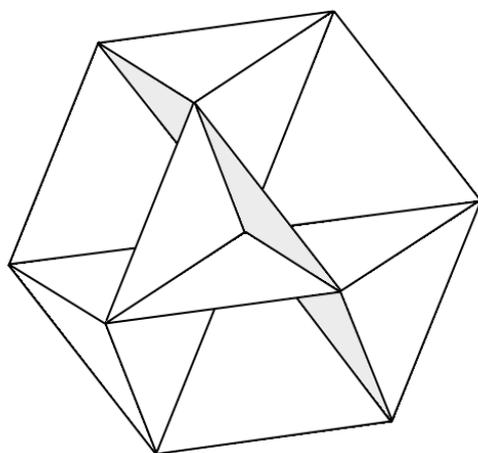


ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

№ 1 (15), том 8, 2011

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 2003 г.



www.polynumbers.ru

hypercomplex@mail.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

Балан В., Богословский Г.Ю., Кокарев С.С., Павлов Д.Г., Сипаров С.В., Войку Н. Геометрические модели локально анизотропного пространства-времени	4
Кисиль В.В. Индуцированные представления группы $SL_2(\mathbb{R})$ и гиперкомплексные числа	38
Кокарев С.С. Экстравариационный принцип в теории поля	58
Сипаров С.В. Несколько замечаний об анизотропной геометродинамике	75
Гальмак А.М. Полиадические операции на декартовых степенях группоидов, полугрупп и колец	86
Букушева А.В. О пространстве над алгеброй поличисел с метрикой Бервальда-Моора	99
Дорофеев В.Ю. Построение кривизны на алгебре октав Кэли	104
Грушевская Г.В., Крылова Н.Г. Эффекты финслеровой геометрии в физике поверхностных явлений: случай монослойных систем	128
Левин С.Ф. Анизотропия красного смещения	147
Гладышев В.О. О возможном отклонении регистрируемой скорости распространения фундаментальных взаимодействий от скорости света в вакууме ...	179
Информация для авторов	190
Информация для авторов (на английском)	191

CONTENTS

Balan V.D., Bogoslovsky G.Yu., Kokarev S.S., Pavlov D.G., Siparov S.V., Voicu N. Geometrical models of the locally anisotropic space-time	4
Kisil V.V. Induced representations and hypercomplex numbers	38
Kokarev S.S. Extra-variational principle in the theory of field	58
Siparov S.V. Several remarks on the anisotropic geometrodynamics	75
Gal'mak A.M. Polyadic operations on the cartesian powers of groupoids, semigroups and rings	86
Bukusheva A.V. The space over the algebra of polynumbers with Berwald-Moor metric	99
Dorofeev V.Yu. Construction of the curvature on Cayley algebra octaves	104
Grushevskaya H.V., Krylova N.G. Finsler geometry effects in surface phenomena physics: The case of monolayer systems	128
Levin S.F. Anisotropy of red shift	147
Gladyshev V.O. On possible departure detected velocity of propagation of fundamental interactions from light velocity in vacuum	179
Information for authors (in russian)	190
Information for authors	191

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛОКАЛЬНО АНИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

В. Балан¹, Г.Ю. Богословский^{2,3}, С.С. Кокарев^{3,4}, Д.Г. Павлов³,
С.В. Сипаров^{3,5}, Н. Войку⁶

¹ Политехнический университет, Бухарест, Румыния

² НИИ Ядерной физики МГУ, Москва, Россия

³ НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

⁴ Российский научно-образовательный центр "Логос", Ярославль, Россия

⁵ Государственный университет гражданской авиации, Санкт-Петербург, Россия

⁶ Трансильванский университет, Брашов, Румыния

vladimir.balan@upb.ro, bogoslov@theory.sinp.msu.ru, logos-center@mail.ru, geom2004@mail.ru,
sergey@siparov.ru, nico.brinzei@unitbv.ro

В последнее время в литературе широко обсуждается проблема нарушения лоренцевой симметрии, причем, в дополнение к исследованиям, посвященным построению феноменологически нацеленных эффективных полевых теорий, все большую популярность приобретают исследования, основанные на финслеровых геометрических моделях пространства-времени. Финслеров подход к проблеме нарушения лоренцевой симметрии отличается тем, что в его рамках нарушение лоренцевой симметрии происходит без нарушения релятивистской симметрии. Сохранение релятивистской симметрии служит, в частности, жестким критерием жизнеспособности для любой лоренц-неинвариантной эффективной полевой теории. Хотя по своему характеру данная статья является обзорной, в ней, за небольшим исключением, отражены лишь те результаты по финслерову расширению теории относительности, в получении которых авторы статьи приняли непосредственное участие.

Ключевые слова: Лоренц-, Пуанкаре- и калибровочная симметрия, спонтанное нарушение симметрий, альтернативные теории гравитации, анизотропное пространство-время, финслерова дифференциальная геометрия.

1 Введение

Программа геометризации и алгебраизации фундаментальных физических законов природы, намеченная на первоначальном этапе развития теории относительности и квантовой теории, остается на сегодняшний день в значительной степени нереализованной. Любое продвижение в этой программе связано с частичным или полным пересмотром общепринятых понятий и свойств тех физических объектов, которые они выражают. Множество базовых концепций современной физики и математики заключено в понятии многообразия, которое выражает возможность универсальной арифметизации событий физического мира вместе с различными отношениями между ними, и представляет собой глубокий симбиоз геометрических и алгебраических идей.

Несмотря на довольно абстрактный характер тех многообразий, которые изучаются в современной физике и математике, и множество дополнительных структур, которыми они снабжаются для максимально полного геометрического описания законов природы, часть структур по ряду причин остается довольно консервативной. В первую очередь, речь идет о метризованных многообразиях и метрике на них, которая в локальной версии описывается метрическим тензором, определяющим в каждой точке скалярное произведение векторов из касательного к этой точке пространства. Иными словами, подавляющее большинство современных геометрических моделей оперирует метрическим тензором, как функцией на касательном расслоении, которая в каждой координатной карте зависит от

координат базы произвольным гладким образом, а от координат слоя зависит билинейно. Несмотря на тот факт, что математикам давно известно обобщение этой конструкции, которое оформилось в отдельную науку — финслерову геометрию [1-3], описывающую локально анизотропные пространства, первая жизнеспособная финслерова модель пространства-времени [4] и опирающаяся на нее специальная релятивистская теория локально анизотропного пространства-времени [5, 6] были предложены значительно позже. Эти работы были мотивированы высказанной к тому времени и ставшей только теперь широко популярной идеей [7] нарушения лоренцевой симметрии, а значит и соответствующего отклонения "истинной" метрики плоского пространства-времени от метрики Минковского.

Вообще говоря, обсуждение анизотропии пространства-времени требует ясно указать, в чем состоит необходимость такого обсуждения, т.е. каковы его физические предпосылки, и в чем состоит предполагаемая анизотропия. Второй вопрос подразумевает, что геометрия в математике соответствует теории измерений в физике, и когда мы говорим, например, о кривизне пространства-времени, то всегда имеем в виду, что она проявит себя в результате измерений. Если мы имеем в виду физические приложения геометрических построений, то это же должно относиться и к анизотропии. Говорить о кривизне или анизотропии пустого пространства можно только, либо полностью выходя за рамки экспериментальной науки, либо указывая характерный масштаб применимости теоретических рассуждений. Последнее означает, что когда необходимость исследования анизотропии пространства-времени будет выявлена, следует указать её источник.

Ответ на первый вопрос менее очевиден и более обширен с точки зрения анализа ситуации, сложившейся в физике (см. [8], а также приведенные ниже дополнительные соображения на этот счет). Результат такого анализа имеет общую и конкретную стороны. Общий вывод указывает на то, что теория гравитации, т.е. ОТО, разработанная и успешно применяемая на масштабах, характерных для планетных систем, при её известных приложениях на космологических масштабах требует введения поправок, в 25 раз превосходящих массу наблюдаемой Вселенной и связанных с существованием новых (пока неизвестных) субстанций, а именно — темной материи и темной энергии, которые изначально в этой теории не предусматриваются. Очевидно, что вместе с их поиском следует убедиться в состоятельности моделей, используемых в теории. К ним относятся так называемый простейший скаляр, который используется в выражении для действия Гильберта-Эйнштейна, т.е. скалярная кривизна, геометрия, используемая для описания пространства-времени, т.е. геометрия Римана, и само 4-мерное пространство-время, используемое как основа описания физической реальности.

Важнейшими наблюдениями, имеющими простой смысл, значительную величину и статистическую достоверность, но противоречащими классической ОТО, не имеющей указанных поправок, являются плоские кривые вращения спиральных галактик. Попытки изменения теории для их адекватного описания, основанные на усложнениях [9, 10] или изменении [11] скаляра, а также на изменении вида метрики [12], оказались либо недостаточно последовательными ($f(R)$ -теории), либо также потребовали введения нового неизвестного скалярного поля или нового неизвестного взаимодействия. Ковариантное обобщение [13] феноменологической теории МОНД [14], требующей произвольного изменения уравнения динамики или выражения для гравитационной силы для удовлетворительного описания наблюдаемых явлений на галактических масштабах, свелось к введению нового скалярного поля.

Конкретный вывод анализа состоит в том, что необходимо сделать следующий шаг и исследовать возможность использования для интерпретации наблюдений другой тип геометрии. Естественными обобщениями геометрии Римана являются геометрии Финслера и Лагранжа, которые учитывают зависимость метрического тензора от направления в

данной точке. Это направление может быть глобальным, что соответствует, например, одной из геометрий, построенных на коммутативно-ассоциативной алгебре, а именно — геометрии Бервальда-Моора. Если использовать метрику Бервальда-Моора для интерпретации теории гравитации, то в теории возникает фиксированное число стационарных глобальных источников кривизны, природа которых в общем случае неясна. Если же это направление является локальным, то интерпретация может соответствовать учету движения локальных источников кривизны. Последнее представляется обоснованным, поскольку общие черты полевых теорий гравитации и электродинамики с точки зрения Лоренц-инвариантности и закона обратных квадратов для сил были отмечены давно, и соответствующие попытки обобщения, использующие понятия токов массы, предпринимались [15,16], а общая геометрическая основа обеих теорий обсуждалась в [17]. Тем не менее гравитоэлектромагнетизм [16] представляется недостаточно самосогласованным подходом, поскольку с гравитационными зарядами нельзя обходиться так же, как с электрическими: первые являются источниками кривизны, а вторые — нет. Вместо того чтобы вводить силу Лоренца, следуя формальной аналогии, необходимо потребовать, чтобы в случае гравитации метрика стала анизотропной, что приведет к возникновению зависимости гравитационной силы от скорости тела и от векторного поля, обусловленного движением источников кривизны. На это же указывает и буквальная формулировка принципа эквивалентности, поскольку силы инерции могут зависеть от скорости явно и быть при этом значительными, а обычные релятивистские поправки, интерпретируемые как зависимости сил от скоростей, являются малыми. Последнее связано с рассмотрением задач типа Шварцшильда, которые не соответствуют задачам космологического масштаба, в частности, непригодны для описания динамики спиральных галактик, проявляющейся в наблюдениях.

Касаясь мотивационных аспектов исследований, посвященных финслеровой геометрической структуре пространства-времени, нельзя не отметить, что вся совокупность современных астрофизических данных, включающая, разумеется, анизотропию ускоренного расширения Вселенной и анизотропию реликтового излучения, лишь косвенно указывает на анизотропию пространства-времени. То же можно, например, сказать о проблеме барионной асимметрии, нарушении дискретных пространственно-временных симметрий в слабых взаимодействиях, о проблеме с аномальным магнитным моментом мюона и т.д. На этом фоне важную роль приобретают результаты, полученные в двух новых независимых лабораторных экспериментах, которые непосредственно указывают на существование пространственно-временной анизотропии.

В первом [18] из отмеченных экспериментов, с помощью прецизионной атомной интерферометрии был измерен фазовый сдвиг свободно падающих атомов и таким образом обнаружено превосходящее 2 стандартные ошибки нарушение локальной лоренцевой симметрии или, другими словами, существование анизотропного конденсата неизвестной природы, который из-за взаимодействия с гравитационным полем нарушает центральную симметрию гравитационного потенциала. В отношении же второго эксперимента нужно сказать следующее.

Недавно на Большом Адронном Коллайдере (ЛHC) было обнаружено новое явление [19], которое теперь известно как Ridge/CMS-эффект (аббревиатура CMS означает как название детектора — Компактный Мюонный Соленоид, так и название соответствующей исследовательской коллаборации). Суть этого эффекта состоит в том, что для событий с большой множественностью, т.е. когда в протон-протонных столкновениях с полной энергией 7 ТэВ образуется более чем 100 частиц, плоскости, в которых лежат треки любой пары из образовавшихся заряженных частиц, оказываются сориентированными таким образом, что преимущественно имеют общую линию пересечения, совпадающую с осью столкновения исходных протонов. Это напоминает ситуацию с упругим рассеянием движущейся частицы на первоначально покоящейся: из-за закона сохранения полного

импульса (равного импульсу налетающей частицы), все возможные плоскости, в которых лежат треки двух частиц после рассеяния, имеют общую линию пересечения, совпадающую с треком налетающей частицы. Однако, в отличие от упругого рассеяния на покоящейся частице, нетривиальность Ridge/CMS-эффекта заключается в том, что исходный полный импульс сталкивающихся протонов равен нулю. В рамках обычных представлений, именно это обстоятельство, а также тот факт, что Ridge/CMS-эффект характерен только для событий с большой множественностью, очень затрудняет выяснение физической природы выделенного направления, возникающего при рождении ста и более частиц и совпадающего с осью столкновения протонов.

События с большой множественностью рожденных частиц происходят, очевидно, в случае "лобового" столкновения исходных протонов. При этом плотность энергии в момент столкновения становится соизмеримой с той, которая была во Вселенной в первые миллисекунды после Большого Взрыва, когда вместо адронов существовала еще кварк-глюонная плазма. Ясно также, что, рассматривая множественное рождение частиц в протон-протонных столкновениях, нельзя не учитывать фазовые переходы с нарушением высших калибровочных симметрий, которые сопровождаются перестройкой вакуума. Конденсат, возникающий в результате такой перестройки, является локально изотропным (хиггсовским) только в рамках обычной релятивистской теории. В релятивистской теории с нарушенной лоренцевой симметрией или, другими словами, в анизотропной теории относительности, о которой речь пойдет ниже, роль хиггсовского конденсата играет аксиально-симметричный анизотропный фермион-антифермионный конденсат. Помимо него, при адронизации и быстром охлаждении кварк-глюонной плазмы, может возникать полностью анизотропный трехглюонный конденсат. С одной стороны, квантово-полевой вакуум, включающий анизотропный конденсат, является физическим носителем локальной анизотропии пространства-времени и его можно рассматривать в качестве анизотропной квинтэссенции, а с другой — он придает всем частицам свойства квазичастиц в кристаллической среде. В частности, помимо энергии покоя, у частиц возникает еще и импульс покоя. Применительно к Ridge/CMS-эффекту это означает, что в системе центра масс сталкивающихся протонов, т.е. относительно лаборатории, полный импульс образующейся первичной плазмы оказывается отличным от нуля и лежащим на оси столкновения (из-за анизотропии конденсата, спонтанно возникающей вдоль оси столкновения). Именно поэтому, в конечном счете, корреляция парных треков в CMS эксперименте получилась такой, что плоскости, которым принадлежат эти треки, преимущественно пересекаются на оси столкновения протонов.

Таким образом, Ridge/CMS-эффект напрямую говорит о том, что в ранней Вселенной спонтанно возникла аксиально-симметричная локальная анизотропия пространства-времени с группой $DISIM_b(2)$ в качестве неоднородной группы локальной релятивистской симметрии и с соответствующей финслеровой метрикой. Что касается возможности спонтанного возникновения полной локальной анизотропии пространства-времени с абелевой однородной группой локальной релятивистской симметрии и с соответствующей обобщенной финслеровой метрикой Бервальда-Моора, ответ на этот вопрос будет зависеть от поведения трехчастичной корреляционной функции, измерение которой уже запланировано коллаборацией CMS.

В следующем, втором разделе мы рассмотрим релятивистскую финслерову $DISIM_b(2)$ -инвариантную модель плоского пространства-времени с частично нарушенной изотропией 3D пространства. При этом будет показано, что в рамках такой модели физическим носителем анизотропии плоского пространства-времени служит аксиально-симметричный нейтрин-антинейтринный конденсат, а сама модель, лежащая в основе анизотропной специальной теории относительности, допускает естественное обобщение на случай искривленного пространства-времени и финслерова расширения ОТО. Упомяну-

тое здесь финслерово расширение ОТО с необходимостью приводит к существованию, как минимум, одного векторного калибровочного поля и его взаимодействия с сохраняющимся током массы покоя. Целый ряд астрофизических эффектов подобного взаимодействия подробно изучен в рамках предложенной С.В. Сипаровым модели 8-мерного фазового пространства-времени, одна из координат которого имеет постоянное значение. Этой модели и описанию соответствующих эффектов посвящен раздел 3 данного обзора. Во втором же разделе, помимо плоского пространства-времени с частично нарушенной изотропией 3D пространства, кратко рассмотрено трехпараметрическое семейство плоских финслеровых пространств с полностью нарушенной 3D изотропией и с абелевой трехпараметрической группой релятивистской симметрии. Абелева структура группы релятивистской симметрии послужила отправной точкой для более глубокого изучения финслерова пространства Бервальда-Моора, которое в четырехмерном случае принадлежит указанному семейству. В разделе 4 рассмотрены геометрические, алгебраические и физические аспекты ассоциативно-коммутативных алгебр и связанных с ними геометрий Бервальда-Моора различных размерностей. В течение последних лет исследования подобного рода проводились в рамках программы международного сотрудничества между Румынской Академией и Академией наук Российской Федерации. В частности, благодаря работам румынских геометров под руководством профессора В. Балана, результаты, касающиеся алгебраической стороны теории метрик Бервальда-Моора различных размерностей, удалось дополнить специфическими результатами из области современной дифференциальной геометрии Финслеровых пространств. Их концентрированное изложение можно найти в завершающем пятом разделе данного обзора.

2 Релятивистски инвариантные финслеровы пространства с нарушенной локальной лоренцевой симметрией

Как известно, в рамках ОТО пространство-время является римановым, причем распределение и движение материи определяет только его локальную кривизну, никак не влияя на геометрию касательных пространств. Другими словами, независимо от свойств материальной среды, заполняющей риманово пространство-время, любое плоское касательное пространство-время остается пространством событий СТО, т.е. пространством Минковского с его лоренцевой симметрией, которая обычно отождествляется с релятивистской симметрией.

Вместе с тем в последнее время в литературе наблюдается повышенный интерес к проблеме нарушения лоренцевой симметрией. Особенно широко обсуждается струнно-мотивированный подход к этой проблеме.

Дело в том, что даже если исходная единая теория взаимодействий является лоренц-симметричной на наиболее фундаментальном уровне, эта симметрия может быть спонтанно нарушена из-за образования конденсата векторного или (например) тензорного поля. Появление такого конденсата, или постоянного классического поля на фоне пространства Минковского, подразумевает, что он может воздействовать на динамику фундаментальных полей и тем самым модифицировать Стандартную Модель сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий. Поскольку постоянное классическое поле преобразуется при пассивных преобразованиях как лоренцев вектор или тензор, его влияние на динамику фундаментальных полей Стандартной Модели описывается введением в Стандартный лагранжиан дополнительных членов, представляющих собой все возможные лоренц-ковариантные свертки конденсата со Стандартными фундаментальными полями. Феноменологическая теория, основанная на такой лоренц-ковариантной модификации Стандартной Модели называется the Standard Model Extension (SME) [20-22].

По своей конструкции, феноменологическая теория SME не является лоренц-инвари-

антной, т.к. её лагранжиан не остается инвариантным при активных лоренцевых преобразованиях фундаментальных полей на фоне фиксированного конденсата. Кроме того, в контексте SME, нарушение лоренцевой симметрии подразумевает также нарушение и релятивистской симметрии, поскольку присутствие неинвариантного конденсата нарушает физическую эквивалентность различных инерциальных систем отсчета.

