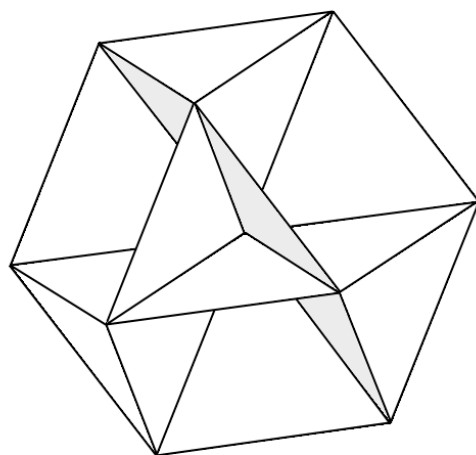


# ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

№ 1 (13), том 7, 2010

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 2003 г.



[www.polynumbers.ru](http://www.polynumbers.ru)

[hypercomplex@mail.ru](mailto:hypercomplex@mail.ru)

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Павлов Д. Г.</b> Гиперболический аналог электромагнитного поля .....	3
<b>Павлов Д. Г., Гарасько Г.И.</b> Двойные числа .....	16
<b>Павлов Д. Г., Гарасько Г.И.</b> Аналог формулы Коши в пространствах невырожденных поличисел .....	26
<b>Гарасько Г.И.</b> Тождественно разрешимые финслеровы геометрии .....	31
<b>Гарасько Г.И.</b> Реальная часть невырожденного поличисла и специальная линейная форма .....	40
<b>Павлов Д.Г., Кокарев С.С.</b> $h$ -голоморфные функции двойной переменной и их приложения .....	44
<b>Павлов Д.Г., Кокарев С.С.</b> Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной .....	78
<b>Людковский С.В.</b> Скрученные когомологии групп оберток над кватернионами и октонионами .....	128
<b>Vargas Jose G.</b> Differential Forms: from Clifford, through Cartan to Kähler .....	165
<b>Дискуссия</b>	
<b>Типунин И., Топоренский А.</b> К вопросу о множествах Жулия и Мандельброта на плоскости двойных чисел .....	182
<b>Письма в ГЧГФ</b>	
<b>Морнев О. А.</b> Поправка к одному утверждению статьи "Идемпотенты и нильпотенты в клиффордовой алгебре евклидова 3-пространства и их связь с физикой" .....	186
Информация для авторов .....	188

# ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Д.Г. Павлов

НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

geom2004@mail.ru

На основании аналогии между аналитическими функциями от комплексных чисел и двумерными электро- и магнитостатическими полями выдвигается предположение о наличии в реальности подобного же соответствия между  $h$ -аналитическими функциями двойной переменной и некой иной парой двумерных физических полей, одно из которых является гиперболическим источником, а второе — гиперболическим вихревым полем. В отличие от электро- и магнитостатических полей данная пара реализуется не в пространстве, а в пространстве-времени, в связи с чем источниками первого поля являются события, а силовые линии второй вихревой составляющей представляют собой гиперболы. Существенной особенностью данной гипотетической пары полей является то, что она возможна лишь в двумерном псевдоевклидовом пространстве и принципиально несовместима с идеей четырехмерного пространства-времени Минковского. Отчасти, именно поэтому даже в теории такие поля не рассматривались физиками как потенциально возможные. Натурному же их обнаружению в определенной степени препятствуют укоренившиеся традиции экспериментаторов иметь дело с пространственными граничными условиями, тогда как в данном случае следовало бы работать с пространственно-временными. Хотя с пространством Минковского данная пара полей несовместима, она все же допускает свою реализацию в четырехмерии, в частности, обладающем финслеровой метрической функцией Бервальда-Моора, в связи с чем ее обнаружение в реальности автоматически явилось бы веским основанием к необходимости смены представлений о геометрии пространства-времени с квадратичной метрики на финслерову, связанную с формой четвертого порядка.

**Ключевые слова:** двойные числа, функции двойной переменной, потенциальные гиперболические поля, соленоидальные гиперболические поля.

*"Весь предшествующий опыт убеждает нас в том, что природа представляет собой реализацию простейших математически мыслимых элементов. Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерные связи между ними, которые дадут нам ключ к пониманию явлений природы. . . Конечно, опыт остается единственным критерием пригодности математических конструкций в физике. Но настоящее творческое начало присуще именно математике. Поэтому я считаю в известной мере оправданной веру древних в то, что чистое мышление в состоянии постигнуть реальность."*

А.Эйнштейн

*"Все сущее — суть числа."* Пифагор

## 1 Введение

Известно, что группа непрерывных симметрий уравнений Максвелла и пространства Минковского совпадают. Причем не только на уровне изометрических преобразований, но и конформных. При этом мало кто обращает внимание на факт, что если электромагнитное поле зависит лишь от двух пространственных координат, то редуцированные до этих двух измерений уравнения Максвелла инвариантны уже не относительно 15-параметрической группы (или относительно 6-параметрической, что было бы логично для круговых преобразований в двумерии), а относительно бесконечнопараметрической. При этом аналогичное упрощение уравнений Максвелла до двух пространственно-временных измерений не приводит к такой же метаморфозе и группа их симметрий в этом случае остается конечномерной. Подобная неравноправность сведения электромагнитных задач к пространственной или к пространственно-временной двумерности представляется крайне странной и заставляет задуматься о ее причинах.

Одно из возможных объяснений данного парадокса может заключаться в том, что уравнения Максвелла и пространство Минковского лишь частично описывают реальность, тогда как более адекватные конструкции как уравнений поля, так и метрики пространства–времени связаны с более содержательными на конформные симметрии финслеровыми геометриями. В настоящей работе предпринимается попытка взглянуть на обсуждаемую ситуацию не с позиций опыта или эксперимента, а отталкиваясь от одних только эвристических соображений, базирующихся на предположении о фундаментальной роли понятия числа не только в математике, но и в физике.

## 2 Число, геометрия и физическая реальность

Несмотря на то, что большинство ученых, оценивая роль физики и математики в отношении познания человеком окружающего мира, на первый план выдвигают практический опыт и эксперимент, то есть, исходят из первичности физических построений, за которыми лишь в качестве инструмента для описания следуют специально подобранные математические конструкции, некоторые исследователи убеждены в возможности и целесообразности прямо противоположного подхода. То есть, когда не опыт выступает источником идей и представлений ученого об окружающем его мире, а сама математика, причем в лице наиболее красивых и простых своих элементов. Конечно же, такой подход применим далеко не всегда, а лишь в отдельных и достаточно редких случаях, однако тем ценнее должны представляться те знания о Вселенной, которые выведены из чистых и достаточно абстрактных математических структур.

На первый взгляд представляется, что подобный подход имеет слишком незначительные шансы на успех из-за огромного количества различных математических конструкций, что могли бы выступать в качестве потенциальной основы для такого рода поисков. Однако, круг вероятных кандидатов можно весьма эффективно ограничить, если максимально внимательно подойти к предложению Эйнштейна, вынесенному в эпиграф данной статьи, то есть, отталкиваться не от всяких, но лишь от наиболее элементарных математических объектов. К таким простейшими объектам, в первую очередь, следует отнести числа. Однако различных классов чисел также довольно много. Помимо обычных, к которым, как правило, относят натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные, известны и такие, как кватернионы, октавы,  $p$ -адические числа, числа Клиффорда, Грассмана и т.д. и т.п. Попробуем не распылять наше внимание по всем числам вообще, а сосредоточить его на Числах "с большой буквы", то есть на таких, чьи свойства уже доказали свою непосредственную связь с теми или иными проявлениями реального физического мира.

Предлагается под Числами понимать представителей уже звучавшего выше ряда: натуральные, целые, рациональные, действительные, комплексные. . . Органическое переплетение свойств перечисленных классов Чисел с действительностью давно стало общепризнанным. Своей кульминации такое единство достигает на уровне комплексных чисел, свойства которых, как известно, не только имеют прямое отношение к геометрии двумерного евклидова пространства, (что, кстати, в свое время и послужило основным аргументом в согласии математиков считать комплексную алгебру естественным расширением действительных чисел), но и обладают красивыми связями с физикой, что происходит весьма естественным путем, когда от алгебры переходят к анализу на комплексной плоскости. Какую бы аналитическую функцию от комплексной переменной мы ни взяли, ей всегда можно поставить в соответствие конкретное двумерное физическое поле, (например, электро– или магнитостатическое). Равно как справедливо и обратное утверждение: для любой комбинации источников и вихрей, задающих идеальное двумерное поле в вакууме, можно всегда отыскать "свою" аналитическую функцию комплексной переменной. Считается, что на этом двумерном частном случае теснейшие переплетения свойств Чисел, геометрии и физики, только-только нетривиальным образом начавшиеся (ведь более простые Числа связаны либо с одномерными, либо вообще с дискретными пространствами), внезапно вдруг и заканчиваются. В алгебре доказана важная теорема, носящая имя Фробениуса, констатирующая, что числовых множеств с размерностью три и выше, наследующих все без исключения свойства действительных и комплексных алгебр, не существует. Вместе с этим фактом отсутствует и возможность связать между собой геометрию многомерных пространств с многокомпонентными "хорошими"

алгебрами. Кватернионы, открытые Гамильтоном, не могут считаться полноценными обобщениями комплексных чисел, так как их произведения, в отличие от произведений остальных Чисел, некоммутативны. Кроме того, над кватернионами, которые в отличие от действительных и комплексных чисел образуют тело, а не числовое поле, отсутствуют нетривиальные аналитические функции. Самые "сложные" из них являются дробно-линейными функциями. Данное обстоятельство тесно связано с теоремой Лиувилля, которая, будучи примененной к четырехмерному евклидову пространству, ассоциированному с алгеброй кватернионов, утверждает, что конформная группа здесь всего 15-параметрическая, тогда как на комплексной плоскости и на вещественной прямой соответствующие группы преобразований бесконечномерны. Сравнивая данный факт с множеством аналитических функций действительной и комплексной переменных, становится понятным вывод о том, что отсутствие разнообразия в конформных преобразованиях приводит к резкому сокращению для кватернионов и функций над ними геометрических и физических приложений, сколь-нибудь соизмеримых с приложениями настоящих Чисел.

Столкнувшись с данным обстоятельством, особенно досадным после впечатляющих успехов взаимодействия алгебры, геометрии и физики на примере комплексного анализа, большинство математиков отказалось от дальнейших поисков вариантов расширения списка Чисел. Лишь редкие энтузиасты продолжают заниматься этой проблемой, сосредоточив свое внимание на отыскании таких изменений в понятии аналитических функций, которые бы, с одной стороны, не противоречили алгебре кватернионов, а с другой, в той или в иной мере включали бы в себя теорию функций комплексной переменной. В частности, соответствующие попытки предпринимаются в рамках алгебры комплексных кватернионов или бикватернионов, как их иногда называют [1, 2, 3, 4]. Автору настоящей статьи такие усилия представляются излишне компромиссными (хотя и небезынтересными), так как они не в силах отменить факта некоммутативности произведений кватернионов и бикватернионов, а также не позволяют избавиться от относительной бедности групп аналитических функций и конформных преобразований в связанных с ними пространствах. Однако, как минимум, один вариант для пополнения списка Чисел, а, следовательно, и для появления новых оснований для продолжения поисков естественных аналогий, идущих от чистой математики к физике и не только в двумерном, но и в многомерных случаях, все же имеется.

### 3 Двойные числа

Рассмотрим так называемые двойные числа [5, 6]. Их еще иногда именуют расщепляемыми или гиперболически комплексными. Данная алгебра, которую договоримся обозначать  $H_2$ , а ее числа как  $h = t + jx$ , на первый взгляд, существенно более элементарна и проста, чем комплексная алгебра  $C$ . Такое впечатление определенным образом связано с тем, что их мнимая единица  $j$  в квадрате дает не отрицательную, а положительную вещественную единицу:

$$j^2 = +1.$$

Законы сложения и умножения двойных чисел в базисе состоящем из 1 и  $j$  имеют вид:

$$h_1 + h_2 = (t_1 + jx_1) + (t_2 + jx_2) = (t_1 + t_2) + j(x_1 + x_2);$$

$$h_1 \cdot h_2 = (t_1 + jx_1) \cdot (t_2 + jx_2) = (t_1t_2 + x_1x_2) + j(t_1x_2 + t_2x_1).$$

Разница в значении квадрата мнимой единицы комплексных и двойных чисел приводит к тому, что в геометрическом плане последним соответствуют точки и вектора не евклидовой, а псевдоевклидовой плоскости [6]. Это связано также с тем, что квадрат их модуля, получаемый аналогично комплексным числам путем умножения на сопряженное число:

$$|h|^2 = (t + jx) \cdot (t - jx) = t^2 - x^2$$

соответствует метрике двумерного пространства-времени, если величину скорости света положить равной единице.

Но самым замечательным является факт, что аналогия с комплексными числами у двойной переменной прослеживается на много глубже. При этом все, что связывало первые с геометрией евклидовой плоскости, вторые связывает с геометрией двумерного пространства–времени. Операциям сложения и умножения двойных чисел соответствуют трансляции, повороты и растяжения псевдоевклидовой плоскости. Имеют смысл понятия сопряженного числа, модуля и аргумента, алгебраической и экспоненциальной форм представления, справедливы аналоги формул Эйлера, Стокса, Остроградского, Коши и др., естественным образом вводится понятие производной независимой от направления и аналитичности функций [6, 7, 8]. Трудно вообще придумать качество, имеющее место на плоскости комплексной переменной, чтобы оно не нашло своего аналога на плоскости двойной переменной. Но, как ни странно, при всем при этом двойные числа практически никто не включает в классификацию Чисел и их не принято считать столь же естественными расширениями действительных чисел, какими давно признаны комплексные.

По-видимому, основная причина столь пренебрежительного отношения математиков к двойным числам кроется в слишком очевидной простоте их устройства, иногда граничащей с тривиальностью. Для этих чисел легко находится базис (он иногда называется изотропным), в котором они распадаются на две независимые действительные алгебры. В результате создается впечатление, что ничего, кроме свойств такой пары, плоскость двойной переменной не содержит. И все же, эта простота по сравнению с комплексными числами является кажущейся, ее тут ничуть не больше, чем во взаимоотношениях между псевдоевклидовой и евклидовой плоскостями. Утверждать обратное, равносильно попыткам доказательства, что геометрия евклидовой плоскости намного сложнее и интереснее, чем геометрия двумерного пространства–времени. Если уж такое сравнение и проводить, то большую сложность (во всяком случае, в субъективном восприятии), скорее, следовало бы приписать как раз псевдоевклидову варианту. В любом случае, двойные числа, как минимум, вдвое сложнее вещественных и потому проверка предположения, что они в отличие от кватернионов и бикватернионов должны быть включены в список Чисел, имеет достаточно веские причины.

Известно, что двойные числа удовлетворяют практически всем аксиомам, которые справедливы для Чисел рассматривавшегося фундаментального ряда, вообще, и для комплексных чисел, в частности. Сказанное относится и к наличию свойства коммутативности у их произведений, которое отсутствовало у кватернионов. Единственным отличием можно считать лишь появление в алгебре двойной переменной делителей нуля, то есть объектов с ненулевыми компонентами, модуль которых оказывается равным нулю и для которых не существует обратных по умножению, как и у обычного нуля. Математики данное качество часто считают "плохим" или как минимум, неудобным. Именно поэтому, упоминавшаяся выше теорема Фробениуса, не рассматривала алгебр с делителями нуля, в принципе. Подобное ограничение с позиций предлагаемого подхода, основанного на поиске Чисел, имевших бы тесную и естественную связь с геометрией и физикой, представляется совершенно неоправданным.

Алгебре двойных чисел соответствует геометрия двумерного псевдоевклидова пространства–времени [6], а в последнем, как известно, появляется фундаментальный объект, которого нет (во всяком случае, в вещественном виде) ни в одном евклидовом пространстве. Речь идет о световом конусе, или другими словами, о множестве точек, расстояния до которых (более правильно говорить об интервалах) от фиксированной точки равняются нулю. Именно точкам и векторам светового конуса естественным образом ставятся в соответствие делители нуля алгебры двойных чисел. То есть, основное препятствие, которое по мнению математиков не позволяет двойным числам рассматриваться в одном ряду с действительными и комплексными, на самом деле, является необходимым элементом как псевдоевклидовой геометрии, так и связанной с ней релятивистской физики. Но если из теоремы Фробениуса исключить требование отсутствия у интересных для физических приложений алгебр делителей нуля и иметь в виду, что Числам могут соответствовать не только евклидовы, но и псевдоевклидовы пространства, то пессимистический вывод о замыкании комплексной алгеброй перечня фундаментальных Числовых объектов становится не вполне точным и появляются веские основания для пополнения рассматриваемого списка, прежде всего, за счет включения в него двойных чисел.

Немаловажным фактором, также свидетельствующим о необходимости считать двойные чи-

сла Числами, является наличие над ними бесконечно-параметрического множества аналитических функций (правильнее говорить об  $h$ -аналитичности [6], поскольку на плоскости  $H_2$  переменной иная топология, чем на комплексной плоскости). Более того, понятие  $h$ -аналитической функции от двойной переменной можно определить таким образом, что их разнообразие оказывается ровно таким же как и разнообразие аналитических функций обычной комплексной переменной, причем любой функции из одного множества при этом соответствует одна и только одна функция другого [9]. В этом случае, аналитические функции обычной комплексной переменной можно однозначно связывать не только с двумя сопряженными гармоническими функциями от двух переменных, но и с парой произвольных аналитических функций от одной вещественной переменной каждая, на которые в изотропном базисе разлагается любая  $h$ -аналитическая функция. Тот факт, что на комплексной плоскости нет действительного базиса, в котором такое разложение осуществлялось бы так же, как и на двойной, ничего не меняет по существу, тем более, что, как показано в [9] и будет частично продемонстрировано ниже, соответствие между аналитическими и  $h$ -аналитическими функциями в двух рассматриваемых алгебрах намного более тесное, чем представлялось ранее. Кроме того, необходимо помнить о возможности перехода от пары независимых алгебр  $H_2(\mathcal{R})$  и  $\mathcal{C}$  к объединенной четырехкомпонентной алгебре  $H_2(\mathcal{C})$ , в которой свойства двойных и комплексных чисел переплетаются наиболее естественным образом.

Одним из замечательных свойств комплексной плоскости, открытым совсем недавно, явилось построение на ней при помощи компьютерных алгоритмов фрактальных множеств Жюлиа и Мандельброта [10]. Красота, гармония и содержательность этих объектов [11] явились дополнительным подтверждением связей существующих между чистой математикой и геометрией, ну а от последней, как известно, совсем недалеко до физики. Существует мнение, что аналогичных по сложности фрактальных или фракталоподобных множеств на плоскости двойной переменной невозможно построить в принципе. У многих исследователей данной проблемы, вместо беспредельно изломанных границ комплексных фракталов получались тривиально гладкие квадраты и прямоугольники [12, 13, 14]. Однако, как показывают недавние исследования [15, 16, 17], ситуация и тут существенно интереснее. Если вместо предельных фрактальных множеств Жюлиа рассматривать так называемые предфракталы, отличающиеся от последних связью с конечным числом итераций, то вместо гладких границ прямоугольников на плоскости двойной переменной появляются объекты, практически ничем не отличающиеся от предфракталов на комплексной плоскости.

Таким образом, двойные числа все же следует признать заслуживающими звания Чисел с большой буквы, а также включить их в соответствующую классификацию между вещественной и комплексной алгебрами, а может, даже, и параллельно последней. Если этот достаточно формальный шаг окажется подкрепленным еще и указанием нетривиальных связей двойных чисел и функций над ними не только с геометрическими, но и с физическими свойствами двумерного пространства-времени, вопрос с классификацией двойных чисел можно будет считать в основном закрытым. Попробуем именно это проделать ниже.

С элементарной геометрией на уровне групп движений, или, что то же самое, изометрических преобразований, в паре "двойные числа— "псевдоевклидова плоскость" все более-менее ясно. Как и на комплексной плоскости, группа движений здесь реализуется сложением двойных чисел и умножением на числа единичного модуля, с той естественной разницей, что вращения на двойной плоскости являются гиперболическими. Физическая интерпретация этих алгебраических и геометрических свойств двойных чисел также не вызывает трудностей и обычно связывается с задачами специальной теории относительности, когда есть лишь две значимых координаты: одна пространственная и одна временная [18]. Однако существенно более интересен вопрос о гипотетических связях между нелинейными  $h$ -аналитическими функциями и соответствующими уже им геометрическими и физическими интерпретациями. Подчеркнем, что речь идет об отыскании связей максимально аналогичных тем, что давно известны между аналитическими функциями комплексной переменной, конформными преобразованиями евклидовой плоскости и соответствующими тем и другим физическими приложениями. То обстоятельство, что двойные числа и функции от них давно нашли широкое применение в теории суперструн и в квантовой теории поля сейчас не обсуждается, так как мы сейчас рассматриваем приложения к классической

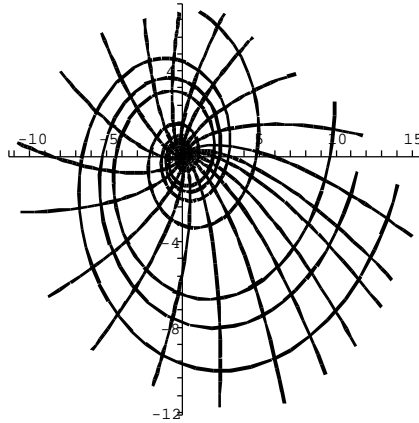


Рис. 1: Силовые линии (спирали, раскручивающиеся по часовой стрелке) и эквипотенциальные линии (спирали, раскручивающиеся против часовой стрелки) точечного вихреисточника на комплексной плоскости с  $q = 1$ ,  $w = 1/4$ .

полевой физике. Для исследования данной проблемы вспомним, как подобные связи реализуются на комплексной плоскости.

#### 4 Аналитические функции от комплексных чисел и $h$ -аналитические от двойных

Рассмотрим простейшую нетривиальную аналитическую функцию комплексной переменной — натуральный логарифм с комплексным коэффициентом  $a$ :

$$F(z) = a \ln(z - z_0) = (q + iw) \ln((x - x_0) + i(y - y_0)) = u(x, y) + iv(x, y) = q \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - w \arctan \frac{y - y_0}{x - x_0} + i(w \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + q \arctan \frac{y - y_0}{x - x_0}),$$

где  $z = x + iy$  — комплексная переменная,  $a = q + iw$  и  $z_0 = x_0 + iy_0$  — некоторые фиксированные комплексные числа,  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  — сопряженные гармонические функции, на которые всегда можно разложить аналитическую функцию.

В теории комплексного потенциала [6], имеющей дело с физическими интерпретациями аналитических комплекснозначных функций, с кривыми  $v(x, y) = \text{const}_1$  принято связывать силовые линии некоторого двумерного векторного поля, а с кривыми  $u(x, y) = \text{const}_2$  — эквипотенциальные линии этого же поля. Для рассматриваемой аналитической функции логарифм с комплексным множителем соответствующая ей пара полей имеет вид, представленный на рис. 4. Такое поле в гидродинамическом смысле интерпретируется как поле одиночного двумерного точечного вихреисточника, находящегося в точке с координатами  $(x_0, y_0)$  с обильностью, пропорциональной величине  $q$  и с завихренностью пропорциональной величине  $w$ .

Гидродинамическая трактовка не единственная и не самая лучшая, так как требует рассмотрения идеальной жидкости, которой не существует в природе и, к тому же, такой вариант сопряжен с определенными трудностями при его распространении на плоскость двойной переменной. Гораздо более удобна для последующих аналогий с псевдоевклидовым пространством-временем электромагнитная интерпретация векторного поля, получаемого из произвольной аналитической функции. При таком подходе, натуральному логарифму с комплексным множителем соответствует формальная сумма (так как вектора напряженностей электрического и магнитного полей, как известно, не складываются) двумерного электростатического поля, создаваемого одиночным зарядом с величиной, пропорциональной  $q$ , и двумерного магнитостатического поля, создаваемого одиночным проводником с током, пропорциональным величине  $w$ , текущим в перпендикулярном к плоскости направлении. Образы проводников с током, хотя бы чисто условно, удобно заменить на точечные двумерные магнитные вихри, как я буду их здесь называть.

Если множитель  $a$  перед логарифмом взять чисто вещественным, то соответствующее такой "упрощенной" аналитической функции векторное поле можно интерпретировать как двумерное



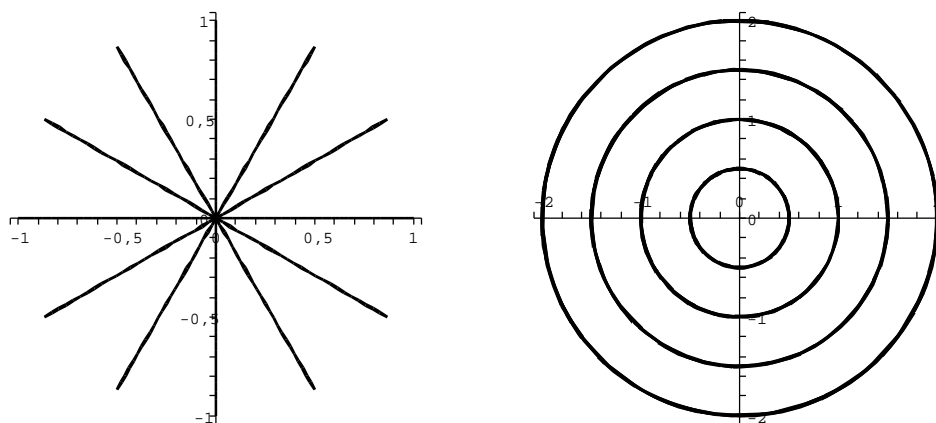


Рис. 2: На левом рисунке представлены линии напряженности точечного источника, на правом — точечного вихря.

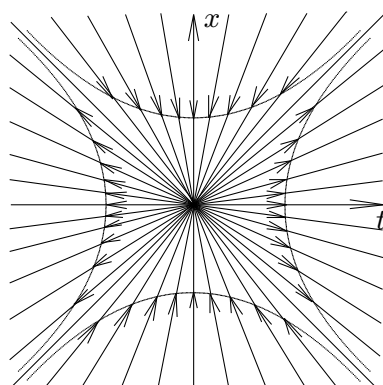


Рис. 3: Схематическая картина силовых линий гиперболического точечного источника. Поле постоянно по абсолютной величине на гиперболических окружностях (евклидовых гиперболах), а в соседних квадрантах светового конуса меняет свой характер (источник или сток).

электростатическое, создаваемое одиночным электрическим зарядом (рис. 2 слева).

А если положить  $a$  равным чисто мнимой величине  $iw$ , то результирующий комплексный потенциал порождает вихревое поле, которое можно интерпретировать как двумерное магнито-статическое поле, создаваемое одиночным точечным магнитным вихрем (рис.2 справа).

Замечательным свойством аналитических функций является то обстоятельство, что, оперируя одними только комплексными потенциалами точечных источников и вихрей на расширенной комплексной плоскости, можно получить поле, соответствующее любой конфигурации двух двумерных электро- и магнито-статических полей. Равно как верно и обратное: произвольной паре плоских потенциальных или соленоидальных векторных полей с точечными особенностями в них всегда можно подобрать соответствующую аналитическую функцию комплексной переменной.

Следует ли ожидать наличия столь же красивых и представляющих физический интерес связей между  $h$ -аналитическими функциями двойной переменной и некоторыми достаточно простыми (эффективно двумерными) реальными физическими явлениями? Если справедливы ожидания Эйнштейна и утверждение Пифагора, вынесенные в качестве эпиграфов данной статьи, а также работоспособен наш исходный тезис о возможности идти к физико-математическим теориям не только от опыта, но и исходя из свойств фундаментальных Числовых объектов, то такая связь представляется логически необходимой.

Для проверки этого предположения рассмотрим  $h$ -аналитическую функцию натуральный логарифм от двойных чисел:

$$F(h) = A \ln(h - h_0) = (Q + jW) \ln((t - t_0) + j(x - x_0)) = U(t, x) + jV(t, x) =$$

$$Q \ln \sqrt{(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2} + W \operatorname{Arth} \frac{x - x_0}{t - t_0} + j(W \ln \sqrt{(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2} + Q \operatorname{Arth} \frac{x - x_0}{t - t_0}),$$

где  $h = t + jx$  — двойная переменная,  $A = Q + jW$  и  $h_0 = t_0 + jx_0$  — некоторые фиксированные двойные числа,  $U(t, x)$  и  $V(t, x)$  — сопряженные  $h$ -гармонические функции, на которые всегда можно разложить  $h$ -аналитическую функцию.

Положим сперва  $A = Q$ , то есть возьмем  $A$  чисто вещественным. Тогда наш гиперкомплексный потенциал принимает вид:

$$F(h) = A \ln(h - h_0) = Q \ln((t - t_0) + j(x - x_0)) = \\ U(t, x) + jV(t, x) = Q \ln \sqrt{(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2} + jQ \operatorname{Arth} \frac{x - x_0}{t - t_0}.$$

Поступая в полной аналогии с теорией комплексного потенциала и связывая с уравнениями  $V(t, x) = \operatorname{const}_1$  линии тока (силовые линии), а с  $U(t, x) = \operatorname{const}_2$  — линии уровня, мы получаем графический портрет некоего двумерного векторного поля на псевдоевклидовой плоскости (рис. 3).

Логично предположить, что данное пространственно-временное образование можно интерпретировать как поле точечного источника с обильностью (зарядом)  $Q$ , находящимся в точке-событии с координатами  $(t_0, x_0)$ . Силовые линии этого поля, как и для источника на комплексной плоскости — радиальные прямые, а линии уровня — концентрические окружности, только не евклидовы, а псевдоевклидовы, поскольку представляют собой квадратичные гиперболы. Естественно, что это совсем не такой источник, который был связан с логарифмом на комплексной плоскости, так как метрика на плоскости двойной переменной совершенно иная и перед нами не пространственное векторное поле, а пространственно-временное. Кроме того, если на комплексной плоскости логарифм терял аналитичность в единственной точке с координатами  $(x_0, y_0)$ , то на плоскости двойной переменной логарифм перестает быть  $h$ -аналитической функцией не только в точке  $(t_0, x_0)$ , но и на связанном с нею изотропном (световом) конусе. Несмотря на эти отличия, перед нами все же именно источник, который, чтобы не путать его с комплексным аналогом, договоримся именовать гиперболическим, а величину его заряда  $Q$  для контрастности попробуем именовать разрядом.

Обозначим напряженность векторного поля, создаваемого одними лишь гиперболическими точечными разрядами как  $P(t, x) = P_t + jP_x$ . С исходной  $h$ -аналитической функцией, понимаемой как гиперкомплексный потенциал, такое поле по аналогии с теорией обычного комплексного потенциала можно связать соотношением:  $P(t, x) = \overline{F'(z)}$  откуда следует, что  $P_t = \partial U / \partial t = -\partial V / \partial x$  и  $P_x = \partial U / \partial x = -\partial V / \partial t$  во всех точках, где исходная функция  $F(h)$   $h$ -аналитична. Квадрат модуля напряженности такого поля  $|P|^2 = |\overline{F'(z)}|^2 = (P_t)^2 - (P_x)^2$ , а направление ее вектора в каждой точке задается гиперболическим углом с осью  $t$ :  $\alpha = \operatorname{Arth}(P_x / P_t)$ . Как видим, у данного поля много общего с напряженностью двумерного электростатического поля  $E(x, y) = E_x + iE_y$ , имевшей практически аналогичные связи с аналитическими функциями комплексной переменной, с той разницей, что вместо пространства исследуемое поле реализуется в пространстве-времени, а его источниками являются не особые точки, а особые события. Для такого поля можно ввести понятие гиперболической потенциальности, связав его с конкретным выражением для дифференциального оператора:  $\operatorname{roth} P = \partial P_t / \partial x + \partial P_x / \partial t = 0$ , лишь немного отличающимся от своего прототипа на комплексной плоскости. Аналогичным образом вводится и понятие гиперболической дивергенции поля  $\operatorname{divh} P = \partial P_t / \partial t + \partial P_x / \partial x = Q$ , которая в случае гиперкомплексного потенциала в виде функции  $F(z) = Q \ln(h - h_0)$  в точке  $h_0$  имеет (интегрируемую особенность) и принимает нулевые значения во всех остальных точках плоскости. Таким образом, перед нами полный гиперболический аналог двумерного потенциального поля электрической напряженности  $E$  создаваемого одиночным зарядом, только в данном случае поле  $P$  создается одиночным разрядом и заполняет оно собой не пространство, а пространство-время.

Переходя от действительного значения множителя  $A$  к чисто мнимому  $A = jW$ , будем иметь следующее выражение для гиперкомплексного потенциала:

$$F(h) = A \ln(h - h_0) = jW \ln((t - t_0) + j(x - x_0)) = U(t, x) + jV(t, x) = \\ W \operatorname{Arth} \frac{x - x_0}{t - t_0} + jW \ln \sqrt{(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2}.$$

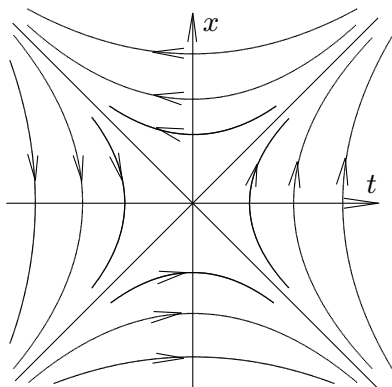


Рис. 4: Силовые линии двумерного точечного гиперболического вихря. Ориентация линий — общая для всех 4-х квадрантов светового конуса (против часовой стрелки).

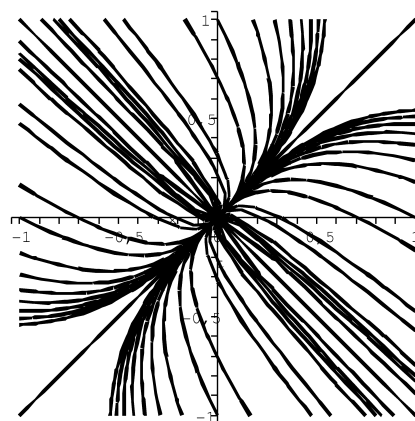


Рис.5: Силовые линии точечного вихреисточника для  $Q/W = -2$ . Линии исходят из центра во втором и четвертом квадрантах светового конуса, и сходятся к центру в первом и третьем.

В итоговой картине векторного поля такая замена вещественной величины разряда на гиперболически мнимую приводит к тому, что силовые линии и линии уровня меняются местами (рис. 4), то есть силовые линии поля теперь представляют собой семейства концентрических гипербол, а линии уровня превращаются в пучок радиальных прямых. В данном случае такое поле мы имеем полное право интерпретировать как гиперболический точечный вихрь обильностью  $W$ , находящийся в точке-событии с координатами  $(t_0, x_0)$  двумерного пространства-времени.

Обозначим напряженность векторного поля, создаваемого гиперболическими точечными вихрями (или, другими словами, гиперболически мнимыми разрядами) как  $G(t, x) = G_t + jG_x$ . С исходной  $h$ -аналитической функцией это гиперболически вихревое поле связано соотношением:  $G(t, x) = \overline{F'(z)}$  откуда следует, что  $G_t = \partial U/\partial t = -\partial V/\partial x$  и  $G_x = \partial U/\partial x = -\partial V/\partial t$  во всех точках, где исходная функция  $F(z)$   $h$ -аналитична. Квадрат модуля напряженности такого поля  $|G| = |\overline{F'(z)}| = (G_t)^2 - (G_x)^2$ , а направление ее вектора в каждой точке задается гиперболическим углом с осью  $t$ :  $\alpha = \text{Arth}(G_x/G_t)$ . В отличие от рассмотренного выше потенциального векторного поля  $P$ , оно обладает не времени-, а пространственноподобными силовыми линиями, откуда и модуль, и гиперболический угол для векторов его напряженности оказываются мнимыми величинами. С другой стороны, у данного поля много общего с напряженностью двумерного магнитного поля  $H(x, y) = H_x + iH_y$ , имевшей практически аналогичные связи с аналитическими функциями комплексной переменной, с той разницей, что вместо пространства данное поле реализуется в пространстве-времени, его вихрями являются не особые точки, а особые события, а силовые линии таких вихрей являются псевдоевклидовыми окружностями, то есть гиперболами. Для такого поля можно ввести понятие гиперболической соленоидальности, связав его с равенством нулю во всех точках поля гиперболической дивергенции:  $\text{divh } G = dG_t/dt + dG_x/dx = 0$ . Гиперболический ротор для данного вида двумерного поля в случае гиперкомплексного потенциала в виде функции  $F(z) = jW \ln(h - h_0)$  в точке  $h_0$  оказывается сингулярным (с интегрируемой особенностью), а во всех остальных точках плоскости имеет нулевое значение. Таким образом, перед нами полный гиперболический аналог двумерного соленоидального поля магнитной напряженности, связанного с одиночным вихрем, только в данном случае вихрь имеет гиперболическую природу и реализуется в пространстве-времени.

Когда множитель  $A$  перед функцией натурального логарифма от двойной переменной принимает гиперкомплексное значение  $A = Q + jW$ , то в соответствии с принятыми правилами геометрической интерпретации, мы имеем векторное поле двумерного точечного гиперболического вихреисточника (рис. 5). В этом случае получаются сразу два сосуществующих поля: гиперболически потенциальное  $P(t, x)$ , связанное с разрядом  $Q$  в точке-событии  $(t_0, x_0)$ , и гиперболически соленоидальное  $G(t, x)$ , порождаемое гиперболически мнимым разрядом  $W$ , произошедшим в той же пространственно-временной точке.

Симметрия между напряженностями пары полей  $E(x, y)$  и  $H(x, y)$  на комплексной плоскости и напряженностями  $P(t, x)$  и  $G(t, x)$  на плоскости двойной переменной — удивительно гармоничная и полная. Было бы странно, что для первой пары в физическом мире существует двумерная реализация (причем не единственная!), а для второй таковой не существовало бы вовсе. В связи с этим совершенно логично выглядит гипотеза, что поля  $P(t, x)$  и  $G(t, x)$  также реализуются в физическом мире, причем одно из них является гиперболическим дубликатом двумерного электрического поля, а другое — магнитного.

## 5 Потенциальные и соленоидальные гиперболические поля

Перебор известных современной физике фундаментальных взаимодействий показывает, что на непосредственную связь с рассматриваемой парой  $P(t, x)$  и  $G(t, x)$ , похоже, не может претендовать ни одно. Значит, мы должны выдвинуть версию о существовании в реальности дополнительного фундаментального взаимодействия, свойства которого при переходе к ситуациям, где значимыми остаются лишь два измерения, одно из которых — время, оказываются именно такими, как подсказывают нам  $\hbar$ -аналитические функции двойной переменной. Назовем объединение этой пары полей гиперболическим полем.

Таким образом, на основании одних только математических построений и их сравнении с известными электромагнитными явлениями мы приходим сразу к нескольким достаточно интересным по своим последствиям для физики гипотезам, естественно, требующим соответствующей экспериментальной проверки.

1. Источниками гиперболического поля оказываются не элементарные частицы, как это имело место в случае электрического поля, а точечные события в пространстве–времени, при этом место зарядов занимают разряды.
2. Напряженность поля, порождаемого разрядами, имеет гиперболический характер, то есть силовые линии заполняют собой не пространство, а пространство–время, при этом эквипотенциальные линии поля (в случае двух измерений) являются гиперболами.
3. У гиперболического поля как и у обычного электрического поля на евклидовой плоскости имеется своя вихревая пара — гиперболический аналог магнитного поля, силовые линии которого псевдоевклидовы окружности, то есть, гиперболы.
4. Заряды гиперболического поля, которые выше мы договорились называть разрядами, как и заряды обычного электрического или гравитационного взаимодействия, можно характеризовать величиной полной энергии, однако в данном случае это понятие относится не к частице, а к точечному элементарному событию или, другими словами, к пространственно–временной сингулярности.
5. Разряды гиперболического поля могут быть не только положительными или отрицательными, но вещественными, мнимыми и гиперкомплексными величинами.
6. Напряженности обеих компонент гиперболического поля связанного с двумерным одиночным вихреисточником спадают обратно пропорционально величине интервала от точки, в которой тот находится.
7. Вихревая часть гиперболического поля, скорее всего, не может быть обнаружена прямыми экспериментами с обычными частицами, так как его силовые линии оказываются пространственноподобными по отношению к направлению собственного времени наблюдателя и к мировым линиям пробных частиц. Для обнаружения такого взаимодействия требуются измерения связанные с событиями, или иными словами, детектирование проявлений гиперболического поля должно осуществляться при помощи часов.
8. Естественные расширения гиперболического поля на три и четыре измерения следует строить не путем переходов к пространству Минковского или его псевдоримановым обобщениям (у которых мало общего с Числами), а в тесной связи с естественными расширениями двойных чисел  $H_2$  на тройные  $H_3$  и четверные  $H_4$ . Такие алгебры порождают уже не псевдоевклидово

пространство–время, а линейные финслеровы пространства с метрикой Бервальда–Моора [19, 20, 21, 22, 23].

9. В многомерных финслеровых пространствах с метрикой Бервальда–Моора, кроме длин и углов естественными метрическими инвариантами являются еще и так называемые тринглы и полиуглы [24, 25], с которыми можно связать уже не только  $h$ -аналитические, но и более сложные функции. Разнообразие последних существенно богаче, а их свойства намного интересней. Возможно, что при рассмотрении таких функций станет понятно как объединяются гиперболическое и электромагнитное поля, причем в неразрывном единстве с понятием многокомпонентного гиперкомплексного Числа.
10. На основании предлагаемого подхода к гиперболическому полю можно сделать прогноз в отношении скорости распространения соответствующего взаимодействия. Судя по линиям напряженности поля, связанного с точечным разрядом, гиперболическое взаимодействие распространяется со всевозможными скоростями от нулевой, до предельной равной скорости света. Формально можно говорить даже и о сверхсветовых скоростях, однако, по отношению к наблюдателю это будут уже мнимые, не регистрируемые величины скорости.
11. Для пространств с метрикой Бервальда–Моора, в частности для четырехмерного случая, лучше говорить не о трехмерной скорости, а о финслеровом аналоге понятия четырехскорости. Последняя в отличие от четырехскорости специальной теории относительности не остается постоянной по модулю вдоль мировой линии пробной частицы, а может менять свою величину, оставаясь всегда касательной к ней.

На плоскости двойной переменной также как и на комплексной, мы не связаны ограничением иметь дело с одними только источниками и вихрями. Параллельно с такими точечными особенностями можно рассматривать гиперболические диполи, квадрупольи и прочие мультиполи, а также континуальные их распределения по пространству–времени. Иными словами, мы можем дать гиперболически полевую интерпретацию любой  $h$ -аналитической функции двойной переменной, в полном соответствии с тем, как это имело место между аналитическими функциями комплексной переменной и двумерными электро- и магнитостатическими полями.

Возникающая на основе алгебры и анализа на двойных числах модель физического поля, являющегося зеркальным двойником двумерного стационарного электромагнитного поля, требует внимательного к ней отношения и самой тщательной проверки в экспериментах и космологических наблюдениях. Если в процессе таких исследований наша гипотеза о существовании гиперболического поля с вполне конкретными и "a priori" предсказываемыми свойствами действительно подтвердится, то с полным основанием можно будет поставить вопрос о необходимости расширений двумерных уравнений данного поля уже на три и четыре пространственно–временных измерения. При этом поиск многомерных физических моделей гиперболического и других фундаментальных полей следует вести не только отталкиваясь от наблюдений и экспериментов, но и изучая математическую структуру многокомпонентных обобщений двойных и комплексных чисел, а также выделенных функций над ними, которые, скорее всего, будут устроены намного сложнее и интереснее, чем обычные аналитические и  $h$ -аналитические функции. Соответствующие Числа известны: они представляют собой прямые суммы  $n$  действительных и  $m$  комплексных алгебр, нужно только научиться смотреть на них в неразрывной связи с порождаемыми ими линейными финслеровыми пространствами, непрерывными симметриями, выделенными функциями от гиперкомплексных чисел и с уверенностью в возможность физической интерпретации всего этого.

## 6 Заключение

На первый взгляд может показаться, что необходимость включения двойных чисел в один ряд с другими фундаментальными Числовыми объектами — является излишним обстоятельством, а все проделанные выше теоретические построения могли быть получены и без этого. Так ли уж важно, поставим мы двойные числа рядом с вещественными и комплексными или будем считать их самостоятельным классом чисел? Думаю, что в контексте основной идеи данной работы, то есть,

возможности получения знаний о реальном физическом мире на основании изучения простейших математических объектов, вопрос о месте двойных чисел — принципиальный. И дело даже не в том, сможем и захотим ли мы разглядеть за алгеброй двойной переменной, а также за  $h$ -анализом над ней геометрию и физику реальных двумерных физических полей. Более важной проблемой является возможность аналогичного подхода к трех- и четырехмерной геометрии и физике. Если окажется, что достаточно простые двойные числа при подробном рассмотрении свойств  $h$ -аналитических функций над ними в отношении к приложениям в геометрии и физике могут давать неизвестные и неожиданные знания о структуре двумерных пространственно-временных полей, то это автоматически должно означать аналогичную актуальность исследований других коммутативно-ассоциативных алгебр с делителями нуля на предмет уже их собственных физических интерпретаций. Учитывая, что таким многокомпонентным алгебрам соответствуют не евклидовы или псевдоевклидовы пространства, а их линейные финслеровы расширения [24], замена ими пространства-времени Минковского может оказаться вполне плодотворной.

Многие современные физики, скорее всего, отнесутся к такой перспективе скептически. Тому есть много объективных и субъективных причин, одна из которых, связана с принятыми на сегодня методологическим принципом развития прикладных наук, а именно, от эксперимента к физической модели, и только затем к математической. При этом иногда упускается из виду альтернативный путь. Да, вероятно в подавляющем большинстве ситуаций, кроме как на опыт и эксперимент физик больше ни на что не должен полагаться, но это вовсе не означает, что из данного правила нет исключений и в некоторых случаях, особенно когда у обычной стратегии возникают серьезные проблемы, более продуктивным может оказаться прямо противоположный путь, ведущий от простой и красивой математической конструкции сначала к геометрии, а затем и к физике.

## Литература

- [1] Казанова Г. Векторная алгебра. М., Мир, 1979 — 120 с.
- [2] Ефремов А.П. Кватернионные пространства, системы отсчета и поля. М., РУДН, 2005 — 374 стр.
- [3] Кассандров В.В. Кватернионный анализ и алгебродинамика // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (6), том. 3, 2006, с. 58-84.
- [4] Элиович А.А., Санюк В.И. Некоторые аспекты применения полинорм в теории поля // *ТМФ*, 2, том 162, 2010, с. 163-178.
- [5] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973.
- [6] Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1977.
- [7] Павлов Д.Г., Кокарев С.С.  $h$ -голоморфные функции двойной переменной и их приложения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (13), том. 7, 2010, с. 44-77.
- [8] Павлов Д.Г., Кокарев С.С.  $h$ -аналитическая теория поля в 2-мерном пространстве-времени // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (13), том. 7, 2010, с. 78-127.
- [9] Павлов Д.Г., Гарасько Г.И. Двойные числа // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (13), том. 7, 2010, с. 16-25.
- [10] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М., Институт компьютерных исследований, 2002 — 656 с.
- [11] Пайтген Х.О., Рихтер П. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М., Мир, 1993 — 176 с.
- [12] Senn P. The Mandelbrot set for binary numbers // *American Journal of Physics*, Vol. 58, 1989, p. 1018.
- [13] Metzler W. The "mystery" of the quadratic Mandelbrot set // *American Journal of Physics*, 62 (9), 1994, pp. 813-814.

- [14] Artzy R. Dynamics of quadratic functions in cycle planes // *Journal of Geometry*, Vol. 44, 1992, pp. 26-32.
- [15] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Малыхин А.В., Панчелюга В.А. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (11), т. 6, 2009, с. 135-145.
- [16] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналога множества Жюлиа при нулевом значении параметра на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (11), т. 6, 2009, с. 146-151.
- [17] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналогов множества Жюлиа на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (12), т. 6, 2009, с. 163-176.
- [18] Ивлев Д.Д. О двойных числах и их функциях // Сб. Математическое просвещение. Вып.6. Под.ред. И.Н.Бронштейна, Ф.Л.Верпаховского, М., 1961, с. 197-203.
- [19] Павлов Д.Г. Обобщение аксиом скалярного произведения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (1), т. 1, 2004, с. 5-19.
- [20] Павлов Д.Г. Хронометрия трехмерного времени // *Гиперкомплексные чисел в геометрии и физике*, 1 (1), т. 1, 2004, с. 20-32.
- [21] Павлов Д.Г. Четырехмерное время // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (1), т. 1, 2004, с. 33-42.
- [22] Гарасько Г.И., Павлов Д.Г. Геометрия невырожденных поличисел // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (7), т. 4, 2007, с. 3-25.
- [23] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., Тетру, 2009 — 265 с.
- [24] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Аддитивные углы в пространстве  $H_3$  // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (10), т. 5, 2008, с. 25-43.
- [25] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Метрические бинглы и тринглы в  $H_3$  // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (11), т. 6, 2009, с. 42-67.

## HYPERBOLICAL ANALOG OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD

D.G. Pavlov

*Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fрязино, Russia*

geom2004@mail.ru

On the basis of the analogy of complex numbers analytical functions with two-dimensional electro- and magnetostatic fields there was made an assumption considering the existence of such correspondence between h-analytical functions of the binary variable and some other pair of binary physical fields in reality, one of which is hyperbolic source field and another is hyperbolically vortex field. Unlike electro- and magnetostatic fields, this pair is not realized in space but rather in space-time; thus, the sources of the first field are events while force lines of the second vortex constituent are hyperbolas. Essential feature of this hypothetical pair of fields is that it is feasible only in two-dimensional pseudo-Euclidian space and that it is fundamentally incompatible with the Minkowski idea of 4-dimensional space-time. Partially this is the very reason why such fields weren't considered potentially feasible by physicians even in theory. Their immediate discovery is hampered by experimentalists' being used to space-boundary conditions, while they had better work with space-time ones here. Although this pair is incompatible with Minkowskyi space, still it can possibly be realized in 4-dimesional space possessing, in particular, Berwald-Moor Finsler metric function, its discovery in reality, thus, serving a valid reason to substitute the quadratic metric idea of space-time geometry for Finsler one, connected with quartic form.

**Key Words:** double numbers, double numbers function, hyperbolic potential field, hyperbolic solenoidal field.

## ДВОЙНЫЕ ЧИСЛА

Д.Г. Павлов<sup>1</sup>, Г.И. Гарасько<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

<sup>2</sup> ФГУП Всероссийский электротехнический институт, Москва, Россия

geom2004@mail.ru, gri9z@mail.ru

Предпринята попытка доказать, что между комплексными и двойными (гиперболически комплексными) числами имеется существенно больше общего, чем принято считать. При этом, с одной стороны, раскрываются новые нетривиальные качества аналитических функций двойной переменной, например, их связь с гиперболически потенциальными и соленоидальными векторными полями на псевдоевклидовой плоскости, а с другой, показано каким образом многие структуры на комплексной плоскости могут взаимнооднозначно представляться их гиперболическими аналогами, что существенно дезавуирует "магические" свойства комплексных чисел, в частности, приводит к пониманию, что аналитические функции от них сводятся к двум скалярным функциям не от двух, а от одной вещественной переменной каждая.

**Ключевые слова:** гиперкомплексные числа, аналитические функции,  $h$ -аналитические функции, векторные поля.

### 1 Введение

Трудно найти математика, который не восхищался бы лаконичной красотой, гармонией и содержательностью теории функций комплексной переменной (ТФКП). Не оставляет эта теория равнодушными также и физиков, использующих ее в своих многочисленных математических моделях связанных с идеальными двумерными векторными полями. На фоне того совершенства, что представляют собой ТФКП и ее применения выглядит крайне несправедливым факт (тесно связанный с теоремой Фробениуса [1]), что перенос всех без исключения свойств комплексной плоскости на пространство или пространство–время с тремя и более измерениями принципиально не возможен.

Однако, как ни странно, по крайней мере, один вариант многомерного расширения ТФКП у физиков и математиков, все же, имеется. Правда, эта возможность связана не столько с самими комплексными числами, сколько с их гиперболическими аналогами, иногда именуемыми двойными или расщепляемыми числами [2]. Теория аналитических (вернее  $h$ -аналитических) функций на этих числах, хоть и имеет определенные нерешенные вопросы, как мы попробуем показать в настоящей работе мало, чем отличается от тех замечательных свойств, что обладает ТФКП. Не должны мешать этому ни иная топология, ни делители нуля, которых не было на комплексной плоскости. Более того, поскольку одна из компонент двойных чисел может интерпретироваться как временная координата двумерной псевдоевклидовой плоскости, делители нуля оказываются весьма полезными объектами, так как с ними естественно связывать точки и вектора светового конуса. Тоже самое касается вопросов сходимости и тесно связанной с ними топологии. Но что самое замечательное в идее построения гиперболического аналога ТФКП на двойных числах, так это возможность его дальнейшего расширения на многомерные пространства связанные с прямыми суммами  $n$  вещественных или комплексных алгебр, причем без малейших жертв качеством и даже с приобретением новых весьма интересных свойств. Что также важно, одно из неизотропных измерений связанных с такими алгебрами можно интерпретировать как время, тогда как оставшиеся образуют пространство, пусть даже иногда и необычное [3, 4].

Концептуальным фундаментом для построения гиперболического аналога ТФКП на двойных числах является наличие в соответствующем им двумерном псевдоевклидовом пространстве–времени бесконечно–параметрической группы конформных преобразований по мощности точно такой же, как конформная группа евклидовой плоскости, что, собственно, и обеспечивает нетривиальное разнообразие тесно связанных с этими непрерывными нелинейными симметриями  $h$ -аналитических функций.

Одним из основных, сдерживающих развитие гиперболического аналога ТФКП фактором, является отсутствие представлений, с какими физически реальными ситуациями можно было бы



связывать идеальные векторные поля, получаемые из  $\hbar$ -аналитических функций двойной переменной, аналогично тому, как из обычных аналитических функций получаются потенциальные и соленоидальные поля двумерной евклидовой плоскости. При этом, если гиперболической потенциальностью никого не удивишь, то вот вопрос, какое из известных физикам реальных полей могло бы обладать гиперболической соленоидальностью — пока остается без четкого ответа. Действительно, если б поля именно с парой свойств гиперболической соленоидальности и потенциальности были на сегодня известны физикам, то потребности их изучения неминуемо стимулировали бы математиков на исследования, в общем-то, достаточно простого  $\hbar$ -анализа на двойных числах, а вслед за ним и его многомерных расширений в финслеровых линейных пространствах. Однако, поскольку ни одно из известных фундаментальных взаимодействий при своем упрощении до двух измерений не совпадает полностью по своим свойствам и симметриям с  $\hbar$ -аналитическими функциями от двойных чисел, последние, в сколь ни будь полном объеме, пока так и не были востребованы. Но что самое печальное, вместе с ними остаются также до сих пор не востребованными и их многомерные расширения.

В такой ситуации представляется рациональным поступить иным образом, а именно — предположить, что "нужные" для приложений  $\hbar$ -аналитических функций от двойной переменной физические поля обладающие гиперболической соленоидальностью, все же, существуют и действовать в полной аналогии с имеющимися приложениями ТФКП, только с естественными поправками на имеющуюся гиперболичность. Как знать, быть может, после построения соответствующей математической теории и изучения основных свойств связанных с нею гиперболически потенциальных и гиперболически соленоидальных полей, а, особенно, после расширений получающейся теории на три и четыре измерения (естественно, уже с финслеровой метрикой), при более пристальном взгляде на окружающий нас реальный мир, вдруг, выяснится, что соответствующие поля, все же, действительно существуют и даже давно наблюдаются, просто, в силу ряда причин интерпретируются физиками не в полном объеме их истинных свойств.

## 2 Переход между комплексными и двойными числами

Давно уже отмечалось, что между комплексными числами и двойными числами существует некоторая "похожесть".

Комплексные числа	Двойные числа
a) $z = x + i y, \quad i^2 = -1$	$Z = X + j Y, \quad j^2 = 1$
b) $F(z) = u(x, y) + i v(x, y)$	$\Phi(X, Y) = U(X, Y) + j V(X, Y)$
c) $dF(z) = F'(z) dz$	$d\Phi(X, Y) = \Phi'(X, Y) dZ$
d) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$	$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial Y}, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial V}{\partial X}$
e) $u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x}$	$U' = \frac{\partial U}{\partial X}, \quad V' = \frac{\partial V}{\partial X}$
f) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$	$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = 0$
g) $x' = u(x, y), \quad y' = \pm v(x, y)$	$X' = U(X, Y), \quad Y' = \pm V(X, Y)$
h) $(dx')^2 + (dy')^2 = K^2 [(dX)^2 - (dY)^2]$	$(dX')^2 - (dY')^2 = \kappa^2 [(dx)^2 + (dy)^2]$
i) $\kappa^2(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$	$K^2(X, Y) = \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2$

Строка с) суть определение аналитической функции  $F(z)$  комплексной переменной  $z$  и ее производной  $F'(z)$ , а также определение аналитической функции  $\Phi(Z)$  двойной переменной  $Z$  и ее производной  $\Phi'(Z)$ .

В строке **d**) записаны соотношения Коши–Римана для компонент аналитической функции комплексной переменной и для компонент аналитической функции двойной переменной.

Фундаментальные уравнения, которым подчиняются компоненты аналитических функций комплексной и двойной переменной, находятся в строке **f**).

Строки **g**)–**i**) относятся к конформным преобразованиям на комплексной и гиперболической плоскостях.

Необходимо найти такие преобразования, которые позволяли бы переходить от комплексных чисел к двойным и обратно с минимальными дополнительными условиями. Минимум: при таких преобразованиях левый столбец формул (1) должен переходить в правый столбец и наоборот.

Переход между комплексными и двойными числами осуществляется преобразованиями:

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow X, \\ y \rightarrow -j i Y; \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} X \rightarrow x, \\ Y \rightarrow j i y. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Будем считать, что символные элементы  $i$  и  $j$  коммутируют.

Формул (2) не достаточно. Например, соотношения Коши–Римана **d**) (1) при таких преобразованиях не переходят друг в друга. Ограничимся пока аналитическими функциями, которые в областях аналитичности являются полиномами или сходящимися рядами комплексной или двойной переменной с коэффициентами — действительными числами. Тогда преобразования (2) следует дополнить также соответствующими преобразованиями компонент аналитических функций:

$$\left. \begin{array}{l} U(X, Y) \rightarrow u(X, -j i Y), \\ V(X, Y) \rightarrow j i v(X, -j i Y); \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} u(x, y) \rightarrow U(x, j i y), \\ v(x, y) \rightarrow -j i V(x, j i y). \end{array} \right\} \quad (3)$$

При преобразованиях (2), (3) соотношения Коши–Римана для аналитических функций комплексной переменной переходят в соотношения Коши–Римана для аналитических функций гиперболической переменной и наоборот. Более того, первый столбец и второй столбец формул (1) меняются местами.

Поясним как работать с представленными выше преобразованиями на примере. Рассмотрим две аналитические функции: комплексной переменной

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad (4)$$

и гиперболической переменной

$$e^{X+jY} = e^X (\operatorname{ch} Y + j \operatorname{sh} Y). \quad (5)$$

Применим преобразования (2), (3) к формуле (4) и попытаемся получить из неё формулу (5), причем будем работать непосредственно с компонентами аналитической функции комплексной переменной:

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y. \quad (6)$$

Заметим вначале, что комплексы символьных элементов  $(\pm j i)$  ведут себя в алгебраическом плане как эллиптическая символьная единица:

$$(\pm j i)^2 = -1. \quad (7)$$

Воспользуемся первой парой формул (3):

$$\begin{aligned} U(X, Y) &= e^X \cos(-j i Y) = \\ &= e^X \frac{1}{2} (e^{(-j i)(-j i Y)} + e^{-(-j i)(-j i Y)}) = e^X \frac{1}{2} (e^{-Y} + e^Y) = \\ &= e^X \operatorname{ch} Y, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} V(X, Y) &= j i e^X \sin(-j i Y) = \\ &= -j i e^X \frac{1}{2 j i} (e^{(j i)(j i Y)} - e^{-(j i)(j i Y)}) = -e^X \frac{1}{2} (e^{-Y} - e^Y) = \\ &= e^X \operatorname{sh} Y. \end{aligned} \quad (9)$$

**Замечания:**

1. Если функции содержат комплексные (гиперболические) параметры, кроме комплексной (гиперболической) переменной, то эти параметры также необходимо подвергать преобразованиям (2), (3). При этом приходится рассматривать соответствующую функцию как функцию многих комплексных (двойных) переменных, например:

$$(a + ib)e^z \rightarrow (a + jb)e^Z.$$

2. Нельзя ожидать, что при преобразованиях (2), (3) любая формула имеет свой аналог, особенно, если эти формулы относятся к конкретным числам (содержат конкретные числа). Так, например,

$$e^{i\pi} = -1, \quad \text{но} \quad e^{j\pi} \neq -1. \quad (10)$$

То есть при преобразованиях (2), (3) и  $x = X$ ,  $y = Y$ , вообще говоря,  $u \neq U$  и  $v \neq V$ .

**3 Теорема Коши**

В теории функций комплексной переменной имеет место теорема Коши [6].

**Теорема Коши**

Пусть в односвязной области  $\mathcal{G}$  задана однозначная аналитическая функция  $F(z)$ . Тогда интеграл от этой функции  $F(z)$  по любому замкнутому контуру  $\Gamma$ , целиком лежащему в области  $\mathcal{G}$ , равен нулю.

Докажем, что аналогичная теорема справедлива и для аналитических функций двойной переменной. Интеграл по замкнутому контуру в этом случае запишется следующим образом:

$$\oint_{\Gamma} \Phi(Z) dZ = \oint_{\Gamma} U dX + V dY + j \oint_{\Gamma} V dX + U dY. \quad (11)$$

Для криволинейных интегралов второго рода по замкнутому контуру [7] на плоскости  $X, Y$  справедлива формула:

$$\oint_{\Gamma} P dX + Q dY = \int_{\mathcal{D}}^{(2)} \left\{ \frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial P}{\partial Y} \right\} dXdY, \quad (12)$$

где функции  $P(X, Y)$  и  $Q(X, Y)$  непрерывны в замкнутой области  $\bar{\mathcal{D}}$ , ограниченной кусочно-гладким контуром  $\Gamma$ , а их частные производные первого порядка непрерывны в  $\mathcal{D}$ . Частные производные функций  $U(X, Y)$  и  $V(X, Y)$  связаны соотношениями Коши–Римана, поэтому

$$\oint_{\Gamma} U dX + V dY = \int_{\mathcal{D}}^{(2)} \left\{ \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right\} dXdY = 0 \quad (13)$$

и

$$\oint_{\Gamma} V dX + U dY = \int_{\mathcal{D}}^{(2)} \left\{ \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial V}{\partial Y} \right\} dXdY = 0. \quad (14)$$

Таким образом,

$$\oint_{\Gamma} \Phi(Z) dZ = 0, \quad (15)$$

если функция  $\Phi(Z)$  — однозначная аналитическая функция двойной переменной, а контур  $\Gamma$  лежит в односвязной области аналитичности.

#### 4 Скорости

Для того, чтобы записать уравнения, которым подчиняются мировые линии материальных объектов, [8] надо определиться с выбором функции Финслера и функции  $\lambda(X, Y)$ . И хотя наблюдаемые величины не зависят от этого выбора, от него зависит конкретный вид некоторых формул.

Так как элемент длины в пространстве, конформно связанном с пространством двойных чисел, определяется формулой

$$ds = K(X, Y) \sqrt{(dX)^2 - (dY)^2}, \quad (16)$$

то компоненты импульса запишутся как

$$P_0 = K(X, Y) \frac{dX}{\sqrt{(dX)^2 - (dY)^2}}, \quad P_1 = -K(X, Y) \frac{dY}{\sqrt{(dX)^2 - (dY)^2}}. \quad (17)$$

Если мы хотим, чтобы получающиеся формулы напоминали формулы теории комплексного потенциала, то следует выбрать

$$\tilde{\Phi}(P; X) = P_0^2 - P_1^2 - K^2(X, Y), \quad \lambda(X, Y) = \frac{1}{2}, \quad (18)$$

тогда канонические уравнения для нахождения мировых линий [8] имеют вид:

$$\dot{X} = \frac{\partial U}{\partial X}, \quad \dot{Y} = -\frac{\partial U}{\partial Y}, \quad (19)$$

где

$$\dot{X} \equiv \frac{dX}{d\tau}, \quad \dot{Y} \equiv \frac{dY}{d\tau}, \quad (20)$$

а  $\tau$  — некий параметр вдоль мировой линии, параметр эволюции. В теории комплексного потенциала  $\tau$  — это абсолютное галилеево время. В теории гиперболического потенциала уже есть время

$$X \equiv X^0 \equiv c \cdot t, \quad (21)$$

где  $t$  — время, а  $c$  — скорость света. Выясним смысл параметра  $\tau$ :

$$\sqrt{\dot{X}^2 - \dot{Y}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2} \equiv K(X, Y), \quad (22)$$

где  $K(X, Y)$  — коэффициент растяжения–сжатия конформного преобразования в пространстве  $H_2$ , которое (преобразование) определяется аналитической функцией с компонентой  $U(X, Y)$  при единице базисе  $1, j$ . Таким образом, вдоль мировой линии в данном случае

$$\sqrt{dX^2 - dY^2} = K(X, Y) d\tau. \quad (23)$$

То есть  $\tau$  — это собственное время, умноженное на скорость света и отнесенное к конформному коэффициенту растяжения–сжатия:

$$d\tau = \frac{\sqrt{dX^2 - dY^2}}{K(X, Y)}. \quad (24)$$

Если мы хотим, чтобы уравнения, определяющие мировые линии в пространстве двойных чисел, по форме и физической интерпретации соответствовали формулам СТО, то следует выбрать

$$\tilde{\Phi}(P; X) = \sqrt{P_0^2 - P_1^2} - K(X, Y), \quad \lambda(X, Y) = 1, \quad (25)$$

тогда

$$\dot{X} = \frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2}}, \quad \dot{Y} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial Y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2}}, \quad (26)$$

где

$$\dot{X} \equiv \frac{dX}{d\tau}, \quad \dot{Y} \equiv \frac{dY}{d\tau}, \quad (27)$$

а  $\tau$  — параметр вдоль мировой линии. В этом случае параметр эволюции суть собственное время, умноженное на скорость света, так как

$$\sqrt{\dot{X}^2 - \dot{Y}^2} = 1, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{dX^2 - dY^2} = d\tau. \quad (28)$$

Как в первом случае выбора функции Финслера (18), так и во втором выборе (25) пространственная скорость, отнесенная к скорости света, материальных объектов, движение которых описывается аналитической функцией гиперболической переменной, имеет одну компоненту

$$\mathcal{V} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial Y}}{\frac{\partial U}{\partial X}}. \quad (29)$$

Подставим это выражение в формулы (26), получим

$$\dot{X} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathcal{V}^2}}, \quad \dot{Y} = \frac{\mathcal{V}}{\sqrt{1 - \mathcal{V}^2}}, \quad (30)$$

то есть (30) — две компоненты 2-скорости материального объекта.

Формулу (29) перепишем следующим образом:

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial Y}}{\frac{\partial U}{\partial X}}. \quad (31)$$

Можно решить это дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $Y(X)$ , и тогда мировые линии будут описываться уравнением

$$Y = Y(X).$$

Воспользоваться более простым путем, каким в теории комплексного потенциала находят линии тока. Используем соотношения Коши–Римана для аналитической функции  $U + jV$ , тогда из (31) следует

$$\frac{\partial V}{\partial X} dX + \frac{\partial V}{\partial Y} dY = 0. \quad (32)$$

В левой части уравнения стоит полный дифференциал функции  $V(X, Y)$ , поэтому мировые линии задаются неявным уравнением

$$V(X, Y) = V_0, \quad (33)$$

где  $V_0$  — действительный параметр, постоянный вдоль мировой линии. Разрешая уравнение (33) относительно  $Y$ , получим явную формулу для мировых линий на гиперболической плоскости:

$$Y = Y(X; V_0). \quad (34)$$

Формула (33) совпадает с формулой для неявного задания линий тока в теории комплексного потенциала.

## 5 Законы сохранения

Любая компонента аналитической функции двойной переменной удовлетворяет фундаментальному уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0 \quad (35)$$

— волновому двумерному уравнению, которое может быть получено из принципа экстремальности действия с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{C_0}{2} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 - \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \right], \quad (36)$$

где  $C_0$  — действительное число. Очевидно, что такой лагранжиан инвариантен относительно сдвигов по координатам  $X$ ,  $Y$  и гиперболического поворота на плоскости  $X, Y$ . А это означает, что имеют место три закона сохранения для физической системы, описываемой потенциалом  $U(X, Y)$ .

Введем обозначения:

$$X^0 \equiv X, \quad X^1 \equiv Y, \quad X^i \equiv (X, Y), \quad i = 0, 1. \quad (37)$$

Тогда тензор энергии импульса

$$T_i^j = \frac{\partial U}{\partial X^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial U}{\partial X^j} \right)} - \mathcal{L} \delta_i^j \quad (38)$$

запишется следующим образом:

$$T_i^j = C_0 \left\{ \frac{\partial U}{\partial X^i} g^{jk} \frac{\partial U}{\partial X^k} - \frac{1}{2} \delta_i^j \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial X^0} \right)^2 - \left( \frac{\partial U}{\partial X^1} \right)^2 \right] \right\}. \quad (39)$$

Законы сохранения импульса

$$\mathbb{P}_i = \int_{-\infty}^{\infty} T_i^0 dX^1, \quad \frac{d \mathbb{P}_i}{dX^0} = 0. \quad (40)$$

для поля, описываемого лагранжианом (36), принимают вид:

$$\mathbb{E} \equiv c \mathbb{P}_0 = C_0 \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \right] dY, \quad (41)$$

$$\mathbb{P}_1 = C_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial Y} dY. \quad (42)$$

Для того чтобы получить закон сохранения, который следует из инвариантности лагранжиана (36) относительно гиперболических поворотов, выпишем тензор момента количества движения

$$M^{jki} = \frac{1}{c} \left( X^j T_m^k - X^k T_m^j \right) g^{mi} \quad (43)$$

и связанный с ним закон сохранения

$$\mathbb{M}^{01} = \int_{-\infty}^{\infty} M^{010} dX^1 = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} (X^0 T_0^1 - X^1 T_0^0) dX^1, \quad \frac{d \mathbb{M}^{01}}{dX^0} = 0. \quad (44)$$

Для лагранжиана (36) этот закон сохранения принимает вид:

$$\mathbb{M}^{01} = -\frac{C_0}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ X \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{1}{2} Y \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \right] \right\} dY. \quad (45)$$

## 6 Пример

Рассмотрим аналитическую функцию гиперболической переменной

$$\Phi(Z) = \Phi_0 \operatorname{arctg} \left( \frac{X + jY}{a} \right) \equiv U(X, Y) + j V(X, Y), \quad (46)$$

где  $\Phi_0, a$  — действительные числа. Тогда

$$\Phi'(Z) = \Phi_0 \frac{a}{a^2 + (X + jY)^2} \equiv \frac{\partial U}{\partial X} + j \frac{\partial U}{\partial Y}, \quad (47)$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial X} = a\Phi_0 \frac{a^2 + X^2 + Y^2}{(X^2 - Y^2)^2 + 2a^2(X^2 + Y^2) + a^4}, \quad (48)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = a\Phi_0 \frac{-2XY}{(X^2 - Y^2)^2 + 2a^2(X^2 + Y^2) + a^4}. \quad (49)$$

Пространственная скорость, отнесенная к скорости света, материальных объектов, из которых состоит поле  $U$ , вычисляется по формуле (29):

$$\mathcal{V} = \frac{2XY}{a^2 + X^2 + Y^2}. \quad (50)$$

От точки к точке меняется не только скорость, но и масса покоя материальных объектов, составляющих рассматриваемое поле. С точностью до постоянной эта масса равна коэффициенту растяжения сжатия  $K(X, Y)$  (22). Для данного поля

$$K(X, Y) = |a\Phi_0| \frac{1}{\sqrt{(X^2 - Y^2)^2 + 2a^2(X^2 + Y^2) + a^4}}. \quad (51)$$

Для того чтобы найти мировые линии, воспользуемся формулой (33), но для этого нам вначале следует получить функцию  $V(X, Y)$  в формуле (46). Возьмем тангенс от левой и правой части этой формулы, получим

$$\frac{X + jY}{a} = \frac{\sin \left( \frac{U + jV}{\Phi_0} \right)}{\cos \left( \frac{U + jV}{\Phi_0} \right)}. \quad (52)$$

Откуда имеем

$$\frac{X}{a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{U}{\Phi_0} + \operatorname{tg} \frac{U}{\Phi_0} \operatorname{tg}^2 \frac{V}{\Phi_0}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{U}{\Phi_0} \operatorname{tg}^2 \frac{V}{\Phi_0}}, \quad \frac{Y}{a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{V}{\Phi_0} + \operatorname{tg} \frac{V}{\Phi_0} \operatorname{tg}^2 \frac{U}{\Phi_0}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{U}{\Phi_0} \operatorname{tg}^2 \frac{V}{\Phi_0}}. \quad (53)$$

Из второго соотношения (53) находим

$$\operatorname{tg}^2 \frac{U}{\Phi_0} = \frac{\frac{Y}{a} - \operatorname{tg} \frac{V}{\Phi_0}}{\operatorname{tg} \frac{V}{\Phi_0} + \frac{Y}{a} \operatorname{tg}^2 \frac{V}{\Phi_0}}. \quad (54)$$

Исключая из первого соотношения (53)  $\operatorname{tg} \frac{U}{\Phi_0}$ , приходим к квадратному уравнению относительно  $\operatorname{tg} \frac{V}{\Phi_0}$ :

$$\frac{Y}{a} \operatorname{tg}^2 \frac{V}{\Phi_0} + \left[ 1 + \left( \frac{X}{a} \right)^2 - \left( \frac{Y}{a} \right)^2 \right] \operatorname{tg} \frac{V}{\Phi_0} - \frac{Y}{a} = 0. \quad (55)$$

Для нахождения мировых линий можно разрешить это уравнение относительно  $\operatorname{tg} \frac{V}{\Phi_0}$  и воспользоваться формулой (33), но можно воспользоваться формулой (33), и не решая квадратное уравнение (55). Перепишем формулу (55) следующим образом:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{V}{\Phi_0}}{\operatorname{tg} \frac{V}{\Phi_0}} = \frac{1 + \left(\frac{X}{a}\right)^2 - \left(\frac{Y}{a}\right)^2}{\frac{Y}{a}}. \quad (56)$$

Приравняем правую часть (56) к постоянному параметру вдоль мировой линии, например, к  $(-2\nu_0)$  и получим уравнение описывающее мировые линии:

$$\left(\frac{Y}{a}\right) \Big|_{1,2} = \nu_0 \pm \sqrt{\nu_0^2 + 1 + \left(\frac{X}{a}\right)^2}. \quad (57)$$

### Законы сохранения

Вычислим энергию поля (41):

$$\mathbb{E} = \frac{C_0}{2} c a^2 \Phi_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(a^2 + X^2 + Y^2)^2 + 4X^2Y^2}{((X^2 - Y^2)^2 + 2a^2(X^2 + Y^2) + a^4)^2} dY = C_0 \frac{\pi \Phi_0^2 c}{4a^2}. \quad (58)$$

Остальные два закона сохранения дают нули:

$$\mathbb{P}_1 = 0, \quad \mathbb{M}^{01} = 0. \quad (59)$$

Таким образом, поле  $U(X, Y)$  (46) имеет конечную положительную энергию и как целое покоится, хотя отдельные его материальные точки движутся.

## 7 Заключение

В защиту такой необычной логики построений, что использовалась авторами выше и которая идет несколько вразрез со сложившейся практикой построения физических теорий, когда отталкиваются не столько от математики, сколько от опытов и наблюдений — можно привести известные слова А.Эйнштейна: "Весь предшествующий опыт убеждает нас в том, что природа представляет собой реализацию простейших математически мыслимых элементов. Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерные связи между ними, которые дадут нам ключ к пониманию явлений природы. Опыт может подсказать нам соответствующие математические понятия, но они ни в коем случае не могут быть выведены из него. Конечно, опыт остается единственным критерием пригодности математических конструкций в физике. Но настоящее творческое начало присуще именно математике. Поэтому я считаю в известной мере оправданной веру древних в то, что чистое мышление в состоянии постигнуть реальность." [5]

Как знать, быть может, в случае двойных чисел мы и увидим один из таких примеров, о которых предупреждал Эйнштейн?

## Литература

- [1] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973.
- [2] Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1977.
- [3] Павлов Д.Г. Хронометрия трехмерного времени // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (1), 2004, с. 20-32.
- [4] Павлов Д.Г. Четырехмерное время // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (1), 2004, с. 33-42.



- [5] Эйнштейн А. О методе теоретической физики. Собрание научных трудов, Том 4, М., Наука, 1967.
- [6] Свешников А.Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. М., Наука, 1967.
- [7] Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М., Наука, 1967.
- [8] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., ТЕТРУ, 2009.

## DOUBLE NUMBERS

D.G. Pavlov<sup>1</sup>, G.I. Garas'ko<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia*

<sup>2</sup> *Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia*

geom2004@mail.ru, gri9z@mail.ru

There is an attempt to show that there is much more in common between the complex numbers and the double (hyperbolically complex) numbers than it is usually thought to be. With this the new and non-trivial properties of the analytical functions of the double number variable are discovered. For example, there is a relation between these functions and the hyperbolic potential and solenoidal vector fields on the pseudo Euclidean plane. Besides, it is shown how many structures on the complex plane can be one-to-one mapped at their hyperbolic analogues. This repudiates the “magic” properties of the complex numbers, and particularly, leads to the understanding that the analytical functions of complex numbers can be given by two scalar functions not of two but of one real variable each.

**Key Words:** hypercomplex numbers, analytical functions, h-analytical functions, vector fields.

## АНАЛОГ ФОРМУЛЫ КОШИ В ПРОСТРАНСТВАХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛИЧИСЕЛ

Д.Г. Павлов<sup>1</sup>, Г.И. Гарасько<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

<sup>2</sup> ФГУП Всероссийский электротехнический институт, Москва, Россия

geom2004@mail.ru, gri9z@mail.ru

Получен аналог формулы Коши для невырожденных коммутативно-ассоциативных гиперкомплексных чисел (поличисел), включающих в качестве подалгебры алгебру комплексных чисел или прямую сумму  $m$  комплексных алгебр. При этом выявляются причины трудностей получения формулы Коши в поличислах  $H_n$ , являющихся прямыми суммами одних только действительных алгебр.

**Ключевые слова:** обобщение формулы Коши, гиперкомплексные числа, финслеровы пространства.

### 1 Введение

В теории функций комплексной переменной теорема и формула Коши играют чрезвычайно важную роль. Напомним формулировку теоремы Коши.

#### Теорема Коши

Пусть в односвязной области  $\mathcal{G}$  задана однозначная аналитическая функция  $F(z)$ . Тогда интеграл от этой функции  $F(z)$  по любому замкнутому контуру  $\Gamma$ , целиком лежащему в области  $\mathcal{G}$ , равен нулю.

Аналогичная теорема справедлива для любой системы поличисел  $X, Y, Z, \dots \in P_n$ . В работе [1] доказано, что из требования независимости интеграла

$$I[F(X)] = \int_A^B F(X) dX = e_k \cdot \int_A^B f^i(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^j p_{ij}^k \equiv 0 \quad (1)$$

от пути интегрирования, соединяющего точки  $A, B$  в области  $\mathcal{G}$ , и равенства его нулю, следуют соотношения Коши–Римана для функции  $F(X)$  поличисловой переменной  $X$ . Здесь  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — некоторый базис,

$$e_i \cdot e_j = p_{ij}^k e_k, \quad (2)$$

$x^i$  координаты поличисловой переменной  $X$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . А так как условия Коши–Римана необходимы и достаточны, для того чтобы функция  $F(X)$  поличисловой переменной была аналитической, то этот результат можно сформулировать как аналог теоремы Коши:

$$I[F(X)] = \oint_{\Gamma} F(X) dX = 0, \quad (3)$$

где замкнутый контур  $\Gamma$  лежит в области аналитичности функции  $F(X)$  поличисловой переменной.

### 2 Формула Коши

На комплексной плоскости справедлива формула Коши:

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{F(z)}{z - z_0} dz, \quad (4)$$

для любой аналитической функции  $F(z)$  комплексной переменной, если контур  $\Gamma$  лежит в области аналитичности функции  $F(z)$  и охватывает точку  $z_0$ , при этом обход контура производится так,

чтобы область внутри  $\Gamma$  всегда находилась слева. Вывод формулы Коши сводится к вычислению интеграла

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i, \quad (5)$$

Имеет ли место аналогичная формула для аналитических функций поличисловой переменной? И если имеет, то какие дополнительные нюансы следует учесть?

### 3 Аналог формулы Коши для невырожденных поличисел

Формально запишем интеграл по замкнутому контуру, фигурирующий справа в (1), в пространстве невырожденных поличисел  $P_{k+2 \cdot m} \ni Z$  для аналитической функции  $F(Z)$  поличисловой переменной и несколько его преобразуем:

$$\oint_{\Gamma} \frac{F(Z)}{Z - Z_0} dZ = \oint_{\Gamma} \frac{F(Z) - F(Z_0)}{Z - Z_0} dZ + \oint_{\Gamma} \frac{F(Z_0)}{Z - Z_0} dZ. \quad (6)$$

Так как  $F(Z)$  — аналитическая функция, то справедливо равенство

$$F(Z) - F(Z_0) = (Z - Z_0) \cdot \Phi(Z), \quad (7)$$

где  $\Phi(Z)$  — также аналитическая функция. Воспользовавшись теоремой Коши, получим

$$\oint_{\Gamma} \frac{F(Z)}{Z - Z_0} dZ = F(Z_0) \oint_{\Gamma} \frac{dZ}{Z - Z_0}. \quad (8)$$

Таким образом, все сводится к вычислению интеграла

$$I_0 \equiv \oint_{\Gamma} \frac{dZ}{Z - Z_0} \quad (9)$$

по замкнутому контуру  $\Gamma$ , "охватывающему" точку  $Z_0$  в пространстве  $P_{k+2 \cdot m}$  (правило построения замкнутого контура "охватывающего" точку в многомерном поличисловом пространстве будет введено ниже).

Сделаем замену переменной интегрирования, тогда

$$I_0 \equiv \oint_{\Gamma_0} \frac{dZ}{Z}, \quad (10)$$

где замкнутый контур  $\Gamma_0$  "охватывает" точку начала координат.

Для любой системы невырожденных поличисел  $P_{k+2 \cdot m}$  существует базис [2], [3]  $E_1 \equiv 1, E_2, \dots, E_k, E_{k+1}, \dots, E_n$ , в котором поличисла из конуса будущего можно записать в экспоненциальном виде

$$Z = |Z| \cdot \exp(\alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \dots + \alpha_n E_n), \quad (11)$$

где  $|Z|$  — модуль, а  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  — угловые переменные, причем эллиптические углы  $\alpha_{k+2}, \alpha_{k+4}, \dots, \alpha_n \in [0, 2\pi)$ , и при изменении любого из них на  $2\pi$  переменная  $Z$  возвращается в исходную точку поличислового пространства. Остальные угловые переменные гиперболические и изменяются от  $-\infty$  до  $+\infty$ . При изменении всех или нескольких гиперболических углов на любые значения поличисловая переменная никогда не возвращается к исходной точке.

Замкнутый контур интегрирования  $\Gamma_0$  в формуле (10) зададим параметрически: если  $\varphi$  — параметр, меняющийся вдоль замкнутого контура  $\Gamma_0$  от 0 до  $2\pi$ , тогда

$$\alpha_i = \alpha_i(\varphi), \quad (12)$$

где  $\alpha_i(\varphi)$  — функции одной действительной переменной. Модуль переменной  $Z$  будем считать постоянным и равным  $R > 0$ . Тогда, взяв интеграл (10) по замкнутому контуру  $\Gamma_0$ , получим

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \sum_{i=2}^n [\dot{\alpha}_i E_i] d\varphi = \sum_{i=2}^n [\alpha_i(2\pi) - \alpha_i(0)] E_i. \quad (13)$$

Так как эллиптические углы при замыкании контура должны меняться на 0 или  $2\pi$ , то для них

$$\alpha_i(2\pi) - \alpha_i(0) = 0, \pm 2\pi. \quad (14)$$

Гиперболические углы в начальной и конечной точке замкнутого контура должны иметь одинаковое значение, поэтому

$$\alpha_i(2\pi) - \alpha_i(0) = 0. \quad (15)$$

Таким образом,

$$I_0 = \sum_i' s_i \cdot 2\pi e_i \equiv 2\pi \cdot \sum_i' s_i e_i, \quad (16)$$

где индекс  $i$  при суммировании пробегает значения  $i = k + 2, k + 4, \dots, n$ ;  $e_{k+2}, e_{k+4}, \dots, e_n$  —  $m$  базисных векторов изотропного базиса [2], [3]; величины  $s_i$  независимо могут иметь одно из трех значений  $s_i = -1, 0, 1$ , но не обращаются в нуль все одновременно.

В том случае, когда  $I_0 \neq 0$  — будем говорить, что замкнутый контур  $\Gamma_0$  в невырожденном поличисловом пространстве  $P_{k+2 \cdot m}$  "охватывает" точку  $Z_0$ . Поэтому для поличисел с  $m = 0$  без их комплексификации получение аналога формулы Коши вызывает определенные трудности.

Если замкнутый контур  $\Gamma_0$  в невырожденном поличисловом пространстве  $P_{k+2 \cdot m}$  размерности  $n = k + 2 \cdot m$  "охватывает" точку  $Z_0$ , то при  $n > 2$  на этот контур всегда можно натянуть поверхность размерности  $r$ ,  $2 \leq r \leq (n - 1)$  такую, что этой поверхности будет принадлежать не только сам контур  $\Gamma_0$ , разбивая поверхность на внутреннюю и внешнюю части, но и точка  $Z_0$  будет принадлежать внутренней части. Поэтому для каждого контура  $\Gamma_0$  из двух возможных выбирается единственное правило обхода: обход контура производится так, чтобы область внутри  $\Gamma_0$  всегда находилась слева. Тогда число  $N$  различных типов контуров  $\Gamma_0$  в невырожденном поличисловом пространстве  $P_{k+2 \cdot m}$  определяется формулой:

$$N = \frac{3^m - 1}{2}. \quad (17)$$

Для любой аналитической функции  $F(Z)$  невырожденной поличисловой переменной, если контур  $\Gamma$  лежит в области аналитичности функции  $F(Z)$  и охватывает точку  $Z_0$ , справедлива формула

$$\oint_{\Gamma} \frac{F(Z)}{Z - Z_0} dZ = 2\pi \cdot \sum_i' s_i e_i \cdot F(Z_0). \quad (18)$$

Эту формулу можно называть аналогом формулы Коши в пространстве невырожденных поличисел.

Если поличисло  $\sum_i' s_i e_i$  не является делителем нуля, то аналог формулы Коши можно представить в виде:

$$F(Z_0) = \frac{1}{2\pi \cdot \sum_i' s_i e_i} \oint_{\Gamma} \frac{F(Z)}{Z - Z_0} dZ. \quad (19)$$

Такая запись формулы Коши обычно используется и для комплексных чисел. Количество поличисел, не являющихся делителями нуля в суммах  $\sum_i' s_i e_i$ , равно  $2^m$ , а с учетом принятого правила обхода контура —  $2^{m-1}$ .

#### 4 Пример

Рассмотрим пространство  $P_{0+2,2}$  ( $k = 0, m = 2$ ). Таблица умножения для элементов изотропного базиса [2], [3]  $e_1, e_2, e_3, e_4$  имеет вид:

$\times$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	$e_1$	$e_2$	0	0
$e_2$	$e_2$	$-e_1$	0	0
$e_3$	0	0	$e_3$	$e_4$
$e_4$	0	0	$e_4$	$-e_3$

(20)

Если не выбирать правило обхода контура  $\Gamma$ , получим восемь различных значений суммы  $\sum_i^l s_i e_i$  в формуле (18):

$$\sum_i^l s_i e_i = -e_2, e_2, -e_4, e_4, e_2 + e_4, e_2 - e_4, -e_2 + e_4, -e_2 - e_4. \quad (21)$$

Перейдем к базису  $1, i, j, ij$ , в котором очевидно, что рассматриваемая алгебра поличисел является удвоением комплексных чисел с помощью гиперболической мнимой единицы  $j$ , или удвоением двойных чисел с помощью эллиптической мнимой единицы  $i$ :

$$1 = e_1 + e_3, \quad i = e_2 + e_4, \quad j = e_1 - e_3, \quad ij = e_2 - e_4, \quad (22)$$

$\times$	$1$	$i$	$j$	$ij$
$1$	$1$	$i$	$j$	$ij$
$i$	$i$	$-1$	$ij$	$-j$
$j$	$j$	$ij$	$1$	$i$
$ij$	$ij$	$-j$	$i$	$-1$

(23)

В новом базисе те же самые значения (21) суммы  $\sum_i^l s_i e_i$  переписутся следующим образом:

$$\sum_i^l s_i e_i = -\frac{1}{2}(i + ij), \frac{1}{2}(i + ij), -\frac{1}{2}(i - ij), \frac{1}{2}(i - ij), i, ij, -ij, -i. \quad (24)$$

Выбранному правилу обхода контура  $\Gamma$  будут соответствовать четыре из этих значений:

$$\sum_i^{l+} s_i e_i = \frac{1}{2}(i + ij), \frac{1}{2}(i - ij), i, ij. \quad (25)$$

Таким образом, формула (18) в пространстве  $P_{0+2,2}$  существует в четырех вариантах:

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{F(Z)}{Z - Z_0} dZ = 2\pi i F(Z_0), \quad (26)$$

$$\oint_{\Gamma_2} \frac{F(Z)}{Z - Z_0} dZ = 2\pi ij F(Z_0), \quad (27)$$

$$\oint_{\Gamma_3} \frac{F(Z)}{Z - Z_0} dZ = \pi(i + ij)F(Z_0), \quad (28)$$

$$\oint_{\Gamma_4} \frac{F(Z)}{Z - Z_0} dZ = \pi(i - ij)F(Z_0). \quad (29)$$

Так как поличисла  $\frac{1}{2}(i + ij)$ ,  $\frac{1}{2}(i - ij)$  являются делителями нуля, то для формулы (19) возможны лишь два варианта:

$$F(Z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{F(Z)}{Z - Z_0} dZ, \quad (30)$$

$$F(Z_0) = \frac{1}{2\pi ij} \oint_{\Gamma_2} \frac{F(Z)}{Z - Z_0} dZ. \quad (31)$$

## 5 Заключение

Получение аналога формулы Коши для невырожденных поличисел, включающих в качестве под-алгебры алгебру комплексных чисел или прямую сумму  $m$  комплексных алгебр, по-видимому, открывает путь к построению обобщения теории функций комплексной переменной на соответствующие многокомпонентные алгебры и связанные с ними многомерные финслеровы пространства. Особый интерес представляет изучение алгебры являющейся прямой суммой четырех комплексных алгебр, которой соответствует финслерово пространство с метрической функцией Бервальда–Моора над полем комплексных чисел.

## Литература

- [1] Гарасько Г.И. Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (1), т. 1, 2004, с. 75-88.
- [2] Гарасько Г.И., Павлов Д.Г. Геометрия невырожденных поличисел // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (7), т. 4, 2007, с. 3-25.
- [3] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., ТЕТРУ, 2009.

## ANALOG OF THE CAUCHY'S FORMULA IN NON-DEGENERATE POLYNUMBERS SPACES

D.G. Pavlov<sup>1</sup>, G.I. Garas'ko<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friaizino, Russia*

<sup>2</sup> *Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia*

geom2004@mail.ru, gri9z@mail.ru

Obtained was an analog for Cauchy's formula for non-degenerate commutative-associative hypercomplex numbers (polynumbers), including algebra of complex numbers or direct sum of complex algebras as means of subalgebra. Therewith manifested are the reasons why Cauchy's formula in polynumbers  $H_n$  which are the direct sums of nothing but actual algebras is so hard to obtain.

**Key Words:** Cauchy's formula generalization, hypercomplex numbers, Finsler spaces.

# ТОЖДЕСТВЕННО РАЗРЕШИМЫЕ ФИНСЛЕРОВЫ ГЕОМЕТРИИ

Г.И. Гарасько

ФГУП Всероссийский электротехнический институт, Москва, Россия  
НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

gri9z@mail.ru, gri9z.wordpress.com

Предложен алгоритм поиска тождественно разрешимых финслеровых геометрий, который позволяет находить и некоторые разрешимые финслеровы геометрии, не являющиеся тождественно разрешимыми. Такой алгоритм тесно связан с отображением пространства, на единицу меньшей размерности, чем размерность самого финслерова пространства, на себя. Причем это отображение должно совпадать с себе обратным и обладать еще рядом свойств. Для пространств произвольной размерности тождественному отображению соответствует евклидово пространство, отображению с изменением знака у всех координат — псевдоевклидово пространство и отображению с инверсией всех координат соответствует пространство с метрикой Бервальда-Моора.

**Ключевые слова:** финслерова геометрия, тождественная разрешимость финслеровых пространств, отображение, евклидово пространство, псевдоевклидово пространство, пространство с метрикой Бервальда-Моора, метрическая функция.

## 1 Введение

Невырожденные квадратичные и поличисловые геометрии являются разрешимыми [1]. Это понятие было введено вначале для однородных форм и финслеровых пространств, определяемых через эти формы. Так если  $m > 1$ ,  $\xi^1 \xi^2 \dots \xi^n$  — касательное пространство в точке  $M(x^1 x^2 \dots x^n)$   $n$ -мерного финслерова пространства  $x^1 x^2 \dots x^n$  с метрической функцией

$$L(\xi; x) = \sqrt[m]{g_{i_1 i_2 \dots i_m}(x) \xi^{i_1} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_m}} \quad (1)$$

и тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать в виде

$$g^{i_1 i_2 \dots i_m}(x) p_{i_1 i_2 \dots i_m} - const = 0, \quad (2)$$

где  $p_i$  — компоненты обобщенного импульса, то финслерова пространство с метрической функцией (1) называется разрешимым. При условии, что найдется такая система координат в которой матрицы  $(g_{i_1 i_2 \dots i_m}(x))$ ,  $(g^{i_1 i_2 \dots i_m}(x))$  совпадают и в формуле (2)  $const = 1$ , формально точечное уравнение индикатрисы и тангенциальное уравнение индикатрисы выражаются через метрическую функцию и записываются единообразно:

$$L(\xi; x) = 1, \quad L(p; x) = 1.$$

В этом случае будем говорить, что финслерова геометрия с метрической функцией  $L(\xi; x)$  **тождественно разрешима**.

Финслерова геометрия с метрической функцией  $L(\xi; x)$  **тождественно разрешима**, если найдется такая система координат, в которой точечное и тангенциальное уравнения индикатрисы можно записать в виде:

$$L(\xi; x) = 1, \quad L(p; x) = 1, \quad (3)$$

где  $L$  — в обоих случаях одна и та же функция  $2n$  действительных переменных. **Замечание:** одновременное выполнение уравнений (3) возможно не в любой систем координат, а лишь в специальной системе (или специальных системах) координат, так как  $\xi$  — контравариантный, а  $p$  — ковариантный тензор. Финслерова геометрия, описывающая движение нерелятивистской частицы массы  $m$  в потенциальном поле  $U(t, x, y, z)$  имеет метрическую функцию [1]:

$$L(dt, dx, dy, dz) = mc^2 dt - m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2 dt} + U(t, x, y, z) dt. \quad (4)$$

В касательном пространстве  $\xi_t, \xi_x, \xi_y, \xi_z$  точечное уравнение индикатрисы запишется следующим образом:

$$mc^2 \xi_t - m \frac{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}{2 \xi_t} + U(t, x, y, z) \xi_t = h_1, \quad (5)$$

где  $h_1$  — единица длины в рассматриваемом финслеровом пространстве. Тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать в виде:

$$p_t = mc^2 + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + U(t, x, y, z), \quad (6)$$

или в виде:

$$mc^2 \frac{1}{p_t} + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m p_t} + U(t, x, y, z) \frac{1}{p_t} = 1. \quad (7)$$

Таким образом, в данном пространстве точечное и тангенциальное уравнения индикатрисы в некоторой специальной системе координат можно записать следующим образом:

$$L(\xi_t, \xi_x, \xi_y, \xi_z; t, x, y, z) = h_1, \quad L'(p_t, p_x, p_y, p_z; t, x, y, z) = h_2, \quad (8)$$

где  $h_2$  — некоторая константа, а

$$L(\eta_t, \eta_x, \eta_y, \eta_z; t, x, y, z), \quad L'(\eta_t, \eta_x, \eta_y, \eta_z; t, x, y, z) \quad (9)$$

— "весьма похожие" функции, принадлежащие, как мы будем говорить, некоторому фиксированному классу функций. Поэтому такую финслерову геометрию также можно считать разрешимой финслеровой геометрией.

Финслерова геометрия с метрической функцией  $L(\xi; x)$  *разрешима* в классе функций  $\mathfrak{F}$ , если найдется такая система координат, в которой точечное и тангенциальное уравнения индикатрисы можно записать в виде:

$$L(\xi; x) = h_1, \quad L'(p; x) = h_1, \quad (10)$$

где  $h_1, h_2$  — числовые постоянные, а  $L, L' \in \mathfrak{F}$ . Понятие *разрешимости* финслеровой геометрии содержит в себе некоторую неоднозначность, а именно: выбор класса функций  $\mathfrak{F}$ . Обычно бывает интуитивно понятно, как выбирать множество  $\mathfrak{F}$  в каждом конкретном случае. Неразрешимыми финслеровыми пространствами будем называть пространства, для которых функция Финслера в любой системе координат и при любой записи тангенциального уравнения индикатрисы качественно отличается от метрической функции. Такие пространства не содержат "значимых" групп симметрии, хотя разрешимые пространства также могут не содержать "значимых" групп симметрии. Понятия разрешимости и особенно неразрешимости финслеровых пространств требуют уточнения. Понятие же *тождественно разрешимого* финслерова пространства вполне однозначно, поэтому удобнее (правильнее) искать *тождественно разрешимые* финслеровы пространства, а затем с их помощью строить *разрешимые* финслеровы пространства в некотором классе функций  $\mathfrak{F}$ . Например, если метрическая функция  $L(x; \xi)$  определяет *тождественно разрешимую* финслерову геометрию, то метрическая функция

$$L'(x; \xi) \equiv \kappa(x)L(x; \xi), \quad \kappa(x) > 0,$$

конформно связанного [2] с исходным, финслерова пространства определяет в том же координатном пространстве *разрешимую* финслерову геометрию, так как точечное и тангенциальное уравнения индикатрисы имеют в этом случае вид:

$$L'(\xi; x) = h_1, \quad L'(p; x) = h_1 \cdot \kappa(x).$$

Приведем пример финслеровой геометрии, которую можно обоснованно назвать *неразрешимой финслеровой геометрией*. В пространстве  $x^1, x^2, x^3, x^4$  определим финслерову геометрию, задав элемент длины

$$ds = \sqrt[4]{(dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 + (dx^4)^4}. \quad (11)$$



Естественно выбрать класс функций  $\mathfrak{F} \ni L, L'$  как множество функций от  $P_4(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ , или  $P'_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$  — однородных полиномов четвертого порядка, например:

$$L(\xi) = \sqrt[4]{\omega_{i_1 i_2 i_3 i_4} \xi^{i_1} \xi^{i_2} \xi^{i_3} \xi^{i_4}}, \quad L'(p) = \sqrt[4]{\omega^{i_1 i_2 i_3 i_4} p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3} p_{i_4}}, \quad (12)$$

где  $\omega_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ ,  $\omega^{i_1 i_2 i_3 i_4}$  — числовые тензоры, а  $p_i$  — компоненты обобщённого импульса, в данном случае

$$p_i = \frac{(dx^i)^3}{[(dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 + (dx^4)^4]^{\frac{3}{4}}}. \quad (13)$$

Метрическая функция, фигурирующая в формуле (11), относится к определенному выше классу функций  $\mathfrak{F}$ .

