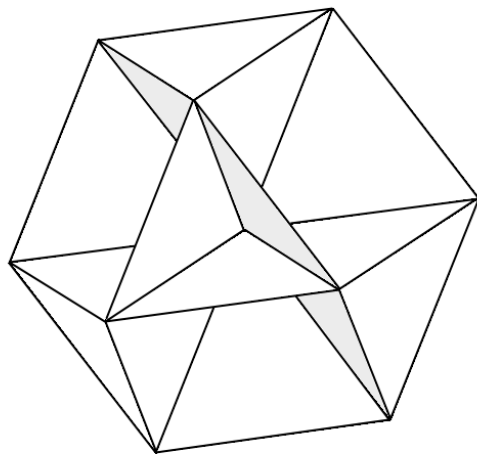


# ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

№ 1 (17), том 9, 2012

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 2003 г.



[www.polynumbers.ru](http://www.polynumbers.ru)

[hypercomplex@mail.ru](mailto:hypercomplex@mail.ru)

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Гальмак А.М., Воробьев Г.Н., Балан В.Д.</b> Полиадические операции на декартовых степенях смежных классов группы .....	4
<b>Гальмак А.М.</b> О полиадических операциях на множестве пространственных матриц .....	16
<b>Раду Мирон</b> О финслеровых механических системах .....	28
<b>Александрю О., Неагу М.</b> Струйная геометризация Римана-Гамильтона для зависящей от импульса конформно-деформированной метрики Бервальда-Моора четвертой степени .....	38
<b>Дарваш Ю.</b> Финслерова геометрия ОТО в присутствии зависящих от скорости калибровочных полей .....	50
<b>Мушфик Ахмад</b> Парадокс Мокану и кватернионное преобразование как ответ .....	60
<b>Горюнов А.В.</b> N-комплексная алгебра и изотропные релятивистские и электродинамические уравнения .....	65
<b>Овсиюк Е.М., Редьков В.М.</b> Возможна ли финслерова геометризация поляризационной оптики .....	106
<b>Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А.</b> Поисковые исследования пространственно-временного векторного поля. Предварительные результаты .....	162
<b>Кокарев С.С.</b> Теоретические оценки экспериментального эффекта сдвига спектра мощности сигнала кварцевого генератора в окрестности нестационарных процессов .....	176
Информация для авторов .....	193
Информация для авторов (на английском) .....	194

# CONTENTS

<b>Galmak A., Vorobiev G., Balan V.</b> Polyadic operations on Cartesian powers of conjugate group classes .....	4
<b>Gal'mak A.M.</b> About polyadic operations on the spacematrices set .....	16
<b>Radu Miron</b> On the finslerian mechanical systems .....	28
<b>Alexandru Oană, Mircea Neagu</b> Jet Riemann-Hamilton geometrization for the conformal deformed Berwald-Moor quartic metric depending on momenta .....	38
<b>György Darvas</b> Finsler geometry in GTR in the presence of a velocity dependent gauge field .....	50
<b>Mushfiq Ahmad</b> Mocanu's paradox and quaternionic transformation as the answer .....	60
<b>Goryunov A.V.</b> N-complex algebra and isotropic relativistic and electrodynamics equations .....	65
<b>Ovsiyuk E.M., Red'kov V.M.</b> Does it possible Finsler geometrization of the polarization optics? .....	106
<b>Pavlov D.G., Panchelyuga M.S., Panchelyuga V.A.</b> Exploring researches on the space-time effects of hyperbolic fields. Preliminary results .....	162
<b>Kokarev S.S.</b> Theoretical estimation of experimental effect of power spectrum shift of quartz generator signal in vicinity of nonstationar processes .....	176
Information for authors (in russian) .....	193
Information for authors .....	194

# ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НА ДЕКАРТОВЫХ СТЕПЕНЯХ СМЕЖНЫХ КЛАССОВ ГРУППЫ

А.М. Гальмак<sup>1</sup>, Г.Н. Воробьев<sup>1</sup>, В.Д. Балан<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев, Белоруссия

<sup>2</sup>Политехнический университет, Бухарест, Румыния

mgur@mogilev.by, vbalan@mathem.pub.ro

Для любых  $\ell \geq 3$ ,  $k \geq 2$  и любой подстановки  $\sigma \in S_k$  на декартовой степени  $A^k$  группы  $A$ , обладающей нормальной подгруппой  $B$  такой, что факторгруппа  $A/B$  – циклическая порядка, делящего  $\ell - 1$ , определяется  $\ell$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  с  $\ell$ -арной операцией  $[ ]_{\ell, \sigma, k}$ . Изучаются свойства этой  $\ell$ -арной операции на декартовых степенях смежных классов группы  $A$  по ее подгруппе  $B$ .

**Ключевые слова:**  $n$ -арная операция, полиадические матрицы, нормальная подгруппа, декартова степень, полуабелева, полуинвариант, полугруппа.

## 1 Введение

Напомним некоторые понятия теории  $n$ -арных групп, используемые в работе.

Согласно В. Дертте [1], универсальная алгебра  $\langle A, [ ] \rangle$  с одной  $n$ -арной ( $n \geq 2$ ) операцией  $[ ] : A^n \rightarrow A$  называется  $n$ -арной группой, если выполняются следующие условия:

1.  $n$ -арная операция  $[ ]$  на множестве  $A$  ассоциативна, то есть

$$[[a_1 \dots a_n] a_{n+1} \dots a_{2n-1}] = [a_1 \dots a_i [a_{i+1} \dots a_{i+n}] a_{i+n+1} \dots a_{2n-1}],$$

для всех  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  и всех  $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1} \in A$ ;

2. каждое из уравнений

$$[a_1 \dots a_{i-1} x_i a_{i+1} \dots a_n] = b, i = 1, 2, \dots, n$$

однозначно разрешимо в  $A$  относительно  $x_i$  для всех  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in A$ .

Э. Пост заметил [2], что требование однозначной разрешимости уравнений в определении Дертте можно ослабить, потребовав только их разрешимость, а число уравнений уменьшить с  $n$  до двух ( $i = 1, n$ ), а при  $n \geq 3$  даже до одного ( $i$  – фиксированное из  $\{2, \dots, n-1\}$ ).

$n$ -Арную группу  $\langle A, [ ] \rangle$  называют [1, 2]: абелевой, если

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = [a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(n)}]$$

для всех  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$  и любой подстановки  $\sigma$  множества  $\{1, \dots, n\}$ ; полуабелевой, если

$$[a a_1 \dots a_{n-2} b] = [b a_1 \dots a_{n-2} a]$$

для всех  $a, a_1, \dots, a_{n-2}, b \in A$ .

$n$ -Арную подгруппу  $\langle B, [ ] \rangle$   $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  называют [1, 2] инвариантной в ней, если

$$[x \underbrace{B \dots B}_{n-1}] = [B x \underbrace{B \dots B}_{n-2}] = \dots = [\underbrace{B \dots B}_{n-2} x B] = [\underbrace{B \dots B}_{n-1} x]$$

для любого  $x \in A$ . Если же

$$[x \underbrace{B \dots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \dots B}_{n-1} x]$$

для любого  $x \in A$ , то  $\langle B, [ ] \rangle$  называют [1, 2] *полуинвариантной* в  $\langle A, [ ] \rangle$ .

Согласно Э. Посту [2] (см. также [3]), группа  $A$  называется обертывающей для  $n$ -арной группы  $\langle H, [ ] \rangle$ , если она порождается множеством  $H$ , а бинарная операция в группе  $A$  и  $n$ -арная операция  $[ ]$  связаны условием

$$[x_1 x_2 \dots x_n] = x_1 x_2 \dots x_n$$

для любых  $x_1, x_2, \dots, x_n \in H$ . Множество

$$B = \{a_1 \dots a_{n-1} | a_1, \dots, a_{n-1} \in H\}$$

является нормальной подгруппой в  $A$ , факторгруппа  $A/B$  по которой – циклическая, имеющая порядок, делящий  $n-1$ . Группу  $B$  называют *соответствующей* для  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$ .

Обратная теорема Поста о смежных классах [2,3] утверждает, что если факторгруппа  $A/B$  группы  $A$  по ее нормальной подгруппе  $B$  является циклической с образующим элементом  $aB$  и имеет порядок, делящий  $n-1$ , то  $\langle aB, [ ] \rangle$   $n$ -арная группа с  $n$ -арной операцией

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Обертывающей группой для  $\langle aB, [ ] \rangle$  является  $A$ , а соответствующей группой – подгруппа  $B$ .

## 2 Предварительные результаты

**Определение 2.1** [4,5]. Пусть  $A$  – группоид,  $k \geq 2, \ell \geq 2, \sigma$  – подстановка из  $S_k$ . Определим на  $A^k$  вначале бинарную операцию

$$\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1 y_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)}, \dots, x_k y_{\sigma(k)}),$$

а затем  $\ell$ -арную операцию

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_\ell]_{\ell, \sigma, k} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\dots (\mathbf{x}_{\ell-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{\ell-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_\ell)) \dots)).$$

Понятно, что операция  $[ ]_{2, \sigma, k}$  совпадает с операцией  $\overset{\sigma}{\circ}$ .

**Замечание 2.2.** Легко заметить, что если  $\sigma = (12 \dots k)$ , то операция  $\overset{\sigma}{\circ}$  совпадает с операцией

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \circ (y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1 y_2, x_2 y_3, \dots, x_{k-1} y_k, x_k y_1)$$

из [6, определения 2.2.3], а операция  $[ ]_{\ell, \sigma, k}$  – с операцией  $[ ]_{\ell, k}$  из того же определения. Операции  $\circ$  и  $[ ]_{\ell, k}$  впервые были определены в [7], где также впервые была определена и операция  $[ ]_{\ell, \sigma, k}$  для случая полугруппы  $A$ . Заметим также, что операция  $[ ]_{n, n-1}$  аналогична  $n$ -арной операции, которую Э. Пост определил на множестве всех  $n$ -арных подстановок [2].

**Теорема 2.3** [4]. Пусть  $A$  – полугруппа,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, \quad i = 1, 2, \dots, \ell.$$

Тогда  $[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_\ell]_{\ell, \sigma, k} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ , где

$$y_j = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(\ell-1)\sigma^{\ell-2}(j)} x_{\ell\sigma^{\ell-1}(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

**Теорема 2.4** [6]. Если  $A$  – группа,  $\sigma$  – подстановка из  $S_k$ , удовлетворяющая условию  $\sigma^\ell = \sigma$ , то  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  –  $\ell$ -арная группа.

**Теорема 2.5** [6]. Если полугруппа  $A$  содержит единицу 1, а подстановка  $\sigma \in S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^\ell = \sigma$ , то  $\ell$ -арная полугруппа  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  является полуабелевой тогда и только тогда, когда полугруппа  $A$  – коммутативна.

**Теорема 2.6** [6]. Пусть полугруппа  $A$  содержит более одного элемента,  $\sigma$  – нетождественная подстановка из  $S_k$ . Тогда в  $\ell$ -арном группоиде  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  нет единиц.

**Лемма 2.7.** Пусть  $\sigma$  – подстановка из  $S_k$ , удовлетворяющая условию  $\sigma^\ell = \sigma$ ,  $B$  – подгруппа группы  $A$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ . Тогда:

1.  $[\underbrace{B^k \dots B^k}_{i-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{\ell-i}]_{\ell, \sigma, k} = Bx_{\sigma^{i-1}(1)}B \times \dots \times Bx_{\sigma^{i-1}(k)}B$  для любого  $i = 2, \dots, \ell-1$ ;
2.  $[\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{\ell-1}]_{\ell, \sigma, k} = x_1B \times \dots \times x_kB$ ;
3.  $[\underbrace{B^k \dots B^k}_{\ell-1} \mathbf{x}]_{\ell, \sigma, k} = Bx_1 \times \dots \times Bx_k$ .

*Доказательство.*

1. Так как

$$\begin{aligned} & [\underbrace{B^k \dots B^k}_{i-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{\ell-i}]_{\ell, \sigma, k} = \\ & = \{[\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_{i-1} \mathbf{x} \mathbf{h}_{i+1} \dots \mathbf{h}_\ell]_{\ell, \sigma, k} \mid \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{i-1}, \mathbf{h}_{i+1}, \dots, \mathbf{h}_\ell \in B^k\} = \\ & = \{[(b_{11}, \dots, b_{1k}) \dots (b_{(i-1)1}, \dots, b_{(i-1)k})(x_1, \dots, x_k)(b_{(i+1)1}, \dots, \\ & \quad \dots, b_{(i+1)k}) \dots (b_{\ell 1}, \dots, b_{\ell k})]_{\ell, \sigma, k} \mid b_{ij} \in B\} = \\ & = \{(b_{11}b_{2\sigma(1)} \dots b_{(i-1)\sigma^{i-2}(1)}x_{\sigma^{i-1}(1)}b_{(i+1)\sigma^i(1)} \dots b_{\ell\sigma^{\ell-1}(k)}, \dots \\ & \quad \dots, b_{1k}b_{2\sigma(k)} \dots b_{(i-1)\sigma^{i-2}(k)}x_{\sigma^{i-1}(k)}b_{(i+1)\sigma^i(k)} \dots b_{\ell\sigma^{\ell-1}(k)}) \mid b_{ij} \in B\} = \\ & = Bx_{\sigma^{i-1}(1)}B \times \dots \times Bx_{\sigma^{i-1}(k)}B, \end{aligned}$$

то верно 1.

2. Доказывается аналогично 1. с использованием определений смежного класса и операции  $[ ]_{\ell, \sigma, k}$ .

3. В начале с использованием определений смежного класса и операции  $[ ]_{\ell, \sigma, k}$  получается равенство

$$[\underbrace{B^k \dots B^k}_{\ell-1} \mathbf{x}]_{\ell, \sigma, k} = Bx_{\sigma^{\ell-1}(1)} \times \dots \times Bx_{\sigma^{\ell-1}(k)},$$

откуда, ввиду тождественности подстановки  $\sigma^{\ell-1}$ , вытекает 3.

Лемма доказана.

Полагая в лемме 2.7  $\ell = n$ ,  $k = n - 1$ ,  $\sigma = (12 \dots n - 1)$ , получим

**Следствие 2.8.** Пусть  $n \geq 3$ ,  $B$  – подгруппа группы  $A$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in A^{n-1}$ . Тогда:

1.  $[\underbrace{B^{n-1} \dots B^{n-1}}_{i-1} \mathbf{x} \underbrace{B^{n-1} \dots B^{n-1}}_{n-i}]_{n, n-1} = Bx_iB \times \dots \times Bx_{n-1}B \times Bx_1B \times \dots \times Bx_{i-1}B$   
для любого  $i = 2, \dots, n - 1$ ;

$$2. [\underbrace{\mathbf{x} B^{n-1} \dots B^{n-1}}_{n-1}]_{n, n-1} = x_1 B \times \dots \times x_{n-1} B;$$

$$3. [\underbrace{B^{n-1} \dots B^{n-1} \mathbf{x}}_{n-1}]_{n, n-1} = B x_1 \times \dots \times B x_{n-1}.$$

Согласно теореме 2.4, если  $A$  – группа,  $\sigma$  – подстановка из  $S_k$ , удовлетворяющая условию  $\sigma^\ell = \sigma$ , то  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  –  $\ell$ -арная группа. Понятно, что если  $B$  – подгруппа группы  $A$ , подстановка  $\sigma \in S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^\ell = \sigma$ , то  $\langle B^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  –  $\ell$ -арная подгруппа  $\ell$ -арной группы  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ .

**Предложение 2.9.** Пусть  $\sigma$  – подстановка из  $S_k$ , удовлетворяющая условию  $\sigma^\ell = \sigma$ ,  $B$  – подгруппа группы  $A$ . Тогда:

1.  $n$ -арная подгруппа  $\langle B^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  полуинвариантна в  $\ell$ -арной группе  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  тогда и только тогда, когда подгруппа  $B$  нормальна в группе  $A$ ;
2. если  $B \neq A$ ,  $\sigma$  не является тождественной подстановкой, то  $\langle B^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  не является инвариантной в  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ .

*Доказательство.*

1. *Необходимость.*

Полуинвариантность  $\langle B^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  в  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  означает, что

$$[\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{\ell-1}]_{\ell, \sigma, k} = [\underbrace{B^k \dots B^k \mathbf{x}}_{\ell-1}]_{\ell, \sigma, k} \quad (1)$$

для любого  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ . Тогда, ввиду леммы 2.7,

$$x_1 B \times \dots \times x_k B = B x_1 \times \dots \times B x_k, \quad (2)$$

откуда  $x_1 B = B x_1$  для любого  $x_1 \in B$ , что означает нормальность  $B$  в  $A$ .

*Достаточность.*

Из нормальности  $B$  в  $A$  следует

$$x_1 B = B x_1, \dots, x_k B = B x_k$$

для любых  $x_1, \dots, x_k \in A$ , а это значит верно (2). Тогда, ввиду леммы 2.7, верно (1), что означает полуинвариантность  $\langle B^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  в  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ .

2. Если  $\sigma$  – нетождественная подстановка, то  $\sigma(j) \neq j$  для некоторого  $j \in \{1, \dots, k\}$ , а так как  $B \neq A$ , то найдется такой элемент  $u \in A$ , отличный от единицы  $e$  группы  $A$ , что  $uB \neq B$ . Выберем в  $A^k$  элемент  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$  так, что  $x_j = u$ ,  $x_{\sigma(j)} = e$ , а все остальные компоненты могут быть произвольными элементами из  $A$ . Неравенство  $\sigma(j) \neq j$  гарантирует такой выбор. Для случая  $\sigma(j) = j$  такой выбор был бы невозможен, так как  $u \neq e$ .

Если предположить инвариантность  $\langle B^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  в  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ , то

$$[\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{\ell-1}]_{\ell, \sigma, k} = [B^k \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{\ell-2}]_{\ell, \sigma, k}$$

для выбранного  $\mathbf{x}$ . Так как из инвариантности  $n$ -арной подгруппы в  $n$ -арной группе вытекает ее полуинвариантность в этой же  $n$ -арной группе, то предположение об инвариантности  $\langle B^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  в  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  влечет за собой, ввиду 1., нормальность  $B$  в  $A$ .

Применяя к левой части последнего равенства утверждение 2. леммы 2.7, а к правой – утверждение 1. при  $i = 2$ , а также используя нормальность  $B$  в  $A$ , получим

$$x_1 B \times \dots \times x_j B \times \dots \times x_k B = x_{\sigma(1)} B \times \dots \times x_{\sigma(j)} B \times \dots \times x_{\sigma(k)} B.$$

Следовательно,  $x_j B = x_{\sigma(j)} B$ , откуда и из условия  $x_j = u$ ,  $x_{\sigma(j)} = e$  получаем  $uB = B$ , что противоречит выбору  $uB \neq B$ . Таким образом,  $\langle B^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  не является инвариантной в  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ .

Предложение доказано.

Полагая в предложении 2.9  $\ell = n$ ,  $k = n - 1$ ,  $\sigma = (12 \dots n - 1)$ , получим

**Следствие 2.10.** Пусть  $n \geq 3$ ,  $B$  – подгруппа группы  $A$ . Тогда:

1.  $n$ -арная подгруппа  $\langle B^{n-1}, [ ]_{n, n-1} \rangle$   $n$ -арной группы  $\langle A^{n-1}, [ ]_{n, n-1} \rangle$  полуинвариантна в ней тогда и только тогда, когда подгруппа  $B$  нормальна в группе  $A$ ;
2. Если  $B \neq A$ , то  $\langle B^{n-1}, [ ]_{n, n-1} \rangle$  не является инвариантной в  $\langle A^{n-1}, [ ]_{n, n-1} \rangle$ .

Если  $\sigma$  – нетождественная подстановка из  $S_k$ , удовлетворяющая условию  $\sigma^\ell = \sigma$ , то по предложению 2.9  $\langle \{e\}^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  – одноэлементная полуинвариантная, но неинвариантная  $\ell$ -арная подгруппа  $\ell$ -арной группы  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ . А так как единица  $\ell$ -арной группы является ее инвариантной  $\ell$ -арной подгруппой, то элемент  $\underbrace{\{e, \dots, e\}}_k$  не является

единицей в  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ . В действительности, согласно предложению 2.6 в  $\ell$ -арной группе  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  вообще нет единиц.

### 3 Основные результаты

По предложению 2.9, если подстановка  $\sigma \in S_k$ , удовлетворяет условию  $\sigma^\ell = \sigma$ ,  $B$  – нормальная подгруппа группы  $A$ , то декартова степень  $B^k$  является полуинвариантной  $\ell$ -арной подгруппой  $\ell$ -арной группы  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ . Оказывается, если потребовать, чтобы факторгруппа  $A/B$  была циклической, и ее порядок делил  $\ell - 1$ , то не только декартова степень  $B^k$ , но  $k$ -ая декартова степень любого смежного класса из  $A/B$  является полуинвариантной  $\ell$ -арной подгруппой в  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ .

**Теорема 3.1.** Пусть  $A$  – группа,  $B$  – ее собственная нормальная подгруппа, факторгруппа  $A/B$  является циклической и имеет порядок, делящий  $\ell - 1$ , подстановка  $\sigma$  из  $S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^\ell = \sigma$ . Тогда для любого смежного класса  $H$  факторгруппы  $A/B$  декартова степень  $H^k$  замкнута относительно  $\ell$ -арной операции  $[ ]_{\ell, \sigma, k}$ , а универсальная алгебра  $\langle H^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  является полуинвариантной  $\ell$ -арной подгруппой  $\ell$ -арной группы  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ . Если же  $\sigma$  – нетождественная подстановка, то  $\langle H^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  не является инвариантной в  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ .

**Доказательство.** Пусть факторгруппа  $A/B$  порождается смежным классом  $aB$ , то есть  $A/B = \{B, aB, \dots, a^{t-1}B\}$ , где  $t$  делит  $\ell - 1$ . Будем для определенности считать  $H = a^s B$  для некоторого  $s = 0, 1, \dots, t - 1$ .

Так как  $(aB)^t = a^t B = B$ , то  $a^t \in B$ , откуда и из условия  $t$  делит  $\ell - 1$  вытекает  $a^{\ell-1} \in B$ . Если теперь

$$\mathbf{h}_i = (h_{i1}, \dots, h_{ik}) = (a^s b_{i1}, \dots, a^s b_{ik}), i = 1, \dots, \ell$$

произвольные элементы из  $H^k$ , то ввиду нормальности  $B$  в  $A$ , будем иметь

$$[\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_\ell]_{\ell, \sigma, k} = (y_1, \dots, y_k),$$



где

$$y_j = a^s b_{1j} a^s b_{2\sigma(j)} \dots a^s b_{(l-1)\sigma^{\ell-2}(j)} a^s b_{\ell j} = a^{sl} b_j$$

для некоторого  $b_j \in B$ . Но тогда, ввиду  $a^{\ell-1} \in B$ , имеем

$$y_j = a^{sl} b_j = a^s (a^{\ell-1})^s b_j = a^s b'_j$$

для некоторого  $b'_j \in B$ . Следовательно,  $y_j \in H$  для любого  $j = 1, \dots, k$ , откуда

$$[\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_\ell]_{\ell, \sigma, k} \in H^k,$$

что означает замкнутость множества  $H^k$  относительно  $\ell$ -арной операции  $[\ ]_{\ell, \sigma, k}$ .

Рассмотрим теперь в  $\langle A^k, [\ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  уравнение

$$[\mathbf{xh}_2 \dots \mathbf{h}_\ell]_{\ell, \sigma, k} = \mathbf{g}, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_k) = (a^s c_1, \dots, a^s c_k) \in H^k, (c_1, \dots, c_k) \in B.$$

Элементы  $\mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_\ell$ , были определены выше и также принадлежали множеству  $H^k$ . Так как  $\langle A^k, [\ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  –  $\ell$ -арная группа, то уравнение (3) имеет в ней решение

$$\mathbf{x} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k.$$

Подставляя это решение в (3), и, приравнивая  $j$ -ые компоненты в левой и правой частях полученного равенства, получим

$$a_j a^s b_{2\sigma(j)} \dots a^s b_{(l-1)\sigma^{\ell-2}(j)} a^s b_{\ell j} = a^s c_j.$$

Ввиду нормальности  $B$  в  $A$  и условия  $a^{\ell-1} \in B$ , левая часть последнего равенства принимает вид  $a_j a^{(\ell-1)s} d = a_j b$  для некоторых  $d, b \in B$ , а само оно переписывается в виде  $a_j b = a^s c_j$ . Но тогда  $a_j = a^s c_j b^{-1}$ , где  $c_j b^{-1} \in B$ . Следовательно,  $a_j \in a^s B = H$ , то есть  $\mathbf{x} = (a_1, \dots, a_k) \in H^k$ . Это означает, что уравнение (3) разрешимо в  $\langle H^k, [\ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ .

Аналогично доказывается разрешимость в  $\langle H^k, [\ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  уравнения

$$[\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_{\ell-1} \mathbf{y}]_{\ell, \sigma, k} = \mathbf{g}$$

для любых  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{\ell-1}, \mathbf{g} \in H^k$ . Таким образом, согласно критерию Поста [2],  $\langle H^k, [\ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  –  $\ell$ -арная подгруппа в  $\langle A^k, [\ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ .

Если  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$  – произвольный элемент из  $A^k$ , то, используя нормальность  $B$  в  $A$ , и условие  $a^{\ell-1} \in B$ , получим

$$\begin{aligned} [\underbrace{\mathbf{x} H^k \dots H^k}_{\ell-1}]_{\ell, \sigma, k} &= \{[\mathbf{xh}_2 \dots \mathbf{h}_\ell]_{\ell, \sigma, k} \mid \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_\ell \in H^k\} = \\ &= \{[(x_1, \dots, x_k)(a^s b_{21}, \dots, a^s b_{2k}) \dots (a^s b_{\ell 1}, \dots, a^s b_{\ell k})]_{\ell, \sigma, k} \mid b_{ij} \in B\} = \\ &= \{(x_1 a^s b_{2\sigma(1)} \dots a^s b_{(l-1)\sigma^{\ell-2}(1)} a^s b_{\ell 1}, \dots, \\ &\quad \dots x_k a^s b_{2\sigma(k)} \dots a^s b_{(l-1)\sigma^{\ell-2}(k)} a^s b_{\ell k}) \mid b_{ij} \in B\} = \\ &= \{(x_1 a^{(\ell-1)s} d_1, \dots, x_k a^{(\ell-1)s} d_k) \mid d_1, \dots, d_k \in B\} = \\ &= \{(x_1 b_1, \dots, x_k b_k) \mid b_1, \dots, b_k \in B\} = x_1 B \times \dots \times x_k B, \end{aligned}$$

то есть

$$[\underbrace{\mathbf{x} H^k \dots H^k}_{\ell-1}]_{\ell, \sigma, k} = x_1 B \times \dots \times x_k B. \quad (4)$$

Аналогично доказывается равенство

$$\underbrace{[H^k \dots H^k \mathbf{x}]_{\ell, \sigma, k}}_{\ell-1} = Bx_1 \times \dots \times Bx_k. \quad (5)$$

Из нормальности  $B$  в  $A$  вытекает равенство правых частей равенств (4) и (5), а значит и равенство их левых частей, для любого  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ , что означает полуинвариантность  $\langle H^k, [\ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  в  $\langle A^k, [\ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ .

Если  $\sigma$  – нетождественная подстановка, то  $\sigma(j) \neq j$  для некоторого  $j \in \{1, \dots, k\}$ , а так как  $B \neq A$ , то найдется такой элемент  $u \in A$ , отличный от единицы  $e$  группы  $A$ , что  $uB \neq B$ . Выберем в  $A^k$  элемент  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$  так, что

$$x_j = u, \quad x_{\sigma(j)} = (a^{-1})^{(\ell-1)s}, \quad (6)$$

а все остальные компоненты могут быть произвольными элементами из  $A$ . Неравенство  $\sigma(j) \neq j$  гарантирует такой выбор. Для случая  $\sigma(j) = j$  такой выбор был бы невозможен, если, например,  $u \neq (a^{-1})^{(\ell-1)s}$ .

Если предположить инвариантность  $\langle H^k, [\ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  в  $\langle A^k, [\ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ , то

$$[\mathbf{x} \underbrace{H \dots H}_{\ell-1}]_{\ell, \sigma, k} = [H\mathbf{x} \underbrace{H \dots H}_{\ell-2}]_{\ell, \sigma, k}$$

для выбранного  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ . Применим (4) к левой части полученного равенства, а в правой части, используя нормальность  $B$  в  $A$ , проведем вычисления, аналогичные тем, которые были сделаны при получении (4). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} x_1 B \times \dots \times x_j B \times \dots \times x_k B &= \\ &= a^s x_{\sigma(j)} a^{(\ell-2)s} B \times \dots \times a^s x_{\sigma(j)} a^{(\ell-2)s} B \times \dots \times a^s x_{\sigma(k)} a^{(\ell-2)s} B. \end{aligned}$$

Следовательно,  $x_j B = a^s x_{\sigma(j)} a^{(\ell-2)s} B$ , откуда, ввиду (6), вытекает  $uB = B$ , что противоречит выбору  $uB \neq B$ . Таким образом  $\langle H^k, [\ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  не является инвариантной в  $\langle A^k, [\ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ .

Теорема доказана.

**Следствие 3.2.** Пусть  $A$  – группа,  $B$  – ее собственная нормальная подгруппа, факторгруппа  $A/B$  является циклической, порождается смежным классом  $aB$  и имеет порядок, делящий  $\ell - 1$ . Тогда декартова степень  $(aB)^k$  замкнута относительно  $\ell$ -арной операции  $[\ ]_{\ell, \sigma, k}$ , а универсальная алгебра  $\langle (aB)^k, [\ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  является полуинвариантной  $\ell$ -арной подгруппой  $\ell$ -арной группы  $\langle A^k, [\ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ . Если же  $\sigma$  – нетождественная подстановка, то  $\langle (aB)^k, [\ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  не является инвариантной в  $\langle A^k, [\ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ .

Полагая в теореме 3.1  $\ell = n$ ,  $k = n - 1$ ,  $\sigma = (12 \dots n - 1)$ , получим

**Следствие 3.3** [8]. Пусть  $n \geq 3$ ,  $A$  – группа,  $B$  – ее собственная нормальная подгруппа, факторгруппа  $A/B$  является циклической и имеет порядок, делящий  $n-1$ . Тогда для любого смежного класса  $H$  факторгруппы  $A/B$  декартова степень  $H^{n-1}$  замкнута относительно  $n$ -арной операции  $[\ ]_{n, n-1}$ , а универсальная алгебра  $\langle H^{n-1}, [\ ]_{n, n-1} \rangle$  является полуинвариантной, но неинвариантной  $n$ -арной подгруппой  $n$ -арной группы  $\langle A^{n-1}, [\ ]_{n, n-1} \rangle$ .

Всякая полуинвариантная  $n$ -арная подгруппа  $\langle B, [\ ] \rangle$   $n$ -арной группы  $\langle A, [\ ] \rangle$  определяет на ней конгруэнцию  $\rho_B$ , классы которой совпадают со смежными классами  $n$ -арной факторгруппы  $\langle A/B, [\ ] \rangle$  (см., например, предложение 7.4 [9]). Следующая теорема устанавливает связь между собой конгруэнций  $n$ -арной группы  $\langle A^{n-1}, [\ ]_{n, n-1} \rangle$ ,

которые определяются полуинвариантными  $n$ -арными подгруппами, построенными с помощью различных смежных классов факторгруппы  $A/B$  из теоремы 3.1.

**Теорема 3.4.** Пусть  $H$  – произвольный смежный класс факторгруппы  $A/B$  из теоремы 3.1. Тогда:

1.  $\langle A^k/H^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle = \langle A^k/B^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle = \langle (A/B)^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ ;
2.  $\rho_{H^k} = \rho_{B^k}$ .

*Доказательство.*

1. Полагая в (4)  $H = B$ , получим

$$[\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{\ell-1}]_{\ell, \sigma, k} = x_1 B \times \dots \times x_k B, \quad (7)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ , откуда и из (4) вытекает

$$[\underbrace{\mathbf{x} H^k \dots H^k}_{\ell-1}]_{\ell, \sigma, k} = [\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{\ell-1}]_{\ell, \sigma, k}$$

для любого  $\mathbf{x} \in A^k$ . Поэтому  $\ell$ -арные факторгруппы  $\langle A^k/H^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  и  $\langle A^k/B^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  совпадают.

Если  $[\underbrace{\mathbf{x} H^k \dots H^k}_{\ell-1}]_{\ell, \sigma, k}$  – произвольный смежный класс из  $\langle A^k/B^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ , то, ввиду (4),

$$[\underbrace{\mathbf{x} H^k \dots H^k}_{\ell-1}]_{\ell, \sigma, k} \in (A/B)^k,$$

то есть верно включение  $A^k/H^k \subseteq (A/B)^k$ .

Если же  $x_1 B \times \dots \times x_k B$  – произвольный элемент из  $(A/B)^k$ , то, снова используя (4), получим  $x_1 B \times \dots \times x_k B \in A^k/B^k$ , то есть верно включение  $(A/B)^k \subseteq A^k/B^k$ . Из доказанных включений следует совпадение  $\ell$ -арных факторгрупп  $\langle A^k/H^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  и  $\langle (A/B)^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ .

2. Так как по предложению 7.4 из [9]

$$\langle A^k/\rho_{B^k}, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle = \langle A^k/B^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle,$$

$$\langle A^k/\rho_{H^k}, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle = \langle A^k/H^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle,$$

то, согласно 1.,

$$\langle A^k/\rho_{H^k}, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle = \langle A^k/\rho_{B^k}, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle,$$

что означает совпадение конгруэнций  $\rho_{H^k}$  и  $\rho_{B^k}$ .

Теорема доказана.

Полагая в теореме 3.4  $\ell = n$ ,  $k = n - 1$ ,  $\sigma = (12 \dots n - 1)$ , получим

**Следствие 3.5** [8]. Пусть  $H$  – произвольный смежный класс из следствия 3.3. Тогда:

1.  $\langle A^{n-1}/H^{n-1}, [ ]_{n, n-1} \rangle = \langle A^{n-1}/B^{n-1}, [ ]_{n, n-1} \rangle = \langle (A/B)^{n-1}, [ ]_{n, n-1} \rangle$ ;
2.  $\rho_{H^{n-1}} = \rho_{B^{n-1}}$ .

Теорему 3.4 и следствие 3.5 можно сформулировать иначе, более конкретно.

**Теорема 3.6.** Пусть подстановка  $\sigma$  из  $S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^\ell = \sigma$ ,  $A$  – группа,  $B$  – ее собственная нормальная подгруппа, факторгруппа  $A/B$  является циклической, порождается элементом  $aB$  и имеет порядок  $t$ , делящий  $\ell - 1$ :  $A/B = \{B, aB, \dots, a^{t-1}B\}$ . Тогда:

1.  $\langle A^k/B^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle = \langle A^k/(aB)^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle = \dots = \langle A^k/(a^{t-1}B)^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle = \langle (A/B)^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ ;
2.  $\rho_{B^k} = \rho_{(aB)^k} = \dots = \rho_{(a^{t-1}B)^k}$ .

**Следствие 3.7** [8]. Пусть  $n \geq 3$ ,  $A$  – группа,  $B$  – ее собственная нормальная подгруппа, факторгруппа  $A/B$  является циклической, порождается элементом  $aB$  и имеет порядок  $t$ , делящий  $n - 1$ :  $A/B = \{B, aB, \dots, a^{t-1}B\}$ . Тогда:

1.  $\langle A^{n-1}/B^{n-1}, [ ]_{n, n-1} \rangle = \langle A^{n-1}/(aB)^{n-1}, [ ]_{n, n-1} \rangle = \dots = \langle A^{n-1}/(a^{t-1}B)^{n-1}, [ ]_{n, n-1} \rangle = \langle (A/B)^{n-1}, [ ]_{n, n-1} \rangle$ ;
2.  $\rho_{B^{n-1}} = \rho_{(aB)^{n-1}} = \dots = \rho_{(a^{t-1}B)^{n-1}}$ .

## 4 Полиадические матрицы

Упорядоченный набор  $(A_1, A_2, \dots, A_{m-1})$  матриц одного и того же порядка  $n$  над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ . Э. Пост назвал [2]  $m$ -арной или полиадической матрицей над  $\mathbb{C}$ . На множестве всех  $m$ -арных матриц, у которых определители всех компонент отличны от нуля, Э. Пост определил  $m$ -арную операцию

$$[A_1 \dots A_m] = [(A_{11}, \dots, A_{1(m-1)}) \dots (A_{m1}, \dots, A_{m(m-1)})] = (Y_1, \dots, Y_{m-1}), \quad (8)$$

где

$$Y_j = A_{1j}A_{2(j+1)} \dots A_{(n-j)(n-1)}A_{(n-j+1)1} \dots A_{(n-1)(j-1)}A_{nj}, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

Э. Пост доказал, что указанное множество, вместе с  $m$ -арной операцией (8) является  $m$ -арной группой, которую он назвал  $m$ -арной линейной группой. Операция (8) совпадает с операцией  $[ ]_{\ell, \sigma, k}$  при  $\ell = m$ ,  $k = m - 1$ ,  $\sigma = (12 \dots m - 1)$ , то есть с операцией  $[ ]_{m, m-1}$ .

Мы будем рассматривать упорядоченные наборы матриц одного и того же порядка над произвольным полем. Множество всех упорядоченных наборов  $A = (A_1, \dots, A_k)$  матриц одного и того же порядка  $n$  над полем  $F$ , у которых определитель каждой компоненты  $A_j$  отличен от нуля полем  $F$ , обозначим через  $GL(n, k, F)$ . Элементы этого множества, следуя Э. Посту, будем называть  $k$ -компонентными полиадическими матрицами над  $F$ .

Ясно, что множество  $GL(n, k, F)$  совпадает с  $k$ -ой декартовой степенью полной линейной группы  $GL(n, F) : GL(n, k, F) = (GL(n, F))^k$ . Поэтому, полагая в теореме 2.4,  $A = GL(n, F)$ , получим

**Предложение 4.1.** Если подстановка  $\sigma$  из  $S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^\ell = \sigma$ , то множество  $GL(n, k, F)$  замкнуто относительно  $\ell$ -арной операции  $[ ]_{\ell, \sigma, k}$ , а универсальная алгебра  $\langle GL(n, k, F), [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  является  $\ell$ -арной группой.

Так как  $GL(n, m - 1, \mathbb{C}) = (GL(n, \mathbb{C}))^{m-1}$ , а операция (8), как уже отмечалось, совпадает с операцией  $[ ]_{m, m-1}$ , то из предложения 4.1 вытекает отмеченный выше результат Э. Поста.

**Следствие 4.2** [2] Множество  $GL(n, m - 1, \mathbb{C})$  замкнуто относительно  $m$ -арной операции  $[ ]_{m, m-1}$ , а универсальная алгебра  $\langle GL(n, m - 1, \mathbb{C}), [ ]_{m, m-1} \rangle$  является  $m$ -арной группой.

Во множестве  $GL(n, k, F)$  выделим подмножество  $SL(n, k, F)$  всех  $k$ -компонентных полиадических матриц, у которых определитель каждой компоненты равен единице поля  $F$ . Так как  $SL(n, k, F) = (SL(n, F))^k$ , то, снова применяя теорему 2.4, получим

**Предложение 4.3.** Если подстановка  $\sigma$  из  $S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^\ell = \sigma$ , то множество  $SL(n, k, F)$  замкнуто относительно  $\ell$ -арной операции  $[ ]_{\ell, \sigma, k}$ , а универсальная алгебра  $\langle SL(n, k, F), [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  является  $\ell$ -арной подгруппой  $\ell$ -арной группы  $\langle GL(n, k, F), [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ .

Полиадическую группу  $\langle SL(n, k, F), [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  по аналогии с бинарным случаем естественно называть полиадической специальной линейной группой.

Понятно, что при  $k = 1$  и  $\ell = 2$  1-компонентные матрицы – это обычные матрицы, а полиадические группы  $GL(n, 1, F)$  и  $SL(n, 1, F)$  совпадают соответственно с полной линейной группой  $GL(n, F)$  и специальной линейной группой  $SL(n, F)$ .

Далее будем использовать стандартные обозначения:  $F_q$  или  $GF(q)$  – поле Галуа, то есть конечное поле с числом элементов  $q = p^\alpha$ ,  $p$  – простое;  $GL(n, q)$  – полная линейная группа над полем  $GF(q)$ , то есть группа всех обратимых матриц порядка  $n$  над  $GF(q)$ ;  $SL(n, q)$  – специальная линейная группа степени  $n$  над полем  $GF(q)$ , то есть подгруппа всех матриц из  $GL(n, q)$  с определителем, равным единице поля  $GF(q)$ .

**Теорема 4.4.** Пусть  $p$  – простое,  $q = p^\alpha$ ,  $n \geq 2$ ,  $k \geq 2$ ,  $\ell \geq 3$ ,  $q - 1$  делит  $\ell - 1$ , подстановка  $\sigma$  из  $S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^\ell = \sigma$ . Тогда:

1.  $\langle GL(n, k, F_q), [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  и  $\langle SL(n, k, F_q), [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  – неполуабелевы  $\ell$ -арные группы;
2. если  $\sigma$  – нетождественная подстановка, то в  $\ell$ -арных группах  $\langle GL(n, k, F_q), [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  и  $\langle SL(n, k, F_q), [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  нет единиц;
3.  $k$ -ая декартова степень каждого смежного класса  $H_0 = SL(n, q)$ ,  $H_1, \dots, H_{q-2}$  факторгруппы  $GL(n, q) / SL(n, q)$  замкнута относительно  $\ell$ -арной операции  $[ ]_{\ell, \sigma, k}$ , а универсальные алгебры

$$\langle H_0^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle, \langle H_1^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle, \dots, \langle H_{q-2}^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle \quad (9)$$

являются полуинвариантными  $\ell$ -арными подгруппами в  $\langle GL(n, k, F_q), [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ ; в частности,  $\langle SL(n, k, F_q), [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  полуинвариантная  $\ell$ -арная подгруппа в  $\langle GL(n, k, F_q), [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ ;

4. если  $\sigma$  – нетождественная подстановка, то все полуинвариантные  $\ell$ -арные подгруппы (9) не являются инвариантными  $\ell$ -арными подгруппами в  $\langle GL(n, k, F_q), [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ ; в частности,  $\langle SL(n, k, F_q), [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  неинвариантна в  $\langle GL(n, k, F_q), [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ ;
5. все полуинвариантные  $\ell$ -арные подгруппы (9) определяют на  $\langle GL(n, k, F_q), [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  одну и ту же конгруэнцию

$$\rho = \rho_{H_0^k} = \rho_{H_1^k} = \dots = \rho_{H_{q-2}^k};$$

6.  $\ell$ -арные факторгруппы

$$\langle GL(n, k, F_q) / SL(n, k, F_q), [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle, \langle GL(n, k, F_q) / H_1^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle, \dots \\ \dots, \langle GL(n, k, F_q) / H_{q-2}^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle, \langle (GL(n, q) / SL(n, q))^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$$

совпадают.

**Доказательство.** Для сокращения записей положим  $A = GL(n, q)$ ,  $B = SL(n, q)$ . Тогда

$$A^k = (GL(n, q))^k = GL(n, k, F_q), B^k = (SL(n, q))^k = SL(n, k, F_q).$$

1. По предложениям 4.1 и 4.2  $\langle A^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  и  $\langle B^k, [ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$  –  $\ell$ -арные группы. Их неполубабелевость следует из неабелевости групп  $A$  и  $B$  и теоремы 2.5.
2. Следует из теоремы 2.6.
3. и 4. Следует из теоремы 3.1, так как факторгруппа  $A/B = GL(n, q) / SL(n, q)$  изоморфна мультипликативной группе  $F_q^*$  поля  $F_q$ , которая является циклической и имеет порядок  $q - 1$ . Кроме того, по условию  $q - 1$  делит  $\ell - 1$ .
5. Следует из утверждения 2. теоремы 3.4.
6. Следует из утверждения 1. теоремы 3.4.

Теорема доказана.

Полагая в теореме 4.4  $\ell = q, k = q - 1, \sigma = (12 \dots q - 1)$ , получим

**Следствие 4.5** [8]. Пусть  $p$  – простое,  $q = p^\alpha, q \geq 3, n \geq 2$ . Тогда:

1.  $\langle GL(n, q - 1, F_q), [ ]_{q, q-1} \rangle$  и  $\langle SL(n, q - 1, F_q), [ ]_{q, q-1} \rangle$  – неполубабелевы  $q$ -арные группы с пустым центром, а значит и без единиц;
2. любой смежный класс  $H$  факторгруппы  $GL(n, q) / SL(n, q)$  замкнут относительно  $q$ -арной операции  $[ ]_{q, q-1}$ , а универсальная алгебра  $\langle H^{q-1}, [ ]_{q, q-1} \rangle$  является полуинвариантной, но неинвариантной  $q$ -арной подгруппой в  $\langle GL(n, q - 1, F_q), [ ]_{q, q-1} \rangle$ ; в частности,  $\langle SL(n, q - 1, F_q), [ ]_{q, q-1} \rangle$  полуинвариантная, но неинвариантная  $q$ -арная подгруппа в  $\langle GL(n, q - 1, F_q), [ ]_{q, q-1} \rangle$ ;
3. полуинвариантные  $q$ -арные подгруппы  $\langle H^{q-1}, [ ]_{q, q-1} \rangle, \langle SL(n, q - 1, F_q), [ ]_{q, q-1} \rangle$  из 2. определяют на  $\langle GL(n, q - 1, F_q), [ ]_{q, q-1} \rangle$  одну и ту же конгруэнцию:  $\rho_{H^{q-1}} = \rho_{SL(n, q-1, F_q)}$ ;
4. для любого смежного класса  $H$  группы  $GL(n, q) / SL(n, q)$   $q$ -арные факторгруппы

$$\begin{aligned} & \langle GL(n, q - 1, F_q) / H^{q-1}, [ ]_{q, q-1} \rangle; \\ & \langle GL(n, q - 1, F_q) / SL(n, q - 1, F_q), [ ]_{q, q-1} \rangle; \\ & \langle (GL(n, q) / SL(n, q))^{q-1}, [ ]_{q, q-1} \rangle \end{aligned}$$

совпадают.

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА-002) и Румынской академии наук (GAR 4/17.06.2011).

## Литература

- [1] Dornst W. Untersuchungen uber einen verallgemeinerten Gruppenbegriff // *Math. Z.*, Bd. 29, 1928, pp. 1–19.
- [2] Post E.L. Polyadic groups // *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 48, №2, 1940, pp. 208–350.
- [3] Русаков С.А. Алгебраические  $n$ -арные системы. Мн., Навука і тэхніка, 1992, 245 с.
- [4] Гальмак А.М. Об операции  $[ ]_{\ell, \sigma, k}$  // *Вестник МДУ им. А.А. Куляшова.*, №1 (35), Серия В-С, 2010, с. 34–38.
- [5] Galmak A., Balan V., Vorobiev G.N., Nicola I.R. On  $n$ -ary operations and their applications // *APPS*, 13, 2011, pp. 40–64.

- [6] Гальмак А.М. Многместные операции на декартовых степенях. Минск, Изд. центр БГУ, 2009, 265 с.
- [7] Гальмак А.М. Многместные ассоциативные операции на декартовых степенях. // *Весті НАН Беларусі*. №3, 2008, с. 28–34.
- [8] Гальмак А.М., Воробьев Г.Н., Балан В.Д. Об  $n$ -арных подгруппах специальной  $n$ -арной группы // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*. № 2 (14), 2010, с. 38–46.
- [9] Гальмак А.М. Конгруэнции полиадических групп. Минск, Беларуская навука, 1999, 182 с.

## POLYADIC OPERATIONS ON CARTESIAN POWERS OF CONJUGATE GROUP CLASSES

A. Galmak<sup>1</sup>, G. Vorobiev<sup>1</sup>, V. Balan<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev, Belarus*

<sup>2</sup> *University Politehnica of Bucharest, Bucharest, Romania*

mgup@mogilev.by, vbalan@mathem.pub.ro

For any  $\ell \geq 3$ ,  $k \geq 2$  and any permutation  $\sigma \in S_k$  on the Cartesian power  $A^k$  of a group  $A$  which admits a normal subgroup  $B$ , so that the factor group  $A/B$  be cyclic and having its order a divisor of  $\ell - 1$ , we define the  $\ell$ -ary group  $\langle A^k, [ \ ]_{\ell, \sigma, k} \rangle$ , endowed with the  $\ell$ -ary operation  $[ \ ]_{\ell, \sigma, k}$ . We study the properties of this  $\ell$ -ary operation on Cartesian powers of conjugate group classes of the group  $A$  associated to its subgroup  $B$ .

**Key Words:**  $n$ -ary operation, polyadic matrices, normal subgroup, Cartesian power, semi-abelian, semi-invariant, semigroup.

# О ПОЛИАДИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЯХ НА МНОЖЕСТВЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МАТРИЦ

А.М. Гальмак

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев, Белоруссия

mgup@mogilev.by

Для любого целого  $m \geq 1$  и любой подстановки на  $m$  символах на множестве всех пространственных матриц, у которых число сечений какой-либо фиксированной ориентации равно  $m$ , определяются частичные многоместные операции. Устанавливается связь между этими операциями и многоместными операциями на множестве  $m$ -компонентных вектор-матриц. Найдены условия, при которых построенные многоместные операции являются ассоциативными. Изучаются транспонированные пространственные матрицы.

**Ключевые слова:** матрица, операция, кольцо.

## Введение

Термин “пространственные матрицы” употребляют как в широком смысле — для многомерных матриц любого размера, так и в узком смысле — для трехмерных матриц. В данной работе пространственные матрицы — это всегда трехмерные матрицы. Для обозначения множества всех пространственных матриц фиксированного размера  $m \times n \times p$  над кольцом  $P$  в статье используется символ  $\mathbf{M}_{m \times n \times p}(P)$ . Необходимые в дальнейшем сведения о пространственных матрицах можно найти в [1, 2].

В [3] для фиксированных  $n \geq 1$ ,  $m \geq 1$ ,  $l \geq 2$ , подстановки  $\sigma \in S_m$  и ассоциативного кольца  $P$  были определены и изучались многоместные операции  $[ ]_{l, \sigma, m}^{(i)}$ ,  $[ ]_{l, \sigma, m}^{(j)}$  и  $[ ]_{l, \sigma, m}^{(k)}$ , действующие соответственно на множествах  $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$  всех пространственных матриц размера  $m \times n \times n$  над  $P$ ,  $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$  всех пространственных матриц размера  $n \times m \times n$  над  $P$ ,  $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$  всех пространственных матриц размера  $n \times n \times m$  над  $P$ . Как видно, указанные многоместные операции определены на множествах пространственных матриц, у которых, по крайней мере, два размера совпадают. Если  $m < n$  ( $m > n$ ), то такие пространственные матрицы называют сжатыми (расширенными) в соответствующем направлении [2].

При  $m = 1$  множества  $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ ,  $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$  и  $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$  совпадают с множеством  $M_n(P)$  всех квадратных матриц порядка  $n$  над  $P$ , а операции  $[ ]_{l, \sigma, m}^{(i)}$ ,  $[ ]_{l, \sigma, m}^{(j)}$  и  $[ ]_{l, \sigma, m}^{(k)}$  для  $l = 2$  и тождественной подстановки  $\sigma$  — с бинарной операцией умножения обычных матриц. А так как умножать можно не только квадратные матрицы, то естественно ожидать, что указанные выше многоместные операции из [3] могут быть в некоторых случаях применимы и к пространственным матрицам, у которых все три размера различны. Выяснению именно этого обстоятельства и посвящена данная работа. При этом используется существующая между пространственными матрицами и вектор-матрицами связь, установленная в [4]. Информация о вектор-матрицах имеется также в [5].

## 1 Частичные полиадические операции $[ ]_{l, \sigma, m}^{(i)}$ , $[ ]_{l, \sigma, m}^{(j)}$ и $[ ]_{l, \sigma, m}^{(k)}$

Зафиксируем целое  $m \geq 1$  и выделим во множестве всех пространственных матриц над кольцом  $P$  три подмножества:

- множество  $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$  всех пространственных матриц, у которых число сечений ориентации  $(i)$  равно  $m$ ;



- множество  $\mathbf{M}^{(j)}(m, P)$  всех пространственных матриц, у которых число сечений ориентации  $(j)$  равно  $m$ ;
- множество  $\mathbf{M}^{(k)}(m, P)$  всех пространственных матриц, у которых число сечений ориентации  $(k)$  равно  $m$ .

Ясно, что для любых целых  $s \geq 1, t \geq 1$  справедливы строгие включения

$$\mathbf{M}_{m \times s \times t}(P) \subset \mathbf{M}^{(i)}(m, P), \quad \mathbf{M}_{s \times m \times t}(P) \subset \mathbf{M}^{(j)}(m, P), \quad \mathbf{M}_{s \times t \times m}(P) \subset \mathbf{M}^{(k)}(m, P).$$

В частности, для любого целого  $n \geq 1$  верно

$$\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P) \subset \mathbf{M}^{(i)}(m, P), \quad \mathbf{M}_{n \times m \times n}(P) \subset \mathbf{M}^{(j)}(m, P), \quad \mathbf{M}_{n \times n \times m}(P) \subset \mathbf{M}^{(k)}(m, P).$$

Зафиксируем целое  $l \geq 2$ , подстановку  $\sigma \in S_m$  и пусть  $P$  — ассоциативное кольцо. Если

$$A_1 = (a_{ijk})_1, \quad A_2 = (a_{ijk})_2, \quad \dots, \quad A_l = (a_{ijk})_l$$

такие пространственные матрицы из  $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ , что число сечений ориентации  $(k)$  предыдущей пространственной матрицы равно числу сечений ориентации  $(j)$  последующей пространственной матрицы, то определены произведения

$$(a_{1jk})_1(a_{\sigma(1)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{l-2}(1)jk})_{l-1}(a_{\sigma^{l-1}(1)jk})_l = U_1,$$

.....

$$(a_{mjk})_1(a_{\sigma(m)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{l-2}(m)jk})_{l-1}(a_{\sigma^{l-1}(m)jk})_l = U_m.$$

Полагая  $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ , где

$$(a_{1jk}) = U_1, \dots, (a_{mjk}) = U_m,$$

видим, что на  $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$  определена частичная  $l$ -арная операция

$$[A_1 A_2 \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(i)} = A = (a_{ijk}), \tag{1.1}$$

где

$$(a_{rjk}) = (a_{rjk})_1(a_{\sigma(r)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{l-2}(r)jk})_{l-1}(a_{\sigma^{l-1}(r)jk})_l, \quad r = 1, \dots, m. \tag{1.2}$$

Таким образом, для любых целых  $p_0 \geq 1, \dots, p_l \geq 1$  и любых пространственных матриц

$$A_1 = (a_{ijk})_1 \in \mathbf{M}_{m \times p_0 \times p_1}(P), \quad A_2 = (a_{ijk})_2 \in \mathbf{M}_{m \times p_1 \times p_2}(P), \quad \dots$$

$$\dots, \quad A_{l-1} = (a_{ijk})_{l-1} \in \mathbf{M}_{m \times p_{l-2} \times p_{l-1}}(P), \quad A_l = (a_{ijk})_l \in \mathbf{M}_{m \times p_{l-1} \times p_l}(P)$$

определена пространственная матрица (1.1) из  $\mathbf{M}_{m \times p_0 \times p_l}$ , у которой для любого  $r = 1, \dots, m$   $r$ -ое сечение ориентации  $(i)$  определяется равенством (1.2). Все сечения ориентации  $(i)$  пространственной матрицы  $A$  являются матрицами размера  $p_0 \times p_l$ . Ясно, что на множестве  $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$  частичная  $l$ -арная операция  $[ ]_{l, \sigma, m}^{(i)}$  совпадает с обычной  $l$ -арной операцией  $[ ]_{l, \sigma, m}^{(i)}$  из [3].

Если в определении частичной  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, m}^{(i)}$  заменить ориентацию  $(i)$  ориентацией  $(j)$ , а множество  $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$  — множеством  $\mathbf{M}^{(j)}(m, P)$ , то получим определение

частичной  $l$ -арной операции  $[\ ]_{l, \sigma, m}^{(j)}$ . А именно, если

$$B_1 = (b_{ijk})_1 \in M_{p_0 \times m \times p_1}(P), \quad B_2 = (b_{ijk})_2 \in M_{p_1 \times m \times p_2}(P), \quad \dots \\ \dots \quad B_{l-1} = (b_{ijk})_{l-1} \in M_{p_{l-2} \times m \times p_{l-1}}(P), \quad B_l = (b_{ijk})_l \in M_{p_{l-1} \times m \times p_l}(P),$$

то

$$[B_1 B_2 \dots B_l]_{l, \sigma, k}^{(j)} = B = (b_{ijk}) \in M_{p_0 \times m \times p_l}(P),$$

где

$$(b_{irk}) = (b_{irk})_1 (b_{i\sigma(r)k})_2 \dots (b_{i\sigma^{l-2}(r)k})_{l-1} (b_{i\sigma^{l-1}(r)k})_l.$$

Ясно, что на множестве  $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$  частичная  $l$ -арная операция  $[\ ]_{l, \sigma, m}^{(j)}$  совпадает с обычной  $l$ -арной операцией  $[\ ]_{l, \sigma, m}^{(j)}$  из [3].

Если в определении частичной  $l$ -арной операции  $[\ ]_{l, \sigma, m}^{(i)}$  заменить ориентацию  $(i)$  ориентацией  $(k)$ , а множество  $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$  — множеством  $\mathbf{M}^{(k)}(m, P)$ , то получим определение частичной  $l$ -арной операции  $[\ ]_{l, \sigma, m}^{(k)}$ . А именно, если

$$C_1 = (c_{ijk})_1 \in \mathbf{M}_{p_0 \times p_1 \times m}(P), \quad C_2 = (c_{ijk})_2 \in \mathbf{M}_{p_1 \times p_2 \times m}, \quad \dots \\ \dots, C_{l-1} = (c_{ijk})_{l-1} \in \mathbf{M}_{p_{l-2} \times p_{l-1} \times m}(P), \quad C_l = (c_{ijk})_l \in \mathbf{M}_{p_{l-1} \times p_l \times m_1}(P),$$

то

$$[C_1 C_2 \dots C_l]_{l, \sigma, m}^{(k)} = C = (c_{ijk}) \in \mathbf{M}_{p_0 \times p_l \times m}(P),$$

где

$$(c_{ijr}) = (c_{ijr})_1 (c_{ij\sigma(r)})_2 \dots (c_{ij\sigma^{l-2}(r)})_{l-1} (c_{ij\sigma^{l-1}(r)})_l.$$

Ясно, что на множестве  $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$  частичная  $l$ -арная операция  $[\ ]_{l, \sigma, m}^{(k)}$  совпадает с обычной  $l$ -арной операцией  $[\ ]_{l, \sigma, m}^{(k)}$  из [3].

## 2 Отображения $\phi_{(i)}$ , $\phi_{(j)}$ , $\phi_{(k)}$ , $\psi_{(i)}$ , $\psi_{(j)}$ , $\psi_{(k)}$ .

Зафиксируем целое  $m \geq 1$  и выделим во множестве  $\mathbf{M}(m, P)$  всех  $m$ -компонентных вектор-матриц над кольцом  $P$  множество  $\mathbf{K}(m, P)$  всех вектор-матриц, у которых все компоненты имеют один и тот же размер. Заметим, что у разных вектор-матриц из  $\mathbf{K}(m, P)$  размеры компонент не обязаны совпадать.

Ясно, что для любых целых  $s \geq 1, t \geq 1$

$$\mathbf{M}_{s \times t}(m, P) \subset \mathbf{K}(m, P),$$

где  $\mathbf{M}_{s \times t}(m, P)$  — множество всех  $m$ -компонентных вектор-матриц размера  $s \times t$  над  $P$ . В частности

$$\mathbf{M}_n(m, P) \subset \mathbf{K}(m, P),$$

где  $\mathbf{M}_n(m, P)$  — множество всех  $m$ -компонентных вектор-матриц порядка  $n$  над  $P$ .

Для каждой вектор-матрицы

$$\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k) \in \mathbf{K}(m, P) \tag{2.1}$$

положим

$$A_1 = (a_{1jk}), \dots, A_m = (a_{mjk}), \tag{2.2}$$

то есть отождествим компоненты вектор-матрицы (2.1) с соответствующими сечениями ориентации  $(i)$  пространственной матрицы

$$(a_{ijk}) \in \mathbf{M}^{(i)}(m, P). \tag{2.3}$$

В этом случае отображение

$$\phi_{(i)} : ((a_{1jk}), \dots, (a_{mjk})) \rightarrow (a_{ijk})$$

является биекцией множества  $\mathbf{K}(m, P)$  на множество  $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ . Если для вектор-матриц (2.1) положить

$$A_1 = (a_{i1k}), \dots, A_m = (a_{imk}), \quad (2.4)$$

то есть отождествить компоненты вектор-матрицы (2.1) с соответствующими сечениями ориентации  $(j)$  пространственной матрицы

$$(a_{ijk}) \in \mathbf{M}^{(j)}(m, P), \quad (2.5)$$

то получим биекцию

$$\phi_{(j)} : ((a_{i1k}), \dots, (a_{imk})) \rightarrow (a_{ijk})$$

множества  $\mathbf{K}(m, P)$  на множество  $\mathbf{M}^{(j)}(m, P)$ .

Если для вектор-матриц (2.1) положить

$$A_1 = (a_{ij1}), \dots, A_m = (a_{ijm}), \quad (2.6)$$

то есть отождествить компоненты вектор-матрицы (2.1) с соответствующими сечениями ориентации  $(k)$  пространственной матрицы

$$(a_{ijk}) \in \mathbf{M}^{(k)}(m, P), \quad (2.7)$$

то получим биекцию

$$\phi_{(k)} : ((a_{ij1}), \dots, (a_{ijm})) \rightarrow (a_{ijk})$$

множества  $\mathbf{K}(m, P)$  на множество  $\mathbf{M}^{(k)}(m, P)$ .

Ясно, что сужения отображений  $\phi_{(i)}$ ,  $\phi_{(j)}$ , и  $\phi_{(k)}$  на множество  $\mathbf{M}_{s \times t}(m, P)$  совпадают с биекциями

$$\phi_{(i)} : \mathbf{M}_{s \times t}(m, P) \rightarrow \mathbf{M}_{m \times s \times t}(P),$$

$$\phi_{(j)} : \mathbf{M}_{s \times t}(m, P) \rightarrow \mathbf{M}_{s \times m \times t}(P),$$

$$\phi_{(k)} : \mathbf{M}_{s \times t}(m, P) \rightarrow \mathbf{M}_{s \times t \times m}(P)$$

из [4].

Ясно, что отображение  $\psi_{(i)}$ , ставящее в соответствие каждой пространственной матрице (2.3) вектор-матрицу (2.1) с компонентами (2.2) является биекцией  $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$  на  $\mathbf{K}(m, P)$ . Аналогично, отображение  $\psi_{(j)}$ , ставящее в соответствие каждой пространственной матрице (2.5) вектор-матрицу (2.1) с компонентами (2.4), является биекцией  $\mathbf{M}^{(j)}(m, P)$  на  $\mathbf{K}(m, P)$ ; отображение  $\psi_{(k)}$ , ставящее в соответствие каждой пространственной матрице (2.7) вектор-матрицу (2.1) с компонентами (2.6), является биекцией  $\mathbf{M}^{(k)}(m, P)$  на  $\mathbf{K}(m, P)$ .

Для любого  $r \in \{i, j, k\}$  отображения  $\phi_{(r)}$  и  $\psi_{(r)}$  являются взаимнообратными, то есть справедлива

**Лемма 2.1** Для любых

$$r \in \{i, j, k\}, \quad \mathbf{A} \in \mathbf{K}(m, P), \quad A \in \mathbf{M}^{(r)}(m, P)$$

верно

$$\psi_{(r)}(\phi_{(r)}(\mathbf{A})) = \mathbf{A}, \quad \phi_{(r)}(\psi_{(r)}(A)) = A.$$



определена вектор-матрица  $[\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, m}$ , то для любого  $r \in \{i, j, k\}$  определена пространственная матрица

$$[\phi_{(r)}(\mathbf{A}_1) \dots \phi_{(r)}(\mathbf{A}_l)]_{l, \sigma, m}^{(r)}$$

и верно равенство

$$\phi_{(r)}([\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, m}) = [\phi_{(r)}(\mathbf{A}_1) \dots \phi_{(r)}(\mathbf{A}_l)]_{l, \sigma, m}^{(r)}.$$

Аналогичная лемма справедлива для отображений  $\psi_{(i)}$ ,  $\psi_{(j)}$  и  $\psi_{(k)}$ .

**Лемма 2.4.** Если для пространственных матриц

$$A_1, \dots, A_l \in \mathbf{M}^{(r)}(m, P), \quad r \in \{i, j, k\}$$

определена пространственная матрица  $[A_1 \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(r)}$ , то для любого  $r \in \{i, j, k\}$  определена вектор-матрица

$$[\psi_{(r)}(A_1) \dots \psi_{(r)}(A_l)]_{l, \sigma, m}$$

и верно равенство

$$\psi_{(r)}\left([A_1 \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(r)}\right) = [\psi_{(r)}(A_1) \dots \psi_{(r)}(A_l)]_{l, \sigma, m}.$$

### 3 Ассоциативность частичных $l$ -арных операций

$$[\ ]_{l, \sigma, m}^{(i)}, [\ ]_{l, \sigma, m}^{(j)}, [\ ]_{l, \sigma, m}^{(k)}$$

**Теорема 3.1** Пусть  $P$  — ассоциативное кольцо,

$$A_1 = (a_{ijk})_1 \in M_{m \times p_0 \times p_1}(P), A_2 = (a_{ijk})_2 \in M_{m \times p_1 \times p_2}(P), \dots$$

$$\dots, A_{2l-2} = (a_{ijk})_{2l-2} \in M_{m \times p_{2l-3} \times p_{2l-2}}(P), A_{2l-1} = (a_{ijk})_{2l-1} \in M_{m \times p_{2l-2} \times p_{2l-1}}(P).$$

Если подстановка  $\sigma \in S_m$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ , то

$$\begin{aligned} & \left[ A_1 \dots A_s [A_{s+1} \dots A_{s+l}]_{l, \sigma, m}^{(i)} A_{s+l+1} \dots A_{2l-1} \right]_{l, \sigma, m}^{(i)} = \\ & = \left[ A_1 \dots A_t [A_{t+1} \dots A_{t+l}]_{l, \sigma, m}^{(i)} A_{t+l+1} \dots A_{2l-1} \right]_{l, \sigma, m}^{(i)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

для любых  $s, t = 0, 1, \dots, l-1$ .

*Доказательство.* Обозначим левую и правую части в (3.1) соответственно через  $U$  и  $V$ . Ясно, что обе пространственные матрицы  $U$  и  $V$  определены. Применяя вначале лемму 2.4, затем теорему 1 из [5] и снова лемму 2.4, получим

$$\begin{aligned} \psi_{(i)}(U) &= \left[ \psi_{(i)}(A_1) \dots \psi_{(i)}(A_s) [\psi_{(i)}(A_{s+1}) \dots \psi_{(i)}(A_{s+l})]_{l, \sigma, m} \psi_{(i)}(A_{s+l+1}) \dots \psi_{(i)}(A_{2l-1}) \right]_{l, \sigma, m} = \\ &= \left[ \psi_{(i)}(A_1) \dots \psi_{(i)}(A_t) [\psi_{(i)}(A_{t+1}) \dots \psi_{(i)}(A_{t+l})]_{l, \sigma, m} \psi_{(i)}(A_{t+l+1}) \dots \psi_{(i)}(A_{2l-1}) \right]_{l, \sigma, m} = \psi_{(i)}(V), \end{aligned}$$

то есть  $\psi_{(i)}(U) = \psi_{(i)}(V)$ , откуда

$$\phi_{(i)}(\psi_{(i)}(U)) = \phi_{(i)}(\psi_{(i)}(V)).$$

Применяя к последнему равенству лемму 2.1, получим  $U=V$ , то есть верно равенство (3.1). Теорема доказана.

Для ориентаций  $(j)$  и  $(k)$  справедливы теоремы, аналогичные теореме 3.1. Все три теоремы можно объединить в виде одной теоремы.

**Теорема 3.2.** Пусть  $P$  — ассоциативное кольцо,  $r \in \{i, j, k\}$ ,  $\sigma$  — подстановка из  $S_m$ , удовлетворяющая условию  $\sigma^l = \sigma$ ,  $A_1, A_2, \dots, A_{2l-1}$  — пространственные матрицы из  $\mathbf{M}^{(r)}(m, P)$ . Тогда, если для некоторого  $s = 0, 1, \dots, l-1$  определена пространственная матрица

$$\left[ A_1 \dots A_s [A_{s+1} \dots A_{s+l}]_{l, \sigma, m}^{(r)} A_{s+l+1} \dots A_{2l-1} \right]_{l, \sigma, m}^{(r)} \in \mathbf{M}^{(r)}(m, P), \quad (3.2)$$

то для любого  $t = 0, 1, \dots, l-1$  определена пространственная матрица

$$\left[ A_1 \dots A_t [A_{t+1} A_{t+l}]_{l, \sigma, m}^{(r)} A_{t+l+1} \dots A_{2l-1} \right]_{l, \sigma, m}^{(r)} \in \mathbf{M}^{(r)}(m, P) \quad (3.3)$$

и верно равенство

$$\begin{aligned} & \left[ A_1 \dots A_s [A_{s+1} \dots A_{s+l}]_{l, \sigma, m}^{(r)} A_{s+l+1} \dots A_{2l-1} \right]_{l, \sigma, m}^{(r)} = \\ & = \left[ A_1 \dots A_t [A_{t+1} \dots A_{t+l}]_{l, \sigma, m}^{(r)} A_{t+l+1} \dots A_{2l-1} \right]_{l, \sigma, m}^{(r)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

**Следствие 3.1.** Пусть  $P$  — ассоциативное кольцо,  $r \in \{i, j, k\}$ ,  $m$  делит  $l-1$ ,  $\sigma$  — цикл длины  $m$  из  $S_m$ ,  $A_1, \dots, A_{2l-1}$  — пространственные матрицы из  $\mathbf{M}^{(r)}(m, P)$ . Тогда, если для некоторого  $s = 0, 1, \dots, l-1$  определена пространственная матрица (3.2), то для любого  $t = 0, 1, \dots, l-1$  определена пространственная матрица (3.3) и верно равенство (3.4).

Полагая в следствии 3.1  $l = m + 1$ , получим

**Следствие 3.2.** Пусть  $P$  — ассоциативное кольцо,  $r \in \{i, j, k\}$ ,  $\sigma$  — цикл длины  $m$  из  $S_m$ ,  $A_1, \dots, A_{2m+1}$  — пространственные матрицы из  $\mathbf{M}^{(r)}(m, P)$ . Тогда, если для некоторого  $s = 0, 1, \dots, m$  определена пространственная матрица

$$\left[ A_1 \dots A_s [A_{s+1} \dots A_{s+m+1}]_{m+1, \sigma, m}^{(r)} A_{s+m+2} \dots A_{2m+1} \right]_{m+1, \sigma, m}^{(r)},$$

то для любого  $t = 0, 1, \dots, m$  определена пространственная матрица

$$\left[ A_1 \dots A_t [A_{t+1} \dots A_{t+m+1}]_{m+1, \sigma, m}^{(r)} A_{t+m+2} \dots A_{2m+1} \right]_{m+1, \sigma, m}^{(r)},$$

и верно равенство

$$\begin{aligned} & \left[ A_1 \dots A_s [A_{s+1} \dots A_{s+m+1}]_{m+1, \sigma, m}^{(r)} A_{s+m+2} \dots A_{2m+1} \right]_{m+1, \sigma, m}^{(r)} = \\ & = \left[ A_1 \dots A_t [A_{t+1} \dots A_{t+m+1}]_{m+1, \sigma, m}^{(r)} A_{t+m+2} \dots A_{2m+1} \right]_{m+1, \sigma, m}^{(r)}. \end{aligned}$$

**Следствие 3.3.** Пусть  $P$  — ассоциативное кольцо,  $r \in \{i, j, k\}$ ,  $\sigma$  — подстановка порядка 2 из  $S_m$ ,  $A, B, C, D$  и  $E$  — пространственные матрицы из  $\mathbf{M}^{(r)}(m, P)$ . Тогда, если определена одна из пространственных матриц

$$\left[ [ABC]_{3, \sigma, m}^{(r)} DE \right]_{3, \sigma, m}^{(r)}, \left[ A [BCD]_{3, \sigma, m}^{(r)} E \right]_{3, \sigma, m}^{(r)}, \left[ AB [CDE]_{3, \sigma, m}^{(r)} \right]_{3, \sigma, m}^{(r)},$$

то определены две другие пространственные матрицы и верны равенства

$$\left[ [ABC]_{3, \sigma, m}^{(r)} DE \right]_{3, \sigma, m}^{(r)} = \left[ A [BCD]_{3, \sigma, m}^{(r)} E \right]_{3, \sigma, m}^{(r)} = \left[ AB [CDE]_{3, \sigma, m}^{(r)} \right]_{3, \sigma, m}^{(r)}.$$

Полагая в следствии 3.3,  $m = 2$ ,  $\sigma = (12)$ , получим

**Следствие 3.4.** Пусть  $P$  — ассоциативное кольцо,  $A = (A_1, A_2)$ ,  $B = (B_1, B_2)$ ,  $C = (C_1, C_2)$ ,  $D = (D_1, D_2)$ ,  $E = (E_1, E_2)$  — пространственные матрицы из  $\mathbf{M}^{(r)}(2, P)$ . Тогда, если определена одна из пространственных матриц

$$\left[ [ABC]_{3, (12), 2}^{(r)} DE \right]_{3, (12), 2}^{(r)}, \left[ A [BCD]_{3, (12), 2}^{(r)} E \right]_{3, (12), 2}^{(r)}, \left[ AB [CDE]_{3, (12), 2}^{(r)} \right]_{3, (12), 2}^{(r)},$$

то определены две другие пространственные матрицы и верны равенства

$$\left[ [ABC]_{3, (12), 2}^{(r)} DE \right]_{3, (12), 2}^{(r)} = \left[ A [BCD]_{3, (12), 2}^{(r)} E \right]_{3, (12), 2}^{(r)} = \left[ AB [CDE]_{3, (12), 2}^{(r)} \right]_{3, (12), 2}^{(r)}.$$

Ясно, что подмножество  $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$  множества  $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, m}^{(i)}$ . Аналогично множество  $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, m}^{(j)}$ , множество  $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, m}^{(k)}$ . Поэтому из теоремы 3.2 вытекает следующая теорема из [3].

**Теорема 3.3** [3]. Если подстановка  $\sigma \in S_m$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ , то универсальные алгебры  $\langle \mathbf{M}_{m \times n \times n}(P), [ ]_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{M}_{n \times m \times n}(P), [ ]_{l, \sigma, m}^{(j)} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{M}_{n \times n \times m}(P), [ ]_{l, \sigma, m}^{(k)} \rangle$ , где  $P$  — ассоциативное кольцо, являются изоморфными  $l$ -арными полугруппами.

## 4 Транспонированные пространственные матрицы

**Определение 4.1** [4]. Пространственная матрица  $B = (b_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m \times p \times n}(P)$  называется  $(i)$ -транспонированной для пространственной матрицы  $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m \times n \times p}(P)$ , если все ее сечения ориентации  $(i)$  являются транспонированными матрицами для соответствующих сечений ориентации  $(i)$  пространственной матрицы  $A$ , то есть

$$(b_{tjk}) = (a_{tjk})', \quad t = 1, \dots, m.$$

Аналогично определяются  $(j)$ -транспонированные пространственные матрицы и  $(k)$ -транспонированные пространственные матрицы.

Для обозначения  $(r)$ -транспонированной пространственной матрицы для пространственной матрицы  $A$ , где  $r \in \{i, j, k\}$ , будем употреблять следующее обозначение:  $A^{(r)} = (a_{ijk})^{(r)}$ .

Можно заметить, что для кубических матриц понятие  $(i)$ -транспонированности совпадает с понятием транспонированности по индексам  $j$  и  $k$  [1, 2]. Аналогично,  $(j)$ -транспонированность совпадает с транспонированностью по индексам  $i$  и  $k$ , а  $(k)$ -транспонированность совпадает с транспонированностью по индексам  $i$  и  $j$ . Поэтому, следуя [1, 2], для транспонированных кубических матриц  $A^{(i)}$ ,  $A^{(j)}$  и  $A^{(k)}$  можно использовать также соответственно обозначения  $A^{(j,k)}$ ,  $A^{(i,k)}$ ,  $A^{(i,j)}$ . Следующее предложение является аналогом соответствующего утверждения для обычных матриц.

**Теорема 4.1** Пусть  $\sigma$  — подстановка из  $S_m$ , удовлетворяющая условию  $\sigma^l = \sigma$ ,

$$A_1 = (a_{ijk})_1, \dots, A_l = (a_{ijk})_l \in M^{(i)}(m, P) \tag{4.1}$$

такие пространственные матрицы над ассоциативным кольцом с единицей, что определена пространственная матрица

$$[A_1 A_2 \dots A_{l-1} A_l]_{l, \sigma, m}^{(i)} \quad (4.2)$$

Тогда определена пространственная матрица

$$\left[ A_l^{('i)} A_{l-1}^{('i)} \dots A_2^{('i)} A_1^{('i)} \right]_{l, \sigma^{-1}, m}^{(i)} \quad (4.3)$$

и верно равенство

$$\left( [A_1 A_2 \dots A_{l-1} A_l]_{l, \sigma, m}^{(i)} \right)^{('i)} = \left[ A_l^{('i)} A_{l-1}^{('i)} \dots A_2^{('i)} A_1^{('i)} \right]_{l, \sigma^{-1}, m}^{(i)}. \quad (4.4)$$

*Доказательство.* Обозначим пространственную матрицу (4.2) через  $A = (a_{ijk})$  и выпишем ее  $r$ -ое сечение  $(a_{rjk})$  ориентации  $(i)$ , которое согласно (1.2), и, ввиду тождественности подстановки  $\sigma^{l-1}$ , принимает вид

$$(a_{rjk}) = (a_{rjk})_1 (a_{\sigma(r)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{l-2}(r)jk})_{l-1} (a_{rjk})_l, \quad r = 1, \dots, m.$$

Если положить  $\tau = \sigma^{-1}$ , то из условия  $\sigma^l = \sigma$  получаем

$$\tau = \sigma^{l-2}, \tau^2 = \sigma^{l-3}, \dots, \tau^{l-2} = \sigma, \tau^{l-1} = \varepsilon, \tau^l = \tau, \quad (4.5)$$

где  $\varepsilon$  — тождественная подстановка.

Обозначим пространственную матрицу из левой части (4.4) через  $B = (b_{ijk})$ , то есть  $B = A^{('i)}$ . Тогда, используя соответствующий бинарный результат и (4.5), выпишем  $r$ -ое сечение ориентации  $(i)$  матрицы  $B$ :

$$\begin{aligned} (b_{rjk}) &= (a_{rjk})' = ((a_{rjk})_1 (a_{\sigma(r)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{l-2}(r)jk})_{l-1} (a_{rjk})_l)' = \\ &= (a_{rjk})'_l (a_{\sigma^{l-2}(r)jk})'_{l-1} \dots (a_{\sigma(r)jk})'_2 (a_{rjk})'_1 = (a_{rjk})'_l (a_{\tau(r)jk})'_{l-1} \dots (a_{\tau^{l-2}(r)jk})'_2 (a_{rjk})'_1, \end{aligned}$$

то есть

$$(b_{rjk}) = (a_{rjk})'_l (a_{\tau(r)jk})'_{l-1} \dots (a_{\tau^{l-2}(r)jk})'_2 (a_{rjk})'_1. \quad (4.6)$$

Так как для любого  $t = 1, \dots, l$  сечения ориентации  $(i)$  пространственной матрицы  $A_t^{('i)} = (a_{ijk})_t^{('i)}$  имеют вид

$$(a_{1jk})'_t, \dots, (a_{mjk})'_t,$$

то из (4.6) вытекает, что определена пространственная матрица (4.3), у которой  $r$ -ое сечение ориентации  $(i)$  совпадает с правой частью (4.6). Таким образом, для любого  $r = 1, \dots, m$   $r$ -ые сечения ориентации  $(i)$  в левой и правой частях равенства (4.4) совпадают, то есть данное равенство верно.

Теорема доказана.

Для ориентаций  $(j)$  и  $(k)$  справедливы утверждения, аналогичные теореме 4.1. Сформулируем все три утверждения в виде одной теоремы.

