b_{15})} : \begin{cases} \tilde{x}^1 = a_9 x^1 + b_{13} \\ \tilde{x}^2 = a_{10} x^2 + b_{14} \\ \tilde{x}^3 = \frac{1}{a_9 a_{10}} x^3 + b_{15} \end{cases} \iff \tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{A}_5 \mathcal{X} + \mathcal{B}_5,$$

$$\mathcal{O}_{(a_{11}, a_{12}, b_{16}, b_{17}, b_{18})} : \begin{cases} \tilde{x}^1 = a_{11} x^1 + b_{16} \\ \tilde{x}^2 = a_{12} x^3 + b_{17} \\ \tilde{x}^3 = \frac{1}{a_{11} a_{12}} x^2 + b_{18} \end{cases} \iff \tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{A}_6 \mathcal{X} + \mathcal{B}_6.$$

■

Remark 3.2. The affine transformations $\mathcal{N}_{(a_9, a_{10}, b_{13}, b_{14}, b_{15})}$ include all translations of the space \mathbb{R}^3 , by putting $\mathcal{N}_{(1, 1, x_0, y_0, z_0)}$. The spatial rotations from the set of the above affine transformations are only the following rotations:

$$\mathcal{R}_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R}_3 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_4 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_5 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R}_6 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_7 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_8 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R}_9 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_{10} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_{11} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

There are some results for the Berwald-Moór metric of order three, which are similar with those from the case of second order:

Corollary 3.3. The set of the local transformations of coordinates that invariates the Berwald-Moór metric of order three (3.1) has an algebraic structure of non-commutative group with respect to the operation of composition of functions.

Proof. The axioms of algebraic group are proved by direct computations. For instance, we give one of them (the other ones can be similarly obtained):

$$\mathcal{T}_{(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3)} \circ \mathcal{T}_{(a'_1, a'_2, b'_1, b'_2, b'_3)} = \mathcal{O}_{\left(a'_2 a_1, a_2 a'_1, a_1 b'_2 + b_1, a_2 b'_1 + b_2, \frac{b'_3}{a_1 a_2} + b_3\right)}.$$

In this group, the neutral element is $\mathcal{O}_{(1,1,0,0,0)}$. At the same time, we have

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3)}^{-1} &= \mathcal{T}_{\left(\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}, \frac{-b_2}{a_2}, \frac{-b_1}{a_1}, -b_3 a_1 a_2\right)}, \\ \mathcal{S}_{(a_3, a_4, b_4, b_5, b_6)}^{-1} &= \mathcal{R}_{\left(a_3 a_4, \frac{1}{a_3}, -b_6 a_3 a_4, \frac{-b_4}{a_3}, \frac{-b_5}{a_4}\right)}, \\ \mathcal{R}_{(a_5, a_6, b_7, b_8, b_9)}^{-1} &= \mathcal{S}_{\left(\frac{1}{a_6}, a_5 a_6, \frac{-b_8}{a_6}, -b_9 a_5 a_6, \frac{-b_7}{a_5}\right)}, \\ \mathcal{M}_{(a_7, a_8, b_{10}, b_{11}, b_{12})}^{-1} &= \mathcal{M}_{\left(a_7 a_8, \frac{1}{a_8}, -b_{12} a_7 a_8, \frac{-b_{11}}{a_8}, \frac{-b_{10}}{a_7}\right)}, \\ \mathcal{N}_{(a_9, a_{10}, b_{13}, b_{14}, b_{15})}^{-1} &= \mathcal{N}_{\left(\frac{1}{a_9}, \frac{1}{a_{10}}, \frac{-b_{13}}{a_9}, \frac{-b_{14}}{a_{10}}, -b_{15} a_9 a_{10}\right)}, \\ \mathcal{O}_{(a_{11}, a_{12}, b_{16}, b_{17}, b_{18})}^{-1} &= \mathcal{O}_{\left(\frac{1}{a_{11}}, a_{11} a_{12}, \frac{-b_{16}}{a_{11}}, -b_{18} a_{11} a_{12}, \frac{-b_{17}}{a_{12}}\right)}.\end{aligned}$$

■

We put the matrices mentioned in (3.3) – (3.8) into the following sets:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1 &= \left\{ \left(\begin{array}{ccc} a_9 & 0 & 0 \\ 0 & a_{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_9 a_{10}} \end{array} \right) \middle| a_9, a_{10} \in \mathbb{R}^* \right\}, \\ \mathcal{V}_2 &= \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \\ \frac{1}{a_3 a_4} & 0 & 0 \end{array} \right) \middle| a_3, a_4 \in \mathbb{R}^* \right\}, \\ \mathcal{V}_3 &= \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & a_5 \\ a_6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_5 a_6} & 0 \end{array} \right) \middle| a_5, a_6 \in \mathbb{R}^* \right\}, \\ \mathcal{W}_1 &= \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & a_7 \\ 0 & a_8 & 0 \\ \frac{1}{a_7 a_8} & 0 & 0 \end{array} \right) \middle| a_7, a_8 \in \mathbb{R}^* \right\}, \\ \mathcal{W}_2 &= \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & a_1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_1 a_2} \end{array} \right) \middle| a_1, a_2 \in \mathbb{R}^* \right\}, \\ \mathcal{W}_3 &= \left\{ \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} \\ 0 & \frac{1}{a_{11} a_{12}} & 0 \end{array} \right) \middle| a_{11}, a_{12} \in \mathbb{R}^* \right\}.\end{aligned}$$

Notice that the intersection of each two sets from the above sets of matrices is the empty set. In this context, we can show that the following result of characterization holds good:

Proposition 3.4. *For a matrix $\mathfrak{X} \in M_3(\mathbb{R})$ the following statements are true:*

- (1) $\mathfrak{X} \in \mathcal{V}_1$ if and only if
 - (a) $\det \mathfrak{X} = 1$;
 - (b) The vectors $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ are eigenvectors of the matrix \mathfrak{X} .

(2) $\mathfrak{X} \in \mathcal{V}_2$ if and only if $\mathfrak{X} \cdot E_1 \in \mathcal{V}_1$, where $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $\mathfrak{X} \in \mathcal{V}_3$ if and only if $\mathfrak{X} \cdot E_2 \in \mathcal{V}_1$, where $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(4) $\mathfrak{X} \in \mathcal{W}_1$ if and only if $\mathfrak{X} \cdot E_3 \in \mathcal{V}_1$, where $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(5) $\mathfrak{X} \in \mathcal{W}_2$ if and only if $\mathfrak{X} \cdot E_4 \in \mathcal{V}_1$, where $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(6) $\mathfrak{X} \in \mathcal{W}_3$ if and only if $\mathfrak{X} \cdot E_5 \in \mathcal{V}_1$, where $E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proof. In order to prove the statement (1), note that any matrix $\mathfrak{X} \in \mathcal{V}_1$ verifies the relations (a) and (b). Conversely, let us consider an arbitrary matrix

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

which verifies relations (a) and (b). Let us suppose that λ_1, λ_2 and λ_3 are the corresponding eigenvalues of the eigenvectors $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, and \mathbf{e}_3 . In this case, we have $\mathfrak{X} \cdot \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1$. It follows that $a = \lambda_1, d = 0, g = 0$. By analogy, we have $b = 0, e = \lambda_2, h = 0$ and $c = 0, f = 0, k = \lambda_3$. Now, the condition $\det \mathfrak{X} = 1$ implies $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. This completes the proof of the statement (1).

The proof of the other statements can be similarly done. ■

4 Conclusions and work in progress

The affine transformations obtained in the study of invariance of the Berwald-Moór metric in two and three dimensions suggest that there exist some similar results for an arbitrary Berwald-Moór metric of order n . It is our work in progress to study and prove that the matrices of order n (corresponding to the affine maps which invariate the n -dimensional Berwald-Moór metric) are exactly the matrices \mathcal{A}_σ , where σ is a permutation of the set $\{1, 2, \dots, n\}$, having as non-zero entries only the entries $a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots, a_{n\sigma(n)}$, verifying the equality

$$a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} = 1.$$

It follows that we have $\det \mathcal{A}_\sigma = \varepsilon(\sigma) = \pm 1$. Obviously, the number of such kind of matrices is equal to $n!$, that is exactly the number of all permutations of order n . For example, in the case of the Berwald-Moór metric of order four, we must have $4! = 24$ matrices corresponding to the affine transformations of invariance of the Berwald-Moór metric of order four. These must be

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \end{pmatrix}, \dots A_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{68} \\ 0 & a_{69} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_{67} a_{68} a_{69}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_4 a_5 a_6} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{70} \\ 0 & 0 & a_{71} & 0 \\ 0 & a_{72} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_{70} a_{71} a_{72}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finally, we would like to underline that a rigorously mathematical study of the above possible algebraic-geometrical results related to the invariance group of the Berwald-Moór metric of order $n \geq 4$ represents the aim of a subsequent research paper which is already in our attention.

References

- [1] Asanov G.S. Finslerian extension of General Relativity, Reidel, Dordrecht, 1984.
- [2] Atanasiu Gh., Neagu M. Jet local Riemann-Finsler geometry for the three-dimensional time // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 2(14), 7, 2010, pp. 47–60.
- [3] Balan V., Neagu M. Jet single-time Lagrange geometry and its applications, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2011.
- [4] Berwald L. Über Finslersche und Cartansche Geometrie II // *Compositio Math.*, 7, 1940, pp. 141–176.
- [5] Garas'ko G.I. Foundations of Finsler geometry for physicists (in Russian), Tetru Eds, Moscow, 2009.
- [6] Helgason S. Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.
- [7] Lebedev S.V. Properties of spaces associated with commutative-associative H_3 and H_4 algebras // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 1(1), 1, 2004, pp. 63–69.
- [8] Matsumoto M., Shimada H. On Finsler spaces with 1-form metric. II. Berwald-Moór's metric $L = (y^1 y^2 \dots y^n)^{1/n}$ // *Tensor N.S.*, 32, 1978, pp. 275–278.
- [9] Miron R., Anastasiei M. The geometry of Lagrange spaces: Theory and applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [10] Moór A., Über die Dualität von Finslerschen und Cartanschen Räumen // *Acta Math.*, 88, 1952, pp. 347–370.
- [11] Neagu M. Jet Finslerian geometry for the x -dependent conformal deformation of the rheonomic Berwald-Moór metric of order three // *Analele Universității de Vest din Timișoara, Seria Matematică-Informatică*, 49, 2, 2011, pp. 89–100.
- [12] Pavlov D.G. Chronometry of three-dimensional time // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 1(1), 1, 2004, pp. 19–30.
- [13] Pavlov D.G. Generalization of scalar product axioms // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 1(1), 1, 2004, pp. 5–18.
- [14] Rashevsky P.K. Polymetric geometry (in Russian), In: "Proc. Sem. on Vector and Tensor Analysis and Applications in Geometry, Mechanics and Physics" (Ed. V.F. Kagan), 5, M-L, OGIz, 1941.
- [15] Shen Z. Differential geometry of spray and Finsler spaces, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

ИНВАРИАНТНЫЕ ГРУППЫ МЕТРИКИ БЕРВАЛЬДА-МООРА ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

М. Неагу¹, Х. Рейши-Дехкорди²

¹Трансильванский университет, Брашов, Румыния

²Тегеранский технологический университет Амиркабир (Тегеранский Политехникум),
Тегеран, Иран

mircea.neagu@unitbv.ro, hengameh_62@aut.ac.ir

В этой работе мы описываем группы локальных преобразований координат, которые сохраняют неизменной на касательных расслоениях двух- и трехмерные метрики Бервальда-Моора. Изучены некоторые алгебраические свойства этих групп. Также предложена возможная структура этих преобразований в общем n -мерном случае..

Ключевые слова: касательное расслоение, метрика Бервальда-Моора порядка два и три, инвариантные группы локальных преобразований.

ГРУППА ЛОРЕНЦА – ОСНОВА ОПИСАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БОЗОНОВ И ФЕРМИОНОВ С ПСЕВДОРИМАНОВОЙ СТРУКТУРОЙ ПРОСТРАНСТВА. ЧТО ВЗАМЕН ПРИ ФИНСЛЕРОВОЙ ГЕОМЕТРИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВА?

В.М. Редьков¹, В.В. Кисель², Е.М. Овсиюк³

¹ *Институт физики НАН Беларуси, Минск, Белоруссия*

² *Белорусский государственный педагогический университет, Минск, Белоруссия*

³ *Мозырский государственный педагогический университет, Мозырь, Белоруссия*

v.redkov@dragon.bas-net.by, e.ovsiyuk@mail.ru

Дается краткий обзор основ теории волновых уравнений элементарных частиц в присутствии внешних гравитационных полей, описываемых как псевдориманова структура пространства–времени. Общековариантные обобщения волновых уравнений, установленных в пространстве Минковского, представлены для бозонов и фермионов в равной степени как результат применения единого тетрадного рецепта Тетроде – Вейля – Фока – Иваненко, базирующегося на представлениях группы Лоренца. Группа Лоренца играет определяющую и унифицирующую роль для описания полей всех частиц (с разными спинами, массивных и безмассовых) как в плоском, так и в искривленном пространстве–времени. Отличие состоит в том, что в плоском пространстве группа Лоренца играет роль глобальной симметрии для волновых уравнений, в псевдоримановом пространстве она играет роль зависящей от координат локальной группы симметрии. Особое внимание уделяется полям Дирака и Максвелла.

Поскольку от всякой новой теории физического пространства – времени следует ожидать преемственности с развитыми и уже апробированными моделями на фоне плоской и псевдоримановых моделей пространства, ставится вопрос: чем следует заменить базирующийся на группе Лоренца способ описания взаимодействия элементарных частиц с псевдоримановым геометрическим фоном, если пространство–время наделяется финслеровой структурой. Также можно поставить более частный вопрос: какие эффективные материальные среды можно описать, используя обобщенную электродинамику Максвелла на фоне пространства–времени с финслеровой геометрией.

Ответ на этот вопрос, если он возможен, должен быть достаточно универсальным и не зависящим от величины спина частицы или ее массы. Общий ответ на этот вопрос позволил бы лучше понять, чего можно ожидать в физике от использования финслеровой геометрии в наиболее кардинальном аспекте, как новой геометрии физического пространства–времени.

Ключевые слова: волновые уравнения, искривленные пространства, унификация, группа Лоренца, поля Дирака и Максвелла, финслерова геометрия.

1 Уравнение Дирака

Уравнение Дирака

$$(i \gamma^a \partial_a - m) \Psi(x) = 0$$

при наличии внешнего гравитационного поля (псевдориманово пространство–время) записывается в виде

$$[i \gamma^\alpha(x) (\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)) - m] \Psi(x) = 0, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma^\alpha(x) &= \gamma^a e_{(a)}^\alpha(x), \quad e_{(a)}^\alpha(x) \text{ – тетрада,} \\ \Gamma_\alpha(x) &= \frac{1}{2} \sigma^{ab} e_{(a)}^\beta \nabla_\alpha(e_{(b)\beta}^\alpha) \text{ – биспинорная связность;} \end{aligned} \tag{2}$$

∇_α и $;$ α – символы общековариантной производной. Тетрада фиксируется с точностью до 6-параметрической свободы:

$$\begin{aligned} e_{(a)}^\alpha(x) e_{(b)}^\beta(x) \eta^{(a)(b)} &= g^{\alpha\beta}(x), \\ 10 [g_{\alpha\beta}(x)] &\implies 16 [e_{(b)}^\beta(x)]. \end{aligned}$$

В спинорном базисе

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \begin{vmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{vmatrix}, \quad \xi(x) = \begin{vmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{vmatrix}, \quad \eta(x) = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{vmatrix}, \quad \gamma^a = \begin{vmatrix} 0 & \bar{\sigma}^a \\ \sigma^a & 0 \end{vmatrix}, \\ \sigma^a &= (I, +\sigma^k), \quad \bar{\sigma}^a = (I, -\sigma^k), \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} i\sigma^\alpha(x) [\partial_\alpha + \Sigma_\alpha(x)] \xi(x) &= m\eta(x), \\ i\bar{\sigma}^\alpha(x) [\partial_\alpha + \bar{\Sigma}_\alpha(x)] \eta(x) &= m\xi(x); \end{aligned} \tag{3}$$

использованы обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma^\alpha(x) &= \sigma^a e_{(a)}^\alpha(x), \quad \bar{\sigma}^\alpha(x) = \bar{\sigma}^a e_{(a)}^\alpha(x), \\ \Sigma_\alpha(x) &= \frac{1}{2} \Sigma^{ab} e_{(a)}^\beta \nabla_\alpha(e_{(b)\beta}^\alpha), \quad \bar{\Sigma}_\alpha(x) = \frac{1}{2} \bar{\Sigma}^{ab} e_{(b)}^\beta \nabla_\alpha(e_{(a)\beta}^\alpha), \\ \Sigma^{ab} &= \frac{1}{4} (\bar{\sigma}^a \sigma^b - \bar{\sigma}^b \sigma^a), \quad \bar{\Sigma}^{ab} = \frac{1}{4} (\sigma^a \bar{\sigma}^b - \sigma^b \bar{\sigma}^a). \end{aligned}$$

Полагая $m = 0$, получаем уравнения Вейля для двухкомпонентных волновых функций нейтрино $\eta(x)$ и антинейтрино $\xi(x)$.

Рассмотрим свойства симметрии уравнения Дирака в римановом пространстве. Для этого совершим над волновой функцией $\Psi(x) = (\xi(x), \eta(x))$ локальное биспинорное преобразование:

$$\begin{aligned} \xi'(x) &= B(k(x)) \xi(x), \\ \eta'(x) &= B^+(\bar{k}(x)) \eta(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $B(k)$ – матрица из группы $SL(2, C)$:

$$\begin{aligned} B(k) &= \sigma^a k_a, \quad \det B = k_0^2 - k_j^2 = +1, \\ B^+(k) &= B(k^*), \quad B^{-1}(k) = B(\bar{k}), \quad \bar{k} = (k_0, -k_j). \end{aligned} \tag{5}$$

После подстановки в уравнение функций $\xi'(x)$ и $\eta'(x)$, с использованием соотношений

$$\begin{aligned} B(\bar{k}^*(x)) \sigma^a B(\bar{k}(x)) &= \sigma^b L_b^a(x), \\ B(k(x)) \bar{\sigma}^a B(k^*(x)) &= \bar{\sigma}^b L_b^a(x), \end{aligned} \tag{6}$$

где $L_b^a(x)$ – 4-мерная матрица

$$L_b^a(x) = \frac{1}{2} \text{Sp} [\sigma_b B(k(x)) \bar{\sigma}^a B(k^*(x))] = L_b^a(k(x), k^*(x)), \quad (7)$$

приходим к новым уравнениям

$$\begin{aligned} i \sigma'^{\alpha}(x) [\partial_{\alpha} + \Sigma'_{\alpha}(x)] \xi'(x) &= m \eta'(x), \\ i \bar{\sigma}'^{\alpha}(x) [\partial_{\alpha} + \bar{\Sigma}'_{\alpha}(x)] \eta'(x) &= m \xi'(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь штрихованные матрицы

$$(\sigma'^{\alpha}, \bar{\sigma}'^{\alpha}, \Sigma'_{\alpha}, \bar{\Sigma}'_{\alpha})$$

построены по тому же правилу, что и матрицы

$$(\sigma^{\alpha}, \bar{\sigma}^{\alpha}, \Sigma_{\alpha}, \bar{\Sigma}_{\alpha}),$$

но с использованием новой (штрихованной) тетрады $e'_{(a)}{}^{\alpha}(x)$, связанной с исходной локальным преобразованием Лоренца

$$e'_{(b)}{}^{\alpha}(x) = L_b^a(k(x), k^*(x)) e_{(a)}{}^{\alpha}(x). \quad (9)$$

Для матрицы L имеем явное выражение

$$L_b^a(k, k^*) = \bar{\delta}_b^c \left(-\delta_c^a k^n k_n^* + k_c k^{a*} + k_c^* k^a + i \epsilon_c^{anm} k_n k_m^* \right), \quad (10)$$

где $\bar{\delta}_b^c$ – специальный символ Кронекера.

ВЫВОД

Уравнение для электрона во внешнем гравитационном поле обладает свойством калибровочной инвариантности относительно локальной группы $SL(2, C)$. Данное свойство уравнения является свидетельством его корректности: при заданной метрике пространства–времени $g_{\alpha\beta}(x)$ тетрада $e_{(a)}{}^{\beta}(x)$ фиксируется лишь с точностью до локального преобразования Лоренца $L_a^b(x)$ и поскольку в уравнении явно присутствует тетрада, то необходимо, чтобы два уравнения, записанные с использованием разных тетрад, переходили друг в друга в результате соответствующего калибровочного пересчета.

2 Бозон со спином 1 в римановом пространстве, унификация с фермионом

Распространенной является точка зрения, что способ учета воздействия гравитационного поля на квантово-механическую частицу или классическое поле существенно зависит от того, идет ли речь о фермионе или бозоне. При этом считается, что тензорные уравнения (для бозонных полей) обобщаются на случай искривленного пространства легче, чем спинорные уравнения (для фермионов). Так, например, уравнение Прока для векторной частицы $S = 1$ в пространстве Минковского

$$\partial_a \Psi_b - \partial_b \Psi_a = m \Psi_{ab}, \quad \partial^b \Psi_{ab} = m \Psi_a,$$

будучи подвергнуто этой формальной процедуре, превращается в

$$\nabla_{\alpha} \Psi_{\beta} - \nabla_{\beta} \Psi_{\alpha} = m \Psi_{\alpha\beta}, \quad \nabla^{\beta} \Psi_{\alpha\beta} = m \Psi_{\alpha}. \quad (11)$$

Однако известно и уже довольно долгое время, что все частицы независимо от величины их спина подчиняются в искривленном пространстве – времени единому тетрадному подходу. Но можно констатировать, что тетрадный формализм в применении к бозонам до недавнего времени почти не применялся

Будем исходить из обычного уравнения Даффина – Кеммера в плоском пространстве

$$(i\beta^a \partial_a - m) \Phi(x) = 0, \quad (12)$$

$\Phi(x)$ – это 10-компонентная волновая функция; β^a – (10×10) -матрицы; в декартовом представлении

$$\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3; \Phi_{01}, \Phi_{02}, \Phi_{03}, \Phi_{23}, \Phi_{31}, \Phi_{12}),$$

$$\beta^a = \begin{vmatrix} 0 & \kappa^a \\ \lambda^a & 0 \end{vmatrix} = \kappa^a \oplus \lambda^a,$$

$$(\kappa^a)_j^{[mn]} = -i(\delta_j^m g^{na} - \delta_j^n g^{ma}),$$

$$(\lambda^a)_j^{[mn]} = -i(\delta_m^a \delta_n^j - \delta_n^a \delta_m^j) = -i\delta_{mn}^{aj}. \quad (13)$$

Следуя тетрадному рецепту, уравнение должно быть обобщено на риманово пространство–время с метрикой $g_{\alpha\beta}(x)$ и какой-либо сопутствующей ей тетрадой $e_{(a)}^\alpha(x)$ согласно

$$[i\beta^\alpha(x)(\partial_\alpha + B_\alpha(x)) - m]\Phi(x) = 0,$$

$$\beta^\alpha(x) = \beta^a e_{(a)}^\alpha(x), \quad (14)$$

$$B_\alpha(x) = \frac{1}{2} j^{ab} e_{(a)}^\beta \nabla_\alpha (e_{(b)\beta}).$$

Уравнение (14) содержит тетраду $e_{(a)}^\alpha(x)$. Следовательно, должна существовать возможность преобразовывать друг в друга уравнения, записанные в разных тетрадах; в противном случае уравнение некорректно. Эта симметрия действительно выполняется

$$e_{(b)}'^\alpha(x) = L_a^b(x) e_{(b)}^\alpha(x), \quad \Phi(x) \implies \Phi'(x) = S(x) \Phi(x). \quad (15)$$

Общековариантный матричный формализм согласуется с тензорным подходом Прока. Действительно, учтем блочную структуру для β^a, J^{ab} и $\Phi(x)$:

$$i[\lambda^c e_{(c)}^\alpha (\partial_\alpha + \kappa^a \lambda^b e_{(a)}^\beta \nabla_\alpha e_{(b)\beta})]_{[mn]}^l \Phi_l = m\Phi_{[mn]},$$

$$i[\kappa^c e_{(c)}^\alpha (\partial_\alpha + \lambda^a \kappa^b e_{(a)}^\beta \nabla_\alpha e_{(b)\beta})]_l^{[mn]} \Phi_{[mn]} = m\Phi_l,$$

что приводит к

$$(e_{(a)}^\alpha \partial_\alpha \Phi_b - e_{(b)}^\alpha \partial_\alpha \Phi_a) + (\gamma_{ab}^c - \gamma_{ba}^c) \Phi_c = m\Phi_{ab}, \quad (16)$$

$$e^{(b)\alpha} \partial_\alpha \Phi_{ab} + \gamma_n^{nb} \Phi_{ab} + \gamma_a^{mn} \Phi_{mn} = m\Phi_a.$$

Эти уравнения представляют собой тензорные уравнения Прока (11), записанные в терминах тетрадных компонент

$$\Phi_a(x) = e_{(a)}^\alpha(x) \Phi_\alpha(x), \quad \Phi_{ab}(x) = e_{(a)}^\alpha(x) e_{(b)}^\beta(x) \Phi_{\alpha\beta}(x). \quad (17)$$

Способ обобщения уравнений Дирака и Даффина – Кеммера в рамках специальной теории относительности на случай общерелятивистской теории ясно указывает на то, что группа Лоренца сохраняет свою исключительную важность при переходе от пространственной модели Минковского к произвольно искривленному пространству–времени.

В диссонанс с этим фактом, вступает обобщение уравнения Прока: используя общековариантную тензорную формулировку, мы автоматически разрушаем всякую тесную связь с группой Лоренца, хотя само определение для частицы со спином единица было основано именно на этой группе (как подгруппе в группе Пуанкаре).

В свете изложенного выше действительно удивительной и загадочной видится возможность переписать исходное уравнение Даффина – Кеммера в римановом пространстве в терминах общековариантных тензоров и производных. В этом факте совпадения можно увидеть также указание на то, что группа Лоренца лежит в основании также и геометрии искривленного пространства–времени.

ВОПРОС:

чем следует заменить базирующийся на группе Лоренца способ описания взаимодействия элементарных частиц с псевдоримановым геометрическим фоном в случае, когда пространство–время наделяется финслеровой структурой.

3 Матричная тетрадная форма электродинамики Максвелла в средах в представлении Майораны – Оппенгеймера в римановом пространстве

Известный подход Римана – Зильберштейна – Майораны – Оппенгеймера к электродинамике Максвелла в среде

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{E} + ic\mathbf{B}, & \mathbf{h} &= \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{D} + i\mathbf{H}/c), \\ \mathbf{M} &= \frac{\mathbf{h} + \mathbf{f}}{2}, & \mathbf{N} &= \frac{\mathbf{h}^* - \mathbf{f}^*}{2} \\ M &= \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{M} \end{vmatrix}, & N &= \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{N} \end{vmatrix}, & J &= \frac{1}{\epsilon_0} \begin{vmatrix} \rho \\ i\mathbf{j} \end{vmatrix}, \\ (-i\partial_0 + \alpha^i\partial_i) M &+ (-i\partial_0 + \beta^i\partial_i) N &= J \end{aligned} \quad (18)$$

также может быть обобщен на случай псевдоримановой структуры пространства–времени в соответствии с тетрадным рецептом Тетраде – Вейля – Фока – Иваненко

$$\alpha_\rho(x) [\partial_\rho + A_\rho(x)] M + \beta_\rho(x) [\partial_\rho + B_\rho(x)] N = J. \quad (19)$$

Подход порождает основанную на тетрадном формализме и группе $SO(3, C)$ (изоморфной группе Лоренца) технику работы с уравнениями Максвелла на фоне псевдоримановой геометрии. Она в значительной степени базируется на простой алгебраической структуре вовлеченных сюда матриц

$$\alpha^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \alpha^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\beta^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \beta^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \beta^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

с простыми свойствами:

$$(\alpha^1)^2 = -I, \quad (\alpha^2)^2 = -I, \quad (\alpha^3)^2 = -I,$$

$$\alpha^1 \alpha^2 = -\alpha^2 \alpha^1 = +\alpha^3,$$

$$\alpha^2 \alpha^3 = -\alpha^3 \alpha^2 = +\alpha^1,$$

$$\alpha^3 \alpha^1 = -\alpha^1 \alpha^3 = +\alpha^2,$$

$$(\beta^1)^2 = -I, \quad (\beta^2)^2 = -I, \quad (\beta^3)^2 = -I,$$

$$\beta^1 \beta^2 = -\beta^2 \beta^1 = -\beta^3,$$

$$\beta^2 \beta^3 = -\beta^3 \beta^2 = -\beta^1,$$

$$\beta^3 \beta^1 = -\beta^1 \beta^3 = -\beta^2.$$

$$\alpha^k \beta^l = \beta^l \alpha^k.$$

4 Теория Максвелла в римановом пространстве–времени и моделирование материальных сред

Известно, что уравнения Максвелла в пространстве–времени с римановой геометрией могут рассматриваться как уравнения Максвелла в пространстве Минковского в эффективной материальной среде; причем материальные уравнения связи задаются метрическим тензором пространства–времени

$$g_{\alpha\beta}(x) = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{01} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{02} & g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad g^{\alpha\beta}(x) = \begin{vmatrix} g^{00} & g^{01} & g^{02} & g^{03} \\ g^{01} & g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{02} & g^{12} & g^{22} & g^{23} \\ g^{03} & g^{13} & g^{23} & g^{33} \end{vmatrix},$$

$$H^{\beta\alpha}(x) = \epsilon_0 [\sqrt{-G(x)} g^{\alpha\rho}(x) g^{\beta\sigma}(x)] F_{\rho\sigma}(x), \quad G = \det (g_{\alpha\beta}(x)). \quad (20)$$

В 3-мерном представлении компоненты тензора обозначаем двумя наборами 3-векторов:

$$E_1 = F_{10}, \quad E_2 = F_{20}, \quad E_3 = F_{30},$$

$$cB_1 = -F_{23}, \quad cB_2 = -F_{31}, \quad cB_3 = -F_{12},$$

$$D^1 = \epsilon_0 F^{10}, \quad D^2 = \epsilon_0 F^{20}, \quad \epsilon_0 D^3 = F^{30},$$

$$\frac{H^1}{c} = -\epsilon_0 F^{23}, \quad \frac{H^2}{c} = -\epsilon_0 F^{31}, \quad \frac{H^3}{c} = -\epsilon_0 F^{12}.$$

Электродинамические материальные уравнения, генерируемые римановой геометрией пространства–времени, имеют в 3-мерном представлении следующий вид:

$$\begin{vmatrix} D^i(x) \\ H^i(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \epsilon_0 \epsilon^{ik}(x) & \epsilon_0 c \alpha^{ik}(x) \\ \epsilon_0 c \beta^{ik}(x) & \mu_0^{-1} (\mu^{-1})^{ik}(x) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_k(x) \\ B_k(x) \end{vmatrix}, \quad (21)$$

со свойствами

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}(x) &= +\epsilon(x), \\ (\mu^{-1})^\sim(x) &= +\mu^{-1}(x), \\ \tilde{\beta}(x) &= +\alpha(x) \end{aligned} \quad (22)$$

и определяются метрическим тензором

$$\begin{aligned} \epsilon^{ik}(x) &= \sqrt{-G} [g^{00}(x) g^{ik}(x) - g^{0i}(x) g^{0k}(x)], \\ (\mu^{-1})^{ik}(x) &= \sqrt{-G} \left[\frac{1}{2} \epsilon_{imn} g^{ml}(x) g^{nj}(x) \epsilon_{ljk} \right], \\ \alpha^{ik}(x) &= +\sqrt{-G} [g^{ij}(x) g^{0l}(x) \epsilon_{ljk}], \\ \beta^{ik}(x) &= -\sqrt{-G} [g^{0j}(x) \epsilon_{jil} g^{lk}(x)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Задача состоит в следующем: поскольку четыре тензора второго ранга в (1) содержат $6+6+9=21$ независимых функций; а исходный их определяющий тензор $g^{\alpha\beta}(x)$ задается только 10 независимыми функциями; то должны существовать 11 условий связи на составляющие четырех тензоров из (21). Нужно их найти в явном виде.

Отмечаем тождество

$$\text{Sp } \alpha = \text{Sp } \beta = 0, \quad (24a)$$

а также

$$\begin{aligned} \vec{g} \beta = 0 &\implies (g^{01}, g^{02}, g^{03}) \begin{vmatrix} \beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13} \\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23} \\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33} \end{vmatrix} = 0, \\ \alpha \vec{g}^+ = 0 &\implies \begin{vmatrix} \alpha^{11} & \alpha^{12} & \alpha^{13} \\ \alpha^{21} & \alpha^{22} & \alpha^{23} \\ \alpha^{31} & \alpha^{32} & \alpha^{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g^{01} \\ g^{02} \\ g^{03} \end{vmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

причем последние тождества эквивалентны друг другу.

Можно установить выражения для матриц $\epsilon^{ik}(x)$ и $\mu^{ik}(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g^{00}(x)} \left(\frac{\epsilon^{ik}(x)}{\sqrt{-G(x)}} + (\vec{g}(x) \bullet \vec{g}(x))^{ik} \right) &= g^{ik}(x), \\ \mu^{ik}(x) \sqrt{-G(x)} &= \det(g_{ik}(x)) g^{ik}(x); \end{aligned}$$

откуда следует соотношение связи

$$\epsilon^{ik}(x) + \sqrt{-G(x)} [\vec{g}(x) \bullet \vec{g}(x)]^{ik} = -\frac{g^{00}(x) G(x)}{\det(g_{ik}(x))} \mu^{ik}(x). \quad (24c)$$

Рассмотрим простой класс (стационарных) метрик вида

$$g_{\alpha\beta}(x) = \begin{vmatrix} g_{00}(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11}(x) & g_{12}(x) & g_{13}(x) \\ 0 & g_{21}(x) & g_{22}(x) & g_{23}(x) \\ 0 & g_{31}(x) & g_{32}(x) & g_{33}(x) \end{vmatrix},$$

$$\vec{g}(x) = 0, \quad G(x) = g_{00} \det[g_{ij}(x)]; \quad (25a)$$

при этом материальные уравнения ограничены условиями:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \epsilon^{ik}(x) = -\mu^{ik}(x). \quad (25b)$$

Это в принципе возможный, но очень специальный класс сред.

ВОПРОС:

какие среды может моделировать электродинамика в финслеровом пространстве–времени.

Отметим, что известное представление материальных уравнений Минковского в форме Гордона – Тамма – Мандельштама для движущейся однородной материальной среды также может быть описано в рамках метрики эффективного пространства

$$\Delta^{abmn} = \epsilon_0 \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[\eta^{am} + (\epsilon\mu - 1) u^a u^m \right] \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[\eta^{bn} + (\epsilon\mu - 1) u^b u^n \right], \quad (26)$$

$$H^{\rho\sigma}(x) = \Delta^{abmn} F_{mn} = \epsilon_0 g^{\rho\alpha}(x) g^{\sigma\beta}(x) F_{\alpha\beta}(x).$$

В трехмерной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= +\frac{\epsilon_0}{\mu} \mathbf{E} + \frac{\epsilon_0 \gamma}{\mu} \frac{\mathbf{E} - (\mathbf{VE}) \mathbf{V}}{1 - V^2} + \frac{\epsilon_0 c \gamma}{\mu} \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{1 - V^2}, \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0 \mu} \mathbf{B} + \frac{\gamma}{\mu_0 \mu} \frac{\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})}{1 - V^2} + \frac{\epsilon_0 c \gamma}{\mu} \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{E}}{1 - V^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

В этих материальных уравнениях очевидным образом присутствует анизотропия: уравнения зависят от вектора скорости движения среды относительно инерциальной системы отсчета. Если в уравнениях Максвелла для движущейся среды исключить векторы \mathbf{D} , \mathbf{H} , то получающиеся уравнения электродинамики явным образом зависят от выбора системы отсчета инерциального наблюдателя.

На найденную много лет тому назад Минковским процедуру ковариантизации материальных уравнений можно смотреть как на “сделанную руками” релятивизацию исходных материальных уравнений Максвелла покоящейся однородной среды, которая по сути базируется на введении ОПРЕДЕЛЕНИЯ новых уравнений связи в движущейся среде.

Этот прием релятивизации через использование преобразований Лоренца может быть выполнен всегда и с любыми материальными уравнениями среды

$$\text{в системе покоя:} \quad H^{\alpha\beta} = f(F^{\alpha\beta}), \quad (28)$$

$$\text{в движущейся системе:} \quad L^{\alpha}_{\alpha'} L^{\beta}_{\beta'} H^{\alpha'\beta'} = f(L^{\alpha}_{\alpha'} L^{\beta}_{\beta'} F^{\alpha'\beta'}).$$

В этом контексте можно утверждать, что ковариантизация электродинамики Максвелла в средах достигается за счет постулирования правила обобщения уравнений при переходе к движущейся системе отсчета.

Заключение

Группа Лоренца играет определяющую и унифицирующую роль для описания полей всех частиц (с разными спинами, массивных и безмассовых) как в плоском, так и в искривленном пространстве–времени. Поскольку от всякой новой теории физического пространства–времени следует ожидать преемственности с развитыми и уже апробированными моделями на фоне плоской и псевдоримановых моделей пространства, ставится

вопрос: чем следует заменить базирующийся на группе Лоренца способ описания взаимодействия элементарных частиц с псевдоримановым геометрическим фоном, если пространство–время наделяется финслеровой структурой. Также можно поставить более частный вопрос: какие эффективные материальные среды можно описать, используя обобщенную электродинамику Максвелла на фоне пространства–времени с финслеровой геометрией.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований: Румынско-Белорусский проект, грант Ф12РА-002.

Авторы благодарны организаторам VIII международной конференции “Финслеровы обобщения теории относительности” за поддержку нашего участия в работе конференции.

Приведенный ниже список литературы перечисляет лишь некоторые публикации, на основе которых сделана данная работа.

Литература

- [1] Богуш А.А., Мороз Л.Г. Введение в теорию классических полей. Наука и техника, Минск, 1968.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. Наука, Москва, 1973.
- [3] Penrose R., Rindler W. Spinors and space-time. Vol. I. Two-spinor calculus and relativistic fields. Cambridge University Press, 1984; рус. пер. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство–время. Т. 1. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля. Мир, Москва, 1987.
- [4] Федоров Ф.И. Группа Лоренца. Наука, Москва, 1979.
- [5] Редьков В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца. Белорусская наука, Минск, 2009.
- [6] Овснюк Е.М., Редьков В.М. Электродинамика Максвелла в пространстве с неевклидовой геометрией. Издательство Мозырского государственного педагогического университета, Мозырь, 2011.
- [7] Овснюк Е.М., Кисель В.В., Крылов Г.Г., Редьков В.М. Квантовая механика в однородном магнитом поле: новые задачи. Издательство Мозырского государственного педагогического университета, Мозырь, 2011.
- [8] Red'kov V.M., Ovsyuk E.M. Quantum mechanics in spaces of constant curvature. Nova Science Publishers. Inc., New York, 2012. – 434 pages.
- [9] Gordon W. Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie // *Ann. Phys. (Leipzig)*. 1923, Bd. 72, pp. 421–456.
- [10] Тамм И.Е. Электродинамика анизотропной среды в специальной теории относительности // *ЖРФХО Физ. Отд.*, Т. 56, вып. 2-3, 1924, с. 248–262.
- [11] Mandelstam L.I., Tamm I.E. Elektrodynamik der anisotropen Medien und der speziellen Relativitätstheorie // *Math. Annalen.*, Bd. 95, 1925, pp. 154–160.
- [12] Тамм И.Е. Кристаллооптика теории относительности в связи с геометрией квадратичной формы // *ЖРФХО*, вып. 3-4, 1925, с. 1.
- [13] Minkowski H. Die Grundlagen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern // *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse*. 1908, pp. 53–111;

- reprint in *Math. Ann.* 1910, Vol. 68, pp. 472–525;
рус. перевод: *Эйнштейновский сборник*, 1978–1979, с. 5–63;
Raum und Zeit. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1909, Bd. 18.
pp. 75–88;
Raum und Zeit. *Phys. Zeit.*, 1909, Bd. 10, pp. 104–111;
Das Relativitätsprinzip. *Annalen der Physik*. 1915, Bd. 47, pp. 927–938.
- [14] Weber H. Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik nach Riemann's Vorlesungen. Friedrich Vieweg und Sohn. Braunschweig, 1901.
- [15] Silberstein L. Elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung // *Ann. der Phys.* 1907, Bd. 22, No. 3, pp. 579–586;
Nachtrag zur Abhandlung Über “elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung” // *Ann. der Phys.* 1907, Bd. 24, No. 14, pp. 783–784;
The Theory of Relativity. Macmillan, London, 1914.
- [16] Oppenheimer J.R. Note on light quanta and the electromagnetic field // *Phys. Rev.* 1931, Vol. 38, pp. 725.
- [17] Majorana E. Scientific Papers, unpublished, deposited at the “Domus Galileana”. Pisa, quaderno 2, pp. 101/1; quaderno 3. pp. 11, 160; quaderno 15, p. 16; quaderno 17, pp. 83, 159.
- [18] Rosen N. Special theories of relativity // *Am. J. Phys.* 1952, Vol. 20, No. 3, pp. 161–164.

**THE LORENTZ GROUP IS A BASE FOR DESCRIBING
INTERACTION OF BOSONS AND FERMIONS WITH
PSEUDO-RIEMANNIAN STRUCTURE OF
A BACKGROUND SPACE-TIME.
WHAT SHOULD BE INSTEAD FOR FINSLERIAN SPACE-TIME
MODELS?**

V.M. Red'kov¹, V.V. Kisel², E.M. Ovsiyuk³

¹ *Institute of Physics, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

² *Belarus State Pedagogical University, Minsk, Belarus*

³ *Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus*

v.redkov@dragon.bas-net.by, e.ovsiyuk@mail.ru

A brief overview of the basics of the theory of wave equations of elementary particles in the presence of external gravitational field, described as a pseudo-Riemannian structure of space-time, is given. Covariant generalization of the wave equations, set in Minkowski space, are presented for bosons and fermions equally, is presented as the result of a single tetrad recipe by Tetrode–Weyl–Fock–Ivanenko, based on representations of the Lorentz group. The Lorentz group plays a unifying role in describing the fields of all particles (with different spins, massive and massless) in the flat and in curved space-time. The difference lies in the fact that in flat space Lorentz group acts as a global symmetry of the wave equations; and in a pseudo-Riemannian space, it plays a role of local symmetry group (dependent on coordinates). Particular attention is given to the Dirac and Maxwell fields. Because any new theory of physical space-time can be expected to cover already developed and proven models, the question naturally arises: for what should be replaced the method of describing the interactions of elementary particles with a pseudo-Riemannian geometric background, if the space-time endowed with a Finsler structure.

The answer to this question, if possible, should be fairly universal and independent of the magnitude of the spin of a particle or its mass. The general answer to this question would provide us with the better understanding what we can expect in physics from the use of Finsler geometry, in the most radical aspect as a basic new geometry of physical space-time.

One can also put a more particular question: what effective physical media can be described by using a generalized Maxwell electrodynamics in space-time with Finsler geometry.

Key Words: wave equations, curved spaces, unification, Lorentz group, Dirac and Maxwell fields, Finslerian geometry.

ОПЕРАТОРЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ БИКОМПЛЕКСНОЙ ФУНКЦИИ И ИЗОТРОПНЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ И ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

А.В. Горюнов

Университет Туран-Астана, Астана, Казахстан

avgor@hotmail.ru

Рассмотрены понятия бикомплексной функции и операторов частных производных этой функции по её бикомплексным, комплексным и действительным аргументам в бикомплексном пространстве. Установлена взаимосвязь операторов дифференцирования в бикомплексном пространстве и в псевдоевклидовом 4-пространстве. Тем самым получена возможность дифференцирования бикомплексной функции по 4-пространственным переменным. В результате, основные *дифференциальные* изотропные (светоподобные) уравнения релятивистского и электродинамического характера получены как прямое следствие соответствующих бикомплексных *алгебраически* соотношений предыдущей работы.

Ключевые слова: N-комплексные числа, бикомплексные числа, бикомплексная функция, операторы дифференцирования, специальная теория относительности, электродинамика.

Введение

Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [1]¹, в которой была введена новая концепция бикомплексных чисел (называемых кратко *B*-числами или *B*-векторами), подробно разработана алгебра *B*-чисел, а затем этот математический аппарат был применён для получения основных алгебраических соотношений частной теории относительности и электродинамики.