К сказанному нужно добавить, что в низкоэнергетическом пределе гравитационных теорий с нарушенной лоренцевой и релятивистской симметрией появляется неограниченное число возможностей для построения различных эффективных полевых теорий, каждая из которых потенциально способна объяснить по крайней мере некоторые из недавно открытых астрофизические явления (см., например, [23]).

Сам факт существования финслеровых геометрических моделей пространства-времени, в рамках которых нарушение лоренцевой симметрии происходит без нарушения релятивистской симметрией, сильно ограничивает возможные эффективные полевые теории с нарушенной лоренцевой симметрией: чтобы оказаться жизнеспособными, такие теории, несмотря на нарушенную лоренцеву симметрию, должны обладать свойством релятивистской инвариантности.

Поскольку только два типа финслеровых пространств с нарушенной лоренцевой симметрией являются релятивистски инвариантными [24], рассмотрим сначала финслеровы пространства первого типа.

2.1 Релятивистски инвариантные финслеровы пространства с частично нарушенной 3D изотропией

Метрика таких пространств, предложенная в [4], имеет следующий вид

$$ds^2 = \left[\frac{(dx_0 - \boldsymbol{\nu} d\mathbf{x})^2}{dx_0^2 - d\mathbf{x}^2} \right]^r (dx_0^2 - d\mathbf{x}^2). \quad (1)$$

Эта метрика зависит от двух постоянных параметров r и $\boldsymbol{\nu}$ и обобщает метрику Минковского, причем r определяет величину пространственной анизотропии, характеризуя тем самым степень отклонения (1) от метрики Минковского. Вместо 3-параметрической группы вращений пространства Минковского, финслеровы пространства (1) допускают только 1-параметрическую группу вращений вокруг единичного вектора $\boldsymbol{\nu}$, который указывает физически выделенное направление в 3D пространстве. С трансляционной симметрией никаких изменений не происходит: пространственно-временные трансляции оставляют метрику (1) инвариантной (в связи с этим, естественно рассматривать семейство пространств (1) как семейство плоских финслеровых пространств). Что касается преобразований, связывающих различные инерциальные системы отсчета, обычные лоренцевы бусты конформно видоизменяют метрику (1). Поэтому они не принадлежат группе изометрий этой метрики. Однако, используя их, можно построить такие преобразования [5], которые входят в группу изометрий метрики (1). Соответствующие обобщённые преобразования Лоренца (обобщенные лоренцевы бусты) выглядят следующим образом

$$x'^i = D(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}) R_j^i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}) L_k^j(\mathbf{v}) x^k, \quad (2)$$

где: \mathbf{v} обозначает скорости движущихся (штрихованных) систем отсчета, матрицы $L_k^j(\mathbf{v})$ представляют обычные лоренцевы бусты, матрицы $R_j^i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu})$ — дополнительные повороты пространственных осей движущихся систем вокруг векторов $[\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}]$ на углы

$$\varphi = \arccos \left\{ 1 - \frac{(1 - \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2})[\mathbf{v}\boldsymbol{\nu}]^2}{(1 - \mathbf{v}\boldsymbol{\nu}/c)\mathbf{v}^2} \right\}$$

релятивистской аберрации вектора $\boldsymbol{\nu}$ и, наконец, диагональные матрицы

$$D(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}) = \left(\frac{1 - \mathbf{v}\boldsymbol{\nu}/c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right)^r I$$

представляют дополнительные дилатационные преобразования координат событий.

В отличие от обычных лоренцевых бустов, обобщённые бусты (2) составляют 3-параметрическую некомпактную группу с генераторами X_1, X_2, X_3 . Таким образом, с включением 1-параметрической группы вращений вокруг выделенного направления $\boldsymbol{\nu}$ и 4-параметрической группы трансляций, неоднородная группа изометрий или, другими словами, неоднородная группа релятивистской симметрии плоских финслеровых пространств (1) оказывается 8-параметрической. Чтобы получить простейшее представление для её генераторов, достаточно направить третью пространственную ось вдоль $\boldsymbol{\nu}$ и переписать преобразования (2) в инфинитезимальной форме. В результате мы приходим к следующим восьми генераторам

$$\begin{aligned} X_1 &= -(x^1 p_0 + x^0 p_1) - (x^1 p_3 - x^3 p_1), \\ X_2 &= -(x^2 p_0 + x^0 p_2) + (x^3 p_2 - x^2 p_3), \\ X_3 &= -r x^i p_i - (x^3 p_0 + x^0 p_3), \\ R_3 &= x^2 p_1 - x^1 p_2; \\ p_i &= \partial/\partial x^i. \end{aligned} \quad (3)$$

Согласно [5], эти генераторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [X_1 X_2] &= 0, & [R_3 X_3] &= 0, \\ [X_3 X_1] &= X_1, & [R_3 X_1] &= X_2, \\ [X_3 X_2] &= X_2, & [R_3 X_2] &= -X_1; \\ [p_i p_j] &= 0; \\ [X_1 p_0] &= p_1, & [X_2 p_0] &= p_2, & [X_3 p_0] &= r p_0 + p_3, & [R_3 p_0] &= 0, \\ [X_1 p_1] &= p_0 + p_3, & [X_2 p_1] &= 0, & [X_3 p_1] &= r p_1, & [R_3 p_1] &= p_2, \\ [X_1 p_2] &= 0, & [X_2 p_2] &= p_0 + p_3, & [X_3 p_2] &= r p_2, & [R_3 p_2] &= -p_1, \\ [X_1 p_3] &= -p_1, & [X_2 p_3] &= -p_2, & [X_3 p_3] &= r p_3 + p_0, & [R_3 p_3] &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда видно, что однородная группа изометрий плоских финслеровых пространств с частично нарушенной 3D изотропией содержит четыре параметра (генераторы X_1, X_2, X_3 и R_3). Являясь подгруппой 11-параметрической группы Вейля [25], она изоморфна соответствующей 4-параметрической подгруппе (с генераторами $X_1, X_2, X_3|_{r=0}$ и R_3) однородной группы Лоренца. Так как 6-параметрическая однородная группа Лоренца не имеет ни одной 5-параметрической подгруппы, в то время как её 4-параметрическая подгруппа является с точностью до изоморфизмов единственной [26], переход от пространства Минковского к финслеровым пространствам (1) подразумевает минимально возможное нарушение лоренцевой симметрии. При этом релятивистская симметрия, представленная теперь обобщёнными лоренцевыми бустами (2), остается в силе [27].

Здесь полезно обратить внимание на следующее обстоятельство. Несмотря на тот факт, что при $r = 0$ финслерова метрика (1) сводится к метрике Минковского $ds^2 = dx_0^2 - d\mathbf{x}^2$, 3-параметрические некомпактные преобразования (2), служащие однородными преобразованиями релятивистской симметрии финслеровой метрики (1), не сводятся к обычным лоренцевым бустам $x^i = L_k^i(\mathbf{v})x^k$, а сводятся к преобразованиям

$$x^i = R_j^i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}) L_k^j(\mathbf{v}) x^k, \quad (5)$$

которые отличаются от них дополнительными доворотами $x^i = R_k^i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu})x^k$ пространственных осей. Эти довороты устроены таким образом, что, если луч света в одной инерциальной системе отсчета имеет направление $\boldsymbol{\nu}$, то такое же направление он будет иметь во всех инерциальных системах.

Таким образом, при $r = 0$, т.е. в рамках СТО преобразования (5) представляют собой альтернативу лоренцевым бустам, однако, в отличие от лоренцевых бустов, они при любом значении $\boldsymbol{\nu}$ составляют 3-параметрическую некомпактную подгруппу 6-параметрической однородной группы Лоренца. Как было отмечено в [27], чтобы физически реализовать такие преобразования, достаточно в качестве $\boldsymbol{\nu}$ выбрать направление на какую-нибудь звезду и затем выполнить произвольный лоренцев буст, дополнив его таким поворотом пространственных осей, чтобы относительно новой системы отсчета направление на звезду не изменилось. Во всей своей совокупности описанные преобразования как раз и составляют указанную подгруппу (5) 6-параметрической однородной группы Лоренца. В результате можно сказать, что в рамках СТО $\boldsymbol{\nu}$ не имеет физического смысла и служит для релятивистски инвариантной калибровки направлений пространственных осей инерциальных систем отсчета.

В связи с последним утверждением необходимо сделать еще одно важное замечание, касающееся 3-параметрической некомпактной группы однородных преобразований (5). Если дополнить эту группу 1-параметрической группой вращений вокруг $\boldsymbol{\nu}$ и 4-параметрической группой трансляций, то в результате получится 8-параметрическая подгруппа группы Пуанкаре, генераторы и алгебра Ли которой имеют в нашем базисе вид (3) и (4) с условием, что $r = 0$. Для такой группы теперь используется название $ISIM(2)$, а её однородная 4-параметрическая подгруппа $SIM(2)$, которая включает (5) и повороты вокруг $\boldsymbol{\nu}$, положена в основу так называемой Очень Специальной теории Относительности (VSR) [28]. Согласно VSR, $SIM(2)$ симметрия предполагается более фундаментальной локальной пространственно-временной симметрией нежели локально лоренцева симметрия. В частности, требование $SIM(2)$ симметрии оказалось достаточным, чтобы показать [29], что нейтрино может иметь массу при сохранении лептонного числа, причем важно, что такой результат нельзя получить в рамках лоренц-инвариантного подхода без введения стерильных нейтрино. Однако существенным недостатком VSR является то, что $\boldsymbol{\nu}$ рассматривается только как феноменологический параметр и VSR ничего не может сказать о его физической природе.

Значительно более содержательной (с физической точки зрения) оказалась специальная релятивистская теория локально анизотропного пространства-времени [5, 6], в основу которой положена финслерова метрика (1), описывающая семейство плоских релятивистски инвариантных пространств событий с частично нарушенной 3D изотропией, а значит, и с нарушенной лоренцевой симметрией. Большая часть результатов, полученных в рамках такой теории, была воспроизведена в работах [30, 31] с помощью альтернативных методов. В частности, неоднородная 8-параметрическая группа релятивистской симметрии метрики (1) с её Ли-алгеброй (4) были получены с помощью метода непрерывной деформации алгебры $ISIM(2)$. В результате, соответствующая симметрия теперь все чаще называется $DISIM_b(2)$ -симметрией (где b служит новым обозначением параметра r), а сама теория [5, 6] все чаще называется Общей Очень Специальной теорией Относительности (GVSR).

2.1.1 Импульс покоя в дополнение к энергии покоя

Для того, чтобы модифицировать обычную релятивистскую механику в соответствии с требованием инвариантности относительно группы $DISIM_b(2)$, достаточно в интеграле

действия

$$S = -mc \int_a^b ds \quad (6)$$

заменить линейный элемент Минковского $ds = \sqrt{dx_0^2 - d\mathbf{x}^2}$ финслеровым элементом (1). В результате, функция Лагранжа, соответствующая релятивистской частице в локально анизотропном пространстве (1), оказывается следующей

$$L = -mc^2 \left(\frac{1 - \mathbf{v}\boldsymbol{\nu}/c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right)^r \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}. \quad (7)$$

Отсюда можно получить выражения [5] для энергии E и импульса \mathbf{p} релятивистской частицы:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \left(\frac{1 - \mathbf{v}\boldsymbol{\nu}/c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right)^r \left[1 - r + r \frac{1 - \mathbf{v}^2/c^2}{1 - \mathbf{v}\boldsymbol{\nu}/c} \right], \quad (8)$$

$$\mathbf{p} = \frac{mc}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \left(\frac{1 - \mathbf{v}\boldsymbol{\nu}/c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right)^r \left[(1 - r)\mathbf{v}/c + r\mathbf{v} \frac{1 - \mathbf{v}^2/c^2}{1 - \mathbf{v}\boldsymbol{\nu}/c} \right]. \quad (9)$$

Согласно (8), энергия частицы E достигает абсолютного минимума $E = mc^2$ при $\mathbf{v} = 0$. Что касается импульса \mathbf{p} , то, согласно (9), он, при $\mathbf{v} = 0$, принимает значение $\mathbf{p} = mcr\boldsymbol{\nu}$. Таким образом, в анизотропном пространстве с метрикой (1), помимо энергии покоя $E = mc^2$, у любой массивной частицы появляется еще одна наблюдаемая величина — импульс покоя $\mathbf{p} = mcr\boldsymbol{\nu}$. Отметим также, что, как показано в [5], 4-импульс $p^i = (p^0 = E/c, \mathbf{p})$ удовлетворяет $DISIM_b(2)$ -инвариантному дисперсионному соотношению, которое мы здесь представим в виде:

$$(p_0^2 - \mathbf{p}^2) = (mc)^2 (1 - r)^{(1-r)} (1 + r)^{(1+r)} \left[\frac{(p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\nu})^2}{p_0^2 - \mathbf{p}^2} \right]^r. \quad (10)$$

В нерелятивистском пределе функция Лагранжа (7) выглядит следующим образом:

$$L = -mc^2 + mcr(\mathbf{v}\boldsymbol{\nu}) + (1 - r) \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + r(1 - r) \frac{m(\mathbf{v}\boldsymbol{\nu})^2}{2}.$$

Поскольку входящее сюда выражение $-mc^2 + mcr(\mathbf{v}\boldsymbol{\nu})$ является полной производной по времени, оно может быть опущено. В результате мы видим, что кинетическая энергия и импульс

$$T = \frac{1}{2} m_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta, \quad p_\alpha = m_{\alpha\beta} v^\beta, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

нерелятивистской частицы, находящейся в анизотропном пространстве (1), определяются тензором инертной массы [24]:

$$m_{\alpha\beta} = m(1 - r)(\delta_{\alpha\beta} + r\nu_\alpha \nu_\beta). \quad (11)$$

Перепишем теперь финслерову метрику (1) так, чтобы она выражалась через четырехмерные величины.

$$ds = \left[\frac{(dx_0 - \boldsymbol{\nu}d\mathbf{x})^2}{dx_0^2 - d\mathbf{x}^2} \right]^{r/2} \sqrt{dx_0^2 - d\mathbf{x}^2} = \left[\frac{(\nu_i dx^i)^2}{\eta_{ik} dx^i dx^k} \right]^{r/2} \sqrt{\eta_{ik} dx^i dx^k}. \quad (12)$$

Поскольку $\nu^2 = 1$, то ясно, что здесь

$$\nu_i = \{1, -\nu\}, \quad \eta_{ik} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}, \quad \nu^i = \{1, \nu\}, \quad \nu_i \nu^i = 0.$$

Наконец, давайте попробуем понять, что же является физическим носителем анизотропии плоского пространства событий (12) и наметим схему дальнейшего развития теории. Для этого сначала обратим внимание на уникальное свойство финслеровой метрики (12). С одной стороны, она переходит при $r = 0$ в метрику Минковского, а с другой — превращается при $r = 1$ в полный дифференциал $ds = \nu_i dx^i$. Последнее означает, что в таком случае действие (6) не зависит от формы мировой линии, соединяющей точки a и b . Другими словами, у пространства-времени исчезает такая его физическая характеристика как пространственная протяженность и остается только временная длительность, представляющая собой интервал абсолютного времени $ds = \nu_i dx^i$. При этом, согласно (11), инертные массы всех частиц также исчезают, а ν_i из шпурионного¹ постоянного векторного поля превращается в ковариантное постоянное векторное поле, определенное на данном вырожденном (с метрической точки зрения) пространственно-временном многообразии. Кстати отметим, что именно на пространственно-временном многообразии, а не на пространстве-времени Минковского, вводятся безмассовые фундаментальные поля (например, Стандартной модели) перед спонтанным нарушением исходной калибровочной симметрии и появлением масс у первоначально безмассовых частиц. Это ясно уже из того, что в безмассовом мире не существует инерциальных систем отсчета с их обязательным атрибутом — эталонной линейкой.

В соответствии с (6) и (12), постоянное, отличное от нуля поле r определяет специфическое несепарабельное взаимодействие постоянного шпурионного поля ν_i с массивными частицами. Эффект такого взаимодействия состоит в том, что частицы приобретают (согласно (11)) свойства квазичастиц в аксиально-симметричной кристаллической среде. Комплекс постоянных полей — скалярного поля r и шпурионного поля ν_i является таким образом физическим носителем анизотропии плоского пространства событий (12). Как оказалось, нуль-векторное шпурионное поле ν_i представляет собой нейтрин-антинейтринный конденсат, построенный из постоянных вейлевых спиноров. Такие спиноры являются точным решением $DISIM_b(2)$ –инвариантного обобщенного массивного уравнения Дирака [32], лагранжиан которого имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m \left[\left(\frac{\nu_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi}{\bar{\psi} \psi} \right)^2 \right]^{r/2} \bar{\psi} \psi. \quad (13)$$

Если постоянное скалярное поле r занулить, $DISIM_b(2)$ –инвариантное обобщенное массивное уравнение Дирака перейдет в стандартное массивное уравнение Дирака, у которого не существует решения в виде постоянных спиноров. Вместе с тем, уравнения Вейля, вытекающие из стандартного безмассового уравнения Дирака, имеют решения в виде постоянных спиноров, из которых можно построить постоянное нуль-векторное шпурионное поле ν_i . Однако физически оно будет ненаблюдаемо, поскольку при $r = 0$ мы вернемся в рамки СТО: финслерова метрика (12) превратится в метрику Минковского, импульс покоя $\mathbf{p} = mcr \boldsymbol{\nu}$ исчезнет, тензор инертной массы (11) перестанет быть тензором и станет скалярной величиной m . Соответственно пропадут и все другие эффекты пространственной анизотропии, рассмотренные в [33].

2.1.2 К проблеме построения финслеровой ОТО, основанной на группе $DISIM_b(2)$

Как было отмечено во Введении, Ridge/CMS-эффект, обнаруженный на LHC, напрямую говорит о том, что в ранней Вселенной спонтанно возникла аксиально-симметричная ани-

¹Смысл этого термина можно уяснить, обратившись, например, к работе [30].

зотропия пространства-времени с группой $DISIM_b(2)$ в качестве неоднородной группы релятивистской симметрии и с финслеровой метрикой (12). Прежде всего по этой причине особую актуальность приобретает проблема построения финслеровой общей теории относительности, основанной на группе $DISIM_b(2)$. Нет нужды говорить о сложности такой задачи, тем более что она предполагает ответы на вопросы, касающиеся природы темной материи и темной энергии. Несмотря на определенные успехи в этом направлении, указанная проблема до конца еще не решена. Поэтому, в заключение раздела 2.1, мы обозначим лишь тот путь, продвижение по которому вероятнее всего приведет к намеченной цели.

Ключевой момент при обобщении плоской $DISIM_b(2)$ – инвариантной финслеровой метрики (12) до уровня финслеровой метрики, описывающей соответствующее искривленное локально анизотропное пространство-время, состоит в следующем наблюдении. Если постоянные величины, от которых зависит метрика (12), а именно: скаляр r , шпурионный нуль-вектор ν_i и шпурионный тензор $\eta_{ik} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$, заменить на соответствующие обычные поля, заданные на пространственно-временном многообразии, т.е. сделать в метрике (12) замену $r \rightarrow r(x)$, $\nu_i \rightarrow \nu_i(x)$, $\eta_{ik} \rightarrow g_{ik}(x)$, то в результате мы получим (см. [34]) искривленную финслерову метрику в виде

$$ds = \left[\frac{(\nu_i dx^i)^2}{g_{ik} dx^i dx^k} \right]^{r/2} \sqrt{g_{ik} dx^i dx^k}, \quad (14)$$

где: $g_{ik} = g_{ik}(x)$ – риманов метрический тензор, связанный с гравитационным полем, $r = r(x)$ – скалярное поле, характеризующее величину локальной пространственно-временной анизотропии и $\nu_i = \nu_i(x)$ – нуль-векторное поле, указывающее локально выделенные направления в пространстве-времени.

В любой точке искривленного финслерова пространства (14) соответствующее плоское касательное финслерово пространство (12) имеет свои значения параметров r и ν . Эти значения являются ничем иным, как значениями полей $r(x)$ и $\nu(x)$ в точке касания.

Очевидно, что динамика финслерова пространства (14) полностью определяется динамикой взаимодействующих полей $g_{ik}(x)$, $r(x)$, $\nu_i(x)$, причем эти поля образуют вместе с полями материи единую динамическую систему. Поэтому, в противоположность существующим чисто геометрическим подходам к финслерову обобщению уравнений Эйнштейна, наш подход [34] к данной проблеме основан на использовании методов обычной теории взаимодействующих полей.