**Теорема 4.2.** Пусть подстановка  $\sigma$  из  $S_m$ , удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ ,  $r \in \{i, j, k\}$ ,  $P$  — ассоциативное кольцо с единицей,  $A_1, \dots, A_l$  — такие пространственные матрицы из  $M^{(r)}(m, P)$ , что определена пространственная матрица

$$[A_1 A_2 \dots A_{l-1} A_l]_{l, \sigma, m}^{(r)}$$



Тогда определена пространственная матрица

$$\left[ A_l^{(',r)} A_{l-1}^{(',r)} \dots A_2^{(',r)} A_1^{(',r)} \right]_{l, \sigma^{-1}, m}^{(r)}$$

и верно равенство

$$\left( [A_1 A_2 \dots A_{l-1} A_l]_{l, \sigma, m}^{(r)} \right)^{(',r)} = \left[ A_l^{(',r)} A_{l-1}^{(',r)} \dots A_2^{(',r)} A_1^{(',r)} \right]_{l, \sigma^{-1}, m}^{(r)}.$$

Далее во всех следствиях  $P$  — ассоциативное кольцо с единицей

**Следствие 4.1.** Пусть  $\sigma$  — цикл длины  $t$  из  $S_m$ ,  $s \geq 1$ ,  $r \in \{i, j, k\}$ ,  $A_1, \dots, A_{st+1}$  — такие пространственные матрицы из  $M^{(r)}(m, P)$ , что определена пространственная матрица

$$[A_1 A_2 \dots A_{st} A_{st+1}]_{st+1, \sigma, m}^{(r)}$$

Тогда определена пространственная матрица

$$\left[ A_{st+1}^{(',r)} A_{st}^{(',r)} \dots A_2^{(',r)} A_1^{(',r)} \right]_{st+1, \sigma^{-1}, m}^{(r)}$$

и верно равенство

$$\left( [A_1 A_2 \dots A_{st} A_{st+1}]_{st+1, \sigma, m}^{(r)} \right)^{(',r)} = \left[ A_{st+1}^{(',r)} A_{st}^{(',r)} \dots A_2^{(',r)} A_1^{(',r)} \right]_{st+1, \sigma^{-1}, m}^{(r)}.$$

В частности, если  $s = 1$ , то

$$\left( [A_1 A_2 \dots A_t A_{t+1}]_{t+1, \sigma, m}^{(r)} \right)^{(',r)} = \left[ A_{t+1}^{(',r)} A_t^{(',r)} \dots A_2^{(',r)} A_1^{(',r)} \right]_{t+1, \sigma^{-1}, m}^{(r)}.$$

Полагая в следствии 4.1  $t = m$ , получим

**Следствие 4.2.** Пусть  $\sigma$  — цикл длины  $m$  из  $S_m$ ,  $s \geq 1$ ,  $r \in \{i, j, k\}$ ,  $A_1, \dots, A_{sm+1}$  — такие пространственные матрицы из  $M^{(r)}(m, P)$ , что определена пространственная матрица

$$[A_1 A_2 \dots A_{sm} A_{sm+1}]_{sm+1, \sigma, m}^{(r)}$$

Тогда определена пространственная матрица

$$\left[ A_{sm+1}^{(',r)} + A_{sm}^{(',r)} \dots A_2^{(',r)} + A_1^{(',r)} \right]_{sm+1, \sigma^{-1}, m}^{(r)}$$

и верно равенство

$$\left( [A_1 A_2 \dots A_{sm} A_{sm+1}]_{sm+1, \sigma, m}^{(r)} \right)^{(',r)} = \left[ A_{sm+1}^{(',r)} + A_{sm}^{(',r)} \dots A_2^{(',r)} + A_1^{(',r)} \right]_{sm+1, \sigma^{-1}, m}^{(r)}.$$

В частности, если  $s = 1$ , то

$$\left( [A_1 A_2 \dots A_m A_{m+1}]_{m+1, \sigma, m}^{(r)} \right)^{(',r)} = \left[ A_{m+1}^{(',r)} + A_m^{(',r)} \dots A_2^{(',r)} + A_1^{(',r)} \right]_{m+1, \sigma^{-1}, m}^{(r)}.$$

Полагая в следствии 4.2  $\sigma = (12 \dots m)$ , получим

**Следствие 4.3.** Пусть  $s \geq 1$ ,  $r \in \{i, j, k\}$ ,  $A_1, \dots, A_{sm+1}$  — такие пространственные матрицы из  $M^{(r)}(m, P)$ , что определена пространственная матрица

$$[A_1 A_2 \dots A_{sm} A_{sm+1}]_{sm+1, (12 \dots m), m}^{(r)}$$

Тогда определена пространственная матрица

$$\left[ A_{sm+1}^{(\prime, r)} A_{sm}^{(\prime, r)} \dots A_2^{(\prime, r)} A_1^{(\prime, r)} \right]_{sm+1, (m \dots 21), m}^{(r)}$$

и верно равенство

$$\left( [A_1 A_2 \dots A_{sm} A_{sm+1}]_{sm+1, (12 \dots m), m}^{(r)} \right)^{(\prime, r)} = \left[ A_{sm+1}^{(\prime, r)} A_{sm}^{(\prime, r)} \dots A_2^{(\prime, r)} A_1^{(\prime, r)} \right]_{sm+1, (m \dots 21), m}^{(r)}.$$

В частности, если  $s = 1$ , то

$$\left( [A_1 A_2 \dots A_m A_{m+1}]_{m+1, (12 \dots m), m}^{(r)} \right)^{(\prime, r)} = \left[ A_{m+1}^{(\prime, r)} A_m^{(\prime, r)} \dots A_2^{(\prime, r)} A_1^{(\prime, r)} \right]_{m+1, (m \dots 21), m}^{(r)}.$$

Так как для любой транспозиции  $\sigma \in S_m$  верно  $\sigma = \sigma^{-1}$ , то, полагая в следствии 4.1  $t = 2$ , получим

**Следствие 4.4.** Пусть  $\sigma$  — транспозиция из  $S_m$ ,  $s \geq 1$ ,  $r \in \{i, j, k\}$ ,  $A_1, \dots, A_{2s+1}$  — такие пространственные матрицы из  $M^{(r)}(m, P)$ , что определена пространственная матрица

$$[A_1 A_2 \dots A_{2s} A_{2s+1}]_{2s+1, \sigma, m}^{(r)}.$$

Тогда определена пространственная матрица

$$\left[ A_{2s+1}^{(\prime, r)} A_{2s}^{(\prime, r)} \dots A_2^{(\prime, r)} A_1^{(\prime, r)} \right]_{2s+1, \sigma, m}^{(r)}$$

и верно равенство

$$\left( [A_1 A_2 \dots A_{2s} A_{2s+1}]_{2s+1, \sigma, m}^{(r)} \right)^{(\prime, r)} = \left[ A_{2s+1}^{(\prime, r)} A_{2s}^{(\prime, r)} \dots A_2^{(\prime, r)} A_1^{(\prime, r)} \right]_{2s+1, \sigma, m}^{(r)}.$$

В частности, если  $s = 1$ , то

$$\left( [A_1 A_2 A_3]_{2, \sigma, m}^{(r)} \right)^{(\prime, r)} = \left[ A_3^{(\prime, r)} A_2^{(\prime, r)} A_1^{(\prime, r)} \right]_{2s+1, \sigma, m}^{(r)}.$$

Следствие 4.4 можно получить и из следствия 4.2, полагая в нем  $m = 2$ .

Если в следствии 4.4 положить  $m = 2$ , то  $\sigma = (12)$  и верно

**Следствие 4.5.** Пусть  $s \geq 1$ ,  $r \in \{i, j, k\}$ ,  $A_1, \dots, A_{2s+1}$  — такие пространственные матрицы из  $M^{(r)}(m, P)$ , что определена пространственная матрица

$$[A_1 A_2 \dots A_{2s} A_{2s+1}]_{2s+1, (12), 2}^{(r)}.$$

Тогда определена пространственная матрица

$$\left[ A_{2s+1}^{(\prime, r)} A_{2s}^{(\prime, r)} \dots A_2^{(\prime, r)} A_1^{(\prime, r)} \right]_{2s+1, (12), 2}^{(r)}$$

и верно равенство

$$\left( [A_1 A_2 \dots A_{2s} A_{2s+1}]_{2s+1, (12), 2}^{(r)} \right)^{(\prime, r)} = \left[ A_{2s+1}^{(\prime, r)} A_{2s}^{(\prime, r)} \dots A_2^{(\prime, r)} A_1^{(\prime, r)} \right]_{2s+1, (12), 2}^{(r)}.$$

В частности, если  $s = 1$ , то

$$\left( [A_1 A_2 A_3]_{2, (12), 2}^{(r)} \right)^{(\prime, r)} = \left[ A_3^{(\prime, r)} A_2^{(\prime, r)} A_1^{(\prime, r)} \right]_{3, (12), 2}^{(r)}.$$

Следствие 4.5 можно получить и из следствия 4.3, если положить в нем  $m = 2$

Из теоремы 4.1 вытекает теорема 7.1 из [4], а также все следствия из нее. Кроме того, из теоремы 4.2 вытекают соответствующие утверждения о транспонировании пространственных матриц из  $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$  и  $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$ .

## Литература

- [1] Соколов Н.П. Пространственные матрицы и их приложения. М., Наука, 1960, 300 с.
- [2] Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. Киев, Наукова думка, 1972, 175 с.
- [3] Гальмак А.М. Полиадические операции на множестве пространственных матриц // *Веснік ВДУ ім. П.М. Машиэрава*, 2 (62), 2011, с. 15–21.
- [4] Гальмак А.М. О вектор-матрицах и пространственных матрицах // *Проблемы физики, математики и техники*, 1 (10), 2012, с. 38–49.
- [5] Гальмак А.М. Вектор-матрицы // *Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова*, 1 (37), серия В, 2011, с. 30–37.

## ABOUT POLYADIC OPERATIONS ON THE SPACEMATRICES SET

**A.M. Gal'mak**

*Mogilev State University of Food Technology, Mogilev, Belarus*

mgup@mogilev.by

For any integer number  $m \geq 1$  and any substitution on  $m$  symbols on all spacematrices sets, which have  $m$  section of any fixed orientation, defined partial polyadic operations. Also connection between this operations and polyadic operations on the  $m$ -component vector-matrices set is defined. Conditions of associability of defined polyadic operations are found. Transposed spacematrices are studied.

**Key Words:** matrices, operation, ring.

# ON THE FINSLERIAN MECHANICAL SYSTEMS

**Radu Miron**

*University Transilvania of Brasov, Brasov, Romania*

gh.munteanu@unitbv.ro

The notion of Finslerian Mechanical Systems was been introduced by author as a triple  $\Sigma_F = (M, \mathcal{E}_F, Fe)$  formed by configuration space  $M$ , kinetic energy  $\mathcal{E}_F$  of a semidefinite Finsler space  $F^n = (M, F)$  and the external forces  $Fe$ . Fundamental equations of  $\Sigma_F$  are the Lagrange equations. One determines the canonical semispray  $S$  and proves that the integral curves of  $S$  are the evolution curves of  $\Sigma_F$ . Thus, the geometrical theory of the Finslerian mechanical systems  $\Sigma_F$  can be studied by means of dynamical systems  $S$  on the velocity space  $TM$ .

**Key Words:** semidefinite Finsler space, Finslerian mechanical systems.

## Introduction

My lecture to The VIIIth International Conference “Finsler Extensions of Relativity Theory”, Moscow, July–August, 2012, is a survey on the Analytical Mechanics of Finslerian Mechanics, introduced by author in the papers [5, 12, 16, 17, 21]. These systems are defined by a triple  $\Sigma_F = (M, F^2, Fe)$  where  $M$  is the configuration space,  $F(x, y)$  is the fundamental function of a semidefinite Finsler space  $F^n = (M, F(x, y))$  and  $Fe(x, y)$  are the external forces. Of course,  $F^2$  is the kinetic energy of the space. The fundamental equations are the Lagrange equations:

$$E_i(F^2) \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial F^2}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial F^2}{\partial x^i} = F_i(x, \dot{x}).$$

We study here the canonical semispray  $S$  of  $\Sigma_F$  and the geometry of the pair  $(TM, S)$ , where  $TM$  is velocity space, [17].

One obtain a generalization of the theory of Riemannian Mechanical Systems in the non-conservative case. It has numerous applications and justifies the introduction of such new kind of Analytical Mechanics.

## 1 Semidefinite Finsler spaces

**Definition 1.1** A Finsler space with semidefinite Finsler metric is a pair  $F^n = (M, F(x, y))$  where the function  $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$  satisfies the following axioms:

- 1°  $F$  is differentiable on  $\widetilde{TM}$  and continuous on the null section of  $\pi : TM \rightarrow M$ ;
- 2°  $F \geq 0$  on  $TM$ ;
- 3°  $F$  is positive 1-homogeneous with respect to velocities  $\dot{x}^i = y^i$ .
- 4° The fundamental tensor  $g_{ij}(x, y)$

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j} \tag{1.1}$$

has a constant signature on  $\widetilde{TM}$ ;

- 5° The Hessian of fundamental function  $F^2$  with elements  $g_{ij}(x, y)$  is nonsingular:

$$\det(g_{ij}(x, y)) \neq 0 \text{ on } \widetilde{TM}. \tag{1.2}$$

**Example.** If  $g_{ij}(x)$  is a semidefinite Riemannian metric on  $M$ , then

$$F = \sqrt{|g_{ij}(x)y^i y^j|} \tag{1.3}$$

is a function with the property  $F^n = (M, F)$  is a semidefinite Finsler space.

Any Finsler space  $F^n = (M, F(x, y))$ , in the sense of definition 1.1, is a definite Finsler space. In this case the property 5° is automatical verified.

But, these two kind of Finsler spaces have a lot of common properties. Therefore, we will speak in general on Finsler spaces. The following properties hold:

1° The fundamental tensor  $g_{ij}(x, y)$  is 0-homogeneous;

2°  $F^2 = g_{ij}(x, y)y^i y^j$ ;

3°  $p_i = \frac{1}{2} \frac{\partial F^2}{\partial y^i}$  is  $d$ -covariant vector field;

4° The Cartan tensor

$$C_{ijk} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 F^2}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} \tag{1.4}$$

is totally symmetric and

$$y^i C_{ijk} = C_{0jk} = 0. \tag{1.5}$$

5°  $\omega = p_i dx^i$  is 1-form on  $\widetilde{TM}$  (the Cartan 1-form);

6°  $\theta = d\omega = dp_i \wedge dx^i$  is 2-form (the Cartan 2-form);

7° The Euler-Lagrange equations of  $F^n$  are

$$E_i(F^2) = \frac{d}{dt} \frac{\partial F^2}{\partial y^i} - \frac{\partial F^2}{\partial x^i} = 0, \quad y^i = \frac{dx^i}{dt} \tag{1.6}$$

8° The energy  $\mathcal{E}_F$  of  $F^n$  is

$$\mathcal{E}_F = y^i \frac{\partial F^2}{\partial y^i} - F^2 = F^2 \tag{1.7}$$

9° The energy  $\mathcal{E}_F$  is conserved along to every integral curve of Euler-Lagrange equations (1.6);

10° In the canonical parametrization, the equations (1.6) give the geodesics of  $F^n$ ;

11° The Euler-Lagrange equations (1.6) can be written in the equivalent form

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \gamma_{jk}^i \left( x, \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \tag{1.8}$$

where  $\gamma_{jk}^i \left( x, \frac{dx}{dt} \right)$  are the Christoffel symbols of the fundamental tensor  $g_{ij}(x, y)$ .

12° The canonical semispray  $S$  is

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{1.9}$$

with the coefficients:

$$2G^i(x, y) = \gamma_{jk}^i(x, y)y^j y^k = \gamma_{00}^i(x, y), \tag{1.9'}$$

(the index “0” means the contraction with  $y^i$ ).

13° The canonical semispray  $S$  is 2-homogeneous with respect to  $y^i$ . So,  $S$  is a spray.

14° The nonlinear connection  $N$  determined by  $S$  is also canonical and it is exactly the famous Cartan nonlinear connection of the space  $F^n$ . Its coefficients are

$$N^i_j(x, y) = \frac{\partial G^i(x, y)}{\partial y^j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^j} \gamma^i_{00}(x, y). \quad (1.10)$$

An equivalent form for the coefficients  $N^i_j$  is as follows

$$N^i_j = \gamma^i_{j0}(x, y) - C^i_{jk}(x, y) \gamma^k_{00}(x, y). \quad (1.10')$$

Consequently, we have

$$N^i_0 = \gamma^i_{00} = 2G^i. \quad (1.11)$$

Therefore, we can say: The semispray  $S'$  determined by the Cartan nonlinear connection  $N$  is the canonical spray  $S$  of space  $F^n$ .

15° The Cartan nonlinear connection  $N$  determines a splitting of vector space  $T_uTM$ ,  $\forall u \in TM$  of the form:

$$T_uTM = N_u \oplus V_u, \quad \forall u \in TM \quad (1.12)$$

Thus, the adapted basis  $\left( \frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$ ,  $(i = 1, \dots, n)$ , to the previous splitting has the local vector fields  $\frac{\delta}{\delta x^i}$  given by:

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N^j_i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.13)$$

with the coefficients  $N^j_i(x, y)$  from (1.6).

Its dual basis is  $(dx^i, \delta y^i)$ , where

$$\delta y^i = dy^i + N^i_j(x, y) dx^j. \quad (1.14)$$

The autoparallel curves of the nonlinear connection  $N$  are given by, [5, 18],

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + N^i_j \left( x, \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx^j}{dt} = 0. \quad (1.15)$$

Using the dynamic derivative  $\nabla$  defined by  $N$ , the equations (1.11) can be written as follows

$$\nabla \left( \frac{dx^i}{dt} \right) = 0. \quad (1.11')$$

16° The variational equations of the autoparallel curves (1.11) give the Jacobi equations:

$$\nabla^2 \xi^i + \left( \frac{\partial N^i_j}{\partial y^k} \frac{dx^j}{dt} - N^i_k \right) \nabla \xi^k + R^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0. \quad (1.16)$$

The vector field  $\xi^i(t)$  along a solution  $c(t)$  of the equations (1.11) and which verifies the previous equations is called a Jacobi field. In the Riemannian case,  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = 0$ , the Jacobi equations (1.12) are exactly the classical Jacobi equations:

$$\nabla^2 \xi^i + R^i_{jlk}(x) \frac{dx^l}{dt} \frac{dx^j}{dt} \xi^k = 0 \quad (1.17)$$

17° A distinguished metric connections  $D$  with the coefficients  $CT(N) = (F_{jk}^i, C_{jk}^i)$  is defined as a  $N$ -linear connection on  $TM$ , metric with respect to the fundamental tensor  $g_{ij}(x, y)$  of Finsler space  $F^n$ , i.e. we have

$$\begin{aligned} g_{ij|k} &= \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} - F_{ik}^s g_{sj} - F_{jk}^s g_{is} = 0, \\ g_{ij|k} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} - C_{ik}^s g_{sj} - C_{jk}^s g_{is} = 0. \end{aligned} \tag{1.18}$$

18° The following theorem holds:

**Theorem 1.1**

1° *There is an unique  $N$ -linear connection  $D$ , with coefficients  $CT(N)$  which satisfies the following system of axioms:  $A_1$ .  $N$  is the Cartan nonlinear connection of Finsler space  $F^n$ .*

*$A_2$ .  $D$  is metrical, (i.e.  $D$  satisfies (2.1.14)).*

*$A_3$ .  $T_{jk}^i = F_{jk}^i - F_{kj}^i = 0$ ,  $S_{jk}^i = C_{jk}^i - C_{kj}^i = 0$ .*

2° *The metric  $N$ -linear connection  $D$  has the coefficients  $CT(N) = (F_{jk}^i, C_{jk}^i)$  given by the generalized Christoffel symbols*

$$\begin{aligned} F_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{is} \left( \frac{\delta g_{sj}}{\delta x^k} + \frac{\delta g_{sk}}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^s} \right), \\ C_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{is} \left( \frac{\partial g_{sj}}{\partial y^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial y^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^s} \right). \end{aligned} \tag{1.19}$$

19° By means of this theorem, it is not difficult to see that we have

$$C_{jk}^i = g^{is} C_{sjk} \tag{1.20}$$

and

$$y^i|_k = 0. \tag{1.21}$$

20° The Cartan nonlinear connection  $N$  determines on  $\widetilde{TM}$  an almost complex structure  $\mathbb{F}$ , as follows:

$$\mathbb{F} \left( \frac{\delta}{\delta x^i} \right) = -\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \mathbb{F} \left( \frac{\partial}{\partial y^i} \right) = \frac{\delta}{\delta x^i}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.22}$$

But one can see that  $\mathbb{F}$  is the tensor field on  $\widetilde{TM}$ :

$$\mathbb{F} = -\frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^i + \frac{\delta}{\delta x^i} \otimes \delta y^i, \tag{1.22'}$$

with the 1-forms  $\delta y^i$  and the vector field  $\frac{\delta}{\delta x^i}$  given by (1.10), (1.9), (1.6).

It is not difficult to prove that: The almost complex structure  $\mathbb{F}$  is integrable if and only if the distribution  $N$  is integrable on  $TM$ .

21° The Sasaki-Matsumoto lift of the fundamental tensor  $g_{ij}$  of Finsler space  $F^n$  is

$$\mathbb{G}(x, y) = g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j + g_{ij}(x, y) \delta y^i \otimes \delta y^j. \tag{1.23}$$

The tensor field  $\mathbb{G}$  determines a pseudo-Riemannian structure on  $TM$ .

22° The following theorem is known:

**Theorem 1.2.**

1° The pair  $(\mathbb{G}, \mathbb{F})$  is an almost Hermitian structure on  $\widetilde{TM}$  determined only by the Finsler space  $F^n$ .

2° The symplectic structure associate to the structure  $(\mathbb{G}, \mathbb{F})$  is the Cartan 2-form:

$$\theta = 2g_{ij}\delta y^i \wedge dx^j. \quad (1)$$

3° The space  $(\widetilde{TM}, \mathbb{G}, \mathbb{F})$  is almost Kählerian.

The space  $H^{2n} = (\widetilde{TM}, \mathbb{G}, \mathbb{F})$  is called *the almost Kählerian model* of the Finsler space  $F^n$ .

G.S. Asanov in the paper [5] proved that the metric  $\mathbb{G}$  from (1.23) does not satisfies the principle of the Post-Newtonian Calculus. This is due to the fact that the horizontal and vertical terms of  $\mathbb{G}$  do not have the same physical dimensions.

This is the reason for R. Miron to introduce a new lift of the fundamental tensor  $g_{ij}$ , [5, 17, 18], in the form:

$$\widetilde{\mathbb{G}}(x, y) = g_{ij}(x, y)dx^i \otimes dx^j + \frac{a^2}{\|y\|^2}g_{ij}(x, y)\delta y^i \otimes \delta y^j$$

where  $a > 0$  is a real constant imposed by applications in Theoretical Physics and where  $\|y\|^2 = g_{ij}(x, y)y^i y^j = F^2$  has the property  $F^2 > 0$ . The lift  $\mathbb{G}$  is 2-homogeneous with respect to  $y^i$ . The Sasaki-Matsumoto lift  $\mathbb{G}$  has not the property of homogeneity, [8, 21].

**Two examples:**

1. *Randers spaces.* They have been defined by R. S. Ingarden as a triple  $RF^n = (M, \alpha + \beta, N)$ , where  $\alpha + \beta$  is a Randers metric and  $N$  is the Cartan nonlinear connection of the Finsler space  $F^n = (M, \alpha + \beta)$ , [13].
2. *Ingarden spaces.* These spaces have been defined by R. Miron, [5, 18], as a triple  $IF^n = (M, \alpha + \beta, N_L)$ , where  $\alpha + \beta$  is a Randers metric and  $N_L$  is the Lorentz nonlinear connection of  $F^n = (M, \alpha + \beta)$  having the coefficients

$$N_j^i(x, y) = \overset{\circ}{\gamma}_{jk}^i(x)y^k - \overset{\circ}{F}_j^i(x), \quad \overset{\circ}{F}_j^i = \frac{1}{2}a^{is}(x) \left( \frac{\partial b_s}{\partial x^j} - \frac{\partial b_j}{\partial x^s} \right). \quad (2)$$

The Christoffel symbols are constructed with the Riemannian metric tensor  $a_{ij}(x)$  of the Riemann space  $(M, \alpha^2)$  and  $\overset{\circ}{F}_j^i(x)$  is the electromagnetic tensor determined by the electromagnetic form  $(\alpha + \beta)$ .

## 2 The notion of Finslerian mechanical system

As we know [5, 18], the Riemannian mechanical systems  $\Sigma_{\mathcal{R}} = (M, T, Fe)$  is defined as a triple in which  $M$  is the configuration space,  $T$  is the kinetic energy and  $Fe$  are the external forces, which depend on the material point  $x \in M$  and depend on velocities  $y^i = \frac{dx^i}{dt}$ .

Extending the previous ideas, we introduce the notion of Finslerian Mechanical System, studied by author in the paper [17]. The shortly theory of this analytical mechanics can be find in the joint book *Finsler-Lagrange Geometry. Applications to Dynamical Systems*, by Ioan Bucataru and Radu Miron, Romanian Academy Press, Bucharest, 2007.



In a different manner, M. de Leon and colab. [11], M. Crampin et colab. [17, 18], have studied such kind of new Mechanics. The time dependent case is considered in the book [4].

A Finslerian mechanical system  $\Sigma_F$  is defined as a triple

$$\Sigma_F = (M, \mathcal{E}_{F^2}, Fe) \quad (2.1)$$

where  $M$  is a real differentiable manifold of dimension  $n$ , called *the configuration space*,  $\mathcal{E}_{F^2}$  is *the energy* of an a priori given Finsler space  $F^n = (M, F(x, y))$ , which can be positive defined or semidefined, and  $Fe(x, y)$  are the external forces given as a vertical vector field on the tangent manifold  $TM$ . We continue to say that  $TM$  is the velocity space of  $M$ .

Evidently, the Finslerian mechanical system  $\Sigma_F$  is a straightforward generalization of the known notion of Riemannian mechanical system  $\Sigma_{\mathcal{R}}$  obtained for  $\mathcal{E}_{F^2}$  as kinetic energy of a Riemann space  $\mathcal{R}^n = (M, g)$ .

Therefore, we can introduce the evolution (or fundamental) equations of  $\Sigma_F$  by means of the following Postulate:

**Postulate.** *The evolution equations of the Finslerian mechanical system  $\Sigma_F$  are the Lagrange equations:*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{E}_{F^2}}{\partial y^i} - \frac{\partial \mathcal{E}_{F^2}}{\partial x^i} = F_i(x, y), \quad y^i = \frac{dx^i}{dt} \quad (2.2)$$

where the energy is

$$\mathcal{E}_{F^2} = y^i \frac{\partial F^2}{\partial y^i} - F^2 = F^2, \quad (2.3)$$

and  $F_i(x, y)$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), are the covariant components of the external forces  $Fe$ :

$$\begin{cases} Fe(x, y) = F^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i} \\ F_i(x, y) = g_{ij}(x, y) F^j(x, y), \end{cases} \quad (2.4)$$

and

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}, \quad \det(g_{ij}(x, y)) \neq 0, \quad (2.5)$$

is the fundamental (or metric) tensor of Finsler space  $F^n = (M, F(x, y))$ .

Finally, the Lagrange equations of the Finslerian mechanical system are:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F^2}{\partial y^i} - \frac{\partial F^2}{\partial x^i} = F_i(x, y), \quad y^i = \frac{dx^i}{dt}. \quad (2.6)$$

A more convenient form of the previous equations is given by:

**Theorem 2.1.** *The Lagrange equations (2.6) are equivalent to the second order differential equations:*

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \gamma_{jk}^i \left( x, \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \frac{1}{2} F^i \left( x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (2.7)$$

*Proof.* Writing the kinetic energy  $F^2(x, y)$  in the form:

$$F^2(x, y) = g_{ij}(x, y) y^i y^j, \quad (2.8)$$

the equivalence of the systems of equations (2.6) and (2.7) is not difficult to establish.

But, the form (2.7) is very convenient in applications. So, we obtain a first result expressed in the following theorems:

**Theorem 2.2.** *The trajectories of the Finslerian mechanical system  $\Sigma_F$ , without external forces ( $Fe \equiv 0$ ), are the geodesics of the Finsler space  $F^n$ .*

Indeed,  $F^i(x, y) \equiv 0$  and the SODE (2.7) imply the equations (2.4) of geodesics of space  $F^n$ .

A second important result is a consequence of the Lagrange equations, too.

**Theorem 2.3.** *The variation of kinetic energy  $\mathcal{E}_{F^2} = F^2$  of the mechanical system  $\Sigma_F$  along the evolution curves (2.6) is given by*

$$\frac{d\mathcal{E}_{F^2}}{dt} = \frac{dx^i}{dt} F_i. \quad (2.9)$$

**Theorem 2.4.** *The kinetic energy  $\mathcal{E}_{F^2}$  of the system  $\Sigma_F$  is conserved along the evolution curves (2.6) if the external forces  $Fe$  are orthogonal to the evolution curves.*

The external forces  $Fe$  are called *dissipative* if the scalar product  $\langle \mathbb{C}, Fe \rangle$  is negative, [17, 18].

**Theorem 2.5.** *The kinetic energy  $\mathcal{E}_{F^2}$  decreases along the evolution curves of the Finslerian mechanical system  $\Sigma_F$  if and only if the external forces  $Fe$  are dissipative.*

### Some examples of Finslerian mechanical systems

1° The systems  $\Sigma_F = (M, \mathcal{E}_{F^2}, Fe)$  given by  $F^n = (M, \alpha + \beta)$  as a Randers space and

$$Fe = \beta \mathbb{C} = \beta y^i \frac{\partial}{\partial y^i}. \text{ Evidently } Fe \text{ is 2-homogeneous with respect to } y^i.$$

2°  $\Sigma_F$  determined by  $F^n = (M, \alpha + \beta)$  and  $Fe = \alpha \mathbb{C}$ .

3°  $\Sigma_F$  with  $F^n = (M, \alpha + \beta)$  and  $Fe = (\alpha + \beta) \mathbb{C}$ .

4°  $\Sigma_F$  defined by a Finsler space  $F^n = (M, F)$  and  $Fe = a_{jk}^i(x) y^j y^k \frac{\partial}{\partial y^i}$ ,  $a_{jk}^i(x)$  being a symmetric tensor on the configuration space  $M$  of type (1, 2).

### 3 The evolution semispray of the system $\Sigma_F$

The Lagrange equations (2.6) give us the integral curves of a remarkable semispray on the velocity space  $TM$ , which governed the geometry of Finslerian mechanical system  $\Sigma_F$ . So, if the external forces  $Fe$  are global defined on the manifold  $TM$ , we obtain:

**Theorem 3.1.** [Miron, [17, 18]] *For the Finslerian mechanical systems  $\Sigma_F$ , the following properties hold good:*

1° *The operator  $S$  defined by*

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \left( 2 \overset{\circ}{G}^i - \frac{1}{2} F^i \right) \frac{\partial}{\partial y^i}; \quad 2 \overset{\circ}{G}^i = \gamma_{jk}^i(x, y) y^j y^k \quad (3.1)$$

*is a vector field, global defined on the phase space  $TM$ .*

2°  *$S$  is a semispray which depends only on  $\Sigma_F$  and it is a spray if  $Fe$  is 2-homogeneous with respect to  $y^i$ .*

3° *The integral curves of the vector field  $S$  are the evolution curves given by the Lagrange equations (2.7) of  $\Sigma_F$ .*

*Proof.*

1° Let us consider the canonical semispray  $\overset{\circ}{S}$  of the Finsler space  $F^n$ . Thus from (2.3.1) we have

$$S = \overset{\circ}{S} + \frac{1}{2}Fe. \quad (3.2)$$

It follows that  $S$  is a vector field on  $TM$ .

2° Since  $Fe$  is a vertical vector field, then  $S$  is a semispray. Evidently,  $S$  depends on  $\Sigma_F$ , only.

3° The integral curves of  $S$  are given by:

$$\frac{dx^i}{dt} = y^i; \quad \frac{dy^i}{dt} + 2 \overset{\circ}{G}^i(x, y) = \frac{1}{2}F^i(x, y). \quad (3.3)$$

The previous system of differential equations is equivalent to system (2.7).

In the book of I. Bucataru and R. Miron [5], one proves the following important result, which extend a known J. Klein theorem, [9]:

**Theorem 3.2.** *The semispray  $S$ , given by the formula (3.1), is the unique vector field on  $\widetilde{TM}$ , solution of the equation:*

$$i_S \overset{\circ}{\omega} = -dT + \sigma, \quad (3.4)$$

where  $\overset{\circ}{\omega}$  is the symplectic structure of the Finsler space  $F^n = (M, F)$ ,  $T = \frac{1}{2}F^2 = \frac{1}{2}g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}$  and  $\sigma$  is the 1-form of external forces:

$$\sigma = F_i(x, y)dx^i. \quad (3.5)$$

In the terminology of J. Klein, [9],  $S$  is the dynamical system of  $\Sigma_F$ , defined on the tangent manifold  $TM$ . We will say that  $S$  is the evolution semispray of  $\Sigma_F$ .

By means of semispray  $S$  we can develop the geometry of the Finslerian mechanical system  $\Sigma_F$ . So, all geometrical notion derived from  $S$ , as nonlinear connections, N-linear connections etc. will be considered as belong to the system  $\Sigma_F$ . But, all this construction is developed in the papers [17, 18]. A good application can be found in the Pavlov and Kokarev's paper [23].

## References

- [1] Abraham R., Marsden J. Foundations of Mechanics, Benjamin, New-York, 1978.
- [2] Anastasiei M. Symplectic structures and Lagrange geometry. In M. Anastasiei, P.L. Antonelli (eds.), Finsler and Lagrange Geometry, Kluwer Academic Publisher, 2003, pp. 1–6.
- [3] Antonelli P.L. (Ed.) Handbook of Finsler Geometry. Kluwer Acad. Publ., 2003.
- [4] Balan V., Neagu M. Jet Single-Time Lagrange Geometry and its Applications, Wiley, 2011.
- [5] Bucataru I., Miron R. Finsler-Lagrange Geometry. Applications to Dynamical Systems. Romanian Academy Publ. House, 2007.
- [6] Djukic D., Vujanovic B. On Some Geometrical Aspects of Classical Nonconservative Mechanics // *Journal of Mathematical Physics*, vol. 16, no. 10, pp. 2099–2102, 1975.
- [7] Hrimiuc D., Shimada H. On the  $\mathcal{L}$ -duality between Lagrange and Hamilton manifolds // *Nonlinear World*, 3, 1996, pp. 613–641.
- [8] Ikeda S. Advanced Study in Applied Geometry, Seizansha, Kanagawa, 1995.
- [9] Klein J. Espaces Variationnels et Mécanique. // *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 12, pp. 1–124, 1962.

- [10] Krupková O. Variational Analysis on Fibered Manifolds over One-dimensional Bases, PhD Thesis, Silesian University, Opava & Charles University, Prague, 1992, 67 pp.
- [11] de Leon M., Rodrigues P.R. Almost tangent geometry and higher order mechanical systems, Proceedings of the Conference on Differential Geometry and Its Applications, August, 24-30, 1986, Brno, Reidel and J. E. Purkyne, Brno, 1987, pp. 179–195.
- [12] Miron R. Lagrange Geometry // *Math. Comput. Modelling*, 20 (4/5), 1994.
- [13] Miron R. General Randers Spaces, Lagrange and Finsler Geometry, in P.L. Antonelli and R. Miron, Editors, FTPH no. 59, Kluwer Acad. Publ., Otsu, 1996.
- [14] Miron R. Hamilton geometry, Univ. Timisoara Sem. Mecanica. 3, 1987.
- [15] Miron R. Metrical Finsler structures and metrical Finsler connections // *J. Math. Kyoto Univ.* 23, 1983, pp. 219–224.
- [16] Miron R. A Lagrangian theory of relativity, I, II, An. Șt. Univ. “Al. I. Cuza” Iași, 32, pp. 37–62, 1986, pp. 7–16.
- [17] Miron R. Dynamical Systems of Lagrangian and Hamiltonian Mechanical Systems // *Advance Studies in Pure Mathematics*, 48, 2007, pp. 309–340.
- [18] Miron R. Lagrangian and Hamiltonian geometries. Applications to Analytical Mechanics, Ed. Academiei & Ed. Fair Partners, Bucuresti, 2011.
- [19] Miron R. Compendium on the Geometry of Lagrange Spaces, in Dillen F.J.T. and Verstaellen L.C.A. (Eds.) // *Handbook of Differential Geometry*, vol. II, 2006, pp. 437–512.
- [20] Miron R., Anastasiei M., Bucataru I. The Geometry of Lagrange Spaces, in Antonelli, P.L. (Ed.) // *Handbook of Finsler Geometry*, vol. 2, Kluwer Acad. Publ., 2003, pp. 967–1122.
- [21] Miron R., Hrimiuc D., Shimada H., Sabău S.V. The Geometry of Hamilton and Lagrange Spaces, Kluwer Academic Publ., FTPH nr. 118, 2001.
- [22] Munteanu, Gh., Complex Spaces in Finsler, Lagrange and Hamilton Geometries, Kluwer Academic Publisher, 2004.
- [23] Pavlov D.G., Kokarev, S.S. Conformal gauges of the Berwald–Moor Geometries and their induced non-linear symmetries, (in Russian) // *Hypercomplex Number in Geometry and Physics*, 2(10), vol. 1, 2004, pp. 5–18.
- [24] Santilli R. M. Foundations of theoretical mechanics. I. The inverse problem in Newtonian mechanics, Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag New York, New York-Heidelberg, 1978, xix+266 pp.
- [25] Santilli R. M. Foundations of theoretical mechanics. II. Birkhoffian generalization of Hamiltonian mechanics, Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983, xix+370 pp.
- [26] Vujici V.A., Hedrih (Stevanovic) K. The Rheonomic constraints change force, Facta Universitatis, 1, 1991, pp. 313–322.

## О ФИНСЛЕРОВЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Раду Мирон

*Трансильванский университет, Брашов, Румыния*

gh.munteanu@unitbv.ro

Понятие финслеровых механических систем было введено автором, как триплет  $\Sigma_F = (M, \mathcal{E}_F, Fe)$  формируемый конфигурационным пространством  $M$ , кинетической энергией  $\mathcal{E}_F$  полуопределенного финслерова пространства  $F^n = (M, F)$  и внешней силой  $Fe$ . Фундаментальные уравнения  $\Sigma_F$  являются уравнениями Лагранжа. Можно определить канонический полуспрей  $S$  и доказать, что интегральные кривые  $S$  являются динамическими кривыми  $\Sigma_F$ . Таким образом, геометрическая теория финслеровых динамических систем  $\Sigma_F$  может изучаться при помощи динамических систем  $S$  в пространстве скоростей  $TM$ .

**Ключевые слова:** полуопределенное финслерово пространство, финслеровы механические системы.

# JET RIEMANN-HAMILTON GEOMETRIZATION FOR THE CONFORMAL DEFORMED BERWALD-MOOR QUARTIC METRIC DEPENDING ON MOMENTA

**Alexandru Oană, Mircea Neagu**

*“Transilvania” University, Braşov, Romania*

alexandru.oana@unitbv.ro, mircea.neagu@unitbv.ro

In this paper we expose on the dual 1-jet space  $J^{1*}(\mathbb{R}, M^4)$  the distinguished (d-) Riemannian geometry (in the sense of d-connection, d-torsions, d-curvatures and some gravitational-like and electromagnetic-like geometrical models) for the  $(t, x)$ -conformal deformed Berwald-Moor Hamiltonian metric of order four.

**Key Words:**  $(t, x)$ -conformal deformation of quartic Berwald-Moor Hamiltonian metric, canonical nonlinear connection, Cartan canonical linear connection, d-torsions and d-curvatures, geometrical Einstein-like equations.

## 1 Introduction

The extension of classical Riemannian geometry of physical fields (gravitational and electromagnetic) to metrics depending on directions  $g_{ij}(x, y)$  or to metrics depending on momenta  $g^{ij}(x, p)$  has been and still is of great interest for scientists. In our days, such possible geometric-physical abstract extensions were created by Miron, Atanasiu and their collaborators in the works [6, 7] and [3], by using geometrical ideas and distinguished methods from:

- *Finslerian framework* (where  $g_{ij}(x, y)$  is 0-positive  $y$ -homogenous, and it is provided by a 1-positive  $y$ -homogenous Finslerian metric);
- *Lagrangian framework* (where  $g_{ij}(x, y)$  is not necessarily 0-positive  $y$ -homogenous, but it is provided by a Lagrangian  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ );
- *Hamiltonian framework* (where  $g^{ij}(x, p)$  is not necessarily 0-positive  $p$ -homogenous, but it is provided by a Hamiltonian  $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ ).

The Miron’s geometrical construction (which is given on tangent or cotangent bundles) relies on the using of the adapted basis of horizontal vector fields  $\delta/\delta x^i$ , instead of the natural basis  $\partial/\partial x^i$ . This is because the local transformation rules of the horizontal vector fields  $\delta/\delta x^i$  are tensorial ones, so more simple than the transformation rules of the vector fields  $\partial/\partial x^i$  on tangent or cotangent bundles. For such a reason, all geometrical objects used in the corresponding abstract physical theory are locally described in adapted bases. From a physical point of view, the use of distinguished vector fields  $\delta/\delta x^i$  is useful in order to be more simple to obey the Einstein’s relativistic law that says that the form of all physical laws have to be the same in any reference system. The geometrical translation of this physical law is that any geometric-physical object used in theory must have a global geometrical character, that is it must have the same local form in any local chart of coordinates.

In Miron’s physical field geometrical theory, the classical Riemannian Levi-Civita connection is replaced by Cartan canonical connection. It is well-known that in Finsler-Lagrange-Hamilton geometrical framework there are a lot of important linear distinguished (d-) connections (Cartan, Berwald, Chern-Rund or Hashiguchi, for instance). However, the use of the Cartan canonical connection is preferred because it is the single linear d-connection which is a *metrical connection* like the Levi-Civita connection in the classical Riemannian framework. An important difference between these two connections is that the Cartan connection is only

a partial torsion-free connection because the Poisson brackets of the distinguished vector fields  $\delta/\delta x^i$  are not generally equal to zero.

Consequently, in both gravitational and electromagnetic Finsler-Lagrange geometrical theory, Miron and his coworkers postulate:

1. The Einstein-like equations that govern the anisotropic gravitational potentials  $g_{ij}(x, y)$  are the geometrical Einstein equations associated to the Cartan canonical connection, locally described in adapted bases. Note that for the particular Lagrangian of classical electrodynamics (see [6]) these Einstein-like equations become the classical Einstein equations.
2. The anisotropic electromagnetic field is defined in similar way with Riemannian one, but by replacing the isotropic Riemannian electromagnetic potentials  $A_i(x)$  with the anisotropic electromagnetic potentials  $y_i = g_{ij}y^j$ . Moreover, the authors substitute the Levi-Civita connection with the metrical Cartan canonical connection:

$$\begin{aligned} F_{ij}(x) = A_{i;j} - A_{j;i} &\longleftrightarrow F_{ij}(x, y) = y_{i|j} - y_{j|i} = \\ &= g_{im} (y_{|j}^m) - g_{jm} (y_{|i}^m) = g_{im} \left( \frac{\delta y^m}{\delta x^j} + y^r L_{rj}^m \right) - g_{jm} \left( \frac{\delta y^m}{\delta x^i} + y^r L_{ri}^m \right) = \\ &= g_{im} \left( \frac{\partial y^m}{\partial x^j} - N_j^s \frac{\partial y^m}{\partial y^s} + y^r L_{rj}^m \right) - g_{jm} \left( \frac{\partial y^m}{\partial x^i} - N_i^s \frac{\partial y^m}{\partial y^s} + y^r L_{ri}^m \right) = \\ &= g_{im} (-N_j^s \delta_s^m + y^r L_{rj}^m) - g_{jm} (-N_i^s \delta_s^m + y^r L_{ri}^m), \end{aligned}$$

where “;” is the local covariant derivative induced by Levi-Civita connection, “|” is the horizontal covariant derivative induced by metrical Cartan canonical connection,  $N_i^j$  are the components of the canonical nonlinear connection (this is induced by the Euler-Lagrange equations of the given Lagrangian, and it is in the Finsler case exactly the classical Cartan nonlinear connection), and  $L_{ij}^k$  are the horizontal components of the Cartan canonical connection. It is important to note that the anisotropic electromagnetic components  $F_{ij}(x, y)$  are governed by some natural Maxwell-like equations. The naturalness of these Maxwell-like equations is coming again from the particular physical case of classical electrodynamics (see [6], [7]) in which these Maxwell-like equations reduce exactly to the classical Maxwell equations. More accurately, in this particular physical situation, the Lagrangian function (that governs the movement law of a particle of mass  $m \neq 0$  and electric charge  $e$ , which is displaced concomitantly into an environment endowed both with a gravitational field and an electromagnetic one) is given by

$$L(x^k, y^k) = mc\varphi_{ij}(x^k)y^i y^j + \frac{2e}{m}A_i(x^k)y^i + \mathcal{F}(x^k), \quad (1.1)$$

where the semi-Riemannian metric  $\varphi_{ij}(x)$  represents the *gravitational potential* of the space of events  $M$ ,  $A_i(x)$  are the components of a d-tensor on the tangent bundle representing the *electromagnetic potential*, and  $\mathcal{F}(x)$  is a smooth *potential function* on the manifold  $M$ . The corresponding **electromagnetic components** are given by

$$F_{ij} = -\frac{e}{2m} \left( \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right),$$

and the **Maxwell geometrical equations** reduce to the classical ones:

$$\sum_{\{i,j,k\}} F_{ij|k} = 0,$$

where

$$F_{ij|k} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} - F_{mj}\gamma_{ik}^m - F_{im}\gamma_{jk}^m.$$

Finally, in what concern the Hamiltonian geometrical approach of physical fields depending on momenta, we would like to underline only the fact that the Hamiltonian theory uses the same symmetry, methods and ideas with the Lagrangian theory, via the Legendre duality induced by the classical natural Legendre transformations.

The geometric-physical Lagrangian or Hamiltonian Berwald-Moor structure [4, 8] was intensively investigated by P.K. Rashevski [14] and further fundamented and developed by D.G. Pavlov, G.I. Garas'ko and S.S. Kokarev [5, 12, 13]. In their works, the preceding Russian scientists emphasize the importance in the theory of space-time structure, gravitation and electromagnetism of the geometry produced by the classical Berwald-Moor Lagrangian metric

$$F : TM \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(y) = \sqrt[n]{y^1 y^2 \dots y^n}, \quad n \geq 2,$$

or by the corresponding Berwald-Moor Hamiltonian metric

$$H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(p) = \sqrt[n]{p_1 p_2 \dots p_n}.$$

In such a perspective, according to the recent geometric-physical ideas proposed by Garas'ko [5], we consider that a distinguished Riemannian geometry (in the sense of d-connection, d-torsions, d-curvatures and some gravitational-like and electromagnetic-like geometrical models) for the conformal deformations of the jet Berwald-Moor Hamiltonian metric of order four is required. Note that a similar geometric-physical study for the  $(t, x)$ -conformal deformations of the jet Berwald-Moor Lagrangian metric of order four is now completely developed in the paper [9]. Also, few elements of distinguished Hamiltonian geometry produced by the cotangent quartic Berwald-Moor metric depending of momenta are already presented in the paper [1].

In such a geometrical and physical context, this paper investigates on the dual 1-jet space  $J^{1*}(\mathbb{R}, M^4)$  the Riemann-Hamilton distinguished geometry (together with a theoretical-geometric field-like theory) for the  $(t, x)$ -conformal deformed Berwald-Moor Hamiltonian metric of order four<sup>1</sup>

$$H(t, x, p) = 2e^{-\sigma(x)} \sqrt{h_{11}(t)} [p_1^1 p_2^1 p_3^1 p_4^1]^{1/4}, \quad (1.2)$$

where  $\sigma(x)$  is a smooth non-constant function on  $M^4$ ,  $h_{11}(t)$  is a Riemannian metric on  $\mathbb{R}$ , and  $(t, x, p) = (t, x^1, x^2, x^3, x^4, p_1^1, p_2^1, p_3^1, p_4^1)$  are the coordinates of the momentum phase space  $J^{1*}(\mathbb{R}, M^4)$ ; these transform by the rules (the Einstein convention of summation is assumed everywhere):

$$\tilde{t} = \tilde{t}(t), \quad \tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j), \quad \tilde{p}_i^1 = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \frac{d\tilde{t}}{dt} p_j^1, \quad (1.3)$$

where  $i, j = \overline{1, 4}$ ,  $\text{rank}(\partial \tilde{x}^i / \partial x^j) = 4$  and  $d\tilde{t}/dt \neq 0$ . It is important to note that, based on the geometrical ideas promoted by Miron, Hrimiuc, Shimada and Sabău in the classical Hamiltonian geometry of cotangent bundles ([7]), together with those used by Atanasiu, Neagu and Oană in the geometry of dual 1-jet spaces, the differential geometry (in the sense of d-connections, d-torsions, d-curvatures, abstract gravitational-like and electromagnetic-like geometrical theories) produced by a jet Hamiltonian function  $H : J^{1*}(\mathbb{R}, M^n) \rightarrow \mathbb{R}$  is now completely done in the papers [2, 3, 10] and [11]. In what follows, we apply the general geometrical results from [10] and [11] to the square of Hamiltonian metric (1.2), which is given by ( $n = 4$ )

$${}^*H(t, x, p) = H^2(t, x, p) = 4e^{-2\sigma(x)} h_{11}(t) [p_1^1 p_2^1 p_3^1 p_4^1]^{1/2}. \quad (1.4)$$

<sup>1</sup>We assume that we have  $p_1^1 p_2^1 p_3^1 p_4^1 > 0$ . This is one domain where we can  $p$ -differentiate the Hamiltonian function  $H(t, x, p)$ .



**Proposition 1.1** The momentum Hamiltonian metric (1.4) is exactly the natural Hamiltonian attached to the square of the jet Berwald-Moor Lagrangian metric, which has the expression

$${}^*L(t, x, y) = e^{2\sigma(x)} h^{11}(t) [y_1^1 y_1^2 y_1^3 y_1^4]^{1/2}. \quad (1.5)$$

*Proof.* The Hamiltonian  ${}^*H$ , associated to the square of the jet Berwald-Moor Lagrangian metric  ${}^*L$ , is defined by formula

$${}^*H(t, x, p) = \sum_{r=1}^4 p_r^1 y_1^r - {}^*L(t, x, y),$$

where

$$p_r^1 = \frac{\partial {}^*L}{\partial y_1^r} = \frac{e^{2\sigma(x)} h^{11}(t)}{2} \cdot \frac{[y_1^1 y_1^2 y_1^3 y_1^4]^{1/2}}{y_1^r} \Leftrightarrow p_r^1 y_1^r = \frac{{}^*L}{2} \text{ (no sum by } r). \quad (1.6)$$

It follows that we have

$${}^*H = \sum_{r=1}^4 p_r^1 y_1^r - {}^*L = 2{}^*L - {}^*L = {}^*L.$$

But, the equalities (1.6) obviously imply

$$p_1^1 p_2^1 p_3^1 p_4^1 = \frac{\left[ \frac{{}^*L}{2} \right]^4}{16 [y_1^1 y_1^2 y_1^3 y_1^4]} = \frac{e^{8\sigma(x)} [h^{11}(t)]^4 [y_1^1 y_1^2 y_1^3 y_1^4]}{16} = \frac{e^{4\sigma(x)} [h^{11}(t)]^2 \left[ \frac{{}^*L}{2} \right]^2}{16}.$$

In conclusion, we obtained what we were looking for:

$${}^*H = {}^*L = 4e^{-2\sigma(x)} h_{11}(t) [p_1^1 p_2^1 p_3^1 p_4^1]^{1/2}.$$

**Remark 1.2** Note that the jet Lagrangian metric (1.5) is even the square of the conformal deformed jet quartic Berwald-Moor Finslerian metric

$$F(t, x, y) = e^{\sigma(x)} \sqrt{h^{11}(t)} [y_1^1 y_1^2 y_1^3 y_1^4]^{1/4}.$$

In other words, we have  ${}^*L = F^2$ .

## 2 The canonical nonlinear connection

Using the notation  $\mathcal{P}^{1111} := p_1^1 p_2^1 p_3^1 p_4^1$  and taking into account that we have

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{1111}}{\partial p_i^1} = \frac{\mathcal{P}^{1111}}{p_i^1},$$

then the *fundamental metrical d-tensor* produced by the metric (1.4) is given by the formula (no sum by  $i$  or  $j$ )

$${}^*g^{ij}(t, x, p) = \frac{h^{11}(t)}{2} \frac{\partial^2 {}^*H}{\partial p_i^1 \partial p_j^1} = \frac{e^{-2\sigma(x)} (1 - 2\delta^{ij}) [\mathcal{P}^{1111}]^{1/2}}{2 p_i^1 p_j^1}. \quad (2.1)$$

Moreover, the matrix  $g^* = (g^{*ij})$  admits the inverse  $g^{*-1} = (g_{*jk}^*)$ , whose entries are given by

$$g_{*jk}^* = \frac{e^{2\sigma(x)} (1 - 2\delta_{jk}) [\mathcal{P}^{1111}]^{-1/2}}{2} p_j^1 p_k^1 \quad (\text{no sum by } j \text{ or } k). \quad (2.2)$$

Let us consider the Christoffel symbol of the Riemannian metric  $h_{11}(t)$  on  $\mathbb{R}$ , which is given by

$$\kappa_{11}^1 = \frac{h^{11}}{2} \frac{dh_{11}}{dt},$$

where  $h^{11} = 1/h_{11} > 0$ . Then, using the notation  $\sigma_i := \partial\sigma/\partial x^i$ , we find the following geometrical result:

**Proposition 2.1** For the  $(t, x)$ -conformal deformed Berwald-Moor Hamiltonian metric of order four (1.4), the **canonical nonlinear connection** on the dual 1-jet space  $J^{1*}(\mathbb{R}, M^4)$  has the components

$$N = \left( N_{1(i)1}^{(1)} = \kappa_{11}^1 p_i^1, N_{2(i)j}^{(1)} = -4\sigma_i p_i^1 \delta_{ij} \right). \quad (2.3)$$

*Proof.* The canonical nonlinear connection produced by  $\overset{*}{H}$  on the dual 1-jet space  $J^{1*}(\mathbb{R}, M^4)$  has the following components (see [2]):

$$N_{1(i)1}^{(1)} \stackrel{def}{=} \kappa_{11}^1 p_i^1$$

and

$$N_{2(i)j}^{(1)} = \frac{h^{11}}{4} \left[ \frac{\partial g_{*ij}^*}{\partial x^k} \frac{\partial \overset{*}{H}}{\partial p_k^1} - \frac{\partial g_{*ij}^*}{\partial p_k^1} \frac{\partial \overset{*}{H}}{\partial x^k} + g_{*ik}^* \frac{\partial^2 \overset{*}{H}}{\partial x^j \partial p_k^1} + g_{*jk}^* \frac{\partial^2 \overset{*}{H}}{\partial x^i \partial p_k^1} \right]. \quad (2.4)$$

Now, by a direct calculation, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{*ij}^*}{\partial x^k} \frac{\partial \overset{*}{H}}{\partial p_k^1} - \frac{\partial g_{*ij}^*}{\partial p_k^1} \frac{\partial \overset{*}{H}}{\partial x^k} &= 2h_{11} (1 - 2\delta_{ij}) p_i p_j \left( \sum_{k=1}^4 \frac{\sigma_k}{p_k} \right) + \\ &+ 4h_{11} (1 - 2\delta_{ij}) \left[ -\frac{p_i p_j}{2} \left( \sum_{k=1}^4 \frac{\sigma_k}{p_k} \right) + \sigma_i p_j + \sigma_j p_i \right] = \\ &= 4h_{11} (1 - 2\delta_{ij}) (\sigma_i p_j + \sigma_j p_i) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} g_{*ik}^* \frac{\partial^2 \overset{*}{H}}{\partial x^j \partial p_k^1} + g_{*jk}^* \frac{\partial^2 \overset{*}{H}}{\partial x^i \partial p_k^1} &= \\ &= \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{e^{2\sigma(x)} (1 - 2\delta_{ik}) [\mathcal{P}^{1111}]^{-1/2}}{2} p_i^1 p_k^1 \cdot \frac{(-4) h_{11} e^{-2\sigma(x)} \sigma_j [\mathcal{P}^{1111}]^{1/2}}{p_k^1} \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{e^{2\sigma(x)} (1 - 2\delta_{jk}) [\mathcal{P}^{1111}]^{-1/2}}{2} p_j^1 p_k^1 \cdot \frac{(-4) h_{11} e^{-2\sigma(x)} \sigma_i [\mathcal{P}^{1111}]^{1/2}}{p_k^1} \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^4 [-2h_{11} (1 - 2\delta_{ik}) \sigma_j p_i^1 - 2h_{11} (1 - 2\delta_{jk}) \sigma_i p_j^1] = -4h_{11} (\sigma_i p_j + \sigma_j p_i). \end{aligned}$$

Consequently, we obtain

$$N_{2(i)j}^{(1)} = -2 (\sigma_i p_j + \sigma_j p_i) \delta_{ij} = -4\sigma_i p_i^1 \delta_{ij}.$$

**Remark 2.2** Formula (2.4) of the spatial Hamiltonian canonical nonlinear connection is provided, via the Legendre duality, by the classical Lagrangian canonical nonlinear connection. For more details, the reader is invited to consult Miron's monograph ([7], pp. 166).

### 3 The Cartan canonical $N$ -linear connection. Its d-torsions and d-curvatures

The nonlinear connection (2.3) produces the dual *adapted bases* of d-vector fields (no sum by  $i$ )

$$\left\{ \frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} - \kappa_{11}^1 p_r^1 \frac{\partial}{\partial p_r^1}; \frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + 4\sigma_i p_i^1 \frac{\partial}{\partial p_i^1}; \frac{\partial}{\partial p_i^1} \right\} \subset \mathcal{X}(E^*) \quad (3.1)$$

and d-covector fields (no sum by  $i$ )

$$\{ dt; dx^i; \delta p_i^1 = dp_i^1 + \kappa_{11}^1 p_i^1 dt - 4\sigma_i p_i^1 dx^i \} \subset \mathcal{X}^*(E^*), \quad (3.2)$$

where  $E^* = J^{1*}(\mathbb{R}, M^4)$ . The naturalness of the geometrical adapted bases (3.1) and (3.2) is coming from the fact that, via a transformation of coordinates (1.3), their elements transform as the classical tensors. Therefore, the description of all subsequent geometrical objects on the dual 1-jet space  $J^{1*}(\mathbb{R}, M^4)$  (e.g., the Cartan canonical linear connection, its torsion and curvature etc.) will be done in local adapted components. Consequently, by direct computations, we obtain the following geometrical result:

**Proposition 3.1** The Cartan canonical  $N$ -linear connection produced by the  $(t, x)$ -conformal deformed Berwald-Moor Hamiltonian metric of order four (1.4) has the following adapted local components (no sum by  $i, j$  or  $k$ ):

$$C\Gamma(N) = \left( \kappa_{11}^1, A_{j1}^i = 0, H_{jk}^i = 4\delta_j^i \delta_k^i \sigma_i, C_{i(1)}^{j(k)} = C_i^{jk} \cdot \frac{p_i^1}{p_j^1 p_k^1} \right), \quad (3.3)$$

where

$$C_i^{jk} = \frac{1 - 2\delta^{jk} - 2\delta_i^j - 2\delta_i^k + 8\delta_i^j \delta_i^k}{8} = \begin{cases} \frac{1}{8}, & i \neq j \neq k \neq i \\ -\frac{1}{8}, & i = j \neq k \text{ or } i = k \neq j \text{ or } j = k \neq i \\ \frac{3}{8}, & i = j = k. \end{cases}$$

*Proof.* The adapted components of the Cartan canonical connection are given by the formulas (see [10]),

$$A_{j1}^i \stackrel{def}{=} \frac{g^{*il}}{2} \frac{\delta g_{lj}^*}{\delta t} = 0, \quad H_{jk}^i \stackrel{def}{=} \frac{g^{*ir}}{2} \left( \frac{\delta g_{jr}^*}{\delta x^k} + \frac{\delta g_{kr}^*}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{jk}^*}{\delta x^r} \right) = 4\delta_j^i \delta_k^i \sigma_i,$$

$$C_{i(1)}^{j(k)def} \stackrel{def}{=} -\frac{g_{ir}^*}{2} \left( \frac{\partial g^{*jr}}{\partial p_k^1} + \frac{\partial g^{*kr}}{\partial p_j^1} - \frac{\partial g^{*jk}}{\partial p_r^1} \right) = -\frac{g_{ir}^*}{2} \frac{\partial g^{*jr}}{\partial p_k^1}.$$

Using the derivative operators (3.1), the direct calculations lead us to the required results.

**Remark 3.2** It is important to note that the vertical d-tensor  $C_{i(1)}^{j(k)}$  also has the properties (sum by  $m$ ):

$$C_{i(1)}^{j(k)} = C_{i(1)}^{k(j)}, \quad C_{i(1)}^{j(m)} p_m^1 = 0, \quad C_{m(1)}^{j(m)} = 0, \quad C_{i(1)|m}^{j(m)} = 0, \quad (3.4)$$

where

$$C_{i(1)|j}^{l(k)} \stackrel{def}{=} \frac{\delta C_{i(1)}^{l(k)}}{\delta x^j} + C_{i(1)}^{r(k)} H_{rj}^l - C_{r(1)}^{l(k)} H_{ij}^r + C_{i(1)}^{l(r)} H_{rj}^k.$$

**Proposition 3.3** The Cartan canonical connection of the  $(t, x)$ -conformal deformed Berwald-Moor Hamiltonian metric of order four (1.4) has **two** effective local torsion d-tensors:

$$R_{(r)ij}^{(1)} = -4\sigma_{ij} (p_i^1 \delta_{ir} - p_j^1 \delta_{jr}), \quad P_{i(1)}^{r(j)} = C_i^{rj} \cdot \frac{p_i^1}{p_r^1 p_j^1},$$

where  $\sigma_{ij} := \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j}$ .

*Proof.* A Cartan canonical connection on the dual 1-jet space  $J^{1*}(\mathbb{R}, M^4)$  generally has *six* effective local d-tensors of torsion (for more details, see [10]). For the particular Cartan canonical connection (3.3) these reduce only to *two* (the other four are zero):

$$R_{(r)ij}^{(1)} \stackrel{def}{=} \frac{\delta N_{2(r)i}^{(1)}}{\delta x^j} - \frac{\delta N_{2(r)j}^{(1)}}{\delta x^i}, \quad P_{i(1)}^{r(j)} \stackrel{def}{=} C_{i(1)}^{r(j)}.$$

**Proposition 3.4** The Cartan canonical connection of the  $(t, x)$ -conformal deformed Berwald-Moor Hamiltonian metric of order four (1.4) has **three** effective local curvature d-tensors:

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial H_{ij}^l}{\partial x^k} - \frac{\partial H_{ik}^l}{\partial x^j} + H_{ij}^r H_{rk}^l - H_{ik}^r H_{rj}^l + C_{i(1)}^{l(r)} R_{(r)jk}^{(1)}, \quad P_{ij(1)}^{l(k)} = -C_{i(1)|j}^{l(k)},$$

$$S_{i(1)(1)}^{l(j)(k)} \stackrel{def}{=} \frac{\partial C_{i(1)}^{l(j)}}{\partial p_k^1} - \frac{\partial C_{i(1)}^{l(k)}}{\partial p_j^1} + C_{i(1)}^{r(j)} C_{r(1)}^{l(k)} - C_{i(1)}^{r(k)} C_{r(1)}^{l(j)}.$$

*Proof.* A Cartan canonical connection on the dual 1-jet space  $J^{1*}(\mathbb{R}, M^4)$  generally has *five* effective local d-tensors of curvature (for all details, see [10]). For the particular Cartan canonical connection (3.3) these reduce only to *three* (the other two are zero). These are  $S_{i(1)(1)}^{l(j)(k)}$  and

$$R_{ijk}^l \stackrel{def}{=} \frac{\delta H_{ij}^l}{\delta x^k} - \frac{\delta H_{ik}^l}{\delta x^j} + H_{ij}^r H_{rk}^l - H_{ik}^r H_{rj}^l + C_{i(1)}^{l(r)} R_{(r)jk}^{(1)},$$

$$P_{ij(1)}^{l(k)} \stackrel{def}{=} \frac{\partial H_{ij}^l}{\partial p_k^1} - C_{i(1)|j}^{l(k)} + C_{i(1)}^{l(r)} P_{(r)j(1)}^{(k)} = -C_{i(1)|j}^{l(k)},$$

where

$$P_{(r)j(1)}^{(1)(k)} = \frac{\partial N_{2(r)j}^{(1)}}{\partial p_k^1} + H_{rj}^k = 0.$$

## 4 From $(t, x)$ -conformal deformations of the quartic Berwald-Moor Hamiltonian metric to field-like geometrical models

### 4.1 Momentum gravitational-like geometrical model

The  $(t, x)$ -conformal deformed Berwald-Moor Hamiltonian metric of order four (1.4) produces on the momentum phase space  $J^{1*}(\mathbb{R}, M^4)$  the adapted metrical d-tensor (sum by  $i$  and  $j$ )

$$\mathbb{G} = h_{11} dt \otimes dt + g_{ij}^* dx^i \otimes dx^j + h_{11} g^{ij} \delta p_i^1 \otimes \delta p_j^1, \quad (4.1)$$

where  $g_{jk}^*$  and  $g^{ij}$  are given by (2.2) and (2.1), and we have (no sum by  $i$ )

$$\delta p_i^1 = dp_i^1 + \kappa_{11}^1 p_i^1 dt - 4\sigma_i p_i^1 dx^i.$$

We believe that, from a physical point of view, the metrical d-tensor (4.1) may be regarded as a “*gravitational potential depending on momenta*”. In our abstract geometric-physical approach, one postulates that the momentum gravitational potential  $\mathbb{G}$  is governed by the *geometrical Einstein equations*

$$\text{Ric} (CT(N)) - \frac{\text{Sc} (CT(N))}{2} \mathbb{G} = \mathcal{K} \mathbb{T}, \quad (4.2)$$

where

- $\text{Ric} (CT(N))$  is the *Ricci d-tensor* associated to the Cartan canonical linear connection (3.3); the Cartan canonical linear connection plays in our geometric-physical theory the same role as the Levi-Civita connection in the classical Riemannian theory of gravity;
- $\text{Sc} (CT(N))$  is the *scalar curvature*;
- $\mathcal{K}$  is the *Einstein constant* and  $\mathbb{T}$  is an *intrinsic momentum stress-energy d-tensor of matter*.

Therefore, using the adapted basis of vector fields (3.1), we can locally describe the global geometrical Einstein equations (4.2). Consequently, some direct computations lead to:

**Lemma 4.1** The Ricci tensor of the Cartan canonical connection of the  $(t, x)$ -conformal deformed Berwald-Moor Hamiltonian metric of order four (1.4) has the following **two** effective local Ricci d-tensors (no sum by  $i, j, k$  or  $l$ ):

$$R_{ij} = \begin{cases} -2\sigma_{ij} - \frac{p_i^1}{p_k^1} \sigma_{jk} - \frac{p_i^1}{p_l^1} \sigma_{jl}, & i \neq j, \quad \{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\} \\ 0, & i = j, \end{cases} \quad (4.3)$$

$$R_{(1)(1)}^{(i)(j)} = -S_{(1)(1)}^{(i)(j)} = \frac{4\delta^{ij} - 1}{8} \frac{1}{p_i^1 p_j^1}.$$

*Proof.* Generally, the Ricci tensor of a Cartan canonical connection  $CT(N)$  (produced by an arbitrary momentum Hamiltonian function) is determined by *six* effective local Ricci d-tensors (for more details, see [11]). For the particular Cartan canonical connection (3.3) these reduce only to *two* (the other four are zero), where (sum by  $r$  and  $m$ ):

$$\begin{aligned} R_{ij} &\stackrel{\text{def}}{=} R_{ijm}^m = \frac{\partial H_{ij}^m}{\partial x^m} - \frac{\partial H_{im}^m}{\partial x^j} + H_{ij}^r H_{rm}^m - H_{im}^r H_{rj}^m + C_{i(1)}^{m(r)} R_{(r)jm}^{(1)}, \\ S_{(1)(1)}^{(i)(j)} &\stackrel{\text{def}}{=} S_{m(1)(1)}^{i(j)(m)} = \frac{\partial C_{m(1)}^{i(j)}}{\partial p_m^1} - \frac{\partial C_{m(1)}^{i(m)}}{\partial p_j^1} + C_{m(1)}^{r(j)} C_{r(1)}^{i(m)} - C_{m(1)}^{r(m)} C_{r(1)}^{i(j)} = \\ &= \frac{\partial C_{m(1)}^{i(j)}}{\partial p_m^1} + C_{m(1)}^{r(j)} C_{r(1)}^{i(m)}. \end{aligned}$$

**Lemma 4.2** The scalar curvature of the Cartan canonical connection of the  $(t, x)$ -conformal deformed Berwald-Moor Hamiltonian metric of order four (1.4) has the value

$$\text{Sc} (CT(N)) = -4e^{-2\sigma} [\mathcal{P}^{1111}]^{1/2} \Sigma_{11} - \frac{3}{2} h^{11} e^{2\sigma} [\mathcal{P}^{1111}]^{-1/2},$$

where

$$\Sigma_{11} = \frac{\sigma_{12}}{p_1^1 p_2^1} + \frac{\sigma_{13}}{p_1^1 p_3^1} + \frac{\sigma_{14}}{p_1^1 p_4^1} + \frac{\sigma_{23}}{p_2^1 p_3^1} + \frac{\sigma_{24}}{p_2^1 p_4^1} + \frac{\sigma_{34}}{p_3^1 p_4^1}.$$

*Proof.* The scalar curvature of the Cartan canonical connection (3.3) is given by the general formula  $\text{Sc} (C\Gamma(N)) = \overset{*}{g}{}^{ij} R_{ij} - h^{11} \overset{*}{g}{}_{ij} S_{(1)(1)}^{(i)(j)}$ .

The local description in the adapted basis of vector fields (3.1) of the global geometrical Einstein equations (4.2) leads us to

**Proposition 4.3** The **geometrical Einstein-like equations** produced by the  $(t, x)$ -conformal deformed Berwald-Moor Hamiltonian metric of order four (1.4) are locally described by

$$\left\{ \begin{array}{l} 2e^{-2\sigma} h_{11} [\mathcal{P}^{1111}]^{1/2} \Sigma_{11} + \frac{3}{4} e^{2\sigma} [\mathcal{P}^{1111}]^{-1/2} = \mathcal{K} \mathbb{T}_{11}, \\ R_{ij} + \left\{ 2e^{-2\sigma} [\mathcal{P}^{1111}]^{1/2} \Sigma_{11} + \frac{3}{4} h^{11} e^{2\sigma} [\mathcal{P}^{1111}]^{-1/2} \right\} \overset{*}{g}{}_{ij} = \mathcal{K} \mathbb{T}_{ij}, \\ -S_{(1)(1)}^{(i)(j)} + \left\{ 2e^{-2\sigma} h_{11} [\mathcal{P}^{1111}]^{1/2} \Sigma_{11} + \frac{3}{4} e^{2\sigma} [\mathcal{P}^{1111}]^{-1/2} \right\} \overset{*}{g}{}^{ij} = \mathcal{K} \mathbb{T}_{(1)(1)}^{(i)(j)}, \\ 0 = \mathbb{T}_{1i}, \quad 0 = \mathbb{T}_{i1}, \quad 0 = \mathbb{T}_{(1)1}^{(i)}, \\ 0 = \mathbb{T}_{1(1)}^{(i)}, \quad 0 = \mathbb{T}_{i(1)}^{(j)}, \quad 0 = \mathbb{T}_{(1)j}^{(i)}. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

**Corollary 4.4** The momentum stress-energy d-tensor of matter  $\mathbb{T}$  satisfies the following **geometrical conservation-like laws** (sum by  $m$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{T}_{1/1}^1 + \mathbb{T}_{1|m}^m + \mathbb{T}_{(m)1}^{(1)} |_{(1)}^{(m)} = 0 \\ \mathbb{T}_{i/1}^1 + \mathbb{T}_{i|m}^m + \mathbb{T}_{(m)i}^{(1)} |_{(1)}^{(m)} = \mathbf{E}_{i|m}^m \\ \mathbb{T}_{(1)/1}^{1(i)} + \mathbb{T}_{(1)|m}^{m(i)} + \mathbb{T}_{(m)(1)}^{(1)(i)} |_{(1)}^{(m)} = \frac{e^{-2\sigma} [\mathcal{P}^{1111}]^{1/2}}{\mathcal{K}} \cdot \left[ \frac{\Sigma_{11}}{p_i^1} + 2 \frac{\partial \Sigma_{11}}{\partial p_i^1} \right], \end{array} \right.$$

where (sum by  $r$ ):

$$\mathbb{T}_1^1 \stackrel{def}{=} h^{11} \mathbb{T}_{11} = \mathcal{K}^{-1} \left\{ 2e^{-2\sigma} [\mathcal{P}^{1111}]^{1/2} \Sigma_{11} + \frac{3}{4} h^{11} e^{2\sigma} [\mathcal{P}^{1111}]^{-1/2} \right\},$$

$$\mathbb{T}_1^m \stackrel{def}{=} \overset{*}{g}{}^{mr} \mathbb{T}_{r1} = 0, \quad \mathbb{T}_{(m)1}^{(1)} \stackrel{def}{=} h^{11} \overset{*}{g}{}_{mr} \mathbb{T}_{(1)1}^{(r)} = 0, \quad \mathbb{T}_i^1 \stackrel{def}{=} h^{11} \mathbb{T}_{1i} = 0,$$

$$\mathbb{T}_i^m \stackrel{def}{=} \overset{*}{g}{}^{mr} \mathbb{T}_{ri} = \mathbf{E}_i^m := \mathcal{K}^{-1} \cdot \left[ \overset{*}{g}{}^{mr} R_{ri} + \delta_i^m \left\{ 2e^{-2\sigma} [\mathcal{P}^{1111}]^{1/2} \Sigma_{11} + \frac{3}{4} h^{11} e^{2\sigma} [\mathcal{P}^{1111}]^{-1/2} \right\} \right],$$

$$\mathbb{T}_{(m)i}^{(1)} \stackrel{def}{=} h^{11} \overset{*}{g}{}_{mr} \mathbb{T}_{(1)i}^{(r)} = 0, \quad \mathbb{T}_{(1)}^{1(i)} \stackrel{def}{=} h^{11} \mathbb{T}_{(1)}^{(i)} = 0, \quad \mathbb{T}_{(1)}^{m(i)} \stackrel{def}{=} \overset{*}{g}{}^{mr} \mathbb{T}_{r(1)}^{(i)} = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(m)(1)}^{(1)(i)} \stackrel{def}{=} h^{11} \overset{*}{g}{}_{mr} \mathbb{T}_{(1)(1)}^{(r)(i)} &= \frac{h^{11} e^{2\sigma} [\mathcal{P}^{1111}]^{-1/2} p_m}{8\mathcal{K}} \frac{p_m}{p_i} + \\ &+ \delta_m^i \cdot \left[ \frac{h^{11} e^{2\sigma} [\mathcal{P}^{1111}]^{-1/2}}{4\mathcal{K}} + \frac{2e^{-2\sigma} [\mathcal{P}^{1111}]^{1/2} \Sigma_{11}}{\mathcal{K}} \right], \end{aligned}$$

and we also have (summation by  $m$  and  $r$ , but no sum by  $i$ )

$$\mathbb{T}_{1/1}^1 \stackrel{def}{=} \frac{\delta \mathbb{T}_1^1}{\delta t} + \mathbb{T}_1^1 K_{11}^1 - \mathbb{T}_1^1 K_{11}^1 = \frac{\delta \mathbb{T}_1^1}{\delta t}, \quad \mathbb{T}_{1|m}^m \stackrel{def}{=} \frac{\delta \mathbb{T}_1^m}{\delta x^m} + \mathbb{T}_1^r H_{rm}^m,$$

$$\mathbb{T}_{(m)1|^{(1)}}^{(1)} \stackrel{def}{=} \frac{\partial \mathbb{T}_{(m)1}^{(1)}}{\partial p_m^1} - \mathbb{T}_{(r)1}^{(1)} C_{m(1)}^{r(m)} = \frac{\partial \mathbb{T}_{(m)1}^{(1)}}{\partial p_m^1},$$

$$\mathbb{T}_{i/1}^1 \stackrel{def}{=} \frac{\delta \mathbb{T}_i^1}{\delta t} + \mathbb{T}_i^1 K_{11}^1 - \mathbb{T}_r^1 A_{i1}^r = \frac{\delta \mathbb{T}_i^1}{\delta t} + \mathbb{T}_i^1 K_{11}^1,$$

$$\mathbb{T}_{i|m}^m \stackrel{def}{=} \frac{\delta \mathbb{T}_i^m}{\delta x^m} + \mathbb{T}_i^r H_{rm}^m - \mathbb{T}_r^m H_{im}^r = \mathbb{E}_{i|m}^m := \frac{\delta \mathbb{E}_i^m}{\delta x^m} + 4\mathbb{E}_i^m \sigma_m - 4\mathbb{E}_i^i \sigma_i,$$

$$\mathbb{T}_{(m)i|^{(1)}}^{(1)} \stackrel{def}{=} \frac{\partial \mathbb{T}_{(m)i}^{(1)}}{\partial p_m^1} - \mathbb{T}_{(r)i}^{(1)} C_{m(1)}^{r(m)} - \mathbb{T}_{(m)r}^{(1)} C_{i(1)}^{r(m)},$$

$$\mathbb{T}_{(1)/1}^{1(i)} \stackrel{def}{=} \frac{\delta \mathbb{T}_{(1)}^{1(i)}}{\delta t} + \mathbb{T}_{(1)}^{1(r)} A_{r1}^i, \quad \mathbb{T}_{(1)|m}^{m(i)} \stackrel{def}{=} \frac{\delta \mathbb{T}_{(1)}^{m(i)}}{\delta x^m} + 4\mathbb{T}_{(1)}^{m(i)} \sigma_m + 4\mathbb{T}_{(1)}^{i(i)} \sigma_i,$$

$$\mathbb{T}_{(m)(1)|^{(1)}}^{(1)(i)} \stackrel{def}{=} \frac{\partial \mathbb{T}_{(m)(1)}^{(1)(i)}}{\partial p_m^1} - \mathbb{T}_{(r)(1)}^{(1)(i)} C_{m(1)}^{r(m)} + \mathbb{T}_{(m)(1)}^{(1)(r)} C_{r(1)}^{i(m)}.$$

*Proof.* The local Einstein equations (4.4), together with some direct computations, lead us to what we were looking for.

## 4.2 Momentum electromagnetic-like geometrical model

In the paper [11], a geometrical theory for an electromagnetism depending on momenta was also created, using only a given Hamiltonian function  $H$  on the momentum phase space  $J^{1*}(\mathbb{R}, M^4)$ . In the background of the jet momentum Hamiltonian geometry from this paper, we work with the *electromagnetic distinguished 2-form*  $\mathbb{F} = F_{(1)j}^{(i)} \delta p_i^1 \wedge dx^j$ , where (sum by  $r$  and  $m$ )

$$F_{(1)j}^{(i)} = \frac{h^{11}}{2} \left[ g^{jr} N_{(r)i}^{(1)} - g^{ir} N_{(r)j}^{(1)} + \left( g^{jr} H_{ri}^m - g^{ir} H_{rj}^m \right) p_m^1 \right].$$

The above electromagnetic components depending on momenta are characterized by some natural *geometrical Maxwell-like equations* (for more details, see Oană and Neagu [10], [11]).

By a direct calculation, we see that the  $(t, x)$ -conformal deformed Berwald-Moor Hamiltonian metric of order four (1.4) produces null momentum electromagnetic components:  $F_{(1)j}^{(i)} = 0$ . Consequently, our dual jet  $(t, x)$ -conformal deformed Berwald-Moor Hamiltonian geometrical electromagnetic theory is trivial one. Probably, this fact suggests that the dual jet  $(t, x)$ -conformal deformed Berwald-Moor Hamiltonian structure (1.4) has rather gravitational connotations than electromagnetic ones on the momentum phase space  $J^{1*}(\mathbb{R}, M^4)$ .

## Acknowledgements

The authors of this paper thank Professors Gh. Atanasiu and D.G. Pavlov for their encouragements and the useful discussions on the Berwald-Moor research topic.

Many thanks also go to reviewer of Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics whose useful comments helped us to improve our work.