Тангенциальное уравнение индикатрисы для финслеровой геометрии с элементом длины (11) можно записать как

$$p_1^{\frac{4}{3}} + p_2^{\frac{4}{3}} + p_3^{\frac{4}{3}} + p_4^{\frac{4}{3}} - 1 = 0. \quad (14)$$

Оно не может быть с помощью преобразования координат или перехода к эквивалентному уравнению приведено к виду

$$\sqrt[4]{\omega^{i_1 i_2 i_3 i_4} p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3} p_{i_4}} = h_2, \quad (15)$$

или к виду

$$F(\omega^{i_1 i_2 i_3 i_4} p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3} p_{i_4}) = h_2, \quad (16)$$

где  $F(y)$  — функция одной действительной переменной  $y$ , а поэтому рассматриваемое финслерово пространство является неразрешимым в классе функций  $\mathfrak{F}$ .

Такое финслерово пространство, кроме группы сдвигов, не обладает другими непрерывными линейными преобразованиями, сохраняющими метрику. А группа конформных преобразований, кроме преобразований сдвига, содержит единственное непрерывное преобразование — общее масштабное преобразование.

## 2 Тождественно разрешимые двумерные финслеровы пространства

Рассмотрим двумерное финслерово пространство  $x, y$  с метрической функцией  $L(\xi, \eta; x, y)$ , где  $\xi, \eta$  — касательное пространство в точке  $(x, y)$  основного пространства. Так как функция  $L(\xi, \eta; x, y)$  по первым двум аргументам является положительно однородной первого порядка, то в области  $\xi > 0$

$$L(\xi, \eta; x, y) = \xi L\left(1, \frac{\eta}{\xi}; x, y\right) \equiv \xi f\left(\frac{\eta}{\xi}\right), \quad (17)$$

где  $f$  — функция одного действительного аргумента, переменные  $x, y$  будем считать параметрами. Компоненты обобщенного импульса определяются формулами:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \xi} = f\left(\frac{\eta}{\xi}\right) - \left(\frac{\eta}{\xi}\right) \dot{f}\left(\frac{\eta}{\xi}\right), \quad q = \frac{\partial L}{\partial \eta} = \dot{f}\left(\frac{\eta}{\xi}\right). \quad (18)$$

Для того чтобы метрическая функция  $L(\xi, \eta; x, y)$  определяла тождественно разрешимую финслеру геометрию, необходимо выполнение условия

$$\left[f\left(\frac{\eta}{\xi}\right) - \left(\frac{\eta}{\xi}\right) \dot{f}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)\right] \cdot f\left[\frac{\dot{f}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}{f\left(\frac{\eta}{\xi}\right) - \left(\frac{\eta}{\xi}\right) \dot{f}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}\right] = 1. \quad (19)$$

Введем обозначение

$$z \equiv \frac{\eta}{\xi}. \quad (20)$$

Тогда уравнение (19) для функции  $f(z)$  одной действительной переменной  $z$  переписется следующим образом:

$$\left[f(z) - z \dot{f}(z)\right] \cdot f\left[\frac{\dot{f}(z)}{f(z) - z \dot{f}(z)}\right] = 1. \quad (21)$$

Перейдем к новой неизвестной функции

$$\varphi(z) \equiv \frac{\dot{f}(z)}{f(z) - z\dot{f}(z)}, \quad (22)$$

через которую, если  $\varphi(z)$  не равна тождественно  $\left(-\frac{1}{z}\right)$ , функция  $f(z)$  выражается по формуле:

$$f(z) = f_0 \exp \left( \int_{z_0}^z \frac{\varphi(z)}{1 + z\varphi(z)} dz \right). \quad (23)$$

Подставим (23) в (21) и получим

$$\frac{f(z) \cdot f(\varphi(z))}{1 + z \cdot \varphi(z)} = 1. \quad (24)$$

Из последних двух формул следует необходимость выполнения условия

$$1 + z \cdot \varphi(z) > 0. \quad (25)$$

Используя формулу (23), уравнение (22) можно свести к виду:

$$\frac{\dot{\varphi}(z) \cdot \varphi(\varphi(z))}{1 + \varphi(z) \cdot \varphi(\varphi(z))} = \frac{z \cdot \dot{\varphi}(z)}{1 + z \cdot \varphi(z)}. \quad (26)$$

Если  $\dot{\varphi}(z) \equiv 0 \Rightarrow \varphi(z) \equiv \varphi_0 = const$ , то из формулы (23) получим, что функция (17) не может являться метрической функцией двумерного финслерова пространства. Так как в этом случае

$$L(\xi, \eta) = f_0 \cdot (\xi + \varphi_0 \eta) \Rightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \equiv 0.$$

Здесь  $i, j = 1, 2$ ,  $\xi^1 \equiv \xi$ ,  $\xi^2 \equiv \eta$ . Таким образом,

$$r \equiv \text{rang} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \right) = 0,$$

А для двумерного финслерова пространства необходимо выполнение требования  $r = 1$ . Поэтому, сокращая левую и правую части уравнения (26) на  $\dot{\varphi}(z)$ , избавляясь от знаменателей и приводя подобные, получим уравнение, которому должна удовлетворять (необходимое, но не достаточное условие) функция  $\varphi(z)$ :

$$\varphi(\varphi(z)) = z. \quad (27)$$

Если функция  $\varphi(z)$  удовлетворяет этому уравнению, то из того, что в рассматриваемой области знаменатель в правой части формулы (26) не обращается в нуль и строго больше нуля, следует, что и знаменатель в левой части формулы (26) не обращается в нуль и строго больше нуля.

### Линейная функция

Пусть

$$\varphi(z) = a + bz, \quad (28)$$

где  $a, b$  — действительные числа. Тогда

$$\varphi(\varphi(z)) = a + ab + b^2 z. \quad (29)$$

Так как  $\varphi(z) = const$  не дает метрическую функцию финслеровой геометрии, то считаем  $b \neq 0$ . Тогда на множестве линейных функций функциональное уравнение (27) имеет три решения:

$$\varphi(z) = z; \quad -z; \quad a - z. \quad (30)$$

Первое решение:  $\varphi(z) = z$  — приводит к метрической функции  $L(\xi, \eta) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  тождественно разрешимой финслеровой геометрии — евклидовой двумерной плоскости.

Второе решение:  $\varphi(z) = -z$  — приводит к метрической функции  $L(\xi, \eta) = \sqrt{\xi^2 - \eta^2}$  тождественно разрешимой финслеровой геометрии — гиперболической двумерной плоскости.

Третье решение:  $\varphi(z) = a - z$  — исследуем более подробно. Используя формулу (23), получим

$$f(z) = f_0 \exp \left( \int_{z_0}^z \frac{a - z}{1 + az - z^2} dz \right) = f_0 |z - z_1|^{-\frac{z_2}{z_1 - z_2}} |z - z_2|^{\frac{z_1}{z_1 - z_2}}, \quad (31)$$

где знаки модулей следует понимать как выбор области интегрирования, а

$$z_1 = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}, \quad z_2 = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}. \quad (32)$$

Подставляя (31) в (24) и учитывая, что

$$a - z_1 = z_2, \quad a - z_2 = z_1, \quad (33)$$

получим

$$(f_0')^2 \frac{|z - z_1||z - z_2|}{1 + az - z^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad f_0' = 1, \quad z_2 < z < z_1. \quad (34)$$

Поэтому

$$f(z) = (z_1 - z)^{-\frac{z_2}{z_1 - z_2}} (z - z_2)^{\frac{z_1}{z_1 - z_2}} \quad (35)$$

и

$$L(\xi, \eta) = \xi f \left( \frac{\eta}{\xi} \right) = (z_1 \xi - \eta)^{-\frac{z_2}{z_1 - z_2}} (\eta - z_2 \xi)^{\frac{z_1}{z_1 - z_2}}. \quad (36)$$

При  $a \neq 0$  пространство с такой метрической функцией не является гиперболической плоскостью. Метрическая функция (36) зависит от одного параметра  $a$ , который может быть функцией точки основного пространства.

### Дробно–линейная функция

Пусть  $\varphi(z)$  — дробно–линейное преобразование

$$\varphi(z) = \frac{a + bz}{c + dz}, \quad (37)$$

причем  $d \neq 0$ , так как при  $d = 0$  функция (37) превращается в линейную. Если  $c = -b$  и  $ad + b^2 \neq 0$ , то необходимое условие (27) выполняется. Таким образом, строить тождественно разрешимые двумерные финслеровы геометрии можно, используя дробно линейные функции:

$$\varphi(z) = \frac{a + bz}{-b + dz}, \quad ad + b^2 \neq 0, \quad d \neq 0. \quad (38)$$

В качестве примера рассмотрим лишь одну функцию из этого класса:

$$\varphi(z) = \frac{\gamma}{z}, \quad \gamma > 0. \quad (39)$$

Подставим ее в формулу (23) и, считая  $z > 0$ , получим:

$$f(z) = f_0 \exp \left( \frac{\gamma}{1 + \gamma} \int_1^z \frac{dz}{z} \right) = f_0 z^{\frac{\gamma}{1 + \gamma}}. \quad (40)$$

Для того чтобы функция  $f(z)$ , построенная с помощью функции  $\varphi(z)$ , определяла тождественно разрешимую финслерову геометрию, необходимо выполнение соотношения (24), которое приводит нас к условию:

$$f_0^2 \frac{\gamma^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}}{1+\gamma} = 1, \quad (41)$$

или

$$f_0 = \sqrt{\frac{1+\gamma}{\gamma^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}}}. \quad (42)$$

Таким образом, мы получили двумерную тождественно разрешимую финслерову геометрию с метрической функцией

$$L(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{1+\gamma}{\gamma^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}}} \xi^{\frac{1}{1+\gamma}} \eta^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}. \quad (43)$$

Если  $\gamma = 1$ , то

$$L(\xi, \eta) = \sqrt{2} \sqrt{\xi\eta}.$$

### 3 Тождественно разрешимые $n$ -мерные финслеровы пространства

Распространим предложенный алгоритм нахождения тождественно разрешимых двумерных финслеровых пространств на размерности  $n > 2$ . Будем искать метрические функции в виде:

$$L(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}) = \xi^0 \cdot f(z^1, z^2, \dots, z^{n-1}), \quad (44)$$

где  $\xi^0 > 0$ ,  $z^\mu \equiv \frac{\xi^\mu}{\xi^0}$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, n-1$ . Тогда

$$p_0 = f - z^\mu \frac{\partial f}{\partial z^\mu}, \quad p_\alpha = \frac{\partial f}{\partial z^\alpha}, \quad (45)$$

а из требования (3) получим уравнение для определения функции  $f(z)$ :

$$\left( f - z^\mu \frac{\partial f}{\partial z^\mu} \right) \cdot f \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial z^1}}{f - z^\mu \frac{\partial f}{\partial z^\mu}}, \frac{\frac{\partial f}{\partial z^2}}{f - z^\mu \frac{\partial f}{\partial z^\mu}}, \dots, \frac{\frac{\partial f}{\partial z^{n-1}}}{f - z^\mu \frac{\partial f}{\partial z^\mu}} \right) = 1. \quad (46)$$

Рассмотрим функции

$$\varphi_\beta(z^1, z^2, \dots, z^{n-1}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z^\beta}}{f - z^\mu \frac{\partial f}{\partial z^\mu}}. \quad (47)$$

Если

$$1 + \varphi_\mu \cdot z^\mu \neq 0, \quad (48)$$

то

$$\frac{\partial f}{\partial z^\alpha} = \frac{\varphi_\alpha}{1 + \varphi_\mu \cdot z^\mu} \cdot f. \quad (49)$$

Это означает, что

$$dU = \frac{\varphi_\alpha}{1 + \varphi_\mu \cdot z^\mu} \cdot dz^\alpha \quad (50)$$

суть полный дифференциал и что

$$f(z) = f_0 \cdot \exp(U(z)), \quad f_0 = \text{const} > 0. \quad (51)$$

Уравнение (46) переписывается следующим образом:

$$\frac{f(z) \cdot f(\varphi(z))}{1 + z^\mu \cdot \varphi_\mu(z)} = 1. \quad (52)$$

Откуда видно, что знаменатель в этой формуле не только не равен нулю (48), но и должен быть строго положительным:

$$1 + \varphi_\mu \cdot z^\mu > 0. \quad (53)$$

Прологарифмируем уравнение (52), а затем продифференцируем по  $x^\alpha$ , получим систему из  $(n - 1)$ -го соотношения:

$$\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z^\alpha} \left[ \varphi_\beta(\varphi) - z^\beta + \varphi_\mu z^\mu \varphi_\beta(\varphi) - \varphi_\mu \varphi_\mu(\varphi) z^\beta \right] = 0. \quad (54)$$

Если

$$\det \left( \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z^\alpha} \right) \neq 0, \quad (55)$$

то из соотношений (54) следует, что все выражения, стоящие в квадратных скобках, равны нулю. Откуда получим

$$\varphi_\beta(\varphi(z)) = z^\beta. \quad (56)$$

### Результат

Чтобы метрическая функция (44) определяла тождественно разрешимое  $n$ -мерное финслерово пространство, функции  $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_{n-1}(z)$  должны удовлетворять системе функциональных уравнений (56).

### Алгоритм

Чтобы найти метрическую функцию тождественно разрешимой  $n$ -мерной финслеровой геометрии необходимо:

1. Найти преобразование  $(n - 1)$ -мерного пространства на себя, которое бы совпадало с обратным (56) и для которого бы  $dU$  (50) являлся полным дифференциалом.
2. Построить функцию  $f(z)$  (51).
3. Выполнить уравнение (52).
4. Проверить, что метрическая функция (44) определяет финслерову геометрию.

Пусть  $\varphi_\mu(z) = z^\mu$ , то есть имеет место тождественное преобразование  $z^\mu \xrightarrow{1} z^\mu$ , тогда как следствие получаем метрическую функцию евклидова  $n$ -го пространства:

$$L(\xi) = \sqrt{(\xi^0)^2 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + \dots + (\xi^{n-1})^2}. \quad (57)$$

Пусть  $\varphi_\mu(z) = -z^\mu$ , то есть имеет место преобразование  $z^\mu \xrightarrow{j} -z^\mu$ , которое изменяет только знак у всех координат, тогда как следствие получаем метрическую функцию псевдоевклидова  $n$ -го пространства с сигнатурой  $(+, -, -, \dots, -)$ :

$$L(\xi) = \sqrt{(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - \dots - (\xi^{n-1})^2}. \quad (58)$$

Пусть  $\varphi_\mu(z) = \frac{1}{z^\mu}$ , то есть имеет место преобразование инверсии каждой координаты  $z^\mu \xrightarrow{k} \frac{1}{z^\mu}$ , тогда как следствие получаем метрическую функцию  $n$ -го пространства Бервальда–Моора:

$$L(\xi) = f_0 \sqrt[n]{\xi^0 \xi^1 \xi^2 \dots \xi^{n-1}}. \quad (59)$$

Для того чтобы преобразования  $1, j, k$  составляли группу, их следует дополнить при  $n > 2$  преобразованием  $jk$ :

$$\varphi_\mu(z) = -\frac{1}{z^\mu}, \quad (60)$$

то есть преобразованием  $z^\mu \xrightarrow{jk} -\frac{1}{z^\mu}$ . Та как для такого преобразования не выполняется условие (53), то оно не приводит к тождественно разрешимой финслеровой геометрии. Покажем, что все же ему соответствует разрешима финслерова геометрия.

Подставим (60) в (50), тогда

$$L(\xi) = f_0 \sqrt[n-2]{\frac{\xi^1 \xi^2 \dots \xi^{n-1}}{\xi^0}}, \quad (61)$$

$$p_0 = -\frac{1}{n-2} \cdot \frac{L}{\xi^0}, \quad p_\mu = \frac{1}{n-2} \cdot \frac{L}{\xi^\mu}. \quad (62)$$

Определим функцию

$$L'(\xi) = f_0 \sqrt[n-2]{-\frac{\xi^1 \xi^2 \dots \xi^{n-1}}{\xi^0}}, \quad (63)$$

и выберем  $f_0 = \sqrt{n-2}$ , тогда тангенциальное уравнение индикатрисы для рассматриваемого финслерова пространства имеет вид

$$L'(p) = 1, \quad (64)$$

и такую геометрию вполне можно назвать разрешимой. Она обладает  $(n-1)$ -параметрической однородной линейной непрерывной группой изометрической симметрии и бесконечно параметрической группой конформных преобразований.

Отметим следующий занимательный факт. Рассмотренные выше преобразования  $1, j, k, jk$   $(n-1)$ -мерного пространства образуют группу. Составим для них таблицу Кели

$\times$	<b>1</b>	<b>j</b>	<b>k</b>	<b>jk</b>	
<b>1</b>	1	$j$	$k$	$jk$	
<b>j</b>	$j$	1	$jk$	$k$	). (65)
<b>k</b>	$k$	$jk$	1	$j$	
<b>jk</b>	$jk$	$k$	$j$	1	

Она совпадает с таблицей Кели для "ортонормированного" (физического) базиса  $1, j, k, jk$  поличисел  $H_4$ . Как известно, четырехмерное пространство  $H_4$  является финслеровым с метрикой Бервальда–Моора.

#### 4 Заключение

В настоящей работе дан алгоритм поиска *тождественно разрешимых финслеровых геометрий*, который позволяет находить и некоторые разрешимые финслеровы геометрии, не являющиеся тождественно разрешимыми. Такой алгоритм тесно связан с отображением пространства, на единицу меньшей размерности, чем размерность самого финслерова пространства, на себя. Причем это отображение должно совпадать с обратным и обладать еще рядом свойств. При обосновании алгоритма для финслеровых пространств размерности больше двух без доказательства использовалась гипотеза, которая для двумерных пространств выполняется очевидным образом.

#### Гипотеза

При невыполнении условия (55) метрическая функция (44) не соответствует финслерову пространству.

#### Другая формулировка

Для того чтобы метрическая функция (44) определяла финслерову геометрию необходимо выполнение условия (55).

Тождественному отображению соответствуют евклидовы пространства. Отображению с изменением знака у всех координат соответствуют псевдоевклидовы пространства с сигнатурами  $(+, -, -, \dots, -)$ . Отображению, сводящемуся к инверсии каждой координаты, соответствуют пространства Бервальда–Моора.

## Литература

- [1] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., ТЕТРУ, 2009.
- [2] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., Наука, 1967.

## IDENTICALLY SOLVABLE FINSLER GEOMETRIES

G.I. Garas'ko

*Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia*

*Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia*

*gri9z@mail.ru*

We suggest an algorithm to search for the identically solvable Finsler geometries which provides the possibility to find some solvable Finsler geometries that are not identically solvable. This algorithm is closely related to the reflection on the space whose dimension is one unit less than the dimension of the Finsler space on itself. This reflection must coincide to its own reverse and possess some other properties. For the spaces of arbitrary dimension, the identical reflection corresponds to the Euclidean space, the reflection with the simultaneous change of the sign of all coordinates — to the pseudo Euclidean space, and the reflection with the inversion of all the coordinates corresponds to the space with Berwald–Moor metric.

**Key Words:** Finsler geometry, identical solvability of the Finsler spaces, mapping, Euclidean space, pseudo–Euclidean space, Berwald–Moor metrics space, metric function.

## РЕАЛЬНАЯ ЧАСТЬ НЕВЫРОЖДЕННОГО ПОЛИЧИСЛА И СПЕЦИАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФОРМА

Г.И. Гарасько

*ФГУП Всероссийский электротехнический институт, Москва, Россия*  
*НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия*  
gri9z@mail.ru, gri9z.wordpress.com

Из множества различных инвариантных полилинейных форм, которые могут быть построены в пространствах невырожденных поличисел, выделена линейная инвариантная форма, тесно связанная с понятиями реальной части невырожденных поличисел и временной координатой.

**Ключевые слова:** невырожденные поличисла, реальная часть, экспоненциальное представление, временная координата

### 1 Введение

Понятия реальной части комплексного числа  $z \in C$  вводятся естественно и при этом не возникает никаких неоднозначностей в силу самого определения комплексного числа, связанного со специальным базисом  $1, i$ :

$$z = x + iy, \quad Re(z) \equiv x. \quad (1)$$

Для поличисел  $X \in H_4$  [1, 2], рассматриваемых в специальном "ортонормированном" базисе  $1, j, k, jk$ , также все "понятно":

$$X = x^0 \cdot 1 + x^1 \cdot j + x^2 \cdot k + x^3 \cdot jk, \quad Re(X) \equiv x^0. \quad (2)$$

Но что является реальной частью поличисел  $H_3$  или в общем случае поличисел  $P_{k+2 \cdot m}$ , и как эту реальную часть вычислить, находясь в произвольном базисе?

Понятно, что реальная часть поличисла должна быть координатой при единице алгебры, как и временная координата [1, 2]. Также как и в случае с временной координатой, значение ее будет зависеть от того, каким образом будут определены остальные базисные векторы. При определении временной координаты предложено [1, 2] выбирать базис, в котором имеет место экспоненциальное представление невырожденного поличисла:  $E_0 \equiv 1, E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$ . При этом любое невырожденное линейное преобразование базисных элементов  $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$  без использования элемента  $E_0 \equiv 1$  не изменит значение коэффициента при  $E_0 \equiv 1$ .

Таким образом, естественно считать, что реальная часть невырожденного поличисла совпадает с временной координатой. Все же следует понимать, что дополнительные условия, налагаемые на выбор базисных элементов  $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$  в этих двух случаях могут быть различными.

Итак, для того чтобы вычислить  $Re(X)$ ,  $X \in P_{k+2 \cdot m}$  надо перейти в базис  $E_0 \equiv 1, E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$  [1, 2], координата при  $E_0$  и будет реальной частью поличисла:

$$X = x^0 E_0 + x^1 E_1 + x^2 E_2 + \dots + x^{n-1} E_{n-1}, \quad x^0 \equiv Re(X). \quad (3)$$

Такое определение  $Re(X)$  и временной координаты является инвариантным, так как связано с выделенным специальным базисом. Поэтому естественно поставить задачу о возможности получения  $Re(X)$ , не переходя к базису  $E_0 \equiv 1, E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$ .

Поличисловая система в некотором базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  полностью определяется заданием структурного тензора  $p_{ij}^r$ :

$$e_i e_j = p_{ij}^r e_r. \quad (4)$$

С помощью структурного тензора и тензорных операций можно построить множество ковариантных тензоров, например:

$$q_{ij} = p_{il}^r p_{rj}^l, \quad q_{ijk} = p_{il}^r p_{jm}^l p_{kr}^m. \quad (5)$$



Используя такие ковариантные тензоры, легко определить инвариантные полилинейные формы на множестве поличисел:

$$(X, Y) \equiv x^i y^j q_{ij}, \quad (X, Y, Z) \equiv x^i y^j z^k q_{ijk}. \quad (6)$$

Важно, что значения таких форм не зависит от того, в каком базисе производятся вычисления.

## 2 Линейная форма в пространстве невырожденных поличисел

Покажем, что в пространстве невырожденных поличисел  $X \in P_{k+2\cdot m}$  линейная инвариантная форма

$$R(X) \equiv r_i x^i, \quad r_i \equiv \frac{1}{n} p_{il}^l \quad (7)$$

есть реальная часть поличисла, причем вычисления можно производить в любом базисе:

$$Re(X) = R(X) = r_i x^i = \frac{1}{n} p_{il}^l x^i. \quad (8)$$

Рассмотрим поличисло  $X \in P_{k+2\cdot m}$  в изотропном базисе  $[1, 2] e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_{n-1}, e_n$ . В этом же базисе вычислим свертки:

$$p_{1j}^j = 1, \dots, p_{kj}^j = 1, p_{k+1j}^j = 2, p_{k+2j}^j = 0, \dots, p_{n-1j}^j = 2, p_{nj}^j = 0. \quad (9)$$

Тогда, если  $\xi^i$  — координаты поличисла  $X$  в изотропном базисе, получим следующее выражение:

$$R(X) = \frac{1}{n} \left[ \xi^1 + \dots + \xi^k + 2 \left( \xi^{k+1} + \xi^{k+3} + \dots + \xi^{n-1} \right) \right]. \quad (10)$$

Осталось доказать, что выражение в правой части (10) для любой невырожденной системы поличисел есть  $Re(X)$ , или временная координата  $x^0$ . Для этого воспользуемся методом математической индукции. Так как невырожденные поличисла  $P_{k+2\cdot m}$  суть прямая сумма  $k$  алгебр действительных чисел и  $m$  алгебра комплексных чисел, необходимо проверить выполнение утверждения для комплексных и двойных чисел, предположить, что оно верно для  $P_{k+2\cdot m}$  и доказать его для алгебр  $P_{(k+1)+2\cdot m}$  и  $P_{k+2\cdot(m+1)}$ .

Для комплексных чисел  $z = x + iy$  в базисе  $1, i$  имеем

$$p_{1j}^j = 2, p_{2j}^j = 0 \quad \Rightarrow \quad R(z) = x \equiv Re(z). \quad (11)$$

Для двойных чисел  $z = x + jy$  в базисе  $1, j$  —

$$p_{1j}^j = 2, p_{2j}^j = 0 \quad \Rightarrow \quad R(z) = x \equiv Re(z); \quad (12)$$

или в изотропном базисе  $e_1, e_2, z = \xi e_1 + \eta e_2$  —

$$p_{1j}^j = 1, p_{2j}^j = 1 \quad \Rightarrow \quad R(z) = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \equiv Re(z). \quad (12^a)$$

Предположим, что для  $P_{k+2\cdot m}$  уже введен базис  $E_0, E_1, \dots, E_{n-1}$ , тогда координата при  $E_0$  в этом базисе есть  $Re(X)$  для  $X \in P_{k+2\cdot m}$ . При переходе к алгебре гиперкомплексных чисел  $X' \in P_{(k+1)+2\cdot m}$ ,

$$P_{(k+1)+2\cdot m} = P_{k+2\cdot m} \oplus R \quad (13)$$

построение базиса  $E'_0, E'_1, \dots, E'_{n-1}, E'_n$  осуществляется блочной матрицей, которая содержит единичную матрицу и матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Преобразование координат осуществляется соответствующей обратной транспонированной матрицей:

$$\begin{pmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{1}{n+1} \\ -\frac{n}{n+1} & \frac{n}{n+1} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Поэтому

$$Re(X') = \frac{n}{n+1} Re(X) + \frac{1}{n+1} \xi, \quad (16)$$

и формула

$$Re(X) = \frac{1}{n} \left[ \xi^1 + \dots + \xi^k + 2 \left( \xi^{k+1} + \xi^{k+3} + \dots + \xi^{n-1} \right) \right] \quad (17)$$

сохраняет свой вид при переходе от  $P_{k+2 \cdot m}$  к  $P_{(k+1)+2 \cdot m}$ . Аналогично при переходе к алгебре гиперкомплексных чисел  $X' \in P_{k+2 \cdot (m+1)}$ ,

$$P_{k+2 \cdot (m+1)} = P_{k+2 \cdot m} \bigoplus C \quad (18)$$

построение базиса  $E'_0, E'_1, \dots, E'_{n-1}, E'_n, E'_{n+1}$  осуществляется блочной матрицей, которая содержит единичную матрицу и матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{n} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Преобразование координат осуществляется соответствующей обратной транспонированной матрицей:

$$\begin{pmatrix} \frac{n}{n+2} & \frac{2}{n+2} & 0 \\ -\frac{n}{n+2} & \frac{n}{n+2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Поэтому

$$Re(X') = \frac{n}{n+2} Re(X) + \frac{2}{n+2} \xi^n, \quad (21)$$

и формула (17) сохраняет свой вид при переходе от  $P_{k+2 \cdot m}$  к  $P_{k+2 \cdot (m+1)}$ .

### 3 Заключение

В настоящей работе доказано, что реальная часть  $Re(X)$  любого невырожденного поличисла  $X \in P_{k+2 \cdot m}$  в произвольном базисе вычисляется по формуле

$$Re(X) = \frac{1}{n} p_{il}^l x^i, \quad (22)$$

где  $x^i$  — координаты поличисла  $X$ , а  $p_{il}^l$  — структурный тензор алгебры  $P_{k+2 \cdot m}$ . Если  $E_0$  — единица алгебры, то для невырожденных поличисел полезным является разбиение поличисла  $X$  на действительную и мнимую составляющие:

$$X = Re(X)E_0 + [X - Re(X)E_0]. \quad (23)$$

Так для любого поличисла  $X$  справедлива следующая формула:

$$|e^X| = e^{Re(X)}, \quad (24)$$

— и поличисло

$$Y = e^{X - Re(X)E_0} \quad (25)$$

является унимодулярным.

Так как временная координата  $x^0 = Re(X)$  также является инвариантной величиной и вычисляется по тем же формулам, что и реальная часть невырожденного поличисла, формулы (22–25) можно переписать следующим образом:

$$x^0 = \frac{1}{n} p_{il}^l x^i, \quad (26)$$

$$X = x^0 E_0 + [X - x^0 E_0], \quad (27)$$

$$|e^X| = e^{x^0}, \quad (28)$$

$$Y = e^{X-x^0 E_0} \quad (29)$$

является унимодулярным поличислом при любом  $X$ .

### Литература

- [1] Гарасько Г.И., Павлов Д.Г. Геометрия невырожденных поличисел // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(7), т. 4, 2007, стр. 3-25.
- [2] Гарасько Г. И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., ТЕТРУ, 2009.

## REAL PART OF THE NON-DEGENERATE POLY NUMBER AND A SPECIAL LINEAR FORM

G.I. Garas'ko

*Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia*  
*Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fiazino, Russia*  
gri9z@mail.ru

The set of the various poly linear forms that can be constructed in the spaces of the non-degenerate poly numbers contains the linear invariant form closely related to the notion of real part of the non-degenerate poly number and to the time coordinate.

**Key Words:** non-degenerate polynumbers, real part, scientific notation, time coordinate.

# h-ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ ДВОЙНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Д.Г. Павлов<sup>1</sup>, С.С. Кокарев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

<sup>2</sup> Российский научно-образовательный центр "Логос", Ярославль, Россия

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

Рассматриваются комплексно-дифференцируемые функции двойной переменной и их основные свойства, аналогичные свойствам голоморфных функций комплексной переменной: теорема Коши и формула Коши, гиперболическая гармоничность, свойства общих  $h$ -конформных отображений и свойства таких отображений, осуществляемых гиперболическими аналогами элементарных функций. Обсуждается вопрос о приложениях  $h$ -конформных отображений для решения двумеризованных гиперболических задач математической физики.

**Ключевые слова:**  $h$ -голоморфная функция, конформное преобразование, гиперболическая теорема Коши, гиперболические полярные координаты.

## 1 Введение

Двойные числа (или, как их иногда называют, гиперболически комплексные или расщепляемые числа) известны довольно давно и применяются как в математике, так и в физике [1, 2]. В связи с тем обстоятельством, что соответствующая им алгебра изоморфна прямой сумме двух алгебр вещественных чисел, свойства двойных чисел принято считать малоинтересными, а в сравнении с комплексными числами — даже тривиальными. В настоящей статье мы постараемся проиллюстрировать ошибочность подобного мнения и показать, что возможности алгебры и анализа (вернее,  $h$ -анализа) двойных чисел вместе с соответствующей им геометрией двумерной плоскости еще далеки от своего хоть в каком-нибудь смысле полного исследования. Мы увидим, что во многих отношениях двойные числа "ни в чем не уступают" комплексным числам. Учитывая то важное обстоятельство, что геометрия двойных чисел является псевдоевклидовой и по существу соответствует геометрии 2-мерного пространства-времени, мы получаем для физики новые плодотворные почву и идеи, имеющие чисто алгебраические основания. Важную особенность рассматриваемой нами ситуации выражает тот факт, что  $h$ -аналитические функции от двойной переменной образуют бесконечномерное пространство, — так же, как и аналитические функции комплексной переменной. Более того, каждой аналитической функции на комплексной плоскости соответствует одна и только одна  $h$ -аналитическая функция двойной переменной и наоборот.

Раздел 2 посвящен краткому напоминанию фактов комплексного анализа, аналоги которых будут рассматриваться далее на двойной плоскости. В разделе 3 мы кратко излагаем свойства плоскости двойной переменной и даем определения гиперболической полярной системы координат, конусов,  $h$ -конформных отображений и обсуждаем их общие свойства. В разделе 4 мы даем определение  $h$ -голоморфных функций и обсуждаем их некоторые общие свойства вместе с гиперболическими аналогами формулы Коши и теоремы Коши, условиями Коши-Римана и  $h$ -конформными отображениями. В разделе 5 приводятся определения и свойства стандартных гиперболических элементарных функций двойной переменной. Наконец, в Заключение мы обсуждаем потенциальные приложения и перспективы дальнейшей разработки теории функций двойной переменной.

## 2 Аналитические функции комплексной переменной

Целью настоящего раздела является напоминание основных фактов стандартной теории функций комплексной переменной. Их гиперболические аналоги будут лежать в основе последующих рассмотрений на плоскости двойной переменной. Все доказательства приводимых фактов можно найти в известных руководствах [5, 2].

Алгебра комплексных чисел  $\mathcal{C}$  порождается парой образующих  $\{1, i\}$   $R$ -модуля с таблицей умножения

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & i \\ \hline 1 & 1 & i \\ \hline i & i & -1 \end{array}. \quad (1)$$

Таким образом, элементы  $\mathcal{C}$  имеют вид:  $\mathcal{C} \ni z = 1 \cdot x + iy$ , где  $x, y \in R$ . При этом вещественное число  $\operatorname{Re} z \equiv x$  называется *вещественной частью* комплексного числа  $z$ , а вещественное число  $\operatorname{Im} z \equiv y$  называется *мнимой частью* комплексного числа  $z$ . Алгебра комплексных чисел с правилом умножения, определяемым таблицей (1), образует числовое поле, подполем которого является поле вещественных чисел. Геометрическая интерпретация комплексных чисел основана на очевидной биекции:  $\mathcal{C} \leftrightarrow R^2$ , действующей по правилу:  $\mathcal{C} \ni z = x + iy \leftrightarrow (x, y)$ . Другими словами, каждому комплексному числу  $z$  соответствует точка на декартовой плоскости с координатами  $\{\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z\}$  (см. рис. 1). При этом сумма и разность комплексных чисел изображается стандартным прави-

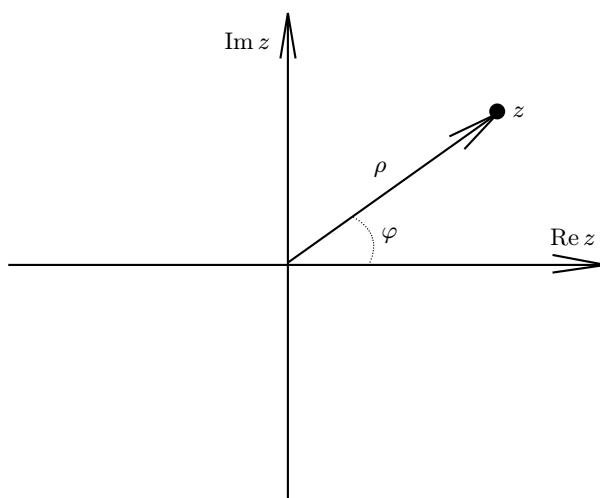


Рис. 1: Геометрическая интерпретация комплексных чисел

лом параллелограмма для соответствующих радиус-векторов на декартовой плоскости, которую принято называть *комплексной плоскостью*. Вводя на проколотой комплексной плоскости  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$  стандартную полярную систему координат  $\{\rho, \varphi\}$ , можно перейти к тригонометрической форме представления комплексного числа

$$z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (2)$$

где  $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \equiv |z|$  — *модуль* комплексного числа  $z$ ,  $\varphi = \arg z$  — его *аргумент*, определенный с точностью до  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Нетрудно проверить, что  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ . Знаменитая формула Эйлера:  $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$  приводит к экспоненциальной форме представления комплексного числа

$$z = x + iy = \rho e^{i\varphi} = e^\theta, \quad (3)$$

где в последнем равенстве мы перешли к "комплексному углу"

$$\theta = \ln \rho + i\varphi \equiv \ln z. \quad (4)$$

При этом произведение двух комплексных чисел сводится к сложению их комплексных углов.

Важной и полезной операцией над комплексными числами является инволютивная операция *комплексного сопряжения*:  $z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$ . Геометрически эта операция описывает отражение комплексной плоскости относительно оси  $\operatorname{Im} z = 0$ . Пару  $\{z, \bar{z}\}$  можно рассматривать как независимые комплексные координаты на плоскости, которые связаны с декартовыми координатами посредством очевидных формул

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (5)$$

Комплексная координатная билинейная форма  $\mathcal{B} \equiv dz \otimes d\bar{z}$  раскладывается на симметричную  $\eta$  и кососимметричную  $\omega$  неприводимые компоненты следующим образом:

$$\mathcal{B} \equiv dz \otimes dz = \eta - i\omega, \quad (6)$$

где  $\eta = dx \otimes dx + dy \otimes dy$  — евклидова метрическая форма,  $\omega \equiv dx \wedge dy = idz \wedge d\bar{z}/2$  — 2-мерная симплектическая форма (евклидова форма площади). В частности,  $\rho = \sqrt{z\bar{z}}$ , а евклидов элемент длины  $dl = \sqrt{dz d\bar{z}}$ . Из комплексного представления формы  $\mathcal{B}$  следует, что эта форма инвариантна относительно произвольных трансляций комплексной плоскости и преобразований вида:  $z \mapsto e^{i\delta}z$ , описывающих евклидовы вращения комплексной плоскости. В совокупности эти преобразования составляют группу движений 2-мерного евклидова пространства. Отметим, что форма  $\omega$  инвариантна относительно более широкой группы унимодулярных преобразований комплексной плоскости, для которых якобиан преобразования равен единице. Евклидову длину кривой  $\gamma = \{z(\tau)\}$  и (ориентированную) площадь области  $\Sigma$ , ограниченной замкнутой кривой  $\Gamma = \partial\Sigma$ , можно вычислить с помощью формул

$$\text{length}[\gamma] = \int_{\tau_A}^{\tau_B} \sqrt{\dot{z}\dot{\bar{z}}} d\tau; \quad \text{area}[\Sigma] = \frac{i}{2} \int_{\Sigma} dz \wedge d\bar{z} = \frac{i}{4} \oint_{\Gamma} (z d\bar{z} - \bar{z} dz), \quad (7)$$

где в последнем равенстве мы использовали комплексный вариант фундаментальной теоремы Пуанкаре-Дарбу об интегрировании дифференциальных форм.

Функция  $\ln z$ , определенная соотношением (4), является простым и важным представителем класса т. н. *голоморфных функций* комплексной переменной. Напомним, что произвольное гладкое отображение  $f: R^2 \rightarrow R^2$  можно представить парой компонент

$$(x, y) \mapsto (x', y') : \quad x' = f_1(x, y); \quad y' = f_2(x, y), \quad (8)$$

где  $f_1, f_2$  — гладкие функции  $R^2 \rightarrow R$ . С помощью формул (5) эти отображения можно всегда записать в виде

$$(z, \bar{z}) \mapsto (z', \bar{z}') : \quad z' = F_1(z, \bar{z}); \quad \bar{z}' = F_2(z, \bar{z}). \quad (9)$$

Для интерпретации  $R^2$  как комплексной плоскости  $\mathcal{C}$  естественно ограничиться отображениями, сохраняющими комплексную структуру плоскости, т. е. отображениями  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  вида:  $z \mapsto w = F(z)$ . Дифференцируемые функции  $R^2 \rightarrow R^2$ , удовлетворяющие в некоторой области  $D \subseteq \mathcal{C}$  условию

$$F_{,\bar{z}} = 0, \quad (10)$$

называются голоморфными в области  $D$  функциями комплексной переменной  $z$ . Функции, удовлетворяющие условию

$$F_{,z} = 0, \quad (11)$$

называются *антиголоморфными*.

Напомним некоторые основные свойства голоморфных функций. Расписывая условие (10) в декартовых координатах, приходим к *условиям голоморфности (комплексной аналитичности) Коши-Римана*:

$$u_{,x} = v_{,y}; \quad u_{,y} = -v_{,x}, \quad (12)$$

где  $u(x, y) = \text{Re } F(z)$ ,  $v(x, y) = \text{Im } F(z)$ . Аналогичные формулы имеют место и для представления функции через комплексный угол  $F(z) = e^{\ln \rho(x,y) + i\psi(x,y)}$ :

$$(\ln \rho)_{,x} = \psi_{,y}; \quad (\ln \rho)_{,y} = -\psi_{,x}. \quad (13)$$

Имеют место фундаментальные *теорема Коши*:

$$\oint_{\Gamma} F(z) dz = 0 \quad (14)$$

и формула Коши:

$$F(z_0) = \frac{1}{i\ell_E} \oint_{\Gamma} \frac{F(z)}{z - z_0} dz, \quad (15)$$

где  $\Gamma$  — кусочно-гладкий замкнутый контур, ограничивающий область  $D \in \mathcal{C}$ ,  $F(z)$  — произвольная голоморфная в области  $D$  и непрерывная на ее границе  $\partial D$  функция,  $z_0 \in D$ ,  $\ell_E = 2\pi$  — евклидова длина единичной окружности, параметризующей пространство направлений<sup>1</sup>. Формулы (14)-(15) вытекают непосредственно из условия аналитичности функции  $F(z)$  в форме (10) или форме (12). При этом формула (14) допускает обобщение на многосвязные области, а формула (15) допускает обобщение на контуры, содержащие бесконечно-удаленную точку и контуры, проходящие через точку  $z_0$  и даже имеющие там точку излома.

Голоморфные функции допускают разложение в ряд Тейлора вида

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad (16)$$

где коэффициенты  $c_k$  можно вычислить по формуле

$$c_k = \frac{1}{i\ell_E} \oint_{\Gamma} \frac{F(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz. \quad (17)$$

Последняя формула опирается на интегральную формулу Коши (15) и тождество, справедливое для целых  $n$ :

$$\oint_{\Gamma} (z - z_0)^n dz = i\ell_E \delta_{n,-1}. \quad (18)$$

Введенная выше билинейная форма  $\mathcal{B}$  ведет себя относительно аналитического преобразования  $F(z)$  как относительный скаляр

$$\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}' = |F'(z)|^2 \mathcal{B}, \quad (19)$$

где  $F'(z) = dF/dz$ , откуда следуют законы преобразования элементов длины и площади:

$$dl' = |F'| dl; \quad (dz \wedge d\bar{z})' = |F'|^2 (dz \wedge d\bar{z}). \quad (20)$$

Относительная скалярность формы площади имеет место при всяких диффеоморфизмах, а вот первое равенство в (20) означает, что аналитические функции осуществляют конформные преобразования евклидовой плоскости, т. е. сохраняют углы между кривыми в каждой точке. Отметим, что  $|F'|^2 = |\nabla u|^2 = |\nabla v|^2 = \Delta_F$ , где  $\nabla$  — оператор градиента в евклидовой метрике, а  $\Delta_F$  — якобиан отображения  $F$ , рассматриваемого как отображение  $R^2 \rightarrow R^2$ .

Каждый диффеоморфизм  $f: R^2 \rightarrow R^2$  можно интерпретировать как гладкое векторное поле на плоскости  $R^2$  по правилу:  $F = f_1(x, y)\partial_x + f_2(x, y)\partial_y$  или в комплексной алгебраической версии:  $F = f_1(x, y) + if_2(x, y)$ , где  $f_i$  — компоненты отображения  $f$ . Векторные поля, соответствующие аналитическим функциям, обладают рядом интересных и важных для приложений свойств. Из условий (12) следует, что каждая из компонент векторного поля  $F(z) = u + iv$  (стрелку опускаем) является гармонической функцией, т. е. удовлетворяет 2-мерному уравнению Лапласа

$$\Delta u = \Delta v = 0. \quad (21)$$

Гармонические функции, связанные друг с другом условиями Коши-Римана, называются *сопряженными*. Любая гармоническая на декартовой плоскости функция определяет (с точностью до

<sup>1</sup>Для дальнейшего нам важна именно такая (несколько отличная от традиционной) запись формулы Коши.

постоянной) свою сопряженную. Условия Коши-Римана на языке векторного анализа имеют следующую интерпретацию: *векторное поле  $i\bar{F}$  потенциально<sup>2</sup> и соленоидально*, т. е. компоненты  $\{X, Y\} = \{v, u\}$  векторного поля  $i\bar{F}$  удовлетворяют соотношениям:

$$\bar{F}_{,z} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rot} i\bar{F} \equiv Y_{,x} - X_{,y} = 0; \quad \operatorname{div} i\bar{F} \equiv X_{,x} + Y_{,y} = 0. \quad (22)$$

Эти свойства обуславливают применение конформных отображений для решения задач гидродинамики потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости, электростатики и магнитостатики и ряда других, связанных с решением 2-мерного уравнения Лапласа. В этих задачах уравнению Лапласа удовлетворяет потенциал  $\varphi$  (поля или скорости). Сопряженная к нему функция  $\chi$  имеет смысл *функции тока* или {силовой функции}. Семейство поверхностей  $\varphi = \text{const}$  определяет семейство эквипотенциальных линий в смешанной магнито-электростатической задаче, с одной из которых совмещен профиль цилиндрического заряженного проводника и (или) цилиндрического проводника с током, или семейство нормальных линий к плоскопараллельному потоку в гидродинамике. Уравнения  $\chi = \text{const}$  определяют линии напряженности или линии тока в соответствующих задачах. Линии  $\varphi = \text{const}$  и линии  $\chi = \text{const}$  образуют криволинейную ортогональную сетку на комплексной плоскости. В совокупности аналитическая функция  $\Phi(z) = \varphi + i\chi$  определяет комплексный потенциал, дающий решение некоторой задачи магнито-электростатики, гидродинамики и т. д. Ортогональность криволинейной сетки линий уровня и линий напряженности следует непосредственно из условий Коши-Римана, т. е. из аналитичности  $\Phi(z)$ . На практике для решения краевых эллиптических задач в пространстве свободном от источников требуется подобрать такую аналитическую функцию  $\Phi(z)$ , вещественная или мнимая часть которой отображает границу области в прямую линию или в ее кусок.

### 3 Двойные числа

По аналогии с алгеброй комплексных чисел  $\mathcal{C}$  определим алгебру двойных чисел  $\mathcal{H}$  парой образующих  $\{1, j\}$  2-мерного  $R$ -модуля с таблицей умножения:

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & j \\ \hline 1 & 1 & j \\ \hline j & j & 1 \end{array}. \quad (23)$$

Элементы  $\mathcal{H}$  будем записывать в виде:  $\mathcal{H} \ni h = 1 \cdot t + jx$ , где  $t, x \in R$ , имея ввиду дальнейшие приложения этой алгебры для описания 2-мерного пространства-времени. По аналогии с комплексными числами, вещественное число  $\operatorname{Re} h \equiv t$  называется *вещественной частью* двойного числа  $h$ , а вещественное число  $\operatorname{Im} h \equiv x$  называется *мнимой частью* двойного числа  $h$ . Алгебра двойных чисел с таблицей умножения (23) не образует числового поля, поскольку содержит делители нуля, т. е. уравнение  $h_1 h_2 = 0$  может выполняться при отличных от нуля элементах  $h_1$  и  $h_2$ . Это обстоятельство послужило одной из причин, по которой двойные числа не получили столь широкого распространения в приложениях, как комплексные. Однако, именно это обстоятельство отражает на алгебраическом языке важнейший факт геометрии 2-мерного пространства-времени — наличие световых конусов. Геометрическая интерпретация двойных чисел аналогична интерпретации комплексных чисел: на плоскости двойной переменной (коротко — гиперболической плоскости) каждому двойному числу соответствует радиус-вектор, координаты которого суть вещественная и мнимая часть этого числа. При этом сумма и разность двойных чисел изображается стандартным правилом параллелограмма для соответствующих радиус-векторов на гиперболической плоскости.

Инволютивную операцию *комплексного сопряжения* для двойных чисел определим следующим образом:  $h = t + jx \mapsto \bar{h} = t - jx$ . Геометрически эта операция описывает отражение гиперболической плоскости относительно оси  $\operatorname{Im} h = 0$ . Аналогично комплексному случаю, пару  $\{h, \bar{h}\}$  можно рассматривать как независимые двойные координаты на гиперболической плоскости, которые связаны с декартовыми координатами посредством формул (5) с заменой  $z, \bar{z} \rightarrow h, \bar{h}$ .

<sup>2</sup>Напомним, что операция ротора, примененная к 2-мерному векторному полю на плоскости дает в результате (псевдо)скаляр.



Комплексная координатная билинейная форма  $\mathcal{G} \equiv dh \otimes d\bar{h}$  снова раскладывается на симметричную  $\Xi$  и кососимметричную  $\Omega$  неприводимые компоненты следующим образом:

$$\mathcal{B} \equiv dh \otimes d\bar{h} = \Xi - j\Omega, \tag{24}$$

где  $\Xi = dt \otimes dt - dx \otimes dx$  — псевдоевклидова метрическая форма,  $\Omega \equiv dt \wedge dx = -jdh \wedge d\bar{h}/2$  — 2-мерная форма объема. Мы видим, что алгебра двойных чисел индуцирует на плоскости двойной переменной 2-мерную псевдоевклидову (гиперболическую) геометрию с метрической формой  $\Xi$ , что объясняет принятый нами термин "гиперболическая плоскость".

Переход к гиперболическим полярным координатам и экспоненциальной форме представления двойного числа имеет ряд особенностей, которых нет в случае комплексных чисел. Пара прямых  $t \pm x = 0$ , содержащих множество двойных чисел<sup>3</sup> с нулевым квадратом нормы, разбивает всю гиперболическую плоскость на четыре клиновидные области, обозначенные на рисунке цифрами I, II, III и IV (рис. 2).

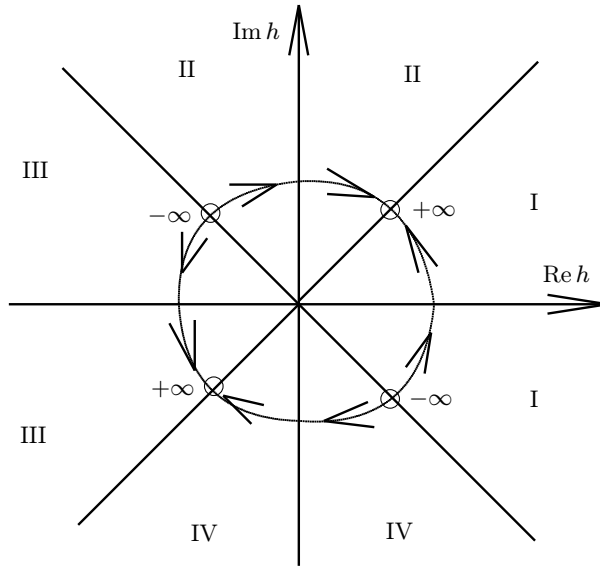


Рис. 2: Область  $R \sqcup -R \sqcup R \sqcup -R$  изменения угла  $\psi$  на плоскости  $\mathcal{H}$ . Ориентация согласована в противоположных клиньях и противоположна в соседних. Для различения углов в различных клиньях можно нумеровать угол  $\psi$  индексом  $k$ :  $\psi_k$ , ( $k = 1, 2, 3, 4$ ).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что в каждой из отмеченных областей двойные числа допускают гиперболическое полярное представление вида:

$$h = t + jx = \epsilon \varrho (\cosh \psi + j \sinh \psi), \tag{25}$$

где для каждого из клиньев имеют место следующие определения величин:

$$\begin{aligned} \text{I} : \quad & \epsilon = 1, \quad \varrho = \sqrt{t^2 - x^2}, \quad \psi = \text{Arth}(x/t); \\ \text{II} : \quad & \epsilon = j, \quad \varrho = \sqrt{x^2 - t^2}, \quad \psi = \text{Arth}(t/x); \\ \text{III} : \quad & \epsilon = -1, \quad \varrho = \sqrt{t^2 - x^2}, \quad \psi = \text{Arth}(x/t); \\ \text{IV} : \quad & \epsilon = -j, \quad \varrho = \sqrt{x^2 - t^2}, \quad \psi = \text{Arcth}(t/x). \end{aligned} \tag{26}$$

Величины  $\varrho$  и  $\psi$ , определенные в каждом из клиньев формулами (25), будем называть *модулем* и *аргументом* двойного числа  $h$ . Таким образом, в каждом из клиньев  $0 \leq \varrho < \infty$ , а сами клинья параметризуются отдельными экземплярами вещественных прямых, которые в совокупности образуют *многообразие  $\Psi$  угловых переменных* в виде ориентированной дизъюнктивной суммы

<sup>3</sup>Строго говоря, наличие делителей нуля и возможность отрицательных значений выражения  $h\bar{h}$  не позволяют говорить о норме двойного числа в строгом смысле этого слова. Для экономии терминов и сохранения частичной аналогии с комплексными числами мы будем называть величину  $\sqrt{|h\bar{h}|}$  нормой или модулем двойного числа (см. далее формулы 26).

$R \sqcup -R \sqcup R \sqcup -R$ . Более наглядно многообразие  $\Psi$  можно представить себе, компактифицируя каждое из  $R$  в открытый интервал и склеивая интервалы в их концах в окружность с четырьмя выколотыми точками.

Отметим, что множество двойных чисел с нулевой нормой не описывается ни одной из координатных карт введенной выше гиперболической полярной системы координат. В дальнейшем множество двойных чисел вида

$$h_0 + h_1(1 \pm j), \quad (27)$$

( $h_0, h_1$  — произвольные двойные числа) будем называть *конусом числа*  $h_0$  и обозначать  $\text{Con}(h_0)$ . Все точки, лежащие в  $\text{Con}(h_0)$ , имеют равное нулю гиперболическое расстояние до точки  $h_0$ . Иногда мы будем различать  $\text{Con}_+(h_0)$  и  $\text{Con}_-(h_0)$  в соответствии со знаками в (27). Также можно различать подконусы  $\text{Con}_+^\uparrow(h_0)$  и  $\text{Con}_+^\downarrow(h_0)$ , для случаев  $\text{Re}h_1 + \text{Im}h_1 > 0$  и  $\text{Re}h_1 + \text{Im}h_1 < 0$  соответственно и подконусы  $\text{Con}_-^\uparrow(h_0)$  и  $\text{Con}_-^\downarrow(h_0)$  для случаев  $\text{Re}h_1 - \text{Im}h_1 > 0$  и  $\text{Re}h_1 - \text{Im}h_1 < 0$  соответственно. Все конусы и подконусы показаны на рис. 3.

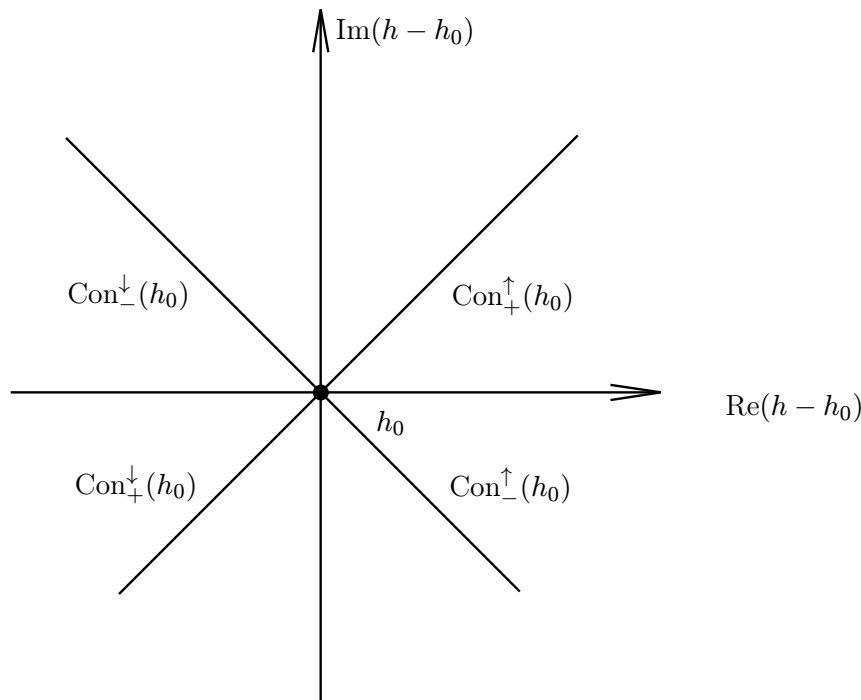


Рис. 3: К определению конусов и подконусов точки  $h_0$ .  $\text{Con}(h_0) = \text{Con}_+(h_0) \cup \text{Con}_-(h_0) = (\text{Con}_+^\uparrow(h_0) \cup \text{Con}_+^\downarrow(h_0)) \cup (\text{Con}_-^\uparrow(h_0) \cup \text{Con}_-^\downarrow(h_0))$ .

Справедливость гиперболической формулы Эйлера:  $\cosh \psi + j \sinh \psi = e^{j\psi}$  проверяется разложением левых и правых частей в формальные ряды Маклорена и сравнением их вещественных и мнимых частей. Гиперболическая формула Эйлера приводит к экспоненциальной форме представления двойных чисел:

$$h = t + jx = \epsilon \rho e^{j\psi} = \epsilon e^\Theta, \quad (28)$$

где в последнем равенстве мы перешли к "комплексному гиперболическому углу"

$$\Theta = \ln \rho + j\psi \equiv \ln h. \quad (29)$$

При этом произведение пары двойных чисел сводится к сложению их комплексных углов и перемножению знаковых множителей  $\epsilon$ .

Формулы для вычисления длин кривых и площадей областей на  $\mathcal{H}$  повторяют формулы (7) с заменой  $z \rightarrow h$ ,  $\eta \rightarrow \Xi$ .

**Пример.** Вычислим длину дуги евклидовой окружности евклидова радиуса  $r$  с центром в нуле, заключенную между точками 1 и  $j$  на плоскости двойной переменной. Подставляя в евклидово уравнение окружности  $t^2 + x^2 = r^2$  полярные гиперболические координаты:  $t = \rho \cosh \psi$ ,  $x = \rho \sinh \psi$ , получаем гиперболическое полярное уравнение евклидовой окружности:

$$\rho(\psi) = \frac{r}{(\cosh^2 \psi + \sinh^2 \psi)^{1/2}}. \quad (30)$$

Составляя псевдоевклидов элемент длины:  $dl^2 = |d\rho^2 - \rho^2 d\psi^2|$  вдоль окружности с учетом (30), получаем после некоторых элементарных преобразований и дифференцирований:

$$dl = \frac{rd\psi}{(\cosh^2 \psi + \sinh^2 \psi)^{3/2}} \quad (31)$$

В силу симметрии дуги относительно биссектриссы  $t = x$  достаточно вычислить длину половинки, на которой  $\psi$  меняется от 0 до  $\infty$ , а затем результат удвоить. Составляя интеграл, получаем:

$$L = 2 \int_0^\infty \frac{rd\psi}{(\cosh^2 \psi + \sinh^2 \psi)^{3/2}}.$$

С помощью подстановки:  $\tanh \psi = \xi$ , интеграл сводится к более простому виду и выражается через полные эллиптические интегралы 1-ого и 2-ого родов:

$$L = 2r \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}} \frac{d\xi}{1+\xi^2} = 2\sqrt{2}r[E(1/\sqrt{2}) - K(1/\sqrt{2})/2] \approx 1.2r$$

#### 4 *h*-голоморфные функции двойной переменной

Функция  $\ln h$ , определенная по формуле (29), является простым и важным представителем класса т. н. *h*-голоморфных функций двойной переменной, к определению которых можно прийти из соображений, аналогичных определению аналитической функции комплексной переменной. Произвольное гладкое отображение  $f: R^2 \rightarrow R^2$  можно представлять парой вещественных компонент (8), а можно перейти к его представлению через пару двойных переменных  $\{h, \bar{h}\}$ :

$$(h, \bar{h}) \mapsto (h', \bar{h}') : h' = F_1(h, \bar{h}); \quad \bar{h}' = F_2(h, \bar{h}). \quad (32)$$

Теперь для интерпретации  $R^2$  как плоскости двойной переменной  $\mathcal{H}$  естественно ограничиться отображениями, сохраняющими гиперболическую комплексную структуру плоскости, т. е. отображениями  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  вида:  $h \mapsto s = F(h)$ . Дифференцируемые<sup>4</sup> функции  $R^2 \rightarrow R^2$ , удовлетворяющие условию:

$$F_{,\bar{h}} = 0 \quad (33)$$

называются *h*-голоморфными функциями двойной переменной *h*. Функции, удовлетворяющие условию:

$$F_{,h} = 0 \quad (34)$$

называются *антиголоморфными* функциями двойной переменной.

По аналогии с голоморфными функциями комплексной переменной голоморфные функции двойной переменной можно определять формальными степенными рядами, сходимость которых часто вытекает из сходимости соответствующих вещественных рядов.

<sup>4</sup>Понятие производной функции  $F(h, \bar{h})$  по аргументам вводится аналогично определению вещественного анализа. Именно, можно определить дифференцируемость функции  $F$  в точке  $(h, \bar{h})$  как следующее свойство ее приращения:  $\Delta F = A(h, \bar{h}) \Delta h + B(h, \bar{h}) \Delta \bar{h} + o(\|\Delta h\|_H)$ , где  $\|\Delta h\|_H \equiv [\Delta t^2 - \Delta x^2]^{1/2}$  — псевдоевклидова норма приращения переменной. Переходя к различным пределам при  $\|\Delta h\|_H \rightarrow 0$ , получаем определения частных производных или "производных по направлениям". Имеется ряд серьезных проблем, связанных с определением сходимости и предела по естественной для двойных чисел гиперболической норме. В настоящей статье мы не останавливаемся на этих чисто математических вопросах и используем лишь те операции и свойства, которые имеют ясные, хотя, быть может, и несколько формальные определения.

**Пример.** Элементарная проверка путем разложения в формальный ряд обнаруживает справедливость следующих тождеств:

$$S(jx) = jS(x); \quad C(jx) = C(x); \quad (35)$$

$$S(h) = S(t + jx) = S(t)C(x) + jC(t)S(x); \quad C(h) = C(t + jx) = C(t)C(x) - jS(t)S(x),$$

где  $x \in R$ ,  $S$  — синус (эллиптический или гиперболический),  $C$  — косинус (эллиптический или гиперболический) в левых и правых частях равенств соответственно, которые мы определяем их стандартными рядами.

На самом деле, приведенные выше равенства являются частными случаями более общего тождества:

$$f(jx) = S_f(x) + jA_f(x),$$

где  $S_f \equiv [f(x) + f(-x)]/2$ ,  $A_f \equiv [f(x) - f(-x)]/2$  — симметричная и антисимметричная части произвольной аналитической функции  $f$ .

Докажем, что голоморфная функция всегда отображает делители нуля в делители нуля. Доказательство опирается на следующее формальное тождество:

$$(1 \pm j)^\alpha \equiv 2^{\alpha-1}(1 \pm j), \quad \alpha \in R. \quad (36)$$

Для натуральных  $\alpha$  тождество непосредственно вытекает из более простого:  $(1 \pm j)^2 = 2(1 \pm j)$ . Для произвольных  $\alpha$  воспользуемся формальными разложениями в ряды Маклорена. С одной стороны

$$(1 \pm j)^\alpha = 1 \pm \alpha j + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \pm \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} + \dots \quad (37)$$

С другой

$$2^{\alpha-1} = (1+1)^{\alpha-1} = 1 + \alpha - 1 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{3!} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{4!} + \dots \quad (38)$$

Умножая этот ряд почленно на  $(1 \pm j)$  получаем:

$$2^{\alpha-1}(1 \pm j) = 1 \pm j + (\alpha-1) \pm (\alpha-1)j + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!} \pm \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}j + \dots \quad (39)$$

$$\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{3!} \pm \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{3!}j + \dots$$

Комбинируя в разложении (39) все последовательные пары четных слагаемых (содержащих  $j$ ), получаем все последовательные четные слагаемые ряда (37), а комбинируя в (39) все последовательные пары нечетных слагаемых (начиная с пары "третье-пятое"), получаем все последовательные нечетные слагаемые ряда (37) (начиная с третьего). Таким образом, формальные ряды левой и правой части (36) совпадают, что и требовалось доказать.

Задавая теперь голоморфную функцию  $F(h)$  в виде степенного ряда:

$$F(h) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (h - h_0)^k, \quad (40)$$

в силу тождества (36) будем иметь на конусе  $\text{Con}(h_0)$  произвольной точки  $h_0$ :

$$F(h)|_{h \in \text{Con}(h_0)} = F(h_0) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k ((t - t_0) \pm j(t - t_0))^k = F(h_0) + (1 \pm j) \sum_{k=0}^{\infty} c_k 2^{k-1} (t - t_0)^k \subset \text{Con}(F(h_0)),$$

что и требовалось доказать. При этом, как это видно из полученного выражения, голоморфная функция может осуществлять инверсию конуса (т.е. переводить компоненты  $\text{Con}_{\pm}^{\uparrow}$  в соответствующую компоненту  $\text{Con}_{\pm}^{\downarrow}$  и наоборот), но не может переводить его ветви  $\text{Con}_+$  и  $\text{Con}_-$  друг в друга. Нетрудно убедиться, что последнее осуществляется антиголоморфными функциями.

### 4.1 Гиперболические условия Коши-Римана

Распишем условие (33) в декартовых координатах:

$$F_{,\bar{h}} = (U + jV)_{,\bar{h}} = \frac{(U + jV)_{,t}}{\bar{h}_{,t}} + \frac{(U + jV)_{,x}}{\bar{h}_{,x}} = U_{,t} - V_{,x} + j(V_{,t} - U_{,x}) = 0.$$

Отсюда следуют условия гиперболической аналитичности Коши-Римана:

$$U_{,t} = V_{,x}; \quad U_{,x} = V_{,t}. \tag{41}$$

Если функция  $F$   $h$ -голоморфна в смысле данного выше определения, то  $h$ -голоморфна и функция  $\ln F = \ln \varrho_F + j\psi_F + \ln \epsilon_F$ . Отсюда следуют<sup>5</sup> условия Коши-Римана в терминах модуля и аргумента функции двойной переменной:

$$(\ln \varrho_F)_{,t} = (\psi_F)_{,x}; \quad (\ln \varrho_F)_{,x} = (\psi_F)_{,t}. \tag{42}$$

Легко проверить, что из условий (41) следует гиперболическая гармоничность вещественной и мнимой частей аналитической функции  $F$ , которая выражается уравнениями:

$$\square U = \square V = 0, \tag{43}$$

где  $\square \equiv \partial_t^2 - \partial_x^2$  — 2-мерный волновой оператор — даламбертиан ("гиперболический лапласиан").

### 4.2 Гиперболические аналоги теорем Коши

Доказательство гиперболической теоремы Коши является почти дословным повторением соответствующего доказательства формулы (14). Чтобы подчеркнуть независимость этого доказательства от метрических свойств двойной (или комплексной) плоскости, проведем его на языке дифференциальных форм<sup>6</sup>. Для всякого простого замкнутого контура  $\Gamma$ , ограничивающего область  $\Sigma \subset \mathcal{H}$  и аналитической функции двойной переменной  $F = U + jV$  имеем следующую цепочку равенств:

$$\oint_{\Gamma} F(h) dh = \oint_{\Gamma} U dt + V dx + j \oint_{\Gamma} U dx + V dt = \int_{\Sigma} [(V_{,t} - U_{,x}) + j(U_{,t} - V_{,x}) dt \wedge dx] = 0$$

в силу условий (41). Второй знак равенства выражает теорему Пуанкаре-Дарбу об интегрировании 1-форм по замкнутым путям. С использованием комплексного языка доказательство выглядит еще короче:

$$\oint_{\Gamma} F(h) dh = \int_{\Sigma} F_{,\bar{h}} d\bar{h} \wedge dh = 0$$

ввиду (33). В силу чисто топологических соображений, аналогичных соображениям на комплексной плоскости, интеграл от голоморфной функции будет обращаться в нуль и по границе многосвязной области.

Для интеграла Коши в его гиперболической версии теперь имеем равенство<sup>7</sup>:

$$\oint_{\Gamma} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = \oint_{S_r(h_0)} \frac{F(h)}{h - h_0} dh, \tag{44}$$

<sup>5</sup>Следует оговориться, что  $\epsilon_F$  в общем случае является определенной константой внутри каждого из клиньев на плоскости образов, которая скачкообразно меняется при пересечении границ клиньев. По этой причине формулы (42) корректно определены на  $\mathcal{H}$  с выколотым крестом делителей нуля. Это обстоятельство снимает вопрос о смысле выражения  $\ln \epsilon_F$ , который можно ему придать, лишь выходя за рамки алгебры двойных чисел.

<sup>6</sup>Мы не останавливаемся на определениях криволинейных интегралов от функций на плоскости двойной переменной, ввиду их сводимости к паре интегралов от 1-форм на декартовой плоскости, определение которых вполне стандартно.

<sup>7</sup>Следует отметить некоторую неопределенность записи (44): деление под интегралом теряет смысл на пересечении  $\Gamma \cap \text{Con}(h_0)$ . Таким образом, строго говоря, мы должны исключить точки  $\text{Con}(h_0)$  из области определения подынтегральной функции, а интеграл понимать как предел интеграла по несвязному контуру, разрывы которого сосредоточены в окрестности  $\text{Con}(h_0)$  и их (евклидова) протяженность стремится к нулю. Полученные нами результаты соответствуют такому интегралу, понимаемому в смысле его главного значения. Для его существования контур должен подходить к линии конуса трансверсально. Мы не останавливаемся на этих чисто математических вопросах в настоящей статье и откладываем их более детальное изложение для отдельной публикации.

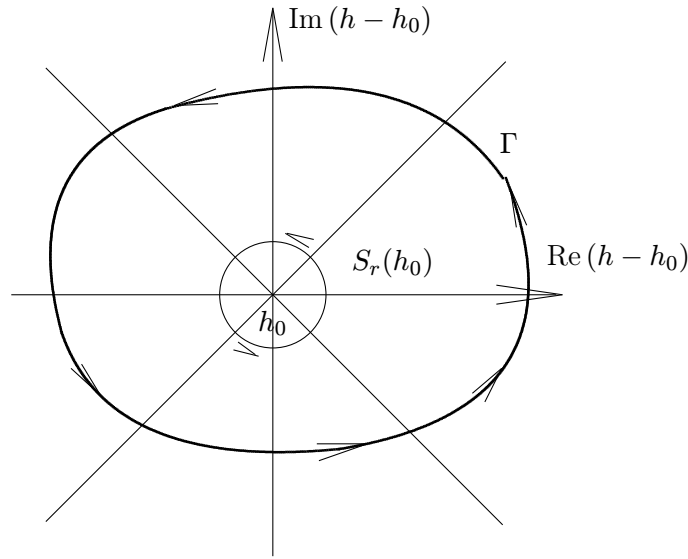


Рис. 4: К выводу интегральной теоремы Коши на плоскости двойной переменной.

вытекающее из гиперболической теоремы Коши. Здесь  $S_r(h_0)$  — (евклидова) окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $h_0$ , причем интеграл не зависит от радиуса этой окружности (см. рис. 4). Сделаем замену переменной:  $h = h_0 + \epsilon \varrho(r, \psi)e^{j\psi}$ , где функция  $\varrho(r, \psi)e^{j\psi} = r f(\psi)e^{j\psi}$  является полярно-параметрическим заданием евклидовой окружности  $S_r(0)$  в терминах гиперболической полярной системы координат. Как это следует из разобранных в разделе 3 примера,  $f = r/\sqrt{\cosh^2 \psi + \sinh^2 \psi}$ . При этом нам потребуется лишь только однозначность функции  $f$ . Переходя к интегрированию по  $\psi$ , получаем:  $h - h_0 = \epsilon r f(\psi)e^{j\psi}$ ,  $dh = \epsilon r(df + j f d\psi)e^{j\psi}$ , а сам интеграл Коши принимает вид:

$$\oint_{S_r(h_0)} F(h)(d \ln f + j d\psi).$$

Используя независимость интеграла от  $r$  и переходя в нем к пределу при  $r \rightarrow 0$ , получаем:

$$\oint_{S_r(h_0)} F(h)(d \ln f + j d\psi) = \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{S_r(h_0)} F(h)(d \ln f + j d\psi) = F(h_0) \int_{\Psi} (d \ln f + j d\psi).$$

Интеграл от первого слагаемого равен нулю в силу однозначности функции  $\ln f$ . Таким образом, приходим к следующей формуле гиперболической версии интегральной формулы Коши:

$$\oint_{\Gamma} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = jF(h_0) \int_{\Psi} d\psi.$$

В обычном смысле интеграл, полученный справа, расходится. Однако ему можно придать смысл, вводя формальную величину  $\ell_H$  размера гиперболического пространства направлений по формуле:

$$\frac{\ell_H}{2} \equiv \int_R d\psi. \tag{45}$$

С учетом ориентации кусков  $R$  в  $\Psi$  (см. рис. 2), получаем:

$$\int_{\Psi} d\psi = \ell_H/2 - \ell_H/2 + \ell_H/2 - \ell_H/2 = 0.$$

Таким образом, гиперболическая формула Коши в некотором (несобственном) смысле имеет вид более простой, чем в комплексном случае:

$$\oint_{\Gamma} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = 0. \tag{46}$$

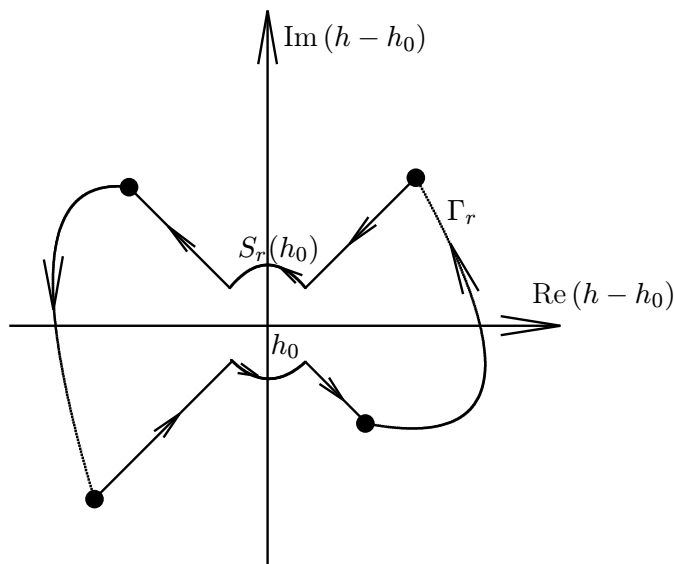


Рис. 5: К выводу интегральной теоремы Коши на плоскости двойной переменной: контур  $\Gamma_r$ .

Более содержательный аналог стандартной формулы Коши получится, если рассматривать замкнутый контур  $\Gamma_r$  вида, представленного на рисунке 5. Этот контур состоит из двух дуг произвольных кусочно-гладких простых кривых, лежащих в областях  $|t - t_0| \geq |x - x_0|$  и опирающихся своими концами на компоненты конуса  $\text{Con}(h_0)$ , отрезков этого конуса, и пары двух дуг евклидовой окружности радиуса  $r$  с центром в  $h_0$ , опирающихся на компоненты конуса  $\text{Con}(h_0)$ . Интеграл типа Коши по контуру  $\Gamma_r$  равен нулю в том же обобщенном смысле, что и (46), ввиду того, что контур  $\Gamma_r$  является гомотопией исходного контура  $\Gamma$  в области голоморфности функции  $F(h)/(h - h_0)$ . Теперь имеем

$$0 = \oint_{\Gamma_r} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = \oint_{S_r(h_0)} \frac{F(h)}{h - h_0} dh + \oint_{\Gamma'_r} \frac{F(h)}{h - h_0} dh, \tag{47}$$

где  $\Gamma'_r \equiv \Gamma_r \setminus S_r(h_0)$ . Вводя на  $S_r(h_0)$  гиперболическую полярную систему координат, повторяя предыдущие рассуждения и используя свойства функции  $f(\psi)$  (ее четность по  $\psi$ ), задающей полярное уравнение евклидовой окружности, получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{S_r(h_0)} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = -j \ell_H F(h_0), \tag{48}$$

откуда из (47) получаем более прямой гиперболический аналог формулы Коши:

$$F(h_0) = \frac{1}{\ell_H j} \oint_{\Gamma_0} \frac{F(h)}{h - h_0} dh, \tag{49}$$

где контур  $\Gamma_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \Gamma_r$ . По своему виду полученная формула формально вполне эквивалентна стандартной формуле (15) с заменой размера пространства евклидовых направлений  $\ell_E$  на размер пространства гиперболических направлений  $\ell_H$  в паре клиньев с одинаковым знаком  $h\bar{h}$ .

Величину  $\ell_H$  можно считать "фундаментальной константой" геометрии двойных чисел. При вычислениях с этой константой надо аккуратно учитывать ее свойства и использовать процедуру регуляризации выражений.

Гиперболическую формулу Коши (49) можно записать в более общем виде:

$$F(h_0) = \pm \frac{1}{\ell_{Hj}} \oint_{\Gamma_{\pm}} \frac{F(h)}{h - h_0} dh, \quad (50)$$

учитывающий возможность выбора контура  $\Gamma_-$  вместо  $\Gamma_+ = \Gamma_0$ , получающегося поворотом последнего на евклидов угол  $+\pi/2$ , и противоположность ориентации параметра  $\psi$  в области  $|t - t_0| \leq |x - x_0|$  общему направлению положительного обхода контуров на  $\mathcal{H}$  (против часовой стрелки).

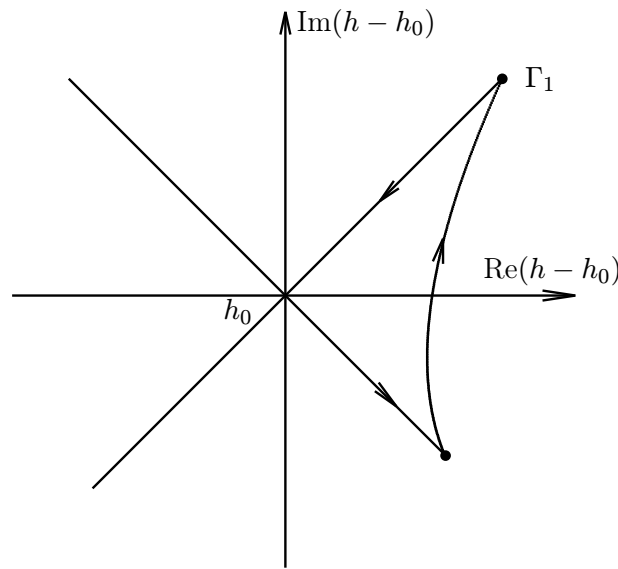


Рис. 6: К выводу интегральной теоремы Коши на плоскости двойной переменной: контуры  $\Gamma_n$ .

Аналогично получаются и следующие варианты формулы Коши:

$$F(h_0) = (-1)^{n+1} \frac{2}{\ell_{Hj}} \oint_{\Gamma_n} \frac{F(h)}{h - h_0} dh, \quad (51)$$

где  $n = 1, 2, 3, 4$ , контур  $\Gamma_1$  представлен на рис. 6, а контуры  $\Gamma_n$  получаются из него поворотами на углы  $\pi(n - 1)/2$  вокруг точки  $h_0$ .

**Пример.** В качестве примера проиллюстрируем работу формулы Коши в виде (51) при  $n = 1$  путем явного вычисления интеграла по контуру  $\Gamma_1$ . Имеем

$$\frac{2}{\ell_{Hj}} \oint_{\Gamma_1} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = \frac{2}{\ell_{Hj}} \oint_{\Gamma_1} \frac{F(h) - F(h_0)}{h - h_0} dh + \frac{2F(h_0)}{\ell_{Hj}} \oint_{\Gamma_1} \frac{dh}{h - h_0}. \quad (52)$$

Подынтегральное выражение в первом интеграле — голоморфная функция в области, ограниченной контуром  $\Gamma_1$  и на нем самом, поэтому этот интеграл обращается в нуль. На конусе  $\text{Con}_+^\uparrow$  выберем в качестве переменной интегрирования переменную  $t \in [t_0 + \tau_1, t_0]$ , а на конусе  $\text{Con}_-^\uparrow$   $t \in [t_0, t_0 + \tau_2]$ , где  $\tau_1, \tau_2$  — абсциссы концевых точек криволинейной части контура  $\Gamma_1$  (соответственно верхнего и нижнего концов) в системе координат с началом в точке  $h_0$ . Таким образом, интегралы дают следующий вклад:

$$\frac{2F(h_0)}{\ell_{Hj}} \left[ \int_{t_0 + \tau_1}^{t_0} \frac{(1 + j) dt}{(1 + j)(t - t_0)} + \int_{t_0}^{t_0 + \tau_2} \frac{(1 - j) dt}{(1 - j)(t - t_0)} \right] =$$



$$\frac{2F(h_0)}{\ell_{Hj}}(\ln 0 - \ln \tau_1 + \ln \tau_2 - \ln 0) = \frac{2F(h_0)}{\ell_{Hj}} \ln(\tau_2/\tau_1) = 0.$$

В предпоследнем равенстве было учтено сокращение двух одинаковы логарифмически сингулярных членов, а в последнем учтено "свойство бесконечности" фундаментальной константы  $\ell_H$ . Таким образом, вклад в интеграл Коши дает только участок  $\Gamma'$  контура между компонентами конуса  $\text{Con}(h_0)$ . Переходя к полярной системе координат с центром в точке  $h_0$  получаем:

$$\frac{2F(h_0)}{\ell_{Hj}} \int_{\Gamma'} \frac{dh}{h - h_0} = \frac{2F(h_0)}{\ell_{Hj}} \int_R (d \ln \varrho + d\psi).$$

Интеграл от первого слагаемого дает нуль в силу того, что на концах контура  $\Gamma' \varrho = 0$ . Интегрируя второе слагаемое с учетом (45), приходим к результату  $F(h_0)$ , что и утверждает гиперболическая формула Коши.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности вычисления коэффициентов ряда Тейлора  $h$ -голоморфной функции с помощью формулы, аналогичной (17). По существу, этот вопрос сводится к выяснению возможности обобщения тождества (18) на гиперболический случай. Рассмотрим интеграл вида:

$$\oint_{\Gamma} (h - h_0)^\alpha dh. \tag{53}$$

Продеформируем контур  $\Gamma$  таким образом, чтобы он принял вид  $\Gamma'$ , показанный на рисунке 7 (значение интеграла при этом, очевидно, не изменится).

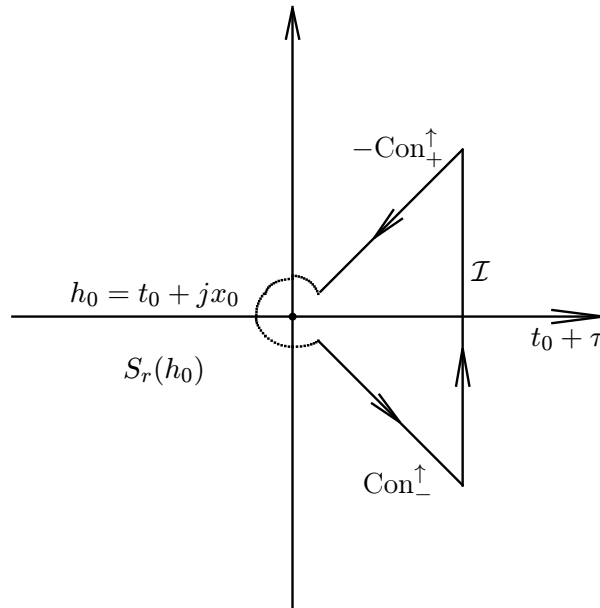


Рис. 7: К вопросу о коэффициентах ряда Тейлора для  $h$ -голоморфных функций.

Раскладывая интеграл на слагаемые, соответствующие различным участкам контура  $\Gamma' = -\text{Con}_+^\uparrow(h_0) \cup S_r(h_0) \cup \text{Con}_-^\uparrow(h_0) \cup \mathcal{I}$ , получим для вкладов по конусам (обозначения аналогичны использованным в предыдущем примере, причем  $\tau_1 = \tau_2$ ):

$$\int_{-\text{Con}_+^\uparrow(h_0)} (h - h_0)^\alpha dh + \int_{\text{Con}_-^\uparrow(h_0)} (h - h_0)^\alpha dh = \int_{t_0+\tau}^{t_0+r} (t - t_0)^\alpha (1 + j)^{\alpha+1} dt + \int_{t_0+r}^{t_0+\tau} (t - t_0)^\alpha (1 - j)^{\alpha+1} dt.$$

Используя тождество (36) и приводя подобные слагаемые, получаем следующий результат:

$$\int_{\text{Con}_-^\uparrow(h_0) - \text{Con}_+^\uparrow(h_0)} (h - h_0)^\alpha dh = j \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha + 1} [r^{\alpha+1} - \tau^{\alpha+1}]. \tag{54}$$

Интеграл по прямолинейному отрезку вычисляется также легко:

$$\int_{\mathcal{I}} (h - h_0)^\alpha dh|_{h=h_0+\tau+jsx} = \int_{-1}^1 (\tau + js\tau)^\alpha j\tau ds = \tau^{\alpha+1} \int_{1-j}^{1+j} \xi^\alpha d\xi = j \frac{2^{\alpha+1} \tau^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \quad (55)$$

Сравнивая (54) и (55), приходим к выводу, что

$$\int_{\Gamma'} (h - h_0)^\alpha dh = \int_{S_r(h_0)} (h - h_0)^\alpha dh + j \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1} r^{\alpha+1}, \quad (\alpha \neq -1).$$

Для интеграла по дуге окружности  $S_r(h_0)$  имеем с учетом параметризации (26) представление:

$$\int_{S_r(h_0)} (h - h_0)^\alpha dh = [(-1)^{\alpha+1} - j^{\alpha+1} - (-j)^{\alpha+1}] \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho^{\alpha+1} e^{j(\alpha+1)\psi} (d \ln \varrho + j d\psi).$$

Полагая  $\varrho = \varrho(\psi) = rf(\psi)$  (для нас не важен конкретный вид  $f$ , важно лишь, что эта функция зависит только от  $\psi$ , но не зависит от  $r$ ), приходим к выражению:

$$\int_{S_r(h_0)} (h - h_0)^\alpha dh = r^{\alpha+1} K_1(\alpha)$$

и в целом:

$$\oint_{\Gamma_1} (h - h_0)^\alpha dh = r^{\alpha+1} K_2(\alpha), \quad (\alpha \neq -1). \quad (56)$$

где  $K_1(\alpha), K_2(\alpha)$  — некоторые функции, зависящие только от  $\alpha$ . В силу гомотопности контуров с различными  $r$  выражение (56) не должно зависеть от  $r$ . Это возможно только при условии  $K_2(\alpha) = 0$  при  $\alpha \neq -1$ . Учитывая предыдущий результат при  $\alpha = -1$ , можно написать следующую окончательную формулу:

$$\oint_{\Gamma} (h - h_0)^\alpha dh = \begin{cases} 0, & \alpha \neq -1; \\ j\ell_H, & \alpha = -1. \end{cases} \quad (57)$$

Полученный результат в определенном смысле обобщает формулы (18) и (17), поскольку интеграл от степени в гиперболическом случае обращается в нуль для всех вещественных  $\alpha$ , а не только для целых. Это обстоятельство может послужить мотивом для поиска фундаментальных континуальных разложений  $h$ -голоморфных функций, отличных от разложения в классические ряды Тейлора (или Лорана).

### 4.3 Гиперболические конформно-аналитические отображения

Введенная выше билинейная форма  $\mathcal{G}$  ведет себя относительно  $h$ -голоморфного преобразования  $F(h)$  как относительный скаляр:

$$\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}' = |F'(h)|^2 \mathcal{G}, \quad (58)$$

где  $F'(h) = dF/dh$ , откуда следуют законы преобразования элементов гиперболической длины и площади:

$$dl' = |F'| dl; \quad (dh \wedge d\bar{h})' = |F'|^2 (dh \wedge d\bar{h}). \quad (59)$$

Аналогично комплексному случаю, относительная скалярность формы площади имеет место при всяких диффеоморфизмах, а первое равенство в (59) означает, что  $h$ -голоморфные функции осуществляют конформные преобразования гиперболической плоскости, т. е. сохраняют гиперболические углы между кривыми в каждой точке. Это обстоятельство тесно связано с установленным

выше фактом об инвариантности конусов  $\text{Con}$  относительно *h*-голоморфных отображений. Отметим, что  $|F'|^2 = |\nabla u|^2 = |\nabla v|^2 = \sqrt{\Delta_F}$ , где  $\nabla$  — оператор градиента в псевдоевклидовой метрике, а  $\Delta_F$  — якобиан отображения  $F$ , рассматриваемого как отображение  $R^2 \rightarrow R^2$ .

Аналогично комплексному случаю, каждый диффеоморфизм  $f: R^2 \rightarrow R^2$  можно интерпретировать как гладкое векторное поле. Векторные поля, соответствующие *h*-голоморфным функциям двойной переменной, обладают рядом интересных и важных для приложений свойств. Из условий (41) следует, что каждая из компонент векторного поля  $F(h) = U + iV$  является гиперболической *h*-гармонической функцией, т. е. удовлетворяет 2-мерному волновому уравнению (43). *h*-гармонические функции, связанные друг с другом условиями Коши-Римана (41), будем называть *h*-сопряженными. Любая *h*-гармоническая на декартовой плоскости функция определяет (с точностью до постоянной) свою гиперболически сопряженную. Гиперболическим условиям Коши-Римана (41) на языке векторного анализа на псевдоевклидовой плоскости можно придать следующий геометрический смысл: векторное поле  $\bar{F} = U - jV$  *h*-потенциально и *h*-соленоидально, т. е. компоненты  $\{U, -V\}$  векторного поля  $F$  удовлетворяют соотношениям:

$$\bar{F}_{,h} = 0 \Leftrightarrow \text{roth } F \equiv U_{,x} - V_{,t} = 0; \quad \text{divh } F \equiv U_{,t} - V_{,x} = 0. \quad (60)$$

Физический смысл этих условий и соответствующие начально-краевые задачи, которые естественно решать с помощью гиперболических конформных преобразований, мы обсудим далее в отдельном разделе. Отметим здесь, что семейство поверхностей  $U = \text{const}$  и  $V = \text{const}$  определяет на декартовой плоскости  $R^2$  псевдоортогональные семейства линий, для которых  $\nabla U \cdot \nabla V \equiv U_{,t}V_{,t} - U_{,x}V_{,x} = 0$  всюду в силу условий (41).

## 5 Свойства некоторых элементарных функций двойной переменной

Рассмотрим подробнее свойства основных элементарных функций двойной переменной.

### 5.1 Степенные функции $F(h) = h^n$

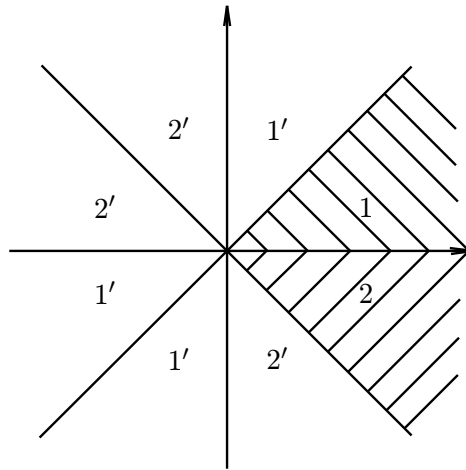
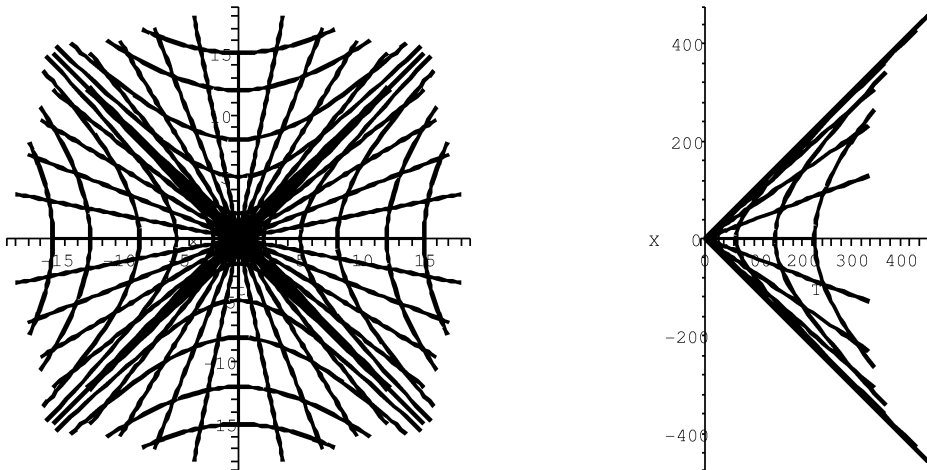
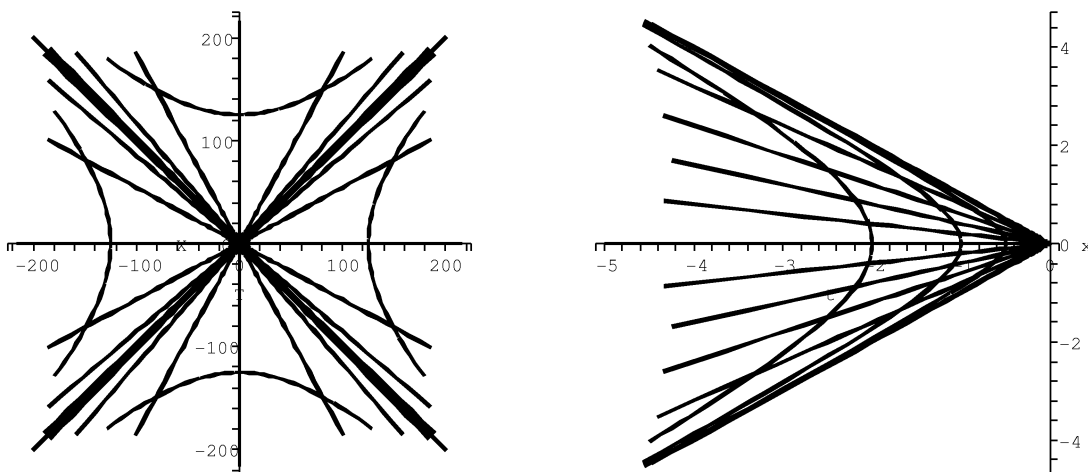
В отличие от степенной функции комплексной переменной случаи четных  $n$  и нечетных  $n$  кардинально отличаются. Действительно, переходя к экспоненциальному представлению (28), получаем:

$$h = \epsilon \rho e^{j\psi} \mapsto \epsilon^n \rho e^{jn\psi} \quad (61)$$

Поскольку для любого четного  $n$   $\epsilon^n = 1$ , можно заключить, что степенная функция  $h \mapsto h^n$  при  $n = 2k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  биективно отображает каждый из клиньев II, III, IV на клин I с отображением конусов  $\text{Con}_{\pm} \rightarrow \text{Con}_{\pm}$ . Напротив, при нечетном  $n$  каждый из координатных клиньев при отображении  $h \mapsto h^n$   $n = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  биективно отображается в себя. При этом, как нетрудно видеть из (61) координатная сетка линий  $\rho = \text{const}$ ,  $\psi = \text{const}$  переходит в координатную сетку линий  $\rho' = \rho^n = \text{const}$ ,  $\psi' = n\psi = \text{const}$  для всяких целых  $n$ . В случае положительных целых  $n$  радиальные линии растягиваются при  $\rho > 1$  и сжимаются при  $\rho < 1$ . Кроме того, они поворачиваются от значения  $\psi = 0$  в сторону соответствующих им по знаку компонент конусов. Для целых отрицательных  $n$  дополнительно происходит еще инверсия относительно единичных сфер  $\rho = 1$  и инверсия пространства углов  $\Psi \rightarrow -\Psi$ . В качестве примера функции с четным  $n$  рассмотрим функцию  $w = h^2 = x^2 + y^2 + 2jxy = \rho^2 e^{2\psi}$ .

На рис. 8 представлена глобальная структура отображения  $h \mapsto h^2$ : клин 1-2 переходит сам в себя (его границы — в соответствующие границы), а отображения остальных клиньев в клин 1-2 показано соответствующими цифрами (цифры со штрихами, помечающими клин, показывают как именно соответствующий клин отображается в клин 1-2). Таким образом, отображение  $h \mapsto h^2$  является 4-листным. Аналогичным образом устроено отображение:  $h \rightarrow h^{2k}$   $k \in \mathbb{Z}$ .

Наглядное представление некоторых простых степенных отображений представлено на рис. 9-10.

Рис. 8: Глобальная структура отображения  $h \mapsto h^2$ .Рис. 9: Гиперболическая полярная система координат (слева) и образ ее первого клина при отображении  $h \mapsto h^2$ .Рис. 10: Образ гиперболической полярной системе координат (рис. 9 слева) при отображении  $h \mapsto h^3$  (слева) и образ первого клина при отображении  $h \mapsto h^{-1}$  (справа).

Из свойств степенных функций легко вывести свойства корней различных порядков и рациональных степеней:  $h \mapsto h^{1/n}$ ,  $h \mapsto h^{m/n}$ . Любой корень  $\sqrt[n]{h}$  четного порядка определен в квадранте I. Такой корень будет 4-значной функцией. Каждый лист гиперболической римановой поверхности этой функции представляет собой идентичную копию клина I, показанного на рис. 8. На каждом из листов функция однозначна. Все листы склеиваются в риманову поверхность, представляющую собой  $R^2$ , при этом точка  $(0; 0)$  принадлежит всем листам и является гиперболическим аналогом точки ветвления. Наглядно риманову поверхность корня четного порядка можно реализовать листом бумаги, сложенным вчетверо так, как показано на рис. 11.

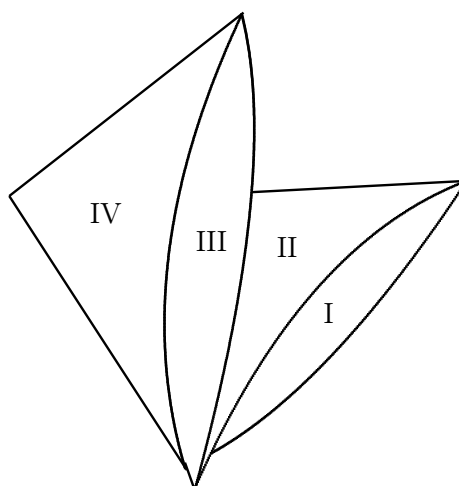


Рис. 11: Гиперболическая риманова поверхность 4-значного отображения  $h \mapsto h^{1/2k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Корни нечетной степени — однозначны в каждом из 4 клиньев.

### 5.2 Экспонента двойной переменной $w = e^h$

Записывая  $e^h = e^{t+jx} = e^t e^{jx}$  приходим к глобальной структуре экспоненциального отображения, представленной на рис.12.

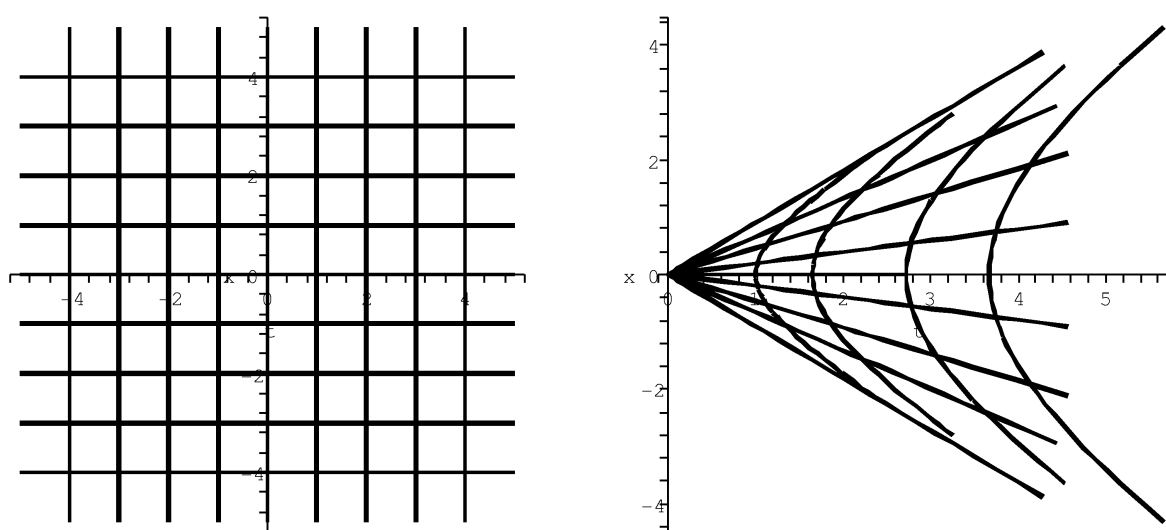


Рис. 12: Глобальная структура отображения  $h \mapsto e^h$ .