Так, вычислением всех возможных билинейных и квадратичных произведений четырёх сопряжённых значений *B*-вектора в [1] получено десять действительных выражений, обозначенных как переменные $T, X, Y, Z, F, G, K, L, M, N$. Тем самым *B*-вектору q (четырёх его действительным координатам a, b, c, d) сопоставлено десять взаимосвязанных переменных $\{T..N\}$. Исследованы соотношения этих переменных и рассмотрены их трансформационные свойства, обусловленные преобразованием *B*-вектора. Показано, что переменные T, X, Y, Z взаимосвязаны и преобразуются как координаты изотропного 4-вектора, а переменные $\{F..N\}$ — как составляющие антисимметричного 4-тензора, аналогичного тензору электромагнитной бегущей волны. Таким образом, произвольному *B*-вектору (в *B*-пространстве) сопоставлены изотропный 4-вектор и антисимметричный 4-тензор в псевдоевклидовом 4-пространстве с сигнатурой $(+ - - -)$, а унимодулярному *B*-преобразованию *B*-вектора сопоставлено преобразование Лоренца составляющих этих 4-векторов и 4-тензоров. Получены релятивистские формулы преобразования скорости и соотношения для компонентов симметричного 4-тензора, аналогичного тензору энергии – импульса.

Цель настоящей статьи: развить основы дифференциального исчисления бикомплексных функций; установить взаимосвязь дифференциальных операций в *B*-пространстве и в 4-пространстве, опираясь на изученные в [1] зависимости между переменными этих

¹В предыдущей печатной работе А.В. Горюнова «N-комплексная алгебра и изотропные релятивистские и электродинамические уравнения» (№17, ГЧГФ), по техническим причинам, возник ряд опечаток, которые исправлены в электронной версии №17. (Прим. ред.)

пространств; получить дифференциальные соотношения релятивистского и электродинамического характера, вытекающие из взаимосвязи переменных и их производных в B -пространстве и в 4-пространстве.

Так, здесь введены понятия B -векторной функции и операторов частных производных этой функции по её бикомплексным, комплексным и действительным аргументам в B -пространстве. Получены соотношения между операторами дифференцирования (∂ -операторами) в B -пространстве и в 4-пространстве. Тем самым получена возможность дифференцирования B -векторной функции по 4-пространственным переменным. Установлено соответствие между ∂ -операторами первого порядка по 4-пространственным переменным и ∂ -операторами второго порядка по координатам B -пространства. Показано, что производные B -векторной функции по переменным T, X, Y, Z удовлетворяют в 4-пространстве волновому уравнению, а производные по переменным F, G, K, L, M, N — уравнениям Максвелла для бегущей электромагнитной волны. Эти производные являются компонентами соответственно 4-вектора и антисимметричного 4-тензора. B -преобразование, обуславливающее преобразование Лоренца для 4-координат, вызывает и преобразование Лоренца указанных компонентов. Показано, что инвариантами B -преобразования являются псевдоевклидовы квадрат 4-вектора производных и скалярное произведение 4-вектора производных и 4-вектора координат, а также определённые составляющие тензора 4-момента. Все результаты согласуются с литературными данными.

В качестве литературы сравнения и источника физических обозначений нами использовались книги Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [2, 3]. Ссылки на формулы с указанием главы (1 или 2) относятся к работе [1]. Например, ссылку [1, 2:3.4] следует понимать как глава 2, раздел 3, формула 4 работы [1]. Подчеркнём, что эта публикация полностью наследует *понятия, определения и обозначения*, введённые в [1].

1 B -векторная функция и её производные

Действительные переменные a, b, c, d и сопряжённые формы бикомплексной переменной q могут быть выражены друг через друга:

$$\begin{aligned} q &= a + ib + jc + id = u + jv, & a &= (q + \bar{q} + \tilde{q} + \tilde{\tilde{q}})/4 = (u + \bar{u})/2 \\ \bar{q} &= a - ib + jc - id = \bar{u} + j\bar{v}, & b &= -i(q - \bar{q} + \tilde{q} - \tilde{\tilde{q}})/4 = -i(u - \bar{u})/2 \\ \tilde{q} &= a + ib - jc - id = u - jv, & c &= j(q + \bar{q} - \tilde{q} - \tilde{\tilde{q}})/4 = (v + \bar{v})/2 \\ \tilde{\tilde{q}} &= a - ib - jc + id = \bar{u} - j\bar{v}, & d &= -ij(q - \bar{q} - \tilde{q} + \tilde{\tilde{q}})/4 = -i(v - \bar{v})/2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

дифференциалы этих переменных имеют аналогичный вид. Например,

$$\begin{aligned} dq &= da + idb + jdc + ijdd = du + jdv, \\ dc &= j(dq + d\bar{q} - d\tilde{q} - d\tilde{\tilde{q}})/4 = (dv + d\bar{v})/2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Рассмотрим функцию $f(a, b, c, d)$ от четырёх независимых действительных аргументов (a, b, c, d) . Путём замены переменных (1.1) она может быть преобразована в функцию $f(q, \bar{q}, \tilde{q}, \tilde{\tilde{q}})$ четырёх бикомплексных переменных или в функцию $f(u, v, \bar{u}, \bar{v})$ четырёх комплексных переменных. (Здесь мы следуем используемому в комплексном анализе способу записи [4–6], когда после замены переменных типа (1.1) функциональная зависимость продолжает обозначаться той же самой буквой f). В общем случае функция f будет бикомплекснозначной (B -значной). На равных правах будем использовать термин – B -векторная функция. Через свои составляющие эта функция может быть представлена в следующем виде:

$$f(a, b, c, d) = A(a, b, c, d) + iB(a, b, c, d) + jC(a, b, c, d) + ijD(a, b, c, d), \quad (1.3)$$

где A, B, C, D — действительные функции четырёх действительных переменных. Форму записи (1.3) функции f , когда она имеет ту же структуру, что и переменная q , будем называть *стандартной*.

Если функции A, B, C, D дифференцируемы, то с учётом (1.2) получим

$$\begin{aligned}
 df &= \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db + \frac{\partial f}{\partial c} dc + \frac{\partial f}{\partial d} dd = \\
 &= \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} d\bar{q} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} d\tilde{q} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\tilde{q}}} d\bar{\tilde{q}} = \\
 &= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} d\bar{u} + \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} d\bar{v} = \\
 &= \frac{\partial f}{\partial q} (da + idb + jdc + ijdd) + \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} (da - idb + jdc - ijdd) + \\
 &\quad + \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} (da + idb - jdc - ijdd) + \frac{\partial f}{\partial \bar{\tilde{q}}} (da - idb - jdc + ijdd) = \\
 &= \left(\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\tilde{q}}} \right) da + i \left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\tilde{q}}} \right) db + \\
 &\quad + j \left(\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\tilde{q}}} \right) dc + ij \left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\tilde{q}}} \right) dd = \\
 &= \frac{\partial f}{\partial u} (da + idb) + \frac{\partial f}{\partial v} (dc + idd) + \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} (da - idb) + \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} (dc - idd) = \\
 &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \right) da + i \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \right) db + \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} \right) dc + i \left(\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} \right) dd.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

При таком, классическом способе записи операторов дифференцирования (кратко — ∂ -операторов) массивы формул типа (1.4) выглядят достаточно громоздко. Поэтому, наряду с полной формой ∂ -операторов, используют более компактный вариант их записи:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial a} &= \partial_a, \\
 \frac{\partial f}{\partial a} &= \partial_a f,
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\tilde{q}}} = (\partial_q + \partial_{\bar{q}} + \partial_{\tilde{q}} + \partial_{\bar{\tilde{q}}}) f$$

Для нашего материала этот способ обозначений имеет две неудобные особенности. Во-первых, действие оператора на операнд внешне выглядит как обычное умножение. Поэтому, когда приходится иметь дело именно с произведением ∂ -оператора и переменной или с умножением самих ∂ -операторов, то это надо специально выделять и оговаривать. Во-вторых, везде *одинаковый* символ операции дифференцирования « ∂ » обозначен строчной

буквой, тогда как *различные* переменные, по которым производится дифференцирование, указаны мелким шрифтом в подстрочном индексе. При большом количестве разных и сложных подстрочных индексов такая форма записи оказывается трудоёмкой для восприятия. Чтобы скорректировать эти особенности, введём следующие, модифицированные по сравнению с (1.5) обозначения:

$$\partial_a = \partial a,$$

$$\partial_a f = (\partial a | f), \quad (1.6)$$

$$(\partial_q + \partial_{\bar{q}} + \partial_{\tilde{q}} + \partial_{\tilde{\bar{q}}}) f = (\partial q + \partial \bar{q} + \partial \tilde{q} + \partial \tilde{\bar{q}} | f)$$

В таких обозначениях различные переменные дифференцирования записаны строчными буквами, а один и тот же символ операции дифференцирования « ∂ » указан в виде левого надстрочного индекса. При этом оператор и операнд дифференцирования разделены вертикальной чертой «|», тогда как для операции умножения оставлено её традиционное обозначение.

Приравнивая в (1.4) выражения при одинаковых дифференциалах (и опустив во всех частях равенства *один и тот же* операнд f), получим следующие соотношения для операторов частных производных:

$$\begin{aligned} \partial a &= (\partial q + \partial \bar{q} + \partial \tilde{q} + \partial \tilde{\bar{q}}) = (\partial u + \partial \bar{u}) \\ \partial b &= i(\partial q - \partial \bar{q} + \partial \tilde{q} - \partial \tilde{\bar{q}}) = i(\partial u - \partial \bar{u}) \\ \partial c &= j(\partial q + \partial \bar{q} - \partial \tilde{q} - \partial \tilde{\bar{q}}) = (\partial v + \partial \bar{v}) \\ \partial d &= ij(\partial q - \partial \bar{q} - \partial \tilde{q} + \partial \tilde{\bar{q}}) = i(\partial v - \partial \bar{v}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Аналогично, или непосредственно из (1.7), получим также:

$$\begin{aligned} 4 \partial q &= \partial a - i \partial b + j \partial c - ij \partial d = (\partial a - i \partial b) + j(\partial c - i \partial d) = 2(\partial u + j \partial v) \\ 4 \partial \bar{q} &= \partial a + i \partial b + j \partial c + ij \partial d = (\partial a + i \partial b) + j(\partial c + i \partial d) = 2(\partial \bar{u} + j \partial \bar{v}) \\ 4 \partial \tilde{q} &= \partial a - i \partial b - j \partial c + ij \partial d = (\partial a - i \partial b) - j(\partial c - i \partial d) = 2(\partial u - j \partial v) \\ 4 \partial \tilde{\bar{q}} &= \partial a + i \partial b - j \partial c - ij \partial d = (\partial a + i \partial b) - j(\partial c + i \partial d) = 2(\partial \bar{u} - j \partial \bar{v}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Таким образом, частная производная от функции f по переменной q может быть записана следующими способами:

$$\partial f / \partial q = (\partial q | f) = (\partial u + j \partial v | f) / 2 = (\partial a - i \partial b + j \partial c - ij \partial d | f) / 4$$

∂ -оператор по комплексной переменной, выраженный через частные производные по действительным переменным, имеет комплексно-сопряжённую структуру:

$$\begin{aligned} u &= a + ib, & \bar{u} &= a - ib, & v &= c + id, & \bar{v} &= c - id, \\ \partial u &= (\partial a - i \partial b) / 2, & \partial \bar{u} &= (\partial a + i \partial b) / 2, & \partial v &= (\partial c - i \partial d) / 2, & \partial \bar{v} &= (\partial c + i \partial d) / 2. \end{aligned}$$

Тем самым и ∂ -операторы по бикомплексным переменным (1.8), выраженные через производные по действительным переменным, имеют *структуру* B -векторов, комплексно-сопряжённых тем переменным, по которым проводится дифференцирование. Когда базисная

единица (i) явно в переменную дифференцирования не входит, то структура ∂ -операторов оказывается такой же, как у самих C - и B -векторов. Например,

$$q = u + jv \quad \text{и} \quad \partial q = (\partial u + j\partial v) / 2.$$

Подстановка переменных (1.1) в формулы (1.8) показывает, что частные производные любой из этих переменных по всем её сопряжённым формам равны нулю, а производная по себе самой — единице. Например,

$$\begin{aligned} (\partial q | q) &= (\partial a - i\partial b + j\partial c - ij\partial d | a + ib + jc + ijd) / 4 = (1 + 1 + 1 + 1) / 4 = 1 \\ (\partial q | \bar{q}) &= (\partial a - i\partial b + j\partial c - ij\partial d | a - ib + jc - ijd) / 4 = (1 - 1 + 1 - 1) / 4 = 0 \\ (\partial \bar{q} | \bar{q}) &= (\partial a + i\partial b + j\partial c + ij\partial d | a - ib + jc - ijd) / 4 = (1 + 1 + 1 + 1) / 4 = 1. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Стандартная форма B -векторной функции (1.3) подразумевает возможность записи её сопряжённых значений в соответствующих *стандартных сопряжённых* формах:

$$\begin{aligned} \bar{f}(a, b, c, d) &= A(a, b, c, d) - iB(a, b, c, d) + jC(a, b, c, d) - ijD(a, b, c, d) \\ \tilde{f}(a, b, c, d) &= A(a, b, c, d) + iB(a, b, c, d) - jC(a, b, c, d) - ijD(a, b, c, d) \\ \tilde{\tilde{f}}(a, b, c, d) &= A(a, b, c, d) - iB(a, b, c, d) - jC(a, b, c, d) + ijD(a, b, c, d). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Принцип построения операторов (1.7), (1.8) не зависит от вида дифференцируемой функции. Поэтому, те же операторные соотношения будут иметь место и для функций (1.10). Естественно, результат действия одних и тех же операторов на различные функции будет различным.

2 Операторы вторых производных по переменным B -пространства Операторы первых производных по переменным 4 -пространства

Вторую производную некоторой функции получают дифференцированием её первой производной. В терминах операторов дифференцирования эта процедура эквивалентна действию друг на друга двух ∂ -операторов первого порядка, получения тем самым оператора второго порядка, а затем его действия на дифференцируемую функцию:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial}{\partial a} \right) f = \left(\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} \right) f, \quad \text{где} \quad \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial}{\partial a}.$$

Для операторов вторых (и более высокого порядка) частных производных, в развитие (1.6), введём компактные обозначения по следующему принципу:

$$\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} = \partial_{ab}, \quad \frac{\partial^2}{\partial a^2} = \partial_{aa} = \partial_{a^2}, \quad \frac{\partial^4}{\partial a \partial b^2 \partial c} = \partial_{ab^2c} \quad \text{и т.п.,} \tag{2.1}$$

где характер и порядок производной однозначно определяются перечнем переменных дифференцирования, стоящих после *надстрочного* символа « ∂ ». В обозначениях (1.6) и (2.1) вторую производную можно кратко записать так:

$$\begin{aligned} (\partial b | \partial a | f) &= (\partial_{ab} | f), \quad \text{где} \quad (\partial_{ab}) = (\partial b | \partial a); \\ (\partial a | \partial a | f) &= (\partial_{a^2} | f), \quad \text{где} \quad (\partial_{a^2}) = (\partial a | \partial a). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Например, вторая производная от a^2 «по де a дважды»: $\partial^2(a^2) / \partial a^2 = (\partial_{a^2} | a^2) = 2$.

Поскольку значение смешанных производных дифференцируемой функции не зависит от порядка дифференцирования, то

$$(\partial b | \partial a) = \partial ab = \partial ba = (\partial a | \partial b) \quad (2.3)$$

и мы будем использовать свойство (2.3) для того, чтобы располагать переменные дифференцирования в ∂ -операторах в наиболее наглядном порядке.

На основе (1.8), действуя оператором на оператор, для вторых частных производных получим:

$$\begin{aligned} 16 \partial q \bar{q} &= 4 [\partial u \bar{u} + \partial v \bar{v} + j(\partial u \bar{v} + \partial \bar{u} v)] = \partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2 + \partial d^2 + j2 (\partial ac + \partial bd) \\ 16 \partial \tilde{q} \tilde{\bar{q}} &= 4 [\partial u \bar{u} + \partial v \bar{v} - j(\partial u \bar{v} + \partial \bar{u} v)] = \partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2 + \partial d^2 - j2 (\partial ac + \partial bd) \\ 16 \partial q \tilde{\bar{q}} &= 4 [\partial u \bar{u} - \partial v \bar{v} - j(\partial u \bar{v} - \partial \bar{u} v)] = \partial a^2 + \partial b^2 - \partial c^2 - \partial d^2 - ij2 (\partial ad - \partial bc) \\ 16 \partial \tilde{q} \bar{q} &= 4 [\partial u \bar{u} - \partial v \bar{v} + j(\partial u \bar{v} - \partial \bar{u} v)] = \partial a^2 + \partial b^2 - \partial c^2 - \partial d^2 + ij2 (\partial ad - \partial bc) \\ 16 \partial q \tilde{q} &= 4 (\partial u^2 - \partial v^2) = \partial a^2 - \partial b^2 - \partial c^2 + \partial d^2 - i2 (\partial ab - \partial cd) \\ 16 \partial \tilde{q} \tilde{\bar{q}} &= 4 (\partial \bar{u}^2 - \partial \bar{v}^2) = \partial a^2 - \partial b^2 - \partial c^2 + \partial d^2 + i2 (\partial ab - \partial cd) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} 16 \partial q^2 &= 4 (\partial u^2 + \partial v^2 + i2 \partial uv) = \\ &= \partial a^2 - \partial b^2 + \partial c^2 - \partial d^2 - i2 (\partial ab + \partial cd) + j2 (\partial ac - \partial bd) - ij2 (\partial ad + \partial bc) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Значения $\partial \bar{q}^2$, $\partial \tilde{q}^2$, $\partial \tilde{\bar{q}}^2$ находим соответствующим сопряжением выражения (2.5). Отметим, что ∂ -операторы вторых производных (2.4) и (2.5) имеют структуру, комплексно сопряжённую структуре аналогичных произведений B -векторов.

С учётом строения переменных $\{T..N\}$ [1, 2:1.1] и [1, 2:4.1], из (2.4) и (2.5) имеем возможность записать:

$$\begin{aligned} (\partial q \bar{q} + \partial \tilde{q} \tilde{\bar{q}}) &= (\partial u \bar{u} + \partial v \bar{v}) / 2 = (\partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2 + \partial d^2) / 8 = \partial T \\ (\partial q \tilde{\bar{q}} + \partial \tilde{q} \bar{q}) &= (\partial u \bar{u} - \partial v \bar{v}) / 2 = (\partial a^2 + \partial b^2 - \partial c^2 - \partial d^2) / 8 = \partial Y \\ (\partial q \tilde{q} + \partial \tilde{q} \tilde{\bar{q}}) &= (\partial u^2 - \partial v^2 + \partial \bar{u}^2 - \partial \bar{v}^2) / 4 = (\partial a^2 - \partial b^2 - \partial c^2 + \partial d^2) / 8 = \partial F \\ (\partial q \tilde{q} - \partial \tilde{q} \tilde{\bar{q}}) &= (\partial u^2 - \partial v^2 - \partial \bar{u}^2 + \partial \bar{v}^2) / 4 = -i (\partial ab - \partial cd) / 4 = -i \partial G \\ (\partial q \tilde{\bar{q}} - \partial \tilde{q} \bar{q}) &= -j (\partial u \bar{v} - \partial \bar{u} v) / 2 = -ij (\partial ad - \partial bc) / 4 = -ij \partial Z \\ (\partial q \bar{q} - \partial \tilde{q} \tilde{\bar{q}}) &= j (\partial u \bar{v} + \partial \bar{u} v) / 2 = j (\partial ac + \partial bd) / 4 = j \partial X \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} (\partial q^2 + \partial \bar{q}^2 + \partial \tilde{q}^2 + \partial \tilde{\bar{q}}^2) / 2 &= (\partial u^2 + \partial v^2 + \partial \bar{u}^2 + \partial \bar{v}^2) / 4 = \\ &= (\partial a^2 - \partial b^2 + \partial c^2 - \partial d^2) / 8 = \partial K \end{aligned}$$

$$(\partial q^2 - \partial \bar{q}^2 + \partial \tilde{q}^2 - \partial \tilde{\bar{q}}^2) / 2 = (\partial u^2 + \partial v^2 - \partial \bar{u}^2 - \partial \bar{v}^2) / 4 = -i (\partial ab + \partial cd) / 4 = -i \partial L \quad (2.7)$$

$$(\partial q^2 + \partial \bar{q}^2 - \partial \tilde{q}^2 - \partial \tilde{\bar{q}}^2) / 2 = j (\partial uv + \partial \bar{u} \bar{v}) / 2 = j (\partial ac - \partial bd) / 4 = j \partial M$$

$$(\partial q^2 - \partial \bar{q}^2 - \partial \tilde{q}^2 + \partial \tilde{\bar{q}}^2) / 2 = j (\partial uv - \partial \bar{u} \bar{v}) / 2 = -ij (\partial ad + \partial bc) / 4 = -ij \partial N$$

Операторы (2.6), (2.7) являются комплексом *вторых* производных B -векторной функции по её собственным аргументам и одновременно выступают в роли *первых* производных по переменным $\{T..N\}$. При этом для всех десяти переменных $\{T..N\}$ и всех десяти ∂ -операторов (2.6), (2.7) действие на собственную переменную даёт единицу, а на девять остальных — ноль. Например,

$$\begin{aligned} (\partial T | T) &= (\partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2 + \partial d^2 | a^2 + b^2 + c^2 + d^2) / 8 = (2 + 2 + 2 + 2) / 8 = 1 \\ (\partial T | Y) &= (\partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2 + \partial d^2 | a^2 + b^2 - c^2 - d^2) / 8 = (2 + 2 - 2 - 2) / 8 = 0 \\ (\partial T | K) &= (\partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2 + \partial d^2 | a^2 - b^2 + c^2 - d^2) / 8 = (2 - 2 + 2 - 2) / 8 = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Множество операторов (2.6), (2.7) и его основные подмножества кратко обозначим так:

$$\begin{aligned} \{\partial T, \partial X, \partial Y, \partial Z, \partial F, \partial G, \partial K, \partial L, \partial M, \partial N\} &= \{\partial T.. \partial N\}, \\ \{\partial T, \partial X, \partial Y, \partial Z, \partial F, \partial G\} &= \{\partial T.. \partial G\}, \\ \{\partial F, \partial G, \partial K, \partial L, \partial M, \partial N\} &= \{\partial F.. \partial N\}, \\ \{\partial T, \partial X, \partial Y, \partial Z\} &= \{\partial T.. \partial Z\}, \\ \{\partial K, \partial L, \partial M, \partial N\} &= \{\partial K.. \partial N\}. \end{aligned}$$

В обозначениях (2.6), (2.7) исходные формулы (2.4), (2.5) принимают вид:

$$\begin{aligned} 2^{\partial} q \bar{q} &= (\partial T + j^{\partial} X), \quad 2^{\partial} q \tilde{q} = (\partial Y - ij^{\partial} Z), \quad 2^{\partial} q \tilde{q} = (\partial F - i^{\partial} G) \\ 2^{\partial} \tilde{q} \bar{q} &= (\partial T - j^{\partial} X), \quad 2^{\partial} \tilde{q} \tilde{q} = (\partial Y + ij^{\partial} Z), \quad 2^{\partial} \tilde{q} \tilde{q} = (\partial F + i^{\partial} G) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$2^{\partial} q^2 = (\partial K - i^{\partial} L + j^{\partial} M - ij^{\partial} N) \quad (2.10)$$

Значения $\partial \bar{q}^2$, $\partial \tilde{q}^2$, $\partial \tilde{q}^2$ получаем соответствующим сопряжением выражения (2.10).

Таким образом, каждому из десяти операторов $\{\partial T.. \partial N\}$ сопоставляется дифференциальный комплекс второго порядка по четырём независимым переменным (a, b, c, d) или по эквивалентным четвёркам аргументов $(q, \bar{q}, \tilde{q}, \tilde{q})$ или (u, v, \bar{u}, \bar{v}) .

3 Соотношения вторых производных по переменным T, X, Y, Z, F, G . Волновое уравнение

Из (2.6), действуя оператором на оператор, получим следующие операторы вторых производных уже по переменным $\{T..G\}$:

$$\begin{aligned}
 \partial T^2 &= (\partial q^2 \bar{q}^2 + \partial \tilde{q}^2 \tilde{\bar{q}}^2 + 2 \partial q \bar{q} \tilde{q} \tilde{\bar{q}}) = \\
 &= [\partial a^4 + \partial b^4 + \partial c^4 + \partial d^4 + 2 (\partial a^2 b^2 + \partial a^2 c^2 + \partial a^2 d^2 + \partial b^2 c^2 + \partial b^2 d^2 + \partial c^2 d^2)] / 64 \\
 \partial X^2 &= (\partial q^2 \bar{q}^2 + \partial \tilde{q}^2 \tilde{\bar{q}}^2 - 2 \partial q \bar{q} \tilde{q} \tilde{\bar{q}}) = [4 (\partial a^2 c^2 + \partial b^2 d^2 + 2 \partial abcd)] / 64 \\
 \partial Y^2 &= (\partial q^2 \tilde{q}^2 + \partial \bar{q}^2 \tilde{\bar{q}}^2 + 2 \partial q \bar{q} \tilde{q} \tilde{\bar{q}}) = \\
 &= [\partial a^4 + \partial b^4 + \partial c^4 + \partial d^4 + 2 (\partial a^2 b^2 - \partial a^2 c^2 - \partial a^2 d^2 - \partial b^2 c^2 - \partial b^2 d^2 + \partial c^2 d^2)] / 64 \quad (3.1) \\
 \partial Z^2 &= - (\partial q^2 \tilde{q}^2 + \partial \bar{q}^2 \tilde{\bar{q}}^2 - 2 \partial q \bar{q} \tilde{q} \tilde{\bar{q}}) = [4 (\partial a^2 d^2 + \partial b^2 c^2 - 2 \partial abcd)] / 64 \\
 \partial F^2 &= (\partial q^2 \tilde{q}^2 + \partial \bar{q}^2 \tilde{\bar{q}}^2 + 2 \partial q \bar{q} \tilde{q} \tilde{\bar{q}}) = \\
 &= [\partial a^4 + \partial b^4 + \partial c^4 + \partial d^4 - 2 (\partial a^2 b^2 + \partial a^2 c^2 - \partial a^2 d^2 - \partial b^2 c^2 + \partial b^2 d^2 + \partial c^2 d^2)] / 64 \\
 \partial G^2 &= - (\partial q^2 \tilde{q}^2 + \partial \bar{q}^2 \tilde{\bar{q}}^2 - 2 \partial q \bar{q} \tilde{q} \tilde{\bar{q}}) = [4 (\partial a^2 b^2 + \partial c^2 d^2 - 2 \partial abcd)] / 64 ,
 \end{aligned}$$

где оператор 4-ой смешанной производной

$$\begin{aligned}
 &256 \partial q \bar{q} \tilde{q} \tilde{\bar{q}} = \\
 &= \{ \partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2 + \partial d^2 + j2 (\partial ac + \partial bd) \mid \partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2 + \partial d^2 - j2 (\partial ac + \partial bd) \} = \\
 &= \{ \partial a^4 + \partial b^4 + \partial c^4 + \partial d^4 + \\
 &\quad + 2 (\partial a^2 b^2 - \partial a^2 c^2 + \partial a^2 d^2 + \partial b^2 c^2 - \partial b^2 d^2 + \partial c^2 d^2) - 8 \partial abcd \} .
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из (3.1) вытекают следующие соотношения:

$$(\partial T^2 - \partial X^2) = (\partial Y^2 + \partial Z^2) = (\partial F^2 + \partial G^2) = 4 \partial q \bar{q} \tilde{q} \tilde{\bar{q}}. \quad (3.3)$$

Отметим, что эти соотношения могут быть получены и непосредственно действием друг на друга сопряжённых операторов (2.9), что рассматривается в следующем разделе. Пока же, из (3.3) находим

$$(\partial T^2 - \partial X^2 - \partial Y^2 - \partial Z^2) = 0 \quad (3.4)$$

$$(\partial T^2 - \partial X^2 - \partial F^2 - \partial G^2) = 0 \quad (3.5)$$

$$\partial T^2 = (\partial X^2 + \partial Y^2 + \partial Z^2) = (\partial X^2 + \partial F^2 + \partial G^2). \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует, что любая дифференцируемая B -векторная функция удовлетворяет в 4-пространстве следующему волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2}. \quad (3.7)$$

Аналогичное волновое уравнение имеет место и для переменных (T, X, F, G) .

Если первые производные по переменным (T, X, Y, Z) записать в обозначениях энергии и составляющих импульса $(\mathcal{E}, \mathbf{p})$

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \mathcal{E}, \quad \frac{\partial f}{\partial X} = -p_x, \quad \frac{\partial f}{\partial Y} = -p_y, \quad \frac{\partial f}{\partial Z} = -p_z, \quad (3.8)$$

то уравнение (3.7) принимает вид

$$-\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} = \frac{\partial p_x}{\partial X} + \frac{\partial p_y}{\partial Y} + \frac{\partial p_z}{\partial Z} = \operatorname{div} \mathbf{p}. \quad (3.9)$$

А из равенства смешанных производных, для переменных (3.8) получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial T \partial X} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X} = -\frac{\partial p_x}{\partial T}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial T \partial Y} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Y} = -\frac{\partial p_y}{\partial T}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial T \partial Z} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z} = -\frac{\partial p_z}{\partial T}, \quad (3.10)$$

что даёт 3-векторное уравнение

$$\operatorname{grad} \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial T} \quad (3.11)$$

Отметим, что в общем случае величины (3.8), как производные B -векторной функции по действительным переменным, являются B -векторными, и требуют более подробного физического анализа в дальнейшем.

4 Произведение и композиция операторов дифференцирования

Термины «произведение» и «композиция» при обозначении последовательного действия операторов употребляют как синонимы. В физике (например, в квантовой механике) обычно используют термин «произведение» операторов [9]. Результат такого «произведения» существенно зависит от типа линейной операции. Например, «произведение» линейных функций рассматривается как получение сложной линейной функции, «произведение» операторов дифференцирования первого порядка — как нахождение второй производной, а «произведение» координат — как произведение координат и т.п. При таком подходе операция обычного умножения производных остаётся вне рамок данного формализма, поскольку он не способен *не преобразовывать* «произведение» ∂ -операторов в повторное дифференцирование. Например, когда в квантовой механике квадратное уравнение энергии-импульса интерпретируют как операторное (в обозначениях типа (3.8)), то получают дифференциальное уравнение второго порядка [9]. В зависимости от вида исходного уравнения (изотропное или времениподобное), результатом будет волновое уравнение типа (3.7) или уравнение Клейна–Гордона, для которых исходные алгебраические соотношения имеют характер дисперсионных уравнений.

В нашей работе, ∂ -операторы фактически служат для краткой записи частных производных, которые сами являются B -векторами. Учитывая опыт предыдущей работы [1], можно ожидать, что не только дифференциальные, но и алгебраические соотношения между B -векторными производными могут представлять интерес с физической точки зрения. Поэтому, желательно иметь возможность отличать повторное дифференцирование от алгебраического умножения производных уже на уровне операторного способа записи, а также на уровне терминологии. Исходя из этих соображений, «произведением» (переменных, производных, функций, ∂ -операторов, переменной и ∂ -оператора и т.п.) мы будем называть только их обычное умножение друг на друга. Термин «композиция» будем применять для обозначения последовательного действия ∂ -операторов. Способ записи (1.6), когда действие ∂ -оператора на операнд (другой ∂ -оператор или переменную) обозначено вертикальной чертой, позволяет отличать композицию ∂ -операторов от их произведения.

Пример записи произведений ∂ -операторов: $(\partial a)(\partial bc)$ и $(\partial a)(\partial a) = (\partial a)^2$, а пример записи их соответствующих композиций: $(\partial a | \partial bc) = \partial abc$ и $(\partial a | \partial a) = \partial a^2$.

Все структурные элементы сложного оператора действуют на *одну и ту же* (произвольную, дифференцируемую) функцию. Если несколько операторов объединены в некоторое уравнение, то всё это уравнение относится к *той же самой* функции. При необходимости записать одно уравнение для различных функций, эти функции должны быть указаны явно. Тем самым, мы фактически перейдём от операторного уравнения к конкретному дифференциальному уравнению.

Проиллюстрируем способ записи композиции и произведения ∂ -операторов на примере соотношений (2.9):

$$\begin{aligned} (\partial T + j^\partial X | \partial T - j^\partial X) &= (\partial T^2 - \partial X^2) = 4 (\partial q\bar{q} | \partial \tilde{q}\tilde{\bar{q}}) = 4 \partial q\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}} \\ (\partial Y - ij^\partial Z | \partial Y + ij^\partial Z) &= (\partial Y^2 + \partial Z^2) = 4 (\partial q\tilde{q} | \partial \bar{q}\tilde{\bar{q}}) = 4 \partial q\tilde{q}\bar{q}\tilde{\bar{q}} \\ (\partial F - i^\partial G | \partial F + i^\partial G) &= (\partial F^2 + \partial G^2) = 4 (\partial q\tilde{q} | \partial \bar{q}\tilde{\bar{q}}) = 4 \partial q\tilde{q}\bar{q}\tilde{\bar{q}}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} (\partial T + j^\partial X) (\partial T - j^\partial X) &= (\partial T)^2 - (\partial X)^2 = 4 (\partial q\bar{q}) (\partial \tilde{q}\tilde{\bar{q}}) \\ (\partial Y - ij^\partial Z) (\partial Y + ij^\partial Z) &= (\partial Y)^2 + (\partial Z)^2 = 4 (\partial q\tilde{q}) (\partial \bar{q}\tilde{\bar{q}}) \\ (\partial F - i^\partial G) (\partial F + i^\partial G) &= (\partial F)^2 + (\partial G)^2 = 4 (\partial q\tilde{q}) (\partial \bar{q}\tilde{\bar{q}}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

В (4.1) получены операторы *вторых* производных, а в (4.2) — *квадраты* операторов *первых* производных по переменным $\{T..G\}$.

При композиции ∂ -операторов мы заведомо имеем дело с той же исходной функцией. Например, первое из уравнений (4.1) при полной записи согласно (2.2) выглядит так:

$$(\partial T + j^\partial X | \partial T - j^\partial X | f) = (\partial T^2 - \partial X^2 | f) = 4 (\partial q\bar{q} | \partial \tilde{q}\tilde{\bar{q}} | f) = 4 (\partial q\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}} | f).$$

Произведения производных могут быть найдены и для различных функций:

$$\begin{aligned} 2 (\partial q\bar{q} | f_1) &= (\partial T + j^\partial X | f_1) \quad \text{и} \quad 2 (\partial \tilde{q}\tilde{\bar{q}} | f_2) = (\partial T - j^\partial X | f_2) \\ 4 (\partial q\bar{q} | f_1) (\partial \tilde{q}\tilde{\bar{q}} | f_2) &= (\partial T + j^\partial X | f_1) (\partial T - j^\partial X | f_2) = \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial T} \frac{\partial f_2}{\partial T} - \frac{\partial f_1}{\partial X} \frac{\partial f_2}{\partial X} \right) - j \left(\frac{\partial f_1}{\partial T} \frac{\partial f_2}{\partial X} - \frac{\partial f_1}{\partial X} \frac{\partial f_2}{\partial T} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

В случае $f_1 \equiv f_2$, дифференциальное уравнение (4.3) сводится к первому из операторных уравнений (4.2).

С учётом сказанного, вернёмся непосредственно к уравнениям (4.1) и (4.2). Из (4.1) вытекают полученные выше волновые уравнения (3.6), (3.7). Тогда как из (4.2) следуют соотношения:

$$\begin{aligned} (\partial T)^2 - (\partial X)^2 - (\partial Y)^2 - (\partial Z)^2 &= 4 [(\partial q\bar{q}) (\partial \tilde{q}\tilde{\bar{q}}) - (\partial q\tilde{q}) (\partial \bar{q}\tilde{\bar{q}})] \\ (\partial T)^2 - (\partial X)^2 - (\partial F)^2 - (\partial G)^2 &= 4 [(\partial q\bar{q}) (\partial \tilde{q}\tilde{\bar{q}}) - (\partial q\tilde{q}) (\partial \bar{q}\tilde{\bar{q}})] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Это уже не волновые дифференциальные уравнения второго порядка, а квадратные уравнения для первых производных B -векторной функции, имеющие 4-векторную структуру. Для произвольной функции, произведения производных в правой части уравнений — $(\partial q\bar{q} | f) (\partial \tilde{q}\tilde{\bar{q}} | f)$, $(\partial q\tilde{q} | f) (\partial \bar{q}\tilde{\bar{q}} | f)$, $(\partial q\tilde{q} | f) (\partial \bar{q}\tilde{\bar{q}} | f)$ — не обязаны быть равны друг другу. То есть, правая часть в (4.4) может быть не равна нулю. Поэтому 4-векторы, соответствующие уравнениям (4.4), в общем случае не являются *изотропными*. Например, это относится к 4-вектору в обозначениях энергии-импульса (3.8).

5 Соотношения вторых производных по переменным F, G, K, L, M, N . Изотропные уравнения Максвелла

При интерпретации производных по переменным $\{F..G\}$ воспользуемся аналогией с алгебраическими соотношениями [1, 2:4.5] для тензора $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и проверим адекватность применения обозначений электромагнитного поля (\mathbf{E}, \mathbf{H}) :

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial f}{\partial \mathcal{A}_x} \equiv \frac{\partial f}{\partial F}, & E_y &= \frac{\partial f}{\partial \mathcal{A}_y} \equiv -\frac{\partial f}{\partial M}, & E_z &= \frac{\partial f}{\partial \mathcal{A}_z} \equiv -\frac{\partial f}{\partial L} \\ H_x &= \frac{\partial f}{\partial \mathcal{B}_x} \equiv \frac{\partial f}{\partial G}, & H_y &= \frac{\partial f}{\partial \mathcal{B}_y} \equiv -\frac{\partial f}{\partial N}, & H_z &= \frac{\partial f}{\partial \mathcal{B}_z} \equiv \frac{\partial f}{\partial K}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Дифференцируя переменные (5.1) по T, X, Y, Z , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial T} &= \frac{\partial^2 f}{\partial F \partial T}, & \frac{\partial E_x}{\partial X} &= \frac{\partial^2 f}{\partial F \partial X}, & \frac{\partial E_x}{\partial Y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial F \partial Y}, & \frac{\partial E_x}{\partial Z} &= \frac{\partial^2 f}{\partial F \partial Z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial T} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial M \partial T}, & \frac{\partial E_y}{\partial X} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial M \partial X}, & \frac{\partial E_y}{\partial Y} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial M \partial Y}, & \frac{\partial E_y}{\partial Z} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial M \partial Z} \\ \frac{\partial E_z}{\partial T} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial L \partial T}, & \frac{\partial E_z}{\partial X} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial L \partial X}, & \frac{\partial E_z}{\partial Y} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial L \partial Y}, & \frac{\partial E_z}{\partial Z} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial L \partial Z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial T} &= \frac{\partial^2 f}{\partial G \partial T}, & \frac{\partial H_x}{\partial X} &= \frac{\partial^2 f}{\partial G \partial X}, & \frac{\partial H_x}{\partial Y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial G \partial Y}, & \frac{\partial H_x}{\partial Z} &= \frac{\partial^2 f}{\partial G \partial Z} \\ \frac{\partial H_y}{\partial T} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial N \partial T}, & \frac{\partial H_y}{\partial X} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial N \partial X}, & \frac{\partial H_y}{\partial Y} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial N \partial Y}, & \frac{\partial H_y}{\partial Z} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial N \partial Z} \\ \frac{\partial H_z}{\partial T} &= \frac{\partial^2 f}{\partial K \partial T}, & \frac{\partial H_z}{\partial X} &= \frac{\partial^2 f}{\partial K \partial X}, & \frac{\partial H_z}{\partial Y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial K \partial Y}, & \frac{\partial H_z}{\partial Z} &= \frac{\partial^2 f}{\partial K \partial Z}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Производные (5.2) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \partial E_x / \partial X &= (\partial F X | f) = [(\partial q \tilde{q} + \partial \tilde{q} \tilde{q}) | j (\partial q \tilde{q} - \partial \tilde{q} \tilde{q}) | f] \rightarrow \\ \partial E_y / \partial Y &= -(\partial M Y | f) = -[j (\partial q^2 + \partial \tilde{q}^2 - \partial \tilde{q}^2 - \partial \tilde{q}^2) / 2 | (\partial q \tilde{q} + \partial \tilde{q} \tilde{q}) | f] \Rightarrow \\ \partial E_z / \partial Z &= -(\partial L Z | f) = -[i (\partial q^2 - \partial \tilde{q}^2 + \partial \tilde{q}^2 - \partial \tilde{q}^2) / 2 | ij (\partial q \tilde{q} - \partial \tilde{q} \tilde{q}) | f] \Rightarrow \\ &\rightarrow j (\partial q^2 \tilde{q} \tilde{q} + \partial q \tilde{q}^2 \tilde{q} - \partial q \tilde{q}^2 \tilde{q} - \partial \tilde{q} \tilde{q} \tilde{q}^2 | f) \\ &\Rightarrow -j (\partial q^2 \tilde{q} \tilde{q} + \partial q \tilde{q}^2 \tilde{q} - \partial q \tilde{q}^2 \tilde{q} - \partial \tilde{q} \tilde{q} \tilde{q}^2 + \partial q^3 \tilde{q} + \partial \tilde{q}^3 \tilde{q} - \partial \tilde{q} \tilde{q}^3 - \partial q \tilde{q}^3 | f) / 2 \\ &\Rightarrow j (-\partial q^2 \tilde{q} \tilde{q} - \partial q \tilde{q}^2 \tilde{q} + \partial q \tilde{q}^2 \tilde{q} + \partial \tilde{q} \tilde{q} \tilde{q}^2 + \partial q^3 \tilde{q} + \partial \tilde{q}^3 \tilde{q} - \partial \tilde{q} \tilde{q}^3 - \partial q \tilde{q}^3 | f) / 2, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \partial E_x / \partial X + \partial E_y / \partial Y + \partial E_z / \partial Z = 0 \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}
\partial H_x / \partial X &= (\partial GX | f) = [i (\partial q\tilde{q} - \partial \bar{q}\tilde{\bar{q}}) | j (\partial q\bar{q} - \partial \tilde{q}\tilde{\bar{q}}) | f] \rightarrow \\
\partial H_y / \partial Y &= -(\partial NY | f) = -[ij (\partial q^2 - \partial \bar{q}^2 - \partial \tilde{q}^2 + \partial \tilde{\bar{q}}^2) / 2 | (\partial q\tilde{q} + \partial \bar{q}\tilde{\bar{q}}) | f] \Rightarrow \\
\partial H_z / \partial Z &= (\partial KZ | f) = [(\partial q^2 + \partial \bar{q}^2 + \partial \tilde{q}^2 + \partial \tilde{\bar{q}}^2) / 2 | ij (\partial q\tilde{q} - \partial \bar{q}\tilde{\bar{q}}) | f] \Rightarrow \\
&\rightarrow ij (\partial q^2 \bar{q}\tilde{q} - \partial q\bar{q}^2 \tilde{\bar{q}} - \partial q\tilde{q}^2 \tilde{\bar{q}} + \partial \bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 | f) \\
&\Rightarrow -ij (\partial q^2 \bar{q}\tilde{q} - \partial q\bar{q}^2 \tilde{\bar{q}} - \partial q\tilde{q}^2 \tilde{\bar{q}} + \partial \bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + \partial q^3 \tilde{\bar{q}} - \partial \bar{q}^3 \tilde{q} - \partial \bar{q}\tilde{q}^3 + \partial q\tilde{\bar{q}}^3 | f) / 2 \\
&\Rightarrow ij (-\partial q^2 \bar{q}\tilde{q} + \partial q\bar{q}^2 \tilde{\bar{q}} + \partial q\tilde{q}^2 \tilde{\bar{q}} - \partial \bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + \partial q^3 \tilde{\bar{q}} - \partial \bar{q}^3 \tilde{q} - \partial \bar{q}\tilde{q}^3 + \partial q\tilde{\bar{q}}^3 | f) / 2
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \partial H_x / \partial X + \partial H_y / \partial Y + \partial H_z / \partial Z = 0 \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
\partial H_z / \partial Y &= (\partial KY | f) = [(\partial q^2 + \partial \bar{q}^2 + \partial \tilde{q}^2 + \partial \tilde{\bar{q}}^2) / 2 | (\partial q\tilde{q} + \partial \bar{q}\tilde{\bar{q}}) | f] \rightarrow \\
\partial H_y / \partial Z &= -(\partial NZ | f) = -[ij (\partial q^2 - \partial \bar{q}^2 - \partial \tilde{q}^2 + \partial \tilde{\bar{q}}^2) / 2 | ij (\partial q\tilde{q} - \partial \bar{q}\tilde{\bar{q}}) | f] \Rightarrow \\
\partial E_x / \partial T &= (\partial FT | f) = [(\partial q\tilde{q} + \partial \bar{q}\tilde{\bar{q}}) | (\partial q\bar{q} + \partial \tilde{q}\tilde{\bar{q}}) | f] \Rightarrow \\
&\rightarrow (\partial q^2 \bar{q}\tilde{q} + \partial q\bar{q}^2 \tilde{\bar{q}} + \partial q\tilde{q}^2 \tilde{\bar{q}} + \partial \bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + \partial q^3 \tilde{\bar{q}} + \partial \bar{q}^3 \tilde{q} + \partial \bar{q}\tilde{q}^3 + \partial q\tilde{\bar{q}}^3 | f) / 2 \\
&\Rightarrow (-\partial q^2 \bar{q}\tilde{q} - \partial q\bar{q}^2 \tilde{\bar{q}} - \partial q\tilde{q}^2 \tilde{\bar{q}} - \partial \bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + \partial q^3 \tilde{\bar{q}} + \partial \bar{q}^3 \tilde{q} + \partial \bar{q}\tilde{q}^3 + \partial q\tilde{\bar{q}}^3 | f) / 2 \\
&\Rightarrow (\partial q^2 \bar{q}\tilde{q} + \partial q\bar{q}^2 \tilde{\bar{q}} + \partial q\tilde{q}^2 \tilde{\bar{q}} + \partial \bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 | f)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\partial H_z / \partial Y - \partial H_y / \partial Z = \partial E_x / \partial T \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
\partial H_x / \partial Z &= (\partial GZ | f) = [i (\partial q\tilde{q} - \partial \bar{q}\tilde{\bar{q}}) | ij (\partial q\tilde{q} - \partial \bar{q}\tilde{\bar{q}}) | f] \rightarrow \\
\partial H_z / \partial X &= (\partial KX | f) = [(\partial q^2 + \partial \bar{q}^2 + \partial \tilde{q}^2 + \partial \tilde{\bar{q}}^2) / 2 | j (\partial q\bar{q} - \partial \tilde{q}\tilde{\bar{q}}) | f] \Rightarrow \\
\partial E_y / \partial T &= -(\partial MT | f) = -[j (\partial q^2 + \partial \bar{q}^2 - \partial \tilde{q}^2 - \partial \tilde{\bar{q}}^2) / 2 | (\partial q\bar{q} + \partial \tilde{q}\tilde{\bar{q}}) | f] \Rightarrow \\
&\rightarrow -j (\partial q^2 \bar{q}\tilde{q} + \partial q\bar{q}^2 \tilde{\bar{q}} - \partial q\tilde{q}^2 \tilde{\bar{q}} - \partial \bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 | f) \\
&\Rightarrow j (-\partial q^2 \bar{q}\tilde{q} - \partial q\bar{q}^2 \tilde{\bar{q}} + \partial q\tilde{q}^2 \tilde{\bar{q}} + \partial \bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + \partial q^3 \tilde{\bar{q}} + \partial \bar{q}^3 \tilde{q} - \partial \bar{q}\tilde{q}^3 - \partial q\tilde{\bar{q}}^3 | f) / 2 \\
&\Rightarrow -j (\partial q^2 \bar{q}\tilde{q} + \partial q\bar{q}^2 \tilde{\bar{q}} - \partial q\tilde{q}^2 \tilde{\bar{q}} - \partial \bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + \partial q^3 \tilde{\bar{q}} + \partial \bar{q}^3 \tilde{q} - \partial \bar{q}\tilde{q}^3 - \partial q\tilde{\bar{q}}^3 | f) / 2
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\partial H_x / \partial Z - \partial H_z / \partial X = \partial E_y / \partial T \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
\partial H_y / \partial X &= -(\partial NX | f) = -[ij (\partial q^2 - \partial \bar{q}^2 - \partial \tilde{q}^2 + \partial \tilde{\bar{q}}^2) / 2 | j (\partial q\bar{q} - \partial \tilde{q}\tilde{\bar{q}}) | f] \rightarrow \\
\partial H_x / \partial Y &= (\partial GY | f) = [i (\partial q\tilde{q} - \partial \bar{q}\tilde{\bar{q}}) | (\partial q\tilde{q} + \partial \bar{q}\tilde{\bar{q}}) | f] \Rightarrow \\
\partial E_z / \partial T &= -(\partial LT | f) = -[i (\partial q^2 - \partial \bar{q}^2 + \partial \tilde{q}^2 - \partial \tilde{\bar{q}}^2) / 2 | (\partial q\bar{q} + \partial \tilde{q}\tilde{\bar{q}}) | f] \Rightarrow \\
&\rightarrow -i (-\partial q^2 \bar{q}\tilde{q} + \partial q\bar{q}^2 \tilde{\bar{q}} - \partial q\tilde{q}^2 \tilde{\bar{q}} + \partial \bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + \partial q^3 \tilde{\bar{q}} - \partial \bar{q}^3 \tilde{q} + \partial \bar{q}\tilde{q}^3 - \partial q\tilde{\bar{q}}^3 | f) / 2 \\
&\Rightarrow i (\partial q^2 \bar{q}\tilde{q} - \partial q\bar{q}^2 \tilde{\bar{q}} + \partial q\tilde{q}^2 \tilde{\bar{q}} - \partial \bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 | f) \\
&\Rightarrow -i (\partial q^2 \bar{q}\tilde{q} - \partial q\bar{q}^2 \tilde{\bar{q}} + \partial q\tilde{q}^2 \tilde{\bar{q}} - \partial \bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}}^2 + \partial q^3 \tilde{\bar{q}} - \partial \bar{q}^3 \tilde{q} + \partial \bar{q}\tilde{q}^3 - \partial q\tilde{\bar{q}}^3 | f) / 2
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\partial H_y / \partial X - \partial H_x / \partial Y = \partial E_z / \partial T \quad (5.12)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \partial \mathbf{E} / \partial T \quad (5.13)$$