## References

- [1] Atanasiu Gh., Balan V., Neagu M., The Pavlov's 4-polyform of momenta  $K(p) = \sqrt[4]{p_1 p_2 p_3 p_4}$  and its applications in Hamilton geometry (in Russian) // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 2(4), 2, 2005, pp. 134–139.
- [2] Atanasiu Gh., Neagu M., Canonical nonlinear connections in the multi-time Hamilton geometry // *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 14, 2, 2009, pp. 1–12.
- [3] Atanasiu Gh., Neagu M., Distinguished torsion, curvature and deflection tensors in the multi-time Hamilton geometry // *Electronic Journal "Differential Geometry-Dynamical Systems"*, 11, 2009, pp. 20–40.
- [4] Berwald L., Über Finslersche und Cartansche Geometrie II // *Compositio Math.*, 7, 1940, pp. 141–176.
- [5] Garas'ko G.I, The extension of the conformal transformation concept (in Russian) // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 1, (3), 2, 2005, pp. 16–25.
- [6] Miron R., Anastasiei M., The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1994.
- [7] Miron R., Hrimiuc D., Shimada H., Sabău S.V., The geometry of Hamilton and Lagrange spaces, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
- [8] Moor A., Über die Dualität von Finslerschen und Cartanschen Räumen // *Acta Math.*, 88, 1952, pp. 347–370.
- [9] Neagu M, Jet Finsler-like geometry for the  $x$ -dependent conformal deformation of a one-parameter family of Berwald-Moor metrics of order four // *Bulletin of the Transilvania University of Braşov, Series III: Mathematics, Informatics, Physics*, 4 (53), 2, 2011, pp. 31–42.
- [10] Oană A., Neagu M., A distinguished Riemannian geometrization for quadratic Hamiltonians of polymomenta, arXiv:1112.5442v1 [math.DG], 2011.
- [11] Oană A., Neagu M., *From quadratic Hamiltonians of polymomenta to abstract geometrical Maxwell-like and Einstein-like equations*, arXiv:1202.4477v1 [math-ph], 2012.
- [12] Pavlov D.G., Four-dimensional time // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 1(1), 1, 2004, pp. 31–39.
- [13] Pavlov D.G., Kokarev S.S., Conformal gauges of the Berwald-Moor geometry and their induced non-linear symmetries (in Russian) // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 2(10), 5, 2008, pp. 3–14.
- [14] Rashevsky P.K., Polymetric geometry (in Russian), In: "Proc. Sem. on Vector and Tensor Analysis and Applications in Geometry, Mechanics and Physics" (Ed. V.F. Kagan), 5, M-L, OGIZ, 1941.



# СТРУЙНАЯ ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ РИМАНА-ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ИМПУЛЬСА КОНФОРМНО-ДЕФОРМИРОВАННОЙ МЕТРИКИ БЕРВАЛЬДА-МООРА ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

О. Александру, М. Неагу

*Трансильванский университет, Брашов, Румыния*

alexandru.oana@unitbv.ro, mircea.neagu@unitbv.ro

В настоящей статье мы предлагаем вниманию читателя (d-)риманову геометрию (в смысле d-связности, d-вращения, d-кривизны и некоторых геометрических моделей гравитационного и электромагнитного типа) в дуальном 1-струйном пространстве  $J^{1*}(\mathbb{R}, M^4)$  для  $(t, x)$ -конформной деформированной метрики Бервальда-Моора четвертой степени.

**Ключевые слова:**  $(t, x)$ -конформная деформация метрики Бервальда-Моора четвертой степени, каноническая нелинейная связность, каноническая линейная связность Картана, d-вращение и d-кривизна, геометрические уравнения Эйнштейновского типа.

# FINSLER GEOMETRY IN GTR IN THE PRESENCE OF A VELOCITY DEPENDENT GAUGE FIELD

György Darvas

*Symmetrion and Institute for Research Organisation of the Hungarian Academy of Sciences,  
Budapest, Hungary*

darvasg@iif.hu

Fields around their source determine a curved geometry. Velocity dependent phenomena in these fields involve a curvature tensor, whose elements depend on the value and the direction of the velocity of the source of the interaction gauge field, as observed from the reference frame of the matter field. This double (space-time and velocity) dependency of the curvature requires the field to follow a Finsler geometry.

**Key Words:** fundamental interactions, field charges, invariance, covariance, isotopic field charge spin, conservation, symmetry, gauge boson, velocity dependent fields, Finslerian curvature tensor, modified Einstein equation.

## 1 Conservation laws in the presence of a velocity dependent gauge field

[1] showed that in the presence of a velocity dependent gauge field  $D_{\dot{\mu}} = D_{\dot{\mu}}(\dot{x}^{\mu})$  with a Lagrangian density  $L(\phi_k, D_{\dot{\mu},\alpha})$ , where  $\phi_k$ , ( $k = 1, \dots, n$ ) are the matter fields — which also includes the velocity field  $\dot{x}^{\mu} = \dot{x}^{\mu}(x_{\nu})$ , and  $D_{\dot{\mu},\alpha}$ , ( $\alpha = 1, \dots, N$ ), are the (kinetic) gauge fields, assumed also that  $L(\phi_k, D_{\dot{\mu},\alpha})$  is invariant under the local transformations of a compact, simple Lie group  $G$  generated by  $T_{\alpha}$ , ( $\alpha = 1, \dots, N$ ), where  $[T_{\alpha}, T_{\beta}] = iC_{\alpha\beta}^{\gamma} T_{\gamma}$ , and  $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$  are the so-called structure constants, corresponding to the actually considered individual physical interactions symmetry group, there appear two conserved Noether currents:

$$J_{\alpha}^{(1)\nu} = \partial_{\mu} F_{\alpha}^{(1)\mu\nu} \quad \partial_{\nu} J_{\alpha}^{(1)\nu} = 0 \quad (1)$$

$$J_{\alpha}^{(2)\nu} = \partial_{\mu} F_{\alpha}^{(2)\mu\nu} \quad \partial_{\nu} J_{\alpha}^{(2)\nu} = 0. \quad (2)$$

These equations form a complete system with the additional condition

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu} D_{\dot{\nu},\alpha})} \partial_{\nu} \dot{x}^{\rho} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\nu} D_{\dot{\mu},\alpha})} \partial_{\mu} \dot{x}^{\rho} = 0.$$

### 1.1 Mathematical background

[2] gave a mathematical proof for the conservation of the currents  $J_{\alpha}^{(1)\mu}$  and  $J_{\alpha}^{(2)\nu}$  as well as demonstrated that — at least in this specific case — the replacement of an  $f(\dot{x}_{\mu}, x_{\nu})$  dependence with an  $f(\dot{x}_{\mu}(x_{\nu}))$  dependence led to the same result. This can be seen easily, for the currents  $J_{\alpha}^{(1)\mu}$  coincide with those what we received in a simply space-time dependent field. However, the introduction of a velocity dependent gauge field provided an additional  $J_{\alpha}^{(2)\nu}$  current family that extends and coexists with the previous ones simultaneously. The extension of the arguments of the fields is in full agreement with the original general formulation of Noether's second theorem [3-5]. The simultaneous existence holds although the respective components of the two current families are not independent.

Application of Finsler geometry can be investigated by analysing the currents  $J_{\alpha}^{(2)\nu}$  where the velocity dependence presents itself.  $J_{\alpha}^{(2)\nu}$  which is a current interpreted in the velocity dependent gauge field, can be written in the form

$$J_{\alpha}^{(2)\nu}(x) = i\vec{\imath} \left[ \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu} \varphi_k)} (T_{\alpha})_{kl} \varphi_l(\dot{x}) \partial_{\mu} \dot{x}^{\nu} - C_{\alpha\beta}^{\gamma} D_{\dot{\omega},\beta}(\dot{x}) \partial_{\mu} \dot{x}^{\omega} \times F_{\gamma}^{(2)\mu\nu}(x) \right] \quad (3)$$

where  $\beth$  [gimel, the third letter of the Hebrew alphabet] denotes a general coupling constant, which can be replaced by a concrete coupling constant for each individual physical interaction, for example by  $g$  for gravity.

Writing  $F_\alpha^{2\mu\nu}$ <sup>1</sup> in the left side of (3) considering (2) and writing the covariant derivative (denoted by caret  $\hat{\partial}_\mu$ ) of  $F_\alpha^{(2)\mu\nu}$  in the form

$$\hat{\partial}_\mu F_\alpha^{(2)\mu\nu}(x) = \partial_\mu F_\alpha^{(2)\mu\nu}(x) + i\beth C_{\alpha\beta}^\gamma D_{\dot{\omega},\beta} \partial_\mu \dot{x}^\omega \times F_\gamma^{(2)\mu\nu}(x)$$

one gets

$$\hat{\partial}_\mu F_\alpha^{(2)\mu\nu}(x) = i\beth \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi_k)} (T_\alpha)_{kl} \varphi_l(\dot{x}) \partial_\mu \dot{x}^\nu \quad (4)$$

This form has the advantage that the right side of the equation depends solely on the matter fields, and all dependencies on the gauge fields are separated in the left side. The velocity dependent (that means, direction dependent) curvature tensors appear also in the left side of the equation.

## 1.2 Physical considerations

The physical meaning of the couple of conserved currents is the following.

Eq. (1) can be written in the form:

$$\partial_\mu F_\alpha^{(1)\mu\nu}(\dot{x}) = i\beth \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \varphi_k)} (T_\alpha)_{kl} \varphi_l(\dot{x}) \quad (5)$$

Relations (5) and (4) provide the equations of motion for the potential part<sup>2</sup> of the system's Lagrangian density. As mentioned in [2], it is generally the case that when (5) or (4) is satisfied, the matter-field current associated with the Lagrangian acts as the source for the gauge fields. This is a consequence of the fact that the matter-field dependent and the gauge-field dependent currents are at separate sides in each of the latter two equations.<sup>3</sup>

The covariant dependence on the velocity-space gauge field is obvious from (4), and it was shown in a similar way for (5) in [2]. The derived conserved currents make a correspondence between the matter fields and the kinetic (velocity-dependent) gauge fields. They open the way to conclude invariance between the sources of the scalar fields on the one side, and the gauge vector fields on the other.

There is easy to see that  $F_\alpha^{(1)\mu\nu}(\dot{x})$  and  $F_\alpha^{(2)\mu\nu}(x)$  transform in the same way, as isovectors, under a local transformation  $V(\dot{x}) \in G$  [1]:  $F_\alpha^{(1)\mu\nu}(\dot{x}) = V^{-1} F_\alpha^{(1)\mu\nu}(\dot{x}) V$  and  $F_\alpha^{(2)\mu\nu}(x) = V^{-1} F_\alpha^{(2)\mu\nu}(x) V$ . Notice, that the forms of  $J_\alpha^{(1)\nu}(\dot{x})$  conserved currents in the presence of velocity depending fields coincide with the form of those currents that we had obtained for space-time depending fields. With respect to this identical form, as well as to the variety of the symmetry groups that they may obey, one can replace  $\varphi(\dot{x}) \rightarrow \varphi(x)$ ,  $D(\dot{x}) \rightarrow B(x)$  and  $J_\alpha^{(1)}(\dot{x}) \rightarrow j_\alpha^{(1)}(x)$ , where  $B(x)$  are familiar physical gauge fields with symmetries, e.g.,  $U(1)$ ,  $SU(2)$ , [and  $SU(2) \times U(1)$ ],  $SU(3)$  or  $SO(3,1)$ , with the substitution of  $\beth$  by the corresponding coupling constants.  $F_\alpha^{(1)\mu\nu}(\dot{x})$  take the same forms and transform in a velocity dependent  $\mathbf{D}$  gauge field like the components of a  $j^\nu(x)$  current and isovectors  $f^{\mu\nu}(x)$  of a

<sup>1</sup>The  $F_\alpha^{(2)\mu\nu}$  fields take the general form  $F_\alpha^{(2)\mu\nu}(x) = \frac{\partial D_{\dot{\rho},\alpha} \partial_\mu \dot{x}^\rho}{\partial x_\nu} - \frac{\partial D_{\dot{\sigma},\alpha} \partial_\nu \dot{x}^\sigma}{\partial x_\mu} - i\beth C_{\alpha\beta}^\gamma D_{\dot{\rho},\beta} \partial_\mu \dot{x}^\rho D_{\dot{\sigma},\gamma} \partial_\nu \dot{x}^\sigma$ .

<sup>2</sup>I.e., which serves as the source for the gauge-fields, and consequently as the source for the characteristic charges of the given fields.

<sup>3</sup>Here the only condition assumed was that the field equations be satisfied. No restriction was imposed on the form of the Lagrangian density except that it be invariant under local gauge transformations as defined in (3).

general matter field  $\varphi(x)$  and gauge field  $\mathbf{B}$ , defined by  $f^{\mu\nu} = \partial^\nu B_\mu - \partial^\mu B_\nu - \mathfrak{I}B_\mu \times B_\nu$  in the four dimensional space-time. (This yields the information, that in a boundary situation, i.e., in the absence of relativistic accelerations, our derivation produces the same result as it was known without the assumption of a velocity dependent gauge field. We got back to the results that were known in the absence of a velocity-dependent gauge field, and that were based on calculations in an only space-time dependent gauge field. So, without employing accelerations, we derived the same conserved currents. This justifies our preliminary assumption, that handling the space-time coordinates as implicit parameters not only provides additional information but it preserves the physical relevance of the theory.)

### 1.3 First conserved quantity:

#### Conservation of the field charge ( $\daleth$ )

We denoted [1] the sources of the individual physical fields (for example, gravitational, electromagnetic, and so on) by the letter  $\daleth$  (dalet, the fourth letter of the Hebrew alphabet) and we call them field charges (for example, mass, electric charge, etc.) which have two isotopic states. The field charges form four-currents each (at least in the Standard Model). In a general case, the  $T_\gamma$  (which appear in the presented conserved currents) as introduced above, are matrix-representation operators generating the group  $G$ , with the mentioned commutation rule  $[T_\alpha, T_\beta] = iC_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma$ . They can be replaced by concrete operators of the concerned fields, according to their characteristic symmetry groups, like  $U(1)$ ,  $SU(2)$ ,  $SU(3)$  or  $SO(3,1)$ , and their combinations, and  $\mathfrak{b}$  can be substituted by the concrete coupling constants of the individual physical fields. Thus, in a general case, and with group  $G$  of an arbitrarily chosen physical field  $\mathbf{B}$ , one can write  $\varphi(x)$  and  $\mathfrak{I}$  in the equations for the currents  $J_\alpha^{(1)\mu}$  and substitute the above equations with:

$$J_\alpha^{(1)\nu}(x) = i\mathfrak{I} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \varphi_k)} (T_\alpha)_{kl} \varphi_l(x), \quad J_\alpha^{(1)\nu}(x) = \partial_\mu F_\alpha^{(1)\mu\nu}(x),$$

$$F_\alpha^{(1)\mu\nu}(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu B_{\nu,\alpha}(x))}, \quad (6)$$

and

$$\hat{\partial}_\mu F_\alpha^{(1)\mu\nu}(x) = \partial_\mu F_\alpha^{(1)\mu\nu}(x) + i\mathfrak{I} C_{\alpha\beta}^\gamma B_{\mu,\beta}(x) \times F_\gamma^{(1)\mu\nu}(x)$$

The operators of the quanta of the given physical field are determined by the generators  $\{T_\alpha\}$  of the symmetry group of the respective field. The full conserved field charge currents  $J_\alpha^{(1)\mu}$  will provide the conserved quantities of the field  $\varphi(x)$ , which the gauge field  $\mathbf{B}$  interacts with. We called these conserved quantities field charges and denoted by  $\daleth$ . (We will see in subsections 1.4 and 1.5 that  $\daleth$  appears in two isotopic states, what we call isotopi field charges.) We can get the conserved quantity by integration of the current in the usual way, applying Gauss' theorem, where the integral of the spatial components vanishes at an infinite boundary, and we get:

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathfrak{I}}{c} \int \frac{\partial L}{\partial(\partial_4 \varphi_k)} (T_\alpha)_{kl} \varphi_l(x) dV = 0 \quad (7)$$

where the integral provides the conserved field charge  $\daleth$  of the source field  $\varphi$ .

The results derived in this subsection coincide with the well known conservation laws of field theories. We treat it here in order to make it comparable with the results of the next subsection (1.4), and to demonstrate that the two conserved quantities appear simultaneously (Sec. 1.5).

#### 1.4 Second conserved quantity:

##### Conservation of the isotopic field charge spin ( $\Delta$ )

What is isotopic field charge spin (IFCS)? [1] assumed that the field charges appearing in the potential part of a Hamiltonian as the scalar sources of a matter field, and the field charges appearing in the kinetic part of a Hamiltonian, and in currents as sources of gauge fields are qualitatively different physical quantities. They are called isotopic field charges. For example, the mass of gravity and the mass of inertia are considered here, and from now on, as two, qualitatively different physical properties (although equal in their values in rest), and serve as the sources of gravitational and kinetic fields, respectively. In a similar way, the electric charges appearing in the Coulomb potential and the electric charges appearing in the currents that serve as sources of magnetic fields are also qualitatively different physical quantities. The same is assumed on the sources of other interaction fields. These twin couples of physical quantities, like isotopes of each other, are called with the common name isotopic field charges.

This means, there appear two different isotopes of a given field charge in the individual elements of a four-current. This distinction between the isotopic field charges would distort the Lorentz invariance of these currents, what is not in accordance with our physical experience. Therefore, the assumption of the distinction between the isotopic field charges must involve the assumption that they are members of a group whose elements can be transformed into each other. This symmetry among the members of an individual isotopic field charge couple counteracts the symmetry lost by the introduction of the distinction between them. This new invariance can be represented by an  $SU(2)$  group, which rotates the two isotopic states of the field charges in a gauge field, and can take two stable positions. [1] (a) proved (as cited below) that the introduced velocity dependent  $\mathbf{D}$  gauge field serves as the field where the isotopic states of the field charges are rotated, (b) introduced that the rotated property (the two stable states of the isotopic field charges) be called (by analogy) isotopic field charge spin ( $\Delta$ ), and (c) proved that the conservation of the  $\mathbf{J}^{(2)}$  currents provides the conservation of the isotopic field charge spin. So, the above cited, derived  $J_\alpha^{(2)\nu}(x)$  are the isotopic field charge spin currents, which — similar to  $J_\alpha^{(1)\mu}$  — are also conserved and yield a conservation law. The conserved quantity derived from  $J_\alpha^{(2)\nu}(x)$  is the isotopic field charge spin  $\Delta$ .

The conserved current in the kinetic field can be read from (3). The right side of (3) represents the full conserved isotopic field charge spin current, which includes the contribution of the  $\mathbf{D}$  field.<sup>4</sup>

We have introduced the  $\mathbf{D}$  field — which is shown to be responsible for the isotopic field charge spin transformation — to counteract the dependence of a  $V(\dot{x}) = e^{-ip_\alpha(\dot{x})T_\alpha}$  transformation on  $\dot{x}_\mu$ . The field equations, which are satisfied by the twelve independent components of the  $\mathbf{D}$  field, and their interaction with any field that carries isotopic field charge spin are unambiguously determined by the defined currents and covariant  $F^{(2)\mu\nu}$ -s constructed from the components of  $\mathbf{D}$ . Considering a general Lorentz- and gauge invariant Lagrangian, we obtain from the equations of motion that  $J^{(2)1,2,3}$  and  $J^{(2)4}$  are, respectively, the isotopic field charge spin current density and isotopic field charge spin ( $\Delta$ ) density of the system. The total isotopic field charge spin

$$\Delta = \frac{i}{\mathfrak{J}} \int J^{(2)4} d^3x \quad (8)$$

is independent of time and independent of Lorentz transformation.  $J^{(2)\mu}$  does not transform as a vector, while  $\Delta$  transforms as a vector under rotations in the isotopic field charge spin field.

---

<sup>4</sup>Similar attempts (like our in the velocity space) were made by [6] in the phase space (with a particular mapping from the configuration space to phase space), and they anticipated the quantization of the models.

### 1.5 Coupling of the two conserved quantities ( $\nabla$ and $\Delta$ )

The dependence of the two currents  $J_\alpha^{(1)\mu}$  and  $J_\alpha^{(2)\mu}$  on each other has physical consequences. Once, it justifies that the quantities, whose conservation they represent and which are coupled, exist simultaneously. Secondly, the coupling of a conserved quantity in a space-time dependent field — which coincides with one of our familiar physical fields — with another in a kinetic (velocity dependent, introduced in [2] and [1]) gauge field indicates that *the derived conservation verifies just the invariance between the two isotopic states of the field charges, namely between the potential  $\nabla_V$  and the kinetic  $\nabla_T$*  (where the indices  $V$  and  $T$  refer to the potential and the kinetic components of a Hamiltonian, respectively, and the two kinds of  $\nabla$  correspond to the two isotopic field charges). (Remember that  $\nabla$  can be field charges of different physical fields marked in common with  $\mathbf{B}$ , while  $\Delta$  represents a single quantity belonging to the kinetic gauge field  $\mathbf{D}$ ).

*In the presence of kinetic fields we have two conserved currents that are effective simultaneously.* The kinetic gauge field  $\mathbf{D}$  is present simultaneously with the interacting matter  $[\varphi]$  and gauge  $[\mathbf{B}]$  fields. The presence of  $\mathbf{D}$  corresponds to the property of the field charges  $\nabla$  of the individual fields that they split in two isotopic states, and analogously to the isotopic spin, we named these two states *isotopic field charge spin* (IFCS) what we denote by  $\Delta$ . The source of the isotopic field charge spin ( $\Delta$ ) is the field  $\varphi(x)$  in interaction with the kinetic gauge field  $\mathbf{D}$ .

In summary, the physical meaning of  $\Delta$  can be understood, when we specify the transformation group associated with the  $\mathbf{D}$  field, which describes the transformations of  $\nabla$  (i.e., the isotopic field charges).  $\nabla$  can take two (potential and kinetic) isotopic states  $\nabla_V$  and  $\nabla_T$  in a simple unitary abstract space. Their symmetry group is  $SU(2)$ , that can be represented by  $2 \times 2$   $T_\alpha$  matrices. There are three independent  $T_\alpha$  that may transform into each other, following the rule  $[T_\alpha, T_\beta] = iC_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma$ , where the structure constants can take the values  $0, \pm 1$ . Let  $T_1$  and  $T_2$  be those which do not commute with  $T_3$ ; they generate transformations that mix the different values of  $T_3$ , while this “third” component’s eigenvalues represent the members of a  $\Delta$  doublet. For the isotopic field charges compose a  $\nabla$  doublet of  $\nabla_V$  and  $\nabla_T$ , the field’s wave function can be written as

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_T \\ \psi_V \end{pmatrix}. \quad (9)$$

(9) is the wave function for a single particle which may be in the “potential state”, with amplitude  $\psi_V$ , or in the “kinetic state”, with amplitude  $\psi_T$ .  $\psi$  in (9) represents a mixture of the potential and kinetic states of the  $\nabla$ , and there are  $T_\alpha$  that govern the mixing of the components  $\psi_V$  and  $\psi_T$  in the transformation.  $T_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) are representations of operators which can be taken as the three components of the isotopic field charge spin,  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  that follow the same (non-Abelian) commutation rules as do the  $T_\alpha$  matrices,  $[\Delta_1, \Delta_2] = i\Delta_3$ , etc. These operators represent the charges of the isotopic field charge spin space, and  $\psi$  are the fields on which the operators of the gauge fields act.

The quanta of the  $\mathbf{D}$  field should carry isotopic field charge spin  $\Delta$ . The  $\Delta$  doublet, as a conserved quantity, is related to the two isotopic states of field charges ( $\nabla$ ), and the associated operators ( $\Delta_i$ ) induce transitions from one member of the doublet to the other.

### 1.6 Interpretation of the isotopic field charge spin conservation

Invariance between  $\nabla_V$  and  $\nabla_T$  means that they can substitute for each other arbitrarily in the interaction between field charges of any given fundamental physical interaction. They appear at a probability between  $[0, 1]$  in a mixture of states in the wave function

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_T \\ \psi_V \end{pmatrix}$$

so that the Hamiltonian of a *single particle* oscillates between  $V$  and  $T$ , while the Hamiltonian of a *composite system* is a mixture of the oscillating components of the particles that constitute the system. The individual particles in a *two-particle system* are either in the  $V$  or in the  $T$  state respectively, and switch between the two roles permanently; while the observable value of  $H$  is the expected value of the mixture of the actual states of the two, always opposite state particles. In the case of mechanics this means that the mass of any physical object is a mixture of unit masses of gravity and unit masses of inertia that oscillate between the two states each. In gravitational interaction between two unit masses, one of them is in gravitational state, and the other in kinetic state. They swap their roles permanently by the exchange of the quantum of the  $\Delta$  field.

The invariance between  $\mathcal{T}_V$  and  $\mathcal{T}_T$  (what is ensured by the conservation of  $\Delta$ ), and their ability to swap means also that they can restore the symmetry in the physical equations which was lost when we replaced the general  $\mathcal{T}$  (namely mass  $m$ , electric charge  $q$ , ... etc.) by their isotopes  $\mathcal{T}_V$  and  $\mathcal{T}_T$ .<sup>5</sup>

## 2 Finsler geometry in the presence of isotopic field charges

Let us specify (5) for the gravitational field [9]. The right side of the equation contains the scalar field that serves for the source of the gravitational field. The  $\mathcal{J}$  can be replaced by the gravitational coupling constant  $g$ . As we noticed, the dependence on the gauge fields is on the left side of the equation (5).  $F_\alpha^{(1)\mu\nu}(\dot{x})$  must satisfy the

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}g^{k\sigma}F_{\lambda\sigma}g^{\lambda\rho}F_{k\rho}$$

identity for the energy-momentum tensor  $T_{\mu\nu}$ . (In order to bring this form in compliance with the indices in (5), one should raise the indices by multiplying with the metric tensor  $g_{\beta\gamma}$  in the right side.) This energy-momentum tensor  $T_{\mu\nu}$  can be expressed by the way of the Einstein equation

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G_N}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) \quad (10)$$

where  $R_{\mu\nu}$  is the Ricci tensor defined by the help of the derivatives of the metric tensor  $g_{\mu\nu}$ ,  $R$  is the Ricci scalar formed from the Ricci tensor (Riemann curvature) and the metric tensor, and  $\Lambda$  is a constant of Nature, as well as  $G_N$  the constant of Newton.

The metric tensor  $g_{\mu\nu}$  and its derivatives depend on the localisation of the given point in the space-time in the General Theory of Relativity (GTR), and are subject of Riemann geometry. In the presence of a kinetic field, that means, isotopic mass field  $\mathbf{D}$  (mass being the field-charge of the gravitational field), however, the curvature depends also on velocity. (Whose velocity? On the actual inertial velocity of a test unit-mass placed in a given space-time point in the reference frame fixed to the source of a scalar gravitational field  $\varphi$  which appears on the right side of (5).) The  $g_{\mu\nu}$  metric tensor, and consequently the affine connection field and the curvature tensor formed from its derivatives, depend on space-time and velocity co-ordinates. With the appearance of the dependence on the velocity vector, the curvature becomes dependent on its direction in each space-time point. The direction (additional parameter) attributed to each space-time point is defined by the orientation of the velocity of a test unit-mass in the given space-time point,  $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ . The curvature can no more follow a "simple" Riemann geometry, it follows a Finsler geometry whose metric is defined by the dependence of  $g_{\mu\nu}$  on  $(x_\sigma$  and)  $\dot{x}_\rho$ .

<sup>5</sup>Consequences of the application of effective field theories were analysed e.g., in philosophy by [7] and in physics by [8].

Of course, the space-time plus four-velocity dependence of the metric tensor  $g_{\mu\nu}$  affects its all derivatives, including the formation of the affine connection field (from first derivatives) and the Riemann curvature (or Ricci tensor, second, covariant derivative)

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} [\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}] \quad \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = g^{\lambda\rho} \Gamma_{\rho\mu\nu}$$

and

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma - \Gamma_{\sigma\lambda}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma.$$

The solution of the Einstein equation in velocity dependent field with Finsler geometry must necessarily lead to solutions different from that of Schwarzschild.

### 3 The role of the isotopic field charge spin conservation

The role of equation (4) is to retain the invariance between the two isotopic forms, namely gravitational and inertial, of masses. The importance of this is to save the covariance of our equations. Since there appear two different kinds of (isotopic) masses in the energy-momentum “four-vector” (in the fourth column of  $T_{\mu\nu}$ ), it does no more transform as a vector, and Lorentz transformation can no more guarantee alone the covariance of our equations.

As a consequence of the distinction between  $m_V$  and  $m_T$ , as well as the association of the energy content with the mass  $m_V$  and the components of the momentum with  $m_T$ , we lose also the symmetry of the  $T_{\mu\nu}$  energy-momentum tensor. To retain symmetry in Einstein’s field equations we must require again the invariant transformation of  $m_V$  and  $m_T$  into each other in an appropriate gauge field, namely in  $\mathbf{D}$ . We refer to [10] who foresaw the possible generalisation of YM type gauge invariance in general relativity “in close analogy with the curvature tensor”. If we consider the energy-momentum tensor (in which both isotopic states of mass appear) as the source of the gravitational field, then — in the usual way — the scalar and the vector potential can be separated. See,  $m_4$  in  $T_{44}$  does not compose a fourth component of a four-vector in the classical theory of gravitation where there is a single scalar mass. If we consider now  $m_4 = m_V$ , the three components of the kinetic mass  $m_T$  can compose a three-vector, however  $T_{\mu 4}$  will not form a four vector either.

To maintain the Lorentz invariance of our physical equations in the gravitational field, we must demand to restore the invariance of  $\begin{pmatrix} \vec{m}_T \\ m_V \end{pmatrix}$  under an *additional transformation* that should *counteract the loss of symmetry caused by the introduction of two isotopic states of mass*. We discussed that transformation in section 1. Further, in the case of gravitation the relation of the scalar and the vector fields are not linear even if we have not made distinction between the potential and kinetic masses. The non-linearity is coded in the relation of the tensors [11] at the right side of the Einstein equation (10) (in units  $c = 1$ ), or we can write  $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$  where the Einstein tensor is defined as  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$  whose covariant derivative must vanish.

Since our  $T_{\mu\nu}$  tensor has already lost its symmetry, we can take  $\Lambda g_{\mu\nu}$  into account within a modified  $T'_{\mu\nu}$  — handling the gravitational and kinetic masses in it together with the dark energy — and we get the following formally symmetric equation:  $G_{\mu\nu} = 8\pi G T'_{\mu\nu}$ .

The symmetry of the energy-momentum tensor can be saved by the invariant gauge transformation of the IFCS. The most important analogy is between the behaviour of the potential and the kinetic field charges of the individual fields that makes probable to postulate a unique transformation to assure their invariance (cf., section 1).<sup>6</sup> So the invariance under the Lorentz

<sup>6</sup>As [12] stated, “In contrast to the symmetry or *invariance* requirement in STR, the principle in GTR is



transformation combined with the invariance of the isotopic field charge spin field provide together the covariance of the gravitational equation. However, this combined transformation should now be taken into consideration in a field with a metric depending on all space-time and velocity co-ordinates, following a Finsler geometry.

## Appendix

### Comparison of the invariance properties in classical GTR and in the IFCS model.

In classical physics, conservation laws — as consequences of the invariance properties of the investigated systems — can be obtained by integration of the Euler-Lagrange equations of motion of classical mechanical point systems. According to Hamilton's principle the variation of the action integral of the system's Lagrangian must be zero. These conservation laws include the conservation of the energy — invariance under translation in time. That conserved energy is equivalent with a well determined amount of mass  $E = mc^2$ , where  $m = m_V$  is gravitational mass, and this conservation law does not provide any information on the quantity of kinetic mass.

In general relativistic treatment, the source of the gravitational field is the  $T_{\mu\nu}$  momentum-energy stress tensor, which includes the sources of inertial and gravitational effects as well. Applying the same variational method and integration for the Einstein equation (using  $[+ + + -]$  signature) we derive the conservation of the  $-T_{44}$  element of the  $T_{\mu\nu}$  momentum-energy stress tensor.  $-T_{44}$  is energy density of the gravitational field, and is proportional to a certain amount of mass. According to invariance under translations in the Minkowski space (Lorentz transformation) the conserved current can be written in the form

$$\partial_\mu T_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \left( L\delta_{\mu\nu} - \partial_\nu \varphi_r \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi_r} \right) = 0$$

where  $\varphi_r$  denote functions on which (and their first derivatives) the Lagrangian may depend.

The Einstein equation

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

provides the elements of  $T_{\mu\nu}$  in which — according to the left side — the contribution of the kinetic and potential components are mixed by the  $g_{\mu\nu}$  curvature tensor. Applying the usual integration method and Gauss' theorem, we get the fourth column of the momentum-energy stress tensor for a conserved quantity, what is no else than the four-momentum density, which behaves like a four-vector and whose individual components are

$$P_\nu = \frac{1}{ic} \int T_{4\nu} dV$$

or separated

$$P_k = \frac{1}{ic} \int T_{4k} dV = \frac{1}{ic} \int \partial_k \varphi_i \frac{\partial L}{\partial \partial_4 \varphi_i} dV \quad (k = 1, 2, 3);$$

---

most often presented as strictly speaking a *covariance* requirement.” Gauge theories behave like GTR, at least in this respect. General covariance “is not tied to any geometrical regularity of the underlying spacetime, but rather the form invariance (covariance) of laws under arbitrary smooth coordinate transformations” [12, p. 34]. [13] found that the more general geometry resulting from admitting local changes called gauges described not only gravity but also electromagnetism. He showed also that the conservation laws of Noether follow in two distinct ways in theories with local symmetries. This led to the Bianchi identities, which hold between the coupled equations of motion, and which are due to the local gauge invariance of action. Later [14] demonstrated that the conservation of the electric charge followed from the local gauge invariance in the same way as does energy-momentum conservation from co-ordinate invariance in GTR.

$$H = icP_4 = - \int T_{44}dV = \int \left( \partial_4 \varphi_i \frac{\partial L}{\partial \partial_4 \varphi_i} - L \right) dV$$

what are considered the conserved total momentum and energy of the field respectively.

If we take into account the qualitative difference between the masses  $m_T$  (what appear in the components of  $P_k$ ) and  $m_V$  (what appears in  $H$ ) that are mixed by the curvature tensor  $g_{\mu\nu}$  in the elements of  $T_{\mu\nu}$ , this consideration will involve the mixed  $m_T$  and  $m_V$  dependence of the Lagrangians as well. As a consequence,  $P_k$  and  $H$  cannot be considered separately, and independently of each other, conserved quantities. (We do not investigate here the ambiguous interpretations of invariant mass.) The covariance of the gravitational equation can no more be secured by the Lorentz invariance alone. The lost symmetry of nature can be restored only with the shown invariance between the isotopic mass states (as field charges of the gravitational field, conservation of  $\Delta$ ) which are rotated in an isotopic field charge spin gauge field. The covariance of the gravitational equation is a result of invariance under the combination of the Lorentz transformation and rotation in the isotopic field charge field. In the latter case the four components of  $(P_k[m_T], H[m_V])$  transform as isovectors. Due to the IFCS gauge transformation, the transformation of the field components can be described in a (space-time +) velocity dependent gauge field, whose metric, consequently, depends also on the velocity components, and is subject of a Finsler geometry.

## References

- [1] Darvas G. The Isotopic Field Charge Spin Assumption // *International Journal of Theoretical Physics*, 2011,  
<http://www.springerlink.com/content/g28q43v2112721r1/fulltext.pdf>
- [2] Darvas G. Conserved Noether currents, Utiyama's theory of invariant variation, and velocity dependence in local gauge invariance // *Concepts of Physics*, VI, 1, 2009, pp. 3–16.
- [3] Noether E.A. Invariante Variationsprobleme // *Nachrichten von der Königlischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen: Mathematisch-physikalische Klasse*, 1918, pp. 235–257.
- [4] Utiyama R. Invariant theoretical interpretation of interaction // *Phys. Rev.*, 101 (5), 1956, pp. 1597–1607.
- [5] Utiyama R. Theory of invariant variation and the generalised canonical dynamics // *Progr. of Theor. Phys. Suppl.*, 9, 1959, pp. 19–44.
- [6] Pons J.M., Salisbury D.C., Shepley L.C. Gauge transformations in Einstein-Yang-Mills theories // (submitted to *J. Math. Phys*), 1999, *arXiv:gr-qc/9912086 v1*.
- [7] Castellani E. Reductionism, emergence and effective field theories // *arXiv: physics/0101039 v1*, 2001, 18 p.
- [8] Weinberg S. *The Quantum Theory of Fields, Vol. II, Modern Applications*, Chap. 15: Non-Abelian gauge theories, Cambridge, Cambridge University Press, 1996.
- [9] Darvas G. GTR and the Isotopic Field Charge Spin Assumption // paper presented to the *Physical Interpretations of Relativity Theory -11* conference, held in Moscow, 4-7 July, 2011, 10 p.
- [10] Mills R. Gauge fields // *American Journal of Physics*, 57 (6), 1989, pp. 493–507.
- [11] van Hooft Gerard 't Introduction to General Relativity, Princeton, Rinton Press Inc., 2002.
- [12] Martin C.A. On continuous symmetries and the foundations of modern physics, in Brading, K. and Castellani, E., editors, *Symmetries in Physics: Philosophical Reflections*, 2003, pp. 29–60, Cambridge, Cambridge University Press, 445 p.

- [13] Weyl H. Gravitation und Elektrizität // *Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften*, 1918, pp. 465–480.
- [14] Weyl H. Electron and gravitation, (Engl. transl. in: O’Raifeartaigh: *The Dawning of Gauge Theory*, 1997, Princeton Univ. Press), 1929.

## ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ ОТО В ПРИСУТСТВИИ ЗАВИСЯЩИХ ОТ СКОРОСТИ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Юрий Дарваш

*Симметрион и Институт науковедения Венгерской академии наук, Будапешт, Венгрия*  
darvasg@iif.hu

Поля в окрестности источников задают искривленную геометрию. Зависящие от скорости явления в этих полях требуют для своего описания тензор кривизны, элементы которого зависят от величины и направления скорости движения источника взаимодействующих калибровочных полей в системе отсчета поля материи. Эта двойная зависимость кривизны от пространства-времени и скорости требует для своего описания финслерову геометрию.

**Ключевые слова:** фундаментальные взаимодействия, заряды поля, инвариантность, ковариантность, изотопический спин зарядов поля, сохранение, симметрия, калибровочный бозон, поля зависящие от скорости, финслеров тензор кривизны, модифицированное уравнение Эйнштейна.

# MOCANU'S PARADOX AND QUATERNIONIC TRANSFORMATION AS THE ANSWER

Mushfiq Ahmad

Rajshahi University, Rajshahi, Bangladesh

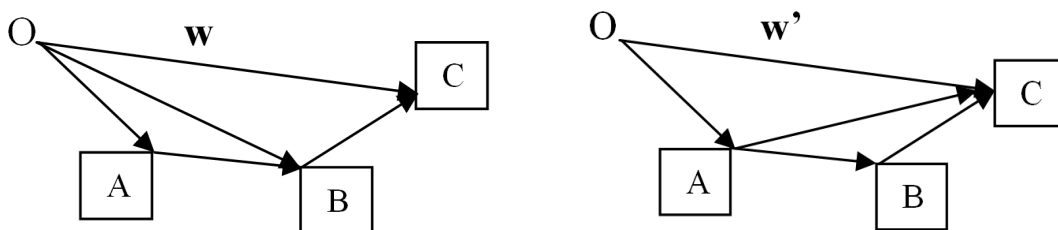
mushfiqahmad@gmail.com

When two non colinear velocities are added following Lorentz transformation, a Wigner rotation comes into play, and reciprocity requirement is not fulfilled without this rotation: the velocity of B from A is not the negative of the velocity of A from B. Both Mocanu and Ungar have attributed the paradox (failure of reciprocity principle) to both non-commutativity and non-associativity of Einstein' law of addition of velocities. To resolve this problem, Ungar has proposed a "Weak Associative Law" ( a set of corrections) to make Einstein' law of addition commutative and associative. We have shown that the paradox can be resolved without requiring commutativity. We are proposing a hypercomplex Pauli quaternion law of composition of relativistic velocities, which fulfills physical requirements. The proposed hypercomplex law compares well with Einstein's law of addition of velocities and fulfills all relativistic requirements.

**Key Words:** Einstein's Law, composition of velocities, associativity, non-associativity, weak associative, gyro-associative, Thomas precession, Pauli matrices, Pauli quaternion, quaternionic composition.

## 1 Introduction

Einstein's law of composition of velocities «is neither commutative nor associative». Ungar, however, finds it «repairable» by gyroautomorphisms called Thomas gyrations» [1]. The process of repairing involves a series of arbitrary prescriptions and one finally achieves (in case of 3 velocities) 2 laws of addition; *right weak associative law* and *left weak associative law*. In case of more initial velocities, one will have to choose from a greater number of distinct final velocities. If A moves with respect to O (with velocity  $\mathbf{a}$ ), B moves with respect to A (with velocity  $\mathbf{b}$ ) and C with respect to B (with velocity  $\mathbf{c}$ ), then C moves with respect to O with a unique velocity.



In the diagrams above, according to Einstein's law of composition,  $\mathbf{w} \neq \mathbf{w}'$ , corresponding to [we have adopted Ungar's symbol  $\oplus$  to represent Einstein's addition]

$$(\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \oplus \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \oplus (\mathbf{b} \oplus \mathbf{c}) \quad (1.1)$$

where

$$\mathbf{w}_L = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{u}/\lambda_v + \{1 - 1/\lambda_v\} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v}}{1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \quad (1.2)$$

Or in a slightly different form

$$\mathbf{w}_L = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{u}}{1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}/c^2} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\gamma_v}{\gamma_v + 1} \cdot \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u})}{1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \quad (1.3)$$

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (1.4)$$

Thomas gyration prescriptions tell us how to twist  $\mathbf{w}$  to make it coincide with  $\mathbf{w}'$  or, alternatively, how to twist  $\mathbf{w}'$  to make it coincide with  $\mathbf{w}$ . We have nothing to guide us which of the two velocities ( $\mathbf{w}$  or  $\mathbf{w}'$ ) we should start with.

Relativistic addition of velocities (in 3 dimensions) brings in Wignrt-Thomas rotation, without which the relativistic addition of velocities becomes frames dependent, as shown [2] below in eq. (1.6)

Using (1.2)

$$\mathbf{v} \oplus \mathbf{u} \neq -\{(-\mathbf{u}) \oplus (-\mathbf{v})\} \quad (1.5)$$

Inequality (1.5) is called Mocanu paradox. Both Mocanu [3] and Ungar [4] have attributed Mocanu's paradox (failure of reciprocity principle) to both non-commutativity and non-associativity of Einstein' law of addition of velocities. Ungar's gyrovector theory proposes corrections to make the law of addition both commutative and associative. We shall show below that commutativity is not a requirement.

Observer  $O_1$  observes a body A moving with velocity  $\mathbf{u}$  and a body B moving with velocity  $\mathbf{v}$ . According to  $O_1$  the relative velocity is  $\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{v})$ . A second observer  $O_2$  is moving with velocity  $\mathbf{y}$  with respect to  $O_1$ . Therefore, according to  $O_2$  the velocities are  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} \oplus (-\mathbf{y})$  and  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} \oplus (-\mathbf{y})$  and the relative velocity is  $\mathbf{u}' \oplus (-\mathbf{v}')$

$$\mathbf{u}' \oplus (-\mathbf{v}') = \{\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{y})\} \oplus -\{\mathbf{v} \oplus (-\mathbf{y})\} \neq \mathbf{u} \oplus (-\mathbf{v}) \quad (1.6)$$

Wigner rotation was needed to explain electron spin. Dirac's theory explains electron spin without invoking Wigner rotation. Therefore, it is desirable to have an associative law of addition (without Wigner rotation) os that we can replace inequalities in (1.1) and (1.6) by corresponding equalities. We require

$$(\mathbf{a} \oplus_Q \mathbf{b}) \oplus_Q \mathbf{c} = \mathbf{a} \oplus_Q (\mathbf{b} \oplus_Q \mathbf{c}) \quad (1.7)$$

where  $\oplus_Q$  (Q for quaternion) represents an associative law of addition.

## 2 Associative Addition and Pauli Quaternion

We consider relativistic velocities which fulfill Einstein's condition

$$|\mathbf{u}| \leq c \quad (2.1)$$

For convenience we form functions

$$\lambda_u \{1 + \mathbf{u}/c\} \quad (2.2)$$

Product  $\times_L$  of these functions gives Einstein composition of velocities

$$\lambda_u \{1 + \mathbf{u}/c\} \times_L \lambda_v \{1 + \mathbf{v}/c\} = \lambda_w \{1 + (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})/c\} \quad (2.3)$$

Corresponding to (2.3) we shall look an for (2.4) below where  $\times_L$  of (2.3) has been replaced by  $\times_Q$  (Q for quaternion)

$$\lambda_u \{1 + \mathbf{u}/c\} \times_Q \lambda_v \{1 + \mathbf{v}/c\} = \lambda_w \{1 + \mathbf{w}/c\} \quad (2.4)$$

Where  $\mathbf{w}$  is the associative relativistic sum of velocities  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$ (without Wigner rotation). We have to find  $\times_Q$ .

**Postulate:** We postulate that the 0 + 3 [scalar+Cartesian [5]] vectors  $(a + \mathbf{u})$  etc. of (2.2) are Pauli Quaternion [6] 4-vectors.

$$(a + \mathbf{u}) \Rightarrow (a\sigma_0 + \mathbf{u} \cdot \sigma) = a\sigma_0 + u_x\sigma_x + u_y\sigma_y + u_z\sigma_z \quad (2.5)$$

Where  $\sigma$ 's have the following properties

$$-\sigma_y\sigma_x = \sigma_x\sigma_y = i\sigma_z \quad \text{with cyclic permutations} \quad (2.6)$$

$$\sigma_0\sigma_x = \sigma_x\sigma_0 = \sigma_x \quad \text{and} \quad \sigma_x\sigma_x = 1 \quad \text{and also for } y \text{ and } z \text{ and } 0 \quad (2.7)$$

We replace (2.4) by

$$\lambda_u \{\sigma_0 + \mathbf{u} \cdot \sigma/c\} \lambda_v \{\sigma_0 + \mathbf{v} \cdot \sigma/c\} = \lambda_w \{\sigma_0 + \mathbf{w} \cdot \sigma/c\} \quad (2.8)$$

Using (2.6) -- (2.7) we have

$$\lambda_w \{\sigma_0 + \mathbf{w} \cdot \sigma/c\} = \lambda_u \lambda_v (1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2) \left\{ \sigma_0 + \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v} + i\mathbf{u} \times \mathbf{v}/c}{1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \right) \cdot \sigma/c \right\} \quad (2.9)$$

Comparison between (2.8) and (2.9) gives, using  $\oplus_Q$  of (1.7)

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus_Q \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v} + i\mathbf{u} \times \mathbf{v}/c}{1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \quad (2.10)$$

The  $\sigma$ 's permit the following matrix representations

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Using (2.10) we can replace the inequality (1.5) by the equality below

$$\mathbf{v} \oplus_Q \mathbf{u} = - \{(-\mathbf{u}) \oplus_Q (-\mathbf{v})\} \quad (2.12)$$

### 3 Comparison between Einstein's Law and Quaternionic Law

They have the same magnitude

$$|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}| = |\mathbf{u} \oplus_Q \mathbf{v}| \quad (3.1)$$

The real part of  $\mathbf{u} \oplus_Q \mathbf{v}$  and whole of  $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$  are confined to the plane of  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$ . Both the sums are rotated with respect to the direction of the Euclidian sum  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ . The imaginary component of  $\mathbf{u} \oplus_Q \mathbf{v}$  is responsible for the rotation. The axis of rotation is orthogonal to the plane of  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$ .

In the limit  $c \rightarrow \infty$  both the sums go to the corresponding Galilean sum  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ . We want to see below how they rotate in the other (non physical) extreme  $c \rightarrow 0$ . In  $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$  the dominating term is  $\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\gamma_u}{\gamma_u + 1} \cdot \frac{\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2}$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} &\rightarrow \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\gamma_u}{\gamma_u + 1} \cdot \frac{\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\sqrt{1 + (\pm iu/c)^2}}{\sqrt{1 - (u/c)^2} + 1 - (u/c)^2} \frac{\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \rightarrow \\ &-(c/u)^2 (\pm iu/c) \frac{\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} \rightarrow \mp ic \frac{\text{Sin}\theta}{\text{Cos}\theta} \rightarrow \mp ic \cdot \tan \theta \cdot \mathbf{m} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Where  $\theta$  is the angle between  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$  and  $\mathbf{m}$  is a unit vector in the plane of  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$  and orthogonal to  $\mathbf{u}$ . Similarly

$$\mathbf{u} \oplus_Q \mathbf{v} \rightarrow \frac{i\mathbf{u} \times \mathbf{v}/c}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \rightarrow ic \tan \theta \mathbf{n} \quad (3.3)$$

Where  $\mathbf{n}$  is a unit vector orthogonal to the plane of  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$ . Therefore, in this end both the rotations are imaginary, have the same magnitude but are in mutually orthogonal directions.

From (3.1)

$$|\mathbf{u} \oplus_Q \mathbf{v}| \leq c \quad \text{if} \quad |\mathbf{u}| \leq c, \quad |\mathbf{v}| \leq c \quad (3.4)$$

Therefore, quaternionic sum (2.10) fulfills Einstein's postulate.

## 4 Conclusion

Using quaternionic transformation (2.10), we have been able to resolve the paradox (1.5), and reciprocity requirement is fulfilled (2.12). Quaternionic transformation, we are proposing, is relativistic and fulfills Einstein's postulate as shown by (3.4).

## References

- [1] Ungar A.A. Beyond the Einstein Addition Law and its Gyroscopic Thomas Precession. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [2] Ahmad M., Alam M.S. Relativistic requirement and comparison between reciprocal symmetric transformation and Lorentz transformation // *Physics Essays*, 22(2), Vol. 22, 2009, pp. 164–167.
- [3] Mocanu C. On the relativistic velocity composition paradox and the Thomas rotation // *Foundation of Physics Letters*, 5(5), Vol. 5, 1992, pp. 443–456.
- [4] Ungar A.A. The relativistic velocity composition paradox and the Thomas rotation // *Foundations of Physics*, 19(11), Vol. 19, 1989, pp. 1385–1396.
- [5] Alam M.S., Ahsan M.H., Ahmad M. Mathematical tools of mixed number algebra // *Journal of the National Science Foundation of Sri Lanka*, 33(1), Vol. 33, 2005, pp. 43–49.
- [6] Rastall P. Quaternions in Relativity. // *Reviews of Modern Physics*, 36(3), Vol. 36, 1964, pp. 820–832.

## ПАРАДОКС МОКАНУ И КВАТЕРНИОННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КАК ОТВЕТ

Мушфик Ахмед

*Раджшахийский университет, Раджшахи, Бангладеш*

mushfiqahmad@gmail.com

Когда две неколлинеарные скорости складываются согласно преобразованию Лоренца появляется вращение Вигнера без которого требование взаимности не выполняется: скорость от В к А не есть скорость от А к В с обратным знаком. Мокану и Унгар связали этот парадокс (нарушение принципа взаимности) с некоммутативностью и неассоциативностью энштейновского закона сложения скоростей. Чтобы решить эту проблему Унгар предложил «слабый закон ассоциативности» (набор поправок), делающий энштейновский закон сложения коммутативным и ассоциативным. В настоящей работе мы показали, что этот парадокс может быть разрешен без требования коммутативности. Нами предложен гиперкомплексный кватернионный закон сложения относительных скоростей Паули, который отвечает всем физическим требованиям. Предложенный гиперкомплексный закон находится в хорошем соответствии с законом сложения скоростей Эйнштейна и удовлетворяет всем релятивистским требованиям.

**Ключевые слова:** закон Эйнштейна, сложение скоростей, ассоциативность, неассоциативность, слабая ассоциативность, гироссоциативность, прецессия Томаса, матрицы Паули, кватернион Паули, кватернионное сложение.



# N-КОМПЛЕКСНАЯ АЛГЕБРА И ИЗОТРОПНЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ И ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

А.В. Горюнов

Университет Туран-Астана, Астана, Казахстан

avgor@hotmail.ru

Предложен вариант системы гиперкомплексных чисел, названных N-комплексными числами. В рамках этой системы введена новая концепция бикомплексных чисел и подробно разработана алгебраическая составляющая бикомплексного исчисления. Элементы алгебры трикомплексных и тетракомплексных чисел изложены кратко, на уровне развития бикомплексных понятий и обозначений. Установлена и исследована взаимосвязь элементов бикомплексного пространства с элементами псевдоевклидова 4-пространства. Показано, что все основные изотропные (светоподобные) алгебраические соотношения специальной теории относительности и электродинамики могут быть получены как прямое следствие свойств бикомплексных чисел.

**Ключевые слова:** гиперкомплексные числа, N-комплексные числа, бикомплексные числа, N-комплексная алгебра, бикомплексная алгебра, СТО, электродинамика.

## Введение

Понятие *числа* является наиболее фундаментальным понятием математики, а развитие и расширение этого базового понятия и развитие самой математики неразрывно связаны. Отметим, что каждое расширение понятия числа происходило постепенно, на протяжении десятилетий, а то и столетий. Например отрицательные, а впоследствии и мнимые числа снова и снова появлялись при вычислениях, зачастую помимо и даже против воли того или другого математика, и лишь по мере того, как обнаруживалась польза от их употребления, они получали всё более и более широкое распространение [1].

После “заполнения” действительной числовой оси (целые, рациональные, иррациональные, отрицательные числа), были открыты мнимые и комплексные числа, которые обрели геометрическое воплощение в виде радиус-векторов комплексной плоскости, включающей в себя и ось действительных чисел. Тем самым, множество действительных чисел ( $x$ ) оказалось подмножеством чисел комплексных ( $z = x + iy$ ). При этом алгебра комплексных чисел ( $z$ ) стала рассматриваться как двухмерная  $(x, y)$  алгебра над полем действительных чисел. Итог “самопроизвольного”, внутренне предопределённого развития понятия числа подводит классическая теорема Г. Фробениуса. Она утверждает, что существуют только две конечномерные алгебры над полем действительных чисел, в которых умножение коммутативно, ассоциативно и нет делителей нуля, — это само поле действительных чисел  $R$  и поле комплексных чисел  $C$  [2].

По завершении “эпохи открытий” новых расширений понятия числа наступил период их искусственного построения. Мотивация таких построений была уже не столько внутренне математической, сколько внешней, физической и имела целью построение “числового аппарата” для описания процессов в реальном трёхмерном пространстве или в четырёхмерном пространстве-времени. Математически эта процедура выглядела как отказ от одного (или нескольких) из условий теоремы Фробениуса — коммутативности, ассоциативности или отсутствия делителей нуля. Исторически первыми на пути построения алгебр гиперкомплексных (размерности  $n > 2$ ) чисел были четырёхмерные кватернионы Гамильтона (1843 г.) и восьмимерные числа Кэли (1845 г.). В этих алгебрах делители нуля

отсутствуют, однако произведение кватернионов не коммутативно, а чисел Кэли — ещё и не ассоциативно. Вторая часть теоремы Фробениуса утверждает, что этим (с точностью до изоморфизма) конечномерные действительные альтернативные алгебры без делителей нуля и исчерпываются (то есть, их размерность может принимать лишь значения 1, 2, 4 или 8) [1, 2]. Отметим, что указанная последовательность алгебр может рассматриваться как результат так называемой “процедуры удвоения Кэли – Диксона”, когда сложное число последующего уровня получают объединением двух чисел предыдущего уровня посредством новой “единицы”, наделяемой нужными свойствами умножения [3].

Гиперкомплексные числа нашли физическое применение, в частности при изложении электродинамики Дж. К. Максвелла (1860-е гг.) и при описании пространства-времени специальной теории относительности А. Эйнштейна (1905 г.) Г. Минковским (1907-08 гг.). Например, Ф. Клейн [1] демонстрирует применимость кватернионов для получения преобразований Лоренца, указывая, что сам Минковский использует в своих работах символику чисел Кэли, позволяющую наряду с преобразованиями Лоренца получить инварианты группы Лоренца. Примечательно, что для описания пространства-времени в действительную часть кватерниона потребовалось ввести коэффициент  $\sqrt{-1}$ , отличный от кватернионных единиц  $i, j, k$ . В современной физике такая конструкция описывается либо через 4-векторы  $(it, x, y, z)$ , имеющие мнимую координату [4], либо через действительные, ковариантные и контравариантные 4-векторы  $(t, x, y, z)$  и  $(t, -x, -y, -z)$  [4, 5]. Сами гиперкомплексные числа при этом вообще не упоминаются. Аналогично обстоит дело и с электродинамикой, в изложении которой теперь присутствуют лишь “отдельные составляющие” кватернионного исчисления, называемые современным языком скалярным и векторным произведением 3-векторов. Работы, как с традиционными, так и с новыми применениями кватернионов Гамильтона и октав Кэли продолжают появляться до сих пор. Хотя, на сегодняшний день интерес к этим гиперкомплексным числам имеет преимущественно научно-исторический характер. Конструктивное же внимание переместилось на числовые системы и конечномерные алгебры с делителями нуля.

Примером двумерных чисел (не совпадающих с обычными комплексными) являются гиперболические числа, называемые также двойными или 2-комплексными (twocomplex) числами [3, 6, 7, 8, 9]. В работах [6] и [8] эти числа представлены квадратными матрицами 2-го порядка. В [6] рассмотрено их обобщение путём построения матриц от 3-го до 6-го порядка, и изложены основные элементы теории аналитических функций таких  $n$ -мерных ( $n = 2, 3, \dots, 6$ ) “комплексных” переменных. В [8] дана геометрическая интерпретация 2- и 3-комплексных чисел, которая применена для матричного представления кристаллографических групп. В [9] гиперболические и комплексные числа рассмотрены с общих позиций — на основе соответствующих формул Эйлера, после чего построено обобщение чисел и полученных тригонометрических соотношений на размерности  $n > 2$ . В [7] гиперболические и комплексные числа представлены как частные случаи четырёхмерных бикомплексных чисел, изложению алгебраических свойств которых статья фактически и посвящена. Важно подчеркнуть, что в разных работах четырёхмерные числа (например, бикомплексные [7] и 4-комплексные [6]) и соответствующие им четырёхмерные алгебры отнюдь не совпадают. Отметим также, что терминология для четырёхмерных чисел ещё более разнообразна, чем для двумерных чисел. Так, кроме уже упоминавшихся (кватернионы, бикомплексные и 4-комплексные числа), встречаются названия: четырехкомпонентные числа, квадрачисла, скалярные кватернионы, а также специальные символьные обозначения. Примечательно, что упомянутые термины *bicomplex* и *fourcomplex* — оба относятся к четырёхмерным числам. А, например, скалярные кватернионы [10] на уровне базисных единиц практически совпадают с бикомплексными числами [7], но существенно отличаются от кватернионов Гамильтона. В широком смысле гиперкомплексными называют любые числа, размерность которых  $n > 2$  [2]. Для сложных чисел применяют также

название “поличисла”. (См. например, программную публикацию [11] и вводимую там терминологию).

Даже из этого, весьма краткого и неполного обзора следует, что у разных авторов математические подходы, цели и методы отличаются большим разнообразием. Столь же разнообразны типы конструируемых числовых систем, уровень их обобщённости, вводимая терминология и получаемые результаты. В ряде работ особо отмечена взаимосвязь систем гиперкомплексных чисел с обычными комплексными числами. Однако, на наш взгляд, ни одна из этих систем пока не оказалась столь же значимой в математическом или прикладном отношении, как сами комплексные числа.

Целью настоящей работы является: построение наиболее простого и наглядного варианта системы коммутативных гиперкомплексных чисел, включающих в себя действительные и комплексные числа; подробная разработка в рамках этой системы новой концепции алгебры бикомплексных чисел на принципах её максимальной аналогии алгебрам действительных и комплексных чисел; демонстрация применимости этой алгебры для получения основных соотношений теории относительности и электродинамики.

В статье построена последовательность поколений гиперкомплексных чисел, которые названы  $N$ -комплексными ( ${}^N C$ -) числами, где  $N = 0, 1, 2, \dots, \infty$ . Получение базисных единиц  ${}^N C$ -чисел  $N$ -го уровня происходит путём извлечения квадратных корней ( $\pm$ ) из всех базисных единиц  $(N-1)$ -го уровня. В результате, размерность  ${}^N C$ -чисел:  $n = 2^N$ . При  $N = 0$  и  $N = 1$  мы имеем дело с обычными действительными ( ${}^0 C \equiv R$ ) и комплексными ( ${}^1 C \equiv C$ ) числами. При  $N = 2$  и  $N = 3$  получаем соответственно бикомплексные и трикомплексные числа ( $B \equiv {}^2 C$  и  $T \equiv {}^3 C$ ). И т. д. То есть, в нашей работе нумерация поколений  ${}^N C$ -чисел идёт по показателю степени  $N$ , а не по их удваивающейся на каждом шаге размерности  $n$ .

Начиная с  $B$ -чисел, в качестве базиса  $B$ -пространства мы выбираем не сами единицы, которые получились при извлечении квадратных корней из единиц предыдущего уровня (действительной и мнимой), а их линейные комбинации. С одной стороны, опираясь на процедуру извлечения корней, мы ограничиваем произвол в выборе новых базисных единиц. С другой стороны, выбирая оптимальную линейную комбинацию — сопоставляем процедуру извлечения корней с “методом удвоения”. Тем самым, при  $N > 1$  построение  ${}^N C$ -числа сводится к объединению двух  ${}^{(N-1)} C$ -чисел посредством *единственной* новой коммутативной единицы  $(j, k, l, \dots)$ , для которой реализуется простейшее по знаку соотношение:  $jj = kk = ll = \dots = 1$ . Отметим, что  $B$ -числа в нашей работе, следует отличать от схожих по названию и обозначениям чисел из работ [7] и [10].

Наиболее подробно в статье изложена алгебра бикомплексных чисел. Она является коммутативной, ассоциативной и содержит делители нуля. Рассмотрены операции сложения, умножения, деления и вычисления детерминанта  $B$ -чисел, а также операции их комплексного и бикомплексного сопряжения. Дано подразделение  $B$ -чисел на вырожденные и невырожденные и найдены соотношения между ними. Введены алгебраическая, векторная, матричная, экспоненциальная и тригонометрическая формы  $B$ -числа. Рассмотрены евклидовы и неевклидовы характеристики  $B$ -пространства. Элементы алгебры трикомплексных ( $T \equiv {}^3 C$ ) и тетракомплексных ( $F \equiv {}^4 C$ ) чисел изложены кратко, на уровне развития бикомплексных понятий и обозначений в соответствии с общей идеей построения  ${}^N C$ -чисел.

В физической части работы исходными служат известные [12, 13] выражения координат изотропного 4-вектора через комплексные переменные. С учётом этих выражений, вычислением всех возможных билинейных и квадратичных произведений четырёх сопряжённых значений  $B$ -вектора получено десять различных действительных переменных, обозначенных как  $T, X, Y, Z, F, G, K, L, M, N$ . Тем самым  $B$ -вектору  $q$  (его действительным координатам  $a, b, c, d$ ) сопоставлено десять взаимосвязанных переменных  $\{T..N\}$ . Исследованы соотношения этих переменных и рассмотрены их трансформационные свойства, обу-

словленные преобразованием  $B$ -вектора. Показано, что переменные  $T, X, Y, Z$  взаимосвязаны и преобразуются как координаты изотропного 4-вектора, а переменные  $\{F..N\}$  — как составляющие антисимметричного 4-тензора, аналогичного тензору электромагнитной бегущей волны. Таким образом, произвольному  $B$ -вектору (в  $B$ -пространстве) сопоставлены изотропные 4-вектор и антисимметричный 4-тензор в псевдоевклидовом 4-пространстве с сигнатурой  $(+ - - -)$ , а каждому унимодулярному  $B$ -преобразованию  $B$ -вектора сопоставлено преобразование Лоренца составляющих этих 4-векторов и 4-тензоров. Получены релятивистские формулы преобразования скорости и соотношения для компонентов симметричного 4-тензора, аналогичного тензору энергии-импульса.

В качестве литературы сравнения и источника физических обозначений нами использованы книги Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [5], [14] и Б.В. Медведева [4].

## 1 N-комплексная алгебра

### 1.1 Понятие N-комплексного пространства

Представим несколько последовательных этапов извлечения квадратного корня из единицы в виде следующей таблицы 1.1.1.

Двузначность ( $\pm$ ) операции извлечения квадратного корня удваивает на каждом этапе количество “субъединиц”, которые при обратной операции — возведении в квадрат — должны давать исходное число. Появление новых субъектиниц можно интерпретировать двояко: либо, как появление нового знака у исходной единицы, либо как появление нового типа единицы. Например:  $\sqrt{1} = -1$  или  $\sqrt{-1} = i$ . Эти интерпретации не противоречат друг другу, и каждая из них может быть представлена в альтернативной форме:

$$(-1)(-1) = 1 \leftrightarrow (-)(-) = (+)$$

$$(i)(i) = -1 \leftrightarrow (i1)(i1) = -1 \leftrightarrow (i)(i) = (-)$$

$$(-i)(-i) = -1 \leftrightarrow (-i1)(-i1) = (-1) \leftrightarrow (-i)(-i) = (-)(-)(i)(i) = (+)(-) = (-)$$

Таким образом, произведение субъектиниц можно рассматривать как суперпозицию соответствующих знаков и наоборот. Аналогичная ситуация имеет место и для субъектиниц последующих уровней. Именно поэтому все знаки-субъединицы мы будем всегда собирать вместе и ставить их перед числом. Например:  $i3, -ij5, a + jb$ .

Понятие N-комплексного пространства введём как развитие понятий пространств действительных ( $R$ ) и комплексных ( $C$ ) чисел, основываясь на таблице 1.1.1. Так, на этапе  $N=0$  знак  $(-)$  дополняет положительную полуось до полной числовой оси. На этапе  $N=1$  знак  $(i)$  вводит вторую — мнимую — координатную числовую ось, позволяя рассматривать множество комплексных чисел как двухмерное векторное пространство — ком-

Таблица 1.1.1: Извлечение квадратного корня из единицы.

1															N	
1							-1							0		
1				-1				i				-i			1	
1	-1	i	-i	j <sub>1</sub>	-j <sub>1</sub>	j <sub>2</sub>	-j <sub>2</sub>	k <sub>1</sub>	-k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	-k <sub>2</sub>	k <sub>3</sub>	-k <sub>3</sub>	k <sub>4</sub>	-k <sub>4</sub>	2
1	-1	i	-i	j <sub>1</sub>	-j <sub>1</sub>	j <sub>2</sub>	-j <sub>2</sub>	k <sub>1</sub>	-k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	-k <sub>2</sub>	k <sub>3</sub>	-k <sub>3</sub>	k <sub>4</sub>	-k <sub>4</sub>	3
и так далее ...															∞	

плескную плоскость. Будем считать, что каждая новая субъединица вводит соответствующую новую числовую ось, увеличивая на единицу размерность линейного пространства. При  $N = 2$ , введение двух дополнительных осей  $j_1$  и  $j_2$  делает пространство 4-мерным  $\{1, i, j_1, j_2\}$ . При  $N = 3$ , введение еще четырех осей  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_4$  создает 8-мерное пространство  $\{1, i, j_1, j_2, k_1, k_2, k_3, k_4\}$  и т. д. На  $N$ -ом этапе размерность линейного пространства  $n = 2^N$ .

Введем следующую терминологию, согласующуюся с общепринятой:

**0-комплексное ( ${}^0C$ -) пространство** — не комплексное — пространство действительных чисел  $R$ , одномерная ось  $R$ ;

**1-комплексное ( ${}^1C$ -) пространство** — монокомплексное — обычное комплексное пространство  $C$ , двумерная комплексная плоскость,  $C$ -плоскость;

**2-комплексное ( ${}^2C$ -) пространство** — бикокомплексное пространство  $B$ , 4-мерное  $B$ -пространство;

**3-комплексное ( ${}^3C$ -) пространство** — трикомплексное пространство  $T$ , 8-мерное  $T$ -пространство;

**4-комплексное ( ${}^4C$ -) пространство** — тетракомплексное пространство  $F$ , 16-мерное  $F$ -пространство.

И так далее. . . Общее обозначение:  $N$ -комплексное ( ${}^NC$ -) пространство.

Субъединицы  $1, i, j_1, j_2, k_1, k_2, k_3, k_4, \dots$  — будем называть базисными единицами соответствующего  $N$ -комплексного пространства.

## 1.2 Соотношение базисных единиц $B$ -пространства

Мнимое число  $i$  обычно определяют как такое число, квадрат которого,  $i^2 = ii = -1$ . Аналогичным образом (согласно таблице 1.1.1) определим и числа  $j$ :

$$j_1^2 = j_1 j_1 = (-j_1)(-j_1) = i, \quad j_2^2 = j_2 j_2 = (-j_2)(-j_2) = -i.$$

Учитывая правило комплексного сопряжения произведения, получим

$$\bar{j}_1 \bar{j}_1 = \overline{j_1 j_1} = \bar{i} = -i = j_2 j_2$$

откуда следует, что числа  $j_1$  и  $j_2$  являются комплексно сопряженными:

$$\bar{j}_1 = j_2 \text{ или } \bar{j}_1 = -j_2$$

Эти соотношения означают, что при комплексном сопряжении оси  $B$ -пространства  $j_1$  и  $j_2$  переходят друг в друга. Выбор знака на данном этапе *определяет* — окажутся при этом направления осей одинаковыми или противоположными. Выберем первую альтернативу. Кроме того,

$$1 = -ii = (j_2 j_2)(j_1 j_1) = (j_1 j_2)(j_1 j_2), \quad \text{то есть } j_1 j_2 = 1 \text{ или } j_1 j_2 = -1.$$

Здесь мы опять произвольно *определяем* ориентацию плоскости  $(j_1, j_2)$  уже по отношению к плоскости, задаваемой базисными единицами  $(1, i)$ . Выберем

$$j_1 j_2 = 1,$$

тогда

$$ij_2 = (j_1 j_1)j_2 = j_1(j_1 j_2) = j_1, \quad \text{то есть } ij_2 = j_1$$

$$-ij_1 = (j_2j_2)j_1 = j_2(j_1j_2) = j_2, \quad \text{то есть} \quad ij_1 = -j_2$$

Плоскость  $(j_1, j_2)$ , как и плоскость  $(1, i)$ , является комплексной, но её оси  $j_1$  и  $j_2$  повернуты так, что ни одна из них не является ни действительной, ни мнимой. Совершим линейную замену базисных единиц и введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{j_1 + j_2}{\sqrt{2}} &= \frac{ij_2 + j_2}{\sqrt{2}} = j_2 \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \equiv j \\ \frac{j_1 - j_2}{\sqrt{2}} &= \frac{ij_2 - j_2}{\sqrt{2}} = ij_2 \frac{1 + i}{\sqrt{2}} = ij \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

теперь

$$\bar{j} = j, \quad \bar{ij} = -ij, \quad j^2 = 1, \quad (ij)^2 = -1 \quad (1.2.2)$$

Тем самым, для обозначения двух новых осей  $B$ -пространства ( $j$  и  $ij$ ) мы используем фактически всего один символ  $j$  с наличием или отсутствием “знака”  $i$  перед ним. При этом сам символ  $j$  оказывается выведенным из-под действия операции комплексного сопряжения. Сводка полученных соотношений представлена в виде таблицы, в которой произведения базисных единиц  $B$ -пространства стоят на пересечении соответствующих строк и столбцов:

Таблица 1.2.1:

1	i	j	ij
i	-1	ij	-j
j	ij	1	i
ij	-j	i	-1

### 1.3 Операции над элементами $B$ -пространства

Элементы бикомплексного пространства будем обозначать символом  $q$  и записывать в одной из следующих форм:

$$q = a + ib + jc + ijd = (a + ib) + j(c + id) = u + jv \quad (1.3.1)$$

где  $1, i, j, ij$  — базисные единицы бикомплексного пространства;  $a, b, c, d$  — действительные числа;  $u = a + ib$  и  $v = c + id$  — комплексные числа. Таким образом, наряду с представлением через действительные числа  $a, b, c, d$ , возможно представление элемента  $B$ -пространства в виде двучлена с комплексными составляющими  $u$  и  $v$ .

Если базисные единицы рассматривать как обозначения базисных векторов, то упорядоченная четверка чисел  $(a, b, c, d)$  является координатами бикомплексного вектора (кратко —  $B$ -вектора)  $q$ . Если же базисные единицы считать алгебраическими символами, то можно сказать, что формула (1.3.1) задает алгебраическую форму бикомплексного числа (кратко —  $B$ -числа)  $q$ . Далее оба термина —  $B$ -число и  $B$ -вектор — будем использовать на равных правах.

Пусть  $q, q_1$  и  $q_2$  — произвольные элементы  $B$ -пространства,  $\lambda$  — действительное число, а  $z = x + iy$  — число комплексное. Тогда

**сумма элементов**

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (u_1 + u_2) + j(v_1 + v_2) = \\ &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) + j[(c_1 + c_2) + i(d_1 + d_2)] = \\ &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) + j(c_1 + c_2) + ij(d_1 + d_2) \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

**произведение элемента на число**

$$\lambda q = \lambda u + j\lambda v = \lambda(a + ib) + j\lambda(c + id) = \lambda a + i\lambda b + j\lambda c + ij\lambda d \quad (1.3.3)$$

$$\begin{aligned} zq &= zu + jzv = (x + iy)(a + ib) + j(x + iy)(c + id) = \\ &= (xa - yb) + i(xb + ya) + j[(xc - yd) + i(xd + yc)] = \\ &= (xa - yb) + i(xb + ya) + j(xc - yd) + ij(xd + yc) \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Таким образом, сложение  $B$ -векторов сводится к сложению их соответствующих координат, а умножение  $B$ -вектора на число выполняется путем умножения всех координат вектора на это число. Обе операции могут проводиться как в действительной, так и в комплексной форме и удовлетворяют восьми аксиомам линейного пространства:

$$1^\circ q_1 + q_2 = q_2 + q_1$$

$$2^\circ (q_1 + q_2) + q_3 = q_1 + (q_2 + q_3)$$

$$3^\circ 0 + i0 + j0 + ij0 = 0 \quad \text{— нулевой элемент: } 0 + q = q$$

$$4^\circ -q = -a - ib - jc - ijd = q' \quad \text{— противоположный элемент: } q + q' = 0$$

$$5^\circ 1q = q \quad \text{— особая роль числового множителя } 1$$

$$6^\circ z_1(z_2q) = (z_1z_2)q$$

$$7^\circ (z_1 + z_2)q = z_1q + z_2q$$

$$8^\circ z(q_1 + q_2) = zq_1 + zq_2$$

Поскольку произведения базисных единиц определены (табл. 1.2.1), найдём

**произведение элементов  $B$ -пространства:**

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= (a_1 + ib_1 + jc_1 + ijd_1)(a_2 + ib_2 + jc_2 + ijd_2) = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 + c_1c_2 - d_1d_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 + d_1c_2) + \\ &\quad + j(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 - d_1b_2) + ij(a_1d_2 + b_1c_2 + c_1b_2 + d_1a_2) = \\ &= (u_1 + jv_1)(u_2 + jv_2) = (u_1u_2 + v_1v_2) + j(u_1v_2 + v_1u_2) \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

В том числе,

**квадрат  $B$ -числа:**

$$\begin{aligned} q^2 &= (a + ib + jc + ijd)(a + ib + jc + ijd) = \\ &= (a^2 - b^2 + c^2 - d^2) + i2(ab + cd) + j2(ac - bd) + ij2(ad + bc) = \\ &= (u + jv)^2 = u^2 + v^2 + j2uv \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

В зависимости от значений координат сомножителей, произведение  $B$ -чисел может принимать любое значение — бикомплексное, комплексное, мнимое, действительное или вообще нулевое. Произведение  $B$ -чисел и коммутативно, и ассоциативно.

**Сопряжённые формы  $B$ -числа.**

С учетом формул (1.2.2), комплексно сопряжённое  $B$ -число  $\bar{q}$  будет иметь вид:

$$\bar{q} = a - ib + jc - ijd = (a - ib) + j(c - id) = \bar{u} + j\bar{v} \quad (1.3.7)$$

Кроме обычной операции комплексного сопряжения ( $C$ -сопряжения) введем операцию *бикомплексного сопряжения* ( $B$ -сопряжения), состоящую в смене знака перед символом  $j$ .

Эту операцию обозначим проставлением над символом  $B$ -числа знака тильда ( $\tilde{\phantom{q}}$ ). На основе формул (1.3.1) и (1.3.7),  $B$ -сопряжённое число  $\tilde{q}$  и  $CB$ -сопряжённое число  $\tilde{\tilde{q}}$  запишем так:

$$\tilde{q} = a + ib - jc - id = (a + ib) - j(c + id) = u - jv \quad (1.3.8)$$

$$\tilde{\tilde{q}} = a - ib - jc + id = (a - ib) - j(c - id) = \bar{u} - j\bar{v} \quad (1.3.9)$$

Отметим, что операции  $C$ - и  $B$ -сопряжения независимы. Поэтому, как выполнение, так и проставление над символом  $B$ -числа знаков этих операций может производиться в любом порядке. Повторное сопряжение любого типа равносильно отсутствию этого сопряжения:

$$\tilde{\tilde{q}} = \bar{\bar{q}}, \quad \bar{\bar{q}} = q, \quad \tilde{\tilde{\tilde{q}}} = q \quad (1.3.10)$$

Для комплексного числа  $z = x + iy$  существуют операции выделения (действительных) координат по действительной и мнимой осям:  $\text{Re}(z) = x$  и  $\text{Im}(z) = y$ . Комплексные числа  $u$  и  $v$  по аналогии можно назвать соответственно комплексной частью и “ $j$ -частью” бикомплексного числа  $q$ . Для операций выделения этих (комплексных) координат  $B$ -вектора введем следующие обозначения:

$$C1(q) = u \quad C2(q) = v \quad (1.3.11)$$

Тогда для  $B$ -чисел (1.3.7) – (1.3.9) получим

$$C1(\bar{q}) = \bar{u}, \quad C2(\bar{q}) = \bar{v}; \quad C1(\tilde{q}) = u, \quad C2(\tilde{q}) = -v; \quad C1(\tilde{\tilde{q}}) = \bar{u}, \quad C2(\tilde{\tilde{q}}) = -\bar{v}$$

Выпишем произведения пар сопряжённых  $B$ -чисел:

$$\begin{aligned} \text{а) } q\bar{q} &= (u + jv)(\bar{u} + j\bar{v}) = u\bar{u} + v\bar{v} + j(u\bar{v} + \bar{u}v) \\ \text{б) } \tilde{q}\tilde{\tilde{q}} &= (u - jv)(\bar{u} - j\bar{v}) = u\bar{u} + v\bar{v} - j(u\bar{v} + \bar{u}v) \\ \text{в) } q\tilde{q} &= (u + jv)(u - jv) = u^2 - v^2 \\ \text{г) } \bar{q}\tilde{\tilde{q}} &= (\bar{u} + j\bar{v})(\bar{u} - j\bar{v}) = \bar{u}^2 - \bar{v}^2 \\ \text{д) } q\tilde{\tilde{q}} &= (u + jv)(\bar{u} - j\bar{v}) = u\bar{u} - v\bar{v} - j(u\bar{v} - \bar{u}v) \\ \text{е) } \bar{q}\tilde{q} &= (\bar{u} + j\bar{v})(u - jv) = u\bar{u} - v\bar{v} + j(u\bar{v} - \bar{u}v) \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Произведения а) и б) сопряжены бикомплексно:  $C1(q\bar{q}) = C1(\tilde{q}\tilde{\tilde{q}})$ ,  $C2(q\bar{q}) = -C2(\tilde{q}\tilde{\tilde{q}})$ . В произведениях в) и г) сами множители являются  $B$ -сопряжёнными. Между собой же эти произведения сопряжены комплексно. В результате:  $C2(q\tilde{q}) = C2(\bar{q}\tilde{\tilde{q}}) = 0$ . Наконец, произведения д) и е) можно рассматривать либо как  $C$ -сопряжённые, либо как  $B$ -сопряжённые, так как при любом из этих сопряжений они переходят друг в друга.