То, что при переходе от плоской $DISIM_b(2)$ – инвариантной финслеровой метрики (12) к искривленной финслеровой метрике (14) мы заменили шпурионный тензор $\eta_{ik} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$ и шпурионный нуль-вектор ν_i соответствующими обычными полями, трансформировалось в свойство инвариантности метрики (14) относительно следующих локальных преобразований

$$g_{ik} \rightarrow e^{2\sigma(x)} g_{ik}, \quad \nu_i \rightarrow e^{(r-1)\sigma(x)/r} \nu_i, \quad r \rightarrow r, \quad (15)$$

где $\sigma(x)$ – произвольная функция.

Помимо метрики (14), локальные преобразования (15) оставляют инвариантными все наблюдаемые. Поэтому в теории гравитации, основанной на группе $DISIM_b(2)$, преобразования (15) имеют смысл локальных калибровочных преобразований. Калибровочно-инвариантным является, например, действие

$$S = -\frac{1}{c} \int \mu^* \left(\frac{\nu_i v^i}{\sqrt{g_{ik} v^i v^k}} \right)^{4r} \sqrt{-g} d^4x$$

для сжимаемой жидкости в финслеровом пространстве (14). В этой формуле μ^* есть инвариантная плотность энергии жидкости, $v^i = dx^i/ds$, а ds – метрика (14).

В связи с упомянутой локальной калибровочной инвариантностью, динамическая система, состоящая из полей g_{ik}, r, ν_i и сжимаемой жидкости, должна быть дополнена двумя векторными калибровочными полями A_i и B_i , которые при локальных преобразованиях (15) преобразуются соответствующим градиентным образом. Поле A_i для определенного класса задач оказывается чисто калибровочным, а поле B_i , градиентное преобразование которого имеет вид

$$B_i \rightarrow B_i + b[(r-1)\sigma(x)/r]_{;i},$$

где b – константа с размерностью длины, взаимодействует с сохраняющимся током массы покоя j^i , добавляя в полный калибровочно инвариантный лагранжиан член $\sim B_i j^i$.

2.2 Релятивистски инвариантные финслеровы пространства с полностью нарушенной 3D изотропией

В наиболее общем виде метрика таких пространств

$$ds = (dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)^{(1+r_1+r_2+r_3)/4} (dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)^{(1+r_1-r_2-r_3)/4} \times (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)^{(1-r_1+r_2-r_3)/4} (dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)^{(1-r_1-r_2+r_3)/4} \quad (16)$$

была получена в [35]. Три параметра (r_1, r_2 и r_3) характеризуют анизотропию пространств (16) и ограничены условиями

$$\begin{aligned} 1 + r_1 + r_2 + r_3 &\geq 0, & 1 + r_1 - r_2 - r_3 &\geq 0, \\ 1 - r_1 + r_2 - r_3 &\geq 0, & 1 - r_1 - r_2 + r_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Нужно отметить, что, при $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, метрика (16) сводится к корню четвертой степени из произведения четырех 1-форм

$$ds_{B-M} = [(dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)(dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3) \times (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)]^{1/4}.$$

Таким образом, в данном частном случае мы получаем хорошо известную метрику Бервальда-Моора, записанную однако в базисе, который был введен в [35].

Рассмотрим теперь группу изометрий плоских финслеровых пространств (16). Однородная 3-параметрическая некомпактная группа изометрий, т.е. группа релятивистской симметрии пространства-времени (16) оказывается Абелевой, причем составляющие её преобразования имеют тот же смысл, что и обычные лоренцевы бусты. Явный вид этих преобразований следующий

$$x'_i = DL_{ik}x_k, \quad (17)$$

где

$$D = e^{-(r_1\alpha_1+r_2\alpha_2+r_3\alpha_3)},$$

унимодулярные матрицы L_{ik} представлены соотношениями

$$L_{ik} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & -\mathcal{B} & -\mathcal{C} & -\mathcal{D} \\ -\mathcal{B} & \mathcal{A} & \mathcal{D} & \mathcal{C} \\ -\mathcal{C} & \mathcal{D} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ -\mathcal{D} & \mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathcal{A} = \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \sinh \alpha_3,$$

$$\mathcal{B} = \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \sinh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_3,$$

$$\mathcal{C} = \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cosh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_3,$$

$$\mathcal{D} = \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cosh \alpha_3,$$

причем $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — групповые параметры. Наряду с параметрами α_i , в качестве групповых параметров могут также использоваться компоненты $v_i = dx_i/dx_0$ координатной скорости штрихованной системы отсчета. Параметры v_i и α_i связаны соотношениями

$$\begin{aligned} v_1 &= (\tanh \alpha_1 - \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3) / (1 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3), \\ v_2 &= (\tanh \alpha_2 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_3) / (1 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3), \\ v_3 &= (\tanh \alpha_3 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2) / (1 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3). \end{aligned} \quad (19)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{4} \ln \frac{(1 + v_1 - v_2 + v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 - v_1 + v_2 + v_3)}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{4} \ln \frac{(1 - v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 + v_1 - v_2 + v_3)}, \\ \alpha_3 &= \frac{1}{4} \ln \frac{(1 - v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 - v_2 + v_3)}{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Что касается генераторов X_i однородной 3-параметрической группы изометрий (17) пространства-времени (16), они могут быть представлены следующим образом

$$\begin{aligned} X_1 &= -r_1 x_\alpha p_\alpha - (x_1 p_0 + x_0 p_1) + (x_2 p_3 + x_3 p_2), \\ X_2 &= -r_2 x_\alpha p_\alpha - (x_2 p_0 + x_0 p_2) + (x_1 p_3 + x_3 p_1), \\ X_3 &= -r_3 x_\alpha p_\alpha - (x_3 p_0 + x_0 p_3) + (x_1 p_2 + x_2 p_1), \end{aligned}$$

где $p_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$ — генераторы 4-параметрической группы трансляций. Таким образом, с включением последней, неоднородная группа изометрий полностью анизотропного финслерова пространства событий (16) оказывается 7-параметрической группой. Что касается её генераторов, они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [X_i X_j] &= 0, & [p_\alpha p_\beta] &= 0, \\ [X_1 p_0] &= r_1 p_0 + p_1, & [X_2 p_0] &= r_2 p_0 + p_2, & [X_3 p_0] &= r_3 p_0 + p_3, \\ [X_1 p_1] &= r_1 p_1 + p_0, & [X_2 p_1] &= r_2 p_1 - p_3, & [X_3 p_1] &= r_3 p_1 - p_2, \\ [X_1 p_2] &= r_1 p_2 - p_3, & [X_2 p_2] &= r_2 p_2 + p_0, & [X_3 p_2] &= r_3 p_2 - p_1, \\ [X_1 p_3] &= r_1 p_3 - p_2, & [X_2 p_3] &= r_2 p_3 - p_1, & [X_3 p_3] &= r_3 p_3 + p_0. \end{aligned}$$

3 Модель фазового пространства-времени и физические результаты, полученные на её основе

Пусть $M = R^4$ — дифференцируемое 4-мерное многообразие класса C^∞ . Пусть TM — его касательное расслоение с координатами $(x, y) = (x^i, y^i)$; $i = 0, 1, 2, 3$. Если c — параметризуемая кривая на M , $c: [ab] \rightarrow M$, $t \rightarrow (x^i(t))$, то её естественное продолжение

на TM есть $c : [ab] \rightarrow TM, t \rightarrow (x^i(t), y^i(t))$, где $y^i = dx^i/dt$. Длина дуги s , обычно выбираемая в качестве естественного параметра на кривой, будет, таким образом равна $s = \int_0^t \sqrt{g_{ij}y^iy^j} d\tau$; $i, j = 0, 1, 2, 3$. Пусть метрика зависит от y , введенного выше, т.е. $g_{ij} = g_{ij}(x, y)$. В общем случае такая метрика соответствует обобщенной Лагранжевой геометрии, $g_{ij}(x, y)$ — дважды ковариантный симметричный тензор на TM с единственными ограничениями: а) $\det(g_{ij}) \neq 0$ для любых (x, y) на TM и б) с изменением координат на TM , соответствующим изменениям координат на M , его компоненты изменяются по тому же правилу, что и компоненты (0,2)-тензора на основном многообразии M . Это означает, что TM является 8-мерным Римановым многообразием, аналогичным известному в физике 6-мерному фазовому пространству. Его геометрия достаточно сложна и использует такие понятия как нелинейная связность (Эресмана). Но если ограничиться линейными преобразованиями координат с постоянными коэффициентами и слабым гравитационным полем, т.е. $g_{ij}(x, y) = \eta_{ij} + \varepsilon_{ij}(x, y)$; $\eta_{ij} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$; $\varepsilon_{ij}(x, y) = \chi \tilde{\varepsilon}_{ij}(x, y)$; $\chi \ll 1$, то геометрия существенно упрощается, и определение y^i позволяет использовать лифт Сасаки для поднятия и опускания значка на вертикальной и горизонтальной компонентах расслоения, т.е. один и тот же метрический тензор. Тензор g_{ij} является однородным нулевого порядка по y , т.е. метрика зависит только от направления y , но не от его величины. Это выражается соотношением $(\partial g_{ij}/\partial y^k)y^k = 0$. Если при этом выполняется еще и условие $(\partial g_{ij}/\partial y^k)y^j = 0$, то введенная метрика становится обычной финслеровой [1], но в данном подходе это не предполагается.

Описанный формализм означает, что одновременно с появлением новой геометрии для моделирования явлений в физическом мире предполагается использовать не пространство и время Ньютона и не пространство-время Минковского, а 8-мерное фазовое пространство-время. Его дополнительные измерения имеют не формальный характер, как в теориях типа Калуцы-Клейна, но ясный физический смысл, обусловленный моделью, предлагаемой для описания реальности. Ясно, что соответствие Лагранжева и Гамильтонова формализма получает новый аспект. Следует обратить внимание, что так же, как при переходе от пространства и времени Ньютона к пространству-времени Минковского появилась фундаментальная константа c с размерностью скорости, так и при переходе от пространства-времени Минковского к 8-мерному фазовому пространству-времени появляется еще одна фундаментальная константа l — с размерностью длины. Можно связать её с фундаментальной скоростью, $l = c/H$, тогда новая константа H будет иметь размерность c^{-1} , т.е. при интерпретации следует иметь в виду соответствие вида $(x^0, x^1, x^2, x^3, y^0, y^1, y^2, y^3) \longleftrightarrow (ct, x, y, z, c/H, v_x/H, v_y/H, v_z/H)$. Обращает на себя внимание обстоятельство, состоящее в том, что все явления будут происходить на 7-мерном подпространстве 8-мерного фазового пространства-времени, одна из координат которого имеет постоянное значение. Группой симметрий данного пространства будет обобщенная группа Лоренца и группа де Ситтера. Последняя допускает сжатия на пространства Кэррола и Ньютона-Гука, представляющие интерес для астрономических приложений. Возможность разделения полученного пространства на следующие части (x, y, z) и $(ct, c/H, v_x/H, v_y/H, v_z/H)$ допускает и использование геометрии Лобачевского для описания пространства скоростей, ранее используемого только в теории частиц высоких энергий.

Сохраняя только линейные члены, пропорциональные $\partial \varepsilon_{ij}/\partial x^k$, $\partial \varepsilon_{ij}/\partial y^k$ и $\partial^2 \varepsilon_{ij}/\partial x^k \partial y^l$, получим обобщенную геодезическую аналогично [36] в виде

$$\frac{dy^i}{ds} + \left(\Gamma^i_{lk} + \frac{1}{2} \eta^{it} \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x^j \partial y^t} y^j \right) y^k y^l = 0, \quad (21)$$

где $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \eta^{ih} (\partial \varepsilon_{hj}/\partial x^k + \partial \varepsilon_{hk}/\partial x^j - \partial \varepsilon_{jk}/\partial x^h)$ — символ Кристоффеля, зависящий от

y . Таким образом, для получения уравнения движения (уравнения динамики) в пределе слабого поля в анизотропном пространстве следует использовать уравнение (21), а не уравнение геодезической $dy^i/ds + \Gamma^i_{lk}y^ly^k = 0$, пригодное в том же приближении в пространстве с геометрией Римана. В результате известных упрощений и выделения антисимметричной части вспомогательного тензора, введенного в [8], уравнение движения в пространственном сечении, полученное из геодезической (21), приобретает вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{c^2}{2} \left\{ -\nabla\varepsilon_{00} + \left[\mathbf{v}, \text{rot} \frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\mathbf{v}} \right] + \nabla\left(\mathbf{v}, \frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\mathbf{v}}\right) \right\}, \quad (22)$$

где ε_{00} единственная (временная) компонента метрического тензора, которая остается в уравнении движения в случае слабого поля. Полагая (22) уравнением динамики, получаем выражение для обобщенной гравитационной силы [8]

$$\mathbf{F}^{(g)} = \frac{mc^2}{2} \left\{ -\nabla\varepsilon_{00} + \left[\mathbf{v}, \text{rot} \frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\mathbf{v}} \right] + \nabla\left(\mathbf{v}, \frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\mathbf{v}}\right) \right\}. \quad (23)$$

Оба последних уравнения получены из геодезической, соответствующей уравнениям поля для анизотропной метрики. Они не требуют специального выбора тензора энергии-импульса и каких-либо дополнительных априорных предположений. Уравнения поля в анизотропном пространстве в линейном приближении для слабого поля сохраняют свой вид [37], хотя их члены могут теперь зависеть от y .

Для исследования динамики спиральной галактики можно выбрать

$$\mathbf{u} \equiv \frac{c^2}{4} \frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\mathbf{v}} \equiv [\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}],$$

причем

$$\mathbf{\Omega} = \frac{c^2}{4} \text{rot} \frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\mathbf{v}}$$

и

$$\mathbf{\Omega} = \text{rot} \left(\int \frac{j^{(m)}(r)}{|r - r_0|} dV \right),$$

где $j^{(m)}(r)$ — плотность тока массы, а r_0 координата наблюдателя. Тогда уравнение для гравитационной силы примет вид

$$\mathbf{F}^{(g)} = \frac{mc^2}{2} \nabla \left\{ -\varepsilon_{00} + \frac{2}{c^2} \cdot 4(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right\}. \quad (24)$$

Если потребовать существования предельного перехода к ОТО, получим

$$\mathbf{F}^{(g)} = \frac{mc^2}{2} \nabla \left\{ -\sum_n \frac{r_{n,s}}{r_n} + \frac{2}{c^2} \cdot 4(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right\}, \quad (25)$$

и можно показать, что второе слагаемое под градиентом имеет такой же порядок величины, как и первое, на расстояниях порядка радиуса спиральной галактики, что препятствует обращению орбитальной скорости в ноль, требуемому ОТО. В то же время движения в плоскости галактики и в перпендикулярной плоскости описываются теперь разными законами, что снимает известный парадокс [38] в движении звездных шаровых скоплений.

Для моделирования элементарного (эффективного) источника гравитации в предлагаемом подходе — анизотропной геометродинамике (АГД) — понятие точечной массы уже не является естественным, и следует использовать систему «центр плюс ток», представляющую собой гравитационный аналог кругового витка с током вокруг центрального

заряда. Использование такой системы для моделирования спиральной галактики приводит к выражению $v_{orb} \sim const$ для орбитальной скорости, соответствующему наблюдаемой плоской кривой, и к эмпирическому закону Талли-Фишера $v_{orb} \sim L_{lum}^{1/4}$, не имеющему объяснения в ОТО. Эта же модель позволяет объяснить наблюдаемое в некоторых гравитационных линзах существенное превышение отклонения луча от теоретического расчета, которое оказывается обусловленным внутренними движениями масс в галактике-линзе. Можно также показать, что помимо «собирающих» гравитационных линз, в теории АГД возможно существование «рассеивающих» гравитационных линз, что может приводить к неправильному определению расстояния до источников, используемых в качестве «стандартных свечей». Это может поставить под вопрос существование недавно обнаруженного ускорения расширения Вселенной.

Теория, представленная в данном разделе, опирается на новую модель, служащую основой описания физической реальности — фазовое пространство-время, допускающее использование различных геометрий для описания своих подпространств. Подход АГД соответствует наблюдениям на галактическом масштабе и не нуждается во введении понятия темной материи. Кроме того, он не исключает новой (возможно, дополнительной) интерпретации закона Хаббла, учитывающей не радиальное расширение Вселенной, а разнообразное тангенциальное движение её удаленных частей. В рамках АГД последнее, с одной стороны, приводит к линейному закону убывания частоты с расстоянием до источников излучения, а с другой — имеет косвенные подтверждения в наблюдениях движения удаленных квазаров.

4 Математические и физико-геометрические аспекты алгебры гиперкомплексных чисел

Естественную основу для финслеровых геометрий специального типа (т. н. пространств Бервальда-Моора \mathcal{H}_n с метрикой

$${}^nG = \hat{S}(dx^1 \otimes dx^2 \cdots \otimes dx^n), \quad (26)$$

где \hat{S} — оператор симметризации (без числового множителя)) представляют хорошо известные ассоциативно-коммутативные алгебры P_n .

Этот раздел обзора посвящен изложению геометрических, алгебраических и физических результатов, полученных при исследовании поличисловых ассоциативно-коммутативных алгебр и связанных с ними геометрий Бервальда-Моора различных размерностей.

4.1 Конформные калибровки и нелинейные симметрии

Хорошо известно, что финслеровы пространства Бервальда-Моора \mathcal{H}_n обладают богатой (бесконечномерной) группой конформных симметрий \mathcal{CH}_n . Обозначим посредством \mathcal{H}_n^f многообразие Бервальда-Моора в некоторой *специальной конформной калибровке*, которое получается из \mathcal{H}_n действием некоторого $f \in \mathcal{CH}_n$. Преобразованиям многообразия \mathcal{H}_n из группы $\text{Iso}\mathcal{H}_n$ соответствуют теперь преобразования многообразия \mathcal{H}_n^f группы $(\text{Iso}\mathcal{H}_n)^f < \mathcal{CH}_n^f$, элементы ι^f которой определяются формулой $\iota^f \equiv f \circ \iota \circ f^{-1}$. Действие группы $(\text{Iso}\mathcal{H}_n)^f$ в пространстве координат многообразия \mathcal{H}_n^f описывается в общем случае нелинейными функциями, поэтому эту группу естественно называть *нелинейным f -представлением группы $\text{Iso}\mathcal{H}_n$* . В общем случае группу $(\text{Iso}\mathcal{H}_4)^f$ всегда можно рассматривать как группу (вообще говоря, нелинейных) изометрий $\text{Iso}\mathcal{H}_4^f$ некоторого многообразия \mathcal{H}_4^f , которое отличается от \mathcal{H}_4^f только своей метрикой. Вид этой метрики зависит от вида калибровочной функции f .

В работах [39, 40] на конкретных примерах иллюстрируется то обстоятельство, что группа изометрий и группа конформных симметрий метрики Бервальда-Моора могут нетривиальным образом взаимодействовать друг с другом, приводя к нелинейным симметриям известных геометрий.

4.2 Соприкасающиеся римановы метрики

Имея в распоряжении метрику (26) и векторные поля из алгебр Ли групп $\text{Iso}\mathcal{H}_n$ (и \mathcal{CH}_n), можно естественным образом получать из метрики (26) бесчисленное множество римановых метрик с помощью следующего общего приема. Рассмотрим "неполное" скалярное полипроизведение вида:

$$g = {}^n G(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n-2)}, \ , \),$$

где $X_{(j)}$ — элементы алгебр Ли групп $\text{Iso}\mathcal{H}_n$ и (или) \mathcal{CH}_n , для удобства перенумерованные индексами, отвечающими их местам как аргументам метрики Бервальда-Моора. Очевидно, что g — (псевдо)риманова метрика, зависящая от выбранных полей $X_{(j)}$. Описанный прием приводит к обобщению понятия "римановой метрики, соприкасающейся к данной финслеровой метрике", рассмотренного в [1].