Прямоугольная псевдоортогональная сетка на плоскости переменной  $h$  отображается экспонентой в псевдоортогональную сетку, состоящую из лучей и гипербол в первом клине с вершиной

в точке  $h = 0$ . Отображение  $h \mapsto e^h$  — биективно. Очевидно, что обратная функция  $\ln h = \ln \rho + j\psi$  определена во внутренности первого клина. На границах (т.е. на конусе  $\text{Con}^\uparrow(0)$ ) полярная система координат не работает и требуется дополнительное исследование поведения отображения  $h \mapsto e^h$ , на котором мы здесь не останавливаемся.

### 5.3 Тригонометрические функции $\sin h$ , $\cos h$ и обратные к ним

Расписывая синус двойной переменной:

$$\sin h = \sin(t + jx) = \sin t \cos x + j \sin x \cos t, \quad (62)$$

замечаем, что линии  $x = \text{const}$  и  $t = \text{const}$  отображаются в семейства эллипсов с центром в точке  $(0; 0)$ . Эти линии наматываются на соответствующие эллипсы бесконечное число раз. На рис. 13 (справа) показаны образы квадратов с различными сторонами с центром в точке  $(0; 0)$  (слева).

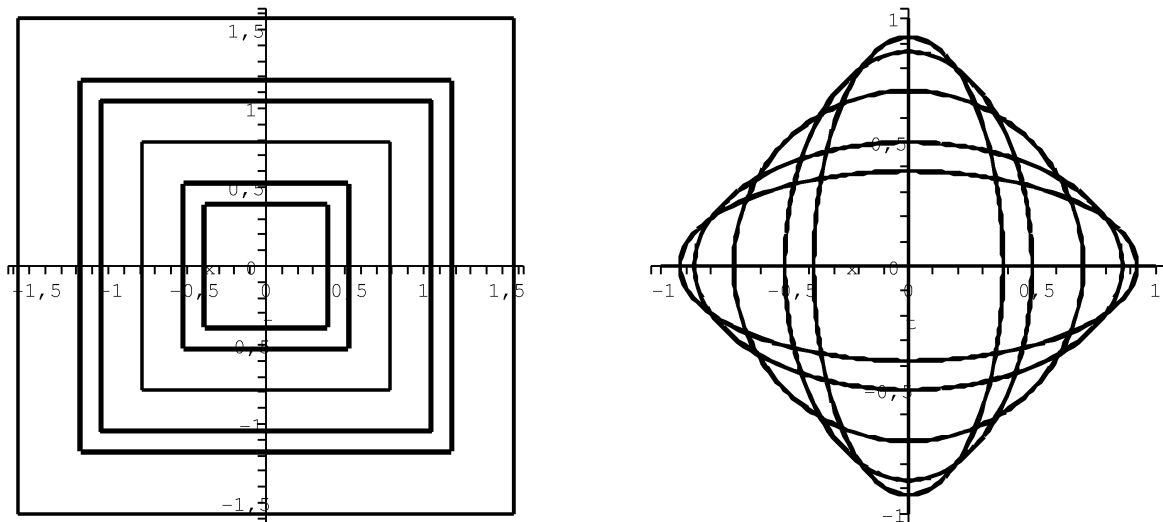


Рис. 13: Структура отображения  $h \mapsto \sin h$ .

Каждый квадрат переходит в четырех-лучевую звездообразную фигуру, причем квадрат со стороной  $\pi/2$  отображается в окружность, а квадрат со стороной  $\pi$  отображается в координатный крест с вершинами в точках  $(1; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(0; -1)$ . Из рисунка видно, что функция  $h \mapsto \sin h$  отображает внутренность квадратов со стороной, не превышающей  $\pi/2$  во внутренность звезд. Начиная с квадратов со стороной большей  $\pi/2$  однолиственность функции  $\sin h$  нарушается.

Вся плоскость переменной  $h$  покрывается квадратами со стороной  $\pi$ , которые получаются из наибольшего квадрата на рис. 13 слева трансляциями на векторы  $\pi(m + nj)$ , где  $m, n \in \mathbb{Z}$ . При этом отображение  $h \mapsto \sin h$  в двух соседних квадратах отличается знаком (инверсией правой картинки на рис. 13). На рис. 14 представлена вещественная часть выражения (62).

Нетрудно убедиться, что отображение  $h \mapsto \cos h$  устроено аналогично, только все семейство "фундаментальных квадратов" сдвинуто на плоскости переменной  $h$  влево на  $\pi/2$  (поскольку  $\cos h = \sin(h + \pi/2)$ .)

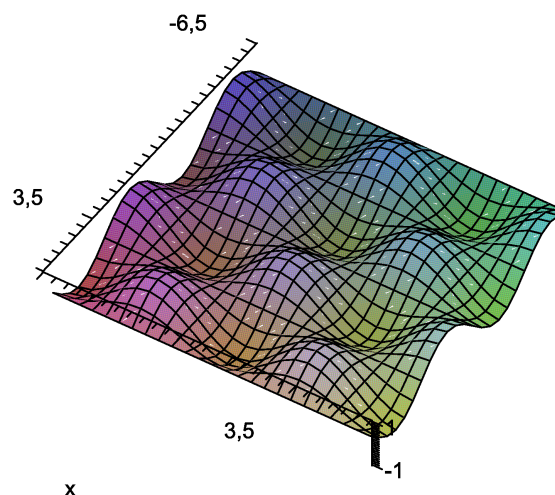


Рис. 14: Вещественная часть отображения  $h \mapsto \sin h$ .

Соответственно функцию  $\arcsin$  (и  $\arccos$ ) можно определить на квадрате с вершинами в точках  $(1; 0), (0; 1), (-1; 0), (0; -1)$  (на таком квадрате, сдвинутом на  $\pi/2$  влево). Явные формулы для арксинуса и арккосинуса имеют вид:

$$\begin{aligned} \arcsin h &= \frac{1}{2} [\arcsin((t+x)\sqrt{1-(t-x)^2} + (t-x)\sqrt{1-(t+x)^2}) + \\ &\quad j \arcsin((t+x)\sqrt{1-(t-x)^2} - (t-x)\sqrt{1-(t+x)^2})] \\ \arccos h &= \frac{1}{2} [\arccos(t^2 - x^2 - \sqrt{1-(t-x)^2}\sqrt{1-(t+x)^2}) + \\ &\quad j \arccos(t^2 - x^2 + \sqrt{1-(t-x)^2}\sqrt{1-(t+x)^2})]. \end{aligned}$$

Вещественная и мнимая часть первого выражения представлена на рис. 15.

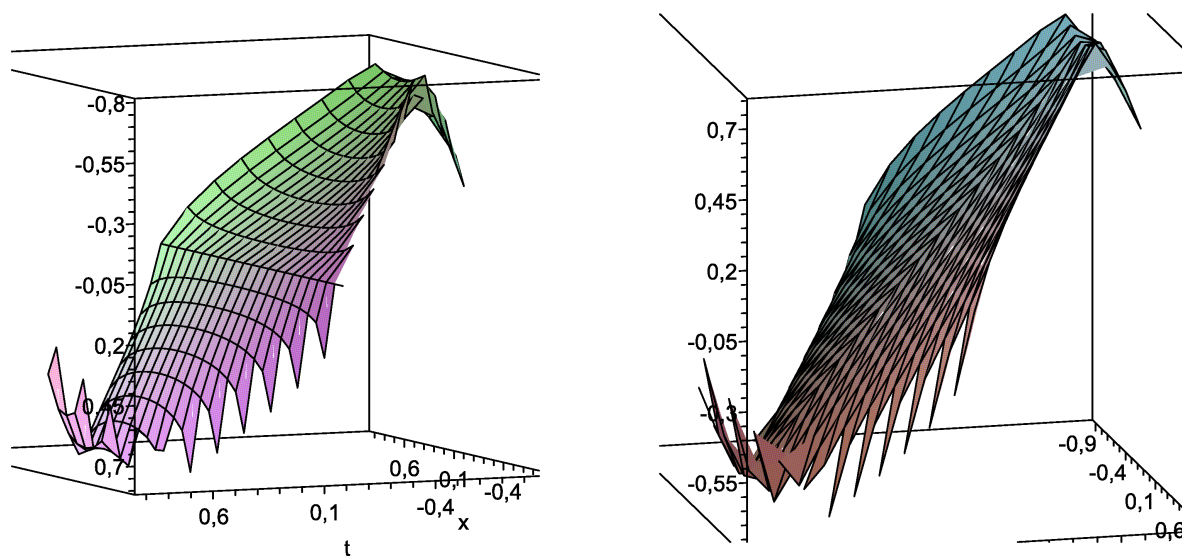


Рис. 15: Отображение  $h \mapsto \arcsin h$  (вещественная и мнимая части).

#### 5.4 Тригонометрические функции $\tan h$ , $\cot h$ и обратные к ним

Выделяя в функции  $w = \tan h$  вещественную и мнимую часть после элементарных преобразований получаем:

$$\tan h = \frac{\sin 2t + j \sin 2x}{\cos 2t + \cos 2x}.$$

Эта функция отображает квадрат с центром в точке  $(0; 0)$  и стороной  $\pi/2$  в область, ограниченную гиперболами, а прямоугольную сетку в исходном квадрате — в симметричную гиперболическую сетку внутри области (рис. 16).

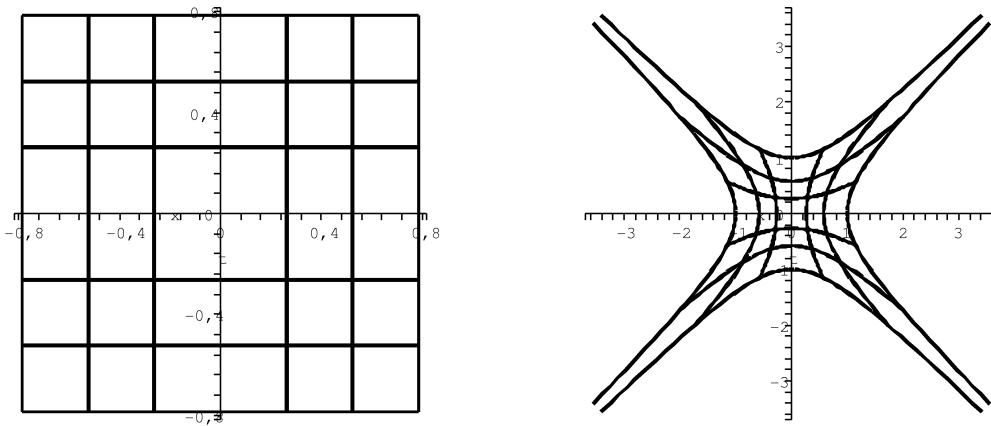


Рис. 16: Структура отображения  $h \mapsto \tan h$ .

В целом функция  $h \rightarrow \tan h$  бесконечнолистка. Ее листы представляют собой квадраты, получаемые из фундаментального квадрата  $(\pi/2; 0)$ ,  $(0; \pi/2)$ ,  $(-\pi/2; 0)$ ,  $(0; -\pi/2)$  трансляциями на векторы кратные  $\pi$  по  $t$  и  $x$ . Графики вещественной и мнимой части тангенса двойной переменной в фундаментальном квадрате представлены на рис. 17.

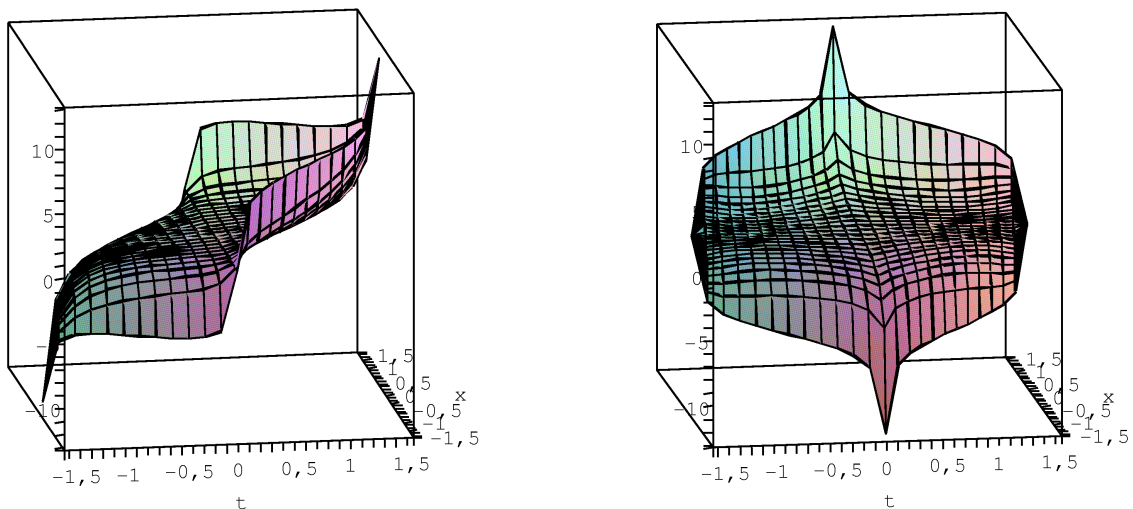


Рис. 17: 3-мерная структура отображения  $h \mapsto \tan h$  (вещественная и мнимая части).



Ввиду тождества  $\cot h = -\tan(h - \pi/2)$ , аналогично устроена функция  $w = \cot h$ . Функции  $\arctan$  и  $\operatorname{arccot}$  многозначны, их однозначные ветви можно выделить на любом из фундаментальных квадратов. К примеру, функция  $\arctan h$  имеет следующий явный вид в координатах:

$$\arctan h = \frac{1}{2} \left\{ \arctan \left[ \frac{2t}{1-t^2+x^2} \right] + j \arctan \left[ \frac{2x}{1+t^2-x^2} \right] \right\}.$$

Графики вещественной и мнимой части этого отображения представлены на рис. 18

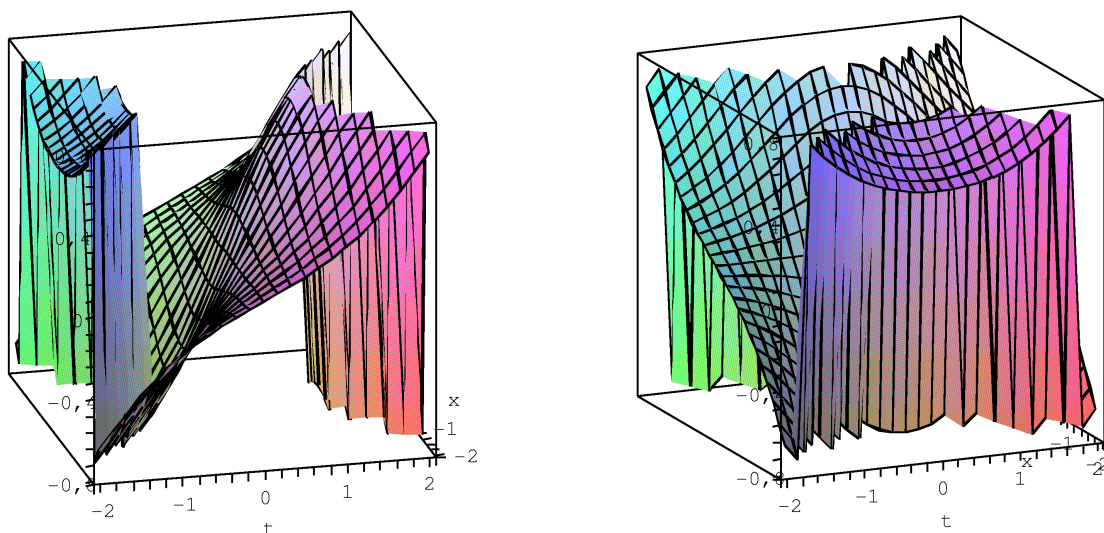


Рис. 18: Структура отображения  $h \mapsto \arctan h$  (вещественная и мнимая части).

### 5.5 Гиперболические функции $\sinh h$ , $\cosh h$ , $\tanh h$ , $\coth h$ и обратные к ним

Выделяя по аналогии с эллиптическим синусом в функции  $w = \sinh h$  вещественную и мнимую часть, приходим к выражению:

$$\sinh h = \sinh t \cosh x + j \sinh x \cosh t.$$

Наглядный 3-мерный вид этого отображения представлен на рис. 19

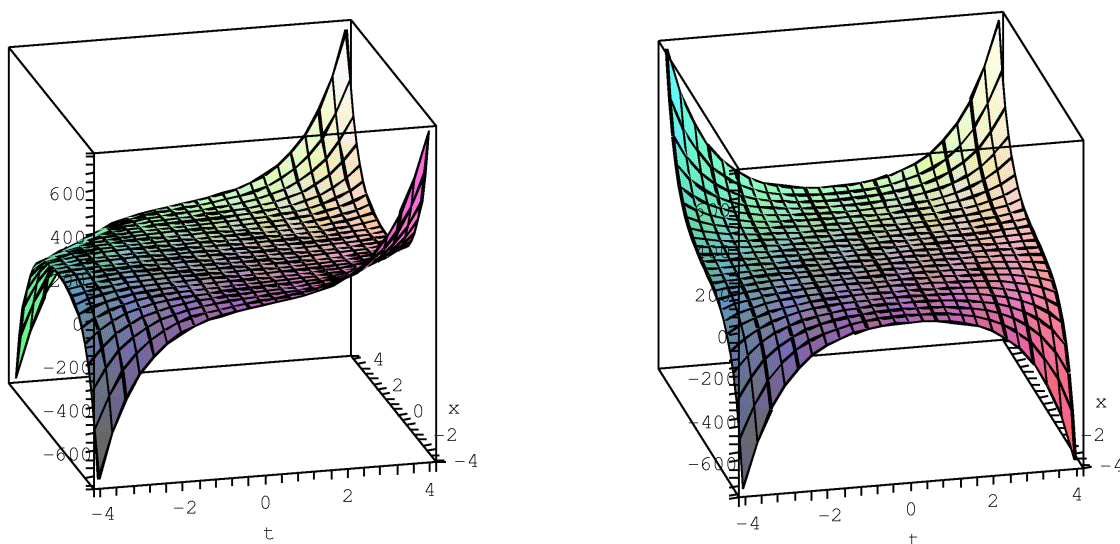


Рис. 19: 3-мерная структура отображения  $h \mapsto \sinh h$  (вещественная и мнимая части).

Нетрудно видеть, что прямоугольная координатная сетка  $(t, x)$  отображается в гиперболическую сетку на плоскости образов  $w$  (рис. 20).

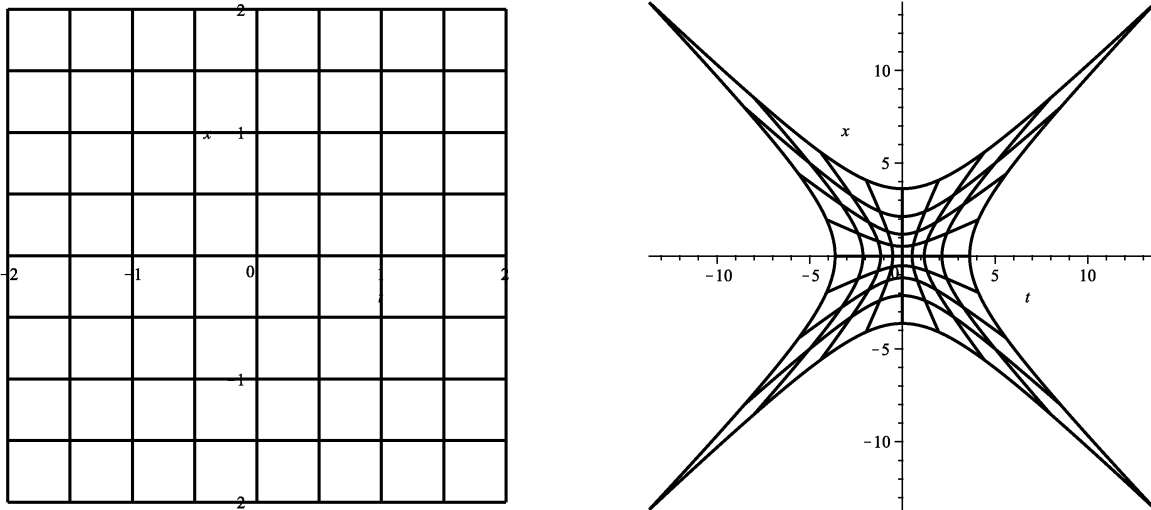


Рис. 20: Структура отображения  $h \mapsto \sinh h$ .

Отображение  $h \mapsto \sinh h$  — взаимно-однозначно, поэтому обратное отображение  $\text{Arsh}$  определено на всей двойной плоскости. Его явный координатный вид дается формулой:

$$\text{Arsh } h = \frac{1}{2} \left( \text{Arsh}[(t+x)\sqrt{1+(t-x)^2} + (t-x)\sqrt{1+(t+x)^2}] + \right. \\ \left. j \text{Arsh}[(t+x)\sqrt{1+(t-x)^2} - (t-x)\sqrt{1+(t+x)^2}] \right),$$

а вид вещественной и мнимой части этого отображения представлен на рис. 21.

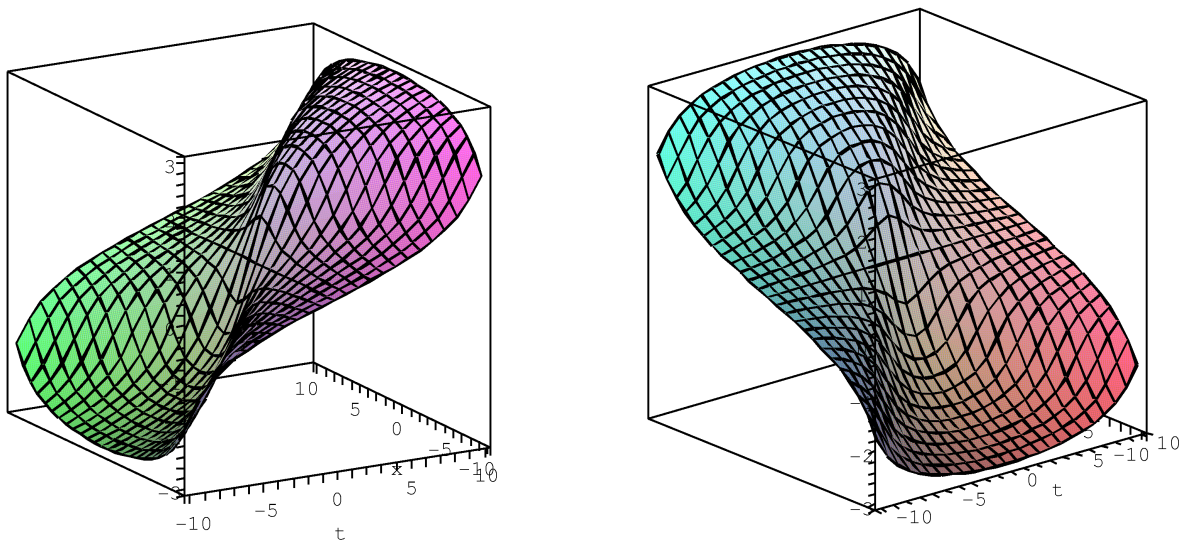


Рис. 21: Структура отображения  $h \mapsto \text{Arsh } h$  (вещественная и мнимая части).

Ввиду двулистности гиперболического косинуса отображение

$$\cosh h = \cosh t \cosh x - j \sinh t \sinh x$$

устроено иначе. Его наглядный 3-мерный вид представлен на рис. 22

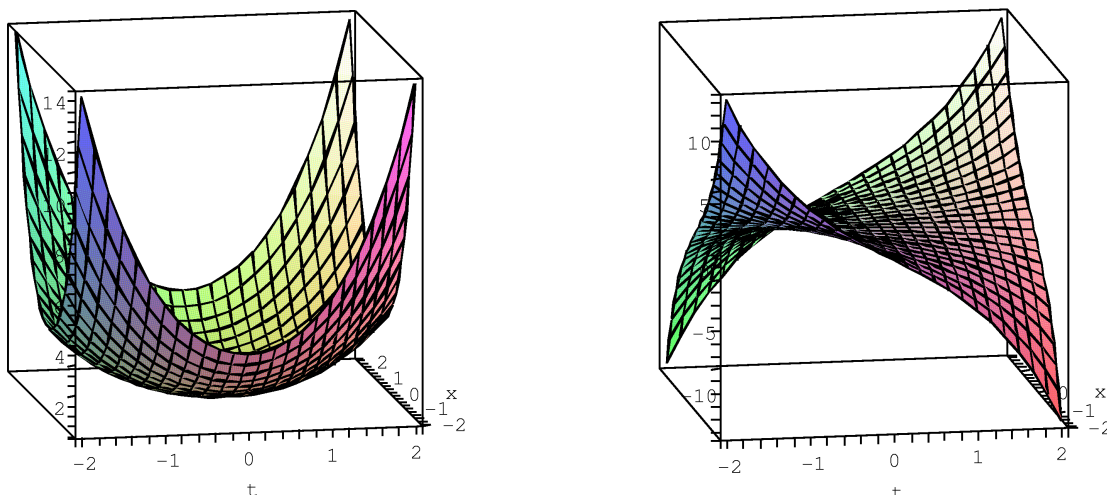


Рис. 22: 3-мерная структура отображения  $h \mapsto \cosh h$  (вещественная и мнимая части).

Первый клин с вершиной в нуле отображение  $\cosh$  биективно отображает в первый клин с вершиной в точке 1. При этом декартова сетка переходит в сетку ортогональных гипербол. В этот же клин переходят и остальные клинья с вершиной в точке 0 (рис. 23).

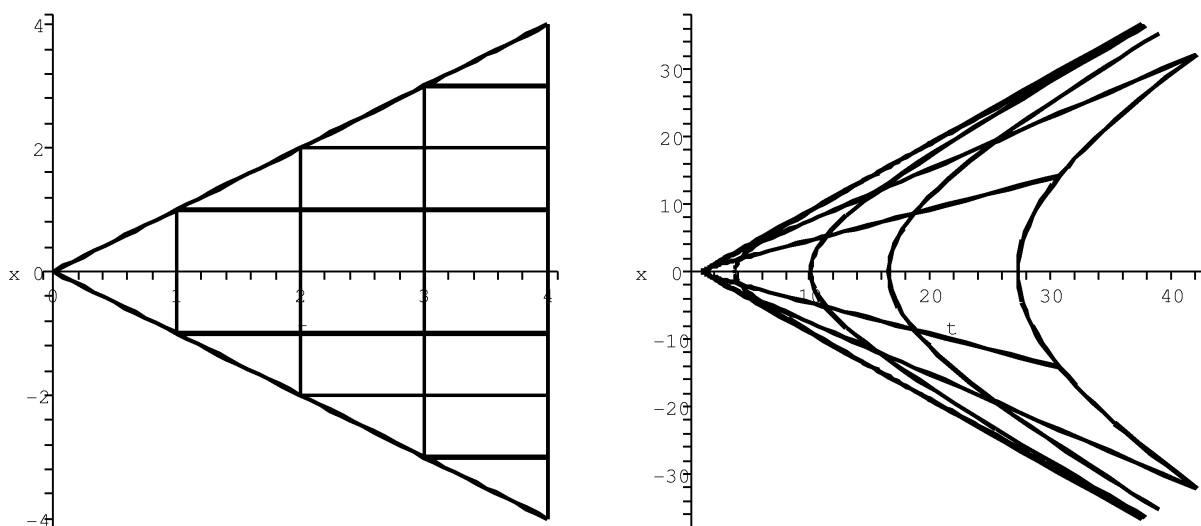


Рис. 23: Структура отображения  $h \mapsto \cosh h$ .

В целом глобальная структура отображения  $\cosh h$  иллюстрируется рисунком 8, в котором заштрихованный клин сдвинут на единицу вправо. Таким образом, гиперболический косинус —

4-листная функция, а гиперболический арккосинус — 4-значная с римановой поверхностью, представленной на рис. 11. Его явное координатное представление дается формулой:

$$\text{Arch } h = \frac{1}{2}(\text{Arch}[t^2 - x^2 - \sqrt{(t+x)^2 - 1}\sqrt{(t-x)^2 - 1}] + j\text{Arch}[t^2 - x^2 + \sqrt{(t+x)^2 - 1}\sqrt{(t-x)^2 - 1}]),$$

а наглядный вид представлен на рис. 24.

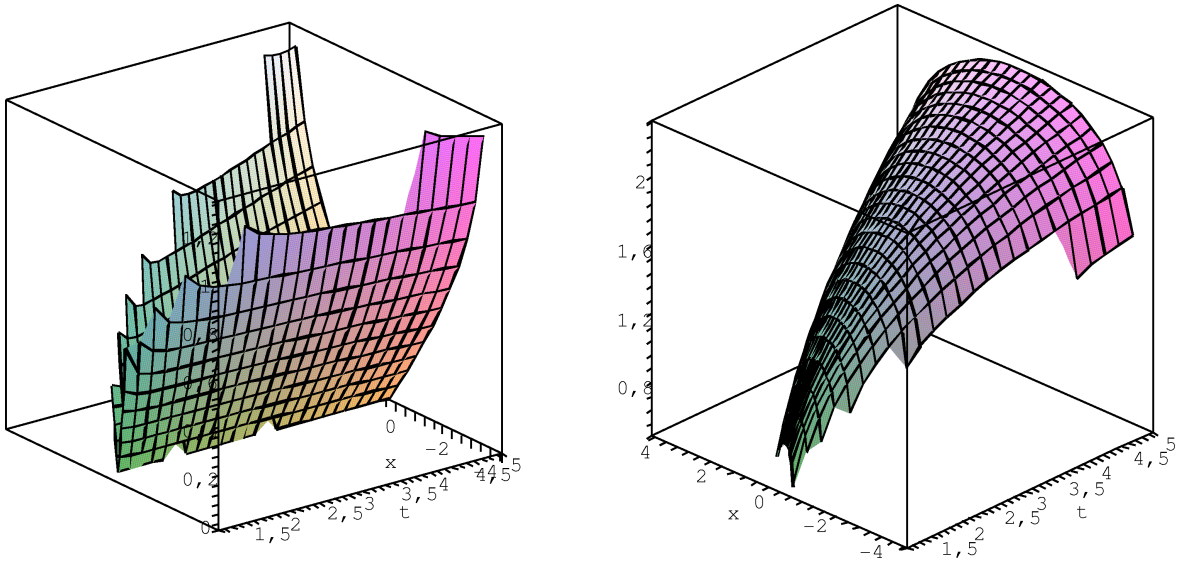


Рис. 24: Структура отображения  $h \mapsto \text{Arch } h$  (вещественная и мнимая части).

Функция

$$\tanh h \equiv \frac{\sinh h}{\cosh h} = \frac{\tanh t(1 + \tanh^2 x)}{1 - \tanh^2 t \tanh^2 x} + j \frac{\tanh x(1 + \tanh^2 t)}{1 - \tanh^2 t \tanh^2 x}$$

отображает двойную плоскость на внутренность гиперболической окружности  $|t^2 - x^2| = 1$ , близкую к изображенной на рис. 25 (справа). Наклонные "острия" продолжаются неограниченно.

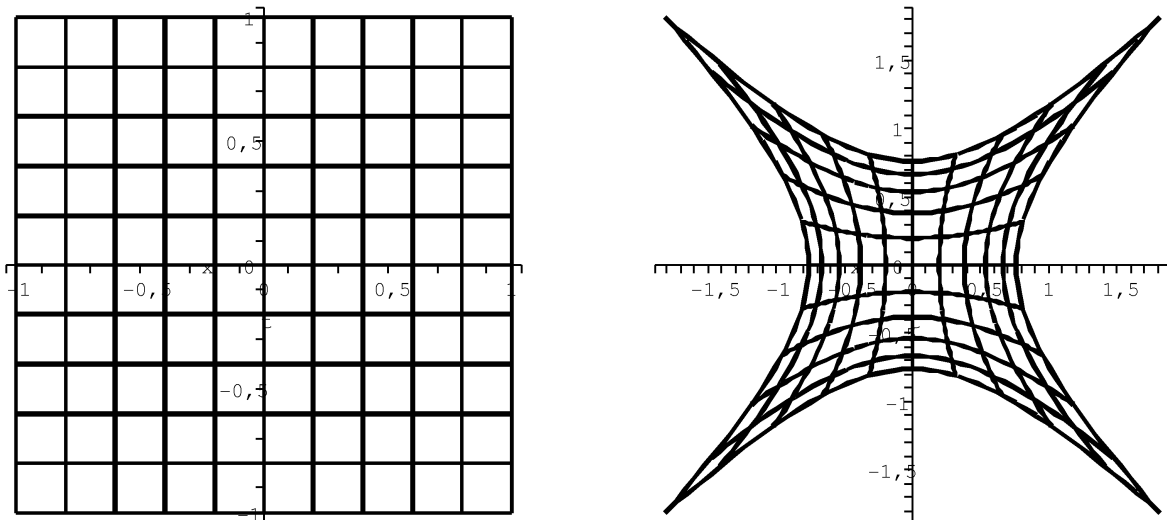


Рис. 25: Структура отображения  $h \mapsto \tanh h$ .

Наглядный 3-мерный вид гиперболического тангенса представлен на рис. 26.

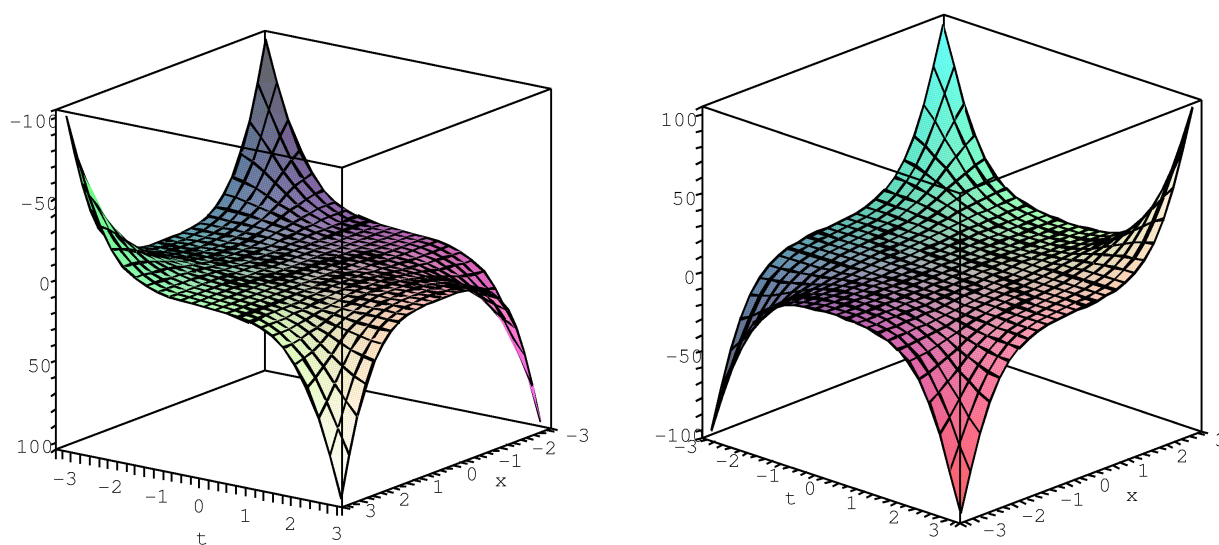


Рис. 26: Структура отображения  $h \mapsto \tanh h$  (вещественная и мнимая части).

Гиперболический тангенс — функция однолистная, поэтому обратная функция  $\text{Arth}$  однозначна на области определения. Ее выражение в координатах дается формулой:

$$\text{Arth } h = \frac{1}{2}(\text{Arth}(t+x) + \text{Arth}(t-x) + j(\text{Arth}(t+x) - \text{Arth}(t-x))),$$

а наглядный вид представлен на рис. 27.

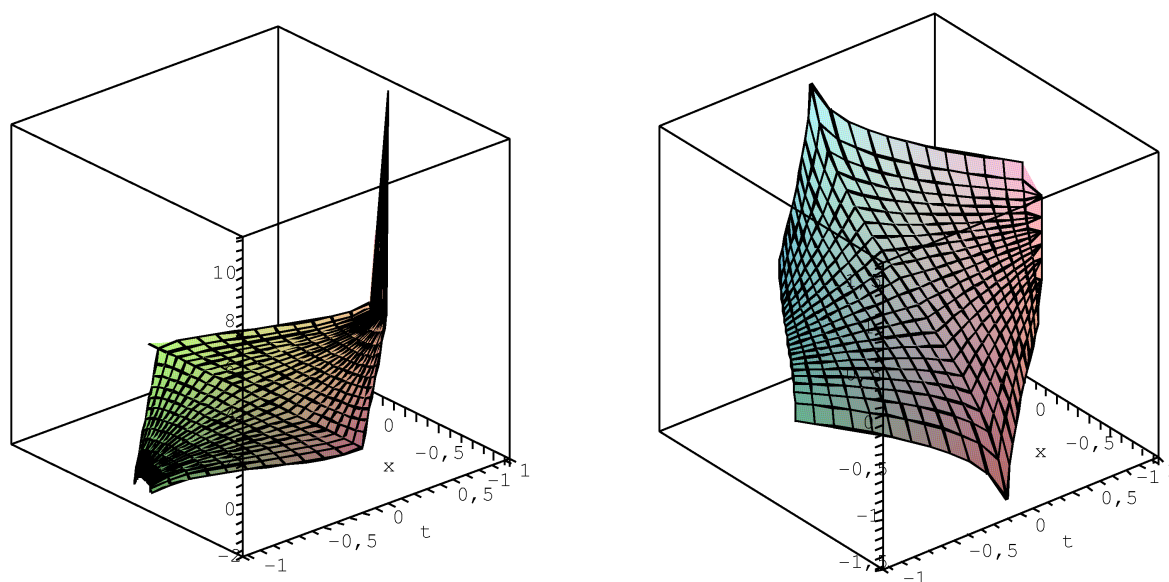


Рис. 27: Структура отображения  $h \mapsto \text{Arth } h$  (вещественная и мнимая части).

Функция

$$\coth h \equiv \frac{\cosh h}{\sinh h} = \frac{\coth t(1 + \coth^2 x) - j \coth x(1 + \coth^2 t)}{\coth^2 x - \coth^2 t}$$

является в определенном смысле дополнительной к функции  $\tanh h$ : она отображает всю плоскость  $\mathcal{H}$  на внешность гиперболической окружности  $|t^2 - x^2| = 1$ , близкую к внешности области, изображенной на рис. 25 (справа). При этом прямоугольная координатная сетка переходит в ортогональное семейство гипербол, которые пересекаются в бесконечно-удаленной точке. Наглядный 3-мерный вид ветвей гиперболического котангенса представлен на рис. 28.

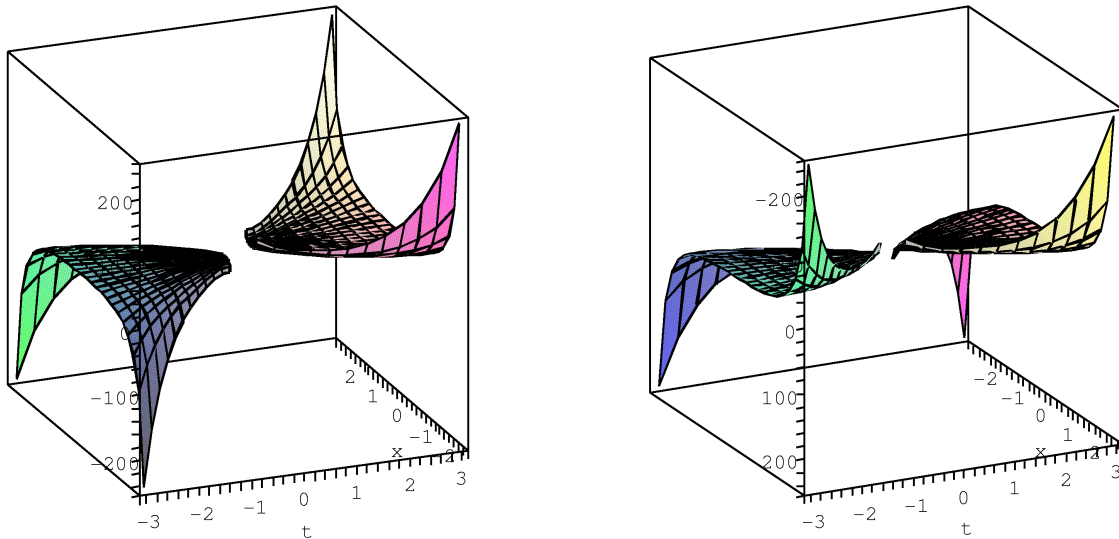


Рис. 28: Структура отображения  $h \mapsto \coth h$  (вещественная и мнимая части).

Функция  $\coth$  — однолистная и обратная к ней функция  $\text{Arcth}$  — однозначная в своей области определения. Ее выражение в координатах дается формулой:

$$\text{Arcth } h = \frac{1}{2}(\text{Arcth}(t+x) + \text{Arcth}(t-x) + j(\text{Arcth}(t+x) - \text{Arcth}(t-x))),$$

а наглядный вид представлен на рис. 29.

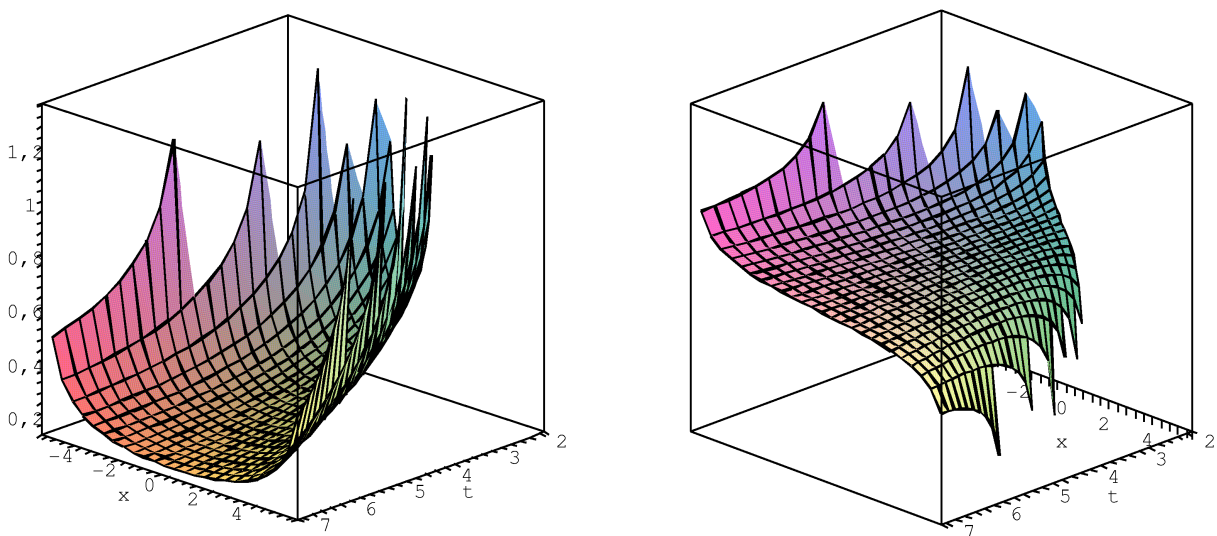


Рис. 29: Структура отображения  $h \mapsto \text{Arcth } h$  (вещественная и мнимая части).

### 5.6 Дробнолинейное преобразование: $h \mapsto (ah + b)(ch + d)^{-1}$

Определим дробно-линейную функцию соотношением:

$$w = \frac{ah + b}{ch + d} = D_{cd}^{ab}(h), \tag{63}$$

где  $a, b, c, d$  — произвольные двойные числа, удовлетворяющие условию  $ad - bc \neq 0$ . Особенностью определения (63) является наличие конуса  $\text{Con}(-d/c)$  на котором это определение, вообще говоря, теряет смысл. Далее мы будем исключать из области определения функции (63) линию конуса  $\text{Con}(-d/c)$ . Имеют место следующие утверждения:

1. Дробно-линейная функция (63) в своей области определения осуществляет взаимно-однозначное и непрерывное отображение  $\mathcal{H} \setminus \text{Con}(-d/c) \rightarrow \mathcal{H}$ , которое является конформным. Обратная функция также является дробно-линейной и имеет вид:

$$h = \frac{dw - b}{a - cw} = D_{-c,a}^{d,-b}(w) = (D_{cd}^{ab})^{-1}(h), \quad w \notin \text{Con}(a/c). \tag{64}$$

2. Композиция дробно-линейных отображений  $D_2 \circ D_1$  является дробно-линейным отображением. При этом совокупность всех дробно-линейных преобразований образует группу, изоморфную  $SL(2, \mathcal{H})$ .
3. Дробно-линейная функция отображает гиперболическую окружность  $HS_R(h_0)$  с уравнением  $|h - h_0|^2 = \pm R^2$  в гиперболическую окружность.
4. Вводя определение точек  $h$  и  $h^\vee$ , сопряженных относительно окружности  $HS_R(h_0)$ , аналогичное определению на комплексной плоскости (сопряженные точки лежат на одном луче, исходящем из центра — одна внутри, другая снаружи окружности и их гиперболические расстояния до центра окружности удовлетворяют соотношению:  $|h - h_0| \cdot |h^\vee - h_0| = R^2$ ), можно сформулировать еще одно геометрическое свойство дробно-линейных отображений: точки, сопряженные относительно  $HS_R(h_0)$ , переходят в точки сопряженные относительно окружности  $D(HS_R(h_0))$ .

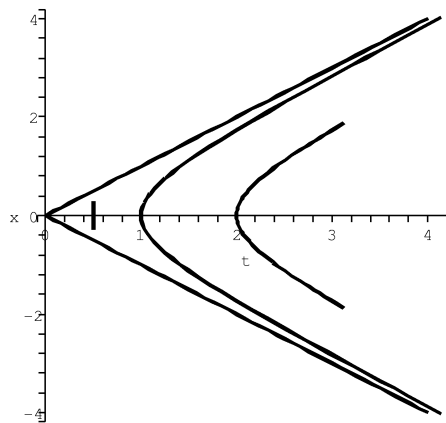


Рис. 30: Сопряженные относительно единичной гиперболической окружности кривые (вертикальный отрезок сопряжен правой гиперболе относительно левой).

Доказательство вышеперечисленных утверждений формально повторяет доказательство аналогичных утверждений в теории дробно-линейных функций комплексной переменной. Единственное отличие, которое необходимо оговаривать на каждом шаге, заключается в исключении из рассмотрения делителей нуля в тех случаях, когда используется операция деления.

Наглядное действие операции сопряжения относительно гиперболической окружности показано на рис. 30.

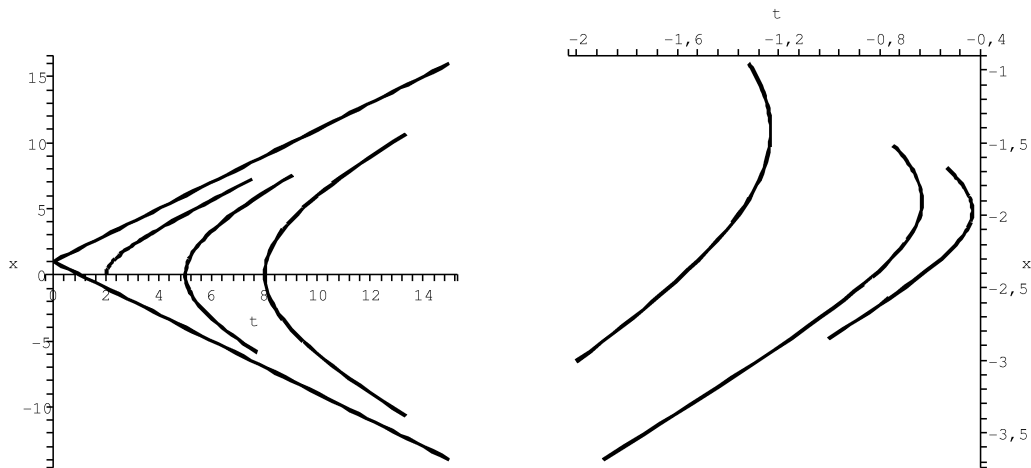


Рис. 31: Отображение дуг гиперболических окружностей в дуги окружностей при дробно-линейном отображении  $h \mapsto (2h + j)/(1 - jh)$ . Пара прямых линий на левом рисунке изображает конус  $\text{Con}(j)$ .

Наглядный вид рассмотренного отображения представлен на рис. 32.

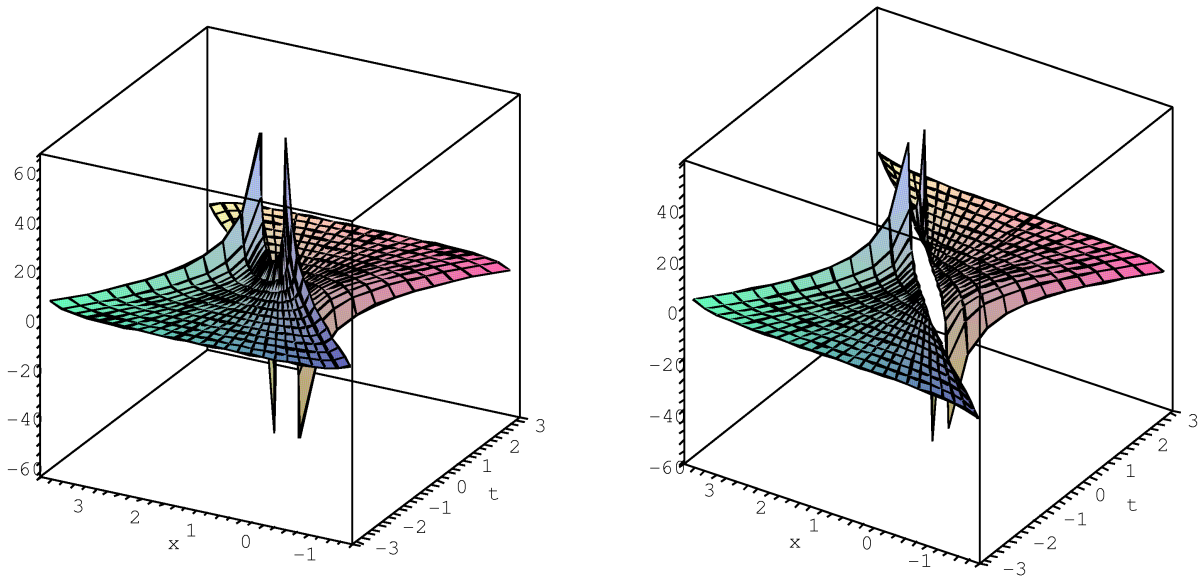


Рис. 32: Структура отображения  $h \mapsto (2h + j)/(1 - jh)$  (вещественная и мнимая части).

Рассмотрим, наконец, гиперболическую версию функции Жуковского:

$$Z(h) \equiv \frac{1}{2} \left( h + \frac{1}{h} \right).$$

Эта функция отображает единичную гиперболическую окружность  $\text{HS}_1(0)$  в куски координатных осей, двукратно накрывая их (см. рис. 33).

При этом, как и в случае комплексной переменной, функция Жуковского двулистка: внешность единичной окружности и ее внутренность она отображает на двойную плоскость. В точках  $\pm 1, \pm j$  конформность функции  $Z(h)$  нарушается, поскольку в этих точках  $Z'(h) = 0$ . Наглядный вид гиперболической функции Жуковского представлен на рис. 34.

Риманова поверхность двузначной функции  $Z^{-1}(h)$  представлена на рис. 35.



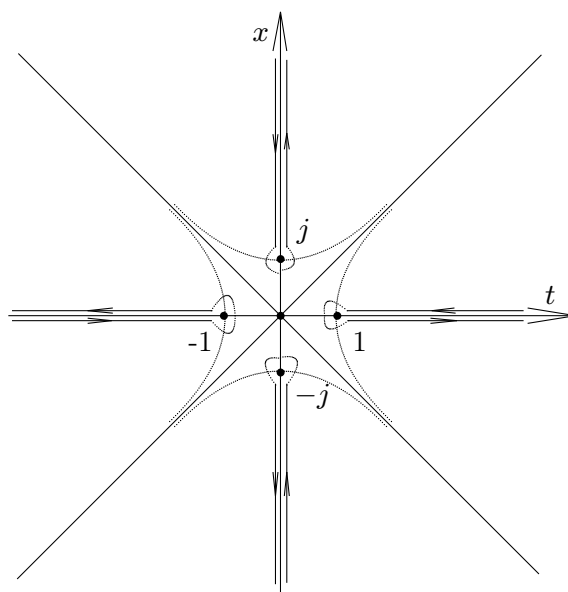


Рис. 33: Действие гиперболической функции Жуковского.

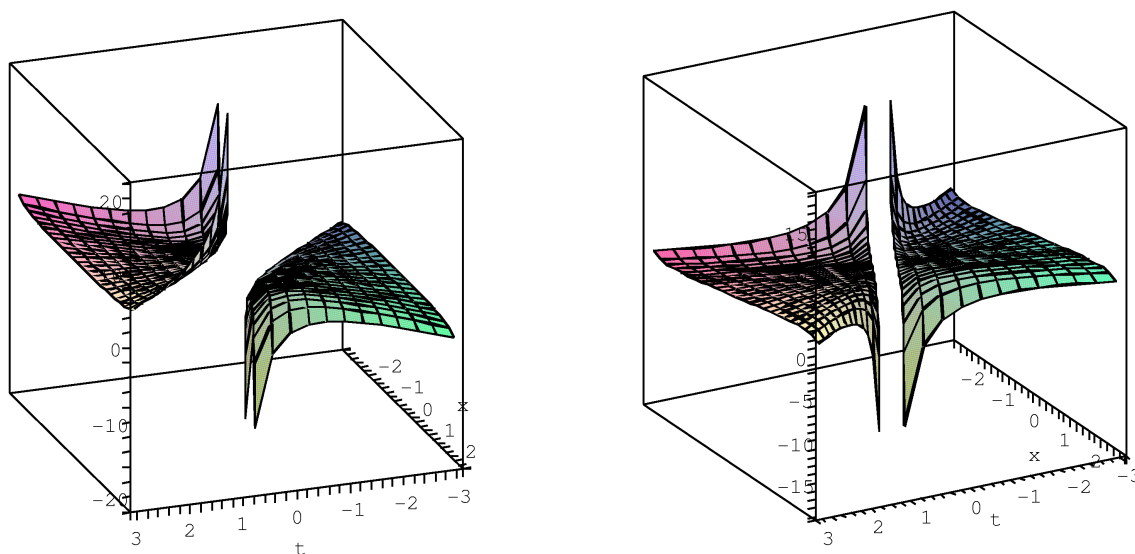


Рис. 34: Структура отображения  $h \mapsto (h + h^{-1})/2$ . (вещественная и мнимая части).

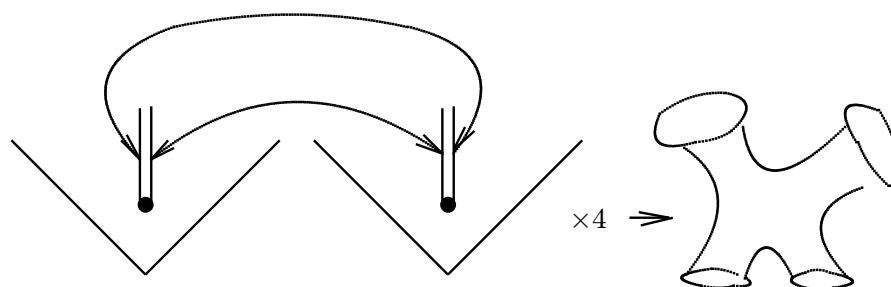


Рис. 35: Риманова поверхность обратной функции Жуковского  $Z^{-1}$ . Слева — правило склейки двух клиньев вдоль разреза на координатной оси. Четыре экземпляра таких "полуфабрикатов" склеиваются вместе в поверхность, топологически эквивалентную изображенной справа.

## 6 Решение плоских начально-краевых задач 2-мерной теории поля

По аналогии с приложениями конформных преобразований на стандартной (эллиптической) комплексной плоскости,  $h$ -аналитические функции могут использоваться для решения задач теории поля, связанных с 2-мерным волновым уравнением:  $\square_2\varphi = 0$ . Непопулярность гиперболических конформных преобразований связана, в первую очередь, с нетрадиционностью постановки начально-краевых задач, которые решаются методом гиперболических конформных преобразований. Действительно, применение конформных преобразований на плоскости комплексной переменной для решения задач эллиптического типа, связанных с уравнением Лапласа, опирается на отмечавшееся выше обстоятельство: аналитическая функция  $w = f(z)$ , вещественная часть которой представляет решение некоторой краевой задачи, отображает границу области вне источников поля на прямую  $\operatorname{Re} w = \operatorname{const}$ . Это требование отражает условие постоянства потенциала на границе области, в которой решается уравнение Лапласа и обеспечивает единственность решения с точностью до произвольного выбора значения потенциала на границе.

В начально-краевых задачах гиперболического типа используется другая постановка задачи: рассматривается пространственно-временная область в виде полуограниченного цилиндра<sup>8</sup>  $D^3 \times R_+$  (или топологически эквивалентная ей) и задаются начальные условия на начальной поверхности  $D^3 \times \{0\}$  (начальные значения для поля и его производных по времени) и граничные условия на боковой поверхности  $\partial D^3 \times R_+$  (значения поля и его пространственных производных). Если задача поставлена корректно, то эти начально-краевые данные определяют единственное решение с хорошими свойствами во все моменты времени  $t > 0$ . В 2-мерном пространстве времени граница области представляет собой времениподобный прямоугольник  $I \times R_+$  или топологически эквивалентную ему фигуру

Использование конформных преобразований, осуществляемых  $h$ -аналитическими функциями, предполагает перенос постановки эллиптической задачи на плоскости на гиперболические задачи на плоскости. Другими словами,  $h$ -аналитическая функция  $w = f(h)$  представляет решение некоторой начально-краевой задачи гиперболического типа, а именно той, для которой эта функция переводит 1-мерную границу области вне источников в линию  $\operatorname{Re} w = \operatorname{const}$ . Очевидно, такая постановка задачи отличается от стандартной, поскольку начально-краевые условия заменяются на *задание формы мировой поверхности (линии) постоянного потенциала*. Эта поверхность имеет пространственно-временной характер. В принципиальном отношении она может быть получена с помощью измерений волнового поля  $\varphi$  в разных точках пространства в разные моменты времени с помощью надлежащего (достаточно большого) числа приборов. Точки-события пространства-времени, для которых показания приборов дают  $\varphi = \operatorname{const}$  и образуют искомую поверхность. Согласно проведенным выше рассмотрениям, форма этой поверхности однозначно определяет решение волнового уравнения. Однако такая постановка задачи обычно не используется на практике, поскольку данные "размазаны" в пространстве и времени.

В качестве примера рассмотрим задачу об определении волнового поля, которое на гиперболической окружности  $t^2 - x^2 = R^2$  принимает постоянное значение  $\varphi_0$ . В соответствии с результатами раздела 5.2, подходящее решение имеет вид:  $\varphi = \varphi_0 + \ln[(t^2 - x^2)/R^2] = \operatorname{Re}(\ln h + \varphi_0)$ . Его 3-мерный график и последовательные временные сечения представлены на рисунке 6.

## 7 Заключение

Мы показали в общих чертах фундаментальную для физики аналогию между комплексными и двойными числами. Алгебраическое описание геометрии и физики в 2-мерном пространстве-времени с помощью двойных чисел не менее привлекательно, чем описание задач на евклидовой плоскости с помощью комплексных чисел. Мы оставили без внимания ряд проблем (в основном чисто математического характера), возникающих на этом пути, апеллируя более к соображениям наглядности, чем строгости. Трудности разработки анализа на основе естественной метрической (т. е. в рассматриваемом нами случае — псевдоевклидовой) топологии хорошо известны специалистам в области математической теории относительности и именно они (наряду с трудностями психологического характера) послужили причиной сравнительно слабого интереса к двойным

<sup>8</sup>Здесь  $D^3$  — 3-мерный шар,  $R_+ = [0, \infty)$ .

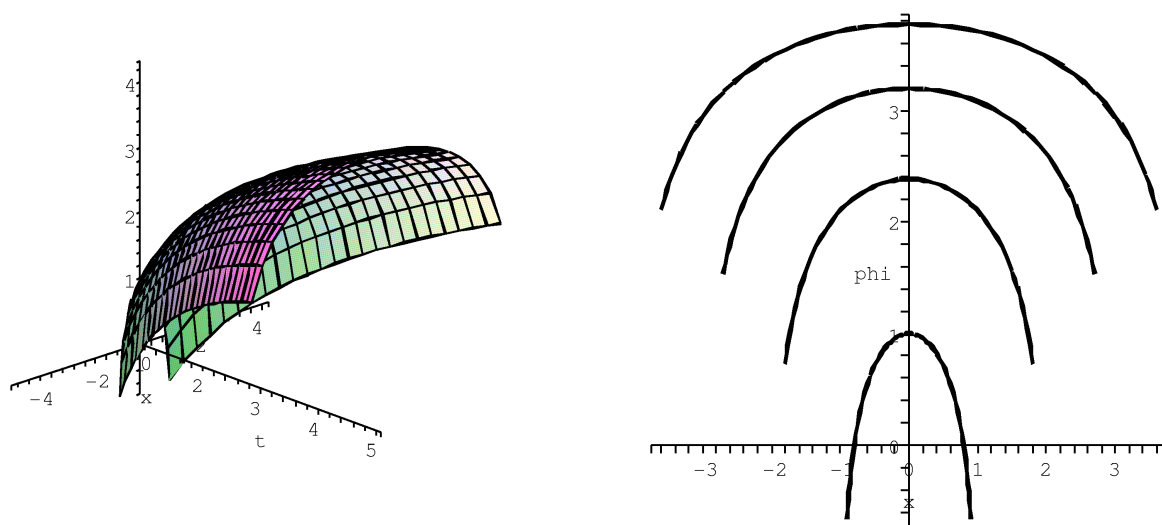


Рис. 36: Волновое решение, постоянное на гиперболической окружности ( $R = 1, \varphi_0 = 1$ ). На правом рисунке представлены последовательные временные сечения поверхности, изображенной на левом рисунке  $t = 1, 2, 3, 4$ .

числам у физиков и математиков в отношении их физических приложений. На наш взгляд эти трудности принципиально преодолимы и, более того, то, что принято считать "трудностями" на самом деле является выражением некоторых новых фундаментальных концепций, которые геометрия пространства-времени привносит в физику и математику.

Отмеченное выше сходство между комплексной и двойной плоскостью продолжается и на векторные поля. Аналогично тому как каждой аналитической функции на комплексной плоскости сопоставляется то или иное потенциальное и соленоидальное векторное поле, связанное с источниками, вихрями, диполями, квадрупольями и т. п. в точках, где утрачивается аналитичность любой  $h$ -голоморфной функции можно также придать смысл некоторого векторного поля в 2-мерном пространстве-времени, точечные особенности которого обладают уже не эллиптическими, а гиперболическими свойствами. У нас появляется возможность говорить о гиперболических источниках и стоках, гиперболических вихрях и вихреисточниках, мультиполях, гиперболической функции Жуковского и т. д. и т. п. Генерируемые этими  $h$ -аналитическими функциями векторные поля обладают такими замечательными свойствами, как потенциальность и соленоидальность, понимаемыми, разумеется, в гиперболическом смысле. И если гиперболическая потенциальность рассматривалась в физике и раньше, то гиперболическая соленоидальность, насколько нам известно, как самостоятельное понятие, характеризующее идеальные векторные поля в пространстве-времени, возникает в обсуждаемом нами контексте впервые.

Среди известных физикам фундаментальных полей нет ни одного, для описания которого понятие гиперболической соленоидальности являлось бы необходимым. Возможно, именно поэтому оно и оказалось невостребованным. Возникает весьма интригующий вопрос, вполне закономерный в рамках обсуждаемого нами подхода: таких полей не существует в реальности объективно, или это лишь субъективный пробел в наших современных знаниях о фундаментальных взаимодействиях? Разработка данного вопроса приводит к идее проведения экспериментов, которые подтвердили бы факт существования или отсутствия в природе полей, обладающих гиперболической соленоидальностью. Отметим, что в математическом плане такие векторные поля могут быть описаны и изучены с помощью  $h$ -аналитических функций двойной переменной так же детально и естественно, как и их аналоги на комплексной плоскости.

Еще одно интересное следствие, которое предоставляют  $h$ -аналитические функции двойной

переменной, связано с возможностью трактовать задаваемые ими конформные преобразования как переходы между неинерциальными системами отсчета в плоском двумерном пространстве-времени. Такое рассмотрение группы конформных симметрий естественным образом раздвигает рамки двумерной специальной теории относительности, в которой обычно задействуются лишь изометрические преобразования, трактуемые как переходы между инерциальными системами отсчета. Подобной возможности (из-за отсутствия соответствующей бесконечномерной конформной группы симметрий) нет в трех- и четырехмерном псевдоевклидовых пространствах, зато она есть в двумерии, а также в некоторых трех- и четырехмерных плоских финслеровых геометриях, например, в пространствах с метрикой Бервальда-Моора, частным случаем которых, кстати, является и пространство двойных чисел [3, 4]. Идея фундаментальной роли групп симметрий (как линейных изометрических, так и нелинейных конформных) получила широкое распространение в физике, однако использование бесконечномерных конформных групп было по существу ограничено использованием лишь двумерных геометрий с квадратичными метриками. При переходе от квадратичных метрических форм пространства-времени к  $n$ -арным метрическим формам это ограничение на низкую размерность иногда снимается и проблема финслеровых расширений СТО и ОТО приобретает актуальность и перспективу. Следует подчеркнуть, что речь идет именно о расширении, а не о радикальном отказе от старых представлений, так как предполагается, что группы симметрий, на которых базировались предыдущие физико-математические конструкции, должны оказаться частными (предельными) случаями (или подгруппами) новых бесконечномерных групп симметрий и связанных с ними  $n$ -арных геометрий. Однако ввиду ограниченности рамок журнальной статьи авторы планируют развить данную тему уже в следующей публикации.

Авторы выражают свою благодарность сотрудникам НИИ ГКСГФ В. М. Чернову и Г. И. Гарасько за обсуждение материала статьи и ценные замечания.

## Литература

- [1] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973.
- [2] Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1977.
- [3] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., Тетру, 2009.
- [4] Павлов Д.Г. Обобщение аксиом скалярного произведения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (1), 2004, с. 5-19.
- [5] Шабат Б.О. Введение в комплексный анализ. М., Наука, 1985.

## ***h*-HOLOMORPHIC FUNCTIONS OF DOUBLE VARIABLE AND THEIR APPLICATIONS**

**D.G. Pavlov<sup>1</sup>, S.S. Kokarev<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fрязино, Russia*

<sup>2</sup> *RSEC Logos, Yaroslavl, Russia*

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

We consider complex-differentiable functions of double variable and their essential properties analogical to the properties of functions of standard complex variable: Cauchy theorem and Cauchy formula, hyperbolic harmonicity, general properties of *h*-conformal transformations and such transformations, yielded by elementary functions. The question on applications of *h*-conformal transformations for solving of 2-dimensional problems of mathematical physics is discussed.

**Key Words:** *h*-holomorphic function, conformal transformation, hyperbolic Cauchy theorem, hyperbolic polar coordinates.

# ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ ДВОЙНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Д.Г. Павлов<sup>1</sup>, С.С. Кокарев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

<sup>2</sup> Российский научно-образовательный центр "Логос", Ярославль, Россия

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

По аналогии с теорией гармонических полей на комплексной плоскости строится теория волновых полей на плоскости двойной переменной. Построены гиперболические аналоги точечных вихрей, источников, вихреисточников и их высших мультипольных обобщений. Обсуждаются физические аспекты теории и возможность ее обобщения на пространства поличисел высших измерений.

**Ключевые слова:**  $h$ -аналитическая функция, условия Коши-Римана, формула Коши, гиперкомплексный потенциал.

## 1 Введение

В работе [1] были сделаны наброски теории голоморфных функций двойной переменной. В качестве физического приложения теории были отмечены 2-мерные задачи, приводящие к волновому уравнению, для которого вместо начально-краевых условий задается форма пространственно-временной эквипотенциальной поверхности.

Логика перехода от комплексных чисел к двойным подсказывает, что на плоскости двойной переменной с помощью теории  $h$ -голоморфных функций можно построить теорию волновых полей, которые, по аналогии с гармоническими полями на комплексной плоскости, можно понимать как редуцированную с 4-х измерений систему полей, удовлетворяющих 4-мерным уравнениям Максвелла или их модификации, построенной на основе алгебры поличисел и (или) индуцируемой ей метрики Бервальда-Моора.

В настоящей статье мы развиваем такую теорию  $h$ -аналитических полей, обсуждаем их основные свойства и характеристики, аналогичные гармоническим полям на комплексной плоскости, рассматриваем ряд примеров и анализируем их возможный физический смысл и намечаем пути для обобщения рассмотренной конструкции на пространства  $\mathcal{H}_n$ .

## 2 $C$ -аналитическая теория поля на $R^2$

Целью настоящего раздела является напоминание основных фактов стандартной теории функций комплексной переменной в виде, удобном для их последующей переформулировки на двойной плоскости. Все доказательства приводимых фактов можно найти в известных руководствах [2, 3].

### 2.1 Аналитическая интерпретация

Напомним, что произвольное гладкое отображение  $f: R^2 \rightarrow R^2$  плоскости в себя можно представить парой компонент

$$(x, y) \mapsto (x', y') : \quad x' = f_1(x, y); \quad y' = f_2(x, y), \quad (1)$$

где  $f_1, f_2$  — гладкие функции  $R^2 \rightarrow R$ . С помощью формул:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (2)$$

где  $z = x + iy$ , а черта обозначает операцию комплексного сопряжения, эти отображения можно всегда записать в виде

$$(z, \bar{z}) \mapsto (z', \bar{z}') : \quad z' = F_1(z, \bar{z}); \quad \bar{z}' = F_2(z, \bar{z}). \quad (3)$$

Среди всех гладких отображений рассматриваемого вида целым рядом замечательных свойств выделяются отображения, называемые *голоморфными*, которые удовлетворяют условию:

$$F_{,\bar{z}} = 0, \quad (4)$$

и отображения, называемые *антиголоморфными*, удовлетворяющие условию:

$$F_{,z} = 0. \quad (5)$$

Условия голоморфности или антиголоморфности могут выполняться в точке или в некоторой области на комплексной плоскости<sup>1</sup>.

Напомним некоторые основные свойства голоморфных функций. Разделяя в функции  $F$  вещественную и мнимую часть:  $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , используя связь операторов дифференцирования по комплексным и вещественным переменным:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (6)$$

вытекающие из (2) и расписывая условие (4) в декартовых координатах, приходим к соотношению

$$\frac{dF}{d\bar{z}} = \frac{1}{2} [u_{,x} + iv_{,x} + i(u_{,y} + iv_{,y})] = 0, \quad (7)$$

вещественная и мнимая часть которого дает известные *условия голоморфности (комплексной аналитичности) Коши-Римана*:

$$u_{,x} = v_{,y}; \quad u_{,y} = -v_{,x}. \quad (8)$$

Аналогично для антиголоморфных функций получаем<sup>2</sup> условия антиголоморфности:

$$u_{,x} = -v_{,y}; \quad u_{,y} = v_{,x}. \quad (9)$$

Действуя на голоморфную или антиголоморфную функцию  $F$  2-мерным вещественным оператором Лапласа

$$\Delta \equiv 4\partial_z\partial_{\bar{z}} = \partial_x^2 + \partial_y^2, \quad (10)$$

приходим к тождествам:

$$\Delta u = 0; \quad \Delta v = 0, \quad (11)$$

выражающим факт гармоничности вещественной и мнимой частей голоморфных или антиголоморфных функций.

Отметим, что в силу нашего определения производная от голоморфной функции (если она существует — факт существования производных любого порядка доказывается в стандартном курсе ТФКП) снова является голоморфной функцией:

$$F_{,\bar{z}} = 0 \Rightarrow (F_{,z})_{,\bar{z}} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow (F_{,z}^{(n)})_{,\bar{z}} = 0 \quad (12)$$

(аналогично и для антиголоморфной с заменой  $z \leftrightarrow \bar{z}$ .) С этим обстоятельством связана возможность представления голоморфной в окрестности некоторой точки  $z_0$  функции степенным рядом Тейлора:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad (13)$$

где комплексные коэффициенты

$$c_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k F}{dz^k} \right|_{z=z_0}. \quad (14)$$

<sup>1</sup>Обычно под функцией, голоморфной в точке понимается комплексно дифференцируемая функция с условием (4), которое выполняется в некоторой окрестности этой точки.

<sup>2</sup>Фактически они получаются из условий (8) заменой знака у  $v$  на противоположный.

В окрестности точки  $z_0$ , в которой условие голоморфности нарушается, функция  $F$  иногда может быть представлена более общим *рядом Лорана*:

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k. \quad (15)$$

Часть ряда Лорана с отрицательными степенями  $(z - z_0)$  называется его *главной частью*, а часть с неотрицательными — *правильной частью*. При этом если главная часть имеет лишь конечное число членов и  $n$  — максимальная абсолютная величина степени, соответствующей отличному от нуля коэффициенту  $c_{-n}$ , то говорят, что функция  $F$  имеет в точке  $z_0$  полюс  $n$ -го порядка. В случае, когда  $n = \infty$ , точка  $z_0$  называется *существенно особой*. Другой тип особых точек — точки ветвления, при обходе которых голоморфная функция получает некоторое приращение. В окрестности таких точек ряд Лорана должен быть заменен обобщенным *рядом Пуансо*, содержащим нецелые степени  $z - z_0$  или  $\ln(z - z_0)$ .

**Пример 1.** Функция  $F(z) = \ln z$  голоморфна всюду на комплексной плоскости за исключением точек  $z = 0$  и  $z = \infty$ . Ее координатное представление дается выражением:

$$\ln z = \ln \rho + 2\pi i k \varphi = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 2\pi i k \arctan(y/x), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (16)$$

Особые точки  $z = 0$  и  $z = \infty$  — точки ветвления логарифма.

**Пример 2.** Рассмотрим функцию  $Z = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ , называемую *функцией Жуковского*. Эта функция голоморфна всюду за исключением точек  $z = 0$  и  $z = \infty$ , которые являются полюсами 1-ого порядка. Разложение этой функции на вещественную и мнимую часть имеет вид:

$$Z = \frac{x(x^2 + y^2 + 1)}{2(x^2 + y^2)} + i \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)}. \quad (17)$$

## 2.2 Топологическая интерпретация

Гладкие функции  $u$  и  $v$ , связанные условиями (8), не являются независимыми и определяют друг друга с точностью до констант. Действительно, приписывая функции  $v$  произвольное значение  $v_0$  в точке  $(x_0, y_0)$ , ее значение в произвольной точке  $(x, y)$  в силу условий Коши-Римана можно определить через функцию  $u$  посредством следующего интеграла:

$$v(x, y) = v_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u_{,x} dy - u_{,y} dx, \quad (18)$$

который вычисляется по любому пути, соединяющему точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x, y)$  и проходящему в области голоморфности функции  $F = u + iv$ .

На самом деле, результат интегрирования в (18) может зависеть от выбора пути, соединяющего начальную и конечную точки. В таком случае мы будем иметь дело с *многозначной аналитической функцией*, которая может иметь конечное или счетное число ветвей. Более точно на вопрос об однозначности определения сопряженных функций и вообще об однозначности интегралов от голоморфных функций позволяет ответить фундаментальная *теорема Коши*, которая для голоморфной в области  $D$  и непрерывно-дифференцируемой на кусочно-гладкой границе  $\partial D$  функции выражается равенством

$$\oint_{\partial D} F(z) dz = 0 \quad (19)$$

(для антиголоморфной функции следует заменить в этой формулировке  $z$  на  $\bar{z}$ ). Эта теорема следует из условия голоморфности (4) и равенства:

$$\oint_{\partial D} F(z) dz = \int_D F_{,z} d\bar{z} \wedge dz, \quad (20)$$



выражающего комплексную форму теоремы Пуанкаре-Дарбу об интегрировании дифференциальных форм.

Рассмотрим пару точек  $z_1$  и  $z_2$  на комплексной плоскости и рассмотрим некоторую функцию, голоморфную на комплексной плоскости всюду за исключением счетного числа особых точек.

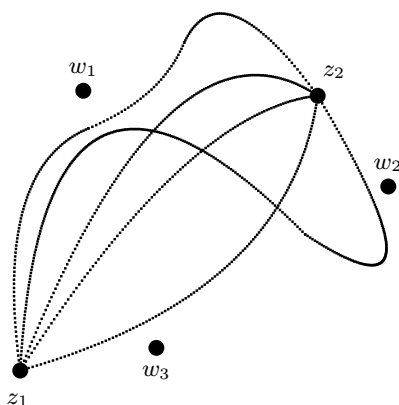


Рис. 1: Гомотопные по отношению к особым точкам  $w_1, w_2, w_3$  голоморфной функции  $F$  пути.

Все семейство путей  $\{\gamma_{z_1, z_2}\}$  с фиксированными начальной и конечной точками разбивается на классы путей гомотопных по отношению к особым точкам функции  $F$ . Именно, два пути  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  гомотопны друг другу:  $\gamma_1 \stackrel{F}{\sim} \gamma_2$ , если существует непрерывная деформация одного пути в другой, такая, что пути в процессе деформации не пересекают особых точек функции  $F$ . Обозначим класс путей, гомотопных  $\gamma$ , посредством  $[\gamma]$ . Тогда из теоремы Коши непосредственно вытекает следующее равенство:

$$\int_{\gamma} F(z) dz = \text{const}_{[\gamma]}, \tag{21}$$

выражающее факт независимости интеграла от пути в классе  $[\gamma]$  путей, гомотопных  $\gamma$ .

Из равенства

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = 2\pi i \delta_{m, -1}, \tag{22}$$

которое справедливо для любого замкнутого контура  $C$ , охватывающего точку  $z_0$  и легко проверяется на контуре в форме окружности с центром в  $z_0$ , и степенного представления голоморфной функции вытекает интегральная формула Коши

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(z)}{z - z_0} dz, \tag{23}$$

где  $C$  — кусочно-гладкий замкнутый контур, ограничивающий область  $D \subset C$ ,  $F(z)$  — произвольная голоморфная в области  $D$  функция,  $z_0 \in D$ . Формула (19) допускает обобщение на многосвязные области, а формула (23) допускает обобщение на контуры, содержащие бесконечно-удаленную точку и контуры, проходящие через точку  $z_0$  и даже имеющие там точку излома.

Из формулы (22) и представления функции  $F(z)$  в виде ряда Лорана (15) следует известное правило вычисления интегралов от голоморфных функций, имеющих особые точки:

$$\oint_C F(z) dz = 2\pi i \sum_k c_{-1}^{(k)}, \tag{24}$$

где суммирование справа распространяется по всем особым точкам, попавшим во внутренность контура  $C$ . Поскольку вклад в интеграл дают только коэффициенты  $c_{-1}$  (они называются *вычетами* функции  $F$  в соответствующих особых точках), то наше определение классов гомотопности

путей, на которых интегралы постоянны, можно значительно ослабить: гомотопны все те пути, которые получаются друг из друга непрерывной деформацией, допускающей пересечение особых точек с равными нулю вычетами.

Многозначные аналитические функции удобно описывать с помощью их графиков в 4-мерном пространстве  $C \times C$ . Они называются *римановыми поверхностями* соответствующих функций. На своей римановой поверхности аналитическая функция по определению однозначна.

### 2.3 Геометрическая интерпретация

Рассмотрим квадратичную форму

$$\eta = \operatorname{Re}(dz \otimes d\bar{z}) = dx \otimes dx + dy \otimes dy. \quad (25)$$

Можно сказать, что комплексная структура алгебраически индуцирует на плоскости  $R^2$  евклидову метрику. Относительно преобразований, задаваемых голоморфными функциями  $F(z)$ , форма  $\eta$  ведет себя следующим образом:

$$\eta \mapsto \eta' = |F'(z)|^2 \eta, \quad (26)$$

где  $F'(z) = dF/dz$ . Формула (26) означает, что функция  $F(z)$  в области своей голоморфности при условии  $F'(z) \neq 0$  осуществляет конформное отображение комплексной плоскости на себя, т.е. сохраняет углы. Отметим, что  $|F'|^2 = |\nabla u|^2 = |\nabla v|^2 = \Delta_F$ , где  $\nabla$  — оператор градиента в евклидовой метрике, а  $\Delta_F$  — якобиан отображения  $F$ . Как это следует из условий (8) или соображений конформности, линии  $u = \operatorname{const}$  и линии  $v = \operatorname{const}$  для всякой голоморфной функции  $F(z)$  образуют на плоскости  $C$  ортогональную криволинейную систему координат, поскольку в каждой точке выполняется равенство:

$$\nabla u \cdot \nabla v = u_{,x}v_{,x} + u_{,y}v_{,y} = -u_{,x}u_{,y} + u_{,y}u_{,x} = 0. \quad (27)$$

Это проясняет геометрический смысл отношения сопряженности функций  $u$  и  $v$ : *сопряженные функции имеют взаимно-ортогональные поверхности уровня и равные нормы градиентов в каждой точке.*

**Пример 3.** В силу формулы  $z^n = \rho^n e^{in\varphi}$  и формулы (16) для логарифма очевидно, что степенная функция отображает ортогональную сетку полярных координат в другую ортогональную сетку полярных координат на плоскости образов, а логарифм отображает полярную сетку в декартову сетку на плоскости образов. На рисунке показан образ полярной сетки при отображении, осуществляемом функцией Жуковского.

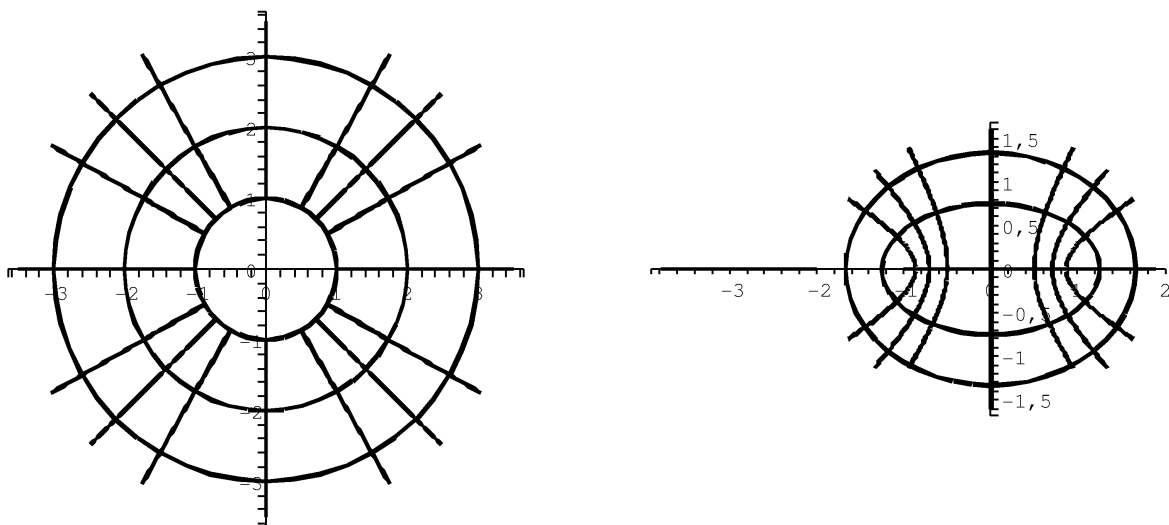


Рис. 2: На левом рисунке представлены линии полярной системы координат, на правом — их образы при отображении  $z \mapsto (z + z^{-1})/2$ .

Отметим, что конформное преобразование можно понимать как в активном (деформация плоскости), так и в пассивном (смена координат) смыслах. При этом независимо от интерпретации метрика  $\eta$  остается евклидовой, в отличие от конформных преобразований более общего вида:  $\eta \rightarrow \eta' = e^{2\phi}\eta$ , где  $\phi$  — произвольная гладкая функция координат  $x$  и  $y$ . Можно показать, что условие обращения в нуль тензора кривизны для метрики  $e^{2\phi}\eta$  ( $\eta$  — евклидова метрика) равносильно равенству  $e^{2\phi} = |F'|^2$  для некоторой голоморфной функции  $F(z)$ .

## 2.4 Физическая интерпретация

В физических приложениях с каждой голоморфной функцией  $F(z)$  можно связать 2-меризованную задачу электростатики, магнитостатики, задачу потенциального течения несжимаемой жидкости в гидродинамике и ряд других. Общим для всех задач рассматриваемого типа является уравнение Лапласа, которому удовлетворяет потенциальная функция (соответственно электростатический потенциал, магнитостатический потенциал и потенциал скоростей) в области свободной от источников.

Напомним основные факты приложений голоморфных функций на примере задач электростатики. В области голоморфности с функцией  $F(z) = u + iv$  можно ассоциировать электростатическое поле в пространстве, свободном от зарядов. При этом вещественная часть  $u$  этой функции является потенциалом электростатического поля (*потенциальная функция*), а мнимая часть  $v$  является *силовой функцией* этого поля. Другими словами, линии  $u = \text{const}$  являются эквипотенциальными линиями электростатического поля, а линии  $v = \text{const}$  совпадают с линиями напряженности этого поля. Как это и должно быть из физических соображений, эти семейства линий взаимно-ортогональны (формула (27)), а каждая из функций  $u$  и  $v$  удовлетворяет уравнению Лапласа в рассматриваемой области. Основная идея, на которой базируются приложения ТФКП для решения плоских задач электростатики, заключается в отыскании такой голоморфной функции  $F(z)$ , которая переводит границы  $\Gamma_i$  всех проводников рассматриваемой задачи в прямые линии  $\text{Re } F(z)|_{\Gamma_i} = \text{const}_i$ . Действительно, при этом границы всех проводников станут эквипотенциалами, а в силу общей теоремы существования и единственности решения уравнения Лапласа с заданными граничными условиями полученное решение будет единственным (с точностью до физически несущественной перенормировки потенциала). Если требуемая голоморфная функция найдена (для ее отыскания не существует универсальных рецептов), то напряженность электростатического поля можно найти посредством формулы:

$$E = E_x + iE_y = -\frac{\overline{dF}}{dz} = \frac{d\bar{F}}{d\bar{z}} = -u_{,x} - iu_{,y}, \quad (28)$$

которую нужно понимать как комплексную форму для векторного поля градиента функции  $u$ . Отметим, что формула (28) получается с учетом соотношений (6) и условий Коши-Римана (8).

В силу соотношения  $E = E(\bar{z})$  (антиголоморфность напряженности), вытекающего из (28), с учетом (6) приходим к тождеству:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{2}[E_{x,x} + E_{y,y} - i(E_{x,y} - E_{y,x})] = 0, \quad (29)$$

которое эквивалентно двум тождествам:

$$\text{div } E \equiv E_{x,x} + E_{y,y} = 0; \quad \text{rot } E \equiv E_{y,x} - E_{x,y} = 0, \quad (30)$$

выражающим соответственно *соленоидальность* и *потенциальность* электростатического поля. Отметим, что эти условия выполняются автоматически, если потенциал  $u$  является вещественной частью некоторой голоморфной функции.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\Phi[E, \gamma] = \int_{\gamma} E d\bar{z} = \int_{\gamma} E_x dx + E_y dy + i \int_{\gamma} E_y dx - E_x dy = \Gamma[E, \gamma] - i\Pi[E, \gamma] \quad (31)$$

по некоторому пути  $\gamma$ . Его вещественная часть  $\Gamma[E, \gamma]$  называется *циркуляцией поля  $E$  вдоль пути  $\gamma$* , а величина  $\Pi[E, \gamma]$ , противоположная мнимой части, называется *потокм поля  $E$  через линию  $\gamma$* . С учетом определения (28) и условий Коши-Римана для этих величин получаются следующие выражения через приращения компонент комплексного потенциала:

$$\Gamma[E, \gamma] = -\delta_\gamma u; \quad \Pi[E, \gamma] = -\delta_\gamma v, \quad (32)$$

которые одновременно можно рассматривать как иллюстрирующие физический смысл компонент комплексного потенциала  $F(z)$ . Здесь использовано обозначение  $\delta_\gamma Q \equiv Q(z_2) - Q(z_1)$  для приращения функции  $Q$  вдоль пути  $\gamma$  с начальной точкой  $z_1$  и конечной точкой  $z_2$ .

Рассмотрим несколько важных примеров.

**Пример 4: поле точечного источника.** Комплексный потенциал

$$F(z) = -q \ln z \quad (33)$$

описывает поле точечного заряда  $q$  на плоскости (в 3-мерном пространстве ему соответствует бесконечно протяженная заряженная нить с линейной плотностью заряда  $q$ ). Из выражения (16) и формулы (28) следует формула для напряженности, которую можно привести к виду

$$E = q \frac{z}{|z|^2} \quad (34)$$

2-мерного закона Кулона. Из соотношений (32) получаем для любой окружности с центром в начале системы координат, где находится заряд (а значит и любого замкнутого контура, однократно обходящего точку  $z = 0$ ),

$$\Gamma[E] = 0, \quad \Pi[E] = 2\pi q, \quad (35)$$

что выражает потенциальность электростатического поля и 2-мерную теорему Гаусса соответственно.

**Пример 5: проводящий нейтральный цилиндр в постоянном поле.** Комплексный потенциал  $F(z) = 2iE_0 R Z(z/R) = iE_0(z + R^2 z^{-1})$  описывает электростатическое поле вокруг проводящего цилиндра радиуса  $R$ , помещенного в однородное электрическое поле  $E_0$ , перпендикулярное его оси. Из выражения (17) и формулы (28) следует выражение для напряженности

$$E = iE_0 - iE_0 R^2 \frac{z^2}{|z|^4}. \quad (36)$$

Силовые линии этого поля проще получить исходя из вида силовой функции в (17) (с учетом множителя  $i$  это будет функция  $u$ ). Они представлены на рисунке 3.

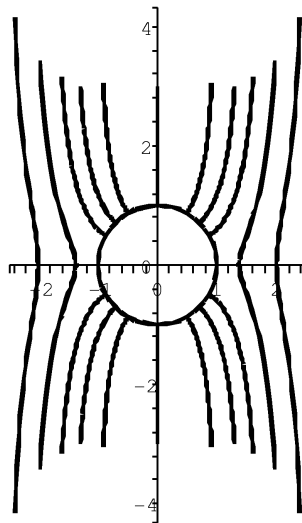


Рис. 3: Силовые линии электрического поля в окрестности цилиндра радиуса  $R = 1$ . Внешнее электрическое поле ориентировано вдоль мнимой оси.

### 2.4.1 Магнитная интерпретация

Рассмотренные выше примеры и вообще любое решение плоской электростатической задачи, записанное с помощью комплексного потенциала, обладают замечательной *дуальной симметрией*. Для пояснения идеи дуальной симметрии рассмотрим комплексный потенциал  $F(z)$  некоторой электростатической задачи и рассмотрим комплексный потенциал  $iF$ . Для напряженности нового поля  $B$  в силу (28) получим выражение

$$B = iE, \quad (37)$$

что геометрически означает поворот вектора напряженности  $E$  в каждой точке на угол  $\pi/2$ . Физически такое преобразование можно интерпретировать как *переход от электростатической задачи к сопряженной (дуальной) магнитостатической*. Применяя такой переход к ситуации с точечным зарядом (заряженной нитью) на плоскости, получаем магнитное поле линейного тока с потенциалом:

$$B = -q \arctan(y/x) + iq \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (38)$$

При этом силовые линии поля  $B$  — концентрические окружности, а эквипотенциальные поверхности — радиальные линии, исходящие из источника (силовая и потенциальная функции поменялись местами). Формулы (32) теперь дают  $\Gamma[B] = 2\pi q$ ,  $\Pi[B] = 0$ , что выражает закон полного тока в магнитостатике и соленоидальность магнитного поля соответственно.

Переход к потенциалу  $iF$  в примере с цилиндром приводит к задаче о цилиндрическом диамагнетике, помещенном во внешнее однородное магнитное поле, перпендикулярное его оси. Силовые линии магнитного поля получаются теперь с помощью мнимой части формулы (17).

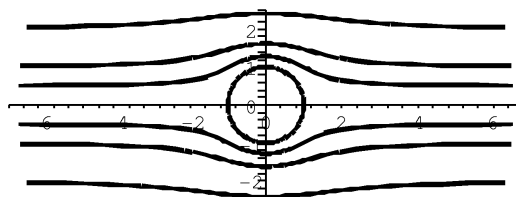


Рис. 4: Силовые линии магнитного поля в окрестности диамагнитного цилиндра радиуса  $R = 1$ . Внешнее однородное магнитное поле ориентировано вдоль вещественной оси.

### 2.4.2 Вихреисточник

Имеется интересная возможность объединить две дуально-сопряженные картины, рассмотренные выше, в одну. Обратимся сначала к решению с точечным зарядом и рассмотрим ситуацию, когда этот заряд является комплексным:  $Q = q - im$ . Очевидно, что логарифмический потенциал с таким зарядом:

$$F(z) = -Q \ln z = -q \ln \sqrt{x^2 + y^2} - m \arctan(y/x) - i(q \arctan(y/x) - m \ln \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (39)$$

включает в себя как частные случаи как электрическую, так и магнитную картину, рассмотренные выше и описывает их суперпозицию. Для избежания физически некорректного суммирования электрического и магнитного полей, можно рассмотреть, к примеру, гипотетическую электростатику, в которой электростатическое поле может быть непотенциальным. Источником этой непотенциальности как раз и выступает мнимая часть  $m$  заряда  $Q$ . На языке полной электродинамики такое рассмотрение будет означать переход к расширенной дуально-симметричной электродинамике, в которой существуют магнитные заряды (монополи) и магнитные токи. Именно последние и будут интерпретироваться в плоских задачах как точечные или распределенные источники завихренности электростатического поля. В магнитной интерпретации у магнитного поля появляются источники — сами магнитные заряды.

На рисунке (5) показан вид силовых линий электростатического поля в суперпозиции, когда  $q = m$ .

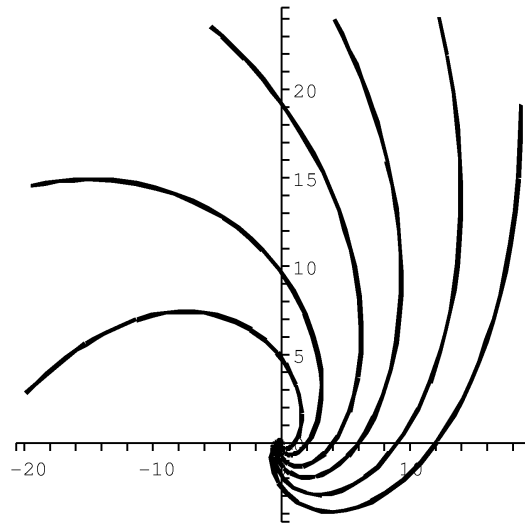


Рис. 5: Силовые линии электростатического поля в окрестности вихреисточника с равными мощностями вихря и источника.

### 2.4.3 Мультипольные обобщения

Рассмотрим два противоположных точечных заряда: отрицательный заряд поместим в начало координат, а положительный — на расстоянии  $\epsilon$  него на положительной части вещественной оси. Согласно принципу суперпозиции комплексный потенциал такой системы зарядов будет определяться выражением:

$$F(z) = F_+ + F_- = -q \ln z + q \ln(z + \epsilon) = q(-\ln z + \ln z + \ln(1 + \epsilon/z)) = \frac{q\epsilon}{z} + o(\epsilon/z). \quad (40)$$

Рассмотрим предел этого выражения при  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $q \rightarrow \infty$ , и при конечной величине  $p = q\epsilon$ . В результате приходим к потенциалу

$$F_1(z) = \frac{p}{z} = \frac{p\bar{z}}{|z|^2} \quad (41)$$

точечного диполя мощностью (или дипольным моментом)  $p$ . Точечный диполь является простейшей системой с равным нулю полным электрическим зарядом. В компонентах выражение (41) принимает вид:

$$F_1(x, y) = \frac{px}{x^2 + y^2} - i \frac{py}{x^2 + y^2} = \frac{pe^{-i\varphi}}{\rho}. \quad (42)$$

Линии напряженности поля диполя определяются силовой функцией (мнимой частью выражения (42)) и в полярной системе координат описываются семейством уравнений:

$$\rho = C \sin \varphi, \quad R \ni C > 0, \quad (43)$$

Часть линий показана на рис. 6

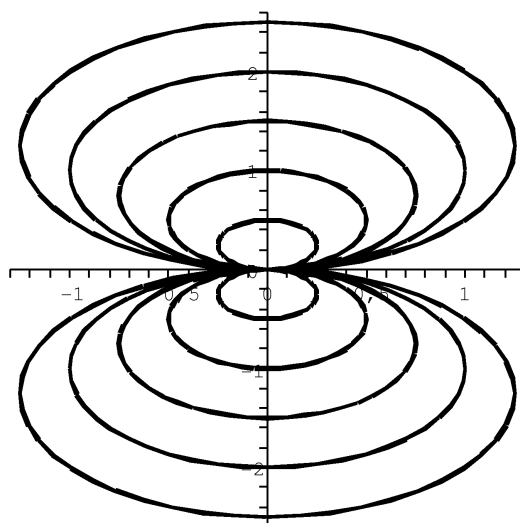


Рис. 6: Силовые линии электростатического поля в окрестности точечного диполя единичной мощности.

Рассмотрение диполя, порожденного зарядом вихреисточникового типа получается из предыдущего подстановкой  $p \mapsto p_e - ip_m$ . При этом формулы (42) и (43) примут несколько более общий вид:

$$F_1(x, y) = \frac{|p|e^{-i(\varphi-\delta)}}{\rho}; \quad \rho = C \sin(\varphi + \delta), \quad R \ni C > 0, \quad (44)$$

где  $\delta = \arctan(p_m/p_e)$ ,  $|p| = \sqrt{p_e^2 + p_m^2}$ . Нетрудно видеть, что магнитная часть дипольного момента отвечает за поворот рисунка 6 на угол  $-\delta$  и увеличение мощности диполя.

Аналогично, рассматривая пару противоположно ориентированных диполей одинаковой по модулю мощности  $p$ , сдвинутых друг относительно друга на  $\epsilon$  (эту величину можно рассматривать как комплексное число) и переходя к пределу  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $p \rightarrow \infty$ ,  $p\epsilon = Q^{(2)} < \infty$ , приходим к *потенциалу точечного квадрупольной мощностью  $Q^{(2)}$* :

$$F_2(z) = -\frac{Q^{(2)}}{z^2} = -\frac{|Q^{(2)}|e^{-i(2\varphi-\delta_2)}}{\rho^2}, \quad (45)$$

где  $|Q^{(2)}| = \sqrt{(Q_e^{(2)})^2 + (Q_m^{(2)})^2}$ ,  $\delta_2 = \arctan Q_m^{(2)}/Q_e^{(2)}$ . Линии напряженности определяются семейством уравнений

$$\rho = \sqrt{C \sin(2\varphi - \delta_2)} \quad (46)$$

и показаны на рис. 7

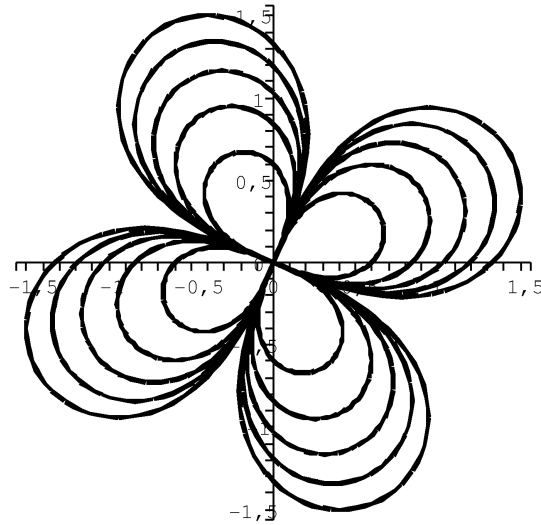


Рис. 7: Силовые линии электростатического поля в окрестности точечного квадруполь с  $Q_e^{(2)} = Q_m^{(2)} = 1/\sqrt{2}$ .