где векторное уравнение (5.13) объединяет в себе уравнения (5.8), (5.10) и (5.12).

$$\begin{aligned} \partial E_z / \partial Y &= - (\partial LY | f) = - [i (\partial q^2 - \partial \bar{q}^2 + \partial \tilde{q}^2 - \partial \bar{\tilde{q}}^2) / 2 | (\partial q \tilde{q} + \partial \bar{q} \bar{\tilde{q}}) | f] \rightarrow \\ \partial E_y / \partial Z &= - (\partial MZ | f) = - [j (\partial q^2 + \partial \bar{q}^2 - \partial \tilde{q}^2 - \partial \bar{\tilde{q}}^2) / 2 | ij (\partial q \tilde{q} - \partial \bar{q} \bar{\tilde{q}}) | f] \Rightarrow \\ \partial H_x / \partial T &= (\partial GT | f) = [i (\partial q \tilde{q} - \partial \bar{q} \bar{\tilde{q}}) | (\partial q \bar{q} + \partial \tilde{q} \bar{\tilde{q}}) | f] \Rightarrow \\ &\rightarrow -i (\partial q^2 \bar{q} \tilde{q} - \partial q \bar{q}^2 \tilde{q} + \partial q \tilde{q}^2 \bar{q} - \partial \bar{q} \tilde{q} \bar{\tilde{q}}^2 + \partial q^3 \tilde{q} - \partial \bar{q}^3 \tilde{q} + \partial \bar{q} \tilde{q}^3 - \partial q \tilde{q}^3 | f) / 2 \\ &\Rightarrow -i (-\partial q^2 \bar{q} \tilde{q} + \partial q \bar{q}^2 \tilde{q} - \partial q \tilde{q}^2 \bar{q} + \partial \bar{q} \tilde{q} \bar{\tilde{q}}^2 + \partial q^3 \tilde{q} - \partial \bar{q}^3 \tilde{q} + \partial \bar{q} \tilde{q}^3 - \partial q \tilde{q}^3 | f) / 2 \\ &\Rightarrow i (\partial q^2 \bar{q} \tilde{q} - \partial q \bar{q}^2 \tilde{q} + \partial q \tilde{q}^2 \bar{q} - \partial \bar{q} \tilde{q} \bar{\tilde{q}}^2 | f) \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\partial E_z / \partial Y - \partial E_y / \partial Z = -\partial H_x / \partial T \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \partial E_x / \partial Z &= (\partial FZ | f) = [(\partial q \tilde{q} + \partial \bar{q} \bar{\tilde{q}}) | ij (\partial q \tilde{q} - \partial \bar{q} \bar{\tilde{q}}) | f] \rightarrow \\ \partial E_z / \partial X &= - (\partial LX | f) = - [i (\partial q^2 - \partial \bar{q}^2 + \partial \tilde{q}^2 - \partial \bar{\tilde{q}}^2) | j (\partial q \bar{q} - \partial \tilde{q} \bar{\tilde{q}}) | f] / 2 \Rightarrow \\ \partial H_y / \partial T &= - (\partial NT | f) = - [ij (\partial q^2 - \partial \bar{q}^2 - \partial \tilde{q}^2 + \partial \bar{\tilde{q}}^2) | (\partial q \bar{q} + \partial \tilde{q} \bar{\tilde{q}}) | f] / 2 \Rightarrow \\ &\rightarrow ij (\partial q^2 \bar{q} \tilde{q} - \partial q \bar{q}^2 \tilde{q} - \partial q \tilde{q}^2 \bar{q} + \partial \bar{q} \tilde{q} \bar{\tilde{q}}^2 | f) \\ &\Rightarrow -ij (-\partial q^2 \bar{q} \tilde{q} + \partial q \bar{q}^2 \tilde{q} + \partial q \tilde{q}^2 \bar{q} - \partial \bar{q} \tilde{q} \bar{\tilde{q}}^2 + \partial q^3 \tilde{q} - \partial \bar{q}^3 \tilde{q} - \partial \bar{q} \tilde{q}^3 + \partial q \tilde{q}^3 | f) / 2 \\ &\Rightarrow -ij (\partial q^2 \bar{q} \tilde{q} - \partial q \bar{q}^2 \tilde{q} - \partial q \tilde{q}^2 \bar{q} + \partial \bar{q} \tilde{q} \bar{\tilde{q}}^2 + \partial q^3 \tilde{q} - \partial \bar{q}^3 \tilde{q} - \partial \bar{q} \tilde{q}^3 + \partial q \tilde{q}^3 | f) / 2 \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\partial E_x / \partial Z - \partial E_z / \partial X = -\partial H_y / \partial T \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \partial E_y / \partial X &= - (\partial MX | f) = - [j (\partial q^2 + \partial \bar{q}^2 - \partial \tilde{q}^2 - \partial \bar{\tilde{q}}^2) / 2 | j (\partial q \bar{q} - \partial \tilde{q} \bar{\tilde{q}}) | f] \rightarrow \\ \partial E_x / \partial Y &= (\partial FY | f) = [(\partial q \tilde{q} + \partial \bar{q} \bar{\tilde{q}}) | (\partial q \tilde{q} + \partial \bar{q} \bar{\tilde{q}}) | f] \Rightarrow \\ \partial H_z / \partial T &= (\partial KT | f) = [(\partial q^2 + \partial \bar{q}^2 + \partial \tilde{q}^2 + \partial \bar{\tilde{q}}^2) / 2 | (\partial q \bar{q} + \partial \tilde{q} \bar{\tilde{q}}) | f] \Rightarrow \\ &\rightarrow - (-\partial q^2 \bar{q} \tilde{q} - \partial q \bar{q}^2 \tilde{q} - \partial q \tilde{q}^2 \bar{q} - \partial \bar{q} \tilde{q} \bar{\tilde{q}}^2 + \partial q^3 \tilde{q} + \partial \bar{q}^3 \tilde{q} + \partial \bar{q} \tilde{q}^3 + \partial q \tilde{q}^3 | f) / 2 \\ &\Rightarrow (\partial q^2 \bar{q} \tilde{q} + \partial q \bar{q}^2 \tilde{q} + \partial q \tilde{q}^2 \bar{q} + \partial \bar{q} \tilde{q} \bar{\tilde{q}}^2 | f) \\ &\Rightarrow (\partial q^2 \bar{q} \tilde{q} + \partial q \bar{q}^2 \tilde{q} + \partial q \tilde{q}^2 \bar{q} + \partial \bar{q} \tilde{q} \bar{\tilde{q}}^2 + \partial q^3 \tilde{q} + \partial \bar{q}^3 \tilde{q} + \partial \bar{q} \tilde{q}^3 + \partial q \tilde{q}^3 | f) / 2 \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\partial E_y / \partial X - \partial E_x / \partial Y = -\partial H_z / \partial T \quad (5.19)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{H} / \partial T \quad (5.20)$$

где векторное уравнение (5.20) объединяет в себе уравнения (5.15), (5.17) и (5.19).

Таким образом, производные (5.1) удовлетворяют уравнениям Максвелла (5.4), (5.6) и (5.13), (5.20) для электромагнитной волны. Эти уравнения никак не связаны с зарядами и токами и описывают процессы, имеющие лишь световую скорость ($c = 1$). Поэтому мы их также называем *изотропными*. Отметим при этом, что и производные (5.1), и скалярные или векторные по виду уравнения из (5.2)–(5.20) фактически являются B -векторными. Им удовлетворяет произвольная дифференцируемая B -векторная функция f .

Отметим также, что выбор обозначений \mathbf{E} и \mathbf{H} всё ещё остаётся условным, а сами эти величины — совершенно равноправными. Они выражены через производные по переменным \mathcal{A} и \mathcal{B} , а не через производные по переменным T, X, Y, Z . По этой причине невозможно приписать им полярный или аксиальный характер, как и самим переменным \mathcal{A} и \mathcal{B} , или выразить их через какое-то подобие 4-векторного потенциала (φ, \mathbf{A}). Если бы для описания величин E_i и H_i , вместо производных (5.1) $\partial f/\partial \mathcal{A}_i$ и $\partial f/\partial \mathcal{B}_i$ были выбраны производные $(-\partial f/\partial \mathcal{A}_i)$ и $(-\partial f/\partial \mathcal{B}_i)$, то для совпадения с уравнениями Максвелла с учётом всех знаков, обозначения E_i и H_i потребовалось бы поменять местами. Для окончательного выбора обозначений необходимо введение понятий заряда и тока, что выходит за рамки данной работы.

6 B -преобразование операторов дифференцирования. Преобразования Лоренца

Будем рассматривать B -преобразование [1, 2:2.1] B -вектора как замену переменной дифференцирования: $q_1 \rightarrow q_2 = q_1 q$, где q — постоянный множитель. Тогда при $\det q = 1$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_2} &= \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial q_1} = \frac{\bar{q}\tilde{q}\tilde{\tilde{q}}}{\det q} \frac{\partial}{\partial q_1} = \bar{q}\tilde{q}\tilde{\tilde{q}} \frac{\partial}{\partial q_1} \\ \frac{\partial^2}{\partial q_2 \partial \bar{q}_2} &= \frac{1}{q\bar{q}} \frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial \bar{q}_1} = \frac{\tilde{q}\tilde{\tilde{q}}}{\det q} \frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial \bar{q}_1} = \tilde{q}\tilde{\tilde{q}} \frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial \bar{q}_1} \\ \frac{\partial^3}{\partial q_2 \partial \bar{q}_2 \partial \tilde{q}_2} &= \frac{1}{q\bar{q}\tilde{q}} \frac{\partial^3}{\partial q_1 \partial \bar{q}_1 \partial \tilde{q}_1} = \frac{\tilde{\tilde{q}}}{\det q} \frac{\partial^3}{\partial q_1 \partial \bar{q}_1 \partial \tilde{q}_1} = \tilde{\tilde{q}} \frac{\partial^3}{\partial q_1 \partial \bar{q}_1 \partial \tilde{q}_1} \\ &\frac{\partial^4}{\partial q_2 \partial \bar{q}_2 \partial \tilde{q}_2 \partial \tilde{\tilde{q}}_2} = \frac{\partial^4}{\partial q_1 \partial \bar{q}_1 \partial \tilde{q}_1 \partial \tilde{\tilde{q}}_1}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Таким образом, для ∂ -операторов по B -переменным, B -преобразование сводится к *делению* на соответствующие значения этого преобразования. При $\det q = 1$ это же преобразование можно рассматривать как *умножение* на значения, сопряжённые переменным дифференцирования. Напомним, что при переходе к конкретному дифференциальному уравнению в обе части операторного уравнения следует подставлять *одну и ту же* функцию. Например, для подстановки в первое уравнение (6.1) может быть взята функция $f(q_2, \bar{q}_2, \tilde{q}_2, \tilde{\tilde{q}}_2)$. После чего, для выполнения дифференцирования в правой части производится замена переменной:

$$\frac{\partial f(q_2, \bar{q}_2, \tilde{q}_2, \tilde{\tilde{q}}_2)}{\partial q_2} = \frac{1}{q} \frac{\partial f(q_2, \bar{q}_2, \tilde{q}_2, \tilde{\tilde{q}}_2)}{\partial q_1} \rightarrow \frac{\partial f(q_2, \bar{q}_2, \tilde{q}_2, \tilde{\tilde{q}}_2)}{\partial q_2} = \frac{1}{q} \frac{\partial f(qq_1, \bar{q}\bar{q}_1, \tilde{q}\tilde{q}_1, \tilde{\tilde{q}}\tilde{\tilde{q}}_1)}{\partial q_1}.$$

Для 4-векторных операторов (2.9) получим:

$$\begin{aligned}
 \partial q_2 \bar{q}_2 &= \tilde{q} \tilde{q} \partial q_1 \bar{q}_1 \\
 (\partial T_2 + j \partial X_2) &= \tilde{q} \tilde{q} (\partial T_1 + j \partial X_1) = \exp(-j2\gamma) (\partial T_1 + j \partial X_1) = \\
 &= (\operatorname{ch} 2\gamma - j \operatorname{sh} 2\gamma) (\partial T_1 + j \partial X_1) = (\operatorname{ch} 2\gamma \partial T_1 - \operatorname{sh} 2\gamma \partial X_1) + j (\operatorname{ch} 2\gamma \partial X_1 - \operatorname{sh} 2\gamma \partial T_1) \\
 \partial q_2 \tilde{q}_2 &= \bar{q} \bar{q} \partial q_1 \tilde{q}_1 \\
 (\partial Y_2 - ij \partial Z_2) &= \bar{q} \bar{q} (\partial Y_1 - ij \partial Z_1) = \exp(-ij2\delta) (\partial Y_1 - ij \partial Z_1) = \\
 &= (\cos 2\delta - ij \sin 2\delta) (\partial Y_1 - ij \partial Z_1) = (\cos 2\delta \partial Y_1 - \sin 2\delta \partial Z_1) - ij (\sin 2\delta \partial Y_1 + \cos 2\delta \partial Z_1) \\
 \partial q_2 \tilde{q}_2 &= \bar{q} \bar{q} \partial q_1 \bar{q}_1 \\
 (\partial F_2 - i \partial G_2) &= \bar{q} \bar{q} (\partial F_1 - i \partial G_1) = \exp(-i2\beta) (\partial F_1 - i \partial G_1) = \\
 &= (\cos 2\beta - i \sin 2\beta) (\partial F_1 - i \partial G_1) = (\cos 2\beta \partial F_1 - \sin 2\beta \partial G_1) - i (\sin 2\beta \partial F_1 + \cos 2\beta \partial G_1).
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

То есть, α 0-преобразование B -векторов (и связанное с ним преобразование 4-радиус-векторов) вызывает соответствующие преобразования ∂ -операторов по координатам этих 4-векторов. В частности, преобразованию Лоренца [1, 2:2.6] 4-координат соответствует следующее преобразование операторов:

$$\partial T_2 + j \partial X_2 = [\partial T_1 - V \partial X_1 + j (\partial X_1 - V \partial T_1)] / \sqrt{1 - V^2} \tag{6.3}$$

$$\partial T_2 = (\partial T_1 - V \partial X_1) / \sqrt{1 - V^2}, \quad \partial X_2 = (\partial X_1 - V \partial T_1) / \sqrt{1 - V^2} \tag{6.4}$$

$$E_2 = (E_1 + V p_{1x}) / \sqrt{1 - V^2}, \quad p_{2x} = (p_{1x} + V E_1) / \sqrt{1 - V^2} \tag{6.5}$$

Уравнения (6.4) представляют собой составляющие B -векторного уравнения (6.3). Уравнения (6.5) получены подстановкой соотношений (3.8) в операторы (6.4).

Для преобразования операторов $\{\partial K.. \partial N\}$, с учётом (2.10), запишем:

$$\begin{aligned}
 \partial q_2^2 &= q^{-2\partial} q_1^2 \\
 \partial K_2 - i \partial L_2 + j \partial M_2 - ij \partial N_2 &= \\
 &= \exp[-2(\alpha + i\beta + j\gamma + ij\delta)] (\partial K_1 - i \partial L_1 + j \partial M_1 - ij \partial N_1) = \\
 &= \exp[-2(\alpha + i\beta)] \{ (\partial K_1 - i \partial L_1) \operatorname{ch} 2(\gamma + i\delta) - (\partial M_1 - i \partial N_1) \operatorname{sh} 2(\gamma + i\delta) + \\
 &\quad + j [(\partial M_1 - i \partial N_1) \operatorname{ch} 2(\gamma + i\delta) - (\partial K_1 - i \partial L_1) \operatorname{sh} 2(\gamma + i\delta)] \}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Для γ -преобразования при $(\alpha = \beta = \delta = 0)$ из (6.6) следует:

$$\begin{aligned}
 (\partial K_2 - i \partial L_2) + j (\partial M_2 - i \partial N_2) &= \\
 &= (\partial K_1 - i \partial L_1) \operatorname{ch} 2\gamma - (\partial M_1 - i \partial N_1) \operatorname{sh} 2\gamma + j [(\partial M_1 - i \partial N_1) \operatorname{ch} 2\gamma - (\partial K_1 - i \partial L_1) \operatorname{sh} 2\gamma] \\
 H_{2z} + i E_{2z} + j (-E_{2y} + i H_{2y}) &= \\
 &= (H_{1z} + i E_{1z}) \operatorname{ch} 2\gamma - (-E_{1y} + i H_{1y}) \operatorname{sh} 2\gamma + j [(-E_{1y} + i H_{1y}) \operatorname{ch} 2\gamma - (H_{1z} + i E_{1z}) \operatorname{sh} 2\gamma]
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

откуда после разделения по j - и i -составляющим получим:

$$\begin{aligned}
 E_{2y} &= E_{1y} \operatorname{ch} 2\gamma + H_{1z} \operatorname{sh} 2\gamma, & H_{2y} &= H_{1y} \operatorname{ch} 2\gamma - E_{1z} \operatorname{sh} 2\gamma \\
 E_{2z} &= E_{1z} \operatorname{ch} 2\gamma - H_{1y} \operatorname{sh} 2\gamma, & H_{2z} &= H_{1z} \operatorname{ch} 2\gamma + E_{1y} \operatorname{sh} 2\gamma \\
 E_{2x} &= E_{1x}, & H_{2x} &= H_{1x} \\
 E_{2y} &= (E_{1y} + V H_{1z}) / \sqrt{1 - V^2}, & H_{2y} &= (H_{1y} - V E_{1z}) / \sqrt{1 - V^2} \\
 E_{2z} &= (E_{1z} - V H_{1y}) / \sqrt{1 - V^2}, & H_{2z} &= (H_{1z} + V E_{1y}) / \sqrt{1 - V^2}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

где учтена также независимость $E_x = \partial f / \partial F$ и $H_x = \partial f / \partial G$ от γ .

Таким образом, формулы (6.8) полностью совпадают с формулами преобразований Лоренца для составляющих электромагнитного поля.

7 Инварианты B -преобразования

Для невырожденных B -чисел, любой B -вектор q_2 может быть получен из произвольного B -вектора q_1 умножением на соответствующее B -число q . В этом смысле, рассмотренные в предыдущем разделе B -преобразования (6.1) имеют общий характер, хотя и сводятся к обычному умножению. Рассмотрим два типа инвариантов, естественным образом вытекающих из этого свойства.

При $\alpha 0$ -преобразовании инвариантными будут такие операторы или произведения операторов, для которых преобразование в итоге сводится к делению (или умножению) на $\det q = 1$. Например,

$$\frac{\partial^4}{\partial q \partial \bar{q} \partial \tilde{q} \partial \tilde{\bar{q}}}, \quad \frac{\partial^3}{\partial q \partial \bar{q} \partial \tilde{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{\bar{q}}}, \quad \frac{\partial^2}{\partial q \partial \bar{q}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \tilde{q} \partial \tilde{\bar{q}}}, \quad \frac{\partial^2}{\partial q \partial \bar{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{\bar{q}}}, \quad \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{\bar{q}}} \tag{7.1}$$

Кроме непосредственно операторов (7.1) инвариантными будут и их аналоги, отличающиеся распределением переменных дифференцирования ($q, \bar{q}, \tilde{q}, \tilde{\bar{q}}$) между сомножителями. Отметим, что в разных сомножителях одного инвариантного произведения дифференцируемые функции могут быть различными.

Из неизменности выражений типа (7.1) следует, например, что операторы (4.1) и (4.2) являются инвариантами $\alpha 0$ -преобразования и, тем самым, уравнения (4.4) описывают 4-векторы (ковекторы), характер которых (изотропный, времениподобный, пространственно-подобный) зависит от соотношения инвариантов (4.2). Волновое же уравнение (3.7) от значения инварианта (4.1) (или (3.3)) не зависит и всегда остаётся изотропным.

Если оператор дифференцирования по некоторому набору B -переменных умножить на этот же набор B -переменных, то такая конструкция окажется инвариантом любого B -преобразования (в том числе, при $\det q \neq 1$). Например, выражения

$$q \frac{\partial}{\partial q}, \quad \tilde{q} \frac{\partial}{\partial \tilde{q}}, \quad q \bar{q} \frac{\partial^2}{\partial q \partial \bar{q}}, \quad \tilde{q}^2 \tilde{\bar{q}} \frac{\partial^3}{\partial \tilde{q}^2 \partial \tilde{\bar{q}}} \quad \text{и т.п.} \tag{7.2}$$

останутся неизменными, так как однотипные, но взаимно обратные преобразования алгебраического и дифференциального сомножителей будут сокращаться. Так, из

$$\begin{aligned}
 2q\bar{q} \partial q \bar{q} &= (T + jX) (\partial T + j \partial X) = (T \partial T + X \partial X) + j (T \partial X + X \partial T) \\
 2q\tilde{q} \partial q \tilde{q} &= (Y + ijZ) (\partial Y - ij \partial Z) = (Y \partial Y + Z \partial Z) - ij (Y \partial Z - Z \partial Y) \\
 2q\tilde{q} \partial q \tilde{q} &= (F + iG) (\partial F - i \partial G) = (F \partial F + G \partial G) - i (F \partial G - G \partial F)
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

в обозначениях (3.8) и (5.1) получим следующий набор инвариантов B -преобразования:

$$\begin{aligned} (T\mathcal{E} - Xp_x) - j(Tp_x - X\mathcal{E}) &= \text{Inv} \\ - (Yp_y + Zp_z) + ij(Yp_z - Zp_y) &= \text{Inv} \\ (\mathcal{A}_xE_x + \mathcal{B}_xH_x) - i(\mathcal{A}_xH_x - \mathcal{B}_xE_x) &= \text{Inv} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Сопряжённые выражения соотношений (7.3) и (7.4), отличающиеся знаком при i , j и ij , здесь не записаны, но также являются инвариантами. Сохраняться будут и всевозможные суммы, разности и произведения этих инвариантов.

Так, следствием первых двух равенств (7.4) и их сопряжённых выражений будет инвариант

$$(T\mathcal{E} - Xp_x - Yp_y - Zp_z) = \text{Inv}, \quad (7.5)$$

который представляет собой псевдоевклидово скалярное произведение 4-векторов (T, \mathbf{R}) и $(\mathcal{E}, \mathbf{p})$. Тогда как инварианты

$$(Tp_x - X\mathcal{E}) \quad \text{и} \quad (Yp_z - Zp_y) = M_x \quad (7.6)$$

являются сохраняющимися компонентами 4-тензора момента $(T\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathcal{E}, \mathbf{M})$.

Из произведения квадрата B -вектора и его ∂ -оператора

$$\begin{aligned} 2q^2 \partial q^2 &= (K + iL + jM + ijN) (\partial K - i^\partial L + j^\partial M - ij^\partial N) = \\ &= (K^\partial K + L^\partial L + M^\partial M + N^\partial N) + i(L^\partial K - K^\partial L + N^\partial M - M^\partial N) + \\ &+ j(M^\partial K + N^\partial L + K^\partial M + L^\partial N) + ij(N^\partial K - M^\partial L + L^\partial M - K^\partial N) \end{aligned} \quad (7.7)$$

в обозначениях (4.5) и (5.1) вытекает следующее выражение

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_yE_y + \mathcal{A}_zE_z + \mathcal{B}_yH_y + \mathcal{B}_zH_z) + i(-\mathcal{A}_yH_y - \mathcal{A}_zH_z + \mathcal{B}_yE_y + \mathcal{B}_zE_z) + \\ + j(-\mathcal{A}_yH_z + \mathcal{A}_zH_y + \mathcal{B}_yE_z - \mathcal{B}_zE_y) + ij(-\mathcal{A}_yE_z + \mathcal{A}_zE_y - \mathcal{B}_yH_z + \mathcal{B}_zH_y) = \text{Inv} \end{aligned} \quad (7.8)$$

которое вместе с третьей строкой в (7.4) характеризует инварианты B -преобразования для системы тензоров $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и (\mathbf{E}, \mathbf{H}) .

Из соотношений типа (7.1), (7.2) могут быть получены и другие инварианты B -преобразования. Однако, ограничимся этими примерами, как наиболее показательными.

Заключение

Об аналитической функции

При конструировании новых гиперкомплексных чисел, считается весьма важным развить исчисление таких гиперкомплексных переменных до уровня теории их *аналитических* функций [7, 8]. В нашей работе ∂ -операторы построены исходя из того, что B -векторная функция аналитической *не является*. Она зависит от всех сопряжённых форм своих аргументов как обычная функция четырёх переменных: $f(a, b, c, d) = f(u, v, \bar{u}, \bar{v}) = f(q, \bar{q}, \tilde{q}, \bar{\tilde{q}})$. Для получения дифференциальных соотношений физического характера в 4-пространстве, задействованы все первые производные этой B -векторной функции, а также их повторные и смешанные производные более высоких порядков. В случае аналитической функции $f(q)$, когда три из четырёх производных $\partial f/\partial q$, $\partial f/\partial \bar{q}$, $\partial f/\partial \tilde{q}$, $\partial f/\partial \bar{\tilde{q}}$ равны нулю, реализация такого подхода оказалась бы невозможной. Таким образом, развитие анализа N -комплексных функций по принципам математического анализа функций n переменных представляется нам не менее важным и перспективным, чем разработка аналитического аспекта.

Вырожденные приращения аргумента

В (1.3) действительные функции A, B, C, D определены как дифференцируемые по своим действительным аргументам a, b, c, d . Тем самым в (1.3) функция $f(a, b, c, d)$ определена как дифференцируемая в смысле \mathbb{R}^4 . Операторные уравнения (1.8) выражают производные по переменным $q, \bar{q}, \tilde{q}, \tilde{\bar{q}}$ через производные по переменным a, b, c, d . Например,

$$\partial f / \partial q = (\partial f / \partial a - i \partial f / \partial b + j \partial f / \partial c - ij \partial f / \partial d) / 4$$

В силу определённости правой части, такое уравнение фактически является *определением* его левой части, то есть производной $\partial f / \partial q$. На приращения (дифференциалы) аргументов da, db, dc, dd , а значит и на $dq = da + idb + jdc + ijdd$, никаких ограничений не наложено. В частности, в случае вырожденного приращения аргумента dq , когда $da + idb = dc + idd$, получим вырожденное значение производной:

$$\partial f / \partial q = (\partial f / \partial a - i \partial f / \partial b + j \partial f / \partial a - ij \partial f / \partial b) / 4 = (1 + j) (\partial f / \partial a - i \partial f / \partial b) / 4$$

Сам факт того, что производная B -векторной функции может принимать вырожденные значения вполне закономерен, и для изложенного материала критическим не является.

Зависимость переменных

Для B -векторной функции (1.3) и её производных независимыми являются переменные (a, b, c, d) , которые по определению могут принимать произвольные действительные значения. Аналогично комплексному анализу [5, 6], аргументами формально считаются и четвёрки переменных (u, v, \bar{u}, \bar{v}) и $(q, \bar{q}, \tilde{q}, \tilde{\bar{q}})$. Это, конечно, не означает, что сопряжённым формам бикомплексной переменной можно присваивать значения независимо друг от друга, но лишь отражает факт взаимно однозначного и линейного их выражения через аргументы (a, b, c, d) согласно (1.1).

B -пространство характеризуется четырьмя координатами (a, b, c, d) . Переменные $\{T..N\}$ являются их функциями [1, 2:1.1], [1, 2:4.1]. Вычисление показывает, что ранг функционального определителя $D(T, X, Y, Z, F, G, K, L, M, N) / D(a, b, c, d)$ равен четырём. В принципе, при исключении переменных (a, b, c, d) , в качестве независимых можно выделить четыре переменных из совокупности $\{T..N\}$. Подчеркнём однако, что переменные T, X, Y, Z независимыми *не являются*. Это следует, прежде всего, из вычисления функционального определителя. А при последующей физической интерпретации подтверждается уравнением [1, 2:1.4], в которое T, X, Y, Z входят как координаты *изотропного* 4-вектора, лежащего на световом конусе. Поэтому в работе [1] алгебраические взаимосвязи между переменными $\{T..N\}$ устанавливались без выделения среди них некоторой конкретной «независимой четвёрки», на основе бикомплексных соотношений между переменными (a, b, c, d) .

Такой же подход реализован и в настоящей работе. Функция f через свои составляющие A, B, C, D зависит от четырёх аргументов (a, b, c, d) . Все десять операторов $\{\partial T.. \partial N\}$ выражены через операторы $\partial a, \partial b, \partial c, \partial d$ (2.6), (2.7). Тем самым, применение любого из операторов $\{\partial T.. \partial N\}$ фактически является дифференцированием по независимым переменным (a, b, c, d) . Отсюда любое дифференциальное соотношение, записанное через операторы $\{\partial T.. \partial N\}$, является своего рода формой краткой записи соответствующих им дифференциальных комплексов, построенных из операторов $\partial a, \partial b, \partial c, \partial d$. Если воспользоваться примером механики Лагранжа со связями [10], то можно сказать, что окончательный вид дифференциальных уравнений настоящей статьи определяется алгебраическими «связями» [1, 2:1.1], [1, 2:4.1] выражающими переменные $\{T..N\}$ через переменные (a, b, c, d) . Тем самым, дифференциальные уравнения этой публикации оказываются прямым следствием бикомплексных алгебраических соотношений предыдущей работы [1].

Согласно (2.8), для всех десяти переменных $\{T..N\}$ и всех десяти операторов $\{\partial T.. \partial N\}$ действие на собственную переменную даёт единицу, а на девять остальных — ноль. Мы нигде пока не использовали это свойство, и воздействовали операторами $\{\partial T.. \partial N\}$ только на саму B -векторную функцию $f(a, b, c, d)$, как это только что обсуждалось. Однако это свойство даёт нам возможность поставить вопрос: а не будут ли указанные переменные в физическом плане *выглядеть* как независимые? И не будут ли скрытые бикомплексные (алгебраические и дифференциальные) взаимосвязи между ними *восприниматься* как физические закономерности?

Волна и 4-вектор

Мы не даём пока толкования B -векторной функции f . Хотя, естественно возникает вопрос о возможности её рассмотрения как некоторого аналога квантово-механической волновой функции. Учитывая такую возможность, отметим две особенности нашего подхода, реализованные в данной работе. Во-первых, мы нигде не «заменяем» переменные их операторами или наоборот. В каждом конкретном случае мы *вычисляем* переменную путём воздействия оператора на B -векторную функцию. Другое дело, что на саму эту функцию пока не наложено никаких ограничений, кроме дифференцируемости. И во-вторых, из ∂ -операторов первого порядка $\{\partial T.. \partial N\}$ мы получаем не только дифференциальные соотношения второго *порядка*, но и выражения второй *степени*. Одни приводят к волновому уравнению и выражениям, характерным для векторного анализа, включая уравнения Максвелла (разделы 3 и 5). Другие — к алгебраическим квадратичным и билинейным 4-векторным соотношениям для производных, включая 4-вектор энергии-импульса и 4-тензор момента (разделы 4 и 7). На уровне ∂ -операторных соотношений первого порядка и первой степени эти два подхода ещё не разделяются, и содержат в себе указанный «дуализм» в скрытом виде.

Результаты и перспективы

Наша работа посвящена построению ∂ -операторов для B -векторной функции и их применению для получения дифференциальных соотношений частной теории относительности и электродинамики. Тем самым, эта статья продолжает и дополняет чисто алгебраическую публикацию [1] той же тематики. Из указанных работ следует, что бикомплексное исчисление позволяет вывести все основные *изотропные* соотношения релятивистского и электродинамического типа, но не охватывает *временноподобных* и *пространственноподобных* закономерностей. Этим определяется важность разработки следующих уровней N -комплексного исчисления и перспективность их приложения в физике.

Во-первых, это предоставит возможность описания физических явлений не только на световом конусе, но и в 4-пространстве в целом. Во-вторых, — позволит более полно обосновать уже имеющиеся физические интерпретации, носящие пока достаточно формальный характер.

Литература

- [1] Горюнов А.В. N -комплексная алгебра и изотропные релятивистские и электродинамические уравнения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(17), 2012, с. 65 – 105.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика. Теоретическая физика*, т. 1, М., «Наука», 1973, 208 с.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля. Теоретическая физика*, т.2, М., «Наука», 1973, 504 с.

- [4] Математический энциклопедический словарь. Аналитическая функция. М., «Советская энциклопедия», 1988.
- [5] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М., «Наука», 1986, 759 с.
- [6] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М., «Наука», 1976.
- [7] Olariu S. Complex numbers in n dimensions. arXiv:math/0011044[math.CV], 2000.
- [8] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Аналитические, дифференциально-геометрические и алгебраические свойства гладких функций поличисловой переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(16), 2011, с. 4–53.
- [9] Фок В.А. Начала квантовой механики. М., «Наука», 1976, 376 с.
- [10] Айзерман М.А. Классическая механика. М., «Наука», 1974, 367 с.

Differential Operators of Bicomplex Function and Isotropic Relativistic and Electrodynamics Equations

A.V. Goryunov

Turan-Astana University, Astana, Kazakhstan

avgor@hotmail.ru

Concepts of bicomplex function and its differential operators in bicomplex space are considered. Interrelations of differential operators in bicomplex space and differential operators in 4-space are obtained. Thus the possibility of calculation of derivatives of bicomplex function on 4-space variables is achieved. As result, the main *differential* isotropic equations of theory of relativity and electrodynamics are obtained as direct consequence of related bicomplex *algebraic* formulas of preceded paper.

Key Words: N-complex numbers, bicomplex numbers, bicomplex function, differential operators, special theory of relativity, electrodynamics.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА БИКВАТЕРНИОНОВ В УРАВНЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Л.А. Алексеева

*Институт математики и математического моделирования Комитет науки МОН РК,
Алматы, Казахстан*

alexeeva@math.kz

Рассматривается функциональное пространство бикватернионов на пространстве Минковского. При этом используется скалярно-векторная запись бикватернионов, предложенная У.Гамильтоном для кватернионов. С введением дифференциальных операторов — взаимных комплексных градиентов (*биградиентов*), обобщающих понятие градиента на пространство бикватернионов, рассмотрены бикватернионные волновые (*биволновые*) уравнения и их обобщенные решения. Исследована инвариантность уравнений для группы преобразований Лоренца-Пуанкаре. Предложена бикватернионная форма обобщенного уравнения Максвелла-Дирака и определены его обобщенные решения в бикватернионной форме через скалярные потенциалы. Получено уравнение для скалярных потенциалов решений уравнения Максвелла-Дирака (*КГФШ-уравнение*), объединяющее известные уравнения квантовой механики (уравнение Клейна-Гордона-Фока и уравнение Шредингера). Построены нестационарные, статические и гармонические по времени скалярные потенциалы и порождаемые ими спиноры и спинорные поля.

Ключевые слова: алгебра, бикватернион, биградиент, биволновое уравнение, обобщенное решение, ударные волны, преобразование Лоренца, уравнение Максвелла, уравнение Дирака, спинор, скалярный потенциал, стационарные колебания.

Предложенная В.Р. Гамильтоном алгебра кватернионов [1] и ее комплексное расширение — алгебра бикватернионов являются удобным математическим аппаратом для описания многих физических процессов. В последние десятилетия эти алгебры стали активно использоваться в работах разных авторов для решения ряда задач электродинамики [2-6], квантовой механики [7-11], механики твердого тела [12] и теории поля [13-16]. Эти разделы физики активно изучаются в рамках теорий клиффордовых алгебр [17-19].

Здесь разрабатывается дифференциальная алгебра бикватернионов на пространстве Минковского для построения обобщенных решений бикватернионных дифференциальных уравнений, характерных для задач математической физики.

С использованием дифференциальных операторов — взаимных комплексных градиентов (*биградиентов*), обобщающих понятие градиента на функциональное пространство бикватернионов на пространстве Минковского, рассмотрены дифференциальные бикватернионные волновые (*биволновые*) уравнения и, на основе обобщенного преобразования Фурье, построены их обобщенные решения. Рассмотрены ударные волны как обобщенные решения этих уравнений и получены условия на скачки решений на их фронтах. Исследована инвариантность биволновых уравнений для групп ортогональных преобразований, преобразований Лоренца и Пуанкаре.

Рассмотрены бикватернионные представления уравнений Максвелла и Дирака и построены их фундаментальные и обобщенные решения, описывающие нестационарные, гармонические и статические поля и спиноры.

1 Алгебра бикватернионов

Введем некоторые понятия и обозначения, которыми будем пользоваться далее. Обозначим e_1, e_2, e_3 – орты декартовой системы координат в R^3 , $e_0 = 1$. Пусть F – трехмерный вектор с комплексными компонентами: $F = F_1e_1 + F_2e_2 + F_3e_3$, $f \in \mathcal{C}$ – комплексное число.

Вводится пространство гиперкомплексных чисел – *бикватернионов* (комплексных *кватернионов*) $B = \{\mathbf{F} = f + F\}$. Это линейное пространство со сложением (+) и умножением:

$$a\mathbf{F} + b\mathbf{G} = a(f + F) + b(g + G) = (af + bg) + (aF + bG), \quad \forall a, b \in \mathcal{C},$$

и операцией кватернионного умножения (\circ):

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = (f + F) \circ (g + G) = (fg - (F, G)) + (fG + gF + [F, G]). \quad (1)$$

Здесь и далее обозначаем $(F, G) = \sum_{j=1}^3 F_j G_j$ – скалярное произведение векторов F и G ,

$[F, G] = \sum_{j,k,l=1}^3 \varepsilon_{jkl} F_j G_k e_l$ – их векторное произведение, ε_{jkl} – псевдотензор Леви-Чивита, δ_{jk} – символ Кронекера.

Поскольку $\varepsilon_{jkl} = \varepsilon_{ljk} = \varepsilon_{klj}$, $\varepsilon_{jkl} = -\varepsilon_{jlk} = -\varepsilon_{kjl}$; и $\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{mnl} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$,

$$e_0 \circ e_0 = e_0, \quad e_0 \circ e_j = e_j, \quad e_j \circ e_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkl} e_l,$$

$$(e_j \circ e_k) \circ e_m = -\varepsilon_{jkm} - \delta_{jk} e_m - \delta_{km} e_j + \delta_{mj} e_k = e_j \circ (e_k \circ e_m), \quad j, k, l, m, n = 1, 2, 3,$$

(здесь и далее всюду по одноименным индексам в произведении суммирование от 1 до 3, подобно тензорной свертке) алгебра бикватернионов ассоциативна:

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} \circ \mathbf{H} = (\mathbf{F} \circ \mathbf{G}) \circ \mathbf{H} = \mathbf{F} \circ (\mathbf{G} \circ \mathbf{H}), \quad (2)$$

но некоммутативна:

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle = \mathbf{F} \circ \mathbf{G} - \mathbf{G} \circ \mathbf{F} = 2[F, G]. \quad (3)$$

Из этого свойства коммутатора следует

тождество Якоби

$$\begin{aligned} & \langle \langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle, \mathbf{H} \rangle + \langle \langle \mathbf{H}, \mathbf{F} \rangle, \mathbf{G} \rangle + \langle \langle \mathbf{G}, \mathbf{H} \rangle, \mathbf{F} \rangle = \\ & = 4[[F, G], H] + 4[[H, F], G] + 4[[G, H], F] = \\ & = -4(F(H, G) - G(H, F) + H(G, F) - F(G, H) + G(F, H) - H(F, G)) = 0. \end{aligned}$$

Т.е. алгебра бикватернионов является *алгеброй Ли*.