Рассмотрим в качестве опорного векторного поля общий элемент алгебры Ли подгруппы унимодулярных дилатаций $\text{Iso}_D\mathcal{H}_3$ полной группы $\text{Iso}\mathcal{H}_3$, который имеет вид:

$$X = b_1 D_1 + b_2 D_2 = b_1 x^1 \partial_1 + (b_2 - b_1) x^2 \partial_2 - b_2 x^3 \partial_3,$$

где b_1, b_2 — произвольные вещественные параметры. Соприкасающаяся вдоль этого поля риманова метрика имеет вид:

$$\begin{aligned} g = & b_1 x^1 (dx^2 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^2) + \\ & + (b_2 - b_1) x^2 (dx^1 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^1) - \\ & - b_2 x^3 (dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1). \end{aligned} \quad (27)$$

Эта метрика, вообще говоря, неплоская. Её определитель, задающий локальный элемент объема, дается выражением:

$$\det(g) = 2b_1 b_2 (b_2 - b_1) x^1 x^2 x^3.$$

Видно, что метрика (27) невырождена только при одновременном выполнении условий: $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $b_1 \neq b_2$. Стандартное исследование изометрий и конформных симметрий этой метрики устанавливает факт наличия у этой метрики 3-мерной алгебры изометрий и 10-мерной алгебры конформных симметрий. Столь богатая алгебра конформных симметрий является остаточным "следом" бесконечномерной алгебры конформных симметрий исходной метрики Бервальда-Моора (26) при $n = 3$.

Исследование остаточных симметрий соприкасающихся римановых метрик к метрикам Бервальда-Моора допускает и более общую постановку, в рамках которой получаются следующие базовые соотношения:

$$L_{X_i} g_{(j)} = L_{X_{(i)}} G(X_{(j)}, \ , \) = G([X_{(i)}, X_{(j)}], \ , \) = c_{ij}^k g_{(k)} \quad (28)$$

и

$$L_{\bar{X}_i} \bar{g}_{(j)} = L_{\bar{X}_{(i)}} G(\bar{X}_{(j)}, \ , \) = \phi_i \bar{g}_{(j)} + \bar{c}_{ij}^k \bar{g}_{(k)} = (\phi_i \delta_j^k + \bar{c}_{ij}^k) \bar{g}_{(k)}, \quad (29)$$

где $X_{(j)}$ — элемент алгебры Ли группы $\text{Iso}\mathcal{H}_3$, $\bar{X}_{(j)}$ — элемент алгебры Ли конформной группы \mathcal{CH}_3 , c_{ij}^k и \bar{c}_{ij}^k — структурные константы или структурные функции алгебры Ли групп $\text{Iso}\mathcal{H}_3$ и \mathcal{CH}_3 соответственно.

Таким образом, семейства метрик $\{g_{(j)}\}$ и $\{\bar{g}_{(j)}\}$ образуют дифференциальные идеалы относительно их Ли-дифференцирования вдоль семейств полей $\{X_{(j)}\}$ и $\{\bar{X}_{(j)}\}$ соответственно. Это общее свойство и позволяет сформулировать ряд общих теорем относительно симметрии римановых метрик $g_{(j)}$ и $\bar{g}_{(j)}$ [41].

4.3 Метрические бинглы в \mathcal{H}_3

Изучение свойств углов в финслеровой геометрии представляет особый интерес для её физических приложений. Один из подходов к проблеме построения аддитивных бинглов и тринглов заключается в составлении и решении соответствующих функциональных уравнений, удовлетворяющих условию аддитивности [42]. Вместо решения функционально-дифференциальных уравнений в пространстве базисных конформных инвариантов геометрии БМ, можно с самого начала связать все типы полиуглов с аддитивными по своему определению величинами, типа длин, площадей или объемов, вычисляемых на единичной сфере геометрии БМ (индикатриссе).

Оказывается, для любой пары неизотропных векторов A и B можно ввести два типа бинглов — взаимный и относительный. Выражение для взаимного бингла имеет следующий вид:

$$\phi[A, B] = |A^{\flat} - B^{\flat}| \quad (30)$$

где \flat — операция би-проекция \mathcal{H}_3 , которая на произвольный элемент $X \in \mathcal{H}_3$ действует по правилу:

$$(X^{\flat})^i = \ln \frac{X^i}{|X|}.$$

Норма в (30) вычисляется по стандартной метрике Бервальда-Моора в изотропных координатах. Бингл, определенный по формуле (30), оказывается аддитивным по определению, т.е. для любой тройки "компланарных" векторов A, B, C выполняется условие, аналогичное евклидову:

$$\phi[A, C] = \phi[A, B] + \phi[B, C]. \quad (31)$$

При этом условие компланарности векторов A, B, C имеет вид условия коллинеарности соответствующих \flat -образов:

$$(A^{\flat} - B^{\flat}) \wedge (A^{\flat} - C^{\flat}) = 0. \quad (32)$$

Выражения для второго (взаимного) бингла (их может быть три типа в зависимости от взаимной ориентации векторов A и B) имеют вид:

$$\text{cfh } \psi_i[A, B] = e^{(B^{\flat\flat})_i - (A^{\flat\flat})_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (33)$$

а функция, обратная к финслерово-гиперболическому косинусу cfh определяется интегралом:

$$\begin{aligned} \text{arccfh}(\xi) &\equiv \\ &\equiv -\frac{1}{2} \int_{2^{-1/3}}^{\xi} \left(\frac{(x^2 - \sqrt{x(x^3 + 4)})(3x^2 + \sqrt{x(x^3 + 4)})(\sqrt{x(x^3 + 4)} + x^3 - 2)}{x^4(x^3 + 4)} \right)^{1/3} dx. \end{aligned} \quad (34)$$

Наконец, выражение для величины аналогичной телесному углу на векторах A, B, C да-

ется следующим интегралом:

$$\Sigma(A, B, C) = \frac{3}{2} \phi^2[A, B] (\text{cfh } \psi_1[B, C] \text{cfh } \psi_1[A, B] - \text{cfh } \psi_2[B, C] \text{cfh } \psi_2[A, B])^2 \times \quad (35)$$

$$\int_{\text{cfh } \psi_1[A, B]}^{\text{cfh } \psi_1[A, C]} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 4x} \left(x/\text{cfh } \psi_1[B, C] - (\sqrt{x^4 + 4x} - x^2)/(2x \text{cfh } \psi_2[B, C]) \right)^2}.$$

Точные формулировки, доказательства и иллюстрации можно найти в [43].

4.4 Классификация однородных кубических метрик

Симметричный анализ геометрических объектов остается одним из основных средств изучения их внутренних инвариантных (т.е. не зависящих от координат) свойств. Для понимания места метрики Бервальда-Моора в ряду других однородных кубических метрик было предпринято исследование групп изометрий общей однородной кубической формы вида

$$G = G_{\alpha\beta\gamma} dx^\alpha \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma, \quad (36)$$

где $G_{\alpha\beta\gamma}$ — постоянные вещественные компоненты кубической формы. Результаты исследования резюмируются в следующей сводной таблице:

Симметричные классы	1	2	3	4	5	6	7	8
Проективные классы	III, XII	V	(1): VIII, (2): VI, XIII, (3): VII	IV	II, X, XI	?	—	Общ., I, IX

Она показывает, что симметричный анализ обнаруживает 6 различных симметричных классов (7-й класс оказывается пустым, 6-й совпадает с 5-ым), по которым распределяются 13 проективных классов известных ранее [44]. Метрика Бервальда-Моора попадает в 1-ый симметричный класс. Одним из важных выводов проведенного исследования является вывод о неполноте классификации однородных кубических метрик по их алгебрам изометрий [45].

4.5 h -голоморфные функции двойной переменной

Для интерпретации R^2 как плоскости двойной переменной \mathcal{H} естественно ограничиться отображениями, сохраняющими гиперболическую комплексную структуру плоскости, т.е. отображениями $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ вида: $h \mapsto s = F(h)$. Дифференцируемые функции $R^2 \rightarrow R^2$, удовлетворяющие условию: $F_{,h} = 0$ называются h -голоморфными функциями двойной переменной h .

Сформулируем некоторые важные свойства h -голоморфных функций в виде теорем.

Теорема 1. *h -голоморфная функция всегда отображает делители нуля в делители нуля.*

Теорема 2. *Компоненты U и V h -голоморфной функции $F = U + jV$ удовлетворяют гиперболическим условиям Коши-Римана: $U_{,t} = V_{,x}$; $U_{,x} = V_{,t}$.*

Теорема 3. *Для h -голоморфной в области D функции имеет место интегральная теорема Коши:*

$$\oint_{\Gamma} F(h) dh = 0,$$

где Γ — простой замкнутый кусочно-гладкий и не имеющий изотропных элементов контур, целиком лежащий в D .

Теорема 4. Для h -голоморфной в области D функции имеет место интегральная формула Коши:

$$\oint_{\Gamma} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = 0,$$

где Γ — простой замкнутый кусочно-гладкий и не имеющий изотропных элементов контур, целиком лежащий в D и охватывающий точку h_0 .

Другие варианты интегральной формулы Коши приведены в [46].

Теорема 5. Для простого замкнутого кусочно-гладкого не имеющего изотропных элементов контура Γ , охватывающего точку h_0 , имеет место формула:

$$\oint_{\Gamma} (h - h_0)^{\alpha} dh = \begin{cases} 0, & \alpha \neq -1; \\ j\ell_H, & \alpha = -1. \end{cases} \quad (37)$$

где α — произвольное вещественное число, ℓ_H — несобственная "фундаментальная константа" плоскости двойной переменной, определяющая размер пространства гиперболических углов (аналогичная константе 2π на комплексной плоскости).

Теорема 6. Псевдоевклидова метрика $\eta = \text{Re}(dh \otimes d\bar{h})$ конформна относительно произвольного h -голоморфного отображения плоскости двойной переменной.

В работе [46] изучены свойства основных элементарных h -голоморфных функций двойной переменной.

4.6 Гиперболическая теория поля на плоскости \mathcal{H}_2

Будем рассматривать произвольную h -голоморфную функцию $F(h) = U + jV$ как комплексный h -потенциал некоторого 2-мерного векторного поля (h -поле) на плоскости двойной переменной. Вещественную часть U этой функции будем связывать с потенциалом поля (h -потенциальная функция), а мнимую часть V с силовой функцией этого поля. Определим напряженность \mathcal{E} h -поля по формуле:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_t + j\mathcal{E}_x = -\frac{d\bar{F}}{dh} = -\frac{d\bar{F}}{d\bar{h}} = -U_{,t} + jU_{,x}, \quad (38)$$

которую можно рассматривать как двойную форму представления для векторного поля градиента функции U относительно псевдоевклидовой метрики. Формула (38) получается с учетом гиперболических условий Коши-Римана.

В силу соотношения $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\bar{z})$ (антиголоморфность напряженности), вытекающего из определения (38), приходим к следующему тождеству:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h} = \frac{1}{2}[\mathcal{E}_{t,t} + \mathcal{E}_{x,x} + j(\mathcal{E}_{t,x} + \mathcal{E}_{x,t})] = 0, \quad (39)$$

которое эквивалентно двум тождествам:

$$\text{divh } \mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_{t,t} + \mathcal{E}_{x,x} = 0; \quad \text{roth } \mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_{t,x} + \mathcal{E}_{x,t} = 0, \quad (40)$$

выражающим соответственно *соленоидальность* и *h -потенциальность* электростатического поля².

²Отметим, что дивергенция векторного поля определяется одинаково в комплексном и гиперболическом случаях, в отличие от операции ротора векторного поля, которая в гиперболическом случае включает симметричную комбинацию частных производных.

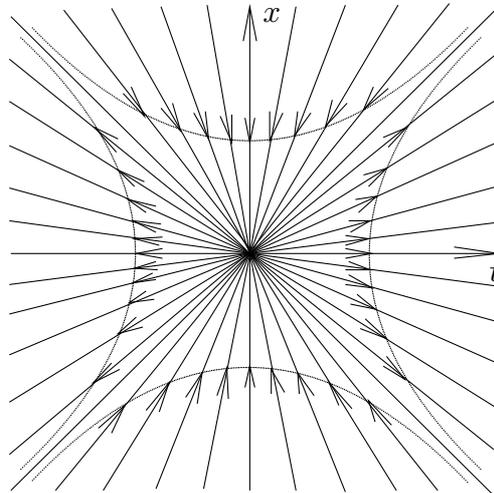
В качестве примера рассмотрим h -потенциал вида

$$F(h) = -q \ln h, \quad (41)$$

который является очевидным гиперболическим обобщением кулоновского потенциала. Напряженность поля, которая ему соответствует, вычисляется по формуле (38) и имеет вид:

$$\mathcal{E} = \frac{q}{h} = \frac{qh}{|h|^2} = q \left(\frac{t}{t^2 - x^2} + j \frac{x}{t^2 - x^2} \right). \quad (42)$$

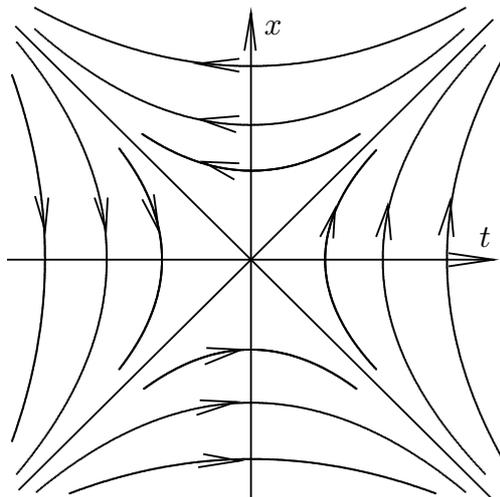
Силовые линии гиперболического точечного источника — это радиальные прямые с $\psi = \text{const}$, а эквипотенциальные линии — гиперболы $\rho = \text{const}$. Картина силовых линий во всех 4-х клиньях представлена на рисунке:



Дуальная интерпретация точечного гиперболического источника получается переходом от потенциала $F(h)$ в (41) к потенциалу $jF(h)$. При этом для нового дуального поля \mathcal{B} получается выражение:

$$\mathcal{B} = j \frac{d\bar{F}}{dh} = -\frac{qj}{h} = -q \frac{x + jt}{t^2 - x^2}. \quad (43)$$

Поле \mathcal{B} является гиперболическим аналогом точечного вихря. Его силовые линии — гиперболы — показаны на рисунке:



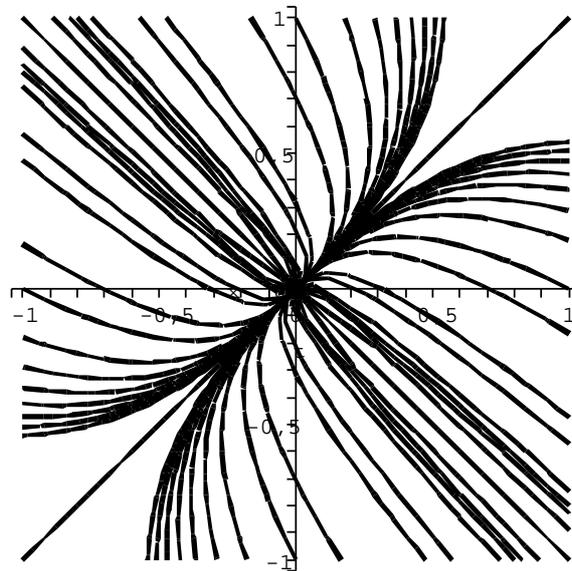
По аналогии с комплексным случаем можно объединить две предыдущие ситуации в одну, вводя в рассмотрение концепцию *гиперболического вихреисточника* с комплексным зарядом $\mathcal{Q} = q - jm$. Потенциал принимает вид:

$$F(z) = -\mathcal{Q} \ln h = -q \ln \varrho + m\psi - j(-m \ln \varrho + q\psi). \quad (44)$$

Такой потенциал наиболее естественно интерпретировать в рамках дуально-симметричной гиперболической теории поля, в которой гиперболические электрические и магнитные заряды и токи присутствуют на "равных правах". Уравнение для силовых линий такого поля получается из (44) приравниванием мнимой части константе:

$$(t+x)^{1-\alpha}(t-x)^{1+\alpha} = \text{const}, \quad (45)$$

где $\alpha = q/m$. Картина силовых линий для $\alpha = -2$ показана на рисунке:



Для физических приложений необходимо обобщение концепции h -поля на случай коммутативно-ассоциативных алгебр высших размерностей. Проиллюстрируем идею такого обобщения на примере алгебры 3-чисел P_3 .

Будем стартовать с изотропного базиса в P_3 , в котором h -голоморфная функция имеет следующее представление:

$$F(h) = F(\xi_1)e_1 + F(\xi_2)e_2 + F(\xi_3)e_3. \quad (46)$$

Операторы дифференцирования по независимым переменным h, h^\dagger, h^\ddagger имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial h} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3}; \quad \frac{\partial}{\partial h^\dagger} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + e_3 \frac{\partial}{\partial \xi_2}; \quad \frac{\partial}{\partial h^\ddagger} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + e_3 \frac{\partial}{\partial \xi_1}. \quad (47)$$

В силу (47) непосредственной проверкой в компонентах легко убедиться в справедливости равенств для функции F в виде (46):

$$\frac{\partial F}{\partial h^\dagger} = \frac{\partial F}{\partial h^\ddagger} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} e_1 + \frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} e_2 + \frac{\partial F_3}{\partial \xi_3} e_3, \quad (48)$$

где здесь и далее $F_i \equiv F(\xi_i)$ — одна и та же функция от разных изотропных переменных. Условия голоморфности в симметричном неизотропном базисе $\{j_1, j_2, j_3\}$ (т.е. многомерный аналог стандартных условий Коши-Римана) определяем соотношениями:

$$j_1 = e_1 - e_2 - e_3; \quad j_2 = -e_1 + e_2 - e_3; \quad j_3 = -e_1 - e_2 + e_3, \quad (49)$$

и правилами умножения:

$$j_i^2 = -(j_1 + j_2 + j_3); \quad j_i \cdot j_k = j_l \quad (j \neq k \neq l), \quad (50)$$

имеют вид матричных дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} -(\bar{\partial} + \partial_3) & \partial_{2-1} & \partial_{1-2} \\ \partial_{2-3} & -(\bar{\partial} + \partial_1) & \partial_{3-2} \\ \partial_{1-3} & \partial_{3-1} & -(\bar{\partial} + \partial_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = 0; \quad (51)$$

$$\begin{pmatrix} -(\bar{\partial} + \partial_2) & \partial_{1-3} & \partial_{3-1} \\ \partial_{1-2} & -(\bar{\partial} + \partial_3) & \partial_{2-1} \\ \partial_{3-2} & \partial_{2-3} & -(\bar{\partial} + \partial_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = 0, \quad (52)$$

для всякой h -голоморфной функции $F(h) = U_1 j_1 + U_2 j_2 + U_3 j_3$. Здесь $\partial_{i-j} \equiv \partial_i - \partial_j$, $\bar{\partial} = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3$. Ввиду инвариантности свойства h -голоморфности относительно выбора базиса алгебры, можно утверждать, что общее решение системы (51)-(52) записывается с помощью представления U_i через F_i (компоненты в изотропном базисе) выраженные через x -координаты:

$$U_1 = F(x_2 - x_1 - x_3) + F(x_3 - x_1 - x_2); \quad U_2 = F(x_1 - x_2 - x_3) + F(x_3 - x_1 - x_2); \\ U_3 = F(x_1 - x_2 - x_3) + F(x_2 - x_1 - x_3). \quad (53)$$

Этот факт можно проверить непосредственной подстановкой (53) в (51)-(52). Комбинации координат в аргументах функции F являются высшими аналогами запаздывающего и опережающего аргументов на двойной плоскости.

Оператор третьего порядка

$$\Delta^{(3)} \equiv \frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial}{\partial h^\dagger} \frac{\partial}{\partial h^\ddagger} = (e_1 + e_2 + e_3) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \quad (54)$$

пропорционален алгебраической единице, поэтому

$$\Delta^{(3)} F = (\Delta^{(3)} U_1) j_1 + (\Delta^{(3)} U_2) j_2 + (\Delta^{(3)} U_3) j_3 \quad (55)$$

для всякой гладкой функции $F(h, h^\dagger, h^\ddagger)$. Если функция F — h -голоморфная, то ввиду того, что оператор $\Delta^{(3)}$ содержит дифференцирования по h^\dagger и h^\ddagger , имеет место соотношение $\Delta^{(3)} F \equiv 0$, эквивалентное трем его компонентам:

$$\Delta^{(3)} U_i \equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (56)$$

Соотношения (56) является 3-мерным аналогом условий гармоничности или гиперболической гармоничности, которым тождественно удовлетворяют голоморфные функции комплексной или соответственно двойной переменной.