Далее по индукции, если определен потенциал  $F_{n-1}$  точечного  $2(n-1)$ -мультиполя с мощностью  $Q^{(n-1)}$ , то потенциал  $F_n$  точечного  $2n$ -мультиполя с мощностью  $Q^{(n)}$  определяем по формуле:

$$F_n(z) = \frac{Q^{(n)}}{Q^{(n-1)}} \frac{dF_{n-1}}{dz}, \quad (47)$$

которая приводит к следующей явной формуле для потенциала  $2n$ -мультиполя:

$$F_n(z) = (-1)^{n+1} \frac{Q^{(n)}}{z^n} = (-1)^{n+1} \frac{|Q^{(n)}| e^{-i(n\varphi - \delta_n)}}{\rho^n}, \quad (48)$$

где  $|Q^{(n)}| = \sqrt{(Q_e^{(n)})^2 + (Q_m^{(n)})^2}$ ,  $\delta_n = \arctan Q_m^{(n)}/Q_e^{(n)}$ . Уравнение для силовых линий имеет в полярных координатах вид,

$$\rho = \sqrt[n]{\sin(n\varphi - \delta_n)} \quad (49)$$

Вид силовых линий для  $n = 5$  показан на рисунке 8.

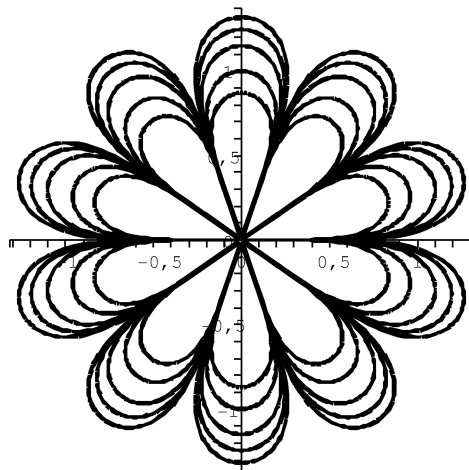


Рис. 8: Силовые линии электростатического поля в окрестности точечного декаполя при  $Q_e^{(5)} = 1, Q_m^{(5)} = 0$ .



### 3 $h$ -аналитическая теория поля на плоскости $\mathcal{H}$

В настоящем разделе мы разрабатываем гиперболическую версию предыдущих конструкций на комплексной плоскости. Изначально мы не связываем получаемые  $h$ -аналитические поля с электромагнитным полем. Более того, теперь мы выбираем путь рассуждений, обратный к принятому в предыдущем разделе: в нем все построения шли в направлении от физики (электромагнито-статике) к формулировкам и определениям, мы же принимаем гиперболические аналоги этих формулировок за первоначальные определения, а об их физической интерпретации будем говорить впоследствии.

Прежде чем переходить непосредственно к теории поля, кратко напомним некоторые основные сведения, касающиеся двойной плоскости и  $h$ -голоморфных функций на них.

#### 3.1 Двойные числа

Алгебру двойных чисел  $\mathcal{H}$  можно задать парой образующих  $\{1, j\}$  с таблицей умножения:

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & j \\ \hline 1 & 1 & j \\ \hline j & j & 1 \end{array}. \quad (50)$$

Элементы  $\mathcal{H}$  будем записывать в виде:  $\mathcal{H} \ni h = 1 \cdot t + jx$ , где  $t, x \in R$ , имея ввиду дальнейшие приложения этой алгебры для описания 2-мерного пространства-времени<sup>3</sup>. Особенность алгебры двойных чисел с таблицей умножения (50) заключается в том, что она не образует числового поля, поскольку содержит делители нуля, т. е. уравнение  $h_1 h_2 = 0$  может выполняться при отличных от нуля элементах  $h_1$  и  $h_2$ . Это обстоятельство послужило одной из причин, по которой двойные числа не получили столь широкого распространения в приложениях, как комплексные. Однако, именно это обстоятельство отражает на алгебраическом языке важнейший факт геометрии 2-мерного пространства-времени — наличие световых конусов. Другой причиной относительно слабого интереса к двойной переменной и функциям от нее является лежащая на поверхности возможность их физической интерпретации как суперпозиции двух произвольных волн, распространяющихся в противоположные стороны одномерного пространства [2]. Такой подход, безусловно, возможен, однако он не отражает всех интересных особенностей как самих  $h$ -голоморфных функций, так и их приложений. В частности, речь может идти о двумерных пространственно-временных полях, являющихся гиперболическими аналогами двумерных потенциальных и соленоидальных полей, традиционно связываемых с голоморфными функциями обычной комплексной переменной.

Инволютивная операция *комплексного сопряжения* для двойных чисел определяется по аналогии с комплексным случаем:  $h = t + jx \mapsto \bar{h} = t - jx$ . Геометрически эта операция описывает отражение гиперболической плоскости относительно оси  $\text{Im } h = 0$ . Аналогично комплексному случаю, пару  $\{h, \bar{h}\}$  можно рассматривать как независимые двойные координаты на гиперболической плоскости, которые связаны с декартовыми координатами посредством формул (2) с заменой  $z, \bar{z} \rightarrow h, \bar{h}$ .

Переход к гиперболическим полярным координатам и экспоненциальной форме представления двойного числа имеет ряд особенностей, которых нет в случае комплексных чисел. Пара прямых  $t \pm x = 0$ , содержащих множество двойных чисел<sup>4</sup> с нулевым скалярным квадратом, разбивает всю гиперболическую плоскость на четыре клиновидные области, обозначенные на рисунке цифрами I, II, III и IV (рис. 9).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что в каждой из отмеченных областей двойные числа допускают гиперболическое тригонометрическое представление вида:

$$h = t + jx = \epsilon \rho (\cosh \psi + j \sinh \psi), \quad (51)$$

<sup>3</sup>В дальнейшем скорость света полагается равной единице.

<sup>4</sup>Строго говоря, наличие делителей нуля и возможность отрицательных значений выражения  $h\bar{h}$  не позволяют говорить о норме двойного числа в строгом смысле этого слова. Для экономии терминов и сохранения частичной аналогии с комплексными числами мы будем называть величину  $\sqrt{|h\bar{h}|}$  нормой или модулем двойного числа (см. далее формулы 52). Знакопеременную величину  $h\bar{h}$  будем называть скалярным квадратом двойного числа.

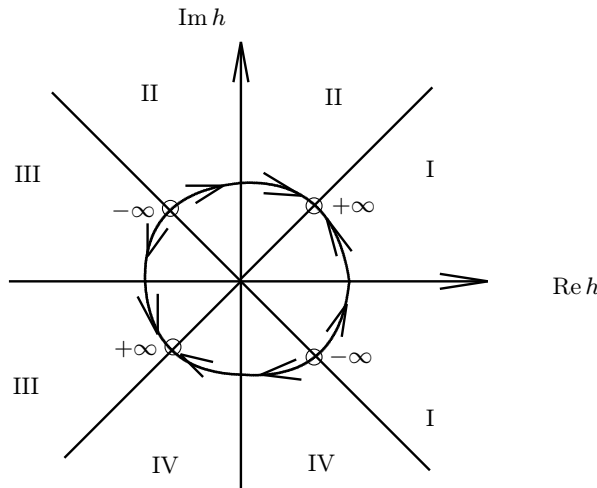


Рис. 9: Область  $R \sqcup -R \sqcup R \sqcup -R$  изменения угла  $\psi$  на плоскости  $\mathcal{H}$ . Ориентация согласована в противоположных клиньях и противоположна в соседних. Для различения углов в различных клиньях можно нумеровать угол  $\psi$  индексом  $k$ :  $\psi_k$ , ( $k = 1, 2, 3, 4$ ).

где для каждого из клиньев имеют место следующие определения величин:

$$\begin{aligned}
 \text{I} : \quad & \epsilon = 1, \quad \varrho = \sqrt{t^2 - x^2}, \quad \psi = \text{Arth}(x/t); \\
 \text{II} : \quad & \epsilon = j, \quad \varrho = \sqrt{x^2 - t^2}, \quad \psi = \text{Arth}(t/x); \\
 \text{III} : \quad & \epsilon = -1, \quad \varrho = \sqrt{t^2 - x^2}, \quad \psi = \text{Arth}(x/t); \\
 \text{IV} : \quad & \epsilon = -j, \quad \varrho = \sqrt{x^2 - t^2}, \quad \psi = \text{Arcth}(t/x).
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

Величины  $\varrho$  и  $\psi$ , определенные в каждом из клиньев формулами (51), будем называть *модулем* и *аргументом* двойного числа  $h$ . Таким образом, в каждом из клиньев  $0 \leq \varrho < \infty$ , а сами клинья параметризуются отдельными экземплярами вещественных прямых, которые в совокупности образуют *многообразие  $\Psi$  угловых переменных* в виде ориентированной дизъюнктивной суммы  $R \sqcup -R \sqcup R \sqcup -R$ . Более наглядно многообразие  $\Psi$  можно представить себе, компактифицируя каждое из  $R$  в открытый интервал и склеивая интервалы в их концах в окружность с четырьмя выколотыми точками.

Отметим, что множество двойных чисел с нулевой нормой не описывается ни одной из координатных карт введенной выше гиперболической полярной системы координат. В дальнейшем множество двойных чисел вида

$$h_0 + h_1(1 \pm j), \tag{53}$$

( $h_0, h_1$  — произвольные двойные числа) будем называть *конусом числа  $h_0$*  и обозначать  $\text{Con}(h_0)$ . Все точки, лежащие в  $\text{Con}(h_0)$ , имеют равное нулю гиперболическое расстояние до точки  $h_0$ .

Справедливость гиперболической формулы Эйлера:  $\cosh \psi + j \sinh \psi = e^{j\psi}$  проверяется разложением левых и правых частей в формальные ряды Маклорена и сравнением их вещественных и мнимых частей. Гиперболическая формула Эйлера приводит к экспоненциальной форме представления двойных чисел:

$$h = t + jx = \epsilon \varrho e^{j\psi} = \epsilon e^{\Theta}, \tag{54}$$

где в последнем равенстве мы перешли к "гиперболическому комплексному углу"

$$\Theta = \ln \varrho + j\psi \equiv \ln h. \tag{55}$$

При этом произведение пары двойных чисел сводится к сложению их комплексных углов и перемножению знаковых множителей  $\epsilon$ .

### 3.2 $h$ -голоморфные функции двойной переменной: аналитическая интерпретация

Функция  $\ln h$ , определенная по формуле (55), является простым и важным представителем класса  *$h$ -голоморфных функций двойной переменной*, к определению которых можно прийти из сообра-

жений, аналогичных определению аналитической функции комплексной переменной. Произвольное гладкое отображение  $f: R^2 \rightarrow R^2$  можно представлять парой вещественных компонент (1), а можно перейти к его представлению через пару двойных переменных  $\{h, \bar{h}\}$ :

$$(h, \bar{h}) \mapsto (h', \bar{h}') : h' = F_1(h, \bar{h}); \quad \bar{h}' = F_2(h, \bar{h}). \quad (56)$$

Теперь для интерпретации  $R^2$  как плоскости двойной переменной  $\mathcal{H}$  естественно ограничиться отображениями, сохраняющими гиперболическую комплексную структуру плоскости, т. е. отображениями  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  вида:  $h \mapsto s = F(h)$ . Дифференцируемые<sup>5</sup> функции  $R^2 \rightarrow R^2$ , удовлетворяющие условию:

$$F_{,\bar{h}} = 0 \quad (57)$$

будем называть *h-голоморфными* функциями двойной переменной  $h$ . Функции, удовлетворяющие условию:

$$F_{,h} = 0 \quad (58)$$

будем называть *h-антиголоморфными* функциями двойной переменной.

По аналогии с голоморфными функциями комплексной переменной голоморфные функции двойной переменной можно определять формальными степенными рядами, сходимость которых часто вытекает из сходимости соответствующих вещественных рядов.

Имеет место следующее утверждение: *всякая h-голоморфная или h-антиголоморфная функция двойной переменной отображает делители нуля в делители нуля*. Формально это свойство выражается равенством:

$$F(\text{Con}_h) = \text{Con}_{F(h)},$$

для всякой точки  $h$  из области голоморфности функции  $F$ . Доказательство см. в [1]. При этом голоморфная функция сохраняет компоненты конуса, а антиголоморфная переводит компоненты  $\lambda(1 \pm j)$  друг в друга.

С учетом гиперболических аналогов формул (6):

$$\frac{\partial}{\partial h} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + j \frac{\partial}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{h}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} - j \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (59)$$

условие (57) в декартовых координатах для  $h$ -голоморфной функции  $F = U + jV$  принимает вид:

$$F_{,\bar{h}} = (U + jV)_{,\bar{h}} = \frac{1}{2} [(U + jV)_{,t} - j(U + jV)_{,x}] = U_{,t} - V_{,x} + j(V_{,t} - U_{,x}) = 0,$$

откуда следуют *условия гиперболической аналитичности Коши-Римана*:

$$U_{,t} = V_{,x}; \quad U_{,x} = V_{,t}. \quad (60)$$

Легко проверить, что из условий (60) следует гиперболическая гармоничность вещественной и мнимой частей аналитической функции  $F$ , которая выражается уравнениями:

$$\square U = \square V = 0, \quad (61)$$

где

$$\square \equiv 4\partial_h \partial_{\bar{h}} = \partial_t^2 - \partial_x^2 \quad (62)$$

— 2-мерный волновой оператор — даламбертиан ("гиперболический лапласиан").

<sup>5</sup>Понятие производной функции  $F(h, \bar{h})$  по аргументам вводится аналогично определению вещественного анализа. Именно, мы определяем дифференцируемость функции  $F$  в точке  $(h, \bar{h})$  как следующее свойство ее приращения:  $\Delta F = A(h, \bar{h}) \Delta h + B(h, \bar{h}) \Delta \bar{h} + o(\|\Delta h\|_{\mathcal{H}})$ , где  $\|\Delta h\|_{\mathcal{H}} \equiv [|\Delta t^2 - \Delta x^2|]^{1/2}$  — псевдоевклидова норма приращения переменной. Переходя к различным пределам при  $\|\Delta h\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$ , получаем определения частных производных или "производных по направлениям". Проблема при таком определении возникает только в случае производных вдоль компонент конуса:  $\partial_{\text{Con}} = \partial_{\lambda(1 \pm j)}$ . Мы не останавливаемся подробно на этом вопросе в настоящей статье, хотя еще и вернемся к нему.

### 3.3 $h$ -голоморфные функции двойной переменной: топологическая интерпретация

Криволинейные интегралы от функций на плоскости двойной переменной сводятся к паре стандартных интегралов от 1-форм на декартовой плоскости, поэтому мы не останавливаемся на их определении подробно. Формальное доказательство гиперболической теоремы Коши является почти дословным повторением соответствующего доказательства формулы (19) и как и в комплексном случае наиболее компактно выглядит на комплексном языке<sup>6</sup>:

$$\oint_{\Gamma} F(h) dh = \int_{\Sigma} F_{\bar{h}} d\bar{h} \wedge dh = 0$$

ввиду (57). В силу чисто топологических соображений, аналогичных соображениям на комплексной плоскости, интеграл от голоморфной функции будет обращаться в нуль и по границе многосвязной области.

Интегральная формула Коши, опирающаяся на следующий гиперболический аналог формулы (22) [1]:

$$\oint_{\Gamma} (h - h_0)^{\alpha} dh = \begin{cases} 0, & \alpha \neq -1; \\ j\ell_H, & \alpha = -1. \end{cases} \quad (63)$$

где  $\ell_H = \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi$  — размер пространства гиперболических углов ("фундаментальная константа" гиперболической геометрии, аналогичная константе  $2\pi$  на евклидовой плоскости), имеет вид

$$\oint_{\Gamma} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = 0. \quad (64)$$

для контура типа, показанного на рис. 10. и вид

$$F(h_0) = \frac{1}{\ell_H j} \oint_{\Gamma_0} \frac{F(h)}{h - h_0} dh, \quad (65)$$

для контура типа, показанного на рис. 11.

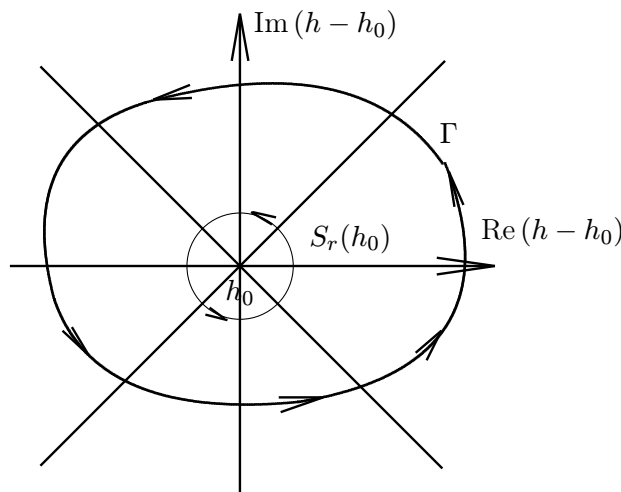


Рис. 10: К выводу интегральной теоремы Коши на плоскости двойной переменной.

<sup>6</sup>Есть конечно проблема с определением производной  $F_{\bar{h}}$  вдоль направления конуса. Если контур выпуклый и криволинейный, то точек, в которых касательный вектор к контуру лежит на конусе будет лишь конечное или счетное число. Исключая ("выкалывая") такие точки из контура и вычисляя интегралы по оставшимся несвязным частям в смысле их главных значений, мы приходим к определению интеграла в некотором несобственном смысле. Мы не останавливаемся в настоящей статье на деталях подобных определений.

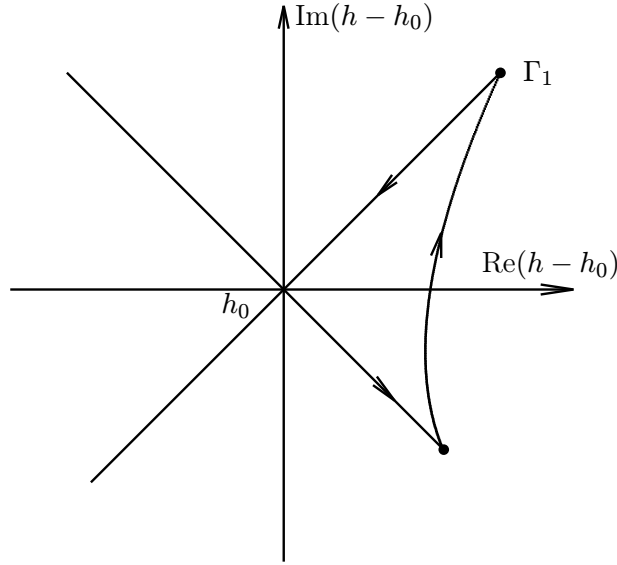


Рис. 11: К выводу интегральной теоремы Коши на плоскости двойной переменной: контуры  $\Gamma_n$ .

### 3.4 $h$ -голоморфные функции двойной переменной: геометрическая интерпретация

Рассмотрим квадратичную форму

$$\Theta = \text{Re}(dh \otimes d\bar{h}) = dt \otimes dt - dx \otimes dx. \quad (66)$$

По аналогии с комплексным случаем можно сказать, что алгебра двойных чисел на плоскости  $R^2$  алгебраически индуцирует псевдоевклидову метрику. Относительно преобразований, задаваемых голоморфными функциями  $F(h)$ , форма  $\Theta$  ведет себя следующим образом:

$$\Theta \mapsto \Theta' = |F'(h)|^2 \Theta, \quad (67)$$

где  $F'(h) = dF/dh$ . Формула (67) означает, что функция  $F(h)$  в области своей голоморфности и в точках, где  $|F'(h)|^2 \neq 0$  осуществляет конформное отображение комплексной плоскости на себя, т.е. сохраняет гиперболические углы. Это обстоятельство тесно связано с установленным выше фактом об инвариантности конусов  $\text{Con}$  относительно  $h$ -голоморфных отображений. Отметим, что  $|F'|^2 = |\nabla U|^2 = |\nabla V|^2 = \Delta_F$ , где  $\nabla$  — оператор градиента в псевдоевклидовой метрике, а  $\Delta_F$  — якобиан отображения  $F$ , рассматриваемого как отображение  $R^2 \rightarrow R^2$ . Как это следует из условий (60) или соображений конформности, линии  $U = \text{const}$  и линии  $V = \text{const}$  для всякой голоморфной функции  $F(h)$  образуют на плоскости  $\mathcal{H}$  ортогональную (в гиперболическом смысле) криволинейную систему координат, поскольку в каждой точке выполняется равенство:

$$\nabla U \cdot \nabla V = U_{,t}V_{,t} - U_{,x}V_{,x} = U_{,t}U_{,x} - U_{,x}U_{,t} = 0. \quad (68)$$

По аналогии с комплексным случаем это проясняет геометрический смысл отношения *гиперболической сопряженности* пары функций  $U$  и  $V$ , которые являются вещественной и мнимой частью некоторой  $h$ -голоморфной функции  $F(h)$ : *сопряженные функции имеют взаимно-ортогональные линии уровня и равные нормы градиентов в каждой точке.*

Отметим, что множество конформных преобразований псевдоевклидовой метрики, в отличие от евклидова случая, не исчерпывается  $h$ -голоморфными функциями. К этому вопросу мы вернемся в разделе (5)

### 3.5 Свойства некоторых элементарных функций двойной переменной

Ввиду того, что свойства гиперболических аналогов элементарных функций относительно слабо освещены в литературе, имеет смысл остановиться на некоторых из них. Более полный каталог элементарных функций двойной переменной рассмотрен в [1].

**3.5.1 Степенные функции  $F(h) = h^n$**

В отличие от степенной функции комплексной переменной случаи четных  $n$  и нечетных  $n$  кардинально отличаются. Действительно, переходя к экспоненциальному представлению (54), получаем:

$$h = \epsilon \rho e^{j\psi} \mapsto \epsilon^n \rho e^{jn\psi} \tag{69}$$

Поскольку для любого четного  $n$   $\epsilon^n = 1$ , можно заключить, что степенная функция  $h \mapsto h^n$  при  $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$  биективно отображает каждый из клиньев I, II, III, IV на клин I с отображением конусов  $Con_{\pm} \rightarrow Con_{\pm}$ . Напротив, при нечетном  $n$  каждый из координатных клиньев при отображении  $h \mapsto h^n, n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$  биективно отображается в себя. При этом, как нетрудно видеть из (69) координатная сетка линий  $\rho = \text{const}, \psi = \text{const}$  переходит в координатную сетку линий  $\rho' = \rho^n = \text{const}, \psi' = n\psi = \text{const}$  для всяких целых  $n$ . В случае положительных целых  $n$  радиальные линии растягиваются при  $\rho > 1$  и сжимаются при  $\rho < 1$ , кроме того, они поворачиваются от значения  $\psi = 0$  в сторону соответствующих им по знаку компонент конусов. Для целых отрицательных  $n$  дополнительно происходит еще инверсия относительно единичных сфер  $\rho = 1$  и инверсия пространства углов  $\Psi \rightarrow -\Psi$ . В качестве примера функции с четным  $n$  рассмотрим функцию  $w = h^2 = x^2 + y^2 + 2jxy = \rho^2 e^{2\psi}$ .

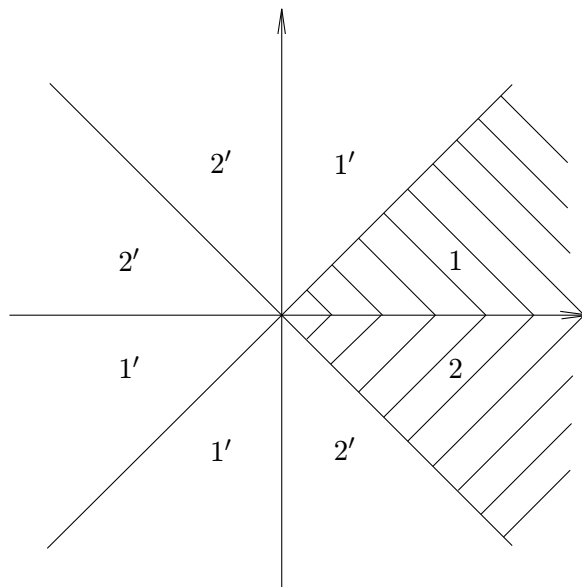


Рис. 12: Глобальная структура отображения  $h \mapsto h^2$ .

На рис. 12 представлена глобальная структура отображения  $h \mapsto h^2$ : клин 1-2 переходит сам в себя (его границы — в соответствующие границы), а отображения остальных клиньев в клин 1-2 показано соответствующими цифрами (цифры со штрихами, помечающими клин, показывают как именно соответствующий клин отображается в клин 1-2). Таким образом, отображение  $h \mapsto h^2$  является 4-листным. Аналогичным образом устроено отображение:  $h \mapsto h^{2k}, k \in \mathbb{Z}$ .

Наглядное представление некоторых простых степенных отображений представлено на рис. 13-14.

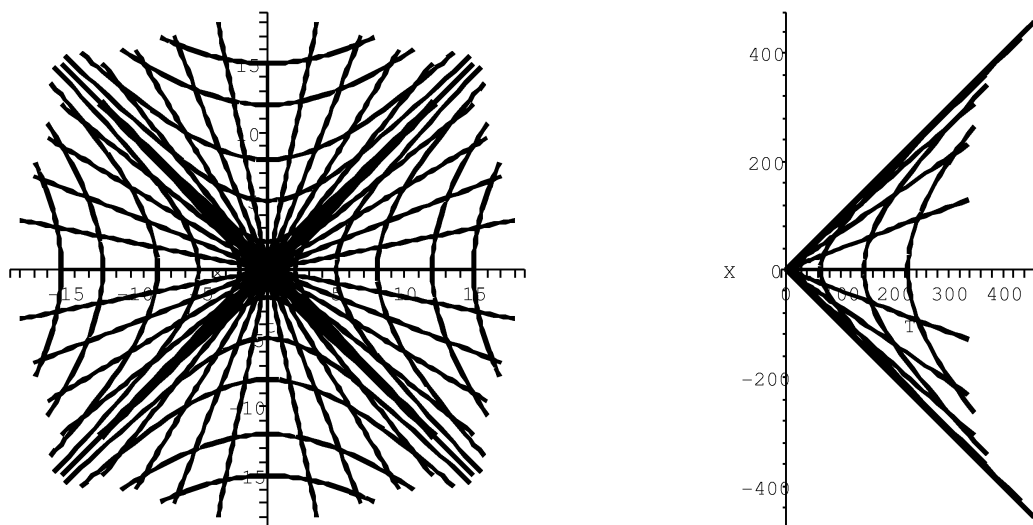


Рис. 13: Гиперболическая полярная система координат (слева) и образ ее первого клина при отображении  $h \mapsto h^2$ .

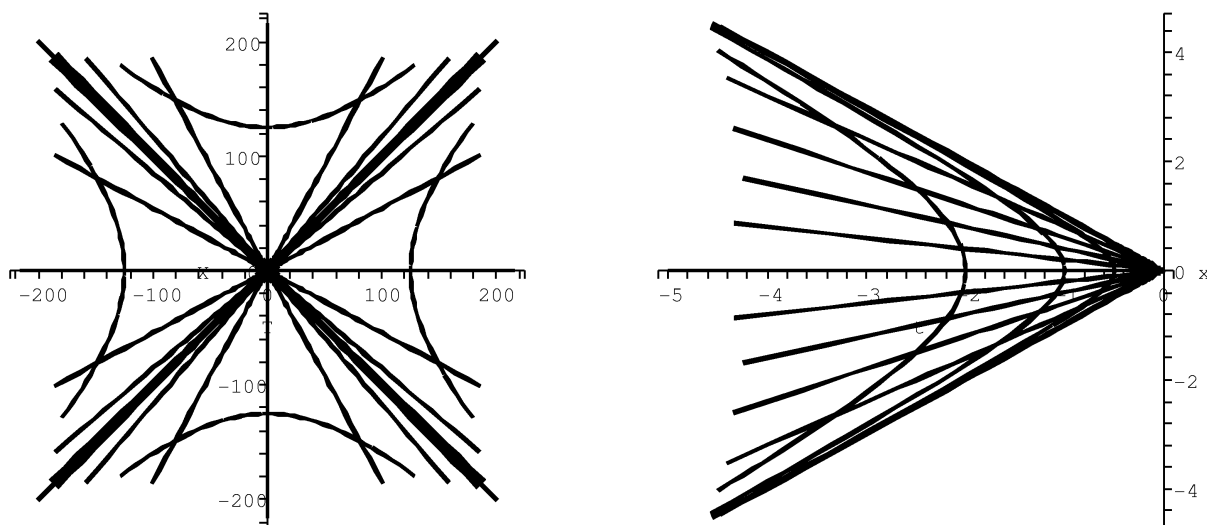


Рис. 14: Образ гиперболической полярной системе координат (рис. 13 слева) при отображении  $h \mapsto h^3$  (слева) и образ первого клина при отображении  $h \mapsto h^{-1}$  (справа).

Из свойств степенных функций легко вывести свойства корней различных порядков и рациональных степеней:  $h \mapsto h^{1/n}$ ,  $h \mapsto h^{m/n}$ . Любой корень  $\sqrt[n]{h}$  четного порядка определен в квадранте I. Такой корень будет 4-значной функцией. Каждый лист гиперболической римановой поверхности этой функции представляет собой идентичную копию клина I, показанного на рис. 12. На каждом из листов функция однозначна. Все листы склеиваются в риманову поверхность, представляющую собой  $R^2$ , при этом точка  $(0;0)$  принадлежит всем листам и является гиперболическим аналогом точки ветвления. Наглядно риманову поверхность корня четного порядка можно реализовать листом бумаги, сложенным вчетверо так, как показано на рис. 15.

Корни нечетной степени — однозначны в каждом из 4 клиньев.

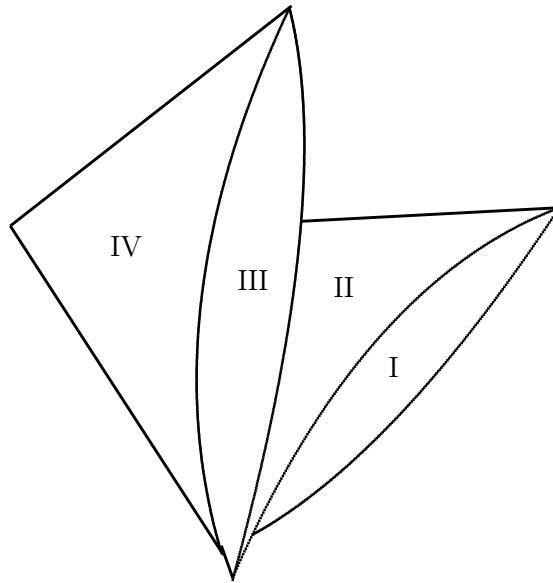


Рис. 15: Гиперболическая риманова поверхность 4-значного отображения  $h \mapsto h^{1/2k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

### 3.6 Экспонента двойной переменной $w = e^h$

Записывая  $e^h = e^{t+jx} = e^t e^{jx}$  приходим к глобальной структуре экспоненциального отображения, представленной на рис.16.

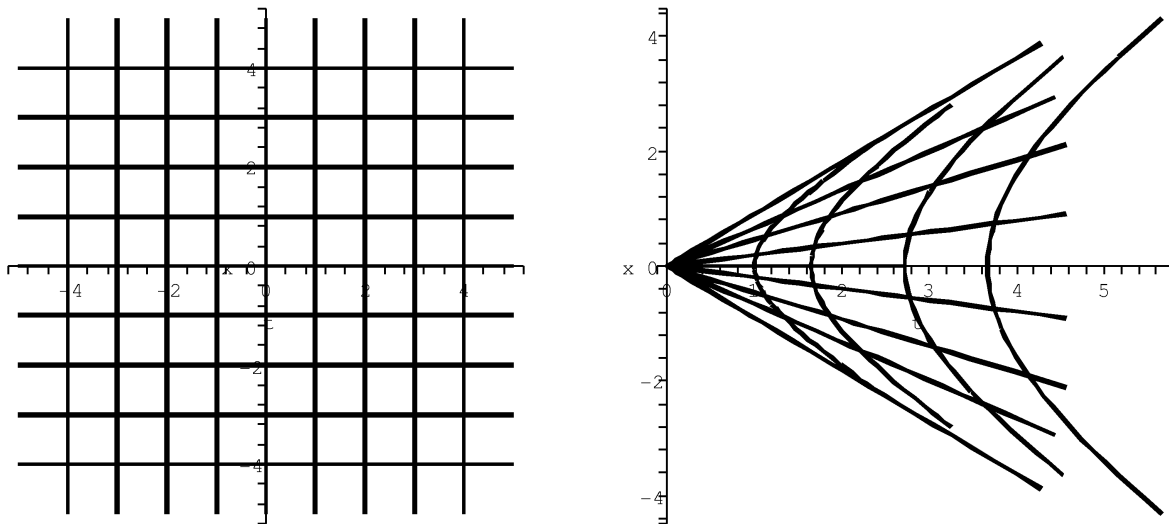


Рис. 16: Глобальная структура отображения  $h \mapsto e^h$ .

Прямоугольная псевдоортогональная сетка на плоскости переменной  $h$  отображается экспонентой в псевдоортогональную сетку, состоящую из лучей и гипербол в первом клине с вершиной в точке  $h = 0$ . Отображение  $h \mapsto e^h$  — биективно. Очевидно, что обратная функция  $\ln h = \ln \rho + j\psi$  определена во внутренности первого клина. На границах (т.е. на конусе  $\text{Con}^\uparrow(0)$ ) полярная система координат не работает и требуется дополнительное исследование поведения отображения  $h \mapsto e^h$ , на котором мы здесь не останавливаемся.



### 3.6.1 Гиперболическая функция Жуковского: $h \mapsto (h + h^{-1})/2$

Рассмотрим, наконец, гиперболическую версию функции Жуковского:

$$Z(h) \equiv \frac{1}{2} \left( h + \frac{1}{h} \right).$$

Эта функция отображает единичную гиперболическую окружность  $HS^1(0)$  в куски координатных осей, двукратно накрывая их (см. рис. 17).

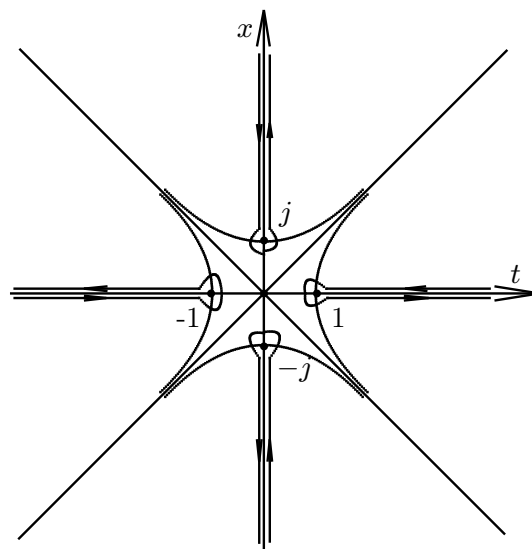


Рис. 17: Действие гиперболической функции Жуковского.

При этом, как и в случае комплексной переменной, функция Жуковского двулистка: внешность единичной окружности и ее внутренность она отображает на двойную плоскость. В точках  $\pm 1, \pm j$  конформность функции  $Z(h)$  нарушается, поскольку в этих точках  $Z'(h) = 0$ . Наглядный вид гиперболической функции Жуковского представлен на рис. 18.

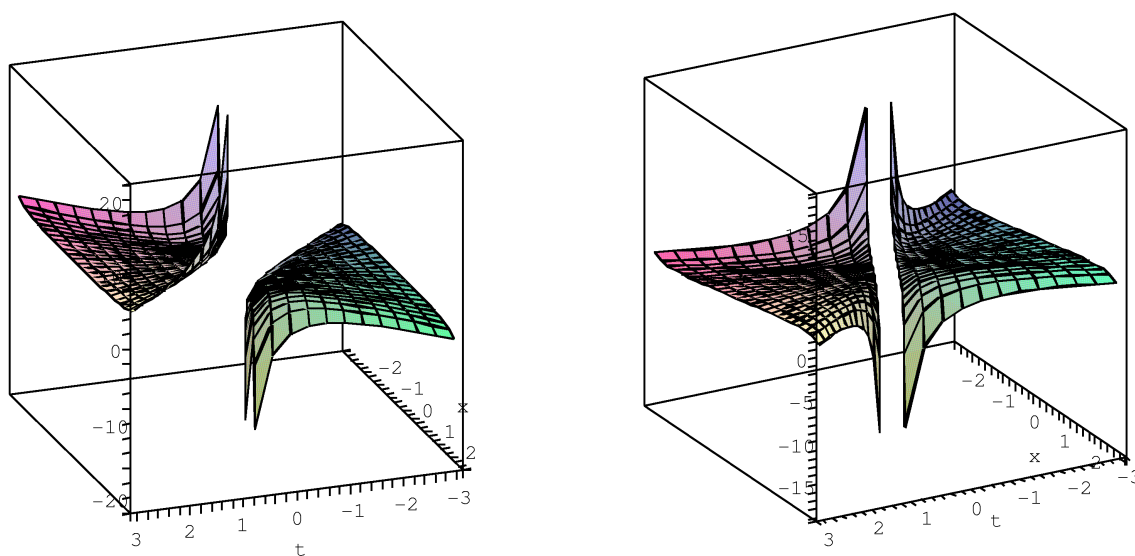


Рис. 18: Структура отображения  $h \mapsto (h + h^{-1})/2$ . (вещественная и мнимая части).

Риманова поверхность двузначной функции  $Z^{-1}(h)$  представлена на рис. 19.

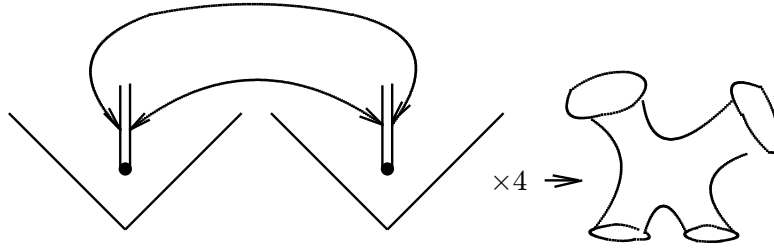


Рис. 19: Риманова поверхность обратной функции Жуковского  $Z^{-1}$ . Слева — правило склейки двух клиньев вдоль разреза на координатной оси. Четыре экземпляра таких "полуфабрикатов" склеиваются вместе в поверхность, топологически эквивалентную изображенной справа.

### 3.7 $h$ -голоморфные функции двойной переменной: физическая интерпретация

Будем рассматривать теперь произвольную  $h$ -голоморфную функцию  $F(h) = U + jV$  как комплексный  $h$ -потенциал некоторого 2-мерного векторного поля ( $h$ -поле) на плоскости двойной переменной. Будем ассоциировать вещественную часть  $U$  этой функции с потенциалом поля ( $h$ -потенциальная функция), а мнимую часть  $V$  с силовой функцией этого поля. Другими словами, как и в комплексном случае, линии  $U = \text{const}$  являются эквипотенциальными линиями  $h$ -поля, а линии  $V = \text{const}$  совпадают с линиями напряженности этого поля. Эти семейства линий взаимно-ортогональны (формула (68)), а каждая из функций  $U$  и  $V$  удовлетворяет волновому уравнению (61) в силу гиперболических условий Коши-Римана.

Определим напряженность  $\mathcal{E}$   $h$ -поля по формуле:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_t + j\mathcal{E}_x = -\frac{\overline{dF}}{dh} = -\frac{d\overline{F}}{d\overline{h}} = -U_{,t} + jU_{,x}, \quad (70)$$

которую можно рассматривать как двойную форму представления для векторного поля градиента функции  $U$  относительно псевдоевклидовой метрики. Формула (70) получается с учетом соотношений (59) и условий Коши-Римана (60).

В силу соотношения  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\overline{z})$  (антиголоморфность напряженности), вытекающего из определения (70), с учетом (59) приходим к следующему тождеству:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h} = \frac{1}{2}[\mathcal{E}_{t,t} + \mathcal{E}_{x,x} + j(\mathcal{E}_{t,x} + \mathcal{E}_{x,t})] = 0, \quad (71)$$

которое эквивалентно двум тождествам:

$$\text{divh } \mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_{t,t} + \mathcal{E}_{x,x} = 0; \quad \text{roth } \mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_{t,x} + \mathcal{E}_{x,t} = 0, \quad (72)$$

выражающим соответственно *соленоидальность* и  *$h$ -потенциальность* электростатического поля<sup>7</sup>. Отметим, что условие  $h$ -потенциальности вытекает из коммутативности вторых частных производных гладкой скалярной функции, а условие соленоидальности эквивалентно волновому уравнению  $\square U = 0$ , которое выполняется автоматически, если потенциал  $U$  является вещественной частью некоторой  $h$ -голоморфной функции.

Как и в комплексном случае рассмотрим теперь интеграл

$$\Omega[\mathcal{E}, \gamma] = \int_{\gamma} \mathcal{E} d\overline{h} = \int_{\gamma} \mathcal{E}_t dt - \mathcal{E}_x dx + j \int_{\gamma} \mathcal{E}_x dt - \mathcal{E}_t dx = \Upsilon[\mathcal{E}, \gamma] - j\Xi[\mathcal{E}, \gamma] \quad (73)$$

по некоторому пути  $\gamma$ . Его вещественную часть  $\Upsilon[\mathcal{E}, \gamma]$  назовем *циркуляцией поля  $\mathcal{E}$  вдоль пути  $\gamma$* , а величину  $\Xi[\mathcal{E}, \gamma]$ , противоположную мнимой части, назовем *поток поля  $\mathcal{E}$  через кривую  $\gamma$* . С

<sup>7</sup>Отметим, что дивергенция векторного поля определяется одинаково в комплексном и гиперболическом случаях, в отличие операции ротора векторного поля, которая в гиперболическом случае включает симметричную комбинацию частных производных.

учетом определения (70) и гиперболических условий Коши-Римана для этих величин получаются следующие выражения через приращения компонент комплексного потенциала:

$$\Upsilon[\mathcal{E}, \gamma] = -\delta_\gamma U; \quad \Xi[\mathcal{E}, \gamma] = -\delta_\gamma V, \quad (74)$$

которые можно рассматривать как иллюстрирующие физический смысл компонент комплексного  $h$ -потенциала  $F(h)$ .

### 3.8 Поле гиперболического точечного источника

Рассмотрим  $h$ -потенциал вида

$$F(h) = -q \ln h, \quad (75)$$

который является очевидным гиперболическим обобщением кулоновского потенциала (33). Напряженность поля, которая ему соответствует, вычисляется по формуле (70) и имеет вид:

$$\mathcal{E} = \frac{q}{h} = \frac{qh}{|h|^2} = q \left( \frac{t}{t^2 - x^2} + j \frac{x}{t^2 - x^2} \right). \quad (76)$$

Любопытным новым обстоятельством является разница в областях определения формулы (75) и (76): первая задает  $h$ -потенциал лишь в первом клине, в то время как вторая корректно определена во всех 4-х клиньях двойной плоскости. Формальное объяснение этого обстоятельства заключается в том, что логарифм от двойного числа, взятого из 2,3 или 4 клиньев можно представить в виде  $\ln h + \ln \epsilon$ , где  $h$  — некоторое двойное число из первого клина,  $\epsilon$  — один из знаковых множителей, определенных в (52). При этом  $\ln \epsilon$  — это некоторая алгебраическая константа<sup>8</sup>, которая при дифференцировании "стирается" из конечного выражения (76). Силовые линии гиперболического точечного источника — это радиальные прямые с  $\psi = \text{const}$ , а эквипотенциальные линии — гиперболы  $\varrho = \text{const}$ . Картина силовых линий во всех 4-х клиньях представлена на рисунке 20.

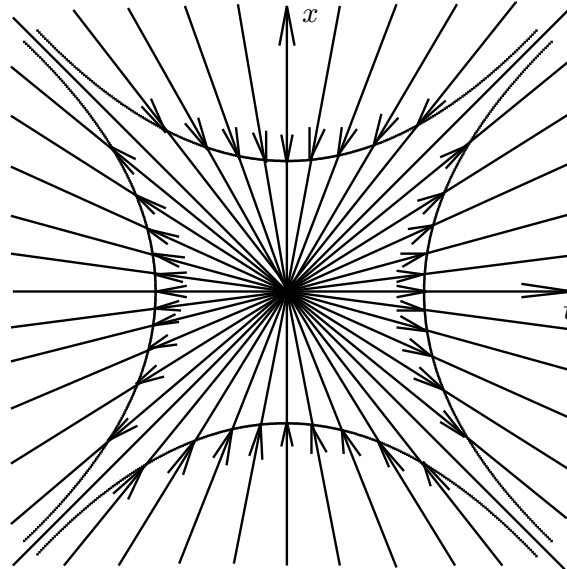


Рис. 20: Схематическая картина силовых линий гиперболического точечного источника. Поле постоянно по абсолютной величине на гиперболических окружностях (евклидовых гиперболах). На конусе  $\text{Соp}_0$  поле не определено, а в соседних клиньях меняет свой характер (источник или сток).

По формулам (74) получаем для гиперболических циркуляции и потока выражения:

$$\Upsilon[\mathcal{E}, \mathcal{C}] = 0; \quad \Xi[\mathcal{E}, \mathcal{C}] = 0 \quad (77)$$

<sup>8</sup>Отметим, что она не лежит в алгебре  $\mathcal{H}$ .

для контура  $\mathcal{C}$ , представленного на рисунке 10 или гомотопных ему и выражения

$$\Upsilon[\mathcal{E}, \mathcal{C}] = 0; \quad \Xi[\mathcal{E}, \mathcal{C}] = \ell_H q \quad (78)$$

для контура, представленного на рис. 11 или гомотопных ему. Формулы (78) выражают гиперболическую потенциальность и гиперболическую теорему Гаусса для поля  $\mathcal{E}$ .

#### 4 $h$ -дуальная интерпретация

Дуальная интерпретация точечного гиперболического источника получается переходом от потенциала  $F(h)$  в (75) к потенциалу  $jF(h)$ . При этом для нового дуального поля  $\mathcal{B}$  получается выражение:

$$\mathcal{B} = j \frac{d\bar{F}}{dh} = -\frac{qj}{h} = -q \frac{x + jt}{t^2 - x^2}. \quad (79)$$

Поле  $\mathcal{B}$  является гиперболическим аналогом точечного вихря. Его силовые линии — гиперболы — показаны на рисунке 21.

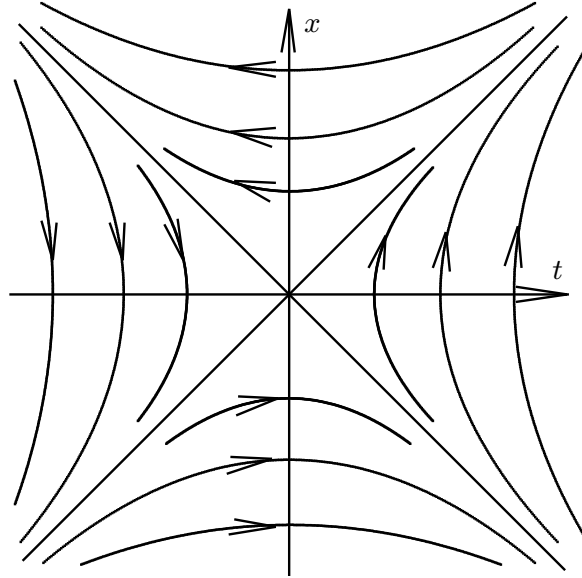


Рис. 21: Силовые линии точечного вихря. Ориентация линий — общая для всех 4-х клиньев (против часовой стрелки).

Как и в комплексном случае векторное поле  $\mathcal{B}$  оказывается ортогональным полю  $\mathcal{E}$  в смысле псевдоевклидовой метрики и получается "вращением" поля  $\mathcal{E}$  на гиперболический угол  $-\ell_H + \psi$ , где  $\psi$  — гиперболический угол для поля  $\mathcal{E}$ .

По формулам (74) получаем для гиперболических циркуляции и потока поля  $\mathcal{B}$  выражения:

$$\Upsilon[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = 0; \quad \Xi[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = 0 \quad (80)$$

для контура  $\mathcal{C}$ , представленного на рисунке 10 или гомотопных ему и выражения

$$\Upsilon[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = 0; \quad \Xi[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = \ell_H q \quad (81)$$

для контура, представленного на рис. 11 или гомотопных ему. Формулы (81) выражают гиперболическую соленоидальность и гиперболический аналог закона полного тока для поля  $\mathcal{E}$ .

##### 4.1 $h$ -вихреисточник

По аналогии с комплексным случаем можно объединить две предыдущие ситуации в одну, вводя в рассмотрение концепцию *гиперболического вихреисточника* с комплексным зарядом  $\mathcal{Q} = q - jm$ . Потенциал принимает вид:

$$F(z) = -\mathcal{Q} \ln h = -q \ln \rho + m\psi - j(-m \ln \rho + q\psi). \quad (82)$$

Такой потенциал наиболее естественно интерпретировать в рамках дуально-симметричной гиперболической теории поля, в которой гиперболические электрические и магнитные заряды и токи присутствуют на "равных правах". Уравнение для силовых линий такого поля получается из (82) приравниванием мнимой части константе:

$$m \ln \varrho + q\psi = C \Leftrightarrow (t^2 - x^2)e^{-(2q/m)\text{Arth}(x/t)} = C, \quad (83)$$

или после некоторых простых преобразований:

$$(t+x)^{1-\alpha}(t-x)^{1+\alpha} = \text{const}, \quad (84)$$

где  $\alpha = q/m$ . Картина силовых линий для  $\alpha = -2$  показана на рис. 22

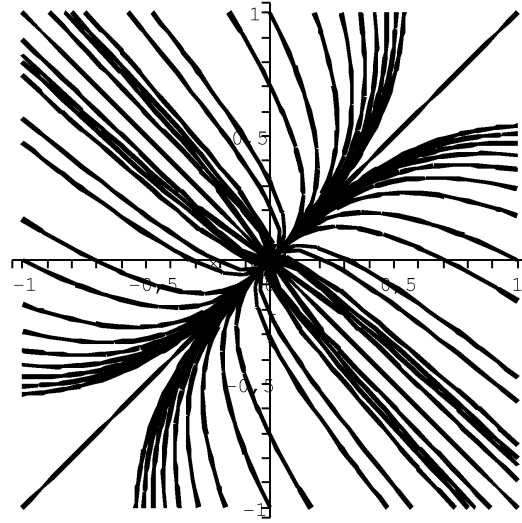


Рис. 22: Силовые линии точечного вихреисточника для  $q/m = -2$ . Линии исходят из центра во втором и четвертом координатных клиньях, и сходятся к центру в первом и третьем клиньях.

По формулам (74) получаем для гиперболических циркуляции и потока дуально-симметричного поля  $\mathcal{E}$  выражения:

$$\Upsilon[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = 0; \quad \Xi[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = 0 \quad (85)$$

для контура  $\mathcal{C}$ , представленного на рисунке 10 или гомотопных ему и выражения

$$\Upsilon[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = -\ell_H m; \quad \Xi[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = \ell_H q \quad (86)$$

для контура, представленного на рис. 11 или гомотопных ему. Формулы (86) выражают гиперболическую теорему Гаусса и гиперболический аналог закона полного тока для дуально-симметричного поля  $\mathcal{E}$ .

#### 4.2 Гиперболический цилиндр в постоянном поле

Рассмотрим гиперболический аналог проводящего цилиндра в постоянном поле  $\mathcal{E}_0$ . Эта задача описывается потенциалом

$$F(h) = -2\mathcal{E}_0 R Z(h/R) = -\mathcal{E}_0(h + R^2/h), \quad (87)$$

где  $R$  — постоянный гиперболический радиус цилиндра. Напряженность поля в окрестности такого цилиндра будет даваться формулой:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - \frac{\mathcal{E}_0 R^2}{h^2} = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_0 R^2 \left( \frac{t^2 + x^2}{(t^2 - x^2)^2} - j \frac{2tx}{(t^2 - x^2)^2} \right). \quad (88)$$

Линии напряженности поля  $\mathcal{E}$ , которые можно получить из силовой функции в (88), представлены на рисунке 23.

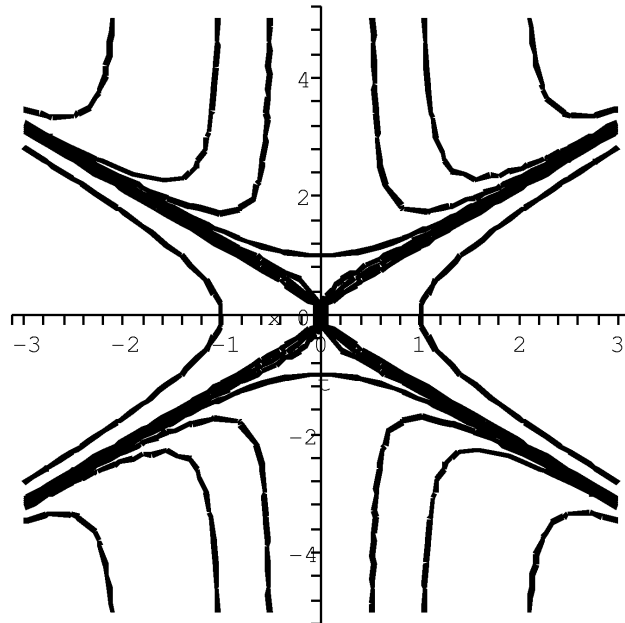


Рис. 23: Силовые линии в окрестности гиперболического цилиндра (две крайних гиперболы слева и справа) радиуса  $R = 1$ , помещенного в однородное силовое поле  $\mathcal{E}_0 = 1$ .

### 4.3 $h$ -мультиполя

По аналогии с комплексным случаем определим с помощью индуктивной формулы

$$F_n(h) = \frac{Q^{(n)}}{Q^{(n-1)}} \frac{dF_{n-1}}{dh} = (-1)^{n+1} \frac{Q^{(n)}}{h^n} = -(-\epsilon)^n \epsilon_Q \frac{|Q^{(n)}| e^{-j(n\psi - \delta_n)}}{\varrho^n}, \quad (89)$$

потенциал точечного гиперболического  $2(n-1)$ -мультиполя с мощностью  $Q^{(n)}$ . Здесь  $|Q^{(n)}| = \sqrt{|(Q_e^{(n)})^2 - (Q_m^{(n)})^2|}$ ,  $\delta_n = \text{Arth} Q_m^{(n)} / Q_e^{(n)}$ ,  $\epsilon$  и  $\epsilon_Q$  — знаковые множители для  $h$  и комплексного заряда  $Q$  соответственно. Уравнение для силовых линий имеет в полярных координатах вид.

$$\varrho = C \sqrt[n]{\sinh(n\psi - \delta_n)} \quad (90)$$

Вид силовых линий для  $n = 2, 3$  показан на рисунке 24.

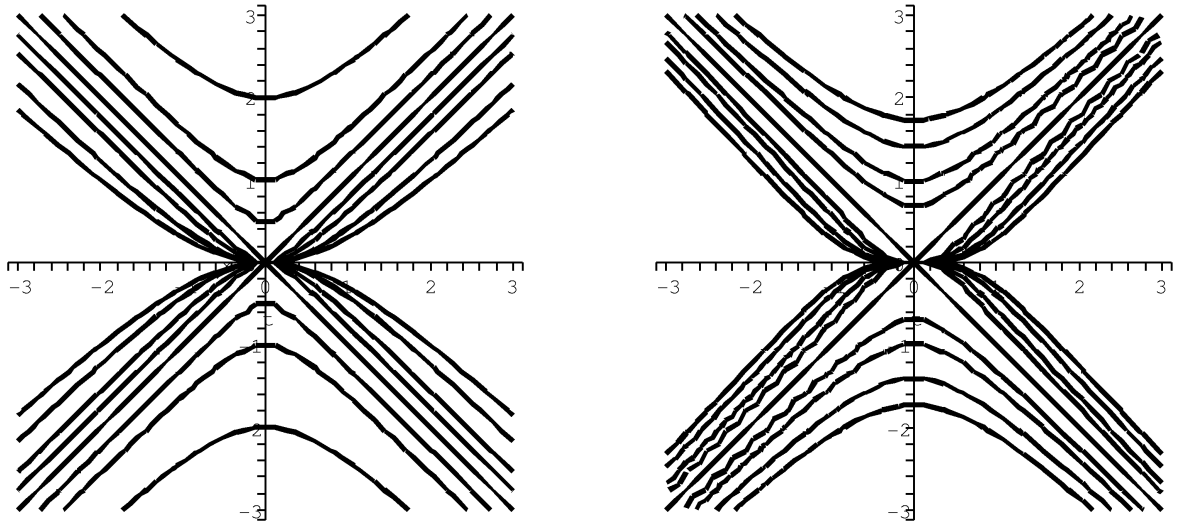


Рис. 24: Силовые линии гиперболического  $h$ -поля в окрестности точечного гиперболического диполя и квадруполь с единичной мощностью, ориентированного вдоль вещественной оси.

#### 4.4 $h$ -поле в изотропном базисе

Как уже отмечалось выше, замечательной особенностью двойной плоскости является наличие структуры вещественного конуса  $\text{Con}_h$  для каждой точки  $h \in \mathcal{H}$ . Геометрически точки конуса  $\text{Con}_h$  удалены на нулевое гиперболическое расстояние от точки  $h$ . Алгебраически произведение  $(h_1 - h)(h_2 - h) = 0$ , где  $h_1$  и  $h_2$  лежат в различных компонентах конуса  $\text{Con}_h$ , т. е. структура конуса тесно связана с наличием делителей нуля в алгебре двойных чисел. Наличие структуры конуса позволяет перформулировать геометрию и алгебру двойной плоскости в терминах так называемых изотропных координат, в которых геометрические и алгебраические свойства двойной плоскости выглядят наиболее просто. Изотропный базис алгебры  $\mathcal{H}$  определяется следующими соотношениями:

$$e_1 = \frac{1+j}{2}; \quad e_2 = \frac{1-j}{2}. \quad (91)$$

Из определения (91) следует таблица умножения алгебры  $\mathcal{H}$  в изотропном базисе:

$$e_i \cdot e_i = e_i; \quad e_i \cdot e_j = 0 \quad (i \neq j). \quad (92)$$

Двойное число  $h = t + jx$  в изотропном базисе записывается следующим образом:

$$h = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \quad (93)$$

где  $\xi_1 = t + x$ ,  $\xi_2 = t - x$  — опережающая и запаздывающая комбинация декартовых компонент двойного числа. Произведение двойных чисел  $h_1 = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$  и  $h_2 = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2$  принимает простой вид:

$$h_1 \cdot h_2 = \xi_1 \eta_1 e_1 + \xi_2 \eta_2 e_2. \quad (94)$$

В частности, любая целая положительная степень двойного числа  $h^n$  в изотропном базисе принимает вид комбинации степеней компонент:

$$h^n = \xi_1^n e_1 + \xi_2^n e_2. \quad (95)$$

Легко проверяется, что операция комплексного сопряжения в изотропном базисе сводится к перестановке компонент:

$$\bar{h} = \overline{\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2} = \xi_2 e_1 + \xi_1 e_2. \quad (96)$$

Из (94) нетрудно видеть, что операция деления определена на любое двойное число, у которого все изотропные координаты не равны нулю, т.е. при условии  $\xi_1 \xi_2 \neq 0$ . В этом случае

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\eta_1 e_1 + \eta_2 e_2}{\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2} = \frac{\eta_1}{\xi_1} e_1 + \frac{\eta_2}{\xi_2} e_2. \quad (97)$$

Двойные числа с равной нулю одной из изотропных координат лежат на конусе  $\text{Con}_0$  и имеют нулевую норму.

Ввиду формул

$$t = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}; \quad x = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2}, \quad (98)$$

всякое отображение  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  локально можно представить парой функций  $F_1(\xi_1, \xi_2)$  и  $F_2(\xi_1, \xi_2)$ :

$$F(h) = F_1(\xi_1, \xi_2)e_1 + F_2(\xi_1, \xi_2)e_2. \quad (99)$$

Покажем, что в случае аналитического отображения, т.е. такого, которое можно задать сходящимся в некоторой окрестности рядом Тейлора (или для простоты рядом Маклорена), функции  $F_1$  и  $F_2$  удовлетворяют соотношению:

$$F_1(\xi_1, \xi_2) = F_2(\xi_2, \xi_1). \quad (100)$$

Во-первых, в силу (95) имеем:

$$F(h) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\xi_1^k e_1 + \xi_2^k e_2) = F(\xi_1)e_1 + F(\xi_2)e_2 \quad (101)$$

для всякой аналитической функции переменной  $h$ . Для аналитической функции переменной  $\bar{h}$  аналогично имеем:

$$F(\bar{h}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \bar{h}^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\xi_2^k e_1 + \xi_1^k e_2) = F(\xi_2)e_1 + F(\xi_1)e_2. \quad (102)$$

Далее для аналитической функции  $F(h, \bar{h})$  в силу (101)-(102) приходим к цепочке равенств:

$$F(h, \bar{h}) = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl} h^k \bar{h}^l = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl} (\xi_1^k e_1 + \xi_2^k e_2) (\xi_2^l e_1 + \xi_1^l e_2) = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl} (\xi_1^k \xi_2^l e_1 + \xi_2^k \xi_1^l e_2) = \quad (103)$$

$$F(\xi_1, \xi_2)e_1 + F(\xi_2, \xi_1)e_2,$$

откуда и следует (100). Для базисных операторов дифференцирования нетрудно получить следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial h} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}; \quad \frac{\partial}{\partial \bar{h}} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1}. \quad (104)$$

Применяя оператор  $\partial/\partial \bar{h}$  к формуле (103), приходим к условию  $h$ -голоморфности в изотропных координатах:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_2}(\xi_1, \xi_2) = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_1}(\xi_2, \xi_1) = 0, \quad (105)$$

что по существу приводит к формуле (101).

Рассмотрим в качестве примера точечный источник  $h$ -поля в изотропной системе координат. Его потенциал (75) в изотропной системе координат принимает вид:

$$F(h) = -q \ln h = -q(\ln \xi_1 e_1 + \ln \xi_2 e_2). \quad (106)$$

Напряженность  $h$ -поля

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \overline{F(h)}}{\partial \bar{h}} = q \left( \frac{\partial}{\partial \xi_2} e_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_1} e_2 \right) (\ln \xi_2 e_1 + \ln \xi_1 e_2) = q \left( \frac{1}{\xi_2} e_1 + \frac{1}{\xi_1} e_2 \right). \quad (107)$$



Уравнения для его линий напряженности можно получить составляя уравнение характеристик:

$$\xi_2 d\xi_1 = \xi_1 d\xi_2, \quad (108)$$

которое имеет интеграл  $\xi_1/\xi_2 = C = \text{const}$  — семейство прямых, проходящих через начало. Для точечного вихря напряженность

$$\mathcal{B} = j\mathcal{E} = (e_1 - e_2)\mathcal{E} = q\left(\frac{1}{\xi_2}e_1 - \frac{1}{\xi_1}e_2\right) \quad (109)$$

и уравнение характеристик

$$\xi_2 d\xi_1 = -\xi_1 d\xi_2 \quad (110)$$

имеет интеграл  $\xi_1 \xi_2 = C = \text{const}$  — семейство равнобочных гипербол.

## 5 Конформные $h$ -поля

Рассмотрим некоторое обобщение голоморфных отображений двойной плоскости, которые в изотропном базисе задаются соотношением:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1(\xi_1)e_1 + \mathcal{F}_2(\xi_2)e_2, \quad (111)$$

где  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  — произвольные гладкие функции вещественной переменной или в компонентах:

$$\xi'_1 = \mathcal{F}_1(\xi_1); \quad \xi'_2 = \mathcal{F}_2(\xi_2). \quad (112)$$

В силу соотношений (101)-(103) такое отображение не может рассматриваться как аналитическая функция одной из переменных  $h, \bar{h}$  или даже их пары. Характерное свойство отображений вида (111) становится явным, если учесть, что метрика (66), индуцируемая алгеброй  $\mathcal{H}$ , в изотропных координатах принимает вид:

$$\Theta = \text{Re}(dh \otimes d\bar{h}) = d\xi_1 \otimes d\xi_2 + d\xi_2 \otimes d\xi_1. \quad (113)$$

Очевидно, что при преобразовании (112) метрика (113) преобразуется по закону:

$$\Theta' = \mathcal{F}'_1 \mathcal{F}'_2 \Theta, \quad (114)$$

т.е. конформно. Другими словами, преобразования вида (111) описывают общий класс конформных преобразований псевдоевклидовой метрики, оставляющих эту метрику плоской. Будем называть такой класс преобразований *конформно-изотропными*. Голоморфные (или антиголоморфные) функции являются лишь подмножеством этого класса.

Наличие класса конформно-изотропных преобразований является специфическим следствием алгебры двойных чисел, а точнее — наличием в ней делителей нуля и как следствие структуры конуса и изотропных координат. По этой причине аналог конформно-изотропных преобразований на плоскости комплексной переменной отсутствует. Другим неаналитическим обобщением класса голоморфных преобразований двойной плоскости были бы преобразования вида:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\xi_1, \xi_2)e_1 + \mathcal{F}(\xi_2, \xi_1)e_2, \quad (115)$$

где  $\mathcal{F}$  — гладкая функция пары вещественных переменных, причем  $\mathcal{F}(\xi_1, \xi_2) \neq \mathcal{F}(\xi_2, \xi_1)$ . Ввиду тождества (103) такую функцию нельзя рассматривать как функцию пары переменных  $\mathcal{F}(h, \bar{h})$ , представимую в виде сходящегося ряда Тейлора относительно переменных  $h$  и  $\bar{h}$ .

## 6 Обобщение на многомерный случай

Для физических приложений необходимо обобщение концепции  $h$ -поля на случай коммутативно-ассоциативных алгебр высших размерностей. Проиллюстрируем идею такого обобщения на примере  $P_n$  — алгебр поличисел. Наличие изотропного базиса стирает некоторые принципиальные различия между алгебрами  $P_n$  с различными  $n$ , поэтому для удобства мы рассмотрим сводку сведений по алгебре и геометрии поличисел  $P_3$ . Большая часть из этих свойств тривиальным образом распространяется на общие поличисла  $P_n$ .

### 6.1 Алгебра и операции

Ассоциативно-коммутативная алгебра  $P_3$  над полем  $R$  (алгебра 3-чисел) обобщает хорошо известную алгебру двойных чисел на плоскости. Ее общий элемент имеет вид

$$A = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3, \quad (116)$$

где  $\{e_i\}$  — специальный набор образующих алгебры, удовлетворяющих соотношениям:

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_i \quad (\text{нет суммирования!}) \quad (117)$$

Из соотношений (117) следуют простые правила умножения и деления поличисел:

$$AB = A_1B_1e_1 + A_2B_2e_2 + A_3B_3e_3; \quad \frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1}e_1 + \frac{A_2}{B_2}e_2 + \frac{A_3}{B_3}e_3,$$

при этом деление определено только на т. н. невырожденные элементы, у которых все  $B_i \neq 0$ . Роль единицы алгебры  $P_3$  играет элемент  $I = e_1 + e_2 + e_3$ .

### 6.2 Комплексные сопряжения и (псевдо)норма

Определим в  $P_3$  две операции комплексного сопряжения:

$$A^\dagger = (A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3)^\dagger \equiv A_3e_1 + A_1e_2 + A_2e_3,$$

$$A^\ddagger = (A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3)^\ddagger \equiv A_2e_1 + A_3e_2 + A_1e_3$$

и рассмотрим 3-число  $AA^\dagger A^\ddagger$ . Простое вычисление показывает, что оно вещественно и равно  $A_1A_2A_3I$ . Таким образом по аналогии с модулем комплексного числа в  $P_3$  можно ввести (псевдо)норму по формуле:

$$\|A\| \equiv (AA^\dagger A^\ddagger)^{1/3} = (A_1A_2A_3)^{1/3}. \quad (118)$$

Для невырожденных 3-чисел эта норма имеет практически все свойства обычной нормы, в частности, для таких 3-чисел имеет место равенство:

$$\|AB\| = \|A\| \cdot \|B\|. \quad (119)$$

### 6.3 Делители нуля и группа внутренних автоморфизмов

В отличие от поля комплексных чисел и тела кватернионов, алгебра  $P_3$  имеет делители нуля, т. е. существуют не равные нулю элементы  $N$ , удовлетворяющие условию:  $\|NA\| = 0$  для всякого  $A \in P_3$ . Такие элементы называются *вырожденными* и характеризуются тем, что в их представлении (116) имеются нулевые коэффициенты. Отметим, что множество вырожденных элементов замкнуто относительно умножения в  $P_3$ . Мы будем обозначать это подмножество  $P_3^\circ$ .

С операцией умножения на невырожденные элементы в  $P_3$  связана группа внутренних автоморфизмов  $\text{Aut}(P_3)$ , которая изоморфна подгруппе (по умножению) невырожденных элементов:

$$\text{Aut}(P_3) \sim P_3 \setminus P_3^\circ, \quad \text{Aut}(P_3) \ni \sigma : A \rightarrow \sigma(A) \equiv \sigma A. \quad (120)$$

В этой группе выделяется подгруппа  $D_2 \subset P_3$  группы изометрий  $\text{Iso}(P_3)$ , элементы которой сохраняют норму (118). Ввиду определения (120) и свойства (119), элементы этой подгруппы выделяются условием:  $\|\sigma\| = 1$  или в компонентах:  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1$ . Группа  $D_2$  — 2-параметрическая абелева, а группа  $\text{Iso}(P_3)$  — 5-параметрическая неабелева. Кроме подгруппы  $D_2$  она включает в себя подгруппу трансляций, изоморфную  $R^3$ .

#### 6.4 Ряды и экспоненциальное представление

В пространстве  $P_3$  (и любом  $P_n$ ) можно определять степени элементов любого порядка и аналитические функции поличисловой переменной. Например, функцию  $e^A$  можно определить стандартным рядом для экспоненты:

$$e^A \equiv I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots = e^{A_1}e_1 + e^{A_2}e_2 + e^{A_3}e_3. \quad (121)$$

Определим теперь экспоненциальное представление поличисла по формуле:

$$A = \|A\|e^B, \quad (122)$$

где  $B$  — некоторое 3-число, инвариантное относительно действия группы  $D_2$ , сохраняющей норму  $\|A\|$ . Компоненты этого числа в некотором специальном базисе называются *экспоненциальными углами*. Независимых экспоненциальных углов будет два, поскольку, как мы увидим ниже, пространство чисел  $B$  для числа  $A$  с фиксированной нормой  $\|A\|$  будет 2-мерным. Для выяснения явного вида экспоненциальных углов, выполним следующую цепочку тождественных преобразований:

$$\begin{aligned} A &= A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3 = (A_1A_2A_3)^{1/3} \times \\ &\left( \frac{A_1^{2/3}}{(A_2A_3)^{1/3}}e_1 + \frac{A_2^{2/3}}{(A_1A_3)^{1/3}}e_2 + \frac{A_3^{2/3}}{(A_1A_2)^{1/3}}e_3 \right) = \\ |A|(e^{\ln(A_1^{2/3}/(A_2A_3)^{1/3})}e_1 + e^{\ln(A_2^{2/3}/(A_1A_3)^{1/3})}e_2 + e^{\ln(A_3^{2/3}/(A_1A_2)^{1/3})}e_3) = \\ |A|(e^{\chi_1}e_1 + e^{\chi_2}e_2 + e^{\chi_3}e_3) &= |A|e^{\chi_1e_1 + \chi_2e_2 + \chi_3e_3}, \end{aligned} \quad (123)$$

где величины

$$\chi_1 \equiv \ln \left[ \frac{A_1^{2/3}}{(A_2A_3)^{1/3}} \right]; \quad \chi_2 \equiv \ln \left[ \frac{A_2^{2/3}}{(A_1A_3)^{1/3}} \right]; \quad \chi_3 \equiv \ln \left[ \frac{A_3^{2/3}}{(A_1A_2)^{1/3}} \right] \quad (124)$$

и есть искомые экспоненциальные углы. Ввиду соотношения:

$$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 = 0, \quad (125)$$

которое в силу формул (124) выполняются тождественно, независимых углов будет только два и представление (123) можно переписать в следующих эквивалентных формах:

$$A = |A|e^{-\chi_2E_3 + \chi_3E_2} = |A|e^{\chi_1E_3 - \chi_3E_1} = |A|e^{-\chi_1E_2 + \chi_2E_1},$$

где  $E_1 = e_2 - e_3$ ,  $E_2 = e_3 - e_1$ ,  $E_3 = e_1 - e_2$  — комбинации базисных векторов, являющиеся генераторами группы  $D_2$ .

Операции комплексного сопряжения действуют на экспоненциальные углы следующим образом:

$$\dagger: \quad \chi_1 \rightarrow \chi_3; \quad \chi_2 \rightarrow \chi_1; \quad \chi_3 \rightarrow \chi_2; \quad \ddagger: \quad \chi_1 \rightarrow \chi_2; \quad \chi_2 \rightarrow \chi_3; \quad \chi_3 \rightarrow \chi_1$$

и обеспечивают справедливость формулы (118) в экспоненциальном представлении.

#### 6.5 Обобщения экспоненциальных углов

В предыдущем подразделе формулы (124) подразумевают, что все  $A_i > 0$ . Другими словами, формула (122) справедлива только для "положительного октанта". Нетрудно определить экспоненциальное представление и в других октантах, немного обобщив (122). Именно, определим экспоненциальное представление для поличисла из внутренней произвольного октанта по формуле

$$A = I_{(j)} \|A'\| e^{B'}, \quad (126)$$

где  $I_{(j)}$  ( $j = 1, \dots, 8$ ) — единичный вектор в направлении пространственной биссектриссы (в евклидовом смысле) соответствующего координатного октанта, число  $A' = A/I_{(j)}$  лежит в положительном октанте, а  $B'$  получается из  $B$  по формулам предыдущего подраздела с заменой  $A \rightarrow A/I_{(j)}$ . Такое определение снимает искусственное ограничение на область определения экспоненциальных углов и более адекватно передает их смысл как величин, отсчитываемых от соответствующих направлений  $I_{(j)}$ . Отметим, что в наших обозначениях мы принимаем  $I_1 \equiv I$ . В дальнейшем, если не оговорено особо, все рассуждения будут проводиться в положительном октанте.

Обобщение формул экспоненциального представления на поличисла  $P_n$  вполне элементарно. Для него имеет место формула (126), в которой индекс  $j$  может пробегать уже  $2^n$  значений по числу разделенных координатными плоскостями областей (многомерных октантов). При этом в положительном октанте

$$\|A\| = \left[ \prod_{i=1}^n A_i \right]^{1/n}; \quad \chi_k = \ln \left[ \frac{A_k}{\|A\|} \right]$$

или имеют место аналогичные формулы для соответствующих штрихованных величин для любого из  $2^n$  многомерных октантов.

### 6.6 Скалярное 3-произведение (полипроизведение)

С помощью операций  $\dagger$  и  $\ddagger$  можно определить вещественное число  $(A, B, C)$ , называемое *скалярным 3-произведением элементов  $A, B, C$* , которое строится на любых трех векторах в  $P_3$  по правилу:

$${}^{(3)}G(A, B, C) \equiv (A, B, C) \equiv \sum_{X, Y, Z=S(ABC)} XY^\dagger Z^\ddagger = \text{perm} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}, \quad (127)$$

где  $S(ABC)$  — множество перестановок элементов  $A, B, C$ , а  $\text{perm}(M)$  — перманент матрицы  $M$ , который повторяет структуру ее детерминанта, но все 6 слагаемых в нем берутся со знаком "плюс".

Для поличисел  $P_n$  имеет место аналогичное определение  $n$ -произведения:

$${}^{(n)}G(X_1, \dots, X_n) \equiv \text{perm}(X_1, \dots, X_n),$$

где  $X_i$  — набор из  $n$  штук  $n$ -чисел.

### 6.7 Пространства Бервальда-Моора

Если теперь абстрагироваться от алгебры и с самого начала рассматривать векторное пространство с 3-скалярным произведением, которое в специальном базисе имеет вид (127), мы приходим к *финслеровому 3-мерному пространству Бервальда-Моора* (БМ), которое будем обозначать  $\mathcal{H}_3$ . В отличие от  $P_3$ , в нем не предполагается существования какой-либо мультипликативной алгебры. Можно сказать, что отношение между  $P_3$  и  $\mathcal{H}_3$  аналогично отношению между комплексной плоскостью  $C$  и евклидовой плоскостью  $R^2$ .

### 6.8 Конструкция соприкосновения

Векторы  $\mathcal{H}_3$ , имеющие нулевую норму, называются в геометрии БМ *изотропными*. Как видно из определения (118), всякий изотропный вектор лежит в какой-либо из 3-х координатных плоскостей изотропной системы координат. В частности, векторы  $e_1 = \{1, 0, 0\}$ ,  $e_2 = \{0, 1, 0\}$ ,  $e_3 = \{0, 0, 1\}$  изотропного базиса этой системы являются изотропными. Таким образом, все координатное пространство  $\mathcal{H}_3$  разбивается координатными плоскостями на 8 октантов, внутри которых нормы векторов отличны от нуля и имеют определенные знаки (рис. 25). На координатных плоскостях метрика (127) становится

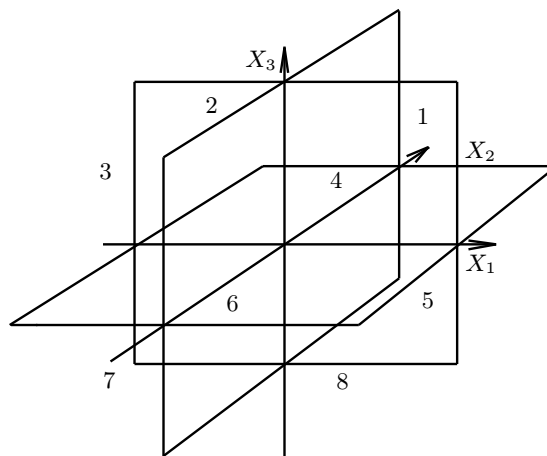


Рис. 25: Изотропные координатные плоскости и октанты в  $\mathcal{H}_3$ .

геометрически вырожденной, поскольку все векторы на них имеют нулевую норму. Для правильного описания геометрических свойств координатных плоскостей (это — 2-мерные псевдоевклидовы пространства) можно использовать конструкцию соприкосновения [5]. Ее суть заключается в переходе от финслеровой метрики  ${}^{(3)}G$  вида (127) к соприкасающейся с ней вдоль вектора  $e_j$  квадратичной метрике:

$${}^{(2)}G_{(j)} \equiv {}^{(3)}G(e_j, \cdot, \cdot),$$

действующей в гиперплоскости направлений  $x^j = \text{const}$ . Например, для случая  $j = 3$  будем иметь:

$${}^{(2)}G_{(3)} \equiv {}^{(3)}G(e_3, \cdot, \cdot) = dX_1 \otimes dX_2 + dX_2 \otimes dX_1$$

— метрику Бервальда-Моора на плоскостях  $X_3 = \text{const}$ , которая является 2-мерной метрикой Минковского.

### 6.9 Индикатрисса

Метрические свойства пространства  $\mathcal{H}_3$  наглядно иллюстрируются видом единичной сферы  $\mathcal{S}_{\text{БМ}}^2$  (индикатриссы  $\mathcal{H}_3$ ), которая определяется уравнением:

$$||X|| = |(X_1 X_2 X_3)^{1/3}| = 1, \tag{128}$$

где  $X = \{X_1, X_2, X_3\}$  — радиус-вектор в  $\mathcal{H}_3$ .

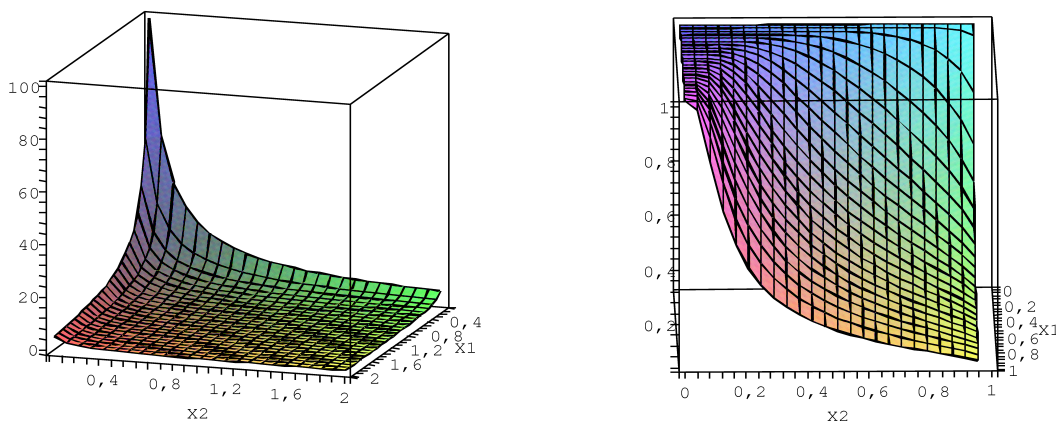


Рис. 26: Компонента индикатриссы  $\mathcal{S}_{\text{БМ}}^2$ , лежащая в первом октанте. На правом рисунке эта компонента компактифицирована в единичный куб с помощью отображения  $X_i \mapsto \tanh(X_i \ln 3/2)$ . Коэффициент в аргументе гиперболического тангенса подобран так, чтобы точка  $\{1, 1, 1\}$  переходила в точку  $\{1/2, 1/2, 1/2\}$  единичного куба.

Поверхность  $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$  — 8-связная и некомпактная. Ее компоненты связности расположены симметрично во всех 8 октантах и обладают дискретной симметрией относительно любых перестановок координат. Сечения этой поверхности плоскостями  $X_i = \text{const}$  — это семейство гипербол (понимаемых в евклидовом смысле). Наглядно одна из компонент индикатриссы в евклидовом представлении изображена на рис. 26

### 6.10 Геометрическая интерпретация группы $\text{Iso}(\mathcal{H}_3)$ .

Как, собственно, уже отмечалось выше группа изометрий  $\text{Iso}(\mathcal{H}_3)$  метрики (127) состоит из 3-параметрической абелевой подгруппы трансляций с элементами  $T_A : X \rightarrow X + A$  и 2-параметрической абелевой подгруппой унимодулярно-согласованных дилатаций  $D_2$  с элементами  $D_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} : \{X_1, X_2, X_3\} \rightarrow \{\sigma_1 X_1, \sigma_2 X_2, \sigma_3 X_3\}$  и соотношением

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 1. \quad (129)$$

С алгебраической точки зрения на  $\mathcal{H}_3$  группа  $D_2$  есть ни что иное, как описанная выше подгруппа из  $\text{Iso}(P_3)$  умножений на элементы с единичной нормой. Отметим еще раз, что группа  $\text{Iso}(\mathcal{H}_3)$  — неабелева и имеет структуру полупрямого произведения:  $\text{Iso}(\mathcal{H}_3) = \mathcal{R}^3 \rtimes D_2$ . Группа  $D_2$  играет роль вращений в пространстве  $\mathcal{H}_3$  и обобщает гиперболические вращения псевдоевклидовой плоскости. В частности, действие группы  $D_2$  на индикатриссе транзитивно:  $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2 \xrightarrow{D_2} \mathcal{S}_{\text{BM}}^2$ .

Для высших пространств БМ  $\mathcal{H}_n$  аналогично имеем  $\text{Iso}(\mathcal{H}_n) = R^n \rtimes D_{n-1}$ .

### 6.11 $h$ -аналитические поля в пространстве $\mathcal{H}_3$ .

Как и в рассмотренных выше двумерных случаях, общее гладкое отображение  $\mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3$  можно представить в виде  $F = F(h, h^\dagger, h^\ddagger)$ . Назовем отображение  $F$ :

1.  $h$ -голоморфным, если

$$\frac{\partial F}{\partial h^\dagger} = \frac{\partial F}{\partial h^\ddagger} = 0; \quad (130)$$

2.  $h^\dagger$ -голоморфным, если

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\partial F}{\partial h^\ddagger} = 0; \quad (131)$$

3.  $h^\ddagger$ -голоморфным, если

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\partial F}{\partial h^\dagger} = 0; \quad (132)$$

4.  $hh^\dagger$ -голоморфным, если

$$\frac{\partial F}{\partial h^\ddagger} = 0; \quad (133)$$

5.  $hh^\ddagger$ -голоморфным, если

$$\frac{\partial F}{\partial h^\dagger} = 0; \quad (134)$$

6.  $h^\dagger h^\ddagger$ -голоморфным, если

$$\frac{\partial F}{\partial h} = 0. \quad (135)$$

Как это видно из данных определений, с увеличением размерности коммутативно-ассоциативной алгебры число типов голоморфности возрастает. Очевидно, что первое определение является аналогом комплексной голоморфности или  $h$ -голоморфности на двойной плоскости. Второе и третье определения являются аналогами комплексной или двойной антиголоморфности, а последние три определения не имеют аналогов в двух измерениях и представляют собой "ослабленные" варианты голоморфности. В настоящей статье мы сконцентрируемся на  $h$ -голоморфности, ее свойствах и следствиях.

Будем стартовать с изотропного базиса в  $\mathcal{H}_3$ , в котором  $h$ -голоморфная функция имеет следующее представление:

$$F(h) = F(\xi_1)e_1 + F(\xi_2)e_2 + F(\xi_3)e_3. \quad (136)$$

Операторы дифференцирования по переменным  $h, h^\dagger, h^\ddagger$  имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial h} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3}; \quad \frac{\partial}{\partial h^\dagger} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + e_3 \frac{\partial}{\partial \xi_2}; \quad \frac{\partial}{\partial h^\ddagger} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + e_3 \frac{\partial}{\partial \xi_1}. \quad (137)$$

В силу (137) непосредственной проверкой в компонентах легко убедиться в справедливости равенств для функции  $F$  в виде (136):

$$\frac{\partial F}{\partial h^\dagger} = \frac{\partial F}{\partial h^\ddagger} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} e_1 + \frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} e_2 + \frac{\partial F_3}{\partial \xi_3} e_3, \quad (138)$$

где здесь и далее  $F_i \equiv F(\xi_i)$  — одна и та же функция от разных изотропных переменных. Цель дальнейшего рассмотрения — записать условия голоморфности в каком-нибудь неизотропном базисе, т.е. вывести многомерный аналог стандартных условий Коши-Римана. Среди всех возможных неизотропных базисов алгебры  $\mathcal{H}_3$  своей симметрией выделяется базис, состоящий из трех гиперболических мнимых единиц  $\{j_1, j_2, j_3\}$ , связанный с изотропным базисом соотношениями:

$$j_1 = e_1 - e_2 - e_3; \quad j_2 = -e_1 + e_2 - e_3; \quad j_3 = -e_1 - e_2 + e_3, \quad (139)$$

из которых следуют правила умножения этих единиц:

$$j_i^2 = -(j_1 + j_2 + j_3); \quad j_i \cdot j_k = j_l \quad (j \neq k \neq l). \quad (140)$$

Записывая число  $h$  в виде разложения  $h = x_1 j_1 + x_2 j_2 + x_3 j_3$ , выражая  $j$ -базис через  $e$ -базис по формулам (139), собирая коэффициенты при  $e_i$  и приравнивая их  $\xi_i$ , получаем следующую связь координат 3-числа в  $e$ -базисе и  $j$ -базисе:

$$\xi_1 = x_1 - x_2 - x_3; \quad \xi_2 = -x_1 + x_2 - x_3; \quad \xi_3 = -x_1 - x_2 + x_3. \quad (141)$$

В дальнейшем нам потребуются также формулы обратных преобразований для базисов и координат:

$$e_1 = -\frac{j_2 + j_3}{2}; \quad e_2 = -\frac{j_1 + j_3}{2}; \quad e_3 = -\frac{j_1 + j_2}{2}; \quad (142)$$

$$x_1 = -\frac{\xi_2 + \xi_3}{2}; \quad x_2 = -\frac{\xi_1 + \xi_3}{2}; \quad x_3 = -\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}. \quad (143)$$

Легко проверить, что действие комплексных сопряжений сводится к правилам:

$$j_1^\dagger = j_2; \quad j_2^\dagger = j_3; \quad j_3^\dagger = j_1; \quad j_1^\ddagger = j_3; \quad j_2^\ddagger = j_1; \quad j_3^\ddagger = j_2. \quad (144)$$

В качестве следующего шага запишем операторы дифференцирования по 3-числу в  $j$ -базисе. Для этой цели в формулах (137) сделаем подстановки  $e_i$  из (142), и операторов дифференцирования  $\partial/\partial \xi_i$  по формулам:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_l} \right), \quad (145)$$

где  $i, k, l$  — принимают все не равные друг другу значения. После таких подстановок и элементарных преобразований получаем искомые формулы:

$$\frac{\partial}{\partial h} = \frac{1}{4} [j_1(\bar{\partial} + \partial_1) + j_2(\bar{\partial} + \partial_2) + j_3(\bar{\partial} + \partial_3)], \quad (146)$$

где  $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$ ,  $\bar{\partial} \equiv \sum_i \partial_i$  и еще пара формул, получающаяся из (146) действием операций  $\dagger$  и  $\ddagger$  и использованием формул (144):

$$\frac{\partial}{\partial h^\dagger} = \frac{1}{4} [j_2(\bar{\partial} + \partial_1) + j_3(\bar{\partial} + \partial_2) + j_1(\bar{\partial} + \partial_3)], \quad (147)$$

$$\frac{\partial}{\partial h^\ddagger} = \frac{1}{4} [j_3(\bar{\partial} + \partial_1) + j_1(\bar{\partial} + \partial_2) + j_2(\bar{\partial} + \partial_3)]. \quad (148)$$

Рассмотрим теперь некоторую  $h$ -голоморфную функцию, которая в  $j$ -базисе имеет представление

$$F(h) = U_1 j_1 + U_2 j_2 + U_3 j_3. \quad (149)$$

Действуя на нее операторами (147) и (148), расписывая результат в компонентах с учетом правил (140), приходим к следующей паре систем уравнений в частных производных, которым должна удовлетворять всякая  $h$ -голоморфная функция:

$$\begin{pmatrix} -(\bar{\partial} + \partial_3) & \partial_{2-1} & \partial_{1-2} \\ \partial_{2-3} & -(\bar{\partial} + \partial_1) & \partial_{3-2} \\ \partial_{1-3} & \partial_{3-1} & -(\bar{\partial} + \partial_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = 0; \quad (150)$$

$$\begin{pmatrix} -(\bar{\partial} + \partial_2) & \partial_{1-3} & \partial_{3-1} \\ \partial_{1-2} & -(\bar{\partial} + \partial_3) & \partial_{2-1} \\ \partial_{3-2} & \partial_{2-3} & -(\bar{\partial} + \partial_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (151)$$

Для сокращения записи система приведена к матричной форме, в которой умножение "операторной матрицы" на столбец компонент производится по обычным правилам матричного умножения. При этом  $\partial_{i-j} \equiv \partial_i - \partial_j$ . Ввиду инвариантности свойства  $h$ -голоморфности относительно выбора базиса алгебры, можно утверждать, что общее решение системы (150)-(151) записывается с помощью представления  $U_i$  через  $F_i$ , выраженные через  $x$ -координаты:

$$\begin{aligned} U_1 &= F(x_2 - x_1 - x_3) + F(x_3 - x_1 - x_2); & U_2 &= F(x_1 - x_2 - x_3) + F(x_3 - x_1 - x_2); \\ U_3 &= F(x_1 - x_2 - x_3) + F(x_2 - x_1 - x_3). \end{aligned} \quad (152)$$

Этот факт можно проверить непосредственной подстановкой (152) в (150)-(151). Комбинации координат в аргументах функции  $F$  являются высшими аналогами запаздывающего и опережающего аргументов на двойной плоскости.

Оператор третьего порядка

$$\Delta^{(3)} \equiv \frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial}{\partial h^\dagger} \frac{\partial}{\partial h^\ddagger} = (e_1 + e_2 + e_3) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \quad (153)$$

пропорционален алгебраической единице, поэтому

$$\Delta^{(3)} F = (\Delta^{(3)} U_1) j_1 + (\Delta^{(3)} U_2) j_2 + (\Delta^{(3)} U_3) j_3 \quad (154)$$

для всякой гладкой функции  $F(h, h^\dagger, h^\ddagger)$ . Если функция  $F$  —  $h$ -голоморфная, то ввиду того, что оператор  $\Delta^{(3)}$  содержит дифференцирования по  $h^\dagger$  и  $h^\ddagger$ , имеет место соотношение  $\Delta^{(3)} F \equiv 0$ , эквивалентное трем его компонентам:

$$\Delta^{(3)} U_i \equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (155)$$

Соотношения (155) является 3-мерным аналогом условий гармоничности или гиперболической гармоничности, которым тождественно удовлетворяют голоморфные функции комплексной или соответственно двойной переменной. В  $x$ -координатах оператор  $\Delta^{(3)}$  имеет следующий вид:

$$\Delta^{(3)} = -\frac{1}{8} (\partial_1 + \partial_2)(\partial_2 + \partial_3)(\partial_3 + \partial_1) = -\frac{1}{8} (2\partial_{123} + \partial_{112} + \partial_{221} + \partial_{113} + \partial_{331} + \partial_{223} + \partial_{332}), \quad (156)$$

где  $\partial_{ijk} \equiv \partial_i \partial_j \partial_k$ .

## 7 Физическая интерпретация $h$ -поля

Физическая интерпретация результатов, касающихся плоскости двойной переменной, будет существенно зависеть от точки зрения на статус пространства  $\mathcal{H}_2$ . Таких точки зрения можно отметить по меньшей мере три.



1. Плоскость  $\mathcal{H}_2$  является 2-мерным сечением 4-мерного пространства-времени Минковского. При этом плоские (т.е. двумеризуемые) задачи теории поля в пространстве Минковского можно переложить на язык  $h$ -голоморфных функций, подобно тому как плоские эллиптические задачи 3-мерного евклидова пространства допускают эффективную формулировку в терминах комплексной переменной.
2. Плоскость  $\mathcal{H}_2$  является "игрушечным" 2-мерным пространством-временем, на котором законы геометрии и физики можно сформулировать в терминах алгебры двойных чисел.
3. Плоскость  $\mathcal{H}_2$  является двумерной проекцией иерархии пространств  $\mathcal{H}_n$ . При этом многомерные обобщения двойной плоскости вовлекают в круг рассмотрения метрики с неквадратичными интервалами и уравнения поля высших порядков, а соответствующие поля имеют статус фундаментальных.

Обсудим каждую из точек зрения по отдельности.

### 7.1 Двумеризуемые задачи теории поля в 4-мерном пространстве-времени Минковского

По аналогии с приложениями конформных преобразований на стандартной (эллиптической) комплексной плоскости,  $h$ -аналитические функции могут использоваться для решения задач теории поля, связанных с 2-мерным волновым уравнением:  $\square_2 \varphi = 0$ . Непопулярность гиперболических конформных преобразований связана, в первую очередь, с нетрадиционностью постановки начально-краевых задач, которые решаются методом гиперболических конформных преобразований. Действительно, применение конформных преобразований на плоскости комплексной переменной для решения задач эллиптического типа, связанных с уравнением Лапласа, опирается на отмечавшееся выше обстоятельство: аналитическая функция  $w = f(z)$ , вещественная часть которой представляет решение некоторой краевой задачи, отображает границу области вне источников поля на прямую  $\operatorname{Re} w = \operatorname{const}$ . Это требование отражает условие постоянства потенциала на границе области, в которой решается уравнение Лапласа и обеспечивает единственность решения с точностью до произвольного выбора значения потенциала на границе.

В начально-краевых задачах гиперболического типа используется другая постановка задачи: обычно рассматривается пространственно-временная область в виде полуограниченного цилиндра<sup>9</sup>  $D^3 \times R_+$  (или топологически эквивалентная ей) и задаются начальные условия на начальной поверхности  $D^3 \times \{0\}$  (начальные значения для поля и его производных по времени) и граничные условия на боковой поверхности  $\partial D^3 \times R_+$  (значения поля и его пространственных производных). Если задача поставлена корректно, то эти начально-краевые данные определяют единственное решение с хорошими свойствами во все моменты времени  $t > 0$ . В 2-мерном пространстве времени граница области представляет собой времениподобный прямоугольник  $I \times R_+$  или топологически эквивалентную ему фигуру

Использование конформных преобразований, осуществляемых  $h$ -аналитическими функциями, предполагает перенос постановки эллиптической задачи на плоскости на гиперболические задачи на плоскости. Другими словами,  $h$ -аналитическая функция  $w = f(h)$  представляет решение некоторой начально-краевой задачи гиперболического типа, а именно той, для которой эта функция переводит 1-мерную границу области вне источников в линию  $\operatorname{Re} w = \operatorname{const}$ . Очевидно, такая постановка задачи отличается от стандартной, поскольку начально-краевые условия заменяются на задание формы поверхности (линии) постоянного потенциала. Эта поверхность имеет пространственно-временной характер. В принципиальном отношении она может быть получена с помощью измерений волнового поля  $\varphi$  в разных точках пространства в разные моменты времени с помощью надлежащего (достаточно большого) числа приборов. Точки-события пространства-времени, для которых показания приборов дают  $\varphi = \operatorname{const}$  и образуют искомую поверхность. Согласно проведенным выше рассуждениям, форма этой поверхности однозначно определяет решение волнового уравнения. Однако такая постановка задачи обычно не используется на практике, поскольку данные "размазаны" в пространстве и времени.

<sup>9</sup>Здесь  $D^3$  — 3-мерный шар,  $R_+ = [0, \infty)$ .

В качестве примера рассмотрим задачу об определении волнового поля, которое на гиперболической окружности  $t^2 - x^2 = R^2$  принимает постоянное значение  $\varphi_0$ . В соответствии с результатами раздела 3.6, подходящее решение имеет вид:  $\varphi = \varphi_0 + \ln[(t^2 - x^2)/R^2] = \text{Re}(\ln h + \varphi_0)$ . Его 3-мерный график и последовательные временные сечения представлены на рисунке 27.

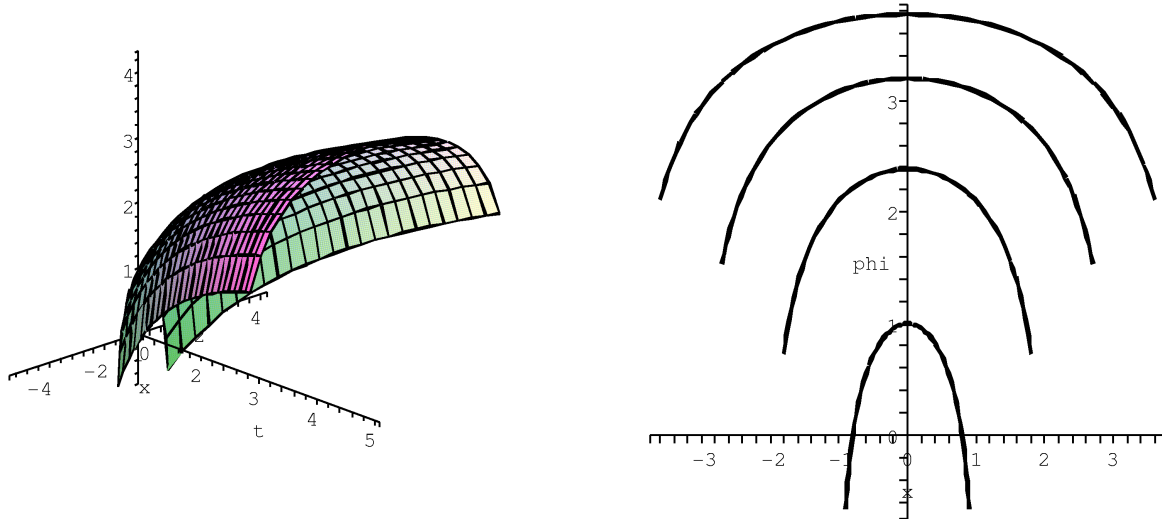


Рис. 27: Волновое решение, постоянное на гиперболической окружности ( $R = 1$ ,  $\varphi_0 = 1$ ). На правом рисунке представлены последовательные временные сечения поверхности, изображенной на левом рисунке  $t = 1, 2, 3, 4$ .