Произведение всех четырех сопряжённых форм может быть вычислено через множители (1.3.12) следующими тремя способами:

$$\begin{aligned} \det q &= q\bar{q}\tilde{\tilde{q}}\tilde{q} = (q\bar{q})(\tilde{\tilde{q}}\tilde{q}) = (q\tilde{q})(\bar{q}\tilde{\tilde{q}}) = (q\tilde{\tilde{q}})(\bar{q}\tilde{q}) = \\ &= (u\bar{u} + v\bar{v})^2 - (u\bar{v} + \bar{u}v)^2 = (u^2 - v^2)(\bar{u}^2 - \bar{v}^2) = (u\bar{u} - v\bar{v})^2 - (u\bar{v} - \bar{u}v)^2 = \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 4(ac + bd)^2 = \\ &= (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2 + 4(ab - cd)^2 = \\ &= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 4(ad - bc)^2 = \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2(a^2b^2 - a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 - b^2d^2 + c^2d^2) - 8abcd \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

Как сумма квадратов двух действительных чисел (строки 4 и 5 в (1.3.13)), это произведение всегда имеет действительное неотрицательное значение. Использование обозначения определителя,  $\det q$ , связано с матричной формой представления  $B$ -чисел, которая будет рассмотрена в следующем разделе. Сейчас же отметим, что в тех случаях, когда  $\det q \neq 0$  для данного числа  $q$  возможно



деление на  $B$ -число

$$\frac{q_1}{q} = \frac{q_1 \bar{q} \tilde{q}}{q \bar{q} \tilde{q}} = \frac{q_1 \bar{q} \tilde{q}}{\det q} \quad (1.3.14)$$

Тем самым, деление на  $B$ -число  $q$  сводится к умножению на три сопряжённые формы этого числа и делению на действительное число  $\det q$ . Если  $q_1 = 1$ , то получим

обратное  $B$ -число

$$1/q = q^{-1} = \bar{q} \tilde{q} / \det q \quad (1.3.15)$$

Естественно, обратное значение имеют только те  $B$ -числа, определитель которых не равен нулю.

### 1.4 Матричная форма $B$ -числа

Каждому  $B$ -числу в форме (1.3.1) может быть сопоставлена действительная квадратная матрица четвертого порядка, которую будем обозначать тем же символом  $q$ :

$$q = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ c & d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & v \\ v & u \end{vmatrix}, \quad \tilde{q} = \begin{vmatrix} a & b & -c & -d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & -c & -b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & -v \\ -v & u \end{vmatrix}, \quad (1.4.1)$$

$$\bar{q} = \begin{vmatrix} a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{u} & \bar{v} \\ \bar{v} & \bar{u} \end{vmatrix}, \quad \tilde{\bar{q}} = \begin{vmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{u} & -\bar{v} \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{vmatrix},$$

Эти матрицы являются суммой произведений — согласно формулам (1.3.1) — (1.3.9) — действительных чисел  $(a, b, c, d)$  на следующие матрицы базисных элементов:

$$1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad i = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad j = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad ij = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (1.4.2)$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что формулы (1.2.2) реализуются на матрицах (1.4.2).

Действительные матрицы (1.4.1) и (1.4.2)  $B$ -чисел можно представить в виде комплексных (блочных) матриц второго порядка. При этом их элементы записываются в матричной форме так, как это принято для комплексных чисел:

$$u = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}, \quad v = \begin{vmatrix} c & d \\ -d & c \end{vmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}, \quad 1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad i = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (1.4.3)$$

Операции с матрицами  $B$ -чисел — сложение, произведение, умножение на число — могут выполняться как в действительной, так и в комплексной форме. Сами комплексные и действительные числа в свою очередь могут рассматриваться как частные случаи бикомплексных:  $u = u + j0$  и  $a = a + i0 + j0 + ij0$ :

$$u = \begin{vmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad a = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \quad (1.4.4)$$

Тем самым операции с  $R$ -,  $C$ - и  $B$ -числами осуществляются на матрицах одинаковых порядков. Матрицы  $B$ -чисел коммутативны. Это обеспечивается их симметричностью относительно *побочной* диагонали. Бикомплексное и комплексное сопряжения выражается в смене знака соответственно у  $j$ - или у  $i$ -элементов.

Во всех матрицах (1.4.1) алгебраические дополнения  $A, B, C, D$  элементов  $a, b, c, d$  не зависят от места расположения этих элементов в матрицах. Тем самым, вычисляя определитель любой из матриц (1.4.1) разложением по любой их строке или столбцу, получим

$$\det q = \det \bar{q} = \det \tilde{q} = \det \tilde{\tilde{q}} = aA + bB + cC + dD = q\bar{q}\tilde{q}\tilde{\tilde{q}} \quad (1.4.5)$$

Именно поэтому в формуле (1.3.13) произведение всех четырёх сопряжённых форм  $B$ -числа было обозначено как  $\det q$ . Из формул (1.4.3) следует, что аналогичные соотношения имеют место и для комплексных чисел:  $\det u = \det \bar{u} = u\bar{u} = a^2 + b^2$ .

Определитель  $B$ -числа можно вычислить и через комплексные матрицы (1.4.1) как через промежуточную стадию:

$$\det q = \det (u^2 - v^2) = \det (\bar{u}^2 - \bar{v}^2) = \begin{vmatrix} a^2 - b^2 - c^2 + d^2 & \pm 2(ab - cd) \\ \mp 2(ab - cd) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{vmatrix} = \quad (1.4.6)$$

$$(a^2 - b^2 - c^2 + d^2) + 4(ab - cd)^2$$

### 1.5 Делители нуля

Очевидно, что определитель  $\det q = 0$  в случае  $q = u = v = a = b = c = d = 0$ . Но даже когда  $q \neq 0$ , то из (1.4.6) следует, что  $\det q = 0$ , если выполняется условие

$$u^2 - v^2 = 0, \text{ то есть } u = \pm v. \quad (1.5.1)$$

При  $q \neq 0$ , не равны нулю и все сопряжённые формы  $q$ . Поскольку определитель вычисляется как их произведение (1.4.5), то это значит, что результатом произведения ненулевых сомножителей может быть число ноль. Таким образом, множество  $B$ -чисел содержит делители нуля.

$B$ -числа, определитель которых равен нулю, а матрица является вырожденной, тоже будем называть *вырожденными*. Рассмотрим произведение  $q_1 q_2 = q_3$ . Для него  $\det q_1 \det q_2 = \det q_3$ . Отсюда следует, что определитель произведения  $\det q_3$  равен нулю только, когда один или оба сомножителя вырождены. И наоборот, если  $\det q_1 \neq 0$  и  $\det q_2 \neq 0$ , то и  $\det q_3 \neq 0$ .

### 1.6 О понятии $B$ -числа

Множество элементов  $B$ -пространства образует ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, имеющее делители нуля. Над полем  $R$  действительных чисел это кольцо является четырёхмерной (над полем  $C$  комплексных чисел — 2-мерной) ассоциативной и коммутативной алгеброй. Нулевой и единичный элементы кольца и полей  $R$  и  $C$  совпадают, а операции сложения и умножения элементов  $B$ -пространства являются естественным развитием этих операций для элементов числовых полей  $R$  и  $C$ . Именно поэтому элементы  $B$ -пространства мы называем (бикомплексными) числами. Бикомплексные числа являются не менее естественным направлением развития понятия числа, чем кватернионы и числа Кэли. Отметим, что не имеющие делителей нуля гиперкомплексные числа на стадии 4-мерной действительной алгебры кватернионов уже не обладают свойством коммутативности произведения, а на стадии 8-мерной алгебры чисел Кэли теряют ещё и свойство ассоциативности (оставаясь альтернативной). Тем самым, развитие понятия числа без делителей нуля естественным образом заканчивается. В отличие от этого, бикомплексные

числа (и последующие  ${}^N C$ -числа) имеют делители нуля, но сохраняют все свои алгебраические свойства в силу того, что именно сохранение этих свойств и положено в основу их построения.

### 1.7 Экспонента от $B$ -аргумента

Представим функцию  $e^x \equiv \exp x$  в виде следующего степенного ряда:

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = X_0 + X_1 + X_2 + \dots + X_n + \dots, \quad (1.7.1)$$

где  $X_n = \frac{x^n}{n!}$

Пусть  $\alpha$  — действительное число. Известно, что, группируя чётные и нечётные члены ряда, при  $x = \alpha$  экспоненту (1.7.1) можно выразить через гиперболические функции, а при  $x = i\alpha$  — через тригонометрические:

$$\exp(\alpha) = (X_0 + X_2 + X_4 + \dots) + (X_1 + X_3 + X_5 + \dots) = \operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha$$

$$\begin{aligned} \exp(i\alpha) &= X_0 + iX_1 - X_2 - iX_3 + \dots = (X_0 - X_2 + X_4 - \dots) + i(X_1 - X_3 + X_5 - \dots) = \\ &= \operatorname{ch}(i\alpha) + \operatorname{sh}(i\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha \end{aligned}$$

где  $X_n = \alpha^n/n!$  — действительные числа. Аналогично, для  $x = j\alpha$  и  $x = ij\alpha$ , получим:

$$\begin{aligned} \exp(j\alpha) &= X_0 + jX_1 + X_2 + jX_3 + \dots = (X_0 + X_2 + X_4 + \dots) + j(X_1 + X_3 + X_5 + \dots) = \\ &= \operatorname{ch}(j\alpha) + \operatorname{sh}(j\alpha) = \operatorname{ch} \alpha + j \operatorname{sh} \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp(ij\alpha) &= X_0 + ijX_1 - X_2 - ijX_3 + \dots = (X_0 - X_2 + X_4 - \dots) + ij(X_1 - X_3 + X_5 - \dots) = \\ &= \operatorname{ch}(ij\alpha) + \operatorname{sh}(ij\alpha) = \cos \alpha + ij \sin \alpha \end{aligned}$$

Сводка уже известных и вновь полученных формул имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \exp(\alpha) &= \operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha \\ \exp(i\alpha) &= \operatorname{ch}(i\alpha) + \operatorname{sh}(i\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha \\ \exp(j\alpha) &= \operatorname{ch}(j\alpha) + \operatorname{sh}(j\alpha) = \operatorname{ch} \alpha + j \operatorname{sh} \alpha \\ \exp(ij\alpha) &= \operatorname{ch}(ij\alpha) + \operatorname{sh}(ij\alpha) = \cos \alpha + ij \sin \alpha \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

Для отрицательного аргумента  $(-\alpha)$  знак  $(+)$  перед нечётными функциями синуса во всех формулах (1.7.2) изменится на знак  $(-)$ . Тогда, наряду с известными формулами Эйлера

$$\begin{cases} \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} = \operatorname{ch} \alpha \\ \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = \operatorname{sh} \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = \operatorname{ch}(i\alpha) = \cos(\alpha) \\ \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2} = \operatorname{sh}(i\alpha) = i \sin(\alpha) \end{cases}$$

мы получаем возможность записать (1.7.3)

$$\begin{cases} \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} = \operatorname{ch}(j\alpha) = \operatorname{ch}(\alpha) \\ \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2} = \operatorname{sh}(j\alpha) = j \operatorname{sh}(\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{e^{ij\alpha} + e^{-ij\alpha}}{2} = \operatorname{ch}(ij\alpha) = \cos(\alpha) \\ \frac{e^{ij\alpha} - e^{-ij\alpha}}{2} = \operatorname{sh}(ij\alpha) = ij \sin(\alpha) \end{cases} \quad (1.7.3)$$

Если в качестве аргумента экспоненты взять  $B$ -число

$$\kappa = \alpha + i\beta + j\gamma + ij\delta = \xi + j\eta$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  действительные, а  $\xi = \alpha + i\beta$  и  $\eta = \gamma + i\delta$  — комплексные числа, то

$$\begin{aligned} \exp \kappa &= \exp(\alpha + i\beta + j\gamma + ij\delta) = \exp \alpha \exp(i\beta) \exp(j\gamma) \exp(ij\delta) = \\ &= \exp \alpha (\cos \beta + i \sin \beta) (\operatorname{ch} \gamma + j \operatorname{sh} \gamma) (\cos \delta + ij \sin \delta) = \\ &= e^\alpha \{[(\cos \beta \operatorname{ch} \gamma \cos \delta - \sin \beta \operatorname{sh} \gamma \sin \delta) + i (\sin \beta \operatorname{ch} \gamma \cos \delta + \cos \beta \operatorname{sh} \gamma \sin \delta)] + \\ &\quad + j [(\cos \beta \operatorname{sh} \gamma \cos \delta - \sin \beta \operatorname{ch} \gamma \sin \delta) + i (\sin \beta \operatorname{sh} \gamma \cos \delta + \cos \beta \operatorname{ch} \gamma \sin \delta)]\} = \\ &= a + ib + jc + ijd = q \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

Соотношения (7.4) можно рассматривать как *экспоненциальную форму* (кратко — *exp-форму*)  $B$ -числа, выраженную через действительные функции. Таким же образом *exp-форму* можно выразить и через функции от двух комплексных аргументов:

$$\exp \kappa = \exp(\xi + j\eta) = \exp \xi \exp(j\eta) = \exp \xi (\operatorname{ch} \eta + j \operatorname{sh} \eta) = u + jv = q \quad (1.7.5)$$

Поскольку экспонента от  $B$ -аргумента в итоге выражается через гиперболические и тригонометрические функции действительной (или комплексной) переменной, то и в случае  $B$ -аргумента будут выполняться основные тождества:

$$\begin{aligned} (\cos \beta + i \sin \beta) (\cos \beta - i \sin \beta) &= \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1 \\ (\operatorname{ch} \gamma + j \operatorname{sh} \gamma) (\operatorname{ch} \gamma - j \operatorname{sh} \gamma) &= \operatorname{ch}^2 \gamma - \operatorname{sh}^2 \gamma = 1 \\ (\cos \delta + ij \sin \delta) (\cos \delta - ij \sin \delta) &= \cos^2 \delta + \sin^2 \delta = 1 \\ (\operatorname{ch} \kappa + \operatorname{sh} \kappa) (\operatorname{ch} \kappa - \operatorname{sh} \kappa) &= \operatorname{ch}^2 \kappa - \operatorname{sh}^2 \kappa = \exp(\kappa) \exp(-\kappa) = \exp(0) = 1 \end{aligned} \quad (1.7.6)$$

Фактически здесь мы имеем дело с расширением экспоненты, а также гиперболических и тригонометрических функций на бикомплексное пространство  $\mathbb{B}$ , аналогично уже известному расширению этих функций на комплексное пространство  $\mathbb{C}$ . Все известные соотношения для этих функций от действительного или комплексного аргумента будут справедливы и для бикомплексного аргумента. Так, соотношения, аналогичные (1.7.2), будут выполняться не только для действительного аргумента  $\alpha$ , но и для комплексного аргумента (например,  $\xi = \alpha + i\beta$ ), и для  $B$ -аргумента ( $\kappa = \alpha + i\beta + j\gamma + ij\delta$ ). Вообще, справедливость любой экспоненциальной, гиперболической или тригонометрической формулы, записанной для бикомплексного аргумента, легко проверить, выразив этот аргумент через действительные переменные, а затем преобразовав формулу по стандартным правилам с учётом соотношений (1.7.2) – (1.7.3).

Функция (1.7.4) по переменным  $\beta$  и  $\delta$  имеет периоды  $2n\pi$ . Из тождеств (1.7.6) и формулы (1.7.4) следует, что ни при каких значениях аргументов  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  все четыре координаты  $B$ -вектора  $q$  не принимают нулевого значения одновременно. Следовательно, ноль не входит в область значений функции  $q = \exp \kappa$ . Нет среди значений этой функции и вырожденных  $B$ -чисел, так как

$$\det q = q\bar{q}\tilde{q}\tilde{\bar{q}} = \exp(\kappa + \bar{\kappa} + \tilde{\kappa} + \tilde{\bar{\kappa}}) = \exp 4\alpha > 0 \quad (1.7.7)$$

Отметим, что возможно и другое, связанное с экспонентой представление  $B$ -числа, которое будем называть *комплексно-экспоненциальным*. Такое  $C$ -*exp*-представление вытекает из того, что комплексные составляющие  $u$  и  $v$   $B$ -числа  $q$  каждая по отдельности выражаются в экспоненциальной форме. Так, если  $u$  и  $v$  не равны нулю, то

$$\begin{aligned} q &= u + jv = \exp(\rho + i\varphi) + j \exp(\sigma + i\psi) = \\ &= \exp \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) + j \exp \sigma (\cos \psi + i \sin \psi) \end{aligned} \quad (1.7.8)$$

Функция (1.7.8) определена при любых действительных значениях  $\rho, \varphi, \sigma, \psi$ ; имеет периоды  $2\pi$  по переменным  $\varphi$  и  $\psi$ . При  $\rho = \sigma$  и  $\varphi = \psi \pm n\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) её значения вырождены и выполняется условие (1.5.1),  $u = \pm v$ :

$$q\tilde{q} = \exp 2(\rho + i\varphi) - \exp 2(\sigma + i\psi) = 0$$

### 1.8 Выражение параметров аргумента через параметры функции

По формуле (1.7.4) можно вычислить любую из составляющих  $(a, b, c, d)$  экспоненциальной  $B$ -функции по известным значениям составляющих аргумента  $(\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta)$ . Найдём выражения, позволяющие решить обратную задачу. Из (1.3.12) и (1.7.4) получим:

$$\begin{aligned} \text{а) } q\bar{q} &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + j2(ac + bd) = \exp 2(\alpha + j\gamma) = e^{2\alpha}(\text{ch}2\gamma + j \text{sh}2\gamma) \\ \text{б) } \tilde{q}\tilde{\bar{q}} &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - j2(ac + bd) = \exp 2(\alpha - j\gamma) = e^{2\alpha}(\text{ch}2\gamma - j \text{sh}2\gamma) \\ \text{в) } q\tilde{q} &= a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + i2(ab - cd) = \exp 2(\alpha + i\beta) = e^{2\alpha}(\cos 2\beta + i \sin 2\beta) \\ \text{г) } \bar{q}\tilde{\bar{q}} &= a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - i2(ab - cd) = \exp 2(\alpha - i\beta) = e^{2\alpha}(\cos 2\beta - i \sin 2\beta) \\ \text{д) } q\tilde{\bar{q}} &= a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + ij2(ad - bc) = \exp 2(\alpha + ij\delta) = e^{2\alpha}(\cos 2\delta + ij \sin 2\delta) \\ \text{е) } \bar{q}\tilde{q} &= a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - ij2(ad - bc) = \exp 2(\alpha - ij\delta) = e^{2\alpha}(\cos 2\delta - ij \sin 2\delta) \end{aligned} \quad (1.8.1)$$

Из (1.8.1 в, г) находим соотношение для  $\beta$ , а из (1.8.1 а, б) и (1.8.1 д, е) — для  $\gamma$  и  $\delta$ :

$$\frac{2(ab - cd)}{a^2 - b^2 - c^2 + d^2} = \text{tg } 2\beta, \quad \frac{2(ac + bd)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \text{th } 2\gamma, \quad \frac{2(ad - bc)}{a^2 + b^2 - c^2 - d^2} = \text{tg } 2\delta. \quad (1.8.2)$$

Кроме того, непосредственно из (1.7.5) следует, что

$$\frac{v}{u} = \frac{c + id}{a + ib} = \frac{(ac + bd) + i(ad - bc)}{a^2 + b^2} = \text{th } \eta = \text{th}(\gamma + i\delta) \quad (1.8.3)$$

Способ нахождения параметра  $\alpha$  определяется формулой (1.7.7) вычисления детерминанта функции:

$$\alpha = \ln(\det q) / 4 \quad (1.8.4)$$

Таким образом, любое невырожденное  $B$ -число может быть представлено в экспоненциальной форме.

### 1.9 $B$ -пространство как евклидово

Пусть  $q$  и  $p$  — два произвольных  $B$ -вектора, представленных соответственно в алгебраической, комплексно-экспоненциальной и экспоненциальной формах:

$$\begin{aligned} q &= a_1 + ib_1 + jc_1 + jd_1 = u_1 + jv_1 = \\ &= \exp(\rho_1 + i\varphi_1) + j \exp(\sigma_1 + i\psi_1) \\ &= \exp(\alpha_1 + i\beta_1 + j\gamma_1 + ij\delta_1) \\ p &= a_2 + ib_2 + jc_2 + jd_2 = u_2 + jv_2 = \\ &= \exp(\rho_2 + i\varphi_2) + j \exp(\sigma_2 + i\psi_2) \\ &= \exp(\alpha_2 + i\beta_2 + j\gamma_2 + ij\delta_2) \end{aligned} \quad (1.9.1)$$

тогда

$$\begin{aligned}
 q\bar{p} &= (a_1 + ib_1 + jc_1 + id_1)(a_2 - ib_2 + jc_2 - id_2) = \\
 &= (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + i(-a_1b_2 + b_1a_2 - c_1d_2 + d_1c_2) + \\
 &\quad + j(a_1c_2 + b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2) + ij(-a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2) = \\
 &= (u_1 + jv_1)(\bar{u}_2 + j\bar{v}_2) = \\
 &= u_1\bar{u}_2 + v_1\bar{v}_2 + j(u_1\bar{v}_2 + v_1\bar{u}_2)
 \end{aligned}$$

Остальные, требующиеся в (1.9.2) слагаемые, получим  $C$ -,  $B$ - и  $CB$ -сопряжением этого выражения и введём следующее обозначение:

$$\begin{aligned}
 (q, p) &= (q\bar{p} + \bar{q}p + \tilde{q}\tilde{\bar{p}} + \tilde{\bar{q}}\tilde{p})/4 = \\
 &= (u_1\bar{u}_2 + v_1\bar{v}_2 + \bar{u}_1u_2 + \bar{v}_1v_2)/2 = \\
 &= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2
 \end{aligned} \tag{1.9.2}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 (q, q) &= (q\bar{q} + \tilde{q}\tilde{\bar{q}})/2 = u_1\bar{u}_1 + v_1\bar{v}_1 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 \\
 (p, p) &= (p\bar{p} + \tilde{p}\tilde{\bar{p}})/2 = u_2\bar{u}_2 + v_2\bar{v}_2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2
 \end{aligned} \tag{1.9.3}$$

Соотношение (1.9.2) будем рассматривать как определение *скалярного произведения*  $B$ -векторов, следствием которого является понятие *скалярного квадрата*  $B$ -вектора (1.9.3).

Для так заданного правила скалярного произведения, очевидно, выполняются следующие четыре аксиомы:

- 1°  $(q, p) = (p, q)$ .
- 2°  $(q_1 + q_2, p) = (q_1, p) + (q_2, p)$ .
- 3°  $(\lambda q, p) = \lambda(q, p)$  при любом действительном  $\lambda$ .
- 4°  $(q, q) > 0$ , если  $q$  – ненулевой  $B$ -вектор;  
 $(q, q) = 0$ , если  $q$  – нулевой  $B$ -вектор,

что и позволяет рассматривать линейное  $B$ -пространство как *евклидово*, со всеми вытекающими из этого следствиями. В частности, *норма*  $\|q\|$   $B$ -вектора и *угол*  $\theta$  между двумя  $B$ -векторами могут быть найдены из следующих соотношений:

$$\|q\| = \sqrt{(q, q)} = \sqrt{(q\bar{q} + \tilde{q}\tilde{\bar{q}})/2} = \sqrt{u\bar{u} + v\bar{v}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \tag{1.9.4}$$

$$\cos \theta = \frac{(q, p)}{\|q\| \cdot \|p\|} \tag{1.9.5}$$

В свою очередь, введённая на основе скалярного произведения норма вектора евклидова пространства, автоматически удовлетворяет следующим трём аксиомам:

- 1°  $\|q\| > 0$ , если  $q$  – ненулевой  $B$ -вектор;  $\|q\| = 0$ , если  $q$  – нулевой  $B$ -вектор.
- 2°  $\|\lambda q\| = |\lambda| \cdot \|q\|$  для любого  $B$ -вектора  $q$  и любого действительного числа  $\lambda$ .
- 3° Для любых двух  $B$ -векторов  $q_1$  и  $q_2$  справедливо неравенство треугольника:

$$\|q_1 + q_2\| \leq \|q_1\| + \|q_2\|$$

Базис  $\{1, i, j, ij\}$   $B$ -пространства является ортонормированным. Это показано в таблице 1.9.1 при помощи бикомплексной части формулы (1.9.2).

Тем самым, каждая координатная плоскость имеет ортогональную координатную плоскость:  $Oab \perp Ocd$ ,  $Oac \perp Obd$ ,  $Oad \perp Obc$ , а у каждого координатного трёхмерного подпространства ортогональным дополнением является оставшаяся четвёртая ось координат:  $Oabc \perp Od$ ,  $Oabd \perp Oc$ ,  $Oacd \perp Ob$ ,  $Obcd \perp Oa$ .

Таблица 1.9.1:

$(q, p)$	$q$	$\bar{q}$	$\tilde{q}$	$\tilde{\tilde{q}}$	$p$	$\bar{p}$	$\tilde{p}$	$\tilde{\tilde{p}}$	$(q\bar{p} + \bar{q}p + \tilde{q}\tilde{\tilde{p}} + \tilde{\tilde{q}}\tilde{p})/4$	$=$
$(1, 1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	$(1 + 1 + 1 + 1)/4$	1
$(1, i)$	1	1	1	1	i	-i	i	-i	$(-i + i - i + i)/4$	0
$(1, j)$	1	1	1	1	j	j	-j	-j	$(j+j-j-j)/4$	0
$(1, ij)$	1	1	1	1	ij	-ij	-ij	ij	$(-ij + ij + ij - ij)/4$	0
$(i, i)$	i	-i	i	-i	i	-i	i	-i	$(1 + 1 + 1 + 1)/4$	1
$(i, j)$	i	-i	i	-i	j	j	-j	-j	$(ij - ij - ij + ij)/4$	0
$(i, ij)$	i	-i	i	-i	ij	-ij	-ij	ij	$(j + j - j - j)/4$	0
$(j, j)$	j	j	-j	-j	j	j	-j	-j	$(1 + 1 + 1 + 1)/4$	1
$(j, ij)$	j	j	-j	-j	ij	-ij	-ij	ij	$(-i + i - i + i)/4$	0
$(ij, ij)$	ij	-ij	-ij	ij	ij	-ij	-ij	ij	$(1 + 1 + 1 + 1)/4$	1

Исходя из ортогональности пар координатных плоскостей и используя тригонометрический способ записи комплексных чисел, представим  $B$ -вектор в *тригонометрической форме*:

$$\begin{aligned}
 q &= u + jv = r_1 (\cos \varphi + i \sin \varphi) + jr_2 (\cos \psi + i \sin \psi) = \\
 &= r[\cos \chi (\cos \varphi + i \sin \varphi) + j \sin \chi (\cos \psi + i \sin \psi)] = \\
 &= r(\cos \chi \cos \varphi + i \cos \chi \sin \varphi + j \sin \chi \cos \psi + ij \sin \chi \sin \psi),
 \end{aligned}
 \tag{1.9.6}$$

где  $r = \|q\|$  — норма (длина) вектора,  $r_1 = \|u\| = \sqrt{u\bar{u}}$  и  $r_2 = \|v\| = \sqrt{v\bar{v}}$  — (неотрицательные) длины его составляющих по ортогональным координатным плоскостям  $Oab$  и  $Ocd$ . То есть,  $r_1 = r \cos \chi$  и  $r_2 = r \sin \chi$  при  $0 \leq \chi \leq \pi/2$ , тогда как ориентацию этих составляющих в комплексных плоскостях  $u$  и  $v$  задают соответственно углы  $0 \leq \varphi < 2\pi$  и  $0 \leq \psi < 2\pi$ . Кроме указанных, в качестве ортогональных координатных плоскостей могут быть взяты и остальные две пары. В этом случае тригонометрическая форма записи  $B$ -вектора примет несколько иной, но аналогичный вид.

Связь тригонометрической (1.9.6) и комплексно-экспоненциальной (1.7.8) форм достаточно очевидна:

$$\exp \rho = r \cos \chi, \quad \exp \sigma = r \sin \chi, \quad \operatorname{tg} \chi = \exp(\sigma - \rho)
 \tag{1.9.7}$$

Для нахождения скалярного произведения в  $C$ -exp-форме, сначала вычислим

$$\begin{aligned}
 q\bar{p} &= [\exp(\rho_1 + i\varphi_1) + j \exp(\sigma_1 + i\psi_1)] [\exp(\rho_2 - i\varphi_2) + j \exp(\sigma_2 - i\psi_2)] = \\
 &= \exp(\rho_1 + i\varphi_1) \exp(\rho_2 - i\varphi_2) + \exp(\sigma_1 + i\psi_1) \exp(\sigma_2 - i\psi_2) + \\
 &\quad + j [\exp(\rho_1 + i\varphi_1) \exp(\sigma_2 - i\psi_2) + \exp(\rho_2 - i\varphi_2) \exp(\sigma_1 + i\psi_1)] \\
 q\bar{p} + \tilde{q}\tilde{\tilde{p}} &= 2 [\exp(\rho_1 + i\varphi_1) \exp(\rho_2 - i\varphi_2) + \exp(\sigma_1 + i\psi_1) \exp(\sigma_2 - i\psi_2)] = \\
 &= 2 \{ \exp[\rho_1 + \rho_2 + i(\varphi_1 - \varphi_2)] + \exp[\sigma_1 + \sigma_2 + i(\psi_1 - \psi_2)] \} = \\
 &= 2 \{ \exp(\rho_1 + \rho_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \exp(\sigma_1 + \sigma_2) \cos(\psi_1 - \psi_2) + \\
 &\quad + i [\exp(\rho_1 + \rho_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \exp(\sigma_1 + \sigma_2) \sin(\psi_1 - \psi_2)] \}
 \end{aligned}$$

затем, складывая это выражение с его  $C$ -сопряжённым значением  $\bar{q}p + \tilde{q}\tilde{p}$ , получим

$$\begin{aligned}(q, p) &= \exp(\rho_1 + \rho_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \exp(\sigma_1 + \sigma_2) \cos(\psi_1 - \psi_2) \\(q, q) &= \exp 2\rho_1 + \exp 2\sigma_1\end{aligned}\tag{1.9.8}$$

Таким образом, в  $C$ - $exp$ -форме квадрат  $B$ -вектора  $q$  есть просто сумма квадратов его составляющих по взаимно ортогональным комплексным плоскостям:  $r^2 = r_1^2 + r_2^2$ .  $B$ -векторы  $q$  и  $p$  ортогональны, если ортогональны их составляющие в этих комплексных плоскостях:  $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$  и  $\cos(\psi_1 - \psi_2) = 0$ . Во всех остальных случаях, исходя из (1.9.8), условию ортогональности  $q$  и  $p$  можно придать следующий вид:

$$\exp(\rho_1 + \rho_2 - \sigma_1 - \sigma_2) = -\cos(\psi_1 - \psi_2) / \cos(\varphi_1 - \varphi_2).\tag{1.9.9}$$

С учётом положительности экспоненты, из (1.9.9) в частности следует, что для ортогональных  $q$  и  $p$  при остром угле  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  угол  $(\psi_1 - \psi_2)$  должен быть тупым и наоборот.

Для невырожденных  $B$ -векторов запишем формулы (1.9.2) – (1.9.5) в  $exp$ -форме:

$$q\bar{p} = \exp[\alpha_1 + \alpha_2 + i(\beta_1 - \beta_2) + j(\gamma_1 + \gamma_2) + ij(\delta_1 - \delta_2)] \equiv \exp(\alpha_\Sigma + i\beta_\Delta + j\gamma_\Sigma + ij\delta_\Delta)$$

$$\bar{q}p = \exp[\alpha_1 + \alpha_2 - i(\beta_1 - \beta_2) + j(\gamma_1 + \gamma_2) - ij(\delta_1 - \delta_2)] \equiv \exp(\alpha_\Sigma - i\beta_\Delta + j\gamma_\Sigma - ij\delta_\Delta)$$

$$\begin{aligned}q\bar{p} + \bar{q}p &= 2 \exp(\alpha_\Sigma + j\gamma_\Sigma) \operatorname{ch}(i\beta_\Delta + ij\delta_\Delta) = \\&= 2 \exp \alpha_\Sigma (\operatorname{ch} \gamma_\Sigma + j \operatorname{sh} \gamma_\Sigma) (\cos \beta_\Delta \cos \delta_\Delta - j \sin \beta_\Delta \sin \delta_\Delta) = \\&= 2 \exp \alpha_\Sigma [(\operatorname{ch} \gamma_\Sigma \cos \beta_\Delta \cos \delta_\Delta - \operatorname{sh} \gamma_\Sigma \sin \beta_\Delta \sin \delta_\Delta) + \\&\quad + j(\operatorname{sh} \gamma_\Sigma \cos \beta_\Delta \cos \delta_\Delta - \operatorname{ch} \gamma_\Sigma \sin \beta_\Delta \sin \delta_\Delta)]\end{aligned}$$

Складывая это выражение с его  $B$ -сопряжённым значением  $\tilde{q}\tilde{p} + \tilde{\tilde{q}}\tilde{\tilde{p}}$ , в итоге получим

$$(q, p) = \exp \alpha_\Sigma (\cos \beta_\Delta \operatorname{ch} \gamma_\Sigma \cos \delta_\Delta - \sin \beta_\Delta \operatorname{sh} \gamma_\Sigma \sin \delta_\Delta)\tag{1.9.10}$$

$$\begin{aligned}(q, q) &= \exp 2\alpha_1 \operatorname{ch} 2\gamma_1 & \|q\| &= \exp \alpha_1 \sqrt{\operatorname{ch} 2\gamma_1} \\(p, p) &= \exp 2\alpha_2 \operatorname{ch} 2\gamma_2 & \|p\| &= \exp \alpha_2 \sqrt{\operatorname{ch} 2\gamma_2}\end{aligned}\tag{1.9.11}$$

Из (1.9.10) и (1.9.11) следует, что

$$\cos \theta = (\cos \beta_\Delta \operatorname{ch} \gamma_\Sigma \cos \delta_\Delta - \sin \beta_\Delta \operatorname{sh} \gamma_\Sigma \sin \delta_\Delta) / \sqrt{\operatorname{ch} 2\gamma_1 \operatorname{ch} 2\gamma_2}\tag{1.9.12}$$

Обратим внимание, что нормы  $\|q\|$  и  $\|p\|$   $B$ -векторов в  $exp$ -форме не зависят от их тригонометрических параметров  $\beta$  и  $\delta$ , и выражаются только через экспоненциальный и гиперболический параметры  $\alpha$  и  $\gamma$ .

### 1.10 Разложение $B$ -векторов. $B$ -проекторы

Любой  $B$ -вектор  $q$  может быть представлен в виде суммы двух других  $B$ -векторов:  $q = q_1 + q_2$ . Один из этих  $B$ -векторов, например  $q_1$ , может быть задан произвольно, а второй соответственно имеет значение  $q_2 = q - q_1$ .

Разложим  $B$ -вектор  $q$  на две взаимно ортогональные составляющие  $q_1$  и  $q_2$ , одна из которых ( $q_1$ ) направлена по заданному  $B$ -вектору  $q_0$ . Поскольку  $B$ -вектор  $q_0$  имеет конкретную, но произвольную величину, то  $B$ -векторы  $q_1$  и  $q_0$  будут пропорциональны:

$$\begin{cases} q_1 = \lambda q_0 \\ q_2 = q - \lambda q_0 \end{cases}\tag{1.10.1}$$



Здесь  $\lambda$  — неизвестный действительный коэффициент, значение которого находим из равенства нулю скалярного произведения  $B$ -векторов  $q_1$  и  $q_2$ :

$$(q_1, q_2) = \lambda(q_0, q_2) = \lambda(q_0, q - \lambda q_0) = \lambda(q_0, q) - \lambda^2(q_0, q_0) = 0$$

$$\lambda = \frac{(q_0, q)}{(q_0, q_0)} = \frac{a_0 a + b_0 b + c_0 c + d_0 d}{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 + d_0^2} \quad (1.10.2)$$

Формулы (1.10.1), (1.10.2) являются общими, справедливыми для любого евклидова пространства. В  $B$ -пространстве векторы подразделяются на вырожденные и невырожденные. Соотношения, учитывающие именно эту особенность, рассмотрим более подробно.

Так, “вырожденные плоскости”  $B$ -пространства являются взаимно ортогональными, поскольку ортогональны любые два  $B$ -вектора  $q$  и  $p$ , принадлежащие этим плоскостям:

$$q = u + ju = a + ib + ja + jib,$$

$$p = v - jv = c + id - jc - jid \quad (1.10.3)$$

$$(q, p) = (u\bar{v} - u\bar{v} + \bar{u}v - \bar{u}v) / 2 = ac + bd - ac - bd = 0.$$

Отсюда возникает возможность разложения произвольного  $B$ -вектора  $q$  на две вырожденные ортогональные составляющие, которые обозначим как  $q^+$  и  $q^-$ :

$$\begin{cases} q^+ = (u + v)/2 + j(u + v)/2 = (u + v)(1 + j)/2 \\ q^- = (u - v)/2 - j(u - v)/2 = (u - v)(1 - j)/2 \end{cases} \quad (1.10.4)$$

В сумме эти вырожденные составляющие дают исходный невырожденный  $B$ -вектор  $q$ . Запишем также и разность этих составляющих:

$$\begin{cases} q^+ + q^- = u + jv = q \\ q^+ - q^- = v + ju = jq \end{cases} \quad (1.10.5)$$

Из (1.10.5) мы получаем возможность найти вырожденные составляющие  $B$ -вектора непосредственно по его значению  $q$ :

$$\begin{cases} q^+ = (q + jq)/2 = q(1 + j)/2 = qP_j^+ \\ q^- = (q - jq)/2 = q(1 - j)/2 = qP_j^- \end{cases} \quad (1.10.6)$$

В (1.10.6) введены обозначения  **$B$ -проекторов** вектора на вырожденные плоскости  $B$ -пространства:

$$P_j^+ = (1 + j)/2, \quad P_j^- = (1 - j)/2 \quad (1.10.7)$$

$B$ -проекторы обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} P_j^+ P_j^+ &= P_j^+ : [(1 + j)/2]^2 = (1^2 + j^2 + j2)/4 = (1 + j)/2 \\ P_j^- P_j^- &= P_j^- : [(1 - j)/2]^2 = (1^2 + j^2 - j2)/4 = (1 - j)/2 \\ P_j^+ P_j^- &= 0 : [(1 + j)/2][(1 - j)/2] = (1^2 - j^2)/4 = 0 \end{aligned} \quad (1.10.8)$$

$$\bar{P}_j^+ = P_j^+, \quad \bar{P}_j^- = P_j^-, \quad \tilde{P}_j^+ = P_j^-, \quad \tilde{P}_j^- = P_j^+ \quad (1.10.9)$$

Геометрический смысл свойств (1.10.8) достаточно очевиден: повторное проектирование вектора на ту же плоскость не изменяет величину проекции, а проектирование уже имеющейся проекции на другую, ортогональную плоскость даёт ноль. По этой же причине действие  $B$ -проектора на уже вырожденный  $B$ -вектор зависит от типа его вырожденности:

$$q^+ P_j^+ = q^+, \quad q^+ P_j^- = 0, \quad q^- P_j^- = q^-, \quad q^- P_j^+ = 0. \quad (1.10.10)$$

Свойства (1.10.9) вытекают непосредственно из определений (1.10.7). Они означают, что при  $C$ -сопряжении тип  $B$ -проектора не меняется, а при  $B$ -сопряжении тип  $B$ -проектора изменяется на противоположный. Эти свойства удобно использовать при получении сопряжённых выражений, содержащих  $B$ -проектор. Например, (1.10.11).

Отметим, что не только  $B$ -векторы, но и обычные комплексные (или действительные) векторы также могут быть разложены на бикомплексные составляющие, в том числе и на вырожденные. В последнем случае эти составляющие будут  $B$ -сопряжёнными. Например, для комплексного вектора  $z$  получим:

$$\left. \begin{aligned} zP_j^+ &= z/2 + jz/2 = q^+ \\ zP_j^- &= z/2 - jz/2 = q^- \end{aligned} \right\} \rightarrow q^+ + q^- = z$$

Рассмотрим следующие выражения, в которых  $B$ -проекторы действуют на  $B$ -векторы  $q = u + jv$  и  $\tilde{q} = u - jv$ :

$$\begin{aligned} (u + jv)P_j^+ &= (u + jv + ju + v)/2 = (u + v)(1 + j)/2 = (u + v)P_j^+ \\ (u + jv)P_j^- &= (u + jv - ju - v)/2 = (u - v)(1 - j)/2 = (u - v)P_j^- \\ (u - jv)P_j^+ &= (u - jv + ju - v)/2 = (u - v)(1 + j)/2 = (u - v)P_j^+ \\ (u - jv)P_j^- &= (u - jv - ju + v)/2 = (u + v)(1 - j)/2 = (u + v)P_j^- \end{aligned} \quad (1.10.11)$$

Сравнивая левую и правую части этих соотношений, замечаем например, что  $(u + jv)P_j^+ = (u + v)P_j^+$ . Здесь нет никакого противоречия.  $P_j^+$  и  $P_j^-$  — вырожденные сомножители и сокращать их (делить на них) нельзя. Это следует из того, что

$$\det(1 + j) = \det(1 - j) = (1 + j)(1 + j)(1 - j)(1 - j) = (1 - j^2)^2 = 0$$

Выражения (1.10.11) можно интерпретировать так: действие  $B$ -проектора на  $B$ -вектор даёт его комплексную проекцию на соответствующую вырожденную комплексную плоскость в бикомплексном пространстве, действие  $B$ -проектора на саму проекцию приводит к тому же результату. Формулы (1.10.11) показывают, что при нахождении вырожденных проекций  $B$ -вектора  $q$  достаточно выделить его составляющие  $C1(q)$  и  $C2(q)$  и найти их сумму и разность. Например, для  $\exp$ -формы  $B$ -числа (1.7.5) получим:

$$\begin{aligned} P_j^+ \exp(\xi + j\eta) &= P_j^+ \exp \xi (\operatorname{ch} \eta + j \operatorname{sh} \eta) = P_j^+ \exp \xi (\operatorname{ch} \eta + \operatorname{sh} \eta) = \exp(\xi + \eta)(1 + j)/2 \\ P_j^- \exp(\xi + j\eta) &= P_j^- \exp \xi (\operatorname{ch} \eta + j \operatorname{sh} \eta) = P_j^- \exp \xi (\operatorname{ch} \eta - \operatorname{sh} \eta) = \exp(\xi - \eta)(1 - j)/2 \end{aligned} \quad (1.10.12)$$

Примечательно, что при помощи соотношений (1.10.12) мы как бы обходим неприменимость  $\exp$ -формы (1.7.4), (1.7.5) для вырожденных  $B$ -чисел.

В заключение раздела отметим, что и сам вырожденный  $B$ -вектор, например,  $q^+ = u + ju$ , в свою очередь тоже может быть разложен, как на две невырожденные составляющие

$$q_1 = u_1 + jv_1 \quad \text{и} \quad q_2 = q^+ - q_1 = (u - u_1) + j(u - v_1) = u_2 + jv_2 \quad (1.10.13)$$

так и на две вырожденные составляющие

$$q_1^+ = u_1 + ju_1 \quad \text{и} \quad q_2^+ = q^+ - q_1^+ = (u - u_1) + j(u - u_1) = u_2 + ju_2 \quad (1.10.14)$$

Согласно (1.10.14), раскладываемый  $B$ -вектор и его вырожденные составляющие принадлежат одной и той же вырожденной плоскости. Для того чтобы эти составляющие были

ортогональны, следует выбрать направление ( $q_0^+ = u_0 + ju_0$ ) одной из них, а затем найти сами составляющие по формулам (1.10.1), (1.10.2).

Для вырожденных  $B$ -векторов  $q^+$ ,  $q_0^+$ ,  $q_1^+$ ,  $q_2^+$ , формулы (1.10.1), (1.10.2) выражаются через комплексные числа  $u$ ,  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  (где  $u = a + ib$  с соответствующими индексами) и принимают такой вид:

$$\lambda = \frac{u_0 \bar{u} + \bar{u}_0 u}{2u_0 \bar{u}_0} = \frac{a_0 a + b_0 b}{a_0^2 + b_0^2} \quad (1.10.15)$$

$$\begin{cases} u_1 = \lambda u_0 \\ u_2 = u - \lambda u_0 \end{cases} \quad (1.10.16)$$

### 1.11 $B$ -пространство как неевклидово

В линейном (векторном) пространстве имеются только операции сложения его элементов и операции их умножения на элементы поля или кольца, над которым это пространство задано. Введение метрических понятий (нормы векторов и угла между ними), выраженных через определение скалярного произведения, существенно обогащает операционную базу — дополняет сложение элементов линейного пространства некоторым подобием их умножения. В  $B$ -пространстве операция умножения (1.3.5) определена уже непосредственно для  $B$ -векторов, а скалярное произведение оказывается всего лишь одним из её следствий. В такой ситуации вычислительная ценность скалярного произведения незначительна, и на первый план выступает другой его аспект — возможность придать  $B$ -пространству наглядный евклидов геометрический смысл. То же можно сказать и о тригонометрической форме  $B$ -вектора.

Учтём, однако, что в предыдущих разделах, без привлечения каких-либо метрических построений, была получена *exp*-форма  $B$ -вектора, включающая в себя тригонометрические и гиперболические функции. Это само по себе накладывает на связанные с ними выражения некоторый геометрический оттенок.

Для обычного комплексного числа  $u = a + ib$  тригонометрическая и экспоненциальная формы практически совпадают:

$$u = a + ib = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$u = \exp(\rho + i\varphi) = e^\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

различия имеются в единственной точке  $u = a = b = 0$ , когда  $\det u = 0$  и  $C$ -вектор является вырожденным:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\det u} = |u| = \begin{cases} e^\rho, & \det u > 0 \\ 0, & \det u = 0 \end{cases} \quad (1.11.1)$$

Сравним евклидову тригонометрическую форму  $B$ -вектора (1.9.6), характеризующуюся параметрами  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$ , с *exp*-формой  $B$ -вектора (1.7.4), задаваемой параметрами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ . В тригонометрической форме (1.9.6) вырожденный  $B$ -вектор не отличается от невырожденного. При  $\cos \chi(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \pm \sin \chi(\cos \psi + i \sin \psi)$  норма вырожденного  $B$ -вектора  $\|q\| = r$ , как и при прочих значениях углов  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$ . Тогда как *exp*-формы вырожденного  $B$ -вектора вообще не существует. Если же рассматривать именно невырожденный  $B$ -вектор, то согласно (1.9.11) его евклидова норма

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \|q\| = e^\alpha \sqrt{\operatorname{ch} 2\gamma}$$

В случае евклидовых поворотов  $B$ -вектора через вырожденные значения, постоянство радиуса  $r$  обеспечивается тем, что  $\alpha \rightarrow -\infty$  при  $\gamma \rightarrow \pm\infty$  ( $e^\alpha \rightarrow 0$  при  $\operatorname{ch} 2\gamma \rightarrow \infty$ ), и

возникающая предельная “неопределённость”  $[0 \cdot \infty]$  имеет вполне определённую величину  $r$ .

Если, аналогично правой части соотношения (1.11.1), за норму произвольного  $B$ -вектора принять выражение

$$\llbracket q \rrbracket = \sqrt[4]{\det q} = \begin{cases} e^\alpha, & \det q > 0 \\ 0, & \det q = 0 \end{cases} \quad (1.11.2)$$

то нулевую норму будут иметь не только нулевой  $B$ -вектор, но и все остальные вырожденные  $B$ -векторы. Из соотношений (1.10.4) и (1.10.13), для так определённой нормы, вытекают следующие неравенства:

$$\begin{aligned} q = q^+ + q^- : \quad \llbracket q \rrbracket &= \llbracket q^+ + q^- \rrbracket > \llbracket q^+ \rrbracket + \llbracket q^- \rrbracket \\ q^+ = q_1 + q_2 : \quad \llbracket q^+ \rrbracket &= \llbracket q_1 + q_2 \rrbracket < \llbracket q_1 \rrbracket + \llbracket q_2 \rrbracket \end{aligned} \quad (1.11.3)$$

где  $\llbracket q \rrbracket = e^\alpha > 0$ ,  $\llbracket q_1 \rrbracket = e^{\alpha_1} > 0$ ,  $\llbracket q_2 \rrbracket = e^{\alpha_2} > 0$ , а  $\llbracket q^+ \rrbracket = \llbracket q^- \rrbracket = 0$ . Из *отсутствия* (1.11.3) неравенства треугольника для нормы (1.11.2) следует, что эта норма не является евклидовой.

Таким образом, характеристики вектора, практически совпадавшие (1.11.1) в  $C$ -плоскости, для  $B$ -пространства “расходятся”. И расхождение это продолжается именно по линии разграничения вырожденных и невырожденных векторов. Тем не менее, все координаты невырожденного  $B$ -вектора в *exp*-форме (1.7.4) пропорциональны  $e^\alpha$ . Это позволяет рассматривать параметры  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  как угловые характеристики, а их изменение интерпретировать как повороты вектора — тригонометрические и гиперболические — в неевклидовом  $B$ -пространстве, сохраняющие неевклидову норму  $\llbracket q \rrbracket$  (1.11.2) неизменной. При любых изменениях параметров  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  (и  $\alpha$ ) исходно невырожденный  $B$ -вектор (1.7.4) остаётся невырожденным, а вырожденный  $B$ -вектор (1.10.12) — вырожденным.

## 1.12 $T$ -вектор и его матрицы

Матрица  $N$ -комплексного вектора имеет порядок  $2^N$ . Для того чтобы отличать однотипные (например, единичные) матрицы, соответствующие базисным элементам  $N$ -комплексных векторов, проставим это число ( $N$ ) как верхний индекс базисного элемента. Так, матрицы (моно)комплексных векторов имеют порядок  $2^1 = 2$ , а их базисные и нулевой элементы обозначим:

$$1^{(1)} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad i^{(1)} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right\|, \quad 0^{(1)} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| \quad (1.12.1)$$

Базисные элементы бикомплексных векторов имеют четвёртый порядок и строятся как блочные матрицы из комплексных базисных элементов следующим образом:

$$\begin{aligned} 1^{(2)} = \left\| \begin{array}{cc} 1^{(1)} & 0^{(1)} \\ 0^{(1)} & 1^{(1)} \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|, & i^{(2)} = \left\| \begin{array}{cc} i^{(1)} & 0^{(1)} \\ 0^{(1)} & i^{(1)} \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right\| \\ j^{(2)} = \left\| \begin{array}{cc} 0^{(1)} & 1^{(1)} \\ 1^{(1)} & 0^{(1)} \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|, & ij^{(2)} = \left\| \begin{array}{cc} 0^{(1)} & i^{(1)} \\ i^{(1)} & 0^{(1)} \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{aligned} \quad (1.12.2)$$

По аналогичному (1.12.2) принципу построим матрицы восьмого порядка для триком-  
плексных векторов:

$$\begin{aligned} 1^{(3)} &= \left\| \begin{array}{cc} 1^{(2)} & 0^{(2)} \\ 0^{(2)} & 1^{(2)} \end{array} \right\|, \quad i^{(3)} = \left\| \begin{array}{cc} i^{(2)} & 0^{(2)} \\ 0^{(2)} & i^{(2)} \end{array} \right\|, \quad j^{(3)} = \left\| \begin{array}{cc} j^{(2)} & 0^{(2)} \\ 0^{(2)} & j^{(2)} \end{array} \right\|, \quad ij^{(3)} = \left\| \begin{array}{cc} ij^{(2)} & 0^{(2)} \\ 0^{(2)} & ij^{(2)} \end{array} \right\| \\ k^{(3)} &= \left\| \begin{array}{cc} 0^{(2)} & 1^{(2)} \\ 1^{(2)} & 0^{(2)} \end{array} \right\|, \quad ik^{(3)} = \left\| \begin{array}{cc} 0^{(2)} & i^{(2)} \\ i^{(2)} & 0^{(2)} \end{array} \right\|, \quad jk^{(3)} = \left\| \begin{array}{cc} 0^{(2)} & j^{(2)} \\ j^{(2)} & 0^{(2)} \end{array} \right\|, \quad ijk^{(3)} = \left\| \begin{array}{cc} 0^{(2)} & ij^{(2)} \\ ij^{(2)} & 0^{(2)} \end{array} \right\| \end{aligned} \quad (1.12.3)$$

Базисные  $T$ -элементы, аналогичные бикомплексным, получаем, располагая блоки соответствующих  $B$ -элементов на главной диагонали. Для получения четырёх новых элементов — те же блоки расположим на побочной диагонали. В развёрнутом виде матрицы базисных элементов  $T$ -вектора представлены на отдельной странице в таблице 1.12.1.

Таким образом, переход к  $N$ -комплексному числу следующего порядка увеличивает количество базисных элементов и порядок соответствующих им матриц вдвое. В алгебраической форме записи  $N$ -комплексного числа это выражается в появлении одного нового символа ( $i, j, k, \dots$ ), присоединяющего к  $N$ -комплексному числу исходного уровня ещё один аналогичный блок:

$$\begin{aligned} \text{действительное:} & \quad a \\ \text{комплексное:} & \quad u = a + ib, \\ \text{бикомплексное:} & \quad q = u + jv = (a + ib) + j(c + id), \\ \text{трикомплексное:} & \quad r = q_1 + kq_2 \\ & \quad = (u_1 + jv_1) + k(u_2 + jv_2) = \\ & \quad = (a_1 + ib_1 + jc_1 + id_1) + k(a_2 + ib_2 + jc_2 + id_2) \\ & \quad = a_1 + ib_1 + jc_1 + id_1 + ka_2 + kjb_2 + kjc_2 + kjd_2 \end{aligned} \quad (1.12.4)$$

Соответствующие матричные формы записи  $T$ -числа тоже включены в таблицу 1.12.1. Закон произведения базисных элементов таков:

$$ii = -1, \quad jj = kk = 1, \quad (1.12.5)$$

чем и определяется произведение  $T$ -чисел в алгебраической форме.

Таким образом, исчисление  $T$ -векторов в алгебраической форме аналогично исчислению  $B$ -векторов. При этом в матричной форме все вычисления (не только  $T$ -, но и  $B$ -,  $C$ - и  $R$ -векторные) выполняется на матрицах порядка  $2^3 = 8$ .

Учитывая указанную аналогию, мы не будем заново рассматривать для  $T$ -векторов все операции, уже изложенные для  $B$ -векторов, а развитие некоторых из этих операций и обозначений в  $T$ -пространстве опишем кратко.

### 1.13 Сопряжённые формы и определитель $T$ -вектора

При  $C$ -,  $B$ - или  $T$ -сопряжении  $T$ -чисел происходит смена знака только у соответствующего символа —  $i, j$  или  $k$ . Операции различных типов сопряжения независимы. Обозначать  $T$ -сопряжение  $T$ -вектора  $r$  будем как  $\ddot{r}$ , то есть

$$r = q_1 + kq_2, \quad \ddot{r} = q_1 - kq_2 \quad (1.13.1)$$

В обозначениях (1.13.1) получение двух  $B$ -координат  $T$ -вектора будет выглядеть так:

$$B1(r) = q_1, \quad B2(r) = q_2; \quad B1(\ddot{r}) = q_1, \quad B2(\ddot{r}) = -q_2 \quad (1.13.2)$$

Таблица 1.12.1:

Матрицы базисных элементов  $T$ -вектора

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c}
 \left\| \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right\| & , & \begin{array}{c}
 \left\| \begin{array}{cccc}
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0
 \end{array} \right\| \\
 \begin{array}{c}
 0^{(2)} \\
 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\
 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\
 0 \ 0 \ 0 \ 1
 \end{array}
 \end{array} & , & \begin{array}{c}
 \left\| \begin{array}{cccc}
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0
 \end{array} \right\| \\
 \begin{array}{c}
 0^{(2)} \\
 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\
 -1 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\
 0 \ 0 \ -1 \ 0
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \left\| \begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0
 \end{array} \right\| & , & \begin{array}{c}
 \left\| \begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right\| \\
 \begin{array}{c}
 0^{(2)} \\
 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\
 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\
 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 0 \ 1 \ 0 \ 0
 \end{array}
 \end{array} & , & \begin{array}{c}
 \left\| \begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right\| \\
 \begin{array}{c}
 0^{(2)} \\
 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\
 0 \ 0 \ -1 \ 0 \\
 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\
 -1 \ 0 \ 0 \ 0
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \left\| \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right\| & , & \begin{array}{c}
 \left\| \begin{array}{cccc}
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0
 \end{array} \right\| \\
 \begin{array}{c}
 0^{(2)} \\
 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\
 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\
 0 \ 0 \ 0 \ 1
 \end{array}
 \end{array} & , & \begin{array}{c}
 \left\| \begin{array}{cccc}
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0
 \end{array} \right\| \\
 \begin{array}{c}
 0^{(2)} \\
 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\
 -1 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\
 0 \ 0 \ -1 \ 0
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \left\| \begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0
 \end{array} \right\| & , & \begin{array}{c}
 \left\| \begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right\| \\
 \begin{array}{c}
 0^{(2)} \\
 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\
 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\
 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 0 \ 1 \ 0 \ 0
 \end{array}
 \end{array} & , & \begin{array}{c}
 \left\| \begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right\| \\
 \begin{array}{c}
 0^{(2)} \\
 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\
 0 \ 0 \ -1 \ 0 \\
 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\
 -1 \ 0 \ 0 \ 0
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Матрицы  $T$ -числа в бикомплексной, комплексной и действительной формах

$$\left\| \begin{array}{cc}
 q_1 & q_2 \\
 q_2 & q_1
 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc}
 u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\
 v_1 & u_1 & v_2 & u_2 \\
 u_2 & v_2 & u_1 & v_1 \\
 v_2 & u_2 & v_1 & u_1
 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccccccccc}
 a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\
 -b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 & -b_2 & a_2 & -d_2 & c_2 \\
 c_1 & d_1 & a_1 & b_1 & c_2 & d_2 & a_2 & b_2 \\
 -d_1 & c_1 & -b_1 & a_1 & -d_2 & c_2 & -b_2 & a_2 \\
 a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\
 -b_2 & a_2 & -d_2 & c_2 & -b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 \\
 c_2 & d_2 & a_2 & b_2 & c_1 & d_1 & a_1 & b_1 \\
 -d_2 & c_2 & -b_2 & a_2 & -d_1 & c_1 & -b_1 & a_1
 \end{array} \right\|$$

Отсюда, с учётом обозначений (1.12.4), получим четыре  $C$ -координаты:

$$\begin{aligned} C1(q_1) = C1[B1(r)] = u_1, \quad C2(q_1) = C2[B1(r)] = v_1; \\ C1(q_2) = C1[B2(r)] = u_2, \quad C2(q_2) = C2[B2(r)] = v_2 \end{aligned} \quad (1.13.3)$$

При помощи операций  $\text{Re}(\dots)$  и  $\text{Im}(\dots)$ , которые в нашей системе обозначений выглядели бы как  $R1(\dots)$  и  $R2(\dots)$ , можем выделить из (1.13.3) восемь действительных координат  $T$ -вектора  $r$ .

Определитель  $\det r$  — действительное число, которое получается в результате произведения всех восьми сопряжённых форм  $T$ -вектора:

$$\det r = r \bar{r} \tilde{r} \tilde{\bar{r}} \ddot{r} \ddot{\bar{r}} \ddot{\tilde{r}} \ddot{\tilde{\bar{r}}} \quad (1.13.4)$$

### 1.14 Экспонента от $T$ -аргумента

Опираясь на ряд (1.7.1), при  $x = k\alpha$ ,  $x = ik\alpha$ ,  $x = jk\alpha$  и  $x = ijk\alpha$ , аналогично (1.7.2) и (1.7.3) получим:

$$\begin{aligned} \exp(k\alpha) &= \text{ch}(k\alpha) + \text{sh}(k\alpha) = \text{ch } \alpha + k \text{ sh } \alpha \\ \exp(ik\alpha) &= \text{ch}(ik\alpha) + \text{sh}(ik\alpha) = \cos \alpha + ik \sin \alpha \\ \exp(jk\alpha) &= \text{ch}(jk\alpha) + \text{sh}(jk\alpha) = \text{ch } \alpha + jk \text{ sh } \alpha \\ \exp(ijk\alpha) &= \text{ch}(ijk\alpha) + \text{sh}(ijk\alpha) = \cos \alpha + ijk \sin \alpha \end{aligned} \quad (1.14.1)$$

и соответствующие им формулы Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{e^{k\alpha} + e^{-k\alpha}}{2} = \text{ch}(k\alpha) = \text{ch } \alpha \\ \frac{e^{k\alpha} - e^{-k\alpha}}{2} = \text{sh}(k\alpha) = k \text{ sh } \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{e^{ik\alpha} + e^{-ik\alpha}}{2} = \text{ch}(ik\alpha) = \cos \alpha \\ \frac{e^{ik\alpha} - e^{-ik\alpha}}{2} = \text{sh}(ik\alpha) = ik \sin \alpha \end{cases} \quad (1.14.2)$$

$$\begin{cases} \frac{e^{jk\alpha} + e^{-jk\alpha}}{2} = \text{ch}(jk\alpha) = \text{ch } \alpha \\ \frac{e^{jk\alpha} - e^{-jk\alpha}}{2} = \text{sh}(jk\alpha) = jk \text{ sh } \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{e^{ijk\alpha} + e^{-ijk\alpha}}{2} = \text{ch}(ijk\alpha) = \cos \alpha \\ \frac{e^{ijk\alpha} - e^{-ijk\alpha}}{2} = \text{sh}(ijk\alpha) = ijk \sin \alpha \end{cases}$$

Если в качестве аргумента экспоненты взять  $T$ -число

$$\rho = \rho_1 + i\rho_2 + j\rho_3 + ij\rho_4 + k\rho_5 + ik\rho_6 + jk\rho_7 + ijk\rho_8 \quad (1.14.3)$$

где  $\rho_1, \dots, \rho_8$  — действительные числа, то с учётом (1.7.2) и (1.14.1)  $\exp$ -форма  $T$ -числа  $r$  примет следующий вид:

$$\begin{aligned} r = \exp \rho = \exp(\rho_1 + i\rho_2 + j\rho_3 + ij\rho_4 + k\rho_5 + ik\rho_6 + jk\rho_7 + ijk\rho_8) = \\ = e^{\rho_1} (\cos \rho_2 + i \sin \rho_2) (\text{ch } \rho_3 + j \text{ sh } \rho_3) (\cos \rho_4 + ij \sin \rho_4) (\text{ch } \rho_5 + k \text{ sh } \rho_5) \times \\ \times (\cos \rho_6 + ik \sin \rho_6) (\text{ch } \rho_7 + jk \text{ sh } \rho_7) (\cos \rho_8 + ijk \sin \rho_8) \end{aligned} \quad (1.14.4)$$

После раскрытия скобок в (1.14.4) и группировки, каждая из восьми действительных координат  $T$ -вектора  $r$  окажется выраженной через действительные гиперболические и тригонометрические функции параметров  $\rho_2, \dots, \rho_8$ .

Из множества других возможных форм записи  $T$ -вектора отметим ещё только необходимую в дальнейшем  $B$ - $\exp$ -форму

$$\begin{aligned} r = q_1 + kq_2 = \exp \kappa_1 + k \exp \kappa_2 = \\ = \exp(\alpha_1 + i\beta_1 + j\gamma_1 + ij\delta_1) + k \exp(\alpha_2 + i\beta_2 + j\gamma_2 + ij\delta_2) \end{aligned} \quad (1.14.5)$$

и напомним, что параметры  $\exp$ -формы и  $B$ - $\exp$ -формы  $T$ -вектора отнюдь не совпадают друг с другом:  $\rho_1 + i\rho_2 + j\rho_3 + ij\rho_4 \neq \alpha_1 + i\beta_1 + j\gamma_1 + ij\delta_1$  и т.п.

### 1.15 Вырожденные $T$ -векторы. $T$ - и $BT$ -проекторы

Пусть  $T$ -вектор  $r = q_1 + kq_2 = (u_1 + jv_1) + k(u_2 + jv_2)$ . Запишем его определитель (1.13.4) в развёрнутом виде:

$$\begin{aligned} \det r &= \\ &= (q_1 + kq_2)(\bar{q}_1 + k\bar{q}_2)(\tilde{q}_1 + k\tilde{q}_2)(\tilde{\tilde{q}}_1 + k\tilde{\tilde{q}}_2)(q_1 - kq_2)(\bar{q}_1 - k\bar{q}_2)(\tilde{q}_1 - k\tilde{q}_2)(\tilde{\tilde{q}}_1 - k\tilde{\tilde{q}}_2) = \quad (1.15.1) \\ &= (q_1^2 - q_2^2)(\bar{q}_1^2 - \bar{q}_2^2)(\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2)(\tilde{\tilde{q}}_1^2 - \tilde{\tilde{q}}_2^2) \end{aligned}$$

Выражение (1.15.1) равно нулю при  $q_1 = \pm q_2$ . Если  $q_1 \neq \pm q_2$ , но сами  $B$ -числа  $q_1$  и  $q_2$  вырождены ( $q_1 = u + ju$ ,  $q_2 = v + jv$ ,  $u \neq v$ ), то

$$\begin{aligned} q_1^2 - q_2^2 &= (u + ju)^2 - (v + jv)^2 = (u^2 - v^2)(1 + j)^2 \\ \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2 &= (u - ju)^2 - (v - jv)^2 = (u^2 - v^2)(1 - j)^2 \\ (q_1^2 - q_2^2)(\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2) &= [(u^2 - v^2)(1 + j)(1 - j)]^2 = 0 \end{aligned}$$

и произведение (1.15.1) опять оказывается равным нулю. Таким образом, условия вырожденности  $T$ -числа принимают следующий вид:

$$\det r = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} q_1 = +q_2 \\ q_1 = -q_2 \\ u_1 = +v_1, \quad u_2 = +v_2 \\ u_1 = -v_1, \quad u_2 = -v_2 \end{cases} \quad (1.15.2)$$

Отметим, что если  $B$ -числа  $q_1$  и  $q_2$  имеют различный тип вырожденности ( $q_1 = q_1^+$  при  $q_2 = q_2^-$  или  $q_1 = q_1^-$  при  $q_2 = q_2^+$ ), то  $\det r \neq 0$ .

#### $T$ -проекторы

$$P_k^+ = (1 + k)/2, \quad P_k^- = (1 - k)/2 \quad (1.15.3)$$

осуществляют проектирование 8-мерного  $T$ -вектора в два ортогональных вырожденных 4-мерных  $B$ -подпространства и обладают следующими *свойствами*:

$$\begin{aligned} P_k^+ P_k^+ &= P_k^+ & : & \quad [(1 + k)/2]^2 = (1^2 + k^2 + k^2)/4 = (1 + k)/2 \\ P_k^- P_k^- &= P_k^- & : & \quad [(1 - k)/2]^2 = (1^2 + k^2 - k^2)/4 = (1 - k)/2 \\ P_k^+ P_k^- &= 0 & : & \quad [(1 + k)/2][(1 - k)/2] = (1^2 - k^2)/4 = 0 \end{aligned} \quad (1.15.4)$$

$$\tilde{P}_k^+ = \bar{P}_k^+ = P_k^+, \quad \tilde{P}_k^- = \bar{P}_k^- = P_k^-, \quad \ddot{P}_k^+ = P_k^-, \quad \ddot{P}_k^- = P_k^+ \quad (1.15.5)$$

Смысл свойств (1.15.4), (1.15.5) аналогичен смыслу свойств (1.10.8), (1.10.9)  $B$ -проекторов.

#### Действие $T$ -проекторов на $T$ -вектор :

$$\begin{aligned} rP_k^+ &= (q_1 + kq_2)(1 + k)/2 = (q_1 + q_2)(1 + k)/2 = \\ &= [(u_1 + u_2) + j(v_1 + v_2)]P_k^+ = r_{(k)}^+ \equiv r^+ \\ rP_k^- &= (q_1 + kq_2)(1 - k)/2 = (q_1 - q_2)(1 - k)/2 = \\ &= [(u_1 - u_2) + j(v_1 - v_2)]P_k^- = r_{(k)}^- \equiv r^- \end{aligned} \quad (1.15.6)$$

Если  $q_1 = \pm q_2$ , то  $T$ -вектор  $r$  является вырожденным и полностью расположен в одном из двух вырожденных  $B$ -подпространств. Его проекция во второе  $B$ -подпространство при этом равна нулю. Например, при  $q_1 = q_2$  проекция  $rP_k^- = r^- = 0$ , а  $rP_k^+ = r^+ = r$ . Непосредственно для  $T$ -проектирования  $T$ -вектора запись формул (15.6) через комплексные



координаты  $u$  и  $v$  не является необходимой и приведена здесь для сравнения со следующим абзацем.

**Действие  $B$ -проекторов на  $T$ -вектор.**

Действие  $B$ -проекторов на  $T$ -вектор заключается в их действии на каждую из  $B$ -координат  $q_1$  и  $q_2$   $T$ -вектора  $r$  согласно формулам (1.10.11):

$$\begin{aligned} rP_j^+ &= (q_1 + kq_2) P_j^+ = [(u_1 + jv_1) + k(u_2 + jv_2)] P_j^+ = [(u_1 + v_1) + k(u_2 + v_2)] P_j^+ = r_{(j)}^+ \\ rP_j^- &= (q_1 + kq_2) P_j^- = [(u_1 + jv_1) + k(u_2 + jv_2)] P_j^- = [(u_1 - v_1) + k(u_2 - v_2)] P_j^- = r_{(j)}^- \end{aligned} \quad (1.15.7)$$

Таким образом, здесь происходит проектирование каждой из двух 4-мерных  $B$ -координат 8-мерного  $T$ -вектора на две соответствующие вырожденные 2-мерные  $C$ -плоскости. В итоге имеем две ортогональные 4-мерные суммы пар  $C$ -подпространств. Если  $B$ -координаты  $q_1$  и  $q_2$   $T$ -вектора  $r$  сами являются вырожденными (по  $j$ , с одинаковым типом вырожденности), то одна из двух  $B$ -проекции (1.15.7)  $T$ -вектора равна нулю, а вторая представляет собой весь  $T$ -вектор. Например, при  $u_1 = v_1$  и  $u_2 = v_2$  проекция  $rP_j^- = 0$ , а

$$rP_j^+ = 2(u_1 + ku_2) P_j^+ = (u_1 + ku_2)(1 + j) = u_1 + ju_1 + ku_2 + jku_2 = r_{(j)}^+ = r$$

**$BT$ -проекторы.**

Как следует из двух предыдущих подразделов, для  $T$ -вектора возможно разложение на две различные (по  $k$  и по  $j$ ) пары вырожденных 4-мерных составляющих. Эти разложения обеспечиваются соответственно проекторами  $P_k^+, P_k^-$  и  $P_j^+, P_j^-$ . Суперпозиция обоих типов проекторов имеет вид:

$$\begin{aligned} P_j^+ P_k^+ &= (1 + j)(1 + k)/4 = (1 + j + k + jk)/4 \equiv P_{jk}^{++} \\ P_j^+ P_k^- &= (1 + j)(1 - k)/4 = (1 + j - k - jk)/4 \equiv P_{jk}^{+-} \\ P_j^- P_k^+ &= (1 - j)(1 + k)/4 = (1 - j + k - jk)/4 \equiv P_{jk}^{-+} \\ P_j^- P_k^- &= (1 - j)(1 - k)/4 = (1 - j - k + jk)/4 \equiv P_{jk}^{--} \end{aligned} \quad (1.15.8)$$

и обеспечивает разложение  $T$ -вектора на четыре комплексные вырожденные составляющие. В евклидовом  $T$ -пространстве эти составляющие попарно ортогональны, поскольку действие проекторов (1.15.8) друг на друга даёт следующие результаты (см. таблицу 1.15.1).

Таблица 1.15.1:

$\times$	$P_{jk}^{++}$	$P_{jk}^{+-}$	$P_{jk}^{-+}$	$P_{jk}^{--}$
$P_{jk}^{++}$	$P_{jk}^{++}$	0	0	0
$P_{jk}^{+-}$	0	$P_{jk}^{+-}$	0	0
$P_{jk}^{-+}$	0	0	$P_{jk}^{-+}$	0
$P_{jk}^{--}$	0	0	0	$P_{jk}^{--}$

В таблице 1.15.1 на пересечении строк и столбцов отображены произведения соответствующих  $BT$ -проекторов. Справедливость таблицы можно проверить прямым вычислением на основе самих формул (1.15.8). Из этих же формул следуют и свойства сопряжения  $BT$ -проекторов:

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_{jk}^{++} &= P_{jk}^{-+}, \tilde{P}_{jk}^{+-} = P_{jk}^{--}, \tilde{P}_{jk}^{-+} = P_{jk}^{++}, \tilde{P}_{jk}^{--} = P_{jk}^{+-} \\
 P_{jk}^{++} &= P_{jk}^{+-}, P_{jk}^{+-} = P_{jk}^{++}, P_{jk}^{-+} = P_{jk}^{--}, P_{jk}^{--} = P_{jk}^{-+} \\
 \tilde{P}_{jk}^{++} &= P_{jk}^{--}, \tilde{P}_{jk}^{+-} = P_{jk}^{-+}, \tilde{P}_{jk}^{-+} = P_{jk}^{+-}, \tilde{P}_{jk}^{--} = P_{jk}^{++}
 \end{aligned} \tag{1.15.9}$$

Комплексное сопряжение на тип  $BT$ -проекторов не влияет и в формулах (1.15.9) не отражено.

Для нахождения той или иной вырожденной проекции достаточно записать  $T$ -вектор в комплексной алгебраической форме, а затем сложить его  $C$ -координаты с учётом смены соответствующих знаков проектором (как при вычислении скалярного произведения в координатном виде). Например,

$$\begin{aligned}
 rP_{jk}^{+-} &= (u_1 + jv_1 + ku_2 + jkv_2) (1 + j - k - jk) / 4 = (u_1 + v_1 - u_2 - v_2) P_{jk}^{+-} \\
 \tilde{r}P_{jk}^{--} &= (u_1 - jv_1 + ku_2 - jkv_2) (1 - j - k + jk) / 4 = (u_1 + v_1 - u_2 - v_2) P_{jk}^{--}
 \end{aligned}$$

В приведённом примере при помощи разных проекторов ( $P_{jk}^{+-}$  и  $P_{jk}^{--}$ ) мы получили одинаковые комплексные значения  $(u_1 + v_1 - u_2 - v_2)$  координат проекций разных  $T$ -векторов ( $r$  и  $\tilde{r}$ ) на различные вырожденные  $C$ -плоскости в  $T$ -пространстве. Разумеется, такой результат можно получить и непосредственным выполнением умножения, группировки и вынесения за скобки.

Этот же пример иллюстрирует и свойства (1.15.9), так как вторую строку примера можно получить  $B$ -сопряжением его первой строки (значение комплексной проекции  $u_1 + v_1 - u_2 - v_2$  от  $B$ -сопряжения не зависит).

### 1.16 $F$ -вектор

$F$ -вектор  $f$  получим объединением двух  $T$ -векторов  $r_1$  и  $r_2$  в единую систему при помощи новой базисной единицы  $l$  (при  $l^2 = 1$ ):

$$\begin{aligned}
 f &= r_1 + lr_2 = (q_1 + kq_2) + l(q_3 + kq_4) = \\
 &= (u_1 + jv_1) + k(u_2 + jv_2) + l(u_3 + jv_3) + kl(u_4 + jv_4)
 \end{aligned} \tag{1.16.1}$$

где  $q_i$  обозначают его бикомплексные, а  $u_i$  и  $v_i$  — комплексные координаты.  $F$ -сопряжение  $F$ -вектора заключается в смене знака перед базисной единицей  $l$  и будет обозначаться следующим образом:

$$f = r_1 + lr_2, \quad \check{f} = r_1 - lr_2 \tag{1.16.2}$$

Определитель  $F$ -вектора является действительным неотрицательным числом и может быть вычислен как произведение всех шестнадцати его сопряженных значений:

$$\det f = f \check{f} \tilde{f} \check{\tilde{f}} \dots \check{\tilde{\tilde{f}}} \tag{1.16.3}$$

Из входящего в определитель произведения

$$f \check{f} = (r_1 + lr_2) (r_1 - lr_2) = r_1^2 - r_2^2 \tag{1.16.4}$$

следует, что при  $r_1 = \pm r_2$   $F$ -вектор будет вырожденным. Для произвольного  $F$ -вектора разложение на вырожденные составляющие найдём при помощи соответствующих проекторов.

### $F$ -проекторы

$$P_1^+ = (1 + l)/2, \quad P_1^- = (1 - l)/2 \quad (1.16.5)$$

осуществляют проектирование 16-мерного  $F$ -вектора в два ортогональных вырожденных 8-мерных  $T$ -подпространства. В обозначениях (1.16.1) запишем

### действие $F$ -проекторов на $F$ -вектор:

$$\begin{aligned} fP_1^+ &= (r_1 + lr_2)(1 + l)/2 = (r_1 + r_2)(1 + l)/2 = f_{(l)}^+ \equiv f^+ \\ fP_1^- &= (r_1 + lr_2)(1 - l)/2 = (r_1 - r_2)(1 - l)/2 = f_{(l)}^- \equiv f^- \end{aligned} \quad (1.16.6)$$

Если  $r_1 = \pm r_2$ , то  $F$ -вектор  $f$  является вырожденным и полностью расположен в одном из двух вырожденных  $T$ -подпространств. Его проекция во второе  $T$ -подпространство при этом равна нулю. Например, при  $r_1 = r_2$  проекция  $fP_1^- = f^- = 0$ , а  $fP_1^+ = f^+ = f$ .

### Действие $T$ -проекторов на $F$ -вектор

заключается в их действии на каждую из  $T$ -координат  $r_1$  и  $r_2$   $F$ -вектора  $f$ :

$$\begin{aligned} fP_k^+ &= (r_1 + lr_2)P_k^+ = [(q_1 + kq_2) + l(q_3 + kq_4)]P_j^+ = [(q_1 + q_2) + l(q_3 + q_4)]P_k^+ = f_{(k)}^+ \\ fP_k^- &= (r_1 + lr_2)P_k^- = [(q_1 + kq_2) + l(q_3 + kq_4)]P_j^- = [(q_1 - q_2) + l(q_3 - q_4)]P_k^- = f_{(k)}^- \end{aligned} \quad (1.16.7)$$

Таким образом, здесь происходит проектирование каждой из двух 8-мерных  $T$ -координат 16-мерного  $F$ -вектора в два соответствующих вырожденных 4-мерных  $B$ -пространства. В итоге имеем две ортогональные 8-мерные суммы пар вырожденных  $B$ -подпространств. Если  $T$ -координаты  $r_1$  и  $r_2$   $F$ -вектора  $f$  сами являются вырожденными (по  $k$ , с одинаковым типом вырожденности), то одна из двух  $T$ -проекции (1.16.7)  $F$ -вектора равна нулю, а вторая представляет собой весь  $F$ -вектор. Например, при  $q_1 = q_2$  и  $q_3 = q_4$  проекция  $fP_k^- = 0$ , а

$$\begin{aligned} fP_k^+ &= 2(q_1 + lq_3)P_k^+ = (q_1 + lq_3)(1 + k) = q_1 + kq_1 + lq_3 + klq_3 = \\ &= u_1 + jv_1 + ku_1 + jkv_1 + lu_3 + jlv_3 + klu_3 + jklv_3 = f \end{aligned}$$

при умножении такого  $F$ -вектора на его  $T$ -сопряжённое значение получим

$$f\ddot{f} = (q_1 + lq_3)^2(1 + k)(1 - k) = 0 \quad (1.16.8)$$

### Действие $B$ -проекторов на $F$ -вектор

заключается в их действии на каждую из  $B$ -координат  $q_1, q_2, q_3$  и  $q_4$   $F$ -вектора  $f$ :

$$\begin{aligned} fP_j^+ &= (r_1 + lr_2)P_j^+ = [(u_1 + jv_1) + k(u_2 + jv_2) + l(u_3 + jv_3) + kl(u_4 + jv_4)]P_j^+ = \\ &= [(u_1 + v_1) + k(u_2 + v_2) + l(u_3 + v_3) + kl(u_4 + v_4)]P_j^+ = f_{(j)}^+ \\ fP_j^- &= (r_1 + lr_2)P_j^- = [(u_1 + jv_1) + k(u_2 + jv_2) + l(u_3 + jv_3) + kl(u_4 + jv_4)]P_j^- = \\ &= [(u_1 - v_1) + k(u_2 - v_2) + l(u_3 - v_3) + kl(u_4 - v_4)]P_j^- = f_{(j)}^- \end{aligned} \quad (1.16.9)$$

Таким образом, здесь происходит проектирование каждой из четырёх 4-мерных  $B$ -координат 16-мерного  $F$ -вектора на две соответствующие вырожденные 2-мерные  $C$ -плоскости. В итоге имеем две ортогональные 8-мерные суммы четвёрок  $C$ -подпространств.