Из (3) следует, что произведение двух бикватернионов коммутативно, если хотя бы один из них – скаляр, либо их векторные части параллельны.

Определения.

Бикватернион $\mathbf{F}^- = f - F$ называется *взаимным* для $\mathbf{F} = f + F$.

Бикватернион $\bar{\mathbf{F}} = \bar{f} + \bar{F}$, где черта обозначает соответствующие компонентам комплексно-сопряженные числа, называется *комплексно-сопряженным* \mathbf{F} .

Если $\mathbf{F} \circ \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}} \circ \mathbf{F} = 1$, то назовем \mathbf{F} *унитарным*.

Бикватернион $\mathbf{F}^* = \bar{f} - \bar{F}$ назовем *сопряженным* \mathbf{F} .

Если $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}$, бикватернион называется *самосопряженным*.

Самосопряженные бикватернионы имеют вид: $\mathbf{F} = f + iF$, где f и F — действительные.

Скалярным произведением бикватернионов $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ назовем билинейную операцию

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = f_1 f_2 + (F_1, F_2).$$

Нормой бикватерниона \mathbf{F} назовем неотрицательную скалярную величину

$$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{(\mathbf{F}, \bar{\mathbf{F}})} = \sqrt{f \cdot \bar{f} + (F, \bar{F})} = \sqrt{|f|^2 + \|F\|^2}. \quad (4)$$

Если \mathbf{F} — кватернион (действительный биватернион), то $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^-$ и

$$\|\mathbf{F}\|^2 = \mathbf{F}^* \circ \mathbf{F} = \mathbf{F} \circ \mathbf{F}^* \quad (5)$$

Псевдонормой бикватерниона \mathbf{F} назовем величину

$$\langle\langle \mathbf{F} \rangle\rangle = \sqrt{f \cdot \bar{f} - (F, \bar{F})} = \sqrt{|f|^2 - \|F\|^2}, \quad Re \langle \mathbf{F} \rangle \geq 0, \quad (6)$$

Легко видеть, если \mathbf{F} — самосопряженный, то $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^-$ и

$$\bar{\mathbf{F}} \circ \mathbf{F} = \mathbf{F} \circ \bar{\mathbf{F}} = \langle\langle \mathbf{F} \rangle\rangle^2. \quad (7)$$

Если $\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = 1$, то \mathbf{G} — правый обратный для \mathbf{F} и обозначается $\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1}$, соответственно \mathbf{F} — левый обратный для \mathbf{G} и обозначается ${}^{-1}\mathbf{G}$.

Простым вычислением доказываются равенства

$$(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})^* = \mathbf{G}^* \circ \mathbf{F}^*, \quad (\mathbf{F} \circ \mathbf{G})^{-1} = \mathbf{G}^{-1} \circ \mathbf{F}^{-1}. \quad (8)$$

Легко доказываются следующие лемма и теорема.

Лемма 1.1. Если $(\mathbf{F}, \mathbf{F}) \neq 0$, то существуют оба обратных бикватерниона и они равны:

$$\mathbf{F}^{-1} = {}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{F}^- / (\mathbf{F}, \mathbf{F}). \quad (9)$$

Если $(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = 0$, обратный бикватернион не существует.

Теорема 1.1. При известных \mathbf{F} и \mathbf{B} бикватернионные линейные (билинейные) уравнения вида

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = \mathbf{B} \quad \text{или} \quad \mathbf{G} \circ \mathbf{F} = \mathbf{B}$$

имеют единственное решение $\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{B}$ или $\mathbf{G} = \mathbf{B} \circ \mathbf{F}^{-1}$ соответственно, если $(\mathbf{F}, \mathbf{F}) \neq 0$.

Доказательство теоремы следует из леммы 1.1.

Если $(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = 0$, вопрос существования решения определяется рангом матрицы расширенной системы, который зависит от вида \mathbf{B} (см. [20]).

Введем бикватернион энергии-импульса

$$\Xi = W + iP = \frac{1}{2} \mathbf{F} \circ \mathbf{F}^* = (|f|^2 + \|F\|^2)/2 + i (\text{Im}(\bar{f}F) + [\text{Re} F, \text{Im} F]).$$

Здесь W и P — действительные, $\langle\langle \Xi \rangle\rangle^2 = W^2 - \|P\|^2 = \Xi \circ \Xi^-$.

В задачах математической физики, как покажем далее, он описывает плотность энергии-импульса скалярно-векторного поля на 4-х мерном пространстве Минковского.

2 Преобразование Лоренца, Пуанкаре на пространстве Минковского

Рассмотрим бикватернионы на пространстве Минковского $M = \{(\tau, x) : \tau \in R^1, x \in R^3\}$ и группы линейных преобразований на нем. Кватернизируем M , вводя комплексно-сопряженные бикватернионы:

$$\mathbf{Z} = \tau + ix, \quad \bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}^- = \tau - ix, \quad \tau \in R^1, x \in R^3.$$

Они самосопряженные: $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^*$, $\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{Z}}^*$, имеют одинаковые норму и псевдонорму:

$$\|\mathbf{Z}\|^2 = \|\bar{\mathbf{Z}}\|^2 = \tau^2 + \|x\|^2 = (\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}), \quad \langle\langle \mathbf{Z} \rangle\rangle^2 = \langle\langle \bar{\mathbf{Z}} \rangle\rangle^2 = \tau^2 - \|x\|^2 = \mathbf{Z} \circ \bar{\mathbf{Z}} \quad (10)$$

и

$$\mathbf{Z}^{-1} = \bar{\mathbf{Z}} / \langle\langle \mathbf{Z} \rangle\rangle^2, \quad \bar{\mathbf{Z}}^{-1} = \mathbf{Z} / \langle\langle \bar{\mathbf{Z}} \rangle\rangle^2.$$

Следовательно, на световом конусе ($|\tau| = \|x\|$) обратных для \mathbf{Z} , $\bar{\mathbf{Z}}$ не существует.

Ортогональные преобразования. Рассмотрим сопряженные кватернионы:

$$\mathbf{U}(\varphi, e) = \cos \varphi + e \sin \varphi, \quad \mathbf{U}^* = \mathbf{U}^- = \cos \varphi - e \sin \varphi, \quad \|e\| = 1, \quad \varphi \in R^1.$$

Легко видеть:

$$\|\mathbf{U}\| = \|\mathbf{U}^*\| = 1, \quad \mathbf{U} \circ \mathbf{U}^* = \mathbf{U}^- \circ \mathbf{U} = 1. \quad (11)$$

Лемма 2.1. *Сопряженные кватернионы $\mathbf{U}(\varphi, e), \mathbf{U}^*(\varphi, e)$, $\varphi \in R^1$, определяют группу линейных преобразований M , ортогональных на векторной части \mathbf{Z} :*

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{U} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{U}^*, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{U}^* \circ \mathbf{Z}' \circ \mathbf{U}.$$

Это преобразование есть вращение пространства R^3 вокруг вектора e на угол 2φ .

Доказательство. Вычисляя формулу леммы, получим сохранение скалярной части и указанное вращение векторной:

$$\tau' = \tau, \quad x' = e(e, x) + (x - e(e, x)) \cos 2\varphi + [e, x] \sin 2\varphi.$$

При этом, в силу (10),(11),

$$\langle\langle \mathbf{Z}' \rangle\rangle^2 = \mathbf{U} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{U}^* \circ \mathbf{U} \circ \bar{\mathbf{Z}} \circ \mathbf{U}^* = \langle\langle \mathbf{Z} \rangle\rangle^2.$$

Т.к. $\tau = \tau'$, норма вектора Z сохраняется: $\|Z\| = \|Z'\|$.

Рассмотрим суперпозицию двух ортогональных преобразований:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{U}_2 &= \mathbf{U}_3 = u_3 + U_3 = (\cos \varphi_1 + e_1 \sin \varphi_1) \circ (\cos \varphi_2 + e_2 \sin \varphi_2) = \\ &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - (e_1, e_2) \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + e_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 + e_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + [e_1, e_2] \sin \varphi_2 \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\mathbf{U}_3^{-1} = (\mathbf{U}_1 \circ \mathbf{U}_2)^{-1} = \mathbf{U}_2^{-1} \circ \mathbf{U}_1^{-1} = \mathbf{U}_2^- \circ \mathbf{U}_1^-, \quad \mathbf{U}_3^* = (\mathbf{U}_1 \circ \mathbf{U}_2)^* = \mathbf{U}_2^* \circ \mathbf{U}_1^* = \mathbf{U}_2^- \circ \mathbf{U}_1^- = \mathbf{U}_3^-,$$

получим:

$$\mathbf{U}_3 \circ \mathbf{U}_3^- = (\mathbf{U}_1 \circ \mathbf{U}_2) \circ (\mathbf{U}_1 \circ \mathbf{U}_2)^- = \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{U}_2 \circ \mathbf{U}_2^- \circ \mathbf{U}_1^- = 1$$

Т.е. \mathbf{U}_3 тоже является ортогональным преобразованием:

$$\mathbf{U}_3 = \cos \varphi_3 + e_3 \sin \varphi_3, \quad \varphi_3 = \arcc(\cos u_3), \quad e_3 = \frac{U_3}{\|U_3\|}.$$

Преобразования Лоренца. Рассмотрим взаимные самосопряженные бикватернионы

$$\mathbf{L}(\theta, e) = ch\theta + ie sh\theta, \quad \mathbf{L}^- = ch\theta - ie sh\theta, \quad \theta \in R^1, \quad \|e\| = 1$$

(здесь используются гиперболический синус и косинус).

Легко видеть, что они унитарные:

$$\mathbf{L} \circ \mathbf{L}^- = ch\theta^2 - sh\theta^2 = 1. \quad (12)$$

Прямым вычислением доказываются следующие леммы [20].

Лемма 2.2. Преобразование Лоренца имеет следующее бикватернионное представление:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{L} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{L}, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{L}^- \circ \mathbf{Z}' \circ \mathbf{L}^-, \quad \langle\langle \mathbf{Z}' \rangle\rangle^2 = \langle\langle \mathbf{Z} \rangle\rangle^2. \quad (13)$$

Легко видеть, что псевдонорма сохраняется, в силу ассоциативности и унитарности (12):

$$\langle\langle \mathbf{Z}' \rangle\rangle^2 = \mathbf{L} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{L} \circ \mathbf{L}^- \circ \bar{\mathbf{Z}} \circ \mathbf{L}^- = \langle\langle \mathbf{Z} \rangle\rangle^2.$$

Если вести обозначения:

$$ch2\theta = (1 - v^2)^{-1/2}, \quad sh2\theta = v(1 - v^2)^{-1/2}, \quad |v| < 1,$$

то, вычисляя, получим, что скалярная и векторная часть \mathbf{Z}' и \mathbf{Z} имеют вид известных релятивистских формул [2]:

$$\begin{aligned} \tau' &= \frac{\tau + v(e, x)}{\sqrt{1 - v^2}}, & x' &= (x - e(e, x)) + e \frac{(e, x) + v\tau}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ \tau &= \frac{\tau' - v(e, x')}{\sqrt{1 - v^2}}, & x &= (x' - e(e, x')) + e \frac{(e, x') - v\tau'}{\sqrt{1 - v^2}}, \end{aligned}$$

что соответствует движению системы координат $\{X_1, X_2, X_3\}$ в направлении вектора e со скоростью v .

Суперпозиция двух Лоренц-преобразований с одинаковым e обладает групповыми свойствами:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{L}_2 &= \mathbf{L}_3 = l_3 + L_3 = (ch\varphi_1 + iesh\theta_1) \circ (ch\theta_2 + iesh\theta_2) = \\ &= (ch\theta_1 ch\theta_2 + sh\theta_1 sh\theta_2) + ie(sh\theta_2 ch\theta_1 + sh\theta_1 ch\theta_2) = ch(\theta_1 + \theta_2) + ie sh(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

Однако суперпозиция двух Лоренц-преобразований с разными (непараллельными) e преобразованием Лоренца не является:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{L}_2 &= \mathbf{L}_3 = l_3 + L_3 = (ch\theta_1 + ie_1 sh\theta_1) \circ (ch\theta_2 + ie_2 sh\theta_2) = \\ &= (ch\theta_1 ch\theta_2 + (e_1, e_2) sh\theta_1 sh\theta_2) + i(e_2 sh\theta_2 ch\theta_1 + e_1 sh\theta_1 ch\theta_2) - [e_1, e_2] sh\theta_2 sh\theta_1 \end{aligned}$$

Как видим, полученный бикватернион имеет действительное слагаемое в векторной части.

Преобразования Пуанкаре. Заметим, что

$$\mathbf{L}(\theta, e) = \mathbf{U}(-i\theta, e).$$

Используя суперпозицию этих двух преобразований, получим общий вид преобразования, которое назовем *преобразованием Пуанкаре*.

Определение. Преобразование Пуанкаре на M — это линейное преобразование вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}' &= \mathbf{P} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{P}^*, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{P}^- \circ \mathbf{Z}' \circ \mathbf{P}^{*-}, \\ \mathbf{P} &= \mathbf{U} \circ \mathbf{L} = \cos(\varphi + i\theta) + e\sin(\varphi + i\theta), \\ \mathbf{P}^* &= \mathbf{L}^* \circ \mathbf{U}^* = \cos(\varphi - i\theta) - e\sin(\varphi - i\theta), \end{aligned} \quad (14)$$

которое сохраняет псевдонорму:

$$\langle\langle \mathbf{Z} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{Z}' \rangle\rangle.$$

Последнее в силу $\mathbf{P} \circ \mathbf{P}^- = \mathbf{P}^* \circ \mathbf{P}^{*-} = 1$.

При преобразованиях Лоренца-Пуанкаре световой конус $\tau = \|x\|$ переходит в световой конус: $\langle\langle \mathbf{Z} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{Z}^- \rangle\rangle = 0$.

Суперпозиция преобразований Пуанкаре с одинаковым e также обладает групповыми свойствами, что легко доказывается на основе ассоциативности и коммутативности произведения бикватернионов с параллельными векторами:

$$\mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 = \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{U}_2 = \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{U}_2 = \mathbf{L}_3 \circ \mathbf{U}_3 = \mathbf{P}_3.$$

Суперпозиция двух преобразований Пуанкаре с разными e таким свойством не обладает.

3 Пространство обобщенных бикватернионов $\mathbf{V}'(M)$

Рассмотрим на M функциональное пространство бикватернионов:

$$\mathbf{V}(M) = \{\mathbf{F} = f(\tau, x) + F(\tau, x)\},$$

где f — комплекснозначная функция, а F — трехмерная вектор-функция с комплексными компонентами F_j , $j = 1, 2, 3$.

Частную производную бикватерниона по переменной τ или x_j будем обозначать:

$$\partial_\tau \mathbf{F} = \partial_\tau f + \partial_\tau F, \quad \partial_j \mathbf{F} = \partial_j f + \partial_j F.$$

Введем два пространства бикватернионов, *основное* —

$$\mathbf{V}(M) = \{\Phi = \varphi(\tau, x) + \Phi(\tau, x)\}, \quad \varphi \in D(R^4), \quad \Phi_j \in D(R^4), \quad j = 1, 2, 3,$$

где $D(R^4)$ — пространство финитных бесконечно-дифференцируемых функций на R^4 [21], и сопряженное пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathbf{V}(M)$ — $\mathbf{V}'(M) = \{\hat{\mathbf{F}} = \hat{f} + \hat{F}\}$:

$$(\hat{\mathbf{F}}, \Phi) = (\hat{f}, \varphi) + \sum_{j=1}^3 (\hat{F}_j, \Phi_j), \quad \forall \Phi \in \mathbf{V}(M),$$

которое назовем *пространством обобщенных бикватернионов* (ОБк).

Любому регулярному бикватерниону \mathbf{F} соответствует функционал (будем помечать его шапочкой), который можно представить в интегральном виде:

$$(\hat{\mathbf{F}}, \Phi) = \int_{R^4} (\mathbf{F}(\tau, x), \Phi(\tau, x)) d\tau dx_1 dx_2 dx_3, \quad \forall \Phi \in \mathbf{V}(M).$$

Если действие ОБк нельзя представить в таком интегральном виде, будем называть его *сингулярным*.

Сингулярные функции из $D'(R^4)$ определяют и соответствующие им скалярные ОБк с нулевой векторной частью. Используя их можно строить и более сложные ОБк. В частности, в задачах математической физики часто используются *простые слои*. Их обобщением на $\hat{B}(M)$ являются ОБк $\mathbf{F}\delta_S$, которые определяют функционалы вида:

$$(\mathbf{F}\delta_S, \Phi) = \int_S (\mathbf{F}(\tau, x), \Phi(\tau, x)) dS, \quad \forall \Phi \in \mathbf{V}(M).$$

Здесь интеграл берется по поверхности $S \subset R^4$ размерность, которой может быть равной 1,2,3. Определенный и интегрируемый на S бикватернион \mathbf{F} назовем, как принято [21], *плотностью* простого слоя.

Используя определение производной ОБ:

$$(\partial_j \hat{\mathbf{F}}, \Phi) = -(\hat{\mathbf{F}}, \partial_j \Phi) \quad \text{для } \forall \Phi \in \mathbf{V}(M)$$

можно строить частные производные любых порядков, аналогично, как в [4].

Определение. *Обобщенным решением* дифференциального уравнения

$$D(\partial_\tau, \partial_x)\mathbf{F} = \mathbf{G},$$

где D – дифференциальный оператор, будем называть ОБк $\hat{\mathbf{F}}$, удовлетворяющий равенству:

$$(D\hat{\mathbf{F}}, \Phi) = (\hat{\mathbf{G}}, \Phi) \quad \text{для } \forall \Phi \in \mathbf{V}(M).$$

Определим свертку двух бикватернионов в виде:

$$\mathbf{A}(\tau, x) * \mathbf{B}(\tau, x) = a * b - \sum_{i,j,l=1}^3 (A_j * B_j) + (a * A_j) e_j + (b * B_j) e_j + \varepsilon_{ijl} (A_i * B_j) e_l,$$

где в скобках стоят обычные свертки обобщенных функций [21]. Легко видеть, что здесь объединены операции бикватернионного умножения и свертка.

В силу свойства дифференцирования свертки обобщенных функций,

$$\partial_j(\mathbf{A} * \mathbf{B}) = (\partial_j \mathbf{A}) * \mathbf{B} = \mathbf{A} * \partial_j \mathbf{B}, \quad \partial_j = \partial_\tau, \partial_1, \partial_2, \partial_3. \quad (15)$$

Определение. Обобщенным преобразованием Фурье $\hat{\mathbf{G}}$ называется ОБк $\tilde{\mathbf{G}}$, удовлетворяющий равенству:

$$(\hat{\mathbf{G}}, \Phi) = (\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\Phi}) \quad \text{для } \forall \Phi \in \mathbf{V}(M).$$

Здесь $\tilde{\Phi}$ – классическое преобразование Фурье Φ :

$$\mathbf{F}[\Phi(\tau, x)] = \tilde{\Phi}(\omega, \xi) = \int_{R^4} \Phi(\tau, x) \exp(i\tau\omega + i(\xi, x)) d\tau dx_1 dx_2 dx_3, \quad \Phi \in \mathbf{V}(M),$$

которое всегда существует в силу свойств $\mathbf{V}(M)$.

Аналогично, как в теории обобщенных функций, можно показать, что если бикватернион регулярен и существует классическое преобразование Фурье, то оно является и обобщенным. Также легко показать, основываясь на свойствах свертки обобщенных функций [21], что

$$\mathbf{F}[\mathbf{A}(\tau, x) * \mathbf{B}(\tau, x)] = \tilde{\mathbf{A}}(\omega, \xi) \circ \tilde{\mathbf{B}}(\omega, \xi). \quad (16)$$

Эти свойства свертки ((15),(16)) очень полезны при решении дифференциальных бикватернионных уравнений.

4 Биградиенты и преобразование Лоренца

Рассмотрим частные случаи дифференциальных операторов, характерные для задач математической физики, но будем рассматривать их на $V'(M)$.

Введем бикватернионные дифференциальные операторы – *взаимные комплексные градиенты*:

$$\nabla^+ = \partial_\tau + i\nabla, \quad \nabla^- = \partial_\tau - i\nabla, \quad (18)$$

где $\nabla = grad = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$. Коротко будем называть их *биградиентами*.

В смысле выше данных определений их символы комплексно-сопряженные и само-сопряженные: $(\nabla^-)^* = \nabla^-$, $(\nabla^+)^* = \nabla^+$. Их действие на K определим как в алгебре бикватернионов: (соответственно знакам)

$$\nabla^\pm \mathbf{F} = (\partial_\tau \pm i\nabla) \circ (f + F) = (\partial_\tau f \mp i(\nabla, F)) \pm \partial_\tau F \pm i\nabla f \pm i[\nabla, F]$$

или в традиционной записи –

$$\nabla^\pm \mathbf{F} = (\partial_\tau f \mp i \operatorname{div} F) \pm \partial_\tau F \pm i \operatorname{grad} f \pm i \operatorname{rot} F.$$

Легко проверить, что волновой оператор \square представим в виде суперпозиции взаимных биградиентов:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta = \nabla^- \circ \nabla^+ = \nabla^+ \circ \nabla^-, \quad (19)$$

где Δ - трехмерный оператор Лапласа.

Используя это свойство, можно строить частные решения дифференциальных бикватернионных уравнений на $V'(M)$ вида:

$$\nabla^\pm \mathbf{K}(\tau, x) = \mathbf{G}(\tau, x), \quad (20)$$

которое будем называть *биволновым уравнением*. А решения этого уравнения будем называть *\pm бипотенциалами \mathbf{G}* .

При преобразованиях Пуанкаре биградиенты и биволновые уравнения преобразуются в соответствии со следующими утверждениями [20].

Теорема 4.1. *При преобразовании Пуанкаре $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}' = \mathbf{P} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{P}^*$ биградиенты $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}'$:*

$$\mathbf{D}' = \mathbf{P}^- \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{P}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{P} \circ \mathbf{D}' \circ \mathbf{P}^-,$$

($\mathbf{D} = \nabla^+$ либо $\mathbf{D} = \nabla^-$). При этом $\mathbf{D}' = \left(\frac{\partial}{\partial \tau'} \pm i\nabla' \right)$ сохраняют вид, а биволновое уравнение преобразуется в биволновое

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau'} \pm i\nabla' \right) \mathbf{K}' = \mathbf{G}',$$

(релятивистские формулы)

$$\mathbf{K}' = \mathbf{P}^- \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{P}, \quad \mathbf{G}' = \mathbf{P}^- \circ \mathbf{G} \circ \mathbf{P}.$$

Действительно, легко видеть,

$$\mathbf{D}'\mathbf{K}' = (\mathbf{P}^- \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{P}) (\mathbf{P}^- \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{P}) = \mathbf{P}^- \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{P} = \mathbf{P}^- \circ \mathbf{G} \circ \mathbf{P} = \mathbf{G}'.$$

5 Обобщенные решения биволнового уравнения. Ударные волны

Перейдем к решению биволнового уравнения.

Теорема 5.1. Любое обобщенное решение биволнового уравнения (20) можно представить в виде:

$$\hat{\mathbf{K}} = \nabla^\mp \hat{\mathbf{G}} * \psi + \mathbf{K}_0. \quad (21)$$

где $\psi(\tau, x)$ – простой слой на световом конусе $\tau = \|x\|$:

$$\psi = (4\pi \|x\|)^{-1} \delta(\tau - \|x\|), \quad (22)$$

фундаментальное решение волнового уравнения:

$$\square \psi = \delta(\tau) \delta(x). \quad (23)$$

$\mathbf{K}_0(\tau, x)$ – решение однородного биволнового уравнения, которое имеет вид:

$$\mathbf{K}_0 = \nabla^\mp \{ \mathbf{G}_0 * \psi_0(\tau, x) \}, \quad (25)$$

где $\psi_0(\tau, x)$ – решение однородного волнового уравнения:

$$\square \psi_0 = 0, \quad (26)$$

$$\psi_0(\tau, x) = \int_{R^3} \phi(\xi) \exp(i((\xi, x) \pm \|\xi\| \tau)) dV(\xi), \quad \forall \phi(\xi) \in L_1(R^3), \quad (27)$$

а $\mathbf{G}_0(\tau, x)$ – любой бикватернион, допускающий свертку с ψ_0 , либо представимо как сумма решений подобного вида.

Доказательство. Действительно, используя ассоциативность и свойство дифференцирования свертки (15), для первого слагаемого в (21) получим

$$\nabla^\pm \hat{\mathbf{K}} = \nabla^\pm \nabla^\mp (\hat{\mathbf{G}} * \psi) = \square (\hat{\mathbf{G}} * \psi) = \hat{\mathbf{G}} * \square \psi = \hat{\mathbf{G}} * \delta(\tau) \delta(x) = \hat{\mathbf{G}}.$$

Здесь использовали (23) и свойства свертки с сингулярной δ -функцией [21].

Аналогично, для второго слагаемого получим:

$$\nabla^\pm \mathbf{K}_0 = \nabla^\pm \nabla^\mp \{ \mathbf{C}_0 * \psi_0(\tau, x) \} = \square \{ \mathbf{C}_0 * \psi_0(\tau, x) \} = \{ \square \psi_0(\tau, x) \} * \mathbf{C}_0 = 0.$$

Обратно, если \mathbf{K}_0 – решение однородного биволнового уравнения, тогда каждая компонента является решением однородного уравнения (26). Поэтому его можно представить в виде (25) или разложить в сумму 4-х таких бипотенциалов для каждой компоненты с разными решениями однородного волнового уравнения.

Вид решений волнового уравнения (27), в том числе фундаментального (22), хорошо известен [18, 21]. В силу линейности, их сумма в (21) является решением биволнового уравнения (20).

Следует заметить, что свойство дифференцирования свертки (15) позволяет вычислять ее по-разному, в зависимости от свойств дифференцируемости \mathbf{G} , что следует учитывать при конкретных вычислениях. Так, полагая $\mathbf{G} = \delta(\tau) \delta(x)$, получим

Фундаментальное решение биволнового уравнения

$$\Psi(\tau, x) = \partial_\tau \psi \pm i \operatorname{grad} \psi,$$

которое позволяет строить решения биволнового уравнения в виде свертки:

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{G}} * \Psi + \mathbf{K}_0$$

для любой правой части (20), допускающей такую свертку.

Ударные волны. Рассмотрим обобщенные решения однородного биволнового уравнения. Поскольку оно эквивалентно системе гиперболических уравнений, следовательно, существуют разрывные на характеристических поверхностях (S) решения этой системы, на которых, как легко видеть,

$$n_\tau^2 = \|n\|^2 \quad (28)$$

где (n_τ, n_1, n_2, n_3) — нормаль к S в M, $n = (n_1, n_2, n_3)$, $\|n\|^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$. Это конус характеристических нормалей волнового уравнения.

Определим условия, которым должны удовлетворять скачки решений на таких поверхностях, чтобы они были обобщенными решениями (23).

Пусть S — такая поверхность в M. Предположим, что вне ее они непрерывны и дифференцируемы. Используя правило обобщенного дифференцирования разрывных функций [21], получим обобщенные производные бикватернионов:

$$\partial_\tau \hat{\mathbf{F}} = \partial_\tau \mathbf{F} + n_\tau [\mathbf{F}]_S \delta_S(\tau, x), \quad \partial_i \hat{\mathbf{F}} = \partial_i \mathbf{F} + n_i [\mathbf{F}]_S \delta_S(\tau, x),$$

где первое слагаемое — обычная производная, а второе — простой слой на S, (n_τ, n_1, n_2, n_3) — компоненты единичной нормали к S в M: $n_\tau^2 + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$; $[\mathbf{F}]_S$ — скачок на S:

$$[\mathbf{F}(\tau, x)]_S = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \{\mathbf{F}(\tau + \varepsilon n_\tau, x + \varepsilon n) - \mathbf{F}(\tau - \varepsilon n_\tau, x - \varepsilon n)\}, \quad (\tau, x) \in S.$$

В силу этого,

$$\begin{aligned} \nabla^+ \hat{\mathbf{K}} &= \nabla^+ \mathbf{K} + \{n_\tau [k]_S - i(n, [K]_S) + n_\tau [K]_S + in[k]_S + i[n, [K]_S]\} \delta_S(\tau, x) = \\ &= \nabla^+ \mathbf{K} + (n_\tau + in) \circ [K]_S \delta_S(\tau, x) = 0 \end{aligned}$$

Поскольку $\nabla^+ \mathbf{K} = 0$, отсюда следуют условия на скачки:

$$n_\tau [k]_S - i(n, [K]_S) = 0, \quad n_\tau [K]_S + in[k]_S + i[n, [K]_S] = 0. \quad (29)$$

Характеристической поверхности S соответствует подвижный волновой фронт S_t в R^3 , с нормалью (n_1, n_2, n_3) , который распространяется со скоростью

$$c = -\frac{n_\tau}{\|n\|} = 1. \quad (30)$$

Последнее — в силу (28). Такие решения называются *ударными волнами*.

Очевидно, при регулярной правой части биволнового уравнения получим те же соотношения. Сформулируем этот результат в виде полезной теоремы.

Теорема 5.2. *Регулярные разрывные решения биволнового уравнения удовлетворяют следующим условиям на фронтах ударных волн:*

$$[\mathbf{K}]_S = im \circ [\mathbf{K}]_S,$$

где $m = n/\|n\|$ — единичный волновой вектор, направленный в сторону распространения волны в R^3 .

Доказательство. Если поделить (29) на $\|n\|$, с учетом (30), получим условия на фронтах ударных волн:

$$[k]_S = -i(\mathbf{m}, [K]_S), \quad [K]_S = i\mathbf{m}[k]_S + i[\mathbf{m}, [K]_S] \quad (31)$$

Бикватернионная запись этих уравнений дана в формуле теоремы.

Первое уравнение (31) описывает продольные волны. Если подставить его во второе уравнение, получим соотношение для касательной составляющей вектора K к фронту волны:

$$[K]_S - \mathbf{m}(\mathbf{m}, [K]_S) = i[\mathbf{m}, [K]_S],$$

которая связывает скачки действительной и мнимой векторной части бикватерниона друг через друга.

Задача Коши для биволнового уравнения

Рассмотрим задачу Коши для биволнового уравнения. Пусть даны *начальные условия*:

$$\mathbf{K}(0, x) = \mathbf{K}^0(x), \quad \mathbf{K}^0(x) \in V'(R^3)$$

Требуется построить решение уравнения (20), удовлетворяющее этим данным.

Используем для этого метод обобщенных функций. Введем регулярные обобщенные функции вида $\hat{\mathbf{G}} = H(\tau)\mathbf{G}(\tau, x)$, где $H(\tau)$ — функция Хевисайда. Предположим, что \mathbf{K}^0 — регулярный БК. Используя свойство дифференцирования регулярных обобщенных функций, получим

$$\nabla^\pm \hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{G}} + \delta(\tau)\mathbf{K}^0(x).$$

Следовательно, обобщенное решение имеет вид:

$$\mathbf{H}(\tau)\mathbf{K}(\tau, x) = \nabla^\mp \{H(\tau)\mathbf{G} * \psi\} + \mathbf{G}(0, x) * \psi + \nabla^\mp \{\mathbf{K}^0(x) * \psi\} \quad (32)$$

(здесь знак $*_x$ означает, что свертка берется только по x).

Для регулярной правой части биволнового уравнения ее интегральная запись легко выписывается, с учетом вида полной и неполной свертки с ψ . А именно,

$$4\pi \hat{\mathbf{K}}(\tau, x) = -\nabla^\mp \left\{ \int_{r \leq \tau} \mathbf{G}(\tau - r, y) \frac{dV(y)}{r} + \tau^{-1} \int_{r=\tau} \mathbf{K}^0(y) dS(y) \right\} - \tau^{-1} \int_{r=\tau} \mathbf{G}(0, y) dS(y).$$

Здесь и далее $r = \|y - x\|$, $dV(y) = dy_1 dy_2 dy_3$, $dS(y)$ — дифференциал площади сферы $r = \tau$.

В случае сингулярных начальных данных решение дает формулу (32), где следует брать свертки согласно правилам теории обобщенных функций.

Эта формула является обобщением известной формулы Кирхгофа для решения задачи Коши для волнового уравнения [21]. Поэтому назовем ее *обобщенной формулой Кирхгофа* для биволнового уравнения.

6 Бикватернионная форма уравнений Максвелла и их модификация

В качестве примера приложения изложенной теории биволнового уравнения рассмотрим уравнения Максвелла (УМ) для электромагнитного (ЭМ) поля.

Система уравнения Максвелла, состоящая из 8 уравнений (2-х векторных и 2-х скалярных), в пространстве бикватернионов имеет вид биволнового уравнения [4,24]:

$$\nabla^+ \mathbf{A} + \Theta = 0. \quad (33)$$

Бикватернионы *напряженности* \mathbf{A} и *заряда-тока* Θ ЭМ-поля определены равенствами:

$$\mathbf{A} = 0 + A = \sqrt{\varepsilon} E(\tau, x) + i\sqrt{\mu} H(\tau, x), \quad \Theta = i\rho(\tau, x) + J(\tau, x),$$

где E — напряженность электрического поля, H — напряженность магнитного поля; *плотность* ρ и *импульс* J выражаются через плотности электрического заряда ρ^E и электрического тока j^E формулами:

$$\rho = \rho^E / \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon} \operatorname{div} E, \quad J = \sqrt{\mu} j^E,$$

ε, μ -константы электрической проводимости и магнитной проницаемости среды; $\tau = ct$, t -время, $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ — скорость света.

Расписывая скалярную и векторную часть этого уравнения (33), получим известную комплексную форму уравнений Максвелла :

$$\rho = \operatorname{div} A, \quad \partial_\tau A + i \operatorname{rot} A + J = 0,$$

которую называют *гамильтоновой формой* УМ [22,25]. Выписывая действительную и мнимую части этих уравнений получим классическую форму уравнений Максвелла из 2-х векторных и 2-х скалярных уравнений.

Если взять взаимный биградиент в бикватернионной форме УМ (33), получим в скалярной части закон сохранения заряда и волновое уравнение для напряженности ЭМ-поля в векторной:

$$\partial_\tau \rho + \operatorname{div} J = 0, \quad \square A = i \operatorname{rot} J - \operatorname{grad} \rho - \partial_\tau J.$$

Вычисляя бикватернион *энергии-импульса* \mathbf{A} -поля:

$$\Xi = W + iP = \frac{1}{2} \mathbf{A} \circ \mathbf{A}^*,$$

получим известные [26] плотность энергии ЭМ-поля —

$$W = 0,5 \|A\|^2 = \frac{1}{2} (\varepsilon \|E\|^2 + \mu \|H\|^2),$$

и вектор Умова-Пойнтинга —

$$P = \frac{1}{2} [\bar{A}, A] = c^{-1} E \times H.$$

Преобразования Пуанкаре для уравнения Максвелла имеют вид:

$$\nabla^+ \mathbf{A}' = \Theta', \quad \text{где } \mathbf{A}' = \mathbf{P}^- \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{P}, \quad \Theta' = \mathbf{P}^- \circ \Theta \circ \mathbf{P}.$$

Ударные ЭМ-волны. Из теоремы 4.1 получим условие на фронтах ударных ЭМ-волн:

$$[A]_S = i\mathbf{m} \circ [A]_S$$

где \mathbf{m} — единичный волновой вектор, направленный в сторону распространения волны в R^3 . Для скалярной и векторной частей в этом случае оно имеет вид:

$$(\mathbf{m}, [A]_S) = 0, \quad [A]_S = i[\mathbf{m}, [A]_S]. \quad (34)$$

Первое условие означает, что ударные ЭМ-волны являются *поперечными*. Расписывая второе условие для действительной и мнимой части, получим связь скачка электрического поля со скачком магнитного:

$$\sqrt{\varepsilon} [E]_S = \sqrt{\mu} [[H]_S, \mathbf{m}], \quad \sqrt{\mu} [H]_S = \sqrt{\varepsilon} [\mathbf{m}, [E]_S].$$

или, используя вектора электрического смещения и магнитной индукции

$$D = \varepsilon E, \quad B = \mu H,$$

сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 6.1. *На фронтах ударных электромагнитных волн выполняются следующие условия на скачки напряженности электрического и магнитного поля:*

$$[E]_S = c [[B]_S, \mathbf{m}], \quad [H]_S = c [\mathbf{m}, [D]_S],$$

что эквивалентно условиям:

$$[D]_S = c^{-1} [[H]_S, \mathbf{m}], \quad [B]_S = c^{-1} [\mathbf{m}, [E]_S],$$

где $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Задача Коши. При известных зарядах-токах и начальных данных из класса регулярных функций:

$$\mathbf{A}(0, x) = \mathbf{A}^0(x).$$

решение задачи Коши для уравнений Максвелла дается обобщенной формулой Кирхгофа:

$$4\pi \mathbf{A} = \nabla^{-} \left\{ \int_{r \leq \tau} \Theta(\tau - r, y) \frac{dV(y)}{r} + \tau^{-1} \int_{r=\tau} \mathbf{A}^0(y) dS(y) \right\} + \tau^{-1} \int_{r=\tau} \Theta(0, y) dS(y).$$

Отсюда нетрудно записать интегральные представления для векторов напряженности ЭМ-поля E, H , которые будут иметь довольно громоздкий вид.

Модифицированные уравнения Максвелла. В системе УМ (34) векторное уравнение определяет токи, скалярное уравнение является определением заряда, а закон сохранения заряда является следствием этих двух уравнений. Его получаем из этих уравнений, взяв дивергенцию от векторного с учетом определения заряда.

Заметим, что в биградиенте напряженности ЭМ-поля скалярная часть равна нулю. Следствием этого, как выше показано, тоже является закон сохранения заряда. Т.е. система уравнений Максвелла описывает замкнутые системы электрических зарядов и токов и порождаемых ими ЭМ-поля.

Для открытых систем, как показано в [16], уравнения Максвелла необходимо модифицировать введением скалярного поля $a(\tau, x)$ в бикватернион напряженности

$$\mathbf{A} = a(\tau, x) + A(\tau, x).$$

Последовательный бикватернионный подход, как здесь показано, приводит к модификации системы уравнений Максвелла, которая, как следует из (33), имеет вид: (модифицированные уравнения Максвелла)

$$\partial_\tau A + i \operatorname{rot} A + J = \operatorname{grad} a, \quad \rho = \operatorname{div} A - \partial_\tau a. \quad (35)$$

Если заряды ρ и токи J известны, эта система уравнений для определения a и A замкнута.

Скалярное поле $a(\tau, x)$ можно назвать полем *сопротивления-поглощения*. Ранее в работе автора [16] этот вопрос подробно рассмотрен для одной бикватернионной модели взаимодействия электро-гравимагнитных полей, зарядов и токов с использованием полевых аналогов законов Ньютона.

Замечание. Бикватернионная форма уравнения Максвелла (33) имеет глубокий физический смысл. Из нее следует, что *напряженность ЭМ-поля является бипотенциалом своего заряда-тока, а заряды-токи являются физическим проявлением биградиента ЭМ-поля.*

7 Стационарные биградиенты и уравнения колебаний

Рассмотрим решения биволнового уравнения (20), описывающие стационарные колебания с частотой $\omega > 0$:

$$\mathbf{K}(\tau, x) = \mathbf{K}(x) \exp(-i\omega\tau).$$

Аналогичный вид имеет правая часть этого уравнения.

В этом случае уравнение для комплексной амплитуды имеет вид:

$$\nabla_\omega^\pm \hat{\mathbf{K}}(x) = \omega k(x) \mp \operatorname{div} K(x) \pm \operatorname{grad} k(x) + \omega K(x) \pm \operatorname{rot} K(x) = i \hat{\mathbf{G}}(x), \quad (36)$$

где введены *взаимные ω -градиенты* $\nabla_\omega^\pm = (\omega \pm \nabla)$.

Взяв от этого уравнения взаимный ω -градиент, получим неоднородное уравнение Гельмгольца для комплексных амплитуд:

$$\Delta \hat{\mathbf{K}}(x) + \omega^2 \hat{\mathbf{K}}(x) = i \nabla_\omega^\mp \hat{\mathbf{G}}(x).$$

Решение этого уравнения, в силу свойства дифференцирования свертки, имеет вид:

$$\hat{\mathbf{K}} = i \nabla_\omega^\mp \{ \psi_\omega * \hat{\mathbf{G}} \} = i \Psi_\omega * \hat{\mathbf{G}}, \quad (37)$$

где $\Psi_\omega(x)$ - фундаментальное решение уравнения (36):

$$\Psi_\omega(x) = \omega \psi_\omega(x) \pm \operatorname{grad} \psi_\omega(x),$$

а ψ_ω — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца:

$$(\nabla + \omega^2) \psi_\omega = \delta(x). \quad (38)$$

Таковыми, в частности, являются функции

$$-(4\pi \|x\|)^{-1} \exp(\pm i\omega \|x\|),$$

где выбор знака в правой части зависит от выбора условий излучения на бесконечности. Так, если решение должно удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности [21], то

$$\psi_\omega(x) = -\frac{e^{i\omega \|x\|}}{4\pi \|x\|}.$$

Добавляя к решению (37) решение однородного уравнения:

$$\nabla_{\omega}^{\pm} \hat{\mathbf{K}}(x) = \mathbf{0}, \quad (39)$$

получим общее решение уравнения для комплексных амплитуд (36).

Формулу (37) можно использовать для любых обобщенных функций, допускающих свертку с $\psi_{\omega}(x)$. Для регулярных $\mathbf{G}(x)$ ее можно записать в интегральном виде.

Теорема 7.1. Если при $x \rightarrow \infty$ $\|\mathbf{G}(x)\| = O(\|x\|^{-(2+\varepsilon)})$, $\varepsilon > 0$, то общее решение уравнения (36) имеет вид:

$$-4i\pi \hat{\mathbf{K}}(x) = \operatorname{div} \int_{R^3} G(y) \frac{e^{i\omega r}}{r} dV(y) - \operatorname{grad} \int_{R^3} g(y) \frac{e^{i\omega r}}{r} dV(y) - \operatorname{rot} \int_{R^3} G(y) \frac{e^{i\omega r}}{r} dV(y) + \mathbf{K}_0(x).$$

Если $\mathbf{G}(x)$ — дифференцируемый бикватернион и его производные удовлетворяют условию: $\|\partial_j \mathbf{G}(x)\| = O(\|x\|^{-(2+\varepsilon)})$ ($j = \tau, x_1, x_2, x_3$), то

$$-4i\pi \mathbf{K}(x) = \int_{R^3} \left\{ \operatorname{div} G(y) - \operatorname{grad} g(y) - \operatorname{rot} G(y) \right\} \frac{\exp(i\omega r)}{r} dV(y) + \mathbf{K}_0(x).$$

Здесь $\mathbf{K}_0(x)$ — решение однородного уравнения (39), $r = \|x - y\|$.

Доказательство следует из представления свертки регулярных функций. Сходимость интегралов следует из асимптотических свойств подынтегральных функций. Введение производной под знак интегралов возможно при заданных условиях на правую часть.

В этом случае решение является классическим в силу леммы Дюбуа-Реймона для регулярных обобщенных функций [21].

Теорема 7.2. Решение однородного уравнения (39) представимо в виде :

$$\mathbf{K}_0 = \nabla_{\omega}^{\mp} \{ \psi_{\omega}^0 * \mathbf{C} \},$$

где ψ_{ω}^0 — решение уравнения Гельмгольца: $(\Delta + \omega^2)\psi_{\omega}^0 = 0$,

$$\psi_{\omega}^0(x) = \int_{\|\mathbf{e}\|=1} p(\mathbf{e}) e^{-i\omega(\mathbf{e},x)} dS(\mathbf{e}), \quad (40)$$

$p(\mathbf{e})$ — \forall функция, интегрируемая на единичной сфере, $\mathbf{C}(x)$ — \forall любой бикватернион, допускающий эту свертку.