## 7.2 2-мерный мир Минковского

В настоящем разделе мы покажем, что алгебра двойных чисел является естественной и достаточной для изложения фактов 2-мерной СТО и 2-мерной электродинамики. Несмотря на некоторую кажущуюся искусственность такого рассмотрения, оно во многих отношениях полезно и поучительно. В частности, оно оттеняет алгебраический аспект псевдоевклидовой геометрии и геометрические аспекты алгебры двойных чисел и представляет собой естественную основу для дальнейших обобщений.

### 7.2.1 2-мерное пространство-время и векторные операции в нем

Будем отождествлять элементы  $\mathcal{H}_2$  с точками-событиями 2-мерного пространства-времени Минковского  $\mathcal{M}_2$ . Таким образом, с каждым элементом  $h \in \mathcal{H}_2$  мы ассоциируем 2-мерный радиус-вектор  $h = t + jx$ . Элементы  $\mathcal{H}_2$  как элементы алгебры образуют 2-мерное вещественное линейное пространство. Рассмотрим пару элементов  $h_1 = t_1 + jx_1$  и  $h_2 = t_2 + jx_2$  и комплексно-значную полуторалинейную форму на них:

$$h_1 \bar{h}_2 = t_1 t_2 - x_1 x_2 + j(t_2 x_1 - t_1 x_2). \quad (157)$$

Очевидно, что такая форма, с одной стороны, полностью определяется средствами алгебры  $\mathcal{H}_2$ , с другой — определяет вещественные симметричное  $h_1 \star h_2$  и антисимметричное (косое)  $h_1 \times h_2$  скалярные произведения по формулам:

$$h_1 \star h_2 \equiv \text{Re}(h_1 \bar{h}_2); \quad h_1 \times h_2 \equiv -\text{Im}(h_1 \bar{h}_2). \quad (158)$$

Симметричное произведение<sup>10</sup> является 2-мерным вариантом псевдоевклидовой метрики Минковского, а антисимметричное — 2-мерным вариантом векторного произведения, которое теперь

<sup>10</sup>Мы оставляем обычную точку  $\cdot$  за операцией умножения в алгебре  $\mathcal{H}_2$ .

является (псевдо)скаляром и отвечает за геометрию ориентированных объемов (т. е. площадей) пространства  $\mathcal{M}_2$ .

### 7.2.2 Алгебра изометрий

Группы изометрий  $\text{Iso}^*$  и  $\text{Iso}^\times$  билинейных форм (158) хорошо известны<sup>11</sup>: первая представляет собой 2-мерную группу Лоренца  $\text{Lor}_2$ , вторая — группу унимодулярных преобразований  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ . Рассмотрим произвольный (невырожденный) внутренний автоморфизм алгебры  $\mathcal{H}_2$ , порождаемый умножениями  $h \mapsto h' = \alpha \cdot h$ , где  $\alpha = \alpha_1 + j\alpha_2 \in \mathcal{H}_2$  и запишем его в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}. \quad (159)$$

Далее непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости формул:

$$(\alpha h_1) \star (\alpha h_2) = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) h_1 \star h_2; \quad (\alpha h_1) \times (\alpha h_2) = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) h_1 \times h_2.$$

Отсюда с учетом (159) следует важное равенство:

$$\text{Aut}^{\text{int}}(\mathcal{H}_2) \supset \text{Iso}^* = \text{Iso}^\times \cap \text{Aut}^{\text{int}}(\mathcal{H}_2),$$

где  $\text{Aut}^{\text{int}}(\mathcal{H}_2)$  — группа внутренних автоморфизмов алгебры  $\mathcal{H}_2$ , порожденная умножениями на невырожденные элементы. Отметим, что наличие метрики, ассоциированной с косым произведением, позволяет интерпретировать элементы  $\mathcal{H}_2$  как вещественные спиноры.

Матрица преобразования в (159), описывающая внутренние автоморфизмы умножений алгебры  $\mathcal{H}_2$ , обладает свойством симметрии при ее транспонировании как относительно главной, так и относительно побочной диагонали. Назовем такую матрицу *абсолютно симметричной*. Из тривиального равенства  $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_3 \in \mathcal{H}_2$ , выражающего алгебраическую замкнутость  $\mathcal{H}_2$ , следует, что *абсолютно симметричные матрицы образуют группу относительно матричного умножения*. Эта группа представляет собой прямое произведение  $R \times \text{Lor}_2$  и, помимо преобразований Лоренца, включает в себя однородные дилатации:  $h \mapsto \lambda h$ ,  $\lambda \in R$ . В дальнейшем для краткости мы будем обозначать эту группу  $\text{Sp}_2$  и называть ее *однородной конформной группой на  $\mathcal{H}_2$* . Очевидно, что инвариантными геометрическими объектами для этой группы будут конуса  $\text{Con}(h)$ ,  $h \in \mathcal{H}_2$ .

Рассмотрим теперь дискретные преобразования  $\mathcal{H}_2$ :  $h = t + jx \mapsto \sigma_i h$  следующих независимых типов:

$$\sigma_t h \equiv -t + jx; \quad \sigma_x h \equiv t - jx; \quad \sigma_I \equiv x + jt. \quad (160)$$

Очевидно, что на алгебраическом языке эти операции записываются следующим образом:

$$\sigma_x h = \bar{h}; \quad \sigma_t h = -\bar{h}; \quad \sigma_I = j \cdot h,$$

откуда видно, что лишь операция  $\sigma_I$  допускает представление (159).

### 7.2.3 Коалгебра $\mathcal{H}_2^*$

Рассмотрим алгебру  $\mathcal{H}_2^*$ , двойственную к  $\mathcal{H}_2$ , элементами которой служат линейные функционалы (1-формы, ковекторы) над  $\mathcal{H}_2$ . Введем обозначение  $\omega(h)$  для значения 1-формы  $\omega \in \mathcal{H}_2^*$  на элементе  $h \in \mathcal{H}_2$  (это вещественное число). Выбирая базис  $\{1_*, j_*\}$  в алгебре  $\mathcal{H}_2^*$  дуальным к базису  $\{1, j\}$  в  $\mathcal{H}_2$ , будем иметь систему соотношений<sup>12</sup>:

$$1_*(1) = 1; \quad 1_*(j) = 0; \quad j_*(1) = 0; \quad j_*(j) = 1. \quad (161)$$

<sup>11</sup>Мы игнорируем трансляции. Их включение приводит к группам Пуанкаре  $P_2$  и аффинно-унимодулярной группе  $\text{SAff}(2, \mathbb{R})$

<sup>12</sup>Теперь, строго говоря, следует различать единицу алгебры  $1_H \in \mathcal{H}_2$  и вещественную единицу  $1 \in R$ . В скобках левых частей соотношений (161) стоят именно единицы алгебры  $\mathcal{H}_2$ , а в правых частях стоят вещественные единицы из  $R$ . В случаях, когда это не приводит к путанице, мы сохраняем обозначение 1 за обеими единицами.

Тогда значение произвольной 1-формы  $\omega = T1_* + Xj_*$  на элементе  $h = t + jx$  будет равно:

$$\omega(h) = Tt + Xx. \quad (162)$$

Имея в распоряжении две невырожденные метрики, ассоциированные с операциями  $\star$  и  $\times$ , можно ввести два отображения сопряжения  $\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2^*$  по формулам:

$$h \mapsto h^* \in \mathcal{H}_2^* : h^*(q) \equiv h \star q; \quad \text{и} \quad h \mapsto h^\times \in \mathcal{H}_2^* : h^\times(q) \equiv h \times q. \quad (163)$$

Будем называть первое сопряжение *векторным*, а второе — *спинорным*. В компонентах с учетом (161) и (163) для произвольного  $h = t + jx$  будем иметь:

$$\text{Re}(h^*) = t; \quad \text{Im}(h^*) = -x; \quad \text{Re}(h^\times) = -x; \quad \text{Im}(h^\times) = t. \quad (164)$$

Формулы (164) соответствуют известным правилам "жонглирования индексами" с помощью псевдоевклидовой и спинорной метрик в индексном представлении и устанавливают известные изоморфизмы линейных метризованных пространств с невырожденными метриками.

Коалгебра  $\mathcal{H}_2^*$  так же как и  $\mathcal{H}_2$  индуцирует пару операций скалярного произведения:  $\star$  и  $\times$  соответственно<sup>13</sup> по правилам:

$$\omega_1 \star \omega_2 \equiv \text{Re}(\omega_1 \bar{\omega}_2); \quad \omega_1 \times \omega_2 \equiv -\text{Im}(\omega_1 \bar{\omega}_2), \quad (165)$$

которые мы будем называть *коскалярным* и *кокосым* или *коспинорным*.

Алгебры  $\mathcal{H}_2$  или  $\mathcal{H}_2^*$  взаимно сопряжены, т.е.  $(\mathcal{H}_2^*)^* = \mathcal{H}_2$ . Это означает, что элементы  $\mathcal{H}_2$  можно интерпретировать как 1-формы по отношению к элементам  $\mathcal{H}_2^*$ . Элементарно проверяются следующие тождества:

$$\begin{aligned} h_1^* \star h_2^* &= h_1 \star h_2; & h_1^\times \times h_2^\times &= h_1 \times h_2; & h_1^\times \star h_2^\times &= -h_1 \star h_2; & h_1^* \times h_2^* &= -h_1 \times h_2; \\ h_1^* \star h_2^\times &= -h_1 \times h_2; & h_1^\times \times h_2^* &= h_1 \star h_2; & h_1^\times \times h_2^\times &= -h_1 \star h_2; & h_1^* \star h_2^* &= h_1 \times h_2. \end{aligned}$$

Символически эти правила записываются короче, если определить *таблицы сопряжений* с помощью пары элементов  $\{(\star), (\times)\}$  над парой операций  $\{\star, \times\}$ :

$$\star : \begin{array}{c|c|c} 2 \setminus 1 & (\star) & (\times) \\ \hline \star & \star & \times \\ \hline \times & -\times & -\star \end{array} \quad \times : \begin{array}{c|c|c} 2 \setminus 1 & (\star) & (\times) \\ \hline \star & -\times & -\star \\ \hline \times & \star & \times \end{array} \quad (166)$$

#### 7.2.4 Системы отсчета на $\mathcal{M}_2$

С позиций стандартной СТО элементы введенной коалгебры  $\mathcal{H}_2^*$  представляют собой различные системы отсчета. Более точно, определим *класс  $\mathcal{IR}$  инерциальных систем отсчета на  $\mathcal{M}_2$  как совокупность элементов проективной подкоалгебры  $\mathcal{PH}_2^*$* . Ее элементы, в свою очередь, можно интерпретировать как точки на единичной гиперболической окружности  $|\omega \bar{\omega}| = 1$  на  $\mathcal{H}_2^*$ . При этом эта окружность на  $\mathcal{H}_2^*$  имеет 4 несвязные компоненты: на двух из них  $\omega \bar{\omega} = +1$ , а на двух других  $\omega \bar{\omega} = -1$ . Будем называть подкласс систем отсчета из первых двух компонент *причинным* (ему соответствуют системы отсчета с досветовыми скоростями) и обозначать его  $\mathcal{IR}_+$ , а класс систем отсчета из вторых двух компонент *апричинным* (ему соответствуют системы отсчета со сверхсветовыми скоростями) и обозначать его  $\mathcal{IR}_-$ . Внутри каждого из названных подклассов выделяются еще по две связные компоненты: в положительных и отрицательных полуплоскостях  $\text{Im}\omega \geq 0$  для  $\mathcal{IR}_+$  и  $\text{Re}\omega \geq 0$  для  $\mathcal{IR}_-$ . Мы будем обозначать их соответственно  $\mathcal{IR}_+^\uparrow$  и  $\mathcal{IR}_+^\downarrow$  и называть *положительными* и *отрицательными* компонентами. Таким образом, полный класс  $\mathcal{IR}$  всех инерциальных систем отсчета допускает следующее разбиение:

$$\mathcal{IR} = \mathcal{IR}_+^\uparrow \cup \mathcal{IR}_+^\downarrow \cup \mathcal{IR}_-^\uparrow \cup \mathcal{IR}_-^\downarrow. \quad (167)$$

<sup>13</sup>Их следовало бы обозначить  $\star^*$  и  $\times^*$ , поскольку они определяются между элементами  $\mathcal{H}_2^*$ , имеющими природу, отличную от  $\mathcal{H}_2$ . Из контекста в дальнейшем всегда будет ясно, на каких элементах действуют эти операции и мы для избежания усложнения обозначений используем одни и те же символы.

Нетрудно убедиться, что компоненты разбиения получаются из класса  $\mathcal{IR}_+^\uparrow$  положительных причинных систем отсчета с помощью дискретных операций (160):

$$\mathcal{IR}_+^\downarrow = \sigma_t \mathcal{IR}_+^\uparrow; \quad \mathcal{IR}_-^\uparrow = \sigma_I \mathcal{IR}_+^\uparrow \quad \mathcal{IR}_-^\downarrow = \sigma_x \sigma_I \mathcal{IR}_+^\uparrow. \quad (168)$$

Следует отметить, что ввиду формального равноправия всех координатных клиньев на плоскости  $\mathcal{H}_2$  или  $\mathcal{H}_2^*$  разбиение (168) выглядит в значительной степени условным.

Рассмотрим теперь "нормальную" (т.е. досветовую и ориентированную в будущее) систему отсчета, взятую из компоненты  $\mathcal{IR}_+^\uparrow$ . Ей соответствует некоторый элемент  $\tau \in \mathcal{H}_2^*$ , который в выбранном нами базисе имеет вид:  $\tau = T1_* + Xj_*$ , причем его компоненты  $T$  и  $X$  удовлетворяют условиям:

$$T > 0; \quad T^2 - X^2 = 1. \quad (169)$$

Первое условие выражает факт положительной ориентации отсчета времени, второе — факт его универсального (постоянного) "единичного темпа". Формально последнее связано с единичной нормировкой ковектора  $\tau$ . Условия (169) автоматически удовлетворяются параметризацией:

$$T = \cosh \psi; \quad X = \sinh \psi, \quad (170)$$

где параметр  $\psi$  имеет геометрический смысл гиперболического угла в гиперболической полярной системе координат и физический смысл известного параметра быстроты ( $\tanh \psi = v$ ,  $v$  — пространственная скорость системы отсчета). В компонентах (в параметризации скорости  $v$ ) 1-форма  $\tau$  принимает вид:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} 1_* - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} j_* \quad (171)$$

Теперь, для заданной системы отсчета  $\tau \in \mathcal{H}_2^*$  и для любого элемента-события  $h \in \mathcal{H}_2$  мы можем определить его *временную компоненту*  $h_T^\tau$  по отношению к системе отсчета  $\tau$  с помощью простой формулы:

$$h_T^\tau \equiv \tau(h). \quad (172)$$

Для произвольного  $h = t + jx$  с помощью формул (162), (170) и (171) определение (172) дает временную часть преобразований Лоренца:

$$h_T^\tau \equiv \frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Для вектора  $\Delta h = \Delta t + j \cdot 0$ , характеризующего временной интервал в системе покоя некоторых часов, получаем формулу релятивистского растяжения промежутков времени:

$$h_T^\tau(\Delta h) = \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Чтобы перейти к определению пространственных проекций событий, необходимо определить единичную 1-форму  $s$  из компоненты  $\mathcal{IR}_-^\uparrow$ , ортогональную  $\tau$ , т. е. удовлетворяющую соотношению:  $s \star \tau = 0$ . С помощью формул (165) и (171) нетрудно найти ее координатный вид:

$$s = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} 1_* + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} j_*. \quad (173)$$

Теперь для *пространственной проекции произвольного события*  $h \in \mathcal{H}_2$  по отношению к системе отсчета  $\tau$  с помощью формул (162), (173) мы можем дать следующее определение:

$$h_X^\tau \equiv s(h) = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (174)$$

что дает по существу пространственную часть преобразований Лоренца.

Рассмотрим тождественный линейный оператор  $\hat{I} \equiv 1 \otimes 1_* + j \otimes j_*$ . Непосредственной проверкой с помощью формул (171) и (173) можно убедиться в справедливости следующего разложения этого оператора:

$$\hat{I} = \tau^* \otimes \tau - s^* \otimes s. \quad (175)$$

Действуя этим оператором на векторы-события или 1-формы получаем их разложение на пространственные и временные компоненты:

$$h = h_T^\tau \tau^* + h_X^\tau s^*; \quad \omega = \omega_T^\tau \tau + \omega_X^\tau s,$$

где  $h \in \mathcal{H}_2$ ,  $\omega \in \mathcal{H}_2^*$  и

$$h_T^\tau \equiv \tau(h); \quad h_X^\tau \equiv s(h); \quad \omega_T^\tau \equiv \omega(\tau^*); \quad \omega_X^\tau \equiv \omega(s^*).$$

Аналогично, вводя разложение единичного оператора в тензорном расслоении  $T^{(r,s)}(\mathcal{H}_2)$ :

$$\hat{I}^{\otimes(r+s)} = (\tau^* \otimes \tau - s^* \otimes s)^{\otimes(r+s)}$$

можно всякий тензор на  $\mathcal{H}_2$  разложить на пространственно-временные компоненты. Например, метрические тензоры  $g^*$  и  $g^\times$ , ассоциированные с симметричным и косым произведениями соответственно имеют следующие представления:

$$g^* = \tau \otimes \tau - s \otimes s; \quad g^\times = \tau \wedge s,$$

которые по существу имеют смысл 2-мерного (диадного) аналога тетрадного описания величин в СТО и ОТО [6]. Отметим, что специфика 2-мерия заключается в наличии взаимно-однозначного пространственных и временных элементов диады  $\{\tau, s\}$ .

Рассмотрим пару элементов  $\tau_1$  и  $\tau_2$  из  $\mathcal{H}_2^*$ , которые параметризуются скоростями  $v_1$  и  $v_2$  по формуле (171). Легко убедиться, что их произведение в двойной алгебре  $\mathcal{H}_2^*$  определяет элемент

$$\tau = \tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} 1_* - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} j_*,$$

где

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 - v_1 v_2}. \quad (176)$$

Другими словами, последовательная смена систем отсчета описывается умножением в алгебре двойных чисел соответствующих элементов из  $\mathcal{H}_2^*$ . Это умножение автоматически индуцирует релятивистский закон сложения скоростей. Интересное следствие этого факта связано с алгебраической интерпретацией активных и пассивных преобразований: *умножения нормированных на единицу элементов в коалгебре  $\mathcal{H}_2^*$  описывают пассивные преобразования Лоренца (смену точки зрения на одни и те же события), в то время как умножения нормированных на единицу элементов в алгебре  $\mathcal{H}_2$  описывают активные преобразования Лоренца (переход к другим событиям, на которые мы смотрим с той же точки зрения)*. Отсюда, в частности, следуют тождества:

$$\tau_v(\alpha_v \cdot h) = t; \quad s_v(\alpha_v \cdot h) = x$$

для всякого элемента  $h = t + jx$  и элементов  $\alpha_v \in P\mathcal{H}_2$ ,  $\tau_v, s_v \in P\mathcal{H}_2^*$ , параметризуемых одним и тем же параметром  $v$ . Эти тождества являются математическим выражением следующего утверждения: *событие, переведенное активным бустом в новое событие, не изменяет своих пространственно-временных проекций в системе отсчета, соответствующей этому бусту*.

Все приведенные выше построения допускают локализацию т. е. переход к дифференциально-геометрическим объектам (касательным векторам и дифференциальным 1-формам). Для этого достаточно допустить зависимость параметра  $v$  от  $t$  и  $x$ , а все конструкции рассматривать в касательных и кокасательных пространствах  $T_{(t,x)}\mathcal{H}_2$  и  $T_{(t,x)}^*\mathcal{H}_2 = T_{(t,x)}\mathcal{H}_2^*$ . Такой переход позволяет рассматривать протяженные деформирующиеся системы отсчета и даже включать гравитацию.

### 7.2.5 Динамика СТО в представлении двойных чисел

Гладкую кривую  $\Gamma$  на  $\mathcal{H}_2$  можно описывать с помощью параметрической зависимости  $h(w) = t(w) + jx(w)$  где  $w$  — вещественный параметр, а  $t(w), x(w)$  — гладкие функции от него. Вектор (координатной) скорости на этой кривой имеет вид:

$$\dot{h} = \frac{dh}{dw} = \dot{t} + j\dot{x},$$

при этом физическая скорость  $v$  определяется отношением:

$$v = \frac{\text{Im}\dot{h}}{\text{Re}\dot{h}} = \frac{\dot{x}}{\dot{t}} \quad (177)$$

и не зависит от параметризации. Назовем кривую *причинной и ориентированной в будущее*, если для всякой системы отсчета  $\tau \in \mathcal{IR}_+^\uparrow$   $\tau(\dot{h}) > 0$  для всех  $w$ . Всякая такая кривая допускает натуральную параметризацию

$$s = \int_{w_0}^w \sqrt{\dot{h} \star \dot{h}} dw = \int_{t_0}^t \sqrt{1 - v^2} dt \quad (178)$$

в которой  $\dot{h} \star \dot{h} = 1$ . Вектор  $\dot{h}$  в натуральной параметризации назовем *2-скоростью*  $V$  на кривой  $\Gamma$ . Как это нетрудно получить из соотношений (177) и (178), он имеет представление:

$$V \equiv \frac{dh}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2(s)}} + j \frac{v(s)}{\sqrt{1 - v^2(s)}}. \quad (179)$$

Причинные и ориентированные кривые можно интерпретировать как мировые линии массивных точечных частиц, помещенных в 2-мерное пространство время. Для каждой такой частицы можно определить 2-импульс:

$$P \equiv mV = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2(s)}} + j \frac{mv(s)}{\sqrt{1 - v^2(s)}},$$

где  $m$  — масса покоя частицы, которая определяет значение инварианта

$$P \star P = P \cdot \bar{P} = m^2. \quad (180)$$

Определим 2-силу  $F_0$  в системе отсчета, сопутствующей частице как элемент  $\mathcal{H}_2$  вида:

$$F_0 = jf, \quad (181)$$

где  $f$  — 1-мерный скаляр силы, измеряемый динамометром в сопутствующей системе. Вектор 2-скорости  $V_0$  в этой системе имеет вид:  $V_0 = 1$  и, очевидно, что

$$F_0 \star V_0 = 0. \quad (182)$$

В лабораторной системе отсчета 2-скорость описывается элементом  $V$ , который связан с  $V_0$  активным бустом  $\alpha_v$ :  $\alpha_v \cdot V_0 = V$ . Таким же соотношением связаны элементы  $F$  и  $F_0$ :  $\alpha_v \cdot F_0 = F$ , откуда средствами алгебры  $\mathcal{H}_2$  получаем:

$$F = \alpha_v \cdot F_0 = \frac{vf}{\sqrt{1 - v^2}} + j \frac{f}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (183)$$

Ввиду лоренц-инвариантности операции  $\star$  и соотношения (182), имеем общее соотношение ортогональности:

$$F \star V = 0, \quad (184)$$

выражающее принятый в СТО факт локальной пространственноподобности действующих на точку сил. Этот факт, на самом деле, заложен в структуру релятивистских уравнений динамики:

$$\dot{P} = F \quad (185)$$

ввиду соотношения  $\dot{P} \star P = 0$ , вытекающего из (180). В компонентах уравнения (185) принимают вид

$$\frac{d}{ds} m(1-v^2)^{-1/2} + j \frac{d}{ds} mv(1-v^2)^{-1/2} = vf + jf. \quad (186)$$

Вещественная часть этого равенства описывает закон сохранения релятивистской энергии  $E = \text{Re}P = m(1-v^2)^{-1/2}$  с учетом мощности  $vf$  действующей силы, который является следствием мнимой части (186), выражающей релятивистский второй закон Ньютона.

### 7.2.6 Частицы в "электромагнитном поле" на двойной плоскости

2-мерным аналогом потенциала "электромагнитного поля" в двумерном пространстве-времени СТО является 1-форма вида  $\mathcal{A} = A_0 1_* + A_1 j_*$ . Ее внешний дифференциал (ротатор) принимает вид

$$d\mathcal{A} \equiv \nabla \times \mathcal{A} = \frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x} \equiv \mathcal{E}$$

и является единственным (псевдо)скаляром, описывающим напряженность электромагнитного поля на двойной плоскости. Здесь введен комплексный оператор  $\nabla \equiv \partial_t + j\partial_x$ . Псевдоевклидов квадрат тензора  $\mathcal{E} 1_* \times j_*$  определяет первый (и в данном случае единственный) инвариант:

$$I = F_{ik} F^{ik} = -2F_{01}^2 = -2\mathcal{E}^2,$$

знак которого отрицателен. Это означает, что в двумерном пространстве-времени электромагнитное поле существует лишь в своей "электрической ипостаси".

Движение распределенных на  $\mathcal{H}_2$  зарядов описывается 2-вектором плотности тока

$$J = \rho_0 V = \rho + j\rho v, \quad (187)$$

где  $\rho_0$  — плотность заряда в системе его покоя,  $\rho = \rho_0/\sqrt{1-v^2}$  — плотность заряда в лабораторной системе,  $V$  — поле 2-скорости заряда,  $v$  — поле физической скорости заряда. Действие для системы "заряды + электрическое поле" принимает вид:

$$S = - \sum_k m_k \int \sqrt{dh_k \star dh_k} - \sum_k q_k \mathcal{A}(dh_k) + \frac{j}{8\pi} \int \mathcal{E}^2 dh \wedge d\bar{h}. \quad (188)$$

Варьирование действия (188) по координатам частиц приводит к уравнениям движения частиц во внешнем поле:

$$\dot{V} = j \frac{q}{m} \mathcal{E} \cdot V \quad \text{или} \quad \frac{dE}{dt} + j \frac{t}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}} = q\mathcal{E}v + jq\mathcal{E}, \quad (189)$$

которое в качестве мнимой компоненты содержит уравнение движения заряженной частицы под действие чисто электрической силы Лоренца. Варьирование же действия (188) по компонентам потенциала  $\mathcal{A}$  приводит к уравнениям Максвелла вида:

$$\bar{\nabla} \mathcal{E} = -2\pi j J \quad \text{или} \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - j \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = -2\pi \rho(v + j). \quad (190)$$

Мнимая часть этих уравнений соответствует 1-мерной версии теоремы Гаусса, а вещественная — закону "полного тока который просто выражает факт равенства нулю полного тока. Применяя к обеим частям первого уравнения (190) операцию  $\bar{\nabla} \times$ , получаем в силу тождества  $\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} = 0$  закон сохранения электрического заряда:

$$\bar{\nabla} \times jJ = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0. \quad (191)$$



### 7.3 Теория фундаментального $h$ -аналитического поля

В настоящем разделе мы сделаем наброски теоретико-полевого подхода к  $h$ -аналитическим полям, основанного на принципе наименьшего действия. При конструировании лагранжиана мы будем исходить из соображений ковариантности, симметрии и простоты. Рассмотрим формальную теорию поля  $F(h, \bar{h})$  на плоскости двойной переменной, действие в которой задается выражением:

$$\mathcal{S}[F, j] = \frac{j}{2} \int_{\mathcal{H}_2} (F_{,h} \star F_{,h} - \mu^2 F \star F - F \star j) dh \wedge d\bar{h}, \quad (192)$$

где  $j$  — гипертюк-источник поля  $F$ ,  $\mu$  — параметр массы поля  $F$ . Выражение (192) в целом вещественно и обладает 2-мерной релятивистской инвариантностью. Переходя к компонентам  $F = U + jV$  и расписывая  $\star$ -произведения по формулам (158), приходим к действию для пары "невоздействующих" друг с другом массивных скалярных полей:

$$\mathcal{S}[F, \bar{F}, j, \bar{j}] = \mathcal{S}[U, j^0] - \mathcal{S}[U, j^1], \quad (193)$$

где

$$\mathcal{S}[\phi, X] \equiv \int_{R^2} \frac{1}{2} (\phi_{,t}^2 - \phi_{,x}^2 - \mu^2 \phi^2 - \phi X) dt \wedge dx. \quad (194)$$

Стандартная вариационная процедура для действия (192) по  $F$  и  $\bar{F}$  приводит к уравнению Клейна-Гордона:

$$(\square + \mu^2)F = -j \quad (195)$$

и комплексно-сопряженному уравнению. Покомпонентная запись уравнения (195) эквивалентна системе уравнений Клейна-Гордона для скалярных полей  $U$  и  $V$ , которые можно вывести непосредственно из (193) варьированием по  $U$  и  $V$ . Из уравнения (195) и формулы (62) следует, что в пространстве вне источников при  $\mu = 0$  решение уравнений поля представляет собой некоторую  $h$ -аналитическую или  $h$ -антианалитическую функцию.

Обобщение действия (193) на  $\mathcal{H}_3$  (на  $\mathcal{H}_n$  далее оно очевидно) имеет вид:

$$\mathcal{S}[F, j] = \frac{j}{2} \int_{\mathcal{H}_3} \left\{ F_{,h} (F_h)^\dagger (F_h)^\ddagger - \mu^3 F F^\dagger F^\ddagger - (F, j) \right\} dh \wedge dh^\dagger \wedge dh^\ddagger, \quad (196)$$

где  $j$  — тензорный гипертюк ( $j$  теперь симметричный тензор с компонентами  $j^{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ), а круглые скобки обозначают скалярное произведение (127) в метрике Бервальда-Моора. Уравнения поля, получающиеся из действия (196) будут нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Мы не выписываем их здесь, имея ввиду, что посвятим им специально одну из будущих публикаций.

## 8 Заключение

Наряду с общепринятой методологической установкой, согласно которой движущей силой и окончательным критерием истинности научного знания является опыт (эксперимент), в практике современных научных исследований широко применяется противоположная "неопифагорейская методология", в которой математика выступает источником идей и представлений об окружающем мире. На первый взгляд может показаться, что подобный подход имеет слишком незначительные шансы на успех из-за огромного количества различных математических конструкций, которые могли бы выступать в качестве потенциальной основы для такого рода поисков. Однако, множество кандидатов можно весьма эффективно ограничить, если отталкиваться не от всяких, но лишь от наиболее элементарных и фундаментальных математических объектов. К таким простейшими объектам, в первую очередь, следует отнести числа. Однако различных классов чисел также довольно много. Помимо обычных, к которым, как правило, относят натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные, известны и такие, как кватернионы, октавы,  $p$ -адические числа, числа Клиффорда, Грассмана и т.д. и т.п. Органическое переплетение

свойств перечисленных классов чисел с действительностью давно стало общепризнанным. Своей кульминации такое единство достигает на уровне комплексных чисел, свойства которых не только имеют прямое отношение к геометрии двумерного евклидова пространства, (что, кстати, в свое время и послужило основным аргументом в согласии математиков считать комплексную алгебру естественным расширением действительных чисел), но и обладают красивыми и плодотворными связями с физикой, в особенности в области комплексного анализа. Какую бы аналитическую функцию от комплексной переменной мы ни взяли, ей всегда можно поставить в соответствие конкретное двумерное физическое поле, (например, электро- или магнитостатическое). Равно как справедливо и обратное утверждение: для любой комбинации источников и вихрей, задающих идеальное двумерное поле в вакууме, можно всегда отыскать "свою" аналитическую функцию комплексной переменной. Принято считать, что на этом двумерном частном случае теснейшие переплетения свойств чисел, геометрии и физики и заканчиваются. В алгебре доказана важная теорема, доказательство которой принадлежит Фробениусу, констатирующая, что числовых множеств с размерностью три и выше, наследующих все без исключения свойства действительных и комплексных алгебр, не существует. Вместе с этим фактом отсутствует и возможность связать между собой геометрию многомерных пространств с многокомпонентными "хорошими" алгебрами. Кватернионы, открытые Гамильтоном, не образуют числового поля, поскольку их произведение, в отличие от произведений вещественных и комплексных чисел, некоммутативно. Кроме того, нетривиальные аналитические функции над кватернионами отсутствуют — самые "сложные" из них являются дробно-линейными функциями. Данное обстоятельство тесно связано с теоремой Лиувилля, которая, будучи примененной к четырехмерному евклидову пространству, ассоциированному с алгеброй кватернионов, утверждает, что конформная группа здесь 15-параметрическая, в то время как на комплексной плоскости и на вещественной прямой соответствующие конформные группы бесконечномерны. Сравнивая данный факт с множеством аналитических функций действительной и комплексной переменных, становится понятным вывод о том, что отсутствие разнообразия в конформных преобразованиях приводит к резкому сокращению геометрических и физических приложений для кватернионов и функций над ними, сколь-нибудь соизмеримых с приложениями числовых полей.

Столкнувшись с данным обстоятельством, несколько досадным после впечатляющих успехов взаимодействия алгебры, геометрии и физики в области комплексного анализа, большинство математиков отказалось от дальнейших поисков вариантов расширения списка чисел. Лишь редкие энтузиасты продолжают заниматься этой проблемой, сосредоточив свое внимание на отыскании таких изменений в понятии аналитической функции, которые бы совмещали в себе алгебру кватернионов и теорию аналитических функций. В частности, соответствующие попытки предпринимаются в рамках алгебры комплексных кватернионов или бикватернионов, как их иногда называют [8, 9, 10, 11], которые не образуют числового поля и имеют относительно бедную группу симметрий.

В настоящей статье мы сделали обзор свойств двойных чисел и функций над ними. При этом выяснился замечательный факт: аналогия двойных чисел с комплексными намного глубже, чем простое формальное сходство. Можно сказать, что все связи комплексных чисел с геометрией евклидовой плоскости имеют аналоги в виде связей двойных чисел с геометрией двумерного пространства-времени. Операциям сложения и умножения двойных чисел соответствуют трансляции, повороты и растяжения псевдоевклидовой плоскости. Имеют смысл понятия сопряженного числа, модуля и аргумента, алгебраической и экспоненциальной форм представления, справедливы аналоги формул Эйлера, Стокса, Остроградского, Коши и др., естественным образом вводится понятие производной независимой от направления и аналитичности функций [2, 1]. Трудно вообще придумать свойство, имеющее место на плоскости комплексной переменной и не имеющего аналога на плоскости двойной переменной. Как ни странно, при всем при этом двойные числа имеют относительно немного практических приложений и мало популярны по сравнению с комплексными.

По-видимому, основная причина столь пренебрежительного отношения математиков и физиков к двойным числам кроется в слишком очевидной простоте их устройства, иногда граничащей с тривиальностью. Для этих чисел легко находится базис (он называется изотропным, см. раз-

дел 4.4), в котором они распадаются на две независимые действительные алгебры. В результате создается впечатление, что ничего, кроме свойств такой пары, плоскость двойной переменной не содержит. В настоящей статье мы постарались показать очевидную ошибочность такой точки зрения. Хорошо известно, что двойные числа удовлетворяют практически всем аксиомам числового поля, за исключением того, что допускает делители нуля, то есть объекты с ненулевыми компонентами, модуль которых оказывается равным нулю и для которых не существует обратных по умножению, как и у обычного нуля. Математики данное качество часто считают "плохим" или как минимум, неудобным. Именно поэтому упоминавшаяся выше теорема Фробениуса не рассматривала алгебр с делителями нуля в принципе. Подобное ограничение с позиций предлагаемого подхода, основанного на поиске чисел, имеющих тесную и естественную связь с геометрией и физикой, представляется совершенно не оправданным. Алгебре двойных чисел соответствует геометрия двумерного псевдоевклидова пространства-времени [2], а в последнем, как известно, появляется фундаментальный объект, которого нет (во всяком случае, в вещественном виде) ни в одном евклидовом пространстве. Речь идет о световом конусе, или другими словами, о множестве точек, расстояния до которых (более правильно говорить об интервалах) от фиксированной точки равняются нулю. Именно точкам и векторам светового конуса естественным образом ставятся в соответствие делители нуля алгебры двойных чисел. То есть, основное препятствие, которое по мнению математиков не позволяет двойным числам рассматриваться в одном ряду с действительными и комплексными, на самом деле, является необходимым элементом как псевдоевклидовой геометрии, так и связанной с ней релятивистской физики. Но если из условия теоремы Фробениуса исключить требование отсутствия у алгебр делителей нуля и иметь ввиду, что числам могут соответствовать не только евклидовы, но и псевдоевклидовы пространства, то пессимистический вывод о замыкании комплексной алгеброй перечня фундаментальных числовых объектов становится неверным и появляются веские основания для пополнения списка числовых систем, прежде всего, за счет включения в него двойных чисел.

Немаловажным фактором, свидетельствующим о необходимости считать двойные числа фундаментальными объектами, является наличие над ними бесконечно-параметрического множества аналитических функций (правильнее говорить об  $h$ -аналитичности [2], поскольку на плоскости  $\mathcal{H}_2$  переменной естественная топология неевклидова). Более того, понятие  $h$ -аналитической функции от двойной переменной мы определяем таким образом, что их разнообразие оказывается ровно таким же как и разнообразие аналитических функций комплексной переменной, причем любой функции из одного множества соответствует одна и только одна функция другого [14].

Одним из замечательных свойств комплексной плоскости, открытым совсем недавно, явилось построение на ней при помощи компьютерных алгоритмов фрактальных множеств Жюлиа и Мандельброта [15]. Красота, гармония и содержательность этих объектов [16] явились дополнительным подтверждением связей, существующих между чистой математикой и геометрией. Существует мнение, что аналогичных по сложности фрактальных или фракталоподобных множеств на плоскости двойной переменной невозможно построить в принципе. У многих исследователей данной проблемы, вместо беспрельдно изломанных границ комплексных фракталов получались тривиально гладкие квадраты и прямоугольники [17, 18, 19]. Однако, как показывают недавние исследования [20, 21, 22], ситуация тут существенно интереснее. Если вместо предельных фрактальных множеств Жюлиа рассматривать так называемые предфракталы, отличающиеся от последних связью с конечным числом итераций, то вместо гладких границ прямоугольников на плоскости двойной переменной появляются объекты, практически ничем не отличающиеся от предфракталов на комплексной плоскости.

Обсудим в общих чертах интересные потенциальные физические интерпретации полей, задаваемых  $h$ -аналитическими функциями. Как и на комплексной плоскости, группа движений двойной плоскости реализуется сложением двойных чисел и умножением на числа единичного модуля, с той естественной разницей, что вращения на двойной плоскости являются гиперболическими. Прямолинейная физическая интерпретация этих алгебраических и геометрических свойств двойных чисел также не вызывает трудностей и обычно связывается с задачами специальной теории относительности, когда есть лишь две значимых координаты: одна пространственная и одна временная [23] (см. также раздел 7.2). Существенно более интересен вопрос о

физической реализации полей, задаваемых  $h$ -аналитическими функциями и наблюдаемыми физическими эффектами, связанными с ними. Подчеркнем, что речь идет об отыскании связей, в некотором смысле аналогичных тем, которые давно известны между аналитическими функциями комплексной переменной, конформными преобразованиями евклидовой плоскости и соответствующими тем и другим физическими приложениями. Следует ли ожидать наличия столь же красивых и представляющих физический интерес связей между  $h$ -аналитическими функциями двойной переменной и некоторыми достаточно простыми (эффективно двумерными) реальными физическими явлениями? Рассмотрение разделов 3.7-4.3 наводит на мысль о положительном ответе на этот вопрос. Представляется естественным предположить, что пространственно-временное образование, показанное на рис. 20 можно интерпретировать как поле точечного источника с обильностью (зарядом)  $q$ , находящимся в точке-событии с координатами  $(0, 0)$ . Силовые линии этого поля, как и для источника на комплексной плоскости — радиальные прямые, а линии уровня — концентрические окружности, только не евклидовы, а псевдоевклидовы, поскольку представляют собой квадратичные гиперболы. Разумеется, этот источник несколько иного рода, чем тот, который был связан с логарифмом на комплексной плоскости, так как метрика на плоскости двойной переменной совершенно иная и перед нами не пространственное векторное поле, а пространственно-временное. Кроме того, если на комплексной плоскости логарифм терял аналитичность в единственной точке с координатами  $(0, 0)$ , то на плоскости двойной переменной логарифм перестает быть  $h$ -аналитической функцией не только в точке  $(0, 0)$ , но и на связанном с нею изотропном (световом) конусе  $\text{Con}(0)$ . Несмотря на эти отличия, перед нами все же именно источник, который, чтобы не путать его с комплексным аналогом, договоримся именовать гиперболическим, а величину его заряда  $q$  будем называть гиперзарядом.

Напряженность  $\mathcal{E}$  векторного поля (76), создаваемого одними лишь гиперзарядом имеет много общего с напряженностью двумерного электростатического поля  $E(x, y) = E_x + iE_y$ . У них общие формулы связи с потенциалами и общая картина силовых и потенциальных линий, если интерпретировать ее с помощью аналогичных геометрических объектов (прямых и окружностей). Аналогичны и количественные характеристики этих полей, выражаемые формулами (35) и (77)-(78). Таким образом, перед нами полный гиперболический аналог двумерного потенциального поля электрической напряженности  $E$  создаваемого одиночным зарядом, только в данном случае поле  $P$  создается одиночным разрядом и заполняет оно собой не пространство, а пространство-время. Аналогичным образом можно говорить об аналогии дуальных величин  $\mathcal{B}$  и  $B$  в дуальной интерпретации электрических полей.

Дуальная и гиперболически-эллиптическая симметрия между напряженностями пары полей  $E$  и  $B$  на комплексной плоскости и напряженностями  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{B}$  на плоскости двойной переменной — удивительно гармоничная и полная. Было бы странно, что для первой пары в физическом мире существует двумерная реализация, а для второй таковой не было бы вовсе. Простой перебор известных современной физике фундаментальных взаимодействий показывает, что прямолинейной реализации рассматриваемой пары  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{B}$  в природе, по всей видимости, не существует. Следовательно, можно предположить, что рассматриваемые поля связаны с полями известных взаимодействий лишь косвенно или опосредованно (через некоторые их комбинации) или представляют дополнительные фундаментальные взаимодействия, свойства которого при переходе к ситуациям, где значимыми остаются лишь два измерения, одно из которых — время, оказываются именно такими, как предписывают  $h$ -аналитические функции двойной переменной. Назовем для краткости пару полей  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{B}$  гиперболическим полем.

Таким образом, на основании одних только математических соображений и глубоких математических аналогий с известным электромагнитным полем, мы приходим к интересным гипотезам, разумеется, требующим дальнейшей теоретической разработки и экспериментальной проверки.

1. Источниками гиперболического поля оказываются не элементарные частицы, как это имело место в случае электрического поля, а точечные события в пространстве-времени, при этом место зарядов занимают гиперзаряды, связь которых с зарядами и массами еще предстоит выяснить.
2. Напряженность электрического гиперболического поля, порождаемого гиперзарядами, име-

ет гиперболический характер, то есть силовые линии заполняют собой не пространство, а пространство-время, при этом эквипотенциальные линии поля (в случае двух измерений) являются гиперболами.

3. У гиперболического электрического поля как и для обычного электрического поля на евклидовой плоскости имеется свой дуальный аналог — гиперболическое магнитное поле, силовые линии которого псевдоевклидовы окружности, то есть гиперболы, а источники — гипервихри.
4. Гиперзаряды и гипервихри относятся не к частице, а к точечному элементарному событию.
5. Источники гиперболического поля могут быть не только положительными или отрицательными, но вещественными, мнимыми и гиперкомплексными величинами.
6. Напряженности обеих компонент гиперболического поля, связанного с двумерным одиночным вихресточником, спадают обратно пропорционально величине интервала от точки, в которой тот находится.
7. Экспериментальное обнаружение дополнительного взаимодействия, связанного с гиперболическими полями, требует, по всей видимости специальных экспериментов с измерением промежутков времени, отнесенных к различным физическим процессам. Мы остановимся подробнее на описании подобных экспериментов в отдельной публикации.
8. Естественные расширения гиперболического поля на три и четыре измерения следует связывать с естественными расширениями двойных чисел  $\mathcal{H}_2$  на три-числа  $\mathcal{H}_3$  и квадра-числа  $\mathcal{H}_4$ . Такие алгебры порождают уже не псевдоевклидово пространство-время, а линейные финслеровы пространства с метрикой Бервальда-Моора [24, 25, 26, 27, 28].
9. В многомерных финслеровых пространствах с метрикой Бервальда-Моора, кроме длин и углов естественными метрическими инвариантами являются еще и так называемые тринглы и полиуглы [29, 30], с которыми можно связывать не только  $\hbar$ -аналитические, но и более сложные функции. Разнообразие последних существенно шире, а их свойства намного интересней. Возможно, что при рассмотрении таких функций станет понятным объединение гиперболического и электромагнитного поля в рамках концепции многокомпонентного гиперкомплексного числа.

Дальнейшие исследования должны пролить свет на правдоподобность отмеченных выше гипотез. Уже сейчас детальное рассмотрение свойств  $\hbar$ -аналитических функций над двойными числами в их отношении к приложениям в геометрии и физике наводят на мысль о необходимости исследований других коммутативно-ассоциативных алгебр с делителями нуля на предмет их собственных физических интерпретаций. Учитывая, что таким многокомпонентным алгебрам соответствуют не евклидовы или псевдоевклидовы пространства, а их линейные финслеровы расширения [29], частичная или полная замена ими пространства-времени Минковского может оказаться содержательной и плодотворной.

## Литература

- [1] Павлов Д.Г., Кокарев С.С.  $\hbar$ -голоморфные функции двойной переменной и их приложения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (13), т. 7, 2010, с. 44-77.
- [2] Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1977.
- [3] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ (в 2-х томах). М., Наука, 1985.
- [4] Кокарев С.С. Введение в общую теорию относительности. Ярославль, Изд-во ЯрГУ, 2010.
- [5] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Конформные калибровки геометрии Бервальда-Моора и индуцированные ими нелинейные симметрии // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, №2 (10), т. 5, 2008, с. 3-14.
- [6] Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. М., Энергоиздат, 1982.
- [7] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973.

- [8] Казанова Г. Векторная алгебра. М., Мир, 1979.
- [9] Ефремов А.П. Кватернионные пространства, системы отсчета и поля. М., РУДН, 2005.
- [10] Кассандров В.В. Кватернионный анализ и алгебродинамика // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (6), том. 3, 2006, с. 58-84.
- [11] Элиович А.А., Санюк В.И. Некоторые аспекты применения полинорм в теории поля // *ТМФ*, 2, том 162, 2010, с. 163-178.
- [12] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа, М., Наука, 1973.
- [13] Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1977.
- [14] Павлов Д.Г., Гарасько Г.И. Двойные числа // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (13), т. 7, 2010, с. 16-25.
- [15] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М., Институт компьютерных исследований, 2002.
- [16] Пайтген Х.О., Рихтер П. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М., Мир, 1993.
- [17] Senn P. The Mandelbrot set for binary numbers // *American Journal of Physics*, V. 58, 1989, p. 1018.
- [18] Metzler W. The "mystery" of the quadratic Mandelbrot set // *American Journal of Physics*, 62 (9), 1994, pp. 813-814.
- [19] Artzy R. Dynamics of quadratic functions in cycle planes // *Journal of Geometry*, V. 44, 1992, pp. 26-32.
- [20] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Малыхин А.В., Панчелюга В.А. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (11), т. 6, 2009, с. 135-145.
- [21] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналога множества Жюлиа при нулевом значении параметра на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (11), т. 6, 2009, с. 146-151.
- [22] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналогов множества Жюлиа на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (12), т. 6, 2009, с. 163-176.
- [23] Ивлев Д.Д. О двойных числах и их функциях // *Сб. Математическое просвещение*. Вып. 6. Под. ред. И.Н. Бронштейна, Ф.Л. Верпаховского, М., 1961, с. 197-203.
- [24] Павлов Д.Г. Обобщение аксиом скалярного произведения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (1), т. 1, 2004, с. 5-19.
- [25] Павлов Д.Г. Хронометрия трехмерного времени // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (1), т. 1, 2004, с. 20-32.
- [26] Павлов Д.Г. Четырехмерное время // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (1), т. 1, 2004, с. 33-42.
- [27] Гарасько Г.И., Павлов Д.Г. Геометрия невырожденных поличисел // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (7), т. 4, 2007, с. 3-25.
- [28] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., Тетру, 2009 — 265с.
- [29] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Аддитивные углы в пространстве  $H_3$  // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (10), т. 5, 2008, с. 25-43.
- [30] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Метрические бинглы и тринглы в  $H_3$  // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (11), т. 6, 2009, с. 42-67.

## HYPERBOLIC THEORY OF FIELD ON THE PLANE OF DOUBLE VARIABLE

D.G. Pavlov<sup>1</sup>, S.S. Kokarev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fрязино, Russia*

<sup>2</sup> *RSEC Logos, Yaroslavl, Russia*

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

By analogy with the theory of harmonic fields on the complex plane the theory of wave fields on the plane of double variable is developed. The hyperbolic analogies of point-like sources, curls, source-curls and their multipoles generalizations are constructed. Some important physical aspects of the theory together with possible generalizations on higher polynumber dimensions are discussed.

**Key Words:** *h*-analytic field, Cauchy-Riemannian conditions, Cauchy formula, hypercomplex potential.

# СКРУЧЕННЫЕ КОГОМОЛОГИИ ГРУПП ОБЕРТОК НАД КВАТЕРНИОНАМИ И ОКТОНИОНАМИ

С.В. Людковский

Московский государственный технический университет МИРЭА, Москва, Россия  
sludkowski@mail.ru

Данная статья посвящена исследованию групп оберток связных расслоений над полем действительных чисел  $\mathbf{R}$ , полем комплексных чисел  $\mathbf{C}$ , телом кватернионов  $\mathbf{H}$  и алгеброй октонионов  $\mathbf{O}$ . Исследуются кохомологии групп оберток и их структура. Строятся и изучаются пучки групп оберток. Более того, изучаются также скрученные кохомологии и пучки над телом кватернионов и алгеброй октонионов.

**Ключевые слова:** скрученные кохомологии, группы оберток, алгебра октонионов, связное расслоение, пучок, сплетающее произведение.

## 1 Введение

Геометрические группы петель окружностей впервые были введены Лефшецем в 1930-х годах, а затем их конструкция была пересмотрена Милнором в 1950-х годах. Лефшец использовал  $C^0$ -равномерность на семействах непрерывных отображений, что приводило к необходимости комбинирования его конструкции со структурой свободной группы с помощью слов. Позднее Милнор использовал соболевскую  $H^1$ -равномерность, что позволило ввести групповую структуру более естественным образом [36].

Построение Лефшеца очень ограничительное, потому что оно работает с  $C^0$ -равномерностью непрерывных отображений в компактно-открытой топологии. Даже для сфер  $S^n$  размерности  $n > 1$  оно не работает прямым образом, а использует итерированные группы петель окружностей. Затем их конструкция была обобщена для расслоений над окружностями и сферами со структурами параллельных переносов над  $\mathbf{C}$ . Гладкие кохомологии Делинье также изучались на таких группах [12].

Группы оберток кватернионных и октонионных расслоений, а также для более широких классов расслоений над  $\mathbf{R}$  или  $\mathbf{C}$  были также определены, даны их примеры и основные теоремы в работе [21]. Изучения их структур были начаты в [22]. Данная статья продолжает предыдущие работы автора на эту тему, где изучались обобщенные группы петель на многообразиях над  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{H}$ , но ни для расслоений и ни над октонионами [23, 31, 29, 30].

Голоморфные функции кватернионных и октонионных переменных изучались в работах [27, 28, 25]. Там рассматривалось специфическое определение супер-дифференцируемости, так как тело кватернионов имеет в некотором смысле градуированную алгебраическую структуру. Это определение супер-дифференцируемости не накладывает условия правой или левой суперлинейности супер-дифференциала, так как это приводит к узкому классу функций. В журналах имеются некоторые статьи о кватернионных многообразиях, но практически они подразумевают комплексные многообразия с дополнительной кватернионной структурой на его касательном пространстве (смотри, например, [38, 52] и ссылки там). Кватернионные многообразия были определены также иным образом в статье [25]. Приложения кватернионов в математике и физике обширны и их можно найти в работах [10, 14, 4, 20].

Геометрические группы петель имеют важные приложения в современных физических теориях (смотри [17, 33] и ссылки там). Группы петель также интенсивно используются в калибровочных теориях. Группы оберток можно использовать в теории мембран, которая является обобщением теории струн (суперструн). Расслоения, пучки и кохомологии над кватернионами и октонионами интересны в том отношении, что они принимают в расчет спиновые и изоспиновые структуры на многообразиях, потому что имеется вложение группы Ли  $U(2)$  в тело кватернионов  $\mathbf{H}$ .

Данная статья посвящена построениям и исследованиям кохомологий и пучков групп оберток. Более того, далее изучаются скрученные кохомологии и пучки над кватернионами и октонионами. Также исследуются скрученные аналоги решетчатых разрешений (bar resolution) пучков и



гладких когомологий. Это делается над скрученными мультипликативными группами. Ранее изучались лишь комплексный случай и с группами петель расслоений на сферах. В данной статье рассматриваются случаи кватернионов и октонионов, и групп оберток общих расслоений.

Основные результаты статьи получены впервые, и они даются в теоремах 34, 36, 44, 48.1, 55, 58, 60, предложениях 6, 14, 15, 19, 26, 27, 29, 32, следствиях 7, 8, 33, 45 и 47. Ниже используются обозначения и определения, и результаты из предыдущих работ [12, 13, 21, 22, 23, 31, 29, 30].

## 2 Когомологии групп оберток

**1. Замечания и определения.** Рассмотрим триангулированный компактный полиэдр  $M$ , который может быть вложен в алгебру Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r^n$ , и его под-полиэдр  $S_M$  коразмерности не менее двух,  $\text{codim}(S_M) \geq 2$ , где  $M \setminus S_M$  — это  $C^\infty$  гладкое многообразие такое, что разность  $M \setminus S_M$  всюду плотна в  $M$ . Если размерность в смысле покрытий (смотри главу 7 в [51]) топологического пространства  $M \setminus S_M$  есть  $\dim(M \setminus S_M) = b$ , то по определению  $M$  имеет размерность  $b$ . Тогда  $S_M$  называется сингулярностью для  $M$ . Псевдо-многообразие  $M$  ориентировано, если  $M \setminus S_M$  ориентировано (смотри также §1.3.1 в [21]).

Если  $M \setminus S_M$  не имеет границы, то триангулированное псевдо-многообразие  $M$  называется циклическим псевдо-многообразием (циклом). Если  $(Y, \partial Y)$  — это пара, состоящая из триангулированного псевдо-многообразия  $Y$  и границы  $\partial Y$  такой, что  $Y \setminus S_Y$  — это многообразие с границей  $\partial Y \setminus S_Y$ ,  $\partial Y$  — это циклическое псевдо-многообразие с сингулярностью  $S_Y \cap \partial Y$ , то  $(Y, \partial Y)$  называется триангулированным псевдо-многообразием с границей.

Предпучок  $F$  на топологическом пространстве  $X$  есть контравариантный функтор  $F$  из категории открытых подмножеств в  $X$  и их включений в категорию групп или колец (все они или альтернативны или ассоциативны), так что  $F(U)$  — это группа или кольцо для любого  $U$  открытого в  $X$  и для любого  $U \subset V$  с  $U$  и  $V$  открытыми в  $X$ , существует гомоморфизм  $s_{U,V} : F(V) \rightarrow F(U)$  такой, что  $s_{U,U} = 1$  и  $s_{U,V} s_{V,Y} = s_{U,Y}$  для любого  $U \subset V \subset Y$  с подмножествами  $U, V, Y$  открытыми в  $X$ .

Пусть  $\mathcal{F}_x$  обозначает семейство всех элементов  $f \in F(U)$  для подмножества  $U$  открытого в  $X$  с  $x \in U$ . Элементы  $f \in F(U)$  и  $g \in F(V)$  называются эквивалентными, если существует открытая окрестность  $Y$  точки  $x$  такая, что  $s_{Y,U}(f) = s_{Y,V}(g)$ . Это порождает отношение эквивалентности. Класс всех эквивалентных элементов с  $f$  называется ростком  $f_x$  для  $f$  в точке  $x$ . Множество  $\mathcal{F}_x$  всех ростков предпучка  $F$  в точке  $x \in X$  является индуктивным пределом  $\mathcal{F}_x = \text{ind} - \lim F(U)$  взятым по всем окрестностям  $U$  точки  $x$  в  $X$ .

В множестве  $\mathcal{F}$  всех ростков  $\mathcal{F}_x$  возьмем базу топологии, состоящую из всех множеств  $\{f_x \in \mathcal{F}_x : x \in U\}$ , где  $f \in F(U)$ . Это индуцирует пучок  $\mathcal{S}$ , порожденный предпучком  $F$ .

Пучок групп или колец (все они или альтернативны, или ассоциативны) на  $X$  — это пара  $(\mathcal{S}, h)$ , удовлетворяющая условиям (S1 – S4):

(S1)  $\mathcal{S}$  есть топологическое пространство;

(S2)  $h : \mathcal{S} \rightarrow X$  — это локальный гомеоморфизм;

(S3) для любой точки  $x \in X$  множество  $\mathcal{F}_x = h^{-1}(x)$  есть группа называемая слоем пучка  $\mathcal{S}$  в точке  $x$ ;

(S4) групповые или кольцевые операции непрерывны, то есть,  $\mathcal{S}\Delta\mathcal{S} \ni (a, b) \mapsto ab^{-1} \in \mathcal{S}$  или  $\mathcal{S}\Delta\mathcal{S} \ni (a, b) \mapsto ab \in \mathcal{S}$ , и  $\mathcal{S}\Delta\mathcal{S} \ni (a, b) \mapsto a + b \in \mathcal{S}$  непрерывны соответственно, где  $\mathcal{S}\Delta\mathcal{S} := \{(a, b) : a, b \in \mathcal{S}, h(a) = h(b)\}$ .

Мы можем рассмотреть предпучки или пучки различных классов гладкости, например,  $H^t$  или  $H_p^t$ , когда соответствующие определяющие пучок или предпучок отображения  $s_{U,V}$ ,  $h$  и групповые операции таковы, а  $\mathcal{S}$  и  $F$  являются  $H^t$  или  $H_p^t$  дифференцируемыми пространствами соответственно (смотри также §1.3.2 [21]).

Рассмотрим пучок  $\mathcal{S}_{N,G}$  порожденный предпучком  $U \mapsto \{f \in \text{Hom}_p^t((W^M E)_{t,H}, G) : \text{supp}(f) \subset U\}$ , где  $U$  — открыто в  $N$  и  $\text{supp}(f) \subset U$  означает, что существует точка  $y \in N$  и  $\hat{\eta} \in H_p^t(\hat{M}, N)$  с  $\hat{\eta}(\hat{s}_{0,q}) = x$  для любого  $q = 1, \dots, k$  и  $\hat{\eta}(\hat{s}_{0,q}) = y$  для всякого  $q = k + 1, \dots, 2k$  и  $\hat{\gamma} \in H_p^t(\hat{M}, \{\hat{s}_{0,q} : q = 1, \dots, 2k\}; N, y)$ , так что  $\hat{\gamma} = \gamma \circ \Xi$  и  $f = \langle \hat{\eta} \vee \hat{\gamma} \rangle_{t,H}$ , где группа оберток  $(W^M E)_{t,H}$  берется для отмеченной точки  $y \in N$ ,  $\Xi : \hat{M} \rightarrow M$  — это факторное отображение как в [21].

В частности, мы можем взять  $G = \mathcal{A}_r^*$  и назвать  $\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r^*}$  пучком инфинитезимальных голономий, где  $1 \leq r \leq 3$ .

В силу свойства (P4) [21] для любых несингулярных точек  $y \in N$  и  $u \in E_y$  в слое  $E_y$  в  $E$  над  $y$  существует  $\mathcal{A}_r$  векторное подпространство  $H_u$  касательного расслоения  $T_u E$  в точке  $u$  называемое горизонтальным подпространством для  $T_u E$ , так что  $\pi_*|_{H_u} : H_u \rightarrow T_y N$  есть изоморфизм, где  $\pi(u) = y$ ,  $t' \geq [\dim(E)/2] + 2$  или  $t' = \infty$ , так как существуют обобщенные производные в соболевском пространстве  $H^{t'}$  (смотри §III.3 в [34]). Это имеет место для всех  $y \in N$  и  $u \in E_y$ , когда  $N$  и  $E$  принадлежат классу гладкости  $H^{t'}$  вместо  $H_p^{t'}$ .

В силу (P1) семейство  $\{H_u\}$  горизонтальных подпространств в  $TE$  гладко зависит от  $u$ . Предположим, что  $Y$  — это векторное поле в  $TE$  соответствующее векторному полю  $X$  в  $TN$  такому, что  $\pi_*(Y) = X$ , тогда

(CD1)  $T_u E = H_u \oplus V_u$ , где  $V_u = \pi_*^{-1}(0) \subset T_u E$  — это пространство векторов касательных к  $E_u$  в точке  $u$ . Согласно условию (P3) горизонтальные пространства являются  $G$ -эквивариантными, то есть,

(CD2)  $H_{uz} = (R_z)_* H_u$ , где  $R_z$  — это диффеоморфизм для  $E$  даваемый умножением на  $z$  справа, а  $(R_z)_*$  соответствует касательному отображению  $TR_z$  касательного расслоения  $TE$ .

Семейство  $H = \{H_u \subset T_u E : u \in E, \pi(u) = y \in N\}$  называется связывающим распределением (connection distribution) главного расслоения  $E(N, G, \pi, \Psi)$ , если  $H_u$  гладко зависит от  $u$  и выполнены условия (CD1, CD2).

**2. Определения и замечания.** Два гладких главных  $G$  расслоения  $E$  и  $E'$  со связывающими распределениями  $(E, H)$  и  $(E', H')$  называются изоморфными, если существует изоморфизм  $f : E \rightarrow E'$  гладких главных  $G$  расслоений  $f : E \rightarrow E'$  такой, что  $f_*(H) = H'$ .

Связывающее распределение  $H$  на  $E$  называется структурой параллельного переноса  $\mathbf{P}^H$  на  $E$  сопоставляющим  $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}^H \in H_p^t(\hat{M}, E)$  с  $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}^H(\hat{s}_{0, q}) = u$  для любых  $q = 1, \dots, k$  и  $\pi \circ \mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}^H = \hat{\gamma}$ , так что  $T_x \mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}^H =: (\mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}^H(x), D\mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}^H(x))$  для всякого  $x \in \hat{M}$ , где  $\hat{\gamma} \in H_p^t(\hat{M}, \{\hat{s}_{0, q} : q = 1, \dots, 2k\}; N, y_0)$ ,  $D\mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}^H(x) \in H_{\hat{\gamma}(x)}$ ,  $T\mathbf{P}$  — это касательное отображение для  $\mathbf{P}$  (смотри [19]).

Таким образом, существует биективное соответствие между структурами параллельных переносов и связывающими распределениями на  $E$ . Поэтому отображение  $H \mapsto \mathbf{P}^H$  индуцирует биективное соответствие между классами изоморфных структур параллельных переносов и связывающими распределениями.

Использование экспоненциальной функции на алгебре Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$  дает  $\exp(\mathcal{A}_r) = \mathcal{A}_r^*$  для любого  $1 \leq r \leq 2$  мультипликативную группу или квази-группу при  $r = 3$  (альтернативную вместо ассоциативной, смотри §3 [27, 28]).

Если  $E$  — это главное  $\mathcal{A}_r^*$  расслоение с  $1 \leq r \leq 3$ , тогда для любого  $v \in V_u$  существует и единственное  $z(v) \in \mathcal{A}_r$  такое, что  $v = [d(y \exp(b z(v)))/db]_{b=0}$ , где  $b \in \mathbf{R}$ . Поэтому для любого связывающего распределения  $\{H_u : u \in E\}$  на  $E$  существует дифференциальная 1-формы  $w$  над  $\mathcal{A}_r$ , так что  $w(X_h + X_v) = z(X_v)$  для любого  $X = X_h + X_v \in H_u \oplus V_u = T_u E$  и  $w$  является  $G$ -эквивариантной:  $(R_z)^* w = w$  благодаря  $G$ -эквивариантности  $\{H_u : u \in E\}$ , здесь  $G = \mathcal{A}_r^*$ .

Дифференциальная 1-форма  $w$  на  $E$  такая, что она является  $G$ -эквивариантной и  $w(X_v) = z(X_v)$  для любого  $X_v \in V_u$  называется связывающей 1-формой.

Два гладких главных  $G$  расслоения со связностями  $(E, w)$  и  $(E', w')$  называются изоморфными, если существует изоморфизм  $f : E \rightarrow E'$  гладких главных  $G$  расслоений такой, что  $f^*(w') = w$ .

Для  $w$  существует связывающее распределение  $H^w$  на  $E$ , для которого  $H_u^w = \ker(w_u) \subset T_u E$ , что индуцирует биективное соответствие между дифференциальными 1-формами и связывающими распределениями на  $E$ . Следовательно,  $w \mapsto H^w$  дает биективное соответствие между классами связностей и связывающих распределений.

Тогда существует группа оберток  $(W^M E; N, \mathcal{A}_r^*, \nabla)_{t, H}$ , где структура параллельного переноса  $\mathbf{P}$  ассоциирована с ковариантным дифференцированием  $\nabla$  связности  $w$ .

2-Форма кривизны  $\Omega$  над алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$ ,  $1 \leq r \leq 3$ , 1-формы связности  $w$  на гладком главном расслоении  $E(N, G, \pi, \Psi)$  над  $\mathcal{A}_r$  дается формулой  $\Omega(X, Y) = dw(hX, hY)$ , где  $hX$  и  $hY$  — это горизонтальные компоненты векторов  $X$  и  $Y$ .

**3. Замечание.** Если  $\eta \in H_p^t(K, E)$ ,  $t \geq 1$ , и  $\nu$  — это дифференциальная форма на  $E$ , то существует ее ограничение  $\eta^*\nu$ , который является дифференциальной формой на  $K$ , где  $K$  — это  $H_p^t$  — псевдо-многообразие. Для ориентируемых  $K$  и  $E$  и  $H_p^t$  диффеоморфизма  $\eta$  из  $K$  на  $E$  и  $\nu$  с компактным носителем выполняется равенство  $\int_K \eta^*\nu = \epsilon \int_E \nu$ , где  $\epsilon = 1$  при  $\eta$  сохраняющем ориентацию,  $\epsilon = -1$  при  $\eta$  изменяющем ориентацию (смотри [6, 15, 25]). В частности, можно рассматривать  $K = E(M, G, \pi_M, \Psi^M)$ ,  $\eta = (\eta_0, \eta_1)$ ,  $\eta_0 : M \rightarrow N$ ,  $\eta : E(M) \rightarrow E(N)$ ,  $\pi_N \circ \eta = \eta_0 \circ \pi_M$ ,  $\eta_1 \circ pr_2 = pr_2 \circ \eta$ ,  $pr_2$  есть проекция на карты для  $E$  из  $E$  в  $G$ ,  $\eta_1 = id$  может также быть.

Предположим, что  $M$  и  $E$  являются  $\mathcal{A}_r$  голоморфным многообразием и главным расслоением, так что  $E$  ориентируемо и  $2^r - 1$ -связно, что не является очень ограничительным в силу предложения 13 и замечания 14 [22]. Если  $\hat{\gamma} \in H_p^t(\hat{M}, \{\hat{s}_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; N, y_0)$ , то рассмотрим путь  $l_q$  соединяющий точку  $\hat{s}_{0,q}$  с  $\hat{s}_{0,q+k}$ , где  $1 \leq q \leq k$ ,  $\hat{l}_q : [0, 1] \rightarrow \hat{M}$ . Поэтому  $\hat{p}_q := \hat{\gamma} \circ \hat{l}_q : [0, 1] \rightarrow N$  и  $\hat{p}_q^*w := (\hat{p}_q, id)^*w$  — это дифференциальная форма на  $[0, 1]$ , где  $w$  есть  $\mathcal{A}_r$  голоморфная один-форма связности на  $E$ . Мы получаем, что  $\hat{\gamma}^*w$  — это дифференциальная один-форма на  $\hat{M}$  и существует ее ограничение  $\nu_{\gamma,q} := \gamma^*w|_{\hat{l}_q[0,1]}$ .

Тогда мы также имеем  $\gamma \in H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; N, y_0)$  и  $l_q : S^1 \rightarrow M$  и  $p_q : S^1 \rightarrow N$  соответственно, где  $\hat{\gamma} = \gamma \circ \Xi$  (смотри [21]),  $S^1$  — это единичная окружность в  $\mathbf{C}$  с центром в нуле, в то время как комплексное поле  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_M$  вложено в алгебру Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$  как  $\mathbf{R} \oplus M\mathbf{R}$  с чисто мнимым  $M \in \mathcal{A}_r$ ,  $Re(M) = 0$ ,  $|M| = 1$ , когда  $2 \leq r \leq 3$ .

Поскольку форма  $w$  является  $\mathcal{A}_r$  голоморфной, то интеграл  $\int_\phi w$  не зависит от спрямляемой кривой  $\phi$ , но лишь от начальной и конечной точек  $\phi(0)$  и  $\phi(1)$ ,  $\phi : [0, 1] \rightarrow E$  (смотри теоремы 2.15 и 3.10 в [27, 28] и [30]).

Рассмотрим теперь главное расслоение  $E$  со структурной группой  $\mathcal{A}_r^*$ , где  $1 \leq r \leq 3$ . Тогда ограничение  $p_q^*E$  расслоения  $E$  есть тривиальное  $\mathcal{A}_r^*$ -расслоение над окружностью  $S^1$ . Последнее расслоение несет ограничение дифференциальной один-формы связности  $p_q^*w$ . Возьмем ограничение,  $\rho^*(p_q^*w)$  — это один-форма, где  $\rho : S^1 \rightarrow p_q^*E$  — это тривиализация расслоения  $p_q^*E \rightarrow S^1$ .

Структура параллельного переноса  $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(x)$  для  $(M, E)$  с  $x \in \hat{M}$  индуцирует структуры параллельных переносов  $\mathbf{P}_{\hat{p}_q,u^*}(s)$  для  $(S^1, p_q^*E)$  с  $s \in [0, 1]$  для любого  $q = 1, \dots, k$ , где  $p_q(u^*) = u$ . Тогда голономия вдоль  $\gamma$  дается формулой

$$(H) h(\gamma) = (h_1, \dots, h_k) \in G^k \text{ с } h_q = h_q(\gamma) = \exp[-\int_{S^1} \rho^*(p_q^*w)] \text{ для любого } q = 1, \dots, k.$$

Если  $\zeta : S^1 \rightarrow p_q^*E$  — это другая тривиализация и  $f : S^1 \rightarrow \mathbf{C}_M^*$  удовлетворяет условию  $\zeta = f\rho$ , так что  $f(v) = \exp(M2\pi\theta(v))$ , где  $\theta(v) \in \mathbf{R}$ ,  $M2\pi d\theta(v) = dLn(f(v))$ ,  $v \in S^1$ ,  $\int_{S^1} d\theta$  — это целое число, так как вещественное поле  $\mathbf{R}$  есть центр алгебры Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$ , где  $Ln$  — это функция натурального логарифма над  $\mathcal{A}_r$  (смотри §3.7 и теорема 3.8.3 [28] и [27, 32]). Поэтому формула (H) не зависит от тривиализации  $\rho$ , так как  $\zeta^*(p_q^*w) = \rho^*(p_q^*w) + dLn(f)$ , но  $\exp[\int_{S^1} dLn(f)] = 1$ .

**4. Неассоциативная решетчатая конструкция.** Пусть  $G$  — это топологическая группа не обязательно ассоциативная, но альтернативная (квази-группа):

$$(A1) g(gf) = (gg)f \text{ и } (fg)g = f(gg) \text{ и } g^{-1}(gf) = f \text{ и } (fg)g^{-1} = f \text{ для любых } f, g \in G,$$

и снабженная операцией сопряжения, которая является непрерывным автоморфизмом группы  $G$ , так что

$$(C1) conj(gf) = conj(f)conj(g) \text{ для любых } g, f \in G,$$

$$(C2) conj(e) = e \text{ для единичного элемента } e \text{ в } G.$$

Если  $G$  имеет определенный класс гладкости, например,  $H_p^t$  дифференцируема, то операция сопряжения  $conj$  предполагается принадлежащей этому же классу гладкости. Для коммутативной группы, в частности, тождественное отображение можно взять в качестве сопряжения. Для мультипликативной группы  $G = \mathcal{A}_r^*$  можно взять  $conj(z) = \tilde{z}$  обычное сопряжение для любого  $z \in \mathcal{A}_r^*$ , где  $1 \leq r \leq 3$ .

Обозначим через  $\Delta^n := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} : x_j \geq 0, x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1\}$  стандартный симплекс в евклидовом пространстве  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Рассмотрим  $(AG)_n$  как факторпространство дизъюнктного объединения  $\bigcup_{k=0}^n (\Delta^k \times G^{k+1})$  по отношениям эквивалентности

$$(1) (x_0, \dots, x_k, g_0, \dots, g_k) \sim (x_0, \dots, x_j + x_{j+1}, \dots, x_k, g_0, \dots, \hat{g}_j, \dots, g_k) \text{ для } g_j = g_{j+1} \text{ или } x_j = 0 \text{ с}$$

$$0 \leq j < k; (x_0, \dots, x_k, g_0, \dots, g_k) \sim (x_0, \dots, x_{k-1} + x_k, g_0, \dots, g_{k-1}) \text{ для } g_{k-1} = g_k \text{ или } x_k = 0.$$

Рассмотрим негомогенные координаты  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq 1$  на симплексе  $\Delta^k$  связанные

с барицентрическими координатами формулой  $t_j = x_0 + x_1 + \dots + x_{j-1}$  и  $h_0 := g_0$ ,  $h_j = g_{j-1}^{-1}g_j$  при  $j > 0$  на  $G^{k+1}$ . Итак,  $h_0h_1 = g_0(g_0^{-1}g_1) = g_1$ ,  $(h_0h_1)h_2 = g_1(g_1^{-1}g_2) = g_2$  и по индукции  $((\dots(h_0h_1)\dots)h_{k-1})h_k = g_{k-1}(g_{k-1}^{-1}g_k) = g_k$ .

Тогда отношения эквивалентности (1) приобретают вид:

$$(2) (t_1, \dots, t_k, h_0[h_1|\dots|h_k]) \sim (t_2, \dots, t_k, (h_0h_1)[h_2|\dots|h_k]) \text{ при } t_1 = 0 \text{ или } h_0 = e;$$

$$(t_1, \dots, t_k, h_0[h_1|\dots|h_k]) \sim (t_1, \dots, \hat{t}_j, \dots, t_k, h_0[h_1|\dots|h_jh_{j+1}|\dots|h_k]) \text{ при } t_j = t_{j+1} \text{ или } h_j = e;$$

$$(t_1, \dots, t_k, h_0[h_1|\dots|h_k]) \sim (t_1, \dots, t_{k-1}, h_0[h_1|\dots|h_{k-1}]) \text{ при } t_k = 1 \text{ или } h_k = e.$$

Обозначим через  $|x_0, \dots, x_k, g_0, \dots, g_k|$  класс эквивалентности последовательности  $(x_0, \dots, x_k, g_0, \dots, g_k)$ ; посредством  $|t_1, \dots, t_k, h_0[h_1|\dots|h_k]|$  мы обозначим класс эквивалентности последовательности  $(t_1, \dots, t_k, h_0[h_1|\dots|h_k])$ .

Тогда пространство  $AG$  есть факторпространство для  $\bigcup_{k=0}^{\infty} \Delta^k \times G^{k+1}$  по указанным выше отношениям эквивалентности (1), где  $(\Delta^k \times G^{k+1}) \cap (\Delta^m \times G^{m+1})$  пусто при  $k \neq m$ .

Мы введем в  $G^{n+1}$  отношение эквивалентности  $\mathcal{Y}$ :

(3)  $(g_0, \dots, g_n)\mathcal{Y}(q_0, \dots, q_n)$  тогда и только тогда, когда существуют  $p_1, \dots, p_k \in G$  с  $k \in \mathbf{N}$ , так что  $g_j = p_k(p_{k-1} \dots (p_2(p_1q_j)) \dots)$  для любого  $j = 0, \dots, n$ .

Очевидно, что это отношение рефлексивно:  $(g_0, \dots, g_n)\mathcal{Y}(g_0, \dots, g_n)$  с  $p_1 = e$  и  $k = 1$ . Оно симметрично в силу альтернативности (квази-)группы  $G$ , так как  $g_j = p_k(p_{k-1} \dots (p_2(p_1q_j)) \dots)$  эквивалентно с  $q_j = p_1^{-1}(p_2^{-1} \dots (p_{k-1}^{-1}(p_k^{-1}g_j)) \dots)$  для любого  $j = 0, \dots, n$ . Это отношение транзитивно:  $(g_0, \dots, g_n)\mathcal{Y}(q_0, \dots, q_n)$  и  $(q_0, \dots, q_n)\mathcal{Y}(f_0, \dots, f_n)$  влечет  $(g_0, \dots, g_n)\mathcal{Y}(f_0, \dots, f_n)$ , так как из  $g_j = p_k(p_{k-1} \dots (p_2(p_1q_j)) \dots)$  и  $q_j = s_l(s_{l-1} \dots (s_2(s_1f_j)) \dots)$  вытекает, что  $g_j = p_k(p_{k-1} \dots (p_2(p_1(s_l(s_{l-1} \dots (s_2(s_1f_j)) \dots)))) \dots)$  для любого  $j = 0, \dots, n$ , где  $k, l \in \mathbf{N}$ ,  $p_1, \dots, p_k, s_1, \dots, s_l \in G$ . В частном случае ассоциативной группы  $G$  можно взять параметры  $k = 1$  и  $l = 1$ .

Рассмотрим в  $\bigcup_{k=0}^n \Delta^k \times G^k$  отношения эквивалентности:

(4)  $(x_0, \dots, x_k, [g_0 : \dots : g_k]) \sim (x_0, \dots, x_j + x_{j+1}, \dots, x_k, [g_0 : \dots : \hat{g}_j : \dots : g_k])$  при  $g_j = g_{j+1}$  или  $x_j = 0$  с  $0 \leq j < k$ ;  $(x_0, \dots, x_k, [g_0 : \dots : g_k]) \sim (x_0, \dots, x_{k-1} + x_k, [g_0 : \dots : g_{k-1}])$  при  $g_{k-1} = g_k$  или  $x_k = 0$ , где  $[g_0 : \dots : g_k] := \{(q_0, \dots, q_k) \in G^{k+1} : (q_0, \dots, q_k)\mathcal{Y}(g_0, \dots, g_k)\}$  обозначает класс эквивалентности для  $(g_0, \dots, g_k)$  по отношению эквивалентности  $\mathcal{Y}$ . Положим  $(BG)_n$  равным факторпространству для  $\bigcup_{k=0}^n \Delta^k \times G^k$  по отношениям эквивалентности (4).

Используя негомогенные координаты на  $(BG)_n$ , мы перепишем отношение эквивалентности (4) в виде:

$$(5) (t_1, \dots, t_k, [h_1|\dots|h_k]) \sim (t_2, \dots, t_k, [h_2|\dots|h_k]) \text{ при } t_1 = 0 \text{ или } h_0 = e;$$

$$(t_1, \dots, t_k, [h_1|\dots|h_k]) \sim (t_1, \dots, \hat{t}_j, \dots, t_k, [h_1|\dots|h_jh_{j+1}|\dots|h_k]) \text{ при } t_j = t_{j+1} \text{ или } h_j = e;$$

$$(t_1, \dots, t_k, [h_1|\dots|h_k]) \sim (t_1, \dots, t_{k-1}, [h_1|\dots|h_{k-1}]) \text{ при } t_k = 1 \text{ или } h_k = e.$$

Обозначим через  $|x_0, \dots, x_k, [g_0 : \dots : g_k]|$  класс эквивалентности последовательности  $(x_0, \dots, x_k, [g_0 : \dots : g_k])$ ; через  $|t_1, \dots, t_k, [h_1|\dots|h_k]|$  обозначим класс эквивалентности последовательности  $(t_1, \dots, t_k, [h_1|\dots|h_k])$ . Тогда  $BG$  есть факторпространство дизъюнктного объединения  $\bigcup_{k=0}^{\infty} \Delta^k \times G^k$  по отношениям эквивалентности (4).

Тогда существует проекция  $\pi_B^A : AG \rightarrow BG$  по формуле:

$$(6) \pi_B^A : |x_0, \dots, x_k, g_0, \dots, g_k| \mapsto |x_0, \dots, x_k, [g_0 : \dots : g_k]|,$$

или в негомогенных координатах она приобретает вид:

$$\pi_B^A : |t_1, \dots, t_k, h_0[h_1|\dots|h_k]| \mapsto |t_1, \dots, t_k, [h_1|\dots|h_k]|.$$

Сопряжение в  $G$  индуцирует сопряжения в  $AG$  и  $BG$ , так что:

$$\text{conj}(t_1, \dots, t_k, h_0[h_1|\dots|h_k]) := (t_1, \dots, t_k, \text{conj}(h_0)[\text{conj}(h_1)|\dots|\text{conj}(h_k)]) \text{ и}$$

$$\text{conj}(t_1, \dots, t_k, [h_1|\dots|h_k]) := (t_1, \dots, t_k, [\text{conj}(h_1)|\dots|\text{conj}(h_k)]).$$

Предположим, что

(A2)  $\hat{G} = \hat{G}_0i_0 \oplus \hat{G}_1i_1 \oplus \dots \oplus \hat{G}_{2r-1}i_{2r-1}$ , так что  $G$  — это мультипликативная группа кольца  $\hat{G}$  с мультипликативной групповой структурой, где  $G_j = \hat{G}_j \setminus \{0\}$ ,  $\hat{G}_0, \dots, \hat{G}_{2r-1}$  являются попарно изоморфными коммутативными ассоциативными кольцами, и  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$  — это генераторы алгебры Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$ ,  $1 \leq r \leq 3$  и  $(y_l i_l)(y_s i_s) = (y_l y_s)(i_l i_s)$  есть естественное умножение любых чистых состояний в  $\hat{G}$  при  $y_l \in \hat{G}_l$ . Если группа  $G$  и кольцо  $\hat{G}$  удовлетворяют условиям (A1, A2, C1, C2), то мы назовем их скрученной группой и скрученным кольцом над множеством генераторов  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$ , где  $1 \leq r \leq 3$ . Единичный элемент в  $G$  мы обозначим  $e$ . Например,  $G = (\mathcal{A}_r^*)^n$  и  $\hat{G} = \mathcal{A}_r^n$ .

**5. Определения.** Пусть  $N$  — это семейство  $\{N_n : n \in \mathbf{N}\}$  или  $C^\infty$  гладких, или  $H_p^{t'}$  многообразий вместе с или  $C^\infty$ , или  $H_p^{t'}$  отображениями  $\partial_j : N_n \rightarrow N_{n-1}$  и  $s_j : N_n \rightarrow N_{n+1}$  для любого  $j = 0, 1, \dots, n$  удовлетворяющими тождествам:

$$(1) \partial_k \partial_j = \partial_{j-1} \partial_k \text{ для любого } k < j,$$

$$(2) s_k s_j = s_{j+1} s_k \text{ для любого } k \leq j,$$

(3)  $\partial_k s_j = s_{j-1} \partial_k$  при  $k < j$ ,  $\partial_k s_j = id|_{N_n}$  при  $k = j, j + 1$ ,  $\partial_k s_j = s_j \partial_{k-1}$  при  $k > j + 1$ , тогда  $N$  называется симплицальным или  $C^\infty$  гладким, или  $H_p^{t'}$  многообразием.

Геометрическая реализация для  $|N|$  или  $N$  состоит из  $\coprod_{n \geq 0} \Delta^n \times N_n / \mathcal{E}$ , где  $\mathcal{E}$  есть отношение эквивалентности порожденное  $(\partial^j x, y) \mathcal{E}(x, \partial_j y)$  при  $(x, y) \in \Delta^{n-1} \times N_n$ ,  $(s^j x, y) \mathcal{E}(x, s_j y)$  при  $(x, y) \in \Delta^{n+1} \times N_n$ , где  $\coprod$  обозначает дизъюнктное объединение множеств, отображения  $\partial^j : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  и  $s^j : \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n$  таковы, что  $\partial^j(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-1})$  и  $s^j(x_0, \dots, x_{n+1}) = (x_0, \dots, x_{j-1}, x_j + x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{n+1})$  в барицентрических координатах.

$C^\infty$  или  $H_p^{t'}$  пространственная структура на геометрической реализации  $|N|$  или  $N$  состоит из всех непрерывных  $C^\infty$   $\mathbf{R}$ -значных или  $H_p^{t'}$   $\mathcal{A}_r$  значных функциях  $f$  на  $|N|$  соответственно, то есть с композицией  $\coprod_{n \geq 0} (\Delta^n - \partial \Delta^n) \times N_n \hookrightarrow \coprod_{n \geq 0} \Delta^n \times N_n \xrightarrow{q} |N| \xrightarrow{f} \mathcal{A}_r$  класса гладкости  $C^\infty$  или  $H_p^{t'}$ , где  $q$  обозначает факторное отображение,  $r = 0$  или  $1 \leq r \leq 3$  соответственно,  $\mathcal{A}_0 = \mathbf{R}$ ,  $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}$ ,  $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$ ,  $\mathcal{A}_3 = \mathbf{O}$ .

**6. Предложение.** Если группа  $G$  удовлетворяет условиям 4( $A_1, A_2, C_1, C_2$ ), тогда множества  $AG$  и  $BG$  можно снабдить групповыми структурами, и они скручены при  $2 \leq r \leq 3$ . Если  $G$  — это топологическая Хаусдорфова или  $H_p^t$  дифференцируемая альтернативная при  $r = 3$  или ассоциативная при  $0 \leq r \leq 2$  группа, то  $AG$  и  $BG$  — это топологические Хаусдорфовы  $C^\infty$  или  $H_p^t$  дифференцируемые альтернативные при  $r = 3$  или ассоциативные при  $0 \leq r \leq 2$  группы соответственно.

**Доказательство.** Мы определим на  $AG$  и  $BG$  групповые структуры. Введем гомеоморфизм спаривания:  $\Delta^n \times \Delta^k \rightarrow \Delta^{n+k}$ , где  $\sigma$  — это перестановка множества  $\{1, 2, \dots, n + m + 1\}$ , так что  $t_{\sigma(1)} \leq t_{\sigma(2)} \leq \dots \leq t_{\sigma(n+k+1)}$ ,  $\sigma \in S_{n+k+1}$ ,  $S_m$  обозначает симметрическую группу всех перестановок множества  $\{1, \dots, m\}$ . Мы зададим умножение чистых состояний в  $AG$ :

$$(1) |t_1, \dots, t_n, h_0[h_1|\dots|h_n]| * |t_{n+1}, \dots, t_{n+k+1}, h_{n+k+2}[h_{n+1}|\dots|h_{n+k+1}]| := |t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n+k+1)}, (-1)^{q(\sigma)}(h_0 h_{n+k+2})[h_{\sigma(1)}|\dots|h_{\sigma(n+k+1)}]|,$$

где  $h_l = y_l i_{j(l)}$ ,  $y_l \in G_{j(l)}$  для любого  $l = 0, \dots, 2^r - 1$ ,  $q(\sigma) \in \mathbf{Z}$  таково, что  $(-1)^{q(\sigma)} i_{j(0)}(i_{j(1)} \dots (i_{j(n+k+1)} i_{j(n+k+2)})) \dots = (i_{j(\sigma(0))} i_{j(\sigma(n+k+2))}) (i_{j(\sigma(1))} \dots (i_{j(\sigma(n+k))} i_{j(\sigma(n+k+1))})) \dots$  в  $\mathcal{A}_r$ ; в то время как в  $BG$ :

$$(2) |t_1, \dots, t_n, [h_1|\dots|h_n]| * |t_{n+1}, \dots, t_{n+k+1}, [h_{n+1}|\dots|h_{n+k+1}]| := |t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n+k+1)}, (-1)^{p(\sigma)}[h_{\sigma(1)}|\dots|h_{\sigma(n+k+1)}]|,$$

где  $h_l = y_l i_{j(l)}$ ,  $y_l \in G_{j(l)}$ ,  $p(\sigma) \in \mathbf{Z}$  таково, что  $(-1)^{p(\sigma)} i_{j(1)}(i_{j(2)} \dots (i_{j(n+k)} i_{j(n+k+1)})) \dots = i_{j(\sigma(1))} (i_{j(\sigma(2))} \dots (i_{j(\sigma(n+k))} i_{j(\sigma(n+k+1))})) \dots$  в  $\mathcal{A}_r$ .

Определим также сложение в  $\hat{AG}$ :

$$(1') |t_1, \dots, t_n, h_0[h_1|\dots|h_n]| + |t_{n+1}, \dots, t_{n+k+1}, h_{n+k+2}[h_{n+1}|\dots|h_{n+k+1}]| := |t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n+k+1)}, (-1)^{q(\sigma)}(h_0 + h_{n+k+2})[h_{\sigma(1)}|\dots|h_{\sigma(n+k+1)}]|$$

с  $j(0) = j(n + k + 2)$ ; а также сложение в  $\hat{BG}$ :

$$(2') |t_1, \dots, t_n, [h_1|\dots|h_n]| + |t_{n+1}, \dots, t_{n+k+1}, [h_{n+1}, \dots, h_{n+k+1}]| = |t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n+k+1)}, (-1)^{p(\sigma)}[h_{\sigma(1)}|\dots|h_{\sigma(n+k+1)}]|$$

для чистых состояний  $h_l = y_l i_{j(l)}$ ,  $y_l \in \hat{G}_l$  для любого  $l = 0, \dots, 2^r - 1$ . Умножения (1, 2) продолжатся на кольца естественным образом, когда некоторые чистые состояния нулевые, следовательно, благодаря дистрибутивности также на все кольцо.

Поскольку  $\hat{G}$  — это кольцо, то эти умножения имеют единственные продолжения на  $AG$  и  $BG$ . Проверим, что  $AG$  и  $BG$  становятся группами с умножениями (1) и (2) соответственно.

Благодаря (1, 2) мы получим

(3)  $v * conj(v) = |t_1, \dots, t_k, (h_0 conj(h_0))[(h_1 conj(h_1))|\dots|(h_k conj(h_k))]|$  для любого  $v = |t_1, \dots, t_k, h_0[h_1|\dots|h_k]|$  в  $AG$ , причем  $w * conj(w) = |t_1, \dots, t_k, [(h_1 conj(h_1))|\dots|(h_k conj(h_k))]|$  для любого  $w = |t_1, \dots, t_k, [h_1|\dots|h_k]|$  в  $BG$ , где  $h conj(h) \in \hat{G}_0$  для любого  $h \in G$ , но  $\hat{G}_0$  есть центр кольца

$\hat{G}$ :  $ab = ba$  для любого  $a \in \hat{G}_0$  и  $b \in \hat{G}$ . Тождества Муфанга (Moufang) в алгебре октонионов  $\mathcal{A}_r$  при  $r = 3$  (смотри [16]) индуцируют их в  $G$ , так что

- (4)  $(xyx)z = x(y(xz))$  и  $(x^{-1}yx)z = x^{-1}(y(xz))$ ;
- (5)  $z(xy) = ((zx)y)x$  и  $z(x^{-1}y) = ((zx^{-1})y)x$ ;
- (6)  $(xy)(zx) = x(yz)x$  и  $(x^{-1}y)(zx) = x^{-1}(zy)x$ , так как
- (7)  $x^{-1} = \text{conj}(x)(x \text{ conj}(x))^{-1}$ ,

где  $(x \text{ conj}(x)) \in G_0$ .

Единичным элементом в  $AG$  является

$e := \{|t_1, \dots, t_k, e[e|\dots|e]| \in (AG)_k : k = 0, 1, \dots\}$ , где  $i_0 = 1$ , так как

$$|t_1, \dots, t_n, h_0[h_1|\dots|h_n]| * |t_{n+1}, \dots, t_{n+k+1}, e[e|\dots|e]| =$$

$|t_{n+1}, \dots, t_{n+k+1}, e[e|\dots|e]| * |t_1, \dots, t_n, h_0[h_1|\dots|h_n]| = |t_1, \dots, t_n, h_0[h_1|\dots|h_n]|$  благодаря отношениям эквивалентности 4(2),  $(1, \dots, 1, e[e|\dots|e]) \in |t_1, \dots, t_k, e[e|\dots|e]|$ .

Кольцо  $\hat{G}$  является  $\mathbf{Z}_2$  градуированным в смысле элементов  $y_l j_l \in \hat{G}_l j_l$  являющихся четными при  $l = 0$  и нечетными при  $l = 1, \dots, 2^r - 1$ :  $(y_0 i_0)(y_l j_l) = (y_l i_l)(y_0 i_0) = (y_0 y_l) i_l \in \hat{G}_l i_l$  для любого  $0 \leq l \leq 2^r - 1$ ,  $(y_l i_l)^2 = -y_l^2 i_0 \in \hat{G}_0 i_0$ ,  $(y_l i_l)(y_k i_k) = -(y_k i_k)(y_l i_l) = (y_l y_k) i_s \in \hat{G}_s i_s$  для  $1 \leq l \neq k \leq 2^r - 1$ , где  $i_s = i_l i_k$ . Для любых чистых состояний  $g_0, \dots, g_k \in \hat{G}$  их произведение  $(\dots(g_0 g_1) g_2 \dots) g_k$  является чистым состоянием, следовательно, множества  $AG$  и  $BG$  являются  $\mathbf{Z}_2$  градуированными аналогично случаю  $\hat{G}$ , имея четные и нечетные элементы, так что

$$(8) \quad A\hat{G} = (A\hat{G}_0)i_0 \oplus (A\hat{G}_1)i_1 \oplus \dots \oplus (A\hat{G}_{2^r-1})i_{2^r-1} \text{ и}$$

$$(9) \quad B\hat{G} = (B\hat{G}_0)i_0 \oplus (B\hat{G}_1)i_1 \oplus \dots \oplus (B\hat{G}_{2^r-1})i_{2^r-1}.$$

Каждая  $AG_j$  или  $BG_j$  есть ассоциативная топологическая Хаусдорфова или  $H_p^t$  дифференцируемая группа изоморфная с  $AG_0$  или  $BG_0$  соответственно для любого  $j$ , так как  $G_j$  коммутативна и ассоциативна (смотри также приложение В4 в [13]), где  $G_0$  обозначает мультипликативную группу кольца  $\hat{G}_0$ . Поэтому  $AG$  и  $BG$  — это мультипликативные группы колец  $A\hat{G}$  и  $B\hat{G}$ .

Если  $a \in AG_0$  или  $a \in BG_0$ , тогда  $ab = ba$  для любого  $b \in AG$  или  $BG$  соответственно. Из определения 5 следует, что они являются  $C^\infty$  или  $H_p^t$  группами, когда такова группа  $G$ .

Обратный элемент имеет вид:

(10)  $\{|t_1, \dots, t_k, h_0[h_1|\dots|h_k]| : k\}^{-1} = \{|t_1, \dots, t_k, h_0^{-1}[h_1^{-1}|\dots|h_k^{-1}]| : k\}$  благодаря (2, 6), так как  $(h_0(h_1 \dots (h_{k-1} h_k) \dots))(\dots(h_k^{-1} h_{k-1}^{-1}) \dots h_1^{-1}) h_0^{-1}) = (\dots(((h_0 h_0^{-1})(h_1 h_1^{-1}))(h_2 h_2^{-1}) \dots))(h_k h_k^{-1}) = e$  для чистых состояний для всякого  $k$  в силу тождеств Муфанга (4–6). В общем это следует из (3, 8, 9), так как  $v * \text{conj}(v) \in AG_0$  или  $BG_0$  для  $v \in AG$  или  $v \in BG$  соответственно, следовательно,  $v^{-1} = \text{conj}(v)(v * \text{conj}(v))^{-1} = \{|t_1, \dots, t_k, h_0[h_1|\dots|h_k]| : k\}^{-1}$ .

В силу (8, 9) и существования обратного элемента, мы получим, что  $AG$  альтернативна, так как  $1 \leq r \leq 3$ . Полагая  $h_0 = 1$  и применяя отношение эквивалентности  $\mathcal{U}$ , мы получим, что  $BG$  является также альтернативной группой, так как мультипликативная группа  $\{i_0, \dots, i_7\}$  альтернативна. Если  $G$  ассоциативна, например, когда  $1 \leq r \leq 2$ , то  $AG$  и  $BG$  ассоциативны, так как мультипликативная группа  $\{i_0, i_1, i_2, i_3\}$  является ассоциативной.

Таким образом, группы  $AG$  и  $BG$  имеют  $\mathbf{Z}_2$  градуировку, следовательно, они скручены над  $\{i_0, \dots, i_{2^r-1}\}$ . Рассмотрим для  $\hat{G}$  операции умножения и сложения, тогда они индуцируют их для  $AG$  и  $BG$  выше. Итак,  $E\hat{G}$  и  $B\hat{G}$  являются скрученными кольцами.

**7. Следствие.** Пусть выполнены условия предложения 6, тогда  $AB^m G$  и  $B^m G$  — это топологические или  $C^\infty$ , или  $H_p^t$  дифференцируемые группы соответственно для любого  $m \geq 1$ . Более того, все отображения короткой точной последовательности  $e \rightarrow B^a G \rightarrow AB^a G \rightarrow B^{a+1} G \rightarrow e$  непрерывны или класса гладкости  $C^\infty$ , или  $H_p^t$  соответственно.

**Доказательство.** Определим структуру дифференцируемого пространства по индукции. Предположим, что она определена на  $B^a G$  и  $\Delta^k \times (B^a G)^m$  при  $k, m \geq 0$ , где  $a \geq 1$ . Тогда от отображение  $f : AB^a G \rightarrow \mathcal{A}_r$  имеет класс гладкости  $C^\infty$  или  $H_p^t$ , если композиция  $\prod_{n \geq 0} (\Delta^n - \partial \Delta^n) \times (B^a G)^{n+1} \xrightarrow{q_A} AB^a G \xrightarrow{f} \mathcal{A}_r$  принадлежит классу  $C^\infty$  или  $H_p^t$ , причем  $f : B^{a+1} G \rightarrow \mathcal{A}_r$  принадлежит классу гладкости  $C^\infty$  или  $H_p^t$ , если композиция  $\prod_{n \geq 0} (\Delta^n - \partial \Delta^n) \times (B^a G)^n \xrightarrow{q_B} B^{a+1} G \xrightarrow{f} \mathcal{A}_r$  имеет класс гладкости  $C^\infty$  или  $H_p^t$ , где  $0 \leq r \leq 3$ .

Функция  $f : \Delta^k \times (B^{a+1} G)^m \rightarrow \mathcal{A}_r$  является  $C^\infty$  или  $H_p^t$ , если композиция  $\Delta^k \times (\prod_{n \geq 0} (\Delta^n -$

$\partial\Delta^n \times (B^aG)^n \xrightarrow{id \times (q_B)^m} \Delta^k \times (B^{a+1}G)^m \xrightarrow{f} \mathcal{A}_r$  принадлежит классу гладкости  $C^\infty$  или  $H_p^t$ . Отсюда вытекает, что все отображения в коротких точных последовательностях имеют тот же класс гладкости.

Тогда отображения  $B^aG \times B^aG \rightarrow B^aG$  и  $AB^aG \times AB^aG \rightarrow AB^aG$  вида  $(f, g) \mapsto fg^{-1}$  имеют классы гладкости  $C^0$  или  $C^\infty$ , или  $H_p^t$  в соответствующих случаях благодаря формулам 6(1–3, 8–10) (смотри также §1.3.2 [21] и §1 и приложения В в [13]).

**8. Следствие.** Если группа  $G$  удовлетворяет условиям 4(A1, A2, C1, C2), тогда существуют  $H_p^t$  группы  $AB^a(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}}E)_{t, H}$  и  $B^a(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}}E)_{t, H}$  для любого  $a \in \mathbf{N}$ .

**Доказательство.** Группа оберток  $(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}}E; N, G, \mathbf{P})_{t, H}$  является главным  $G^k$  расслоением над группой  $(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}}N)_{t, H}$ , где группа  $(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}}N)_{t, H}$  коммутативна и ассоциативна (смотри предложение 7(1) в [22]).