Если  $B$ -координаты  $q_1, q_2, q_3$  и  $q_4$   $F$ -вектора  $f$  сами являются вырожденными (по  $j$ , с одинаковым типом вырожденности), то одна из двух  $B$ -проекций (1.16.8)  $F$ -вектора равна нулю, а вторая представляет собой весь  $F$ -вектор. Например, при  $u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_3$  и  $u_4 = v_4$  проекция  $fP_j^- = 0$ , а

$$\begin{aligned} fP_j^+ &= (r_1 + lr_2)P_j^+ = (u_1 + ku_2 + lu_3 + klu_4)(1 + j) = \\ &= u_1 + ju_1 + ku_2 + jku_2 + lu_3 + jlu_3 + klu_4 + jklu_4 = f_{(j)}^+ = f \end{aligned}$$

при умножении такого  $F$ -вектора на его  $B$ -сопряжённое значение получим

$$f\tilde{f} = (u_1 + ku_2 + lu_3 + klu_4)^2(1 + j)(1 - j) = 0 \quad (1.16.10)$$

Собирая вместе результаты (1.16.4), (1.16.8), (1.16.10), с учётом (1.16.3) будем иметь следующий перечень условий вырожденности  $F$ -вектора:

$$\det f = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} r_1 = +r_2 \\ r_1 = -r_2 \\ q_1 = +q_2, q_3 = +q_4 \\ q_1 = -q_2, q_3 = -q_4 \\ u_1 = +v_1, u_2 = +v_2, u_3 = +v_3, u_4 = +v_4 \\ u_1 = -v_1, u_2 = -v_2, u_3 = -v_3, u_4 = -v_4 \end{cases} \quad (1.16.11)$$

В  $F$ -пространстве действуют три парные суперпозиции проекторов:  $BT$ ,  $BF$  и  $TF$ .  $BT$ -проектор действует на каждую  $T$ -векторную составляющую  $F$ -вектора способами (1.15.8), рассмотренными в предыдущем разделе. Остальные две суперпозиции имеют следующий вид:

#### $TF$ -проекторы

$$\begin{aligned} P_k^+P_l^+ &= (1 + k)(1 + l)/4 = (1 + k + l + kl)/4 \equiv P_{kl}^{++} \\ P_k^+P_l^- &= (1 + k)(1 - l)/4 = (1 + k - l - kl)/4 \equiv P_{kl}^{+-} \\ P_k^-P_l^+ &= (1 - k)(1 + l)/4 = (1 - k + l - kl)/4 \equiv P_{kl}^{-+} \\ P_k^-P_l^- &= (1 - k)(1 - l)/4 = (1 - k - l + kl)/4 \equiv P_{kl}^{--} \end{aligned} \quad (1.16.12)$$

#### $BF$ -проекторы

$$\begin{aligned} P_j^+P_l^+ &= (1 + j)(1 + l)/4 = (1 + j + l + jl)/4 \equiv P_{jl}^{++} \\ P_j^+P_l^- &= (1 + j)(1 - l)/4 = (1 + j - l - jl)/4 \equiv P_{jl}^{+-} \\ P_j^-P_l^+ &= (1 - j)(1 + l)/4 = (1 - j + l - jl)/4 \equiv P_{jl}^{-+} \\ P_j^-P_l^- &= (1 - j)(1 - l)/4 = (1 - j - l + jl)/4 \equiv P_{jl}^{--} \end{aligned} \quad (1.16.13)$$

Проекторы (1.16.12) и (1.16.13) раскладывают 16-мерный  $F$ -вектор на четыре 4-мерных вырожденных составляющих. Свойства этих проекторов аналогичны свойствам, отражённым в таблице 1.15.1 и формулах (1.15.9).

Сходные по сути свойства имеют и  $BTF$ -проекторы, которые позволяют найти восемь 2-мерных вырожденных (комплексных) координат 16-мерного  $F$ -вектора:

### $BT\bar{F}$ -проекторы

$$\begin{aligned}
 P_j^+ P_k^+ P_l^+ &= (1+j)(1+k)(1+l)/8 = (1+j+k+jk+l+jl+kl+jkl)/8 \equiv P_{jkl}^{+++} \\
 P_j^+ P_k^+ P_l^- &= (1+j)(1+k)(1-l)/8 = (1+j+k+jk-l-jl-kl-jkl)/8 \equiv P_{jkl}^{++-} \\
 P_j^+ P_k^- P_l^+ &= (1+j)(1-k)(1+l)/8 = (1+j-k-jk+l+jl-kl-jkl)/8 \equiv P_{jkl}^{+--} \\
 P_j^+ P_k^- P_l^- &= (1+j)(1-k)(1-l)/8 = (1+j-k-jk-l-jl+kl+jkl)/8 \equiv P_{jkl}^{+-+} \\
 P_j^- P_k^+ P_l^+ &= (1-j)(1+k)(1+l)/8 = (1-j+k-jk+l-jl+kl-jkl)/8 \equiv P_{jkl}^{-++} \\
 P_j^- P_k^+ P_l^- &= (1-j)(1+k)(1-l)/8 = (1-j+k-jk-l+jl-kl+jkl)/8 \equiv P_{jkl}^{-+-} \\
 P_j^- P_k^- P_l^+ &= (1-j)(1-k)(1+l)/8 = (1-j-k+jk+l-jl-kl+jkl)/8 \equiv P_{jkl}^{-+} \\
 P_j^- P_k^- P_l^- &= (1-j)(1-k)(1-l)/8 = (1-j-k+jk-l+jl+kl-jkl)/8 \equiv P_{jkl}^{---}
 \end{aligned} \tag{1.16.14}$$

Отметим, что различные произведения “двойных” проекторов  $BT$ ,  $BF$  и  $TF$  дают в  $F$ -пространстве либо один из “тройных”  $BT\bar{F}$ -проекторов, либо — ноль. Например,

$$\begin{aligned}
 P_{kl}^{++} P_{jl}^{++} &= (P_k^+ P_l^+) (P_j^+ P_l^+) = P_j^+ P_k^+ (P_l^+ P_l^+) = P_j^+ P_k^+ P_l^+ = P_{jkl}^{+++} \\
 P_{kl}^{++} P_{jl}^{+-} &= (P_k^+ P_l^+) (P_j^+ P_l^-) = P_j^+ P_k^+ (P_l^+ P_l^-) = P_j^+ P_k^+ (0) = 0
 \end{aligned}$$

Таким образом, система  $BT\bar{F}$ -проекторов (1.16.14) позволяет однозначно разложить 16-мерный  $F$ -вектор на восемь попарно ортогональных двумерных комплексных составляющих, расположенных в вырожденных плоскостях  $F$ -пространства. На четырёхмерные вырожденные составляющие  $F$ -вектор может быть разложен тремя способами — посредством  $BT$ -,  $BF$ - и  $TF$ -проекторов. Каждый из этих проекторов раскладывает  $F$ -вектор на четыре попарно ортогональных составляющих, расположенных в соответствующих четырёхмерных подпространствах. На пары восьмимерных вырожденных ортогональных составляющих  $F$ -вектор может быть разложен также тремя способами — путём воздействия  $B$ -,  $T$ - и  $F$ -проекторов.

Резюмируя изложенные выше выкладки, констатируем, что каждый невырожденный  $B$ -,  $T$ - или  $F$ -вектор может быть разложен на полностью определённые вырожденные составляющие.

## 2 Релятивистские интерпретации

### 2.1 Соотношение $B$ -вектор — изотропный 4-вектор

Введём для действительных выражений в произведениях (1.8.1) следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 T &= e^{2\alpha} \operatorname{ch} 2\gamma = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (q\bar{q} + \tilde{q}\tilde{\bar{q}})/2 = (u\bar{u} + v\bar{v}) \\
 X &= e^{2\alpha} \operatorname{sh} 2\gamma = 2(ac + bd) = j(q\bar{q} - \tilde{q}\tilde{\bar{q}})/2 = (u\bar{v} + \bar{u}v) \\
 Y &= e^{2\alpha} \cos 2\delta = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) = (q\tilde{q} + \bar{q}\tilde{\bar{q}})/2 = (u\bar{u} - v\bar{v}) \\
 Z &= e^{2\alpha} \sin 2\delta = 2(ad - bc) = -ij(q\tilde{q} - \bar{q}\tilde{\bar{q}})/2 = i(u\bar{v} - \bar{u}v) \\
 F &= e^{2\alpha} \cos 2\beta = (a^2 - b^2 - c^2 + d^2) = (q\tilde{q} + \bar{q}\tilde{\bar{q}})/2 = (u^2 - v^2 + \bar{u}^2 - \bar{v}^2)/2 \\
 G &= e^{2\alpha} \sin 2\beta = 2(ab - cd) = -i(q\tilde{q} - \bar{q}\tilde{\bar{q}})/2 = -i(u^2 - v^2 - \bar{u}^2 + \bar{v}^2)/2
 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Формулы (2.1.1) каждому значению  $B$ -вектора  $q$  однозначно ставят в соответствие шесть действительных переменных  $\{T, X, Y, Z, F, G\}$ , совокупность которых далее будем кратко обозначать как  $\{T..G\}$ . Соответствие может быть выражено в  $R$ -форме, то есть через

действительные координаты  $(a, b, c, d)$   $B$ -вектора, в  $C$ -форме — через комплексные величины  $(u, v, \bar{u}, \bar{v})$  или в  $B$ -форме — через сопряжённые значения самого  $B$ -вектора  $(q, \bar{q}, \tilde{q}, \tilde{\bar{q}})$ . Формы эти эквивалентны и выбор их применения определяется лишь спецификой рассматриваемого вопроса. Экспоненциальная форма ( $exp$ -форма), когда переменные  $\{T..G\}$  выражены через параметры  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ , применима только в случае невырожденного  $B$ -вектора  $q$ .

Соотношения, связывающие аналогично (2.1.1) четыре координаты  $(T, X, Y, Z)$  изотропного 4-вектора с парой комплексных переменных  $(u, v)$ , можно найти ещё в классической монографии Г. Вейля [12] или в более поздней книге Р. Пенроуза и В. Риндлера [13]. В нашем случае, комплексные переменные  $(u, v)$  являются составными частями  $B$ -вектора, что привносит свои закономерности в систему получаемых соотношений.

Так, в  $B$ -форме все переменные  $\{T..G\}$  являются билинейными комбинациями различных сопряжённых значений  $B$ -вектора  $q$  и в этом смысле совершенно равноправны. В силу той же билинейности указанное выше однозначное соответствие не является взаимным, так как противоположным  $B$ -векторам  $(\pm q)$  соответствуют одинаковые значения этих переменных. Как функции от  $(a, b, c, d)$  они определены во всём  $B$ -пространстве. Переменная  $T$ , являясь евклидовым скалярным квадратом (1.9.3)  $B$ -вектора  $q$ , принимает только неотрицательные значения. Область значений остальных пяти функций — всё множество действительных чисел,  $(-\infty, \infty)$ . В  $exp$ -форме переменные  $\{T..G\}$  пропорциональны  $\exp 2\alpha$  и каждая пара в (2.1.1) зависит ещё только от одного параметра:  $\beta, \gamma$  или  $\delta$ .

Запишем соотношения (1.8.1) и их произведения в обозначениях (2.1.1):

$$\begin{aligned} q\bar{q} &= T + jX, & \tilde{q}\tilde{\bar{q}} &= T - jX, & (q\bar{q})(\tilde{q}\tilde{\bar{q}}) &= T^2 - X^2 \\ q\tilde{\bar{q}} &= Y + ijZ, & \bar{q}\tilde{q} &= Y - ijZ, & (q\tilde{\bar{q}})(\bar{q}\tilde{q}) &= Y^2 + Z^2 \\ q\tilde{q} &= F + iG, & \bar{q}\tilde{\bar{q}} &= F - iG, & (q\tilde{q})(\bar{q}\tilde{\bar{q}}) &= F^2 + G^2 \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

откуда следует

$$T^2 - X^2 = Y^2 + Z^2 = F^2 + G^2 = \det q = e^{4\alpha} \quad (2.1.3)$$

Из (2.1.3) можно составить следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 &= 0 \\ T^2 - X^2 - F^2 - G^2 &= 0 \\ Y^2 + Z^2 - F^2 - G^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

первые два из которых имеют структуру, характерную для *изотропного* (светоподобного) 4-вектора. В качестве временной компоненты этих 4-векторов выступает переменная, обозначенная как  $T$ , а остальные три —  $X, Y, Z$  или  $X, F, G$  — как пространственные. (Третье уравнение в (2.1.4) независимым не является и вытекает из двух первых). Отметим, что *сигнатура*  $(+ - - -)$ , характерная для (псевдоевклидова) скалярного квадрата 4-вектора, здесь возникает естественным образом, без привлечения понятий ковариантности и контравариантности координат. Временная составляющая 4-вектора — переменная  $T$  — единственная из шести переменных  $\{T..G\}$ , которая принимает только *неотрицательные* значения. Тем самым, любому  $B$ -вектору сопоставляется 4-вектор *будущего*.

$B$ -пространство — четырёхмерно, а  $B$ -вектор характеризуется четырьмя действительными параметрами —  $(a, b, c, d)$  или  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ . Изотропный 4-вектор, хотя и является объектом четырёхмерного пространства-времени, фактически определяется только тремя параметрами. Например, задание трёх координат  $X, Y, Z$  позволяет определить четвёртую координату  $T$  из первого уравнения (2.1.4). В соотношении  $B$ -вектора и изотропного

4-вектора эта особенность проявляется в том, что для задания четырёх координат  $(T, X, Y, Z)$  используются только три параметра  $B$ -вектора —  $(\alpha, \gamma, \delta)$ . Аналогично, при задании координат  $(T, X, F, G)$  задействованы параметры  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . В этой связи сделаем два замечания. Во-первых, ни один из изотропных 4-векторов, удовлетворяющих (2.1.4), не несёт информации обо всех параметрах исходного  $B$ -вектора. Лишь совокупность этих 4-векторов характеризует  $B$ -вектор в целом. И, во-вторых, указанные 4-векторы не являются независимыми — они имеют общие составляющие. Подчеркнём, что в данном случае мы говорим о самих координатах изотропных 4-векторов, а не об уравнениях, в которые они входят. Так, в соотношениях (2.1.3) уже отсутствуют зависимости от параметров  $(\beta, \gamma, \delta)$ , а уравнения (2.1.4) вообще не содержат характеристик конкретного  $B$ -вектора — этим уравнениям удовлетворяет *любой*  $B$ -вектор.

Физически, координаты мирового вектора описывают не положение, а состояние, процесс, характеристикой которого является скорость. На основе (2.1.1), получим

$$V_x = X/T = \operatorname{sh} 2\gamma / \operatorname{ch} 2\gamma = \operatorname{th} 2\gamma \quad (2.1.5)$$

$$\begin{aligned} V_y = Y/T &= \cos 2\delta / \operatorname{ch} 2\gamma, & V_z = Z/T &= \sin 2\delta / \operatorname{ch} 2\gamma \\ V_f = F/T &= \cos 2\beta / \operatorname{ch} 2\gamma, & V_g = G/T &= \sin 2\beta / \operatorname{ch} 2\gamma \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Как из (2.1.4), так и непосредственно из (2.1.5), (2.1.6) следует, что

$$\begin{aligned} (X^2 + Y^2 + Z^2)/T^2 &= V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = c^2 = 1 \\ (X^2 + F^2 + G^2)/T^2 &= V_x^2 + V_f^2 + V_g^2 = c^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Выражение (2.1.7) определяет полную скорость  $c$ , величина которой постоянна и равна единице, а направление в системах координат  $Oxyz$  или  $Oxfg$  может быть любым, в зависимости от значений координат  $X, Y, Z$  или  $(X, F, G)$ . Здесь  $V_x, V_y, V_z$  и  $V_x, V_f, V_g$  — составляющие скорости  $c$  по соответствующим осям координат. Из формул (2.1.5) и (2.1.6) следует, что каждая из составляющих скорости может принимать значения из интервала  $[-1, 1]$ , но не независимо друг от друга — в совокупности они должны удовлетворять уравнениям (2.1.7).

Пространственные 3-векторы  $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$  и  $\mathbf{c} = (V_x, V_y, V_z)$  параллельны. В случае вырожденного  $B$ -вектора, когда  $T = \pm X$  и  $Y = Z = 0$ , вектор  $\mathbf{R}$  направлен строго по оси  $Ox$ . Если же  $B$ -вектор не вырожден, то положение вектора  $\mathbf{R}$  можно охарактеризовать углом  $\theta$  между осью  $Ox$  и вектором  $\mathbf{R}$ . Так, из (2.1.1) получим

$$\sin \theta = R_{yz}/R = \sqrt{Y^2 + Z^2}/T = 1/\operatorname{ch} 2\gamma \quad (2.1.8)$$

$$\operatorname{tg} \theta = R_{yz}/X = \sqrt{Y^2 + Z^2}/X = 1/\operatorname{sh} 2\gamma \quad (2.1.9)$$

откуда следует, что наибольшее значение  $\sin \theta = 1$  и наибольшее отклонение вектора  $\mathbf{R}$  от оси  $Ox$  при  $\theta = \pi/2$  достигаются, когда  $\gamma = 0$ . При  $\gamma \rightarrow \pm\infty$  угол  $\theta \rightarrow 0$ , а сам вектор  $\mathbf{R}$  всё ближе прилегает к оси  $Ox$  (по или против её направления).

## 2.2 $B$ -число как оператор. Преобразование Лоренца

Пусть  $q_2 = q_1 q$ , где  $q$  рассматривается как оператор, преобразующий операнд  $q_1$  в результат  $q_2$ . Значения  $\bar{q}_2 = \bar{q}_1 \bar{q}$ ,  $\tilde{q}_2 = \tilde{q}_1 \tilde{q}$  и  $\tilde{\tilde{q}}_2 = \tilde{\tilde{q}}_1 \tilde{\tilde{q}}$  получим  $C$ -,  $B$ - и  $CB$ -сопряжением исходного выражения, а произведения сопряжённых результатов преобразования вычислим следующим образом:

$$q_2 \bar{q}_2 = (q_1 q) (\bar{q}_1 \bar{q}) = (q_1 \bar{q}_1) (q \bar{q}), \quad q_2 \tilde{q}_2 = (q_1 \tilde{q}_1) (q \tilde{q}), \quad q_2 \tilde{\tilde{q}}_2 = (q_1 \tilde{\tilde{q}}_1) (q \tilde{\tilde{q}}) \quad (2.2.1)$$

Представим оператор  $q$  ( $\det q \neq 0$ ) в экспоненциальной форме, согласно (1.7.4):

$$q = \exp(\alpha + i\beta + j\gamma + ij\delta) = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta) (\operatorname{ch} \gamma + j \operatorname{sh} \gamma) (\cos \delta + ij \sin \delta) \quad (2.2.2)$$

Из (2.2.2) видно, что полное  $B$ -преобразование является произведением четырёх операций, которые будем называть соответственно  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ - и  $\delta$ -преобразованиями. Преобразование с  $\det q = 1$ , которое имеет место при  $\alpha = 0$ , будем называть  $\alpha 0$ -преобразованием.

Теперь запишем выражения (2.2.1) в обозначениях (2.1.2):

$$\begin{aligned} T_2 + jX_2 &= (T_1 + jX_1) \exp 2(\alpha + j\gamma) = e^{2\alpha} (T_1 + jX_1) (\operatorname{ch} 2\gamma + j \operatorname{sh} 2\gamma) = \\ &= e^{2\alpha} [(T_1 \operatorname{ch} 2\gamma + X_1 \operatorname{sh} 2\gamma) + j(T_1 \operatorname{sh} 2\gamma + X_1 \operatorname{ch} 2\gamma)] \\ Y_2 + ijZ_2 &= (Y_1 + ijZ_1) \exp 2(\alpha + ij\delta) = e^{2\alpha} (Y_1 + ijZ_1) (\cos 2\delta + ij \sin 2\delta) = \\ &= e^{2\alpha} [(Y_1 \cos 2\delta - Z_1 \sin 2\delta) + ij(Y_1 \sin 2\delta + Z_1 \cos 2\delta)] \\ F_2 + iG_2 &= (F_1 + iG_1) \exp 2(\alpha + i\beta) = e^{2\alpha} (F_1 + iG_1) (\cos 2\beta + i \sin 2\beta) = \\ &= e^{2\alpha} [(F_1 \cos 2\beta - G_1 \sin 2\beta) + i(F_1 \sin 2\beta + G_1 \cos 2\beta)] \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

При  $\alpha = 0$  отсюда следует

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 \operatorname{ch} 2\gamma + X_1 \operatorname{sh} 2\gamma, & X_2 &= X_1 \operatorname{ch} 2\gamma + T_1 \operatorname{sh} 2\gamma \\ Y_2 &= Y_1 \cos 2\delta - Z_1 \sin 2\delta, & Z_2 &= Z_1 \cos 2\delta + Y_1 \sin 2\delta \\ F_2 &= F_1 \cos 2\beta - G_1 \sin 2\beta, & G_2 &= G_1 \cos 2\beta + F_1 \sin 2\beta \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Умножив соотношения (2.2.3) на сопряжённые выражения  $T_2 - jX_2$ ,  $Y_2 - ijZ_2$ ,  $F_2 - iG_2$ , (при  $\alpha = 0$ ) получим

$$(T_2^2 - X_2^2 = T_1^2 - X_1^2) = (Y_2^2 + Z_2^2 = Y_1^2 + Z_1^2) = (F_2^2 + G_2^2 = F_1^2 + G_1^2) = \det q_1 \quad (2.2.5)$$

что согласуется с ранее полученным соотношением (2.1.3). В скобках в (2.2.5) сгруппированы выражения, сохраняющиеся при преобразованиях по отдельности.

Выразим  $\operatorname{ch} x$  и  $\operatorname{sh} x$  через  $\operatorname{th} x$ , исходя из основного гиперболического тождества,  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ :

$$1 - \operatorname{th}^2 x = 1/\operatorname{ch}^2 x; \quad \operatorname{ch} x = 1/\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}; \quad \operatorname{sh} x = \operatorname{th} x \operatorname{ch} x = \operatorname{th} x / \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}$$

Тогда, применяя обозначения скорости (2.1.5),  $\operatorname{th} 2\gamma = V_x \equiv V$ , из (2.2.3) при  $\alpha = 0$  получим:

$$\begin{aligned} T_2 + jX_2 &= (T_1 + jX_1) (\operatorname{ch} 2\gamma + j \operatorname{sh} 2\gamma) = (T_1 + jX_1) (1 + jV) / \sqrt{1 - V^2} = \\ &= [(T_1 + X_1 V) + j(X_1 + T_1 V)] / \sqrt{1 - V^2} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Это бикомплексное равенство можно записать в виде двух, более наглядных действительных равенств:

$$T_2 = (T_1 + X_1 V) / \sqrt{1 - V^2}, \quad X_2 = (X_1 + T_1 V) / \sqrt{1 - V^2} \quad (2.2.7)$$

Таким образом,  $B$ -преобразованию  $B$ -вектора соответствует активное преобразование изотропного 4-вектора. При этом,  $\alpha$ -преобразование задаёт изменение масштаба координат векторов (в случае  $\alpha = 0$ , коэффициент изменения равен единице).  $\delta$ - и  $\beta$ -преобразования



определяют обычные повороты 4-векторов в плоскостях  $(Y, Z)$  и  $(F, G)$  соответственно на углы  $2\delta$  и  $2\beta$ , согласно (2.2.4). Тогда как  $\gamma$ -преобразование соответствует преобразованию Лоренца (2.2.7) для координат  $(T, X)$  4-векторов при изменении скорости вдоль оси  $Ox$  на величину  $V$ . Все указанные преобразования — независимы.

Двойное применение  $B$ -вектора (операнд и оператор) порождает двойкую интерпретацию (изотропный 4-вектор и преобразование Лоренца). Отчасти, именно сочетание этих интерпретаций и служит их взаимному обоснованию.

Таким образом, каждому  $B$ -вектору  $(a, b, c, d)$  в базисе  $\{1, i, j, ij\}$  может быть сопоставлен изотропный 4-вектор, если мы будем рассматривать четвёрку чисел  $(T, X, Y, Z)$  как координаты этого 4-вектора в некотором базисе  $\{t, x, y, z\}$ . Тем самым, базису  $\{1, i, j, ij\}$  сопоставляется базис  $\{t, x, y, z\}$ . Преобразуя (умножением на  $q$ )  $B$ -вектор  $q_1$  в  $q_2$ , мы получаем преобразование 4-вектора из состояния  $(T_1, X_1, Y_1, Z_1)$  в состояние  $(T_2, X_2, Y_2, Z_2)$  в том же базисе  $\{t, x, y, z\}$ . Это преобразование является *активным*, так как связано с изменением не базиса, а самого 4-вектора.

### 2.3 Преобразование скорости

Изменения пар координат  $(T, X)$ ,  $(Y, Z)$  и  $(F, G)$  зависят каждое от своего параметра —  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$ . Поэтому они преобразуются независимо друг от друга. В отличие от этого, все составляющие скорости (2.1.6) зависят от параметра  $\gamma$ . Тем самым, при  $\gamma$ -преобразовании будут изменяться не только  $x$ -, но также  $y$ - и  $z$ -составляющие скорости. В отсутствие поворота в плоскости  $(Y, Z)$ , когда  $\delta_2 = \delta_1$ , а  $\gamma_2 = \gamma_1 + \gamma$ , из (2.1.5) и (2.1.6) получим:

$$V_{2x} = \text{th } 2\gamma_2 = \text{th } 2(\gamma_1 + \gamma) = \frac{\text{th } 2\gamma_1 + \text{th } 2\gamma}{1 + \text{th } 2\gamma_1 \text{th } 2\gamma} = \frac{V_{1x} + V}{1 + V_{1x}V} \quad (2.3.1)$$

$$V_{2y} = \frac{\cos 2\delta_2}{\text{ch } 2\gamma_2} = \frac{\cos 2\delta_1 / \text{ch } 2\gamma_1}{\text{ch } 2\gamma(1 + \text{th } 2\gamma_1 \text{th } 2\gamma)} = \frac{V_{1y}\sqrt{1 - V^2}}{1 + V_{1x}V}, \quad V_{2z} = \frac{\sin 2\delta_2}{\text{ch } 2\gamma_2} = \frac{V_{1z}\sqrt{1 - V^2}}{1 + V_{1x}V} \quad (2.3.2)$$

Эти формулы преобразования скорости совпадают с релятивистскими. Соотношения для  $V_{2f}$  и  $V_{2g}$  будут иметь аналогичный вид:

$$V_{2f} = \frac{\cos 2\beta_2}{\text{ch } 2\gamma_2} = \frac{V_{1f}\sqrt{1 - V^2}}{1 + V_{1x}V}, \quad V_{2g} = \frac{\sin 2\beta_2}{\text{ch } 2\gamma_2} = \frac{V_{1g}\sqrt{1 - V^2}}{1 + V_{1x}V} \quad (2.3.3)$$

Любое  $\alpha_0$ -преобразование соответствует в 4-пространстве изменению скорости только вдоль оси  $Ox$ . Однако сам 4-вектор в начальном состоянии может быть ориентирован по отношению к оси  $Ox$  произвольным образом. В этом состоит, с одной стороны, специфичность, а с другой стороны — общность полученных формул.

### 2.4 Уравнения на основе квадрата $B$ -вектора. Изотропные 4-тензоры

Введём обозначения для составляющих квадрата  $B$ -вектора (1.3.6):

$$\begin{aligned} q^2 &= (u + jv)^2 = u^2 + v^2 + j2uv = \exp 2(\alpha + i\beta + j\gamma + ij\delta) = \\ &= (a^2 - b^2 + c^2 - d^2) + i2(ab + cd) + j2(ac - bd) + ij2(ad + bc) \equiv \\ &\equiv K + iL + jM + ijN \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Теперь мы имеем совокупность десяти переменных — (2.1.1) и (2.4.1). Всё множество этих переменных и два его основных подмножества кратко обозначим так:

$$\begin{aligned} \{T, X, Y, Z, F, G, K, L, M, N\} &= \{T..N\}, \\ \{T, X, Y, Z, F, G\} &= \{T..G\}, \\ \{F, G, K, L, M, N\} &= \{F..N\}, \end{aligned}$$

а связь между переменными  $\{T..G\}$  и  $\{K, L, M, N\}$  найдём из соотношений:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } (q\bar{q})(q\tilde{q}) &= q^2(\bar{q}\tilde{q}) \\
 (T + jX)(Y + ijZ) &= (K + iL + jM + ijN)(F - iG) \\
 TY + iXZ + jXY + ijTZ &= (FK + GL) + i(FL - GK) + \\
 &\quad + j(FM + GN) + ij(FN - GM) \\
 \text{б) } (q\bar{q})(q\tilde{q}) &= q^2(\bar{q}\tilde{q}) \\
 (T + jX)(F + iG) &= (K + iL + jM + ijN)(Y - ijZ) \\
 TF + iTG + jXF + ijXG &= (YK + ZN) + i(YL - ZM) + \\
 &\quad + j(YM + ZL) + ij(YN - ZK) \\
 \text{в) } (q\bar{q})(q\tilde{q}) &= q^2(\bar{q}\tilde{q}) \\
 (Y + ijZ)(F + iG) &= (K + iL + jM + ijN)(T - jX) \\
 YF + iYG - jZG + ijZF &= (TK - XM) + i(TL - XN) - \\
 &\quad - j(XK - TM) + ij(TN - XL)
 \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

и

$$\begin{aligned}
 \text{а) } (q\bar{q})^2 &= q^2\bar{q}^2 \\
 T^2 + X^2 + j2TX &= K^2 + L^2 + M^2 + N^2 + j2(KM + LN) \\
 \text{б) } (q\tilde{q})^2 &= q^2\tilde{q}^2 \\
 Y^2 - Z^2 + ij2YZ &= K^2 + L^2 - M^2 - N^2 + ij2(KN - LM) \\
 \text{в) } (q\tilde{q})^2 &= q^2\tilde{q}^2 \\
 F^2 - G^2 + i2FG &= K^2 - L^2 - M^2 + N^2 + i2(KL - MN)
 \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Приравнивая соответствующие составляющие  $B$ -векторов, из уравнений (2.4.2) получим 12 действительных соотношений, а из (2.4.3) — ещё 6. Так, из (2.4.2 б) и (2.4.3 в) вытекает следующая система четырёх уравнений:

$$\begin{aligned}
 XF - YM - ZL &= 0 \\
 XG - YN + ZK &= 0 \\
 FG + MN - LK &= 0 \\
 F^2 + M^2 + L^2 - G^2 - N^2 - K^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Учитывая, что  $(X, Y, Z) = \mathbf{R}$  — пространственный 3-вектор, введём обозначения

$$(F, -M, -L) = (\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y, \mathcal{A}_z) = \mathcal{A} \quad \text{и} \quad (G, -N, K) = (\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y, \mathcal{B}_z) = \mathcal{B} \tag{2.4.5}$$

и запишем уравнения (2.4.4) в обозначениях (2.4.5):

$$\begin{aligned}
 X\mathcal{A}_x + Y\mathcal{A}_y + Z\mathcal{A}_z &= 0 \\
 X\mathcal{B}_x + Y\mathcal{B}_y + Z\mathcal{B}_z &= 0 \\
 \mathcal{A}_x\mathcal{B}_x + \mathcal{A}_y\mathcal{B}_y + \mathcal{A}_z\mathcal{B}_z &= 0 \\
 (\mathcal{A}_x^2 + \mathcal{A}_y^2 + \mathcal{A}_z^2) - (\mathcal{B}_x^2 + \mathcal{B}_y^2 + \mathcal{B}_z^2) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Первые три уравнения в (2.4.6) представляют собой скалярные произведения трёхмерных векторов. Из равенства этих произведений нулю следует, что векторы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  взаимно

ортогональны и расположены в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{R}$ . Тем самым векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  перпендикулярны и вектору  $\mathbf{c} = (V_x, V_y, V_z)$ , совпадающему согласно (2.1.7) по направлению с  $\mathbf{R}$ . Из четвертого же уравнения (2.4.6) следует, что векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  равны по абсолютной величине. Именно такая картина характерна для поперечной бегущей электромагнитной волны.

Из (2.4.2 а) и (2.4.3 а) находим следующую группу соотношений:

$$\begin{aligned} TX &= NL + KM = \mathcal{B}_y \mathcal{A}_z - \mathcal{B}_z \mathcal{A}_y = S_x \\ TY &= KF + GL = \mathcal{B}_z \mathcal{A}_x - \mathcal{B}_x \mathcal{A}_z = S_y \\ TZ &= NF - GM = \mathcal{B}_x \mathcal{A}_y - \mathcal{B}_y \mathcal{A}_x = S_z \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Формулы (2.4.7) представляют аналог компонентов вектора Пойнтинга  $\mathbf{S}$  и согласуются с вычислением векторного произведения  $[\mathbf{B}\mathbf{A}]$  непосредственно на основе обозначений (2.4.5). С другой стороны, как произведения координат, выражения (2.4.7) сопоставляются с соответствующими компонентами симметричного 4-тензора энергии-импульса электромагнитного поля:

$$(TX, TY, TZ) = (S_x, S_y, S_z) = \mathbf{S} = [\mathbf{B}\mathbf{A}] \quad (2.4.8)$$

В данном случае компоненты 4-тензора являются произведениями координат одного и того же изотропного 4-вектора:

$$\begin{pmatrix} TT & TX & TY & TZ \\ XT & XX & XY & XZ \\ YT & YX & YY & YZ \\ ZT & ZX & ZY & ZZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & S_x & S_y & S_z \\ S_x & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.4.9)$$

В тензоре (2.4.9) элемент  $TT = W$  соответствует плотности энергии. Прямым вычислением на основе формул (2.1.1) и (2.4.1) можно показать, что

$$\begin{aligned} W &= T^2 = F^2 + M^2 + L^2 = G^2 + N^2 + K^2 = \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) \\ W &= \mathcal{A}^2 = \mathcal{B}^2 = (\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2)/2 \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

где учтены в итоге обозначения (2.4.5). Переменные  $(W, S_x, S_y, S_z)$  пропорциональны 4-вектору  $(T, X, Y, Z)$ :

$$(W, \mathbf{S}) = (TT, TX, TY, TZ) = T(T, X, Y, Z) = T(T, \mathbf{R}) \quad (2.4.11)$$

Из (2.4.3 а), с учётом (2.4.10), и из (2.4.3 б) найдём

$$\begin{aligned} X^2 &= K^2 + L^2 + M^2 + N^2 - T^2 = \\ &= K^2 + L^2 + M^2 + N^2 - (F^2 + M^2 + L^2 + G^2 + N^2 + K^2)/2 \\ X^2 &= (M^2 + L^2 - F^2 + N^2 + K^2 - G^2)/2 = \\ &= (\mathcal{A}_y^2 + \mathcal{A}_z^2 - \mathcal{A}_x^2 + \mathcal{B}_z^2 + \mathcal{B}_y^2 - \mathcal{B}_x^2)/2 \\ Y^2 - Z^2 &= K^2 + L^2 - M^2 - N^2 = (\mathcal{A}_z^2 - \mathcal{A}_y^2 + \mathcal{B}_z^2 - \mathcal{B}_y^2) \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

что определяет остальные составляющие тензора (2.4.9), расположенные на главной диагонали. Смешанные компоненты тензора находим из (2.4.2 а) и (2.4.3 б):

$$\begin{aligned} XY &= FM + GN = -(\mathcal{A}_x \mathcal{A}_y + \mathcal{B}_x \mathcal{B}_y) \\ YZ &= NK - ML = -(\mathcal{A}_y \mathcal{A}_z + \mathcal{B}_y \mathcal{B}_z) \\ ZX &= LF - KG = -(\mathcal{A}_z \mathcal{A}_x + \mathcal{B}_z \mathcal{B}_x) \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Из остальных, ещё не использованных соотношений (2.4.2) и (2.4.3) получим:

$$\begin{aligned} TF &= KY + NZ, & \mathcal{A}_x &= \mathcal{B}_z V_y - \mathcal{B}_y V_z; & TG &= -MZ + LY, & \mathcal{B}_x &= \mathcal{A}_y V_z - \mathcal{A}_z V_y \\ -TM &= GZ + KX, & \mathcal{A}_y &= \mathcal{B}_x V_z - \mathcal{B}_z V_x; & -TN &= -LX - FZ, & \mathcal{B}_y &= \mathcal{A}_z V_x - \mathcal{A}_x V_z \\ -TL &= -NX - GY, & \mathcal{A}_z &= \mathcal{B}_y V_x - \mathcal{B}_x V_y; & TK &= FY + MX, & \mathcal{B}_z &= \mathcal{A}_x V_y - \mathcal{A}_y V_x \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Здесь кроме обозначений (2.4.5) учтены обозначения скорости (2.1.5) и (2.1.6), а соотношения для переменных  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  и  $V$  получены делением исходных уравнений на  $T$ .

Переменные (2.4.5) являются компонентами антисимметричного 4-тензора второго ранга, аналогичного тензору электромагнитного поля. Мы не будем записывать этот тензор в виде таблицы, а приведём вместо этого более полезную сводку различных форм записи самих переменных (2.4.5):

$$\begin{aligned} q\tilde{q} &= u^2 - v^2 = \exp 2(\alpha + i\beta) & = F + iG & = (\mathcal{A}_x + i\mathcal{B}_x) \\ \bar{q}\tilde{\bar{q}} &= \bar{u}^2 - \bar{v}^2 = \exp 2(\alpha - i\beta) & = F - iG & = (\mathcal{A}_x - i\mathcal{B}_x) \\ (q^2 + \tilde{q}^2)/2 &= u^2 + v^2 = \exp 2(\alpha + i\beta) \operatorname{ch}(\gamma + i\delta) = K + iL & = -i(\mathcal{A}_z + i\mathcal{B}_z) \\ (\bar{q}^2 + \tilde{\bar{q}}^2)/2 &= \bar{u}^2 + \bar{v}^2 = \exp 2(\alpha - i\beta) \operatorname{ch}(\gamma - i\delta) = K - iL & = i(\mathcal{A}_z - i\mathcal{B}_z) \\ j(q^2 - \tilde{q}^2)/2 &= 2uv = \exp 2(\alpha + i\beta) \operatorname{sh}(\gamma + i\delta) = M + iN & = -(\mathcal{A}_y + i\mathcal{B}_y) \\ j(\bar{q}^2 - \tilde{\bar{q}}^2)/2 &= 2\bar{u}\bar{v} = \exp 2(\alpha - i\beta) \operatorname{sh}(\gamma - i\delta) = M - iN & = -(\mathcal{A}_y - i\mathcal{B}_y) \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Из (2.4.15) следует, что переменные (2.4.5) могут быть представлены в другой известной форме — в виде комплексного вектора  $\mathbf{f} = \mathcal{A} + i\mathcal{B}$ :

$$(F, -M, -L) + i(G, -N, K) = (\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y, \mathcal{A}_z) + i(\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y, \mathcal{B}_z) = \mathcal{A} + i\mathcal{B} \quad (2.4.16)$$

где пара  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  должна обозначать аксиальный и полярный 3-векторы. Отметим однако, что как раз полярный или аксиальный характер векторов (2.4.5) пока не установлен: в соотношения (2.4.6) они входят “симметричным” образом и выбор “безразличных” обозначений  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  (вместо обозначений электромагнитного поля  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$ ) призван на данном этапе, в том числе и для того, чтобы подчеркнуть эту неопределённость.

## 2.5 Соотношение преобразований квадрата $B$ -вектора и 4-тензора

При  $B$ -преобразовании,  $q_2 = q_1 q$ , квадрат  $B$ -вектора преобразуется как  $q_2^2 = q_1^2 q^2$ . Выразив само преобразование  $q$  в  $\exp$ -форме, получим

$$\begin{aligned} K_2 + iL_2 + jM_2 + ijN_2 &= (K_1 + iL_1 + jM_1 + ijN_1) \exp 2(\alpha + i\beta + j\gamma + ij\delta) = \\ &= [(K_1 + iL_1) + j(M_1 + iN_1)] \exp 2(\alpha + i\beta) \exp j2(\gamma + i\delta) = \\ &= \exp 2(\alpha + i\beta) [(K_1 + iL_1) + j(M_1 + iN_1)] [\operatorname{ch} 2(\gamma + i\delta) + j \operatorname{sh} 2(\gamma + i\delta)] = \\ &= \exp 2(\alpha + i\beta) \{ [(K_1 + iL_1) \operatorname{ch} 2(\gamma + i\delta) + (M_1 + iN_1) \operatorname{sh} 2(\gamma + i\delta)] + \\ &\quad + j[(M_1 + iN_1) \operatorname{ch} 2(\gamma + i\delta) + (K_1 + iL_1) \operatorname{sh} 2(\gamma + i\delta)] \} \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Запишем это бикомплексное соотношение в виде двух комплексных уравнений

$$\begin{aligned} M_2 + iN_2 &= \exp 2(\alpha + i\beta) [(M_1 + iN_1) \operatorname{ch} 2(\gamma + i\delta) + (K_1 + iL_1) \operatorname{sh} 2(\gamma + i\delta)] \\ K_2 + iL_2 &= \exp 2(\alpha + i\beta) [(K_1 + iL_1) \operatorname{ch} 2(\gamma + i\delta) + (M_1 + iN_1) \operatorname{sh} 2(\gamma + i\delta)] \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Для случая  $\delta$ -преобразования (при  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ) из (2.5.2) следует

$$\begin{aligned} M_2 + iN_2 &= (M_1 + iN_1) \cos 2\delta + i(K_1 + iL_1) \sin 2\delta \\ K_2 + iL_2 &= (K_1 + iL_1) \cos 2\delta + i(M_1 + iN_1) \sin 2\delta \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Эти уравнения представляют собой комплексное преобразование комплексных векторов  $(M + iN)$  и  $(K + iL)$  друг через друга. С другой стороны, ранее мы уже установили, что в 4-пространстве  $\delta$ -преобразование соответствует повороту в плоскости  $(Y, Z)$ , а смысл участвующих в преобразовании переменных интерпретирован в предыдущем разделе. Для того чтобы получить из (2.5.3) уравнения, описывающие поворот интересующих нас векторов, умножим обе части первого уравнения (2.5.3) на  $-1$ , а второго — на  $i$ . Тогда

$$\begin{aligned} -M_2 - iN_2 &= (-M_1 - iN_1) \cos 2\delta - (-L_1 + iK_1) \sin 2\delta \\ -L_2 + iK_2 &= (-L_1 + iK_1) \cos 2\delta + (-M_1 - iN_1) \sin 2\delta \\ \mathcal{A}_{2y} + i\mathcal{B}_{2y} &= (\mathcal{A}_{1y} + i\mathcal{B}_{1y}) \cos 2\delta - (\mathcal{A}_{1z} + i\mathcal{B}_{1z}) \sin 2\delta \\ \mathcal{A}_{2z} + i\mathcal{B}_{2z} &= (\mathcal{A}_{1z} + i\mathcal{B}_{1z}) \cos 2\delta + (\mathcal{A}_{1y} + i\mathcal{B}_{1y}) \sin 2\delta \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Теперь полученная пара уравнений описывает обычное тригонометрическое преобразование, характеризующее поворот на угол  $2\delta$ , который естественно отнести к плоскости  $(Y, Z)$  4-пространства. Это преобразование является ортогональным и действительным:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2y} &= \mathcal{A}_{1y} \cos 2\delta - \mathcal{A}_{1z} \sin 2\delta, & \mathcal{B}_{2y} &= \mathcal{B}_{1y} \cos 2\delta - \mathcal{B}_{1z} \sin 2\delta \\ \mathcal{A}_{2z} &= \mathcal{A}_{1z} \cos 2\delta + \mathcal{A}_{1y} \sin 2\delta, & \mathcal{B}_{2z} &= \mathcal{B}_{1z} \cos 2\delta + \mathcal{B}_{1y} \sin 2\delta \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Координаты  $F$  и  $G$  от параметра  $\delta$  не зависят, что подтверждает интерпретацию их направления по оси  $Ox$ .

В случае  $\gamma$ -преобразования (при  $\alpha = \beta = \delta = 0$ ) из (2.5.2) следует:

$$\begin{aligned} M_2 + iN_2 &= (M_1 + iN_1) \operatorname{ch} 2\gamma + (K_1 + iL_1) \operatorname{sh} 2\gamma \\ K_2 + iL_2 &= (K_1 + iL_1) \operatorname{ch} 2\gamma + (M_1 + iN_1) \operatorname{sh} 2\gamma \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

что соответствует следующему (активному) преобразованию Лоренца:

$$\begin{aligned} M_2 + iN_2 &= [M_1 + iN_1 + V(K_1 + iL_1)] / \sqrt{1 - V^2} \\ K_2 + iL_2 &= [K_1 + iL_1 + V(M_1 + iN_1)] / \sqrt{1 - V^2} \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Система двух комплексных уравнений (2.5.7) может быть записана в виде системы четырёх действительных уравнений. Координаты  $F$  и  $G$  от параметра  $\gamma$  не зависят и в результате преобразований Лоренца не изменяются. Таким образом, с учётом обозначений (2.4.5), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} F_2 &= F_1, & G_2 &= G_1, \\ -M_2 &= (-M_1 - VK_1) / \sqrt{1 - V^2}, & -N_2 &= (-N_1 + V(-L_1)) / \sqrt{1 - V^2}, \\ -L_2 &= (-L_1 + V(-N_1)) / \sqrt{1 - V^2}, & K_2 &= (K_1 - V(-M_1)) / \sqrt{1 - V^2} \\ \mathcal{A}_{2x} &= \mathcal{A}_{1x}, & \mathcal{B}_{2x} &= \mathcal{B}_{1x}, \\ \mathcal{A}_{2y} &= (\mathcal{A}_{1y} - V\mathcal{B}_{1z}) / \sqrt{1 - V^2}, & \mathcal{B}_{2y} &= (\mathcal{B}_{1y} + V\mathcal{A}_{1z}) / \sqrt{1 - V^2}, \\ \mathcal{A}_{2z} &= (\mathcal{A}_{1z} + V\mathcal{B}_{1y}) / \sqrt{1 - V^2}, & \mathcal{B}_{2z} &= (\mathcal{B}_{1z} - V\mathcal{A}_{1y}) / \sqrt{1 - V^2}. \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Уравнения (2.5.8) описывают активное преобразование Лоренца компонентов антисимметричного тензора (2.4.15) при изменении скорости вдоль оси  $Ox$  на величину  $V$ . Как и в случае 4-вектора, преобразование этого тензора определяется активным преобразованием соответствующего  $B$ -вектора в  $B$ -пространстве.

Для случая  $\beta$ -преобразования (при  $\alpha = \gamma = \delta = 0$ ) вернёмся к уравнению (2.5.1) и запишем его в следующем перегруппированном виде:

$$\begin{aligned} (K_2 + jM_2) + i(L_2 + jN_2) &= [(K_1 + jM_1) + i(L_1 + jN_1)] (\cos 2\beta + i \sin 2\beta) = \\ &= [(K_1 + jM_1) \cos 2\beta - (L_1 + jN_1) \sin 2\beta] + i[(K_1 + jM_1) \sin 2\beta + (L_1 + jN_1) \cos 2\beta] \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

$$K_2 + jM_2 = (K_1 + jM_1) \cos 2\beta - (L_1 + jN_1) \sin 2\beta$$

$$L_2 + jN_2 = (K_1 + jM_1) \sin 2\beta + (L_1 + jN_1) \cos 2\beta$$

Приравняем соответствующие составляющие в уравнениях (2.5.9),  $\beta$ -преобразование переменных  $(F, G)$  возьмём из (2.2.4) и запишем результат в обозначениях (2.4.5):

$$\begin{aligned} F_2 &= F_1 \cos 2\beta - G_1 \sin 2\beta, & G_2 &= G_1 \cos 2\beta + F_1 \sin 2\beta, \\ -M_2 &= -M_1 \cos 2\beta - (-N_1) \sin 2\beta, & -N_2 &= -N_1 \cos 2\beta + (-M_1) \sin 2\beta, \\ -L_2 &= -L_1 \cos 2\beta - K_1 \sin 2\beta, & K_2 &= K_1 \cos 2\beta + (-L_1) \sin 2\beta, \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2x} &= \mathcal{A}_{1x} \cos 2\beta - \mathcal{B}_{1x} \sin 2\beta, & \mathcal{B}_{2x} &= \mathcal{B}_{1x} \cos 2\beta - \mathcal{A}_{1x} \sin 2\beta, \\ \mathcal{A}_{2y} &= \mathcal{A}_{1y} \cos 2\beta - \mathcal{B}_{1y} \sin 2\beta, & \mathcal{B}_{2y} &= \mathcal{B}_{1y} \cos 2\beta - \mathcal{A}_{1y} \sin 2\beta, \\ \mathcal{A}_{2z} &= \mathcal{A}_{1z} \cos 2\beta - \mathcal{B}_{1z} \sin 2\beta, & \mathcal{B}_{2z} &= \mathcal{B}_{1z} \cos 2\beta - \mathcal{A}_{1z} \sin 2\beta, \end{aligned}$$

Итак, каждому  $B$ -вектору  $(a, b, c, d)$  в базисе  $\{1, i, j, ij\}$ , кроме изотропного 4-вектора  $(T, X, Y, Z)$  в базисе  $\{\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ , может быть сопоставлено шесть переменных  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , обладающих свойствами тензора электромагнитного поля. Через параметры  $\gamma$  и  $\delta$ , а также через скалярные произведения (2.4.4) компоненты этого тензора тоже приобретают “привязку” к базису  $\{\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ . Таким образом изотропному 4-вектору сопоставляется 4-тензор с характеристиками поперечной бегущей волны. Обе эти 4-пространственные конструкции являются двумя разными аспектами проявления одного и того же  $B$ -вектора. Обе они характеризуются одной и той же скоростью  $c = 1$ . Именно поэтому 4-тензор, соответствующий изотропному 4-вектору, мы тоже называем *изотропным*.

Ещё одна важная особенность состоит в том, что все переменные (2.4.5), в отличие от переменных  $(T, X, Y, Z)$ , зависят от параметра  $\beta$ . Этот параметр характеризует ортогональное преобразование (2.5.10) в некоторой евклидовой плоскости с базисом  $\{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ . Как следует из формул (2.1.1), плоскость  $Ofg$  по алгебраическим свойствам практически не отличается от плоскости  $Oyz$ , хотя и не принадлежит 4-пространству  $Otxyz$ .

## Заключение

Сделаем несколько замечаний обобщённого характера, имеющих отношение к тематике нашей работы.

### Алгебра с делением

В настоящее время термины “алгебра с делением” и “алгебра без делителей нуля” используются как синонимы [2]. Каждая  $N$ -комплексная алгебра (при  $N > 1$ ) содержит делители нуля. При этом деление *любых*  ${}^N C$ -чисел на *любые невырожденные*  ${}^N C$ -числа полностью определено. С позиций  $N$ -комплексной алгебры, ноль является всего лишь одним из представителей *вырожденных*  ${}^N C$ -чисел, а деление на него не определено и в “алгебрах с делением”. Таким образом, в  ${}^N C$ -алгебрах отсутствует деление на вырожденные  ${}^N C$ -числа, включая ноль, но присутствует деление на любые невырожденные  ${}^N C$ -числа. Учитывая чёткий критерий вырожденности — равенство нулю определителя  $N$ -комплексного числа, — никаких вычислительных проблем здесь не возникает.

## Метрика $N$ С-пространств

В разделах 1.9 и 1.11 продемонстрирована возможность наделения *одного и того же* линейного  $B$ -пространства как евклидовой, так и неевклидовой метрикой. В частности, *одному и тому же*  $B$ -вектору  $q$  сопоставлены *различные* нормы: евклидова,  $\|q\|$  и неевклидова,  $\|q\|$ . Обычное комплексное число ( $z = x + iy$ ) тоже может быть охарактеризовано и евклидовым, тригонометрическим квадратом нормы:  $z\bar{z} = x^2 + y^2$ , и неевклидовым, гиперболическим квадратом нормы:  $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ . На собственно комплексную алгебру эти соотношения (оба являющиеся её неотъемлемой частью) никак дополнительно не влияют. Тем самым мы подчёркиваем:  $n$ -мерное число и соответствующая алгебра — более развитая структура, чем  $n$ -мерное линейное пространство и введённая в нём метрика. Таким образом, если математический аппарат физической теории удалось вывести на уровень  $n$ -мерной алгебры, то метрические (и тензорные) соотношения приобретают преимущественно иллюстративный характер, и вряд ли стоит закладывать их в основу построения этой физической теории.

## Размерности физического и математических пространств

Достаточно естественно, когда та или иная 4-мерная гиперкомплексная алгебра оказывается подходящей для описания тех или иных аспектов реального пространства-времени. Учитывая опыт общей теории относительности (ОТО), можно ожидать, что четырёхмерная математика способна описать не только само 4-пространство, но и физические явления в нём (пример — гравитация). С другой стороны, именно неспособность ОТО включить в себя электродинамику и другие негравитационные взаимодействия послужила в своё время поводом для построения 5-мерных теорий (Т. Калуца (1921 г.), О. Клейн (1926 г.)). Сейчас многомерные теории — будни физики. Однако вопрос о соотношении размерностей физического и математических пространств по-прежнему актуален. Как показывает настоящая статья, соотношение между 4-мерным  $B$ -пространством и 4-мерным пространством-временем не столь “прямолинейно”. Координатам 4-пространства сопоставлены не сами переменные  $B$ -пространства, а их билинейные и квадратичные комбинации. В результате четырёхмерная  $B$ -алгебра порождает 10 физических переменных. Именно бикомплексные соотношения между этими переменными позволяют интерпретировать их как координаты пространственно-временного 4-вектора и как компоненты антисимметричного 4-тензора. Эти же соотношения определяют их трансформационные свойства релятивистского и электродинамического характера.

Выходя за рамки материала данной работы, заметим, что  $B$ -переменная, её  $B$ -векторная функция, производные этой функции различного порядка — математически все они будут относиться к разным  $B$ -пространствам. Однако, все они взаимосвязаны. Физика пространства-времени лишь отражает эти взаимосвязи. Какие-то соотношения воспринимаются как обычные координаты, какое-то — как время, другие — как компоненты электрического и магнитного полей, а третьи — как составляющие энергии-импульса и т. п. Совсем не обязательно, чтобы все такие взаимосвязи воплощались в виде *геометрических* измерений физического пространства — общепризнанных или дополнительных, явных или “свёрнутых”.

## Новые соотношения

В основном, эта работа посвящена созданию  $N$ -комплексной (главным образом, бикомплексной) алгебры и демонстрации её применимости для построения существующих релятивистских и электродинамических закономерностей. Мы полагаем, что эти цели достигнуты.

В физической части работы, кроме уже известных формул, тоже получен ряд новых соотношений. Эти соотношения *не противоречат* общепринятым понятиям. Некоторые из них позволяют по-новому взглянуть на уже известные закономерности, а другие и сами по себе оказываются достаточно неожиданными. Формальный аспект таких новых соотношений рассмотрен непосредственно в тексте статьи. А вот их подробный физический анализ мы отложим на будущее, когда, в дополнение к алгебраическим изотропным соотношениям этой работы, будут рассмотрены также дифференциальные и времениподобные закономерности. Однако, уже сейчас можно заметить, что предлагаемый новый математический язык не просто описывает, но фактически *порождает* релятивистские и электродинамические соотношения без привлечения какой-либо физической аргументации. Это указывает как на адекватность, так и на перспективность разрабатываемого нами подхода.

## Литература

- [1] Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. М., Наука, 1987, 431 с.  
[Перевод: Felix Klein. Elementarmathematik vom höheren Standpunkte. Aus erster Band. Arithmetik. Algebra. Analysis. Berlin, Verlag von Julius Springer, 1924.]
- [2] Математический энциклопедический словарь. М., Советская энциклопедия, 1988.
- [3] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973, 144 с.
- [4] Медведев Б.В. Начала теоретической физики. М., Наука, 1977, 496 с.
- [5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Теоретическая физика. Т. 2. М., Наука, 1973, 504 с.
- [6] Olariu S. Complex numbers in n dimensions. // arXiv:math/0011044[math.CV], 2000.
- [7] Rochon D., Shapiro M. On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers. // *Anal. Univ. Oradea, fasc. math.* 11, 2004, pp. 71–110.
- [8] Dattoli G., Sabia E., M. Del Franco The pseudo-hyperbolic functions and the matrix representation of Eisenstein complex numbers. // arXiv:1003.2698[math-ph], 2010.
- [9] Babusci D., Dattoli G., E. Di Palma, Sabia E. Complex-type numbers and generalizations of the Euler identity. // arXiv:1103.2321[math.CA], 2011.
- [10] Смирнов А.В. Некоторые свойства скалярных кватернионов. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.*, № 1(3), 2005, с. 36–46.
- [11] Павлов Д.Г. Гиперкомплексные числа и связанные с ними пространства. // <http://hyper-complex.ru>
- [12] Вейль Г. Теория групп и квантовая механика. М., Наука, 1986, 495 с.  
[Библиотека теоретической физики. Перевод: Hermann Weyl. The theory of groups and quantum mechanics. Dover Publications, inc., 1931]
- [13] Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. М., Мир, 1987, 528 с.
- [14] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Теоретическая физика, Т. 1. М., Наука, 1973, 208 с.



# N-COMPLEX ALGEBRA AND ISOTROPIC RELATIVISTIC AND ELECTRODYNAMICS EQUATIONS

A.V. Goryunov

*Turan-Astana University, Astana, Kazakhstan*

avgor@hotmail.ru

The version of system of hypercomplex numbers called as *N*-complex numbers is suggested. In this framework a new concept of bicomplex numbers is introduced and algebraic component of bicomplex calculus is thoroughly developed. The elements of algebras of tricomplex and tetracomplex numbers described briefly, as development of bicomplex concepts and notation. The relationship of elements of bicomplex space with elements of the pseudoeuclidean 4-space is investigated. It is shown that all the basic isotropic (light-like) algebraic formulas of the special theory of relativity and electrodynamics can be obtained as a direct consequence of the properties of bicomplex numbers.

**Key Words:** hypercomplex numbers, *N*-complex numbers, bicomplex numbers, *N*-complex algebra, bicomplex algebra, STR, electrodynamics.

## ВОЗМОЖНА ЛИ ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКИ

Е.М. Овсиюк<sup>1</sup>, В.М. Редьков<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Мозырский государственный педагогический университет, Мозырь, Белоруссия

<sup>2</sup> Институт физики НАН Беларуси, Минск, Белоруссия

e.ovsiyuk@mail.ru, v.redkov@dragon.bas-net.by

В настоящей работе дается обзор некоторых возможностей применения матричного исчисления для анализа вопросов поляризационной оптики. Есть основания предполагать, что свою роль здесь могут сыграть и методы финслеровой геометрии. Поскольку матрицы Мюллера – это вещественные матрицы, действующие на вещественный 4-мерный вектор Стокса, то для исследования множества всех возможных матриц Мюллера можно использовать параметризацию 4-мерных матриц, получаемую на основе применения матриц Дирака. Закон умножения для элементов исходной группы имеет громоздкий вид, но он вполне поддается аналитическому исследованию. Найден явный вид определителя произвольной матрицы в такой параметризации, который задает естественный классифицирующий инвариант во множестве матриц. Эта параметризация применена для описания возможных поляризационных матриц Мюллера, включая и вырожденные случаи матриц с нулевым определителем, описываемых в рамках структуры полугрупп. Оказалось, что накладывая линейные связи на 16 параметров, совместимые с групповым законом умножения, можно получать преимущественно классы вырожденных матриц со структурой полугрупп. Получена полная классификация таких полугрупп ранга 1, 2, 3.

**Ключевые слова:** поляризационная оптика, матрицы Дирака, матрицы Мюллера, классификация, вырожденные матрицы, полугруппа.

### 1 Поляризация света, векторный формализм Мюллера

В случае плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ , в произвольной точке  $z$  имеем ( $M, N$  – амплитуды двух компонент вектора  $\mathbf{E}$ ,  $\Delta$  – фазовый сдвиг)

$$\begin{aligned} E^1 &= N \cos \omega t, & E^2 &= M \cos(\omega t + \Delta), & E^3 &= 0, \\ N &\geq 0, & M &\geq 0, & \Delta &\in [-\pi, +\pi]. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Четыре параметра Стокса  $(S_a) = (I, S^1, S^2, S^3)$  определены равенствами

$$\begin{aligned} I &= \langle E_1^2 + E_2^2 \rangle, & S^3 &= \langle E_1^2 - E_2^2 \rangle, \\ S^1 &= \langle 2E_1 E_2 \cos \Delta \rangle, & S^2 &= \langle 2E_1 E_2 \sin \Delta \rangle; \end{aligned} \quad (1.2)$$

символ  $\langle \dots \rangle$  обозначает усреднение по времени. Если амплитуды и сдвиг фаз  $N, M, \Delta$  не меняются со временем (или меняются несущественно за время проведения усреднения), то соответствующие параметры Стокса равны

$$\begin{aligned} S_{pol}^0 &= I = N^2 + M^2, & S_{pol}^3 &= N^2 - M^2, \\ S_{pol}^1 &= 2NM \cos \Delta, & S_{pol}^2 &= 2NM \sin \Delta. \end{aligned} \quad (1.3)$$

При этом выполняется тождество

$$S_a S^a = (S_{pol}^0)^2 - S_{pol}^j S_{pol}^j = I_{pol}^2 - \mathbf{S}_{pol}^2 = 0, \quad (1.4)$$

т. е.  $\mathbf{S} = I_{pol} \mathbf{n}$ . Другими словами, для полностью поляризованного света 4-вектор Стокса изотропный. Для естественного света параметры Стокса тривиальные

$$S_{non-pol}^a = (I_{non-pol}, 0, 0, 0).$$

При сложении двух некогерентных световых пучков их параметры Стокса складываются линейно:  $I_{(1)} + I_{(2)}$ ,  $\mathbf{S}_{(1)} + \mathbf{S}_{(2)}$ . В частности, частично поляризованный свет, получающийся при сложении естественно и полностью поляризованного света, описывается параметрами

$$S_{nonpol}^a = (I_{nonpol}, 0, 0, 0), \quad S_{pol}^a = (I_{pol}, I_{pol} \mathbf{n}),$$

$$S^a = S_{nonpol}^a + S_{pol}^a = (I_{nonpol} + I_{pol}) \left( 1, \frac{I_{pol}}{I_{nonpol} + I_{pol}} \mathbf{n} \right).$$

Используя обозначения

$$I = I_{nonpol} + I_{pol}, \quad p = \frac{I_{pol}}{I_{nonpol} + I_{pol}}, \quad (1.5)$$

для параметров Стокса частично поляризованного света находим выражения

$$S^a = (I, I p \mathbf{n}), \quad S_a S^a = I^2 (1 - p^2) \geq 0; \quad (1.6)$$

где  $I$  – общая интенсивность,  $p$  – степень поляризации ( $0 \leq p \leq 1$ ),  $\mathbf{n}$  – единичный 3-мерный вектор.

## 2 Общий анализ возможных подгрупп в $GL(4, C)$

В спинорном базисе произвольная  $4 \times 4$ -матрица может быть задана с помощью четырех 4-мерных величин (векторов)  $(k, m, l, n)$ :

$$\begin{vmatrix} k_0 + \mathbf{k} \vec{\sigma} & n_0 + \mathbf{n} \vec{\sigma} \\ l_0 + \mathbf{l} \vec{\sigma} & m_0 + \mathbf{m} \vec{\sigma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K & N \\ L & M \end{vmatrix}; \quad (2.1)$$

при этом закон умножения 16 параметров имеет вид (см. детальнее об использовании базиса матриц Дирака в теории группы  $GL(4, C)$  в [1–3]):

$$\begin{aligned} k''_0 &= k'_0 k_0 + \mathbf{k}' \mathbf{k} + n'_0 l_0 + \mathbf{n}' \mathbf{l}, \\ m''_0 &= m'_0 m_0 + \mathbf{m}' \mathbf{m} + l'_0 n_0 + \mathbf{l}' \mathbf{n}, \\ n''_0 &= k'_0 n_0 + \mathbf{k}' \mathbf{n} + n'_0 m_0 + \mathbf{n}' \mathbf{m}, \\ l''_0 &= l'_0 k_0 + \mathbf{l}' \mathbf{k} + m'_0 l_0 + \mathbf{m}' \mathbf{l}, \end{aligned} \quad (2.2a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'' &= k'_0 \mathbf{k} + \mathbf{k}' k_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + n'_0 \mathbf{l} + \mathbf{n}' l_0 + i \mathbf{n}' \times \mathbf{l}, \\ \mathbf{m}'' &= m'_0 \mathbf{m} + \mathbf{m}' m_0 + i \mathbf{m}' \times \mathbf{m} + l'_0 \mathbf{n} + \mathbf{l}' n_0 + i \mathbf{l}' \times \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}'' &= k'_0 \mathbf{n} + \mathbf{k}' n_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{n} + n'_0 \mathbf{m} + \mathbf{n}' m_0 + i \mathbf{n}' \times \mathbf{m}, \\ \mathbf{l}'' &= l'_0 \mathbf{l} + \mathbf{l}' l_0 + i \mathbf{l}' \times \mathbf{l} + m'_0 \mathbf{k} + \mathbf{m}' k_0 + i \mathbf{m}' \times \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.2b)$$

Далее мы исследуем все варианты линейных ограничений на параметры, совместимых с групповым умножением параметров  $k, m, n, l$ ; причем, они должны выполняться и в об-

щем случае комплексных параметров. Можно предположить, что исследуя такие линейные ограничения на параметры  $k, m, n, l$ , мы построим подгруппы в  $GL(4, C)$ . Возможно, при этом часть подмножеств будет состоять из вырожденных матриц, т. е. иметь структуру полугрупп.

### 3 Один независимый вектор: вариант I(k)

Рассмотрим вариант I(k):

$$\mathbf{n} = A \mathbf{k}, n_0 = \alpha k_0, \mathbf{m} = B \mathbf{k}, m_0 = \beta k_0, \mathbf{l} = D \mathbf{k}, l_0 = t k_0. \quad (3.1)$$

Формулы умножения параметров (2.2a, b) принимают вид:

$$\begin{aligned} k_0'' &= k_0' k_0 + \mathbf{k}' \mathbf{k} + \alpha t k_0' k_0 + AD \mathbf{k}' \mathbf{k}, \\ m_0'' &= \beta^2 k_0' k_0 + B^2 \mathbf{k}' \mathbf{k} + t\alpha k_0' k_0 + DA \mathbf{k}' \mathbf{k}, \\ n_0'' &= \alpha k_0' k_0 + A \mathbf{k}' \mathbf{k} + \alpha\beta k_0' k_0 + AB \mathbf{k}' \mathbf{k}, \\ l_0'' &= t k_0' k_0 + D \mathbf{k}' \mathbf{k} + \beta t k_0' k_0 + BD \mathbf{k}' \mathbf{k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'' &= k_0' \mathbf{k} + \mathbf{k}' k_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + \alpha D k_0' \mathbf{k} + A t \mathbf{k}' k_0 + i A D \mathbf{k}' \times \mathbf{k}, \\ \mathbf{m}'' &= \beta B k_0' \mathbf{k} + B \beta \mathbf{k}' k_0 + i B^2 \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + t A k_0' \mathbf{k} + D \alpha \mathbf{k}' k_0 + i D A \mathbf{k}' \times \mathbf{k}, \\ \mathbf{n}'' &= A k_0' \mathbf{k} + \alpha \mathbf{k}' k_0 + i A \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + \alpha B k_0' \mathbf{k} + A \beta \mathbf{k}' k_0 + i A B \mathbf{k}' \times \mathbf{k}, \\ \mathbf{l}'' &= t k_0' \mathbf{k} + D \mathbf{k}' k_0 + i D \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + \beta D k_0' \mathbf{k} + B t \mathbf{k}' k_0 + i B D \mathbf{k}' \times \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Требуем выполнения соотношений (3.1) для параметров с двумя штрихами:

$$\begin{aligned} \underline{n_0'' = \alpha k_0''} \quad & \alpha(1 + \beta) k_0' k_0 + A(1 + B) \mathbf{k}' \mathbf{k} = \alpha(1 + \alpha t) k_0' k_0 + \alpha(1 + AD) \mathbf{k}' \mathbf{k}, \\ \underline{m_0'' = \beta k_0''} \quad & (\beta^2 + t\alpha) k_0' k_0 + (B^2 + DA) \mathbf{k}' \mathbf{k} = \beta(1 + \alpha t) k_0' k_0 + \beta(1 + AD) \mathbf{k}' \mathbf{k}, \\ \underline{l_0'' = t k_0''} \quad & t(1 + \beta) k_0' k_0 + D(1 + B) \mathbf{k}' \mathbf{k} = t(1 + \alpha t) k_0' k_0 + t(1 + AD) \mathbf{k}' \mathbf{k}, \\ \underline{\mathbf{n}'' = A \mathbf{k}''} \quad & (A + \alpha B) k_0' \mathbf{k} + (\alpha + A\beta) \mathbf{k}' k_0 + i A(1 + B) \mathbf{k}' \times \mathbf{k} = \\ & A(1 + \alpha D) k_0' \mathbf{k} + A(1 + At) \mathbf{k}' k_0 + i A(1 + AD) \mathbf{k}' \times \mathbf{k}, \\ \underline{\mathbf{m}'' = B \mathbf{k}''} \quad & (\beta B + tA) k_0' \mathbf{k} + (B\beta + D\alpha) \mathbf{k}' k_0 + i(B^2 + AD) \mathbf{k}' \times \mathbf{k} = \\ & B(1 + \alpha D) k_0' \mathbf{k} + B(1 + At) \mathbf{k}' k_0 + i B(1 + AD) \mathbf{k}' \times \mathbf{k}, \\ \underline{\mathbf{l}'' = D \mathbf{k}''} \quad & (t + \beta D) k_0' \mathbf{k} + (D + Bt) \mathbf{k}' k_0 + i D(1 + B) \mathbf{k}' \times \mathbf{k} = \\ & D(1 + \alpha D) k_0' \mathbf{k} + D(1 + At) \mathbf{k}' k_0 + i D(1 + AD) \mathbf{k}' \times \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Дальше приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \alpha(1 + \beta) &= \alpha(1 + \alpha t), & A(1 + B) &= \alpha(1 + AD), \\ (\beta^2 + t\alpha) &= \beta(1 + \alpha t), & (B^2 + DA) &= \beta(1 + AD), \\ t(1 + \beta) &= t(1 + \alpha t), & D(1 + B) &= t(1 + AD), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} (A + \alpha B) &= A(1 + \alpha D), & (\alpha + A\beta) &= A(1 + At), & A(1 + B) &= A(1 + AD), \\ (\beta B + tA) &= B(1 + \alpha D), & (B\beta + D\alpha) &= B(1 + At), & (B^2 + AD) &= B(1 + AD), \\ (t + \beta D) &= D(1 + \alpha D), & (D + Bt) &= D(1 + At), & D(1 + B) &= D(1 + AD). \end{aligned}$$

Предстоит найти все решения этой системы; каждое решение определяет либо некоторую подгруппу, либо некоторую подполугруппу (множество матриц с нулевым определителем, замкнутое относительно умножения).

Прежде всего, система уравнений (3.2) при трех равных нулю блоках имеет тривиальное решение:

решение (K - 1),

$$A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0, \quad D = t = 0, \quad G = \begin{vmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (3.3)$$

все эти 4-мерные матрицы вырождены: их определитель равен нулю. Ранг матриц равен 2 или 1 (в последнем случае нужно требовать  $\det K = 0$ ).

Исследуем решения при двух равных нулю блоках. Здесь есть три возможности. Сначала предположим, что

$$A = \alpha = 0, \quad D = t = 0; \quad (3.4a)$$

система (3.2) дает

$$\beta^2 = \beta, \quad B^2 = \beta, \quad \beta B = B, \quad B^2 = B, \quad (3.4b)$$

откуда в дополнение к уже встречавшемуся тривиальному решению (3.3) при  $B = \beta = 0$  получаем новое:

решение (K - 2),

$$A = \alpha = 0, \quad D = t = 0, \quad D = \beta = +1, \quad G = \begin{vmatrix} k_0 + \mathbf{k}\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & k_0 + \mathbf{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix}; \quad (3.4c)$$

это множество невырожденных матриц со структурой подгруппы.

Теперь предположим, что

$$A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0; \quad (3.5a)$$

система (3.2) дает

$$\begin{aligned} 0 &= 0, & A &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ t &= t, & D &= t, \end{aligned} \quad (3.5b)$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0, & 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ t &= D, & D &= D, & D &= D, \end{aligned}$$

т. е. приходим к решению:

решение (K - 3),

$$A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0, \quad D = t, \\ G = \begin{vmatrix} K & 0 \\ DK & 0 \end{vmatrix}, \quad G'G = \begin{vmatrix} K' & 0 \\ DK' & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K & 0 \\ DK & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K'K & 0 \\ DK'K & 0 \end{vmatrix}; \quad (3.5c)$$

это множество вырожденных матриц ранга 2 со структурой полугруппы.

Теперь предположим, что

$$B = \beta = 0, \quad D = t = 0; \quad (3.6a)$$

система (3.2) дает

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha, & A &= \alpha, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ A &= A, & \alpha &= A, & A &= A, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, & 0 &= 0, \end{aligned} \quad (3.6b)$$

т. е. приходим к следующему решению:

решение (K - 4),

$$A = \alpha, \quad B = \beta = 0, \quad D = t = 0, \\ G = \begin{vmatrix} K & AK \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad G'G = \begin{vmatrix} K' & AK' \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K & AK \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K'K & AK'K \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (3.6c)$$

это множество вырожденных матриц ранга 2 со структурой полугруппы.

Исследуем решения при одном нулевом блоке. Первая возможность:

$$A = \alpha = 0; \quad (3.7a)$$

система (3.2) дает

$$\begin{aligned} 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ \beta^2 &= \beta, & B^2 &= \beta, \\ t(1 + \beta) &= t, & D(1 + B) &= t, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ \beta B &= B, & B\beta &= B, & B^2 &= B, \\ (t + \beta D) &= D, & (D + Bt) &= D, & D(1 + B) &= D. \end{aligned} \quad (3.7b)$$

Уравнения (3.7b) имеют только два уже встречавшиеся решения:

решение (K - 3),

$$A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0, \quad t = D, \quad G = \begin{vmatrix} K & 0 \\ DK & 0 \end{vmatrix}; \quad (3.7c)$$

решение (K - 2),

$$A = \alpha = 0, \quad B = \beta = +1, \quad D = t = 0, \quad G = \begin{vmatrix} k_0 + \mathbf{k}\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & k_0 + \mathbf{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix}. \quad (3.7d)$$

Исследуем вторую возможность при одном нулевом блоке:

$$D = t = 0; \quad (3.8a)$$

система (3.2) дает

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= 0, & A(1+B) &= \alpha, \\ \beta^2 &= \beta, & B^2 &= \beta, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ (A + \alpha B) &= A, & (\alpha + A\beta) &= A, & AB &= 0, \\ \beta B &= B, & B\beta &= B, & B^2 &= B, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, & 0 &= 0. \end{aligned} \quad (3.8b)$$

Система (3.8b) приводит к двум уже известным возможностям:

решение (K - 2),

$$A = \alpha = 0, \quad B = +1, \quad \beta = +1, \quad D = t = 0, \quad G = \begin{vmatrix} k_0 + \mathbf{k}\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & k_0 + \mathbf{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix}; \quad (3.8c)$$

решение (K - 1),

$$A = \alpha, \quad B = \beta = 0, \quad D = t = 0, \quad G = \begin{vmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.8d)$$

Рассматриваем третью возможность при одном нулевом блоке:

$$B = \beta = 0; \quad (3.9a)$$

система (3.2) дает

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha^2 t, & A &= \alpha(1 + AD), \\ t\alpha &= 0, & DA &= 0, \\ 0 &= \alpha t^2, & D &= t(1 + AD), \\ 0 &= A\alpha D, & \alpha &= A(1 + At), & 0 &= A^2 D, \\ tA &= 0, & D\alpha &= 0, & AD &= 0, \\ t &= D(1 + \alpha D), & 0 &= DAt, & 0 &= AD^2. \end{aligned} \quad (3.9b)$$

Здесь возможны только два уже встречавшихся решения:

решение (K - 4),

$$A = \alpha, \quad B = \beta = 0, \quad D = t = 0, \quad G = \begin{vmatrix} K & AK \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (3.9c)$$

решение (K - 3),

$$A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0, \quad D = t, \quad G = \begin{vmatrix} K & 0 \\ DK & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.9d)$$

Теперь рассматриваем ситуацию, когда нулевых блоков нет:

$$A, \alpha \neq 0, \quad B, \beta \neq 0, \quad D, t \neq 0; \quad (3.10a)$$

при этом система уравнений (3.2) дает

$$\begin{aligned} \beta &= +\alpha t, \quad A(1+B) = \alpha(1+AD), \\ (\beta^2 + t\alpha) &= \beta(1+\alpha t), \quad (B^2 + DA) = \beta(1+AD), \\ \beta &= +\alpha t, \quad D(1+B) = t(1+AD), \\ B &= AD, \quad (\alpha + A\beta) = A(1+At), \quad B = AD, \\ (\beta B + tA) &= B(1+\alpha D), \quad (B\beta + D\alpha) = B(1+At), \quad (B^2 + AD) = B(1+AD), \\ (t + \beta D) &= D(1+\alpha D), \quad B = AD, \quad B = AD. \end{aligned} \quad (3.10b)$$

Исключим из уравнений  $B$  и  $\beta$ :

$$B = AD, \quad \beta = \alpha t;$$

выпишем оставшиеся независимые уравнения:

$$\begin{aligned} (A - \alpha)(1 + AD) &= 0, \\ (AD - \alpha t)(1 + AD) &= 0, \\ (D - t)(1 + AD) &= 0, \\ (A - \alpha)(1 + At) &= 0, \\ (D - t)(1 + \alpha D) &= 0. \end{aligned} \quad (3.10c)$$

Рассмотрим сначала случай  $A = \alpha$ ; система (3.10c) примет вид:

$$A = \alpha, \quad (D - t)(1 + AD) = 0. \quad (3.11)$$

Здесь приходим к двум новым решениям:

решение (K - 5),

$$A = \alpha, \quad B = \beta = AD, \quad D = t, \quad G = \begin{vmatrix} K & AK \\ DK & ADK \end{vmatrix}; \quad (3.12a)$$



это множество вырожденных матриц с рангом 2. Убеждаемся что закон умножения выполняется:

$$\left| \begin{array}{cc} K' & AK' \\ DK' & ADK' \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} K & AK \\ DK & ADK \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} (K'K + ADK'K) & A(K'K + ADK'K) \\ D(K'K + ADK'K) & AD(K'K + ADK'K) \end{array} \right|. \quad (3.12b)$$

Отмечаем, что если выбрать  $D = -A^{-1}$ , то результат умножения двух матриц будет давать всегда ноль:

решение (K - 5)',

$$A = \alpha, \quad B = \beta = -1, \quad D = t, \quad G = \left| \begin{array}{cc} K & AK \\ -A^{-1}K & -K \end{array} \right|, \quad G'G = 0; \quad (3.12c)$$

решение (K - 6),

$$A = \alpha, \quad B = -1, \quad \beta = -At, \quad D = -\frac{1}{A}, \quad G = \left| \begin{array}{cc} k_0 + \vec{k}\vec{\sigma} & Ak_0 + A\vec{k}\vec{\sigma} \\ tk_0 - A^{-1}\vec{k}\vec{\sigma} & Atk_0 - \vec{k}\vec{\sigma} \end{array} \right|; \quad (3.13a)$$

это множество вырожденных матриц с рангом 2.

Проверяем закон умножения, обеспечивающий структуру полугруппы во множестве (3.13a):

$$G'G \left| \begin{array}{cc} k'_0 + \vec{k}'\vec{\sigma} & Ak'_0 + A\vec{k}'\vec{\sigma} \\ tk'_0 - A^{-1}\vec{k}'\vec{\sigma} & Atk'_0 - \vec{k}'\vec{\sigma} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} k_0 + \vec{k}\vec{\sigma} & Ak_0 + A\vec{k}\vec{\sigma} \\ tk_0 - A^{-1}\vec{k}\vec{\sigma} & Atk_0 - \vec{k}\vec{\sigma} \end{array} \right| = G'';$$

результат умножения записываем по блокам:

$$\begin{aligned} (11) &= (1 + At) k'_0 k_0 + (1 + At) \vec{k}' k_0 \vec{\sigma}, \\ (12) &= A \left[ (1 + At) k'_0 k_0 + (1 + At) \vec{k}' k_0 \vec{\sigma} \right], \\ (21) &= t (1 + At) k'_0 k_0 - A^{-1} (1 + At) \vec{k}' k_0 \vec{\sigma}, \\ (22) &= At (1 + At) k'_0 k_0 - (1 + At) \vec{k}' k_0 \vec{\sigma}, \end{aligned}$$

т. е.

$$k''_0 = (1 + At) k_0 k'_0, \quad \vec{k}'' = (1 + At) k_0 \vec{k}'; \quad (3.13b)$$

другими словами, матрица  $G'' = G'G$  “помнит” структуру матрицы  $G'$ .