Обсуждение и некоторое развитие изложенных идей можно найти в работе [47].

4.7 Конформная 2-мерная теория относительности

Расширим группу Пуанкаре, действующую на двумерном пространстве-времени \mathcal{M}_2 , до группы произвольных h -голоморфных преобразований, которые действуют на точки-события пространства-времени как на элементы алгебры \mathcal{H}_2 . Используя экспоненциальное представление для производной F' :

$$F'(h) = \epsilon |F'| (t, x) e^{j\psi(t, x)}, \quad (57)$$

приходим к заключению о том, что локально h -голоморфные преобразования осуществляют кроме известных в теории относительности бустов и отражений также растяжение длин векторов (скалярный множитель $|F'| (t, x)$). Будем рассматривать функцию $F = U + jV$ как комплексный потенциал опорного векторного поля 2-скорости или *опорного поля собственного времени*. Само поле 2-скорости u будет определяться формулой:

$$u = \frac{dF}{dh} = \frac{\partial U}{\partial t} + j \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (58)$$

в которой использованы определение оператора комплексного дифференцирования и гиперболические условия Коши-Римана. Квадрат модуля 2-скорости

$$|u|^2 = (\nabla U)^2 = (\nabla V)^2 = |F'|^2. \quad (59)$$

"Поле скоростей" собственного времени на всякой интегральной кривой Γ этого поля задается соотношением:

$$\frac{d\tau}{ds} = |F'|. \quad (60)$$

Теперь в рассматриваемой нами h -голоморфной теории относительности интервалы псевдоевклидовой длины и хроноинтервалы оказываются различными и связь между ними в каждой точке управляется гиперкомплексным потенциалом F .

Интегральные кривые поля ∇V — это пространственные сечения 2-мерного пространства-времени, ортогональные в каждой точке линиям времени. Таким образом, масштабный множитель "управляет" как ходом собственного времени, так и пространственными расстояниями.

Для произвольных движений пробных частиц промежутки времени и длины вычисляются:

$$\frac{d\tau}{ds} = \eta(\nabla U, w); \quad \frac{d\ell}{ds} = \eta(\nabla V, w), \quad (61)$$

где w — стандартный вектор 2-скорости пробной частицы ($|w| = 1$).

Простейший вариант вариационного принципа динамической теории гиперболического поля, учитывающий неголоморфность гиперболического потенциала внутри источников, определяется действием вида:

$$\mathcal{S}[F, \bar{F}] = \alpha \int_{\mathcal{H}_2} \{|F_{,h}|^2 - \mathcal{U}(|F_{,\bar{h}}|^2)\} dh \wedge d\bar{h}, \quad (62)$$

где первое слагаемое под интегралом является гиперболическим "кинетическим членом" и отвечает за динамику гиперболического потенциала в пустоте, а второе слагаемое представляет собой гиперболический "потенциальный член" и отвечает за свойства и вклад источников. Это последнее слагаемое зависит только от гиперболического модуля величины неголоморфности и в области вне источников, где неголоморфность обращается в нуль, оно определяет в действии некоторую "полную дивергенцию не дающую вклада в

уравнения движения. Стандартная процедура варьирования действия (62) по полевым переменным \bar{F} , F приводит к уравнениям поля, которые можно привести к виду:

$$\frac{1}{4}\square F = (\mathcal{U}'F_{,\bar{h}})_{,h} \quad (63)$$

— неоднородного волнового уравнения с источником в правой части, зависящим лишь от неголоморфности F . Как и следовало ожидать, уравнения поля получились нелинейными, поскольку поле F , как это следует из принципов развиваемой теории, описывает и свои источники за счет эффективного самодействия. В этом отношении развиваемая теория примыкает к вариантам единой теории поля Ми.

Замечательной особенностью уравнений (63) является наличие у них первого интеграла, независимо от конкретного вида потенциальной функции \mathcal{U} :

$$F_{,\bar{h}}(1 - \mathcal{U}') = \varphi(\bar{h}), \quad (64)$$

содержащего произвольную функцию $\varphi(\bar{h})$.

Явные выражения для плотности энергии алгебраизованной материи ε и её давления p , полученные с помощью стандартного формализма теории поля (теоремы Нетер), имеют вид:

$$\varepsilon = \mathcal{U} - \mathcal{U}'X + (1 - \mathcal{U}')\sqrt{XY}; \quad p = \mathcal{U} - \mathcal{U}'X - (1 - \mathcal{U}')\sqrt{XY}, \quad (65)$$

где $Y \equiv |F_{,h}|^2$.

С помощью изложенного в [48] супервариационного принципа можно рассчитать общий вид потенциала \mathcal{U} в рассматриваемой теории

$$\mathcal{U}(X) = 3X + U_0 + 2U_1 \ln \left| 1 - \frac{X}{U_1} \right| \quad (66)$$

где U_0 и U_1 — пара фундаментальных постоянных теории.

5 Дифференциально-геометрические аспекты теории финслеровых пространств Бервальда-Моора различных размерностей

С целью выявления фундаментальной взаимосвязи между скалярным полипроизведением и индуцированными им геометрическими объектами и в продолжение исследований этой взаимосвязи, начатых в работах М.Мацумото, Х.Шимада, С.Нумата, К.Окубо и Румынских геометров (см.[56 - ссылки [29-32] и [43]] и [61 - ссылки [3-4]]), были получены новые соотношения между m -степенью псевдо-нормы Бервальда-Моора и геометрическими объектами в классическом Финслеровском контексте ([61, §2 и 5-7]). Соотношения того же вида были исследованы в работах [60] и [58]. Их роль является методологической, что позволяет получить результаты, касающиеся свойств структуры (например, проективности [61]) или перейти от алгебраических аспектов теории метрик m -корня к аспектам, специфическим для дифференциальной геометрии Финслеровых пространств.

5.1 Описание полученных результатов

Исследование связностей, согласующихся с замечательными геометрическими структурами, было выполнено в работе [58], где для связностей, характерных для Финслеровой геометрии (Картан, Бартел, Мирон), авторы подчеркнули свойства индуцированных связностей на гиперплоскостях в контексте исследований средней Y -кривизны в случае N -экстремальности. В той же работе описано оригинальное программное обеспечение, разработанное авторами с целью выявления и использования геометрических объектов Финслерова типа, которые появляются при исследовании Y -минимальных подмногообразий. С

помощью символьных вычислений в пакете Maple были определены коэффициенты этих геометрических объектов для многообразий малых размерностей для метрик 3-й и 4-й степеней корня и для конформных метрик Бервальда-Моора. Описанный подход, реализованный нами с помощью Maple, был предложен М. Мацумото (см. [58 - ссылки [39-40]]) и имеет широкие возможности приложений для исследований анизотропных сред.

Более того, в работе [61, §3] автор указывает связности, которые существенно используются для определения, принадлежит ли Финслерово пространство к типу Бервальда-Моора или к типу Дугласа. Результаты, касающиеся пространств типа Бервальда-Моора являются оригинальными.

С другой стороны, в работе [54] пространства Ландсберга характеризуются с помощью определенных связностей (Вайсмана и Леви-Чивиты) и указаны связности, индуцированные ими в структурном и трансверсальном слоях расслоения.

В работе [49, §2-3] было проведено предварительное исследование касательного пространства, наделенного метрикой Бервальда-Моора, там же были определены тензоры ν -кривизны и T -тензор дуального пространства Бервальда-Моора для случая метрики m -корня типа Шимады; затем результаты были конкретизированы для случая дуальных пространств с метрикой m -корня и с индикатрисой, являющейся произведением импульсов. В этом случае классические результаты о взаимном сокращении кокасательного вектора кручения и T -вектора, полученные М. Мацумото и Х. Шимада [49 - ссылки [5,11]] для касательного расслоения, а также свойство S^3 -подобия дуального пространства Бервальда-Моора впервые получены и для дуального случая.

Определение связностей и индуцированных геометрических объектов на подмногообразиях в пространствах, наделенных метрикой m -корня, выполнено в работе [58] с помощью суммирования известных результатов и оригинального внесения их в код программы Maple с использованием макросов и дополнительных процедур, что упрощает использование кода и позволяет расширить результаты, полученные при исследовании индикатрисы.

Процедура для получения средней кривизны и минимальных (Y -экстремальных) поверхностей/гиперповерхностей и соответствующие результаты компьютерной симуляции представлены в работе [58], в которой имеются 2 Приложения, посвященные 4-мерному случаю. В них средняя кривизна и уравнения Y -экстремальных (гипер)поверхностей получены в явном виде при использовании символьного вычисления. Специфическим элементом оригинального исследования является вычисление в явном виде нормального поля подмногообразия (теоретически описанного в [58 - ссылка [40]]), сделанного в виде конкретного приложения с помощью программных процедур в результате решения системы нелинейных уравнений. Также средняя кривизна получена в результате применения процедур, характерных для релятивистского псевдо-Финслерова подхода, использующего энергию пространственно-подобного или светоподобного нормального векторного поля. Этот подход налагает ограничения на уровень подмногообразия для указанных практических приложений, цель которых — найти решения для уравнений Y -экстремальных подмногообразий.

Другая цель ранее запланированного исследования, касающаяся определения специфических типов когомологий в пространствах с метрикой m -корня, была достигнута в работах [63, 54], где оригинальное исследование было проведено для гомологии псевдо-Финслерова пространства, а именно для пространства Бервальда-Моора. Начало было положено в недавней работе [54 - ссылка [2]]. Эти работы впервые представляют новые результаты, касающиеся расслоенных структур Финслерова типа: в [63] доказано существование диффеоморфизма между 2-джет вертикальным расслоением индуцированным каноническим расслоением и расслоением произведения горизонтального, вертикального и смешанного расслоений 2-джетов индуцированных вторым расслоением. В [54] вводится связность Вайсмана. Показано, что пара связностей Леви-Чивиты и Вайсмана индуци-

руют пару связностей того же типа, что и исходные, в структурном расслоении, только если основное многообразие M является пространством Ландсберга, и что касательное пространство с разрезом (касательное пространство TM без образа нулевого сечения, обозначаемое далее TM_0) есть пространство Рейнхарта тогда и только тогда, когда основное многообразие есть пространство Римана. Далее были изучены двулистные джеты на TM_0 . Получена декомпозиция этого пространства и одномерная группа когомологии Чеха на TM_0 с коэффициентами из пучка базисных функций определена в терминах полей на листе 2-джета. Определена группа когомологии Мاستроджакомо по отношению к связности на структурном пучке индуцированной связностью на многообразии TM_0 и показано, что ассоциированная группа когомологии изоморфна 1-мерной группе когомологии Чеха на многообразии TM_0 , имеющей в качестве коэффициентов ростки функций на TM_0 , которые связаны с индуцированной связностью; в частности, для 4-мерного случая m -корня показано, что этот пучок изоморфен пучку базисных функций на TM_0 .

В работе [65] проведено исследование линейных систем кривых на проективной плоскости, имеющих несколько точек базы, иррациональных спиралей и невырожденных гладких проективных кривых с определенными свойствами. В ней впервые исследовалось существование гладких неприводимых и невырожденных кривых ранга d генератора g заданного в проективном пространстве (проблема $HC(n)$ Хальфена-Кастельнуово). Для областей D_{1n} и D_{2n} , построенных на плоскости $(d; g)$, с помощью кривых локализованных на рациональных поверхностях ассоциированных с некоторыми сечениями гиперэллиптического типа, и нескольких хорошо известных теорем, доказанных Чилиберто, Сернези и Пасареску, показано, что D_{1n} является просто связной. Более того, на основе использования результатов Горовица, Чилиберто, Харриса и Эйзенбуда в работе показано, что область D_n является требуемой лакунарной областью.

Геодезические и поля Якоби исследовались в работах [61, §2] и [60, §3], где уравнения геодезических и коэффициенты спреев были выведены и описаны для полиномиальных флаг-метрик. В работе [61] $h\nu$ -тензор кривизны определен для произвольной структуры m -корня; затем это используется для получения характеристик пространств Ландсберга и Бервальда. Соотношения между коэффициентами двух спреев для неразложимой метрики получены в явном виде для кубической метрики m -корня в работе [60, §6]. Все эти результаты являются оригинальными, дополняющими известные результаты, полученные для пространств m -корня М. Мацумото и Х. Шимада. Подчеркнута роль флаговой кривизны, играющей ключевую роль в описании поведения геодезических. Это прослеживается в работе [59] где автор описывает уравнения геодезических, возмущенных присутствием электромагнитного поля. В пространствах с Финслеровой геометрией 1-форма 4-потенциала оказывается анизотропной (она имеет вид горизонтальной 1-формы на касательном расслоении, имеющей специфические свойства).

Были введены и детально исследованы релятивистские модели с 4-мерными пространствами m -корня. Для такого случая были получены [66] оригинальные результаты расчета эффекта ОМПР (оптико-метрического параметрического резонанса) с приложениями к теории относительности и экспериментальной физике (детектирование гравитационных волн). Эта работа выполнялась в сотрудничестве с Российским физиком С.В. Сипаровым. Воздействия слабой деформации плоской псевдо-Финслеровой метрики на тензор электромагнитного поля были исследованы в [59], в частности — для случая метрики m -корня типа Бервальда-Моора. Там были получены обобщенные геодезические модели (§3.3) и подчеркнут физический смысл такого обобщения и его роль в уравнениях электромагнетизма в Финслеровых пространствах. Геодезические и уравнения Якоби исследовались также в [56, §1-2] в контексте структурной устойчивости систем дифференциальных уравнений второго порядка, где авторы получили оригинальные результаты для пучка кривых и для сил, которые отклоняют траектории от геодезических в случае конформной де-

формации структуры m -корня или локальной метрики Минковского (в §4-5). С помощью дополнительных программных средств при получении геодезических с помощью компьютера получены оригинальные процедуры для определения инвариантов, характеризующих устойчивость структур.

В работе [61, §3-6] исследовались пространства Бервальда и Ландсберга с метрикой m -корня и проективные плоские пространства, а в работе [60, §4] - кубические пространства. В [61, Т.17 и Т.18] автор характеризует Финслеровы проективные пространства типа m -корня, и в частности, Римановы проективные пространства типа m -корня [61, Т.19, 20 и Пр.22]. Все эти результаты являются оригинальными и для случая метрик m -корня дополняют известные результаты, полученные С. Баско, Ж. Жабо, Л. Тамасси и Ч. Винче.

В работе [56] в разделах 1-3 авторы представляют основные понятия, которые описывают теорию структурной устойчивости (ККЧ - Косамби - Картан - Черн), созданную П.Л. Антонелли, И. Букатару и В.С. Сабау [56 - ссылки [1-8, 48-49]] и разработанную В. Баланом и И.Р. Никола для биологических и экологических моделей ([56 - ссылки [10-13]]). Описаны пять инвариантов теории, а в Приложении даны оригинальные программы в Maple, которые определяют инварианты, характеризующие устойчивость Якоби динамических систем, ассоциированных с Финслеровым подходом. В §4-5 получены оригинальные результаты для случая конформно-деформированных метрик m -корня и описаны свойства ассоциированных алгебр деформации.

Для Z -, H - и E -спектров тензоров Бервальда-Моора и Чернова в 4-мерном пространстве в работах [52, 50] были расширены известные результаты для суперсимметричных положительно определенных тензоров. Алгебраические свойства этих тензоров индуцируют геометрические свойства: показано, что индикатрисы ассоциированной Финслеровой метрики нелинейчатые и компактны, и что задача минимизации расстояния между началом координат и индикатрисой имеет решение зависящее от Z -собственного значения с максимальной абсолютной величиной и с ассоциированным направлением, задаваемым порождающим Z -собственным вектором. Задача асимптотического поведения индикатрисы решается путем использования спектральных свойств суперсимметричного тензора ассоциированного с фундаментальной Финслеровой функцией. Авторами определены: векторы рецессии, вырожденные векторы, особые точки индикатрисы и наилучшее приближение первого ранга. Качественное описание трех типов собственных значений было получено в работе [57] при использовании теории резольвент для метрики Бервальда-Моора третьего ранга.

Предметами дальнейшего исследования являются уравнения Гамильтона, дуальность Лежандра и физические модели ассоциированные с пространствами с метриками m -корня на касательных и кокасательных расслоениях. В этом аспекте в работе [53] указано на существующий параллелизм между различными преобразованиями, имеющими физический смысл, и подчеркнута отношение типа Лежандра между Лагранжевым и Гамильтоновым формализмами. Исследована альтернатива связанная с использованием преобразований Рашевского, обычно используемых в механике, их вырожденная природа. Выявлен гиперболический характер фундаментальных функций Финслера и Картана и отличия от формализма касательного/кокасательного расслоений, а также соответствие между основными геометрическими объектами и дуальными к ним, заданными преобразованием Лежандра-Финслера для общих пространств Бервальда-Моора произвольной размерности.

В работах [69,70,67,68] построены модели для теорий гравитационного и электромагнитного полей, основанные на обобщенной модели Лагранжа, в частности, на Финслеровой локальной метрике Минковского типа Бервальда-Моора.

В работе [51] исследуется геометрия подмногообразий в пространствах с метрикой m -корня, а в работе [53] подчеркивается гиперболический характер метрики Бервальда-

Моора; в работе [51] разработан псевдо-Финслеров формализм для Финслеровых метрик типа локальных метрик Минковского, включая метрики Бервальда-Моора, особое внимание уделено объектам, позволяющим охарактеризовать минимальные поверхности. Исследованы линейные и нелинейные связности Картана и получены уравнения Гаусса-Вайнгартена, Гаусса-Кодацци, Петерсона-Майнарди и Риччи-Кюна. В работах [52,50] получены геометрические свойства индикатрисы Бервальда-Моора на основе развития спектральной теории ассоциированного суперсимметричного тензора; спектры получены с помощью пакета Maple 12.

Исследование классов когомологий для пространств, наделенных метрикой m -корня и изучение прилегающих расслоений расширяют известные результаты обращением к исходному контексту Финслерова пространства (в частности с локальной метрикой Минковского). Результаты являются оригинальными; они включают явное описание связности Вайсмана для вертикального слоя по отношению к вертикальному расслоению и доказательство того факта, что его листы представляют собой пространства Рейнхарта [62]. Далее, в работе [63] в вертикальном слое Финслерова многообразия определен базис, адаптированный к расслоению Лиувилля, вертикальное расслоение 2-джета и листы вертикальных расслоений 2-джета трансверсального и смешанного типов, а также показано, что существует канонический диффеоморфизм между полным пространством вертикального расслоения 2-джета и одним из произведений расслоений вертикального, трансверсального и смешанного листов 2-джета.

Исследование существования гладких проективных кривых заданного ранга и рода в связи с задачей НСп Хальфена-Кастельнуово было продолжено в работе [64]; здесь рассматривалась открытая задача НС(n) Хальфена-Кастельнуово для гладких кривых в \mathbb{P}^n , $n > 6$ (для меньших размерностей задача уже решена); область параметров разделена на две части: лакунарная и нелакунарная области. Исследовалась первая из них: были определены препятствия к существованию и построены примеры кривых на рациональной и иррациональной поверхностях спирали. Сделаны заключения о лакунарной области.

Специфические вариационные особенности энергии в пространствах с метрикой m -корня и поведение геодезических были рассмотрены в работах [69, 70]; исследовались расширения геодезических Лоренцевского типа для релятивистских моделей обобщенно Лагранжевого типа, полученных при малых деформациях метрики Бервальда-Моора и локальной метрики Минковского. В работе [70] описан класс решений уравнений поля Эйнштейна для такой модели. В работе [55] система дифференциальных уравнений второго порядка рассмотрена в качестве расширений уравнений геодезических и исследована с использованием подхода ККЧ.

Исследование пространств с постоянной скалярной кривизной и постоянной флаговой кривизной было продолжено в работе [51]; там была рассмотрена горизонтальная кривизна, связанная с псевдо-Финслеровым многообразием. Показано, что в случае Бервальда-Моора горизонтальная и флаговая кривизны окружающего пространства исчезают, в то время, как кривизны, индуцированные на подмногообразиях, вообще говоря, нетривиальны.