Если  $g \in \hat{G}$ , тогда  $g$  имеет разложение  $g = g_0i_0 + \dots + g_{2^r-1}i_{2^r-1}$  с  $g_j \in \hat{G}_j$  для любого  $j = 0, 1, \dots, 2^r - 1$  и

$$(1) g_0 = (g + (2^r - 2)^{-1}\{-g + \sum_{s=1}^{2^r-1} i_s(gi_s^*)\})/2, \text{ и}$$

$$(2) g_j = (i_j(2^r - 2)^{-1}\{-g + \sum_{s=1}^{2^r-1} i_s(gi_s^*)\} - gi_j)/2$$

для любого  $j = 1, \dots, 2^r - 1$ . Поэтому каждое  $g_0, \dots, g_{2^r-1}$  имеет аналитическое выражение через  $g$  благодаря формулам (1, 2). Зафиксируем эти представления. Тогда  $H_p^t$  дифференцируемая структура параллельного переноса  $\mathbf{P}$  с группой  $G$  индуцирует  $H_p^t$  дифференцируемую структуру параллельного переноса  ${}_j\mathbf{P}$  с группами  $G_j$ .

Поскольку кольцо  $\hat{G}^k$  изоморфно с  $\bigoplus_{0 \leq j(1), \dots, j(k) \leq 2^r-1} (\hat{G}_{j(1)}i_{j(1)}, \dots, \hat{G}_{j(k)}i_{j(k)})$  изоморфно с  $\bigoplus_{0 \leq j(1), \dots, j(k) \leq 2^r-1} \hat{G}_0^k(i_{j(1)}, \dots, i_{j(k)})$ , тогда  $(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}}E; N, G, \mathbf{P})_{t, H}$  изоморфна группе  $\{f = (f_1, \dots, f_k) \in \bigoplus_{0 \leq j(1), \dots, j(k) \leq 2^r-1} [(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}}E; N, G_0, \mathbf{P})_{t, H} \cup \{0\}](i_{j(1)}, \dots, i_{j(k)}) : f_1 \neq 0, \dots, f_k \neq 0\}$ , где  $(i_{j(1)}, \dots, i_{j(k)}) \in (\mathcal{A}_r^*)^k$  и  $(\mathcal{A}_r^*)^k$  имеет вложение в семейство всех  $k \times k$  матриц с элементами из алгебры Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$  в качестве диагональных матриц, группа  $(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}}E; N, G_j, \mathbf{P})_{t, H}$  коммутативна для любого  $j = 0, \dots, 2^r - 1$  в силу теоремы 6 [21].

Построение предложения 5 выше имеет естественное обобщение для  $G^k$  вместо  $G$ , так что  $A\hat{G}^k = \bigoplus_{0 \leq j(1), \dots, j(k) \leq 2^r-1} (A\hat{G}_{j(1)}i_{j(1)}, \dots, A\hat{G}_{j(k)}i_{j(k)})$ , которая изоморфна с  $\bigoplus_{0 \leq j(1), \dots, j(k) \leq 2^r-1} A\hat{G}_0^k(i_{j(1)}, \dots, i_{j(k)})$ , также  $B\hat{G}^k$  изоморфна с  $\bigoplus_{0 \leq j(1), \dots, j(k) \leq 2^r-1} B\hat{G}_0^k(i_{j(1)}, \dots, i_{j(k)})$ , следовательно,  $A(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}}E; N, G, \mathbf{P})_{t, H}$  изоморфна группе  $\{v \in \bigoplus_{0 \leq j(1), \dots, j(k) \leq 2^r-1} [A(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}}E; N, G_0, \mathbf{P})_{t, H}^k \cup \{0\}](i_{j(1)}, \dots, i_{j(k)}) : v_n = |t_1, \dots, t_n, h_0[h_1|\dots|h_n]|, h_j \neq 0 \forall j, \forall n\}$  и  $B(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}}E; N, G, \mathbf{P})_{t, H}$  изоморфна с  $\{v \in \bigoplus_{0 \leq j(1), \dots, j(k) \leq 2^r-1} [B(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}}E; N, G_0, \mathbf{P})_{t, H}^k \cup \{0\}](i_{j(1)}, \dots, i_{j(k)}) : v_n = |t_1, \dots, t_n, [h_1|\dots|h_n]|, h_j \neq 0 \forall j, \forall n\}$ . Продолжая это индукцией по  $a$  и используя следствие 7, мы получим утверждение данного следствия для любого  $a \in \mathbf{N}$ .

**9. Лемма.** Пусть  $N$  — это  $C^\infty$  или  $H_p^t$  многообразие над алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$  с  $0 \leq r \leq 3$  и  $G$  — это  $C^\infty$  или  $H_p^t$  дифференцируемая группа. Если  $f : N \rightarrow BG$  — это отображение такое, что для любого  $y \in N$  существует открытая окрестность  $V$  точки  $y$  в  $N$  такая, что  $f|_V = |f_0, f_1, \dots, f_n, [g_1|\dots|g_n]|$  с  $f_0, \dots, f_n$  являющимися  $C^\infty$  или  $H_p^t$  дифференцируемыми отображениями, тогда  $f$  есть или  $C^\infty$ , или  $H_p^t$  дифференцируемое отображение соответственно.

**Доказательство.** Если  $h : BG \rightarrow \mathcal{A}_r$  — это  $C^\infty$  или  $H_p^t$  отображение, тогда для любого  $n \geq 1$  композиция  $\Delta^n \times G^n \xrightarrow{q_B} BG \xrightarrow{h} \mathcal{A}_r$  принадлежит соответствующему классу гладкости. Для коммутативной диаграммы состоящей из  $N \xrightarrow{f} BG \xrightarrow{h} \mathcal{A}_r$  и  $N \xrightarrow{\bar{f}} \Delta^n \times G^n \xrightarrow{q_B} BG$  и  $f = q_B \circ \bar{f}$ , где  $\bar{f} := (f_0, \dots, f_n, h_1, \dots, h_n)$  оба отображения  $\bar{f}$  и  $h \circ q_B$  непрерывны и класса  $C^\infty$  или  $H_p^t$ . Тогда композиция отображений  $h \circ f = h \circ q_B \circ \bar{f}$  непрерывна и или принадлежит  $C^\infty$ , или  $H_p^t$ , где как обычно  $h \circ f(y) := h(f(y))$ . Таким образом, отображение  $f : N \rightarrow BG$  непрерывно или класса  $C^\infty$ , или  $H_p^t$  соответственно.

**10. Скрученное решетчатое разрешение и гипер-когомологии.** Для скрученной группы  $G$  удовлетворяющей условиям 4(A1, A2, C1, C2) композиция короткой точной последовательности

$$(1) e \rightarrow B^aG \rightarrow AB^aG \rightarrow B^{a+1}G \rightarrow e \text{ индуцирует длинную точную последовательность}$$

$$(2) e \rightarrow G \rightarrow AG \xrightarrow{\sigma} ABG \xrightarrow{\sigma} AB^2G \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} AB^aG \xrightarrow{\sigma} \dots,$$

где для любого  $a \geq 0$  гомоморфизм  $\sigma : AB^aG \rightarrow AB^{a+1}G$  есть композиция  $AB^aG \rightarrow B^{a+1}G \rightarrow AB^{a+1}G$  сюръекции  $AB^aG \rightarrow B^{a+1}G$  и мономорфизма  $B^{a+1}G \rightarrow AB^{a+1}G$ .

В силу следствия 7 короткая точная последовательность (2) является  $C^\infty$  или  $H_p^t B^aG$ -продолжением для  $B^{a+1}G$ . Итак, длинная точная последовательность (2) индуцирует длинную точную последовательность скрученных пучков

$$(3) e \rightarrow G_N \rightarrow AG_N \xrightarrow{\sigma} ABG_N \xrightarrow{\sigma} AB^2G_N \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} AB^aG_N \xrightarrow{\sigma} \dots,$$

которые мы назовем (скрученным) решетчатым разрешением пучка  $G_N$ , где  $G_N$  обозначает пучок  $C^\infty$  или  $H_p^t$  функций на  $N$  со значениями в  $G$ .

Предположим, что  $\mathcal{S}^*$  и  $\mathcal{F}^*$  — это комплексы пучков  $\mathcal{G}$ -модулей, где  $\mathcal{G}$  — это пучок колец, где  $\mathcal{S}^*$  и  $\mathcal{F}^*$ , и  $\mathcal{G}$  могут быть одновременно скрученными над  $\{i_0, \dots, i_{2^r-1}\}$ . Тогда гомоморфное отображение  $\sigma : \mathcal{S}^* \rightarrow \mathcal{F}^*$  таких комплексов индуцирует отображение когомологий пучков  $H^j(\sigma) : H^j(\mathcal{S}^*) \rightarrow H^j(\mathcal{F}^*)$ , где  $H^j(\mathcal{S}^*)$  есть пучок ассоциированный с пред-пучком  $U \mapsto [ker(\Gamma(U, \mathcal{F}^j)) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}^{j+1})] / im[\Gamma(U, \mathcal{F}^{j-1}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}^j)]$ , где  $\Gamma(U, \mathcal{S}^j)$  обозначает группу сечений пучка  $\mathcal{S}^j$  для подмножества  $U$  открытого в  $X$  (смотри также §1). Тогда  $\sigma$  называется квази-изоморфизмом, если  $H^j(\sigma) — это изоморфизм для всякого  $j$ .$

Мы рассмотрим комплексы ограниченные снизу, то есть, существует  $j_0$  такое, что  $\mathcal{S}^j = 0$  для любого  $j < j_0$ .

Отображение  $\sigma : \mathcal{S}^* \rightarrow \mathcal{T}^*$  называется инъективным разрешением для  $\mathcal{S}^*$ , если  $\mathcal{T}^*$  — это комплекс  $\mathcal{G}$ -модулей ограниченных снизу,  $\sigma$  есть квази-изоморфизм, и пучки  $\mathcal{T}^b$  инъективны. Последнее означает, что  $Hom(\mathcal{B}, \mathcal{T}^b) \rightarrow Hom(\mathcal{K}, \mathcal{T}^b)$  сюръективно для любого инъективного отображения  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{B}$  пучков  $\mathcal{G}$ -модулей.

Пусть  $\mathcal{G}$  — это постоянный пучок колец, может быть скрученных над  $\{i_0, \dots, i_{2^r-1}\}$ . Предположим, что  $\mathcal{S}^*$  — это комплекс  $\mathcal{G}$ -модулей ограниченных снизу. Гипер-когомология групп  ${}_h H^b(X, \mathcal{S}^*)$  определяется как  $\mathcal{G}$ -модуль такой, что

$${}_h H^b(X, \mathcal{S}^*) := [ker(\Gamma(X, \mathcal{T}^b) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{T}^{b+1}))] / [im(\Gamma(X, \mathcal{T}^{b-1}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{T}^b)).$$

Если  $\sigma : \mathcal{S}^* \rightarrow \mathcal{F}^*$  — это квази-изоморфизм, тогда  $\sigma$  индуцирует изоморфизм гипер-когомологий групп:

$\sigma : {}_h H^b(X, \mathcal{S}^*) \cong {}_h H^b(X, \mathcal{F}^*)$  (смотри также [13] и ссылку [EV] там). В силу леммы 16 [22] гипер-когомологии групп  ${}_h H^b(X, \mathcal{S}^*)$  скручены над  $\{i_0, \dots, i_{2^r-1}\}$ , когда  $\mathcal{S}^*$  и  $\mathcal{G}$  скручены над  $\{i_0, \dots, i_{2^r-1}\}$ .

**11. Предложение.** *Последовательность 10(3) является ациклическим разрешением пучка  $G_N$ .*

**Доказательство.** Каждый стандартный симплекс  $\Delta^n$  с  $n \geq 1$  имеет  $C^\infty$  ретракцию  $\hat{z} : \Delta^n \times [0, 1] \rightarrow \{y\}$  в точку  $y$  принадлежащую ему.

Существует  $C^\infty$  деформационная ретракция

$$(1) \hat{f} : AG \times [0, 1] \rightarrow AG \text{ поставляемая семейством отображений}$$

$$(2) \hat{f}_n : (AG)_n \times [0, 1] \rightarrow (AG)_{n+1}, \text{ где}$$

$$(3) (AG)_n := q_A(\prod_{j \leq n} \Delta^j \times G^{j+1}) \subset AG \text{ и}$$

(4)  $\hat{f}_n(|t_1, \dots, t_n, h_0[h_1| \dots | h_n]|, t) := |\Phi(0, t), \Phi(t_1, t), \dots, \Phi(t_n, t), h_0[h_1| \dots | h_n]|$ , где  $\Phi : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  определяется как композиция  $\Phi(x, t) := \phi(\min(1, x + t))$ , беря  $\phi$  гладкой неубывающей функцией  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  такой, что  $\phi(0) = 0$  и  $\phi(1) = 1$ .

Тогда для любого  $C^\infty$  или  $H_p^t$  дифференцируемого отображения  $v : AG \rightarrow \mathcal{A}_r$  мы получим  $v \circ \hat{f} \circ (q_n \times id) = v^{n+1} \circ \hat{h}_n$  и  $v \circ q_A = v^{n+1}$ , где  $q_n \times id : (\Delta^n \times G^{n+1}) \times [0, 1] \rightarrow AG \times [0, 1]$ ,  $\hat{h}_n : (\Delta^n \times G^{n+1}) \times [0, 1] \rightarrow \Delta^{n+1} \times G^{n+2}$  — это гладкое отображение даваемое формулой  $\hat{h}_n(t_1, \dots, t_n, g_0, g_1, \dots, g_n, t) = (\Phi(0, t), \Phi(t_1, t), \dots, \Phi(t_n, t), e, g_0, g_1, \dots, g_n)$ .

В тоже время  $\Delta^{n+1}$  имеет  $C^\infty$  ретракцию на  $\Delta^n$  для любого  $n \geq 0$ , причем группа  $G$  является  $C^\infty$  или  $H_p^t$  дифференцируемой и линейно связной. Поэтому для любого  $b > 0$  когомология групп  $H^b(N, AG_N)$  тривиальна (смотри также §2.2 [3] и §54 ниже).

**12. Пучок  $\mathcal{S}$  на  $X$  называется мягким, если для любого замкнутого подмножества  $Y$  в  $X$  отображение ограничения  $\mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(Y)$  сюръективно.**



**12.1. Лемма.** Для  $C^\infty$  или  $H_p^t$  дифференцируемой группы  $G$  удовлетворяющей условиям 4(A1, A2, C1, C2) пучок  $AG_N$  является мягким.

**Доказательство.** Рассмотрим замкнутое подмножество  $Y$  в  $N$  и сечение  $\sigma_Y$  для  $AG_N$  над  $Y$ . Согласно определению сечения над замкнутым подмножеством существует открытое множество  $U$  и продолжение  $\sigma_U$  для  $\sigma_Y$  с  $Y$  на  $U$ , так что  $Y \subset U \subset N$ . Из паракомпактности  $N$  вытекает существование окрестности  $V$  для  $Y$  такой, что  $cl(V) \subset U$ , где  $cl(V)$  обозначает замыкание  $V$  в  $N$ . Поэтому продолжение  $\sigma$  для  $\sigma_Y$  до глобального сечения для  $AG_N$  дается формулой  $\sigma(x) = \hat{f}(\sigma_U(x), \psi(x))$ , где  $\hat{f} : AG \times [0, 1] \rightarrow AG$  есть деформационный ретракт (смотри §11) и  $\psi : N \rightarrow [0, 1]$  является или  $C^\infty$ , или  $H_p^t$  дифференцируемой функцией равной 1 на  $V$  и равной нулю 0 на  $M \setminus U$ .

**13. Замечание.** Пусть теперь  $N$  является  $C^\infty$  или  $H^\infty$  многообразием над алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$  и  $T(N, G, \pi, \Psi)$  — касательное расслоение с  $T = TN$  и проекцией  $\pi : T \rightarrow N$ , где связывающие отображения  $\phi_j \circ \phi_k^{-1}$  для  $V_j \cap V_k \neq \emptyset$  атласа  $At(N) = \{(V_j, \phi_j) : j\}$  многообразия  $N$  являются  $\mathcal{A}_r$  голоморфными для  $1 \leq r \leq 3$ ,  $\phi_j \circ \phi_k^{-1} \in H^\infty$ . Обозначим через  $\mathcal{T}$  пучок ростков гладких сечений для  $T$ . Тогда  $B\mathcal{T}$  обозначает пучок ассоциированный с пред-пучком сопоставляющим каждому открытому подмножеству  $V$  в  $N$  группу сечений естественной проекции  $\prod_{y \in V} B(\pi^{-1}(y)) \rightarrow V$ , которые локально имеют вид:

(1)  $y \mapsto |t_1(y), \dots, t_n(y), [\sigma_1(y)|\dots|\sigma_n(y)]|$ , где  $t_1, \dots, t_n$  являются  $C^\infty$  при  $r = 1$  или  $H^\infty$  при  $1 \leq r \leq 3$  функциями, и  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  являются  $C^\infty$  или  $H^\infty$  сечениями векторного расслоения  $T(N, G, \pi, \Psi)$ . Используя конструкции приведенные выше, мы определим  $B^{a+1}\mathcal{T}$  для любого  $a \in \mathbf{N}$  по индукции.

Тогда  $B^{a+1}\mathcal{T}$  есть пучок ассоциированный с пред-пучком соотносящим открытому подмножеству  $V$  в  $N$  группу сечений естественной проекции

$\prod_{y \in V} B^{a+1}(\pi^{-1}(y)) \rightarrow V$  имеющей локально вид (1), где  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  являются сечениями  $B^a\mathcal{T}$  над  $V$ . Аналогично мы определяем  $AB^a\mathcal{T}$ .

Если теперь  $T = \Lambda^b T^*N$  есть  $b$ -я внешняя степень кокасательного пучка для  $N$ , тогда конструкция приведенная выше дает пучки  $AB^a\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^b$  и  $B^{a+1}\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^b$  дифференциальных  $C^\infty$  форм на  $N$  со значениями в  $AB^a\mathcal{A}_r$  и  $B^{a+1}\mathcal{A}_r$  соответственно, где индекс  $\mathcal{A}_r$  можно опустить, когда алгебра Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$  задана. В уравнении

$$(2) w = \sum_J f_J(z) dx_{b_1, j_1} \wedge dx_{b_2, j_2} \wedge \dots \wedge dx_{b_k, j_k},$$

где  $f_J : N \rightarrow AB^a\mathcal{A}_r$  или  $f_J : N \rightarrow B^{a+1}\mathcal{A}_r$ ,  $z = (z_1, z_2, \dots)$  являются локальными координатами в  $N$ ,  $z_b = x_{b,0}i_0 + x_{b,1}i_1 + \dots + x_{b,2^r-1}i_{2^r-1}$ , где  $z_b \in \mathcal{A}_r$ ,  $x_{b,j} \in \mathbf{R}$  для любого  $b$  и всякого  $j = 0, 1, \dots, 2^r-1$ ,  $J = (b_1, j_1; b_2, j_2; \dots; b_k, j_k)$ .

Поскольку каждое топологическое векторное пространство  $Z$  над алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$  с  $2 \leq r \leq 3$  имеет естественную скрученную структуру  $Z = Z_0i_0 \oplus Z_1i_1 \oplus \dots \oplus Z_{2^r-1}i_{2^r-1}$  с попарно изоморфными топологическими векторными пространствами  $Z_0, \dots, Z_{2^r-1}$  над  $\mathbf{R}$ , тогда  $TN$  и  $T^*N$  и  $\Lambda^b T^*N$  имеют скрученные структуры, где  $X^*$  обозначает пространство всех непрерывных  $\mathcal{A}_r$  аддитивных и  $\mathbf{R}$  гомогенные функций на  $X$  со значениями в  $\mathcal{A}_r$ , когда  $2 \leq r \leq 3$ , в то время как  $X^*$  над  $\mathbf{C}$  является обычным топологическим двойственным пространством непрерывных  $\mathbf{C}$ -линейных функционалов на  $X$ . Поэтому в силу предложения 6  $B^a\mathcal{T}$  и  $AB^a\mathcal{T}$  имеют индуцированные скрученные структуры для любого  $a \in \mathbf{N}$ .

Каждое сечение  $\sigma$  пучка  $AB^a\mathcal{S}_N^k$  можно записать в виде:  $\sigma = |h_0, \dots, h_n, \sigma_0, \dots, \sigma_n|$ , где  $\sigma_0, \dots, \sigma_n$  являются гладкими дифференциальными  $B^a\mathcal{A}_r$  значными  $k$ -формами на  $V$  и  $\{h_j : j = 0, 1, 2, \dots\}$  является  $C^\infty$  гладким разбиением единицы на  $V$ . Вдобавок дифференциальные формы индуцируют аддитивную групповую структуру. В качестве умножения можно взять внешнее произведение дифференциальных форм, которое скручено над  $\mathcal{A}_r$  при  $2 \leq r \leq 3$ .

Группа сечений пучка  $AB^b\mathcal{S}_N^k$  для открытого подмножества  $V$  в  $N$  обозначим через  $\Gamma(V, AB^b\mathcal{S}_N^k)$ . Последовательность групп  $0 \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{S}_N^k) \rightarrow \Gamma(V, A\mathcal{S}_N^k) \rightarrow \Gamma(V, B\mathcal{S}_N^k) \rightarrow 0$  точна для каждого открытого подмножества  $V$  в  $N$ , так как последовательность векторных расслоений  $0 \rightarrow \Lambda^k T^*N \rightarrow A\Lambda^k T^*N \rightarrow B\Lambda^k T^*N \rightarrow 0$  точна.

Скрученная структура групп  $AB^b\mathcal{S}_N^k$  индуцирует скрученную структуру для  $\Gamma(V, AB^b\mathcal{S}_N^k)$ . Поэтому последовательность пучков  $0 \rightarrow B^b\mathcal{S}_N^k \rightarrow AB^b\mathcal{S}_N^k \rightarrow B^{b+1}\mathcal{S}_N^k \rightarrow 0$  точна также для любого  $b \geq 0$ .

Композиция этих последовательностей индуцирует длинную точную последовательность

$$(2) 0 \rightarrow \mathcal{S}_N^k \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{S}_N^k \xrightarrow{\sigma} \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{S}_N^k \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} \mathcal{A}\mathcal{B}^b\mathcal{S}_N^k \xrightarrow{\sigma} \dots,$$

где  $\sigma : \mathcal{A}\mathcal{B}^b\mathcal{S}_N^k \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}^{b+1}\mathcal{S}_N^k$  есть композиция отображений  $\mathcal{A}\mathcal{B}^b\mathcal{S}_N^k \rightarrow \mathcal{B}^{b+1}\mathcal{S}_N^k \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}^{b+1}\mathcal{S}_N^k$ . Последовательность (2) будет называться решетчатым разрешением пучка  $\mathcal{S}_N^k$ .

Пусть  $\mathcal{S}$  есть произвольный скрученный пучок на топологическом пространстве  $X$ . Обозначим через  $\mathcal{A}\mathcal{S}$  и  $\mathcal{B}\mathcal{S}$  пучки ассоциированные с пред-пучками  $V \mapsto \mathcal{A}(\Gamma(V, \mathcal{S}))$  и  $V \mapsto \mathcal{B}(\Gamma(V, \mathcal{S}))$  соответственно. Ростками для  $\mathcal{A}\mathcal{S}$  и  $\mathcal{B}\mathcal{S}$  являются  $\mathcal{A}\mathcal{S}_x$  и  $\mathcal{B}\mathcal{S}_x$  в точке  $x$ , в то время как последовательность

$$(3) e \rightarrow \mathcal{S}_x \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S}_x) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{S}_x) \rightarrow e$$

точна, следовательно, последовательность пучков

$$e \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{B}\mathcal{S} \rightarrow e$$

является точной. Композиция этих последовательностей дает решетчатое разрешение для  $\mathcal{S}$

$$(4) e \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{S} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{S} \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} \mathcal{A}\mathcal{B}^b\mathcal{S} \xrightarrow{\sigma} \dots$$

Комплекс пучков

$$(5) \mathcal{B}^*(\mathcal{S}) : \mathcal{A}\mathcal{S} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{S} \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} \mathcal{A}\mathcal{B}^b\mathcal{S} \xrightarrow{\sigma} \dots$$

называется решетчатым разрешением для  $\mathcal{S}$ . Решетчатое разрешение для  $\mathcal{S}$  является ациклическим разрешением для  $\mathcal{S}$ , что выводится аналогично доказательству предложения 11 и леммы 12.1. Таким образом, когомология для  $\mathcal{S}$  равна когомологии коцепного комплекса

$$(6) \Gamma(N, \mathcal{A}\mathcal{S}) \xrightarrow{\sigma} \Gamma(N, \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{S}) \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} \Gamma(N, \mathcal{A}\mathcal{B}^b\mathcal{S}) \xrightarrow{\sigma} \dots$$

Комплекс (6) будет называться решетчатым разрешением коцепного комплекса для  $\mathcal{S}$  и будет обозначаться  $C_B^*(\mathcal{S})$ .

Каждая короткая точная последовательность пучков  $e \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow Y \rightarrow e$  скрученная над генераторами  $\{i_0, i_1, \dots, i_{2r-1}\}$ ,  $2 \leq r \leq 3$ , индуцирует короткую точную последовательность комплексов пучков  $e \rightarrow \mathcal{B}^*(E) \rightarrow \mathcal{B}^*(F) \rightarrow \mathcal{B}^*(Y) \rightarrow e$ , где  $\mathcal{B}^*(F) : \mathcal{A}F \xrightarrow{\sigma} \mathcal{A}\mathcal{B}F \xrightarrow{\sigma} \mathcal{A}\mathcal{B}^2F \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} \mathcal{A}\mathcal{B}^bF \xrightarrow{\sigma} \dots$  является решетчатым комплексом для  $F$ .

**14. Предложение.** Если последовательность групп  $e \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow J \rightarrow e$  точна, где  $E$  и  $K, G, J$  линейно связны, тогда последовательность  $e \rightarrow (W^M E; N, K, \mathbf{P})_{t, H} \rightarrow (W^M E; N, G, \mathbf{P})_{t, H} \rightarrow (W^M E; N, J, \mathbf{P})_{t, H} \rightarrow e$  точна.

**Доказательство.** В силу предложения 7.1 [22]  $(W^M E; N, K, \mathbf{P})_{t, H}$  является главным расслоением над  $(W^M N)_{t, H}$  со структурной группой  $K^k$ ,  $\pi_{K, *}: (W^M E; N, K, \mathbf{P})_{t, H} \rightarrow (W^M N)_{t, H}$ ,  $\pi_{K, *}^{-1} \langle w_0 \rangle_{t, H} = \langle w_0 \rangle_{t, H} \times K^k = e \times K^k$ , где  $e \in (W^M N)_{t, H}$  обозначает единичный элемент. Поскольку последовательность  $e \rightarrow K^k \rightarrow G^k \rightarrow J^k \rightarrow e$  также точна, то соответствующая последовательность групп оберток точна.

**15. Предложение.** Пусть  $G$  — это  $C^\infty$  или  $H_p^t$  дифференцируемая скрученная группа над  $\{i_0, i_1, \dots, i_{2r-1}\}$  удовлетворяющая условиям 4(A1, A2, C1, C2). Тогда для любого  $C^\infty$  или  $H_p^t$  главного  $G$ -расслоения  $E(N, G, \pi, \Psi)$  существует  $C^\infty$  или  $H_p^t$  дифференцируемое отображение  $\phi : N \rightarrow BG$  такое, что  $E \rightarrow N$  является ограничением универсального главного  $G$  расслоения посредством  $\phi$ .

**Доказательство.** Рассмотрим открытое покрытие  $\mathcal{V} = \{V_j : j \in J\}$  для  $N$ , где  $J$  — это множество такое, что для любого  $j \in J$  существует тривиализация  $\psi_j : \pi^{-1}(V_j) \rightarrow V_j \times G$ . Определим отображение  $g_j : E \rightarrow G$  формулой  $g_j(x) = pr_2(\psi_j(x))$  для  $x \in \pi^{-1}(V_j)$ ,  $g_j(x) = e$  для  $x \notin \pi^{-1}(V_j)$ , где  $e$  обозначает единичный элемент в  $G$ , и  $pr_2 : V_j \times G \rightarrow G$  есть проекция на второй множитель.

Для главного  $G$  расслоения  $E(N, G, \pi, \Psi)$  мы рассмотрим семейство  $H_p^t$  связывающих функций  $\{g_{i,j} : i, j \in J\}$  ассоциированных с открытым покрытием  $\mathcal{V} := \{V_j : j \in J\}$  of an  $H_p^t$  многообразия  $N$  над алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$ , где  $J$  — это множество,  $g_{i,j} : V_i \cap V_j \rightarrow \mathcal{A}_r^*$ , когда пересечение  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$  непусто,  $1 \leq r \leq 3$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Введем отображение

$$(1) g_{E, N}(x) := |f_{j(0)}, f_{j(1)}, \dots, f_{j(n)}, [g_{j(0), j(1)} | g_{j(1), j(2)}] \dots [g_{j(n-1), j(n)}]|$$

такое, что  $g_{E, N} : N \rightarrow BG$ , где  $\{f_j : j \in J\}$  является  $H_p^t$  разбиением единицы подчиненным  $\mathcal{U}$  с  $t' \leq t_1 \leq \infty$ . Поэтому  $g_{E, N}$  можно выбрать класса гладкости  $H_p^t$ . Таким образом,  $E(N, G, \pi, \Psi)$  есть ограничение универсального расслоения  $AG(BG, G, \pi_B^A, \Psi^A)$  посредством классифицирующего отображения  $g_{E, N}$ , где отображение  $\pi_B^A : AG \rightarrow BG$  такое же, что и в §4. Мы докажем это

детально.

Возьмем разбиение единицы класса гладкости  $C^\infty$  или  $H_p^t$  подчиненное покрытию  $\mathcal{V}$ , а  $\Phi : A \rightarrow AG$  пусть будет следующим отображением

$\Phi(y) := |f_{j_0}(\pi(y)), f_{j_1}(\pi(y)), \dots, f_{j_n}(\pi(y)), g_{j_0}(y), g_{j_1}(y), \dots, g_{j_n}(y)|$ , где  $j_0, \dots, j_n$  — это индексы такие, что  $f_j(\pi(y)) \neq 0$  для любого  $j \in \{j_0, \dots, j_n\}$ . Тогда  $\Phi$  является  $G$  эквивариантным, что означает  $\Phi(yh) = \Phi(y)h$  для всех  $y$  и  $h \in G$ , так как  $g_j(yh) = pr_2(\psi_j(yh))$  при  $yh \in \pi^{-1}(V_j)$  и  $g_j(yh) = e$  при  $yh \notin \pi^{-1}(V_j)$ . В самом деле,  $y \in \pi^{-1}(y)$  эквивалентно  $yh \in \pi^{-1}(V_j)$  для любого  $h \in G$ , так как  $\pi^{-1}(V_j) = V_j \times G$ , где  $y = (u, q)$  с  $u \in N$  и  $q \in G$ , и  $(u, q)h = (u, qh)$  в локальных координатах. Таким образом,  $g_j(yh) = g_j(y)R_h$ , где  $R_h = h$  для  $y \in \pi^{-1}(V_j)$  и  $R_h = e$  при  $y \notin \pi^{-1}(V_j)$ .

Поэтому  $\Phi$  индуцирует морфизм главных  $G$ -расслоений

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi} & AG \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ N & \xrightarrow{\phi} & BG \end{array}$$

где ограничение  $\phi$  на  $V_j$  таково:  $\phi(x)|_{V_j} = |f_{j_0}, f_{j_1}(x), \dots, f_{j_n}(x), [g_{j_0}(\sigma(x)) : g_{j_1}(\sigma(x)) : \dots : g_{j_n}(\sigma(x))]|$ ,  $\sigma : V_j \rightarrow \pi^{-1}(V_j)$  есть гладкое сечение ограничения  $\pi^{-1}(V_j) \rightarrow V_j$  для  $\pi : E \rightarrow N$ . Рассмотрим классы эквивалентности:  $q_j \sim g_j$  тогда и только тогда, когда существуют элементы  $s_1, \dots, s_m \in G$  такие, что  $(s_m(s_{m-1} \dots (s_1(q_j) \dots)) = g_j$ , следовательно,  $q_j h \sim g_j h$ , так как  $q_j h \sim g_j h$  тогда и только тогда, когда  $h^{-1}q_j \sim h^{-1}g_j$ , что эквивалентно  $h(s_m(s_{m-1} \dots (s_1(h^{-1}q_j) \dots)) = g_j$ . В силу альтернативности (квази-) группы  $G$  мы получаем  $[ \dots (g_j^{-1} s_1^{-1}) \dots s_{m-1}^{-1} ] [(s_m(s_{m-1} \dots (s_1 g_l) \dots))] = g_j^{-1} g_l$ .

Поэтому в негомогенных координатах отображение  $\phi$  принимает вид  $\phi(x) = |f_{j_0}(x), f_{j_1}(x), \dots, f_{j_n}(x), [g_{j_0, j_1}(x) | g_{j_1, j_2}(x) | \dots | g_{j_{n-1}, j_n}(x)]|$ , где  $g_{j,l}(x) = [g_j(\sigma(x))]^{-1} g_l(\sigma(x))$  — это связывающие функции ассоциированные с открытым покрытием для  $N$  открытыми множествами  $\{x \in N : f_j(x) > 0\}$ . Тогда отображение  $\phi(x)$  не зависит от выбора  $\sigma$ , так как  $g_j$  являются  $G$ -эквивариантными. Все функции  $g_j$  принадлежат классу гладкости  $C^\infty$  или  $H_p^t$ , следовательно,  $\phi$  является  $C^\infty$  или  $H_p^t$  отображением соответственно.

**16. Следствие.** Для любого гладкого  $C^\infty$  или  $H_p^t$  главного  $B^b \mathcal{A}_r^*$  расслоения с  $1 \leq r \leq 3$  существует  $C^\infty$  или  $H_p^t$  дифференцируемое отображение  $\phi : N \rightarrow B^{b+1} \mathcal{A}_r^*$  такое, что  $E(N, G, \pi, \Psi)$  является ограничением универсального главного  $B^b \mathcal{A}_r^*$ -расслоения посредством  $\phi$ , где  $G = B^b \mathcal{A}_r^*$ .

**17. Лемма.** Пусть  $G$  — это дифференцируемая (топологическая) группа скрученная над  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$  при  $1 \leq r \leq 3$  удовлетворяющая условиям 4(A1, A2, C1, C2). Тогда группа классов изоморфизмов  $C^\infty$  гладких (непрерывных) главных  $G$ -расслоений над  $N$  изоморфна группе  $[N, BG]^\infty$  гладких (или  $[N, BG]^0$  непрерывных соответственно) классов гомотопий гладких (непрерывных) отображений из  $N$  в  $BG$ .

**Доказательство.** Каждое главное  $G$ -расслоение над  $N$  имеет свойства 4(A1, A2, C1, C2) индуцированные ими для  $G$ , где локально  $\pi^{-1}(V_j) = V_j \times G$ ,  $conj(y) = (u, conj(g))$  для любого  $y = (u, g) \in V_j \times G$ , в то время как  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$  при  $2 \leq r \leq 3$  является мультипликативной группой, которая ассоциативна при  $r = 2$  и альтернативна при  $r = 3$ .

Рассмотрим короткую точную последовательность  $e \rightarrow G_N \rightarrow AG_N \rightarrow BG_N \rightarrow e$ . В силу леммы 16 [22] она индуцирует длинную точную последовательность когомологий

$\dots \rightarrow C^\infty(N, AG) \xrightarrow{\pi_*} C^\infty(N, BG) \rightarrow H^1(N, G_N) \rightarrow H^1(N, AG_N) \rightarrow \dots$ . Из  $H^1(N, AG_N) \cong e$  мы получим изоморфизм  $C^\infty(N, BG)/\pi_* C^\infty(N, AG) \cong H^1(N, G_N)$ . Тогда образ  $\pi_* C^\infty(N, AG)$  группы  $C^\infty(N, AG)$  в  $C^\infty(N, BG)$  состоит из всех гладких отображений из  $N$  в  $BG$ , для которых существуют отображения поднятия из  $N$  в  $AG$ .

С другой стороны,  $f \in C^\infty(N, BG)$  имеет поднятие  $F : N \rightarrow AG$  тогда и только тогда, когда  $f$  является гладкой (или непрерывной) гомотопной постоянно отображению, так как  $[g_0 : \dots : g_n]$  в  $(BG)_n$  есть класс эквивалентности  $\{(g_0, \dots, g_n) \sim (s_m(\dots(s_1 g_0) \dots)), \dots, (s_m(\dots(s_1 g_n) \dots))\} : s_1, \dots, s_m \in G, m \in \mathbf{N}$ , следовательно,  $C^\infty(N, BG)/\pi_* C^\infty(N, AG) \cong [N, BG]^\infty$ . В классе непрерывных отображений мы аналогично получаем  $C^0(N, BG)/\pi_* C^0(N, AG) \cong [N, BG]^0$ .

**18. Замечания.** В силу §§4-6 существует короткая точная последовательность  $e \rightarrow G \rightarrow AG \rightarrow BG \rightarrow e$  из  $H_p'$  гомоморфизмов благодаря скрученным структурам групп  $G$ ,  $AG$  и  $BG$  (смотри уравнения 4(A2) и 6(8, 9)).

Группам  $AG$  и  $BG$  соотносятся симплициальные топологические группы  $AG_n$  и  $BG_n$  с граничными (face) гомоморфизмами  $\partial_j : AG_n \rightarrow AG_{n-1}$  даваемыми выражениями:

(1)  $\partial_j(h_0[h_1|\dots|h_n]) = h_0h_1[h_2|\dots|h_n]$  при  $j = 0$ ,  $\partial_j(h_0[h_1|\dots|h_n]) = h_0[h_1|\dots|h_jh_{j+1}|\dots|h_n]$  при  $0 < j < n$ ,

$\partial_j(h_0[h_1|\dots|h_n]) = h_0[h_1|\dots|h_{n-1}]$  при  $j = n$ . В тоже время отображение  $\partial_j : BG_n \rightarrow BG_{n-1}$  имеет вид:

(2)  $\partial_j([h_1|\dots|h_n]) = [h_2|\dots|h_n]$  при  $j = 0$ ,  
 $\partial_j([h_1|\dots|h_n]) = [h_1|\dots|h_jh_{j+1}|\dots|h_n]$  при  $0 < j < n$ ,  
 $\partial_j([h_1|\dots|h_n]) = [h_1|\dots|h_{n-1}]$  при  $j = n$ .

Гомоморфизмы вырождения  $s_j : AG_n \rightarrow AG_{n+1}$  даются формулой:

(3)  $s_j(h_0[h_1|\dots|h_n]) = h_0[e|h_1|\dots|h_n]$  при  $j = 0$ ,  
 $s_j(h_0[h_1|\dots|h_n]) = h_0[h_1|\dots|h_j|e|h_{j+1}|\dots|h_n]$  при  $0 < j < n$ ,  
 $s_j(h_0[h_1|\dots|h_n]) = h_0[h_1|\dots|h_n|e]$  при  $j = n$ . При этом отображение  $s_j : BG_n \rightarrow BG_{n+1}$  дается

формулой:

(4)  $s_j([h_1|\dots|h_n]) = [e|h_1|\dots|h_n]$  при  $j = 0$ ,  
 $s_j([h_1|\dots|h_n]) = [h_1|\dots|h_j|e|h_{j+1}|\dots|h_n]$  при  $0 < j < n$ ,  
 $s_j([h_1|\dots|h_n]) = [h_1|\dots|h_n|e]$  при  $j = n$ .

Аналогичные отображения даются для симплексов:

(5)  $\partial^j(t_0, \dots, t_{n+1}) = (t_0, \dots, t_j, \hat{t}_j, t_{j+1}, \dots, t_{n+1})$  и  
(6)  $s^j(t_0, \dots, t_{n+1}) = (t_0, \dots, t_j, \hat{t}_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_{n+1})$ , где  $\hat{t}_{j+1}$  означает, что  $t_{j+1}$  отсутствует.

Геометрическая реализация  $|AG_n|$  симплициального пространства  $AG_n$  определяется как факторпространство дизъюнктного объединения  $\sqcup_{n=0}^{\infty} \Delta^n \times G^{n+1}$  по отношениям эквивалентности

(7)  $(\partial^j x, \bar{g}) \sim (x, \partial_j \bar{g})$  для любого  $(x, \bar{g}) \in \Delta^{n-1} \times G^{n+1}$ , причем  $(s^j x, \bar{g}) \sim (x, s_j \bar{g})$  для любого  $(x, \bar{g}) \in \Delta^{n+1} \times G^{n+1}$ . Тогда как геометрическая реализация  $|BG_n|$  симплициального пространства  $BG_n$  является факторпространством дизъюнктного объединения  $\sqcup_{n=0}^{\infty} \Delta^n \times G^n$  по отношениям эквивалентности

(8)  $(\partial^j x, \bar{g}) \sim (x, \partial_j \bar{g})$  для любого  $(x, \bar{g}) \in \Delta^{n-1} \times G^n$ , причем  $(s^j x, \bar{g}) \sim (x, s_j \bar{g})$  для любого  $(x, \bar{g}) \in \Delta^{n+1} \times G^n$ .

Рассмотрим некоммутативную сферу  $\mathcal{C}_r := \{z \in \mathcal{I}_r : |z| = 1\}$  при  $r = 2, 3$ , где  $\mathcal{I}_r := \{z \in \mathcal{A}_r : \text{Re}(z) = 0\}$ . При  $r = 1$  мы положим  $\mathcal{C}_r = \{i, -i\}$ , где  $i = (-1)^{1/2}$ . Пусть  $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)$  обозначает аддитивную группу  $\mathbf{Z}^{\mathcal{C}_r}/\mathcal{Z}$ , где  $\mathbf{Z}^{\mathcal{C}_r} := \prod_{b \in \mathcal{C}_r} T_b$ ,  $T_b = \mathbf{Z}b$  для всякого  $b \in \mathcal{C}_r$ ,  $\mathbf{Z}$  обозначает аддитивную группу целых чисел,  $\mathcal{Z}$  обозначает отношение эквивалентности такое, что  $T_b \times T_{-b}/\mathcal{Z} = T_b$  для любого  $b \in \mathcal{C}_r$ . При  $2 \leq r \leq 3$  группа  $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)$  изоморфна с  $\mathbf{Z}^\alpha$ , где  $\text{card}(\alpha) = \text{card}(\mathbf{R}) =: c$ . В частности,  $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_1) = \mathbf{Z}i$  при  $r = 1$ .

Далее мы рассмотрим скрученные пучки и когомологии над  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$ , где  $2 \leq r \leq 3$ . В частности, комплексный случай также будет включен при  $r = 1$ , но в последнем случае они задаются над коммутативным полем  $\mathbf{C}$  комплексных чисел. Поэтому мы можем одновременно рассмотреть  $1 \leq r \leq 3$  и в общем говорить о скручивании подразумевая, что при  $r = 1$  оно вырождено.

**19. Предложение.** Пусть  $G$  — это группа или  $\mathcal{A}_r^*$ , или  $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)$ , где  $1 \leq r \leq 3$ . Тогда для каждого  $H^\infty$  гладкого многообразия  $N$  над алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$  и каждого  $b \geq 2$  группа  $\mathbf{H}^b(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r))$  изоморфна с:

(1) группой  $\mathbf{E}(N, B^{b-2}G)$  классов изоморфизмов гладких главных  $B^{b-2}G$ -расслоений над  $N$ ;  
(2) группа  $[N, B^{b-1}G]^\infty$  гладких классов гомотопий гладких отображений из  $N$  в  $B^{b-1}G$ .

**Доказательство.** В силу следствия 3.4 [27, 28] существует короткая точная последовательность

(1)  $0 \rightarrow \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r) \xrightarrow{\eta} \mathcal{A}_r \rightarrow \mathcal{A}_r^* \rightarrow 1$ ,

так как  $\exp(M + 2\pi kM/|M|) = \exp(M)$  для любого ненулевого чисто мнимого числа  $M \in \mathcal{I}_r$  ( $\text{Re}(M) = 0$ ) и всякого  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $1 \leq r \leq 3$ , где  $\eta(z) = 2\pi z$  для любого  $z \in \mathcal{A}_r$ . Если  $f : \mathcal{A}_r \rightarrow \mathcal{A}_r^*$  есть дифференцируемая функция, тогда  $(dLnf).h = w(h)$  — это дифференциальная один-форма, где

$d$  рассматривается как внешнее дифференцирование над  $\mathbf{R}$ , где  $h \in \mathcal{A}_r$ . В частном случае  $G = \mathcal{A}_r^*$  с  $1 \leq r \leq 3$  существуют короткие точные последовательности

$$(2) 1 \rightarrow \mathcal{A}_r^* \rightarrow A\mathcal{A}_r^* \rightarrow B\mathcal{A}_r^* \rightarrow 1$$

$$(3) 1 \rightarrow B\mathcal{A}_r^* \rightarrow AB\mathcal{A}_r^* \rightarrow B^2\mathcal{A}_r^* \rightarrow 1$$

$$(4) 1 \rightarrow B^m\mathcal{A}_r^* \rightarrow AB^m\mathcal{A}_r^* \rightarrow B^{m+1}\mathcal{A}_r^* \rightarrow 1.$$

Поэтому идентифицируя концы этих коротких точных последовательностей, мы получим длинную точную последовательность

$$(5) 0 \rightarrow \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r) \rightarrow \mathcal{A}_r \rightarrow A\mathcal{A}_r^* \rightarrow AB\mathcal{A}_r^* \rightarrow \dots \rightarrow AB^m\mathcal{A}_r^* \rightarrow \dots,$$

где  $\sigma : \mathcal{A}_r \rightarrow A\mathcal{A}_r^*, \dots, \sigma : AB^{m-1}\mathcal{A}_r^* \rightarrow AB^m\mathcal{A}_r^*$  являются гомоморфизмами, все члены  $\mathcal{A}_r, A\mathcal{A}_r^*, \dots, AB^m\mathcal{A}_r^*, \dots$  являются контрактуемыми пространствами.

Мы предположим теперь, что  $N$  и  $E$  принадлежат классу гладкости  $H^\infty$ . Пусть  $C^\infty(N, AB^m\mathcal{A}_r^*)$  обозначает пучок ростков  $C^\infty$  функций из  $N$  в  $AB^m\mathcal{A}_r^*$ . Таким образом, мы получим функтор  $C^\infty$ . Тогда применение  $C^\infty$  функтора к длинной точной последовательности (5) дает:

$$(6) 0 \rightarrow \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N \rightarrow C^\infty(N, \mathcal{A}_r) \rightarrow C^\infty(N, A\mathcal{A}_r^*) \rightarrow C^\infty(N, AB\mathcal{A}_r^*) \rightarrow \dots \rightarrow C^\infty(N, AB^m\mathcal{A}_r^*) \rightarrow \dots,$$

где  $\sigma_* : C^\infty(N, \mathcal{A}_r) \rightarrow C^\infty(N, A\mathcal{A}_r^*), \dots, \sigma_* : C^\infty(N, AB^{m-1}\mathcal{A}_r^*) \rightarrow C^\infty(N, AB^m\mathcal{A}_r^*)$  — это индуцированные гомоморфизмы.

Последняя точная последовательность называется решетчатым разрешением  $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N$ . Пучки  $C^\infty(N, \mathcal{A}_r)$  и  $C^\infty(N, AB^m\mathcal{A}_r^*)$  контрактуемы, так как  $\mathcal{A}_r$  и  $AB^m\mathcal{A}_r^*$  контрактуемы. Поэтому когомологии пучков  $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N$  можно рассчитать используя комплекс

$$(7) C^\infty(N, \mathcal{A}_r) \rightarrow C^\infty(N, A\mathcal{A}_r^*) \rightarrow \dots \rightarrow C^\infty(N, AB^m\mathcal{A}_r^*) \rightarrow \dots$$

с гомоморфизмами

$$\sigma_* : C^\infty(N, \mathcal{A}_r) \rightarrow C^\infty(N, A\mathcal{A}_r^*), \dots, \sigma_* : C^\infty(N, AB^{m-1}\mathcal{A}_r^*) \rightarrow C^\infty(N, AB^m\mathcal{A}_r^*).$$

Длинную точную последовательность (7) мы назовем решетчатым коцепным комплексом для  $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N$ . Когомология (группа когомологий) для  $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N$  рассчитанная с помощью решетчатого комплекса обозначается через  $H_b^*(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N)$ , и она называется решетчатой когомологией для  $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N$ . Тогда  $\pi_0 C^\infty(N, B\mathcal{A}_r^*)$  есть первой решетчатой когомологией  $H_1^b(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N)$  при  $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N$ .

Для обобщенной экспоненциальной последовательности

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N \rightarrow AB^{<b-2}G_N \rightarrow B^{b-2}G_N[2-b] \rightarrow e \text{ существует длинная точная последовательность когомологий}$$

$$\dots \rightarrow {}_h H^{b-1}(N, AB^{<b-2}G_N) \rightarrow H^1(N, B^{b-2}G_N) \rightarrow H^b(N; \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)) \rightarrow {}_h H^b(N, AB^{<b-2}G_N) \rightarrow \dots,$$

где  $AB^{<b}G_N$  есть комплекс

$$K_N \xrightarrow{\sigma} AG_N \xrightarrow{\sigma} ABG_N \xrightarrow{\sigma} AB^2G_N \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} AB^{b-1}G_N,$$

$K$  равняется или  $\mathcal{A}_r$ , или  $A\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)$  при  $G = \mathcal{A}_r^*$  или  $G = B\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)$  соответственно, где  ${}_h H^b(N, \mathcal{B})$  обозначает гиперкогомологию на  $N$  с коэффициентами в комплексе пучков  $\mathcal{B}$  (смотри ее определение в [3, 12, 13] и §10 выше).

Мы имеем, что для любого  $b \geq 0$  пучок  $AB^bG_N$  ацикличен. Рассмотрим группы глобальных сечений  $AB^bG_N(N)$  пучков  $AB^bG_N$ . Поэтому когомология комплекса  $AB^{<b-2}G_N$  равняется когомологии коцепного комплекса

$$K \xrightarrow{\sigma} AG_N(N) \xrightarrow{\sigma} ABG_N(N) \xrightarrow{\sigma} AB^2G_N(N) \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} AB^{b-1}G_N(N).$$

Таким образом,  ${}_h H^m(N, AB^{<b-2}G_N) \cong H^m(N, AB^{<b-2}G_N(N)) \cong e$  для любого  $m > b - 2$ , следовательно, кограничный гомоморфизм  $H^1(N, B^{b-2}G_N) \rightarrow H^b(N; \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r))$  является изоморфизмом (смотри также главу 2 §4 в [3] для абелевых пучков).

Второе утверждение данного предложения вытекает из леммы 17.

**20. Лемма.** Пусть  $X$  — это топологическое векторное пространство над алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$ , где  $2 \leq r \leq 3$ . Тогда  $AX$  и  $BX$  относительно аддитивной групповой структуры  $X$  и относительно умножения на скаляры из  $\mathcal{A}_r$  в гомогенных координатах являются  $\mathcal{A}_r$  векторными пространствами и проекция  $AX \rightarrow BX$  является  $\mathbf{R}$ -гомогенной и  $\mathcal{A}_r$  аддитивной.

**Доказательство.** Мы определим умножения посредством формул: для  $\mathcal{A}_r \times AX \rightarrow AX$  как

$$s|t_1, \dots, t_n; v_0[v_1|\dots|v_n]| = |t_1, \dots, t_n; sv_0[sv_1|\dots|sv_n]|,$$

для  $AX \times \mathcal{A}_r \rightarrow AX$  как

$$|t_1, \dots, t_n; v_0[v_1|\dots|v_n]|s = |t_1, \dots, t_n; v_0s[v_1s|\dots|v_ns]|,$$

для  $\mathcal{A}_r \times BX \rightarrow BX$  как

$$s|t_1, \dots, t_n; [v_1 | \dots | v_n]| = |t_1, \dots, t_n; [sv_0 | \dots | sx_n]|,$$

для  $BX \times \mathcal{A}_r \rightarrow BX$  как

$$|t_1, \dots, t_n; [v_1 | \dots | v_n]|s = |t_1, \dots, t_n; [v_1 s | \dots | v_n s]|.$$

Тогда если  $q_j = s_m(s_{m-1} \dots (s_1 v_j) \dots)$  для каждого  $j$ , то при  $z \neq 0$  мы получим  $zq_j = z(s_m \dots (s_1(z^{-1}(zv_j))) \dots)$  в силу альтернативности алгебры октонионов  $\mathbf{O}$ , при  $z = 0$  мы тривиально получаем  $0 = (s_m \dots (s_1 0) \dots)$ . Таким образом, такое умножение совместимо с отношениями эквивалентности, так как  $X = X_0 i_0 \oplus \dots \oplus X_{2r-1} i_{2r-1}$ , где  $X_0, \dots, X_{2r-1}$  — это попарно изоморфные топологические векторные пространства над полем вещественных чисел  $\mathbf{R}$ , так что мы полагаем  $vx = xv$  для любого  $v \in X_j$  и  $x \in \mathbf{R}$ .

Поскольку поле вещественных чисел  $\mathbf{R}$  является центром алгебры  $\mathbf{O}$ , то проекция из  $AX$  в  $BX$  является  $\mathbf{R}$ -линейной. Очевидно, что она аддитивна как гомоморфизм аддитивных групп.

**21. Замечание.** Пусть  $N$  — это симплицальное гладкое многообразие над алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$ , где  $0 \leq r \leq 3$ . Гладкая  $m$ -форма  $w$  на геометрической реализации  $|N|$  для  $N$  определяется как семейство  $\{w^k : k\}$  гладких дифференциальных  $m$ -форм  $w^k$  на  $\Delta^k \times N_k$  со значениями в алгебре Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$  примененной к векторам, удовлетворяющих для любого  $0 \leq j \leq n$  условиям совместности:

$$(1) (\partial^j \times id)^* w^n = (id \times \partial_j)^* w^{n-1}$$

$$(2) (s^j \times id)^* w^n = (id \times s_j)^* w^{n+1},$$

где  $\partial^j \times id$ ,  $id \times \partial_j$ ,  $s^j \times id$  и  $id \times s_j$  — это следующие отображения:

(3)  $id \times \partial_j : \Delta^{n-1} \times N_n \rightarrow \Delta^{n-1} \times N_{n-1}$ ,  $\partial^j \times id : \Delta^{n-1} \times N_n \rightarrow \Delta^n \times N_n$ ,  $id \times s_j : \Delta^{n+1} \times N_n \rightarrow \Delta^{n+1} \times N_{n+1}$ ,  $s^j \times id : \Delta^{n+1} \times N_n \rightarrow \Delta^n \times N_n$ , так что  $\partial^j$  и  $s^j$  — это кограничное отображение и отображение ковырождения для  $\Delta^n$ , а  $\partial_j$  и  $s_j$  являются граничным отображением и отображением вырождения на  $N_n$ . Мы рассмотрим форму  $w$  принимающую значения в векторном пространстве или алгебре над  $\mathcal{A}_r$  как это описано ниже.

Для группы Ли  $G$  или над  $\mathbf{R}$ , или возможно скрученной над  $\mathcal{A}_r$  и ее алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , мы зададим  $g^{-1}dg$  как каноническую  $\mathfrak{g}$ -значную 1-форму связности на  $G$  (смотри также лемму 20). При отображениях  $g \mapsto hg$  и  $dg \mapsto hdg$  мы имеем  $(g^{-1}h^{-1})(hdg) = g^{-1}dg$  в силу альтернативности группы  $G$  и тождеству Муфанга  $(xy)(zx) = x(yz)x$  для любых  $x, y, z \in \mathbf{O}$  и  $de = d(g^{-1}g) = 0 = (dg^{-1})g + g^{-1}dg = [(dg^{-1})h^{-1}](hg) + (g^{-1}h^{-1})(hdg)$ . Итерируя эти соотношения благодаря альтернативности алгебры октонионов  $\mathbf{O}$  и тождествам Муфанга в ней, мы получим условие эквивариантности в гомогенных координатах над  $\mathbf{O}$ :  $[ \dots (g^{-1}s_1^{-1}) \dots s_{m-1}^{-1} s_m^{-1} ] [ s_m(s_{m-1} \dots (s_1 dg_1) \dots) ] = g_1^{-1} dg_1$ .

Все пространство  $AG$  универсального главного  $g$ -расслоения  $AG \rightarrow BG$  несет гладкую  $\mathfrak{g}$ -значную форму  $w$ . Вычисление формы  $w$  дает:  $w|x_0, \dots, x_n, g_0, \dots, g_n| = x_0 g_0^{-1} dg_0 + x_1 g_1^{-1} dg_1 + \dots + x_n g_n^{-1} dg_n$ , где  $x_0, \dots, x_n$  — это барицентрические координаты в  $\Delta^n$ . Каждый член  $x_n g_n^{-1} dg_n \cdot s$  принадлежит  $\mathfrak{g}$  для любого  $s \in \mathfrak{g}$ , так что  $g_j^{-1} dg_j = \pi_j^*(g^{-1} dg|_{T_{g_j} G})$ , где  $\pi_j : G^{n+1} \rightarrow G$  — это проекция на  $j$ -й множитель, и  $g^{-1} dg|_{T_{g_j} G}$  есть ограничение  $g^{-1} dg$  на касательное пространство  $T_{g_j} G$  для  $G$  в точке  $g_j$ .

Для  $A\mathcal{A}_r^*$  с  $2 \leq r \leq 3$  мы определим каноническую 1-форму связности  $A(z^{-1}dz)$  по семейству  $A\mathcal{A}_r$ -значных 1-форм  $A(z^{-1}dz)^n$  на  $\Delta^n \times (\mathcal{A}_r^*)^{n+1}$ , так что  $A(z^{-1}dz)^n$  вычисляется на векторе  $(v_0, \dots, v_n)$  в точке  $|t_1, \dots, t_n, z_0[z_1 | \dots | z_n]|$  согласно формуле

$$(4) (A(z^{-1}dz)^n)|_{|t_1, \dots, t_n, z_0[z_1 | \dots | z_n]|} \cdot (v_0, \dots, v_n) = |t_1, \dots, t_n, z_0^{-1}v_0[z_1^{-1}v_1 | \dots | z_n^{-1}v_n]|$$

и формально это обозначается через

$$(5) (A(z^{-1}dz)^n)|_{|t_1, \dots, t_n, z_0[z_1 | \dots | z_n]|} = |t_1, \dots, t_n, z_0^{-1}dz_0[z_1^{-1}dz_1 | \dots | z_n^{-1}dz_n]|.$$

При  $B\mathcal{A}_r^*$  с  $2 \leq r \leq 3$  каноническая 1-форма связности  $B(z^{-1}dz)$  на  $B\mathcal{A}_r^*$  определяется семейством  $B\mathcal{A}_r$ -значных 1-форм  $B(z^{-1}dz)^n$  на  $\Delta^n \times (\mathcal{A}_r^*)^n$ , где

$$(6) B(z^{-1}dz)^n|_{|t_1, \dots, t_n, [z_1 | \dots | z_n]|} = |t_1, \dots, t_n, [z_1^{-1}dz_1 | \dots | z_n^{-1}dz_n]|.$$

Мы имеем, что

$$(\partial^j \times id)^* A(z^{-1}dz)^n|_{|t_1, \dots, t_{n-1}; z_0[z_1 | \dots | z_n]|} = |t_1, \dots, t_j, t_j, t_{j+1}, \dots, t_{n-1}; z_0^{-1}dz_0[z_1^{-1}dz_1 | \dots | z_n^{-1}dz_n]| \text{ и}$$

$$(\partial^j \times id)^* B(z^{-1}dz)^n|_{|t_1, \dots, t_{n-1}, [z_1 | \dots | z_n]|} = |t_1, \dots, t_j, t_j, t_{j+1}, \dots, t_{n-1}, [z_1^{-1}dz_1 | \dots | z_n^{-1}dz_n]| \text{ и}$$

$$(id \times \partial_j)^* A(z^{-1}dz)^{n-1}|_{|t_1, \dots, t_{n-1}; z_0[z_1 | \dots | z_n]|} = |t_1, \dots, t_{n-1}; (z_0^{-1}dz_0) + (z_1^{-1}dz_1)[z_2^{-1}dz_2 | \dots | z_n^{-1}dz_n]|$$

при  $j = 0$ ,

$$(id \times \partial_j)^* A(z^{-1}dz)^{n-1}|_{|t_1, \dots, t_{n-1}; z_0[z_1 | \dots | z_n]|} =$$

$|t_1, \dots, t_{n-1}; z_0^{-1}dz_0[z_1^{-1}dz_1|\dots|z_{j-1}^{-1}dz_{j-1}|(z_j^{-1}dz_j) + (z_{j+1}^{-1}dz_{j+1})|z_{j+2}^{-1}dz_{j+2}|\dots|z_n^{-1}dz_n]|$   
 при  $0 < j < n$ ,  
 $(id \times \partial_j)^* A(z^{-1}dz)^{n-1}|_{|t_1, \dots, t_{n-1}; z_0[z_1|\dots|z_n]} = |t_1, \dots, t_{n-1}; z_0^{-1}dz_0[z_1^{-1}dz_1|\dots|z_{n-1}^{-1}dz_{n-1}]|$  при  $j = n$ ,  
 причем  
 $(id \times \partial_j)^* B(z^{-1}dz)^{n-1}|_{|t_1, \dots, t_{n-1}; [z_1|\dots|z_n]} = |t_1, \dots, t_{n-1}; [z_2^{-1}dz_2|\dots|z_n^{-1}dz_n]|$  для  $j = 0$ , и  
 $(id \times \partial_j)^* B(z^{-1}dz)^{n-1}|_{|t_1, \dots, t_{n-1}; [z_1|\dots|z_n]} =$   
 $|t_1, \dots, t_{n-1}; [z_1^{-1}dz_1|\dots|z_{j-1}^{-1}dz_{j-1}|(z_j^{-1}dz_j) + (z_{j+1}^{-1}dz_{j+1})|z_{j+2}^{-1}dz_{j+2}|\dots|z_n^{-1}dz_n]|$  для  $0 < j < n$   
 $(id \times \partial_j)^* B(z^{-1}dz)^{n-1}|_{|t_1, \dots, t_{n-1}; [z_1|\dots|z_n]} = |t_1, \dots, t_{n-1}; [z_1^{-1}dz_1|\dots|z_{n-1}^{-1}dz_{n-1}]|$  для  $j = n$ ,  
 и используя отношения эквивалентности 4(2, 3, 5), мы получим условия совместности (1) для дифференциальных форм, так как отображению  $\partial^j$  соответствует подстановка  $x_j = 0$  и последнее соответствует  $t_j = t_{j+1}$ , потому что  $t_j = x_0 + \dots + x_{j-1}$ , причем  $h_j = e$  соответствует  $g_j = g_{j+1}$ .

Далее мы получим:

$(s^j \times id)^* A(z^{-1}dz)^n|_{|t_1, \dots, t_{n+1}; z_0[z_1|\dots|z_n]} = |t_1, \dots, t_j, t_{j+2}, \dots, t_{n+1}; z_0^{-1}dz_0, [z_1^{-1}dz_1|\dots|z_n^{-1}dz_n]|$  для  
 любого  $j$  и  $(s^j \times id)^* B(z^{-1}dz)^n|_{|t_1, \dots, t_{n+1}; [z_1|\dots|z_n]} = |t_1, \dots, t_j, t_{j+2}, \dots, t_{n+1}; [z_1^{-1}dz_1|\dots|z_n^{-1}dz_n]|$ , так  
 как  $s^j(x_0, \dots, x_{n+1}) = (x_0, \dots, x_{j-1}, x_j + x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{n+1})$  и  $x_j = 0$  соответствует  $t_j = t_{j+1}$ .  
 Тогда

$(id \times s_j)^* A(z^{-1}dz)^{n+1}|_{|t_1, \dots, t_{n+1}; z_0[z_1|\dots|z_n]} = |t_1, \dots, t_{n+1}; z_0^{-1}dz_0[0|z_1^{-1}dz_1|\dots|z_n^{-1}dz_n]|$  и  
 $(id \times s_j)^* A(z^{-1}dz)^{n+1}|_{|t_1, \dots, t_{n+1}; z_0[z_1|\dots|z_n]} =$   
 $|t_1, \dots, t_{n+1}; z_0^{-1}dz_0, [z_1^{-1}dz_1|\dots|z_j^{-1}dz_j|0|z_{j+1}^{-1}dz_{j+1}|\dots|z_n^{-1}dz_n]|$   
 при  $0 < j < n$  и  
 $(id \times s_j)^* A(z^{-1}dz)^{n+1}|_{|t_1, \dots, t_{n+1}; z_0[z_1|\dots|z_n]} =$   
 $|t_1, \dots, t_{n+1}; z_0^{-1}dz_0, [z_1^{-1}dz_1|\dots|z_n^{-1}dz_n|0]|$  для  $j = n$ ,

и кратко это записывается как

$(id \times s_j)^* B(z^{-1}dz)^{n+1}|_{|t_1, \dots, t_{n+1}; [z_1|\dots|z_n]} =$   
 $|t_1, \dots, t_{n+1}; [z_1^{-1}dz_1|\dots|z_j^{-1}dz_j|0|z_{j+1}^{-1}dz_{j+1}|\dots|z_n^{-1}dz_n]|$  для любого  $j$ .

Используя отношения эквивалентности 4(2, 3, 5) в  $AB^bG$  и  $B^{b+1}G$ , мы получим условия совместности (2).

Для скрученной группы  $G$  удовлетворяющей условиям 4( $A_1, A_2, C_1, C_2$ ) гладкая  $k$ -форма на  $AB^bG$  и  $B^{b+1}G$  определяется по индукции. Пусть определены гладкие дифференциальные  $k$ -формы на  $B^bG$  и каждом  $\Delta^k \times (B^bG)^m$  при  $k, m \geq 0$ . Тогда гладкая  $k$ -форма  $w$  на  $AB^{b+1}G$  состоит из семейства  $k$ -форм  $w^n$  на  $\Delta^n \times (B^bG)^{n+1}$  удовлетворяющим условиям совместности (1, 2). Для  $B^{b+1}G$  гладкая  $k$ -форма  $w$  на  $B^{b+1}G$  состоит из семейства  $k$ -форм  $w^n$  на  $\Delta^n \times (B^bG)^{n+1}$  удовлетворяющим условиям совместности (1, 2). Тогда гладкая  $k$ -форма  $w$  на  $\Delta^k \times (B^{b+1}G)^m$  состоит из семейства  $k$ -форм  $w^n$  на  $\Delta^k \times (\Delta^n \times (B^bG)^{n+1})^m$  удовлетворяющим условиям совместности:

$$(7) id_{\Delta^k} \times (\partial^j \times id)^m * w^n = (id_{\Delta^k} \times (id \times \partial_j)^m) * w^{n-1},$$

$$(8) (id_{\Delta^k} \times (s^j \times id)^m) * w^n = (id_{\Delta^k} \times (id \times s_j)^m) * w^{n+1}.$$

Выше было показано, что группы  $AB^b\mathcal{A}_r$  и  $B^{b+1}\mathcal{A}_r$  также имеют структуры  $\mathcal{A}_r$  векторных пространств. Поэтому каноническая 1-форма связности  $AB^b(z^{-1}dz)$  на  $AB^b\mathcal{A}_r^*$  является 1-формой на  $AB^b\mathcal{A}_r^*$ , так что она удовлетворяет индуктивной формуле:

$$(9) AB^b(z^{-1}dz)|_{|t_1, \dots, t_n, g_0[g_1|\dots|g_n]} = |t_1, \dots, t_n, B^b(g_0^{-1}g_0)[B^b(g_1^{-1}dg_1)|\dots|B^b(g_n^{-1}dg_n)]|.$$

Тогда каноническая 1-форма связности  $B^{b+1}(z^{-1}dz)$  на  $B^{b+1}\mathcal{A}_r^*$  является 1-формой на  $B^{b+1}\mathcal{A}_r^*$ , так что

$$(10) B^{b+1}(z^{-1}dz)|_{|t_1, \dots, t_n, [g_1|\dots|g_n]} = |t_1, \dots, t_n, [B^b(g_1^{-1}dg_1)|\dots|B^b(g_n^{-1}dg_n)]|,$$

где  $g_0, g_1, \dots, g_n \in B^b\mathcal{A}_r^*$  и  $B^b(g_j^{-1}dg_j)$  есть каноническая 1-форма связности  $B^b(z^{-1}dz)$  на  $B^b\mathcal{A}_r^*$  вычисленная в  $g_j$ .

**22. Ростки над кватернионами и октонионами.** Рассмотрим скрученные группы  $C, K, G$  удовлетворяющие условиям 4( $A_1, A_2, C_1, C_2$ ). Если

(CE1)  $e \rightarrow C_0 \rightarrow K_0 \rightarrow G_0 \rightarrow e$  есть топологическое центральное расширение, тогда мы скажем, что

(CE2)  $e \rightarrow C \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow e$  является топологическим скрученным расширением.

росток на топологическом пространстве  $X$  — это пучок  $\mathcal{S}$  категорий удовлетворяющий условиям ( $G_1 - G_3$ ):

(G1) для любого открытого подмножества  $V$  в  $X$  категория  $\mathcal{S}(V)$  является группоидом. Это означает, что любой морфизм обратим;

(G2) каждая точка  $x \in X$  имеет окрестность  $V_x$ , для которой  $\mathcal{S}(V_x)$  непусто;

(G3) всякие два объекта  $P_1$  и  $P_2$  в  $\mathcal{S}(V)$  являются локально изоморфными, то есть, каждая точка  $x \in V$  имеет окрестность  $Y$ , для которой ограничения  $P_1|_Y$  и  $P_2|_Y$  изоморфны.

Росток  $\mathcal{S}$  называется ограниченным пучком  $\mathcal{G}$  скрученных групп над  $\mathcal{A}_r$  удовлетворяющим условиям 5(A1, C1, C2, 7), если для любого открытого подмножества  $V$  в  $X$  и каждого объекта  $P$  в  $\mathcal{S}(V)$  существует изоморфизм пучков  $\nu : \text{Aut}(P) \rightarrow \mathcal{G}|_V$ , где  $\mathcal{G}|_V$  обозначает ограничение пучка  $\mathcal{G}$  на  $V$ , причем  $\text{Aut}(P)$  есть пучок автоморфизмов на  $P$ , так что для открытого подмножества  $Y$  в  $V$  группа  $\text{Aut}(P)(Y)$  является группой автоморфизмов ограничения  $s_Y(P)$ . Предполагается, что изоморфизм коммутирует с морфизмами для  $\mathcal{S}$  и должен быть совместим с ограничениями на меньшие открытые подмножества.

Два ростка  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{E}$  ограниченные посредством  $\mathcal{G}$  на многообразие  $N$  эквивалентны, если они удовлетворяют условиям (G4, G5):

(G4) если  $V$  — это открытое подмножество в  $X$ , тогда существует эквивалентность категорий  $\mu_V : \mathcal{S}(V) \rightarrow \mathcal{E}(V)$ , так что для любого объекта  $P$  в  $\mathcal{S}(V)$  имеется коммутативная диаграмма:

$$\begin{aligned} \mu_V : \text{Aut}_{\mathcal{S}(V)}(P) &\rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{E}(V)}(P), \\ \nu_{\mathcal{S}} : \text{Aut}_{\mathcal{S}(V)}(P) &\rightarrow \Gamma(V, \mathcal{G}), \\ \nu_{\mathcal{E}} : \text{Aut}_{\mathcal{E}(V)}(P) &\rightarrow \Gamma(V, \mathcal{G}) \text{ так что} \\ \nu_{\mathcal{S}} &= \nu_{\mathcal{E}}(\mu_V); \end{aligned}$$

(G5) для любой пары открытых подмножеств  $V$  и  $Y$  в  $N$  с  $Y \subset V$  существует обратимое естественное преобразование:  $\beta : R_{\mathcal{E}}(\mu_V) = \mu_Y(R_{\mathcal{S}})$ , где  $R_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}(V) \rightarrow \mathcal{S}(Y)$  обозначает естественное преобразование ограничения. Также накладывается условие, что для тройки открытых подмножеств  $Y \subset V \subset J$  в  $N$  выполнены условия совместности.

Если имеется главное  $G$ -расслоение  $E(B, G, \pi, \Psi)$  и расширение (CE1, CE2) топологических групп, то существует росток  $\mathcal{G}_{\pi}$  ограниченный посредством  $C_N$  на  $B$ . Этот росток строится из пучка сечений расслоения  $E(B, G, \pi, \Psi)$ , полагая для любого открытого подмножества  $V$  в  $B$  в качестве объектов и морфизмов в  $\mathcal{G}_{\pi}(V)$  следующие. Мы ассоциируем с каждым сечением  $s : V \rightarrow \pi^{-1}(V)$  для  $\pi : \pi^{-1}(V) \rightarrow V$   $G$ -эквивариантное отображение  $t_s : \pi^{-1}(V) \rightarrow G$  так что  $t_s(z)s(\pi(z)) = z$  для любого  $z \in \pi^{-1}(V)$ . Мы также имеем ограничение главного  $C$ -расслоения  $K \rightarrow G$  с  $G$  на  $\pi^{-1}(V)$  благодаря отображению  $t_s : \pi^{-1}(V) \rightarrow G$ .

Композиция  $\pi \circ \pi_s : E_s \rightarrow V$  есть главное  $K$ -расслоение имеющее поднятие до структурной группы для  $\pi^{-1}(V) \rightarrow V$  до  $K$ . Тогда пары  $(E, f)$  главных  $K$ -расслоений  $\pi_V : E(V, K, \pi, \Psi) \rightarrow V$  и главных  $C$ -расслоений  $f : E \rightarrow \pi^{-1}(V)$  таких, что имеется коммутативная диаграмма с  $\pi(f(*)) = \pi_V(*)$ .

Морфизм главных  $K$ -расслоений  $\eta : E \rightarrow E_1$  из  $(E, f)$  в  $(E_1, f_1)$  описывается с помощью условия  $f_1(\eta(*)) = f$  с соответствующей коммутативной диаграммой. Поэтому группа автоморфизмов каждого объекта  $(E, f)$  для  $\mathcal{G}_{\pi}(V)$  является группой отображений из  $V$  в  $C$  являющимся сечением пучка  $C_N$  над  $V$ , следовательно,  $\mathcal{G}_{\pi}$  есть росток ограниченный посредством  $C_N$ .

Построенный выше росток  $\mathcal{G}_{\pi}$  имеет глобальное сечение в том и только том случае, когда существует поднятие структурной группы с  $C$  до  $K$ . При  $G = BA_r^*$  расширение (CE1, CE2) принимает вид:

$1 \rightarrow \mathcal{A}_r^* \rightarrow A\mathcal{A}_r^* \rightarrow B\mathcal{A}_r^* \rightarrow 1$ . Тогда каждое главное  $A\mathcal{A}_r^*$ -расслоение тривиально, так как  $A\mathcal{A}_r^*$  контрактируемо. Итак, росток  $\mathcal{G}_{\pi}$  имеет глобальное сечение тогда и только тогда, когда  $E(N, B\mathcal{A}_r^*, \pi, \Psi)$  есть тривиальное  $B\mathcal{A}_r^*$ -расслоение.

Построим теперь другой росток  $\mathcal{L}_{\pi}$  локальных сечений расслоения  $E(B, B\mathcal{A}_r^*, \pi, \Psi)$ . Для любого открытого подмножества  $V$  в  $B$  объекты в  $\mathcal{L}_{\pi}(V)$  являются сечениями для  $E$  над  $V$ , так что каждое локальное сечение  $s : V \rightarrow \pi^{-1}(V)$  индуцирует  $B\mathcal{A}_r^*$ -эквивариантное отображение  $t_s : \pi^{-1}(V) \rightarrow B\mathcal{A}_r^*$ , что индуцирует отображение  $\tau_s = t_s(s(*)) : V \rightarrow B\mathcal{A}_r^*$ .

Если  $E_s$  — это главное  $\mathcal{A}_r^*$ -расслоение над  $V$  индуцированное отображением  $\tau_s$ , тогда морфизм между объектами  $s, s_1 \in \mathcal{L}_{\pi}(V)$  индуцирует морфизм  $E_s \rightarrow E_{s_1}$  соответствующих главных  $\mathcal{A}_r^*$ -расслоений. Тогда  $\mathcal{L}_{\pi}$  — это росток ограниченный посредством  $(\mathcal{A}_r^*)_N$ , где  $2 \leq r \leq 3$ . Поэтому естественное преобразование  $\mathcal{L}_{\pi}(V) \rightarrow \mathcal{G}_{\pi}(V)$  переводящее сечение  $s$  в ограничение  $E_s$  универ-



сального главного  $\mathcal{A}_r^*$ -расслоения посредством  $t_s$  является эквивалентностью категорий, которая продолжается до эквивалентности ростков  $\mathcal{L}_\pi \rightarrow \mathcal{G}_\pi$ .

Для ростка  $\mathcal{G}$  на  $N$  ограниченного посредством  $(\mathcal{A}_r^*)_N$  с  $2 \leq r \leq 3$ , соотнесение каждому объекту  $Q$  в  $\mathcal{G}(V)$   $\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^1$ -торзора  $\mathcal{C}_{OQ}$  на  $V$  индуцирует структуру связности. Этот торзор  $\mathcal{C}_{OQ}$  состоит из пучков, на которых  $\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^1$  действует таким образом, что для каждой точки  $x \in N$  существует окрестность  $V$  имеющая то свойство, что для любого открытого подмножества  $Y \subset V$  группа  $\mathcal{C}_{OQ}(Y)$  является главным гомогенным пространством относительно группы  $\Gamma(Y, \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^1)$ . Это сопоставление  $Q \mapsto \mathcal{C}_{OQ}(V)$  должно быть функториальным согласно ограничениям с  $\hat{V}$  на  $Y$ . Более того, для любого морфизма  $\phi : Q \rightarrow J$  объектов из  $\mathcal{G}(V)$  существует изоморфизм  $\phi_* : \mathcal{C}_{OQ}(V) \rightarrow \mathcal{C}_{OJ}(V)$  для  $\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^1$ -торзоров. Поскольку  $\mathcal{G}$  — это росток, то  $\phi$  есть изоморфизм и  $\phi_*$  совместимо с композицией морфизмов и с ограничениями на меньшие открытые подмножества,  $Y \subset V$ . Если  $\phi$  — это автоморфизм для  $Q$  индуцированный  $\mathcal{A}_r^*$ -значными функциями  $g$ , то мы предположим, что  $\phi_*$  есть автоморфизм  $\nabla \mapsto \nabla - dLn(g)$  для  $\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^1$ -торзора  $\mathcal{C}_{OQ}(V)$ .

Рассмотрим связность  $\omega$  на гладком главном  $BA_r^*$ -расслоении  $E(N, BA_r^*, \pi, \Psi)$ , и пусть  $V$  — это открытое подмножество в  $N$  такое, что  $\mathcal{G}_\pi(V)$  непусто, и пусть  $\omega_V$  будет ограничением  $\omega$  на  $\pi^{-1}(V)$ . Тогда каждому элементу  $(E, f)$  of  $\mathcal{G}_\pi(V)$  можно сопоставить множество  $\mathcal{C}_{OE}^\omega(V)$  связностей на  $E$  совместимое с  $\omega$ . Если  $\omega(q(*)) = f^*\omega$  для главных  $\mathcal{A}_r^*$ -расслоений  $q : A\mathcal{A}_r \rightarrow B\mathcal{A}_r$  и  $f : E \rightarrow \pi^{-1}(V)$ , тогда  $\omega$  порождает элемент  $\hat{\omega} \in \mathcal{C}_{OE}(V)$ . Поэтому сопоставление  $\omega \mapsto \mathcal{C}_{OE}^\omega$  есть структура связности на  $\mathcal{G}_\pi$ .

Эквивалентность ростков  $\mathcal{L}_\pi \rightarrow \mathcal{G}_\pi$  влечет продолжение ограниченной структуры связности с  $\mathcal{G}_\pi$  до  $\mathcal{L}_\pi$ .

**23. Следствие.** *Отображение сопоставляющее классу изоморфных главных  $BA_r^*$ -расслоений  $E(B, BA_r^*, \pi, \Psi)$ ,  $\pi : E = A\mathcal{A}_r^* \rightarrow B\mathcal{A}_r^*$ , класс эквивалентности ростка сечения  $\mathcal{L}_\pi$  для  $E(B, BA_r^*, \pi, \Psi)$  индуцирует изоморфизм между группой классов изоморфных главных  $BA_r^*$ -расслоений и группой классов эквивалентности ростков ограниченных посредством  $\mathcal{A}_r^*$ .*

**24. Следствие.** *Отображение сопоставляющее классу изоморфных главных  $BA_r^*$ -расслоений  $E(B, BA_r^*, \pi, \Psi)$ ,  $\pi : E = A\mathcal{A}_r^* \rightarrow B\mathcal{A}_r^*$ , связность  $\omega$  класса эквивалентности ростка сечения  $\mathcal{L}_\pi$  для  $E(B, BA_r^*, \pi, \Psi)$  со структурой связности на  $\mathcal{L}_\pi$  индуцированной посредством  $\omega$ , вводит изоморфизм между группой классов изоморфных главных  $BA_r^*$ -расслоений со связностью на группу классов эквивалентности ростков ограниченных посредством  $\mathcal{A}_r^*$  со структурой связности.*

**Доказательство.** Это вытекает из предложения 19 и §22, так как случай  $2 \leq r \leq 3$  получается из комплексного случая (смотри теоремы A1, A2 [13]) с помощью дополнительной процедуры удвоения групп с генераторами удвоения:  $\mathbf{H}$  из  $\mathbf{C}$ , и  $\mathbf{O}$  из  $\mathbf{H}$ , причем рассматриваемые группы удовлетворяют условиям 4(A1, A2, C1, C2).

### 25. Пучки, геометрические решетки и ростки групп оберток.

Если  $G$  удовлетворяет условиям 4(A1, A2, C1, C2), то группы оберток  $(W^M E)_{t, H}$  удовлетворяют условиям 4(A1, A2, C1, C2) также, так как  $G^k$  удовлетворяет им являясь мультипликативной подгруппой кольца  $\hat{G}^k$ , и  $(W^{M, \{s_{0,q}: q=1, \dots, k\}} E; N, G, \mathbf{P})_{t, H}$  есть главное  $G^k$ -расслоение над коммутативной группой  $(W^{M, \{s_{0,q}: q=1, \dots, k\}} N)_{t, H}$  (смотри предложения 7(1, 2) [22]). Таким образом, группы оберток можно взять как частные случаи групп для пучков, геометрических решеток и конструкций ростков (смотри §§1, 4, 11-13, 22, следствие 9, леммы 16 [22], 17, и т.д.).

Более конкретно это можно выполнить следующим образом. Для псевдо-многообразия  $X = X_1 \times X_2$  над алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$ , где  $X_1$  и  $X_2$  — это  $H_r^t$ -псевдо-многообразия над алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$ , мы предположим, что для любых точек  $s_{0,1}, \dots, s_{0,k}$  в  $X_1$  и всякой окрестности  $U$  для  $\{s_{0,1}, \dots, s_{0,k}\}$  в  $X_1$ , и точки  $y_0 \in X_2$  и каждой окрестности  $V$  для  $y_0$  в  $X_2$  существуют многообразия  $M$  и  $N$  такие, что  $\{s_{0,1}, \dots, s_{0,k}\} \subset M \subset U$  и  $y_0 \in N \subset V$  для которого существует главное  $G$ -расслоение  $E(N, G, \pi, \Psi)$  с отмеченной группой  $G$  удовлетворяющей условиям §2 [21].

Если

$$(1) J(\Lambda) = \prod_{\alpha \in \Lambda} J_\alpha$$

есть произведение топологических групп  $J_\alpha$ , где  $\Lambda$  — это множество, и  $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$ , тогда существует естественная проекция групп гомоморфизмов

$$(2) \hat{s}_{\Lambda_2, \Lambda_1} : J(\Lambda_1) \rightarrow J(\Lambda_2).$$

Тогда мы определим пред-пучок  $F$  на  $X$  такой, что

$$(3) F(U \times V) = \prod_{s_{0,1}, \dots, s_{0,k} \in M \subset U; y_0 \in N \subset V} (W^{M, \{s_{0,q}: q=1, \dots, k\}} E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$$

и  $s_{U_2 \times V_2, U_1 \times V_1} : F(U_1 \times V_1) \rightarrow F(U_2 \times V_2)$ , так как  $(W^{M_2, \{s_{0,q}: q=1, \dots, k\}} E; N_2, G, \mathbf{P})_{t,H} \subset (W^{M_1, \{s_{0,q}: q=1, \dots, k\}} E; N_1, G, \mathbf{P})_{t,H}$  при  $\{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\} \subset M_2 \subset M_1$  и  $y_0 \in N_2 \subset N_1$  удовлетворяющих условиям теоремы 10 [22], где  $U_2 \subset U_1$  и  $V_2 \subset V_1$ , причем открытые подмножества вида  $U \times V$  содержат базу топологии для  $X$ .

Если  $\mathcal{S}$  — это пучок на  $X$  и  $\mathcal{S}(U)$  удовлетворяет условиям 4(A1, A2, C1, C2) для любого  $U$  открытого в  $X$ , тогда мы назовем  $\mathcal{S}$  скрученным пучком над  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$ .

При  $k = 1$  мы рассмотрим  $x = \{s_0; y_0\} \in X$ , но в общем мы берем  $x = \{s_{0,1}, \dots, s_{0,k}; y_0\} \in X_1^k \times X_2$  вместо  $X_1 \times X_2$ . Тогда множество  $\mathcal{F}_x$  всех ростков пред-пучка  $F$  в точке  $x \in X_1^k \times X_2$  является индуктивным пределом  $\mathcal{F}_x = \text{ind} - \lim F(U \times V)$  взятому по всем открытым окрестностям  $U^k \times V$  точки  $x$  в  $X_1^k \times X_2$ . Тогда применение общей конструкции §1 дает пучок  $\mathcal{S}_{W, X_1, X_2}$  групп оберток. Он скручен над  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$  для группы  $G$  скрученный над генераторами  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$  при  $2 \leq r \leq 3$ . Этот пучок коммутативен, если группа  $G$  коммутативна.

Такой пучок получается из данного ниже обобщения взятием постоянного пучка группы  $G = G(U)$  для любого  $U$  открытого в  $X_1$ .

Более общим образом, если имеется пучок  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{X_1}$  на  $X_1$  групп такой, что для любого  $U$  открытого в  $X_1$  группа  $G(U)$  удовлетворяет условиям §2 в [21], тогда мы положим

$$(4) F(U \times V) = \prod_{s_{0,1}, \dots, s_{0,k} \in M \subset U; y_0 \in N \subset V} (W^{M, \{s_{0,q}: q=1, \dots, k\}} E; N, G(U), \mathbf{P})_{t,H},$$

где  $s_{U_2, U_1} : G(U_1) \rightarrow G(U_2)$  является отображение ограничения для любого  $U_2 \subset U_1$ , так что определена структура параллельного переноса для  $M \subset U$ ,  $\mathcal{G}_{X_1}$  может быть скрученным при  $2 \leq r \leq 3$ . Поэтому в силу теоремы 10 [22] и (1, 2) выше существует отображение ограничения  $s_{U_2 \times V_2, U_1 \times V_1} : F(U_1 \times V_1) \rightarrow F(U_2 \times V_2)$  для любых открытых подмножеств  $U_2 \subset U_1$  и  $V_2 \subset V_1$ . Тогда этот пред-пучок индуцирует пучок  $\mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}}$  групп оберток. Если  $\mathcal{G}$  — это скрученный над  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$  при  $2 \leq r \leq 3$  пучок, тогда пучок  $\mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}}$  скручен над  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$ . Если пучок  $\mathcal{G}$  коммутативен, тогда пучок  $\mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}}$  тоже коммутативен.

**26. Предложение.** Если  $h_j : X_j \rightarrow Y_j$  — это  $H_p^t$  дифференцируемые отображения из  $X_j$  на  $Y_j$ ,  $j = 1, 2$ , где  $X = X_1 \times X_2$  и  $Y = Y_1 \times Y_2$ ,  $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2$  являются  $H_p^t$ -псевдо-многообразиями над  $\mathcal{A}_r$ ,  $0 \leq r \leq 3$ ,  $h_3 : \mathcal{G}_{Y_1} \rightarrow \mathcal{G}_{X_1}$  есть  $H_p^t$  гомоморфизм пучков,

$$t \geq [\max\{\dim(X_1), \dim(X_2), \dim(Y_1), \dim(Y_2)\}]/2 + 2.$$

Тогда они индуцируют гомоморфизмы

$$(h_1, h_3)_* : \mathcal{S}_{W, Y_1, X_2, \mathcal{G}_{Y_1}} \rightarrow \mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}_{X_1}} \quad \text{и} \quad h_{2,*} : \mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}_{X_1}} \rightarrow \mathcal{S}_{W, X_1, Y_2, \mathcal{G}_{X_1}} \quad \text{пучков оберток.}$$

**Доказательство.** Если  $M_2 \subset U_2 \subset Y_1$ , тогда  $h_1^{-1}(M_2) =: M_1 \subset h_1^{-1}(U_2) =: U_1 \subset X_1$  и  $h_1^{-1}(U_2) =: U_1$  открыто в  $X_1$  для любого  $U_2$  открытого в  $Y_1$ . В силу следствия 9 [21] и предложения 7.1 и теоремы 10 [22] существует гомоморфизм  $(h_1, h_3)_* : (W^{M_2, \{v_{0,q}: q=1, \dots, k_2\}} E; N, G(U_2), \mathbf{P})_{t,H} \rightarrow (W^{M_1, \{s_{0,q}: q=1, \dots, k_1\}} E; N, G(U_1), \mathbf{P})_{t,H}$ , где  $h_3 : G(U_2) \rightarrow G(U_1)$  — это группа гомоморфизмов,  $h_1(s_{0,q}) = v_{0,a(q)}$  для любого  $q = 1, \dots, k_2$ ,  $1 \leq a = a(q) \leq k_2$ . Выберем, в частности,  $s_{0,q}$  таким, чтобы  $k_1 = k_2 = k$ . Поэтому существует гомоморфизм пред-пучков  $(h_1, h_3)_* : F_{Y_1, X_2, \mathcal{G}_{Y_1}}(U_2 \times V) \rightarrow F_{X_1, X_2, \mathcal{G}_{X_1}}(U_1 \times V)$  для любого  $U_2$  открытого в  $Y_1$  и  $V$  открытого в  $X_2$ . Этот гомоморфизм пред-пучков индуцирует гомоморфизм пучков.

Если  $f : M_1 \rightarrow N_1 \subset X_2$ , то  $h_2 \circ f : M_1 \rightarrow N_2$  для  $H_p^t$  псевдо-многообразий  $M_1$  в  $X_1$ ,  $N_1$  в  $X_2$ ,  $N_2$  в  $Y_2$ . Если  $f$  и  $h_2$  — это  $H_p^t$  отображения, тогда в силу теоремы вложения Соболева [34] при  $t \geq [\max\{\dim(X_1), \dim(X_2), \dim(Y_1), \dim(Y_2)\}]/2 + 2$  мы получим, что существует производная  $f'$ , и она непрерывна почти всюду на  $X_1$  и  $h_2(f')$  является  $H_p^t$  отображением (смотри также [7]). Тогда  $h_{2,*}(\mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}(x)) := \mathbf{P}_{h_2 \circ \hat{\gamma}, u}(x)$  влечет, что  $h_{2,*} \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u} \rangle_{t,H} = \langle \mathbf{P}_{h_2 \circ \hat{\gamma}, u} \rangle_{t,H}$  для классов  $R_{t,H}$  эквивалентных элементов, так как группа  $G(U)$  и многообразие  $M$  заданы, и это же выполняется для  $N_1$  и  $N_2$ . Поэтому существует индуцированный гомоморфизм

$$h_{2,*} : (W^{M, \{s_{0,q}: q=1, \dots, k\}} E; N_1, G(U), \mathbf{P})_{t,H} \rightarrow (W^{M, \{s_{0,q}: q=1, \dots, k\}} E; N_2, G(U), \mathbf{P})_{t,H},$$

где  $N_1 \subset V_1 \subset X_2$ ,  $N_1 = h_2^{-1}(N_2)$ ,  $y_{0,1} \in N_1$ ,  $h_2(y_{0,1}) = y_{0,2}$ ,  $y_{0,2} \in N_2 \subset V_2 \subset Y_2$ . Итак, существует гомоморфизм пред-пучков  $h_{2,*} : F_{X_1, X_2, \mathcal{G}_{X_1}}(U \times V_1) \rightarrow F_{X_1, Y_2, \mathcal{G}_{X_1}}(U \times V_2)$  (смотри §25), где  $V_1 = h_2^{-1}(V_2)$ ,  $V_2$  открыто в  $Y_2$ . Таким образом,  $h_{2,*}$  индуцирует гомоморфизм пучков оберток.

**27. Предложение.** Пусть  $e \rightarrow \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_3 \rightarrow e$  является точной последовательностью

пучков на  $X_1$ . Тогда существует точная последовательность  $e \rightarrow \mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}_1} \rightarrow \mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}_2} \rightarrow \mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}_3} \rightarrow e$  пучков оберток, где  $e$  — это единичный элемент (смотри §25).

**Доказательство.** Для любого подмножества  $U$  открытого в  $X_1$  существует короткая точная последовательность групп  $e \rightarrow G_1(U) \rightarrow G_2(U) \rightarrow G_3(U) \rightarrow e$  такая, что  $G_3(U)$  изоморфна фактор-группе  $G_2(U)/G_1(U)$ , где  $G_1(U)$  — это нормальная замкнутая подгруппа в  $G_2(U)$ . В силу теоремы 10 [22] существует короткая точная последовательность  $e \rightarrow (W^M E; N, G_1(U), \mathbf{P})_{t, H} \rightarrow (W^M E; N, G_2(U), \mathbf{P})_{t, H} \rightarrow (W^M E; N, G_3(U), \mathbf{P})_{t, H} \rightarrow e$ . Тогда это индуцирует короткую точную последовательность пред-пучков оберток  $e \rightarrow F_{G_1(U)}(U) \rightarrow F_{G_2(U)}(U) \rightarrow F_{G_3(U)}(U) \rightarrow e$ , и последнее в свою очередь дает короткую точную последовательность пучков оберток (смотри в общем случае также [3]).

**28. Под-пучок оберток.** В построении §25 рассмотрим под-пред-пучок соответствующий  $F_N(U)$ , то есть при  $V = N$  с фиксированной отмеченной точкой  $y_0 \in N$ , где

$$(1) F_N(U) := \prod_{s_{0,1}, \dots, s_{0,k} \in M \subset U} (W^{M, \{s_{0,q}: q=1, \dots, k\}} E; N, G(U), \mathbf{P})_{t, H},$$

где  $s_{U_2, U_1}^G : G(U_1) \rightarrow G(U_2)$  — это отображение ограничения для любого  $U_2 \subset U_1$ . В силу теоремы 10 [22] существует отображение ограничения  $s_{U_2, U_1} : F_N(U_1) \rightarrow F_N(U_2)$  для любого открытого  $U_2 \subset U_1$ . Тогда этот пред-пучок индуцирует пучок  $\mathcal{S}_{W, X_1, \mathcal{G}}(N)$  групп оберток, который является пред-пучком для  $\mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}}$ .

**29. Предложение.** Пусть  $\eta : N_1 \rightarrow N_2$  — это  $H_p^{t'}$ -ретракция  $H_p^{t'}$  многообразий,  $N_2 \subset N_1$ ,  $\eta|_{N_2} = id$ ,  $y_0 \in N_2$ , где  $t' \geq t$ ,  $M$  есть  $H_p^t$  многообразие,  $E(N_1, G, \pi, \Psi)$  и  $E(N_2, G, \pi, \Psi)$  являются главными  $H_p^{t'}$  расслоениями со структурной группой  $G$  удовлетворяющей условиям §2 [21], тогда существует гомоморфизм пучков  $\eta_*$  из  $\mathcal{S}_{W, X_1, \mathcal{G}}(N_1)$  на  $\mathcal{S}_{W, X_1, \mathcal{G}}(N_2)$ .

**Доказательство.** В силу предложения 17 [22] существует гомоморфизм групп  $\eta_*(U)$  из  $F_{N_1}(U)$  на  $F_{N_2}(U)$  для любого  $U$  открытого в  $X_1$ , так что  $\{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\} \subset M \subset X_1$ . Если  $\mathcal{B}$  есть пучок на  $X$ , и  $\eta\mathcal{B}(U) = \mathcal{B}(\eta^{-1}(U))$  для любого  $U$  открытого в  $X$ , тогда существует пучок  $\eta\mathcal{B}$ , который называется образом пучка  $\mathcal{B}$  (смотри также [3]). С другой стороны,  $\eta_*(U_2) \circ s_{U_2, U_1} = s_{U_2, U_1} \circ \eta_*(U_1)$  для каждого открытого  $U_2 \subset U_1$  благодаря условию 25(2). Тогда  $\mathcal{S}_{W, X_1, \mathcal{G}}(N_2)$  — это образ  $\mathcal{S}_{W, X_1, \mathcal{G}}(N_1)$ , то есть  $\eta_*\mathcal{S}_{W, X_1, \mathcal{G}}(N_1) = \mathcal{S}_{W, X_1, \mathcal{G}}(N_2)$ , так как существует  $H_p^t$  отображение  $id \times \eta$  из  $M \times N_1$  на  $M \times N_2$  (смотри §28). Это дает гомоморфизм пучков (смотри также §3 [3]).

**30. Замечание.** Для непрерывного отображения  $f : X \rightarrow Y$  и пучка  $\mathcal{B}$  на  $Y$  прообраз  $f^*\mathcal{B}$  является пучком на  $X$  таким, что  $f^*\mathcal{B} = \{(x, q) \in X \times \mathcal{B} : f(x) = \pi(q)\}$  (смотри [3]). В частности, если  $f : X \rightarrow Y$  есть  $H_p^t$  отображение такое, что  $f = (f_1, f_2)$ ,  $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ ,  $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ , тогда существует прообраз пучка  $f^*\mathcal{S}_{W, Y_1, Y_2, \mathcal{G}_2}$ , где  $f_1^*\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1$ .

**31. Следствие.** Пусть выполнены условия предложения 26, где  $h_j$  — это диффеоморфизмы при  $j = 1, 2$  и изоморфизм при  $j = 3$ , тогда  $\mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}_{X_1}}$  и  $\mathcal{S}_{W, Y_1, Y_2, \mathcal{G}_{Y_1}}$  являются изоморфными пучками.

**Доказательство.** Это вытекает из предложения 26 и замечания 30.

**32. Предложение.** Пусть пучок  $\mathcal{G}$  представляется индуктивным пределом  $ind - \lim_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{G}_\alpha$  пучков  $\mathcal{G}_\alpha$ , где  $\Lambda$  — это направленное множество. Тогда пучок оберток  $\mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}}$  является индуктивным пределом  $ind - \lim_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}_\alpha}$ .

**Доказательство.** Для любого подмножества  $U$  открытого в  $X_1$  и всех  $\alpha < \beta \in \Lambda$  существует гомоморфизм  $\pi_\beta^\alpha : \mathcal{G}_\alpha(U) \rightarrow \mathcal{G}_\beta(U)$ . Тогда пучок  $\mathcal{G}$  определяется как пучок порожденный пред-пучком  $U \mapsto ind - \lim_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{G}_\alpha(U)$  (смотри также главу 1, §5 в [3]). Каждый гомоморфизм  $\pi_\beta^\alpha$  порождает гомоморфизм главных расслоений из  $E(N, G_\alpha, \pi, \Psi)$  в  $E(N, G_\beta, \pi, \Psi)$ . В силу предложения 26 для любого  $\alpha < \beta \in \Lambda$  и всякого подмножества  $U$  открытого в  $X_1$  существует гомоморфизм групп  $\pi_{\beta,*}^\alpha : \mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}_\alpha}(U) \rightarrow \mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}_\beta}(U)$  порожденный  $\pi_\beta^\alpha$ . Таким образом, существует  $\mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}} := ind - \lim_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}_\alpha}$ .