Возвращаемся к системе (3.10c) и рассматриваем случай

$$A \neq \alpha, \quad 1 + AD = 0; \quad (3.14a)$$

система (3.10c) дает единственное решение:

$$D = -\frac{1}{A}, \quad t = -\frac{1}{A}, \quad (3.14b)$$

откуда находим

решение (K - 7),

$$A, \alpha, B = -1, \beta = -\frac{\alpha}{A}, D = t = -\frac{1}{A}, \quad G = \begin{vmatrix} k_0 + \vec{k}\vec{\sigma} & \alpha k_0 + A\vec{k}\vec{\sigma} \\ -A^{-1}(k_0 + \vec{k}\vec{\sigma}) & -A^{-1}\alpha k_0 - \vec{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix}; \quad (3.14c)$$

это множество вырожденных матриц с рангом 2. Проверяем закон умножения, обеспечивающий структуру полугруппы:

$$G'G = \begin{vmatrix} k'_0 + \vec{k}'\vec{\sigma} & \alpha k'_0 + A\vec{k}'\vec{\sigma} \\ -A^{-1}(k'_0 + \vec{k}'\vec{\sigma}) & -A^{-1}\alpha k'_0 - \vec{k}'\vec{\sigma} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_0 + \vec{k}\vec{\sigma} & \alpha k_0 + A\vec{k}\vec{\sigma} \\ -A^{-1}(k_0 + \vec{k}\vec{\sigma}) & -A^{-1}\alpha k_0 - \vec{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix};$$

результат умножения записываем по блокам:

$$\begin{aligned} (11) &= \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k'_0 k_0 + \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k'_0 \vec{k} \vec{\sigma}, \\ (12) &= \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k'_0 k_0 + A \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k'_0 \vec{k} \vec{\sigma}, \\ (21) &= -A^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k'_0 k_0 - A^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k'_0 \vec{k} \vec{\sigma}, \\ (22) &= -A^{-1} \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k'_0 k_0 - \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k'_0 \vec{k} \vec{\sigma}, \end{aligned}$$

т. е. закон умножения в полугруппе выглядит так:

$$G'' = G'G, \quad k''_0 = \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k'_0 k_0, \quad \vec{k}'' = \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k'_0 \vec{k}. \quad (3.14d)$$

Таким образом, анализ варианта **I(k)** завершен полностью: найдено 7 типов решений; с точки зрения получения подгрупп есть только два варианта, остальные приводят к структурам полугрупп (матриц с рангом 2).

#### 4 Один независимый вектор: вариант **I(m)**

Рассматриваем вариант **I(m)**. Накладываем линейные ограничения

$$\mathbf{n} = A \mathbf{m}, \quad n_0 = \alpha m_0, \quad \mathbf{k} = B \mathbf{m}, \quad k_0 = \beta m_0, \quad \mathbf{l} = D \mathbf{m}, \quad l_0 = t m_0. \quad (4.1)$$

При этом закон умножения параметров (2.2a, b) дает

$$\begin{aligned} k''_0 &= \beta m'_0 \beta m_0 + B\mathbf{m}' B\mathbf{m} + \alpha m'_0 t m_0 + A\mathbf{m}' D\mathbf{m}, \\ m''_0 &= m'_0 m_0 + \mathbf{m}' \mathbf{m} + t m'_0 \alpha m_0 + D\mathbf{m}' A\mathbf{m}, \\ n''_0 &= \beta m'_0 \alpha m_0 + B\mathbf{m}' A\mathbf{m} + \alpha m'_0 m_0 + A\mathbf{m}' \mathbf{m}, \\ l''_0 &= t m'_0 \beta m_0 + D\mathbf{m}' B\mathbf{m} + m'_0 t m_0 + \mathbf{m}' D\mathbf{m}, \end{aligned} \quad (4.2a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'' &= \beta m'_0 B\mathbf{m} + B\mathbf{m}' \beta m_0 + i B\mathbf{m}' \times B\mathbf{m} + \alpha m'_0 D\mathbf{m} + A\mathbf{m}' t m_0 + i A\mathbf{m}' \times D\mathbf{m}, \\ \mathbf{m}'' &= m'_0 \mathbf{m} + \mathbf{m}' m_0 + i \mathbf{m}' \times \mathbf{m} + t m'_0 A\mathbf{m} + D\mathbf{m}' \alpha m_0 + i D\mathbf{m}' \times A\mathbf{m}, \\ \mathbf{n}'' &= \beta m'_0 A\mathbf{m} + B\mathbf{m}' \alpha m_0 + i B\mathbf{m}' \times A\mathbf{m} + \alpha m'_0 \mathbf{m} + A\mathbf{m}' m_0 + i A\mathbf{m}' \times \mathbf{m}, \\ \mathbf{l}'' &= t m'_0 B\mathbf{m} + D\mathbf{m}' \beta m_0 + i D\mathbf{m}' \times B\mathbf{m} + m'_0 D\mathbf{m} + \mathbf{m}' t m_0 + i \mathbf{m}' \times D\mathbf{m}. \end{aligned} \quad (4.2b)$$

Требуем

$$\begin{aligned} n_0'' &= \alpha m_0'' \quad \implies \\ \beta m_0' \alpha m_0 + B \mathbf{m}' A \mathbf{m} + \alpha m_0' m_0 + A \mathbf{m}' \mathbf{m} &= \\ \alpha m_0' m_0 + \alpha \mathbf{m}' \mathbf{m} + \alpha t m_0' \alpha m_0 + \alpha D \mathbf{m}' A \mathbf{m} &\implies \\ \alpha(\beta + 1) = \alpha(1 + \alpha t), \quad A(B + 1) &= \alpha(1 + AD); \end{aligned}$$

требуем

$$\begin{aligned} k_0'' &= \beta m_0'' \quad \implies \\ \beta m_0' \beta m_0 + B \mathbf{m}' B \mathbf{m} + \alpha m_0' t m_0 + A \mathbf{m}' D \mathbf{m} &= \\ \beta m_0' m_0 + \beta \mathbf{m}' \mathbf{m} + \beta t m_0' \alpha m_0 + \beta D \mathbf{m}' A \mathbf{m} &\implies \\ \beta^2 + \alpha t = \beta(1 + \alpha t), \quad B^2 + AD &= \beta(1 + AD); \end{aligned}$$

требуем

$$\begin{aligned} l_0'' &= t m_0'' \quad \implies \\ t m_0' \beta m_0 + D \mathbf{m}' B \mathbf{m} + m_0' t m_0 + \mathbf{m}' D \mathbf{m} &= \\ t m_0' m_0 + t \mathbf{m}' \mathbf{m} + t^2 m_0' \alpha m_0 + t D \mathbf{m}' A \mathbf{m} &\implies \\ t(\beta + 1) = t(1 + \alpha t), \quad D(B + 1) &= t(1 + AD); \end{aligned}$$

требуем

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'' &= B \mathbf{m}'' \quad \implies \\ \beta m_0' B \mathbf{m} + B \mathbf{m}' \beta m_0 + i B \mathbf{m}' \times B \mathbf{m} + \alpha m_0' D \mathbf{m} + A \mathbf{m}' t m_0 + i A \mathbf{m}' \times D \mathbf{m} &= \\ B m_0' \mathbf{m} + B \mathbf{m}' m_0 + i B \mathbf{m}' \times \mathbf{m} + B t m_0' A \mathbf{m} + B D \mathbf{m}' \alpha m_0 + i B D \mathbf{m}' \times A \mathbf{m} &\implies \\ \beta B + \alpha D = B(1 + tA), \quad \beta B + tA = B(1 + \alpha D), \quad B^2 + AD &= B(1 + AD); \end{aligned}$$

требуем

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'' &= A \mathbf{m}'' \quad \implies \\ \beta m_0' A \mathbf{m} + B \mathbf{m}' \alpha m_0 + i B \mathbf{m}' \times A \mathbf{m} + \alpha m_0' \mathbf{m} + A \mathbf{m}' m_0 + i A \mathbf{m}' \times \mathbf{m} &= \\ A m_0' \mathbf{m} + A \mathbf{m}' m_0 + i A \mathbf{m}' \times \mathbf{m} + A t m_0' A \mathbf{m} + A D \mathbf{m}' \alpha m_0 + i A D \mathbf{m}' \times A \mathbf{m} &\implies \\ \beta A + \alpha = A(1 + tA), \quad B \alpha + A = A(1 + \alpha D), \quad A(1 + B) &= A(1 + AD); \end{aligned}$$

требуем

$$\begin{aligned} \mathbf{l}'' &= D \mathbf{m}'' \quad \implies \\ t m_0' B \mathbf{m} + D \mathbf{m}' \beta m_0 + i D \mathbf{m}' \times B \mathbf{m} + m_0' D \mathbf{m} + \mathbf{m}' t m_0 + i \mathbf{m}' \times D \mathbf{m} &= \\ D m_0' \mathbf{m} + D \mathbf{m}' m_0 + i D \mathbf{m}' \times \mathbf{m} + D t m_0' A \mathbf{m} + D D \mathbf{m}' \alpha m_0 + i D D \mathbf{m}' \times A \mathbf{m} &\implies \\ tB + D = D(1 + tA), \quad D\beta + t = D(1 + \alpha D), \quad D(1 + B) &= D(1 + AD). \end{aligned}$$

Собираем полученные уравнения вместе:

$$\begin{aligned}
 \alpha(\beta + 1) &= \alpha(1 + \alpha t), & A(B + 1) &= \alpha(1 + AD), \\
 \beta^2 + \alpha t &= \beta(1 + \alpha t), & B^2 + AD &= \beta(1 + AD), \\
 t(\beta + 1) &= t(1 + \alpha t), & D(B + 1) &= t(1 + AD), \\
 \beta B + \alpha D &= B(1 + tA), & \beta B + tA &= B(1 + \alpha D), & B^2 + AD &= B(1 + AD), \\
 \beta A + \alpha &= A(1 + tA), & B\alpha + A &= A(1 + \alpha D), & A(1 + B) &= A(1 + AD), \\
 tB + D &= D(1 + tA), & D\beta + t &= D(1 + \alpha D), & D(1 + B) &= D(1 + AD).
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

У системы (4.3) есть тривиальное решение, когда все параметры нулевые. Это приводит к матрицам с тремя нулевыми блоками:

решение  $(M - 1)$ ,

$$A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0, \quad D = t = 0, \quad G = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{vmatrix}. \tag{4.4}$$

Построим решения при двух нулевых блоках. Здесь возможны 3 варианта.

Первый вариант:

$$A = \alpha = 0, \quad D = t = 0; \tag{4.5a}$$

система уравнений (4.3) дает

$$\begin{aligned}
 0 &= 0, & 0 &= 0, \\
 \beta^2 &= \beta, & B^2 &= \beta, \\
 0 &= 0, & 0 &= 0, \\
 \beta B &= B, & \beta B &= B, & B^2 &= B, \\
 0 &= 0, & 0 &= 0, & 0 &= 0, \\
 0 &= 0, & 0 &= 0, & 0 &= 0;
 \end{aligned} \tag{4.5b}$$

т. е.

$$\beta^2 = \beta, \quad B^2 = \beta, \quad \beta B = B, \quad B^2 = B. \tag{4.5c}$$

У уравнений (4.5c) есть только два уже известных решения:

решение  $(M - 1)$ ,

$$A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0, \quad D = t = 0, \quad G = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{vmatrix}; \tag{4.6}$$

решение  $(M - 2)$ ,

$$A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 1, \quad D = t = 0, \quad G = \begin{vmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{vmatrix}. \tag{4.7}$$

Рассматриваем следующий вариант с двумя нулевыми блоками:

$$A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0; \tag{4.8a}$$

система (4.3) дает

$$\begin{aligned}
 t &= 0, & D &= 0, \\
 0 &= 0, & 0 &= 0, \\
 0 &= 0, & D &= t, \\
 0 &= 0, & 0 &= 0, & 0 &= 0, \\
 0 &= 0, & 0 &= 0, & 0 &= 0, \\
 0 &= 0, & t &= D, & 0 &= D,
 \end{aligned} \tag{4.8b}$$

т. е.

решение (M - 3),

$$A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0, \quad D = t, \quad G = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ DM & M \end{vmatrix}, \quad G'G = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ DM'M & M'M \end{vmatrix}. \tag{4.8c}$$

Это полугруппа матриц ранга 2.

Следующий вариант с двумя нулевыми блоками:

$$D = t = 0, \quad B = \beta = 0; \tag{4.9a}$$

система (4.3) дает

$$\begin{aligned}
 0 &= 0, & A &= \alpha, \\
 0 &= 0, & 0 &= 0, \\
 0 &= 0, & 0 &= 0, \\
 0 &= 0, & 0 &= 0, & 0 &= 0, \\
 \alpha &= A, & 0 &= 0, & 0 &= 0, \\
 0 &= 0, & 0 &= 0, & 0 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.9b}$$

т. е.

решение (M - 4),

$$A = \alpha, \quad B = \beta = 0, \quad D = t = 0, \quad G = \begin{vmatrix} 0 & AM \\ 0 & M \end{vmatrix}. \tag{4.9c}$$

Строим решения при одном нулевом блоке. Здесь возможны 3 варианта. Первый вариант:

$$A = \alpha = 0; \tag{4.10a}$$

система (4.3) дает

$$\begin{aligned}
 0 &= 0, & 0 &= 0, \\
 \beta^2 &= \beta, & B^2 &= \beta, \\
 t\beta &= 0, & D(B + 1) &= t, \\
 \beta B &= B, & \beta B &= B, & B^2 &= B, \\
 0 &= 0, & 0 &= 0, & 0 &= 0, \\
 tB &= 0, & D\beta + t &= D, & DB &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.10b}$$

У этой системы есть только два решения:

решение (M - 2),

$$A = \alpha = 0, \quad B = \beta = +1, \quad D = t = 0, \quad G = \begin{vmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{vmatrix}; \quad (4.10c)$$

решение (M - 3),

$$A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0, \quad D = t, \quad G = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ DM & M \end{vmatrix}, \quad G'G = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ DM'M & M'M \end{vmatrix}. \quad (4.10d)$$

Строим решения с другим нулевым блоком:

$$B = \beta = 0; \quad (4.11a)$$

система (4.3) дает

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha^2 t, & A &= \alpha, \\ \alpha t &= 0, & AD &= 0, \\ 0 &= \alpha t^2, & D &= t, \\ \alpha D &= 0, & tA &= 0, & AD &= 0, \\ 0 &= tA^2, & 0 &= A^2 D, & 0 &= A^2 D, \\ 0 &= tDA, & 0 &= \alpha D^2, & 0 &= AD^2. \end{aligned} \quad (4.11b)$$

У системы (4.11b) есть только два решения:

решение (M - 3),

$$A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0, \quad D = t, \quad G = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ DM & M \end{vmatrix}, \quad G'G = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ DM'M & M'M \end{vmatrix}; \quad (4.11c)$$

решение (M - 4),

$$A = \alpha, \quad B = \beta = 0, \quad D = t = 0, \quad G = \begin{vmatrix} 0 & AM \\ 0 & M \end{vmatrix}. \quad (4.11d)$$

Рассмотрим последний вариант с одним нулевым блоком:

$$D = t = 0; \quad (4.12a)$$

система (4.3) дает

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= 0, & A(B+1) &= \alpha, \\ \beta^2 &= \beta, & B^2 &= \beta, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ \beta B &= B, & \beta B &= B, & B^2 &= B, \\ \beta A + \alpha &= A, & B\alpha &= 0, & AB &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, & 0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.12b)$$

У этой системы существует только два решения:

решение (M - 2),

$$A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 1, \quad D = t = 0, \quad G = \begin{vmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{vmatrix}; \quad (4.12c)$$

решение (M - 4),

$$A = \alpha, \quad B = \beta = 0, \quad D = t = 0, \quad G = \begin{vmatrix} 0 & AM \\ 0 & M \end{vmatrix}. \quad (4.12d)$$

Таким образом, построены все решения с одним, двумя, тремя нулевыми блоками. Осталось исследовать случай возможных решений, когда все три блока ненулевые:

$$A, \alpha \neq 0, \quad B, \beta \neq 0, \quad D, t \neq 0; \quad (4.13a)$$

при этих допущениях предстоит построить все решения системы (4.3). При условиях (4.13a) система (4.3) упрощается:

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha t, & A(B + 1) &= \alpha(1 + AD), \\ \beta^2 + \alpha t &= \beta(1 + \alpha t), & B^2 + AD &= \beta(1 + AD), \\ \beta &= \alpha t, & D(B + 1) &= t(1 + AD), \\ \beta B + \alpha D &= B(1 + tA), & \beta B + tA &= B(1 + \alpha D), & B^2 + AD &= B(1 + AD), \\ \beta A + \alpha &= A(1 + tA), & B &= AD, & B &= AD, \\ B &= AD, & D\beta + t &= D(1 + \alpha D), & B &= AD, \end{aligned} \quad (4.13b)$$

что эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha t, & B &= AD, \\ (D - t)(1 + AD) &= 0, & (A - \alpha)(1 + AD) &= 0, & (\alpha t - AD)(1 + AD) &= 0, \\ (A - \alpha)(1 + tA) &= 0, & (D - t)(1 + \alpha D) &= 0. \end{aligned} \quad (4.13c)$$

Можно выделить две возможности:

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha t, & B &= AD, \\ D &= -\frac{1}{A}, & (A - \alpha)(1 + tA) &= 0; \end{aligned} \quad (4.14a)$$

решение (M - 5) (см. (K - 6))

$$A = \alpha, \quad B = -1, \quad D = -\frac{1}{A}, \quad \beta = At,$$

$$G = \begin{vmatrix} (Atm_0 - \vec{m}\vec{\sigma}) & (Am_0 + A\vec{m}\vec{\sigma}) \\ (tm_0 - A^{-1}\vec{m}\vec{\sigma}) & (m_0 + \vec{m}\vec{\sigma}) \end{vmatrix}; \quad (4.14b)$$

решение (M – 6) (см. (K – 7))

$$A, \alpha \neq 0, \quad D = t = -\frac{1}{A}, \quad B = -1, \quad \beta = -\frac{\alpha}{A},$$

$$G = \begin{vmatrix} (-\alpha A^{-1} t m_0 - \vec{m} \vec{\sigma}) & (\alpha m_0 + A \vec{m} \vec{\sigma}) \\ (A^{-1} m_0 + A^{-1} \vec{m} \vec{\sigma}) & (m_0 + \vec{m} \vec{\sigma}) \end{vmatrix}. \quad (4.14c)$$

Возможность

$$\beta = \alpha t, \quad B = AD, \quad D = t, \quad A = \alpha \quad (4.15a)$$

приводит к единственному классу решений:

решение (M – 7),

$$A = \alpha \neq 0, \quad D = t \neq 0, \quad B = \beta = AD,$$

$$G = \begin{vmatrix} ADM & AM \\ DM & M \end{vmatrix},$$

$$G'G = \begin{vmatrix} ADM' & AM' \\ DM' & M' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ADM & AM \\ DM & M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AD(1+DA)M'M & A(1+DA)M'M \\ D(1+DA)M'M & (1+DA)M'M \end{vmatrix}. \quad (4.15b)$$

## 5 Один независимый вектор: вариант I(n)

Теперь предстоит исследовать варианты **I(n)** и **I(1)**. Едва ли следует ожидать эквивалентности этих вариантов предыдущим. Скорее всего, здесь будет также много вырожденных случаев.

Рассмотрим вариант **I(n)**:

$$\mathbf{k} = A \mathbf{n}, \quad k_0 = \alpha n_0, \quad \mathbf{m} = B \mathbf{n}, \quad m_0 = \beta n_0, \quad \mathbf{l} = D \mathbf{n}, \quad l_0 = t n_0. \quad (5.1)$$

Закон умножения дает

$$\begin{aligned} k_0'' &= \alpha^2 n_0' n_0 + A^2 \mathbf{n}' \mathbf{n} + t n_0' n_0 + D \mathbf{n}' \mathbf{n}, \\ m_0'' &= \beta^2 n_0' n_0 + B^2 \mathbf{n}' \mathbf{n} + t n_0' n_0 + D \mathbf{n}' \mathbf{n}, \\ n_0'' &= \alpha n_0' n_0 + A \mathbf{n}' \mathbf{n} + \beta n_0' n_0 + B \mathbf{n}' \mathbf{n}, \\ l_0'' &= t \alpha n_0' n_0 + DA \mathbf{n}' \mathbf{n} + \beta t n_0' n_0 + BD \mathbf{n}' \mathbf{n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'' &= \alpha A n_0' \mathbf{n} + \alpha A \mathbf{n}' n_0 + i A^2 \mathbf{n}' \times \mathbf{n} + D n_0' \mathbf{n} + t \mathbf{n}' n_0 + i D \mathbf{n}' \times \mathbf{n}, \\ \mathbf{m}'' &= \beta B n_0' \mathbf{n} + \beta B \mathbf{n}' n_0 + i B^2 \mathbf{n}' \times \mathbf{n} + t n_0' \mathbf{n} + D \mathbf{n}' n_0 + i D \mathbf{n}' \times \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}'' &= \alpha n_0' \mathbf{n} + A \mathbf{n}' n_0 + i A \mathbf{n}' \times \mathbf{n} + B n_0' \mathbf{n} + \beta \mathbf{n}' n_0 + i B \mathbf{n}' \times \mathbf{n}, \\ \mathbf{l}'' &= t A n_0' \mathbf{n} + D \alpha \mathbf{n}' n_0 + i DA \mathbf{n}' \times \mathbf{n} + \beta D n_0' \mathbf{n} + B t \mathbf{n}' n_0 + i BD \mathbf{n}' \times \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Требуем

$$\underline{k_0'' = \alpha n_0''}:$$

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + t) n_0' n_0 + (A^2 + D) \mathbf{n}' \mathbf{n} &= \alpha(\alpha + \beta) n_0' n_0 + \alpha(A + B) \mathbf{n}' \mathbf{n}, \\ (\alpha^2 + t) &= \alpha(\alpha + \beta), \quad (A^2 + D) = \alpha(A + B); \end{aligned} \quad (5.2a)$$



$$\underline{m'' = \beta n''} :$$

$$\begin{aligned} (\beta^2 + t) n'_0 n_0 + (B^2 + D) \mathbf{n}' \mathbf{n} &= \beta (\alpha + \beta) n'_0 n_0 + \beta(A + B) \mathbf{n}' \mathbf{n} , \\ (\beta^2 + t) &= \beta (\alpha + \beta) , \quad (B^2 + D) = \beta(A + B) ; \end{aligned} \quad (5.2b)$$

$$\underline{l'' = t n''} :$$

$$\begin{aligned} (t\alpha + \beta t) n'_0 n_0 + (DA + BD) \mathbf{n}' \mathbf{n} &= t (\alpha + \beta) n'_0 n_0 + t(A + B) \mathbf{n}' \mathbf{n} , \\ (t\alpha + \beta t) &= t (\alpha + \beta) , \quad (DA + BD) = t(A + B) ; \end{aligned} \quad (5.2c)$$

$$\underline{\mathbf{k}'' = A \mathbf{n}''} :$$

$$\begin{aligned} (\alpha A + D) n'_0 \mathbf{n} + (\alpha A + t) \mathbf{n}' n_0 + i(A^2 + D) \mathbf{n}' \times \mathbf{n} &= \\ A(\alpha + B) n'_0 \mathbf{n} + A(A + \beta) \mathbf{n}' n_0 + iA(A + B) \mathbf{n}' \times \mathbf{n} , & \quad (5.3a) \\ (\alpha A + D) = A(\alpha + B) , \quad (\alpha A + t) = A(A + \beta) , \quad (A^2 + D) = A(A + B) ; \end{aligned}$$

$$\underline{\mathbf{m}'' = B \mathbf{n}''} :$$

$$\begin{aligned} (\beta B + t) n'_0 \mathbf{n} + (\beta B + D) \mathbf{n}' n_0 + i(B^2 + D) \mathbf{n}' \times \mathbf{n} &= \\ B(\alpha + B) n'_0 \mathbf{n} + B(A + \beta) \mathbf{n}' n_0 + iB(A + B) \mathbf{n}' \times \mathbf{n} , & \quad (5.3b) \\ (\beta B + t) = B(\alpha + B) , \quad (\beta B + D) = B(A + \beta) , \quad (B^2 + D) = B(A + B) ; \end{aligned}$$

$$\underline{\mathbf{l}'' = D \mathbf{n}''} :$$

$$\begin{aligned} (tA + \beta D) n'_0 \mathbf{n} + (D\alpha + Bt) \mathbf{n}' n_0 + i(DA + BD) \mathbf{n}' \times \mathbf{n} &= \\ D(\alpha + B) n'_0 \mathbf{n} + D(A + \beta) \mathbf{n}' n_0 + iD(A + B) \mathbf{n}' \times \mathbf{n} , & \quad (5.3c) \\ (tA + \beta D) = D(\alpha + B) , \quad (D\alpha + Bt) = D(A + \beta) , \quad (DA + BD) = D(A + B) . \end{aligned}$$

Таким образом, инвариантность формул (5.1) относительно умножения матриц требует выполнения уравнений:

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + t) &= \alpha(\alpha + \beta) , \quad (A^2 + D) = \alpha(A + B) , \\ (\beta^2 + t) &= \beta (\alpha + \beta) , \quad (B^2 + D) = \beta(A + B) , \\ t(\alpha + \beta) &= t (\alpha + \beta) , \quad D(A + B) = t(A + B) , \end{aligned} \quad (5.4a)$$

$$\begin{aligned} (\alpha A + D) &= A(\alpha + B) , \quad (\alpha A + t) = A(A + \beta) , \quad (A^2 + D) = A(A + B) , \\ (\beta B + t) &= B(\alpha + B) , \quad (\beta B + D) = B(A + \beta) , \quad (B^2 + D) = B(A + B) , \\ (tA + \beta D) &= D(\alpha + B) , \quad (D\alpha + Bt) = D(A + \beta) , \quad D(A + B) = D(A + B) . \end{aligned}$$

Эта система эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} t &= \alpha\beta , \quad (A^2 + D) = \alpha(A + B) , \\ (B^2 + D) &= \beta(A + B) , \\ (D - t)(A + B) &= 0 , \\ D &= AB , \quad (\alpha A + t) = A(A + \beta) , \\ (\beta B + t) &= B(\alpha + B) , \\ (tA + \beta D) &= D(\alpha + B) , \quad (D\alpha + Bt) = D(A + \beta) . \end{aligned} \quad (5.4b)$$

Исключим переменные  $D$  и  $t$ :

$$D = AB, \quad t = \alpha\beta; \quad (5.5a)$$

выпишем оставшиеся уравнения:

$$\begin{aligned} (A - \alpha)(A + B) &= 0, \\ (B - \beta)(B + A) &= 0, \\ (AB - \alpha\beta)(A + B) &= 0, \\ (A - \alpha)(A + \beta) &= 0, \\ (B - \beta)(B + \alpha) &= 0, \\ A(\beta - B)(\alpha + B) &= 0, \\ B(\alpha - A)(A + \beta) &= 0. \end{aligned} \quad (5.5b)$$

Предположим

$$A + B \neq 0, \quad (5.6a)$$

тогда (5.5b) дает

$$A = \alpha, \quad B = \beta, \quad B(A - B) = 0. \quad (5.6b)$$

Здесь возникают два решения:

решение  $(N - 1)$ ,

$$A = \alpha, \quad B = \beta = 0, \quad D = t = 0, \quad G = \begin{vmatrix} AN & N \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (5.7)$$

решение  $(N - 2)$ ,

$$A = \alpha, \quad B = \beta = A, \quad D = t = A^2, \quad G = \begin{vmatrix} AN & N \\ A^2N & AN \end{vmatrix},$$

$$G'G = \begin{vmatrix} AN' & N' \\ A^2N' & AN' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} AN & N \\ A^2N & AN \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A 2AN'N & 2AN'N \\ A^2 2AN'N & A 2AN'N \end{vmatrix}. \quad (5.8)$$

Теперь рассмотрим случай

$$A + B = 0, \quad B = -A; \quad (5.9a)$$

при этом из (5.5b) получаем

$$\begin{aligned} B = -A, \quad D = -A^2, \quad t = \alpha\beta, \\ (A - \alpha)(A + \beta) &= 0, \\ A(\beta + A)(\alpha - A) &= 0, \\ A(\alpha - A)(A + \beta) &= 0. \end{aligned} \quad (5.9b)$$

Возможны два решения:

решение (N - 3),

$$\beta = B = -A, \quad D = -A^2, \quad t = -\alpha A,$$

$$G = \begin{vmatrix} \alpha n_0 + A\mathbf{n}\vec{\sigma} & n_0 + \mathbf{n}\vec{\sigma} \\ -\alpha A n_0 - A^2 \mathbf{n}\vec{\sigma} & -A n_0 - A\mathbf{n}\vec{\sigma} \end{vmatrix}, \quad \det G = 0; \quad (5.10)$$

решение (N - 4),

$$A = +\alpha, \quad B = -A, \quad D = -A^2, \quad t = A\beta,$$

$$G = \begin{vmatrix} A n_0 + A\mathbf{n}\vec{\sigma} & n_0 + \mathbf{n}\vec{\sigma} \\ \beta A n_0 - A^2 \mathbf{n}\vec{\sigma} & \beta n_0 - A\mathbf{n}\vec{\sigma} \end{vmatrix}, \quad \det G = 0. \quad (5.11)$$

## 6 Один независимый вектор: вариант I(1)

Теперь предстоит исследовать вариант I(1):

$$\mathbf{k} = A \mathbf{l}, \quad k_0 = \alpha l_0, \quad \mathbf{m} = B \mathbf{l}, \quad m_0 = \beta l_0, \quad \mathbf{n} = D \mathbf{l}, \quad n_0 = t l_0. \quad (6.1)$$

Закон умножения (2.2a, b) принимает вид:

$$\begin{aligned} k_0'' &= \alpha^2 l_0' l_0 + A^2 \mathbf{l}' \mathbf{l} + t l_0' l_0 + D \mathbf{l}' \mathbf{l}, \\ m_0'' &= \beta^2 l_0' l_0 + B^2 \mathbf{l}' \mathbf{l} + t l_0' l_0 + D \mathbf{l}' \mathbf{l}, \\ n_0'' &= \alpha t l_0' l_0 + A D \mathbf{l}' \mathbf{l} + \beta t l_0' l_0 + B D \mathbf{l}' \mathbf{l}, \\ l_0'' &= \alpha l_0' l_0 + A \mathbf{l}' \mathbf{l} + \beta l_0' l_0 + B \mathbf{l}' \mathbf{l}, \end{aligned} \quad (6.2a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'' &= A \alpha l_0' \mathbf{l} + A \alpha \mathbf{l}' l_0 + i A^2 \mathbf{l}' \times \mathbf{l} + t l_0' \mathbf{l} + D \mathbf{l}' l_0 + i D \mathbf{l}' \times \mathbf{l}, \\ \mathbf{m}'' &= B \beta l_0' \mathbf{l} + B \beta \mathbf{l}' l_0 + i B^2 \mathbf{l}' \times \mathbf{l} + D l_0' \mathbf{l} + t \mathbf{l}' l_0 + i D \mathbf{l}' \times \mathbf{l}, \\ \mathbf{n}'' &= \alpha D l_0' \mathbf{l} + A t \mathbf{l}' l_0 + i A D \mathbf{l}' \times \mathbf{l} + B t l_0' \mathbf{l} + \beta D \mathbf{l}' l_0 + i B D \mathbf{l}' \times \mathbf{l}, \\ \mathbf{l}'' &= A l_0' \mathbf{l} + \alpha \mathbf{l}' l_0 + i A \mathbf{l}' \times \mathbf{l} + \beta l_0' \mathbf{l} + B \mathbf{l}' l_0 + i B \mathbf{l}' \times \mathbf{l}. \end{aligned} \quad (6.2b)$$

Требуем, чтобы линейные ограничения сохранялись при перемножении матриц:

$$k_0'' = \alpha l_0'' \quad \implies$$

$$(\alpha^2 + t) l_0' l_0 + (A^2 + D) \mathbf{l}' \mathbf{l} = \alpha(\alpha + \beta) l_0' l_0 + \alpha(A + B) \mathbf{l}' \mathbf{l} \quad \implies$$

$$(\alpha^2 + t) = \alpha(\alpha + \beta), \quad (A^2 + D) = \alpha(A + B);$$

$$m_0'' = \beta l_0'' \quad \implies$$

$$(\beta^2 + t) l_0' l_0 + (B^2 + D) \mathbf{l}' \mathbf{l} = \beta(\alpha + \beta) l_0' l_0 + \beta(A + B) \mathbf{l}' \mathbf{l} \quad \implies$$

$$(\beta^2 + t) = \beta(\alpha + \beta), \quad (B^2 + D) = \beta(A + B);$$

$$n_0'' = t l_0'' \quad \implies$$

$$(\alpha t + \beta t) l_0' l_0 + (A D + B D) \mathbf{l}' \mathbf{l} = t(\alpha + \beta) l_0' l_0 + t(A + B) \mathbf{l}' \mathbf{l} \quad \implies$$

$$(\alpha t + \beta t) = t(\alpha + \beta), \quad (A D + B D) = t(A + B);$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}'' &= A \mathbf{l}'' \quad \implies \\
(A\alpha + t)l'_0 \mathbf{1} + (A\alpha + D)\mathbf{l}' l_0 + i (A^2 + D)\mathbf{l}' \times \mathbf{1} &= \\
A(A + \beta)l'_0 \mathbf{1} + A(\alpha + B)\mathbf{l}' l_0 + i A(A + B)\mathbf{l}' \times \mathbf{1} &\implies \\
(A\alpha + t) = A(A + \beta), \quad (A\alpha + D) = A(\alpha + B), \quad (A^2 + D) = A(A + B); &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}'' &= B \mathbf{l}'' \quad \implies \\
(B\beta + D)l'_0 \mathbf{1} + (B\beta + t)\mathbf{l}' l_0 + i (B^2 + D)\mathbf{l}' \times \mathbf{1} &= \\
B(A + \beta)l'_0 \mathbf{1} + B(\alpha + B)\mathbf{l}' l_0 + i B(A + B)\mathbf{l}' \times \mathbf{1} &\implies \\
(B\beta + D) = B(A + \beta), \quad (B\beta + t) = B(\alpha + B), \quad (B^2 + D) = B(A + B); &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}'' &= D \mathbf{l}'' \quad \implies \\
(\alpha D + Bt)l'_0 \mathbf{1} + (At + \beta D)\mathbf{l}' l_0 + i (AD + BD)\mathbf{l}' \times \mathbf{1} &= \\
D(A + \beta)l'_0 \mathbf{1} + D(\alpha + B)\mathbf{l}' l_0 + i D(A + B)\mathbf{l}' \times \mathbf{1} &\implies \\
(\alpha D + Bt) = D(A + \beta), \quad (At + \beta D) = D(\alpha + B), \quad (AD + BD) = D(A + B). &
\end{aligned}$$

Соберем вместе полученные уравнения:

$$\begin{aligned}
(\alpha^2 + t) = \alpha(\alpha + \beta), \quad (A^2 + D) = \alpha(A + B), \\
(\beta^2 + t) = \beta(\alpha + \beta), \quad (B^2 + D) = \beta(A + B), \\
(\alpha t + \beta t) = t(\alpha + \beta), \quad (AD + BD) = t(A + B),
\end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}
(A\alpha + t) = A(A + \beta), \quad (A\alpha + D) = A(\alpha + B), \quad (A^2 + D) = A(A + B), \\
(B\beta + D) = B(A + \beta), \quad (B\beta + t) = B(\alpha + B), \quad (B^2 + D) = B(A + B), \\
(\alpha D + Bt) = D(A + \beta), \quad (At + \beta D) = D(\alpha + B), \quad (AD + BD) = D(A + B).
\end{aligned}$$

Система уравнений (6.3) эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned}
t = \alpha\beta, \quad (A^2 + D) = \alpha(A + B), \\
t = \beta\alpha, \quad (B^2 + D) = \beta(A + B), \\
0 = 0, \quad (D - t)(A + B) = 0,
\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}
(A\alpha + t) = A(A + \beta), \quad (A\alpha + D) = A(\alpha + B), \quad D = AB, \\
(B\beta + D) = B(A + \beta), \quad (B\beta + t) = B(\alpha + B), \quad D = AB, \\
(\alpha D + Bt) = D(A + \beta), \quad (At + \beta D) = D(\alpha + B), \quad 0 = 0.
\end{aligned}$$

Исключаем переменные  $t$  и  $D$ :

$$t = \alpha\beta, \quad D = AB; \tag{6.5a}$$

приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned}
 (A - \alpha)(A + B) &= 0, \\
 (B - \beta)(A + B) &= 0, \\
 (AB - \alpha\beta)(A + B) &= 0, \\
 (A - \alpha)(A + \beta) &= 0, \\
 (B - \beta)(\alpha + B) &= 0, \\
 A(\beta - B)(\alpha + B) &= 0, \\
 B(\alpha - A)(A + \beta) &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.5b}$$

Поскольку они совпадают с уравнениями (5.5b), то можно воспользоваться уже готовыми результатами:

решение (L - 1),

$$\begin{aligned}
 A = \alpha, \quad B = \beta = 0, \quad D = t = 0, \quad G = \begin{vmatrix} AL & 0 \\ L & 0 \end{vmatrix}, \\
 G'G = \begin{vmatrix} AL & 0 \\ L & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} AL' & L' \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AL'L & 0 \\ L'L & 0 \end{vmatrix};
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

решение (L - 2),

$$\begin{aligned}
 A = \alpha, \quad B = \beta = A, \quad D = t = A^2, \quad G = \begin{vmatrix} AL & A^2L \\ L & AL \end{vmatrix}, \\
 G'G = \begin{vmatrix} AL' & A^2L' \\ L' & AL' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} AL & A^2L \\ L & AL \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \ 2AL'L & A^2 \ 2AL'L \\ 2AL'L & A \ 2AL'L \end{vmatrix};
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

решение (L - 3),

$$\begin{aligned}
 \beta = B = -A, \quad D = -A^2, \quad t = -\alpha A, \\
 G = \begin{vmatrix} \alpha l_0 + A\mathbf{l}\vec{\sigma} & -\alpha A l_0 - A^2\mathbf{1} \\ l_0 + \mathbf{l}\vec{\sigma} & -A l_0 - A\mathbf{l}\vec{\sigma} \end{vmatrix}, \quad \det G = 0;
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

решение (L - 4),

$$\begin{aligned}
 A = +\alpha, \quad B = -A, \quad D = -A^2, \quad t = A\beta, \\
 G = \begin{vmatrix} A l_0 + A\mathbf{l}\vec{\sigma} & \beta A l_0 - A^2\mathbf{l}\vec{\sigma} \\ l_0 + \mathbf{l}\vec{\sigma} & \beta l_0 - A\mathbf{l}\vec{\sigma} \end{vmatrix}, \quad \det G = 0.
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

## 7 Два независимых вектора: вариант II(k,m)

Рассмотрим теперь случай двух независимых векторов. Исследуем вариант II(k,m):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} &= A\mathbf{k} + B\mathbf{m}, \quad n_0 = \alpha k_0 + \beta m_0, \\
 \mathbf{l} &= C\mathbf{k} + D\mathbf{m}, \quad l_0 = s k_0 + t m_0.
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Формулы умножения параметров принимают вид:

$$\begin{aligned} k_0'' &= k_0' k_0 + \mathbf{k}' \mathbf{k} + (\alpha k_0' + \beta m_0')(sk_0 + tm_0) + (\mathbf{A}\mathbf{k}' + \mathbf{B}\mathbf{m}')(\mathbf{C}\mathbf{k} + \mathbf{D}\mathbf{m}) , \\ m_0'' &= m_0' m_0 + \mathbf{m}' \mathbf{m} + (sk_0' + tm_0')(\alpha k_0 + \beta m_0 + (\mathbf{C}\mathbf{k}' + \mathbf{D}\mathbf{m}')(\mathbf{A}\mathbf{k} + \mathbf{B}\mathbf{m})) , \\ n_0'' &= k_0'(\alpha k_0 + \beta m_0) + \mathbf{k}'(\mathbf{A}\mathbf{k} + \mathbf{B}\mathbf{m}) + (\alpha k_0' + \beta m_0')m_0 + (\mathbf{A}\mathbf{k}' + \mathbf{B}\mathbf{m}')\mathbf{m} , \\ l_0'' &= (sk_0' + tm_0')k_0 + (\mathbf{C}\mathbf{k}' + \mathbf{D}\mathbf{m}')\mathbf{k} + m_0'(sk_0 + tm_0) + \mathbf{m}'(\mathbf{C}\mathbf{k} + \mathbf{D}\mathbf{m}) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'' &= k_0' \mathbf{k} + \mathbf{k}' k_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + \\ &(\alpha k_0' + \beta m_0')(\mathbf{C}\mathbf{k} + \mathbf{D}\mathbf{m}) + (\mathbf{A}\mathbf{k}' + \mathbf{B}\mathbf{m}')(\alpha k_0 + \beta m_0) + i (\mathbf{A}\mathbf{k}' + \mathbf{B}\mathbf{m}') \times (\mathbf{C}\mathbf{k} + \mathbf{D}\mathbf{m}) , \\ \mathbf{m}'' &= m_0' \mathbf{m} + \mathbf{m}' m_0 + i \mathbf{m}' \times \mathbf{m} + \\ &(sk_0' + tm_0')(\mathbf{A}\mathbf{k} + \mathbf{B}\mathbf{m}) + (\mathbf{C}\mathbf{k}' + \mathbf{D}\mathbf{m}')(\alpha k_0 + \beta m_0) + i (\mathbf{C}\mathbf{k}' + \mathbf{D}\mathbf{m}') \times (\mathbf{A}\mathbf{k} + \mathbf{B}\mathbf{m}) , \\ \mathbf{n}'' &= k_0'(\mathbf{A}\mathbf{k} + \mathbf{B}\mathbf{m}) + \mathbf{k}'(\alpha k_0 + \beta m_0) + i \mathbf{k}' \times (\mathbf{A}\mathbf{k} + \mathbf{B}\mathbf{m}) + \\ &(\alpha k_0' + \beta m_0')\mathbf{m} + (\mathbf{A}\mathbf{k}' + \mathbf{B}\mathbf{m}')m_0 + i (\mathbf{A}\mathbf{k}' + \mathbf{B}\mathbf{m}') \times \mathbf{m} , \\ \mathbf{l}'' &= (sk_0' + tm_0')\mathbf{k} + (\mathbf{C}\mathbf{k}' + \mathbf{D}\mathbf{m}')k_0 + i (\mathbf{C}\mathbf{k}' + \mathbf{D}\mathbf{m}') \times \mathbf{k} + \\ &m_0'(\mathbf{C}\mathbf{k} + \mathbf{D}\mathbf{m}) + \mathbf{m}'(sk_0 + tm_0) + i \mathbf{m}' \times (\mathbf{C}\mathbf{k} + \mathbf{D}\mathbf{m}) . \end{aligned}$$

Требуем выполнения равенства:

$$\alpha k_0'' + \beta m_0'' = n_0'' , \quad (7.2a)$$

т. е.

$$\begin{aligned} &\alpha [ k_0' k_0 + \mathbf{k}' \mathbf{k} + (\alpha k_0' + \beta m_0')(sk_0 + tm_0) + (\mathbf{A}\mathbf{k}' + \mathbf{B}\mathbf{m}')(\mathbf{C}\mathbf{k} + \mathbf{D}\mathbf{m}) ] + \\ &\beta [ m_0' m_0 + \mathbf{m}' \mathbf{m} + (sk_0' + tm_0')(\alpha k_0 + \beta m_0 + (\mathbf{C}\mathbf{k}' + \mathbf{D}\mathbf{m}')(\mathbf{A}\mathbf{k} + \mathbf{B}\mathbf{m})) ] = \\ &k_0'(\alpha k_0 + \beta m_0) + \mathbf{k}'(\mathbf{A}\mathbf{k} + \mathbf{B}\mathbf{m}) + (\alpha k_0' + \beta m_0')m_0 + (\mathbf{A}\mathbf{k}' + \mathbf{B}\mathbf{m}')\mathbf{m} , \end{aligned}$$

отсюда приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} k_0' k_0 : & \quad \alpha + \alpha^2 s + \alpha \beta s = \alpha , \\ m_0' m_0 : & \quad \alpha \beta t + \beta + t \beta^2 = \beta , \\ k_0' m_0 : & \quad \alpha^2 t + \beta^2 s = \beta + \alpha , \\ m_0' k_0 : & \quad \alpha \beta s + \alpha \beta t = 0 , \\ \mathbf{m}' \mathbf{k} : & \quad \alpha BC + \beta AD = 0 , \\ \mathbf{k}' \mathbf{m} : & \quad \alpha AD + \beta CB = B + A , \\ \mathbf{k}' \mathbf{k} : & \quad \alpha + \alpha AC + \beta AC = A , \\ \mathbf{m}' \mathbf{m} : & \quad \alpha BD + \beta + \beta DB = B . \end{aligned} \quad (7.2b)$$

Требуем

$$sk_0'' + tm_0'' = l_0'' , \quad (7.3a)$$

$$s [ k_0' k_0 + \mathbf{k}' \mathbf{k} + (\alpha k_0' + \beta m_0')(sk_0 + tm_0) + (\mathbf{A}\mathbf{k}' + \mathbf{B}\mathbf{m}')(\mathbf{C}\mathbf{k} + \mathbf{D}\mathbf{m}) ] +$$

$$t [ m_0' m_0 + \mathbf{m}' \mathbf{m} + (sk_0' + tm_0')(\alpha k_0 + \beta m_0 + (\mathbf{C}\mathbf{k}' + \mathbf{D}\mathbf{m}')(\mathbf{A}\mathbf{k} + \mathbf{B}\mathbf{m})) ] =$$

$$(sk_0' + tm_0')k_0 + (\mathbf{C}\mathbf{k}' + \mathbf{D}\mathbf{m}')\mathbf{k} + m_0'(sk_0 + tm_0) + \mathbf{m}'(\mathbf{C}\mathbf{k} + \mathbf{D}\mathbf{m}) ,$$

отсюда приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} k_0'k_0 : & \quad s + s^2\alpha + ts\alpha = s , \\ m_0'm_0 : & \quad \beta st + t + \beta t^2 = t , \\ k_0'm_0 : & \quad st\alpha + st\beta = 0 , \\ m_0'k_0 : & \quad \beta s^2 + \alpha t^2 = t + s , \\ \mathbf{k}'\mathbf{m} : & \quad sAD + tCB = 0 , \\ \mathbf{m}'\mathbf{k} : & \quad sBC + tAD = C + D , \\ \mathbf{k}'\mathbf{k} : & \quad s + sAC + tAC = C , \\ \mathbf{m}'\mathbf{m} : & \quad sBD + t + tBD = D . \end{aligned} \quad (7.3b)$$

Требуем

$$\mathbf{A}\mathbf{k}'' + \mathbf{B}\mathbf{m}'' = \mathbf{n}'' , \quad (7.4a)$$

т. е.

$$\begin{aligned} & A [ k_0' \mathbf{k} + \mathbf{k}' k_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + \\ & (\alpha k_0' + \beta m_0')(\mathbf{C}\mathbf{k} + \mathbf{D}\mathbf{m}) + (\mathbf{A}\mathbf{k}' + \mathbf{B}\mathbf{m}')(\alpha k_0 + \beta m_0) + i (\mathbf{A}\mathbf{k}' + \mathbf{B}\mathbf{m}') \times (\mathbf{C}\mathbf{k} + \mathbf{D}\mathbf{m}) ] + \\ & B [ m_0' \mathbf{m} + \mathbf{m}' m_0 + i \mathbf{m}' \times \mathbf{m} + \\ & (sk_0' + tm_0')(\mathbf{A}\mathbf{k} + \mathbf{B}\mathbf{m}) + (\mathbf{C}\mathbf{k}' + \mathbf{D}\mathbf{m}')(\alpha k_0 + \beta m_0) + i (\mathbf{C}\mathbf{k}' + \mathbf{D}\mathbf{m}') \times (\mathbf{A}\mathbf{k} + \mathbf{B}\mathbf{m}) ] = \\ & k_0'(\mathbf{A}\mathbf{k} + \mathbf{B}\mathbf{m}) + \mathbf{k}'(\alpha k_0 + \beta m_0) + i \mathbf{k}' \times (\mathbf{A}\mathbf{k} + \mathbf{B}\mathbf{m}) + \\ & (\alpha k_0' + \beta m_0')\mathbf{m} + (\mathbf{A}\mathbf{k}' + \mathbf{B}\mathbf{m}')m_0 + i (\mathbf{A}\mathbf{k}' + \mathbf{B}\mathbf{m}') \times \mathbf{m} . \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} k_0'\mathbf{k} : & \quad A + \alpha AC + sBA = A , \\ \mathbf{m}'m_0 : & \quad tAB + B + \beta BD = B , \\ \mathbf{k}'k_0 : & \quad A + sA^2 + \alpha BC = \alpha , \\ m_0'\mathbf{m} : & \quad \beta AD + B + tB^2 = \beta , \\ k_0'\mathbf{m} : & \quad \alpha AD + sB^2 = B + \alpha , \\ \mathbf{k}'m_0 : & \quad tA^2 + \beta CB = \beta + A , \end{aligned} \quad (7.4b)$$

$$\begin{aligned}
m'_0 \mathbf{k} : & \quad \beta AC + tAB = 0 , \\
\mathbf{m}' k_0 : & \quad sAB + \alpha BD = 0 , \\
\mathbf{k}' \times \mathbf{k} : & \quad A + A^2 C + BCA = A , \\
\mathbf{m}' \times \mathbf{m} : & \quad ABD + B + DB^2 = B , \\
\mathbf{k}' \times \mathbf{m} : & \quad A^2 D + CB^2 = B + A , \\
\mathbf{m}' \times \mathbf{k} : & \quad ABC + ADB = 0 .
\end{aligned}$$

Теперь требуем

$$C\mathbf{k}'' + D\mathbf{m}'' = \mathbf{l}'' , \quad (7.5a)$$

т. е.

$$\begin{aligned}
& C [ k'_0 \mathbf{k} + \mathbf{k}' k_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + \\
& (\alpha k'_0 + \beta m'_0)(C\mathbf{k} + D\mathbf{m}) + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}')(sk_0 + tm_0) + i (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}') \times (C\mathbf{k} + D\mathbf{m}) ] + \\
& D [ m'_0 \mathbf{m} + \mathbf{m}' m_0 + i \mathbf{m}' \times \mathbf{m} + \\
& (sk'_0 + tm'_0)(A\mathbf{k} + B\mathbf{m}) + (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}')(\alpha k_0 + \beta m_0) + i (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}') \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{m}) = \\
& (sk'_0 + tm'_0)\mathbf{k} + (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}')k_0 + i (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}') \times \mathbf{k} + \\
& m'_0(C\mathbf{k} + D\mathbf{m}) + \mathbf{m}'(sk_0 + tm_0) + i \mathbf{m}' \times (C\mathbf{k} + D\mathbf{m}) .
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
k'_0 \mathbf{k} : & \quad C + \alpha C^2 + sAD = s , \\
\mathbf{m}' m_0 : & \quad tCB + D + \beta D^2 = t , \\
\mathbf{k}' k_0 : & \quad C + sAC + \alpha CD = C , \\
m'_0 \mathbf{m} : & \quad \beta CD + D + tBD = D , \\
k'_0 \mathbf{m} : & \quad \alpha DC + sBD = 0 , \\
\mathbf{k}' m_0 : & \quad tAC + \beta CD = 0 , \\
m'_0 \mathbf{k} : & \quad \beta C^2 + tAD = t + C , \\
+\mathbf{m}' k_0 : & \quad sCB + \alpha D^2 = D + s , \\
\mathbf{k}' \times \mathbf{k} : & \quad C + AC^2 + DCA = C , \\
\mathbf{m}' \times \mathbf{m} : & \quad CBD + D + BD^2 = D , \\
\mathbf{k}' \times \mathbf{m} : & \quad ACD + CBD = 0 , \\
\mathbf{m}' \times \mathbf{k} : & \quad BC^2 + AD^2 = D + C .
\end{aligned} \quad (7.5b)$$



Соберем полученные уравнения:

$$\begin{aligned}
 \alpha s(\alpha + \beta) &= 0, & \beta t(\alpha + \beta) &= 0, \\
 \alpha^2 t + \beta^2 s &= \beta + \alpha, & \alpha\beta(s + t) &= 0, \\
 \alpha BC + \beta AD &= 0, & \alpha AD + \beta BC &= B + A, \\
 \alpha + (\alpha + \beta)AC &= A, & \beta + (\alpha + \beta)BD &= B, \\
 s\alpha(s + t) &= 0, & \beta t(s + t) &= 0, \\
 st(\alpha + \beta) &= 0, & \beta s^2 + \alpha t^2 &= t + s, \\
 sAD + tCB &= 0, & sBC + tAD &= C + D, \\
 s + AC(s + t) &= C, & t + BD(t + s) &= D, \\
 A(\alpha C + sB) &= 0, & B(\beta D + tA) &= 0, \\
 A + sA^2 + \alpha BC &= \alpha, & B + tB^2 + \beta AD &= \beta, \\
 \alpha AD + sB^2 &= B + \alpha, & \beta BC + tA^2 &= A + \beta, \\
 \beta AC + tAB &= 0, & \alpha BD + sAB &= 0, \\
 A + AC(A + B) &= A, & B + BD(B + A) &= B, \\
 A^2 D + B^2 C &= A + B, & AB(C + D) &= 0, \\
 C + \alpha C^2 + sAD &= s, & D + \beta D^2 + tBC &= t, \\
 C(sA + \alpha D) &= 0, & D(tB + \beta C) &= 0, \\
 D(\alpha C + sB) &= 0, & C(\beta D + tA) &= 0, \\
 \beta C^2 + tAD &= t + C, & \alpha D^2 + sBC &= D + s, \\
 AC(C + D) &= 0, & BD(D + C) &= 0, \\
 DC(A + B) &= 0, & BC^2 + AD^2 &= D + C.
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Напоминаем, что речь идет о решении уравнений для коэффициентов в формулах:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} &= A\mathbf{k} + B\mathbf{m}, & n_0 &= \alpha k_0 + \beta m_0, \\
 \mathbf{l} &= D\mathbf{m} + C\mathbf{k}, & l_0 &= tm_0 + sk_0.
 \end{aligned} \tag{7.7a}$$

Система уравнений достаточно сложная и может иметь не одно решение. При анализе мы будем предполагать, что блоки

$$(A, \alpha), \quad (B, \beta), \quad (D, t), \quad (C, s) \tag{7.7b}$$

могут быть нулевыми или ненулевыми целиком.

Самым простым представляется случай с 4 нулевыми блоками:

$$(A, \alpha) = 0, \quad (B, \beta) = 0, \quad (D, t) = 0, \quad (C, s) = 0; \tag{7.8a}$$

он приводит к очевидному решению:

решение  $(KM - 1)$ ,

$$G = \begin{vmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{vmatrix}. \tag{7.8b}$$

Можно выделить 4 случая с тремя нулевыми блоками:

$$\begin{aligned}
 (A, \alpha) \neq 0, & \quad (B, \beta) = 0, & \quad (D, t) = 0, & \quad (C, s) = 0; \\
 (A, \alpha) = 0, & \quad (B, \beta) \neq 0, & \quad (D, t) = 0, & \quad (C, s) \neq 0; \\
 (A, \alpha) = 0, & \quad (B, \beta) = 0, & \quad (D, t) \neq 0, & \quad (C, s) = 0; \\
 (A, \alpha) = 0, & \quad (B, \beta) = 0, & \quad (D, t) = 0, & \quad (C, s) \neq 0.
 \end{aligned} \tag{7.9a}$$

Можно выделить 6 случаев с двумя нулевыми блоками (два из них отмечены звездочками – они исследованы в предыдущих разделах):

$$\begin{aligned}
 (A, \alpha) = 0, & \quad (B, \beta) = 0, & \quad (D, t) \neq 0, & \quad (C, s) \neq 0; \\
 (A, \alpha) = 0, & \quad (B, \beta) \neq 0, & \quad (D, t) = 0, & \quad (C, s) \neq 0; \\
 (A, \alpha) = 0, & \quad (B, \beta) \neq 0, & \quad (D, t) \neq 0, & \quad (C, s) = 0; \\
 (A, \alpha) \neq 0, & \quad (B, \beta) = 0, & \quad (D, t) \neq 0, & \quad (C, s) = 0; \\
 (A, \alpha) \neq 0, & \quad (B, \beta) = 0, & \quad (D, t) = 0, & \quad (C, s) \neq 0; \\
 (A, \alpha) \neq 0, & \quad (B, \beta) \neq 0, & \quad (D, t) = 0, & \quad (C, s) = 0.
 \end{aligned} \tag{7.9b}$$

Можно выделить 4 случая с одним нулевым блоком:

$$\begin{aligned}
 (A, \alpha) = 0, & \quad (B, \beta) \neq 0, & \quad (D, t) \neq 0, & \quad (C, s) \neq 0; \\
 (A, \alpha) \neq 0, & \quad (B, \beta) = 0, & \quad (D, t) \neq 0, & \quad (C, s) \neq 0; \\
 (A, \alpha) \neq 0, & \quad (B, \beta) \neq 0, & \quad (D, t) = 0, & \quad (C, s) \neq 0; \\
 (A, \alpha) \neq 0, & \quad (B, \beta) \neq 0, & \quad (D, t) \neq 0, & \quad (C, s) = 0.
 \end{aligned} \tag{7.9c}$$

И возможен случай, когда все 4 блока ненулевые – он представляется самым сложным.

Начинаем с более простых случаев. Пусть (см. (7.9a))

$$(A, \alpha) \neq 0, \quad (B, \beta) = 0, \quad (D, t) = 0, \quad (C, s) = 0; \tag{7.10}$$

система уравнений (7.6) принимает простой вид и дает решение (7.8).

Пусть (см. (7.9a))

$$(A, \alpha) = 0, \quad (B, \beta) \neq 0, \quad (D, t) = 0, \quad (C, s) = 0; \tag{7.11}$$

система уравнений (7.6) дает решение (7.8).

Пусть (см. (7.9a))

$$(A, \alpha) = 0, \quad (B, \beta) = 0, \quad (D, t) \neq 0, \quad (C, s) = 0; \tag{7.12}$$

система уравнений (7.6) дает решение (7.8).

Пусть (см. (7.9a))

$$(A, \alpha) = 0, \quad (B, \beta) = 0, \quad (D, t) = 0, \quad (C, s) \neq 0; \tag{7.13}$$

система уравнений (7.6) дает решение (7.8).

Рассмотрим ситуации с двумя нулевыми блоками. Пусть (см. (7.9b))

$$(A, \alpha) = 0, \quad (B, \beta) = 0, \quad (D, t) \neq 0, \quad (C, s) \neq 0; \quad (7.14a)$$

система уравнений (7.6) принимает вид:

$$\begin{aligned} 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= t + s, \\ 0 &= 0, & 0 &= C + D, \\ s &= C, & t &= D, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ C &= s, & D &= t, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= t + C, & 0 &= D + s, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= D + C \end{aligned}$$

с решением

$$t = D, \quad s = C = -D, \quad (A, \alpha) = 0, \quad (B, \beta) = 0. \quad (7.14b)$$

В результате из (7.7a) получаем

$$\mathbf{n} = 0, \quad n_0 = 0, \quad \mathbf{l} = D(\mathbf{m} - \mathbf{k}), \quad l_0 = D(m_0 - k_0). \quad (7.14c)$$

Таким образом,

решение (KM - 2),

$$G = \begin{vmatrix} K & 0 \\ D(M - K) & M \end{vmatrix},$$

$$G'G = \begin{vmatrix} K' & 0 \\ D(M' - K') & M' \end{vmatrix} \left\| \begin{vmatrix} K'K & 0 \\ D(M'M - K'K) & M'M \end{vmatrix} \right. \quad (7.14d)$$

Рассматриваем случай (см. (7.9b))

$$(A, \alpha) = 0, \quad (B, \beta) \neq 0, \quad (D, t) = 0, \quad (C, s) \neq 0; \quad (7.15a)$$

система уравнений (7.6) принимает вид:

$$\begin{aligned} 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ \beta s &= 1, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & \beta C &= 1, \\ 0 &= 0, & \beta &= B, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & \beta s &= 1, \\ 0 &= 0, & sB &= 1, \\ s &= C, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & B &= \beta, \\ sB &= 1, & BC &= 1, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & B &= B, \\ BC &= 1, & 0 &= 0, \\ C &= s, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ \beta C &= 1, & BC &= 1, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & BC &= 1, \end{aligned}$$

что эквивалентно уравнениям:

$$s = C, \quad \beta = B, \quad BC = 1. \quad (7.15b)$$

Таким образом, приходим к следующему решению:

решение (KM - 3),

$$\begin{aligned} (A, \alpha) &= 0, & \beta &= B, & (D, t) &= 0, & C &= s = \frac{1}{B}; \\ \mathbf{n} &= B\mathbf{m}, & n_0 &= Bm_0, & \mathbf{l} &= \frac{1}{B}\mathbf{k}, & l_0 &= \frac{1}{B}k_0; \end{aligned} \quad (7.15c)$$

$$G = \begin{vmatrix} K & BM \\ B^{-1}K & M \end{vmatrix},$$

$$G'G = \begin{vmatrix} K' & BM' \\ B^{-1}K' & M' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K & BM \\ B^{-1}K & M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (K' + M')K & B(K' + M')M \\ B^{-1}(K' + M')K & (K' + M')M \end{vmatrix}. \quad (7.15d)$$

Рассматриваем вариант (см. (7.9b))

$$(A, \alpha) \neq 0, \quad (B, \beta) = 0, \quad (D, t) = 0, \quad (C, s) \neq 0; \quad (7.16a)$$

система уравнений (7.6) принимает вид:

$$\begin{aligned} \alpha s \alpha &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= \alpha, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= A, \\ \alpha + \alpha AC &= A, & 0 &= 0, \\ s \alpha s &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= s, \\ 0 &= 0, & 0 &= C, \\ s + ACs &= C, & 0 &= 0, \\ A \alpha C &= 0, & 0 &= 0, \\ A + sA^2 &= \alpha, & 0 &= 0, \\ 0 &= \alpha, & 0 &= A, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ A + ACA &= A, & 0 &= 0, \\ 0 &= A, & 0 &= 0, \\ C + \alpha C^2 &= s, & 0 &= 0, \\ CsA &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= C, & 0 &= s, \\ AC^2 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= C, \end{aligned} \quad (7.16b)$$

т. е. приходим к уже известному решению:

решение  $(KM - 1)$ ,

$$(B, \beta) = 0, \quad (D, t) = 0, \quad (A, \alpha) = 0, \quad (C, s) = 0, \quad G = \begin{vmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{vmatrix}. \quad (7.16c)$$

Рассматриваем случай (см. (7.9b))

$$(A, \alpha) \neq 0, \quad (B, \beta) \neq 0, \quad (D, t) = 0, \quad (C, s) = 0, \quad (7.17a)$$

система (7.6) дает

$$\begin{aligned} 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= \beta + \alpha, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= B + A, \\ \alpha &= A, & \beta &= B, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= D, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ A &= \alpha, & B &= \beta, \\ 0 &= B + \alpha, & 0 &= A + \beta, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ A &= A, & B &= B, \\ 0 &= A + B, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \end{aligned} \quad (7.17b)$$

т. е. приходим к решению:

решение ( $KM - 4$ ),

$$A = \alpha, \quad B = \beta = -A, \quad (D, t) = 0, \quad (C, s) = 0,$$

$$\mathbf{n} = A(\mathbf{k} - \mathbf{m}), \quad n_0 = A(k_0 - m_0), \quad \mathbf{l} = 0, \quad l_0 = 0, \quad (7.17c)$$

$$G = \begin{vmatrix} K & A(K - M) \\ 0 & M \end{vmatrix},$$

$$G'G = \begin{vmatrix} K' & A(K' - M') \\ 0 & M' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K & A(K - M) \\ 0 & M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K'K & A(K'K - M'M) \\ 0 & M'M \end{vmatrix}. \quad (7.17d)$$

Теперь предстоит исследовать 4 возможности с тремя ненулевыми блоками (см. (7.9c)). Пусть

$$(A, \alpha) = 0, \quad (B, \beta) \neq 0, \quad (D, t) \neq 0, \quad (C, s) \neq 0, \quad (7.18a)$$

система (7.6) дает

$$\begin{aligned} 0 &= 0, & \beta t \beta &= 0, \\ \beta^2 s &= \beta, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & \beta C B &= B, \\ 0 &= 0, & \beta + \beta B D &= B, \\ 0 &= 0, & \beta t(s + t) &= 0, \\ st\beta &= 0, & \beta s^2 &= t + s, \\ tCB &= 0, & sBC &= C + D, \\ s &= C, & t + BD(t + s) &= D, \\ 0 &= 0, & B\beta D &= 0, \\ 0 &= 0, & B + tB^2 &= \beta, \\ sB^2 &= B, & \beta BC &= \beta, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & B + BDB &= B, \\ B^2C &= B, & 0 &= 0, \\ C &= s, & D + \beta D^2 + tBC &= t, \\ 0 &= 0, & (tB + \beta C) &= 0, \\ DsB &= 0, & C\beta D &= 0, \\ \beta C^2 &= t + C, & sBC &= D + s, \\ 0 &= 0, & BD(D + C) &= 0, \\ DCB &= 0, & BC^2 &= D + C. \end{aligned} \quad (7.18b)$$

Эта система приводит к уже известному тривиальному решению ( $KM - 1$ ).

Пусть

$$(A, \alpha) \neq 0, \quad (B, \beta) = 0, \quad (D, t) \neq 0, \quad (C, s) \neq 0; \quad (7.19a)$$

система (7.6) дает

$$\begin{aligned} \alpha s \alpha &= 0, & 0 &= 0, \\ \alpha^2 t &= \alpha, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & \alpha AD &= A, \\ \alpha + \alpha AC &= A, & 0 &= 0, \\ s\alpha(s + t) &= 0, & 0 &= 0, \\ st\alpha &= 0, & \alpha t^2 &= t + s, \\ sAD &= 0, & tAD &= C + D, \\ s + AC(s + t) &= C, & t &= D, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A\alpha C &= 0, & 0 &= 0, \\
A + sA^2 &= \alpha, & 0 &= 0, \\
\alpha AD &= +\alpha, & tA^2 &= A, \\
\beta AC &= 0, & 0 &= 0, \\
A + ACA &= A, & 0 &= 0, \\
A^2D &= A, & 0 &= 0, \\
C + \alpha C^2 + sAD &= s, & D &= t, \\
C(sA + \alpha D) &= 0, & 0 &= 0, \\
D\alpha C &= 0, & CtA &= 0, \\
\beta C^2 + tAD &= t + C, & \alpha D^2 &= D + s, \\
AC(C + D) &= 0, & 0 &= 0, \\
DCA &= 0, & 0AD^2 &= D + C.
\end{aligned} \tag{7.19b}$$

Эта система приводит к уже известному тривиальному решению ( $KM - 1$ ).

Пусть

$$(A, \alpha) \neq 0, \quad (B, \beta) \neq 0, \quad (D, t) = 0, \quad (C, s) \neq 0; \tag{7.20a}$$

система (7.6) дает

$$\begin{aligned}
\alpha s(\alpha + \beta) &= 0, & 0 &= 0, \\
\beta^2 s &= \beta + \alpha, & \alpha \beta s &= 0, \\
\alpha BC &= 0, & \beta BC &= B + A, \\
\alpha + (\alpha + \beta)AC &= A, & \beta &= B, \\
s\alpha s &= 0, & 0 &= 0, \\
0 &= 0, & \beta s^2 &= s, \\
0 &= 0, & sBC &= C, \\
s + ACs &= C, & 0 &= D, \\
A(\alpha C + sB) &= 0, & 0 &= 0, \\
A + sA^2 + \alpha BC &= \alpha, & B &= \beta, \\
\alpha sB^2 &= B + \alpha, & \beta BC &= A + \beta, \\
\beta AC &= 0, & sAB &= 0, \\
A + AC(A + B) &= A, & B &= B, \\
B^2C &= A + B, & ABC &= 0, \\
C + \alpha C^2 &= s, & 0 &= 0, \\
CsA &= 0, & 0 &= 0, \\
0 &= 0, & 0 &= 0, \\
\beta C^2 &= +C, & +sBC &= s, \\
ACC &= 0, & 0 &= 0, \\
0 &= 0, & BC^2 &= +C.
\end{aligned} \tag{7.20b}$$



Эта система приводит к уже известному тривиальному решению ( $KM - 1$ ).

Наконец, рассматриваем последний случай из этого класса

$$(A, \alpha) \neq 0, \quad (B, \beta) \neq 0, \quad (D, t) \neq 0, \quad (C, s) = 0; \quad (7.21a)$$

система (7.6) дает

$$\begin{aligned} 0 &= 0, & \beta t(\alpha + \beta) &= 0, \\ \alpha^2 t &= \beta + \alpha, & \alpha \beta t &= 0, \\ \beta AD &= 0, & \alpha AD &= B + A, \\ \alpha &= A, & \beta + (\alpha + \beta)BD &= B, \\ 0 &= 0, & \beta tt &= 0, \\ 0 &= 0, & \alpha t^2 &= t, \\ 0 &= 0, & tAD &= D, \\ 0 &= 0, & t + BDt &= D, \\ 0 &= 0, & B(\beta D + tA) &= 0, \\ A &= \alpha, & B + tB^2 + \beta AD &= \beta, \\ \alpha AD &= B + \alpha, & \beta tA^2 &= A + \beta, \\ tAB &= 0, & \alpha BD &= 0, \\ A &= A, & B + BD(B + A) &= B, \\ A^2 D &= A + B, & ABD &= 0, \\ 0 &= 0, & D + \beta D^2 &= t, \\ 0 &= 0, & DtB &= 0, \\ 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ tAD &= t, & \alpha D^2 &= D, \\ 0 &= 0, & BDD &= 0, \\ 0 &= 0, & AD^2 &= D. \end{aligned} \quad (7.21b)$$

Эта система также приводит к уже известному тривиальному решению ( $KM - 1$ ).

Остается исследовать случай трех ненулевых блоков

$$(A, \alpha) \neq 0, \quad (B, \beta) = 0, \quad (D, t) = 0, \quad (C, s) = 0. \quad (7.22a)$$

Система (7.6) может быть упрощена (ненулевые множители в равенствах можно сократить):

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) &= 0, & (\alpha + \beta) &= 0, \\ \alpha^2 t + \beta^2 s &= \beta + \alpha, & (s + t) &= 0, \\ \alpha BC + \beta AD &= 0, & \alpha AD + \beta BC &= B + A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha + (\alpha + \beta)AC = A, & \quad \beta + (\alpha + \beta)BD = B, \\
(s + t) = 0, & \quad (s + t) = 0, \\
(\alpha + \beta) = 0, & \quad \beta s^2 + \alpha t^2 = t + s, \\
sAD + tCB = 0, & \quad sBC + tAD = C + D, \\
s + AC(s + t) = C, & \quad t + BD(t + s) = D, \\
(\alpha C + sB) = 0, & \quad (\beta D + tA) = 0, \\
A + sA^2 + \alpha BC = \alpha, & \quad B + tB^2 + \beta AD = \beta, \\
\alpha AD + sB^2 = B + \alpha, & \quad \beta BC + tA^2 = A + \beta, \\
\beta C + tB = 0, & \quad \alpha D + sA = 0, \\
(A + B) = 0, & \quad (B + A) = 0, \\
A^2 D + B^2 C = A + B, & \quad (C + D) = 0, \\
C + \alpha C^2 + sAD = s, & \quad D + \beta D^2 + tBC = t, \\
(sA + \alpha D) = 0, & \quad (tB + \beta C) = 0, \\
(\alpha C + sB) = 0, & \quad (\beta D + tA) = 0, \\
\beta C^2 + tAD = t + C, & \quad \alpha D^2 + sBC = D + s, \\
(C + D) = 0, & \quad (D + C) = 0, \\
(A + B) = 0, & \quad BC^2 + AD^2 = D + C.
\end{aligned} \tag{7.22b}$$

Исключаем переменные:

$$B = -A, \quad \beta = -\alpha, \quad C = -D, \quad s = -t; \tag{7.22c}$$

в результате приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned}
0 = 0, & \quad 0 = 0, \\
0 = 0, & \quad 0 = 0, \\
0 = 0, & \quad 0 = 0, \\
\alpha = A, & \quad \beta = -A, \\
0 = 0, & \quad 0 = 0, \\
0 = 0, & \quad 0 = 0, \\
0 = 0, & \quad 0 = 0, \\
s = -D, & \quad t = D, \\
(-\alpha D - sA) = 0, & \quad (\beta D + tA) = 0, \\
A + sA^2 + \alpha AD = \alpha, & \quad -A + tA^2 + \beta AD = \beta, \\
\alpha AD + sA^2 = -A + \alpha, & \quad \beta AD + tA^2 = A + \beta, \\
\beta - D - tA = 0, & \quad \alpha D + sA = 0, \\
0 = 0, & \quad 0 = 0, \\
0 = 0, & \quad 0 = 0, \\
-D + \alpha D^2 + sAD = s, & \quad D + \beta D^2 + tAD = t, \\
(sA + \alpha D) = 0, & \quad (-tA - \beta D) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\alpha C - sA) &= 0, & (\beta D + tA) &= 0, \\
 \beta C^2 + tAD &= t + C, & \alpha D^2 - sAC &= D + s, \\
 0 &= 0, & 0 &= 0, \\
 0 &= 0, & 0 &= 0.
 \end{aligned}$$

Откуда следует

$$A = \alpha, \quad B = \beta = -A, \quad t = D, \quad C = s = -D. \quad (7.22d)$$

Соотношения (7.22d) описывают решение

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} &= A(\mathbf{k} - \mathbf{m}), & n_0 &= A(k_0 - m_0), \\
 \mathbf{l} &= D(\mathbf{m} - \mathbf{k}), & l_0 &= D(m_0 - k_0);
 \end{aligned} \quad (7.23a)$$

решение (KM - 5),

$$G = \begin{vmatrix} K & A(K - M) \\ C(K - M) & M \end{vmatrix}. \quad (7.23b)$$

Убедимся прямым вычислением, что матрицы такой структуры действительно образуют группу:

$$\begin{aligned}
 &\left| \begin{vmatrix} K' & A(K' - M') \\ C(K' - M') & M' \end{vmatrix} \right| \left| \begin{vmatrix} K & A(K - M) \\ C(K - M) & M \end{vmatrix} \right| = \\
 &\left| \begin{vmatrix} K'K + AC(K' - M')(K - M) & A(K'K - M'M) \\ C(K'K - M'M) & M'M + AC(K' - M')(K - M) \end{vmatrix} \right| = \\
 &\left| \begin{vmatrix} K'' & A(K'' - M'') \\ C(K'' - M'') & M'' \end{vmatrix} \right|.
 \end{aligned}$$

Эти формулы в то же время содержат в себе правила умножения двух независимых параметров  $k, m$  для подгруппы  $G_{A,C}(k, m) \in GL(4.C)$ :

$$\begin{aligned}
 K'' &= K'K + AC(K' - M')(K - M), \\
 M'' &= M'M + AC(K' - M')(K - M).
 \end{aligned} \quad (7.23c)$$

Если хотя бы одна величина из  $A$  и  $C$  равна нулю, то закон умножения (7.23c) расщепляется в две независимые формулы, отвечающие подгруппе  $SL(2.C) \otimes SL(2.C)$ .