Исследование реономных ККЧ-моделей было продолжено в работе [55]; оно расширяет автономный случай на реономный за счет геометризации классической теории ККЧ на 1-джет пространства. Здесь авторы исследуют соотношения между пространственными и временным полуспреями и определяют нелинейную связность 1-джет пространства. Они находят пять инвариантов теории и выявляют различия между реономным и автономным случаями, рассматривая геометрические объекты, связанные с индуцированными связностями и ККЧ инвариантами.

Литература

- [1] Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., Наука, 1981.
- [2] Bao D., Chern S. S. and Shen Z. An Introduction to Finsler Geometry. NY, Springer-Verlag, 2000.
- [3] Гарасько Г. И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., Тетру, 2009.
- [4] Богословский Г. Ю. О специальной релятивистской теории анизотропного пространства-времени // *Доклады Академии Наук СССР*, 213, 1973, с. 1055.
- [5] Bogoslovsky G. Yu. A special relativistic theory of the locally anisotropic space-time, Part I. The metric and group of motions of the anisotropic space of events // *Nuovo Cimento*, B 40, 1977, p. 99;
Bogoslovsky G. Yu. A special relativistic theory of the locally anisotropic space-time, Part II. Mechanics and electrodynamics in the anisotropic space // *Nuovo Cimento*, B 40, 1977, p. 116.
- [6] Богословский Г. Ю. Теория локально анизотропного пространства-времени. М., Изд-во МГУ, 1992.
- [7] Киржниц Д. А., Чечин В. А. Космические лучи сверхвысоких энергий и возможное обобщение релятивистской теории // *Ядерная физика*, 15, 1972, с. 1051.
- [8] Сипаров С. В. Теория эффекта нулевого порядка для исследования геометрических свойств пространства-времени // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(6), 2006, с.155;
Siparov S. Theory of the Zero Order Effect Suitable to Investigate the Space-Time Geometrical Properties // *Acta Mathematica APN*, 24(1), 2008, p. 135;
Siparov S. On the problem of anisotropy in geometrodynamics // arXiv: 0809.1817 v3;
Сипаров С. В. К вопросу об анизотропной геометродинамике // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(10), 2008, с. 64;
Siparov S. Gravitation law and source model in the anisotropic geometrodynamics // arXiv: 0910.3408;
Сипаров С. В. Закон гравитации и модель источника в анизотропной геометродинамике // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(12), 2009, с. 140;
S. Siparov, Anisotropic metric for the gravitation theory — new ways to interpret the classical GRT tests // *BSG Proc.*, 17, 2010, p. 205;
S. Siparov, Anisotropic Geometrodynamics in Cosmological Problems // *AIP Conf. Proc.*, 1283, 2010, p. 222.
- [9] DeWitt B. S. Relativity, Groups and Topology. C. DeWitt and B.S. DeWitt, Eds. New York (Gordon and Breach) 1964.
- [10] Brans C. and Dicke R. H. Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation // *Phys. Rev.*, 124, 1961, p. 925.
- [11] Mannheim P. D. and Kazanas D. Newtonian limit of conformal gravity and the lack of necessity of the second order Poisson equation // *Gen. Rel. Gravit.*, 26, 1994, p. 337.
- [12] Moffat J. W. Nonsymmetric Gravitational Theory // *Phys. Lett.*, B 355, 1995, p. 447.
- [13] Bekenstein J. D. Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm // *Phys. Rev.*, D 70, 2004, p. 083509.
- [14] Milgrom M. A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis // *Astrophys. J.*, 270, 1983, p. 384.
- [15] Lense J., Thirring H. Uber den Einfluss der Eigenrotation der Zentralkorper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie // *Phys. Z.*, 19, 1918, p. 156.

- [16] Ruggiero M. L., Tartaglia A. Gravitomagnetic effects // arXiv:gr-qc/0207065v2.
- [17] Сипаров С. В. К вопросу об анизотропной геометродинамике // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(10), 2008, с. 64;
Siparov S. On the problem of anisotropy in geometrodynamics // arXiv:0809.1817 v3.
- [18] Muller H., Chiow S. W., Herrmann S., Chu S., Chung K. Y. Atom Interferometry tests of the isotropy of post-Newtonian gravity // *Phys. Rev. Lett.*, 100, 2008, p. 031101; arXiv:gr-qc/0710.3768.
- [19] CMS Collaboration, Observation of Long-Range Near-Side Angular Correlations in Proton-Proton Collisions at the LHC // *JHEP*, 09, 2010, p. 091; arXiv:hep-ex/1009.4122v1.
- [20] Colladay D., Kostelecký V. A. Lorentz-violating extension of the standard model // *Phys. Rev.*, D 58, 1998, p. 116002.
- [21] Bailey Q. G., Kostelecký A. Signals for Lorentz violation in post-Newtonian gravity // *Phys. Rev.*, D 74, 2006, p. 045001.
- [22] Kostelecký V. A. (Ed.) CPT and Lorentz symmetry. Singapore, World Scientific, 1999;
CPT and Lorentz symmetry II, Singapore, World Scientific, 2002;
CPT and Lorentz symmetry III, Singapore, World Scientific, 2005;
CPT and Lorentz symmetry IV, Singapore, World Scientific, 2008;
CPT and Lorentz symmetry V, Singapore, World Scientific, 2011.
- [23] Blas D., Sibiryakov S. Technically natural dark energy from Lorentz breaking // arXiv:hep-ex.1104.3579v1.
- [24] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F. Finslerian spaces possessing local relativistic symmetry // *Gen. Relativ. Gravit.*, 31, 1999, p. 1565.
- [25] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group // *J. Math. Phys.*, 16, 1975, p. 1615.
- [26] Винтернитц П., Фриш И. Инвариантные разложения релятивистских амплитуд и подгруппы собственной группы Лоренца // *Ядерная физика*, 1, 1965, p. 889.
- [27] Bogoslovsky G. Yu. Lorentz symmetry violation without violation of relativistic symmetry // *Phys. Lett.*, A 350, 2006, p. 5.
- [28] Cohen A. G. and Glashow S. L. Very Special Relativity // *Phys. Rev. Lett.*, 97, 2006, p. 021601; arXiv:hep-ph/0601236v1.
- [29] Cohen A. G. and Glashow S. L. A Lorentz-Violating Origin of Neutrino Mass? // arXiv:hep-ph/0605036v1.
- [30] Gibbons G. W., Gomis J. and Pope C. N. General very special relativity is Finsler geometry // *Phys. Rev.*, D 76, 2007, p. 081701; arXiv:hep-ex/0707.2174.
- [31] Gibbons G. W., Gomis J. and Pope C. N. Deforming the Maxwell-Sim Algebra // *Phys. Rev.*, D 82, 2010, p. 065002; arXiv:hep-ex/0910.3220.
- [32] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F. Concerning the generalized Lorentz symmetry and the generalization of the Dirac equation // *Phys. Lett.*, A 323, 2004, p. 40; arXiv:hep-th/0402172.
- [33] Bogoslovsky G. Yu. Some physical displays of the space anisotropy relevant to the feasibility of its being detected at a laboratory // arXiv:gr-qc/0706.2621v1.
- [34] Богословский Г. Ю. Финслерова модель пространства-времени // *ЭЧАЯ*, 24, 1993, p. 813.
- [35] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F. On the possibility of phase transitions in the geometric structure of space-time // *Phys. Lett.*, A 244, 1998, p. 222; arXiv:gr-qc/9804082.
- [36] Siparov S. and Brinzei N. Space-time anisotropy: theoretical issues and the possibility of

- an observational test // arXiv:gr-qc/0806.3066 ;
- Brinzei N., Siparov S. On the possibility of the OMPR effect in spaces with Finsler geometry, Part I, // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 4, 2007, p. 41;
- Siparov S., Brinzei N. On the possibility of the OMPR effect in spaces with Finsler geometry, Part II // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 5, 2008, p. 56.
- [37] Voicu N. New considerations on Einstein equations in anisotropic spaces // *AIP Conf. Proc.*, 1283, 2010, p. 249.
- [38] Aguirre A., Burgess C.P., Friedland A. and Nolte D. Astrophysical Constraints on Modifying Gravity at Large Distances // *CQG*, 18, 2001, p. R223.
- [39] Павлов Д. Г., Кокарев С. С. Конформные калибровки геометрии Бервальда-Моора и индуцированные ими нелинейные симметрии // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(10), 5, 2008, p. 3.
- [40] Kokarev S.S. Are different geometries really that different? // *Proceedings of PIRT-2009* (Physical Interpretations of Relativity Theory), arxiv:0906.2921 .
- [41] Павлов Д. Г., Кокарев С. С. Римановы метрики, соприкасающиеся с 3-мерной финслеровой метрикой Бервальда-Моора // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(10), 5, 2008, с. 15.
- [42] Павлов Д. Г., Кокарев С. С. Аддитивные углы в пространстве \mathcal{H}_3 // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(10), 5, 2008, с. 25.
- [43] Павлов Д. Г., Кокарев С. С. Метрические бинглы и тринглы в \mathcal{H}_3 // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(11), 6, 2009, с. 42.
- [44] Соколов Н. П. Пространственные матрицы и их приложения. М., ГИФМЛ, 1960.
- [45] Kokarev S.S. Isometry classification of cubic homogeneous 3-dimensional forms // *Symmetry: Culture and Science*, 20, 1-4, 2009, p. 371-392.
- [46] Павлов Д. Г., Кокарев С. С. h -голоморфные функции двойной переменной и их приложения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(13), 7, 2010, с. 44.
- [47] Павлов Д. Г., Кокарев С. С. Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(13), 7, 2010, с. 78.
- [48] Павлов Д. Г., Кокарев С. С. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(13), 7, 2010.
- [49] Atanasiu Gh., Neagu M. On Cartan spaces with the m -th root metric $\sqrt[m]{a^{i_1 i_2 \dots i_m} p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_m}}$ // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 2 (12), Vol 6, 2009; arXiv:0802.2887v2 math.DG 10 Oct 2008.
- [50] Balan V. Spectral properties and applications of numerical multilinear algebra of m -root structures // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics* 2 (10), vol. 5, 2008, pp. 101-108.
- [51] Balan V. Notable submanifolds in Berwald-Moor spaces // *BSG Proceedings 17* (ISI Proceedings), Geometry Balkan Press, 2010, pp. 21-30.
- [52] Balan V. Numerical multilinear algebra of symmetric m -root structures. Spectral properties and applications // *Symmetry: Culture and Science*, Symmetry Festival 2009, Symmetry in the History of Science, Art and Technology; Part 2; Geometric Approaches to Symmetry, Budapest, Hungary, 21, 1-3, 2010, pp. 119-131.
- [53] Balan V., Lebedev S. On the Legendre transform and Hamiltonian formalism in Berwald-Moor geometry // *Diff. Geom. Dyn. Syst.* 12, 1, 2010, pp. 4-11.
- [54] Balan V., Manea A. Leafwise 2-jet cohomology on foliated Finsler manifolds // *BSG Proceedings 16* (ISI Proceedings), Geometry Balkan Press, 2009, pp. 28-41.

- [55] Balan V., Neagu M. Jet geometrical extension of the KCC-invariants // *Balkan J. Geom. Appl.* 15 (ISI), 1, 2010, pp. 8-16; arXiv:math.DG/0906.2903v1.
- [56] Balan V., Nicola I-R. Berwald-Moor metrics and structural stability of conformally-deformed geodesic SODE // *Diff. Geom. Dyn. Syst.*, 1, 2009, 1, pp. 41-53.
- [57] Balan V., Perminov N. Applications of resultants in the spectral m -root framework // *Appl. Sci.* 12, 1, 2010, pp. 20-29.
- [58] Balan V., Pitea A. Symbolic software for Y-energy extremal Finsler submanifolds // *Appl. Sci.* 1, 2009, 1, pp. 19-34.
- [59] Brinzei N. Equations of electromagnetism in some special anisotropic spaces // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 2 (10), 5, 2008, pp. 44-55.
- [60] Brinzei N. On cubic Berwald spaces // arXiv:math.DG/0810.4009v1; *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 17, 1&2, 2009, pp. 1-10.
- [61] Brinzei N. Projective relations for m -th root metric spaces // *Journal of the Calcutta Mathematical Society*, 5, 1&2, 2009, pp. 21-3.
- [62] Manea A. The Vaisman connection of the vertical bundle of a Finsler manifold // *Bull. Transilvania Univ. Braşov, Series III, Mathematics-Informatics, Physics*, 2, 51, 2009, pp. 199-206.
- [63] Manea A. Some new types of vertical 2-jets on the tangent bundle of a Finsler manifold // *Sci. Bull. Univ. Politehnica Bucharest, Series A Mathematics-Physics*, 172, 2010, 1, pp. 177-194.
- [64] O. Păsărescu Curves on some irrational scrolls // [technical report], submitted to Math. Nachrichten.
- [65] O. Păsărescu Curves on rational surfaces with hyperelliptic hyperplane sections // [technical report], submitted to Math. Nachrichten.
- [66] Siparov S., Brinzei N. Space-time anisotropy: theoretical issues and the possibility of an observational test // arXiv:gr-qc/0806.3066v2, pp. 1-17.
- [67] Voicu N. Anisotropy and analogies between gravity and electromagnetism // *"Physical Interpretation of Relativity Theory": Proceedings of XV International Meeting. (PIRT) 2009 Moscow*, 6-9 July 2009, pp. 124-132.
- [68] Voicu N. New considerations on Einstein equations in pseudo-Finsler spaces // *AIP Conf. Proceedings 1283 (Proc. of the Int. Conf. "Mathematics and Astronomy: a Joint Long Journey"*, Madrid, Spain, 23-27 Nov. 2009), Melville, New York, 2010, pp. 249-257.
- [69] Voicu-Brinzei N., Siparov S. A new approach to electromagnetism in anisotropic spaces // *BSG Proceedings 17 (ISI Proceedings)*, Geometry Balkan Press, Bucharest 2010, pp. 235-245; arXiv:0905.4747v2 [math-ph] 11 Nov 2009.
- [70] Brinzei N., Siparov S. Space-time anisotropy - mathematical formalism and the possibility of an experimental test // Proceedings of the 4-th Gamow International Conference in Odessa, "Astrophysics and Cosmology after Gamow: recent progress and new horizons" and 9-th Gamow Summer School "Astronomy and beyond: Astrophysics, Cosmology, Radioastronomy, High Energy Physics and Astrobiology 17-23 August, 2009, Odessa, Ukraine; "Astrophysics and Cosmology after Gamow"(AIP Conference Proceedings 1206), 2009, 152-162.

GEOMETRICAL MODELS OF THE LOCALLY ANISOTROPIC SPACE-TIME

V. Balan¹, G.Yu. Bogoslovsky^{2,3}, S.S. Kokarev^{3,4}, D.G. Pavlov³,
S.V. Siparov^{3,5}, N. Voicu⁶

¹ *University Politehnica of Bucharest, Bucharest, Romania*

² *Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, MSU, Moscow, Russia*

³ *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fryazino, Russia*

⁴ *RSEC Logos, Yaroslavl, Russia*

⁵ *State University of Civil Aviation, St-Petersburg, Russia*

⁶ *"Transilvania" University of Braşov, Braşov, Romania*

vladimir.balan@upb.ro, bogoslov@theory.sinp.msu.ru, logos-center@mail.ru, geom2004@mail.ru,
sergey@siparov.ru, nico.brinzei@unitbv.ro

Lately, the problem of the Lorentz symmetry-breaking has been widely discussed in literature. It is worthy to note that, in addition to the construction of phenomenologically focused effective field theories, the research based on the Finslerian geometric models of space-time becomes more and more popular. Finsler approach to the Lorentz symmetry-breaking problem is characterized by the fact that there the Lorentz symmetry-breaking is not accompanied by the relativistic symmetry-breaking. This means that the preservation of the relativistic symmetry is a rigid criterion of the viability for any non-Lorentz-invariant effective field theory. Though this paper has a review character, it mainly contains original results obtained by the authors, concerning Finsler extensions of Relativity Theory.

Key Words: Lorentz-, Poincare- and gauge symmetry, spontaneous symmetry breaking, alternative gravity theories, space-time anisotropy, Finsler differential geometry.

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $SL_2(\mathbb{R})$ И ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

В.В. Кисиль

Университет Лидса, Лидс, Великобритания

kisilv@maths.leeds.ac.uk

В работе рассматривается конструкция индуцированных представлений для группы $G = SL_2(\mathbb{R})$. Оказывается, что действие этой группы на однородном пространстве G/H , где H является произвольной однопараметрической подгруппой $SL_2(\mathbb{R})$, является дробно-линейным преобразованием двумерной алгебры гиперкомплексных чисел. Это наблюдение может быть распространено на дальнейшие соответствия между структурными компонентами $SL_2(\mathbb{R})$ и гиперкомплексными системами. Соответственно мы рассматриваем вопрос о гиперкомплексных характерах подгруппы H . В частности мы приводим примеры индуцированных представлений группы $SL_2(\mathbb{R})$ в пространствах функций с гиперкомплексными значениями, которые являются унитарными в определённом смысле.

Ключевые слова: индуцированные представления, унитарные представления, $SL(2, \mathbb{R})$, полупростые группы Ли, гиперкомплексные числа, дуальные числа, двойные числа, преобразования Мёбиуса, дробно-линейные преобразования, эллиптические числа, параболические числа, гиперболические числа, операторы рождения, деквантизация Маслова.

1 Группа $SL_2(\mathbb{R})$ и её подгруппы

Группа $SL_2(\mathbb{R})$ состоит из квадратных 2×2 матриц с действительными элементами и единичным определителем. Групповая операция задаётся матричным умножением. $SL_2(\mathbb{R})$ является простейшей полупростой группой Ли. Произвольный элемент $SL_2(\mathbb{R})$ допускает единственное разложение вида [10, Exer. I.14]:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (1)$$

с некоторыми параметрами $\alpha \in (0, \infty)$, $\nu \in (-\infty, \infty)$ и $\phi \in (-\pi, \pi]$. Эта формула (1) записанная в виде $SL_2(\mathbb{R}) = ANK$ известна как разложение Ивасава [25, § III.1] и допускает обобщение на произвольную полупростую группу Ли.

Семейства матриц каждого из трёх видов в правой части (1) образуют однопараметрические подгруппы обычно обозначаемые A , N and K . Они получаются экспоненцированием соответствующих матриц с нулевым следом:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad (2)$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad (3)$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}, t \in (-\pi, \pi] \right\}. \quad (4)$$

Следующий простой результат имеет поучительное доказательство:

Предложение 1. *Любая непрерывная однопараметрическая подгруппа $SL_2(\mathbb{R})$ матрично сопряжена к одной из подгрупп A , N или K .*

Доказательство. Любая непрерывная однопараметрическая подгруппа получается экспоненцированием

$$e^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X^n \tag{5}$$

элемента X алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 группы $SL_2(\mathbb{R})$. Такой элемент представим 2×2 матрицей с нулевым следом. Поведение ряда Тэйлора (5) зависит от свойств степеней X^n . Последние легко классифицируются непосредственным вычислением:

Лемма 2. Квадрат X^2 матрицы $X \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ с нулевым следом есть единичная матрица умноженная на $a^2 + bc = -\det X$. Этот множитель может быть отрицательным, нулевым или положительным, что соответствует трём различным типам ряда Тэйлора (5) для e^{tX} .

Несложно видеть, что матричное подобие приводит элемент X к генератору

- подгруппы K если $(-\det X) < 0$;
- подгруппы N если $(-\det X) = 0$;
- подгруппы A если $(-\det X) > 0$.

Так как матричное подобие не меняет определителя матрицы, то эти три случая не сводятся друг к другу. □

Пример 3. Следующие две подгруппы сопряжены к A и N соответственно посредством матричного сопряжения с фиксированной матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$A' = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, \tag{6}$$

$$N' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}. \tag{7}$$

В дальнейшем мы будем, как правило, рассматривать подгруппы N' и A' вместо N и A , так как это приведёт к более естественной геометрической картине.

2 Действие $SL_2(\mathbb{R})$ приводит к гиперкомплексным числам

Пусть H является подгруппой группы G . Для соответствующего однородного пространства $\Omega = G/H$ определим гладкое сечение $s : \Omega \rightarrow G$ [12, § 13.2], которое является левым обратным для естественной проекции $p : G \rightarrow \Omega$. Выбор такого сечения непринципиален в том смысле, что наши дальнейшие построения определяются с точностью до гладкого отображения $\Omega \rightarrow \Omega$.