**33. Следствие.** Пусть  $X_1 = ind - \lim_{\alpha \in \Lambda} X_{1,\alpha}$  и  $\mathcal{G} = ind - \lim_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{G}_\alpha$  выполнены условия предложения 26, где  $\mathcal{G}_\alpha = \mathcal{G}_{X_{1,\alpha}}$ , и  $X_{1,\alpha}$  есть  $H_p^t$  псевдо-многообразие для любого  $\alpha$  в направленном множестве  $\Lambda$ . Тогда  $\mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}} = ind - \lim_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{S}_{W, X_{1,\alpha}, X_2, \mathcal{G}_\alpha}$ .

**Доказательство.** Для  $H_p^t$  псевдо-многообразия  $X_1$  база его топологии состоит из всех тех подмножеств  $U$  в  $X_1$  таких, что  $U = \bigcap_{v=1}^m U_{\alpha(v)}$  для некоторого  $m \in \mathbf{N}$  и  $\alpha(1), \dots, \alpha(m) \in \Lambda$ , где  $V_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(U_{\alpha(v)})$  открыто в  $X_\alpha$ ,  $\pi_\alpha : X_{1,\alpha} \rightarrow X_1$  есть вложение для любого  $\alpha$  в  $\Lambda$ . В силу пред-

ложения 26 для любого подмножества  $U$  открытого в  $X_1$  и  $\alpha < \beta \in \Lambda$  существует гомоморфизм групп  $\pi_{\beta,*}^{\alpha} : \mathcal{S}_{W,X_{1,\alpha},X_{2,\mathcal{G}_\alpha}}(U) \rightarrow \mathcal{S}_{W,X_{1,\beta},X_{2,\mathcal{G}_\beta}}(U)$ . В силу предложения 32 это порождает  $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}}$  как индуктивный предел пучков  $\mathcal{S}_{W,X_{1,\alpha},X_{2,\mathcal{G}_\alpha}}$ .

**34. Теорема.** Пусть  $X_2 = X_{2,1} \times X_{2,2}$ , где  $X_1$ ,  $X_{1,2}$  и  $X_{2,2}$  являются  $H_p^t$  и  $H_p^t$  псевдо-многообразиями соответственно над  $\mathcal{A}_r$  как в §25. Тогда ограничение полного тензорного произведения пучков оберток  $\mathcal{S}_{W,X_{1,X_{2,1},\mathcal{G}_1}} \hat{\otimes} \mathcal{S}_{W,X_{1,X_{2,2},\mathcal{G}_2}}$  на  $\Delta_1 \times X_2$  изоморфно с  $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}}$ , где  $\mathcal{G}$  — это тензорное произведение  $\mathcal{G} := \mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$  пучков  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$  на  $X_1$ ,  $\Delta_1 := \{(x, x) : x \in X_1\}$  обозначает диагональ в  $X_1^2$ .

**Доказательство.** Если  $\mathcal{B}_1$  и  $\mathcal{B}_2$  — это пучки на топологическом пространстве  $X$ , тогда  $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$  обозначает пучок на  $X$  порожденный пред-пучком  $U \mapsto \mathcal{B}_1(U) \otimes \mathcal{B}_2(U)$ , где  $(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)_x \cong \mathcal{B}_{1,x} \otimes \mathcal{B}_{2,x}$  есть естественный изоморфизм слоев. Пучок  $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$  называется тензорным произведением пучков.

Рассмотрим естественные проекции  $\phi_1 : X_2 \rightarrow X_{2,1}$  и  $\phi_2 : X_2 \rightarrow X_{2,2}$  имеющие продолжения  $id \times \phi_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times X_{2,1}$  и  $id \times \phi_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times X_{2,2}$ . Поэтому существует пучок  $\mathcal{S} := \mathcal{S}_{W,X_{1,X_{2,1},\mathcal{G}_1}} \hat{\otimes} \mathcal{S}_{W,X_{1,X_{2,2},\mathcal{G}_2}} := [(id \times \phi_1)^* \mathcal{S}_{W,X_{1,X_{2,1},\mathcal{G}_1}}] \otimes [(id \times \phi_2)^* \mathcal{S}_{W,X_{1,X_{2,2},\mathcal{G}_2}}]$ , который является полным тензорным произведением пучков (смотри в общем случае главу 1, §5 в [3]).

Если  $\gamma : M \rightarrow X_2$  является  $H_p^t$  отображением сохраняющим отмеченные точки, тогда  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ , где  $\gamma_j : M \rightarrow X_{2,j}$  для  $j = 1, 2$ ,  $\gamma(s_{0,q}) = y_0$ ,  $\gamma_j(s_{0,q}) = y_{j,0}$  для любого  $q = 1, \dots, k$  и  $j = 1, 2$ ,  $y_0 = y_{1,0} \times y_{2,0}$ . Тогда мы получим поднятие  $\hat{\gamma} : \hat{M} \rightarrow X_2$ , так что  $\gamma \circ \Xi = \hat{\gamma}$  (смотри §§2, 3 и 6 в [21]). Поэтому  $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(\hat{s}_{0,k+q}) = \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,u_1}(\hat{s}_{0,k+q}) \otimes \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2,u_2}(\hat{s}_{0,k+q}) \in G$  для любого  $q = 1, \dots, k$ , с  $G = G_1 \otimes G_2$  являющимся прямым произведением групп для  $G_1 = \mathcal{G}_1(U_1)$  и  $G_2 = \mathcal{G}_2(U_2)$  для всякого  $U_j$  открытого в  $X_1$ ,  $j = 1, 2$ , где  $u \in E_{y_0}$ ,  $u_j \in E_{j,y_{j,0}}$ ,  $N = N_1 \times N_2$ ,  $N_j \subset V_j \subset X_{2,j}$ ,  $E = E(N, G, \pi, \Psi)$ ,  $E_j = E(N_j, G_j, \pi_j, \Psi_j)$  — это главные расслоения,  $y_0 = y_{0,1} \times y_{0,2}$ ,  $y_{j,0} \in N_j$  являются отмеченными точками,  $V_j$  открыто в  $X_{2,j}$  при  $j = 1, 2$  (смотри также §25).

Для классов эквивалентных структур параллельных переносов мы получим  $\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} \rangle_{t,H} = \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,u_1} \rangle_{t,H} \otimes \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2,u_2} \rangle_{t,H}$ , следовательно,  $F(U \times (V_1 \times V_2))$  изоморфно с  $(\phi_1)^* F(U \times V_1) \otimes (\phi_2)^* F(U \times V_2)$  для любого подмножества  $U$  открытого в  $X_1$  и всех  $V_j$  открытых в  $X_{2,j}$ ,  $j = 1, 2$ , так как открытые множества вида  $V = V_1 \times V_2$  образуют базу топологии в  $X_2$ , где  $F(U \times V_j)$  дано для группы  $\mathcal{G}_j(U)$ . Здесь  $U = U_1 = U_2$  и  $(\phi_1)^* F(U \times V_1) \otimes (\phi_2)^* F(U \times V_2)$  изоморфно ограничению  $(id \times \phi_1)^* F(U \times V_1) \otimes (id \times \phi_2)^* F(U \times V_2)$  с  $U^2 \times V_1 \times V_2$  на  $\Delta(U) \times V_1 \times V_2$ , где  $\Delta(U)$  обозначает диагональ в  $U^2$ . Таким образом,  $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}}$  изоморфно ограничению полного тензорного произведения пучков  $\mathcal{S}_{W,X_{1,X_{2,1},\mathcal{G}_1}} \hat{\otimes} \mathcal{S}_{W,X_{1,X_{2,2},\mathcal{G}_2}}$  на  $\Delta_1 \times X_2$ .

### 35. Скрученные когомологии Александера-Спаньера.

Пусть  $G$  — это группа удовлетворяющая условиям 4(A1, A2), которая, в частности, может быть группой оберток для  $\mathcal{A}_r$  псевдо-многообразий с  $2 \leq r \leq 3$ . Для открытого подмножества  $U$  в  $X$  обозначим через  $A^m(U; G)$  группу всех функций  $f : U^{m+1} \rightarrow G$  с поточечным умножением в  $G$  в качестве групповой операции. Поэтому функтор  $U \mapsto A^m(U; G)$  является пред-пучком на  $X$  удовлетворяющим условиям:

(S2) если  $\{U_j : j\}$  — это семейство открытых подмножеств в  $X$  такое, что  $\bigcup_j U_j = U$ , тогда для семейства элементов  $s_j \in A^m(U_j; G)$  такого, что  $s_j|_{U_j \cap U_k} = s_k|_{U_j \cap U_k}$  для любого  $j, k$  существует  $s \in A^m(U; G)$  такое, что  $s|_{U_j} = s_j$  для любого  $j$ . Для удовлетворения этого условия мы положим  $s_j = f_j : U_j^{m+1} \rightarrow G$  являющимися функциями здесь, и  $s = f$  является их линейной комбинацией такой, что  $f|_{U_j^{m+1}} = s_j$ , причем  $f$  на  $X^{m+1} \setminus (\bigcup_j U_j^{m+1})$  произвольно. Свойство

(S1) если  $U = \bigcup_j U_j$ , где  $U_j$  открыто в  $X$ , и  $f, g \in A^{m+1}(U; G)$  совпадают на  $U_j^{m+1}$  для любого  $j$ , тогда  $f = g$  на  $\bigcup_j U_j^{m+1}$  очевидно, так как  $f, g$  являются функциями.

Напомним, что семейство  $\phi$  замкнутых подмножеств в  $X$  называется семейством носителей, если оно удовлетворяет условиям (SP1, SP2):

(SP1) если  $B$  есть замкнутое подмножество в  $C$ , где  $C \in \phi$ , тогда  $B \in \phi$ ;

(SP2) если  $B_1, \dots, B_m \in \phi$ ,  $m \in \mathbf{N}$ , тогда  $\bigcup_{j=1}^m B_j \in \phi$ .

Семейство  $\phi$  носителей называется паракомпактифицирующим, если оно удовлетворяет двум дополнительным условиям:

(SP3) каждый element в  $\phi$  является паракомпактным пространством;

(SP4) каждое множество из  $\phi$  имеет замкнутую окрестность принадлежащую  $\phi$ .

Объединение  $\bigcup_{C \in \phi} C =: \mathbf{E}(\phi)$  называется распространением для  $\phi$ . Мы положим  $\Gamma_\phi(\mathcal{S}) := \{s \in \mathcal{S}(X) : |s| \in \phi\}$  для пучка  $\mathcal{S}$  на  $X$ , где  $|s| := \{x \in X : s(x) \neq e\}$  обозначает его носитель. Очевидно, что  $\Gamma_\phi(\mathcal{S})$  является под-группой в  $\mathcal{S}(X)$ . Для пред-пучка  $A$  на  $X$  мы положим  $A_\phi(X) := \{s \in A(X) : |s| \in \phi\}$ . Для пред-пучка  $A$  на  $X$  мы положим  $A_\phi(X) := \{s \in A(X) : |s| \in \phi\}$ .

Пусть теперь  $A^m(X; G)$  является пучком порожденным пред-пучком  $A^m(.; G)$ . Мы зададим дифференциал  $d : A^m(U; G) \rightarrow A^{m+1}(U; G)$  формулой:

$df(x_0, \dots, x_{m+1}) = \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j f(x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{m+1})$ , где  $f : U^{m+1} \rightarrow G$  является произвольной функцией. Тогда  $f = \sum_{k=0}^{2^r-1} f_k i_k$ , где  $f_k \in \hat{G}_k$ ,  $\{i_0, \dots, i_{2^r-1}\}$  являются генераторами алгебры Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$ ,  $2 \leq r \leq 3$ . Таким образом,  $d$  является гомоморфизмом пред-пучков и  $d^2 = 0$ , так как  $df = \sum_{k=0}^{2^r-1} (df_k) i_k$ .

Тогда скрученные когомологии Александра-Спаньера определяются как

$$A_S H_\phi^m(X; G) = H^m(A_\phi^*(X; G)/A_0^*(X; G)).$$

**36. Теорема.** Пусть  $A$  — это пред-пучок на  $X$  удовлетворяющей условию 35(S2), и  $\mathcal{S}$  является пучком порожденным  $A$ , где  $\mathcal{S}$  и  $A$  скручены над генераторами  $\{i_0, \dots, i_{2^r-1}\}$  с  $1 \leq r \leq 3$ . Тогда для любого паракомпактифицирующего семейства  $\phi$  носителей в  $X$  существует точная последовательность

$e \rightarrow A_0(X) \rightarrow A_\phi(X) \xrightarrow{\theta} \Gamma_\phi(\mathcal{S}) \rightarrow e$ , где  $\theta : A(X) \rightarrow \mathcal{S}(X)$  есть естественное отображение пред-пучков в порожденный им пучок.

**Доказательство.** Рассмотрим  $s \in \Gamma_\phi(\mathcal{S})$  и окрестность  $U$  для  $|s|$  такую, что  $cl(U) \in \phi$ , где  $cl(U)$  обозначает замыкание  $U$  в  $X$ . Поскольку  $cl(U)$  является паракомпактным, то мы выберем локально конечное покрытие  $\{U_j : j\}$  замыкания  $cl(U)$ , где каждое подмножество  $U_j$  открыто в  $X$ , и для которого существует  $s_j \in A(U_j)$  такое, что  $\theta(s_j) = s|_{U_j}$ . Пусть  $\{V_j : j\}$  является вписанным покрытием в  $\{U_j : j\}$  таким, что  $U \cap cl(V_j) \subset U_j$ .

Для  $x \in X$  множество  $J(x) := \{j : x \in cl(V_j)\}$  конечно, следовательно, для любого  $x \in X$  существует окрестность  $W(x)$  такая, что  $W(x) \subset U_j$  и для любого  $j \in J(x)$  и всякого  $y \in W(x)$  имеется включение  $J(y) \subset J(x)$ .

Для  $j \in J(x)$  мы получим  $\theta(s_j(x)) = s(x)$ . Возьмем  $W(x)$  достаточно малым таким, чтобы  $s_j|_{W(x)} =: s_x$  не зависело от  $j \in J(x)$ , так как  $J(x)$  конечно, следовательно,  $s_x \in A(W(x))$ .

Пусть  $x, y \in U$ ,  $z \in W(x) \cap W(y)$  и  $j \in J(z)$ , где  $J(z) \subset J(x) \cup J(y)$ . Тогда  $s_x|_{W(x) \cap W(y)} = s_y|_{W(x) \cap W(y)}$ . В силу условия (S2) существует  $\beta \in A(U)$  такое, что  $\beta|_{W(x)} = s_x$  для любого  $x \in U$ , ясно, что  $\theta(\beta) = s|_U$ .

Мы возьмем теперь  $C \in \phi$  такое, что  $|s| \subset Int(C)$  и  $C \subset U$ , где  $Int(C)$  обозначает внутренность множества  $C$ . Если  $x \in C \setminus Int(C)$ , тогда  $\theta(\beta)(x) = s(x) = 0$ . Поэтому существует покрытие  $\{Q_j\}$  для множества  $C \setminus Int(C)$  открытыми в  $X$  множествами  $Q_j$  такими, что  $Q_j \subset U$  и  $t|_{Q_j} = 0$  для всякого  $j$ .

Мы выберем открытое покрытие  $\{Q_j\} \cup \{Int(C), X \setminus C\}$  для  $X$  и элементы  $e \in A(Q_j)$ ,  $\beta|_{Int(C)} \in A(Int(C))$  и  $e \in A(X \setminus C)$ . Ограничения каждых двух элементов на общую часть их областей определения совпадают. Таким образом, в силу условия (S2) такие элементы имеют общее продолжение  $q \in A(X)$  и неизбежно  $\theta(q) = s$ , и  $|q| = |\theta(q)| = |s| \in \phi$ . Последовательность  $e \rightarrow A_0(X) \rightarrow A_\phi(X) \xrightarrow{\theta} \Gamma_\phi(\mathcal{S}) \rightarrow e$  точна, так как каждая подпоследовательность  $e \rightarrow A_{0,k}(X) \rightarrow A_{\phi,k}(X) \xrightarrow{\theta} \Gamma_{\phi,k}(\mathcal{S}) \rightarrow e$  точна, где  $\hat{A}_\phi = \sum_{k=0}^{2^r-1} \hat{A}_{\phi,k} i_k$  и  $\hat{\Gamma}_\phi = \sum_{k=0}^{2^r-1} \hat{\Gamma}_{\phi,k} i_k$ , где каждый член  $\hat{A}_{\phi,k}$  коммутативен, и они попарно изоморфны для различных  $k$ , также  $\hat{\Gamma}_{\phi,k}$  коммутативны и попарно изоморфны для различных значений  $k$ , так как пучок  $\mathcal{S}$  скручен над (квази-) группой стандартных генераторов  $\{i_0, \dots, i_{2^r-1}\}$  алгебры Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$ .

Мы отметим, что для пред-пучка  $A$  удовлетворяющего условию (S1) мы имеем  $A_0(X) = e$ .

**37. Следствие.** Пусть выполнены условия теоремы 36. Тогда для паракомпактифицирующего семейства  $\phi$  носителей существует естественный изоморфизм:

$$H_\phi^m(X; G) \cong H^m(\Gamma_\phi(\mathcal{S}^*(X; G))).$$

**Доказательство.** Это немедленно вытекает из теоремы 36 и §35.

**38. Скрученные сингулярные когомологии.** Пусть  $\mathcal{B}$  будет локально конечным скрученным пучком на  $X$ , то есть группа  $\mathcal{B}(U)$  удовлетворяет условиям 4(A1, A2, C1, C2) для любого

подмножества  $U$  открытого в  $X$ . Для  $U \subset X$  мы обозначим через  $S^m(U; \mathcal{B})$  группу сингулярных  $m$ -мерных коцепей пространства  $U$  с коэффициентами в  $\mathcal{B}$ . Каждый элемент  $f \in S^m(U; \mathcal{B})$  является функцией сопоставляющей любому  $m$ -мерному симплексу  $\sigma : \Delta^m \rightarrow U$  сечение  $f(\sigma) \in \Gamma(\sigma^*(\mathcal{B}))$ , где  $\Delta^m$  обозначает стандартный  $m$ -мерный симплекс.

Пред-пучок  $S^m(\cdot; \mathcal{B})$  удовлетворяет условию (S2). Пучок  $\mathcal{B}$  локально постоянен, тогда пучок  $\sigma^*(\mathcal{B})$  постоянен на  $\Delta^m$ , так как симплекс  $\Delta^m$  односвязен, где  $m \geq 1$ . Поэтому существует обычный кограничный оператор  $d : S^m(U; \mathcal{B}) \rightarrow S^{m+1}(U; \mathcal{B})$ .

Рассмотрим пучок  $S^m(U; \mathcal{B})$  порожденный пред-пучком  $U \mapsto S^m(U; \mathcal{B})$ . Тогда дифференциал  $d$  пред-пучка индуцирует дифференциал пучка. Для локально постоянного пучка  $\mathcal{B}$  сингулярные когомологии с коэффициентами в  $\mathcal{B}$  и носителями в семействе  $\phi$  определены как  $\Delta H_\phi^m(X; \mathcal{B}) = H^m(S_\phi^*(X; \mathcal{B}))$ . Поскольку  $\mathcal{B}$  есть скрученный пучок над  $\{i_0, \dots, i_{2^r-1}\}$ , тогда  $S_\phi^*(X; \mathcal{B})$  и неизбежно  $\Delta H_\phi^m(X; \mathcal{B})$  скручены над  $\{i_0, \dots, i_{2^r-1}\}$ .

Пусть  $\mathcal{U} := \{U_j : j\}$  является открытым покрытием для  $X$ , и пусть  $S^*(\mathcal{U}; \mathcal{B})$  — это группа сингулярных коцепей определенная на сингулярных симплексах вписанных в покрытие  $\mathcal{U}$ . С помощью подразделения мы получим, что гомоморфизм  $b_{\mathcal{U}} : S^*(X; \mathcal{B}) \rightarrow S^*(\mathcal{U}; \mathcal{B})$  индуцирует изоморфизм когомологий, следовательно, комплекс  $K_{\mathcal{U}} = \ker b_{\mathcal{U}}$  ацикличесен. С другой стороны,  $S_0^*(X; \mathcal{B}) = \bigcup K_{\mathcal{U}}^* = \text{ind} - \lim K_{\mathcal{U}}$ , следовательно,  $H^*(S_0^*(X; \mathcal{B})) = H^*(\text{ind} - \lim K_{\mathcal{U}}^*) = \text{ind} - \lim H^*(K_{\mathcal{U}}^*) = e$ .

Таким образом, для паракомпактифицирующего семейства носителей из точности последовательности

$$e \rightarrow S_0^* \rightarrow S_\phi^* \rightarrow \Gamma_\phi(S^*) \rightarrow e$$

и теоремы 36 вытекает изоморфизм  $\Delta H_\phi^m(X; \mathcal{B}) \cong H^m(\Gamma_\phi(S^*(X; \mathcal{B})))$ .

**39. Скрученные дифференциальные пучки.** Градуированный пучок — это последовательность  $\{S^m : m \in \mathbf{Z}\}$  пучков, которая называется дифференциальным пучком, если имеются гомоморфизмы

(1)  $d : S^m \rightarrow S^{m+1}$  такие, что  $d^2 = 0$  для любого  $m$ . Этот пучок может быть скрученным над  $\{i_0, \dots, i_{2^r-1}\}$ , где  $2 \leq r \leq 3$ . В этом случае мы предположим, что

(2) с точностью до автоморфизмов  $\theta_m : S^m \rightarrow S^m$  выполняется включение  $\theta_{m+1} \circ d(S_k^m) \subset S_k^{m+1}$  для любого  $k = 0, \dots, 2^r - 1$ .

Дифференциальный пучок  $S^*$  имеющий  $S^m = 0$  для любого  $m < 0$  и снабженный гомоморфизмом аугментации  $\varepsilon : \mathcal{B} \rightarrow S^0$  называется резольвентой пучка, если последовательность

$$e \rightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{\varepsilon} S^0 \xrightarrow{d} S^1 \xrightarrow{d} S^2 \rightarrow \dots$$

точна.

Понятие дифференциального градуированного пред-пучка формулируется аналогично. Если  $S^m$  скручен, то есть  $\hat{S}^m = \hat{S}_0^m i_0 + \dots + \hat{S}_{2^r-1}^m i_{2^r-1}$ , где  $\hat{S}_k^m$  и  $\hat{S}_j^m$  попарно изоморфны и коммутативны для любого  $k \neq j$ , тогда  $\text{Ker}(d : S^m \rightarrow S^{m+1})$  и  $\text{Im}(d : S^{m-1} \rightarrow S^m)$  также скручены, так как с точностью до изоморфизмов  $\theta_m : S^m \rightarrow S^m$  мы имеем  $\theta_{m+1} \circ d(S_k^m) \subset S_k^{m+1}$  для любого  $k = 0, \dots, 2^r - 1$ .

Пучок когомологий (другими словами производный пучок) определяется как  $H^m(S^*) = \text{Ker}(d : S^m \rightarrow S^{m+1}) / \text{Im}(d : S^{m-1} \rightarrow S^m)$ . Если  $S^*$  порожден дифференциальным пред-пучком  $S^*$ , тогда  $H^m(S^*)$  порождено пред-пучком  $U \mapsto H^m(S^*(U))$ .

Для пучка  $\mathcal{B}$  на топологическом пространстве  $X$  и открытого подмножества  $U \subset X$  мы обозначим через  $Y^0(U; \mathcal{B})$  множество всех отображений (может быть разрывных)  $f : U \rightarrow \mathcal{B}$  таких, что  $\pi \circ f = id$  является тождественным отображением на  $U$ , где  $\pi : \mathcal{B} \rightarrow X$  есть каноническая проекция. Таким образом,  $Y^0(U; \mathcal{B}) = \prod_{x \in U} \mathcal{B}_x$  и она является группой с поточечными групповыми операциями. Поэтому  $U \mapsto Y^0(U; \mathcal{B})$  — это пред-пучок удовлетворяющий условиям (S1, S2), следовательно, он является пучком, который мы обозначим посредством  $\mathcal{Y}^0(X; \mathcal{B})$ . Если  $\mathcal{B}$  скручен, то  $\mathcal{Y}^0(U; \mathcal{B})$  также скручен.

Включение всех непрерывных сечений для  $\mathcal{B}$  в семейство всех сечений не обязательно непрерывных индуцирует гомоморфизм аугментации  $\varepsilon : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{Y}^0(X; \mathcal{B})$ .

Для семейства  $\phi$  носителей мы положим  $Y_\phi^0(X; \mathcal{B}) = \Gamma_\phi(\mathcal{Y}^0(X; \mathcal{B}))$ . Если  $e \rightarrow \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_3 \rightarrow e$  есть короткая точная последовательность пучков (может быть скрученных), тогда последовательность пред-пучков  $e \rightarrow Y^0(X; \mathcal{B}_1) \rightarrow Y^0(X; \mathcal{B}_2) \rightarrow Y^0(X; \mathcal{B}_3) \rightarrow e$  точна. Если  $f \in Y_\phi^0(X; \mathcal{B})$ , тогда

его носитель таков  $|f| := cl\{x : f(x) \neq e\}$ . Поэтому  $f$  является образом сечения  $g$  пучка  $\mathcal{B}$  такого, что  $g$  не обязательно непрерывен и  $g(x) = e$ , если  $f(x) = e$  для  $x \in X$ , следовательно,  $|g| = |f| \in \phi$ .

Обозначим через  $\mathcal{Z}^1(X; \mathcal{B})$  коядро гомоморфизма  $\varepsilon$ , так что последовательность  $e \rightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{Y}^0(X; \mathcal{B}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{Z}^1(X; \mathcal{B})$  точна. По индукции мы определим пучки  $\mathcal{Y}^m(X; \mathcal{B}) = \mathcal{Y}^0(X; \mathcal{Z}^m(X; \mathcal{B}))$ ,  $\mathcal{Z}^{m+1}(X; \mathcal{B}) = \mathcal{Z}^1(X; \mathcal{Z}^m(X; \mathcal{B}))$ .

Если  $\mathcal{B}$  скручен над  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$ , тогда  $\mathcal{Z}^1(X; \mathcal{B})$  также скручен, и по индукции  $\mathcal{Z}^m(X; \mathcal{B})$  и  $\mathcal{Y}^m(X; \mathcal{B})$  скручены для любого  $m \in \mathbf{N}$ . Поэтому последовательность  $e \rightarrow \mathcal{Z}^m(X; \mathcal{B}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{Y}^m(X; \mathcal{B}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{Z}^{m+1}(X; \mathcal{B}) \rightarrow e$  точна. Мы рассмотрим композицию  $d = \varepsilon \circ \partial$  для  $\mathcal{Y}^m(X; \mathcal{B}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{Z}^{m+1}(X; \mathcal{B}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{Y}^{m+1}(X; \mathcal{B})$ , тогда последовательность  $e \rightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{Y}^0(X; \mathcal{B}) \xrightarrow{d} \mathcal{Y}^1(X; \mathcal{B}) \xrightarrow{d} \mathcal{Y}^2(X; \mathcal{B}) \rightarrow \dots$  точна. Таким образом,  $\mathcal{Y}^*(X; \mathcal{B})$  есть резольвента пучка  $\mathcal{B}$ , которая называется канонической резольвентой.

**40. Предложение.** *Каноническая резольвента скрученного пучка  $\mathcal{B}$  является послойно гомотопически тривиальной.*

**Доказательство.** Рассмотрим гомоморфизм  $\mathcal{Y}^0(U; \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}_x$  такой, что  $U \ni x \mapsto f(x) \in \mathcal{B}_x$  для каждого  $f \in \mathcal{Y}^0(U; \mathcal{B})$  и  $x \in U$ . Прямой предел по окрестностям точки  $x$  индуцирует гомоморфизм  $\eta_x : \mathcal{Y}^0(X; \mathcal{B})_x \rightarrow \mathcal{B}_x$ , следовательно,  $\eta_x \circ \varepsilon : \mathcal{B}_x \rightarrow \mathcal{B}_x$  есть тождественный изоморфизм, где  $\eta_x \circ \varepsilon(z) = \eta_x(\varepsilon(z))$ . Мы определим гомоморфизм  $\nu_x : \mathcal{Z}^1(X; \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{Y}^0(X; \mathcal{B})$  по формуле  $\nu_x \circ \partial = 1 - \varepsilon \circ \eta_x$ , которая задает  $\nu_x$  единственным образом. Поэтому существует расщепление слоя  $\mathcal{Z}^m(X; \mathcal{B})_x \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{Y}^m(X; \mathcal{B}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{Z}^{m+1}(X; \mathcal{B})_x$  и  $\mathcal{Z}^m(X; \mathcal{B})_x \xleftarrow{\nu_x} \mathcal{Y}^m(X; \mathcal{B}) \xleftarrow{\nu_x} \mathcal{Z}^{m+1}(X; \mathcal{B})_x$ . Мы положим  $D_x := \nu_x \circ \eta_x : \mathcal{Y}^m(X; \mathcal{B})_x \rightarrow \mathcal{Y}^{m-1}(X; \mathcal{B})_x$  для  $m > 0$ . Поэтому  $d \circ D_x + D_x \circ d = \varepsilon \circ \partial \circ \nu_x \circ \eta_x + \nu_x \circ \eta_x \circ \varepsilon \circ \partial = \varepsilon \circ \eta_x + \nu_x \circ \partial = 1$  на  $\mathcal{Y}^m(X; \mathcal{B})$  при  $m > 0$ . В тоже время на  $\mathcal{Y}^0(X; \mathcal{B})_x$  мы имеем  $D_x \circ d = \nu_x \circ \eta_x \circ \varepsilon \circ \partial = \nu_x \circ \partial = 1 - \varepsilon \circ \eta_x$ . Это означает, что  $\mathcal{Y}^*(X; \mathcal{B})_x$  есть гомотопически послойно тривиальная резольвента.

**41. Замечание.** Функтор  $\mathcal{Y}^0(X; \mathcal{B})$  точен по  $\mathcal{B}$ , следовательно,  $\mathcal{Z}^1(X; \mathcal{B})$  является также точным функтором по  $\mathcal{B}$ . По индукции мы получим, что все функторы  $\mathcal{Y}^m(X; \mathcal{B})$  и  $\mathcal{Z}^m(X; \mathcal{B})$  точны по  $\mathcal{B}$ . Для произвольного семейства  $\phi$  носителей на  $X$  мы положим  $\mathcal{Y}_\phi^m(X; \mathcal{B}) := \Gamma_\phi(\mathcal{Y}^m(X; \mathcal{B})) = \mathcal{Y}_\phi^0(X; \mathcal{Z}^m(X; \mathcal{B}))$ . Поскольку функтор  $\mathcal{Y}^0(X; *)$  точен, то функтор  $\mathcal{Y}_\phi^m(X; \mathcal{B})$  точен.

**42. Определение.** Когомологии в  $X$  с носителями в  $\phi$  с коэффициентами в  $\mathcal{B}$  определяются как  $\mathcal{H}_\phi^m(X; \mathcal{B}) := \mathcal{H}^m(\mathcal{Y}_\phi^*(X; \mathcal{B}))$ .

**42.1. Замечание.** Последовательность  $e \rightarrow \Gamma_\phi(\mathcal{B}) \rightarrow \Gamma_\phi(\mathcal{Y}^0(X; \mathcal{B})) \rightarrow \Gamma_\phi(\mathcal{Y}^1(X; \mathcal{B}))$  точна, следовательно,  $\Gamma_\phi(\mathcal{B}) \cong \mathcal{H}_\phi^0(X; \mathcal{B})$ . Если имеется короткая точная последовательность скрученных пучков  $e \rightarrow \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_3 \rightarrow e$  на  $X$ , тогда она влечет точность последовательности коцепных комплексов

$e \rightarrow \mathcal{Y}_\phi^*(X; \mathcal{B}_1) \rightarrow \mathcal{Y}_\phi^*(X; \mathcal{B}_2) \rightarrow \mathcal{Y}_\phi^*(X; \mathcal{B}_3) \rightarrow e$ , что в свою очередь индуцирует длинную точную последовательность

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}_\phi^m(X; \mathcal{B}_1) \rightarrow \mathcal{H}_\phi^m(X; \mathcal{B}_2) \rightarrow \mathcal{H}_\phi^m(X; \mathcal{B}_3) \xrightarrow{\delta} \mathcal{H}_\phi^{m+1}(X; \mathcal{B}_1) \rightarrow \dots$$

**43. Определение.** Пусть  $G$  — это топологическая группа удовлетворяющая условиям 4(A1, A2, C1, C2) такая, что  $G$  является мультипликативной группой кольца  $\hat{G}$ , где  $1 \leq r \leq 2$ . Тогда мы зададим сплетающее (smashed) произведение  $G^s$  такое, что оно является мультипликативной группой кольца  $\hat{G}^s := \hat{G} \otimes_l \hat{G}$ , где  $l = i_{2r}$  обозначает генератор удвоения, умножение в  $\hat{G} \otimes_l \hat{G}$  таково:

$$(1) (a + bl)(c + vl) = (ac - v^*b) + (va + bc^*)l \text{ для любых } a, b, c, v \in \hat{G}, \text{ где } v^* = \text{conj}(v).$$

Сплетающее произведение  $M_1 \otimes_l M_2$  многообразий  $M_1, M_2$  над алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$  с  $\dim(M_1) = \dim(M_2)$  определяется как  $\mathcal{A}_{r+1}$  многообразие с локальными координатами  $z = (x, yl)$ , где  $x$  в  $M_1$  и  $y$  в  $M_2$  — это локальные координаты.

**44. Теорема.** *Существуют сплетающие произведения  $\mathcal{S}^s := \mathcal{S}_1 \otimes_l \mathcal{S}_2$  на  $X = X_1 = X_2$  и  $\hat{\mathcal{S}}^s := \mathcal{S}_1 \hat{\otimes}_l \mathcal{S}_2$  на  $X = X_1 \times X_2$  над  $\{i_0, \dots, i_{2r+1-1}\}$  изоморфных скрученных пучков  $\mathcal{S}_1$  на  $X_1$  и  $\mathcal{S}_2$  на  $X_2$  над  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$  с  $X_1 = X_2$ , в частности, пучков оберток, где  $1 \leq r \leq 2$ ,  $l = i_{2r}$ .*

**Доказательство.** Если  $\mathcal{S}_j$  есть пучок на топологическом пространстве  $X_j$  скрученный над  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$ , тогда  $\hat{\mathcal{S}}_j = \hat{\mathcal{S}}_{0,j}i_0 \oplus \dots \oplus \hat{\mathcal{S}}_{2r-1,j}i_{2r-1}$ , где  $\hat{\mathcal{S}}_{k,j}(U) = \mathcal{S}_{k,j}(U) \cup \{0\}$  являются коммутативными кольцами для любого подмножества  $U$  открытого в  $X_j$ ,  $\mathcal{S}_{k,j}$  — это пучки на  $X_j$  попарно изоморфные для различных значений  $k$ . Тогда для  $X = X_1 = X_2$  мы возьмем  $\mathcal{S}_x^s := (\mathcal{S}_1)_x \otimes_l (\mathcal{S}_2)_x$

для любого  $x \in X$  согласно определению 43, что определяет скрученный пучок  $\mathcal{S}$  на  $X$  над  $\{i_0, \dots, i_{2r+1-1}\}$  благодаря предложению 19 [22]. Этот пучок  $\mathcal{S}$  является сплетающим тензорным произведением пучков.

Если  $X = X_1 \times X_2$ , тогда мы возьмем  $\hat{\mathcal{S}}^s := \mathcal{S}_1 \hat{\otimes}_l \mathcal{S}_2 = (\pi_1^* \mathcal{S}_1) \otimes_l (\pi_2^* \mathcal{S}_2)$ , что является сплетающим полным тензорным произведением пучков, где  $\pi_1 : X \rightarrow X_1$  и  $\pi_2 : X \rightarrow X_2$  — это проекции.

**45. Следствие.** Пусть  $X_2 = X_{2,1} \otimes_l X_{2,2}$  — это сплетающее произведение, где  $X_1$  и  $X_2$  являются  $H_p^t$  и  $H_p^t$  псевдо-многообразиями соответственно над  $\mathcal{A}_{r+1}$ ,  $1 \leq r \leq 2$ . Тогда ограничение сплетающего полного тензорного произведения пучков оберток  $\mathcal{S}_{W,X_1,X_{2,1},\mathcal{G}} \hat{\otimes}_l \mathcal{S}_{W,X_1,X_{2,2},\mathcal{G}}$  на  $\Delta_1 \times X_2$  изоморфно с  $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}^s}$ , где  $\mathcal{G}^s$  является сплетающим тензорным произведением  $\mathcal{G}^s := \mathcal{G} \otimes_l \mathcal{G}$  скрученным над  $\{i_0, \dots, i_{2r+1-1}\}$  пучка  $\mathcal{G}$  скрученного над  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$  на  $X_1$ ,  $\Delta_1 := \{(x, x) : x \in X_1\}$  обозначает диагональ в  $X_1^2$ .

**Доказательство.** Сплетающее произведение многообразий было описано в деталях в доказательстве теоремы 20 [22]. Рассмотрим  $\mathcal{A}_r$  тень для  $X_1$  которая существует, так как  $\mathcal{A}_{r+1} = \mathcal{A}_r \oplus \mathcal{A}_r l$ , где  $l = i_{2r}$ . Для любого подмножества  $U$  открытого в  $X_1$  существует группа  $\mathcal{G}(U)$ , следовательно,  $\mathcal{G}(U) \otimes_l \mathcal{G}(U)$  определено благодаря предложению 19 [22], что дает пучок  $\mathcal{G}^s$  на  $X_1$ . Тогда пучки оберток  $\mathcal{S}_{W,X_1,X_{2,b},\mathcal{G}}$  определены над алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$ , где  $b = 1, 2$ . Таким образом, утверждение этого следствия вытекает из предложения 19 [22] и теоремы 44, модифицирующей доказательство §34 для сплетающего полного тензорного произведения вместо полного тензорного произведения, так что  $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(\hat{s}_{0,k+q}) = \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,u_1}(\hat{s}_{0,k+q}) \otimes_l \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2,u_2}(\hat{s}_{0,k+q}) \in G^s$  с  $E = E(N, G^s, \pi, \Psi)$ , где  $G = \mathcal{G}(U)$ ,  $U = U_1 = U_2$ , следовательно,  $\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} \rangle_{t,h} = \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,u_1} \rangle_{t,H} \otimes_l \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2,u_2} \rangle_{t,H}$ .

**46. Следствие.** Пусть  $X_1 = X_{1,1} \otimes_l X_{1,2}$  и  $X_2 = X_{2,1} \otimes_l X_{2,2}$  — это сплетающие произведения, где  $X_1$  и  $X_2$  являются  $H_p^t$  и  $H_p^t$  псевдо-многообразиями соответственно над алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_{r+1}$ ,  $1 \leq r \leq 2$ . Тогда пучок оберток  $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}^s}$  скручен над  $\{i_0, \dots, i_{2r+1-1}\}$  и изоморфен сплетающему полному тензорному произведению дважды итерированных пучков оберток  $\mathcal{S}_{W,X_{1,2},X_{2,1},\mathcal{S}_{W,X_{1,1},X_{2,1},\mathcal{G}}} \hat{\otimes}_l \mathcal{S}_{W,X_{1,2},X_{2,2},\mathcal{S}_{W,X_{1,1},X_{2,2},\mathcal{G}}}$ , где  $\mathcal{G}^s$  есть сплетающее тензорное произведение  $\mathcal{G}^s := \mathcal{G} \otimes_l \mathcal{G}$  скрученных пучков  $\mathcal{G}$  над  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$  на  $X_1$ .

**Доказательство.** Мы рассмотрим проекции  $\pi_{b,j} : X_b \rightarrow X_{b,j}$ , где  $j, b = 1, 2$ . Каждое  $\mathcal{A}_{r+1}$  многообразие имеет тень, которое является  $\mathcal{A}_r$  многообразием, так как  $\mathcal{A}_{r+1} = \mathcal{A}_r \oplus \mathcal{A}_r l$ . Если подмножество  $U$  открыто в  $X_{1,j}$ , тогда  $\pi_{1,j}^{-1}(U)$  открыто в  $X_1$  и существует группа  $\mathcal{G}(\pi_{1,j}^{-1}(U))$ , где  $j = 1, 2$ .

Тогда существуют проекции пучков  $\mathcal{G}_j = \pi_{1,j}^{-1} \mathcal{G}$  на  $X_{1,j}$  индуцированные посредством  $\mathcal{G}$ , так что  $\mathcal{G}_j(U) := \mathcal{G}(\pi_{1,j}^{-1}(U))$ . Мы обозначим  $\mathcal{G}_j$  на  $X_{1,j}$  также через  $\mathcal{G}$ , так как  $\mathcal{G}_j$  получается из  $\mathcal{G}$  взятием специфического подсемейства открытых подмножеств. Для подмножества  $U_1$  открытого в  $X_{1,1}$  и подмножества  $U_2$  открытого в  $X_{1,2}$  мы возьмем подмножество  $U = U_1 \times U_2$  открытое в  $X_1$ . Семейство всех таких подмножеств дает базу топологии в  $X_1$ .

Согласно определению 43 существует  $\hat{\mathcal{G}}(U) \otimes_l \hat{\mathcal{G}}(U) =: \hat{\mathcal{G}}^s(U)$ , что индуцирует  $\mathcal{G}^s$  на  $X_1$ , так что  $\hat{\mathcal{G}}_x^s = \hat{\mathcal{G}}_x \otimes_l \hat{\mathcal{G}}_x$  для каждого  $x \in X_1$ . Поэтому каждый элемент  $q + vl$  принадлежит  $\hat{\mathcal{G}}^s(U)$  для любых  $q, v \in \hat{\mathcal{G}}(U)$ . Таким образом, утверждение данного следствия вытекает из §25, теорем 20 [22] и 44.

**47.** Мы рассмотрим теперь итерированные пучки оберток  $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G};b}$  итерированных групп оберток  $(W^M E)_{b,\infty,H}$  с  $b \in \mathbf{N}$  вместо групп оберток для  $b = 1$ , так что их пред-пучок

$$(1) F_b(U \times V) = \prod_{s_{0,1}, \dots, s_{0,k} \in M \subset U; y_0 \in N \subset V} (W^{M, \{s_{0,q}: q=1, \dots, k\}} E; N, G(U), \mathbf{P})_{b,\infty,H},$$

где  $s_{U_2, U_1} : G(U_1) \rightarrow G(U_2)$  — это отображение ограничения для любого  $U_2 \subset U_1$ , так что определена структура параллельного переноса для  $M \subset U$ , где  $\mathcal{G}$  есть пучок на  $X_1$ ,  $G(U) = \mathcal{G}(U)$ , псевдо-многообразия  $X_1$  и  $X_2$ , и пучок  $\mathcal{G}$  принадлежат классу  $H_p^\infty$  (смотри также §25).

**Следствие.** Существует гомоморфизм итерированных пучков оберток  $\theta : \mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G};a} \otimes \mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G};b} \rightarrow \mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G};a+b}$  для любых  $a, b \in \mathbf{N}$ . Более того, если (квази-) группа  $\mathcal{G}$  или ассоциативна, или альтернативна, то  $\theta$  или ассоциативен, или альтернативен соответственно.

**Доказательство.** Для пред-пучков отображение

$$(2) \theta : F_a(U \times V) \otimes F_b(U \times V) \rightarrow F_{a+b}(U \times V)$$



индуцировано формулой 47(1) и согласно теореме 21 [22]. Тогда  $\theta$  имеет продолжение на пучок итерированных групп оберток, так как  $(\mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}; a})_z = \text{ind} - \lim F_a(U \times V)$ , где прямой предел берется по открытым подмножествам  $U \times V$  для точки  $z = x \times y \in X_1^k \times X_2$ ,  $x \in X_1^k$ ,  $y \in X_2$ , так что  $x \subset U$ ,  $y \in V$ , подмножество  $U$  открыто в  $X_1$ , подмножество  $V$  открыто в  $X_2$ .

Топология индуктивного предела в  $(\mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}; a})_z$  есть наиболее сильная топология, относительно которой каждое вложение  $F_a(U \times V) \hookrightarrow (\mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}; a})_z$  непрерывно. Если  $f \in (\mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}; a})_z$  и  $g \in (\mathcal{S}_{W, X_1, X_2, \mathcal{G}; b})_z$ , то существуют открытые подмножества  $U_1 \times V_1$  и  $U_2 \times V_2$  такие, что  $f \in F_a(U_1 \times V_1)$  и  $g \in F_b(U_2 \times V_2)$ , следовательно,  $f \in F_a(U \times V)$  и  $g \in F_b(U \times V)$ , где  $U = U_1 \cup U_2$  и  $V = V_1 \cup V_2$ , следовательно,  $\theta(f, g) \in F_{a+b}(U \times V)$ . Из (2) и определения топологии индуктивного предела вытекает, что отображение  $\theta$  непрерывно, так как на итерированных группах оберток  $\theta$  является  $H_p^\infty$  дифференцируемым.

Боле того, согласно теореме 21 [22]  $\theta$  или ассоциативно, или альтернативно, если (квази-) группа  $\mathcal{G}$  или ассоциативна, или альтернативна.

**48. Замечание.** Пусть  $\phi$  — это семейство носителей в  $X$ , и  $\mathcal{B}$  — это пучок на  $X$ , где  $\mathcal{B}$  может быть скрученным. Пучок  $\mathcal{B}$  называется  $\phi$ -ациклическим, если  $H_\phi^b(X; \mathcal{B}) = 0$  для любого  $b > 0$ .

Пусть  $\mathcal{L}^*$  является резольвентой для  $\mathcal{B}$ . Мы положим  $\mathcal{Z}^b := \text{Ker}(\mathcal{L}^b \rightarrow \mathcal{L}^{b+1}) = \text{Im}(\mathcal{L}^{b-1} \rightarrow \mathcal{L}^b)$ , где  $\mathcal{Z}^0 = \mathcal{B}$ . Точная последовательность

$$(1) e \rightarrow \mathcal{Z}^{b-1} \rightarrow \mathcal{L}^{b-1} \rightarrow \mathcal{Z}^b \rightarrow e$$

индуцирует точную последовательность

$$(2) e \rightarrow \Gamma_\phi(\mathcal{Z}^{b-1}) \rightarrow \Gamma_\phi(\mathcal{L}^{b-1}) \rightarrow \Gamma_\phi(\mathcal{Z}^b) \rightarrow H_\phi^1(X; \mathcal{Z}^{b-1}).$$

Поэтому существует мономорфизм

$$(3) H^b(\Gamma_\phi(\mathcal{L}^*)) = \Gamma_\phi(\mathcal{Z}^b) / \text{Im}(\Gamma_\phi(\mathcal{L}^{b-1} \rightarrow \Gamma_\phi(\mathcal{Z}^b))) \rightarrow H_\phi^1(X; \mathcal{Z}^{b-1}).$$

Боле того, последовательность  $e \rightarrow \mathcal{Z}^{b-v} \rightarrow \mathcal{L}^{b-v} \rightarrow \mathcal{Z}^{b-v+1} \rightarrow e$  индуцирует гомоморфизм:

$$(4) H_\phi^{b-1}(X; \mathcal{Z}^{b-v+1}) \rightarrow H_\phi^v(X; \mathcal{Z}^{b-v}).$$

Мы определим  $\kappa$  как композицию

$$(5) H^b(\Gamma_\phi(\mathcal{L}^*)) \rightarrow H_\phi^1(X; \mathcal{Z}^{b-1}) \rightarrow H_\phi^2(X; \mathcal{Z}^{b-2}) \rightarrow \dots \rightarrow H_\phi^b(X; \mathcal{Z}^0).$$

Если все пучки  $\mathcal{L}^b$  являются  $\phi$ -ациклическими, то (3, 4) являются изоморфизмами. Мы назовем  $\kappa$  естественным, если из коммутативности диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{L}^* \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{M}^* \end{array}$$

где  $g$  есть гомоморфизм резольвент, вытекает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^b(\Gamma_\phi(\mathcal{L}^*)) & \xrightarrow{\kappa} & H_\phi^b(X; \mathcal{B}) \\ \downarrow g^* & & \downarrow f^* \\ H^b(\Gamma_\phi(\mathcal{M}^*)) & \xrightarrow{\kappa} & H_\phi^b(X; \mathcal{E}) \end{array} .$$

Таким образом, мы получаем такое утверждение.

**48.1. Теорема.** Если  $\mathcal{L}^*$  есть резольвента пучка  $\mathcal{B}$ , состоящего из  $\phi$ -ациклических пучков, то для каждого  $b \in \mathbf{N}$  естественное отображение

$$\kappa : H^b(\Gamma_\phi(\mathcal{L}^*)) \rightarrow H_\phi^b(X; \mathcal{B}) \text{ является изоморфизмом.}$$

В силу последней теоремы, если  $g : \mathcal{L}^* \rightarrow \mathcal{M}^*$  есть гомоморфизм двух резольвент пучков  $\mathcal{B}$  состоящих из  $\phi$ -ациклических пучков, тогда индуцированное отображение  $H^b(\Gamma_\phi(\mathcal{L}^*)) \rightarrow H^b(\Gamma_\phi(\mathcal{M}^*))$  является изоморфизмом.

**48.2. Следствие.** Если  $e \rightarrow \mathcal{L}^0 \rightarrow \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathcal{L}^2 \rightarrow \dots$  есть точная последовательность  $\phi$ -ациклических пучков, тогда соответствующая последовательность  $e \rightarrow \Gamma_\phi(\mathcal{L}^0) \rightarrow \Gamma_\phi(\mathcal{L}^1) \rightarrow \Gamma_\phi(\mathcal{L}^2) \rightarrow \dots$  точна.

**Доказательство.** В силу теоремы 48.1  $H^b(\Gamma_\phi(\mathcal{L}^*)) = H_\phi^b(X; e)$ . С другой стороны,  $Y_\phi^n(X; e) = e$ , так как  $\mathcal{Y}^0(X; e) = e$  и, следовательно,  $\mathcal{Y}^n(X; e) = e$  для любого  $n$ . Итак,  $H^b(\Gamma_\phi(\mathcal{L}^*)) = e$  для любого  $b$ .

**49. Дифференциальные формы и скрученные когомологии над октонионами.** Решетчатое разрешение существует для всякого пучка или комплекса пучков. Рассмотрим дифференциальные формы на  $N$ . В локальных координатах мы запишем дифференциальную  $k$ -форму как

$$(1) w = \sum_J f_J(z) dx_{b_1, j_1} \wedge dx_{b_2, j_2} \wedge \dots \wedge dx_{b_k, j_k},$$

где  $f_J : N \rightarrow \mathcal{A}_r$ ,  $z = (z_1, z_2, \dots)$  — это локальные координаты в  $N$ ,  $z_b = x_{b,0}i_0 + x_{b,1}i_1 + \dots + x_{b,2^r-1}i_{2^r-1}$ , где  $z_b \in \mathcal{A}_r$ ,  $x_{b,j} \in \mathbf{R}$  для любого  $b$  и всяких  $j = 0, 1, \dots, 2^r - 1$ ,  $J = (b_1, j_1; b_2, j_2; \dots; b_k, j_k)$ . Для пучка  $\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^k$  ростков  $\mathcal{A}_r$  значных  $k$ -форм на  $N$  имеется решетчатое разрешение:

$$(2) 0 \rightarrow \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^k \xrightarrow{\sigma} \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^k \xrightarrow{\sigma} \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^k \xrightarrow{\sigma} \dots,$$

где  $\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^k$  обозначает пучок ростков  $AB^m \mathcal{A}_r$  значных  $k$ -форм на  $N$ .

Обозначим через  $\mathbf{Z}(q, \mathcal{C}_r)$  группу аналогичную  $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)$  с  $u \in \mathcal{C}_r$  замененным на  $u^q$ , где  $u^q$  рассматривается эквивалентным с  $(-u)^q$ ,  $q \in \mathbf{N}$ . Поэтому экспоненциальная последовательность

$$(3) 0 \rightarrow \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N \xrightarrow{\eta} C^\infty(N, \mathcal{A}_r) \xrightarrow{\exp} C^\infty(N, \mathcal{A}_r^*) \rightarrow 0$$

может рассматриваться как квази-изоморфизм:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N & \xrightarrow{\eta} & C^\infty(N, \mathcal{A}_r) \\ \downarrow & & \downarrow \exp \\ 0 & \longrightarrow & C^\infty(N, \mathcal{A}_r^*) \end{array}$$

между комплексом  $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_D^\infty : \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N \rightarrow C^\infty(N, \mathcal{A}_r)$  и пучком  $C^\infty(N, \mathcal{A}_r^*)$  ростков  $C^\infty$  функций из  $N$  в  $\mathcal{A}_r^*$  помещенных с первой степени, что дает  $C^\infty(N, \mathcal{A}_r^*)[-1]$ , где  $\eta(z) = 2\pi z$  для любого  $z$  и  $\exp(0) = 1$  (смотри также §19),  $\mathcal{A}_r$  рассматривается как аддитивная группа  $(\mathcal{A}_r, +)$ , причем  $\mathcal{A}_r^*$  есть мультипликативная группа  $(\mathcal{A}_r^*, \times)$ . Более общим образом это дает квази-изоморфизм:

$$(4) \mathbf{Z}(1, \mathcal{C}_r)_N \longrightarrow C^\infty(N, \mathcal{A}_r) \xrightarrow{d} \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{q-1} \text{ и} \\ 0 \longrightarrow C^\infty(N, \mathcal{A}_r^*) \xrightarrow{dLn} \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{q-1}$$

с вертикальными гомоморфизмами  $\mathbf{Z}(1, \mathcal{C}_r)_N \rightarrow 0$ ,  $C^\infty(N, \mathcal{A}_r) \xrightarrow{e} C^\infty(N, \mathcal{A}_r^*)$ ,  $\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^1 \xrightarrow{id} \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^1, \dots, \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{q-1} \xrightarrow{id} \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{q-1}$  при  $2 \leq q \in \mathbf{N}$ , где  $e(f) := \exp(f)$  между степенью  $q$  гладких скрученных комплексов

$$(5) \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_D^\infty : \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N \rightarrow C^\infty(N, \mathcal{A}_r) \xrightarrow{d} \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{q-1}$$

и комплекс  $\mathcal{S}^{<q}(N, \mathcal{A}_r)(dLn)[-1]$ , где

$$(6) \mathcal{S}^{<q}(N, \mathcal{A}_r)(dLn) : C^\infty(N, \mathcal{A}_r^*) \xrightarrow{dLn} \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{q-1}.$$

Гиперкогомология  ${}_h\mathbf{H}^q(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_D^\infty)$  of  $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_D^\infty$  скручена и некоммутативна при  $r = 2$ , и неассоциативна при  $r = 3$ . Она является гладкой когомологией Делинье на  $N$ , так как  $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H} = \mathbf{C} \oplus i_2\mathbf{C}$  и  $\mathcal{A}_3 = \mathbf{O} = \mathbf{C} \oplus i_2\mathbf{C} \oplus i_4\mathbf{C} \oplus i_6\mathbf{C}$  — это алгебры кватернионов и октонионов над вещественным полем  $\mathbf{R}$  с соответствующими скрученными структурами вызывающими скрученный структуры для  $AG$  и  $BG$  как это было описано выше. Таким образом, гиперкогомологии имеют индуцированные скрученные структуры. Мы также имеем, что  $\mathcal{S}^{<q}(N, \mathcal{A}_r)(dLn)$  является усечением ациклического разрешения (6) постоянного пучка  $(\mathcal{A}_r^*)_N$ . Поэтому квази-изоморфизм (5) влечет

$$(7) {}_h\mathbf{H}^b(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_D^\infty) \cong {}_h\mathbf{H}^{b-1}(\mathcal{S}^{<q}(N, \mathcal{A}_r)(dLn)) \text{ для всяких } b \text{ и } q.$$

Для размерности в смысле покрытий  $b = \dim N$  (смотри [51]) имеются изоморфизмы:

$$(8) {}_h\mathbf{H}^b(\mathcal{S}^{<b+1}(N, \mathcal{A}_r)(dLn)) \xrightarrow{e_N} {}_h\mathbf{H}^b(N, \mathcal{A}_r^*) \xrightarrow{t_N^b} \mathcal{A}_r^*,$$

композиция которых является изоморфизмом:

$$(9) T_N^b : {}_h\mathbf{H}^b(\mathcal{S}^{<b+1}(N, \mathcal{A}_r)(dLn)) \longrightarrow \mathcal{A}_r^*.$$

Полезна также короткая точная последовательность комплексов пучков:

$$(10) 0 \rightarrow (\mathcal{A}_r^*)_N \rightarrow C^\infty(N, \mathcal{A}_r^*) \xrightarrow{dLn} \mathcal{S}^1(N, \mathcal{A}_r) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{S}^q(N, \mathcal{A}_r) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^{q+1, cl}(N, \mathcal{A}_r) \rightarrow 0, \text{ где} \\ \mathcal{S}^{q+1, cl}(N, \mathcal{A}_r) \text{ обозначает пучок ростков замкнутых } \mathcal{A}_r \text{ значных } q+1 \text{ форм на } N.$$

**50. Замечание.** Возьмем открытое покрытие  $\mathcal{V} := \{V_j : j \in J\}$  для  $H^\infty$  многообразия  $N$  и обозначим через  $\mathcal{T}(E) := \{g_j : g_j \in \Gamma(V_j, E), j \in J\}$  семейство локальных тривиализаций для  $E$ , где  $J$  является множеством. Если  $V_k \cap V_j \neq \emptyset$ , тогда фактор  $g_{k,j} := g_k(1/g_j)$  является  $H^\infty$  гладкой

$\mathcal{A}_r^*$ -значной функцией на  $V_k \cap V_j$ , где  $1 \leq r \leq 3$ . Если  $1 \leq r \leq 2$ , то алгебра  $\mathcal{A}_r$  ассоциативна и  $g_{k,j}g_{j,l} = g_{k,l}$  на  $V_k \cap V_j \cap V_l$ , когда последнее множество непустое.

При  $r = 3$  алгебра октонионов  $\mathbf{O}$  является лишь альтернативной и в общем  $g_{k,j}g_{j,l}$  может отличаться от  $g_{k,l}$ . Уже для кватернионов и, более того, для октонионов  $Ln(xy)$  может отличаться от  $Ln(x) + Ln(y)$  при  $x, y \in \mathcal{A}_r$  с  $2 \leq r \leq 3$ , потому что алгебры Кэли-Диксона некоммутативны.

В силу предложения 3.2 [27, 28] для любых  $x, y \in \mathcal{A}_r$  существует  $z \in \mathcal{A}_r$  такое, что

$$(1) e^x e^y = e^z = e^{a+b} e^{K(M,N)}, \text{ где } a = Re(x), b = Re(y), M = x - Re(x) =: Im(x), N = Im(y),$$

$K = Im(z)$ . Как обычно мы обозначим через  $ln$  функцию натурального логарифма в коммутативном случае  $0 \leq r \leq 1$ , а  $Ln$  обозначает функцию натурального логарифма над алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$  при  $2 \leq r$  (смотри параграф 3 в [27, 28] и [32]). Логарифмическая функция определена на области  $\mathcal{A}_r \setminus \{0\}$  для ненулевых чисел Кэли-Диксона и имеет некоммутативный аналог римановой поверхности, так что  $\exp$  и  $Ln$  являются  $\mathcal{A}_r$  голоморфными. Для любого числа Кэли-Диксона  $v$  из мультипликативной группы  $\mathcal{A}_r^* = \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$  существует число  $x \in \mathcal{A}_r$  такое, что  $e^x = v$ . Тогда

$$(2) Ln(e^x e^y) = Ln(e^z) = a + b + K(M, N), \text{ где}$$

(3)  $K(M, N) = M + N =: P(M, N)$  может быть отлично от нуля. Мы выразим вещественную часть в виде

$$(4) Re(z) = (z + (2^r - 2)^{-1} \{-z + \sum_{j=1}^{2^r-1} i_j(z i_j^*)\})/2, \text{ тогда}$$

$$(5) Im(z) = z - Re(z) = (z - (2^r - 2)^{-1} \{-z + \sum_{j=1}^{2^r-1} i_j(z i_j^*)\})/2$$

и зафиксируем эти  $z$ -представления, с которыми  $M = M(x)$ ,  $N = N(y)$  и  $P(M, N)$  являются локально аналитическими функциями по  $x$  и  $y$ . Мы положим

$$(6) Ln(f_k) = w_k \text{ и}$$

$$(7) Ln(g_{k,j}) = w_k - w_j + \nu_{k,j} \text{ и}$$

$$(8) Ln(g_{k,l}) = Ln(g_{k,j}) + Ln(g_{j,l}) + \eta_{k,j,l},$$

так что  $w_k$  и  $\nu_{k,j}$  и  $\eta_{k,j,l}$  являются  $H^\infty$  дифференциальными 1-формами. Тогда из (6–8) вытекает, что

$$(9) w_k - w_l + \nu_{k,l} = w_k - w_j + \nu_{k,j} + w_j - w_l + \nu_{j,l} + \eta_{k,j,l} \text{ и, следовательно,}$$

$$(10) \eta_{k,j,l} = \nu_{k,l} - \nu_{k,j} - \nu_{j,l}.$$

В общем случае  $\eta_{k,j,l}$  может быть отлично от нуля из-за некоммутативности и неассоциативности.

В силу альтернативности алгебры октонионов  $\mathbf{O}$  тождества  $e^M e^N = e^K$ ,  $e^M = e^K e^{-N}$ ,  $e^N = e^{-M} e^K$  и  $e^{-K} = e^{-N} e^{-M}$  эквивалентны, что приводит к тождествам:

$$(11) M = K(K(M, N), -N), N = K(-M, K(M, N)), K(M, N) = -K(-N, -M),$$

где  $M, N, K$  являются чисто мнимыми октонионами, более того,  $K(M, 0) = M$ ,  $K(0, N) = N$ , так как  $e^0 = 1$ .

Пусть  $E(N, \mathcal{A}_r^*, \pi, \Psi)$  является  $H^\infty$  главным  $\mathcal{A}_r^*$ -расслоением с переходными функциями  $\{g_{k,j} : V_k \cap V_j \rightarrow \mathcal{A}_r^* : k, j\}$ , и мы рассмотрим семейство  $\{w_k, \nu_{k,j}, \eta_{k,j,l} : k, j, l\}$  состоящее из 1-форм связанных уравнениями (6–8), то есть  $w_j \in \Gamma(V_j, \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^1)$ ,  $\nu_{k,j} \in \Gamma(V_k \cap V_j, \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^1)$  при  $V_k \cap V_j \neq \emptyset$ ,  $\eta_{k,j,l} \in \Gamma(V_k \cap V_j \cap V_l, \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^1)$  при  $V_k \cap V_j \cap V_l \neq \emptyset$ , где  $k, j, l \in J$ .

Возьмем  $C^\infty$  разбиение единицы  $\{f_j : j \in J\}$  подчиненное покрытию  $\mathcal{V}$ . Тогда

$$(12) -w(x) = |f_{j_0}, f_{j_1}, \dots, f_{j_n}, -w_{j_0}(x), -w_{j_1}(x), \dots, -w_{j_n}(x)| \text{ и}$$

$$(13) -\nu(x) = |f_{j_0} f_{k_0}, f_{j_1} f_{k_1}, \dots, f_{j_n} f_{k_n}, -\nu_{j_0, k_0}(x), -\nu_{j_1, k_1}(x), \dots, -\nu_{j_n, k_n}(x)| \text{ и}$$

$$(14) -\eta(x) = |f_{j_0} f_{k_0} f_{l_0}, f_{j_1} f_{k_1} f_{l_1}, \dots, f_{j_n} f_{k_n} f_{l_n}, -\eta_{j_0, k_0, l_0}(x), -\eta_{j_1, k_1, l_1}(x), \dots, -\eta_{j_n, k_n, l_n}(x)|,$$

где  $w_j(x)$  и  $\nu_{j,k}(x)$  и  $\eta_{j,k,l}(x)$  обозначает ограничение  $w_j$  и  $\nu_{j,k}$  и  $\eta_{j,k,l}$  на  $T_x N$ , так что  $w_j(x)$  и  $\nu_{j,k}(x)$  и  $\eta_{j,k,l}(x)$  являются  $\mathcal{A}_r$ -значными 1-формами на  $N$ ,

(15)  $\pi_*(-w(x)) = |f_{j_0}, f_{j_1}(x), \dots, f_{j_n}(x); [w_{j_0}(x) - w_{j_1}(x) + \nu_{j_0, j_1}(x)] \dots [w_{j_{n-1}}(x) - w_{j_n}(x) + \nu_{j_{n-1}, j_n}(x)]|$ , где  $\pi : E\mathcal{A}_r \rightarrow B\mathcal{A}_r$  — это стандартная проекция.

Главное  $G$ -расслоение  $E(N, G, \pi, \Psi)$  является ограниченным универсальным расслоением  $AG \rightarrow BG$  по классифицирующему отображению  $g_{E(N, G, \pi, \Psi)} : N \rightarrow BG$ . В терминах функций перехода имеется равенство

$$(16) g_{E(N, \mathcal{A}_r^*, \pi, \Psi)} = |f_{j_0}(x), f_{j_1}(x), \dots, f_{j_n}(x); [g_{j_0, j_1}(x)] g_{j_1, j_2}(x) \dots [g_{j_{n-1}, j_n}(x)]|. \text{ Поэтому}$$

$$(17) \pi_*(w) + dLn(g_{E(N, \mathcal{A}_r^*, \pi, \Psi)}) = 0,$$

где для любой дифференцируемой функции  $g : U \rightarrow B\mathcal{A}_r^*$  мы имеем

$$g(x) = |f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x); [g_1(x)] \dots [g_n(x)]|. \text{ При этом}$$

$$(18) dLn(g(x)) := |f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x); [dLn(g_1(x)) \dots dLn(g_n(x))]|.$$

Мы рассмотрим тотальный комплекс  $(Tot^*(B_N^{*,<p}), D)$  of  $B_N^{*,<p}$ . Тогда  $(b-1)$ -коцикл в тотальном комплексе является последовательностью  $(g, w_1, \dots, w_{b-1})$ , где  $g \in H^\infty(N, AB^{b-1}\mathcal{A}_r^*)$  и  $w_j \in S_{AB^{b-1-j}\mathcal{A}_r}^j(N)$  удовлетворяющие условию:

$\sigma(g) = 0$  означающим, что  $g$  есть дифференцируемое отображение из  $N$  в  $B^{b-1}\mathcal{A}_r$ ;

$\sigma(w_1) + dLn(g) = 0$  означает, что  $w_1$  является связностью на дифференцируемом главном  $B^{b-2}\mathcal{A}_r^*$ -расслоении над  $N$  индуцированное из  $g$ ;

$\sigma(w_{j+1}) + (-1)^j dw_j = 0$  служит определением  $(j+1)$ -связности на дифференцируемом главном  $B^{b-2}\mathcal{A}_r^*$ -расслоении  $E \rightarrow B$  ассоциированном с отображением  $g$  при  $1 \leq j \leq b-2$ . Тогда последовательность  $(g, w_1, \dots, w_j)$  называется  $j$ -связностью решетчатого коцикла.

Существует отношение эквивалентности в группе дифференцируемых главных  $B^{b-2}\mathcal{A}_r^*$ -расслоений с  $(b-1)$ -связностью, которая индуцирована отношением эквивалентности когомологий в комплексе  $(Tot^*(B_N^{*,<b}), D)$ . Таким образом,  $H^{b-1}(Tot^*(B_N^{*,<b}), D)$  можно отождествить с группой  $E(N, B^{b-2}\mathcal{A}_r^*, \nabla^{b-1})$  классов эквивалентности дифференцируемых главных  $B^{b-2}\mathcal{A}_r^*$ -расслоений с  $(b-1)$ -связностями.

Сопоставление  $(g, w_1, w_2, \dots, w_{b-1}) \mapsto (-1)^{b-1} dw_{b-1}$  индуцирует гомоморфизм  $K : E(N, B^{b-2}\mathcal{A}_r^*, \nabla^{b-1}) \rightarrow S_{\mathcal{A}_r}^b(N)$  называемый кривизной  $b$ -связности  $(g, w_1, w_2, \dots, w_{b-1})$ . Ядро  $ker(K)$  изоморфно группе  $E(N, B^{b-2}\mathcal{A}_r^*, \nabla^{flat})$  классов изоморфизмов дифференцируемых главных  $B^{b-2}\mathcal{A}_r^*$ -расслоений с плоскими связностями.

**51. Кривизна голономии.** Если  $v, w \in T_0\mathbf{R}^n$ , то мы положим

(1)  $\gamma_{v,w}(u) = 4uv$  при  $0 \leq u \leq 1/4$ ,  $\gamma_{v,w}(u) = v + 4(u - 1/4)w$  при  $1/4 \leq u \leq 1/2$ ,  $\gamma_{v,w}(u) = w - 4(u - 3/4)v$  для  $1/2 \leq u \leq 3/4$ ,  $\gamma_{v,w}(u) = 4(1-u)w$  для  $3/4 \leq u \leq 1$  и  $\gamma_{v,w}^s(u) := \gamma_{sv,sw}(u)$ , где  $0 \leq u, s \leq 1$ . Для последовательности векторов  $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_q)$  в  $T_0\mathbf{R}^n$  с  $q \in \mathbf{N}$  мы определим  $(q+1)$ -мерный параллелепипед  $p[w_0, \dots, w_q]$  в евклидовом пространстве  $\mathbf{R}^n$  с  $q < n$ , если  $w_0, \dots, w_q$  линейно независимы. Тогда мы определим  $\gamma_{w_0, w_1, w_2}(u_1, u_2) := \gamma_{\gamma_{w_0, w_1}(u_1), w_2}(u_2)$  и по индукции

(2)  $\gamma_{w_0, \dots, w_q}(u_1, \dots, u_q) = \gamma_{\gamma_{w_0, \dots, w_{q-1}}(u_1, \dots, u_{q-1}), w_q}(u_q)$  и  $\gamma_{\mathbf{w}}^s(u_1, \dots, u_q) := \gamma_{s\mathbf{w}}(u_1, \dots, u_q)$ , где  $0 \leq u_1, \dots, u_q, s \leq 1$ . Это дает естественную параметризацию параллелепипеда  $p[w_0, \dots, w_q]$  и отображение  $\gamma_{\mathbf{w}} : \partial I^{q+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ , которое непрерывно и кусочно  $C^\infty$ . Обозначим через  $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  стандартный ортонормированный базис в евклидовом пространстве  $\mathbf{R}^n$  с 1 на  $j$ -м месте. Мы положим  $Ln(diag(a_1, \dots, a_k)) := diag(Ln(a_1), \dots, Ln(a_k))$ , где  $Ln$  — это главная ветвь логарифмической функции с  $Ln(1) = 0$ , и  $diag(a_1, \dots, a_n)$  обозначает диагональную матрицу с элементами  $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{A}_r^*$ .

Если  $h$  есть  $(\mathcal{A}_r^*)^k$ -значная  $C^m$  голономия или гомоморфизм для групп оберток  $(W^M E)_{\infty, N}$  с  $\hat{M}$  являющимся  $H_p^\infty$  диффеоморфным с  $\partial I^{m+1}$  и  $\psi = (y_1, \dots, y_n)$  — это система координат центрированная в точке  $y$ ,  $\psi : V \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $V$  — это открытая окрестность точки  $y$  в  $N$ , тогда кривизна для  $h$  в точке  $y$  является  $q$ -формой

$$(3) K_y := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n} K_{j_1, j_2, \dots, j_q}(y) dy_{j_1} \wedge dy_{j_2} \wedge \dots \wedge dy_{j_q} \in \Lambda^q T_y^* N, \text{ где}$$

$$(4) K_{j_1, \dots, j_q}(y) = (-1)^q \lim_{s \rightarrow 0} Ln[h(\psi^{-1}(\gamma_{e_{j_1}, \dots, e_{j_q}}^s))] s^{-q-1},$$

где  $m \geq q$ .

Рассмотрим инверсию  $(w_j, w_{j+1}) \mapsto (w_{j+1}, w_j)$ . В силу теоремы 2 [22] при  $\hat{M}$  являющимся  $H_p^\infty$  диффеоморфным с  $\partial I^{m+1}$  используя итерированные петли и отображение  $u_j \mapsto (1 - u_j)$  мы получим, что

$$(5) K_y(w_{g(1)}, \dots, w_{g(q+1)}) = (-1)^{|g|} K_y(w_1, \dots, w_{q+1}),$$

где  $g \in S_{q+1}$ ,  $S_q$  обозначает симметрическую группу множества  $\{1, \dots, q\}$ ,  $|g| = 1$  для нечетного  $g$ , причем  $|g| = 2$  для четной транспозиции  $g$ .

**52. Замечание.** Рассмотрим  $H^\infty$  многообразие  $N$  и псевдо-многообразие  $X$ . Отображение  $\gamma : X \rightarrow N$  называется кусочно  $C^\infty$  или  $H^\infty$  гладким, если оно непрерывно и ограничение  $\gamma$  на каждый симплекс наибольшей размерности в  $X$  является  $C^\infty$  или  $H^\infty$  отображением. Кусочно гладкое отображение  $\gamma : X \rightarrow N$  называется ориентированным сингулярным  $q$ -циклом псевдо-многообразия, если  $X$  — это ориентированный  $q$ -цикл псевдо-многообразия. Обозначим через  $Z_q^\psi(N) := Z_q^\psi(X, N)$  группу ориентированных сингулярных  $q$ -циклов псевдо-многообразия в  $N$ .

Если существует ориентированное псевдо-многообразие с границей  $(Y, \partial Y)$  с псевдо-

диффеоморфизмом  $\eta : \partial Y \rightarrow X$  и кусочно гладким отображением  $\zeta : Y \rightarrow N$  таким, что  $\gamma = \zeta|_{\partial Y} \circ \eta^{-1}$ , где  $\gamma$  есть ориентированный сингулярный  $q$ -цикл псевдо-многообразия, тогда  $\gamma$  называется ориентированной сингулярной  $q$ -границей псевдо-многообразия в  $N$ . Обозначим через  $\mathbf{B}_q^\psi(N) := \mathbf{B}_q^\psi(X, N)$  группу ориентированных сингулярных  $q$ -границ псевдо-многообразия в  $N$ .

Два ориентированных  $q$ -цикла псевдо-многообразия  $\gamma_j : X_j \rightarrow N$ ,  $j = 1, 2$ , гомологичны, если существует ориентированное  $(q + 1)$ -мерное псевдо-многообразие с границей  $(Y, \partial Y)$  и кусочно дифференцируемое отображение  $\zeta : Y \rightarrow N$  такое, что  $\partial Y$  изоморфна с  $X_1 \cup X_2$ , и  $\zeta|_{X_j} = \gamma_j$  с точностью до изоморфизма  $\partial Y \cong X_1 \cup X_2$  при  $j = 1, 2$ .

Тогда существует группа  $\mathbf{H}_q^\psi(N) = \mathbf{Z}_q^\psi(N)/\mathbf{B}_q^\psi(N)$  гомологичных классов ориентированных сингулярных  $q$ -циклов псевдо-многообразий в  $N$ , где групповая структура дается дизъюнктивным объединением.

Мы рассмотрим скрученный  $\mathcal{A}_r$  аналог функтора Чигера-Симонса дифференцируемых групп состоящий из пар  $(h, \alpha) \in \text{Hom}(\mathbf{Z}_q^\psi(N), \mathcal{A}_r^*) \times \mathbf{S}_{\mathcal{A}_r}^{q+1}(N)_0$  удовлетворяющих условию

$$(CS) \ h(\partial\eta) = \exp((-1)^q \int_\eta \alpha) \text{ для любого } \eta \in \mathbf{S}_{q+1}(N),$$

где  $\mathbf{S}_q(N)$  — это группа гладких сингулярных  $q$ -цепей в  $N$ ,  $\mathbf{S}_{\mathcal{A}_r}^{q+1}(N)_0$  обозначает группу замкнутых дифференциальных  $\mathcal{A}_r$ -значных  $q$ -форм на  $N$  с  $2\pi\mathbf{Z}(\mathbf{C}_r)$ -целыми периодами принадлежащими  $\mathcal{I}_r = \{z \in \mathcal{A}_r : \text{Re}(z) = 0\}$ ,  $1 \leq r \leq 3$ . Группа Чигера-Симонса  $\mathbf{H}_q^\psi(N, \mathbf{Z}(\mathbf{C}_r))$  степени  $q$  дифференцируемых характеров на  $N$  состоит из гомоморфизмов  $h$  описанных выше.

Предположим, что  $X$  является  $H_p^\infty$  псевдо-многообразием. Мы построим факторы  $\mathbf{Z}_q^{\tilde{\psi}}(N)$  и  $\mathbf{B}_q^{\tilde{\psi}}(N)$  как факторы для  $\mathbf{Z}_q^\psi(N)$  и  $\mathbf{B}_q^\psi(N)$  по отношению эквивалентности:

(E1) если  $\gamma : X \rightarrow N$  — это ориентированное сингулярное  $q$ -цикл псевдо-многообразия, и  $\xi$  есть гомеоморфизм на  $X$ , так что его ограничение на все симплексы наибольшей размерности вписанной в триангуляцию  $\Gamma$  для  $X$  является  $H_p^\infty$  диффеоморфизмом, тогда  $\gamma \sim \gamma \circ \xi$  и как класс эквивалентных элементов мы возьмем  $\langle \gamma \rangle_{\infty, H}$ , что является замыканием относительно  $H_p^\infty$ -равномерности семейства всех таких  $\gamma \circ \xi$ . В силу теорем Морса и Сарда (смотри §§II.2.10, 11 [6]), если  $\delta \in \langle \gamma \rangle_{\infty, p}$ , то  $\delta$  гомологично  $\gamma$ . Мы положим  $\mathbf{H}_q^{\tilde{\psi}}(N) := \mathbf{Z}_q^{\tilde{\psi}}(N)/\mathbf{B}_q^{\tilde{\psi}}(N)$ , тогда  $\mathbf{H}_q^{\tilde{\psi}}(N) \cong \mathbf{H}_q^\psi(N)$  изоморфны.

**53. Высшие скрученные голономии.** Предположим, что  $E(N, B\mathcal{A}_r^*, \pi, \Psi)$  — это дифференцируемое главное  $B\mathcal{A}_r^*$ -расслоение с классифицирующим отображением  $g : N \rightarrow B^q\mathcal{A}_r^*$  и  $q$ -связностью  $(g, w_1, \dots, w_q)$ , где  $2 \leq r \leq 3$ . Мы рассмотрим  $q$ -мерное ориентированное замкнутое псевдо-многообразие  $X$  над алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$  и отображение  $\gamma : X \rightarrow N$  класса гладкости  $H^\infty$ . Мы имеем, что  $B^q\mathcal{A}_r^*$  является  $q$ -связным и  $g \circ \gamma : X \rightarrow B^q\mathcal{A}_r^*$  гомотопно постоянному отображению. Это влечет существование дифференцируемого отображения  $\bar{g} \circ \gamma : X \rightarrow AB^{q-1}\mathcal{A}_r^*$  с  $\pi \circ \bar{g} \circ \gamma = g \circ \gamma$ , где  $\pi : AB^{q-1}\mathcal{A}_r^* \rightarrow B^q\mathcal{A}_r^*$ . С другой стороны,

$\pi_*(\gamma^*w_1 + dLn\bar{g} \circ \gamma) = \pi_*\gamma^*w_1 + dLn(g \circ \gamma) = \gamma^*(\pi_*w_1 + dLn(g)) = 0$ , тогда  $(\gamma^*w_1 + dLn(\bar{g} \circ \gamma))$  является  $B\mathcal{A}_r$ -значной 1-формой на  $X$ .

Проекция  $\pi : A\mathcal{A}_r \rightarrow B\mathcal{A}_r$  индуцирует сюръективный гомоморфизм  $\pi_* : \mathbf{S}_{A\mathcal{A}_r}^j(X) \rightarrow \mathbf{S}_{B\mathcal{A}_r}^j(X)$  для любого  $j = 1, 2, \dots$ . Поэтому существует  $A\mathcal{A}_r$ -значная 1-форма  $\bar{w}_j \in \mathbf{S}_{A\mathcal{A}_r}^j(X)$  удовлетворяющая уравнению:

$\pi_*\bar{w}_1 = \gamma^*w_1 + dLn(\bar{g} \circ \gamma)$ . Поскольку  $\sigma(\gamma^*w_2 - d\bar{w}_1) = \sigma\gamma^*w_2 - d\gamma^*w_1 = \gamma^*(\sigma w_2 - dw_1) = 0$ , то  $\gamma^*w_2 - d\bar{w}_1$  является  $\mathcal{A}_r$ -значной 2-формой на  $X$ .

По индукции мы получаем, что существует дифференциальная  $j$ -форма  $\bar{w}_j \in \mathbf{S}_{A\mathcal{A}_r}^j(X)$  такая, что  $\pi_*\bar{w}_j = \gamma^*w_j + (-1)^{j-1}d\gamma^*w_{j-1}$  для любого  $j = 2, \dots, q$ . Мы имеем, что  $\sigma(\gamma^*w_j + (-1)^{j-1}d\bar{w}_{j-1}) = \sigma\gamma^*w_j + (-1)^{j-1}d\gamma^*w_{j-1} = \gamma^*(\sigma w_j + (-1)^{j-1}dw_{j-1}) = 0$ , следовательно,  $\gamma^*w_j + (-1)^{j-1}d\bar{w}_{j-1}$  есть  $\mathcal{A}_r$ -значная  $j$ -форма на  $X$ .

Голономия  $q$ -связности  $(g, w_1, \dots, w_q)$  вдоль  $\gamma : X \rightarrow N$  дается формулой

$$h(\gamma) = \exp\left(\int_X (\gamma^*w_q + (-1)^{q-1}d\bar{w}_{q-1})\right).$$

Если имеется некоторое поднятие  $\hat{w}_{j-1}$ , то  $\hat{w}_{j-1} = \bar{w}_{j-1} + v_{j-1}$ , где  $v_{j-1}$  является  $\mathcal{A}_r$ -значной  $(j-1)$ -формой на  $X$ . Поэтому  $\int_X (\gamma^*w_j + (-1)^{j-1}d\hat{w}_{j-1}) = \int_X (\gamma^*w_j + (-1)^{j-1}d\bar{w}_{j-1}) + (-1)^{j-1} \int_X dv_{j-1} = \int_X (\gamma^*w_j + (-1)^{j-1}d\bar{w}_{j-1})$  в рассматриваемом здесь случае  $X$  с  $\partial X = 0$ .

Эта голономия может быть обобщена абстрактным образом для класса эквивалентности  $\eta$  данной  $q$ -связности  $(g, w_1, \dots, w_q)$  вдоль сингулярного ориентированного псевдо-многообразия  $X$  размерности  $q$  с  $H^\infty$  отображением  $\gamma : X \rightarrow N$  такого, что  $h^\eta(\gamma) \in \mathcal{A}_r$ . Мы зададим  $\mathbf{H}^{q+1}(X, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)(q+1)_D^\infty) := \mathbf{H}^{q+1}(X \setminus S_X, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)(q+1)_D^\infty)$ , где  $S_X$  — это сингулярность в  $X$ . Если размерность  $X$  равна  $q$ , то  $\mathbf{H}^{q+1}(X, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)(q+1)_D^\infty) \cong \mathbf{H}^q(X, \mathcal{A}_r^*)$ . Поскольку  $\text{codim}(S_X) \geq 2$ , то  $\mathbf{H}^q(X, \mathcal{A}_r^*)$  имеет фундаментальный класс, что индуцирует интегрирование вдоль фундаментального изоморфного класса и  $\mathbf{H}^q(X, \mathcal{A}_r^*) \cong \mathcal{A}_r^*$ . Таким образом, мы получим изоморфизм  $T_X^q : \mathbf{H}^{q+1}(X, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)(q+1)_D^\infty) \rightarrow \mathcal{A}_r^*$ . Поэтому  $h^\eta(\gamma) = T_X^q(\gamma^*(\eta))$  является голономией  $q$ -связности соответствующей элементу  $\eta \in \mathbf{H}^{q+1}(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)(q+1)_D^\infty)$  вдоль  $\gamma : X \rightarrow N$  для сингулярного ориентированного  $\mathcal{A}_r$  псевдо-многообразия  $\phi : X \rightarrow N$  вещественной размерности  $q$ , где  $2 \leq r \leq 3$ .

**54. Скрученные когомологии.** Рассмотрим скрученный пучок  $\mathcal{B}$  над  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$ . Тогда скрученный аналог (или изоморфной Чеха) когомологии Александра-Спаньера с коэффициентами в  $\mathcal{B}$  и носителями в семействе  $\phi$  таков:  ${}_{AS}\mathbf{H}_\phi^*(X; \mathcal{B}) = \mathbf{H}^*(\Gamma_\phi(\mathcal{S}^* \otimes \mathcal{B}))$ .

Мы возьмем элемент  $\eta \in {}_{AS}\mathbf{H}^q(\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{<q+1}(dLn)) := {}_{AS}\mathbf{H}^q(X, \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{<q+1}(dLn))$ , где  $N$  имеет размерность  $q$ . Запишем это так:  $\eta = (g_{j_q}, w_{j_{q-1}}, \dots, w_{j_0})$ , где  $\mathbf{j}_b := (j_0, \dots, j_b)$  — это мультииндекс.  $\mathcal{A}_r^*$ -значный  $q$ -коцикл  $g_{j_q}$  когомологичен нулю, так как  $N$  имеет размерность  $q$ . Поэтому  $\mathbf{H}^q(\mathcal{C}_N^\infty(\mathcal{A}_r^*)) \cong \mathbf{H}^{q+1}(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)) \cong 0$ . Если  $\bar{g}_{j_{q-1}}$  является  $(q-1)$ -коцепью такой, что  $\delta(\bar{g}_{j_{q-1}}) = g_{j_q}^{-1}$ , тогда  $(g_{j_q} \delta(\bar{g}_{j_{q-1}}), dLn(\bar{g}_{j_{q-1}}) + w_{j_{q-1}}, \dots, w_{j_0}) = (1, dLn(\bar{g}_{j_{q-1}}) + w_{j_{q-1}}, \dots, w_{j_0}) =: \eta'$ . Обозначим через  $D$  дифференциал в скрученном комплексе в  $\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{<q+1}(dLn)$ , тогда условие коцикла  $D(\eta') = 0$  приводит к  $\delta(dLn(\bar{g}_{j_{q-1}}) + w_{j_{q-1}}) = 0$ . Поскольку  $\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{<q+1}$  есть ациклический пучок, тогда его скрученный комплекс точен и неизбежно существует  $(q-2)$ -коцикл  $\bar{w}_{j_{q-2}}$  для которого  $\delta(\bar{w}_{j_{q-2}}) = dLn(\bar{g}_{j_{q-1}}) + w_{j_{q-1}}$ . Тогда  $D(1, -\bar{w}_{j_{q-2}}, 0, \dots, 0) + \eta'$  когомологичен коциклу имеющему вид  $(1, 0, w'_{j_{q-1}}, \dots, w_{j_0})$ . Продолжение этой процедуры дает  $(q-1)$ -коцепь  $\bar{\eta} = (\bar{g}_{j_{q-1}}, \bar{w}_{j_{q-2}}, \dots, \bar{w}_{j_0})$  скрученного комплекса  $\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{<q+1}(dLn)$ , так что  $\eta + D(\bar{\eta}) = (1, 0, \dots, 0, \hat{w}_{j_0})$ . Из условия коцикла  $D(\eta + D(\bar{\eta})) = 0$  вытекает, что  $\hat{w}_{j_0}$  является глобальной  $q$ -формой на  $N$ , которую мы обозначим через  $\hat{w}$ . Мы положим

$$(1) \quad T_N^q(\eta) := \exp((-1)^q \int_N \hat{w}).$$

Отображение  $T_N^q$  в формуле (1) зависит только от класса когомологии для  $\eta$ , так как если  $\eta = D(\bar{\eta})$ , то  $\hat{w} = 0$ . Более того,  $T_N^q$  не зависит от выбора цепи  $\bar{\eta}$ . В самом деле, если  $\tilde{\eta}$  — это некоторая другая  $(q-1)$ -коцепь с  $\eta + D(\tilde{\eta}) = (1, 0, \dots, 0, \nu_{j_0})$ , то  $\nu - \hat{w}$  является  $2\pi\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)$ -интегральной  $q$ -формой и неизбежно  $\exp(\int_N (\nu - \hat{w})) = 0$ .

Мы зададим изоморфизм  $t_N^q : \mathbf{H}^q(N, \mathcal{A}_r^*) \rightarrow \mathcal{A}_r^*$  как ограничение для  $T_N^q$  на  $\mathbf{H}^q(N, \mathcal{A}_r^*)$ . Или это можно записать в виде:  $t_N^q = T_N^q \circ i_N^q$ , где  $i_N^q : {}_{AS}\mathbf{H}^q(N, \mathcal{A}_r^*) \rightarrow {}_{AS}\mathbf{H}^m(\mathcal{Y}_{N, \mathcal{A}_r}^{<q+1}(dLn))$ ,  $i_N^q(g_{j_q}) = (g_{j_q}, 0, \dots, 0)$  является мономорфизмом индуцированным морфизмом комплексом пучков  $(\mathcal{A}_r^*)_N \rightarrow \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{<q+1}(dLn)$ .

Теперь мы рассмотрим изоморфизм  $e_N^q : \mathbf{H}^q(\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{<q+1}(dLn)) \rightarrow \mathbf{H}^q(N, \mathcal{A}_r^*)$ . Возьмем  $q$ -коцикл  $\eta$  как выше, тогда  $dw_{j_0} = 0$ , так как  $N$  имеет размерность  $q$ . Это влечет существование  $(q-1)$ -коцепи  $\bar{\eta}$  скрученного комплекса для  $\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{<q+1}(dLn)$ , так что  $\eta + D(\bar{\eta}) = (\bar{g}_{j_q}, 0, \dots, 0)$ . Условие коцикличности  $D(\eta + D(\bar{\eta})) = 0$  влечет, что  $\bar{g}_{j_q}$  есть локально постоянная  $\mathcal{A}_r^*$ -значная коцепь. Тогда отображение  $\eta \mapsto \bar{g}_{j_q}$  индуцирует изоморфизм  $e_N^q : {}_{AS}\mathbf{H}^q(\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{<q+1}(dLn)) \rightarrow {}_{AS}\mathbf{H}^q(N, \mathcal{A}_r^*)$ . Эта конструкция означает, что  $e_N^q$  является обратным к  $i_N^q$ , следовательно,  $T_N^q = t_N^q \circ e_N^q$ .

**55. Теорема.** Для любого  $H^\infty$  многообразия  $N$  над алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$  отображение  $\eta \mapsto h^\eta$  (see §54) индуцирует изоморфизм  $h : \mathbf{H}^q(\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{<q+1}(dLn)) \rightarrow \hat{\mathbf{H}}^q(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r))$ .

**Доказательство.** Достаточно показать, что следующая диаграмма с верхней строкой

$$0 \rightarrow \mathbf{H}^q(N, \mathcal{A}_r^*) \xrightarrow{i_N^p} \mathbf{H}^q(\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{<q+1}(dLn)) \xrightarrow{d} \mathcal{S}_{\mathcal{A}_r}^{q+1}(N)_0 \rightarrow 0$$

и нижней строкой

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{H}_q^\psi(N), \mathcal{A}_r^*) \xrightarrow{\hat{i}_N^p} \hat{\mathbf{H}}_q^\psi(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)) \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{S}_{\mathcal{A}_r}^{q+1}(N)_0 \rightarrow 0$$

и с вертикальными строками

$$\mathbf{H}^q(N, \mathcal{A}_r^*) \xrightarrow{u} \text{Hom}(\mathbf{H}_q^\psi(N), \mathcal{A}_r^*) \text{ и}$$

$$\mathbf{H}^q(\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{<q+1}(dLn)) \xrightarrow{h} \hat{\mathbf{H}}_q^\psi(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)) \text{ коммутативна. Для любого } \eta \in \mathbf{H}^q(\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{<q+1}(dLn)) \text{ мы поло-}$$

жим  $h(\eta) := (h^\eta, K^\eta)$ , где  $h^\eta$  — это голономия для  $\eta$ , и  $K^\eta$  обозначает кривизну для  $\eta$ . Если  $\eta = (g_{j_q}, w_{j_{q-1}}, \dots, w_{j_0})$ , то  $K^\eta = K(g_{j_q}, w_{j_{q-1}}, \dots, w_{j_0}) = dw_{j_0}$ , следовательно, правая часть верхней диаграммы коммутативна.

Изоморфизм теоремы об универсальных коэффициентах  $u : \mathbf{H}^q(N, \mathcal{A}_r^*) \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{H}_q^\psi(N), \mathcal{A}_r^*)$  индуцирован спариванием сопоставляющим  $H_p^\infty$  отображению  $\gamma : M \rightarrow N$  и классу когомологии  $\eta \in \mathbf{H}^q(N, \mathcal{A}_r^*)$  октонионное или кватернионное число  $t_M^q \circ \gamma^*(\eta)$ , где  $t_M^q$  обозначает ограничение  $T_M^q$  to  $\mathbf{H}^q(N, \mathcal{A}_r^*)$ . Поэтому для  $\eta \in \mathbf{H}^q(N, \mathcal{A}_r^*)$  и  $q$ -цикла  $\sum_j n_j \gamma_j$ , где  $\gamma_j : M \rightarrow N$  мы получаем  $u(\eta)(\sum_j n_j \gamma_j) = t_M^q(\prod_j \gamma_j^*(\eta)^{n_j})$ .

Из равенств  $h^\eta(\gamma) = u(\eta)(\gamma)$  и  $T_M^q = t_M^q \circ e_M^q$ , и  $e_M^q \circ i_M^q = id$  для произвольного  $H_p^\infty$  отображения  $\gamma : M \rightarrow N$  вытекает, что  $h^{i_N^q(\eta)}(\gamma) = T_M^q \gamma^* i_N^q(\eta) = T_M^q i_M^q \gamma^*(\eta) = t_M^q e_M^q i_M^q \gamma^*(\eta) = t_M^q \gamma^*(\eta) = \hat{i}_N^q u(\eta)(\gamma)$ . Поскольку  $h$  есть гомоморфизм, то квадрат в левой части диаграммы также коммутативен.

**56. Замечание.** В силу теоремы 55 каждый элемент в  $\hat{\mathbf{H}}_\psi^q(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r))$  является гомоморфизмом голономии. Оператор  $T_X^q$  в определении голономии использует интегрирование, которое инвариантно при взятии отношения эквивалентности 52(E1). Тогда факторное отображение  $\mathbf{Z}_q^\psi(N) \rightarrow \mathbf{Z}_q^{\tilde{\psi}}(N)$  индуцирует изоморфизм  $\hat{\mathbf{H}}_\psi^q(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)) \rightarrow \hat{\mathbf{H}}_{\tilde{\psi}}^q(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r))$ , где  $\hat{\mathbf{H}}_\psi^q(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r))$  состоит их пар  $(h, v) \in \text{Hom}(\mathbf{Z}_q^{\tilde{\psi}}(N), \mathcal{A}_r^*) \times \mathcal{S}_{\mathcal{A}_r}^{q+1}(N)_0$ , так что  $h(\partial\zeta) = \exp((-1)^q \int_\zeta v)$  для любого  $\partial\zeta \in \mathbf{B}_q^{\tilde{\psi}}(N)$ .

Теоретико множественное включение  $H_p^\infty(M, N) \rightarrow \mathbf{Z}_q^\psi(M, N)$ , где  $q$  — это размерность  $M$ , индуцирует групповой гомоморфизм  $\kappa : (W^M N)_{t, H} \rightarrow \mathbf{Z}_q^{\tilde{\psi}}(M, N)$ .

Обозначим через  $\mathcal{L}_{N, \mathcal{A}_r^*}^q$  пучок ассоциированный с пред-пучком

$U \mapsto \{\gamma \in \text{Hom}^\infty((W^M N)_{\infty, H}, \mathcal{A}_r^*) : \text{supp}(\gamma) \subset U\}$ . Параграф 53 и теорема 55 означают, что  $K^h$  является  $2\pi\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)$ -целой замкнутой  $(q+1)$ -формой на  $N$ .

**56.1. Лемма.** Для любого  $H_p^\infty$  отображения  $\zeta : Y \rightarrow N$ , где  $(Y, \partial Y)$  — это псевдо-многообразие с границей  $\partial Y$  являющейся псевдо-многообразием над алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$  и всякого продолжения  $\hat{h} : \mathbf{Z}_{qb}^{\tilde{\psi}}(M, N) \rightarrow G^{kb}$  для  $H_p^\infty$  дифференцируемого гомоморфизма  $h : (W^M E)_{b, \infty, H} \rightarrow G^{kb}$  являющегося элементом из  $\hat{\mathbf{H}}_\psi^q(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r))$  выполняется тождество:

$\hat{h}(\partial\zeta) = \exp((-1)^q \int_\zeta K^h)$ , где  $b \in \mathbf{N}$ ,  $E = E(N, G, \pi, \Psi)$ ,  $G$  есть коммутативная подгруппа в  $\mathcal{A}_r^*$ ,  $G$  изоморфна с  $\mathbf{C}^*$ .

**Доказательство.** В силу изоморфизма  $\mathbf{H}^q(\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{\leq q+1}(dLn)) \rightarrow \hat{\mathbf{H}}_\psi^q(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r))$  каждый элемент из  $\hat{\mathbf{H}}_\psi^q(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r))$  является гомоморфизмом голономии. Для каждого псевдо-многообразия с границей  $(Y, \partial Y)$  и  $H_p^\infty$  отображения  $\zeta : Y \rightarrow N$  мы возьмем разбиение  $\mathcal{T}$  для  $Y$  на малые кубики  $Q_j$ . Из свойства сокращения голономий мы получим, что  $\hat{h}(\partial\zeta) = \prod_{Q_j \in \mathcal{T}} \hat{h}(\gamma|_{Q_j})$ , так как группа  $G$  коммутативна. С другой стороны,  $\hat{h}$  является продолжением  $h$ , следовательно,  $\prod_{Q_j \in \mathcal{T}} \hat{h}(\gamma|_{Q_j}) = \prod_{Q_j \in \mathcal{T}} h(\gamma|_{Q_j})$ . Таким образом, доказательство сводится к случаю  $Y$  являющегося  $(q+1)$  мерным кубом  $\mathcal{A}_r^m \times \mathbf{R}$ , так что  $\partial Y$  вложено в  $\mathcal{A}_r^m$  и имеет вещественную тень  $\partial[0, 1]^{q+1}$ .

Если  $\mu$  является борелевской мерой на  $Y$  относительно которой дана соболевская равномерность, тогда  $\mu(Y_S) = 0$ , так как  $\text{codim}(Y_S) \geq 2$ , где  $S_Y$  — это сингулярность на  $Y$ . Более того, мера Лебега на  $\mathbf{R}^{q+1}$  индуцирует  $\mu$  на  $Y$  используя тот факт, что  $Y \setminus Y_S$  является  $H^{t'}$ -многообразием с  $t' > [(q+1)/2] + 1$ .

Для матрично-значных над  $\mathcal{A}_r$  дифференциальных форм  $w = (w_{j,k} : j, k = 1, \dots, m)$  мы положим

$$\int_\xi w = \left( \int_\xi w_{j,k} : j, k = 1, \dots, m \right),$$

для диагональных матриц  $(a_1, \dots, a_m)$  мы положим  $\exp(a_1, \dots, a_m) := (e^{a_1}, \dots, e^{a_m})$ , если  $a_1 \neq 0, \dots, a_m \neq 0$ , тогда  $Ln(a_1, \dots, a_m) = (Ln(a_1), \dots, Ln(a_m))$ .