## 8 Два независимых вектора: вариант II(1,n)

Рассмотрим случай двух независимых векторов, вариант II(1,n):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k} &= (A\mathbf{l} + B\mathbf{n}), & k_0 &= (\alpha l_0 + \beta n_0), \\
 \mathbf{m} &= (D\mathbf{l} + C\mathbf{n}), & m_0 &= (t l_0 + s n_0).
 \end{aligned} \quad (8.1)$$

Формулы умножения параметров принимают вид:

$$\begin{aligned} k_0'' &= (\alpha l_0' + \beta n_0') (\alpha l_0 + \beta n_0) + (A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}')(A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + n_0' l_0 + \mathbf{n}' \mathbf{l} , \\ m_0'' &= (t l_0' + s n_0') (t l_0 + s n_0) + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}') (D\mathbf{l} + C\mathbf{n}) + l_0' n_0 + \mathbf{l}' \mathbf{n} , \\ n_0'' &= (\alpha l_0' + \beta n_0') n_0 + (A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}') \mathbf{n} + n_0' (t l_0 + s n_0) + \mathbf{n}' (D\mathbf{l} + C\mathbf{n}) , \\ l_0'' &= l_0' (\alpha l_0 + \beta n_0) + \mathbf{l}' (A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + (t l_0' + s n_0') l_0 + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}') \mathbf{l} , \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'' &= (\alpha l_0' + \beta n_0') (A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + (A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}') (\alpha l_0 + \beta n_0) + i (A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}') \times (A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + n_0' \mathbf{l} + \mathbf{n}' l_0 + i \mathbf{n}' \times \mathbf{l} , \\ \mathbf{m}'' &= (t l_0' + s n_0') (D\mathbf{l} + C\mathbf{n}) + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}') (t l_0 + s n_0) + i (D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}') \times (D\mathbf{l} + C\mathbf{n}) + l_0' \mathbf{n} + \mathbf{l}' n_0 + i \mathbf{l}' \times \mathbf{n} , \\ \mathbf{n}'' &= (\alpha l_0' + \beta n_0') \mathbf{n} + (A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}') n_0 + i (A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}') \times \mathbf{n} + n_0' (D\mathbf{l} + C\mathbf{n}) + \mathbf{n}' (t l_0 + s n_0) + i \mathbf{n}' \times (D\mathbf{l} + C\mathbf{n}) , \\ \mathbf{l}'' &= l_0' (A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + \mathbf{l}' (\alpha l_0 + \beta n_0) + i \mathbf{l}' \times (A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + (t l_0' + s n_0') \mathbf{l} + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}') l_0 + i (D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}') \times \mathbf{l} . \end{aligned}$$

Требуем выполнения условий

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'' &= A\mathbf{l}'' + B\mathbf{n}'' , & k_0'' &= \alpha l_0'' + \beta n_0'' , \\ \mathbf{m}'' &= D\mathbf{l}'' + C\mathbf{n}'' , & m_0'' &= t l_0'' + s n_0'' . \end{aligned}$$

Уравнение

$$\mathbf{k}'' = A\mathbf{l}'' + B\mathbf{n}'' \quad (8.3a)$$

принимает вид:

$$\begin{aligned} &(\alpha l_0' + \beta n_0')(A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + (A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}')(\alpha l_0 + \beta n_0) + i(A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}') \times (A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + n_0' \mathbf{l} + \mathbf{n}' l_0 + i \mathbf{n}' \times \mathbf{l} = \\ &A [l_0' (A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + \mathbf{l}' (\alpha l_0 + \beta n_0) + i \mathbf{l}' \times (A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + (t l_0' + s n_0') \mathbf{l} + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}') l_0 + i (D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}') \times \mathbf{l}] + \\ &B [(\alpha l_0' + \beta n_0') \mathbf{n} + (A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}') n_0 + i (A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}') \times \mathbf{n} + n_0' (D\mathbf{l} + C\mathbf{n}) + \mathbf{n}' (t l_0 + s n_0) + i \mathbf{n}' \times (D\mathbf{l} + C\mathbf{n})] ; \end{aligned}$$

откуда следуют равенства

$$\begin{aligned} l_0' \mathbf{l} : & \quad \alpha A = A^2 + At , \\ n_0' \mathbf{n} : & \quad \beta B = \beta B + BC , \\ n_0' \mathbf{l} : & \quad \beta A + 1 = As + BD , \\ l_0' \mathbf{n} : & \quad \alpha B = AB + \alpha B , \\ n_0 \mathbf{l}' : & \quad \beta A = \beta A + BA , \\ l_0 \mathbf{n}' : & \quad \alpha B + 1 = AC + Bt , \\ l_0 \mathbf{l}' : & \quad \alpha A = \alpha A + AD , \\ n_0 \mathbf{n}' : & \quad \beta B = B^2 + Bs , \\ \mathbf{l}' \times \mathbf{l} : & \quad A^2 = A^2 + AD , \\ \mathbf{n}' \times \mathbf{n} : & \quad B^2 = B^2 + BC , \\ \mathbf{n}' \times \mathbf{l} : & \quad BA + 1 = AC + BD , \\ \mathbf{l}' \times \mathbf{n} : & \quad AB = AB + AB . \end{aligned} \quad (8.3b)$$

Уравнение

$$\mathbf{m}'' = D\mathbf{l}'' + C\mathbf{n}'' \quad (8.4a)$$

принимает вид:

$$(tl'_0 + sn'_0)(D\mathbf{l} + C\mathbf{n}) + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}')(tl_0 + sn_0) + i(D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}') \times (D\mathbf{l} + C\mathbf{n}) + l'_0\mathbf{n} + \mathbf{l}'n_0 + i\mathbf{l}' \times \mathbf{n} =$$

$$D [l'_0(A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + \mathbf{l}'(\alpha l_0 + \beta n_0) + i\mathbf{l}' \times (A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + (tl'_0 + sn'_0)\mathbf{l} + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}')l_0 + i(D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}') \times \mathbf{l}] +$$

$$C [\alpha l'_0 + \beta n'_0] \mathbf{n} + (A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}') n_0 + i(A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}') \times \mathbf{n} + n'_0 (D\mathbf{l} + C\mathbf{n}) + \mathbf{n}' (tl_0 + sn_0) + i\mathbf{n}' \times (D\mathbf{l} + C\mathbf{n}) ;$$

отсюда следуют равенства

$$\begin{aligned} l'_0\mathbf{l} : \quad tD &= DA + tD , \\ n'_0\mathbf{n} : \quad sC &= C\beta + C^2 , \\ n'_0\mathbf{l} : \quad sD &= sD + CD , \\ l'_0\mathbf{n} : \quad tC + 1 &= DB + \alpha C , \\ n_0\mathbf{l}' : \quad sD + 1 &= \beta D + CA , \\ l_0\mathbf{n}' : \quad tC &= DC + tC , \\ l_0\mathbf{l}' : \quad tD &= \alpha D + D^2 , \\ n_0\mathbf{n}' : \quad sC &= CB + sC , \\ \mathbf{l}' \times \mathbf{l} : \quad D^2 &= DA + D^2 , \\ \mathbf{n}' \times \mathbf{n} : \quad C^2 &= CB + C^2 , \\ \mathbf{n}' \times \mathbf{l} : \quad CD &= CD + CD , \\ \mathbf{l}' \times \mathbf{n} : \quad CD + 1 &= DB + CA . \end{aligned} \tag{8.4b}$$

Уравнение

$$k''_0 = \alpha l''_0 + \beta n''_0 \tag{8.5a}$$

принимает вид:

$$(\alpha l'_0 + \beta n'_0) (\alpha l_0 + \beta n_0) + (A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}')(A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + n'_0 l_0 + \mathbf{n}' \mathbf{l} =$$

$$\alpha [ l'_0 (\alpha l_0 + \beta n_0) + \mathbf{l}' (A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + (tl'_0 + sn'_0) l_0 + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}') \mathbf{l}] +$$

$$\beta [ (\alpha l'_0 + \beta n'_0) n_0 + (A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}') \mathbf{n} + n'_0 (tl_0 + sn_0) + \mathbf{n}' (D\mathbf{l} + C\mathbf{n}) ;$$

отсюда следуют равенства

$$\begin{aligned} l'_0 l_0 : \quad \alpha^2 &= \alpha^2 + \alpha t , \\ n'_0 n_0 : \quad \beta^2 &= \beta^2 + s\beta , \\ l'_0 n_0 : \quad \alpha\beta &= \alpha\beta + \alpha\beta , \\ n'_0 l_0 : \quad \alpha\beta + 1 &= \alpha s + \beta t , \\ \mathbf{l}'\mathbf{l} : \quad A^2 &= \alpha A + \alpha D , \\ \mathbf{n}'\mathbf{n} : \quad B^2 &= \beta B + \beta C , \\ \mathbf{l}'\mathbf{n} : \quad AB &= \alpha B + \beta A , \\ \mathbf{n}'\mathbf{l} : \quad AB + 1 &= \alpha C + \beta D . \end{aligned} \tag{8.5b}$$

Уравнение

$$m''_0 = tl''_0 + sn''_0 \tag{8.6a}$$

принимает вид:

$$\begin{aligned} & (tl'_0 + sn'_0) (tl_0 + sn_0) + (Dl' + Cn') (Dl + Cn) + l'_0 n_0 + l' n = \\ & t [ l'_0 (\alpha l_0 + \beta n_0) + l' (Al + Bn) + (tl'_0 + sn'_0) l_0 + (Dl' + Cn') l ] + \\ & s [ (\alpha l'_0 + \beta n'_0) n_0 + (Al' + Bn') n + n'_0 (tl_0 + sn_0) + n' (Dl + Cn) ] ; \end{aligned}$$

отсюда следуют равенства

$$\begin{aligned} l'_0 l_0 : & \quad t^2 = t\alpha + t^2 , \\ n'_0 n_0 : & \quad s^2 = s\beta + s^2 , \\ l'_0 n_0 : & \quad ts + 1 = t\beta + s\alpha , \\ n'_0 l_0 : & \quad st = st + st , \\ l' l : & \quad D^2 = tA + tD , \\ n' n : & \quad C^2 = sB + sC , \\ l' n : & \quad DC + 1 = tB + sA , \\ n' l : & \quad CD = tC + sD . \end{aligned} \tag{8.6b}$$

Собираем уравнения вместе:

$$\begin{aligned} \alpha A &= A^2 + At , \\ 0 &= BC , \\ \beta A + 1 &= As + BD , \\ 0 &= AB , \\ 0 &= +BA , \\ \alpha B + 1 &= AC + Bt , \\ 0 &= AD , \\ \beta B &= B^2 + Bs , \\ 0 &= AD , \\ 0 &= BC , \\ BA + 1 &= AC + BD , \\ 0 &= AB ; \\ 0 &= DA , \\ sC &= C\beta + C^2 , \\ 0 &= CD , \\ tC + 1 &= DB + \alpha C , \\ sD + 1 &= \beta D + CA , \\ 0 &= DC , \\ tD &= \alpha D + D^2 , \\ 0 &= CB , \\ 0 &= DA , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= CB, \\
 0 &= CD, \\
 CD + 1 &= DB + CA; \\
 0 &= \alpha t, \\
 0 &= s\beta, \\
 0 &= \alpha\beta, \\
 \alpha\beta + 1 &= \alpha s + \beta t, \\
 A^2 &= \alpha A + \alpha D, \\
 B^2 &= \beta B + \beta C, \\
 AB &= \alpha B + \beta A, \\
 AB + 1 &= \alpha C + \beta D; \\
 0 &= t\alpha, \\
 0 &= s\beta, \\
 ts + 1 &= t\beta + s\alpha, \\
 0 &= st, \\
 D^2 &= tA + tD, \\
 C^2 &= sB + sC, \\
 DC + 1 &= tB + sA, \\
 CD &= tC + sD.
 \end{aligned}$$

Сразу же отметим, что тривиальный набор всех нулевых значений параметров не является решением системы уравнений.

Выделяем наиболее простые уравнения:

$$\begin{aligned}
 BC &= 0, & \beta s &= 0, \\
 AB &= 0, & \alpha\beta &= 0, \\
 AD &= 0, & \alpha t &= 0, \\
 CD &= 0, & st &= 0;
 \end{aligned} \tag{8.7a}$$

они удовлетворяются шестью способами:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & B, \beta = 0, & D, t &= 0; \\
 2) \quad & A, \alpha = 0, & C, s &= 0; \\
 3) \quad & B, \beta = 0, & A, \alpha = 0, & C, s = 0; \\
 4) \quad & A, \alpha = 0, & B, \beta = 0, & D, t = 0; \\
 5) \quad & C, s = 0, & B, \beta = 0, & D, t = 0; \\
 6) \quad & D, t = 0, & C, s = 0, & A, \alpha = 0.
 \end{aligned} \tag{8.7b}$$

Выпишем остальные уравнения:

$$\begin{aligned}
 \alpha A &= A^2 + At, \\
 \beta A + 1 &= As + BD,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha B + 1 &= AC + Bt, \\ \beta B &= B^2 + Bs, \\ BA + 1 &= AC + BD;\end{aligned}\tag{8.8a}$$

$$\begin{aligned}sC &= C\beta + C^2, \\ tC + 1 &= DB + \alpha C, \\ sD + 1 &= \beta D + CA, \\ tD &= \alpha D + D^2, \\ CD + 1 &= DB + CA;\end{aligned}\tag{8.8b}$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta + 1 &= \alpha s + \beta t, \\ A^2 &= \alpha A + \alpha D, \\ B^2 &= \beta B + \beta C, \\ AB &= \alpha B + \beta A, \\ AB + 1 &= \alpha C + \beta D;\end{aligned}\tag{8.8c}$$

$$\begin{aligned}ts + 1 &= t\beta + s\alpha, \\ D^2 &= tA + tD, \\ C^2 &= sB + sC, \\ DC + 1 &= tB + sA, \\ CD &= tC + sD.\end{aligned}\tag{8.8d}$$

Видим, что варианты 3), 4), 5), 6) несовместимы с уравнениями (8.8). Таким образом, предстоит исследовать только случаи 1) и 2).

В случае 1) имеем

$$1) \quad B, \beta = 0, \quad D, t = 0;$$

уравнения (8.8) дают

$$\alpha A = A^2, \quad 1 = As, \quad 1 = AC, \tag{8.9a}$$

$$sC = C^2, \quad 1 = \alpha C, \quad 1 = CA, \tag{8.9b}$$

$$1 = \alpha s, \quad A^2 = \alpha A, \quad 1 = \alpha C, \tag{8.9c}$$

$$1 = s\alpha, \quad C^2 = sC, \quad 1 = sA. \tag{8.9d}$$

Единственное решение системы выглядит так:

$$B, \beta = 0, \quad D, t = 0, \quad \alpha = A \neq 0, \quad C = s = \frac{1}{A}; \tag{8.10a}$$

при этом соотношения (8.1) дают

$$\mathbf{k} = A\mathbf{l}, \quad k_0 = Al_0, \quad \mathbf{m} = A^{-1}\mathbf{n}, \quad m_0 = A^{-1}n_0, \tag{8.10b}$$



решение (LN - 1),

$$G = \begin{vmatrix} AL & N \\ L & A^{-1}N \end{vmatrix}, \quad (8.10c)$$

$$G'G = \begin{vmatrix} AL' & N' \\ L' & A^{-1}N' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} AL & N \\ L & A^{-1}N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A(AL'L + A^{-1}N'L) & (AL'N + A^{-1}N'N) \\ (AL'L + A^{-1}N'L) & A^{-1}(AL'N + A^{-1}N'N) \end{vmatrix}.$$

Это вырожденные матрицы ранга 2 со структурой полугруппы.

В случае

$$2) \quad A, \alpha = 0, \quad C, s = 0$$

уравнения (8.8) дают

$$1 = BD, \quad 1 = Bt, \quad \beta B = B^2, \quad (8.11a)$$

$$1 = DB, \quad 1 = \beta D, \quad tD = D^2, \quad (8.11b)$$

$$1 = \beta t, \quad B^2 = \beta B, \quad 1 = \beta D, \quad (8.11c)$$

$$1 = t\beta, \quad D^2 = tD, \quad 1 = tB. \quad (8.11d)$$

Они имеют единственное решение

$$A, \alpha = 0, \quad C, s = 0, \quad \beta = \beta \neq 0, \quad D = t = B^{-1}; \quad (8.12a)$$

при этом соотношения (8.1) принимают вид:

$$\mathbf{k} = B\mathbf{n}, \quad k_0 = Bn_0, \quad \mathbf{m} = B^{-1}\mathbf{l}, \quad m_0 = B^{-1}l_0, \quad (8.12b)$$

решение (LN - 2),

$$G = \begin{vmatrix} BN & N \\ L & B^{-1}L \end{vmatrix}, \quad (8.12c)$$

$$G'G = \begin{vmatrix} BN' & N' \\ L' & B^{-1}L' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} BN & N \\ L & B^{-1}L \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B(BN'N + B^{-1}N'L) & (BN'N + B^{-1}N'L) \\ (BL'N + B^{-1}L'L) & B^{-1}(BL'N + B^{-1}L'L) \end{vmatrix}.$$

Это вырожденные матрицы ранга 2 со структурой полугруппы.

Анализ этого варианта двух независимых векторов  $\mathbf{I}(\mathbf{ln})$  завершен.

## 9 Два независимых вектора: вариант $\Pi(\mathbf{k}, \mathbf{l})$

Рассмотрим следующий случай двух независимых векторов, вариант  $\Pi(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= A\mathbf{k} + B\mathbf{l}, & n_0 &= \alpha k_0 + \beta l_0, \\ \mathbf{m} &= D\mathbf{l} + C\mathbf{k}, & m_0 &= tl_0 + sk_0. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Формулы умножения параметров принимают вид:

$$\begin{aligned} k_0'' &= k_0' k_0 + \mathbf{k}' \mathbf{k} + (\alpha k_0' + \beta l_0') l_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') \mathbf{l}, \\ m_0'' &= (tl_0' + sk_0')(tl_0 + sk_0) + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') (D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) + \\ &\quad l_0' (\alpha k_0 + \beta l_0) + \mathbf{l}' (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}), \\ n_0'' &= k_0' (\alpha k_0 + \beta l_0) + \mathbf{k}' (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) + \\ &\quad (\alpha k_0' + \beta l_0') (tl_0 + sk_0) + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') (D\mathbf{l} + C\mathbf{k}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_0'' &= l_0' k_0 + \mathbf{l}' \mathbf{k} + (tl_0' + sk_0')l_0 + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') \mathbf{l} , \\
\mathbf{k}'' &= k_0' \mathbf{k} + \mathbf{k}' k_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + \\
&(\alpha k_0' + \beta l_0') \mathbf{l} + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') l_0 + i (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') \times \mathbf{l} , \\
\mathbf{m}'' &= (tl_0' + sk_0')(D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') (tl_0 + sk_0) + i (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') \times (D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) + \\
&l_0' (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) + \mathbf{l}' (\alpha k_0 + \beta l_0) + i \mathbf{l}' \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) , \\
\mathbf{n}'' &= k_0' (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) + \mathbf{k}' (\alpha k_0 + \beta l_0) + i \mathbf{k}' \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) + \\
&(\alpha k_0' + \beta l_0') (D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') (tl_0 + sk_0) + i (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') \times (D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) , \\
\mathbf{l}'' &= l_0' \mathbf{k} + \mathbf{l}' k_0 + i \mathbf{l}' \times \mathbf{k} + \\
&(tl_0' + sk_0')\mathbf{l} + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') l_0 + i (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') \times \mathbf{l} .
\end{aligned} \tag{9.2}$$

Требуем выполнения равенств

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}'' &= A\mathbf{k}'' + B\mathbf{l}'' , & n_0'' &= \alpha k_0'' + \beta l_0'' , \\
\mathbf{m}'' &= D\mathbf{l}'' + C\mathbf{k}'' , & m_0'' &= tl_0'' + sk_0'' .
\end{aligned} \tag{9.3}$$

Уравнение

$$\mathbf{n}'' = A\mathbf{k}'' + B\mathbf{l}'' \tag{9.4a}$$

дает

$$\begin{aligned}
&k_0' (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) + \mathbf{k}' (\alpha k_0 + \beta l_0) + i \mathbf{k}' \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) + \\
&(\alpha k_0' + \beta l_0') (D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') (tl_0 + sk_0) + i (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') \times (D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) = \\
&A [ k_0' \mathbf{k} + \mathbf{k}' k_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + (\alpha k_0' + \beta l_0') \mathbf{l} + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') l_0 + i (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') \times \mathbf{l} ] + \\
&B [ l_0' \mathbf{k} + \mathbf{l}' k_0 + i \mathbf{l}' \times \mathbf{k} + (tl_0' + sk_0')\mathbf{l} + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') l_0 + i (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') \times \mathbf{l} ] .
\end{aligned} \tag{9.4b}$$

Приравнивая коэффициенты при подобных членах, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}
k_0' \mathbf{k} : & \quad \alpha C = 0 , \\
k_0 \mathbf{k}' : & \quad \alpha + As = A , \\
k_0' \mathbf{l} : & \quad B + \alpha D = A\alpha + Bs , \\
k_0 \mathbf{l}' : & \quad sB = B , \\
l_0' \mathbf{l} : & \quad \beta D = A\beta + Bt , \\
l_0 \mathbf{l}' : & \quad Bt = AB + BD , \\
l_0' \mathbf{k} : & \quad \beta C = B , \\
l_0 \mathbf{k}' : & \quad \beta + At = A^2 + BC , \\
\mathbf{k}' \times \mathbf{k} : & \quad AC = 0 , \\
\mathbf{l}' \times \mathbf{l} : & \quad AB = 0 , \\
\mathbf{k}' \times \mathbf{l} : & \quad B + AD = A^2 + BC , \\
\mathbf{l}' \times \mathbf{k} : & \quad BC = B .
\end{aligned} \tag{9.4c}$$

Уравнение

$$n_0'' = \alpha k_0'' + \beta l_0'' \tag{9.5a}$$

принимает вид:

$$\begin{aligned}
 & k'_0 (\alpha k_0 + \beta l_0) + \mathbf{k}' (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) + \\
 & (\alpha k'_0 + \beta l'_0) (tl_0 + sk_0) + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') (D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) = \\
 & \alpha [ k'_0 k_0 + \mathbf{k}' \mathbf{k} + (\alpha k'_0 + \beta l'_0) l_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') \mathbf{l} ] + \\
 & \beta [ l'_0 k_0 + \mathbf{l}' \mathbf{k} + (tl'_0 + sk'_0)l_0 + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') \mathbf{l} ] ;
 \end{aligned} \tag{9.5b}$$

откуда следуют уравнения

$$\begin{aligned}
 k'_0 k_0 : & \quad \alpha s = 0 , \\
 l'_0 l_0 : & \quad 0 = \alpha \beta , \\
 k'_0 l_0 : & \quad \beta + \alpha t = \alpha^2 + \beta s , \\
 l'_0 k_0 : & \quad \beta s = \beta , \\
 \mathbf{k}' \mathbf{k} : & \quad A + AC = \alpha , \\
 \mathbf{l}' \mathbf{l} : & \quad BD = \alpha B + \beta D , \\
 \mathbf{k}' \mathbf{l} : & \quad B + AD = \alpha A + \beta C , \\
 \mathbf{k} \mathbf{l}' : & \quad BC = \beta .
 \end{aligned} \tag{9.5c}$$

Уравнение

$$\mathbf{m}'' = D\mathbf{l}'' + C\mathbf{k}'' \tag{9.6a}$$

дает

$$\begin{aligned}
 & (tl'_0 + sk'_0)(D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') (tl_0 + sk_0) + i (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') \times (D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) + \\
 & l'_0 (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) + \mathbf{l}' (\alpha k_0 + \beta l_0) + i \mathbf{l}' \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) = \\
 & D [ l'_0 \mathbf{k} + \mathbf{l}' k_0 + i \mathbf{l}' \times \mathbf{k} + \\
 & (tl'_0 + sk'_0)\mathbf{l} + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') l_0 + i (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') \times \mathbf{l} ] + \\
 & C [ k'_0 \mathbf{k} + \mathbf{k}' k_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + \\
 & (\alpha k'_0 + \beta l'_0) \mathbf{l} + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') l_0 + i (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') \times \mathbf{l} ] ;
 \end{aligned} \tag{9.6b}$$

откуда следуют уравнения

$$\begin{aligned}
 k'_0 \mathbf{k} : & \quad sC = C , \\
 k_0 \mathbf{k}' : & \quad sC = C , \\
 k'_0 \mathbf{l} : & \quad sD = sD + C\alpha , \\
 k_0 \mathbf{l}' : & \quad Ds + \alpha = D , \\
 l'_0 \mathbf{l} : & \quad tD + B = Dt + C\beta , \\
 l_0 \mathbf{l}' : & \quad Dt + \beta = D^2 + CB , \\
 l'_0 \mathbf{k} : & \quad tC + A = D , \\
 l_0 \mathbf{k}' : & \quad tC = DC + CA , \\
 \mathbf{k}' \times \mathbf{k} : & \quad C^2 = C , \\
 \mathbf{l}' \times \mathbf{l} : & \quad D^2 + B = D^2 + CB , \\
 \mathbf{k}' \times \mathbf{l} : & \quad CD = CD + CA , \\
 \mathbf{l}' \times \mathbf{k} : & \quad DC + A = D .
 \end{aligned} \tag{9.6c}$$

Уравнение

$$m_0'' = tl_0'' + sk_0'' \quad (9.7a)$$

дает

$$\begin{aligned} (tl_0' + sk_0')(tl_0 + sk_0) + (Dl' + Ck') (Dl + Ck) + \\ l_0' (\alpha k_0 + \beta l_0) + l' (Ak + Bl) = \\ t [ l_0' k_0 + l' k + (tl_0' + sk_0')l_0 + (Dl' + Ck') l ] + \\ s [ k_0' k_0 + k' k + (\alpha k_0' + \beta l_0') l_0 + (Ak' + Bl') l ] ; \end{aligned} \quad (9.7b)$$

откуда следуют уравнения

$$\begin{aligned} k_0' k_0 : \quad s^2 = s , \\ l_0' l_0 : \quad t^2 + \beta = t^2 + s\beta , \\ k_0' l_0 : \quad st = ts + s\alpha , \\ l_0' k_0 : \quad ts + \alpha = t , \\ k' k : \quad C^2 = s , \\ l' l : \quad D^2 + B = tD + sB , \\ k' l : \quad CD = tC + sA , \\ k l' : \quad DC + A = t . \end{aligned} \quad (9.7c)$$

Собираем уравнения вместе:

$$\begin{aligned} \alpha C = 0 , \quad AC = 0 , \quad AB = 0 , \\ (s-1)B = 0 , \quad \beta C = B , \quad (C-1)B = 0 , \\ \alpha + A(s-1) = 0 , \quad (A-D)\alpha + B(s-1) = 0 , \\ (A-D)\beta + Bt = 0 , \quad AB + B(D-t) = 0 , \\ \beta + At = A^2 + BC , \quad B + AD = A^2 + BC , \end{aligned} \quad (9.8a)$$

$$\begin{aligned} \alpha s = 0 , \quad \alpha\beta = 0 , \\ (s-1)\beta = 0 , \quad BC = \beta , \\ \alpha t = \alpha^2 + \beta(s-1) , \quad A + AC = \alpha , \\ (B-\beta)D = \alpha B , \quad B + AD = \alpha A + \beta C , \end{aligned} \quad (9.8b)$$

$$\begin{aligned} C\alpha = 0 , \quad CA = 0 , \\ (s-1)C = 0 , \quad B = C\beta , \quad C(C-1) = 0 , \quad (C-1)B = 0 , \\ D(s-1) + \alpha = 0 , \\ Dt + \beta = D^2 + CB , \end{aligned}$$

$$tC + A = D , \quad (D-t)C + CA = 0 , \quad DC + A = D ; \quad (9.8c)$$

$$0 = s\alpha , \quad s(s-1) = 0 , \quad (s-1)\beta = 0 ,$$

$$t(s-1) + \alpha = 0 , \quad C^2 = s ,$$

$$D(D-t) = (s-1)B , \quad C(D-C) = sA , \quad DC + A = t . \quad (9.8d)$$

Для  $s$  возможны только два значения:  $s = 0, 1$ . При  $s = 0$  система имеет единственное решение:

решение (KL - 1),

$$\alpha = A, \quad B = \beta = 0, \quad C = s = 0, \quad D = t = A,$$

$$\mathbf{n} = A\mathbf{k}, \quad n_0 = Ak_0, \quad \mathbf{m} = A\mathbf{l}, \quad m_0 = Al_0,$$

$$G = \begin{vmatrix} K & AK \\ L & AL \end{vmatrix}. \quad (9.9a)$$

Проверкой убеждаемся в выполнимости закона умножения для этого класса матриц:

$$G'G = \begin{vmatrix} K' & AK' \\ L' & AL' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K & AK \\ L & AL \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (K'K + AK'L) & A(K'K + AK'L) \\ (L'K + AL'L) & A(L'K + AL'L) \end{vmatrix}. \quad (9.9b)$$

При  $s = 1$  система имеет единственное решение:

решение (KL - 2),

$$C = s = +1, \quad A = \alpha = 0, \quad D = t = +1, \quad B = \beta = 1,$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{l}, \quad n_0 = l_0, \quad \mathbf{m} = \mathbf{l} + \mathbf{k}, \quad m_0 = l_0 + k_0,$$

$$G = \begin{vmatrix} K & L \\ L & K + L \end{vmatrix}. \quad (9.10a)$$

Убеждаемся в выполнимости группового закона умножения для таких матриц:

$$G'G = \begin{vmatrix} K' & L' \\ L' & (K' + L') \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K & L \\ L & (K + L) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (K'K + L'L) & (L'K + K'L + L'L) \\ (L'K + K'L + L'L) & [(K'K + L'L) + (L'K + K'L + L'L)] \end{vmatrix}. \quad (9.10b)$$

## 10 Два независимых вектора: вариант I(n,m)

Рассмотрим следующий случай двух независимых векторов, вариант II(n,m):

$$\mathbf{l} = A\mathbf{m} + B\mathbf{n}, \quad n_0 = \alpha m_0 + \beta n_0,$$

$$\mathbf{k} = D\mathbf{n} + C\mathbf{m}, \quad k_0 = tn_0 + sm_0. \quad (10.1)$$

Здесь возникают два решения:

решение (NM - 1),

$$G = \begin{vmatrix} AN & N \\ AM & M \end{vmatrix}; \quad (10.2)$$

решение (NM - 2),

$$G = \begin{vmatrix} M + N & N \\ N & M \end{vmatrix}. \quad (10.3)$$

## 11 Два независимых вектора: вариант I(kn)

Рассмотрим следующий случай двух независимых векторов, вариант II(k,n):

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}), & l_0 &= (\alpha k_0 + \beta n_0), \\ \mathbf{m} &= (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}), & m_0 &= (tn_0 + sk_0). \end{aligned} \quad (11.1)$$

Закон умножения параметров принимает вид:

$$\begin{aligned} k_0'' &= k_0' k_0 + \mathbf{k}' \mathbf{k} + n_0' (\alpha k_0 + \beta n_0) + \mathbf{n}' (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}), \\ m_0'' &= (tn_0' + sk_0') (tn_0 + sk_0) + (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) + \\ &\quad (\alpha k_0' + \beta n_0') n_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') \mathbf{n}, \\ n_0'' &= k_0' n_0 + \mathbf{k}' \mathbf{n} + n_0' (tn_0 + sk_0) + \mathbf{n}' (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}), \\ l_0'' &= (\alpha k_0' + \beta n_0') k_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') \mathbf{k} + \\ &\quad (tn_0' + sk_0') (\alpha k_0 + \beta n_0) + (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}), \\ \mathbf{k}'' &= k_0' \mathbf{k} + \mathbf{k}' k_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + n_0' (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) + \mathbf{n}' (\alpha k_0 + \beta n_0) + i \mathbf{n}' \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}), \\ \mathbf{m}'' &= (tn_0' + sk_0') (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) + (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') (tn_0 + sk_0) + i (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') \times (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) + \\ &\quad (\alpha k_0' + \beta n_0') \mathbf{n} + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') n_0 + i (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') \times \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}'' &= k_0' \mathbf{n} + \mathbf{k}' n_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{n} + n_0' (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) + \mathbf{n}' (tn_0 + sk_0) + i \mathbf{n}' \times (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}), \\ \mathbf{l}'' &= (\alpha k_0' + \beta n_0') \mathbf{k} + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') k_0 + i (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') \times \mathbf{k} + \\ &\quad (tn_0' + sk_0') (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) + (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') (\alpha k_0 + \beta n_0) + i (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}). \end{aligned} \quad (11.2)$$

Требуем выполнения условий

$$\begin{aligned} \mathbf{l}'' &= (A\mathbf{k}'' + B\mathbf{n}''), & l_0'' &= (\alpha k_0'' + \beta n_0''), \\ \mathbf{m}'' &= (D\mathbf{n}'' + C\mathbf{k}''), & m_0'' &= tn_0'' + sk_0''. \end{aligned}$$

Уравнение

$$\mathbf{l}'' = (A\mathbf{k}'' + B\mathbf{n}'') \quad (11.3a)$$

принимает вид:

$$\begin{aligned} &(\alpha k_0' + \beta n_0') \mathbf{k} + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') k_0 + i (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') \times \mathbf{k} + \\ &(tn_0' + sk_0') (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) + (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') (\alpha k_0 + \beta n_0) + i (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) = \\ &A [ k_0' \mathbf{k} + \mathbf{k}' k_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + n_0' (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) + \mathbf{n}' (\alpha k_0 + \beta n_0) + i \mathbf{n}' \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) ] + \\ &B [ k_0' \mathbf{n} + \mathbf{k}' n_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{n} + n_0' (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) + \mathbf{n}' (tn_0 + sk_0) + i \mathbf{n}' \times (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) ]; \end{aligned}$$

откуда следуют равенства

$$\begin{aligned}
 k'_0 \mathbf{k} : & \quad \alpha + sA = A , \\
 k_0 \mathbf{k}' : & \quad A + \alpha C = A , \\
 n_0 \mathbf{n}' : & \quad \beta D = \beta A + tB , \\
 n'_0 \mathbf{n} : & \quad tB = AB + BD , \\
 k'_0 \mathbf{n} : & \quad sB = B , \\
 k_0 \mathbf{n}' : & \quad B + \alpha D = \alpha A + sB , \\
 n'_0 \mathbf{k} : & \quad \beta + tA = A^2 + BC , \\
 n_0 \mathbf{k}' : & \quad \beta C = B , \\
 \mathbf{k}' \times \mathbf{k} : & \quad A + AC = A , \\
 \mathbf{n}' \times \mathbf{n} : & \quad BD = AB + BD , \\
 \mathbf{n}' \times \mathbf{k} : & \quad B + AD = A^2 + BC , \\
 \mathbf{k}' \times \mathbf{n} : & \quad CB = B .
 \end{aligned} \tag{11.3b}$$

Уравнение

$$\mathbf{m}'' = (D\mathbf{n}'' + C\mathbf{k}'') \tag{11.4a}$$

принимает вид:

$$\begin{aligned}
 & (tn'_0 + sk'_0)(D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) + (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') (tn_0 + sk_0) + i (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') \times (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) + \\
 & (\alpha k'_0 + \beta n'_0) \mathbf{n} + (Ak' + Bn') n_0 + i (Ak' + Bn') \times \mathbf{n} = \\
 & D [ k'_0 \mathbf{n} + \mathbf{k}' n_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{n} + n'_0 (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) + \mathbf{n}' (tn_0 + sk_0) + i \mathbf{n}' \times (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) ] + \\
 & C [ k'_0 \mathbf{k} + \mathbf{k}' k_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + n'_0 (Ak + Bn) + \mathbf{n}' (\alpha k_0 + \beta n_0) + i \mathbf{n}' \times (Ak + Bn) ] ;
 \end{aligned}$$

откуда следуют равенства

$$\begin{aligned}
 k'_0 \mathbf{k} : & \quad sC = C , \\
 k_0 \mathbf{k}' : & \quad sC = C , \\
 n_0 \mathbf{n}' : & \quad tD + B = tD + \beta C , \\
 n'_0 \mathbf{n} : & \quad tD + \beta = D^2 + CB , \\
 k'_0 \mathbf{n} : & \quad sD + \alpha = D , \\
 k_0 \mathbf{n}' : & \quad sD = sD + \alpha C , \\
 n'_0 \mathbf{k} : & \quad tC = DC + CA , \\
 n_0 \mathbf{k}' : & \quad tC + A = D , \\
 \mathbf{k}' \times \mathbf{k} : & \quad C^2 = C , \\
 \mathbf{n}' \times \mathbf{n} : & \quad D^2 + B = D^2 + CB , \\
 \mathbf{n}' \times \mathbf{k} : & \quad DC = DC + CA , \\
 \mathbf{k}' \times \mathbf{n} : & \quad CD + A = D .
 \end{aligned} \tag{11.4b}$$

Уравнение

$$l''_0 = (\alpha k''_0 + \beta n''_0) \tag{11.5a}$$

принимает вид:

$$\begin{aligned}
 & (\alpha k'_0 + \beta n'_0) k_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') \mathbf{k} + \\
 & (tn'_0 + sk'_0)(\alpha k_0 + \beta n_0) + (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) = \\
 & \alpha [ k'_0 k_0 + \mathbf{k}' \mathbf{k} + n'_0 (\alpha k_0 + \beta n_0) + \mathbf{n}' (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) ] + \\
 & \beta [ (tn'_0 + sk'_0) (tn_0 + sk_0) + (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) ] ;
 \end{aligned}$$

откуда следуют равенства

$$\begin{aligned}
 k'_0 k_0 : & \quad \alpha + \alpha s = \alpha + \beta s^2 , \\
 n'_0 n_0 : & \quad t\beta = \alpha\beta + \beta t^2 , \\
 k'_0 n_0 : & \quad s\beta = \beta st , \\
 k_0 n'_0 : & \quad \beta + t\alpha = \alpha^2 + \beta ts , \\
 \mathbf{k}' \mathbf{k} : & \quad A + CA = \alpha + \beta C^2 , \\
 \mathbf{n}' \mathbf{n} : & \quad DB = \alpha B + \beta D^2 , \\
 \mathbf{k}' \mathbf{n} : & \quad CB = \beta CD , \\
 \mathbf{k} \mathbf{n}' : & \quad B + AD = \alpha A + \beta CD .
 \end{aligned} \tag{11.5b}$$

Рассматриваем уравнение

$$m''_0 = tn''_0 + sk''_0 \tag{11.6a}$$

оно записывается так:

$$\begin{aligned}
 & (tn'_0 + sk'_0) (tn_0 + sk_0) + (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) + \\
 & (\alpha k'_0 + \beta n'_0) n_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') \mathbf{n} = \\
 & t [ k'_0 n_0 + \mathbf{k}' \mathbf{n} + n'_0 (tn_0 + sk_0) + \mathbf{n}' (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) ] ; + \\
 & s [ k'_0 k_0 + \mathbf{k}' \mathbf{k} + n'_0 (\alpha k_0 + \beta n_0) + \mathbf{n}' (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) ] ;
 \end{aligned}$$

откуда следуют равенства

$$\begin{aligned}
 k'_0 k_0 : & \quad s^2 = s , \\
 n'_0 n_0 : & \quad t^2 + \beta = t^2 + s\beta , \\
 k'_0 n_0 : & \quad st + \alpha = t , \\
 k_0 n'_0 : & \quad ts = st + \alpha s , \\
 \mathbf{k}' \mathbf{k} : & \quad C^2 = s , \\
 \mathbf{n}' \mathbf{n} : & \quad D^2 + B = tD + sB , \\
 \mathbf{k}' \mathbf{n} : & \quad CD + A = t , \\
 \mathbf{n}' \mathbf{k} : & \quad DC = tC + sA .
 \end{aligned} \tag{11.6b}$$

Собираем уравнения вместе:

$$\begin{aligned}
 \alpha + sA &= A , \\
 \alpha C &= 0 , \\
 \beta D &= \beta A + tB , \\
 tB &= AB + BD , \\
 sB &= B ,
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 B + \alpha D &= \alpha A + sB , \\
 \beta + tA &= A^2 + BC , \\
 \beta C &= B , \\
 AC &= 0 , \\
 0 &= AB , \\
 B + AD &= A^2 + BC , \\
 CB &= B ; \\
 sC &= C , \\
 sC &= C , \\
 B &= \beta C , \\
 tD + \beta &= D^2 + CB , \\
 sD + \alpha &= D , \\
 0 &= \alpha C , \\
 tC &= DC + CA , \\
 tC + A &= D , \\
 C(C - 1) &= 0 , \\
 B &= CB , \\
 0 &= CA , \\
 CD + A &= D ; \\
 \alpha s &= \beta s^2 , \\
 t\beta &= \alpha\beta + \beta t^2 , \\
 s\beta &= \beta st , \\
 \beta + t\alpha &= \alpha^2 + \beta ts , \\
 A + CA &= \alpha + \beta C^2 , \\
 DB &= \alpha B + \beta D^2 , \\
 CB &= \beta CD , \\
 B + AD &= \alpha A + \beta CD ; \\
 s(s - 1) &= 0 , \\
 \beta &= s\beta , \\
 st + \alpha &= t , \\
 0 &= \alpha s , \\
 C^2 &= s , \\
 D^2 + B &= tD + sB , \\
 CD + A &= t , \\
 DC &= tC + sA .
 \end{aligned}$$

Из полученной системы уравнений следует, что для  $s, C$  возможны значения:

$$C = s = 0, \quad C = s = 1.$$

В случае  $C = s = 0$  приходим к единственному решению:

решение  $(KN - 1)$ ,

$$\alpha = A, \quad B = \beta = 0, \quad C = s = 0, \quad D = t = A,$$

$$\mathbf{l} = A\mathbf{k}, \quad l_0 = Ak_0, \quad \mathbf{m} = A\mathbf{n}, \quad m_0 = An_0, \quad (11.7a)$$

$$G = \begin{vmatrix} K & N \\ AK & AN \end{vmatrix}, \quad G'G = \begin{vmatrix} K' & N' \\ AK' & AN' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K & N \\ AK & AN \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (K'K + AN'K) & (K'N + AN'N) \\ A(K'K + AN'K) & A(K'N + AN'N) \end{vmatrix}. \quad (11.7b)$$

В случае  $C = s = +1$  также приходим к единственному решению:

решение  $(KN - 2)$ ,

$$A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0, \quad C = s = +1, \quad D = t = 0,$$

$$\mathbf{l} = 0, \quad l_0 = 0, \quad \mathbf{m} = \mathbf{k}, \quad m_0 = k_0, \quad (11.8a)$$

$$G = \begin{vmatrix} K & N \\ 0 & K \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} K' & N' \\ 0 & K' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K & N \\ 0 & K \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K'K & (K'N + N'K) \\ 0 & K'K \end{vmatrix}. \quad (11.8b)$$

## 12 Два независимых вектора: вариант I(ml)

Рассмотрим следующий случай двух независимых векторов, **вариант II(m,l)**:

$$\mathbf{n} = A\mathbf{m} + B\mathbf{l}, \quad l_0 = \alpha m_0 + \beta l_0,$$

$$\mathbf{k} = D\mathbf{l} + C\mathbf{m}, \quad k_0 = tl_0 + sm_0. \quad (12.1)$$

Здесь возникает два решения:

решение  $(ML - 1)$ ,

$$G = SG'S^{-1} = \begin{vmatrix} AN' & AK' \\ N' & K' \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} AL & AM \\ L & M \end{vmatrix}; \quad (12.2)$$

решение  $(ML - 2)$ ,

$$G = SG'S^{-1} = \begin{vmatrix} K' & 0 \\ N' & K' \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} M & 0 \\ L & M \end{vmatrix}. \quad (12.3)$$

### 13 Три независимых вектора: варианты $I(\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{n})$ и $I(\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{l})$

Перейдем к анализу случая трех независимых векторов. Рассмотрим вариант  $I(\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{n})$ :

$$\mathbf{l} = A\mathbf{k} + B\mathbf{m} + C\mathbf{n}, \quad l_0 = \alpha k_0 + \beta m_0 + s n_0. \quad (13.1)$$

Сначала исследуем следствия из более простого второго линейного ограничения в (13.1). Формулы для  $k_0'', m_0'', n_0'', l_0''$  принимают вид:

$$k_0'' = k_0' k_0 + \mathbf{k}'\mathbf{k} + n_0'(\alpha k_0 + \beta m_0 + s n_0) + \mathbf{n}'(A\mathbf{k} + B\mathbf{m} + C\mathbf{n}),$$

$$m_0'' = m_0' m_0 + \mathbf{m}'\mathbf{m} + (\alpha k_0' + \beta m_0' + s n_0') n_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}' + C\mathbf{n}')\mathbf{n},$$

$$n_0'' = k_0' n_0 + \mathbf{k}'\mathbf{n} + n_0' m_0 + \mathbf{n}'\mathbf{m},$$

$$l_0'' = (\alpha k_0' + \beta m_0' + s n_0') k_0 + (A\mathbf{k} + B\mathbf{m} + C\mathbf{n})\mathbf{k} + m_0'(\alpha k_0 + \beta m_0 + s n_0) + \mathbf{m}'(A\mathbf{k} + B\mathbf{m} + C\mathbf{n}).$$

Требуем

$$l_0'' = \alpha k_0'' + \beta m_0'' + s n_0'' \quad (13.2a)$$

или

$$(\alpha k_0' + \beta m_0' + s n_0') k_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}' + C\mathbf{n}')\mathbf{k} + m_0'(\alpha k_0 + \beta m_0 + s n_0) + \mathbf{m}'(A\mathbf{k} + B\mathbf{m} + C\mathbf{n}) =$$

$$\alpha [k_0' k_0 + \mathbf{k}'\mathbf{k} + n_0'(\alpha k_0 + \beta m_0 + s n_0) + \mathbf{n}'(A\mathbf{k} + B\mathbf{m} + C\mathbf{n})] +$$

$$\beta [m_0' m_0 + \mathbf{m}'\mathbf{m} + (\alpha k_0' + \beta m_0' + s n_0') n_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}' + C\mathbf{n}')\mathbf{n}] +$$

$$s [k_0' n_0 + \mathbf{k}'\mathbf{n} + n_0' m_0 + \mathbf{n}'\mathbf{m}],$$

в результате приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} k_0' k_0 : \alpha &= \alpha, & m_0' m_0 : \beta &= \beta, \\ m_0' k_0 : \beta + \alpha &= 0, & n_0' n_0 : 0 &= (\alpha + \beta)s, \\ n_0' k_0 : s &= \alpha^2, & m_0' n_0 : s &= \beta^2, \\ n_0' m_0 : 0 &= \beta(\alpha + s), & k_0' n_0 : 0 &= \beta(\alpha + s), \\ \mathbf{k}'\mathbf{k} : A &= \alpha, & \mathbf{m}'\mathbf{m} : B &= \beta, \\ \mathbf{m}'\mathbf{k} : B + A &= 0, & \mathbf{n}'\mathbf{n} : 0 &= (\alpha + \beta)C, \\ \mathbf{n}'\mathbf{k} : C &= \alpha A, & \mathbf{m}'\mathbf{n} : C &= \beta B, \\ \mathbf{n}'\mathbf{m} : 0 &= \alpha B + \beta s, & \mathbf{k}'\mathbf{n} : 0 &= \beta A + \beta s. \end{aligned} \quad (13.2b)$$

Выпишем только независимые уравнения

$$\alpha = A, \quad B = \beta = -A, \quad C = s = A^2, \quad A(A + s) = 0. \quad (13.2c)$$

Для уравнений (13.2c) возможны два класса решений:

$$(I) \quad A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0, \quad C = s = 0; \quad (13.3a)$$

$$(II) \quad A = \alpha = -1, \quad B = \beta = +1, \quad C = s = +1. \quad (13.3b)$$

Убедимся, что найденные решения удовлетворяют также трем групповым уравнениям

$$\mathbf{l}'' = A\mathbf{k}'' + B\mathbf{m}'' + C\mathbf{n}''; \quad (13.4a)$$

очевидно, что проверять нужно только решение типа  $II$ :

$$\mathbf{l} = -\mathbf{k} + \mathbf{m} + \mathbf{n}, \quad l_0 = -k_0 + m_0 + n_0. \quad (13.4b)$$

Уравнение

$$\mathbf{l}'' = -\mathbf{k}'' + \mathbf{m}'' + \mathbf{n}''$$

примет вид:

$$\begin{aligned} & (-k'_0 + m'_0 + n'_0) \mathbf{k} + (-\mathbf{k}' + \mathbf{m}' + \mathbf{n}') k_0 + \\ & i (-\mathbf{k}' + \mathbf{m}' + \mathbf{n}') \times \mathbf{k} + m'_0 (-\mathbf{k} + \mathbf{m} + \mathbf{n}) + \\ & \mathbf{m}'(-k_0 + m_0 + n_0) + i \mathbf{m}' \times (-\mathbf{k} + \mathbf{m} + \mathbf{n}) = \\ & -[ k'_0 \mathbf{k} + \mathbf{k}' k_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + n'_0 (-\mathbf{k} + \mathbf{m} + \mathbf{n}) + \\ & \mathbf{n}' (-k_0 + m_0 + n_0) + i \mathbf{n}' \times (-\mathbf{k} + \mathbf{m} + \mathbf{n}) ] + \\ & [ m'_0 \mathbf{m} + \mathbf{m}' m_0 + i \mathbf{m}' \times \mathbf{m} + (-k'_0 + m'_0 + n'_0) \mathbf{n} + \\ & (-\mathbf{k}' + \mathbf{m}' + \mathbf{n}') n_0 + i (-\mathbf{k}' + \mathbf{m}' + \mathbf{n}') \times \mathbf{n} ] + \\ & [ k'_0 \mathbf{n} + \mathbf{k}' n_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{n} + n'_0 \mathbf{m} + \mathbf{n}' m_0 + i \mathbf{n}' \times \mathbf{m} ]. \end{aligned}$$

Непосредственно видно, что полученное уравнение – это тождество.

Установленные решения (13.3) отвечают следующим множествам матриц:

решение  $(KMN - 1)$ ,

$$G = \begin{vmatrix} K & N \\ 0 & M \end{vmatrix},$$

$$G'G = \begin{vmatrix} K' & N' \\ 0 & M' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K & N \\ 0 & M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K'K & (K'N + N'M) \\ 0 & M'M \end{vmatrix}; \quad (13.5)$$

решение  $(KMN - 2)$ ,

$$\mathbf{l} = -\mathbf{k} + \mathbf{m} + \mathbf{n}, \quad l_0 = -k_0 + m_0 + n_0, \quad (13.6a)$$

$$G = \begin{vmatrix} K & N \\ -K + M + N & M \end{vmatrix};$$

это множество вырожденных матриц ранга 2. Проверим выполнение закона умножения:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} K' & N' \\ -K' + M' + N' & M' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K & N \\ -K + M + N & M \end{vmatrix} = \\ & \begin{vmatrix} K'K + N'(-K + M + N) & K'N + N'M \\ (-K' + M' + N')K + M'(-K + M + N) & (-K' + M' + N')N + M'M \end{vmatrix} = \\ & \begin{vmatrix} (K'K - N'K + N'M + N'N) & K'N + N'M \\ (-K'K + N'K + M'M + M'N) & (-K'N + M'N + N'N + M'M) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (13.6b)$$

Вводим обозначения

$$\begin{aligned} K'' &= K'K - N'K + N'M + N'N , \\ M'' &= -K'N + M'N + N'N + M'M , \\ N'' &= K'N + N'M , \end{aligned}$$

вычисляем

$$\begin{aligned} & -K'' + M'' + N'' = \\ & -K'K + N'K - N'M - N'N - K'N + M'N + N'N + M'M + K'N + N'M = \\ & -K'K + N'K + M'N + M'M ; \end{aligned}$$

Таким образом, (13.6b) имеет требуемую структуру полугруппы:

$$G'G = \begin{vmatrix} K'' & N'' \\ -K'' + M'' + N'' & M' \end{vmatrix}. \quad (13.6c)$$

В силу отмеченной выше симметрии есть аналогичные две возможности типа **I(kml)**:  
решение (KML - 1),

$$G = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K' & N' \\ 0 & M' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M' & 0 \\ N & K \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} K & 0 \\ L & M \end{vmatrix}; \quad (13.7a)$$

решение (KML - 2),

$$\begin{aligned} G &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K' & N' \\ -K' + M' + N' & M' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \\ & \begin{vmatrix} M' & -K' + M' + N' \\ N' & K' \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} K & -M + K + L \\ L & M \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (13.7b)$$

## 14 Три независимых вектора: варианты **I(n,l,k)** и **I(n,l,m)**

Рассмотрим вариант **I(n,l,k)** (ему изоморфен вариант **I(n,l,m)**):

$$\mathbf{m} = A\mathbf{n} + B\mathbf{l} + C\mathbf{k}, \quad m_0 = \alpha n_0 + \beta l_0 + sk_0. \quad (14.1)$$

Исследуем сначала более простое второе условие связи. Формулы умножения параметров принимают вид:

$$\begin{aligned} k_0'' &= k_0' k_0 + \mathbf{k}' \mathbf{k} + n_0' l_0 + \mathbf{n}' \mathbf{l}, \\ m_0'' &= (\alpha n_0' + \beta l_0' + sk_0')(\alpha n_0 + \beta l_0 + sk_0) + \\ & (A\mathbf{n}' + B\mathbf{l}' + C\mathbf{k}')(\mathbf{A}\mathbf{n} + B\mathbf{l} + C\mathbf{k}) + l_0' n_0 + \mathbf{l}' \mathbf{n}, \\ n_0'' &= k_0' n_0 + \mathbf{k}' \mathbf{n} + n_0'(\alpha n_0 + \beta l_0 + sk_0) + \mathbf{n}'(\mathbf{A}\mathbf{n} + B\mathbf{l} + C\mathbf{k}), \\ l_0'' &= l_0' k_0 + \mathbf{l}' \mathbf{k} + (\alpha n_0' + \beta l_0' + sk_0')l_0 + (A\mathbf{n}' + B\mathbf{l}' + C\mathbf{k}')\mathbf{l}. \end{aligned} \quad (14.2a)$$

Требуем

$$m_0'' = \alpha n_0'' + \beta l_0'' + sk_0'',$$

т. е.

$$\begin{aligned}
 & (\alpha n'_0 + \beta l'_0 + s k'_0)(\alpha n_0 + \beta l_0 + s k_0) + \\
 & (\mathbf{A}\mathbf{n}' + \mathbf{B}\mathbf{l}' + \mathbf{C}\mathbf{k}')(\mathbf{A}\mathbf{n} + \mathbf{B}\mathbf{l} + \mathbf{C}\mathbf{k}) + l'_0 n_0 + \mathbf{l}' \mathbf{n} = \\
 & \alpha [ k'_0 n_0 + \mathbf{k}' \mathbf{n} + n'_0(\alpha n_0 + \beta l_0 + s k_0) + \mathbf{n}' (\mathbf{A}\mathbf{n} + \mathbf{B}\mathbf{l} + \mathbf{C}\mathbf{k}) ] + \\
 & \beta [ l'_0 k_0 + \mathbf{l}' \mathbf{k} + (\alpha n'_0 + \beta l'_0 + s k'_0)l_0 + (\mathbf{A}\mathbf{n}' + \mathbf{B}\mathbf{l}' + \mathbf{C}\mathbf{k}')\mathbf{l} ] + \\
 & s [ k'_0 k_0 + \mathbf{k}' \mathbf{k} + n'_0 l_0 + \mathbf{n}' \mathbf{l} ].
 \end{aligned}$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
 n'_0 n_0 : \alpha^2 = \alpha^2, \quad l'_0 l_0 : \beta^2 = \beta^2, \quad k'_0 k_0 : s^2 = s, \\
 n'_0 l_0 : \alpha\beta = \alpha\beta + \alpha\beta + s, \quad n'_0 k_0 : \alpha s = \alpha s, \\
 l'_0 n_0 : \beta\alpha + 1 = 0, \quad l'_0 k_0 : \beta s = \beta, \\
 k'_0 n_0 : s\alpha = \alpha, \quad k'_0 l_0 : s\beta = \beta s,
 \end{aligned} \tag{14.2b}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}'\mathbf{n} : A^2 = \alpha A, \quad \mathbf{l}'\mathbf{l} : B^2 = \beta B, \quad \mathbf{k}'\mathbf{k} : C^2 = s, \\
 \mathbf{n}'\mathbf{l} : AB = \alpha B + \beta A + s, \quad \mathbf{n}'\mathbf{k} : AC = \alpha C, \\
 \mathbf{l}'\mathbf{n} : BA + 1 = 0, \quad \mathbf{l}'\mathbf{k} : BC = \beta, \\
 \mathbf{k}'\mathbf{n} : CA = \alpha, \quad \mathbf{k}'\mathbf{l} : CB = \beta C.
 \end{aligned} \tag{14.2c}$$

Оставляем независимые уравнения:

$$\begin{aligned}
 \alpha\beta = -1, \quad s = -\alpha\beta = +1, \quad C^2 = s = 1, \\
 A(A - \alpha) = 0, \quad C(A - \alpha) = 0, \quad B(B - \beta) = 0, \\
 AB = \alpha B + \beta A + 1, \quad AC = \alpha C, \\
 BA + 1 = 0, \quad BC = \beta, \\
 CA = \alpha, \quad CB = \beta C;
 \end{aligned}$$

отсюда следует единственное решение:

решение  $(NLK - 1)$ ,

$$\alpha = A, \quad B = \beta = -\frac{1}{A}, \quad C = s = +1,$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{k} + (A \mathbf{n} - A^{-1} \mathbf{l}), \quad m_0 = k_0 + (A n_0 - A^{-1} l_0); \tag{14.3a}$$

соответствующие матрицы  $G$  имеют структуру

$$G = \begin{vmatrix} K & N \\ L & (K + AN - A^{-1}L) \end{vmatrix}. \tag{14.3b}$$

Это множество вырожденных матриц с нулевым определителем. Найдем закон умножения для таких матриц:

$$\begin{aligned}
 G'G = \begin{vmatrix} K' & N' \\ L' & (K' + AN' - A^{-1}L') \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K & N \\ L & (K + AN - A^{-1}L) \end{vmatrix} = \\
 \begin{vmatrix} (K'K + N'L) & [K'N + N'(K + AN - A^{-1}L)] \\ [L'K + (K' + AN' - A^{-1}L')L] & [L'N + (K' + AN' - A^{-1}L')(K + AN - A^{-1}L)] \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{14.4a}$$

Найдем явное выражение для блока (22) в матрице (14.4a):

$$(22) = L'N + (K' + AN' - A^{-1}L')(K + AN - A^{-1}L) =$$

$$(K'K - N'L) + A(K'N + N'K) -$$

$$A^{-1}(K'L + L'K) + A^2N'N + A^{-2}L'L. \quad (14.4b)$$

Вводим обозначения

$$K'' = K'K + N'L,$$

$$N'' = K'N + N'(K + AN - A^{-1}L),$$

$$L'' = L'K + (K' + AN' - A^{-1}L)L.$$

Вычислим

$$K'' + AN'' - A^{-1}L'' =$$

$$K'K + N'L + A[K'N + N'(K + AN - A^{-1}L)] -$$

$$A^{-1}[L'K + (K' + AN' - A^{-1}L)L] =$$

$$(K'K - N'L) + A(K'N + N'K) -$$

$$A^{-1}(L'K + K'L) + (A^2N'N + A^{-2}L'L). \quad (14.4c)$$

Выражения, полученные в (14.4b) и (14.4c), совпадают, т. е. выполняется требуемое равенство:

$$(22) = K'' + AN'' - A^{-1}L'',$$

следовательно (см. (14.4a))

$$G'G = \begin{vmatrix} K'' & N'' \\ L'' & (K'' + AN'' - A^{-1}L'') \end{vmatrix} = G''.$$

Получим описание симметричного **варианта I(n,l,m)** трех независимых векторов. Для этого над матрицами типа (14.3b) совершим преобразование подобия:

решение (NLM - 1),

$$G = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K' & N' \\ L' & (K' + AN' - A^{-1}L') \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (K' + AN' - A^{-1}L') & L' \\ N' & K' \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} (M + AL - A^{-1}N) & N \\ L & M \end{vmatrix}. \quad (14.5)$$

## 15 Анализ вырожденных 4-мерных матриц ранга 3

Явный вид матриц (2.1) следующий:

$$G = \begin{vmatrix} k_0 + k_3 & k_1 - ik_2 & n_0 + n_3 & n_1 - in_2 \\ k_1 + ik_2 & k_0 - k_3 & n_1 + in_2 & n_0 - n_3 \\ l_0 + l_3 & l_1 - il_2 & m_0 + m_3 & m_1 - im_2 \\ l_1 + il_2 & l_0 - l_3 & m_1 + im_2 & m_0 - m_3 \end{vmatrix}. \quad (15.1)$$

Есть 16 простых способов получить подгруппы  $(3 \times 3)$ -матриц, зануляя одну  $i$ -строку и один  $j$ -столбец в исходной 4-мерной матрице. Это следующие варианты:

$$\begin{aligned} & (00), \quad (01), \quad (02), \quad (03), \\ & (10), \quad (11), \quad (12), \quad (13), \\ & (20), \quad (21), \quad (22), \quad (23), \\ & (30), \quad (31), \quad (32), \quad (33). \end{aligned} \tag{15.2}$$

Детализируем один вариант (33)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} k_0 + k_3 & k_1 - ik_2 & n_0 + n_3 & n_1 - in_2 \\ k_1 + ik_2 & k_0 - k_3 & n_1 + in_2 & n_0 - n_3 \\ l_0 + l_3 & l_1 - il_2 & m_0 + m_3 & m_1 - im_2 \\ l_1 + il_2 & l_0 - l_3 & m_1 + im_2 & m_0 - m_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_0 + k_3 & k_1 - ik_2 & 2n_0 & 0 \\ k_1 + ik_2 & k_0 - k_3 & 2n_1 & 0 \\ 2l_0 & 2l_1 & 2m_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ & m_1 = 0, \quad m_2 = 0, \quad m_0 = m_3, \\ & l_0 = l_3, \quad l_1 = -il_2, \quad n_1 = in_2, \quad n_0 = n_3. \end{aligned} \tag{15.3}$$

## Заключение

Матрицам  $G$  вида (2.1) отвечает естественный инвариант – их определитель (см. [1–3]):

$$\begin{aligned} \det G &= (kk)(mm) + (nn)(ll) - 2(kn)(ml) - \\ & 2(-k_0 \mathbf{n} + n_0 \mathbf{k} + i \mathbf{k} \times \mathbf{n})(-m_0 \mathbf{l} + l_0 \mathbf{m} + i \mathbf{m} \times \mathbf{l}) \end{aligned}$$

(используется обозначение  $(kk) = k_0 k_0 - \mathbf{k} \mathbf{k}$  и т. п.), который является функцией от четырех 4-мерных величин  $k, m, l, n$  с достаточно простой математической структурой

$$\begin{aligned} \det G &= \sum G_{abcd}^{ABCD} (k_a)^A (m_b)^B (l_c)^C (n_d)^D, \\ A \leq 2, \quad B \leq 2, \quad C \leq 2, \quad D \leq 2, \quad A + B + C + D &= 4. \end{aligned}$$

Развитая выше классификация подмножеств вырожденных матриц

$$\begin{aligned} (n) &\longrightarrow 7, \quad (m) \longrightarrow 7, \quad (l) \longrightarrow 4, \quad (k) \longrightarrow 4, \\ (km) &\longrightarrow 5, \quad (l, n) \longrightarrow 2, \quad (k, n) \longrightarrow 2, \\ (k, l) &\longrightarrow 2, \quad (n, m) \longrightarrow 2, \quad (m, l) \longrightarrow 2 \\ (k, m, n) &\longrightarrow 2, \quad (k, m, l) \longrightarrow 2, \\ (n, l, k) &\longrightarrow 2, \quad (n, l, m) \longrightarrow 2. \end{aligned}$$

фиксирует все существенно разные возможности (14 систем из 16 уравнений привели к 45 решениям; и есть 16 решений – вырожденных матриц ранга 3) зануления этого инварианта, при сохранении структуры полугрупп на соответствующих матрицах

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований: Румынско-Белорусский проект, грант Ф12РА-002.

Авторы благодарны организаторам VIII международной конференции «Финслеровы обобщения теории относительности» за поддержку нашего участия в работе конференции.



## Литература

- [1] Bogush A.A., Red'kov V.M. On Unique parametrization of the linear group  $GL(4,C)$  and its subgroups by using the Dirac algebra basis // *NPCS*, 2008, Vol. 11, № 1, pp. 1–24.
- [2] Red'kov V.M., Bogush A.A., Tokarevskaya N.G.  $(4 \times 4)$ -matrices in Dirac parametrization: inversion problem and determinant // arXiv:0709.3574v2 [hep-th].
- [3] Red'kov V.M., Bogush A.A., Tokarevskaya N.G. On Parametrization of the Linear  $GL(4,C)$  and Unitary  $SU(4)$  Groups in Terms of Dirac Matrices // *SIGMA*, 2008, Vol. 014, 46 pages.

## DOES IT POSSIBLE FINSLER GEOMETRIZATION OF THE POLARIZATION OPTICS?

E.M. Ovsyuk, V.M. Red'kov

<sup>1</sup> *Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus*

<sup>2</sup> *Institute of Physics, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

e.ovsiyuk@mail.ru, v.redkov@dragon.bas-net.by

This paper provides an overview of some of the features of the matrix calculus to analyze the issues of polarization optics. There is reason to believe that methods of Finsler geometry can be of help here. Since the Mueller matrices, acting on real four-dimensional Stokes vectors, are real, then in possible studies of Mueller matrices one can use their parametrization obtained by applying the Dirac basis. The law of multiplication for the elements of the original group is complicated, but it is suitable for analytical study. The explicit form of the determinant of any matrix in this parametrization, provides us with a natural classifying invariant in a variety of the matrices. This parametrization is used to describe the possible classes of Mueller matrices, including the degenerate cases of matrices with zero determinant, described within the structure of semigroups. It turns out that imposing linear relationships on the 16 parameters that are compatible with the group multiplication law, we can specify mostly classes of degenerate matrices with the structure of semigroups. A complete classification of such semigroups of rank 1, 2, 3 is elaborated.

**Key Words:** polarization optics, Dirac matrices, Mueller matrices, classification, degenerate matrices, semigroup.

# ПОИСКОВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Д.Г. Павлов<sup>1</sup>, М.С. Панчелюга<sup>1,2</sup>, В.А. Панчелюга<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

<sup>2</sup>Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, Пуцино, Россия  
panvic333@list.ru

В работе представлены предварительные результаты эксперимента по поиску гиперболических или Н-полей, которые, согласно имеющимся теоретическим результатам [1-13] должны приводить к локальному изменению хода времени. В качестве генератора Н-поля использован механический удар, в качестве регистратора — высокостабильный кварцевый генератор. Результатом влияния Н-поля на кварцевый генератор должно быть изменение частоты его колебаний. В эксперименте обнаружено смещение суммарного спектра колебаний кварцевого генератора в момент удара по отношению к его спектру в контроле — при соблюдении тех же условий, но без удара.

**Ключевые слова:** финслерова геометрия, метрика Бервальда-Моора, гиперболические поля, кварцевый генератор.

## 1 Введение. Теоретические предпосылки, лежащие в основе эксперимента

В работах [1-9] высказывалась гипотеза, что реальное пространство-время, помимо моделей связанных с квадратичной геометрией пространства Минковского

$$dS^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (1)$$

может несколько лучше, а главное, эффективнее описываться моделями связанными со специальной четырехмерной биквадратичной финслеровой геометрией обладающей метрической функцией Бервальда-Моора

$$dS^4 = C^4(dt^4 + dt_1^4 + dt_2^4 + dt_3^4 - 2(dt^2 dt_1^2 + \dots + dt_2^2 dt_3^2) + 8dt dt_1 dt_2 dt_3). \quad (2)$$

При этом, по крайней мере чисто теоретически, скорости  $c$  и  $C$  фигурирующие в (1) и (2), а так же пространственноподобные координаты  $x, y, z$  и  $Ct_1, Ct_2, Ct_3$  могут не совпадать друг с другом.

Ответ на вопрос, насколько адекватными для целей описания реальных физических явлений могут быть модели основанные на биквадратичном интервале (2), как обычно, должны дать экспериментальные исследования. Один из вариантов проверочного эксперимента и его первые результаты описываются в настоящей работе.

В основу идеи эксперимента положен замечательный экспериментальный и теоретический факт связывающий между собой симметрии уравнений электродинамики Максвелла и непрерывные конформные симметрии пространства-времени Минковского. Как известно, соответствующие группы симметрий полностью совпадают и это обстоятельство служит мощным аргументом как в правильности отражения части физической реальности самими уравнениями Максвелла, так и в целесообразности использования для этих же целей геометрии пространства Минковского. Поскольку нами высказывается гипотеза, что метрика реального пространства-времени может существенно отличаться от псевдоримановой в пользу ее финслеровых обобщений, то в последней, в неизбежном порядке, должны

наблюдаться иные группы непрерывных симметрий. Для экспериментальных исследований это, в частности, означает логичность предположения о существовании в реальности некоего дополнительного фундаментального поля, свойства и законы сохранения которого должны быть тесно связаны с конформными симметриями метрики Бервальда-Моора.

Действительно, если группа конформных симметрий пространства Минковского и симметрий уравнений Максвелла, как известно, 15-параметрическая и сводится к трансляциям, пространственным и гиперболическим поворотам, дилатациям и инверсиям относительно псевдоевклидовых сфер, то группа конформных симметрий четырехмерного пространства Бервальда-Моора — бесконечномерная и по своей структуре близка к группе бесконечных конформных симметрий псевдоевклидовой плоскости. На наш взгляд, если гипотеза о связи реальной геометрии пространства-времени с финслеровой геометрией Бервальда-Моора верна, то, помимо известных современной физике четырех фундаментальных полей должно существовать еще как минимум одно фундаментальное поле, уравнения которого в обязательном порядке будут иметь симметрии группы конформных преобразований соответствующего финслерова пространства. Такое гипотетическое векторное поле в работах [10-13] предложено называть гиперболическим. Это поле должно быть векторным и обладать рядом интересных свойств, принципиальным образом отличающих его от других известных физических полей, в частности, в вакууме оно будет не только потенциальным, но и соленоидальным, правда, в гиперболическом смысле этого понятия. Источниками гиперболического взаимодействия должны являться не элементарные частицы как в случае известных полей, а элементарные события, то есть, особые точки финслерова пространства-времени. Если основой детектирования обычных электромагнитных и гравитационных полей являются измерения пространственных смещений динамометров, то в основу детектирования гиперболических полей, как нам представляется, должны браться изменения в скорости хода высокоточных часов. В концептуальном плане, искомое векторное поле в определенном смысле может быть связано с полем четырехскоростей мировых линий частиц в псевдоевклидовом пространстве-времени, с той разницей, что модуль обычной четырехскорости всегда равен единице, а у поля финслеровых четырехскоростей частиц их модуль может принимать и отличные от единицы значения. В определенном смысле, искомое векторное поле можно так же сопоставлять с полем пространственно-временных масштабов, изменяющихся от точки к точке пространства-времени, которые в рамках расширения псевдоримановой геометрии рассматривал Г.Вейль, опять же с той разницей, что Вейль не отходил от исходной квадратичности метрики, а мы допускаем ее биквадратичность, то есть, финслеровость. К тому же, в гипотезе Г.Вейля почти не участвовали непрерывные симметрии, а в нашем случае бесконечная группа конформных симметрий финслерова пространства-времени является основой построений и выводов.

Как бы то ни было, окончательный вывод о наличии или отсутствии в реальности поля с описанными выше свойствами, должен сделать эксперимент. Для его осуществления необходимо выбрать удобный для целей лабораторного исследования источник гиперболического поля, а так же способ его детектирования. Представляется достаточно оправданным в качестве генератора гиперболического поля взять удар массивного тела о неподвижное препятствие. При этом событии происходят процессы трансформации кинетической энергии массивного тела по различным каналам и некоторые из них могут приводить к возникновению гиперболических полей. При хорошей точности часов, располагаемых рядом с точкой удара, сравнивая равномерность их хода в моменты предшествующие удару и сразу после него, как нам представляется, есть шанс убедиться в наличии влияния события удара на скорость хода часов. Конечно, такой эксперимент достаточно груб, так как не позволяет, с одной стороны, смоделировать именно точечный (в пространстве и времени) источник гиперболического поля, так как сам удар массивной болванки является совокупностью весьма сложных пространственно-временных событий, а с другой, даже

достаточно точные современные кварцевые часы вряд ли позволят построить зависимость напряженности исследуемого поля именно от интервала, то есть, в лучшем случае придется довольствоваться лишь суммарным во времени сигналом и только в зависимости от пространственного расстояния, что существенно не то же самое, что от интервала. Однако, даже с учетом заранее видимых недостатков, предлагаемый эксперимент все же имеет шанс оказаться достаточно информативным и позволит, как мы надеемся, не только определить сам факт наличия или отсутствия гиперболического поля, но и ориентировочно оценить порядок величины возмущения, которое событие удара может оказывать на скорость хода часов. К тому же, в случае положительных результатов, постановка более точных экспериментов будет значительно облегчена и лучше обоснована.

## 2 Экспериментальная установка и методика измерений

В качестве генератора Н-полей предполагается использовать явление механического удара. В том случае, если в процессе удара происходит генерация искомых полей это должно приводить к локальному изменению скорости хода времени, что, в свою очередь, может быть обнаружено по изменению скорости хода высокоточных часов. В качестве часов предполагается использование высокостабильных кварцевых генераторов реакция которых на Н-поле проявится в кратковременном изменении их частоты колебаний, которое может быть зарегистрировано при помощи регистрирующей системы.

Кратко рассмотрим основные элементы экспериментальной установки.

### 2.1 Генератор Н-поля

Для реализации процесса механического удара была построена вышка высотой 12 м, показанная на фотографии, приведенной на рис. 1. Вышка используется для поднятия груза на заданную высоту, автоматического высвобождения груза и направления его падения на стальную наковальню.



Рис. 1: Фотография вышки, используемой в эксперименте по поиску пространственно-временных эффектов гиперболического поля.



Рис. 2: Нижняя часть направляющей системы вышки, груз в салазках и стальная наковальня на дне бетонного колодца.

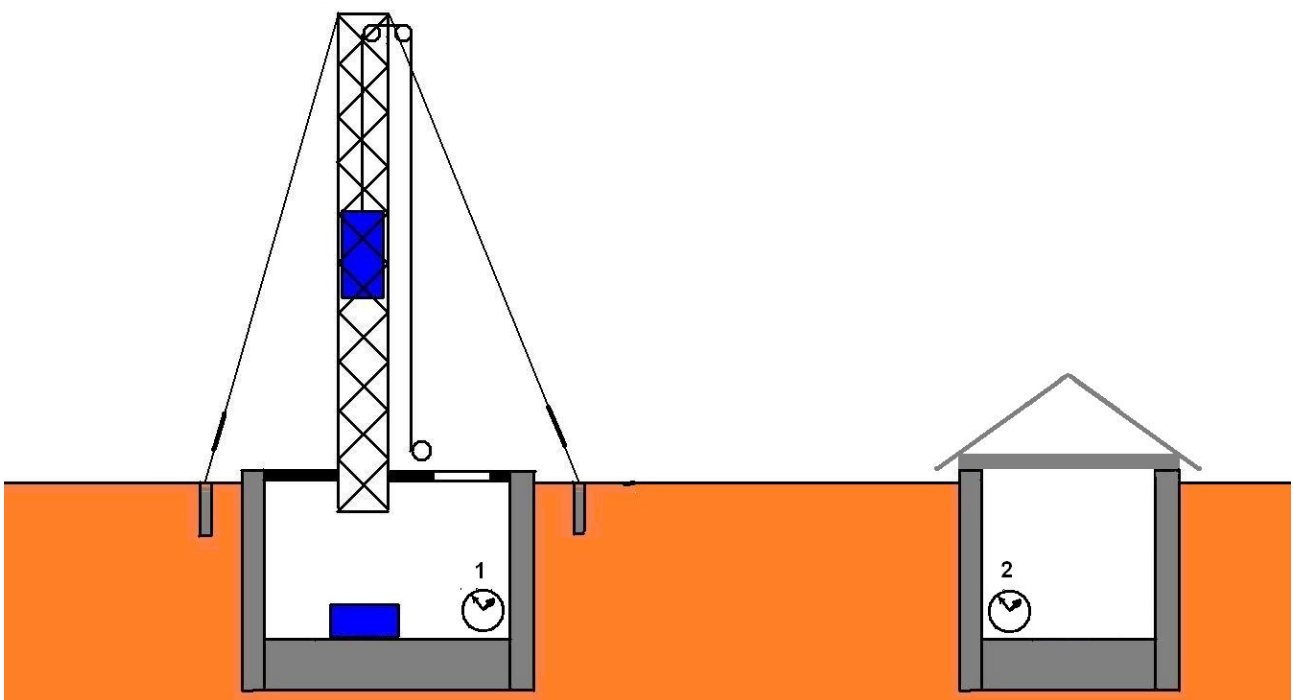


Рис. 3: Схема расположения вышки, измерительного колодца и измерительной шахты.

Груз закреплен с специальных салазках, которые скользят внутри вышки по направляющим уголкам, обеспечивая равномерное, без раскачиваний, поднятие груза, а также его направленное падение точно в центр наковальни. На рис. 2 приведено фото на котором представлен груз, закрепленный в салазках, наковальня и нижняя часть вышки, которая служит одновременно направляющими для салазок в которых размещен груз.

Стальная наковальня расположена на бетонном полу углубленного колодца. На верх-

ней кромке колодца установлена вышка, поддерживаемая в вертикальном положении при помощи системы растяжек. Сверху колодец закрыт водонепроницаемым настилом, в котором предусмотрен люк для спуска в колодец. Вышка, груз, колодец, наковальня, система поднятия груза, состоящая из лебедки и стального троса показаны в левой части рис. 3.

В правой части рис. 3 показана крытая измерительная шахта, имеющая ту же глубину, что и колодец. Шахта находится на расстоянии 1.5 м от колодца и служит для размещения измерительной аппаратуры, а также позволяет значительно ослабить акустическое излучение, генерируемое в момент удара груза о наковальню.

## 2.2 Используемые кварцевые генераторы

Для эксперимента были выбраны высокостабильные кварцевые генераторы с двойным термостатированием ГК-216-ТС, производимые фирмой МОРИОН. Генераторы обладают низким уровнем фазовых шумов. Они вакууммированы и помещены в металлические корпуса, служащие дополнительным экраном для электромагнитных полей. Некоторые, гарантируемые изготовителем, параметры кварцевых генераторов приведены в табл. 1.

Таблица 1: Параметры используемых кварцевых генераторов.

Номинальная частота	10 МГц
Выходной сигнал	синус
Температурная нестабильность в интервале температур $-10 \dots +60^\circ\text{C}$	$\pm 1 \times 10^{-10}$
Долговременная нестабильность частоты, не более	$\pm 5 \times 10^{-9}$ (1 год) $\pm 3 \times 10^{-8}$ (10 лет)
Кратковременная нестабильность частоты (девиация Аллана) при времени усреднения 1 сек	$< 2 \times 10^{-12}$
Предельная температура среды	$-55 \dots +80^\circ\text{C}$
Механический удар (ударопрочность)	100г/3 $\pm$ 1 мс
Стойкость к синусоидальной вибрации (вибропрочность)	1-200 Гц/5 г
Герметизация	Генератор герметизирован

Как следует из приведенной таблицы, нестабильность частоты используемых в эксперименте кварцевых генераторов, для времени измерения 2-4 часа, не более  $10^{-10} \dots 10^{-11}$ .

На рис. 4 а) приведена запись выходного сигнала кварцевого генератора. Как можно видеть – выходной сигнал чистый синус без видимых нелинейных искажений. Качество выходного сигнала генератора подтверждает также его спектр мощности, показанный на рис. 4 б) и представляющий собой одиночный острый пик на резонансной частоте кварцевого генератора.

Более детальное представление о спектре мощности используемого кварцевого генератора можно получить из рис. 5. Здесь представлена увеличенная часть спектра мощности выходного сигнала кварцевого генератора в окрестности резонансной частоты. Видно, что

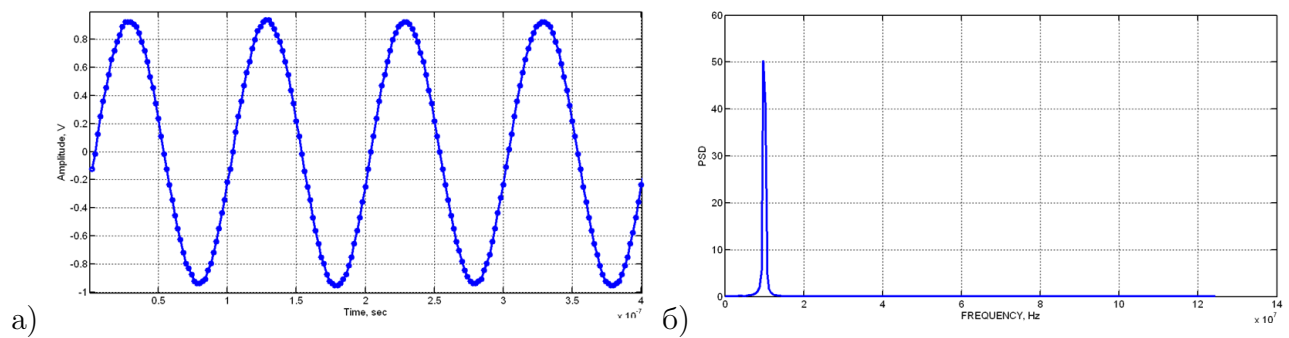


Рис. 4: Выходной сигнал генератора, а), и его спектр мощности, б).

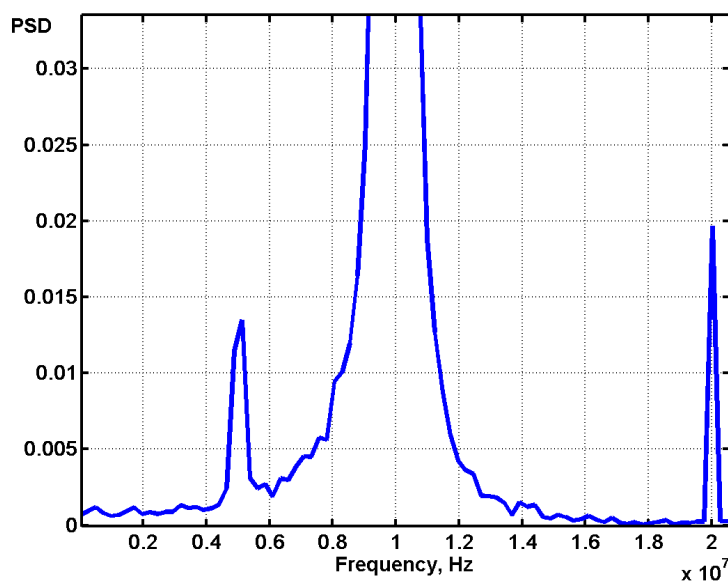


Рис. 5: Увеличенная часть спектра мощности выходного сигнала кварцевого генератора в окрестности резонансной частоты.

кроме основной моды колебаний на частоте 10 МГц присутствует также слабая спектральная компонента на частоте второй гармоники, а также некоторая, достаточно слабая, мода колебаний в районе частоты 5 МГц.

### 2.3 Регистрирующая система

Блок-схема регистрирующей системы представлена на рис. 6. Она состоит из описанного выше кварцевого генератора (КГ), который дополнительно помещен в герметичный металлический корпус (КОРПУС КГ), источника питания кварцевого генератора, состоящего из внешнего источника питания (ИП) и внутреннего (ИП-КГ), помещенного в тот же корпус, где находится кварцевый генератор, и предназначенного для дополнительной стабилизации его питающего напряжения. Момент удара груза (ГРУЗ) о наковальню (НАКОВАЛЬНЯ) регистрируется при помощи ультразвукового датчика (УЗМ). Регистрация сигналов осуществляется при помощи цифрового запоминающего осциллографа WaveJet 322A фирмы LeCroy (ЦЗО), позволяющего высокоскоростную (до 1 ГГц на канал) синхронную по обеим каналам оцифровку входных сигналов с возможностью дальнейшего сохранения полученных результатов в памяти персонального компьютера (ПК). Встроенная память ЦЗО позволяет регистрацию 500000 последовательных измерений на каждый канал.



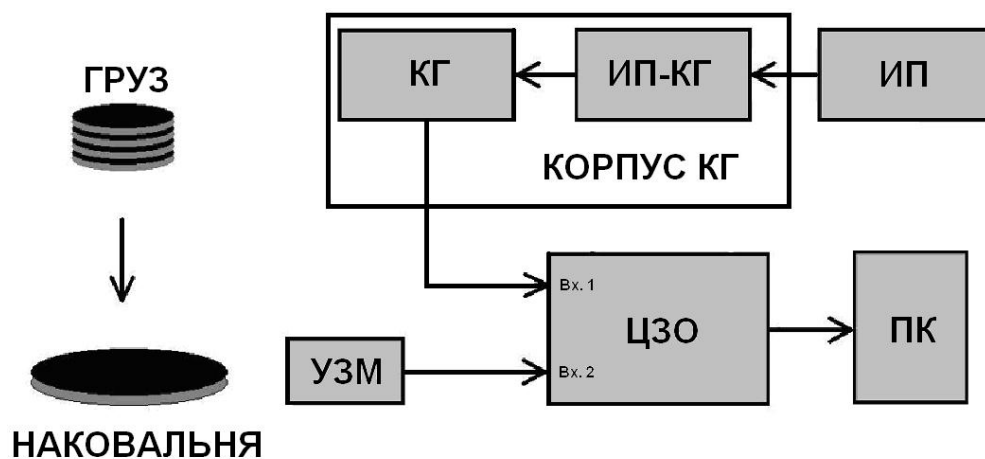


Рис. 6: Блок-схема регистрирующей системы.