Каждый элемент $g \in G$ может быть представлен единственным образом в виде $g = s(\omega)h$, где $\omega = p(g) \in \Omega$ и $h \in H$. Соответственно, на Ω определяется действие группы G следующим образом:

$$g : \omega \mapsto g \cdot \omega = p(g * s(\omega)), \tag{8}$$

где $*$ обозначает групповое произведение. Это действие может быть также проиллюстрировано коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g*} & G \\ s \uparrow & p & s \uparrow \\ \Omega & \xrightarrow{g \cdot} & \Omega \end{array}$$

Для группы $G = SL_2(\mathbb{R})$, как и для остальных полупростых групп, принято рассматривать случай, когда H является максимальной компактной подгруппой K . Однако в данной работе мы рассмотрим все три возможности для однопараметрической подгруппы H описанных в Предложении 1 и Примере 3, а именно $H = K$, N' или A' . В этом случае многообразии Ω является двумерным и для всех трёх возможных подгрупп H мы определим [13, Ех. 3.7(a)]:

$$s : (u, v) \mapsto \frac{1}{\sqrt{v}} \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2, v > 0. \quad (9)$$

Непосредственное вычисление или использование компьютерной программы [18] приводит к следующему результату:

Предложение 4. Действие (8) группы $SL_2(\mathbb{R})$ определённое сечением s (9) есть:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : (u, v) \mapsto \left(\frac{(au + b)(cu + d) - \sigma cav^2}{(cu + d)^2 - \sigma (cv)^2}, \frac{v}{(cu + d)^2 - \sigma (cv)^2} \right), \quad (10)$$

где $\sigma = -1, 0$ или 1 для подгрупп K, N' или A' соответственно.

Выражение (10) не выглядит привлекательно, однако, введение гиперкомплексных чисел существенно его упрощает:

Предложение 5. Пусть единица ι такова, что $\iota^2 = \sigma$, тогда действие группы $SL_2(\mathbb{R})$ (10) может быть записано как дробно-линейное (мёбиусово) преобразование:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : w \mapsto \frac{aw + b}{cw + d}, \quad \text{где } w = u + \iota v, \quad (11)$$

для всех трёх возможных значений параметра σ из Предложения 4.

Замечание 6. Отметим что гиперкомплексные единицы не вводились нами умышленно, по произволу или из «чисто обобщательской попытки» [30, стр. 4]. Они естественно возникли из действия группы $SL_2(\mathbb{R})$.

Мнимая единица $i^2 = -1$ порождает хорошо знакомые комплексные числа. Двумерная алгебра выражений $x + jy$ с образующей $j^2 = 1$ имеет много имён: гиперболические, двойные числа [2, 11, 32] и др., это один из простейших примеров гиперкомплексных чисел. Параболические гиперкомплексные числа, часто так же называемые двойными имеют вид $x + \varepsilon y$ с нильпотентной единицей такой, что $\varepsilon^2 = 0$ [35, 9, 3, 5]. Мы используем символ ι для обозначения любой из трёх единиц i, ε или j .

Замечание 7. К сожалению, не существует устоявшихся обозначений для образующих гиперкомплексных алгебр. Более того, было бы затруднительно просто перечислить всё многообразие использованных символов и мы упомянем лишь некоторые из них. Стоит отметить, что даже наиболее традиционная мнимая единица i обозначается как j во многих инженерных текстах. Гиперболическая единица обозначается как j во многочисленных работах начиная, по крайней мере, с основополагающего текста [34]; однако, другое обозначение e употребляется в замечательной книге [35]. Для нильпотентной единицы часто используется символ ι [7, 29], но наш выбор ε позаимствован у Яглома [35] и его последователей. Нам это обозначение кажется удачным в силу следующего Замечания.

Замечание 8. Нильпотентная единица ε близко связана с инфинитезимальным числом ε используемом в нестандартном анализе [4, 33]. Квадрат нильпотентной единицы в точности равен нулю в то время, как квадрат инфинитезимального числа есть «практически» ноль. Это сходство использовалось в работе [3] для вывода основных теорем дифференциального исчисления на основе нильпотентной единицы. Это же свойство стоит за построением классической механики из представлений группы Гейзенберга [20].

Действие (11) является групповым гомоморфизмом из $SL_2(\mathbb{R})$ в преобразование «верхней полуплоскости» гиперкомплексной алгебры. Несмотря на то, что алгебраическая структура двойных и дуальных чисел достаточно вырождена, они интересны как однородные пространства для мёбиусовых преобразований. Построение соответствующих геометрий в духе Эрлангенской программы Ф. Клейна ободряюще необычно [19] и приводит к новым результатам даже в хорошо изученном случае геометрии Лобачевского [15].

Из-за делителей нуля корректное изучение мёбиусовых преобразований (11) должно рассматриваться на конформно пополненной плоскости [9, 16]. Физические приложения гиперкомплексных чисел простираются от классической механики [35] и специальной теории относительности [2, 32] до космологии [9, 6] и квантовой механики [11, 20, 7].

Стандартный способ линеаризации действия (8) заключается в переходе к представлению индуцированному с подгруппы H [12, § 13.2], [13, § 3.1]. Для этого мы определим отображение $r : G \rightarrow H$ порожденное отображениями p и s через соотношения:

$$r(g) = (s(\omega))^{-1}g, \quad \text{где } \omega = p(g) \in \Omega. \quad (12)$$

Пусть χ является неприводимым представлением подгруппы H в векторном пространстве V , тогда оно индуцирует представление G в смысле Макки [12, § 13.2]. Существует несколько реализаций индуцированного представления, мы будем рассматривать представление ρ_χ в пространстве V -значных функций по формуле [12, § 13.2.(7)–(9)]:

$$[\rho_\chi(g)f](\omega) = \chi(r(g^{-1} * s(\omega)))f(g^{-1} \cdot \omega), \quad (13)$$

где $g \in G$, $\omega \in \Omega$, $h \in H$ и $r : G \rightarrow H$, $s : \Omega \rightarrow G$ есть отображения определённые выше; $*$ обозначает групповую операцию на G и \cdot является действием (8) группы G на Ω .

Так как в нашем рассмотрении подгруппа H всегда одномерна, то её неприводимые представления обычно предполагаются комплексными характерами. Однако, если гиперкомплексные числа естественно появляются в действии группы $SL_2(\mathbb{R})$ на однородных пространствах (11), почему мы не должны также рассмотреть гиперкомплексные характеры?

3 Гиперкомплексные характеры—алгебраический подход

Как уже отмечалось, традиционно основное внимание при изучении представлений группы $SL_2(\mathbb{R})$ уделяется случаю $H = K$ и, соответственно, комплекснозначным характерам K . Линейное преобразование определённое матрицами (4) из K представляют собой вращения \mathbb{R}^2 на угол t . Идентификация $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ переводит это вращение в умножение на e^{it} , где $i^2 = -1$. Вращение является унитарным для эллиптической метрики:

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy). \quad (14)$$

Каждая орбита вращения являются окружностью («ободом колеса»), и любая прямая проходящая через начало координат («спица») переходит в другую прямую повернутую на угол t , см. Рис. 1(Е).

Для гиперкомплексных чисел наиболее прямолинейное применение этой модели для характеров выглядит как на рисунке 1.

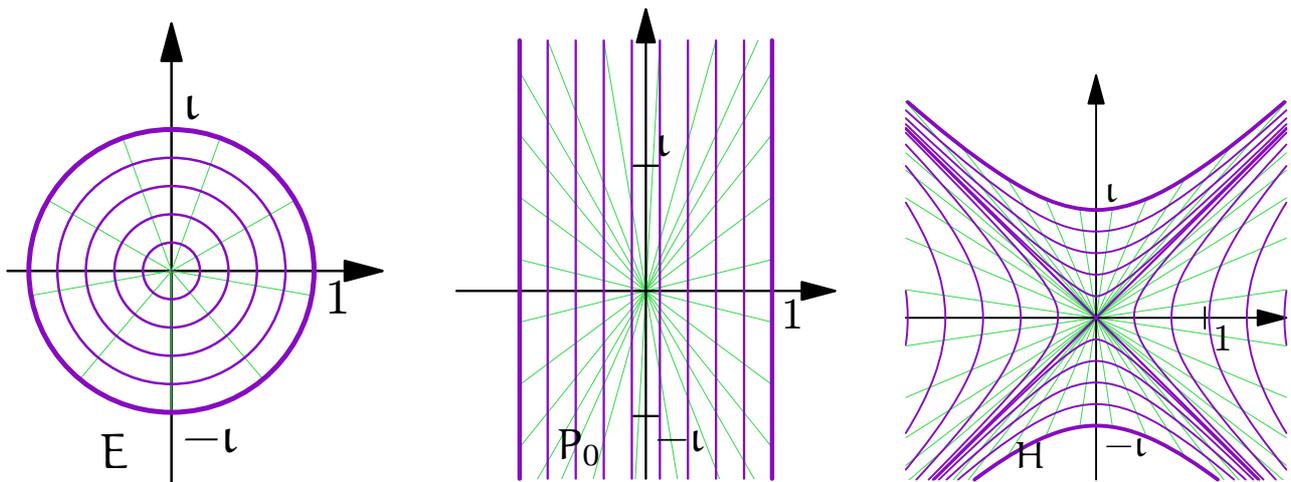


Рис. 1: Унитарные вращения, полученные алгебраическим способом, т.е. умножением на e^{lt} : эллиптические (E), параболические (P_0) и гиперболические (H). Все фиолетовые орбиты определяются уравнением $x^2 - l^2 y^2 = r^2$. Зелёные «спицы» (прямые линии из начала координат к точке на орбите) получаются вращением горизонтальной оси.

Предложение 9. Нижеследующая таблица показывает алгебраическое соответствие между гиперкомплексными характеристиками:

Эллиптический	Параболический	Гиперболический
<i>Subgroup K</i>	<i>Subgroup N'</i>	<i>Subgroup A'</i>
$i^2 = -1$	$\varepsilon^2 = 0$	$j^2 = 1$
$w = x + iy$	$w = x + \varepsilon y$	$w = x + jy$
$\bar{w} = x - iy$	$\bar{w} = x - \varepsilon y$	$\bar{w} = x - jy$
$e^{it} = \cos t + i \sin t$	$e^{\varepsilon t} = 1 + \varepsilon t$	$e^{jt} = \cosh t + j \sinh t$
$ w _e^2 = w\bar{w} = x^2 + y^2$	$ w _p^2 = w\bar{w} = x^2$	$ w _h^2 = w\bar{w} = x^2 - y^2$
$\arg w = \arctan \frac{y}{x}$	$\arg w = \frac{y}{x}$	$\arg w = \tanh^{-1} \frac{y}{x}$
окружность $ w _e^2 = 1$	две прямые $x = \pm 1$	гипербола $ w _h^2 = 1$

Геометрическое действие умножения на e^{lt} показано Рис. 1 для всех трёх случаев.

Явным образом параболическое «вращение» порождённое умножением на $e^{\varepsilon t}$ действует на дуальные числа так:

$$e^{\varepsilon x} : a + \varepsilon b \mapsto a + \varepsilon(ax + b). \quad (15)$$

Это связывает параболический случай с галилеевыми симметриями классической механики [35], в которой время абсолютно и независимо от пространства. Такое кинематическое обоснование предлагает следующие соответствия для параболического случая [8, 35]:

- Параболическая тригонометрия тривиальна:

$$\text{cosp } t = \pm 1, \quad \text{sinp } t = t; \quad (16)$$

- параболическое расстояние (при ненулевом x) не зависит от y :

$$x^2 = (x + \varepsilon y)(x - \varepsilon y); \quad (17)$$

- полярное разложение дуального числа [35, App. C(30')]:

$$u + \varepsilon v = u\left(1 + \varepsilon \frac{v}{u}\right), \quad \text{поэтому} \quad |u + \varepsilon v| = u, \quad \arg(u + \varepsilon v) = \frac{v}{u}; \quad (18)$$

- параболическое «колесо» выглядит прямоугольным, см. Рис. 1(P_0).

Алгебраическая аналогия и кинематическое обоснование кажутся достаточно убедительными для единственно правильной параболической тригонометрии [26, 8, 35]. Более того, данные три типа вращений представляют собой все возможные линейные симплектические преобразования, что делает их и соответствующие мнимые единицы полезными в классической и квантовой механике [20, 22].

Однако геометрический подход и симметрии параболических уравнений математической физики предлагают менее вырожденную альтернативу изложенную ниже.

4 Параболическое колесо из геометрического действия

Попробуем ввести нетривиальные параболические вращения другим способом. Если умножение в дуальных числах (линейные преобразования) слишком тривиальны, мы перейдём к следующему уровню сложности: дробно-линейным.

Действительно, нет необходимости рассматривать гиперкомплексные единицы как абстрактные сущности. Мы видели в Лемме 2, что генераторы подгрупп K , N и A по сути представляют единицы для комплексных, дуальных и двойных чисел соответственно. Мы так же можем рассматривать выражения для однопараметрических подгрупп K , N' и A' как матричные версии тождества Эйлера из пятой строки таблицы в Предложении 9.

Поэтому мы можем определить характеры подгрупп K , N' и A' через геометрическое действие $SL_2(\mathbb{R})$ посредством преобразований Мёбиуса. Однако действие (11) определено в верхней полуплоскости, а было бы желательно получить его унитарную форму, что возможно при конформном отображении на единичный круг. В эллиптическом случае это достигается преобразованием Келли, которое переводит подгруппу K в:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Диагональная матрица справа задаёт преобразование Мёбиуса, которое сводится к умножению на e^{2it} , то есть унитарному вращению комплексной плоскости.

Гиперболическая версия преобразования Келли выглядит так [19, § 8.1]:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Преобразование Мёбиуса с полученной матрицей так же сводится к умножению на e^{2jt} , что является унитарным преобразованием Лоренца двумерного пространства-времени Минковского.

В параболическом случае мы используем для преобразования Келли сходную матрицу [19, § 8.2]:

$$C_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда образом матрицы (3) из подгруппы N будет:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon t & t \\ 0 & 1 - \varepsilon t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\varepsilon t} & t \\ 0 & e^{-\varepsilon t} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Хотя этот результат не сильно отличается от двух предыдущих случаев (19) и (20), но присутствие ненулевого члена в позиции (1, 2) нарушает баланс. Тем не менее, мы по-прежнему определим параболическое вращение, как преобразование Мёбиуса с матрицей (21), которое уже не будет простым умножением на скаляр.

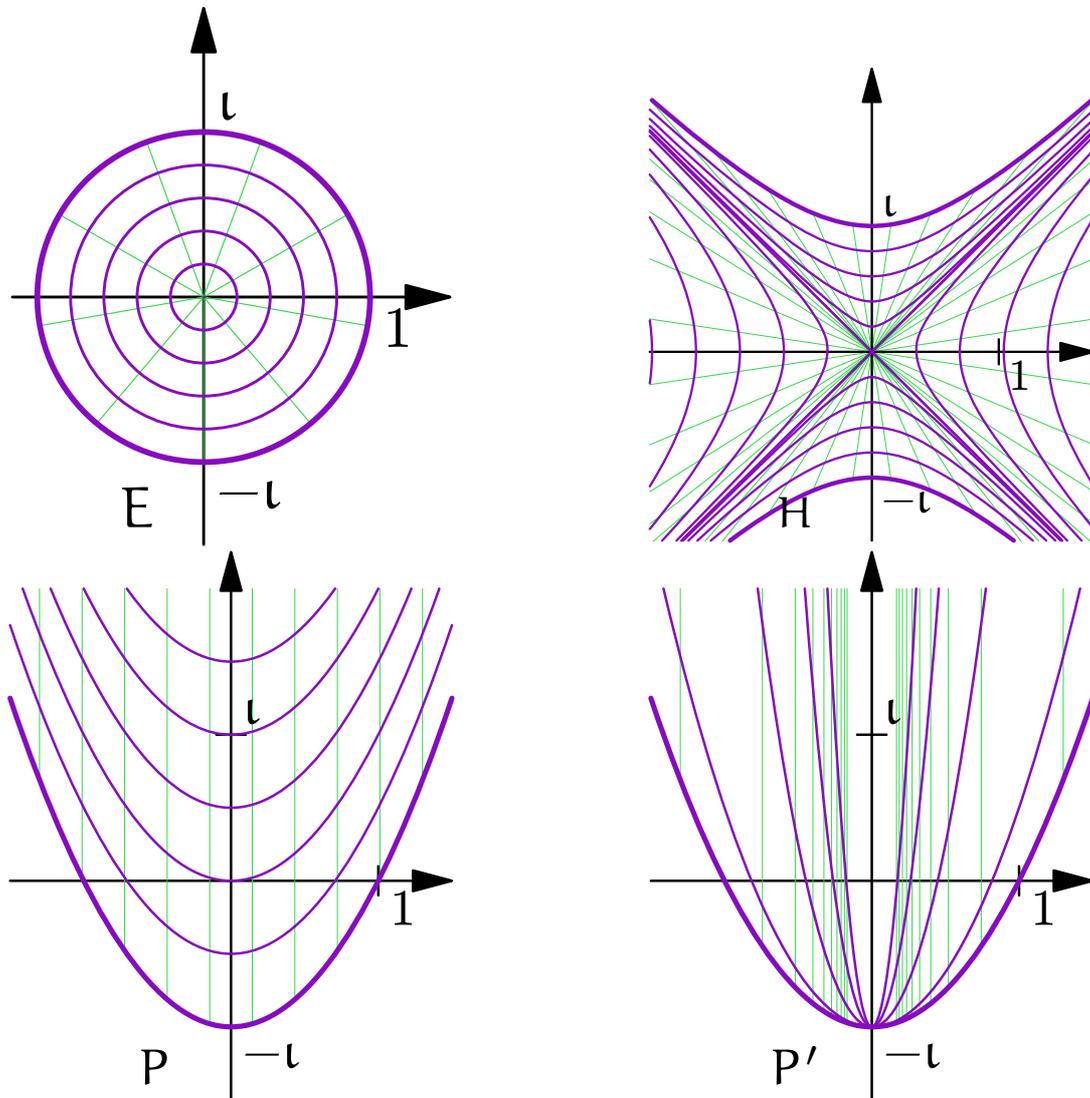


Рис. 2: Геометрическая версия унитарных вращений: эллиптические (E), два варианта параболических (P и P'), и гиперболические (H). Фиолетовые орбиты являются линиями уровня для соответствующих функций модуля. Зелёные прямые линии соединяют точки с одинаковым значением аргумента, они нарисованы с постоянным шагом приращения аргумента для каждого случая.

Пример 10. Параболическое вращение с верхне-треугольной матрицей из подгруппы N есть:

$$\begin{pmatrix} e^{\varepsilon t} & t \\ 0 & e^{-\varepsilon t} \end{pmatrix} : -\varepsilon \mapsto t + \varepsilon(t^2 - 1). \quad (22)$$

Это совпадает с *циклическим вращением* определённым в [35, § 8]. Сравнение с тождеством Эйлера по-прежнему подтверждает определение параболического синуса как линейной функции $\operatorname{sinp} t = t$, но предлагает новое значение для параболического косинуса (квадратичное вместо постоянного):

$$\operatorname{cosp} t = 1 - t^2, \quad \operatorname{sinp} t = t.$$

Соответственно параболическая теорема Пифагора выглядит так:

$$\operatorname{sinp}^2 t + \operatorname{cosp} t = 1, \quad (23)$$

что неплохо соседствует с эллиптической с одной стороны и гиперболической—с другой версиями:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \quad \sinh^2 t - \cosh^2 t = -1.$$

Отметим также, что тождество (23) менее вырождено, чем выражение вообще без синуса $\operatorname{cosp}^2 t = 1$ из [8] (см. так же (16), (17)).

Пример 11. Существует вторая возможность определить параболические вращения используя нижне-треугольные матрицы из подгруппы N' . Существенное отличие в том, что точка $-\varepsilon$ теперь неподвижна (как и все точки вертикальной оси) и для получения орбиты мы будем использовать ε^{-1} , который является идеальным элементом (точкой в бесконечности) [35, App. C] потому, что ε — делитель нуля. Вопросы замыкания гиперкомплексных чисел идеальными элементами в физическом контексте рассматривались в [16].