Доказательство. Легко видеть,

$$\nabla_{\omega}^{\pm} \mathbf{K}_0 = \nabla_{\omega}^{\pm} \nabla_{\omega}^{\mp} \{ \mathbf{C} * \psi_{\omega}^0(\omega, x) \} = (\Delta + \omega^2) \{ \mathbf{C} * \psi_{\omega}^0 \} = \mathbf{C} * (\Delta + \omega^2) \psi_{\omega}^0 = 0.$$

Определим $\psi_{\omega}^0(x)$. Используя преобразования Фурье по x из уравнения Гельмгольца получим :

$$\begin{aligned} (\|\xi\|^2 - \omega^2)F[\psi_{\omega}^0(x)] = 0 &\Rightarrow F[\psi_{\omega}^0(x)] = g(\xi)\delta(\|\xi\|^2 - \omega^2), \forall g(\xi) \Rightarrow \\ \psi_{\omega}^0(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\|\xi\|=\omega} g(\xi) e^{-i(\xi,x)} dS(\xi) &= \frac{\omega^2}{(2\pi)^3} \int_{\|\mathbf{e}\|=1} g(\omega\mathbf{e}) e^{-i\omega(\mathbf{e},x)} dS(\mathbf{e}). \end{aligned}$$

Откуда, в силу произвольности $g(\xi)$, получим (40).

Решения уравнения Гельмгольца хорошо изучены в теории специальных (бесселевых) функций, которые можно получить из представления (40) для определенных видов $p(\mathbf{e})$.

8 Градиентные бикватернионные уравнения и потенциалы векторных полей

В случае, когда правая часть биволнового уравнения (20) не зависит от времени, решение тоже, тогда уравнение преобразуется к виду *градиентного*:

$$\nabla \hat{\mathbf{K}}(x) = -\operatorname{div} K(x) + \operatorname{grad} k(x) + \operatorname{rot} K(x) = \hat{\mathbf{G}}(x). \quad (41)$$

Поскольку $\nabla \circ \nabla = -\Delta$, отсюда имеем

$$\Delta \hat{\mathbf{K}}(x) = -\nabla \hat{\mathbf{G}}(x). \quad (42)$$

Откуда, с точностью до решения однородного уравнения, получим решение уравнения (42):

$$\hat{\mathbf{K}}(x) = -\nabla \{\psi_0 * \hat{\mathbf{G}}(x)\}, \quad (43)$$

где $\psi_0(x)$ — фундаментальное решения уравнения Лапласа:

$$\Delta \psi_0(x) = \delta(x)$$

В частности, для затухающих на бесконечности решений :

$$\psi_0(x) = -\frac{1}{4\pi \|x\|}. \quad (44)$$

Формулу (43) можно использовать для любых обобщенных функций, допускающих свертку с $\psi_0(x)$.

Исходя из представления свертки, для регулярных $\hat{\mathbf{G}}(x)$ легко доказывается

Теорема 8.1. *Если при $x \rightarrow \infty$ $\|\mathbf{G}(x)\| = O(\|x\|^{-(2+\varepsilon)})$, $\varepsilon > 0$, то решение градиентного уравнения (40) имеет вид:*

$$4\pi \hat{\mathbf{K}}(x) = \operatorname{div} \int_{R^3} \frac{G(y)}{r} dV(y) - \operatorname{grad} \int_{R^3} \frac{g(y)}{r} dV(y) - \operatorname{rot} \int_{R^3} \frac{G(y)}{r} dV(y)$$

(с точностью до решения однородного уравнения). Если $\mathbf{G}(x)$ — дифференцируемый бикватернион и на бесконечности $\|\partial_j \mathbf{G}(x)\| = O(\|x\|^{-(2+\varepsilon)})$ ($j = \tau, x_1, x_2, x_3$), то

$$4\pi \mathbf{K}(x) = \int_{R^3} (\operatorname{div} G(y) - \operatorname{grad} g(y) - \operatorname{rot} G(y)) \frac{dV(y)}{r}.$$

Как приложение этих теорем рассмотрим задачи определения потенциалов векторных полей.

Потенциалы статических векторных полей. Легко видеть, что биградиентное уравнение (41) совпадает с уравнениями теории поля, когда требуется определить скалярный $\varphi(x)$ и векторный $\Psi(x)$ потенциалы векторного поля $V(x)$:

$$V(x) = \operatorname{grad} \varphi(x) + \operatorname{rot} \Psi(x),$$

с калибровкой :

$$\operatorname{div} \Psi(x) = f(x)$$

Тогда, полагая $\mathbf{G}(x) = -f(x) + V(x)$, используя теоремы 8.1 или 8.2, получим

$$\varphi(x) + \Psi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{\operatorname{div} V(y) + \operatorname{grad} f(y) - \operatorname{rot} V(y)}{\|x - y\|} dy_1 dy_2 dy_3.$$

Так при гауссовой калибровке ($\operatorname{div} \Psi(x) = 0$) имеем

$$\varphi(x) + \Psi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{div} V(y) - \operatorname{rot} V(y)}{\|x - y\|} dy_1 dy_2 dy_3.$$

Потенциалы динамических векторных полей. Определить скалярный и векторный потенциалы $\mathbf{F} = f - iF$ векторного поля $V(\tau, x)$ с лоренцевой калибровкой :

$$\partial_\tau f = \operatorname{div} F$$

В этом случае имеем биволновое уравнение

$$\nabla^+ \mathbf{F} = -i\partial_\tau F + i\operatorname{grad} f + \operatorname{rot} F = V(\tau, x).$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям излучения, дает обобщенная формула Кирхгофа:

$$\begin{aligned} & -4\pi \hat{\mathbf{F}}(\tau, x) = \\ & = \nabla^\mp \left\{ \int_{\|y-x\| \leq \tau} \frac{\mathbf{V}(\tau - \|y-x\|, y)}{\|x-y\|} dy_1 dy_2 dy_3 + \frac{1}{\tau} \int_{\|y-x\|=\tau} \mathbf{F}_0(y) dS(y) \right\} + \frac{1}{\tau} \int_{\|y-x\|=\tau} \mathbf{V}(0, y) dS(y). \end{aligned}$$

Бипотенциал определяется неоднозначно, с точностью до начального условия $\mathbf{F}_0(x)$.

9 Бигradientы и матрицы Дирака

Биволновое уравнение (20) можно записать в матричном виде:

$$\sum_{j=0}^3 D_{mj}^\pm b_j = g_m, \quad m, j = 0, 1, 2, 3, \quad (44)$$

где $b_0 = b$, $g_0 = g$, $b_j = B_j$, $g_j = G_j$, $j = 1, 2, 3$; а D_{mj}^\pm — компоненты матриц D^\pm (соответственно знаку), которые имеют вид:

$$D^+ = D = \begin{pmatrix} \partial_\tau & -i\partial_1 & -i\partial_2 & -i\partial_3 \\ i\partial_1 & \partial_\tau & -i\partial_3 & i\partial_2 \\ i\partial_2 & i\partial_3 & \partial_\tau & -i\partial_1 \\ i\partial_3 & -i\partial_2 & i\partial_1 & \partial_\tau \end{pmatrix}, \quad D^- = \bar{D} = \begin{pmatrix} \partial_\tau & i\partial_1 & i\partial_2 & i\partial_3 \\ -i\partial_1 & \partial_\tau & i\partial_3 & -i\partial_2 \\ -i\partial_2 & -i\partial_3 & \partial_\tau & i\partial_1 \\ -i\partial_3 & i\partial_2 & -i\partial_1 & \partial_\tau \end{pmatrix} \quad (45)$$

Легко проверить, что их произведение (суперпозиция операторов) удовлетворяют соотношению:

$$\sum_{j=0}^3 D_{mj} D_{jl} = \delta_{ml} \square, \quad j, m, l = 0, 1, 2, 3. \quad (46)$$

Покажем, что матрицы (45) — это дифференциальные матричные операторы Дирака, которые именно таким свойством обладают [18]. Для этого представим их в матричном виде:

$$D^+ = \sum_{j=0}^3 D^j \partial_j, \quad (47)$$

где, как следует из (45), матрицы D^j имеют следующие компоненты:

$$D^0 = I, \quad D^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь I – единичная матрица. Как видим, это четырехмерные унитарные матрицы Дирака, составленные из двухмерных матриц Паули:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm i & 0 \\ 0 & \mp i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \pm i \\ \pm i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \pm i \\ \mp i & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матричный оператор Дирака D^\pm – это *матричное представление биградиента* ∇^\pm .

10 Бикватернионная форма уравнения Дирака и КГФШ-уравнение

Рассмотрим бикватернионное уравнение вида:

$$\mathbf{D}_m^\pm \mathbf{B} \equiv (\nabla^\pm + m) \circ \mathbf{B} = \mathbf{F}, \quad m \in \mathcal{C}, \quad (48)$$

При $m = 0$ уравнение становится биволновым.

В силу матричных свойств биградиента (46), (47), и биградиентного представления уравнений Максвелла, это уравнение можно назвать *обобщенным уравнением Максвелла-Дирака* в бикватернионной форме (УМД), а дифференциальные операторы:

$$\mathbf{D}_m^+ = \nabla^+ + m, \quad \mathbf{D}_m^- = \nabla^- + m$$

являются *биградиентным представлением* матричных операторов Дирака: $D^\pm + mI$.

Простым вычислением легко показать, что их суперпозиция коммутативна и обладает следующим полезным свойством.

$$\mathbf{D}_m^+ \circ \mathbf{D}_m^- = \mathbf{D}_m^- \circ \mathbf{D}_m^+ = \square + m^2 + 2m\partial_\tau. \quad (49)$$

При чисто мнимом $m = i\rho$

$$\mathbf{D}_{i\rho}^+ \circ \mathbf{D}_{i\rho}^- = \square - \rho^2 + 2i\rho\partial_\tau.$$

Здесь в правой части, помимо оператора Клейна-Гордона-Фока ($\square - \rho^2$), содержится первая производная по времени с комплексной единицей, подобно мнимому члену в операторе Шредингера, поэтому уравнение вида :

$$\square u + 2m\partial_\tau u + m^2 u = f(\tau, x) \quad (50)$$

назовем *уравнением Клейна-Гордона-Фока-Шредингера (КГФШ-уравнением)*.

Интересно, что появление этого дополнительного члена значительно упрощает вид фундаментального решения, в сравнении с фундаментальным решением уравнения Клейна-Гордона-Фока.

Теорема 10.1. *Решение УМД (48) имеет вид:*

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{D}_m^\mp (\psi * \mathbf{F}) = \mathbf{B}^0 + \Psi * \mathbf{F}, \quad (51)$$

где $\mathbf{B}^0(\tau, x)$ – решение уравнения Дирака:

$$\mathbf{D}_m^\pm \mathbf{B}^0 = 0, \quad (52)$$

Ψ – фундаментальное решение УМД:

$$\Psi(\tau, x) = \partial_\tau \psi + m\psi \pm i \operatorname{grad} \psi,$$

$\psi(\tau, x)$ – фундаментальное решение КГФШ-уравнения.

Доказательство: В силу линейности уравнения, достаточно доказать утверждение для второго слагаемого в формуле (51). Подставив его в (48), используя свойство дифференцирования сверток и δ -функции, получим требуемое:

$$\mathbf{D}_m^\pm \mathbf{D}_m^\mp (\psi * \mathbf{F}) = \mathbf{F} * (\square \psi + 2m\partial_\tau \psi + m^2 \psi) = \mathbf{F} * \delta(\tau)\delta(x) = \mathbf{F}.$$

Очевидно, в силу линейности, любое решение уравнения (48) можно представить в виде (51).

Из теоремы 10.1 легко получим следствие для мнимых $m = i\rho$, которое сформулируем тоже в виде теоремы.

Теорема 10.2. При $m = i\rho$, $\operatorname{Im} \rho = 0$, решение УМД вида :

$$(\nabla^\pm + i\rho) \mathbf{B} = \mathbf{F} \quad (53)$$

можно представить в форме:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + (\nabla^\mp + i\rho) \circ (\mathbf{F} * \psi), \quad (54)$$

где $\psi(\tau, x)$ – решение уравнения:

$$\square \psi - \rho^2 \psi + 2i\rho \partial_\tau \psi = \delta(\tau)\delta(x), \quad (55)$$

$\mathbf{B}_0(\tau, x)$ – решение уравнения Дирака:

$$(\nabla^\pm + i\rho) \mathbf{B}_0 = 0. \quad (56)$$

Скалярные потенциалы. Рассмотрим обобщенные решения КГФШ-уравнения (50) для разных m . Их можно представить в виде:

$$u = f * \psi + u_0,$$

где ψ – фундаментальное решение КГФШ – уравнения (55), $u_0(\tau, x)$ – решение однородного уравнения (при $f = 0$).

Теорема 10.3 Фундаментальные решения КГФШ – уравнения имеют вид:

$$\psi = \frac{1}{4\pi \|x\|} (a H(\tau) e^{-m\|x\|} \delta(\tau - \|x\|) + (1-a) H(-\tau) \delta(\tau + \|x\|) e^{m\|x\|}) + \psi_0, \quad \forall a \in \mathcal{C},$$

где $\delta(\tau \pm \|x\|)$ – простой слой на световом конусе $\|x\| = |\tau|$; $\psi_0(\tau, x)$ – решение однородного КГФШ-уравнения, которое существует только при чисто мнимом $m = i\rho$ и может быть представлено в виде:

$$\psi_0(\tau, x) = e^{-i\rho\tau} \int_{R^3} \phi(\xi) \exp(i((\xi, x) \pm \|\xi\| \tau)) dV(\xi), \quad \forall \phi(\xi) \in L_1(R^3). \quad (57)$$

Доказательство. Из уравнения для фундаментального решения:

$$\square\psi + m^2\psi + 2m\partial_\tau\psi = \delta(\tau)\delta(x), \quad (58)$$

следует, что неполное преобразование Фурье (ПФ) по τ функции $\psi(\tau, x)$ является фундаментальным решением уравнения Гельмгольца:

$$\{\Delta - k^2\} F_\tau[\psi] + \delta(x) = 0, \quad k = i\omega - m.$$

С точностью до решения однородного уравнения, его можно представить в виде:

$$F_\tau[\psi] = \frac{1}{4\pi \|x\|} (ae^{-k\|x\|} + (1-a)e^{k\|x\|}), \quad \forall a \in \mathcal{C}.$$

Следовательно,

$$\psi = \frac{1}{4\pi \|x\|} (ae^{(i\omega-m)\|x\|} + (1-a)e^{-(i\omega-m)\|x\|}), \quad \forall a \in \mathcal{C}.$$

Отсюда, используя свойства ПФ, при обратном преобразовании по ω получим формулу теоремы, где носитель по времени первого слагаемого $\tau > 0$, а второго $\tau < 0$. Это расширяющиеся и сужающиеся со временем в R^3 с единичной скоростью сферы радиуса $|\tau|$. Ч.т.д.

Если $m = i\rho$ — чисто мнимое число и носитель решения $\tau > 0$, то

$$\psi = \frac{e^{-i\rho\|x\|}}{4\pi \|x\|} \delta(\tau - \|x\|). \quad (59)$$

Здесь плотностью простого слоя на световом конусе является фундаментальное решение уравнения Гельмгольца с волновым числом ρ .

Решения однородного КГФШ-уравнения. Построим решения уравнения:

$$\square u + m^2 u + 2m\partial_\tau u = 0. \quad (60)$$

В пространстве ПФ из (60) имеем:

$$(\|\xi\|^2 - \omega^2 + m^2 - 2im\omega) F_{\omega,\xi} [u(\tau, x)] = (\|\xi\|^2 - (\omega + im)^2) u^*(\omega, \xi) = 0, \quad (61)$$

где $u^*(\omega, \xi) = F_{\omega,\xi} [u(\tau, x)]$ — полное ПФ по τ, x .

Если $\text{Re } m \neq 0$, тогда $\|\xi\|^2 - (\omega + im)^2 \neq 0$ при $\forall \xi \in R^3$. В этом случае это уравнение имеет только тривиальное нулевое решение: $u^* = 0$. Однако при чисто мнимом $m = i\rho$ уравнение имеет бесчисленное множество сингулярных решений вида:

$$u^*(\omega, \xi) = \phi(\omega, \xi) \delta(\|\xi\|^2 - (\omega - \rho)^2), \quad (62)$$

где $\phi(\omega, \xi)$ — плотность простого слоя — произвольно заданная интегрируемая на конусах $\|\xi\| = |\omega - \rho|$ функция. Вычисляя оригинал, получим:

$$\begin{aligned} u(\tau, x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{\|\xi\|=|\omega-\rho|} \phi(\omega, \xi) \exp(-i(\xi, x) - i\omega\tau) dS(\xi) = \\ &= \frac{e^{-i\rho\tau}}{(2\pi)^4} \int_{R^3} \{\phi(\rho + \|\xi\|, \xi) e^{-i\|\xi\|\tau} - \phi(\rho - \|\xi\|, \xi) e^{i\|\xi\|\tau}\} \exp(-i(\xi, x)) dV(\xi). \end{aligned}$$

Здесь $dS(\xi)$ — дифференциал площади поверхности сферы радиуса, указанного под знаком соответствующего интеграла, $dV(\xi) = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$. Отсюда, в силу произвольности ϕ , следует формула (57) теоремы.

11 Обобщенные решения уравнения Дирака. Бикватернионное представление спинорных полей

Рассмотрим бикватернионные решения уравнения Дирака:

$$(\nabla^\pm + i\rho) \mathbf{Sp} = 0, \quad \text{Re} \rho = 0. \quad (63)$$

В квантовой механике их называют *спинорами* [18,28].

Теорема 11.1. *Ненулевые решения уравнения Дирака (63) можно представить в виде свертки:*

$$\mathbf{Sp} = \mathbf{D}_{i\rho}^\mp (\psi_0 * \mathbf{C}(\tau, x)), \quad (64)$$

где \mathbf{C} – произвольный бикватернион, а ψ_0 – решение однородного КГФШ-уравнения, либо представимо в виде суммы решений подобного вида.

Доказательство. Подставляя (64) в (63), получим (соответственно верхнему или нижнему знакам):

$$\mathbf{D}_m^\pm \mathbf{Sp} = \mathbf{D}_m^\pm \mathbf{D}_m^\mp (\psi_0 * \mathbf{C}) = (\square \psi_0 + 2m\partial_\tau \psi_0 + m^2 \psi_0) * \mathbf{C} = 0, \quad m = i\rho.$$

Обратно, если (64) – решение (63), тогда:

$$(\square + 2m\partial_\tau + m^2) \mathbf{Sp} = \mathbf{D}_m^\mp \mathbf{D}_m^\pm \mathbf{Sp} = \mathbf{D}_m^\mp 0 = 0.$$

Т.е. и скалярная часть и компоненты векторной части \mathbf{Sp} являются решением однородного КГФШ-уравнения. Следовательно, \mathbf{Sp} можно представить в виде суммы решений вида (64).

В частном случае, когда $\mathbf{C} = \delta(\tau, x)$, получим *спинор скалярного ψ_0 -поля* :

$$\Psi_0^\mp = (\nabla^\mp + m) \psi_0 = m\psi_0 + \partial_\tau \psi_0 \mp i \text{grad} \psi_0,$$

Используя его, *спинорное \mathbf{C} -поле*, порождаемое потенциалом ψ_0 , можно представить в виде:

$$\mathbf{Sp}^\pm = \Psi_0^\pm * \mathbf{C}(\tau, x), \quad (65)$$

где $\mathbf{C}(\tau, x)$ – бикватернион, допускающий эту свертку. Последнее зависит от свойств скалярного потенциала ψ_0 , вид которого дает теорема 10.2.

Скалярные гармонические потенциалы. Рассмотрим решение однородного КГФШ-уравнения (57), где под знаком интеграла стоят две плоские гармонические волны:

$$\varphi_\xi^\pm(\tau, x) = \exp(i((\xi, x) - \rho\tau \pm \|\xi\| \tau)),$$

которые сами являются его решениями. Волновой вектор ξ определяет направление движения волны, длина которой равна $\lambda = 2\pi/\|\xi\|$, частота $\omega = |\rho \pm \|\xi\||$, период $T = 2\pi/|\rho \pm \|\xi\||$.

В зависимости от знака, одна из них сверхсветовая ($V > 1$), а другая – досветовая ($V < 1$), т.к. фазовая скорость движения волны $V = 1 \pm \frac{\rho}{\|\xi\|}$.

При $\|\xi\| \rightarrow \infty$ частота $\omega \rightarrow \infty$, а $V \rightarrow 1 \pm 0$. При $\|\xi\| \rightarrow |\rho|$ скорости $V \rightarrow 1; 0$, а частоты соответственно $\omega \rightarrow \frac{\pi}{\rho}; \infty$.

Спиноры, порождаемые этими волнами, имеют вид:

$$(\nabla^\mp + i\rho) \varphi_\xi^\pm(\tau, x) = \pm (i\|\xi\| + \xi) \varphi_\xi^\pm.$$

Определение. Назовем элементарными гармоническими спинорами бикватернионы

$$\mathbf{Sp}_\xi^\pm = \frac{\exp(i((\xi, x) - \rho\tau \pm \|\xi\| \tau))}{\sqrt{2}} \left(i + \frac{\xi}{\|\xi\|} \right), \quad \|\mathbf{Sp}_\xi^\pm\| = 1, \quad \langle\langle \mathbf{Sp}_\xi^\pm \rangle\rangle = 0;$$

Энергия-импульс \mathbf{Sp}_ξ^\pm равны :

$$\mathbf{\Xi} = \mathbf{Sp}_\xi^\pm \circ (\mathbf{Sp}_\xi^\pm)^* = 1 - i \frac{\xi}{\|\xi\|}, \quad \|\mathbf{\Xi}\| = 2, \quad \langle\langle \mathbf{\Xi} \rangle\rangle = 0.$$

Гармонические спинорные \mathbf{C} -поля — это спиноры вида:

$$\mathbf{Sp} = \mathbf{C}(\tau, x) * \mathbf{Sp}_\xi^\pm(\tau, x). \quad (66)$$

Используя их и формулу (64), получим бикватернионное представление спинорного \mathbf{C} -поля через \mathbf{Sp}_ξ^\pm .

Теорема 11.2. Спинорное \mathbf{C} -поле можно представить в виде (66), либо в виде свертки:

$$\mathbf{Sp} = \mathbf{C}(\tau, x) * \int_{R^3} \phi(\xi) \mathbf{Sp}_\xi^\pm(\tau, x) dV(\xi),$$

где $\phi(\xi) \in L_1(R^3)$, либо в виде линейной комбинации подобных спинорных полей.

12 Стационарные и статические решения уравнения Дирака

Рассмотрим класс решений УДМ вида $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x)e^{-i\omega\tau}$, которые описывают гармонические колебания с частотой ω . Предполагается, что правая часть УДМ (48) имеет ту же структуру. Тогда для комплексных амплитуд получим $(\omega + \rho)$ -градиентное уравнение :

$$\nabla_{(\omega+\rho)}^\pm \mathbf{B}(x) = \mathbf{F}(x). \quad (67)$$

Из теоремы 7.2 следует теорема 12.1.

Теорема 12.1. Решения $(\omega + \rho)$ -градиентного уравнения (67) можно представить в виде суммы бикватернионов:

$$\mathbf{B} = \nabla_{\omega+\rho}^\mp (\chi * \mathbf{F}) + \mathbf{Sp}^{(\omega+\rho)},$$

где

$$\chi = -\frac{ae^{ik\|x\|}}{4\pi\|x\|} - \frac{(1-a)e^{-ik\|x\|}}{4\pi\|x\|}, \quad k = |\omega + \rho| \neq 0, \quad \forall a \in \mathcal{C},$$

$$\mathbf{Sp}^{(\omega+\rho)} = \nabla_{\omega+\rho}^\mp (\chi_0 * \mathbf{C}(x)),$$

$\chi_0(x)$ — решение уравнения Гельмгольца с волновым числом k :

$$\chi_0(x) = \int_{\|\mathbf{e}\|=1} p(\mathbf{e}) e^{-ik(\mathbf{e}, x)} dS(\mathbf{e}),$$

$p(\mathbf{e})$ — \forall функция, интегрируемая на единичной сфере, $\mathbf{C}(x)$ — \forall бикватернион, допускающий эту свертку.

Элементарные гармонические $(\omega + \rho)$ -спиноры определим как спиноры вида:

$$\Psi_0^{(\omega+\rho)}(x, \mathbf{e}) = \frac{1}{k\sqrt{2}} (\nabla + \omega + \rho) e^{-ik(\mathbf{e}, x)} = \frac{1}{k\sqrt{2}} (\omega + \rho - ik\mathbf{e}) e^{-ik(\mathbf{e}, x)} \quad (68)$$

Их норма и псевдонорма соответственно равны

$$\|\Psi_0^{\omega+\rho}\| = 1, \quad \langle\langle\Psi_0^{\omega+\rho}\rangle\rangle = 0. \quad (69)$$

Здесь \mathbf{e} — направление ω -спинора, $k = |\omega + \rho|$ — его волновое число.

Энергия-импульс спинора $\Psi_0^{(\omega+\rho)}$ равны

$$\Xi = \Psi_0^{(\omega+\rho)} \circ \{\Psi_0^{(\omega+\rho)}\}^* = 1 - i \mathbf{e} \operatorname{sign}(\omega + \rho)$$

Через них также можно представить комплексные амплитуды $(\omega + \rho)$ -спиноров.

Теорема 12.2. $(\omega + \rho)$ -спиноры можно представить в виде свертки:

$$\mathbf{Sp}^{\omega+\rho} = \mathbf{G}(x) * \Psi_0^{\omega+\rho}(x, \mathbf{e})$$

либо

$$\mathbf{Sp}^{\omega+\rho} = \mathbf{G}(x) * \int_{\|\mathbf{e}\|=1} p(\mathbf{e}) \Psi_0^{\omega+\rho}(x, \mathbf{e}) dS(\mathbf{e}),$$

при $\forall p(\mathbf{e}) \in L_1(Sp_{\mathbf{e}})$, $Sp_{\mathbf{e}} = \{\mathbf{e} \in R^3 : \|\mathbf{e}\| = 1\}$, либо в виде спиноров такого вида.

Статические спиноры получим при $\omega = 0$. Формулы теоремы 12.2 при этом сохраняют вид, т.к. $k = |\rho| \neq 0$.

Заключение

В начале было отмечено, что кватернионным и бикватернионным представлением уравнений Максвелла и Дирака и анализом их свойств занимается ряд исследователей. Для каждого из них характерна собственная терминология, система обозначений как самих кватернионов и бикватернионов, так и вводимых дифференциальных операторов.

Здесь используется скалярно-векторная запись бикватернионов, предложенная еще Гамильтоном [1, 28] для кватернионов, которая очень наглядна, удивительно приспособлена для записи физических величин и уравнений и очень проста при вычислениях. Автор старался, по возможности, использовать общепринятые в математической физике обозначения и терминологию, либо этимологически обусловленную.

Бикватернионная форма уравнений, как видим, позволяет переходить от решения систем из 8-ми дифференциальных уравнений первого порядка к решению одного дифференциального, но бикватернионного уравнения первого порядка, что значительно упрощает их решение и решение краевых задач. В качестве иллюстрации см. [29, 30], где построены обобщенные решения стационарных и нестационарных краевых задач для системы уравнений Максвелла. Эти результаты можно значительно проще получить, используя бикватернионную форму этих уравнений. Заметим, что это также значительно упрощает решение краевых задач на ЭВМ.

Заметим, что решения уравнений Максвелла-Дирака здесь получены в классе обобщенных функций, что позволяет строить решения как для классических бикватернионных функций, так и при наличии сингулярных источников в его правой части, которые можно использовать при построении бикватернионной теории элементарных частиц. При вычислении спинорных полей, используя свойства дифференцирования свертки, производные можно перебрасывать на компоненты \mathbf{C} -поля, когда это удобно, которые тоже могут быть сингулярными обобщенными функциями.

Как здесь показано, восстановление скалярного и векторного потенциала векторного поля также приводится к бикватернионным дифференциальным уравнениям, которые

легко решаются. Группу преобразований Пуанкаре, Лоренца и ортогональных преобразований также легко вычислять, используя их бикватернионное представление. В матричном представлении это довольно трудоемкая процедура.

Биградиенты, биволновые уравнения и их решения автор использовал ранее для построения одной модели электро-гравитационного поля и их взаимодействий [15, 16]. Можно найти много других полезных приложений дифференциальной алгебры бикватернионов, что и предлагается заинтересованному читателю.

Литература

- [1] Hamilton W.R. On a new Species of Imaginary Quantities connected with a theory of Quaternions // *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 2, 1843, pp. 424–434.
- [2] Казанова Г. Векторная алгебра. М., Наука, 1979, 120 с.
- [3] Стражев В.И. Уравнения Максвелла с магнитными зарядами в кватернионной форме // *Изв. вузов. Физика*, № 8, 1977, с. 45.
- [4] Edmonds Jr. J.D. Восемь уравнений Максвелла как одно кватернионное // *Amer. J. Phys.*, 46, 1978, №4, с. 430.
- [5] Шпилькер Г.Л. Гиперкомплексные решения уравнений Максвелла // *ДАН СССР*, 272, 1983, №6, с. 1359–1363.
- [6] Acevedo M., Lopez-Bonilla J., Sanchez-Meraz M. Quaternions, Maxwell Equations and Lorentz Transformations // *Apeiron*, 12, 2005, №4, с. 371.
- [7] Adler S.L. Quaternionic quantum mechanics and quantum fields. New York, Oxford University Press, 1995.
- [8] Rotelli P. The Dirac equation on the quaternionic field // *Mod. Phys. Lett. A*, 4, 1989, pp. 933–940.
- [9] Davies A.J. Quaternionic Dirac equation // *Phys. Rev. D*, 41, 1990, pp. 2628–2630.
- [10] Finkelstein D., Jauch J.M., Schiminovich S., Speiser D. Foundations of quaternion quantum mechanics // *J. Math. Phys.*, 3, 1992, pp. 207–220.
- [11] De Leo S., Rodrigues Jr. W.A. Quaternionic electron theory: geometry, algebra and Dirac's spinors // *Int. J. Theor. Phys.*, 37, 1998, pp. 1707–1720.
- [12] Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Механика космического полета. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М., Наука, 1973, 320 с.
- [13] Kassandrov V.V. Biquaternion electroynamics and Weyl-Cartan geometry of space-time // *Gravitation and cosmology*, 1, 1995, 3, pp. 216–222.
- [14] Ефремов А.П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(1), 2004, с. 111–127.
- [15] Алексеева Л.А. Уравнения взаимодействия А-полей и законы Ньютона // *Известия Нац. Акад. Наук Респ. Казахстан, Серия физико-математическая*, №3, 2004, с. 45–53.
- [16] Алексеева Л.А. Полевые аналоги законов Ньютона для одной модели электро-гравитационного поля // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 6, 2009, №1, с. 122–134.
- [17] Rodrigues W.A. Jr., Capelas de Oliveira E. Dirac and Maxwell equations in the Clifford and spin Clifford bundles // *International Journal of Theoretical Physics*, 29, 1990, с. 397–412.
- [18] Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М., Наука, 1987, 616 с.
- [19] Марчук Н.Г. Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда. Москва-Ижевск, 2009, 362 с.

- [20] Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов. 1. Преобразования Лоренца // *Математический журнал*, 10, 2010, №1, с. 33–41.
- [21] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М., Наука, 1976, 512 с.
- [22] Ахиезер А.И., Берестецкий Д.В. Квантовая электродинамика. М., Наука, 1981. 320 с.
- [23] Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов. 2. Обобщенные решения биволновых уравнений // *Математический журнал*, 10, 2010, №4, с. 5–13.
- [24] Алексеева Л.А. Гамильтонова форма уравнения Максвелла и ее обобщенные решения // *Дифференциальные уравнения*, 39, 2003, №6, с. 769–776.
- [25] Алексеева Л.А. Кватернионы гамильтоновой формы уравнений Максвелла // *Математический журнал*, 3, 2003, №4, с. 20–24.
- [26] Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов. 3. Уравнение Дирака и его обобщенные решения // *Математический журнал*, 11, 2011, №1, с. 30–38.
- [27] Тамм И.Е. Основы теории электричества. М., Наука, 1989.
- [28] Математическая энциклопедия. М., Наука, 2, 1982.
- [29] Алексеева Л.А., Саутбеков С.С. Метод обобщенных функций при решении стационарных краевых задач для уравнений Максвелла // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 40, 2000, №4, с. 611–622.
- [30] Алексеева Л.А. Обобщенные решения нестационарных краевых задач для уравнений Максвелла // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 42, 2002, №1, с. 76–88.

THE DIFFERENTIAL ALGEBRA OF BIQUATERNIONS IN EQUATIONS OF MATHEMATICAL AND THEORETICAL PHYSICS

L.A. Alexeyeva

Institute of mathematics and mathematical modelling, Almaty, Kazakhstan

alexeeva@math.kz

The functional space of biquaternions is considered on Minkovskiy space. Here the scalar-vector biquaternions representation is used which was offered by W. Hamilton for quaternions. With introduction of differential operator — a mutual complex gradient (*bigradients*), which generalize the notion of a gradient on biquaternions space, biquaternionic wave (*biwave*) equations are considered, their invariance for group of the Lorence-Puancare transformations is proved and their generalized solutions have been obtained. Biquaternionic form of generalized Maxwell-Dirac equation is constructed and its decisions are researched on base of the differential biquaternions algebra. Its generalized decisions are built with use of scalar potential. The new equation for these potential are constructed which unites known equations of quantum mechanics (*Klein-Gordon and Schrödinger Eq.*). The nonstationary, steady-state and harmonic on time scalar fields and generated by them the spinors and spinors fields in biquaternionic form are constructed.

Key Words: algebra, biquaternion, bigradient, biwave equation, generalized solution, shock waves, Lorenz transformation, Maxwell equation, Dirac equation, spinor, scalar potential, stationary vibration.

FINSLERIAN APPROACH TO THE ELECTROMAGNETIC INTERACTION IN THE PRESENCE OF ISOTOPIC FIELD-CHARGES AND A KINETIC FIELD

György Darvas

Symmetrion, Budapest, Hungary

darvasg@iif.hu

This paper deals with the application of the isotopic field-charge spin theory to the electromagnetic interaction. First there is derived a modified Dirac equation in the presence of a velocity dependent gauge field and isotopic field charges (namely Coulomb and Lorentz type electric charges, as well as gravitational and inertial masses). This equation is compared with the classical Dirac equation and there are discussed the consequences [6, 34, 35, 37].

There is shown that since the presence of isotopic field-charges would distort the Lorentz invariance of the equation, there is a transformation, which restores the invariance, in accordance with the conservation of the isotopic field-charge spin [8]. It is based on the determination of the $F^{\mu\nu}$ field tensor adapted to the above conditions.

The presence of the kinetic gauge field makes impossible to assume a flat electromagnetic interaction field. The connection field, which determines the curvature, is derived from the covariant derivative of the kinetic (velocity dependent) gauge field. In this case, there appears a velocity dependent metric, what involves a (velocity arrowed) direction-dependent, that means, Finsler geometry [11, 14]. The option of such a «theory of the electrons» (with the words of Dirac) was shown in the extension of his theory in [23]. This paper is an attempt to a further extension.

Key Words: field-charges, isotopic electric charges, isotopic masses, isotopic electric-charge spin, conservation, electromagnetic interaction, electroweak interaction, kinetic gauge field, extended Dirac equation, magneto-kinetic moment, electro-kinetic moment, coupling spin, accidental symmetry, conserved Noether currents.

Introduction

I presented the isotopic field-charge spin theory [10, 12] and its possible applications to the description of gravitational interaction at FERT 2011 [13]. It was shown that the presence of a kinetic field with a velocity dependent metric and isotopic field-charges (namely in that case distinguished gravitational and inertial masses) involve a (velocity arrowed) direction-dependent, that means, Finsler geometry [11, 14].

Electromagnetic field theories were related with Finsler geometries in, at least, two terms. First, the Dirac matrices, introduced in QED [19] follow the rules of hypercomplex numbers, as shown, among others, by Achiezer and Berestetskii [1, p. 90]. Later Dirac published two essential extensions to his QED theory. In [23], he introduced a curvilinear co-ordinate system. So, *at second*, he defined a second (auxiliary) co-ordinate system y^Λ , «which is kept fixed during the variation process and use the functions $y^\Lambda(x)$ to describe the x co-ordinate system in terms of the y co-ordinate system». He defines the y system «so that the metric for the x system» be $g_{\mu\nu} = \nu_{\Lambda\mu} y_\nu^\Lambda$. This metric, which then appears in the Hamiltonian of the electromagnetic interaction, is the first step to a Finsler extension.

Now, I will make three steps to a further extension of the field theoretic model of the electromagnetic interaction. First, I introduce the isotopic electric charges in the classical Maxwell EM theory [12]. Secondly, I introduce the isotopic electric charges in the classical Dirac equation. At third, I extend the Dirac equation with a kinetic field (see in more details in [15]). The main part of the paper discusses this extended equation.

1 Isotopic electric charges in classical EM

According to the isotopic field-charge theory [10], we can replace the charges appearing in our equations by two different (isotopic) charges, a Coulomb-type one, and a kinetic-type one. The Coulomb-type charge is associated with the potential part of the Hamiltonian (V), and the kinetic type with the kinetic part of the Hamiltonian (T), and they appear in the components of a current density respectively.

In classical electrodynamics, the A_μ four-potentials of the electromagnetic field were invariant under Lorentz transformation, and the four-current j_ν components transformed like a vector. We assumed, that the sources of the Coulomb force (q_V) are different type charges, than moving charges as sources of currents (q_T). The same charges play both roles (cf. covariance), we assume only, that in the two situations they behave as two isotopic states of the same physical property (i.e., field-charge). Provided, that the fourth component (in $+++ -$ signature) of a j_ν current density, namely $j_4 = ic\rho$ contains a different kind of charge-density (ρ_V), than those moving (current-like, kinetic) charges (ρ_T) in j_i ($i = 1, 2, 3$), the j current would lose its invariance under Lorentz transformation. We can demonstrate this through the transformation of the Lorentz force:

$$F^\mu = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu, \quad (\text{where } j_\nu = \rho u_\nu \text{ and } u_\nu = \frac{dx_\nu}{d\tau}).$$

In the traditional picture this formulation applies the identical charge density for all components, F^μ and j_ν behave like vector components.

Provided, that current-like charges are associated with ρ_T charges, and the real- or Coulomb-charges are ρ_V -denoted charges, we should apply $j_i = \rho_T u_i$ ($i = 1, 2, 3$), and $j_4 = ic\rho_V$ in the proposed isotopic electric charge picture. This latter j_ν does not transform like a vector, and the electromagnetic force should be written as:

$$\begin{aligned}
 F^\mu = F^{\mu\nu} \frac{1}{c} j_\nu &= \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_T \frac{u_1}{c} \\ \rho_T \frac{u_2}{c} \\ \rho_T \frac{u_3}{c} \\ i\rho_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_3 \rho_T \frac{u_2}{c} - B_2 \rho_T \frac{u_3}{c} + E_1 \rho_V \\ -B_3 \rho_T \frac{u_1}{c} + B_1 \rho_T \frac{u_3}{c} + E_2 \rho_V \\ B_2 \rho_T \frac{u_1}{c} - B_1 \rho_T \frac{u_2}{c} + E_3 \rho_V \\ iE_1 \rho_T \frac{u_1}{c} + iE_2 \rho_T \frac{u_2}{c} + iE_3 \rho_T \frac{u_3}{c} \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{c} \begin{bmatrix} B_3 u_2 - B_2 u_3 & cE_1 \\ -B_3 u_1 + B_1 u_3 & cE_2 \\ B_2 u_1 - B_1 u_2 & cE_3 \\ iE_1 u_1 + iE_2 u_2 + iE_3 u_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_T \\ \rho_V \end{bmatrix} = \frac{1}{c} H^{\kappa l} \rho_l \tag{1}
 \end{aligned}$$

where ($\kappa = 1, \dots, 4$), ($l = 1, 2$), $E_i = -\partial_i \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t}$ and $B_i = \text{rot}_i A$. It is easy to recognise, that the first column of the matrix $H^{\kappa l}$ represents components of the kinetic Lorentz force, while the second column of the matrix represents components of the Coulomb force¹. Here B_i are associated only with ρ_T , while E_i both with ρ_V and ρ_T , where $\varphi = \int \frac{\rho_V}{r} dV$ and $A = \int \frac{j(\rho_T)}{r} dV$

¹This expression is very close to the approach applied by [21]. The roots are, however, much older. To see the origins, I must mention a few other historical steps.

Following the *Symmetry Festival 2003*, when I first discussed the basic ideas — developed in detail in my book [12] — with Yuval Ne’eman, there appeared a few similar approach publications. Starting from the fundamental

are the retarded scalar and vector potentials. It is obvious from the above matrix equation that this j_ν is *not* a four-vector, and for ρ_V and ρ_T are mixed during the multiplication by $F^{\mu\nu}$, the components F^μ do not transform as vector components either.

The result of this example is not in compliance with our experience! With the introduction of the isotopic electric charges, we lost certain symmetry². As a consequence, to restore Lorentz invariance and compliance with experience, our program must include the requirement of the existence of an additional transformation that should counteract the loss of symmetry caused by the introduction of two isotopic states of the charges. This additional transformation was presented in [10, 12] by the proof of the conservation of the isotopic field-charge spin. The Lorentz transformation and the isotopic field-charge spin transformation combined restore the covariance of the theory. In the next sections, I specify it to the electromagnetic field.

equation by Dirac [21] $\partial_\nu J^\mu A^\nu$, de Haas E.P.J. [16, 17] in his PIRT paper, for example, derives similar (but not the same) conclusions like we, for QED and the SM, according to which physical real quantities can be derived by the distinction of the (spatially localised) electric potential and the Dirac velocity field. Although, in contrary to Dirac, our theory does not need to assume an ether, we can refer to Dirac's statement [22] where he defines the velocity field through the electromagnetic four-potential: «We have now the velocity at all points of space-time, playing a fundamental part in electrodynamics. It is natural to regard this as the velocity of some real physical thing». While Dirac identifies this «real physical thing» with an ether, our work is an attempt to identify these «things» with the quanta of a gauge-field, «localised» in that velocity field. For I received objections since I first communicated the essence of the theory presented later in detail in [10], which objections stated that the assumption of a velocity dependent gauge contradicts localisation, I advise to keep in mind the cited words by Dirac (in addition to my main argument, namely the original formulation of Noether's second theorem). De Haas assumes an analogy between Mie's [30] non-gauge invariant stress-energy tensor, and the stress-energy tensor in Dirac's 1951 theory in a four-velocity field. The analogy works only partially (in my opinion), but the acknowledgement of the role of the velocity field in defining the stress-energy tensor is worth attention, it partially confirms my approach, and leads to the same derivation of the Lorentz transformation of the electromagnetic field components, as I have interpreted it. As de Haas [18] refers to it, the stress-energy tensor by M. von Laue [38] can be written as $T_{\mu\nu} = J_\mu A_\nu$, where

$$A_\nu = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ i \\ -c\Phi \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad J_\mu = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ ic\rho \end{bmatrix}$$

so

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ ic\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ i \\ -c\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \otimes \mathbf{A} & \frac{i}{c}\Phi\mathbf{J} \\ ic\rho\mathbf{A} & -\rho\Phi \end{bmatrix}$$

what demonstrates an analogy with our formula.

²For other forms of Lorentz violating phenomena see, e.g., [26] where he writes that «Effective field theories with explicit Lorentz violation are intimately linked to Riemann-Finsler geometry. The quadratic single-fermion restriction of the Standard-Model Extension provides a rich source of pseudo-Riemann-Finsler spacetimes and Riemann-Finsler spaces. An example is presented that is constructed from a 1-form coefficient and has Finsler structure complementary to the Randers structure.». In [27, 28] he writes that «Our basic premise is that minuscule apparent violations of Lorentz and CPT invariance might be observable in nature. The idea is that the violations would arise as suppressed effects from a more fundamental theory. We have shown in our publications that arbitrary Lorentz and CPT violations are quantitatively described by a theory called the Standard-Model Extension (SME), which is a modification of the usual Standard Model of particle physics and Einstein's theory of gravity, General Relativity.» Coleman and Glashow [7] proposed that «The existence of high-energy cosmic rays places strong constraints on Lorentz non-invariance. Furthermore, if the maximum attainable speed of a particle depends on its identity, then neutrinos, even if massless, may exhibit flavor oscillations. Velocity differences far smaller than any previously probed can produce characteristic effects at accelerators and solar neutrino experiments.»

2 Isotopic electric charges in QED

I presented the effect of the introduction of isotopic electric charges in the classical electrodynamics in the previous section. Now, as an example, I introduce isotopic field charges in the derivation of the Dirac equation [19].