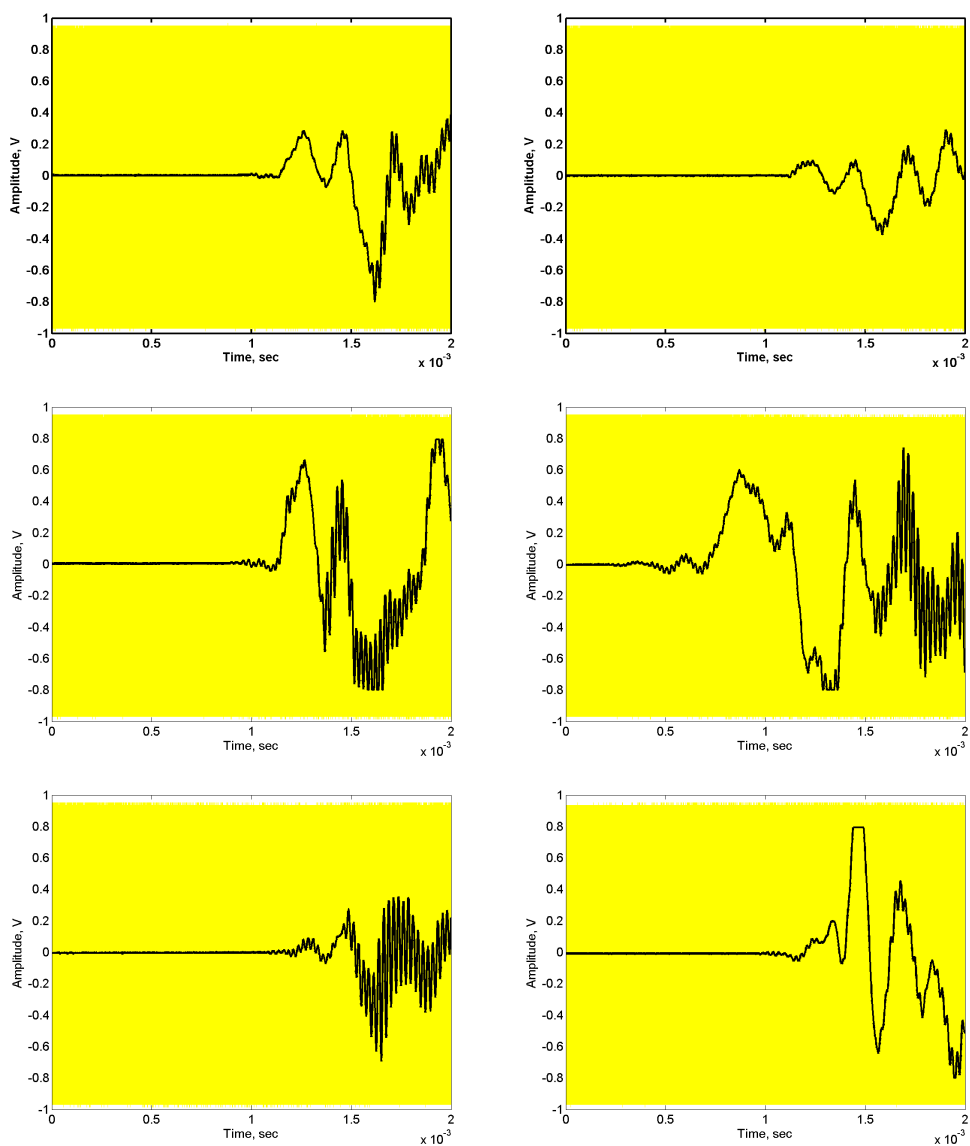


Рис. 7: Примеры регистраций момента удара. Серым показан высокочастотный сигнал КГ, чёрным – сигнал с УЗМ.



Примером контрольного измерения может служить синусоидальный сигнал, показанный на рис.4 а). Примеры регистраций момента удара представлены на рис. 7.

Процесс регистрации измеряемого сигнала происходит следующим образом. На входы ЦЗО подается сигнал с выхода кварцевого генератора (показан синим на рис. 7) и с выхода УЗМ-датчика (показан красным на рис. 7). Поступающие на входы ЦЗО сигналы непрерывно оцифровываются и циклически записываются в его встроенную память. В момент первого касания груза о наковальню приходит сигнал с УЗМ-датчика, который запускает систему синхронизации ЦЗО таким образом, что в памяти осциллографа сохраняется часть сигнала предшествующая моменту срабатывания УЗМ-датчика и записывается такая же по длительности часть сигнала последующая моменту срабатывания датчика. Т.о., результирующая регистрация содержит сигнал с выхода кварцевого генератора в окрестности момента удара. Показанные на рис. 7 сигналы были оцифрованы с частотой 250 МГц, следовательно, запись длиной 500000 точек соответствует временному интервалу в 2 мсек. Совокупность проведенных исследований показала, что такая длительность является оптимальной для того, чтобы, с одной стороны, зарегистрировать окрестность момента удара, который имеет характерное время порядка 1 мсек, а с другой – получить качественную запись сигнала генератора (25 точек на период).

В то же время, как следует из рис. 7 каждый удар груза о наковальню имеет свой индивидуальный портрет и с большой степенью уверенности можно говорить о том, что двух одинаковых ударов не бывает. Поэтому, используемая методика измерений и обработки экспериментальных данных, представленные в настоящей статье, предполагает оперирование с некоторыми суммарными, усредненными по множеству измерений, величинами.

## 2.4 Методика измерений и обработка экспериментальных данных

Для того, чтобы исключить возможное влияние внешних факторов на конечный результат нами была использована методика измерений «с чередованием». Суть ее в том, что после каждого измерения, проводимого в момент удара груза о наковальню, которое мы обозначили выше, как «опыт», проводится контрольное измерение – «контроль»: запись сигнала невозмущенного, т.е. без удара, кварцевого генератора. Таким образом, опыт и контроль чередуются на протяжении всей серии измерений. Схематически это проиллюстрировано на рис. 8. Здесь серия измерений с чередованием обозначена цифрой 1. Опыт обозначен как «EXP.», контрольные измерения – «CONTR». Среднее время, в течение которого происходит регистрация пары опыт-контроль, составляет 5 минут. Обычно климатические факторы (влажность, давление, температура и т.д.), значимые вариации геофизических полей имеют периодичку, превышающую это значение. Поэтому для серии измерений, длящейся обычно 2.5–4 часа, они должны усредниться, если мы будем рассматривать разность усредненных значений некоторого параметра между опытом и контролем.

Процедура усреднения начинается с того, что для каждой из полученных регистраций вычисляется спектр мощности. Условно это показано на рис. 8 под номерами 2.1 – спектры мощности для сигналов КГ в окрестности момента удара и 2.2 – спектры мощности для контрольных измерений. На следующем шаге полученные спектры мощности суммируются, отдельно для опытных измерений (3.1) и для контрольных (3.2). Полученные суммарные спектры мощности схематично показаны на рис. 8 в квадратных рамках. Последний шаг в обработке экспериментальных данных состоит в том, что суммарные спектры мощности, полученные для контроля, вычитаются из суммарных спектров мощности, полученных для измерений в окрестности удара. Этот шаг показан на рис. 8 под номером 4. На выходе четвертого шага в обработке экспериментальных данных получаем разностные спектры по которым можно судить о характере и величине отличий суммарных спектров для опыта и контроля.

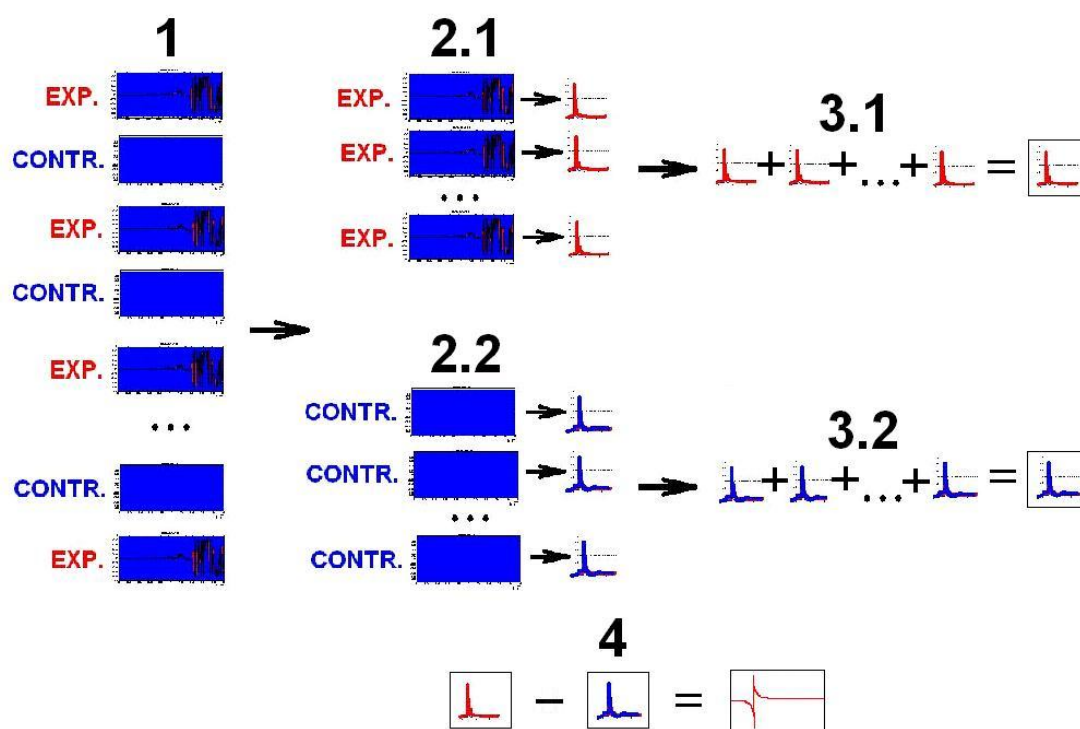


Рис. 8: Методика обработки экспериментальных данных. 1 – поочередная регистрация сигнала кварцевого генератора в окрестности момента удара (EXP.) и контрольная запись без удара (CONTR.), 2.1 – множество спектров мощности в окрестности момента удара, 2.2 – множество спектров мощности для контрольных регистраций, 3.1 – сумма спектров мощности для регистраций в окрестности момента удара, 3.2 – сумма спектров мощности для контрольных регистраций, 4 – получение разностного спектра.

### 3 Полученные результаты. Разностные спектры

В том случае, если в результате вычитания суммарных спектров получен «не равный нулю» разностный спектр мы можем говорить о существовании некоторого отличия между суммарными спектрами и, возможно, частотного сдвига между измерениями в контроле и в момент удара, что в свою очередь может свидетельствовать о существовании искомого влияния Н-полей на частоту используемых кварцевых генераторов.

Нами было выполнено две серии измерений, отличающиеся расстоянием от центра наковальни до кварцевого генератора. Используемые в эксперименте положения кварцевого генератора обозначены на рис. 3 цифрами над символическим изображением часов. В первом положении кварцевый генератор размещался в колодце на расстоянии 0.5 м от центра наковальни, во втором — в измерительной шахте, на расстоянии 3.2 м от центра наковальни.

На рис. 9 приведены суммарные спектры мощности для измерений в момент удара, рис. 9 а) и контрольные, рис. 9 б). Как можно видеть полученные спектры визуально выглядят совершенно одинаковыми, что и следовало ожидать, учитывая, что измерения в обеих сериях измерений проводились с одним и тем же максимально защищенным от внешних воздействий кварцевым генератором. Но вычитание, показанных на рис. 9 суммарных спектров показывает, что между ними, в действительности, существуют очень небольшие различия, которые хорошо видны на рис. 10. Представленный на рис. 10 результат, как это отмечалось выше, позволяет говорить о различии между измерениями в опыте и контроле.

Результаты для серии измерений в шахте (положение 2 на рис. 3) представлены на

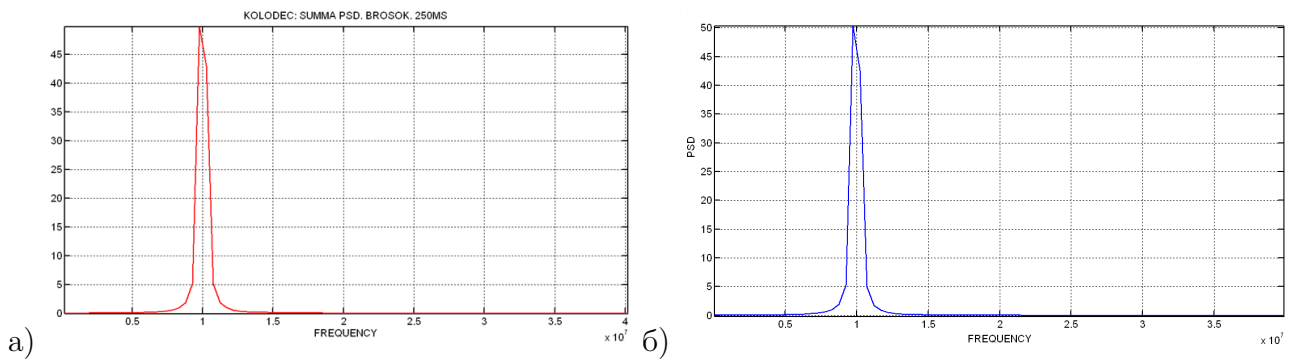


Рис. 9: Суммарные спектры мощности для измерений в колодце: а) измерения в момент удара, б) контрольные измерения.

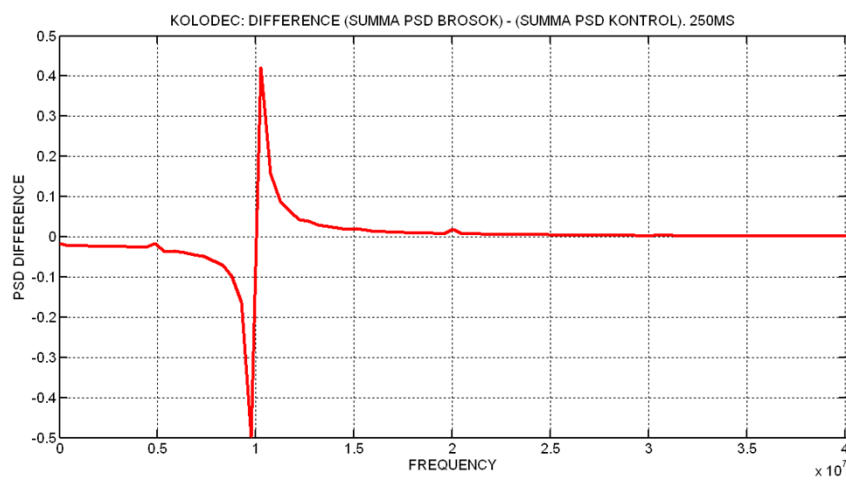


Рис. 10: Разность суммарных спектров (рис. 9) для измерений в колодце.

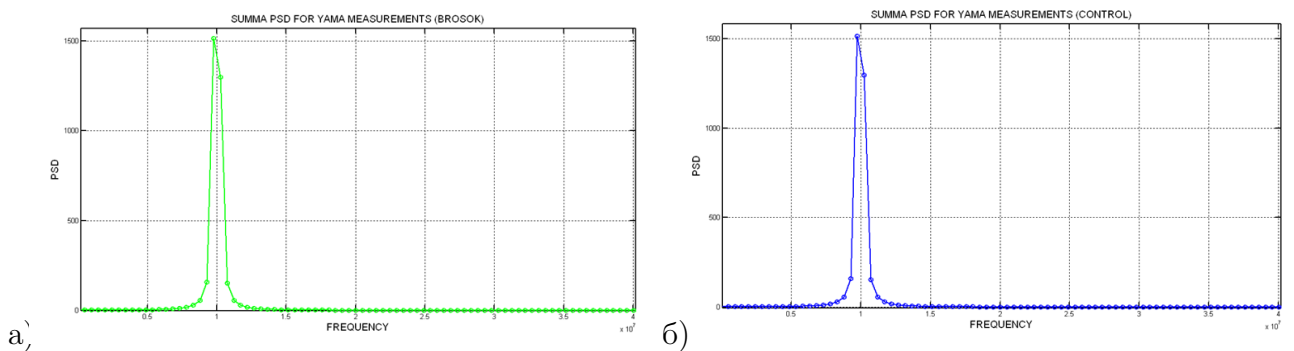


Рис. 11: Суммарные спектры мощности для измерений в шахте: а) измерения в окрестности момента удара, б) контрольные измерения.

рис. 11 и рис. 12. Здесь, как и для измерений в колодце получены суммарные спектры для измерений в опыте, рис. 11 а), и в контроле, рис. 11 б), которые так же как и в предыдущем случае, не выказывают никаких видимых отличий. Отличия становятся видимыми только для разности суммарных спектров, показанной на рис. 12.

Для удобства сравнения на рис. 13 приведены разности суммарных спектров для серии измерений в колодце (сплошная) и в шахте (пунктир). Можно видеть, что для случая, когда измерения проводятся в шахте амплитуда разностного «сигнала» значительно ниже.

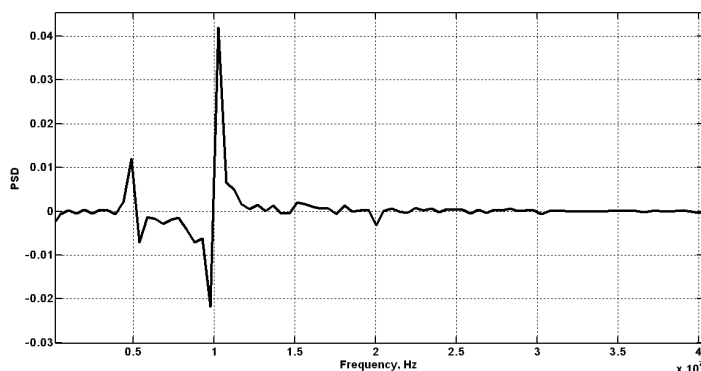


Рис. 12: Разность суммарных спектров (рис. 11) для измерений в шахте.

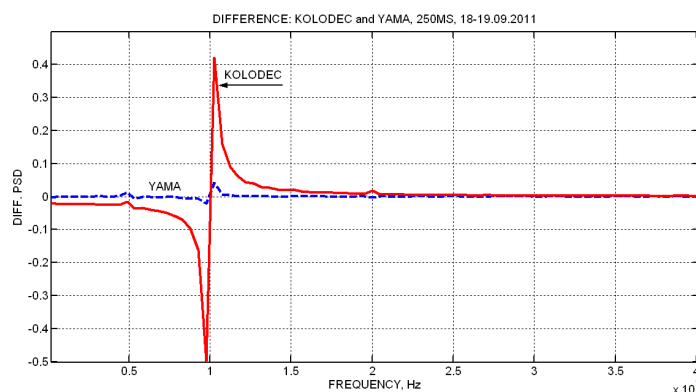


Рис. 13: Разности суммарных спектров для серии измерений в колодце (сплошная) и в шахте (пунктир).

## 4 Выводы

Изменение темпа хода кварцевых часов – используемого в эксперименте кварцевого генератора, должно сопровождаться изменением его резонансной частоты, что должно проявлять себя как появление сдвига между суммарными спектрами.

На рис. 14 показан результат численного моделирования формы разностного спектра, для случая, когда разность между суммарными спектрами заключается только в наличии частотного сдвига. Как можно видеть из рис. 14, форма разностного сигнала в этом случае хорошо соответствует результатам, приведенным на рис. 10 и рис. 12. Это обстоятельство говорит в пользу того, что в эксперименте был зарегистрирован именно частотный сдвиг между разностными спектрами. Изменения разностного спектра, обусловленные другими причинами, помимо частотного сдвига, анализируются в [14], где показано, что в этом случае форма разностного спектра будет кардинальным образом отличаться от приведенного на рис. 14. В силу, отмеченной «узнаваемости» частотного сдвига мы можем утверждать, что полученные в эксперименте разностные спектры связаны именно с изменением частоты кварцевого генератора в опыте по отношению к контролю.

Полученный результат, с одной стороны, совпадает с ожидаемым эффектом проявления гиперболических полей, а с другой стороны требует дальнейшего исследования для исключения иных типов влияния внешних факторов на частоту кварцевого генератора. Необходимо отметить, что наиболее сильным из возможных внешних воздействий являются акустическое. Но, с учетом того, что скорость распространения Н-поля полагается близкой к скорости света, момент начала акустического воздействия будет сильно запаздывать по отношению к моменту воздействия гиперболического поля на кварцевый гене-

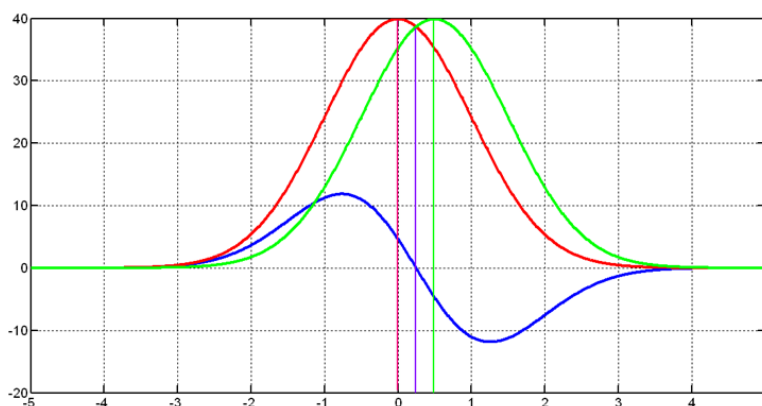


Рис. 14: Вид разностного спектра в случае, если присутствует частотный сдвиг между суммарными спектрами.

ратор. Оценки показывают, что для типичных скоростей распространения акустического воздействия в воздухе и в почве оно может сказаться на форме разностного спектра только для генератора, установленного в непосредственной близости от наковальни. В случае установки генератора в измерительной шахте акустическое воздействие начнет оказывать свое влияние на кварцевый генератор и регистрирующую аппаратуру уже после того, как будет записан 2-х микросекундный временной ряд в окрестности момента удара. Т.е., даже в случае если это воздействие оказывает влияние на сигнал КГ, оно произойдет уже после того, как будет сделана соответствующая регистрация и никак не скажется на форме разностного спектра. В этом случае измерения выполненные в шахте можно считать полностью независимыми от этого типа наводок. Наличие в этом случае эффекта, рис. 12, является дополнительным веским свидетельством в пользу того, что полученные в эксперименте результаты не являются результатом внешних акустических наводок. Влияние электромагнитного и гравитационно-волнового воздействий на частоту генератора проанализированы в [14], где показано, что данные воздействия на много порядков слабее зарегистрированных и, к тому же, должны приводить к виду разностного спектра отличному от зарегистрированного в эксперименте.

Суммируя, можно отметить, что полученные экспериментальные результаты свидетельствуют в пользу того, что в эксперименте обнаружено некоторое воздействие на частоту используемого кварцевого генератора, которое, как отмечено выше не обусловлено генерацией в момент удара акустического, электромагнитного или гравитационно-волнового воздействий. Данное воздействие приводит к эффекту смещения резонансной частоты кварцевого генератора и, в принципе, может быть обусловлено генерацией в момент удара гиперболического поля. Данный вывод является предварительным. Необходимы, как дальнейшие эксперименты, по изучению обнаруженного воздействия, так и более углубленный теоретический анализ механизмов воздействия на частоту кварцевого генератора как искомым гиперболических полей так и известных науке взаимодействий, механизмы действия которых могут отличаться от проанализированных к настоящему времени.

## Литература

- [1] Павлов Д.Г. Обобщение аксиом скалярного произведения. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (1), 2004 с. 5–19.
- [2] Павлов Д.Г. Хронометрия трехмерного времени. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (1), 2004 с. 20–32.
- [3] Павлов Д.Г. Четырехмерное время. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*,

- 1 (1), 2004 с. 33–42.
- [4] Гарасько Г.И. Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (1), 2004 с. 75–88.
- [5] Лебедев С.В. Свойства пространств связанных с коммутативно-ассоциативными алгебрами  $N_3$  и  $N_4$  // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (1), 2004 с. 68–74.
- [6] Сипаров С.В. Канонические уравнения Гамильтона и метрика Бервальда-Моора. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (4), 2005, с. 51–56.
- [7] Зарипов Р.Г. Отношение одновременности в финслеровом пространстве-времени. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (5), 2006, с. 27–46.
- [8] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., Тетру, 2009.
- [9] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Конформные калибровки геометрии Бервальда-Моора и индуцированные ими нелинейные симметрии. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (10), 2008 с. 3–14.
- [10] Павлов Д.Г. Гиперболический аналог электромагнитного поля. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (13), 2010 с. 3–15.
- [11] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (13), 2010, с. 78–127.
- [12] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Аналитические, дифференциально-геометрические и алгебраические свойства гладких функций поличисловой переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 16, 2011.
- [13] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (14), т. 7, 2010, с.11–37.
- [14] Кокарев С.С. Теоретические оценки экспериментального эффекта сдвига спектра мощности сигнала кварцевого генератора в окрестности нестационарных процессов // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (17), т. 9, 2012, с.176–192.

## EXPLORING RESEARCHES ON THE SPACE-TIME EFFECTS OF HYPERBOLIC FIELDS. PRELIMINARY RESULTS

D.G. Pavlov<sup>1</sup>, M.S. Panchelyuga<sup>1,2</sup>, V.A. Panchelyuga<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fryazino, Russia*

<sup>2</sup> *Institute of Theoretical and Experimental Biophysics of the Russian Academy of Sciences,  
Pushchino, Russia*

panvic333@yahoo.com

The paper presents preliminary results of experiments designed to search for hyperbolic or H-fields, which, according to the theoretical representations developed in [1–13], should lead to a local modification of the flow of time. As a generator of the H-field, it is used a process of mechanical strike and as a detector, a highly stable quartz generator. The result of the influence of the H-field on the quartz generator has to be a modification of its oscillation parameters. In the experiment, it is discovered a shift of the power spectrum of oscillation of the quartz generator in the moment of the strike, in comparison with the spectrum in control, obtained under the same conditions, but without the strike. Keywords: Finsler geometry, Berwald-Moor metric, hyperbolic fields, quartz generator.

**Key Words:** Finsler geometry, Berwald-Moor metric, hyperbolic fields, quartz generator.

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ЭФФЕКТА СДВИГА СПЕКТРА МОЩНОСТИ СИГНАЛА КВАРЦЕВОГО ГЕНЕРАТОРА В ОКРЕСТНОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

С.С. Кокарев

*НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия  
Российский научно-образовательный центр “Логос”, Ярославль, Россия*

logos-center@mail.ru

Статья представляет упрощенные оценки экспериментально обнаруженного эффекта сдвига параметров спектра мощности кварцевого генератора, работающего вблизи нестационарного физического процесса (механического удара). Разработана общая методика расчета и анализа сдвигов параметров спектра мощности гауссовой формы. На основе упрощенных физических моделей удара и кварцевого генератора произведены оценки эффекта посредством акустического, электромагнитного и гравитационного механизмов влияния удара на кварцевую пластинку. Показано, что ни один из рассмотренных механизмов не может обеспечить наблюдаемый порядок относительного сдвига параметров ( $10^{-3} - 10^{-4}$ ).

**Ключевые слова:** кварцевый генератор, спектр мощности, параметр затухания, электромагнитный импульс, акустический импульс.

## 1 Введение

Физика нестационарных процессов представляет собой особую область исследований, идеи и методы которой объединяются в общее сквозное направление, проходящее практически через все разделы физики. Специфическими особенностями нестационарных процессов является неравновесность, относительно малые времена их протекания, сложный ступенчатый характер их механизмов и, как правило, экстремальный характер условий, сопровождающих эти процессы. Обычно нестационарные процессы принято рассматривать как переходные между стационарными процессами или даже статическими состояниями равновесия физических систем. При этом переходные процессы обладают характерными временами релаксации, которые, как правило, по обычным меркам лабораторных экспериментов малы. По этой причине, а также ввиду чисто технических трудностей детектирования быстроменяющихся и сильнолокализованных характеристик нестационарных процессов, их исследование остается “в тени” более детальных и обширных исследований стационарных или равновесных состояний соответствующих физических систем. Между тем, имеются довольно веские основания ожидать, что именно нестационарные процессы могут послужить основой для обнаружения новых, еще неизвестных закономерностей как прикладного так и фундаментального значения [1–3].

1. Идея о связи стрелы времени и второго начала термодинамики не нова и высказывалась разными авторами в различных контекстах [4–6]. В рамках такого подхода нестационарные процессы представляют собой естественный инструмент для изучения природы физического времени.
2. Практически каждый раздел физики содержит свою характерную систему уравнений, которая имеет статический предел. Именно этот предел (стационарные потенциальные силовые поля, электро и магнитостатика, статические задачи теории упругости, равновесная термодинамика и статфизика и т.д.) в силу упомянутых выше причин является наиболее изученным, в то время как их нестационарные обобщения имеют существенно



более бедные экспериментальные основания. В связи с этим, исследования в области нестационарных процессов необходимы для расширения экспериментального базиса уже устоявшихся физических теорий.

3. Нестационарные процессы часто связаны с интересными и относительно малоисследованными явлениями, иллюстрирующими глубокие математические идеи, лежащие в основе описания физической реальности на современном уровне ее понимания (неустойчивости и катастрофы, топологическая перестройка, хаос и аттракторы, сложные системы, самоорганизация, цепочки обратных связей и т.д.).
4. Нестационарные процессы часто связаны с импульсным (взрывообразным) выделением или поглощением различных видов энергии. С прикладной точки зрения задачей первостепенной важности является управление временами релаксации подобных процессов (проблема управляемого термоядерного синтеза).
5. Ввиду существования фундаментальной и неустраняемой нестационарности — глобального расширения вселенной в космологических масштабах, правомерно рассмотреть ситуацию, когда нестационарность является ключевым фундаментальным свойством вселенной, а стационарность и равновесие нужно рассматривать лишь как некоторое приближение к этой ситуации (на сегодняшний день пока еще доминирует противоположная точка зрения). В таком контексте, нестационарные процессы могут послужить ключом к новой физике с новыми уравнениями и фундаментальными константами, связанными с нестационарностью.

Настоящая статья посвящена теоретическим оценкам экспериментально обнаруженного эффекта деформации спектральной функции кварцевого генератора под действием механического нестационарного процесса — падения и удара стальной болванки [14]. Эксперимент проводился в рамках проекта “Экспериментальное исследование анизотропии пространства-времени, ориентированное на практические приложения”, инициированного научно-исследовательским институтом гиперкомплексных систем в геометрии и физике и группой частных инвесторов.

Суть эксперимента заключалась в следующем. С помощью специально оборудованной вышки высотой 12 м, тяжелый груз поднимается на заданную высоту, затем автоматически освобождается и скользит вниз вдоль стальных салазок, ударяясь о стальную накопальню, расположенную на бетонном полу специального колодца. На небольшом расстоянии от колодца находится шахта с измерительной аппаратурой, основными регистрирующими элементами которой являются высокостабильные кварцевые генераторы с двойным термостатированием ГК-216-ТС, которые в штатном режиме работы выдают синусоидальный сигнал с относительной вариацией частоты  $10^{-10}$ – $10^{-11}$  на промежутке времени измерения (2-4 часа). Для минимизации влияния систематических изменений окружающей среды и усреднения действия случайных факторов в эксперименте производилась многократная последовательная запись сигнала генератора на протяжении удара и без удара (контрольная запись, пара измерений “запись удара — контроль” занимает примерно 5 минут). Далее, с помощью компьютерной программы производилось усреднение записей удара и контрольных записей по отдельности, вычислялись спектры мощности сигнала удара и контрольного сигнала и результаты вычитались. Один из результатов измерений и обработки приведены на рис. 1-2.

Теоретические соображения, послужившие мотивацией для проведения описываемого эксперимента, связаны с разработкой поличисловой теории поля и ее следствий [7–10]. Идеи поличисловой аналитичности, лежащие в основе этой теории и представляющие собой поличисловой аналог хорошо известной комплексной аналитичности, приводят к интересной схеме объединения взаимодействий, вбирающей в себя некоторые черты теории

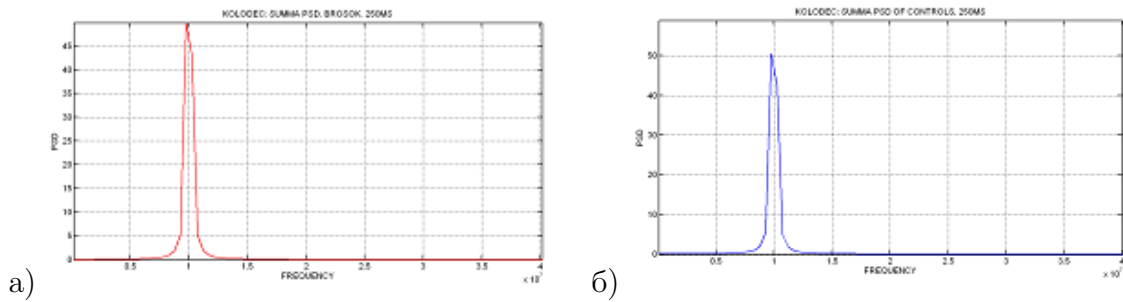


Рис. 1: Суммарные спектры мощности для измерений в колодце: а) измерения в момент удара, б) контрольные измерения.

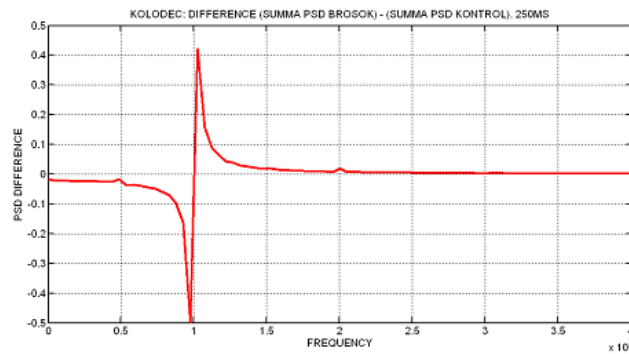


Рис. 2: Разность суммарных спектров (рис. 1) для измерений в колодце.

комплексного потенциала, единой нелинейной теории поля Ми, геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна и ряда других. Одним из общих эффектов гиперболического поля, является деформация пространственно-временных масштабов в области пространства-времени, в которой оно присутствует. Далее мы покажем, что разностный спектр мощности можно интерпретировать как результат небольшого сдвига параметров спектра мощности кварцевого генератора по действием удара. В частности, сдвиг основной частоты кварцевого генератора представляет собой величину порядка 0.01 МГц., т.е. относительный сдвиг частоты  $\Delta = \Delta\omega/\omega_0$  составляет величину порядка  $10^{-3}$ . В принципиальном отношении такого рода сдвиги могут быть обусловлены действием гипотетического гиперболического поля. Однако, прежде, чем детально исследовать эту гипотезу, мы, очевидно, должны проанализировать другие потенциальные механизмы таких сдвигов, основанные на действии хорошо известных факторов (акустических, электромагнитных, гравитационных).

Целью настоящей статьи является оценки влияния акустических колебаний (раздел 3), электромагнитного импульса (раздел 4), гравитационного излучения (раздел 5) на спектр мощности кварцевого генератора.

## 2 Упрощенная рабочая модель колебаний кварцевого генератора

Будем рассматривать кварцевый генератор как колебательную систему, которая в отсутствии возмущений характеризуется спектром мощности вида

$$G(I, \sigma, \omega_0, \omega) = |U_\omega|^2 = I e^{-(\omega - \omega_0)^2 / \sigma^2}, \quad (1)$$

где параметры  $\omega_0$ ,  $\sigma$  и  $I$  имеют смысл резонансной частоты колебаний, ширины спектральной кривой, и максимума спектра соответственно. Величина  $U_\omega$  является фурье-образом

величины  $U(t)$  выходного напряжения генератора. Эта величина связана через коэффициент усиления  $K$

$$U = KV \quad (2)$$

с напряжением  $V(t)$  на электродах кварцевой пластинки, которая включена в цепь обратной связи и работает на резонансной частоте посредством механизма пьезоэффекта.

## 2.1 Приведение спектра вынужденных колебаний

Для построения адекватной физической модели колебаний, учитывающей их вынужденный характер, рассмотрим пластинку, как простую колебательную систему с вынуждающей силой, которая описывается уравнением:

$$\ddot{x} + 2\sigma\dot{x} + \omega_0^2 x = \Phi_0 e^{i\omega_0 t}, \quad (3)$$

где величина  $\Phi_0$  имеет смысл амплитуды колебаний напряжения, подводимого к электродам кварцевой пластинки, отнесенной к ее эффективной индуктивности:  $\Phi_0 = V_0/L$ , а величина  $x(t)$  — заряд на обкладках кварцевой пластинки. Вычисляя фурье-образы левой и правой частей уравнения (3), находим:

$$x_\omega = \frac{\Phi_0 \delta(\omega - \omega_0)}{-\omega^2 + 2i\sigma\omega + \omega_0^2}. \quad (4)$$

На самом деле, напряжение на обкладках кварцевой пластины не является чисто монохроматическим, и, в силу того, что кварцевая пластинка является основным элементом автогенератора с цепью обратной связи, спектр мощности подаваемого напряжения является размытым в окрестности частоты  $\omega_0$  практически с тем же значением  $\sigma$ . Следовательно, мы должны заменить в (4) дельта-функцию на функцию:

$$G(1/\sqrt{\pi}\sigma, \sigma, \omega_0, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-(\omega - \omega_0)^2/\sigma^2}, \quad (5)$$

учитывающую размытость колебаний напряжения, которая в пределе при  $\sigma \rightarrow 0$  перейдет в дельта-функцию  $\delta(\omega - \omega_0)$ . После такой замены спектр вынужденных колебаний примет вид:

$$x_\omega = \frac{\Phi_0}{\sqrt{\pi}\sigma} \frac{e^{-(\omega - \omega_0)^2/\sigma^2}}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\sigma\omega)}, \quad (6)$$

спектр напряжения

$$V_\omega = L(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\sigma\omega)x_\omega = \frac{V_0}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-(\omega - \omega_0)^2/\sigma^2}, \quad (7)$$

а спектр мощности выходного напряжения:

$$|U_\omega|^2 = \frac{K^2 V_0^2}{\pi\sigma^2} e^{-2(\omega - \omega_0)^2/\sigma^2}. \quad (8)$$

Сравнивая (8) и (1), приходим к связи теоретических (затравочных) параметров кварцевой пластинки с наблюдаемыми характеристиками спектра (которые мы будем обозначать чертой):

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \bar{\omega}_0; \\ \sigma &= \sqrt{2}\bar{\sigma}; \\ \bar{I} &= \frac{K^2 V_0^2}{\pi\sigma^2} = \frac{K^2 V_0^2}{2\pi\bar{\sigma}^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Формулы (9) необходимы для сравнения теоретических расчетов с экспериментальными зависимостями и будут использоваться в дальнейшем при оценках.

## 2.2 Описание возмущений

Внешнее воздействие на генератор будем описывать с помощью эффективного уравнения колебаний осциллятора с трением:

$$\delta\ddot{x} + 2\sigma\delta\dot{x} + \omega_0^2\delta x = \frac{f(t)}{L}, \quad (10)$$

где  $\delta x$  — величина возмущения колебаний,  $f(t)$  — ограниченный во времени источник воздействия. Если, как уже было отмечено ранее, интерпретировать величину  $x$  как заряд на обкладках кварца, то величина  $f(t)$  будет иметь смысл возмущающего напряжения на обкладках кварца ( $L$  — индуктивность кварцевой пластинки). Переходя в (10) к фурье-компонентам, получим:

$$(-\omega^2 + 2i\sigma\omega + \omega_0^2)\delta x_\omega = \frac{f_\omega}{L}, \quad (11)$$

где

$$f_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Отсюда полный спектр мощности выходного сигнала

$$G' = K^2|V_\omega + f_\omega|^2 \approx G + K^2(V_\omega\delta f_\omega^* + V_\omega^*\delta f_\omega). \quad (12)$$

Разностный спектр мощности выходного сигнала будет даваться формулой:

$$\Delta G = G' - G = K(U_\omega\delta f_\omega^* + U_\omega^*\delta f_\omega). \quad (13)$$

С учетом зависимости (8), приходим после некоторых простых к окончательной общей форме разностного спектра:

$$\Delta G = 2K\sqrt{I}e^{-(\omega-\omega_0)^2/2\sigma^2} \operatorname{Re} f_\omega. \quad (14)$$

В дальнейшем формула (14) будет использоваться для оценок в конкретных моделях возмущений.

## 2.3 Слабая деформация простых резонансных кривых

Прежде, чем приступать к конкретным оценкам, разовьем общий подход к исследованию слабых деформаций зависимостей вида:

$$G(I, \omega_0, \sigma, \omega) = Ie^{-(\omega-\omega_0)^2/\sigma^2} = I\mathcal{G}(a, \xi). \quad (15)$$

В (15) мы также для удобства выделили безразмерную функцию

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(a, \xi) &\equiv e^{-\xi^2/a^2}, \\ \xi &= \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \\ a &= \frac{\sigma}{\omega_0}. \end{aligned} \quad (16)$$

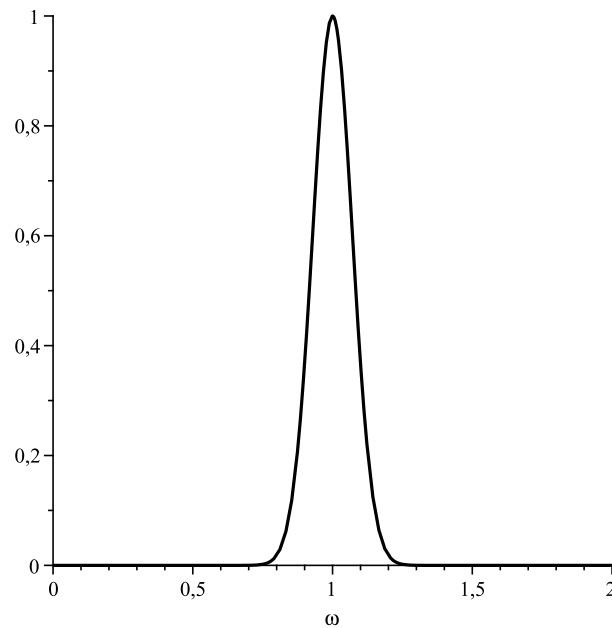


Рис. 3: Характерный вид зависимости (15),  $I = 1$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\omega_0 = 1$ .

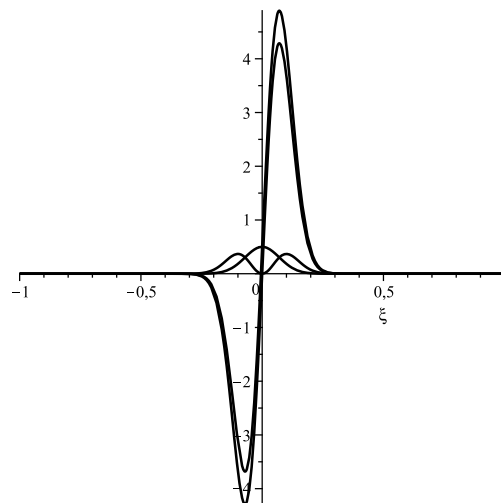


Рис. 4: Возможные характерные виды зависимости (17). Для всех трех зависимостей  $I = 1$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\omega_0 = 1$ . Для симметричного одногорбого графика  $\Delta_I = 0.5$ ,  $\Delta_\omega = \Delta_\sigma = 0$ , для симметричного двугорбого  $\Delta_I = \Delta_\omega = 0$ ,  $\Delta_\sigma = 0.5$ , для антисимметричного с амплитудой колебания около 4.3  $\Delta_\omega = 0.5$ ,  $\Delta_I = \Delta_\sigma = 0$ , и наконец для асимметричного  $\Delta_I = \Delta_\sigma = \Delta_\omega = 0.5$ .

Характерная зависимость вида (15) показана на рис. 3.

Пусть теперь мы имеем зависимость вида (15) с близкими параметрами  $I' = I + \delta I$ ,  $\omega'_0 = \omega_0 + \delta\omega_0$ ,  $\sigma' = \sigma + \delta\sigma'$ . Тогда разность  $G(I', \omega'_0, \sigma', \omega) - G(I, \omega_0, \sigma, \omega)$  можно представить в виде:

$$\Delta G(\xi) = I\mathcal{G}(a, \xi) \left( \Delta_I + \frac{2\xi}{a^2} (\Delta_\omega + \xi\Delta_\sigma) \right), \tag{17}$$

где

$$\Delta_I = \frac{\delta I}{I}; \quad \Delta_\omega = \frac{\delta\omega_0}{\omega_0}; \quad \Delta_\sigma = \frac{\delta\sigma}{\sigma} \tag{18}$$

— относительные изменения параметров зависимости (15). Характерные виды разностной зависимости (17) представлены на рис. 4.

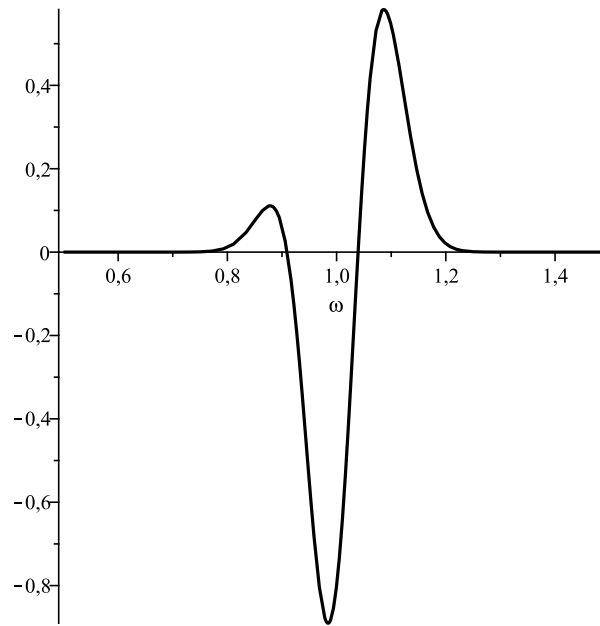


Рис. 5: Зависимость (17) при значениях параметров, взятых из (21).

Приведенные графики иллюстрируют тот факт, что разностный спектр (17) в общем случае асимметричен (не симметричен и не антисимметричен) относительно точки  $\xi = 0$   $\omega = \omega_0$ . В случае  $\Delta_\omega = 0$ , разностная кривая будет симметрична, а в случае  $\Delta_I = \Delta_\sigma = 0$  — антисимметрична. При этом, возмущения параметров оказываются связанными с особенностями формы кривой, в частности, положением максимумов и минимумов. Простой анализ обнаруживает неудобство количественного анализа возмущений по координатам максимумов и минимумов, поскольку вычисления по этим координатам приводят к кубическим уравнениям. Существенно быстрее и проще возмущения  $\Delta_I, \Delta_\omega, \Delta_\sigma$  можно вычислить, исследуя поведение функции  $\Delta G$  в нуле и его окрестности. В качестве интерпретационных приемов следующие формулы, вытекающие из (17):

$$\begin{aligned}\Delta_I &= \frac{\Delta G(0)}{I}; \\ \Delta_\omega &= \frac{a^2 \Delta G'(0)}{2I}; \\ \Delta_\sigma &= \frac{e \Delta G(a) - \Delta G(0) - a \Delta G'(0)}{2I}.\end{aligned}\tag{19}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по безразмерной переменной  $\xi$ . Эти формулы мы и будем использовать далее при интерпретации экспериментальных разностных спектров в терминах вариаций параметров интенсивности, основной частоты и ширины исходной спектральной кривой. В качестве примера проинтерпретируем в терминах деформаций  $\Delta_I, \Delta_\sigma, \Delta_\omega$  экспериментальный спектр, приведенный на рис. 2. Согласно паспортным данным  $\omega_0 = 10^7$  Гц, а согласно графикам (1) спектра мощности  $\bar{I} \approx 50 \text{ В}^2/\text{Гц}^2$ ,  $\bar{\sigma} \approx 0.8 \cdot 10^6$  Гц, стало быть  $a \sim 0.08$ . Непосредственно из графика (2) разностного спектра мощности находим:

$$\begin{aligned}\Delta G(0) &\approx -0.08 \text{ В}^2/\text{Гц}^2; \\ \Delta G'(0) &\approx 11.5 \text{ В}^2/\text{Гц}^2; \\ \Delta G(a) &\approx G(0) + a G'(0) \approx 0.84 \text{ В}^2/\text{Гц}^2.\end{aligned}\tag{20}$$

Подставляя эти данные в интерпретационные формулы (19), находим:

$$\begin{aligned}\Delta_I &\approx -1.6 \cdot 10^{-3}; \\ \Delta_\omega &\approx 7.4 \cdot 10^{-4} \\ \Delta_\sigma &\approx 1.4 \cdot 10^{-2}.\end{aligned}\quad (21)$$

На рис. 5 представлена теоретическая разностная зависимость (17) с параметрами (21).

### 3 Оценка влияния акустических колебаний

Основным фактором, потенциально способным повлиять на работу кварцевого генератора, следует считать акустические волны, которые генерирует удар болванки о наковальню. Рассмотрим модель, в которой акустический импульс, генерируемый ударом, описывается сигналом вида:

$$X(t) = X_0 e^{-\Sigma t} e^{i\Omega t} \quad (22)$$

где  $\Omega$  — основная частота акустических колебаний,  $\Sigma$  — параметр их затухания, и соответствующим спектром:

$$X_\omega = \frac{iX_0}{2\pi(\Omega - \omega + i\Sigma)}, \quad (23)$$

Величина  $X_0$  имеет смысл амплитуды колебаний поверхности в окрестности удара. Колебания почвы с амплитудой  $X_0$  и частотой  $\Omega$  индуцируют переменное поле инерции, амплитуда которого имеет порядок величины  $\Omega^2 X_0$ . Это поле создает осциллирующее во времени поле напряжений внутри кварцевой пластинки с амплитудой  $\delta\mathcal{T} \sim \mu\Omega^2 X_0/S \sim k\rho\ell\Omega^2 X_0$ , где  $\mu = k\rho\ell S$  — присоединенная масса пластинки (она меньше реальной массы из-за демпфирующих устройств, понижающих эффект тряски),  $k$  — коэффициент демпфирования,  $\ell$  — толщина пластинки,  $S$  — площадь ее поперечного сечения. Эти напряжения создают добавочные (по отношению к номинальным) переменные поля деформаций с амплитудой  $\delta u \sim \delta\mathcal{T}/E \sim k\rho\ell\Omega^2 X_0/E$ , где  $E$  — модуль Юнга кварца. Добавочные деформации индуцируют добавочное возмущающее напряжение на пластинах кварца, амплитуду которого можно оценить по формуле:

$$\delta V_0 \sim \frac{\delta u}{d} \ell \sim \frac{k\rho\ell^2\Omega^2 X_0}{Ed} \sim \frac{k\ell^2\Omega^2 X_0}{dc_{\text{КВ}}^2}, \quad (24)$$

где  $d$  — пьезомодуль кварца,  $c_{\text{КВ}}^2 = E/\rho$  — квадрат скорости звука в кварце. Таким образом, комбинируя (23) и (24), приходим к формуле:

$$f_\omega = \frac{ik\ell^2\Omega^2 X_0}{2\pi dc_{\text{КВ}}^2(\Omega - \omega + i\Sigma)} = \frac{i\delta V_0}{2\pi(\Omega - \omega + i\Sigma)}. \quad (25)$$

Вычисляя вещественную часть величины  $f_\omega$ , находим:

$$\text{Re } f_\omega = \frac{\delta V_0}{2\pi\omega_0} \frac{\alpha}{(\xi + \xi_0)^2 + \alpha^2}, \quad (26)$$

где  $\xi_0 = (\omega_0 - \Omega)/\omega_0$ ,  $\alpha = \Sigma/\omega_0$ . Подставляя это выражение в общую формулу (14), получим для акустического разностного спектра мощности следующую формулу с учетом (9):

$$\Delta G_{\text{ак}}(\xi) = \frac{\alpha K \delta V_0 \sqrt{I}}{\pi\omega_0} \mathcal{G}_{\text{ак}}(a, \alpha, \xi_0, \xi), \quad (27)$$

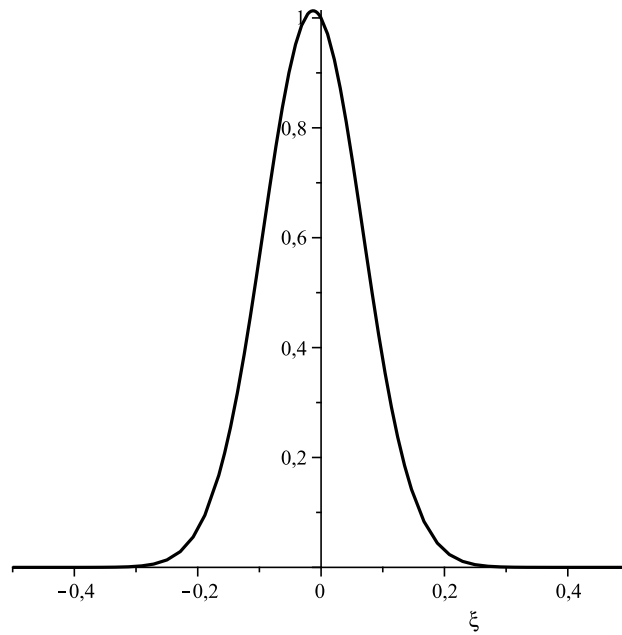


Рис. 6: Безразмерная спектральная функция (28) при значениях параметров, взятых из (29).

где мы ввели безразмерную разностную спектральную функцию акустического возмущения:

$$\mathcal{G}_{\text{ак}}(\bar{a}, \alpha, \xi_0, \xi) \equiv \frac{e^{-\xi^2/2\bar{a}^2}}{(\xi + \xi_0)^2 + \alpha^2}, \quad (28)$$

и  $\bar{a} = \bar{\sigma}/\omega_0$ .

Теперь мы можем перейти к конкретным количественным оценкам. Качественно анализируя записи акустического сигнала, можно заметить, что в нем выделяется более-менее явно низкочастотная составляющая порядка килогерца и ее ультразвуковое заполнение в разы меньшей амплитуды. При этом длительность звукового импульса составляет величину порядка 10 мс. Отсюда получаем рабочие оценки для частотных акустических параметров зависимости (27):

$$\xi_0 \approx 1, \quad \alpha \approx 10^{-5}. \quad (29)$$

Теперь мы можем построить приблизительный график безразмерной спектральной функции (28) — он представлен на рис. 6.

Приведенный график качественно отличается от экспериментального, и свидетельствует о доминировании сдвига амплитуды спектра по сравнению со сдвигами других параметров.

Для оценки амплитуды спектра примем следующие справочные [11] и оценочные данные для параметров, входящих в  $\delta V_0$ :

$$\begin{aligned} k &\sim 0.1; \\ \ell &\sim 10^{-3} \text{ м}; \\ \Omega &\sim 10^3 \text{ Гц}; \\ X_0 &\sim 10^{-3} \text{ м}; \\ d &\sim 10^{-10} \frac{\text{Кл}}{\text{Н}}. \end{aligned} \quad (30)$$



Исходя из этих оценок получаем для коэффициента перед безразмерной спектральной функцией в (27) величину порядка  $10^{-10} \text{ В}^2/\Gamma_{\text{ц}}^2$ .

Вычисляя теперь по (27) значения  $\Delta G_{\text{ак}}(0)$ ,  $\Delta G'_{\text{ак}}(0)$  и  $\Delta G_{\text{ак}}(a)$ :

$$\begin{aligned}\Delta G_{\text{ак}}(0) &\approx 10^{-10} \text{ В}^2/\Gamma_{\text{ц}}^2, \\ \Delta G'_{\text{ак}}(0) &\approx -2 \cdot 10^{-10} \text{ В}^2/\Gamma_{\text{ц}}^2, \\ \Delta G_{\text{ак}}(a) &\approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ В}^2/\Gamma_{\text{ц}}^2,\end{aligned}\tag{31}$$

и подставляя полученные значения в формулы (19), получим для акустических относительных сдвигов следующие значения:

$$\begin{aligned}\Delta_I^{\text{ак}} &\sim 2 \cdot 10^{-12}; \\ \Delta_{\omega}^{\text{ак}} &\sim -1.3 \cdot 10^{-14}; \\ \Delta_{\sigma}^{\text{ак}} &\sim 6 \cdot 10^{-13}.\end{aligned}\tag{32}$$

Эти оценки отличаются примерно на 10 порядков от экспериментальных значений (21). Мы приходим к заключению о том, что *ни вид разностного спектра акустических возмущений, ни тем более порядок величины амплитуды возмущения не соответствуют наблюдаемой в эксперименте картине.*

#### 4 Оценка электромагнитного влияния удара

Выведем теперь оценочные формулы для электромагнитного влияния удара болванки на работу кварцевого генератора. Несмотря на экранирование установки, электромагнитный импульс обладает проникающей способностью и, как мы увидим ниже, в принципе может влиять на работу кварцевого генератора, меняя его спектральную функцию.

Сначала опишем суть происходящих процессов качественно. В процессе удара стальной болванки об основание, в местах контакта болванки с основанием возникают значительные по величине и сильно нестационарные напряжения, вызывающие сильную деформацию кристаллической решетки и сдвиг ее электронной и ионной компонент относительно друг друга. Возникновение и исчезновение такого поляритонного состояния сопровождается излучением электромагнитного импульса. Его некогерентный характер приводит к равенству  $\langle \vec{E} \rangle = 0$ , однако этот импульс переносит в любой элемент телесного угла импульс и энергию. Часть этого импульса и энергии проходит сквозь экраны и достигает кварцевой пластинки. Взаимодействие электромагнитного импульса и колеблющейся пластинки сводится к кратковременной механической “встряске” кристалла кварца давлением излучения импульса, которая и вызывает деформацию спектральной функции.

Перейдем к простым модельным оценкам. Прежде всего оценим интегральную интенсивность электромагнитного импульса, порожденного ударом болванки об основание. Согласно общей теории электромагнитного излучения [12], порядок величины (ведущей) дипольной компоненты излучения дается выражением:

$$J \sim \frac{\dot{P}^2}{\varepsilon_0 c^3}.\tag{33}$$

В (33) величина  $P$  — это механически индуцируемый дипольный момент в процессе удара. Для оценки величины  $P$  примем, что в процессе удара электронная (более подвижная) компонента электрон-ионной кристаллической решетки приобретает скорость  $v$ , с которой

болванка налетает на опору непосредственно перед ударом. Тогда закон сохранения энергии дает:

$$m_e n_e V v^2 \sim \frac{Q^2}{C}, \quad (34)$$

где  $Q \sim en_e S l$  — индуцируемый ударом поляризационный заряд,  $n_e$  — концентрация электронов,  $S$  — площадь сечения болванки,  $l$  — величина смещения электронной и ионной компонент друг относительно друга,  $C \sim \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) S/d$  — емкость болванки,  $d$  — ее толщина (размер в направлении, перпендикулярном плоскости контакта). Из (34) с учетом соотношения  $v^2 \sim gh$ , ( $h$  — высота падения болванки) получаем:

$$P \sim Ql \sim \frac{\varepsilon_0 \varepsilon m_e g h S}{e}. \quad (35)$$

Процесс разделения компонент металлической плазмы при ударе приводит к ленгмюровским колебаниям, в процессе которых часть энергии поляризации высвечивается в виде излучения. Частота ленгмюровских колебаний  $\omega_L \sim \sqrt{n_e e^2 / \varepsilon_0 m_e}$ , каждое дифференцирование по времени в (33) сводится к умножению на  $\omega_L$ , таким образом окончательно для интенсивности дипольного излучения получаем оценку:

$$J \sim \frac{(\varepsilon_L e n_e)^2 (g h S)^2}{\varepsilon_0 c^3}. \quad (36)$$

Излучаемая в процессе удара за время  $\Delta t$  энергия  $I \Delta t$  распространяется наружу в виде сферического слоя толщиной  $c \Delta t$ . Для оценки плотности энергии  $\epsilon$  в импульсе излучения в месте расположения генератора положим

$$J \Delta t \sim \epsilon \cdot 4\pi r^2 c \Delta t, \quad (37)$$

откуда

$$\epsilon \sim 10^{-1} \frac{J}{r^2 c}, \quad (38)$$

где  $r$  — расстояние от места удара до генератора. Таким образом, импульс излучения попадая на кварцевую пластинку, создает на ней импульс ускорения:

$$\varphi \sim \frac{F}{M} \sim \frac{p \Delta S}{M} \sim \frac{q \epsilon \Delta S}{M}, \quad (39)$$

где  $M$  — масса кварцевой пластинки,  $\Delta S$  — ее площадь,  $q$  — интегральный коэффициент поглощения электромагнитной энергии импульса на пути его распространения от места удара до генератора. Окончательно, после подстановки в (39) (36) и (38), получим:

$$\varphi \sim 10^{-1} \frac{q}{\varepsilon_0 c^4 r^2} \cdot \frac{\Delta S}{M} \cdot (\varepsilon_L e n_e)^2 \cdot (g h S)^2. \quad (40)$$

Повторяя теперь дословно оценочные выкладки предыдущего раздела, связывающие поле ускорения с амплитудой возмущающего напряжения, получим опираясь на формулу (24):

$$\delta V_0 \sim \frac{k \ell^2}{d c_{\text{KB}}^2} \varphi \sim 10^{-1} \frac{q}{\varepsilon_0 c^4 r^2} \cdot \frac{k \ell}{\rho_{\text{KB}} c_{\text{KB}}^2 d} \cdot (\varepsilon_L e n_e)^2 \cdot (g h S)^2. \quad (41)$$

В оценке (41) первый множитель относится к процессу излучения и распространения электромагнитного излучения, второй — к структуре кварцевой пластинки, третий — к электронной структуре болванки, четвертый — к механическим параметрам самого эксперимента.

Предположим теперь, что электромагнитное возмущение, действующее на кварцевую пластинку, в грубом приближении имеет прямоугольную временную зависимость, т.е. описывается функцией вида:

$$f(t) = \delta V(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \delta V_0, & 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & t > \tau, \end{cases} \quad (42)$$

где  $\tau$  — время (простого одиночного) соударения. Фурье образ зависимости (42) имеет вид:

$$f_\omega = \frac{i\delta V_0}{2\pi\omega} (e^{-i\omega\tau} - 1). \quad (43)$$

Его вещественная часть:

$$\text{Re } f_\omega = \frac{\delta V_0}{2\pi\omega} \sin(\omega\tau). \quad (44)$$

Подставляя это выражение в общую формулу (14), получаем:

$$\Delta G_{\text{эм}}(\xi) \approx \frac{K\sqrt{I}\delta V_0}{\pi\omega_0} \mathcal{G}_{\text{эм}}(\bar{a}, \beta, \xi), \quad (45)$$

где мы ввели безразмерную электромагнитную функцию разностной спектральной мощности

$$\mathcal{G}_{\text{эм}}(\bar{a}, \beta, \xi) = e^{-\xi^2/2\bar{a}^2} \frac{\sin(\beta(\xi + 1))}{\xi + 1}, \quad (46)$$

и  $\beta = \omega_0\tau$ .

Перейдём к конкретным количественным оценкам. Экспериментальные данные дают для времени удара величину  $\sim 1/\Sigma \sim 10$  мс, которое представляет собой характерное время затухания акустического импульса и включает себя эффекты дребезжания болванки при ее сложном (несимметричном) ударе о наковальню. В отличие от этого времени, величина времени  $\tau$ , которое определяет электромагнитный импульс, характеризуется временем одиночного простого соударения, величина которого по простым оценкам контактной задачи теории упругости [13] составляет величину<sup>1</sup> порядка  $10^{-1}$  мс, что не противоречит имеющимся экспериментальным данным. Таким образом, для величины  $\beta$  получаем оценку:  $\beta \sim 10^3$ . Теперь мы можем построить приблизительный график безразмерной спектральной функции (46) — он представлен на рис. 7.

Приведенный график кардинальным образом отличается от экспериментального — его вообще невозможно интерпретировать в терминах разности двух близких пиков! Более того, если учесть то обстоятельство, что экспериментальный спектр был получен путем усреднения по различным ударам, в которых наблюдался разброс времен, то эффект вообще должен практически исчезнуть ввиду случайности фаз складывающихся одиночных

<sup>1</sup>Оценка (задача 1 к параграфу 9 в [13]) для нашей ситуации имеет вид:

$$\tau \sim \left( \frac{m^2}{(gh)^{1/2} RE^2} \right)^{1/5},$$

где  $m$  — масса болванки,  $h$  — высота ее падения,  $E$  — модуль Юнга стали,  $R$  — радиус болванки.

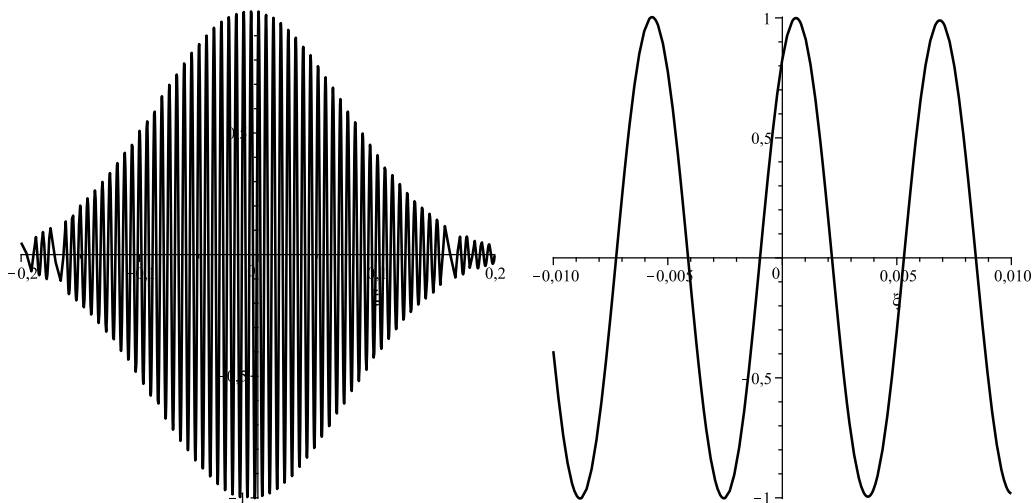


Рис. 7: Безразмерная спектральная функция (46) при значениях параметров  $\bar{a} = 0.08$ ,  $\beta \sim 10^3$  (справа увеличенный фрагмент в окрестности  $\xi = 0$ .)

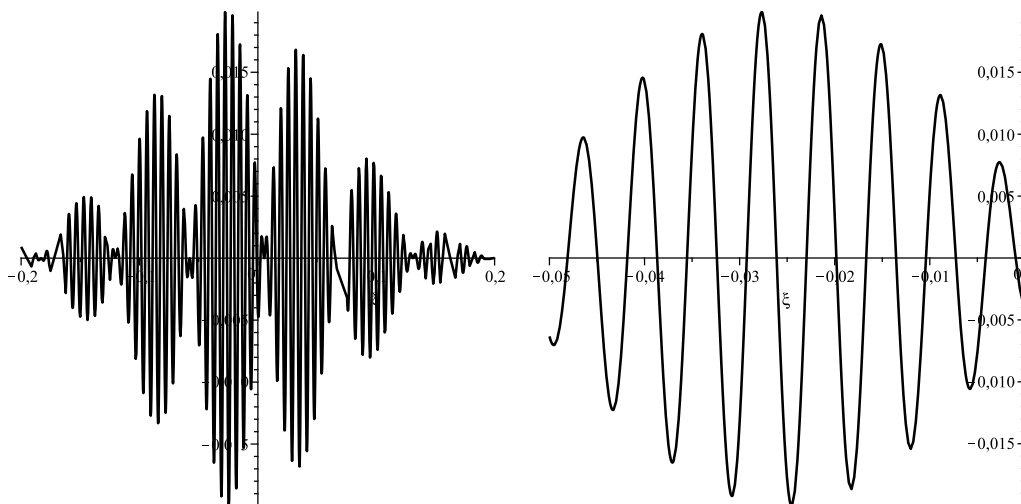


Рис. 8: Усредненная безразмерная спектральная функция (47) при значениях параметров  $\bar{a} = 0.08$ ,  $\beta \sim 10^3$ ,  $\Delta\beta \sim 10^2$  (справа увеличенный фрагмент в окрестности максимума).

ударов. Примем для оценки, что времена ударов были распределены равномерно в интервале  $[\tau_0 - \Delta\tau/2; \tau_0 + \Delta\tau/2]$ , с  $\Delta\tau = \tau_0/10$ . Тогда усреднение спектра (45) по  $\tau$  сводится к интегрированию по отрезку  $[\tau_0 - \Delta\tau/2; \tau_0 + \Delta\tau/2]$  функции  $\sin(\beta(\xi + 1))$  и делению на  $\Delta\tau$ . Если проделать такое усреднение, то для усредненного по временам удара безразмерного разностного спектра электромагнитных возмущений получится следующая формула:

$$\langle \mathcal{G}_{\text{эм}} \rangle = \mathcal{G}_{\text{эм}} \cdot \frac{\sin(\Delta\beta(\xi + 1)/2)}{\Delta\beta(\xi + 1)/2}, \quad (47)$$

где  $\Delta\beta = \Delta\tau\omega_0 \sim 10^2$ . График функции (47) представлен на рис. 8.

Сравнение амплитуд правых графиков 7 и 8 наглядно иллюстрирует роль усреднения — амплитуда разностного спектра после усреднения уменьшилась примерно в 50 раз.

Тем не менее, оценим эту амплитуду, опираясь на справочные [11] и оценочные данные

для параметров, входящих в  $\delta V_0$  в (45) и следующие:

$$\begin{aligned}
 r &\sim 1\text{м}, \\
 \rho_{\text{кв}} &\sim 10^3\text{кг/м}^3, \\
 n_e &\sim 10^{28}\text{м}^{-3}, \\
 S &\sim 10^{-1}\text{м}^2, \\
 \Delta S &\sim 10^{-4}\text{м}^{-2}, \\
 gh &\sim 10\text{м}^2\text{с}^2,
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

$$\varepsilon_L \sim 1, \quad q \sim 10^{-4}.$$

Исходя из этих оценок получаем для амплитуды разностной спектральной функции в (45) величину не превышающую  $10^{-18} - 10^{-20} \text{ В}^2/\text{Гц}^2$ . Эта оценка отличается от амплитуды разностного экспериментального спектра мощности примерно на 20 порядков. Таким образом, *форма разностного спектра электромагнитных возмущений и порядок величины его амплитуды абсолютно не соответствуют наблюдаемой в эксперименте картине.*

## 5 Оценка гравитационно-волнового возмущения

В этом разделе мы грубо оценим порядок величины вклада гравитационного излучения в сдвиг частоты кварцевого генератора. За основу примем теорию излучения слабых гравитационных волн в ОТО [12]. В рамках этой теории для волновых возмущений метрического фона получается следующее оценочное выражение:

$$h \sim \frac{\kappa}{r} \ddot{D}, \tag{49}$$

где  $\kappa$  — эйнштейновская гравитационная постоянная, равная  $8\pi G/c^4$ ,  $r$  — расстояния от системы, излучающей волны, до точки их наблюдения,  $\ddot{D}$  — характерное значение второй производной квадрупольного момента гравитационно излучающей системы. Поскольку основная часть гравитационного излучения генерируется на протяжении времени удара, а удар болванки о наковальню можно рассматривать грубо как колебательный процесс с периодом  $\tau$  и амплитудой  $\delta$  (амплитуда деформации) в месте контакта, то величину  $\ddot{D}$  можно оценить как  $M\delta^2/\tau^2$ , где  $M$  — масса болванки. Таким образом, для амплитуды возмущения метрики получаем следующее выражение:

$$h \sim \frac{\kappa}{r} M \frac{\delta^2}{\tau^2}. \tag{50}$$

Возмущения метрики возмущают масштабы длин и промежутков времени, при этом в силу малости возмущений и простой связи частоты с эталонами времени, порядок величины возмущения  $h$  совпадает с порядком  $\Delta_{\text{грав}}$ . Подставляя числовые значения, получаем следующую оценку:

$$\Delta_{\text{грав}} \sim 10^{-44}, \tag{51}$$

что на много порядков меньше наблюдаемой величины  $\Delta$ . Можно с полной определенностью заключить, что *гравитационное излучение не имеет отношения к рассматриваемому эффекту.*

## 6 Заключение

Мы разработали методику интерпретации разностных выходных спектров мощности кварцевого генератора (раздел 2.3) в терминах деформаций параметров гауссового пика, методику упрощенного, но самосогласованного описания работы схемы автоколебаний (раздел 2.1) и методику учета его возмущений (формула (14)). На их основе мы произвели интерпретацию одного из характерных разностных спектров, полученного в эксперименте. Резюмируем полученные результаты.

1. Величины относительных деформаций параметров гауссового спектра мощности, полученные из экспериментальных данных, интерпретированных в рамках развитой методики, имеют следующие (ориентировочные) значения:

$$\begin{aligned}\Delta_I &\approx -1.6 \cdot 10^{-3}; \\ \Delta_\omega &\approx 7.4 \cdot 10^{-4} \\ \Delta_\sigma &\approx 1.4 \cdot 10^{-2}.\end{aligned}\tag{52}$$

Их погрешность определяется погрешностью вычислений спектра на компьютере и (главным образом) погрешностью определения реперных значений разностного спектра по графику и в целом составляет величину порядка 10 – 20 %. Эту погрешность можно уменьшить на порядок, применяя более аккуратные и последовательные методы обработки экспериментальных спектров (метод наименьших квадратов).

2. Разностный спектр мощности акустических возмущений действительно имеет доминирующий порядок величины по амплитуде среди спектров других факторов (гравитационного и электромагнитного), но его форма (рис. 6) отличается от экспериментальной (существенно занижен вклад деформации частоты), а порядок величины амплитуды отличается примерно на 10 порядков от экспериментального значения.
3. Разностный спектр мощности электромагнитного возмущения следует рассматривать как второй по порядку величины по амплитуде среди спектров других факторов, но его форма (рис. 7) кардинальным образом отличается от экспериментальной (ее вообще невозможно интерпретировать как деформацию параметров гауссовского пика). Порядок величины амплитуды отличается примерно на 20 порядков от экспериментального значения, при этом отличие будет только усиливаться с учетом усреднения спектра по временам удара.
4. Гравитационно-волновой эффект сдвига частоты ОТО, связанный с деформациями пространственно-временных масштабов, отличается примерно на 40 порядков от экспериментальных значений сдвигов параметров.

Таким образом, опираясь на полученные оценки, можно с уверенностью утверждать, что *ни один из рассмотренных механизмов — акустический, электромагнитный и гравитационно-волновой — не способен в полной мере объяснить природу деформации спектра мощности сигнала кварцевого генератора — ни в количественном отношении, ни в качественном.*

Этот вывод, разумеется, требует дополнительной тщательной проверки как в методике эксперимента, так и в его теоретической интерпретации. Уточнение оценочных значений параметров (если, конечно, ошибки не имеют принципиального характера) скорее всего не смогут скорректировать теоретические предсказания на десятки порядков, а методика экспериментов уже отработана на статистически значимом количестве одиночных экспериментов, хотя причины имеющихся флуктуаций измеряемых величин еще предстоит выяснить. На текущий момент наш анализ можно рассматривать как предварительное

обнадеживающее свидетельство в пользу наличия новых физических эффектов, связанных с нестационарными физическими процессами, необъяснимых в рамках существующих физических теорий.

## Литература

- [1] Шаповалов С.Н., Горшков Э.С., Борисова Т.Д., Соколовский В.В., Трошичев О.А. Случайные флуктуации в показаниях измерительных приборов: эффекты космофизического влияния? // *Биофизика*, т. 46, вып. 5, 2001, с. 819–822.
- [2] Клочек Н.В., Паламарчук Л.Э., Никонова М.В. Предварительные результаты исследований воздействия космофизического излучения неэлектромагнитной природы на физические и биологические системы. // *Биофизика*, 40(4), 1995, с. 889–896.
- [3] Морозов А.Н. Влияние пространственной анизотропии вселенной на флуктуации подвижности ионов. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(10), т. 5, 2008, с. 193–200.
- [4] Пенроуз Р. Путь к реальности или законы, управляющие вселенной. РХД, Москва-Ижевск, 2007.
- [5] Asadov V.V., Kechkin O.V. Arrow of time in generalized quantum theory and its classical limit dynamics, arXiv:hep-th/0608148
- [6] Кокарев С.С. Близкодействие против дальнего действия - окончательна ли победа? Сб. трудов РНОЦ Логос, Ярославль, 2007.
- [7] Павлов Д.Г., Кокарев С.С.  $h$ -голоморфные функции двойной переменной и их приложения. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(13), т. 7, 2010, с. 44–77.
- [8] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(13), т. 7, 2010, с. 78–127.
- [9] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(14), т. 7, 2010, с. 11–37.
- [10] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Аналитические, дифференциально-геометрические и алгебраические свойства гладких функций поличисловой переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(16), т. 8, 2011, с. 4–53.
- [11] Григорьева И.С., Мейзликхана Е.З. Физические величины (справочник). М., Энергоиздат, 1991.
- [12] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., Наука, 1973.
- [13] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М., Наука, 1987.
- [14] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. Поисковые исследования пространственно-временного векторного поля. Предварительные результаты. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(17), т. 9, с. 162–175.

# THEORETICAL ESTIMATION OF EXPERIMENTAL EFFECT OF POWER SPECTRUM SHIFT OF QUARTZ GENERATOR SIGNAL IN VICINITY OF NONSTATIONAR PROCESSES

**S.S. Kokarev**

*Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fрязино, Russia  
RSEC Logos, Yaroslavl, Russia*

logos-center@mail.ru

The paper presents rough theoretical estimations of experimentally observed shift of power spectrum of quartz generator parameters, influenced by nonstationar physical process (mechanical strike). General method of calculation and analysis of shifts of Gaussian signal is worked out. Based on simplified physical models of mechanical strike and quartz generator, estimations of the effect produced by acoustic, electromagnetic and gravitational mechanisms are presented. It is shown, that no one of the above mentioned mechanisms can't produce experimentally observed value of relative shifts ( $10^{-3} - 10^{-4}$ ).

**Key Words:** quartz generator, power spectrum, signal attenuation parameter, electromagnetic pulse, acoustic pulse.



## ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных алгебр в физике, е) Экспериментальные исследования возможной анизотропии пространства-времени и иных проявлений финслеровой геометрии.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.
2. Объем статьи не должен превышать 1 печ. листа (24 усл. маш. стр.)
3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате  $\text{\LaTeX}$  (версия  $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ , для набора формул используется  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$ ) и файл статьи в формате PostScript или PDF.
4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).
5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок), ключевые слова. Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.
6. Название статьи, аннотация, ключевые слова, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.
7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.
8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи.
9. Публикация бесплатна для всех авторов.

## INFORMATION FOR AUTHORS

In the journal published are the original articles and reviews of the Russian and foreign authors on the following topics: a) Hypercomplex numbers; b) Geometries connected with hypercomplex numbers; c) Finsler spaces; d) Fractals based on hypercomplex numbers; e) Application of the hypercomplex algebras in physics; f) Experimental investigation of the possible space-time anisotropy and other manifestations of Finsler geometry.

Editorial staff informs authors of the articles about the journal rules:

1. Articles are published either in Russian or in English.
2. The size of the article should not exceed that of a printed sheet (24 conventional typewritten pages)
3. Author makes his article file available for the editorial board in  $\text{\LaTeX}$  format ( $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$  version,  $\text{\AMS-L\TeX}$  is used for formulas) as well as in either PostScript or PDF format.
4. Accepted picture formats are as follows: TIFF, GIF, PNG for bit images (encapsulation in EPS should be possible); EPS, PDF, TEX for vector images. Each image should be represented as a separate file. Colour scheme may be either black and white or grey (8 bit).
5. Article should contain an abstract (no lengthy formulas or references) and keywords.
6. Title of the article, abstract, keywords, names and affiliation of the authors should be available both in Russian and in English.
7. Author should give his or her e-mail and telephone number to make operative communication possible. If the article is sent back to the author for him or her to improve it, it doesn't mean that the article is accepted. 8. Any deviation from the given rules makes the chance of the publication lower.
9. Publication is free for all authors.



**ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА  
В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ**

Научный журнал. Основан в 2003 г.

№ 1 (17), том 9, 2012

Главный редактор Павлов Д. Г.

Зам. главного редактора Панчелюга В. А.

Технический секретарь Панчелюга М.С.

[www.polynumbers.ru](http://www.polynumbers.ru)

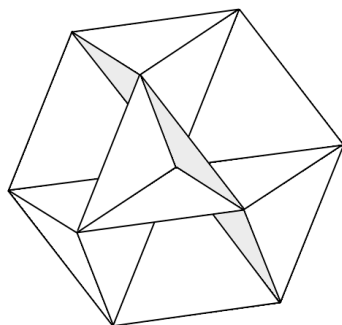
[hypercomplex@mail.ru](mailto:hypercomplex@mail.ru)

Свидетельство о регистрации

ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.

ISSN 1814-3946

© НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике,  
Российское гиперкомплексное общество, ОАО "МОЗЭТ"



Типографские данные