Без ограничения общности  $h$  аддитивна и  $\mathbf{R}$  гомогенна на  $\mathbf{Z}_q(N)$ . Для любого  $n \in \mathbf{N}$  разделим отрезок  $[0, 1]$  на  $n$  малых подотрезков, что индуцирует подразделение  $[0, 1]^{q+1}$  на  $n^{q+1}$  кубиков

с вершинами обозначаемыми через  $v_{j_1, \dots, j_{q+1}}(n)$ , где  $j_1, \dots, j_{q+1} = 0, 1, \dots, n$ . Рассмотрим обертку  $\gamma_{j_1, \dots, j_{q+1}}^n := \gamma_{e_1/n, \dots, e_{q+1}/n} + v_{j_1, \dots, j_{q+1}}(n)$ , где  $e_1, \dots, e_{q+1}$  есть стандартный базис в евклидовом пространстве  $\mathbf{R}^{q+1}$ .

$$\begin{aligned} \text{Возьмем } \xi \in H_p^\infty(Y, E) \text{ таким, чтобы } \pi \circ \xi = \gamma. \text{ Поэтому} \\ \int_\xi K = \int_Y \xi^* K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j_1, \dots, j_{q+1}} \xi^* K(v_{j_1, \dots, j_{q+1}}(n)) n^{-q-1} = \\ (-1)^q \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j_1, \dots, j_{q+1}} \lim_{s \rightarrow 0} [Ln h(\xi \circ \gamma_{j_1, \dots, j_{q+1}}^n)] s^{-q-1} n^{-q-1}, \end{aligned}$$

где  $\xi^* K_y = \xi^* K(y) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{q+1}$  для каждого  $y \in N$ . Взятие  $s = 1/n$  дает

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{j_1, \dots, j_{q+1}} [Ln h(\xi \circ \gamma_{j_1, \dots, j_{q+1}}^n)] s^{-q-1} n^{-q-1} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j_1, \dots, j_{q+1}} Ln h(\xi \circ \gamma_{j_1, \dots, j_{q+1}}^n) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} Ln(\prod_{j_1, \dots, j_{q+1}} h(\xi \circ \gamma_{j_1, \dots, j_{q+1}}^n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} Ln h(\sum_{j_1, \dots, j_{q+1}} \xi \circ \gamma_{j_1, \dots, j_{q+1}}^n) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} Ln h(\xi \circ \gamma_{0, \dots, 0}^n) = Ln h(\gamma), \end{aligned}$$

так как  $h(\gamma_1 \lambda \lambda^{-1} \gamma_2) = h(\gamma_1 \gamma_2)$ , и группа  $G$  коммутативна, где  $\lambda : Y \rightarrow N$  - это путь соединяющий отмеченные точки  $y_1$  и  $y_2$  обертков  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , то сеть  $\gamma_j(\hat{s}_{0,q}) = y_j$  и  $\lambda(\hat{s}_{0,q}) = y_1$ ,  $\lambda(\hat{s}_{0,q+k}) = y_2$  причем  $\lambda^{-1}(\hat{s}_{0,q}) = y_2$  и  $\lambda^{-1}(\hat{s}_{0,q+k}) = y_1$  для любых  $j = 1, 2$  и  $q = 1, \dots, k$ .

**57. Лемма.** *Предположим, что  $\phi : A \subset X$  является пунктированным включением CW-комплексов, и  $\theta : X \rightarrow X/A$  есть факторное отображение. Пусть группа  $G$  скручена над  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$ . Тогда  $\theta_* : (W^M E; X, G, \mathbf{P})_{t,H} \rightarrow (W^M E; X/A, G, \mathbf{P})_{t,H}$  является главным  $(W^M E; A, G, \mathbf{P})_{t,H}$ -расслоением.*

**Доказательство.** Пусть  $G, E$  и  $B$  - это топологические группы, то есть  $G$  действует эффективно на  $E$ . Рассмотрим подмножество  $U$  открытое в  $B$  с  $e \in U$ . Предположим, что  $\pi : E \rightarrow B$  является открытым сюръективным отображением. Каждое  $G$ -эквивариантное отображение  $\xi : \pi^{-1} \rightarrow G$  индуцирует локальную тривиализацию для  $\pi : E \rightarrow B$  над  $U$ . Групповая структура в  $E$  индуцирует систему локальных тривиализаций для  $E/B$ . Она описывается следующим образом. Для любого  $v \in E$  возьмем открытое подмножество  $U_v = \pi(v\pi^{-1}(U))$  в  $B$ . Тогда имеется семейство  $\{U_v : v \in E\}$  форм на открытом покрытии для  $B$ . Для любого  $v \in E$  существует  $G$ -эквивариантное отображение  $\xi_v : \pi^{-1}(U_v) = v\pi^{-1}(U) \rightarrow G$  даваемое формулой  $\xi_v(x) = \xi(v^{-1}x)$ .

Поэтому открытое сюръективное отображение  $\pi : E \rightarrow B$  является главным  $G$ -расслоением тогда и только тогда, когда существует окрестность  $U$  единичного элемента  $e$  в  $B$  и  $G$ -эквивариантное отображение  $\xi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ .

Поскольку группа  $G$  скручена, то в силу предложения 19 и теоремы 20 [22] достаточно доказать эту лемма для коммутативной группы  $G_0$ .

Рассмотрим деформационную ретракцию  $\eta : [0, 1] \times V \rightarrow A$  из  $V$  на  $A$ , где  $V$  есть открытая окрестность подмножества  $A$ , положим  $U = \theta_*((W^M E; V, G_0, \mathbf{P})_{t,H})$ .  $(W^M E; A, G_0, \mathbf{P})_{t,H}$ -эквивариантное отображение  $\xi : (\theta_*)^{-1}(U) = (W^M E; W, G_0, \mathbf{P})_{t,H} \rightarrow (W^M E; A, G_0, \mathbf{P})_{t,H}$  дается формулой  $\xi(\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}, v} \rangle_{t,H}) = \langle \eta(1, \mathbf{P}_{\hat{\gamma}, v} \rangle_{t,H}$  в силу предложений 7.1 и 13(2) [22].

**58. Теорема.** *Для любого связного гладкого многообразия  $N$ , гомоморфизм  $\kappa_*$  индуцирует изоморфизм*

$$\kappa_* : \pi_0((W^M E; N, \mathcal{A}_r^*, \mathbf{P})_{b;\infty,H}) \rightarrow H_{qb}^{\tilde{\psi}}(N, \mathbf{Z}(C_r)), \text{ где } 1 \leq b \in \mathbf{N}, q - \text{ это размерность } M.$$

**Доказательство.** Равномерное пространство  $H_p^\infty(M, E)$  всюду плотно в равномерном пространстве  $C^0(M, E)$  всех непрерывных отображений из  $M$  в  $E$ , где  $M$  является  $H_p^\infty$ -псевдомногообразием. Поэтому существует продолжение  $N \mapsto \pi_0((W^M E; N, \mathcal{A}_r^*, \mathbf{P})_{b;\infty,H})$  до функтора на категории пунктированных CW-комплексов и пунктированных непрерывных отображений, что не изменяет тип гомотопии.

Мы напомним приведенную теорию гомологии. Задается функтор  $\mathbf{H}_*$  из категории пунктированных CW-комплексов и пунктированных непрерывных отображений в категорию градуированных скрученных групп удовлетворяющих свойствам (H1 - H4).

(H1). Для любого пунктированного непрерывного отображения CW-комплексов  $f : X \rightarrow Y$  и  $a \in \mathbf{Z}$ , индуцированный гомоморфизм  $f_* : \mathbf{H}_a(X) \rightarrow \mathbf{H}_a(Y)$  зависит лишь от типа гомотопии для  $f$ .

(H2). Для любого пунктированного CW-комплекса  $X$  и  $a \in \mathbf{Z}$  существует естественный изоморфизм



$$\Sigma_X : H_a(X) \rightarrow H_{a+1}(\Sigma X),$$

где  $\Sigma X$  — это приведенная суспензия для  $X$ .

(H3). Для любого пунктированного включения  $i : A \subset X$  of CW-комплексов и  $a \in \mathbf{Z}$  последовательность

$$H_a(A) \xrightarrow{i_*} H_a(X) \xrightarrow{g_*} H_a(X/A) \text{ точна,}$$

где  $g : X \rightarrow X/A$  — это факторное отображение.

(H4).  $H_a(S^1) = e$  для  $a \neq 1$  и  $H_1(S^1) = \mathbf{Z}$ . Эти свойства стандартны и они демонстрируют лемму 4.5 [12] для коммутативных групп. В силу условий 4(A1, A2) на скрученные группы мы получим приведенную скрученную теорию гомологии.

В силу леммы 57  $\pi_j((W^M E; A, G, \mathbf{P})_{t,H}) \rightarrow \pi_j((W^M E; X, G, \mathbf{P})_{t,H}) \rightarrow \pi_j((W^M E; X/A, G, \mathbf{P})_{t,H})$  является фрагментом длинной точной гомотопической последовательности по слоям расслоения  $\theta_*$ , где  $G$  является скрученной группой над  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Более того, условия (H2, H3) вытекают из леммы 57. Поэтому свойства (H1 – H4) для скрученных групп являются прямыми следствиями соответствующих свойств для коммутативных групп. Хотя для доказательства этой теоремы случай коммутативных градуированных групп достаточен.

Поскольку  $\kappa$  является естественным преобразованием теории гомологии и в силу предложения 19 и теоремы 20 [22] это индуцирует изоморфизм  $\kappa^*$ .

**59. Предложение.** Морфизм кривизны  $K : \mathcal{L}_{N, \mathcal{A}_r}^q \rightarrow \mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{q+1, cl}$  является изоморфизмом.

**Доказательство.** Семейство  $\mathbf{C}_M := \mathbf{R} \oplus M\mathbf{R}$  с  $M \in \mathcal{A}_r$ ,  $Re(M) = 0$  и  $|M| = 1$  таково, что его объединение дает  $\bigcup_M \mathbf{C}_M = \mathcal{A}_r$ . В силу теоремы 55 и лемма 56.1  $K$  является мономорфизмом и эпиморфизмом из  $\mathcal{L}_{N, \mathcal{A}_r}^q$  на  $\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{q+1, cl}$ . Это дает утверждение данного предложения.

**60. Теорема.** Гомоморфизм ограничения  $\kappa^* : Hom(\mathbf{Z}_{qb}^{\tilde{\psi}}(M, N), \mathcal{A}_r^*) \rightarrow Hom((W^M N)_{b; \infty, H}, \mathcal{A}_r^*)$  индуцирует изоморфизм  $\hat{\kappa} : \hat{H}_{\tilde{\psi}}^{qb}(N, \mathbf{Z}(\mathbf{C}_r)) \rightarrow Hom^\infty((W^M N)_{b; \infty, H}, \mathcal{A}_r)$ , где  $1 \leq b \in \mathbf{N}$ ,  $q$  — это размерность в смысле покрытий для  $M$ ,  $M$  и  $N$  заданы над алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$ .

**Доказательство.** Каждый гомоморфизм  $h : \mathbf{Z}_{qb}^{\tilde{\psi}}(M, N) \rightarrow \mathcal{A}_r^*$  является голономией для  $\hat{H}_{\tilde{\psi}}^{qb}(N, \mathbf{Z}(\mathbf{C}_r))$ , так как голономия индуцирует изоморфизм  $H^{qb}(\mathcal{S}_{N, \mathcal{A}_r}^{<qb+1}(dLn)) \rightarrow \hat{H}_{\tilde{\psi}}^{qb}(N, \mathbf{Z}(\mathbf{C}_r))$ . Тогда ограничение  $h$  на  $(W^M E)_{b; \infty, H}$  принадлежит классу гладкости  $H^\infty$ , где  $E = E(N, G, \pi, \Psi)$  с  $G = \mathbf{C}_M$  (смотри §56.1). Поэтому  $\kappa^*(h) \in Hom^\infty((W^M N)_{b; \infty, H}, \mathcal{A}_r^*)$ , так как  $(W^M E)_{b; \infty, H}$  — это главное  $G^{bk}$ -расслоение над  $(W^M N)_{b; \infty, H}$ .

Мы рассмотрим продолжение  $\hat{h} : \mathbf{Z}_{qb}^{\tilde{\psi}}(M, N) \rightarrow \mathcal{A}_r^*$  для  $h$ , следовательно,  $\hat{h} \in \hat{H}_{\tilde{\psi}}^{qb}(N, \mathbf{Z}(\mathbf{C}_r))$ .

Имеется локально аналитическое отображение  $Ln$  из  $\mathcal{A}_r^*$  на  $\mathcal{A}_r$ . Группа  $(W^M N)_{b; \infty, H}$  коммутативна, поэтому вместо  $Hom^\infty((W^M N)_{b; \infty, H}, \mathcal{A}_r^*)$  мы можем рассмотреть коммутативную аддитивную группу  $Hom^\infty((W^M N)_{b; \infty, H}, \mathcal{A}_r)$ , где алгебра Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_r$  рассматривается как аддитивная группа  $(\mathcal{A}_r, +)$ . В тоже время группа  $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_r)$  коммутативна. Тогда  $Ln(\kappa^*(h)) \in Hom^\infty((W^M N)_{b; \infty, H}, \mathcal{A}_r)$ .

Для любого  $\xi \in \mathbf{Z}_{qb}^{\tilde{\psi}}(M, N)$  существуют  $\zeta \in (W^M N)_{b; \infty, H}$  и  $\partial\eta \in \mathbf{B}_{qb}^{\tilde{\psi}}(M, N)$  такие, что  $\xi = \kappa(\zeta) + \partial\eta$ , так как  $\kappa_* : \pi_0((W^M E; N, \mathcal{A}_r^*, \mathbf{P})_{b; \infty, H}) \rightarrow \hat{H}_{\tilde{\psi}}^{qb}(N, \mathbf{Z}(\mathbf{C}_r))$  — это изоморфизм благодаря теореме 58. Тогда для любого продолжения  $\hat{h} : \mathbf{Z}_{qb}^{\tilde{\psi}}(M, N) \rightarrow \mathcal{A}_r^*$  гомоморфизма  $h$  выполняется тождество:

$$\hat{h}(\xi) = h(\zeta) + \exp((-1)^{qb} \int_\eta K^h)$$

благодаря параграфу 53 и лемме 59. Поэтому  $h$  имеет единственное продолжение  $\hat{h}$ . Это влечет, что  $\hat{\kappa}$  является изоморфизмом.

**61. Замечание.** Отметим, что теоремы 55, 58 и 60 можно доказать другим способом используя соответствующие утверждения над  $\mathbf{C}$  и скрученную структуру пучков над  $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$ .

## Литература

- [1] Beggs E.J. The de Rham complex of infinite dimensional manifolds // *Quart. J. Math. Oxford*, (2) 38, 1987, pp. 131-154.

- [2] Bott R., Tu L.W. Differential forms in algebraic topology. New York, Springer-Verlag, 1982.
- [3] Бредон Г.Е. Теория пучков. Москва, Наука, 1988.
- [4] Гамильтон У.Р. Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы. Москва, Наука, 1994.
- [5] Ding Y.H., Pang J.Z. Computing degree of maps between manifolds // *Acta Mathem. Sinica. English Series*, 21:6, 2005, pp. 1277-1284.
- [6] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Москва, Наука, 1979.
- [7] Ebin D.G., Marsden J. Groups of diffeomorphisms and the motion of incompressible fluid // *Ann. of Math.*, 92, 1970, pp. 102-163.
- [8] Eichhorn J. The manifold structure of maps between open manifolds // *Ann. Glob. Anal. Geom.*, 3, 1993, pp. 253-300.
- [9] Eliasson H.I. Geometry of manifolds of maps // *J. Differ. Geom.*, 1, 1967, pp. 169-194.
- [10] Emch G. Méchanique quantique quaternionienne et Relativité restreinte // *Helv. Phys. Acta*, 36, 1963, pp. 739-788.
- [11] Esnault H. Algebraic theory of characteristic classes of bundles with connection // *Algebraic K-theory. Proc. Symp. in Pure Math.*, 67, 1999, pp. 13-25.
- [12] Gajer P. Higher holonomies, geometric loop groups and smooth Deligne cohomology // "Advances in geometry". *Progr. in Math.*, 172, 1999, pp. 195-235 (Boston: Birkhäuser).
- [13] Gajer P. Geometry of Deligne cohomology // *Invent. Mathem.*, 127, 1997, pp. 155-207.
- [14] Gürsey F., Tze C.-H. On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics. Singapore, World Scientific Publ. Co., 1996.
- [15] Зорич В.А. Математический анализ, т. 2. Москва, Наука, 1984.
- [16] Harvey F.R. Spinors and calibrations. Perspectives in Mathem. 9, Boston, Academic Press, 1990.
- [17] Isham C.J. Topological and global aspects of quantum theory. Relativity, groups and topology. II. Les Hauches, Editors: R. Stora, B.S. De Witt, 1983, pp. 1059-1290. (Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1984).
- [18] Kantor I.L., Solodovnikov A.S. Hypercomplex numbers. Berlin, Springer-Verlag, 1989.
- [19] Klingenberg W. Riemannian geometry. Berlin, Walter de Gruyter, 1982.
- [20] Lawson H.B., Michelson M.-L. Spin geometry. Princeton, Princ. Univ. Press, 1989.
- [21] Людковский С.В. Группы оберток кватернионных и октонионных расслоений // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (11), т. 6, 2009, с. 72-90.
- [22] Людковский С.В. Структура групп оберток гиперкомплексных расслоений // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (11), т. 6, 2009, с. 91-109.
- [23] Людковский С.В. Квазиинвариантные меры на группах петель римановых многообразий // *Доклады Акад. Наук*, 370, 3, 2000, с. 306-308.
- [24] Ludkovsky S.V. Poisson measures for topological groups and their representations // *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 25, 2002, p. 653-680. (коротко в *Усп. Матем. Наук* 56: 1, 2001, с. 169-170; предыдущие версии: IHES/M/98/88, 38 pages, also Los Alamos Nat. Lab. math.RT/9910110).
- [25] Ludkovsky S.V. Functions of several Cayley-Dickson variables and manifolds over them // *J. Mathem. Sci.*, 141, 3, 2007, pp. 1299-1330 (предыдущий вариант: Los Alamos Nat. Lab. math.CV/0302011).
- [26] Людковский С.В. Нормальные семейства функций и группы псевдоконформных диффеоморфизмов кватернионных и октонионных переменных // *Соврем. Матем. Фундам. Направл.*, 18, 2006, p. 101-164 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. math.DG/0603006).
- [27] Ludkovsky S.V., F. van Oystaeyen. Differentiable functions of quaternion variables // *Bull. Sci. Math. (Paris)*, Ser. 2., 127, 2003, с. 755-796.
- [28] Ludkovsky S.V. Differentiable functions of Cayley-Dickson numbers and line integration // *J. Mathem. Sci.*, 141, 3, 2007, p. 1231-1298 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab.

- math.NT/0406048; math.CV/0406306; math.CV/0405471).
- [29] Ludkovsky S.V. Stochastic processes on geometric loop groups, diffeomorphism groups of connected manifolds, associated unitary representations // *J. Mathem. Sci.*, 141, 3, 2007, p. 1331-1384 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. math.AG/0407439, July 2004).
- [30] Ludkovsky S.V. Geometric loop groups and diffeomorphism groups of manifolds, stochastic processes on them, associated unitary representations. In the book: "Focus on Groups Theory Research". Nova Science Publishers, Inc., New York, 2006, pp. 59-136.
- [31] Ludkovsky S.V. Generalized geometric loop groups of complex manifolds, Gaussian quasi-invariant measures on them and their representations // *J. Mathem. Sci.*, 122, 1, 2004, p. 2984-3011 (предыдущая версия: Los Alam. Nat. Lab. math.RT/9910086, October 1999).
- [32] Ludkovsky S.V. Quasi-conformal functions of quaternion and octonion variables, their integral transformations // *Far East J. of Math. Sci. (FJMS)*, 28, 1, 2008, p. 37-88.
- [33] Менский М.Б. Группа путей. Измерения. Поля. Частицы. Москва, Наука, 1983.
- [34] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. Москва, Наука, 1976.
- [35] Michor P.W. Manifolds of differentiable mappings. Boston, Shiva, 1980.
- [36] J. Milnor. Morse theory. Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press, 1963.
- [37] Milnor J. On spaces having the homotopy type of a CW-complex // *Transactions of the A.M.S.*, 90, 1959, p. 272-280.
- [38] Murakoshi N., Sekigawa K., Yamada A. Integrability of almost quaternion manifolds // *Indian J. Mathem.*, 42, 3, p. 313-329, 2000.
- [39] Narici L., Beckenstein E. Topological vector spaces. New York, Marcel-Dekker Inc., 1985.
- [40] Omori H. Groups of diffeomorphisms and their subgroups // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 179, 1973, p. 85-122.
- [41] Omori H. Local structures of groups of diffeomorphisms // *J. Math. Soc. Japan*, 24, 1, 1972, p. 60-88.
- [42] Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. Москва, Наука, 1984.
- [43] Seeley R.T. Extensions of  $C^\infty$  functions defined in a half space // *Proceed. Amer. Math. Soc.*, 15, 1964, p. 625-626.
- [44] Souriau J.M. Groupes différentiels. Berlin, Springer Verlag, 1981.
- [45] Steenrod N. The topology of fibre bundles, Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press, 1951.
- [46] Sulanke R., Wintgen P. Differentialgeometrie und Faserbündel. Berlin, Veb deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972.
- [47] Swan R.C. The Grothendieck ring of a finite group // *Topology*, 2, 1963, p. 85-110.
- [48] Свитцер Р.М. Алгебраическая топология - гомотопии и гомологии. Москва, Наука, 1985.
- [49] Tougeron J.C. Ideaux de fonctions différentiels. Berlin, Springer-Verlag, 1972.
- [50] Whitehead J.H.C. Combinatorial homotopy. I // *Bull. Amer. Mathem. Soc.*, 55, 1949, p. 213-245.
- [51] Энгелькинг Р. Общая топология. Москва, Мир, 1986.
- [52] Яно К., Ако М. An affine connection in almost quaternion manifolds // *J. Differ. Geom.*, 3, 1973, p. 341-347.

## TWISTED COHOMOLOGIES OF WRAP GROUPS OVER QUATERNIONS AND OCTONIONS

**S.V. Ludkovsky**

*Moscow State Technical University MIREA, Moscow, Russia*  
sludkowski@mail.ru

This article is devoted to the investigation of wrap groups of connected fiber bundles over the fields of real  $\mathbf{R}$ , complex  $\mathbf{C}$  numbers, the quaternion skew field  $\mathbf{H}$  and the octonion algebra  $\mathbf{O}$ . Cohomologies of wrap groups and their structure are investigated. Sheaves of wrap groups are constructed and studied. Moreover, twisted cohomologies and sheaves over quaternions and octonions are investigated as well.

**Key Words:** twisted cohomologies, wrap groups, octonion algebra, connected fiber bundle, sheaf, smashed product.

# DIFFERENTIAL FORMS: FROM CLIFFORD, THROUGH CARTAN TO KÄHLER

Jose G. Vargas

*University of South Carolina, Columbia, SC, USA*  
josegvargas@earthlink.net

Limitations of the vector, tensor and Dirac calculi are illustrated to motivate the Kaehler calculus of integrands, which replaces all three of them and which we introduce in three steps.

In a first step, we present the basics of the underlying Clifford algebra for that calculus, algebra valid for Euclidean and pseudo-Euclidean vector spaces of arbitrary dimension. The usual vector algebra is shown to be a corrupted form of Clifford algebra, corruption specific to dimension three and non-existing for other dimensions. The Clifford product is constituted by the sum of the exterior and interior products if at least one of the factors is a vector. Grossly speaking, these products play the role of the vector and scalar products of three dimensions, while generalizing them. It thus contains exterior algebra.

As an intermediate step towards the Kaehler calculus, we briefly give the fundamentals of Cartan's exterior calculus of scalar-valued differential forms, here viewed as ordinary scalar-valued integrands in multiple integrals. We also make a brief incursion into the exterior calculus of vector-valued differential forms, which is the moving frame version of differential geometry.

We show the basics of the Kaehler calculus of differential forms. It is to the exterior calculus what Clifford algebra is to exterior algebra. Because of time and complexity constraints, we limit ourselves to scalar-valued differential forms, which is sufficient for relativistic quantum mechanics with electromagnetic coupling. In using this calculus, the problem with negative energy-solutions does not arise.

**Key Words:** differential forms, hypercomplex numbers, Clifford algebra, exterior calculus, moving frames, Kähler calculus.

## 1 Introduction

The calculus of differential forms is a formidable mathematical tool whose reach has been underestimated even by its advocates. Usually associated with E. Cartan since he designed it in 1899 [1], its most advanced expression took place with the work of Kähler in the early sixties [2],[3],[4] (all of them in German). At that point differential forms, which had been the most sophisticated language for differential geometry and general relativity, became also the most sophisticated language for quantum physics (See Ref. [5] for justification of this claim).

Our report should begin with the seminal work of Grassmann in 1844 [6]. Considerations of space dictate, however, that we start with the work of Clifford in the early 1870's [7], given that the algebra that bears his name underlies the Kähler calculus. Clifford algebra is to the Kähler calculus what exterior algebra is to the Cartan calculus. All the basic ideas in Clifford were, however, already present in Grassmann, arguably the greatest mathematical genius of the nineteenth century (See [8] and [9] for how incredibly ahead of his epoch Grassmann was).

Structurally, Clifford algebra should carry the name of Euclid, if not of Grassmann. This may sound disconcerting at first, since the Clifford algebra  $Cl^3$  for three-dimensional Euclidean space,  $E^3$ , is not the one taught in school when studying Euclidean geometry. The latter, however, can be dissected and restructured, resulting in  $Cl^3$ , as will be shown in section 3. No algebras like the school algebra exist in Euclidean spaces of arbitrary dimension. Clifford algebra on the other hand is valid in spaces of arbitrary dimension.

Different authors have shown that, to a large extent, one can dispense with the vector and tensor calculi, specially if one complements the exterior derivative with the coderivative. In a book in progress [10], this author shows that the more comprehensive use of differential forms that the Kähler calculus makes allows one to totally dispense with those two calculi. In this paper, we shall make the point that it also allow us to dispense with the Dirac calculus with gamma matrices. But it is the replacement of the calculus of complex variable that is specifically suitable to illustrate the nature of the Kähler calculus as hyper complex.

After this author delivered this paper at the official presentation of the Research Institute on Hyper Complex Systems in Geometry and Physics (May 4-5, 2009 in Moscow at Bauman University and Fryazino, Russia), he showed that the calculus of complex variable may be equally unnecessary [11]. To be precise, the use of the Kähler calculus of differential forms in the real plane permits an enormous simplification of the calculus of complex variable by replacing the concept of analytic complex variable functions with the concept of strict harmonic even differential forms. Further yet, the same calculus permits us to ignore Cauchy's theory of integration and replace it with a revision of Stoke's theorem. The almost two centuries old Cauchy's theory was retrospectively an extension of the at the time unborn Stoke's theorem (1854). Cauchy thus produced a solution as genial as unnatural to a problem whose time had not yet come, much less had the modern language of differentiation and integration been born. Notice that said theorem refers to surfaces without poles. But this is an artificial limitation because the integrand  $d\phi$  (where  $\phi$  is the polar angle) has no poles in the  $(\rho, \phi)$  plane, but  $(xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$ , which is the pull-back of  $d\phi$  by a coordinate transformation, does. This observation makes one discover the role of  $x + ydxdy$  as the complex variable  $z$  in the Kähler calculus, where the theorem of residues becomes a simple corollary to the combination of the Fourier series expansion and the standard Stokes theorem. This theorem is thus generalized without resort to Cauchy's theory. The algebra that allows for the replacement with great advantage of the calculus of complex variable is a hyper complex algebra with four independent units whose squares are  $(1,1,1,-1)$ .

The view of differential forms as integrands in multiple integrals is essential for understanding this paper. In other words, differential forms are functions of r-surfaces; a 1-surface is a curve, a 2-surface is a standard surface, a 3-surface is the type of figure to which we ascribe a volume, etc. A most authoritative presentation of the exterior calculus as pertaining to integrands is Rudin's book "Principles of Mathematical Analysis" [12]. One cannot fully understand Cartan, and much less Kähler, unless one has the same view of differential forms as Rudin. One often finds in books on the exterior calculus the definition of differential r-forms as antisymmetric r-linear functions of vectors. At the same time, some of those very same books state in their introductions that differential forms are functions of r-surfaces. That leads to confusion; different types of functions should have different names.

To facilitate the immersion into the main core of the paper, we present in section 2 a perspective of the different calculi that we have mentioned above. In section 3 and for the same purpose, we exhibit familiar examples of differential forms of different valuednesses. In sections 4 and 5, we deal with the highlights of the work of Clifford and Cartan that are relevant for introducing the Kähler calculus in section 6. This is the one which receives greater attention in this article, since it is the least known. In any case, it is not our intention to do a comprehensive presentation either of Clifford algebra or of the calculi by Cartan and by Kähler.

## 2 Perspective on alternative calculi

### 2.1 The horrible vector calculus

In a paper on the legacy and misfortune of genial algebraist Grassmann (whose work was not recognized even by Hilbert and Weyl and who up to this day appears to be largely misunderstood [9]), Dieudonne uses the term "horrible vector calculus" [8]. He does not explain why he does so. This author has found the following examples to justify his characterization:

1. There is no vector product for arbitrary dimension (Lounesto reports that, dimension seven also is an exception [13], but notice that there is then a whole five-dimensional subspace perpendicular to the plane of two vectors in a vector product). Without a vector product, there is not a vector calculus.
2. To be specific, there is no curl and, therefore, no curl theorems without a vector product, unless, of course, one does equivalent theory in a totally different way.
3. A missing curl-related theorem would deal with the integrability of

$$\int_A^B f dx + g dy + h dz + \dots + j dt,$$

i.e, with whether that integral between two points  $A$  and  $B$  depends on path or not.

4. The vector calculus (we are thus returning to three dimensions) is contrived, abstruse. This is all too obvious in retrospect if, in the process of computing with curvilinear coordinates, we reach an integral even as simple as

$$\int_A^B \rho d\phi$$

and we ask ourselves whether this integral between points  $A$  and  $B$  depends on path. We again have to resort to the curl but, who can ever remember curls in curvilinear coordinate systems? Or we might first change the line integrand  $\rho d\phi$  to Cartesian coordinates, and then extract the components  $(f, g, 0)$  of a vector field whose curl we would then compute in those coordinates. Any of these two processes is unnecessarily laborious. The vector calculus misleads one into the line of argument just provided when, in fact, the nature of  $\rho$  and  $\phi$  as curvilinear coordinates is totally irrelevant for this problem. With the calculus of differential forms, it becomes immediately obvious that the integral under consideration is path dependent.

5. The vector calculus is misleading also in a different way. If we are given the gradient of a function, the difference in the value at two points of this function is given by

$$F(B) - F(A) = \int_A^B \nabla F \cdot d\mathbf{x} = \int_A^B f dx + g dy + h dz,$$

where  $(f, g, h)$  are the partial derivatives of  $F$ . Notice that the dot product is present twice in  $\nabla F \cdot d\mathbf{x}$ . Apart from the explicit appearance, an implicit one resides in the dependence of the gradient on the metric, which is the product  $d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$ . These two appearances cancel each other out.  $\int_A^B \nabla F \cdot d\mathbf{x}$  thus uses concepts which requires more structure than is necessary to obtain  $F(B) - F(A)$ . The role of the gradient is played by  $f dx + g dy + h dz$  (for the pertinent functions,  $f, g$  and  $h$ ). This expression pertains even to manifolds where a metric is not even defined.

6. The vector calculus is unnatural. Consider a change of variables of multiple integrals even as simple as

$$\int_R dx dy.$$

A coordinate substitution, say to polar coordinates, yields

$$dx = d\rho \cos \phi - \rho \sin \phi d\phi, \quad dy = d\rho \sin \phi + \rho \cos \phi d\phi.$$

Substitution of these equations in  $dx dy$  yields an expression which does not even make sense as an integrand, given the presence of symmetric quadratic terms in the differential of the coordinates. If, on the other hand, one writes the integrand with the appropriate product,  $dx \wedge dy$ , the same substitution will produce the right integrand in polar coordinates without resort to the Jacobian, which emerges automatically. And this mechanism works for any  $r$ -integrand in  $n$  dimensions, and any differentiable change of variables.

Any book on the vector calculus gives the process by which one obtains the correct expression for the integrand in terms of new coordinates. But it does not answer the question of why the aforementioned substitution fails to work for  $dx dy$ , a fact that goes against the experience by students of correctly performing such substitutions when dealing with line integrals. The failure now is due to the fact that the (tensor) product  $dx dy$  is not the right one. What is needed is the so called exterior product,  $dx \wedge dy$ , to be considered later.

The inadequacy of vector algebra is addressed by Clifford's algebra, though, again, Grassmann did the main work leading to it.

## 2.2 The tensor calculus

The tensor calculus was developed virtually in parallel with the vector calculus, responding to the need to work with dimensions greater than three and in curved spaces. It evolved as a collection of concepts,

rules, theorems, etc., which Ricci and Levi-Civita put together [14]. The formal development of the underlying tensor algebra seems to have occurred later. Although the tensor calculus is not limited to three dimensions, it nevertheless lacks the sophistication required as an instrument for research in differential geometry. More importantly, it is useless for relativistic quantum mechanics, which is the reason why the Dirac calculus was developed.

The aforementioned lack of sophistication manifests itself, for example, in that the different nature of the indices of the curvature is obscured. It is not sufficient to know that a set of quantities transforms tensorially, since transformation properties do not speak of the nature of the objects whose components are those quantities. For instance the same transformation rule applies to the components of a line integrand, as to the components of a field of a linear functions of vector or, if the space or manifold is endowed with a metric, as to the components of a vector field referred to what is known as a field of reciprocal vector bases. Regarding the components of the curvature, the last two of its subscripts pertain to its being a differential 2-form, the other subscript belongs to its valuedness as a linear function of vectors, and its superscript concerns its valuedness also as a tangent vector field.

Even more important is the fact that connections—which are pariah in the tensor calculus since they do not transform tensorially—are full fledged Lie algebra-valued differential 1-forms. Tensors still play significant but unnecessary roles even in otherwise sophisticated books on the geometry of physics where differential forms are used but with heavy involvement of tensorial concepts. In those books, Yang-Mills connections are introduced as being Lie algebra valued, but this is not done, unfortunately, with the classical connections. Thus the wrong impression is given that Lie algebra valuedness pertains exclusively to Yang Mills theory. This lack of sophistication, with potentially damaging implications for theoretical physics, is easily avoidable in a calculus of differential forms if and when it virtually excludes any role for tensors.

### 2.3 The Dirac calculus

The Dirac calculus is an ad hoc response to the needs of relativistic quantum mechanics at a time when the calculus was not sufficiently developed. Dirac's use of the so called gamma matrices is, retrospectively, totally unnecessary; their Clifford algebraic structure suffices, irrespective of their nature as matrices. The Kähler calculus is the calculus of differential forms consistent with an underlying Clifford algebra. Since the exterior structure is contained in the Clifford structure, the exterior calculus is contained in the Kähler calculus, which thus serves both, general relativity and quantum mechanics.

Another great advantage of the Kähler calculus over Dirac's is that the Kähler field is more like a classical field than like a spinor field. This in no way means that spinors are not relevant. They remain very much so. But they are a derived concept that emerges from the Kähler field as a result of the sophisticated nature of the proper value solutions of differential systems expressed in terms of differential forms.

Finally, the negative energies associated with antiparticles are a spurious effect of the Dirac theory, as antiparticles emerge nicely with the same energy as the respective particles in the Kähler calculus. Thus, nothing as contrived as hole theory is needed.

## 3 Types of differential forms

For a practical acquaintance with various types of differential forms, we proceed to consider some familiar expressions. Let  $f$ ,  $g$  and  $h$  be functions of the  $(x, y, z)$  coordinates. The expression

$$f dx + g dy + h dz$$

is a scalar-valued differential 1-form. The "one" in 1-form has to do with the fact that this is a linear function of the differential of the coordinates. For comparison,

$$x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

is said to be a differential 0-form, since there are no differentials in it. The presence of vectors in this expressions makes it a vector-value 0-form. Clearly, then,

$$dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$$



is a vector-valued differential 1-form, rather than a vector, as it is said to be in the vector calculus. Let us rewrite the last expressions as

$$\sum_{p,q} \delta_p^q dx^p \mathbf{a}_q$$

where  $\mathbf{a}_q = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , and where  $\delta_p^q$  is the Kronecker delta.

The scalar-valued functions of several variables are scalar-valued differential 0-forms. Their grade as differential forms is zero.

The integrand  $dx dy$ , which should actually be written as  $dx \wedge dy$ , is a function of surfaces, i.e. a scalar-valued differential 2-form (grade 2). The “2” in 2-form obviously has to do with the fact that it is a quadratic expression in the differential of the coordinates. Magnetic fields are differential 2-forms:

$$B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy.$$

A volume integrand

$$dx dy dz \rightarrow dx \wedge dy \wedge dz \leftrightarrow r \sin^2 \theta dr \wedge d\theta \wedge d\phi$$

is a differential 3-form. Similarly,

$$f \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + g \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} + h \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$$

is a bivector-valued differential 0-form. Both  $dx \wedge dy$  and  $\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}$  are objects of grade two, each in its respective algebra. Although differential 0-forms may appear to have nothing to do with integration and/or differentiation, they do. We shall understand this when we later deal with the general Stokes theorem.

## 4 Clifford

### 4.1 Clifford view of standard vector algebra

The usual vector algebra in  $E^3$  is a corruption of Clifford algebra, as we now explain. The vector product is a combination of two operations, respectively called exterior product and Hodge duality. The latter consists in assigning to each object of grade 2 an object of grade  $n - 2$  in the same algebra, where  $n$  is the dimensionality of the space. The exterior product of two vectors is of grade two (a bivector). In  $E^3$ , the duality operation on that exterior product yields an object of grade one, which is the vector product. In dimension other than three, the dual of the exterior product is not of grade one, i.e. it is not a vector. As we already said, a meaningful concept of vector product does not exist in arbitrary dimension. On the other hand, exterior products exist in any number of dimensions. In obtaining the vector product in three dimensions, we take the step of Hodge duality after the exterior product. Again, Hodge duality does not return a vector in other dimensions. That would not be too bad by itself, were it not for the fact that it is not explicitly mentioned in the vector calculus and does not, therefore, prompt one to think about how one could address the whole issue of the vector product and its replacement in an arbitrary number of dimensions.

The exterior product of two vectors can be put together with their dot product to yield the so called Clifford product, its antisymmetric and symmetric parts being the exterior and dot (also called interior) products respectively. Notice that this gives the sum of a bivector and a scalar, for any  $n$ . We shall later find that this pattern is at the root of the (replacements for) curl and divergence coming together.

### 4.2 Basic products in Clifford algebra

Let us now proceed in the opposite direction, from the Clifford product to the exterior and dot products. Let  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \dots$  be vectors of a space (say over the reals) endowed with a dot product. One may construct an algebraic structure known as Clifford algebra. The binary operations with vectors are condensed in the formulas

$$\mathbf{ab} \equiv \mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

where  $\vee$  (or just juxtaposition of vectors) means Clifford product. The exterior product is defined as the antisymmetric part of  $\mathbf{ab}$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}),$$

and it is what, in  $E^3$ , we identified as the vector product minus the Hodge duality. The interior product is then defined as the symmetric part

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}),$$

and is identified with the standard scalar product. These equations imply

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} + \mathbf{b} \vee \mathbf{a} = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

If  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$  are elements of a basis, this equation becomes

$$\mathbf{a}_i \vee \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_j \vee \mathbf{a}_i = 2g_{ij},$$

where  $g_{ij}$  is defined as  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ .

The exterior and interior parts are of respective grades two and zero. One can multiply any number of vectors and get sums of quantities of different grades. In contrast, the grade of the exterior product is the sum of the grades of the factors in the product, if not zero. Thus, for example, the exterior product of a vector and a bivector is, when not zero, a trivector, which is of grade 3.

Readers overwhelmed by this structural richness can help themselves by thinking of  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$  as two gamma matrices, their Clifford product being matrix multiplication, but without actually carrying out explicit multiplication of matrices, but leaving them indicated.

Let us show how the algebra of three-dimensional Euclidean space differs from ordinary vector algebra. In this section, we focus on the exterior product, as the dot or interior product is sufficiently known. Because of skew symmetry (also referred to as antisymmetry), we have

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{j} \wedge \mathbf{i}.$$

We do not reduce or relate  $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$  to a vector; it is just a unit of grade two (a vector is of grade one). That property, together with the distributive property required of the exterior product, allows us to write

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (a^1\mathbf{i} + a^2\mathbf{j} + a^3\mathbf{k}) \wedge (b^1\mathbf{i} + b^2\mathbf{j} + b^3\mathbf{k}) = \\ &= (a^2b^3 - a^3b^2 \dots)\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + (a^3b^1 - a^1b^3 \dots)\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} + (a^1b^2 - a^2b^1)\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}. \end{aligned}$$

The exterior product of a number  $r$  of independent vectors is called an  $r$ -vector. The exterior and dot products of an  $r$ -vector by a vector yield an  $(r+1)$ -vector and  $(r-1)$ -vector, respectively. In dealing with matrices, their explicit multiplication hides all this structure. Hence, in learning Clifford algebra, one should help oneself with matrices only temporarily, and to the least possible extent. Notice that the components of  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  relative to  $\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k} \wedge \mathbf{i}$  and  $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$  are the same as those of the vector product with respect to  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  and  $\mathbf{k}$ .

The exterior product satisfies the associative property also, as in

$$\mathbf{i} \wedge (\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) = (\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}.$$

It should be obvious that repeated factors in the exterior product cause it to cancel, as in

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) = \mathbf{0},$$

because we can put the two  $\mathbf{k}$ 's together. We similarly have

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) = \mathbf{0},$$

since  $\mathbf{a}$  is a linear combination of  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  and  $\mathbf{k}$ .

Let  $\alpha$  and  $\beta$  be multivectors of respective grades  $r$  and  $s$ . Their exterior product will be of dimension  $r+s$ , if not zero. Thus, for example

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{d}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{d} = \mathbf{0},$$

since one factor is repeated.

### 4.3 Mixing products in the Clifford algebra

We give a sample of products in the Clifford algebra. Let  $\lambda$  represent scalars. We have

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \lambda, \quad \mathbf{a} \cdot \lambda = 0,$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a},$$

and (notice the alternation of signs)

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \wedge \dots) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \wedge \dots) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \wedge \mathbf{d} \wedge \dots) + \dots - \dots,$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \vee \mathbf{c} \vee \mathbf{d} \vee \dots) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \vee \mathbf{d} \vee \dots) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \vee \mathbf{d} \vee \dots) + \dots - \dots$$

The associativity property

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \vee \mathbf{c} \vee \mathbf{d} = (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \vee \mathbf{c} \vee \mathbf{d} = \mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) \vee \mathbf{d} = \dots$$

extends to multivectors,

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vee \mathbf{C} = (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C} = \mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}),$$

where we have used capitals to denote elements of arbitrary and even mixed grade. For a Clifford product of a vector and any other element of the algebra, we have

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{A} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{A} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{A},$$

but not if  $\mathbf{a}$  also were of grade greater than one.

The Clifford product built upon a vector space of dimension  $n$  is as well a vector space, specifically of dimension  $2^n$ . There subspaces of scalars, vectors, bivectors, ...r-vectors,...n-vectors constitute respective subspaces. The dimension obviously is the sum of their dimensions. For  $n = 3$  :

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^3 = 8,$$

and, for arbitrary dimension:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

If the algebra is over the complex numbers, it will be like a real space of dimension  $2^{n+1}$ .

### 4.4 Computing in automatic pilot

The Clifford-algebraic structure does a “lot of thinking” for us, once we know the rules to multiply in the algebra. An example is the decomposition of a vector  $\mathbf{a}$  into components  $\mathbf{a}_\perp$  and  $\mathbf{a}_\parallel$  respectively perpendicular and parallel to another vector  $\mathbf{b}$ .

Multiply  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$  with the Clifford product (the other products loose information) and recover  $\mathbf{a}$  by multiplying  $\mathbf{ab}$  by  $\mathbf{b}^{-1}$ , which equals  $\mathbf{b}/b^2$ . Let  $\mathbf{n}$  be the unit vector in the direction of  $\mathbf{b}$ . Each Clifford product gives two terms in an obvious manner, so that we get:

$$\begin{aligned} (\mathbf{ab})\mathbf{b}^{-1} &= (\mathbf{ab})\frac{\mathbf{b}}{b^2} = (\mathbf{an})\mathbf{n} = \\ &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \\ &= 0 + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + 0 \end{aligned}$$

The last non-null term is the projection of  $\mathbf{a}$  on  $\mathbf{n}$ , and the other term must be, therefore, the perpendicular one. This can be made explicit as follows:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{n}) = \mathbf{a} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{n}.$$

If  $\mathbf{B}$  is, for instance, a bivector, which thus defines a plane, we similarly have

$$\begin{aligned} (\mathbf{aB})\mathbf{B}^{-1} &= (\mathbf{aB})\frac{\mathbf{B}}{B^2} = (\mathbf{aN})\mathbf{N} = \\ &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{N})\mathbf{N} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} = \mathbf{a}_\perp + \mathbf{a}_\parallel \end{aligned}$$

where the relation of  $\mathbf{N}$  to  $\mathbf{B}$  is obvious. Readers should try to figure out why one need not decompose  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{N})\mathbf{N}$  and  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N}$  further. Similar considerations apply to the decomposition of a vector into components.

The preceding considerations apply equally to the decomposition of a vector into complementary subspaces of dimensions  $r$  and  $n-r$ . Of course, we would need a little bit more algebraic development, but the general line of the argument should be clear by now. Another example of almost computing in autopilot is the treatment of reflections and rotations. Even explicit rotations in three dimensions are very easy to handle, without the need for Euler angles. But the main reason to study Clifford algebra is the calculus that one can develop based on it. That will be done in the section on Kähler. The section on Cartan is an intermediate step to get there.

## 5 Cartan

### 5.1 Exterior calculus for scalar-valuedness

The exterior calculus makes use of exterior products only (specifically of the differential of the coordinates), rather than exterior products of (so called) tangent vectors, like  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}$ ... We can view the exterior product as contained in the Clifford product. Correspondingly, one can view Cartan's exterior calculus as contained in the Kähler calculus, the latter requiring that the manifold be endowed with a metric. At this point, we consider only exterior products and, correspondingly, the Cartan calculus on its own. It already exists on differentiable manifolds not endowed with a metric and, thus, not endowed either with a Kähler calculus.

The exterior product of differential 1-forms satisfies the equation

$$dx^\mu \wedge dx^\nu + dx^\nu \wedge dx^\mu = 0.$$

The non-null exterior products of a number  $r$  of 1-forms are called differential  $r$ -forms.

We introduce the operator  $d$  for exterior differentiation. It increases the grade of differential forms by a unit; if  $\alpha$  is a differential  $r$ -form of grade  $r$ ,  $d\alpha$  is a differential  $(r+1)$ -form. It is called the exterior derivative of  $\alpha$ , though the name exterior differential would be more appropriate. We shall define it in the next subsection. For motivational purposes, we alter the logical order and proceed to give the greatest theorem of the exterior calculus of scalar-valued differential forms. It states that

$$\int_{\partial R} \alpha = \int_R d\alpha,$$

where  $R$  is an  $(r+1)$ -"surface", and  $\partial R$  is its boundary. This is called the general Stokes theorem. It comprises, among others, the theorems of Gauss and Stokes, but it applies to spaces of arbitrary dimension and concerns also domains of integration of greater dimensionality.

Suppose that  $\alpha$  is such that  $d\alpha$  is zero. The general Stokes theorem becomes

$$\int_{\partial R} \alpha = 0,$$

which is a compact statement comprising multiple conservation laws, depending on how one splits the boundary, and on the signature of the metric and on the dimension of the manifold (read space), and on the grade of  $\alpha$ . For example, if the signature is Lorentzian, the conservation law is used in the form that integrals over the spatial subspace take the same value at different instants of time. If  $\beta$  is a differential 2-form such that  $d\beta = 0$ , and if the signature of the metric is positive definite, the flux of  $\beta$  through a closed surface is zero. For instance, in the exterior calculus the magnetic field is a differential 2-form in 3-space. This annulment amounts to the statement that the flux of  $\beta$  through a closed surface is zero

## 5.2 Exterior differentiation: definition and properties

A simple example will suffice to show how one proceeds to exterior differentiate. Given

$$\alpha = a_{\mu\nu\lambda} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda,$$

$d\alpha$  is given by

$$d\alpha = da_{\mu\nu\lambda} \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda,$$

and, therefore,

$$d\alpha = \frac{\partial a_{\mu\nu\lambda}}{\partial x^\rho} dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda.$$

This definition is independent of whether we are in Cartesian coordinates or not, and applies in general spaces known as differentiable manifolds. Exterior differentiation does not require the manifold to have any structure other than being differentiable, thus not a metric, and not a connection.

Important properties are that

$$d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$$

and that, if  $\alpha$  and  $\beta$  are of respective grades  $r$  and  $s$ , we have:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta$$

(the grade of the second factor does not matter because  $d$  acts from the left). Of great importance is the property of  $d$  that its square is zero,  $dd\alpha = 0$  (if  $\alpha$  is scalar-valued). Also, if  $d\alpha = 0$ , there is a  $\beta$  such that  $\alpha = d\beta$ , though this result is not necessarily valid globally. Think of the integration of  $d\phi$  on the plain, where  $\phi$  is angle. We have  $d(d\phi) = 0$ . Integrating clockwise and counterclockwise, we get to the same point in the plane with values for  $\phi$  that differ by  $2\pi$ .

We write the fundamental theorem of the calculus as

$$\int_\gamma df = f(B) - f(A),$$

where  $\gamma$  is the interval between points A and B. In other words, the ordered pair  $(A, B)$  is the oriented boundary  $\partial\gamma$  of the segment  $\gamma$ . In view of Stokes generalized theorem, this right hand side may be viewed as

$$\int_\gamma df \quad \left( = \int_{\partial\gamma} f \right).$$

Everything falls elegantly in place.

## 5.3 Exterior calculus for vector-valuedness

We use polar coordinates in the Euclidean plane to get a feeling for what is called Cartan's method of the moving frame [15]. Using polar coordinates and associated fields of bases (also known as frame fields when using this method), we have

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{i} \cos \phi + \mathbf{j} \sin \phi, \quad \mathbf{e}_\phi = -\mathbf{i} \sin \phi + \mathbf{j} \cos \phi$$

We define connection forms by means of

$$\begin{aligned} d\hat{\mathbf{e}}_\rho &= -\mathbf{i} \sin \phi d\phi + \mathbf{j} \cos \phi d\phi \equiv \omega_\rho^\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + \omega_\rho^\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi, \\ d\hat{\mathbf{e}}_\phi &= -\mathbf{i} \cos \phi d\phi + \mathbf{j} \sin \phi d\phi \equiv \omega_\phi^\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + \omega_\phi^\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi, \end{aligned}$$

where we have used the standard assumption that  $\mathbf{i}$  and  $\mathbf{j}$  are constant vector fields, and where the indices  $\rho$  and  $\phi$  play the role of names rather than of dummy indices that one sums over. We have used the circumflex hats to indicate that this is an orthonormal frame field. For such frame fields, the  $\omega_\rho^\rho$  and  $\omega_\phi^\phi$  happen to be zero. The  $\omega$ 's that satisfy those equations represent the so called connection of Euclidean space in terms of the particular frame field used. The  $\omega$  coefficients in the equations for

$(d\mathbf{i}, d\mathbf{j})$  in terms of the basis  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  are all zero. The connection does, therefore, depend on frame field. In compact form:

$$\hat{\mathbf{e}}_\mu(P + dP) - \hat{\mathbf{e}}_\mu(P) = d\hat{\mathbf{e}}_\mu = \omega_\mu^\nu \hat{\mathbf{e}}_\nu,$$

where  $P$  represents the points on the manifold, and with summation over the dummy repeated index  $\mu$ . These equations exhibit the geometric significance of  $d\hat{\mathbf{e}}_\mu$  and constitute what Cartan calls the exterior differentiation of a field of vector bases. They give in differential form (meaning that they have to be integrated) how the basis changes as a function of point. We shall follow Cartan and Kähler to refer to the  $d$  differentiation of any vector-valued differential form, and to vector fields in particular, as exterior differentiation. In this way, we do not need the terms covariant and exterior covariant, as the specifics will be determined by the nature of the object to which  $d$  is applied.

On arbitrary manifolds, we cannot express a field of vector bases in terms of a fixed basis, as a given differentiable manifold might not be endowed with a constant basis field. At the same time, the symbol  $d$  in  $d\hat{\mathbf{e}}_\mu$  and in  $d\mathbf{v}$  does not mean differentiation of  $\hat{\mathbf{e}}_\mu$  and  $\mathbf{v}$ , which are not vector valued functions in some vector space, but different tangent vector spaces. Just think of the planes tangent to a sphere. These vector spaces may or may not be identifiable, depending on connection. On differential manifolds of arbitrary dimension,  $\omega_\mu^\nu$  is introduced either ab initio or in some other way. An example of ab initio introduction is the “Christopher Columbus connection”. Before sailing deep into the Atlantic Ocean in 1492, Columbus instructed the captains of the two other ships that accompanied him: “keep always the same direction, West”. He was implying that the parallels of the surface of the earth (the pole excluded to avoid divergences of concepts like torsion) were to be considered as lines of constant direction. Modernly, we would state that

$$d\hat{\mathbf{e}}_\theta = d\hat{\mathbf{e}}_\phi = 0, \quad \text{or } \omega_\mu^\nu = 0,$$

where  $\hat{\mathbf{e}}_\theta$  and  $\hat{\mathbf{e}}_\phi$  are unit tangent vectors in the direction of the parallels and meridians. In other words,  $(\hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\phi)$  constitute a constant basis field. It is special in that regard. This connection was not explicit in the mathematical literature until a paper by Cartan in 1924.

Another connection on the surface of the sphere —one which does not accept a constant basis field— was given by Levi-Civita in 1917. It is called the canonical connection of the metric, but we shall not enter into why this is so. Cartan showed how to compute so called metric compatible affine connections rather easily. For the Levi-Civita connection, which is one of them, his technique readily yields

$$d\hat{\mathbf{e}}_\theta = \cos \theta \, d\phi \, \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad d\hat{\mathbf{e}}_\phi = -\cos \theta \, d\phi \, \hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

from which one can read the connection differential forms.

In Euclidean space, the exterior differential of a vector field is given by

$$d\mathbf{v} = d(v^\mu \hat{\mathbf{e}}_\mu) = (dv^\mu) \hat{\mathbf{e}}_\mu + v^\mu (d\hat{\mathbf{e}}_\mu) = (dv^\nu) \hat{\mathbf{e}}_\nu + v^\mu \omega_\mu^\nu \hat{\mathbf{e}}_\nu.$$

All the members in this set of equations also make sense on arbitrary manifolds, provided that, as we already said, one does not take  $d\hat{\mathbf{e}}_\mu$  to be the result of differentiating any basis field. It is rather introduced ab initio as a rule to compare vectors at a distance. Or it is obtained from some other condition. In one case as in the other, it constitutes the input in a differential system that has to be integrated, if integrable, or that one has to integrate on specific curves, if not integrable.

With the foregoing proviso about the concept of differentiation, we differentiate  $d\mathbf{v}$ . We use the Leibniz rule for differential forms as per the previous subsection and take into account that vector fields are differential 0-forms. We get five terms, corresponding to the five factors in  $(dv^\nu) \hat{\mathbf{e}}_\nu + v^\mu \omega_\mu^\nu \hat{\mathbf{e}}_\nu$ . The first term is zero. the second and third ones cancel each other out. From the last two terms, we obtain

$$dd\mathbf{v} = dd(v^\mu \hat{\mathbf{e}}_\mu) = v^\mu (d\omega_\mu^\nu - \omega_\mu^\lambda \wedge \omega_\lambda^\nu) \hat{\mathbf{e}}_\nu.$$

In the particular case of Euclidean space,  $d\omega_\mu^\nu - \omega_\mu^\lambda \wedge \omega_\lambda^\nu$  is zero, independently of frame field, even if the  $\omega_\mu^\nu$  are zero only in special frame fields. It is called the affine curvature (Just compute  $dd\mathbf{v}$  using a constant basis field  $\mathbf{a}_i$ ). However, what happens in Euclidean space may be used to understand of

objects which, like the curvature, are not zero in generalizations of Euclidean geometry. We cannot deal here with such issues, but let us say that, for example, that the curvature differential 2-form,  $d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j$  is Lie algebra valued. This is precisely valuedness in the Lie algebra of groups that acts on the frames of Euclidean space.

As important as the affine curvature is the torsion, which is the formal exterior differential of  $d\mathbf{P}$  ( $= \omega^\nu \hat{\mathbf{e}}_\nu$ ), where  $\omega^\nu$  is a linear combination of the differentials of the coordinates and which forms a basis of differential 1-forms. In the case of Euclidean plane, we have, for example,

$$\omega^1 = d\rho, \quad \omega^2 = \rho d\phi.$$

The formal exterior derivative of  $d\mathbf{P}$  is the torsion.

The  $\omega_\mu^\nu$  are a linear combination of the  $\omega^\lambda$

$$\omega_\mu^\nu = \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \omega^\lambda,$$

and, therefore,

$$d\omega_\mu^\nu = \Gamma_{\mu\lambda/\theta}^\nu \omega^\theta \wedge \omega^\lambda = (\Gamma_{\mu\lambda/\theta}^\nu - \Gamma_{\mu\lambda/\theta}^\nu)(\omega^\theta \wedge \omega^\lambda),$$

and

$$\omega_\mu^\pi \wedge \omega_\pi^\nu = (\Gamma_{\mu\theta}^\pi \Gamma_{\pi\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\pi \Gamma_{\pi\theta}^\nu)(\omega^\theta \wedge \omega^\lambda)$$

where the slash bar as a subscript means that the differentials of the  $\Gamma$ 's are expressed in terms of the basis  $\omega^\theta$  rather than  $dx^\theta$ , and where the parenthesis around  $\omega^\theta \wedge \omega^\lambda$  indicates that  $\theta < \lambda$ . After substitution of these expressions for  $d\omega_i^j$  and  $\omega_i^m \wedge \omega_m^j$  in  $d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j$ , the coefficients of  $(\omega^\theta \wedge \omega^\lambda)$  constitute the coefficients of the curvature.

We are not providing here the rigorous definition and/or introduction of the concepts that we are using. We are simply giving the flavor of the moving frame method of Cartan. A more detailed and rigorous presentation can be found in one of our books to be published in 2010 [16]. As in Cartan's original presentation, the book makes use of differential forms (no tensors, except of the occasional tensor-valuedness of the differential forms) and moving frames, with focus on integrability issues, on the study of affine space before affine connections, on Cartan's generalization of Klein's program and on Lie algebra valuedness of connection and affine curvature. Several simple examples of manifolds endowed with torsion will also be considered.

## 6 Kähler

### 6.1 Kähler calculus for scalar-valuedness

For simplicity, we shall restrict ourselves to Euclidean (and pseudo-Euclidean) spaces in terms of Cartesian (respectively pseudo-Cartesian) coordinates. The Kähler calculus is based on the Kähler algebra, term used to refer to the Clifford algebra of differential forms. In spacetime, it is defined by the relation

$$dx^\mu \vee dx^\nu + dx^\nu \vee dx^\mu = 2\eta^{\mu\nu},$$

where  $\eta^{\mu\nu}$  constitutes the elements of the diagonal matrix  $(1, -1, -1, -1)$ . This expression is analogous to

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} \vee \mathbf{b} + \mathbf{b} \vee \mathbf{a}).$$

As a ready consequence of the relation between exterior and Clifford products, it contains the defining relation  $dx^\mu \wedge dx^\nu + dx^\nu \wedge dx^\mu = 0$  for the exterior algebra of differential 1-forms. Because there is no dot product in the exterior algebra, it cannot deal with vector identities for expressions such as

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}), \quad \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

There are corresponding limitations in the Cartan calculus.

Let  $u$  be a differential form. The equations that follow expose the structure of differentiations in the Kähler calculus. The Kähler derivative,  $\partial$ , is the sum of the exterior,  $d$ , and interior,  $\delta$ , derivatives:

$$\begin{aligned}\partial u &= dx^\mu \vee d_\mu u = du + \delta u \\ du &= dx^\mu \wedge d_\mu u, \quad \delta u = dx^\mu \cdot d_\mu u\end{aligned}$$

This reflects the relationship between the different products involved in the underlying algebra.

In terms of Cartesian coordinates, we have

$$d_\mu u = a_{\nu\lambda\rho,\mu} dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\rho,$$

from which the known expression for the exterior derivative follows:

$$du = a_{\nu\lambda\rho,\mu} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\rho.$$

Both  $d_\mu u$  and  $\delta u$ , depend on the connection. These formulas are simple because of our use of Cartesian coordinates (these do not exist on arbitrary manifolds!). For a differential 1-form, we have

$$d_\mu(a_\nu dx^\nu) = a_{\nu,\mu} dx^\nu$$

and, therefore,

$$\delta u = dx^\mu \cdot d_\mu(a_\nu dx^\nu) = dx^\mu \cdot a_{\nu,\mu} dx^\nu = a^\mu{}_{,\mu},$$

which is nothing but the divergence. Knowledgeable readers will identify the interior derivative with the coderivative, but this is only if the connection is Levi-Civita's, as is the case in Euclidean space.

## 6.2 The conservation law in the Kähler calculus

Conservation laws are specific developments of the statement that the exterior derivative of some differential form is zero. There is, however, a theorem relating the exterior derivative to quadratic expressions involving the Kähler derivative. It has great importance for quantum mechanics. For any two differential forms, whether homogeneous or not, one has

$$d(u, v)_1 = (u, \partial v) + (v, \partial u),$$

where products  $(\_, \_)$  and  $(\_, \_)_1$  denote respective differential  $n$ -forms and  $(n - 1)$ -forms that one builds with the two differential forms inside each parenthesis. We do not need to know details for present purposes. Suffice to say that these products depend on the metric. This theorem is in reality a collection of theorems since one can, say, replace  $u$  or  $v$  or both with anything we want, say  $u\partial\partial v$ , etc. The great value of this theorem is that, whenever we manage to have differential forms such that the right hand side is zero,

$$(u, \partial v) + (v, \partial u) = 0,$$

so is the left hand side,

$$d(u, v)_1 = 0.$$

In other words,  $(u, v)_1$  is a conserved differential form. This road to conservation will prove its worth in quantum mechanics.

## 6.3 Kähler's quantum mechanics defined

At its most basic, quantum mechanics may be viewed as the theory of the Kähler equation and its offsprings (Schrödinger, Pauli). This implies that, if physicists had not done so already, the mathematics of relativistic quantum mechanics would have been discovered by mathematicians, as a step in the evolution of the calculus,

The characterization of quantum mechanics in terms of the Kähler calculus is: a field theory where the differential form for a field is its own source. The equations that would respond to this



characterization in a theory based in just one ordinary function would be, in order of increasing complexity:  $f' = 0$ ,  $f' = f$  and  $f' = af$ ... The parallel equations in the present calculus are

$$\partial u = 0, \quad \partial u = u, \quad \partial u = au.$$

The last of these is the Kähler version of the Dirac equation. Actually  $\partial u = au$  reproduces anything that the Dirac equation can do, and more and better. For the electromagnetic coupling, and up to universal constants, Kähler proposed

$$a = m + eA.$$

Thus Kähler's equation with EM coupling becomes

$$\partial u = (m + eA) \vee u.$$

One can define a "conjugate Kähler equation", whose solutions,  $v$ , are closely related to those,  $u$ , of the original equation. The following then is the case:  $(u, \partial v) + (v, \partial u) = 0$ . We thus have

$$d(u, v)_1 = 0.$$

Let  $\eta$  be the operator that reverses the sign of all the factors in a product of differential 1-forms. Let overbar denote complex conjugate. For EM coupling, the  $\eta\bar{u}$  are solutions of the conjugate equation. Thus, if  $u$  and  $u'$  are solutions of the original Kähler equation, one has  $d(u, \eta\bar{u}')_1 = 0$  and, in particular,

$$d(u, \eta\bar{u})_1 = 0.$$

This yields the conservation of charge (see below), accompanied of a rich load of information. We shall not get into that because of the technicalities involved. But we shall speak of them in general terms in order to get the important result about the sign of the energy of antiparticles.

## 6.4 Spinors, charge and particles/antiparticles

Kähler was a great expert on the theory of exterior differential systems, a credential that brings high relevance to his quantum mechanical work. Indeed, any differential equation or system thereof can be written as a so called exterior system, i.e expressing relations between exterior differential forms and their derivatives. Kähler showed the appropriate way of solving such systems in the spacetime case, more specifically he enriched our knowledge of the structure of solutions of such systems that are "proper functions". He revealed a wealth of information that is lost if one approaches the same system but written in alternative ways ("component equations"). The concept of spinor as an element of relevant ideals in the algebra emerges in the process. Related to the spinors in the case of electromagnetic coupling, energy emerges in association with charge, and chirality in association with spin. The expression for spin itself is the result of an appropriate treatment of the rotation operator on differential forms.

It transpires from this description that quantum mechanics might be conceived with a lesser emphasis on probability densities and spinors, and more on the field itself without regard for probability amplitudes. It is not that spinors and probability densities are not important. It simply happens that spinor fields are derived concepts, and so are particles and thus the probabilities to find them for a given "primordial field configuration". At this point we would not be very justified in using the term primordial. We have connected elsewhere, [17],[18], the Kähler equation for the primordial field with the equations of structure in differential geometry.

### 6.4.1 Spinors

Let us see for example the emergence of the concept of spinor. It is based on the concept of constant differential, i.e. differential forms such that

$$d_\mu c = 0 \quad \text{for all } i,$$

It then follows that

$$\partial(u \vee c) = a \vee (u \vee c),$$

The constant differentials

$$\epsilon^\pm = \frac{1 \mp dt}{2}, \quad \tau^\pm = \frac{1 \pm idx^1 \vee dx^2}{2}$$

are idempotents (an idempotent is anything which is equal to its square). The product of the two forms  $\epsilon$  yields zero. Their sum is unity. Parallel statements apply to the  $\tau$ 's. The  $\epsilon$ 's commute with the  $\tau$ 's. The solution  $u$  in the presence of time translational and rotational symmetries for given value of intrinsic angular momentum and energy can be written as a sum of four independent solutions of the type

$$u = e^{iM\phi - iEt/\hbar} \pm q^* \vee \epsilon^\pm \vee \tau^*,$$

where  $M$  can be shown to be an integer in the actual solving of the Kähler equation and where  $q$  depends exclusively on the  $\rho$  and  $z$  coordinates and their differentials. Each of these four independent solutions correspond to Dirac spinors. This represents an enrichment of the concept of proper functions of energy and momentum.

### 6.4.2 Charge

In terms of ideals associated exclusively with time translation, we can decompose the proper wave for a given value of the energy as

$$u = e^{-iEt/\hbar} ({}^+u \vee \epsilon^+ + {}^-u \vee \epsilon^-),$$

where the superscript indicates the sign of the charge component of the solution  $u$  of the Kähler equation. Using this decomposition in the expression for the conserved differential form  $(u, \eta\bar{u})_1$  and performing a space and time split (in other words, a separation of space differentials from time differentials) led him, in the case of electromagnetic coupling to

$$\begin{aligned} (u, \eta\bar{u})_1 &= \frac{1}{2} \{ {}^+u, {}^+\bar{u} \} + \frac{1}{2} \{ {}^+u, \eta^+\bar{u} \}_1 \vee idt, \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ {}^-u, {}^-\bar{u} \} + \frac{1}{2} \{ {}^-u, \eta^-\bar{u} \}_1 \vee idt \end{aligned}$$

where  $\{ , \}$  and  $\{ , \}_1$  are the same products as  $( , )$  and  $( , )_1$  except that they now pertain to 3-space rather than spacetime, and are thus computed with the Euclidean metric. This takes the form of the conserved 3-form current, which is  $\rho w - j^i dx^j \wedge dx^k \wedge dt$ . We thus see that the density to which this conserved current refers is contained in

$$\frac{1}{2} \{ {}^+u, {}^+\bar{u} \} - \frac{1}{2} \{ {}^-u, {}^-\bar{u} \}.$$

The characterization of the state of positron by  $(u \vee \epsilon^+ = u, u \vee \epsilon^- = 0)$ , and of the electron by  $(u \vee \epsilon^- = u, u \vee \epsilon^+ = 0)$ , brings about the interpretation that there are contributions of opposite signs to that density. It becomes either one contribution or the other in the cases of pure electron ( $u = {}^-u$ ) and pure positron ( $u = {}^+u$ ). This leads to the association of the density 3-form for electrons and positrons as

$$\mp \rho w = \mp \frac{|e|}{2} \{ \mp u, \mp \bar{u} \},$$

where  $e$  is some proportionality constant retrospectively identified with the charge of the electron (or proportional to it with a positive proportionality constant). We have taken into account that one can prove that both  $\{ \mp u, \mp \bar{u} \}$  are non negative under the conditions (like positive definite metric) of the physical problem in question. The emergence of, and association with negative energies of antiparticles has thus to be viewed as an artifact of the Dirac theory, which is one of the reasons why we speak of its being superseded by the Kähler theory. All this was done by Kähler half a century ago

### 6.4.3 Emergence of generalized momentum

The present author has recently elaborated further in making the case that the Kähler calculus should be the calculus for physics in general and quantum mechanics in particular [5]. A summary follows. The Kähler equation with minimal EM coupling is

$$-i\hbar\partial u = \frac{1}{c}(imc^2 - ec\phi dt + eA_i dx^i) \vee u,$$

where  $\phi$  now is the time component of the potential 1-form. Since the mass term dominates at low energies, we rewrite the wave function of the electron as

$$u = e^{-imc^2 t/\hbar} R(x, dx, t) \vee \epsilon^-.$$

$R$  depending slowly on time. All the dependence on  $dt$  is, of course contained in  $\epsilon^-$ , since  $dt$  is a linear combination of  $\epsilon^-$  and  $\epsilon^+$ , and we are dealing with electrons. Take into account that  $\partial u = dt \vee u_{,t} + dx^i \vee u_{,i}$ . and define  $P$  as

$$P \equiv dx^j (-i\partial_j - eA_j).$$

One obtains “the “master system”

$$R_{,t} = -P \vee \eta R - ie\phi R + im(R - \eta R).$$

Further development yields

$$\begin{aligned} \varphi_{,t} &= P \vee \chi - ie\phi\varphi, \\ \chi_{,t} &= -P \vee \varphi - ie\phi\chi + 2im\chi, \end{aligned}$$

where

$$\varphi \equiv \frac{1}{2}(R + \eta R) \quad \chi \equiv \frac{1}{2}(R - \eta R).$$

### 6.4.4 Pauli and Schrödinger's equations

We may now develop the master system further. In a first approximation, we have

$$\chi_1 \equiv -\frac{i}{2m} P \vee \varphi,$$

and

$$i\varphi_{,t} = \frac{1}{2m} P \vee (P \vee \varphi) + e\phi\varphi.$$

which in turn yields

$$i\varphi_{,t} = \frac{1}{2m} P^2 \varphi + \frac{ie}{2m} B_k dx^i \vee dx^j \vee \varphi + e\phi\varphi.$$

This is the Pauli equation in terms of differential forms. The Schrödinger equation,

$$i\varphi_{,t} = \frac{1}{2m} p^2 \varphi + e\phi\varphi,$$

readily emerges if the magnetic field is zero. We do not go any further as the foregoing is enough for our illustration. Readers interested in the next approximation and other important results related to antiparticles are referred to [5].

## 7 Concluding remarks

We hope to have shown in some cases and intimated in other cases the enormous advantage for mathematics and physics that follows from the use of a richly endowed calculus of differential forms. Scalar-valued differential forms were involved for some applications and vector-valued ones for other applications. Because of the limited scope of this paper, vector-valued differential forms have been considered only in the Cartan context, i.e. with the exterior calculus. In other words, we have used the Kähler calculus only for scalar-valued differential forms. Owing to the same limitation, we have not dealt with Lie algebra-valued differential forms, Finslerian and Kaluza-Klein contexts, etc. All that speaks of the tremendous potential for applications that remains in this calculus. These additional developments should create a still higher mathematical platform for physics, which this author is committed to build [10]. It will only take climbing to the shoulders of the mathematical giants that we have mentioned in order to see what nobody has yet seen. The purpose of this paper will have been achieved if some readers are hereby prompted to join the climb.

## References

- [1] Cartan É. Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff // *Ann. Ec. Normale*, 16, 1899, pp.239-332.
- [2] Kähler E. Innerer und äusserer Differentialkalkül. Abh. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, Kl. für Math. Phys. Tech. 4, 1960, pp.1-32.
- [3] Kähler E. Die Dirac-Gleichung. Abh. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, Kl. für Math. Phys. Tech, 1, 1961, pp.1-38.
- [4] Kähler E. Der innere Differentialkalkül // *Rendiconti di Matematica*, 21, 1962, pp.425-523.
- [5] Vargas J. G. The Foundations of Quantum Mechanics and the Evolution of the Cartan-Kähler Calculus // *Found. Phys.*, 38, 2008, pp.610-647.
- [6] Grassmann H. A New Branch of Mathematics: The Ausdehnungslehre of 1844 and Other Works. Open Court, New York, 1995.
- [7] Clifford W. K. Applications of Grassmann's Extensive Algebra // *Am. J. of Math.*, 1, 1878, pp.350-358.
- [8] Dieudonné J. The Tragedy of Grassmann // *Linear and Multilinear Algebra*, 8, 1979, pp.1-14
- [9] Barnabei M., Brini A. and Rota G.C. On the Exterior Calculus of Invariant Theory // *Journal of Algebra*, 96, 1985, pp.120-160.
- [10] Vargas J. G. The Unifying Calculus of Differential Forms, 2011.
- [11] Vargas J. G. Cauchy's Theory Without Complex Variable and Contour Integrals Without Cauchy's Theory, in "The Search For Fundamental Theory", Amoroso, R. L., Rowlands, P. and Jeffers, S. (eds.). Proceedings of the VIIth Vigier Symposium (London, July 2010), New York, Am. Inst. Physics Series.
- [12] Rudin W. Principles of Mathematical Analysis. Mc-Graw Hill, New York, 1976.
- [13] Lounesto P. Clifford Algebras and Spinors, Cambridge University press, Cambridge, 2002.
- [14] Ricci G. and Levi-Civita T. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications // *Mathematische Annalen*, 54, 1901, pp. 125-201.
- [15] Cartan É. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée // *Ann.Éc. Norm.* 40, 1923, pp.325-412.
- [16] Vargas J. G. Differential Forms for Cartan-Klein Geometry, 2010.
- [17] Vargas J. G., Torr D.G. Of Finsler fiber bundles and the evolution of the calculus. In: Udriste, C., Balan, V. (eds)., Fifth Conference of Balkan Society of Geometers, Mangalia, August-September, 2005. Proceedings vol. 13, pp.183-191, Balkan Geometry Press, Bucharest (2006). [www.mathem.pub.ro/dept/confer05/M-VAO.PDF](http://www.mathem.pub.ro/dept/confer05/M-VAO.PDF).
- [18] Vargas J. G., Torr D.G. The Idiosyncrasies of Anticipation in Demiurgic Physical Unification with Teleparallelism. International Journal of Computing Anticipatory Systems 19, 2006, pp.210-225.

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ: ОТ КЛИФФОРДА ЧЕРЕЗ КАРТАНА К КЭЛЕРУ.

Джозе Г. Варгас

*Университет Северной Каролины, Колумбия, Северная Каролина, США*  
josegvargas@earthlink.net

Продемонстрированы пределы векторного, тензорного и спинорного дираковского исчисления для мотивации введения кэлерова исчисления интеграндов, заменяющего все три вышеперечисленные. При этом кэлерово исчисление вводится в три этапа.

Во-первых, мы формулируем основы алгебры Клиффорда, лежащей в основе кэлерова исчисления, и пригодной как для евклидовых, так и для псевдоевклидовых векторных пространств любого числа измерений. Показано, что обычная векторная алгебра представляет собой "поврежденную" алгебру Клиффорда, причем "повреждение" рассматриваемого типа возможно лишь в 3-мерном векторном пространстве. Клиффордово произведение строится как сумма внешнего и внутреннего произведений, если, по крайней мере, один из сомножителей является вектором. Грубо говоря, эти произведения обобщают обычные векторное и скалярное произведения и включают в себя внешнюю алгебру.

В качестве промежуточного шага на пути к исчислению Кэлера мы кратко формулируем основы исчисления внешних скалярно-значных дифференциальных форм Картана, рассматриваемых здесь как обычные скалярно-значные подынтегральные выражения в кратных интегралах. Мы также делаем небольшой экскурс в исчисление внешних векторно-значных дифференциальных форм, реализующих метод подвижного репера в дифференциальной геометрии.

Далее мы представляем основы исчисления дифференциальных форм Кэлера. Оно относится к внешнему исчислению так же, как алгебра Клиффорда относится к внешней алгебре. Ввиду ограничений по объему и сложности, мы останавливаемся лишь на скалярно-значных дифференциальных формах, что вполне достаточно для приложений в области релятивистской квантовой механики с электромагнитным взаимодействием. Использование исчисления Кэлера не приводит к решениям с отрицательными энергиями.

**Ключевые слова:** дифференциальные формы, гиперкомплексные числа, алгебра Клиффорда, внешнее исчисление, подвижный репер, исчисление Кэлера.

## Д и с к у с с и я.

### К ВОПРОСУ О МНОЖЕСТВАХ ЖУЛИА И МАНДЕЛЬБРОТА НА ПЛОСКОСТИ ДВОЙНЫХ ЧИСЕЛ

И. Типунин<sup>1</sup>, А. Топоренский<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Физический институт им. Лебедева, Москва, Россия*

<sup>2</sup> *Государственный астрономический институт им. Штернберга, Москва, Россия*

atopor@rambler.ru

Мы находим численно множество Мандельброта и наполненные множества Жулиа квадратичного отображения на плоскости двойных чисел. Обсуждаются отличия нашего определения данных множеств от ранее данного в работе Арчи и, как следствие, отличия в результатах. Найдено также условие, при котором наши результаты и результаты Арчи совпадают. Показано, что наше определение дает возможность получать нетривиальные графические структуры на плоскости двойных чисел, порожденные квадратичным отображением, тогда как определение Арчи такой возможности лишено.

**Ключевые слова:** динамические системы, двойные числа.

Известно что простое квадратичное отображение

$$x \rightarrow x^2 + c \tag{1}$$

на плоскости комплексной переменной служит источником разнообразных фрактальных структур имеющих кроме математической еще и признанную эстетическую ценность (см. например, [1]). Фрактальными являются инвариантные множества отображения (1) (называемые множествами Жулиа) для всех  $c$  отличных от 0 или  $-2$  (точные определения и систематическое изложение стоящих за этими фактами математической теории см. в [2]), а также так называемые наполненные множества Жулиа (множества точек комплексной плоскости с ограниченной орбитой). Интересную и сложную структуру несамopodobного фрактала имеет и широко известное множество Мандельброта (множество тех  $c$  отображения (1) для которых орбита нуля ограничена).

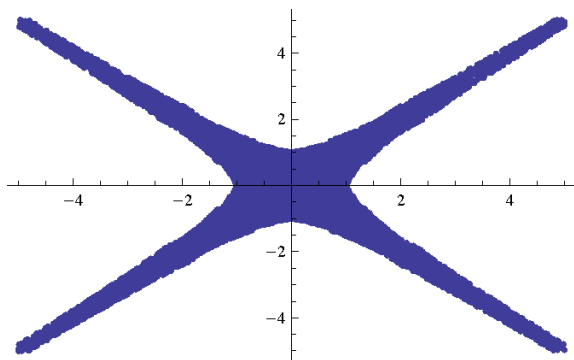
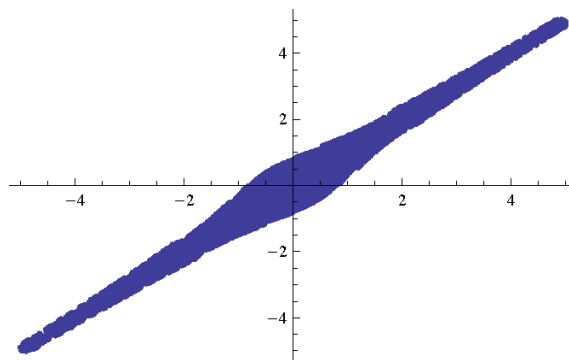
В противовес этому считается что аналогичное отображение на плоскости двойной переменной (подробнее о двойных числах см, например, в [3]) приводит к простым прямоугольным аналогам множеств Жулиа и Мандельброта В работе Арчи [4] эти множества были вычислены аналитически. Подход Арчи однако не является единственно возможным, и причина этого состоит в существовании разных вариантов определения ограниченности.

Напомним что двойные числа – это алгебра размерности 2 над полем действительных чисел, содержащая мнимую единицу  $i$ , подчиняющуюся условию  $i^2 = -1$ . Это значит, что произведение двух двойных чисел  $x = Re(x) + iIm(x)$  и  $y = Re(y) + iIm(y)$  дается формулой  $xy = Re(x)Re(y) + Im(x)Im(y) + i(Re(x)Im(y) + Im(x)Re(y))$  (сумма двойных чисел определяется очевидным образом через сумму действительных и мнимых частей).

В этой алгебре можно ввести норму

$$|x|^2 = |Re^2(x) - Im^2(x)|. \tag{2}$$

<sup>1</sup>Для комплексно-аналитических отображений это множество эквивалентно множеству тех  $c$ , для которых соответствующее множество Жулиа связно. В иных случаях эти два множества не обязаны совпадать, и мы пользуемся определением, данным в основном тексте. Множество, задаваемое вторым определением для отображений, не являющихся комплексно-аналитическими получило в англоязычной литературе название "connectedness locus".

Рис. 1: Множество Жулиа для  $c = 0$ .Рис. 2: Множество Жулиа для  $c = 0.1 + 0.1i$ 

Заметим, что в отличие от алгебры комплексных чисел с нормой  $|x|^2 = Re^2(x) + Im^2(x)$ , где стремление хотя бы одной из координат к бесконечности автоматически означает неограниченность нормы, это не так в случае двойных чисел. Например, норма двойного числа с равными действительными и мнимыми частями всегда равна нулю.

В работе [4] было принято обычное определение ограниченной последовательности как последовательности двойных чисел  $x_n$  с ограниченными  $Re(x_n)$  и  $Im(x_n)$ . Оно, однако, игнорирует форму нормы (2). Такой подход может быть оправдан в задачах где двойные числа выступают в качестве частного случая более общей динамики (в качестве примеров см. [5, 6]), но является несколько неестественным при изучении собственно двойных чисел. В настоящей статье мы рассматриваем последовательности с точки зрения их ограниченности по норме (2). Ясно, что последовательность двойных чисел, ограниченная по Арчи ограничена и по норме, обратное же, вообще говоря, неверно.

Мы проводили численное итерирование отображения (1), останавливая вычисления, когда норма очередного члена последовательности превосходила некое заранее выбранное число (в нашем случае 10). Основной проблемой являлась необходимость время от времени проводить вычисления с очень большими числами (т.к. норма двойного числа может быть малой при больших значениях действительной и мнимой частей). Чтобы избежать машинных эффектов работа велась в целочисленной арифметике системы Mathematica, позволяющей выполнять арифметические операции с произвольно большими рациональными числами без округления (о других подходах к преодолению этой трудности см. [7, 8], следует отметить, что наши результаты не во всем совпадают с полученными в этих статьях, отличия будут оговорены ниже). Наибольшее число выполняемых итераций выбиралось из компромисса между требованием быть достаточно большим для того, чтобы структура получающихся множеств была достаточно проявлена, и, в то же время, вычисления не приводили к чрезмерному потреблению машинной памяти и времени. Мы ограничились числом итераций равным 12.

Наши результаты показаны на Рис. 1-5. Общие итоги можно описать следующим образом. Понятно, что множества, найденные Арчи являются подмножествами множеств, найденных нами. Отличие между ними наглядно видно для случая  $c = 0$ . Очевидно, что для ограниченности по норме это множество ограничено гиперболами (см. Рис.1), играющими роль единичной окружности в метрике, порожденной нормой (2), тогда как в работе Арчи мы имеем квадрат. Как справедливо отмечено в [8], воспроизведение этого результата на компьютере является естественным тестом правильности работы вычислительной процедуры. Для ненулевых  $c$  наши результаты существенно зависят от нормы  $|c|$ . Оказалось, что при ненулевой норме числа  $c$  наши множества и множества Арчи совпадают. Качественно причину этого можно объяснить следующим образом. Особенностью квадратичного отображения (1) на множестве двойных чисел (отличающей этот случай от комплексной динамики) является то, что прибавление фиксированного числа к двойному числу может произвольно сильно изменять его норму. Действительно, для произвольного фиксированного  $c$  с евклидовой нормой  $n$  и евклидовым углом с осью абсцисс  $\phi$  мы имеем

$$|x + c|^2 - |x|^2 = 2n(Re(x)\cos(\phi) - Im(x)\sin(\phi)) + n^2(\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)). \quad (3)$$

Поскольку возможное отличие двух типов заполненных множеств Жулиа связано с существова-

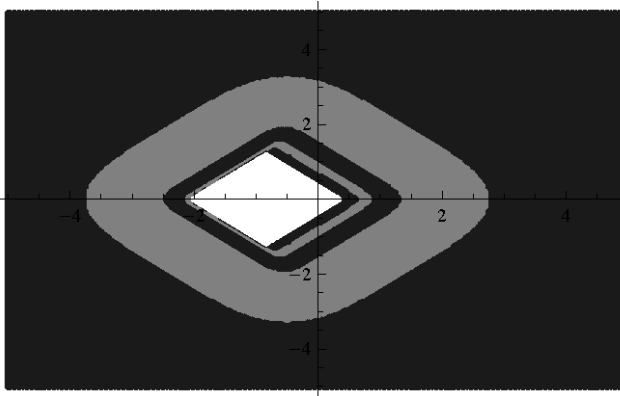


Рис. 3: Диаграмма, показывающая числа шагов (помечены разными оттенками серого) необходимых для достижения евклидовой нормы равной 10 при старте с точки 0. Незакрашенная область представляет собой множество Мандельброта отображения (1) в евклидовой метрике.

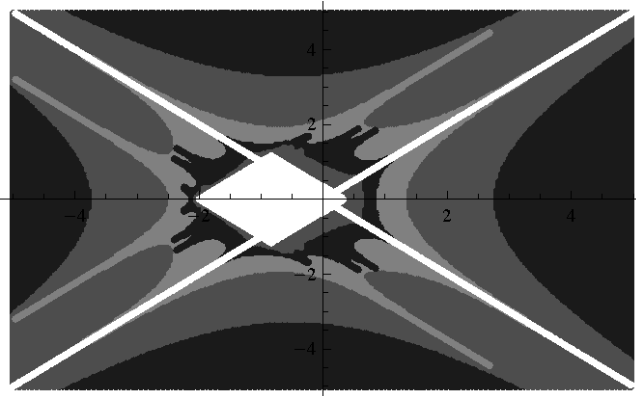


Рис. 4: Диаграмма, аналогичная Рис.3, построенная для нормы двойного числа (2). Видна нетривиальная структура времен ухода.

нием последовательностей с  $Re(x) \rightarrow \infty$ , но  $|x|$  конечна, мы имеем либо  $Re(x) \sim Im(x)$  (более точно,  $Re(x) - Im(x) < C^2 / (Re(x) + Im(x))$ ), где  $C$  – фиксированная константа, либо  $Re(x) \sim -Im(x)$ .

В первом случае из (3) видно, что такие последовательности существуют только при  $\cos(\phi) = \sin(\phi)$ , что означает равенство нулю нормы  $|c|$ . Аналогично при  $Re(x) \sim -Im(x)$  условие отсутствия линейного по  $Re(x)$  члена имеет вид  $\cos(\phi) = -\sin(\phi)$ , что также требует  $|c| = 0$ . В противном случае какова бы ни была константа  $C$  всегда найдется такие большие  $|Re(x)|, |Im(x)|$  что для двойных чисел с еще большими модулями действительной и мнимой частей по крайней мере одно из чисел  $x$  или  $x + c$  имеет норму больше  $C$ . А это значит, что (записывая константу  $C$  как  $A^2$  и пользуясь мультипликативностью нормы) для достаточно больших  $|Re(x)|, |Im(x)|$  по крайней мере один из двух соседних членов последовательности (1) имеет норму больше  $A$ , и, следовательно, начальная точка такой последовательности не может принадлежать множеству Жюлиа.

Для  $c$  с нулевой нормой наши результаты отличаются от результатов Арчи, как это видно из Рис.2. Обращает на себя внимание, однако, гладкость полученного наполненного множества Жюлиа, показывающая, что его природа остается нефрактальной.

Сказанное выше также объясняет природу множества Мандельброта для двойных чисел, которое представляет собой объединение найденного Арчи прямоугольника и множества точек с нулевой нормой. Таким образом, множество Мандельброта также не является фрактальным.

Тем не менее, отображение (1) для двойных чисел позволяет получить довольно интересные структуры если несколько расширить графические возможности. А именно, не только фиксировать, станет ли норма члена последовательности определяемой отображением (1) больше заранее фиксированного числа или нет но и (в случае, если это произойдет) сохранять в памяти номер шага, на котором это случилось. Помечая затем точки, пересекающие установленную границу за разное число шагов разными цветами, получаем то, что в англоязычной литературе называется "escaping time diagram" и представляет собой широко используемый способ получения цветных фрактальных изображений (см., например, [10]). Для евклидовой нормы на множестве двойных чисел подобная диаграмма малоинтересна (см. Рис.3). При использовании же меры (2) получается довольно нетривиальная структура (см. Рис.4), чья природа требует дальнейшего анализа. Само множество Мандельброта (прямоугольник в центре) совпадает с построенным в более ранней работе [9], однако структура вокруг него кажется существенно отличной, что может быть связано с различием используемых численных методов и требует осмысления. Также важно понять почему метод, использованный в [7] указывает на фрактальность множеств Жюлиа при ненулевых  $c$ , в то время как мы видим гладкие границы (см. выше). Эти вопросы мы оставляем для дальнейшей работы.

Мы рассмотрели заполненные множества Жюлиа и множество Мандельброта для квадратич-



ного отображения (1) на плоскости двойных чисел, понимая под ограниченностью соответствующей последовательности двойных чисел ограниченность по норме. В этом наш подход отличается от реализованного в работе Арчи, где под ограниченностью понималась ограниченность действительной и мнимой частей двойного числа. Мы показали, что наши результаты в части, касающейся формы наполненных множеств Жулия отличаются от результатов Арчи только в случае нулевой нормы числа  $s$ . В то же время для множества Мандельброта картина распределения времен достижения заранее заданной величины нормы (2) существенно отличается от построенной для классической евклидовой нормы и имеет сложную структуру, требующую более детального изучения. Также необходимо отметить, что в настоящей работе мы ограничились наполненными множествами Жулия, чьи границы являются собственно множествами Жулия когда последние связны. Случай вполне несвязных множеств Жулия требует использования иных численных алгоритмов.

### Благодарности

Автор благодарен Павлову Д.Г. и Панчелюге В.А. за полезные обсуждения.

### Литература

- [1] Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Москва, 1993 — 176 стр.
- [2] Милнор Дж. Голоморфная динамика. Ижевск, 2000 — 320 стр.
- [3] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. Москва, 1973 — 144 стр.
- [4] Artzy R. Dynamics of quadratic functions in cycle planes // *Journal of Geometry*, 44, 1992, p.26-32.
- [5] Isaeva O., Kuznetsov S. On possibility of realization of the Mandelbrot set in coupled continuous system // nlin/0509013.
- [6] Toporensky A. Quasi-Mandelbrot sets for perturbed complex analytic maps: visual patterns // *arXiv:0807.1667* [cs.GR].
- [7] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Малыхин А.В., Панчелюга В.А. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлия на плоскости двойной переменной // // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике* 1(11), 6, 2009, p.135-145.
- [8] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналога множества Жюлия при нулевом значении параметра на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике* 6, 2009, p.146-151.
- [9] Павлов Д.Г., Панчелюга В.А. О форме аналога множества Мандельброта на плоскости двойных чисел // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(7), 4, 2007, p.93-97.
- [10] Sprott J.C., Pickover C.A. Automatic generation of general quadratic map basins // *Computers and Graphics*, 18, 1995, p.309.

## ON JULIA AND MANDELBROT SETS IN DOUBLE NUMBERS PLANE

I. Tipunin<sup>1</sup>, A. Toporensky<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Lebedev Physical Institute, Moscow, Russia*

<sup>2</sup> *Sternberg Astronomical Institute, Moscow, Russia*

atopor@rambler.ru

Mandelbrot set and filled-in Julia sets in double numbers plane have been found numerically. We discuss differences between our definition of these sets and the definition of Artzy. A condition for these two different types of sets to coincide have been found. We show also that our definition allows graphycally interesting escaping time diagrams to be constructed in the double numbers plane, in contrast to the Artzy's definition.

**Key Words:** dynamical systems, double numbers.

## П и с ь м а в Г Ч Г Ф.

### ПОПРАВКА К ОДНОМУ УТВЕРЖДЕНИЮ СТАТЬИ «ИДЕМПОТЕНТЫ И НИЛЬПОТЕНТЫ В КЛИФФОРДОВОЙ АЛГЕБРЕ ЕВКЛИДОВА 3-ПРОСТРАНСТВА И ИХ СВЯЗЬ С ФИЗИКОЙ»

О.А. Морнев

*Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, г. Пущино, Россия*

mornev@mail.ru

Представлена поправка к статье «Идемпотенты и нильпотенты в клиффордовой алгебре евклидова 3-пространства и их связь с физикой» (Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2(12), том 6, 2009, с. 92–137), которая исправляет одно высказанное в ней утверждение, касающееся свойств односторонних идеалов, генерируемых в клиффордовой алгебре трёхмерного евклидова пространства составными идемпотентами этой алгебры.

**Ключевые слова:** клиффордова алгебра, геометрическая алгебра, идемпотенты, простые идемпотенты, составные идемпотенты, идеалы, минимальные идеалы, неминимальные идеалы.

*Именно, именно, – закричал он, и левый зеленый глаз его,  
обращенный к Берлиозу, засверкал, – ему там самое место!  
Ведь говорил я ему тогда за завтраком: «Вы, профессор,  
воля ваша, что-то нескладное придумали! Оно, может, и  
умно, но больно непонятно. Над вами потешаться будут»*

*Булгаков М.А. «Мастер и Маргарита»*

## 1 Поправка

В п. 2.3 статьи [1] было представлено (и даже вынесено в раздел «Выводы») утверждение о том, что односторонние идеалы, порождаемые составными идемпотентами клиффордовой алгебры  $Cl_3$  трёхмерного евклидова пространства, не являются минимальными.

Это утверждение *ошибочно* и представляет собой досадную оплошность автора: оно вовсе не вытекает из изложенных в п. 2.3 доводов. Более того, сами эти доводы могут рассматриваться как начальная часть вполне верного рассуждения, которое, будучи продолжено до логического конца, приводит к следующему противоположному – но уже правильному – утверждению:

Все идемпотенты алгебры  $Cl_3$  – как простые идемпотенты (идемпотентные паравекторы)  $e$ , так и составные идемпотенты  $E = e + N$  (здесь  $N$  – нильпотент индекса 2, связанный с  $E$  и  $e$  известным образом [1]) – порождают в  $Cl_3$  *минимальные* идеалы.

Это утверждение вытекает из следующей теоремы.

**Теорема.** *Левый (правый) идеал, порождённый в  $Cl_3$  составным идемпотентом  $E = e + N$ , совпадает с левым (правым) идеалом, порождённым в  $Cl_3$  простым идемпотентом  $e$ .*

Минимальность односторонних идеалов, порождённых составными идемпотентами, теперь следует из того факта, что таковыми являются односторонние идеалы, порождённые простыми идемпотентами.

По-видимому, можно построить несколько доказательств указанной теоремы, в том числе опирающихся на общеалгебраическую аргументацию. Автор нашёл доказательство, которое, дополняя рассуждения, изложенные в п. 2.3, апеллирует к конкретным свойствам алгебры  $Cl_3$ ; в частности, в нём существенно используется разработанная автором техника представления идемпотентов этой алгебры в виде сумм полилинейных комбинаций её нильпотентов – трюк, весьма полезный также и в других задачах (соответствующий материал будет изложен в одной из следующих публикаций).

## 2 Заключение

К счастью, доказательства всех остальных – основных – результатов статьи [1] никак не связаны с фактом минимальности упомянутых идеалов и остаются неразрушенными, а сами результаты – верными. (Поэтому автор отвергает выпад Воланда, процитированный в эпиграфе к настоящей заметке.)

## Литература

- [1] Морнев О.А. Идемпотенты и нильпотенты в клиффордовой алгебре евклидова 3-пространства и их связь с физикой // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(12), том 6, 2009, с. 92–137.

## THE AMENDMENT TO ONE STATEMENT OF THE PAPER «IDEMPOTENTS AND NILPOTENTS IN THE CLIFFORD ALGEBRA OF EUCLIDEAN 3 - SPACE AND THEIR INTERCONNECTIONS IN PHYSICS»

O.A. Mornev

*Institute of Theoretical and Experimental Biophysics of RAS, Pushchino, Russian Federation*

*mornev@mail.ru*

In the author's paper mentioned in the title of this abstract and published in the Journal «Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics», 2 (12), Vol.6, 2009, Pp. 92–137, the statement was formulated that composite idempotents of the Clifford algebra  $Cl_3$  of three dimensional Euclidean space generate nonminimal one-sided ideals of  $Cl_3$ . The amendment presented here cancels this statement: one can prove that all one-sided ideals generated in  $Cl_3$  both by composite idempotents and by simple ones are always minimal. Fortunately, the proofs of the rest of results presented in that paper are not affected by this local circumstance and therefore do not fall; as a consequence, all these results remain true.

**Key Words:** Clifford algebra, geometric algebra, space algebra, idempotents, composite idempotents, simple idempotents, ideals, minimal ideals, nonminimal ideals.

## ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных алгебр в физике, е) Экспериментальные исследования возможной анизотропии пространства-времени и иных проявлений финслеровой геометрии.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.
2. Объем статьи не должен превышать 1 печ. листа (24 усл. маш. стр.)
3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате  $\text{\LaTeX}$  (версия  $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ , для набора формул используется  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$ ) и файл статьи в формате PostScript или PDF.
4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).
5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок), ключевые слова. Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.
6. Название статьи, аннотация, ключевые слова, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.
7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.
8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи.
9. Публикация бесплатна для всех авторов.

## INFORMATION FOR AUTHORS

In the journal published are the original articles and reviews of the Russian and foreign authors on the following topics: a) Hypercomplex numbers; b) Geometries connected with hypercomplex numbers; c) Finsler spaces; d) Fractals based on hypercomplex numbers; e) Application of the hypercomplex algebras in physics; f) Experimental investigation of the possible space-time anisotropy and other manifestations of Finsler geometry.

Editorial staff informs authors of the articles about the journal rules:

1. Articles are published either in Russian or in English.
2. The size of the article should not exceed that of a printed sheet (24 conventional typewritten pages)
3. Author makes his article file available for the editorial board in  $\text{\LaTeX}$  format ( $\text{\LaTeX}2_\epsilon$  version,  $\text{\AMS-L\TeX}$  is used for formulas) as well as in either PostScript or PDF format.
4. Accepted picture formats are as follows: TIFF, GIF, PNG for bit images (encapsulation in EPS should be possible); EPS, PDF, TEX for vector images. Each image should be represented as a separate file. Colour scheme may be either black and white or grey (8 bit).
5. Article should contain an abstract (no lengthy formulas or references) and keywords.
6. Title of the article, abstract, keywords, names and affiliation of the authors should be available both in Russian and in English.
7. Author should give his or her e-mail and telephone number to make operative communication possible. If the article is sent back to the author for him or her to improve it, it doesn't mean that the article is accepted.
8. Any deviation from the given rules makes the chance of the publication lower.
9. Publication is free for all authors.

**ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА  
В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ**

Научный журнал. Основан в 2003 г.

№ 1 (13), том 7, 2010

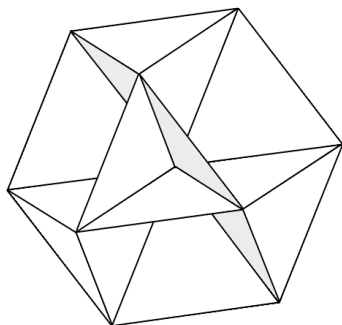
Главный редактор Павлов Д. Г.  
Зам. главного редактора Панчелюга В. А.  
Технический секретарь Панчелюга М. С.

[www.polynumbers.ru](http://www.polynumbers.ru)  
[hypercomplex@mail.ru](mailto:hypercomplex@mail.ru)

Свидетельство о регистрации  
ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.

ISSN 1814-3946

© НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Российское ги-  
перкомплексное общество, ОАО "МОЗЭТ"



Типографские данные