Dirac considered in first (unperturbed) approximation a case of no field, when the wave equation reduces to

$$(-p_4^2 + p_i^2 + m^2 c^2)\psi = 0 \quad (1a)$$

where $p_4 = \frac{\mathbf{W}}{c} = ih \frac{\partial}{c \partial t}$ and $p_i = -ih \frac{\partial}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, 3$) and the wave equation be in the form $(\mathbf{H} - \mathbf{W})\psi = 0$.

To maintain the required linearity of the Hamiltonian \mathbf{H} in p_μ one introduces the dynamical variables α_i and β which are independent of p_μ , i.e., that they commute with t , x_i . Here Dirac considered particles moving in empty space, so that all points in space were equivalent, and one can expect the Hamiltonian not to involve t , and x_i . It follows that α_i and β are independent of t , x_i , i.e., that they commute with p_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$), although this latter held only until we did not distinguish gravitational and inertial masses. Dirac introduced his matrices in order to have other dynamical variables besides the co-ordinates and momentums of the electron, so that α_i and β may be functions of them, and that the relativistic Lorentz invariant wave function depended on these variables. So Dirac's wave equation took the form:

$$(p_4 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta)\psi = 0 \quad (2)$$

According to our assumptions, from here on we should modify the clue followed by Dirac. This equation must lead to a condition where we consider that the interacting two charges are carried by particles with masses in two isotopic field-charge (IFC) states, one of them in potential, the other in kinetic state. Since the masses of the carriers appear explicitly in β , we have to introduce two kinds of β , corresponding to the two states: β_V and β_T . We have to note that for the sake of relativistic invariance of the four-momentum's square the mass square in the equation (1a) must be equal with the rest mass. We will see, this is – at least numerically – equal with the potential (gravitational) mass: $m_V = m_0$. We make a qualitative distinction between the masses m_V and m_T , where the numerical value of the kinetic mass at relativistic velocities is

$$m_T = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}}$$

(here m_0 is the rest mass of the particle, and ν is the velocity of the particle in kinetic state relative to the interacting other particle in potential state). This qualitative distinction will obtain significance later. Thus the equation (2) leads to

$$(-p_4 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta_V) \cdot (p_4 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta_T)\psi = 0 \quad (3)$$

In order to agree with Eq. (1a) in the form $(-p_4^2 + p_i^2 + m_V m_T c^2)\psi = 0$ – considering, in accordance with [9, 10] that a particle in a kinetic state interacts always with another, which

is in potential state — we must demand that the coefficients fulfil the conditions:

$$(d1) \alpha_i^2 = 1$$

$$(d2) \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0, \quad i \neq j$$

$$(d3) \beta_V \beta_T = m_V m_T c^2$$

$$(d4) \alpha_i p_i \beta_T + \beta_V \alpha_i p_i = 0$$

$$(d5) \beta_V p_4 - p_4 \beta_T = 0$$

(d1) and (d2) coincide with conditions established by Dirac. The conditions (d3) – (d5) do not follow from Dirac's original clue.

The results of the discussion of the extra conditions coincide with the conditions deduced by Dirac (the only difference is the qualitative replacement of m^2 by $m_V m_T$, taking into account the above notice on the relativistic invariance of the four-momentum's square), and they involve that the derived Dirac matrices will not take different forms in our treatment either. Replacing α_i and β with appropriate practical multiplets and notations, Dirac introduced the matrices named after him.

In the presence of an arbitrary electromagnetic field with a scalar potential $\Phi = A_4$ and vector potential \mathbf{A} , we substitute $p_4 + (e_T/c)A_4$ for p_4 , and $p_i + (e_V/c)A_i$ for p_i in the Hamiltonian for no field, where e_V and e_T denote the potential (Coulomb) and kinetic (Lorentz) charges. Note, that according to the assumption introduced in the IFCS theory [12], there appear potential charges in the scalar field potential (A_4), which interacts solely with kinetic charges, and *vice versa*, there appear kinetic charges in the vector field potential (\mathbf{A}), which interacts solely with potential charges. Similar to m_T , e_T takes also three different values according to the spatial directions, like three components of a three-vector. However, I must mention, that e_T transforms with the velocity in a different way than m_T . In fact, it is not just the value of the charge of e_T , what changes at relativistic velocities, rather the charge density.

Introducing the above deduced conditions in the equation (3), the Dirac matrices, which follow from those conditions, and make the mentioned replacements to consider the effects of an electromagnetic field on our wave equation, we obtain:

$$\begin{aligned} & \left[- \left(p_4 + \frac{e_T}{c} A_4 \right) - \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + \frac{e_V}{c} \mathbf{A} \right) + \gamma_4 m_V c \right] \cdot \\ & \cdot \left[\left(p_4 + \frac{e_T}{c} A_4 \right) - \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + \frac{e_V}{c} \mathbf{A} \right) + \gamma_4 m_T c \right] \psi = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

(According to the convention, we replaced the ρ matrices applied in Dirac's original [19] paper with the more widespread γ matrices, so that $\rho_1 = -\gamma_5$ and $\rho_3 = \gamma_4$, and also in accordance with the convention, we replace the original \hbar in Dirac's equations with \hbar . To get a more easily comparable equation with the original, derived by Dirac — among other algebraic transformations — we make also the following replacement: $m_V m_T c^2 \equiv m_V^2 c^2 + m_V (m_T - m_V) c^2$. We use during the transformation of the wave equation that the differential operators are ineffective on the stationary m_V and e_V .) We derive:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[- \left(p_4 + \frac{e_T}{c} A_4 \right)^2 + \left(\mathbf{p} + \frac{e_V}{c} \mathbf{A} \right)^2 + m_V^2 c^2 + \hbar \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{rot} \left(\frac{e_V}{c} \mathbf{A} \right) \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + i \hbar \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{grad} \left(\frac{e_T}{c} A_4 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e_V}{c} \mathbf{A} \right) \right) \right] + \right. \\ & \left. + \gamma_4 \left[- \left(p_4 + \frac{e_T}{c} A_4 \right) + \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + \frac{e_V}{c} \mathbf{A} \right) + \gamma_4 m_V c \right] (m_T - m_V) c \right\} \psi = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

The first three terms in the first [] bracket coincide with those in the relativistic wave equation for electromagnetic fields derived by Dirac (with the assumption $m_V = m_0$) while making qualitative distinction between the potential (Coulomb) and kinetic (current-, or Lorentz) charges.

The fourth and fifth terms include $\text{rot} \left(\frac{e_V}{c} \mathbf{A} \right) = e_V \mathbf{H}$, where \mathbf{H} is the *magnetic vector* of the field, as well as the *electric vector* of the field in a modified form, where the potential and the kinetic charges are taken into account: $\text{grad} \left(\frac{e_T}{c} A_4 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e_V}{c} \right) \mathbf{A} = e' \mathbf{E}$, where e' is a quantum mixture of e_V and e_T . The charges appear under the derivation, because the value of e_T changes in relativistic covariant fields (for it is a function of its velocity in the given frame, cf., e.g., [1, §90]), and we are free to write e_V also under the time derivative, because the derivative operator has no effect on the potential charge e_V . More precisely, it is rather the density of e_T , which changes with its velocity. So, in the following, I will replace the isotopic charges e_T with ρ_T and e_V with ρ_V in the formulas.

The expression in the first [] bracket in (5) — with the mentioned alteration in the charges — coincides with the quadratic form of the Dirac equation.

Equation (5) differs from Dirac's result essentially in the last, additional term:

$$-\gamma_4 \left[- \left(p_4 + \frac{e_T}{c} A_4 \right) + \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + \frac{e_V}{c} \mathbf{A} \right) + \gamma_4 m_V c \right] (m_T - m_V) c$$

This expression can be written by inserting the p_4 and \mathbf{p} operators in the following

$$-\gamma_4 \left[- \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\rho_T}{c} A_4 \right) - \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, i\hbar \text{grad} - \frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} \right) + \gamma_4 m_V c \right] (m_T - m_V) c$$

The components in this term can be regarded as the additional energy of *the interacting two massive, electrically charged particles due to their assumed additional degree of freedom* (arbitrary positions in the IFCS field). They *express the effect of the relativistic mass increase* — difference between the «dressed» and «bare» masses, i.e., the «dress» in itself — on the electromagnetic field. The expression in this last square bracket [] coincides again with the Dirac wave equation, in its Hamiltonian form.

This last part of the equation gives account on the *cross-interaction of the electromagnetic field and its two isotopic field charges with the two kinds of isotopic masses in QED*. The state function ψ in this equation, unlike in the original Dirac equation, depends not only on the space-time co-ordinates and the spin, but also on a two valued variable that makes distinction between the isotopic field charges.

In rest (when $m_T = m_V$, $\rho_T = \rho_V$), equation (5) coincides with the Dirac equation. However, in relativistic covariant fields the charges of both the gravitational and the electromagnetic fields will differ not only qualitatively, but also in their quantity, and we must take into account the last term. The appearance of this last term brings in the already acquainted (cf., [10, Secs. 3 and 3.2]) inconvenient, but not unexpected, asymmetry in our theory that should be counteracted by the presumed new symmetry transformation between the states of the isotopic field charges.

The effects of the operators in the two [] square brackets in (5) must be equal:

$$\begin{aligned} & \left[- \left(p_4 + \frac{\rho_T}{c} A_4 \right)^2 + \left(\mathbf{p} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} \right)^2 + m_V^2 c^2 + \hbar \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{rot} \left(\frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} \right) \right) + \right. \\ & \quad \left. + i\hbar \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{grad} \left(\frac{\rho_T}{c} A_4 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} \right) \right) \right] \psi = \quad (5a) \\ & = \gamma_4 \left[\left(p_4 + \frac{\rho_T}{c} A_4 \right) - \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} \right) - \gamma_4 m_V c \right] (m_T - m_V) c \psi \end{aligned}$$

In the case of classical QED, the left side is equal to 0. The right side is 0, if $m_T = m_V$, that means, in a non-relativistic approximation. The effect of the operator in bracket $\{ \}$ on ψ in Eq. (5) will vanish as a result of the operators in the two square $[]$ brackets together. If we demand that our mathematical derivations be in agreement with the time-proven Dirac equation, we must require that the effect of the operators in the first and the second square brackets on the wave function ψ be equal to 0 separately, according to the two sides of the Eq. (5a). Thus our equation (5) separates into two equations.

The *first* equation:

$$\left[- \left(p_4 + \frac{\rho_T}{c} A_4 \right)^2 + \left(\mathbf{p} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} \right)^2 + m_V^2 c^2 + \hbar \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{rot} \left(\frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} \right) \right) + \right. \\ \left. + i\hbar\gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{grad} \left(\frac{\rho_T}{c} A_4 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} \right) \right) \right] \psi = 0 \quad (6)$$

will provide the solutions of the Dirac equation in the presence of potential and kinetic charges in an electromagnetic field. Note, that there appears only the rest mass ($m_V = m_0$) of the particle. This equation differs from the original Dirac equation only in the presence of the two different isotopic electric charges.

The *second* equation:

$$-\gamma_4 \left[- \left(p_4 + \frac{\rho_T}{c} A_4 \right) + \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} \right) + \gamma_4 m_V c \right] (m_T - m_V) c \psi = 0 \quad (7)$$

holds either in rest when quantitatively $m_T = m_V$, or when the value in the square bracket is 0.

The form of equation (5) guarantees that in boundary conditions our result coincides with the traditional. In a state close to rest, the second part vanishes and we get back to the well known Dirac equation (6). In extreme relativistic situation, when $m_T \gg m_V = m_0$, (we can neglect the first component in (5), and) we get Eq. (7), and can divide the full modified Dirac equation by $(m_T - m_V)$. Eq. (7) can be written in a Schrödinger type form of a wave equation. The Dirac expression in the square bracket in Eq. (7) can be transformed in:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[-\rho_T A_4 - \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, i\hbar \text{grad} - \rho_V \mathbf{A} \right) + \gamma_4 m_V c^2 \right] \psi \quad (8)$$

where $-\rho_T A_4 - \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, i\hbar \text{grad} - \rho_V \mathbf{A} \right) + \gamma_4 m_V c^2 = \mathbf{H}$ is the Hamiltonian of the system. There appears only the rest energy of the particles. However, due to the difference between ρ_T and ρ_V , this equation cannot be linearized in the four charge current components unless the isotopic field-charge spin invariance rotates the two isotopic electric charges of the electric field into each other in an IFCS gauge field (cf. [15]). This equation does not reflect the effect of that gauge field, because the Dirac equation expresses the interaction of the two electrons in the electromagnetic field, more precisely the scalar Coulomb field with the electromagnetic vector field. In this semi-classical approach³, I have not taken into account the interaction with the

³Later, Dirac [21] considered that the classical theories of electromagnetic field are *approximate* and are valid only if the accelerations of the electrons are small. He stated that the earlier problems of QED resulted not in quantization, rather in the incompleteness of the classical theory of electrons, and one must try to improve on it. For this reason, he proposed to replace the application of the Lorentz condition with a gauge theory. He emphasised also the Hamiltonian approach instead of the Lagrangian one. He introduced a function λ (which was different from the quantity introduced by Feynman [24] and got a current $j_\mu = -\lambda(\partial S/\partial x^\mu + A_\mu^*)$ where S was a gauge function attributed to A , and λ could be chosen to be an arbitrary infinitesimal at one instant of time, while its value at other times was then fixed by the conservation law $\partial j_\mu/\partial x_\mu = 0$. This method resulted in the conclusion that the theory (as expected) involves only the ratio e/m , not e and m separately. This [21]

IFCS gauge field⁴.

We can construct the Lagrangian of the interacting coupled two-electron system in the fields of each other from this Hamiltonian. Due to the two kinds of charges, this L differs from the usual form that appears in most textbooks. In principle, one can derive the non-linear charge–four-current from this L . The condition of linearization is that the gauge field, in which the charges ρ_T and ρ_V can substitute for each other, become invariant under an arbitrary gauge transformation. I will consider the interaction with a kinetic, concretely, IFCS gauge field in the next section.

3 Isotopic electric charges in the presence of a kinetic gauge field

Let's introduce a kinetic gauge field \mathbf{D} similar to the general field-theoretical approach in [10]. As we saw in section 1 that the vierbein j_ν does not transform like a vector, we cannot expect this property of \mathbf{D} either. This \mathbf{D} kinetic gauge field is associated with the electromagnetic field. Therefore, I extend the Dirac equation, discussed in section 2, with the components of this \mathbf{D} gauge field. For \mathbf{D} is a kinetic field, all the four of its components interact with the potential electric (Coulomb) charge. Thus, I will start from the following, extended form of the equation:

$$\begin{aligned} & \left[- \left(p_4 + \frac{\rho_T}{c} A_4 + \frac{\rho_V}{c} D_4 \right) - \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{D} \right) + \gamma_4 m_V c \right] \cdot \\ & \cdot \left[\left(p_4 + \frac{\rho_T}{c} A_4 + \frac{\rho_V}{c} D_4 \right) - \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{D} \right) + \gamma_4 m_V c \right] \psi = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

here D_4 is the fourth component of \mathbf{D} , and \mathbf{D} depends on the velocity components $D_{\dot{\mu}} = D(\dot{x}^\mu)$. Note, that D_4 , being a component of the kinetic gauge field interacts with the *potential* electric charge in contrast to the A_4 scalar potential of the electric field in the first () brackets, and \mathbf{D} in the second () brackets is a three-component, vector-like quantity. Making the multiplication, applying the same transformations like in section 2, and considering that $p_4 = i \frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ and

theory did not introduce the interaction of the electron with the electromagnetic field as a perturbation, like in the 1929–1932 Dirac–Fermi–Breit theories. The electron of that new theory could not be considered apart from its interaction with the electromagnetic field. As Dirac mentioned: «The theory of the present paper is put forward as a basis for a passage to a quantum theory of electrons. ... one can hope that its correct solution will lead to the quantization of electric charge ...» and «... questions of the interaction of the electron with itself no longer arise.» Then, a further model by Dirac [23, p. 64] provided a possible solution for eliminating the runaway motions of the electron.

Dirac's [21] paper was an attempt to exclude approximations by perturbation in either direction. It was in harmony with the aim of Bethe and Fermi (1932) [3] to show the equivalence of the perturbations applied by Breit (1929, 1932) [4, 5] and Møller (1931) [32]. In this respect Dirac's models were kin to the present attempt, in which, instead of a perturbation, we acknowledge the asymmetric roles of the interacting charged particles (as it can be read originally in [32] and apply a gauge theory that has led us to a quantised theory. The theory applied in this paper to QED and having been proposed in a general form in [10] eliminates the runaway motions of the electron too, although in an alternative way.

⁴At the end of their paper Bethe and Fermi [3, p. 306] showed that the formula introduced by Møller holds also when one of the interacting particles is in bound state. They consider also the option that the two interacting particles emit two quanta, but they reject it, because (for symmetry consideration for the momentums of the two quanta) they take into account only identical type quanta to be emitted and absorbed. (Although, the emission of one quantum painted another asymmetry in the picture, in which they aimed at eliminating the asymmetry caused by Møller's scattering matrix.) This conclusion by Bethe and Fermi is a result of their artificial symmetrisation of the potentials, and does not arise in the theory set forth, among others, in this paper.

$p_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}$, as well as commutation of the components, one gets:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[- \left(p_4 + \frac{\rho_T}{c} A_4 + \frac{\rho_V}{c} D_4 \right)^2 + \left(\mathbf{p} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} + \frac{\rho_T}{c} \mathbf{D} \right)^2 + m_V^2 c^2 \right] + \right. \\
& + \hbar \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{rot} \left(\frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} \right) \right) + i\hbar \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{grad} \left(\frac{\rho_T}{c} A_4 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} \right) \right) + \\
& + \hbar \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{rot} \left(\frac{\rho_V}{c} \mathbf{D} \right) \right) + \hbar \left(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\rho_V^2}{c^2} [D_j D_k - D_k D_j] + \right. \\
& + i\hbar \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{grad} \left(\frac{\rho_V}{c} D_4 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_V}{c} \mathbf{D} \right) \right) + \gamma_5 \frac{\rho_V^2}{c^2} (\boldsymbol{\sigma}, D_4 \mathbf{D} - \mathbf{D} D_4) + \\
& \left. + \gamma_4 \left[- \left(p_4 + \frac{\rho_T}{c} A_4 + \frac{\rho_V}{c} D_4 \right) + \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{D} \right) + \gamma_4 m_V c \right] (m_T - m_V) c \right\} \psi = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

Eq. (10) is the extended Dirac equation, in the presence of isotopic electric charges and a kinetic gauge field \mathbf{D} . There was considered that both the components of the EM vector potential \mathbf{A} , and the elements of \mathbf{D} commute with $\boldsymbol{\sigma}$, the components of \mathbf{A} commute with each other, but, for the elements of \mathbf{D} do not compose a four-vector (in contrast to the components of \mathbf{A}), we have no reason to assume that the elements of \mathbf{D} would commute with each other. Thus, in the multiplication in (9) we considered the following equalities:

$$\begin{aligned}
& \left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{D} \right)^2 = \left(\mathbf{p} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{D} \right)^2 + \hbar \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{rot} \left(\frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} \right) \right) + \\
& + \hbar \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{rot} \left(\frac{\rho_V}{c} \mathbf{D} \right) \right) + \hbar \left(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\rho_V^2}{c^2} (D_j D_k - D_k D_j) \right)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
& \gamma_5 \left(p_4 + \frac{\rho_T}{c} A_4 + \frac{\rho_V}{c} D_4 \right) \left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{D} \right) - \\
& - \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} + \frac{\rho_V}{c} \mathbf{D} \right) \left(p_4 + \frac{\rho_T}{c} A_4 + \frac{\rho_V}{c} D_4 \right) = \\
& = i\hbar \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{grad} \left(\frac{\rho_T}{c} A_4 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} \right) \right) + \\
& + i\hbar \gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{grad} \left(\frac{\rho_V}{c} D_4 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_V}{c} \mathbf{D} \right) \right) + \gamma_5 \frac{\rho_V^2}{c^2} (\boldsymbol{\sigma}, D_4 \mathbf{D} - \mathbf{D} D_4)
\end{aligned}$$

4 Discussion of the modified Dirac equation in the presence of isotopic electric charges and a kinetic gauge field

Equation (10) can be written in the following form: $[W + W^A + W^D - H(m_T - m_V)c] \psi = 0$, where W refers to the first line of (10), W^A to the second line, W^D to the third and fourth lines, and $H(m_T - m_V)c$ to the fifth line of Eq. (10).

4.1 Coincidence with the classical Dirac equation in boundary case, when no kinetic field is present

The first line of the operator in Eq. (10), W expresses the first three elements of the classical Dirac equation, with the modifications that it contains (a) the isotopic electric charges, and

(b) the kinetic vector potential \mathbf{D} of the considered kinetic field.

4.2 The magnetic and the electric moments

The two elements in W^A — considering the isotopic electric charges — coincide with the two elements of the classical Dirac equation as discussed in section 2, and yield the *magnetic* and the *electric* moments of the electron interacting with the electromagnetic field, respectively.

4.3 The magneto-kinetic and electro-kinetic moments

The essential difference, compared to the Eq. (5) of the semi-classical QED model discussed in section 2, is in W^D expressed in the lines 3 and 4 of the Eq. (10). The expression

$$\begin{aligned} & \hbar \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{rot} \left(\frac{\rho_V}{c} \mathbf{D} \right) \right) + \hbar \left(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\rho_V^2}{c^2} (D_j D_k - D_k D_j) \right) + \\ & + i\hbar\gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{grad} \left(\frac{\rho_V}{c} D_4 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_V}{c} \mathbf{D} \right) \right) + \gamma_5 \frac{\rho_V^2}{c^2} (\boldsymbol{\sigma}, D_4 \mathbf{D} - \mathbf{D} D_4) \end{aligned} \quad (11)$$

provides a kinetic moment of the \mathbf{D} field. Introducing the commutator of \mathbf{D} , one can write the following:

$$\begin{aligned} & \hbar \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{rot} \left(\frac{\rho_V}{c} \mathbf{D} \right) \right) + ig\hbar \frac{\rho_V^2}{c^2} (\boldsymbol{\sigma}, C_{jk}^i D_j D_k) + \\ & + i\hbar\gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{grad} \left(\frac{\rho_V}{c} D_4 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_V}{c} \mathbf{D} \right) \right) + \gamma_5 \frac{\rho_V^2}{c^2} (\boldsymbol{\sigma}, D_4 \mathbf{D} - \mathbf{D} D_4) \end{aligned} \quad (11a)$$

or

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma}, \text{rot}(\rho_V \mathbf{D}) \right) + \left(\frac{\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma}, igC_{jk}^i \frac{\rho_V^2}{c} D_j D_k \right) + \\ & + i\gamma_5 \left[\left(\frac{\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma}, \text{grad}(\rho_V D_4) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_V \mathbf{D}) \right) + \left(\frac{\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma}, \frac{\rho_V^2}{c} D_4 \mathbf{D} - \mathbf{D} D_4 \right) \right] \end{aligned} \quad (11b)$$

Here C_{jk}^i are the structure constants appearing with the multiplication of D_i -s, and g is the coupling constant for the electromagnetic interaction. C_{jk}^i are the coefficients in the commutation rule of the generators (transformation matrices) of the symmetry group of the kinetic (isotopic field-charge) field, as we saw in [10]. Since this field is subject of an SU(2) symmetry, there are three C_{jk}^i structure constants. This commutation term does not appear in W^A , because the \mathbf{A} vector potential of the EM field composes a vector, and the derivatives of \mathbf{A} commute with each other as vectors.

Since the derivatives of $D_{\dot{\mu}} = D(\dot{x}^{\mu})$ appearing in (10) are derived by the space-time coordinates, and $D_{\dot{\mu}}$ depends on \dot{x}^{μ} , all derivatives of $D_{\dot{\mu}}$ must be interpreted as $\frac{\partial D_{\dot{\mu}}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial D_{\dot{\mu}}}{\partial \dot{x}^{\rho}} \frac{\partial \dot{x}^{\rho}}{\partial x^{\nu}} = D_{\dot{\mu},\rho} \lambda_{\nu}^{\rho} = D_{\dot{\mu},\rho} \dot{x}_{\nu}^{\rho}$ (where $\mu, \nu, \rho = 1, \dots, 4$).

For simplicity, let us assume that \mathbf{D} depends only on the linear combinations of the first derivatives and multiplications of the velocity, on the velocity itself, as well as on $\kappa = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_i^2}{c^2}}}$ and a constant. So

$$D(\dot{x}^\mu) = \alpha \frac{\partial \dot{x}^\mu}{\partial \dot{x}^\rho} \frac{\partial \dot{x}^\rho}{\partial x^\nu} + \beta \dot{x}_i \dot{x}_j + \gamma \dot{x}_i + \delta \kappa + \varepsilon$$

where $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ and ε are coefficients, not depending on the actual relative velocity of the interacting charges. In this plausible, but quite not the most general case, the commutator of D_j and D_k is not identically 0. However, all the three elements of D_i ($i = 1, 2, 3$) commute with D_4 . In this case the third term in N^D vanishes.

In the general case, (11b) can be written as $\left(\frac{\hbar}{c}\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M}^D\right) + i\gamma_5 \left(\frac{\hbar}{c}\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{N}^D\right)$, where

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^D &= \text{rot} \rho_V \mathbf{D} + igC_{jk}^i \frac{\rho_V^2}{c} D_j D_k && \text{and} \\ \mathbf{N}^D &= \text{grad} \rho_V D_4 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho_V \mathbf{D} + \frac{\rho_V^2}{\hbar c} (\mathbf{D} D_4 - D_4 \mathbf{D}) \end{aligned} \tag{11c}$$

Note, that in the expressions of \mathbf{M}^D and \mathbf{N}^D , there appear only the potential (Coulomb) charge densities. This is natural, because the velocity dependence is considered in the kinetic gauge potential \mathbf{D} , which these charges interact with. Since ρ_V does not depend either on space-time co-ordinates, or on the actual velocity, it is not subject of derivation:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^D &= \rho_V \text{rot} \mathbf{D} + igC_{jk}^i \frac{\rho_V^2}{c} D_j D_k && \text{and} \\ \mathbf{N}^D &= \rho_V \text{grad} D_4 + \frac{\rho_V}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \frac{\rho_V^2}{\hbar c} (\mathbf{D} D_4 - D_4 \mathbf{D}) \end{aligned}$$

The kinetic moment is an additional, new quantity in the isotopic electric charge theory compared to the classical Dirac theory. The two kinetic moments determine the isotopic electric charge spin Δ_{el} . According to [10] the isotopic field-charge spin (including also the isotopic electric charge spin) is a conserved quantity, so it must commute with the Hamiltonian.

4.3.1 The magneto-kinetic moment

The first term in (11), \mathbf{M}^D (with an $(m_T - m_V)$ divider) can be considered as a «magneto-kinetic» additional energy of the electric charge due to its additional degree of freedom assigned to it by the interaction with the kinetic field. For D_μ does not behave as a vector, its derivatives include an additional, gauge term, what the derivation of the extended Dirac equation (10) provided automatically in the form of the third term (W^D) in the expression (10). So, this second term of \mathbf{M}^D forms part of the «magneto-kinetic» momentum of the field (cf., the first line of (11)).

The full magnetic moment of the interaction (with a mass-dimension divider), in the presence of the kinetic gauge field, will be:

$$\left(\frac{\hbar}{c}\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M}^{FULL}\right) = \left(\frac{\hbar}{c}\boldsymbol{\sigma}, \rho_V \text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{D}) + igC_{jk}^i \frac{\rho_V^2}{c} D_j D_k\right)$$

4.3.2 The electro-kinetic moment

The third term in (11) is similar to the expression got for the electric moment of the EM field in the line 2 (W^A) of (10), extended also with a gauge term. It can be considered in a similar way,

like in Dirac's theory, as an «electro-kinetic» additional energy of the electron. Also, similar to $i\hbar\gamma_5 \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{grad} \left(\frac{\rho_T}{c} A_4 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_V}{c} \mathbf{A} \right) \right)$, the «electro-kinetic»

$$i\gamma_5 \left[\left(\frac{\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma}, \rho_V \text{grad} D_4 + \frac{\rho_V}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_V}{c} \mathbf{D} \right) \right) + \left(\frac{\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma}, \frac{\rho_V^2}{\hbar c} (\mathbf{D} D_4 - D_4 \mathbf{D}) \right) \right]$$

is apparently imaginary too. Dirac observed the following: «It is doubtful whether the electric moment has any physical meaning» as a result that the multiplication due to which the imaginary term appeared, was an artificial involvement in the equation. In our case the multiplier of the three-vector $\boldsymbol{\sigma}$ (or $\gamma_5 \boldsymbol{\sigma}$) is a sum, which includes the components of the velocity-dependent field. In the presence of that kinetic field, one can choose the co-ordinate system fitted to the electron's velocity arrow so that the multiplier of the imaginary σ_2 be non-zero. Then, the expression will yield a real component for the sum of the electric and the electro-kinetic energy, while there will be left two imaginary terms for the multiplication by σ_1 and σ_3 , whose sum should be made equal to 0, and provide a constraint for the energy of the interaction. Note, that these two expressions are not fully imaginary, since D_4 , depending on the fourth component of the velocity, is imaginary itself. On the other side, the multiplier of σ_2 contains an imaginary component, too ($\text{grad}_2 D_4$). With these conditions, one can eliminate the imaginary terms in (10) and give physical meaning to the electric and the electro-kinetic moments.

$$\begin{aligned} i\hbar\gamma_5 \left(\sigma_1, \text{grad}_1 \left(\frac{\rho_T}{c} A_4 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_V}{c} A_1 \right) \right) + i\hbar\gamma_5 \left(\sigma_1, \text{grad}_1 \left(\frac{\rho_V}{c} D_4 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_V}{c} D_1 \right) \right) + \\ + \gamma_5 \frac{\rho_V^2}{\hbar c^2} (\sigma_1, D_4 D_1 - D_1 D_4) = 0 \\ i\hbar\gamma_5 \left(\sigma_3, \text{grad}_3 \left(\frac{\rho_T}{c} A_4 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_V}{c} A_3 \right) \right) + i\hbar\gamma_5 \left(\sigma_3, \text{grad}_3 \left(\frac{\rho_V}{c} D_4 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_V}{c} D_3 \right) \right) + \\ + \gamma_5 \frac{\rho_V^2}{\hbar c^2} (\sigma_3, D_4 D_3 - D_3 D_4) = 0 \end{aligned}$$

The two conditions of the above equation can be satisfied, if both the imaginary and the real parts are equal to 0 separately.

$$\begin{aligned} i\hbar \left[\text{grad}_1 (\rho_T A_4) + \frac{\rho_V}{c} \frac{\partial}{\partial t} (A_1 + D_1) \right] + \frac{\rho_V^2}{\hbar c} (D_4 D_1 - D_1 D_4) = 0 \\ \text{grad}_1 D_4 = 0 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} i\hbar \left[\text{grad}_3 (\rho_T A_4) + \frac{\rho_V}{c} \frac{\partial}{\partial t} (A_3 + D_3) \right] + \frac{\rho_V^2}{\hbar c} (D_4 D_3 - D_3 D_4) = 0 \\ \text{grad}_3 D_4 = 0 \end{aligned}$$

We add from among the multipliers of σ_2 :

$$\text{grad}_2 D_4 = 0$$

Provided that the components of the \mathbf{A} vector potential and the value of the interacting charges are known, this is a set of differential equations to determine the components D_1 , D_2 , D_3 , D_4 , and the actual value of the velocity arrowed parallel to σ_2 , in each space-time point.

The reference frame, in which we calculated the constraints for \mathbf{D} , rotates together with the kinetic charge density ρ_T . This choice provided a restriction for the interacting system, while

at the same time, it made us possible to calculate the exact forms of the four components of D_μ in the given reference frame.

Considering also the assumption formulated in section 4.3, the set of differential equations reduces to the following:

$$\begin{aligned} \text{grad}_1(\rho_T A_4) + \frac{\rho_V}{c} \frac{\partial}{\partial t}(A_1 + D_1) = 0; \quad \text{grad}_1 D_4 = 0 \\ \text{grad}_2 D_4 = 0 \\ \text{grad}_3(\rho_T A_4) + \frac{\rho_V}{c} \frac{\partial}{\partial t}(A_3 + D_3) = 0; \quad \text{grad}_3 D_4 = 0 \end{aligned} \quad (11d)$$

This set of five differential equations can be solved and yield the four D_μ and — through ρ_T — the actual relative velocity of the two-charge system.

In this case the electro-kinetic moment (with a mass-dimension divider) will take the form where the first and third terms in the right side are equal to 0, so the electro-kinetic moment (with a mass-dimension divider) will reduce to:

$$i\gamma_5 \left(\frac{\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{N}^D \right) = i\gamma_5 \rho_V \left(\frac{\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma}, \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right).$$

The full electric moment (with an $(m_T - m_V)$ divider) can be written as:

$$i\gamma_5 \left(\frac{\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{N}^{\text{FULL}} \right) = i\gamma_5 \left(\frac{\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma}, \text{grad} \rho_T A_4 + \frac{\rho_V}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \mathbf{D}) \right),$$

whose second component is real, first and third components are 0. The electric moment of the interacting particles is directed towards the real component of the spin, and this direction coincides with the direction of the velocity of one of the interacting particles, while the position of the other is fixed. We have not experienced such moment in the classical Dirac theory⁵.

4.4 The Hamiltonian and the Lagrangian of the interaction

Line 5 of the Eq. (10) yields the Schrödinger wave equation $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \mathbf{H} \psi$, similar to the clue we followed in section 2:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[-\rho_T A_4 - \rho_V D_4 - \gamma_5 (\boldsymbol{\sigma}, i\hbar c \text{ grad} - \rho_V \mathbf{A} - \rho_V \mathbf{D}) + \gamma_4 m_V c^2 \right] \psi \quad (12)$$

and hence the Hamiltonian

$$\mathbf{H} = -\rho_T A_4 - \rho_V D_4 - \gamma_5 (\boldsymbol{\sigma}, i\hbar c \text{ grad} - \rho_V \mathbf{A} - \rho_V \mathbf{D}) + \gamma_4 m_V c^2$$

The Lagrangian of the interaction field can be constructed from the Hamiltonian. So

$$\mathbf{L} = \rho_T A_4 + \rho_V D_4 - \gamma_5 (\boldsymbol{\sigma}, i\hbar c \text{ grad} - \rho_V \mathbf{A} - \rho_V \mathbf{D}) + \gamma_4 m_V c^2$$

Obviously, this expression differs from the classical one in the two terms, which include the three-component \mathbf{D} , and the fourth component of the vierbein, i.e., D_4 , as well as in the two isotopic electric charges.

⁵The fact is, that Dirac [19, p. 619] could not do anything with the electric moment, and so did all but most textbooks following him. The appearance of the kinetic field \mathbf{D} made possible to calculate the full electric moment.

As we showed in Sec. 2, the condition for getting the Schrödinger equation was, that $m_T \gg m_V$, that means, an extreme relativistic situation. If $m_T \neq m_V$, one can divide the full Eq. (10) by $(m_T - m_V)$. One could obtain Eq. (12) in this way. The division by $(m_T - m_V)$ may cause an increase in the energy of the system when the difference between $m_T - m_V$ approaches to 0, unless the increase in \mathbf{D} does not counterbalance it. This means, first, that \mathbf{D} must be a monotone function of the velocity, at second we can determine a limit of its monotone increase with the increase of the velocity.

Let we write again Eq. (10) in the form of

$$[W + W^A + W^D - H(m_T - m_V)c] \psi = 0 \quad (13)$$

Close to the rest, division of Eq. (10) or (13) by $(m_T - m_V)$ makes W and W_A high. This operation gets sense only at far relativistic velocities. Nevertheless, just in the case of low velocities, the role of $H(m_T - m_V)c$ can be neglected, since $(m_T - m_V) \rightarrow 0$. What is interesting for us, it is the role of W^D . Let's divide W^D (11) by $(m_T - m_V)$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\hbar}{c} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{m_T - m_V}, \rho_V \text{rot} \mathbf{D} \right) + \left(\frac{\hbar}{c} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{m_T - m_V}, igC_{jk}^i \frac{\rho_V^2}{\hbar c} D_j D_k \right) + \\ & + i\gamma_5 \left[\left(\frac{\hbar}{c} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{m_T - m_V}, \rho_V \text{grad} D_4 + \frac{\rho_V}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right) + \left(\frac{\hbar}{c} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{m_T - m_V}, \frac{\rho_V^2}{\hbar c} (\mathbf{D} D_4 - D_4 \mathbf{D}) \right) \right]. \end{aligned}$$

As we saw, the last term can be disregarded, since according to our simplifying assumption D_i and D_4 commute with each other. So can one do with $\text{grad} D_4$ which is 0. We get:

$$\rho_V \left(\frac{\hbar}{c} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{m_T - m_V}, \text{rot} \mathbf{D} + igC_{jk}^i \frac{\rho_V}{c} D_j D_k \right) + i\gamma_5 \rho_V \left(\frac{\hbar}{c} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{m_T - m_V}, \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right) \quad (14)$$

Note, that in (14) there appear only the potential (Coulomb) charges, and the mass difference between the kinetic and potential states. (14) can be written also in the form:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\hbar}{c} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{m_T - m_V}, \mathbf{M}^D \right) + i\gamma_5 \left(\frac{\hbar}{c} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{m_T - m_V}, \mathbf{N}^D \right) = \\ & = \rho_V \left(\frac{\hbar}{c} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{m_T - m_V}, \text{rot} \mathbf{D} + igC_{jk}^i \frac{\rho_V}{c} D_j D_k \right) + i\gamma_5 \rho_V \left(\frac{\hbar}{c} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{m_T - m_V}, \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right) \end{aligned} \quad (14a)$$

where \mathbf{M}^D and \mathbf{N}^D are the same, as defined in (11c), considering the mentioned neglecting. The two terms in the left side of (14a) are the additional *magneto-kinetic* and the *electro-kinetic* moments of the kinetic gauge field of the interaction. As we saw above, in contrast to the classical Dirac theory, in the presence of a kinetic gauge field the electro-kinetic momentum cannot be disregarded. Added to the components which are calculated from the electromagnetic field, it may have real components, and in a properly-chosen reference frame it obtained physical meaning. This latter option was not considered in the classical QED (cf. footnote 4).

The *full magnetic moment* of the interaction in the presence of the kinetic gauge field, will be:

$$\left(\frac{\hbar}{c} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{m_T - m_V}, \mathbf{M}^{\text{FULL}} \right) = \rho_V \left(\frac{\hbar}{c} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{m_T - m_V}, \text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{D}) + igC_{jk}^i \frac{\rho_V}{c} D_j D_k \right).$$

The full electric moment can be written as:

$$i\gamma_5 \left(\frac{\hbar}{c} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{m_T - m_V}, \mathbf{N}^{\text{FULL}} \right) = i\gamma_5 \left(\frac{\hbar}{c} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{m_T - m_V}, \text{rot} \rho_T A_4 + \frac{\rho_V}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \mathbf{D}) \right).$$

Note, that in \mathbf{N}^{FULL} , there appears also the kinetic charge density.

There are these \mathbf{M}^{FULL} and \mathbf{N}^{FULL} which should commute with the Hamiltonian operator of the interacting two charges (cf. Sec. 5).

5 The field tensors of the EM and the kinetic fields

5.1 The field tensor of the EM field

In accordance with [10] the obtained equations yield the classical QED fields in the absence of a kinetic D field. Thus the elements of the field tensor of the EM field, as well as the conserved current are of the same form, like we learned in our usual textbooks. They provide the same conserved quantities, that means, the electric charge, like we learned in the classical theory. This conclusion coincides with all said in connection with $J^{(1)}$ in [10].

5.2 The field tensor of the kinetic field

The field tensor of the kinetic field can be obtained as:

$$F^{(2)\mu\nu}(x) = \frac{\partial D_{\dot{\rho}}\lambda_{\mu}^{\rho}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial D_{\dot{\sigma}}\lambda_{\nu}^{\sigma}}{\partial x_{\mu}} + D_{\dot{\rho}}\lambda_{\mu}^{\rho}D_{\dot{\sigma}}\lambda_{\nu}^{\sigma} + D_{\dot{\sigma}}\lambda_{\nu}^{\sigma}D_{\dot{\rho}}\lambda_{\mu}^{\rho}, \quad (15)$$

where $\lambda_{\mu}^{\rho} = \partial_{\mu}\dot{x}^{\rho} = \frac{\partial\dot{x}^{\rho}}{\partial x_{\mu}} = \dot{x}_{,\mu}^{\rho}$ (cf. Eq. (6) in [10]).

Like we obtained the elements of the field tensor for the EM field from the terms in the second line in (10), we can determine the elements of the kinetic field tensor from (11)-(11b). For this reason, we will use the expressions defined for \mathbf{M}^D and \mathbf{N}^D , which denote the two components of the field strengths of the field's kinetic potential \mathbf{D} . From

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^D &= \rho_V \text{rot}\mathbf{D} + igC_{jk}^i \frac{\rho_V^2}{c} D_j D_k \quad \text{and} \\ \mathbf{N}^D &= \rho_V \text{grad}D_4 + \frac{\rho_V}{\hbar c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \frac{\rho_V^2}{\hbar c} (\mathbf{D}D_4 - D_4\mathbf{D}) \end{aligned} \quad (16)$$

one can construct the following tensor:

$$\rho_V F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & M_3^D & -M_2^D & -i\gamma_5 N_1^D \\ -M_3^D & 0 & M_1^D & -i\gamma_5 N_2^D \\ M_2^D & -M_1^D & 0 & -i\gamma_5 N_3^D \\ i\gamma_5 N_1^D & i\gamma_5 N_2^D & i\gamma_5 N_3^D & 0 \end{bmatrix}$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i^D &= \partial_j \rho_V D_k - \partial_k \rho_V D_j + igC_{jk}^i \frac{\rho_V^2}{c} D_j D_k = \rho_V (\partial_j D_k - \partial_k D_j) + igC_{jk}^i \frac{\rho_V^2}{c} D_j D_k = \\ &= \rho_V \text{rot}_i \mathbf{D}(\dot{x}) + igC_{jk}^i \frac{\rho_V^2}{c} D_j D_k = \rho_V \left[(\partial_{\dot{\rho}} D_k) \lambda_j^{\dot{\rho}} - (\partial_{\dot{\rho}} D_j) \lambda_k^{\dot{\rho}} \right] + igC_{jk}^i \frac{\rho_V^2}{c} D_j D_k \end{aligned} \quad (17)$$

and

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_i^D &= \partial_i \rho_V D_4 + \frac{1}{\hbar c} \partial_t \rho_V D_i + \frac{\rho_V^2}{\hbar c} D_i D_4 - \frac{\rho_V^2}{\hbar c} D_4 D_i = \\ &= \rho_V (\partial_j D_4 + \frac{1}{\hbar c} \partial_t D_i) + \frac{\rho_V^2}{\hbar c} (D_i D_4 - D_4 D_i). \end{aligned} \quad (18)$$

Considering that $\text{grad} D_4 = 0$ and D_4 commutes with D_i :

$$\mathbf{M}_i^D = \rho_V \left(\text{rot}_i \mathbf{D}(\dot{x}) + igC_{jk}^i \frac{\rho_V}{c} D_j D_k \right) = \rho_V \left[(\partial_{\dot{\rho}} D_k) \lambda_j^{\dot{\rho}} - (\partial_{\dot{\rho}} D_j) \lambda_k^{\dot{\rho}} \right] + igC_{jk}^i \frac{\rho_V^2}{c} D_j D_k \quad (17a)$$

and

$$\mathbf{N}_i^D = \frac{\rho_V}{\hbar c} \partial_t D_i. \quad (18a)$$

6 The curvature of the connection field

The curvature of the connection field can be read from the coefficient of the covariant extension of the matrix terms in $F^{\mu\nu}$ (16)–(18). \mathbf{M}_i^D can be written also in the form (17a), where the last two terms define a covariant commutation of the elements D_i :

$$\mathbf{M}_i^D = \rho_V(\text{rot}_i \mathbf{D}(\dot{x}) + ig\Gamma_{jk}^i D_j D_k).$$

Here $\Gamma_{jk}^i = C_{jk}^i \frac{\rho_V}{c}$ denotes that Γ depends only on constants, while D_i depend on the \dot{x}^μ four-velocity components. The latter $\dot{x}^\mu(x_\nu)$ corresponds to the functions⁶ marked by Dirac [23] as y_ν^λ through which he defined the metric of the field. The metric of the field is much simpler than we expected, while the velocity dependence is transferred to the components of the \mathbf{D} field.

$$\begin{aligned} F^\mu &= F^{\mu\nu} \frac{1}{c} j_\nu = \frac{1}{\rho_V} \begin{bmatrix} 0 & M_3^D & -M_2^D & -i\gamma_5 N_1^D \\ -M_3^D & 0 & M_1^D & -i\gamma_5 N_2^D \\ M_2^D & -M_1^D & 0 & -i\gamma_5 N_3^D \\ i\gamma_5 N_1^D & i\gamma_5 N_2^D & i\gamma_5 N_3^D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\dot{x}_1}{c} \\ \frac{\dot{x}_2}{c} \\ \frac{\dot{x}_3}{c} \\ i\rho_V \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\rho_V} \begin{bmatrix} M_3^D \rho_T \frac{\dot{x}^2}{c} - M_2^D \rho_T \frac{\dot{x}^3}{c} + \gamma_5 N_1^D \rho_V \\ -M_3^D \rho_T \frac{\dot{x}^1}{c} + M_1^D \rho_T \frac{\dot{x}^3}{c} + \gamma_5 N_2^D \rho_V \\ M_2^D \rho_T \frac{\dot{x}^1}{c} - M_1^D \rho_T \frac{\dot{x}^2}{c} + \gamma_5 N_3^D \rho_V \\ i\gamma_5 N_1^D \rho_T \frac{\dot{x}^1}{c} + i\gamma_5 N_2^D \rho_T \frac{\dot{x}^2}{c} + i\gamma_5 N_3^D \rho_T \frac{\dot{x}^3}{c} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{c\rho_V} \begin{bmatrix} M_3^D \dot{x}^2 - M_2^D \dot{x}^3 & c\gamma_5 N_1^D \\ -M_3^D \dot{x}^1 + M_1^D \dot{x}^3 & c\gamma_5 N_2^D \\ M_2^D \dot{x}^1 - M_3^D \dot{x}^2 & c\gamma_5 N_3^D \\ i\gamma_5 N_1^D \dot{x}^1 + i\gamma_5 N_2^D \dot{x}^2 + i\gamma_5 N_3^D \dot{x}^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_T \\ \rho_V \end{bmatrix} = \frac{1}{c} H^{D\kappa l} \rho_l \end{aligned}$$

where $(\kappa = 1, \dots, 4)$, $(l = 1, 2)$, or in the form

$$F^\mu = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} M_3^D \dot{x}^2 - M_2^D \dot{x}^3 & c\gamma_5 N_1^D \\ -M_3^D \dot{x}^1 + M_1^D \dot{x}^3 & c\gamma_5 N_2^D \\ M_2^D \dot{x}^1 - M_3^D \dot{x}^2 & c\gamma_5 N_3^D \\ i\gamma_5 N_1^D \dot{x}^1 + i\gamma_5 N_2^D \dot{x}^2 + i\gamma_5 N_3^D \dot{x}^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\rho_T}{c} \\ \rho_V \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

It is obvious in the latter form that the isotopic electric charges do not concern the electric moment, only their ratio is a coefficient to the magneto-kinetic moment. This ratio depends

⁶While the Dirac equation introduced and discussed first in his 1928 and 1929 papers is presented in almost all usual textbooks on QED and field theory, his extension published in 1962 is mentioned rarely (cf., [40]).

only on the Lorentz transformation, in which there appears the relative velocity of the two interacting charges to each other. This expression for the Lorentz force shows that our Γ curvature obtained for the kinetic field is in its form similar to the Γ curvature for the EM field as determined by Landau and Lifshitz [29, §85].

The kinetic addition to the Lorentz force can be defined with the use of the above $F^{\mu\nu}$:

$$F^\mu = \frac{1}{c\rho_V} \begin{bmatrix} [M_k^D \times \dot{x}^j] & c\gamma_5 N_i^D \\ i\gamma_5 N_i^D \dot{x}^i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_T \\ \rho_V \end{bmatrix} = \frac{1}{c} H^{D\kappa l} \rho_l \quad (19a)$$

This expression for the Lorentz force indicates that the weak intermediate bosons can be derived from the tensor in the first square bracket []: γ , with mass zero, is associated with H^{D22} , W^\pm with H^{D12} and H^{D21} , while Z^0 with H^{D11} . Please, note the asymmetry between H^{D12} and H^{D21} , what confirms the assumption by C. Møller [32], and what was indicated by Weinberg [39] in another way. Note that we derived the unification of the electromagnetic and the weak interactions in a different way than Weinberg did. Nevertheless, this latter is the theme of another paper.

The kinetic addition to the Lorentz force expresses the velocity dependence (which was foreseen by Dirac), and through this, the Finsler geometry (like also in [26]) to be applied for the extended electromagnetic field.

References

- [1] Achiezer A.I. Berestetskii V.B. Kvantovaya elektrodynamika. 3rd modified edition. Moskva, Nauka, 1969, 623 p.
- [2] Belavin A., Polyakov A., Schwartz A., Tyupkin Y. // *Phys. Lett.* 59B, 1975, p. 85.
- [3] Bethe H., Fermi E. Über die Wechselwirkung von zwei elektronen // *Zeitschrift für Physik*, 77, 5-6, 1932, pp. 296–306.
- [4] Breit G. // *Phys. Rev.*, 34, 1929, p. 553.
- [5] Breit G. // *Phys. Rev.*, 39. 1932, p. 616.
- [6] Brnzei N., Siparov S. Equations of electromagnetism in some special anisotropic spaces. 2008, arXiv:0812.1513v1 [gr-qc] 15 p.
- [7] Coleman S., Glashow Sh.L. Cosmic Ray and Neutrino Tests of Special Relativity // *Physics Letters B*, 405, 1997, pp. 249–252. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9703240>.
- [8] Darvas G. Conserved Noether currents, Utiyama's theory of invariant variation, and velocity dependence in local gauge invariance // *Concepts of Physics*, VI, 1, 2009, pp. 3–16. <http://arxiv.org/abs/0811.3189v1>.
- [9] Darvas G. GTR and the Isotopic Field Charge Spin Assumption. Presented to the «Physical Interpretations of Relativity Theory – 11» conference, held in Moscow, 4-7 July, 2011, 10 p.
- [10] Darvas G. The Isotopic Field Charge Spin Assumption // *International Journal of Theoretical Physics*, 50, 10, 2011, pp. 2961–2991.
- [11] Darvas G. Isotopic Field Charge Spin Conservation in General Relativity Theory, 2012, pp. 53–65, in: eds.: M.C. Duffy, V.O. Gladyshev, A.N. Morozov, P. Rowlands Physical Interpretations of Relativity Theory, Proceedings of the International Scientific Meeting PIRT-2011, Moscow, 4-7 July, Moscow, Liverpool, Sunderland: Bauman Moscow State Technical University, 347 p.
- [12] Darvas G. Another Version of Facts. On Physical Interactions. 2012, coming.
- [13] Darvas G. Finsler geometry in GTR in the presence of a velocity dependent gauge field // *Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Series III: Mathematics, Informatics, Physics*, 5 (54), 1, 2012, pp. 85–96.

- [14] Darvas G. Finsler geometry in the presence of isotopic field charges applied for gravity, pp. 17–42 In: Proceedings of the Vth Petrov International Symposium, “High Energy Physics, cosmology and Gravity, Ed. S. Moskaliuk, Kiev: TIMPANI, 299 p., 2012.
- [15] Darvas G. The Isotopic Field-Charge Assumption Applied to the Electromagnetic Interaction, 32 p. (2012, under review).
- [16] de Haas E.P.J. The combination of de Broglie’s harmony of the phases and Mie’s theory of gravity results in a principle of equivalence for quantum gravity // *Ann. Fond. L. de Brioglie*, 29, 4, 2004, pp. 707–726.
- [17] de Haas E.P.J. A renewed theory of electrodynamics in the framework of a Dirac ether. *Proc. P.I.R.T.-IX*, London, 2004, PD Publications, Liverpool, 2004, pp. 95–123.
- [18] de Haas E.P.J. From Laue’s stress-energy tensor to Maxwell’s Equations and the implications for Einstein’s GTR // *Proceedings of the Int. Conference «Physical Interpretation of Relativity Theory (PIRT-05)»*, eds. M.C.Duffy et al., Moscow, Bauman Univ. Press, 2005.
- [19] Dirac P.A.M. The quantum gravity of the electron // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 117 (778), 1928, pp. 610–624.
- [20] Dirac P.A.M. A theory of electrons and protons // *Proceedings of the Royal Society of London*, 126, 801, 1929, pp. 360–365.
- [21] Dirac P.A.M. A new classical theory of electrons // *Proc. Roy. Soc. A*, 209, 1951, pp. 291–296.
- [22] Dirac P.A.M. // *Nature*, 168, 1951, pp. 906–907.
- [23] Dirac P.A.M. An extensible model of the electron // *Proc. Roy. Soc. A*, 268, 1962, pp. 57–67.
- [24] Feynman R.P. Space-time approach to quantum electrodynamics // *Phys. Rev.*, 76, 6, 1949, pp. 769–789.
- [25] Jackiw R., Rebbi C. Conformal properties of Yang-Mills pseudoparticle // *Phys. Rev. D*, 14, 2, 1976, pp. 517–523.
- [26] Kostelecky A. Riemann-Finsler geometry and Lorentz-violating kinematics // *Phys.Lett.B*, 2011.
- [27] Kostelecky A. Background information on Lorentz and CPT violation, 2012.
<http://physics.indiana.edu/~kostelec/faq.html>
- [28] Kostelecky A. Articles on Lorentz and CPT violation, 2012.
<http://physics.indiana.edu/~kostelec/faq.html#20>
- [29] Landau L.D., Lifshitz E.M. Teoriya Polya [in Russian], 1967, Moskva, Nauka, 458 p.
- [30] Mie G. Grundlagen einer Theorie der Materie // *Ann. Phys.*, 37, 1912, pp. 511–534.
- [31] Mills R. Gauge fields // *American Journal of Physics*, 57 (6), 1989, pp. 493–507.
- [32] Møller C. Über den Stoß zweier Teilchen unter Berücksichtigung der Retardation der Kräfte, *Zeitschrift für Physik*, 70, 11-12, 1931, pp. 786–795.
- [33] Noether E.A. Invariante Variationsprobleme. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen: Mathematisch-physikalische Klasse*, pp. 235–257.
- [34] Pons J.M., Salisbury D.C., Shepley L.C. Gauge transformations in Einstein-Yang-Mills theories. 1999, arXiv:gr-qc/9912086 v1. (Submitted to J. Math. Phys).
- [35] Siparov S. Introduction to the Anisotropic Geometroynamics. Singapore, World Scientific, 2012, 303 p.
- [36] van’t Hooft G. Introduction to General Relativity. Princeton, Rinton Press Inc., 2002.

- [37] Voicu N. Equations of electromagnetism in some special anisotropic spaces. Part 2 // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 7, 2 (14), 2010, pp. 61–72.
- [38] von Laue M. // *Ann. Phys.*, 35, 1911, pp. 524–542.
- [39] Weinberg S. A model of leptons // *Phys. Rev. Lett.*, 19, 21, 1967, pp. 1264–1266.
- [40] Weinberg S. Changing Attitudes and the Standard Model, p. 38, in Hoddeson L., L. Brown, M. Riordan and M. Dresden: *The Rise of the Standard Model*. Cambridge University Press, Cambridge., 1997, pp. 36–44.

ФИНСЛЕРОВ ПОДХОД К ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМУ ВЗАИМОДЕЙСТВИЮ В ПРИСУТСТВИИ ИЗОТОПИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВЫХ И КИНЕТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Юрий Дарваш

Симметрион, Будапешт, Венгрия

darvasg@iif.hu

Предмет настоящей статьи – применение теории изотопических зарядовых спиновых полей к электромагнитному взаимодействию. Получены модифицированные уравнения Дирака в присутствии зависящих от скорости калибровочных и изотопических зарядовых полей (электрических зарядов Кулоновского и Лоренцевского типа, а также гравитационной и инертной масс), которые сравниваются с классическим уравнением Дирака [6, 34, 35, 37].

Показано, что присутствие изотопических зарядовых полей будет возмущать лоренцеву инвариантность этого уравнения. Существует преобразование, которое восстанавливает эту инвариантность в соответствии с сохранением изотопического зарядового спинового поля [8]. Оно основывается на определении тензора поля, который адаптирован к вышеприведенным условиям.

Присутствие кинетических калибровочных полей делает невозможным предположение о взаимодействии плоских электромагнитных полей. Поле связности, которое определяет кривизну, выводится из ковариантной производной кинетического (зависящего от скорости) калибровочного поля. В этом случае возникает зависящая от скорости метрика, которая приводит к зависящей от направления, т.е. финслеровой геометрии [11, 14]. Выбор такой «теории электрона» (по словам Дирака) был показан в расширении его теории в [23]. Настоящая работа представляет собой попытку дальнейшего расширения.

Ключевые слова: изотопические электрические заряды, изотопические массы, изотопический спин электрического заряда, сохранение, электромагнитное взаимодействие, электрослабое взаимодействие, кинетические калибровочные поля, расширенное уравнение Дирака, магнито-кинетический момент, электрокинетический момент, взаимодействующий спин, случайная симметрия, сохраняющиеся нетеровы токи.

ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ В ТЕРМИНАХ МИРОВОЙ ФУНКЦИИ

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН, Москва, Россия

rylov@ipmnet.ru

Показано, что геометрию пространства-времени следует формулировать в терминах мировой функции, потому что только описание в терминах мировой функции позволяет распознать одинаковые геометрические объекты в областях пространства-времени с различной геометрией. Геометрия Бервальда-Моора, сформулированная в терминах мировой функции, оказывается многовариантной геометрией, которая едва ли может использоваться как геометрия пространства-времени, потому что в этой геометрии вихляния мировых линий свободных частиц отличны от реальных вихляний.

Ключевые слова: распознавание одинаковых геометрических объектов; принцип деформации; многовариантная геометрия; мировая функция; линейное векторное пространство; векторное расслоение; роль координат.

1 Введение

Финслерова геометрия является некоторым обобщением римановой геометрии, использующей векторное расслоение [1, 2]. Это расслоение оборудовано метрической функцией. Эта метрическая функция порождает некоторую геометрию, которая может не быть локально евклидовой (или псевдоевклидовой). Это означает, что финслерова геометрия является обобщением римановой геометрии, потому что риманова геометрия является локально евклидовой. Но финслеровы геометрии, так же как и римановы геометрии являются локальными геометриями. Они описываются бесконечно малым расстоянием ds между точками x и $x + dx$, которое в случае римановой геометрии определяется соотношением

$$2\sigma(x, x + dx) = ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (1.1)$$

Здесь σ есть мировая функция римановой геометрии. Для построения геометрии в некоторой конечной области используется система координат, которая связывает описания в разных бесконечно малых областях. Кроме того геометрия \mathcal{G}_1 в области Ω_1 оказывается связанной с геометрией \mathcal{G}_2 в области Ω_2 . Например, в области Ω_1 с пространственно-временной геометрией Минковского \mathcal{G}_M имеется геометрический объект \mathcal{O}_M . Этот геометрический объект движется в пространстве-времени без деформации. Он оказывается в другой области Ω_2 пространства-времени с геометрией \mathcal{G} . В геометрии \mathcal{G} этот объект описывается как \mathcal{O} . Как описание геометрического объекта \mathcal{O} в пространственно-временной геометрии \mathcal{G} может быть выражено через описание того же объекта \mathcal{O}_M в геометрии \mathcal{G}_M ? Ни риманова, ни финслерова геометрия не могут ответить на этот вопрос, потому что эти геометрии не рассматривают проблему деформации геометрии. Единственным исключением является отрезок $\mathcal{T}_{[AB]}$ прямой линии между точками A и B . Предполагается, что отрезок $\mathcal{T}_{[AB]}$ является одномерным отрезком кривой в римановой или в финслеровой геометрии.

Ответить на этот важный вопрос о связи между \mathcal{O} и \mathcal{O}_M можно только в том случае, когда геометрия пространства-времени описывается в терминах мировой функции σ . Такая геометрия называется физической геометрией. Любая физическая геометрия получается в результате деформации собственно евклидовой геометрии, которая рассматривается

как стандартная геометрия. В результате физическая геометрия может быть получена из другой физической геометрии с помощью некоторой деформации.

Это очень старая идея полностью описывать геометрию с помощью функции расстояния (или мировой функции). Вначале это было метрическое пространство, описываемое с помощью метрики (расстояния). Метрика была ограничена рядом условий таких как аксиома треугольника и условие неотрицательности метрики. Условие неотрицательности метрики не позволяло применить метрическое пространство для описания пространства-времени. Главным недостатком метрической геометрии и дистантной геометрии [3, 4] была невозможность построения геометрических объектов в терминах метрики ρ , или в терминах мировой функции $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$. Построение геометрических объектов в терминах мировой функции должно быть возможным, потому что предполагается, что геометрия полностью описывается в терминах мировой функции и только в терминах мировой функции. Более того, физическая геометрия допускает бескоординатное описание.

Такая ситуация возможна, если понятия геометрии и геометрические объекты описываются правильно [6].

Определение 1.1. Физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ есть множество точек Ω с заданной на нем однозначной функцией σ на $\Omega \times \Omega$

$$\sigma : \quad \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma(P, P) = 0, \quad \sigma(P, Q) = \sigma(Q, P), \quad P, Q \in \Omega \quad (1.2)$$

Определение 1.2. Физические геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma_1, \Omega_1\}$ и $\mathcal{G}_2 = \{\sigma_2, \Omega_2\}$ эквивалентны ($\mathcal{G}_1 \text{eqv} \mathcal{G}_2$), если множество точек $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \wedge \sigma_1 = \sigma_2$, или $\Omega_2 \subseteq \Omega_1 \wedge \sigma_2 = \sigma_1$.

Замечание: Совпадение точечных множеств Ω_1 и Ω_2 не является необходимым для эквивалентности геометрий \mathcal{G}_1 и \mathcal{G}_2 . Если потребовать совпадения Ω_1 и Ω_2 в случае эквивалентности \mathcal{G}_1 и \mathcal{G}_2 , то удаление одной точки P из точечного множества Ω_1 превращает геометрию $\mathcal{G}_1 = \{\sigma_1, \Omega_1\}$ в геометрию $\mathcal{G}_2 = \{\sigma_1, \Omega_1 \setminus P\}$, которая оказывается не эквивалентной геометрии \mathcal{G}_1 . Такая ситуация представляется недопустимой, потому что геометрия на части $\omega \subset \Omega_1$ точечного множества Ω_1 оказывается неэквивалентной геометрии на всем точечном множестве Ω_1 .

В соответствии с определением геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma, \omega_1\}$ и $\mathcal{G}_2 = \{\sigma, \omega_2\}$ на частях множества Ω , $\omega_1 \subset \Omega$ и $\omega_2 \subset \Omega$ эквивалентны ($\mathcal{G}_1 \text{eqv} \mathcal{G}$), ($\mathcal{G}_2 \text{eqv} \mathcal{G}$) геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$, тогда как геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma, \omega_1\}$ и $\mathcal{G}_2 = \{\sigma, \omega_2\}$ вообще говоря, не эквивалентны, если $\omega_1 \not\subseteq \omega_2$ и $\omega_2 \not\subseteq \omega_1$. Таким образом, отношение эквивалентности, вообще говоря, интранзитивно. Геометрия пространства-времени может варьироваться в разных областях пространства-времени. Это означает, что физическое тело, рассматриваемое как геометрический объект, может эволюционировать таким образом, что оно будет оказываться в областях с различной геометрией пространства-времени.

Определение 1.3. Геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n}$ геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ есть подмножество $g_{\mathcal{P}_n} \subset \Omega$ точек множества Ω . Этот геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n}$ есть множество корней $R \in \Omega$ функции $F_{\mathcal{P}_n}$, $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\} \subset \Omega$

$$F_{\mathcal{P}_n} : \quad \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.3)$$

где

$$F_{\mathcal{P}_n} : \quad F_{\mathcal{P}_n}(R) = G_{\mathcal{P}_n}(u_1, u_2, \dots, u_s), \quad s = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \quad (1.4)$$

$$u_l = \sigma(w_i, w_k), \quad i, k = 0, 1, \dots, n+1, \quad l = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \quad (1.5)$$

$$w_k = P_k \in \Omega, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad w_{n+1} = R \in \Omega \quad (1.6)$$

Здесь $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\} \subset \Omega$ суть $n + 1$ точек, являющихся параметрами геометрического объекта $g_{\mathcal{P}_n}$

$$g_{\mathcal{P}_n} = \{R | F_{\mathcal{P}_n}(R) = 0\}, \quad R \in \Omega, \quad \mathcal{P}_n \in \Omega^{n+1} \quad (1.7)$$

$F_{\mathcal{P}_n}(R) = G_{\mathcal{P}_n}(u_1, u_2, \dots, u_s)$ есть некоторая функция от $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ аргументов u_s и of $n+1$ параметров \mathcal{P}_n . Множество \mathcal{P}_n параметров геометрического объекта называется каркасом геометрического объекта. Подмножество $g_{\mathcal{P}_n}$ называется оболочкой каркаса. Всякий геометрический объект определяется в терминах и только в терминах мировой функции. Это определение не содержит ссылки на систему координат.

Когда частица рассматривается как геометрический объект, то ее движение в пространстве-времени описывается главным образом ее каркасом \mathcal{P}_n . Каркас является аналогом репера, прикрепленного к физическому телу. Следя за движением репера, можно следить за движением тела. Один каркас может иметь много оболочек и описывать разные геометрические объекты.

Если два геометрических объекта $g_{\mathcal{P}_n, \sigma}$ и $g'_{\mathcal{P}'_n, \sigma'}$ одинаковы, то их каркасы $\mathcal{P}_n, \sigma = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, и $\mathcal{P}'_n, \sigma' = \{P'_0, P'_1, \dots, P'_n\}$ должны быть одинаковы. Это означает, что

$$\sigma(P_i, P_k) = \sigma'(P'_i, P'_k), \quad i, k = 0, 1, \dots, n \quad (1.8)$$

Замечание: Произвольное подмножество точек точечного множества Ω не является, вообще говоря, геометрическим объектом. Предполагается, что физическое тело может иметь форму геометрического объекта только в случае, когда она определена соотношениями (1.3) - (1.7), потому что только в этом случае можно отождествить физические тела (геометрические объекты) в разных геометриях пространства-времени.

Пример: Отрезок прямой $\mathcal{T}_{[A, B]}$ в собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_E = \{\sigma_E, \Omega\}$ определяется как множество точек $R \in \Omega$

$$\mathcal{T}_{[A, B]} = \left\{ R | \sqrt{2\sigma_E(A, R)} + \sqrt{2\sigma_E(R, B)} = \sqrt{2\sigma_E(A, B)} \right\} \quad (1.9)$$

Этот отрезок $\mathcal{T}_{[A, B]}$ одномерен в \mathcal{G}_E . Это по определению означает, что сечение $S(\mathcal{T}_{[A, B]}, P)$ отрезка $\mathcal{T}_{[A, B]}$ в любой точке $P \in \mathcal{T}_{[A, B]}$ состоит из одной точки P .

$$S(\mathcal{T}_{[A, B]}, P) = \left\{ R | \bigwedge_{C=A, B} \sqrt{2\sigma_E(R, C)} = \sqrt{2\sigma_E(P, C)} \right\} = \{P\} \quad (1.10)$$

В другой физической геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ отрезок прямой $\mathcal{T}_{[A, B]}$ определяется соотношением

$$\mathcal{T}_{[A, B]} = \left\{ R | \sqrt{2\sigma(A, R)} + \sqrt{2\sigma(R, B)} = \sqrt{2\sigma(A, B)} \right\} \quad (1.11)$$

Его сечение имеет вид

$$S(\mathcal{T}_{[A, B]}, P) = \left\{ R | \bigwedge_{C=A, B} \sqrt{2\sigma(R, C)} = \sqrt{2\sigma(P, C)} \right\} \quad (1.12)$$

Множество точек $S(\mathcal{T}_{[A, B]}, P)$ может содержать много точек, потому что одно уравнение (1.11) в n -мерном пространстве представляет собой, вообще говоря, $(n-1)$ -мерную

поверхность. Тот факт, что (1.9) в \mathcal{G}_E представляет собой одномерный отрезок является следствием специальных свойств мировой функции σ_E .

Подчеркнем, что определения (1.9), (1.11) отрезка прямой $\mathcal{T}_{[A,B]}$ в геометриях \mathcal{G}_E и \mathcal{G} не содержат ссылок на систему координат. Это важно потому, что бескоординатное описание имеет дело с геометрией пространства-времени как таковой (без ссылок на систему координат, что может оказаться существенным). Мы покажем, что традиционная система координат может быть введена не всегда, потому что некоторые физические геометрии (например, дискретная геометрия пространства-времени) имеют неопределенную метрическую размерность (максимальное число линейно независимых векторов).

Отождествление геометрических объектов в разных областях с различной геометрией пространства-времени является очень важной операцией, которая может быть осуществлена только при описании в терминах мировой функции. Традиционное описание геометрии пространства-времени основано на формализме линейного пространства, который эффективен только в пространственно-временной геометрии Минковского \mathcal{G}_M и частично в римановой геометрии. Даже описание отрезка прямой $\mathcal{T}_{[AB]}$ приводит к разным результатам в физической геометрии и геометрии Минковского. В физической геометрии времениподобный отрезок $\mathcal{T}_{[AB]}$ (1.11) является, вообще говоря, 3-мерной трубкой, тогда как в \mathcal{G}_M это одномерная линия. В соответствии с традиционным аксиоматическим подходом к геометрии пространства-времени отрезок $\mathcal{T}_{[AB]}$ является одномерным в любой геометрии. Вообще, математический формализм традиционной геометрии пространства-времени не пригоден для одновременного рассмотрения нескольких различных геометрий в разных областях пространства-времени.

Мы воспринимаем геометрию пространства-времени только через движение физических тел в пространстве-времени, или через построение геометрических объектов, соответствующих этим телам. Как это следует из *определения 1.3* геометрического объекта, функция F как функция аргументов u_s (мировых функций от различных точек) одна и та же во всех физических геометриях. Это означает, что геометрический объект \mathcal{O}_1 в геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma_1, \Omega_1\}$ получается из того же самого геометрического объекта \mathcal{O}_2 в геометрии $\mathcal{G}_2 = \{\sigma_2, \Omega_2\}$ с помощью замены $\sigma_2 \rightarrow \sigma_1$ в определении геометрического объекта. Этот метод сравнения геометрических объектов в разных геометриях прост и эффективен. Он не использует традиционного (аксиоматического) похода к геометрии. Это является причиной, почему мы пытаемся представить финслерову геометрию в терминах мировой функции. Финслерова геометрия пространства-времени должна описываться в терминах мировой функции для того, чтобы можно было распознать одинаковые геометрические объекты в разных областях пространства-времени.

2 Мировая функция как генератор векторного расслоения

Способность мировой функции римановой геометрии порождать векторное расслоение была исследована в работе [7]. Эти свойства были использованы для построения относительного гравитационного поля [8]. Чтобы построить финслерову геометрию используется векторное расслоение TM римановой геометрии \mathcal{G}_M заданной на гладком многообразии M , где задана система координат K . Риманова геометрия \mathcal{G}_R может рассматриваться как частный случай физической геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ с мировой функцией $\sigma_R = \sigma(x, x')$, где x и x' суть координаты точек $P, P' \in M$ в системе координат K . Метрический тензор римановой геометрии \mathcal{G} имеет вид

$$g_{ik}(x) = \left[-\frac{\partial^2 \sigma(x, x')}{\partial x^i \partial x'^k} \right]_{x'=x}, \quad i, k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.1)$$

Чтобы построить векторное расслоение $TM_{x'}$ в точке $x' \in M$, обычно используется множество одномерных линий $S_{Lx'}$, проходящих через точку x' . Векторное расслоение $TM_{x'}$ является касательным ко всем линиям $L \subset S_{Lx'}$. В физической геометрии векторное расслоение TM может быть построено без ссылки на множество $S_{Lx'}$. Это важно, потому что в физической геометрии одномерные кривые могут не существовать.

Дифференцируя мировую функцию, получаем следующую величину

$$\sigma_{ik'}(x, x') \equiv \sigma_{,i,k'}(x, x') \equiv \partial_i \partial_{k'} \sigma(x, x') \equiv \frac{\partial^2 \sigma(x, x')}{\partial x^i \partial x'^k}, \quad i, k = 0, 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

Эта величина является ковариантным двух-точечным тензором (вектор в точке x и вектор в точке x'). Вообще, запятая перед индексом k означает дифференцирование по x^k , а запятая перед индексом k' означает дифференцирование по x'^k .

Для римановой геометрии имеют место следующие свойства

$$\det ||g_{ik}(x)|| \neq 0 \quad (2.3)$$

Тогда

$$\det ||\sigma_{ik'}(x, x')|| \neq 0 \quad (2.4)$$

в некоторой конечной области $\omega_{x'}$, где

$$|x - x'| \equiv \left| \sqrt{2\sigma(x, x')} \right| < R \quad (2.5)$$

В $\omega_{x'}$ можно определить контравариантный двутензор $\sigma^{ik'}$ с помощью соотношения

$$\sigma^{ik'} \sigma_{lk'} = \delta_l^i \quad (2.6)$$

Здесь, как и везде дальше, по повторяющимся верхним и нижним индексам производится суммирование.

Определим величину

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{kl}^i(x, x') = \sigma^{is'} \sigma_{kls'}, \quad \sigma_{kls'}(x, x') \equiv \frac{\partial^3 \sigma(x, x')}{\partial x^k \partial x^l \partial x'^s} \quad (2.7)$$

Величина $\Gamma_{kl}^i(x, x')$ преобразуется как символ Кристоффеля в точке x , и можно определить ковариантную производную $\tilde{\nabla}_i$ по x^i

$$\tilde{\nabla}_i T_l^k \equiv T_{l|i}^k = T_{l,i}^k - \Gamma_{is}^k T_l^s + \Gamma_{il}^s T_s^k \quad (2.8)$$

где $T_l^k = T_l^k(x, x')$ есть некоторый двухточечный тензор в точке x .

Связность $\Gamma_{kl}^i(x, x')$ в точке x оказывается связностью плоского пространства, потому что тензор кривизны

$$R_{k,sr}^i = \partial_r \Gamma_{ks}^i - \partial_s \Gamma_{kr}^i + \Gamma_{ks}^m \Gamma_{mr}^i - \Gamma_{kr}^m \Gamma_{ms}^i \equiv 0 \quad (2.9)$$

тождественно обращается в нуль. В самом деле, в соответствии с (2.7) и в соответствии с соотношением

$$\partial_s \sigma^{ik'} = -\sigma^{ir'} \partial_s \sigma_{lr'} \sigma^{lk'} = -\sigma^{ir'} \sigma_{slr'} \sigma^{lk'} \quad (2.10)$$

которое следует из (2.6), получаем

$$\begin{aligned} & \partial_r \Gamma_{ks}^i - \partial_s \Gamma_{kr}^i + \Gamma_{ks}^m \Gamma_{mr}^i - \Gamma_{kr}^m \Gamma_{ms}^i \\ &= \partial_r \left(\sigma^{im'} \sigma_{ksm'} \right) - \partial_s \left(\sigma^{im'} \sigma_{krm'} \right) + \left(\sigma^{ml'} \sigma_{ksl'} \sigma^{ip'} \sigma_{mr,p'} \right) - \left(\sigma^{ml'} \sigma_{krl'} \sigma^{ip'} \sigma_{msp'} \right) \end{aligned}$$

$$= \sigma_{ksm'} \partial_r \sigma^{im'} - \sigma_{krm'} \partial_s \sigma^{im'} + \left(\sigma^{ml'} \sigma_{ksl'} \sigma^{ip'} \sigma_{mrp'} \right) - \left(\sigma^{ml'} \sigma_{krl'} \sigma^{ip'} \sigma_{msp'} \right) = 0$$

Таким образом, символ Кристоффеля (2.7) представляет собой связность плоского риманова пространства $E_{x'}$. Множество всех пространств $E_{x'}$, $x' \in M$ образует векторное расслоение TM .

Имеем

$$\tilde{\nabla}_l \sigma_{ik'} = \sigma_{ik',l} - \Gamma_{li}^s \sigma_{sk'} = \sigma_{lik'} - \sigma^{sm'} \sigma_{lim'} \sigma_{sk'} \equiv 0 \tag{2.11}$$

$$\tilde{\nabla}_l \sigma^{ik'} = -\sigma^{ip'} \tilde{\nabla}_l \sigma_{qp'} \sigma^{qk'} = 0 \tag{2.12}$$

$$\tilde{\nabla}_l u^{i'k'}(x') = 0 \tag{2.13}$$

где $u^{i'k'}(x')$ есть произвольный одно-точечный тензор в точке x' . Ковариантный метрический тензор $G_{ik} = G_{ik}(x, x')$ плоского риманова пространства $E_{x'}$ может быть представлен в виде

$$G_{ik}(x, x') = \sigma_{il'} g_{(0)}^{l's'}(x') \sigma_{ks'} \tag{2.14}$$

потому что в этом случае

$$\tilde{\nabla}_l G_{ik}(x, x') \equiv 0$$

Необходимо, чтобы

$$\det \left\| g_{(0)}^{l's'}(x') \right\| \neq 0 \tag{2.15}$$

для того, чтобы $\det \|G_{ik}\| \neq 0$. Из (2.11), (2.13) и (2.14) следует, что

$$\tilde{\nabla}_l G_{ik}(x, x') = \sigma_{ir'} \tilde{\nabla}_l g_{(0)}^{r's'}(x') \sigma_{ks'} = 0 \tag{2.16}$$

Определим символ Кристоффеля $\tilde{\Gamma}_{kl}^i$ в плоском римановом пространстве $E_{x'}$ с метрическим тензором (2.14)

$$\tilde{\Gamma}_{kl}^i = \frac{1}{2} G^{is} (G_{ks,l} + G_{ls,k} - G_{kl,s}) \tag{2.17}$$

где G^{ik} есть контравариантный метрический тензор

$$G^{ik} = \sigma^{ip'} g_{(0)p'q'}(x') \sigma^{kp'}, \quad g_{(0)i'k'}(x') g_{(0)}^{i'l'}(x') = \delta_{k'}^{l'} \tag{2.18}$$

Подставляя (2.14) в (2.17) и используя (2.18), получаем

$$\tilde{\Gamma}_{kl}^i = \sigma^{is'} \sigma_{kls'} = \Gamma_{kl}^i \tag{2.19}$$

Таким образом, физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ на гладком многообразии M , чья мировая функция обладает свойством (2.4), порождает векторное расслоение TM . Мировая функция σ определяет отображение системы координат K на M в систему координат $K_{x'}$ на каждом пространстве $E_{x'}$ расслоения TM . Это отображение определяет связность $\tilde{\Gamma}_{kl}^i$ на каждом $E_{x'}$ векторного расслоения TM . Однако метрический тензор $G_{ik}(x', x')$ в $E_{x'}$, определяемый соотношением (2.14) может не совпадать с $g_{i'k'}(x')$. Плоское риманово пространство $E_{x'}$ может иметь особенность в точке x' . В частности, $E_{x'}$ может быть коническим пространством с вершиной в точке x' .

В точке x' пространства $E_{x'}$

$$G^{i'k'}(x', x') = g^{i'p'}(x') g_{(0)p'q'}(x') g^{k'q'}(x') \tag{2.20}$$

Если $g_{(0)i'k'}(x') = g_{i'k'}(x')$, метрический тензор $[G_{ik}(x, x')]_{x=x'}$ в $E_{x'}$ совпадает с метрическим тензором $g_{i'k'}(x')$ в геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$, определяемой соотношением (2.1)

$$[G_{ik}(x, x')]_{x=x'} = g_{i'k'}(x'), \quad \text{если } g_{(0)i'k'}(x') = g_{i'k'}(x') \quad (2.21)$$

Это означает, что плоское риманово пространство $E_{x'}$ является евклидовым. В этом случае оно является касательным к многообразию M в точке x' .

Если физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ является римановой геометрией, мировая функция $\sigma = \sigma_R$ удовлетворяет дифференциальному уравнению [5]

$$\sigma_{Ri'} g^{i'k'}(x') \sigma_{Rk'} = 2\sigma_R, \quad \sigma_{Ri'} \equiv \frac{\partial \sigma_R}{\partial x'^i} \quad (2.22)$$

Действуя на обе части уравнения (2.22) оператором $\tilde{\nabla}_l \tilde{\nabla}_s$ и принимая во внимание соотношения (2.11), (2.13), получаем

$$\sigma_{Ri'} g^{i'k'}(x') \sigma_{Rsk'} = \tilde{\nabla}_l \sigma_{Rs} \quad (2.23)$$

Сравнивая (2.23) с (2.14) и (2.21), заключаем, что для римановой геометрии $\mathcal{G}_R = \{\sigma_R, M\}$ метрический тензор в $E_{x'}$ в точке x принимает вид

$$G_{ik}(x, x') = \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_k \sigma_R(x, x') \quad (2.24)$$

Итак, пусть физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ задана на гладком многообразии M с системой координат K на M и удовлетворяет условию (2.4). Тогда эта геометрия порождает расслоение TM на плоские римановы пространства $E_{x'}$ в каждой точке $x' \in M$. Она порождает отображение системы координат $K \rightarrow K_{x'}$ и определяет метрический тензор $G_{ik}(x, x')$ в каждой точке x евклидова пространства $E_{x'}$ в системе координат $K_{x'}$. Метрический тензор $G_{ik}(x, x')$ в точке x определяется некоторым тензором $g_{(0)i'k'}(x')$ в точке x' ($\det ||g_{(0)i'k'}(x')|| \neq 0$). Если геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma_R, M\}$ является римановой геометрией, то метрический тензор $G_{ik}(x, x')$ на $E_{x'}$ в точке x полностью определяется мировой функцией σ_R римановой геометрии.

Векторное расслоение TM является касательным векторным расслоением в случае, когда $\mathcal{G} = \{\sigma_R, M\}$. Это означает, что если многообразие M изометрически вложено в евклидово многообразие M_E большей размерности и образует поверхность \mathcal{S} в M_E , то расслоение TM представляет собой множество касательных плоскостей к поверхности \mathcal{S} . В случае, когда $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ не является римановой геометрией, векторное расслоение TM не является, вообще говоря, касательным векторным расслоением, потому что многообразие M не может быть вложено изометрически в евклидово многообразие M_E . В этом случае прямые линии многообразия M не являются одномерными линиями, и такие прямые линии вида (1.11) не могут быть вложены изометрически в евклидово многообразие M_E . Тем не менее, физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ порождает векторное расслоение TM плоских римановых пространств $E_{x'}$ и отображение системы координат K на каждое пространство $E_{x'}$ расслоения TM .

3 Роль системы координат в описании геометрии пространства-времени

Обычно предполагается, что система координат есть нечто внешнее по отношению к геометрии пространства-времени и, вообще, по отношению к любой геометрии. Но это не совсем так. Чтобы понять роль системы координат, рассмотрим собственно евклидову геометрию \mathcal{G}_E в σ -представлении. σ -представление появляется при метрическом подходе к геометрии, когда все геометрические величины и соотношения описываются в терминах мировой функции. Размерность геометрии и система координат тоже выражаются в терминах мировой функции.

В декартовой системе координат K мировая функция σ_E собственно евклидовой геометрии имеет специальный вид

$$\sigma_E(P, P') = \sigma_E(x, x') = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} (x^k - x'^k)^2 \quad (3.1)$$

где $P = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$, $P' = \{x'^1, x'^2, \dots, x'^n\}$ суть точки n -мерного евклидова пространства E^n , $P, P' \in E^n$ и $x = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$, $x' = \{x'^1, x'^2, \dots, x'^n\}$ суть координаты в некоторой декартовой системе координат K .

Способ обобщения геометрии \mathcal{G}_E существенно зависит от метода представления геометрии \mathcal{G}_E . Имеются два метода представления евклидовой геометрии \mathcal{G}_E : (1) V -представление и (2) σ -представление [9].

В V -представлении используется аксиоматический подход к \mathcal{G}_E , когда евклидова геометрия строится на основе линейного пространства \mathcal{L}_n . Линейное пространство \mathcal{L}_n представляет собой множество Ω_n элементов $u \in \Omega_n$. Эти элементы u мы будем называть линейными векторами (линвекторами). Умножение линвектора $u \in \Omega_n$ на вещественное число a дает линвектор $au \in \Omega_n$. Сумма двух линвекторов $u \in \Omega_n$ и $v \in \Omega_n$ дает новый линвектор $(u + v) \in \Omega_n$. Эти операции имеют линейные свойства. Термин "линвектор" (вместо традиционного термина "вектор") используется потому, что каждый линвектор $u \in \Omega_n$ существует в одном экземпляре.

Напротив, вектор \mathbf{AB} в \mathcal{G}_E определяется как упорядоченное множество $\mathbf{AB} = \{A, B\} \in \Omega \times \Omega$ из двух точек $A, B \in \Omega$. Здесь Ω есть множество точек на котором определена геометрия \mathcal{G}_E . Среди векторов $\mathbf{PQ} \in \Omega \times \Omega$ евклидова пространства E^n имеются эквивалентные (равные) векторы $\mathbf{PQ} \in \Omega \times \Omega$. Мы используем различные термины ("линвектор" и "вектор") для элементов Ω_n и элементов $\Omega \times \Omega$, потому что некорректно использовать один и тот же термин для разных объектов с различными свойствами.

Множество $\Omega_{\mathbf{AB}}$ векторов $\mathbf{CD} \in \Omega \times \Omega$, которые эквивалентны вектору $\mathbf{AB} \in \Omega \times \Omega$ определяется как множество векторов \mathbf{CD} , которые параллельны вектору \mathbf{AB} и их длины $|\mathbf{CD}|$, $|\mathbf{AB}|$ равны.

$$\Omega_{\mathbf{AB}} = \{\mathbf{CD} \mid (\mathbf{CD} \text{eqv} \mathbf{AB})\} \quad (3.2)$$

$$(\mathbf{CD} \text{eqv} \mathbf{AB}) : (\mathbf{CD} \uparrow \uparrow \mathbf{AB}) \wedge |\mathbf{CD}| = |\mathbf{AB}| \quad (3.3)$$

$$(\mathbf{CD} \uparrow \uparrow \mathbf{AB}) : (\mathbf{CD} \cdot \mathbf{AB}) = |\mathbf{CD}| \cdot |\mathbf{AB}| \quad (3.4)$$

Здесь $(\mathbf{CD} \cdot \mathbf{AB}) \in \mathbb{R}$ есть скалярное произведение двух векторов \mathbf{CD} и \mathbf{AB} , которое определяется соотношением

$$(\mathbf{CD} \cdot \mathbf{AB}) = \sigma_E(C, B) + \sigma_E(D, A) - \sigma_E(C, A) - \sigma_E(D, B) \quad (3.5)$$

$$|\mathbf{CD}|^2 = 2\sigma_E(C, D) \quad (3.6)$$

Эквивалентность (3.3) двух векторов $\mathbf{CD} \in \Omega \times \Omega$ и $\mathbf{AB} \in \Omega \times \Omega$ определяется в терминах евклидовой мировой функции σ_E . В декартовой системе координат K , где мировая функция σ_E имеет вид (3.1) и точки A, B, C, D имеют соответственно координаты x_A, x_B, x_C, x_D скалярное произведение (3.5) и $|\mathbf{CD}|$ принимают соответственно вид

$$(\mathbf{CD} \cdot \mathbf{AB}) = \sum_{k=1}^{k=n} (x_D^k - x_C^k) (x_B^k - x_A^k) \quad (3.7)$$

$$|\mathbf{CD}|^2 = \sum_{k=1}^{k=n} (x_D^k - x_C^k)^2 \quad (3.8)$$

Эти выражения совпадают соответственно со скалярным произведением двух линвекторов $(u_{CD} \cdot u_{AB})$ и с $|u_{CD}|^2$, при условии, что u_{CD} и u_{AB} имеют соответственно координаты $(x_D^k - x_C^k)$ и $(x_B^k - x_A^k)$.

В \mathcal{G}_E отношение эквивалентности (3.3) рефлексивно, симметрично и транзитивно. Тогда множество Ω_{AB} является классом эквивалентности вектора AB . Можно отождествить линвектор $u_{AB} \in L_n$ с классом эквивалентности Ω_{AB} вектора $AB \in \Omega \times \Omega$. Аксиоматика линейного пространства L_n и операции в L_n могут быть использованы для построения геометрических соотношений в \mathcal{G}_E . После обобщения \mathcal{G}_E , когда σ_E заменяется другой мировой функцией σ , отношение эквивалентности (3.3), вообще говоря, перестает быть транзитивным. В результате множество Ω_{AB} перестает быть классом эквивалентности вектора AB . Становится невозможным отождествлять линвектор $u_{AB} \in L_n$ с множеством Ω_{AB} , потому что не все векторы $CD \in \Omega_{AB}$ эквивалентны между собой. Геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$, полученная как результат замены $\sigma_E \rightarrow \sigma$, оказывается многовариантной.

Физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ является, вообще говоря, многовариантной геометрией. В многовариантной геометрии имеется, вообще говоря, много векторов CD, CD', CD'', \dots в точке C , которые эквивалентны вектору AB в точке A , но они не эквивалентны между собой. Эквивалентность векторов CD и AB определяется формулами (3.3) - (3.6). Отношение эквивалентности двух векторов (3.3) - (3.6) становится интранзитивным. Эта интранзитивность является причиной многовариантности физической геометрии. Только собственно евклидова геометрия не является многовариантной. Пространственно-временная геометрия Минковского многовариантна по отношению к пространственноподобным векторам, но она одновариантна по отношению к времениподобным векторам. Дискретная геометрия пространства-времени многовариантна по отношению к времениподобным векторам, и это обстоятельство является причиной квантовых эффектов [10]. Многовариантность геометрии пространства-времени является очень важным свойством [11]. Оно не может быть описано формализмом линейного пространства, который используется обычно для описания пространства-времени.

При обобщении собственно евклидовой геометрии мы получаем физическую геометрию $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$, заменяя мировую функцию σ_E мировой функцией σ геометрии \mathcal{G} во всех геометрических соотношениях геометрии $\mathcal{G}_E = \{\sigma_E, \Omega\}$, которые могут быть выражены в терминах только евклидовой мировой функции σ_E . Эти соотношения мы будем называть общегеометрическими соотношениями. Выражения (3.5), (3.6) являются примерами общегеометрических соотношений.

Другим примером общегеометрического соотношения является определение линейной зависимости. n векторов $P_0P_1, P_0P_2, \dots, P_0P_n$. Векторы $P_0P_1, P_0P_2, \dots, P_0P_n$ линейно зависимы, если выполнено соотношение

$$F_n(\mathcal{P}^n) = 0 \quad (3.9)$$

Здесь $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, а $F_n(\mathcal{P}^n)$ есть определитель Грама

$$F_n(\mathcal{P}^n) \equiv \det ||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)||, \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (3.10)$$

Скалярное произведение в (3.10) выражается через мировую функцию с помощью (3.5).

Рассмотрим обобщение $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_E = \{\sigma_E, \Omega\}$. Мировая функция σ_E заменяется мировой функцией σ во всех общегеометрических соотношениях. Однако имеются еще специальные соотношения геометрии \mathcal{G}_E , которые зависят от специальных свойств мировой функции σ_E . Нельзя заменять мировую функцию в специальных соотношениях. Эти специальные свойства определяют размерность геометрии \mathcal{G}_E и свойства декартовых координат в \mathcal{G}_E .

Если σ_E есть мировая функция n -мерного евклидова пространства E^n , то она удовлетворяет следующим соотношениям.

I. Определение размерности и введение прямолинейной системы координат:

$$\exists \mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, \dots, P_n\} \subset \Omega, \quad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \quad F_k(\Omega^{k+1}) = 0, \quad k > n \quad (3.11)$$

где $F_n(\mathcal{P}^n)$ есть определитель Грама (3.10). Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ суть базисные векторы в прямолинейной системе координат K_n с началом в точке P_0 . Ковариантный метрический тензор $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ и контравариантный метрический тензор $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ в прямолинейной системе координат K_n определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) g_{lk}(\mathcal{P}^n) = \delta_l^i, \quad g_{il}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{P}_l), \quad i, l = 1, 2, \dots, n \quad (3.12)$$

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det \|g_{ik}(\mathcal{P}^n)\| \neq 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (3.13)$$

II. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma_E(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{i,k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) (x_i(P) - x_i(Q)) (x_k(P) - x_k(Q)), \quad \forall P, Q \in \Omega \quad (3.14)$$

где координаты $x_i(P)$, $i = 1, 2, \dots, n$ точки P являются ковариантными координатами вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, определенного соотношением

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{P}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.15)$$

III: Матрица метрического тензора $g_{lk}(\mathcal{P}^n)$ имеет собственные значения только одного знака (положительные)

$$g_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.16)$$

IV. Условие непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{P}) = y_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.17)$$

рассматриваемая как уравнения для определения точки P как функции координат $y = \{y_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ имеет всегда одно и только одно решение.

Не все условия I – IV являются независимыми, они определяют различные свойства геометрии \mathcal{G}_E . Например, условие (3.11) определяет размерность n евклидова пространства E^n . Эта размерность n есть максимальное число линейно независимых векторов в \mathcal{G}_E . Это число определяется общегеометрическим соотношением (3.10) которое зависит от вида мировой функции. Если условия (3.11) не выполнены, то нельзя ввести систему координат в традиционном виде, потому что метрическая размерность $n_m = n$ геометрии \mathcal{G} остается неопределенной.

Сумма двух векторов определяется следующим образом. Если складываются векторы \mathbf{AB} и \mathbf{BC} , когда конец одного вектора является началом другого, то получаем

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC} \quad (3.18)$$

Если складываются произвольные векторы \mathbf{AB} и \mathbf{CD} , получаем

$$\mathbf{AB} + \mathbf{CD} = \mathbf{AB} + \mathbf{BR} = \mathbf{AR} \quad (3.19)$$

где точка R определяется из соотношения

$$(\mathbf{CDeqvBR}) \quad (3.20)$$

В соответствии с (3.3) - (3.5) соотношение (3.20) представляет собой два уравнения типа (3.3). Если эти уравнения имеют всегда одно и только одно решение для точки R (как в \mathcal{G}_E), то операция сложения определяется однозначно. Однако, если решение многовариантно, то нельзя определить сложение как однозначную операцию в том виде, как это делается в линейном пространстве для сложения линвекторов.

Умножение вектора \mathbf{AB} на вещественное число a определяется следующим образом

$$a\mathbf{AB} = \mathbf{AR} \quad (3.21)$$

где точка R определяется из соотношений

$$(\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AR}) = a |\mathbf{AB}|^2, \quad |\mathbf{AR}| = a |\mathbf{AB}| \quad (3.22)$$

Если решение уравнений (3.22) многовариантно, то операция умножения тоже многовариантна.

Подводя итог, можно сказать, что собственно евклидова геометрия \mathcal{G}_E может быть приведена к линейной алгебре. Но обобщения геометрии \mathcal{G}_E , вообще говоря, не могут быть приведены к линейной алгебре. Они, вообще говоря, многовариантны, и эта многовариантность является следствием направленности векторов, которая отсутствует в алгебре. Вообще говоря, *геометрия не может быть сведена к алгебре*.

Большинство ограничений на мировую функцию σ_E в геометрии \mathcal{G}_E возникает из ограничений (3.11), которые состоят из многих уравнений. Эти ограничения носят глобальный характер. Можно привести эти ограничения к локальному виду

$$\exists \mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, \dots, P_n\} \subset \Omega_\varepsilon, \quad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \quad F_k(\Omega_\varepsilon^{k+1}) = 0, \quad k > n \quad (3.23)$$

где Ω_ε есть бесконечно малая окрестность точки P_0 , определяемая соотношением

$$\left| \sqrt{2\sigma(P_0, P)} \right| < \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow +0 \quad (3.24)$$

Если условия (3.23) выполнены, то можно локально использовать формализм линейного пространства. Риманова геометрия является локально евклидовой. Риманова геометрия получается при использовании ограничений (3.11) в виде (3.23). Использование ограничений (3.23) позволяет подавить многовариантность эквивалентности векторов, имеющих общее начало. Но многовариантность эквивалентности векторов остается для векторов, имеющих разное начало. Рассмотрение эквивалентности векторов, имеющих различное начало, запрещено в римановой геометрии, или она связывается с путем переноса вектора. Это необходимо для использования формализма линейного пространства, который может использоваться, только если метрическая размерность существует, по крайней мере, локально, и можно локально ввести прямолинейную систему координат.

В соответствии со вторым разделом всякая физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ порождает векторное расслоение TM с плоской римановой геометрией на каждом пространстве $E_{x'}$ расслоения. В случае, когда геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ является римановой, в соответствии с (2.21) метрический тензор $[G_{ik}(x, x')]_{x'=x}$ в $E_{x'}$ в точке x' в системе координат $K_{x'}$ совпадает с метрическим тензором $g_{i'k'}(x')$ римановой геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ в точке x' . Метрический тензор $G_{ik}(x, x')$ в точке x на $E_{x'}$ определяется формулами (2.23), (2.24) в виде

$$G_{ik}(x, x') = \sigma_{i'l'} g^{l's'}(x') \sigma_{ks'} \quad (3.25)$$

Это означает, что риманова геометрия может описываться как евклидова геометрия на расслоении TM из евклидовых пространств $E_{x'}$. Это естественно, поскольку риманова

геометрия – это множество евклидовых геометрий на связанных бесконечно малых многообразиях dM . Переход от евклидовых геометрий на расслоении TdM бесконечно малых многообразий dM к римановой геометрии довольно прост. Он описывается формулой (3.25).

Если физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ не является римановой геометрией, то геометрия на каждом пространстве $E_{x'}$ векторного расслоения TM является плоской римановой геометрией, но соотношение (3.25), вообще говоря, не выполняется. Риманова геометрия на $E_{x'}$ может иметь особенность в точке x' . Вместо этого получаем соотношение (2.18)

$$G_{ik}(x, x') = \sigma_{il} g_{(0)}^{l's'}(x') \sigma_{ks'} \quad (3.26)$$

где тензор $g_{(0)}^{l's'}(x')$ определяется физической геометрией $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ неизвестным способом. Однако можно надеяться, что совокупность плоских римановых геометрий на многообразиях $T_x M$ описывает физическую геометрию $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$. Мы можем надеяться, что мировая функция σ может быть получена из совокупности плоских римановых геометрий на многообразиях $T_x M$ расслоения TM . Мы не можем доказать это утверждение, но мы можем надеяться, что физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ может быть описана как множество плоских римановых геометрий. Другими словами, отдельная физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ приводится к множеству плоских римановых геометрий. Это множество плоских римановых геометрий ассоциируется с финслеровой геометрией, которая задается на расслоении TM . Заметим, что описание векторного расслоения TM недостаточно применительно к геометрии пространства-времени, потому что нужна еще мировая функция для отождествления геометрического объекта в разных областях многообразия M , как мы видели это во введении.

Традиционное представление финслеровой геометрии, основано на использовании формализма линейного пространства. Мы попытаемся заменить представление на основе линейного пространства представлением на основе мировой функции. Представление в терминах мировой функции интересно в том отношении, что мировая функция риманова (или метрического) многообразия описывает векторное расслоение этого многообразия.

4 Финслерова геометрия в терминах мировой функции

Финслерова геометрия является обобщением римановой геометрии, которое может быть локально неевклидовым [1]. Финслерова геометрия \mathcal{G}_F задается на касательном расслоении TM гладкого риманова многообразия M . Нас будет интересовать приложение финслеровой геометрии для описания пространства-времени.

Финслерово многообразие есть дифференцируемое многообразие вместе со структурой внутреннего квазиметрического пространства, в котором длина спрямляемой кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ задается функционалом длины

$$L(\gamma) = \int_a^b F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \quad (4.1)$$

где $F(x, \cdot)$ есть некоторая асимметричная норма на каждом касательном пространстве $T_x M$. Финслерово многообразие нетривиально обобщает риманово многообразие в том смысле, что оно не обязательно евклидово в бесконечно малом. Это означает, что (асимметричная) норма на каждом касательном пространстве не является с необходимостью генерируемой внутренним произведением (метрическим тензором).

Финслерово многообразие есть дифференцируемое многообразие M вместе с финслеровой функцией F , определенной на касательном расслоении M так, что для всех касательных векторов v ,

1. $F(x, v) \geq 0$ с равенством, если и только если $v = 0$ (положительная определенность).
2. $F(x, \gamma v) = \lambda F(x, v)$ для всех $\lambda \geq 0$ (но не с необходимостью для $\lambda < 0$) (однородность).
3. $F(x, v + w) \leq F(x, v) + F(x, w)$ для всех w на том же самом касательном пространстве с v (поададитивность).

Другими словами, F есть асимметричная норма на каждом касательном пространстве. Чаще всего поададитивность заменяется следующим условием сильной выпуклости: Для каждого касательного вектора v , гессиан F^2 от v положительно определен. Здесь гессиан F^2 от v есть симметричная билинейная форма

$$g_v(X, Y) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(x, v + sX + tY) \right]_{s=t=0}, \quad X, Y \in T_x M$$

известная также как фундаментальный тензор F от v .

Традиционное представление финслеровой геометрии основывается на использовании формализма линейного пространства. Мы попытаемся заменить представление на основе линейного пространства представлением на основе мировой функции. Представление в терминах мировой функции интересно в том отношении, что мировая функция риманова (или метрического) многообразия описывает векторное расслоение этого многообразия.

Существует идея, что финслерова геометрия может использоваться как геометрия пространства-времени [14, 15]. Считается, что геометрия Бервальда-Моора является финслеровой геометрией, пригодной для описания пространства-времени. Нас больше всего интересуют геометрии, которые могут использоваться как геометрии пространства-времени. Мы представим геометрию Бервальда-Моора в терминах мировой функции и попытаемся исследовать в какой мере она может использоваться как геометрия пространства-времени.

5 Геометрия Бервальда-Моора как возможная геометрия пространства-времени

Нас интересует приложение финслеровой геометрии к описанию пространства-времени. Рассмотрим пространственно-временную геометрию с метрикой Бервальда-Моора. В изотропных координатах ее линейный элемент имеет вид

$$ds^2 = \sqrt[4]{dx^1 dx^2 dx^3 dx^4} \quad (5.1)$$

Соответствующая мировая функция имеет вид

$$\sigma(x, x') = \frac{1}{2} \sqrt{(x^1 - x'^1)(x^2 - x'^2)(x^3 - x'^3)(x^4 - x'^4)} \quad (5.2)$$

Хотя линейный элемент (5.1) не определяет однозначно мировую функцию, но соотношение (5.1) вместе со свойствами 2 и 3 предыдущего раздела приводит к выражению (5.2) для мировой функции. Кроме того, допустимы только те значения координат x , для которых мировая функция вещественна.

Вместо изотропных координат x^i , $i = 1, 2, 3, 4$ мы будем использовать координаты

$$t_1 = x^1 + x^2, \quad t_2 = x^3 + x^4, \quad y_1 = x^1 - x^2, \quad y_2 = x^3 - x^4 \quad (5.3)$$

$$x^1 = \frac{t_1 + y_1}{2}, \quad x^2 = \frac{t_1 - y_1}{2}, \quad x^3 = \frac{t_2 + y_2}{2}, \quad x^4 = \frac{t_2 - y_2}{2} \quad (5.4)$$

Тогда мировая функция принимает вид

$$\begin{aligned} & \sigma(t_1, t_2, y_1, y_2; t'_1, t'_2, y'_1, y'_2) \\ = & \frac{1}{2} \left| \sqrt{((t_1 - t'_1)^2 - (y_1 - y'_1)^2) ((t_2 - t'_2)^2 - (y_2 - y'_2)^2)} \right| \\ & \times \theta \left((t_1 - t'_1)^2 - (y_1 - y'_1)^2 \right) \theta \left((t_2 - t'_2)^2 - (y_2 - y'_2)^2 \right) \\ & - \frac{1}{2} \left| \sqrt{((t_1 - t'_1)^2 - (y_1 - y'_1)^2) ((t_2 - t'_2)^2 - (y_2 - y'_2)^2)} \right| \\ & \times \theta \left((y_1 - y'_1)^2 - (t_1 - t'_1)^2 \right) \theta \left((y_2 - y'_2)^2 - (t_2 - t'_2)^2 \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \geq 0 \\ 0 & \text{если } x < 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{t_1, t_2, y_1, y_2\}$ является времениподобным, если $(t_1 > y_1 > 0) \wedge (t_2 > y_2 > 0)$, или если $(t_1 < y_1 < 0) \wedge (t_2 < y_2 < 0)$. Он будет пространственноподобным, если $(y_1 > t_1 > 0) \wedge (y_2 > t_2 > 0)$, или если $(y_1 < t_1 < 0) \wedge (y_2 < t_2 < 0)$. Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{t_1, t_2, y_1, y_2\}$ будет изотропным, если $t_1 = y_1 \vee t_2 = y_2$. Области значений координат $t_1^2 < y_1^2 \wedge t_2^2 > y_2^2$ и $t_1^2 > y_1^2 \wedge t_2^2 < y_2^2$ следует исключить, потому что в этих областях мировая функция мнима.

Рассмотрим отрезок мировой цепи в пространственно-временной геометрии Бервальда-Моора. Мы рассмотрим три смежные точки P_0, P_1, P_2 этой мировой цепи, описывающей движение свободной частицы. Мировая цепь свободной частицы содержит два смежных вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ которые эквивалентны. Это означает, что

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|, \quad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2| \quad (5.7)$$

где скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)$ имеет вид

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2) = \sigma(P_0, P_2) - \sigma(P_1, P_2) - \sigma(P_0, P_1) \quad (5.8)$$

и

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = 2\sigma(P_0, P_1) \quad (5.9)$$

Уравнения (5.7) описывают как времениподобную, так и пространственноподобную мировые линии.

Используя (5.8), (5.9), можно представить уравнения (5.7) в виде

$$\sigma(P_0, P_1) = \sigma(P_1, P_2), \quad \sigma(P_0, P_2) = 4\sigma(P_0, P_1) \quad (5.10)$$

Пусть три точки P_0, P_1, P_2 имеют координаты

$$P_0 = \{0, 0, 0, \}, \quad P_1 = \{t_1, t_2, y_1, y_2\}, \quad P_2 = \{2t_1 + \tau_1, 2t_2 + \tau_2, 2y_1 + \xi_1, 2y_2 + \xi_2\} \quad (5.11)$$

Здесь греческие переменные $\tau_1, \tau_2, \xi_1, \xi_2$ описывают вихляние мировой цепи. Если $\tau_1 = \tau_2 = \xi_1 = \xi_2 = 0$, Мировая цепь не вихляет. Четыре переменные $\tau_1, \tau_2, \xi_1, \xi_2$ должны определяться из двух уравнений (5.10).

В соответствии с (5.5) динамические уравнения (5.10) преобразуются к виду

$$((t_1 + \tau_1)^2 - (y_1 + \xi_1)^2) ((t_2 + \tau_2)^2 - (y_2 + \xi_2)^2) = (t_1^2 - y_1^2) (t_2^2 - y_2^2) \quad (5.12)$$

$$\left(\left(t_1 + \frac{\tau_1}{2} \right)^2 - \left(y_1 + \frac{\xi_1}{2} \right)^2 \right) \left(\left(t_2 + \frac{\tau_2}{2} \right)^2 - \left(y_2 + \frac{\xi_2}{2} \right)^2 \right) = (t_1^2 - y_1^2) (t_2^2 - y_2^2) \quad (5.13)$$

Введем обозначения

$$f_1(\tau_2, \xi_2) = \frac{(t_1^2 - y_1^2)(t_2^2 - x_2^2)}{(t_2 + \tau_2)^2 - (y_2 + \xi_2)^2} \quad (5.14)$$

$$f_2(\tau_2, \xi_2) = \frac{16(t_1^2 - y_1^2)(t_2^2 - y_2^2)}{(2t_2 + \tau_2)^2 - (2y_2 + \xi_2)^2} \quad (5.15)$$

Тогда уравнения (5.12), (5.13) записываются в виде

$$((t_1 + \tau_1)^2 - (y_1 + \xi_1)^2) = f_1(\tau_2, \xi_2) \quad (5.16)$$

$$((2t_1 + \tau_1)^2 - (2y_1 + \xi_1)^2) = f_2(\tau_2, \xi_2) \quad (5.17)$$

где левая часть уравнений не зависит от τ_2, ξ_2 .

Решения уравнений (5.16), (5.17) имеют вид

$$\xi_1 = \frac{t_1}{y_1} \tau_1 - \frac{f_2 - f_1 - 3(t_1^2 - y_1^2)}{2y_1}$$

$$\tau_1 = t_1 \left(\frac{f_2 - f_1}{2(t_1^2 - y_1^2)} - \frac{3}{2} \right) \pm \sqrt{\frac{y_1^2 f_1}{(t_1^2 - y_1^2)} - \frac{y_1^2}{4} \left(\frac{f_2 - f_1}{(t_1^2 - y_1^2)} - 1 \right)^2} \quad (5.18)$$

$$\xi_1 = \frac{t_1}{y_1} \left(t_1 \left(\frac{f_2 - f_1}{2(t_1^2 - y_1^2)} - \frac{3}{2} \right) \pm \sqrt{\frac{y_1^2 f_1}{(t_1^2 - y_1^2)} - \frac{y_1^2}{4} \left(\frac{f_2 - f_1}{(t_1^2 - y_1^2)} - 1 \right)^2} \right) - \frac{f_2 - f_1 - 3(t_1^2 - y_1^2)}{2y_1} \quad (5.19)$$

Существенны только вещественные решения. Они имеют место, если и только если

$$F_2(\tau_2, \xi_2) \equiv \frac{f_1(\tau_2, \xi_2)}{(t_1^2 - y_1^2)} - \frac{1}{4} \left(\frac{f_2(\tau_2, \xi_2) - f_1(\tau_2, \xi_2)}{(t_1^2 - y_1^2)} - 1 \right)^2 \geq 0 \quad (5.20)$$

Введем переменные

$$a_1 = \frac{\tau_1}{t_1}, \quad a_2 = \frac{\tau_2}{t_2}, \quad b_1 = \frac{\xi_1}{y_1}, \quad b_2 = \frac{\xi_2}{y_2} \quad (5.21)$$

и разложим (5.20) по степеням a_2, b_2 , предполагая, что $a_2^2, b_2^2 \ll 1$. Получаем

$$F_2(\tau_2, \xi_2) = \frac{4y_2^2}{(t_2^2 - y_2^2)} \left(\frac{\tau_2}{t_2} \right) \left(\frac{\xi_2}{y_2} \right) + \frac{3t_2^4}{(t_2^2 - y_2^2)^2} \left(\frac{\tau_2}{t_2} \right)^2 + \frac{y_2^2(2y_2^2 + t_2^2)}{(t_2^2 - y_2^2)^2} \left(\frac{\xi_2}{y_2} \right)^2 \quad (5.22)$$

Таким образом, в приближении

$$\frac{\tau_1}{t_1}, \frac{\tau_2}{t_2}, \frac{\xi_1}{y_1}, \frac{\xi_2}{y_2} \ll 1 \quad (5.23)$$

получаем следующий результат. В случае времениподобного вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, когда $t_1^2 > y_1^2 > 0$ и $t_2^2 > y_2^2 > 0$, $F_2(\tau_2, \xi_2) > 0$, если $\xi_2\tau_2 \operatorname{sgn}(t_2y_2) > 0$, и динамические уравнения (5.12), (5.13) имеют много решений, потому что τ_2, ξ_2 суть произвольные параметры, удовлетворяющие неравенствам (5.23). В приближении (5.23) динамические уравнения (5.12), (5.13) имеют вид

$$\xi_1 = \frac{t_1}{y_1} \tau_1 + \frac{\tau_2^2(t_1^2 - y_1^2)}{y_1(t_2^2 - y_2^2)} \quad (5.24)$$

$$\left(\tau_1 + t_1 \frac{\tau_2^2}{(t_2^2 - y_2^2)}\right)^2 = \frac{1}{(t_2^2 - y_2^2)^2} \left(4y_2(t_2^2 - y_2^2) \frac{\tau_2 \xi_2}{t_2} + 3t_2^2 \tau_2^2 + \xi_2^2(2y_2^2 + t_2^2)\right) \quad (5.25)$$

В случае пространственноподобного вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, когда $y_2^2 > t_2^2 > 0$ и $y_1^2 > t_1^2 > 0$, $F_2(\tau_2, \xi_2) > 0$, если $\xi_2 \tau_2 \operatorname{sgn}(t_2 y_2) < 0$, и динамические уравнения (5.12), (5.13) тоже имеют много решений, потому что τ_2, ξ_2 суть произвольные величины, удовлетворяющие неравенствам (5.23).

Можно видеть, что мировые линии свободных частиц вихлят в пространстве-времени, имеющем геометрию Бервальда-Моора. В реальной геометрии пространства-времени имеются два вида вихляний мировой линии: (1) квантовое вихляние, (2) тахионное вихляние. Квантовое вихляние имеет место для тардионов (частиц, имеющих времениподобную мировую линию). Это вихляние обусловлено элементарной длиной λ_0 дискретной геометрии пространства-времени. Элементарная длина связана с квантовой постоянной \hbar соотношением $\lambda_0^2 = \hbar/bc$, где c есть скорость света, а b есть некоторая универсальная постоянная. Это может интерпретироваться в том смысле, что вихляние мировой линии тардионов связано с квантовыми эффектами. Мировая линия тахиона (частицы, имеющей пространственноподобную мировую линию) вихляет с бесконечной амплитудой. Это вихляние не ограничено квантовой постоянной. Отдельный тахион не может быть обнаружен из-за неограниченного вихляния его мировой линии. Принято считать, что тахионов нет. На самом деле, тахионы существуют, но отдельный тахион обнаружить нельзя. Однако тахионный газ может быть обнаружен по его гравитационному полю. Тахионный газ является наилучшим кандидатом для темной материи [16].

В пространственно-временной геометрии Бервальда-Моора вихляние мировых линий отличается от квантового вихляния тардионов и от тахионного вихляния тахионов. Это означает, что геометрия Бервальда-Моора едва ли может использоваться как реальная геометрия пространства-времени.

Литература

- [1] Rund H. The Differential Geometry of Finsler Spaces. Springer-Verlag, 1959. Русс. перевод Х. Рунд, Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. Наука, 1981.
- [2] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии ля физиков. Москва, ТЕТРУ, 2009.
- [3] Menger K., Untersuchungen über allgemeine Metrik // *Mathematische Annalen*, 100, 1928, pp. 75–113.
- [4] Blumenthal L.M. Theory and Applications of Distance Geometry. Oxford, Clarendon Press, 1953.
- [5] Synge J.L. Relativity: the General Theory. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1960.
- [6] Rylov Yu.A. Geometry without topology as a new conception of geometry // *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.*, 30, iss. 12, 2002, pp. 733–760.
- [7] Рылов Ю.А. О возможности описания риманова пространства в терминах конечного интервала // *Изв. ВУЗов Математика*, 3(28), 1962, pp. 131–142.
- [8] Rylov Yu.A. Relative gravitational field and conservation laws in general relativity // *Ann. Phys. (Leipzig)*, 12, 1964, pp. 329–353.
- [9] Rylov Yu.A. Different representations of Euclidean geometry and their application to the space-time geometry. *e-print :0709.2755*
- [10] Rylov Yu.A. Non-Riemannian model of the space-time responsible for quantum effects // *Journ. Math. Phys.*, 32(8), 1991, pp. 2092-2098.

- [11] Rylov Yu.A. Multivariance as immanent property of the space-time geometry // *IJTP*, (Submitted. Now can be found: <http://rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/mimst1e.pdf>)
- [12] Synge J.L. A characteristic function in Riemannian space and its applications to the solution of geodesic triangles // *Proc. London Math Soc.*, 32, 1932, p. 241.
- [13] Ruse H.S. Some theorem in tensor calculus // *Proc. London Math. Soc.*, 31, 1930, p. 225.
- [14] Pavlov D.G. Philosophical and mathematical reasons for Finsler extensions of Relativity Theory, pp. 140–147. In *Space-Time Structure. Algebra and Geometry* Moscow: Lilia-Print 2007, editors D. G. Pavlov, Gh. Atanasiu, V. Balan.
- [15] Garas'ko G.I., Pavlov D.G. Construction of the Pseudo-Riemannian geometry on the Base of the Berwald-Moor Geometry. pp. 376–385. In *Space-Time Structure. Algebra and Geometry* Moscow: Lilia-Print 2007, editors D. G. Pavlov, Gh. Atanasiu, V. Balan.
- [16] Rylov Yu.A. Dynamic equations for tachyon gas // *Int. J. Theor. Phys.* (Submitted. Now can be found in <http://rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/detg2e.pdf>)

FINSLER GEOMETRY IN TERMS OF WORLD FUNCTION

Yu.A. Rylov

Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

rylov@ipmnet.ru

It is shown that the space-time geometry should be formulated in terms of the world function, because only description in terms of world function admits one to recognize similar geometrical objects in regions of the space-time geometry with different geometries. The Berwald-Moor geometry formulated in terms of the world function appears to be multivariant geometry, which hardly can be used as a space-time geometry, because in this geometry the world lines wobbling of free particles differs from the real wobbling.

Key Words: recognition of similar geometric objects; deformation principle; multivariant geometry; world function; linear vector space; vector bundle; role of coordinates.

GEOMETRIC PROPERTIES OF EINSTEIN'S LAW OF ADDITION OF VELOCITIES AND QUATERNIONIC LAW OF ADDITION

Mushfiq Ahmad

Rajshahi University, Rajshahi, Bangladesh

mushfiqahmad@gmail.com

If velocities \mathbf{u} and \mathbf{v} add up to give \mathbf{w} . The three velocities form a triangle. The same velocities, but in the opposite direction, $-\mathbf{v}$ and $-\mathbf{u}$ should add up to give $-\mathbf{w}$. Isotropy of space requires that the reversal of direction should reverse the order of addition — $-\mathbf{v}$ should come before $-\mathbf{u}$. Lorentz Einstein addition does not fulfill this requirement and Wigner rotation is invoked to correct it. Reciprocal symmetric transformation, we are proposing, maintains the isotropy of space and Wigner rotation is not needed.

Key Words: Einstein's law, composition of velocities, associativity, non-associativity, Wigner-Thomas rotation, Thomas precession, Pauli matrices, Pauli quaternion, quaternionic addition, geometry, isotropic.

1 Introduction

Einstein's law of composition of velocities (1.1) «is neither commutative nor associative» [1].

$$\mathbf{v} \oplus \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{u}/\lambda_v + \{1 - 1/\lambda_v\} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v}}{1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \quad (1.1)$$

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (1.2)$$

Non-associativity leads to ambiguity [2]. The sum of the 3 velocities below can be \mathbf{u}'' or $\mathbf{\ddot{u}}$

$$\mathbf{u}'' = \mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) \neq (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} = \mathbf{\ddot{u}}. \quad (1.3)$$

To achieve an agreement between \mathbf{u}'' and $\mathbf{\ddot{u}}$ one includes a Wigner-Thomas [3] rotation to \mathbf{u}'' or $\mathbf{\ddot{u}}$. Ungar has given [1] a set of prescriptions to rotate. The ambiguity persists because one has to decide arbitrarily whether to rotate \mathbf{u}'' to agree with $\mathbf{\ddot{u}}$ or vice versa. To have a unique relative velocity, \mathbf{u}'' or $\mathbf{\ddot{u}}$ and \mathbf{w}' or $-\mathbf{w}$ we have to choose a (preferred) frame of reference. Oziewicz wrote, «We must violate the Relativity Principle in order to have the unique Einstein's relative velocity» [4].

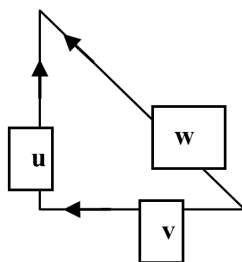


Figure 1.

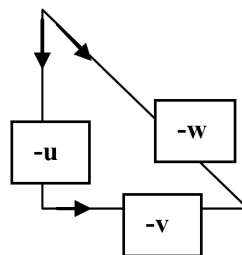


Figure 2.

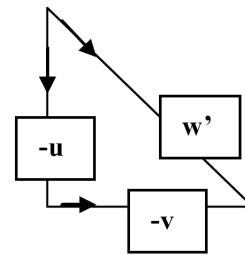


Figure 3.

Another implication of the non-associativity is Mocanu paradox [5], $\mathbf{w}' \neq -\mathbf{w}$, the inequality below: \mathbf{w}' and $-\mathbf{w}$ from Fig. 3 and Fig. 1 above

$$\mathbf{w}' = (-\mathbf{u}) \oplus (-\mathbf{v}) \neq -(\mathbf{v} \oplus \mathbf{u}) = -\mathbf{w} \quad (1.4)$$

«There have been attempts [6] to explain the non-associativity, and also Mocanu paradox, as the Thomas rotation. ... We consider this attempt not satisfactory. ... Dirac in 1928 explained ... the correct spin levels in terms of the Clifford algebra and the Dirac equation, without invoking the Thomas rotation. The Dirac equation conceptually ought to be understood in terms of the Clifford algebra alone. No longer did anyone need Thomas's precession except for the non-associative \oplus -addition of velocities» [4].

Ahmad has proposed a Clifford algebraic [7, 6.8] reciprocal symmetric transformation

$$\mathbf{w}_Q = \mathbf{v} \oplus_Q \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{u} + i\mathbf{v} \times \mathbf{u}/c}{1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}/c^2} \quad (1.5)$$

which is associative [2] and resolves [7] Mocanu paradox (1.4).

2 Anisotropy and Geometric Properties of Einstein's Law of Addition

Every one of \mathbf{u} , \mathbf{v} and \mathbf{w} can be written (in 3 different ways) as the sum of 2 other velocities as in velocity triangle Fig. 1

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathbf{w} &= \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}, \\ \text{(ii)} \quad \mathbf{u} &= (-\mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}, \\ \text{(iii)} \quad \mathbf{v} &= \mathbf{w} \oplus (-\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Every one of \mathbf{u} , \mathbf{v} and \mathbf{w} can be written (in 3 different ways) as the sum of 2 other velocities as in velocity triangle Fig. 1

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad -\mathbf{w} &= (-\mathbf{u}) \oplus (-\mathbf{v}), \\ \text{(ii)} \quad -\mathbf{u} &= (-\mathbf{w}) \oplus \mathbf{v} \\ \text{(iii)} \quad -\mathbf{v} &= \mathbf{u} \oplus (-\mathbf{w}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Isotropy requires that all the six expressions be equivalent (consistent). We shall study this consistency below. We shall use (1.1) to calculate $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$ from (i) of (2.1) and from (i) of (2.2) and compare them.

From Fig. 1 using (1.1) we get

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{u}/\lambda_v + \{1 - 1/\lambda_v\} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}^2} \mathbf{v}}{1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \quad (2.3)$$

Taking its dot product with \mathbf{v}

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/\lambda_v + \{1 - 1/\lambda_v\} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}^2} \mathbf{v}^2}{1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} = \frac{\mathbf{v}^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \quad (2.4)$$

Again from Fig. 2 using (1.1) we get

$$-\mathbf{w} = (-\mathbf{u}) \oplus (-\mathbf{v}) = -\frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}/\lambda_u + \{1 - 1/\lambda_u\} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u}^2} \mathbf{u}}{1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \quad (2.5)$$

Or

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}/\lambda_u + \{1 - 1/\lambda_u\} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u}^2} \mathbf{u}}{1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \quad (2.6)$$

Taking its dot product with \mathbf{v}

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}^2/\lambda_u + \{1 - 1/\lambda_u\} \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\mathbf{u}^2}}{1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \quad (2.7)$$

(2.4) and (2.7) give different results except when \mathbf{u} and \mathbf{v} are collinear.

Now we shall calculate $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$ using (2.3) and compare with (2.7) for the case $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$. Isotropy requires that for this case $|\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}|$. We shall study this below. Taking the dot product of (2.3) we get

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u}^2/\lambda_v + \{1 - 1/\lambda_v\} \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\mathbf{v}^2}}{1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \quad (2.8)$$

Using $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$, (2.4) gives

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \quad (2.9)$$

Again (2.8) and (2.9) give different results except when \mathbf{u} and \mathbf{v} are collinear. In particular, if \mathbf{u} , and \mathbf{v} are mutually orthogonal so that $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, (2.8) and (2.9) give, contrary to our requirement, the inconsistent result $|\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}| \neq |\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}|$

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^2/\lambda_v \quad \text{and} \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^2. \quad (2.10)$$

We conclude, therefore, that Einstein's law (1.1) describes an anisotropic and inhomogeneous geometry.

3 Thomas Precession and General Validity

When applying (1.1) in situations involving electrons, it might be possible to get reasonable results invoking Thomas precession [1], but then, the validity of Einstein's law (1.1) will be limited to such cases and Special Relativity loses its general validity. We need a law of addition which represents a mathematically valid isotropic geometry. Quaternionic reciprocal symmetric transformation (1.5) fulfills our requirements.

4 Quaternionic Transformation and Isotropic Geometry

Following the triangles in Fig. 1 and Fig. 2, quaternionic transformation (1.5) gives the same relation (1.5). Therefore, corresponding to (2.4) and (2.7) we get the same relation in this case, and there is no inconsistency.

5 Conclusion

Einstein's law of addition of velocities does not represent the geometry of an isotropic space. In recognition of this lack of mathematical validity, the is sometimes called Einstein's law of «composition» [8] [instead of «addition»] of velocities.

In the application of the law in situations involving electrons Thomas precession provides a correction, but Dirac theory puts the validity of this correction in doubt. Quaternionic transformation gives a law of addition of velocities fulfilling Einstein's requirements and provides a mathematically valid representation of the geometry of an isotropic space; and Thomas precession correction is not needed.

6 Appendix

We write using (1.2)

$$\hat{u}_{\pm} = \gamma_u \{ \sigma_0 c \pm (\sigma_x u_x + \sigma_y u_y + \sigma_z u_z) \} \quad (6.1)$$

And require

$$\hat{u}_+ \hat{u}_- = \frac{1}{1 - (u/c)^2} \{ c^2 - u_x^2 - u_y^2 - u_z^2 \} = c^2 \quad (6.2)$$

Consistency between (6.1) and (6.2) will be guaranteed if [9]

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 0 \quad \text{for } i \neq j \quad (6.3)$$

$$\sigma_i \sigma_0 = \sigma_0 \sigma_i \quad (6.4)$$

$$\sigma_i^2 = 1 \quad \text{and} \quad \sigma_0^2 = 1. \quad (6.5)$$

To complete we also define [10]

$$\sigma_x \sigma_y = i \sigma_z \cdot \varepsilon_{xyz} \quad (6.6)$$

Now we can form the product

$$\hat{u}_+ (\hat{v}_- / c) = \gamma_u \gamma_v \{ \sigma_0 c + (\sigma_x u_x + \sigma_y u_y + \sigma_z u_z) \} \cdot \{ \sigma_0 c - (\sigma_x v_x + \sigma_y v_y + \sigma_z v_z) \} \quad (6.7)$$

Using (6.3) – (6.6) we get

$$\begin{aligned} \hat{u}_+ (\hat{v}_- / c) &= (\gamma_u \gamma_v / c) \cdot (c^2 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + c \cdot \sigma \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) - i \sigma \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})) \\ &= \gamma_y \left\{ c + \sigma \cdot \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{v}) - i (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) / c}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} / c^2} \right\} = \gamma_y \{ c + \sigma \cdot \mathbf{y} \} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Where

$$\gamma_y = \gamma_u \cdot \gamma_v \cdot (1 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) / c^2). \quad (6.9)$$

The σ 's permit [11] the following matrix representations

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

References

- [1] Ungar A.A. Beyond the Einstein Addition Law and its Gyroscopic Thomas Precession. Kluwer Academic Publishers. New York, Moscow, 2001, 464 p.
- [2] Ahmad M., Alam M.S. Relativistic requirement and comparison between reciprocal symmetric transformation and Lorentz transformation // *Physics Essays*, 22(2), Vol. 22, 2009, pp. 164–167.
- [3] Wigner E.P. On the unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group // *Ann. Math.* 40, 1939, pp. 149–204.
- [4] Zbigniew Oziewicz. Physical Interpretations of Relativity Theory. Moscow 2007, pp. 292–303.
- [5] Mocanu C. On the relativistic velocity composition paradox and the Thomas rotation // *Foundation of Physics Letters*, 5(5), Vol. 5, 1992, pp. 443–456.
- [6] Ungar A.A. The Thomas Formalism Underlying A Non-Associative Group Structure for Relativistic Velocities // *Applied Mathematics Letters*, 1(4), 1988, pp. 403–405.
- [7] Ahmad M. Mocanu's Paradox and Quaternionic Transformation as the Answer // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 1 (17), Vol. 9, 2012, pp. 60–64.

- [8] Marcel Froissart. Private communication
- [9] Adler S.L. Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields. International Series of Monographs on Physics – 88.
- [10] Rastall P. Quaternions in Relativity // *Reviews of Modern Physics*, 36 (3), Vol. 36, 1964, pp. 820–832.
- [11] Schiff L.I. Quantum Mechanics. McGraw Hill New York 1968, 554 p.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЙНШТЕЙНОВСКОГО ЗАКОНА СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ И ЕГО КВАТЕРНИОННЫЙ АНАЛОГ

Мушфик Ахмед

Раджшахийский университет, Раджшахи, Бангладеш

mushfiqahmad@gmail.com

Если сложить скорости \mathbf{u} и \mathbf{v} – получим скорость \mathbf{w} . Те же скорости, но с противоположным знаком: $-\mathbf{u}$ и $-\mathbf{v}$ должны дать $-\mathbf{w}$. Изотропия пространства требует, чтобы инверсия направления приводила к изменению порядка сложения: $-\mathbf{v}$ должно идти перед $-\mathbf{u}$. Лоренцево сложение не удовлетворяет этому требованию и вводится вращение Вигнера, чтобы его скорректировать. Предлагаемое нами взаимно-симметричное преобразование сохраняет изотропию пространства, и вращение Вигнера не требуется.

Ключевые слова: закон Эйнштейна, сложение скоростей, ассоциативность, неассоциативность, вращение Вигнера-Томаса, прецессия Томаса, матрицы Паули, кватернионы Паули, кватернионное сложение, геометрия, изотропный.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных алгебр в физике, е) Экспериментальные исследования возможной анизотропии пространства-времени и иных проявлений финслеровой геометрии.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.
2. Объем статьи не должен превышать 1 печ. листа (24 усл. маш. стр.)
3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате \LaTeX (версия $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$, для набора формул используется $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$) и файл статьи в формате PostScript или PDF.
4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).
5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок), ключевые слова. Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.
6. Название статьи, аннотация, ключевые слова, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.
7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.
8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи.
9. Публикация бесплатна для всех авторов.

INFORMATION FOR AUTHORS

In the journal published are the original articles and reviews of the Russian and foreign authors on the following topics: a) Hypercomplex numbers; b) Geometries connected with hypercomplex numbers; c) Finsler spaces; d) Fractals based on hypercomplex numbers; e) Application of the hypercomplex algebras in physics; f) Experimental investigation of the possible space-time anisotropy and other manifestations of Finsler geometry.

Editorial staff informs authors of the articles about the journal rules:

1. Articles are published either in Russian or in English.
2. The size of the article should not exceed that of a printed sheet (24 conventional type-written pages)
3. Author makes his article file available for the editorial board in \LaTeX format ($\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ version, \AMS-L\TeX is used for formulas) as well as in either PostScript or PDF format.
4. Accepted picture formats are as follows: TIFF, GIF, PNG for bit images (encapsulation in EPS should be possible); EPS, PDF, TEX for vector images. Each image should be represented as a separate file. Colour scheme may be either black and white or grey (8 bit).
5. Article should contain an abstract (no lengthy formulas or references) and keywords.
6. Title of the article, abstract, keywords, names and affiliation of the authors should be available both in Russian and in English.
7. Author should give his or her e-mail and telephone number to make operative communication possible. If the article is sent back to the author for him or her to improve it, it doesn't mean that the article is accepted.
8. Any deviation from the given rules makes the chance of the publication lower.
9. Publication is free for all authors.

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

Научный журнал. Основан в 2003 г.

№ 2 (18), том 9, 2012

Главный редактор Павлов Д. Г.

Зам. главного редактора Панчелюга В. А.

Технический секретарь Панчелюга М.С.

www.polynumbers.ru

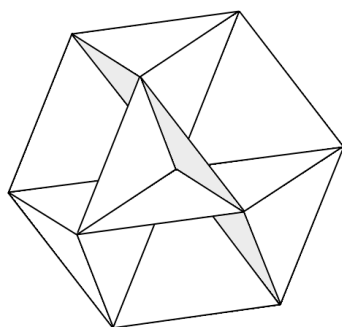
hypercomplex@mail.ru

Свидетельство о регистрации

ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.

ISSN 1814-3946

© НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике,
Российское гиперкомплексное общество, ОАО "МОЗЭТ"



Типографские данные