Для подгруппы N' мы получаем:

$$\begin{pmatrix} e^{-\varepsilon t} & 0 \\ t & e^{\varepsilon t} \end{pmatrix} : \frac{1}{\varepsilon} \mapsto \frac{1}{t} + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{t^2}\right). \quad (24)$$

Сравнение с (22) показывает, что обе версии связаны отображением $t \mapsto t^{-1}$. Такое же соотношение связывает и параболические тригонометрические функции. Параболическая «единичная окружность» (или *цикл* [19, 35]) определяется уравнением $x^2 - y = 1$ в обоих случаях, см. Рис. 2(P) и (P'). Однако остальные орбиты различаются и мы опишем их в следующей секции.

Рис. 2 показывает преобразования Мёбиуса определённых матрицами (19), (20) и (21) с соответствующими «единичными кругами», которые являются образами верхней полуплоскости под действием соответствующих преобразований Келли [19, § 8].

5 Восстановление алгебраической структуры из геометрии

Мы хотим, чтобы индуцированные представления были линейными, для этого порождающий их характер должен также быть линейным. Вращения в эллиптическом и параболическом случае задаются произведениями с комплексными и двойными числами соответственно и потому — линейны. Однако, нетривиальные параболические вращения (22) и (24) (Рис. 2(P) и (P')) — нелинейны и мы введём новые алгебраические операции на дуальных числах, которые линеаризуют преобразования Мёбиуса. Для этого мы будем систематически использовать хорошо известный приём «обращения теорем в определения».

5.1 Модуль и аргумент

В эллиптическом и гиперболическом случае орбиты вращений являются точками с постоянной нормой (модулем): $x^2 + y^2$ или $x^2 - y^2$ соответственно. В параболическом случае мы используем этот же признак:

Определение 12. Орбиты преобразований (22) и (24) являются линиями уровня для следующих функций, которые мы будем называть соответствующими *модулем (нормой)*:

$$\text{для } N : |u + \varepsilon v| = u^2 - v, \quad \text{для } N' : |u + \varepsilon v|' = \frac{u^2}{v + 1}. \quad (25)$$

Замечание 13.

1. Выражение $|(u, v)| = u^2 - v$ равно параболическому расстоянию из $(0, \frac{1}{2})$ to (u, v) к точке (u, v) , см. [19, Lem. 8.3], и так же соответствует «параболической теореме Пифагора» (23).
2. Модуль для подгруппы N' выражает параболическое фокальное расстояние из точки $(0, -1)$ к (u, v) , см. [19, Lem. 8.4].

Единственные прямые, которые переходят в прямые под действием параболических вращений с подгруппами N и N' , это вертикальные прямые. Поэтому мы их будем использовать как множества точек с постоянным значением аргумента и дадим следующее:

Определение 14. Параболический *аргумент* определятся как:

$$\text{для } N : \arg(u + \varepsilon v) = u, \quad \text{для } N' : \arg'(u + \varepsilon v) = \frac{1}{u}. \quad (26)$$

Оба определения 12 и 14 задают свойства хорошо согласующиеся с параболическими вращениями:

Предложение 15. Пусть точка w_t получается из w параболическим вращением на угол t в (22) или в (24). Тогда:

$$|w_t|^{(t)} = |w|^{(t)}, \quad \arg^{(t)} w_t = \arg^{(t)} w + t,$$

где выражения со штрихом используются для подгруппы N' .

Все доказательства в этой и следующей секциях производятся вычислением либо непосредственно, либо с помощью пакета символьческих расчётов [17, 18].

Замечание 16. Отметим, что в традиционном изложении [35, App. C(30')] параболический модуль и аргумент выражаются как в (18), что в некотором смысле обратно к нашим соглашениям.

5.2 Параболический поворот как умножение

Для определение параболического произведения мы снова будем использовать известные свойства комплексного произведения в качестве определения. Действительно, параболическое вращение можно рассматривать как умножение на унимодулярное скаляр, таким образом мы приходим к следующему

Определение 17. Произведение двух векторов w_1 и w_2 определяется такими двумя условиями:

1. $\arg^{(t)}(w_1 w_2) = \arg^{(t)} w_1 + \arg^{(t)} w_2$;
2. $|w_1 w_2|^{(t)} = |w_1|^{(t)} \cdot |w_2|^{(t)}$.

Параболическое сопряжение так же требует специального определения, которое основано на изменении знака аргумента.

Определение 18. Сопряжённый вектор задаётся равенством:

$$\overline{u + \varepsilon v} = -u + \varepsilon v. \quad (27)$$

Очевидно, мы имеем следующие свойства сопряжения: $|\overline{w}|^{(t)} = |w|^{(t)}$ и $\arg^{(t)} \overline{w} = -\arg^{(t)} w$. Определения 12, 14 и 17 совместно задают значение для произведения двух векторов единственным образом.

Предложение 19. *Параболическое произведение двух векторов имеет следующие явные выражения:*

$$\text{для } N : \quad (u, v) * (u', v') (u + u', (u + u')^2 - (u^2 - v)(u'^2 - v')); \quad (28)$$

$$\text{для } N' : \quad (u, v) * (u', v') = \left(\frac{uu'}{u + u'}, \frac{(v + 1)(v' + 1)}{(u + u')^2} - 1 \right). \quad (29)$$

Несмотря на необычный вид оба произведения имеют хорошо знакомые свойства:

Предложение 20. *Оба произведения (28) и (29) удовлетворяют таким условиям:*

1. Они коммутативны и ассоциативны;
2. Соответствующие параболические повороты (22) и (24) совпадают с умножением на унимодулярный вектор.
3. Значение произведения $w_1 \bar{w}_2$ не изменится если оба вектора w_1 и w_2 будут повернуты на тот же угол соответствующим вращением (22) или (24).
4. Для любого вектора w выполняется тождество:

$$|w \bar{w}| = |w|^2.$$

В частности, свойство (3) из этого Предложения будет важно для скалярного произведения (38), по отношению к которому наши индуцированные представления будут унитарны.

6 Инвариантная линейная алгебра

Теперь мы хотим определить линейную структуру на \mathbb{R}^2 , которая будет совместима с параболическим умножением из предыдущей секции и, потому, с параболическими вращениями, см. Предложение 20(2). Умножение на положительный действительный скаляр задаётся прямолинейно: оно не должно менять аргумент и соответственно масштабировать норму вектора. Поэтому для $a > 0$ мы имеем:

$$a \cdot (u, v) = (u, av + u^2(1 - a)) \quad \text{для } N, \quad (30)$$

$$a \cdot (u, v) = \left(u, \frac{v + 1}{a} - 1 \right) \quad \text{для } N'. \quad (31)$$

С другой стороны, сложение векторов может быть задано несколькими существенно отличными свойствами. Мы приведём две возможности: тропическую и экзотическую.

6.1 Тропическая форма

Введём лексиграфический порядок на \mathbb{R}^2 :

$$(u, v) \prec (u', v') \quad \text{тогда и только тогда,} \quad \begin{cases} \text{когда } u < u'; \\ \text{или } u = u', v < v'. \end{cases}$$

Соответственно мы можем задать функции \min и \max для любой пары векторов из \mathbb{R}^2 соответственно. Тогда сумма двух векторов определяется как их минимум (или максимум). Такое же определение используется в *тропической математике*, так же известной как «деквантизация» Маслова или алгебры \mathbb{R}_{\min} и \mathbb{R}_{\max} , см. превосходный обзор [27]. Легко проверить, что такое сложение совместно с умножением (30)–(31) удовлетворяет дистрибутивному закону и потому будет инвариантно относительно параболических вращений. Это направление выглядит интересным и обещающим, однако мы больше не будем его рассматривать в данной работе.

6.2 Экзотическая форма

Сложение двух векторов может быть задано одной формулой для обеих подгрупп N и N' таким образом, что их отличие будет спрятано в соответствующих Определениях 12 (норма) и 14 (аргумент).

Определение 21. Параболическое сложение векторов задаётся в (экзотической) форме:

$$\arg^{(t)}(w_1 + w_2) = \frac{\arg^{(t)} w_1 \cdot |w_1|^{(t)} + \arg^{(t)} w_2 \cdot |w_2|^{(t)}}{|w_1 + w_2|^{(t)}}, \quad (32)$$

$$|w_1 + w_2|^{(t)} = |w_1|^{(t)} \pm |w_2|^{(t)}, \quad (33)$$

где штрихованные версии формул соответствуют подгруппе N' .

На первый взгляд формула для нормы суммы (33) выглядит слишком тривиально. В её защиту мы можем отметить, что она располагается как раз между эллиптическим $|w + w'| \leq |w| + |w'|$ и гиперболическим $|w + w'| \geq |w| + |w'|$ неравенствами треугольника для норм.

Правило для сложения аргументов (32) тоже не является произвольным. Из теоремы синусов евклидовой геометрии мы можем получить

$$\sin(\phi - \psi') = \frac{|w| \cdot \sin(\psi - \psi')}{|w + w'|}, \quad \sin(\psi' - \phi) = \frac{|w'| \cdot \sin(\psi - \psi')}{|w + w'|},$$

где $\psi^{(t)} = \arg w^{(t)}$ и $\phi = \arg(w + w^{(t)})$. Используя значение (16) параболического синуса $\sin_p \theta = \theta$ мы получаем (32).

Аккуратность в обращении с нулями в знаменателе выражения (32) достигается при переходе от вектора $w = u + \varepsilon v$ к паре однородных полярных координат $[a, r] = [|w|^{(t)} \cdot \arg^{(t)} w, |w|^{(t)}]$ (штрихованная версия соответствует подгруппе N'). Тогда сложение задаётся покомпонентно в однородных координатах:

$$w_1 + w_2 = [a_1 + a_2, r_1 + r_2], \quad \text{где } w_i = [a_i, r_i].$$

Умножение из Определения 17 в однородных координатах есть:

$$w_1 \cdot w_2 = [a_1 r_2 + a_2 r_1, r_1 r_2], \quad \text{где } w_i = [a_i, r_i].$$

Таким образом, однородные координаты линеаризуют сложение (32)–(33) и умножение на скаляр (30). Переход к более прозрачным координатам может быть рассмотрен в контексте бирациональной геометрии [23].

Параболическое сложение определяется условиями (32)–(33) однозначно, но явные формулы достаточно сложны. Во многих случаях без них можно обойтись используя следующие свойства:

Предложение 22. Векторное сложение для подгрупп N и N' заданное выражением (32)–(33) обладает следующими свойствами:

1. Они коммутативны и ассоциативны.
2. Выполняется дистрибутивный закон для умножений (28) и (29); соответственно:
3. Сложения перестановочны с поворотами;
4. Выполняются дистрибутивные законы для умножения на скаляр (30) и (31) соответственно:

$$a \cdot (w_1 + w_2) = a \cdot w_1 + a \cdot w_2, \quad (a + b) \cdot w = a \cdot w + b \cdot w.$$

Что бы завершить построение действительного векторного пространства нам надо описать нулевой и обратный вектора. В частности, мы определим обратный элемент как имеющий тот же аргумент и противоположную норму.

Предложение 23.

(N) Нулевой вектор есть $(0, 0)$ и соответственно противоположный элемент для (u, v) есть $(u, 2u^2 - v)$.

(N') Нулевой вектор есть $(\infty, -1)$ и соответственно противоположный элемент для (u, v) есть $(u, -v - 2)$.

Теперь используя равенство $-w = (-1) \cdot w$ можно убедиться, что та же формула (30) и (31) может быть использована для умножения на отрицательные действительные скаляры.

Замечание 24. Обычная линейная структура является неподходящей и в других вопросах, например, в кажущейся «неконформности» длин из параболического фокуса, то есть с параметром $\dot{\sigma} = 0$ в [19, Prop. 3]. Однако подходящая выбор определений восстанавливает искомые свойства.

Первоначальное определение конформности [19, Defn. 5.4] рассматривало традиционный предел $y' \rightarrow y$ вдоль прямых линий, т.е. «спиц» изображённых на Рис. 1. Хорошо известно, что этот подход полностью работает в эллиптическом и гиперболическом случае. Однако, в параболическом случае вертикальные линии больше подходят на роль «спиц», см. Рис. 2(P) и (P'), таким образом обоснованно рассматривать конформный предел вдоль них [19, Prop. 5.2].

7 Индуцированные представления

Теперь мы можем применить гиперкомплексные характеры построенные выше к индуцированным представлениям заданным формулой (13). Заметим, что только компактная подгруппа K требует комплексно-значных характеров, так как для однозначности представления образ матрицы из (4) при $t = 2\pi$ должен быть единицей. Для подгрупп N' и A' такого ограничения нет и мы можем рассмотреть характеры всех трёх типов: эллиптические, параболические и гиперболические. Более того, параболические характеры могут быть любого типов: алгебраические (15) или одного из геометрических (22) и (24). Таким образом мы имеем семь существенно разных типов индуцированных представлений, или даже одиннадцати (если отличать разновидности параболических характеров).

Пример 25. Рассмотрим подгруппу $H = K$, как отмечено выше, в силу её компактности характер может быть только комплексно-значным. Тогда унитарный характер χ_k имеет вид:

$$\chi_k \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = e^{-ikt}, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}. \tag{34}$$

Используя явный вид (9) отображения s вычисляем функцию r заданную в (12):

$$r \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{c^2 + d^2}} \begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix} \in K.$$

Тогда:

$$r(g^{-1} * s(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{(cu + d)^2 + (cv)^2}} \begin{pmatrix} cu + d & -cv \\ cv & cu + d \end{pmatrix}, \quad \text{где } g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Подставляя это выражение в (34) и комбинируя с мёбиусовым преобразованием аргумента (11) получаем явную реализацию ρ_k индуцированного представления (13):

$$\rho_k(g)f(w) = \frac{|cw + d|^k}{(cw + d)^k} f\left(\frac{aw + b}{cw + d}\right), \quad \text{где } g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad w = u + iv. \quad (35)$$

Это представление действует на комплексно-значных функциях в верхней полуплоскости $\mathbb{R}_+^2 = SL_2(\mathbb{R})/K$ и является унитарным из дискретной серии [25, § IX.2].

Предложение 26. Пусть $f_k(w) = \frac{|w-i|^k}{(w-i)^k}$ for $k = 2, 3, \dots$, тогда

1. f_k является собственным вектором операторов $\rho_k(h)$, для любого $h \in K$, с собственным значением $\chi_k(h)$ [25, § IX.2].
2. Функция $K(z, w) = \rho_k(s(z))f_k(w)$, где $s(z)$ определяется в (9), есть воспроизводящее ядро Бергмана в верхней полуплоскости [13, § 3.2] умноженное на $\left|\frac{z-i}{w-i}\right|^k$.

Сходным образом мы получаем ядро Коши если рассмотрим предельный случай $k = 1$ ложной дискретной серии [25, Ch. IX]. Существует много других связей представления (35) с комплексным анализом [13] и теорией операторов. К примеру, преобразования Мёбиуса операторов определяют функциональное исчисление Данфорда–Рисса и соответствующий спектр [14].

Пример 27. Для подгруппы N' возможен более широкий выбор характеров.

1. Традиционно рассматриваются комплекснозначные характеры подгруппы N' , т.е.:

$$\chi_\tau^{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = e^{i\tau t}, \quad \text{где } \tau \in \mathbb{R}. \quad (36)$$

Непосредственные вычисления в этом случае показывают, что:

$$r \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{d} & 1 \end{pmatrix} \in N'.$$

Поэтому:

$$r(g^{-1} * s(u, v)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{cv}{d+cu} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Подставляя это значение в характер (36) и соединяя с мёбиусовым преобразованием (11) получаем соответствующую реализацию формулы (13):

$$\rho_\tau^{\mathbb{C}}(g)f(w) = \exp\left(i\frac{\tau cv}{cu + d}\right) f\left(\frac{aw + b}{cw + d}\right), \quad \text{где } w = u + \varepsilon v, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Соответствующее индуцированное представление действует в пространстве комплекснозначных функций в верхней полуплоскости \mathbb{R}_+^2 , которая является подмножеством однородного пространства $SL_2(\mathbb{R})/N$ состоящего из дуальных чисел. Соседство комплексных и дуальных чисел в одном выражении является непривычным.

2. Возьмём параболический характер χ_τ алгебраического типа заданный умножением дуальных чисел (15):

$$\chi_\tau \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = e^{\varepsilon\tau t} = 1 + \varepsilon\tau t, \quad \text{где } \tau \in \mathbb{R}.$$

По прежнему подставляем в него значение (37) и получаем такое выражение:

$$\rho_\tau(g)f(w) = \left(1 + \varepsilon \frac{\tau cv}{cu + d}\right) f\left(\frac{aw + b}{cw + d}\right),$$

где w , τ и g те же что и раньше.

Это индуцированное представление действует в пространстве функций определённых на верхней полуплоскости, как подмножестве дуальных чисел, и со значениями в дуальных числах. То есть, оно использует только дуальные числа и обычные алгебраические операции над ними. Естественным образом это представление является линейным.

3. Рассмотрим параболический характер χ_τ^g заданный геометрическим действием (22). Тогда представление действует в том же пространстве, что и в последнем случае, но формула будет другой:

$$\rho_\tau^g(g)f(w) = \left(1 + \varepsilon \frac{2\tau cv}{cu + d}\right) f\left(\frac{aw + b}{cw + d}\right) + \frac{\tau cv}{cu + d} + \varepsilon \frac{(\tau cv)^2}{(cu + d)^2},$$

где w , τ и g описаны выше. Это представление линейно по отношению к операциям (30), (32) и (33).

Все характеры использованные в предыдущих примерах являются унитарными: два первых в традиционном смысле, последний — как объяснено в Предложении 20. Соответственно общая конструкция индуцированных представлений [12, § 13.2] гарантирует унитарность полученных представлений в соответствующих смыслах.

Теорема 28. *Все три индуцированных представления $\rho_\tau^{\mathbb{C}}$, ρ_τ и ρ_τ^g группы $SL_2(\mathbb{R})$ из Примера 27 являются унитарными в пространстве функций заданных на верхней полуплоскости \mathbb{R}_+^2 как подмножестве дуальных чисел с внутренним произведением:*

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}_+^2} f_1(w) \bar{f}_2(w) \frac{du dv}{v^2}, \quad \text{где } w = u + \varepsilon v, \quad (38)$$

и мы используем

1. сопряжение и умножение значений функций в алгебре комплексных и дуальных чисел для представлений $\rho_\tau^{\mathbb{C}}$ и ρ_τ соответственно;
2. сопряжение (27) и умножение (28) значений функций для представления ρ_τ^g .

Внутреннее произведение (38) положительно определено для представления $\rho_\tau^{\mathbb{C}}$, но не для двух других. Соответствующие пространства с вырожденным внутренним произведением являются параболическими аналогами пространств Крейна [1]. Сами пространства Крейна в нашей классификации являются гиперболическими.

8 Принцип сходства и соответствия: операторы повышения

Приведённые выше наблюдения позволяют сформулировать следующий эмпирический принцип, который должен представлять эвристический интерес:

- Принцип 29** (Сходство и соответствие). 1. Подгруппы K , N' и A' играют сходную роль в структуре группы $SL_2(\mathbb{R})$ и её представлений;
2. Перемена подгруппы должна производиться с одновременной соответствующей заменой гиперкомплексных единиц i , ε или j .

Безусловно, первая часть Принципа (сходство) способна вызвать удивление у любого, кто знаком с группой $SL_2(\mathbb{R})$. Однако, к настоящему моменту мы видели, что совместно со второй частью (соответствие), принцип уже проявился следующим образом:

- Действие $SL_2(\mathbb{R})$ на однородном пространстве $SL_2(\mathbb{R})/H$ для $H = K, N'$ или A' задаётся дробно-линейными преобразованиями комплексных, дуальных или двойных чисел соответственно (Предл. 5).
- Подгруппы A', N' или K изоморфны группам унитарных вращений соответствующих единичных «окружностей» на плоскостях двойных, дуальных или комплексных чисел (Предл. 9).
- Представления индуцированные с подгруппы K, N' или A являются унитарными если скалярное произведение функций определяется посредством произведения и сопряжения значений функций как комплексных, дуальных или двойных чисел (Теор. 28).

Замечание 30. Принцип сходства и соответствия близок к суперсимметрии между бозонами и фермионами в физике, но в нашем случае сходство устанавливается между тремя различными типами объектов.

Приведём ещё одну иллюстрацию Принципа. Рассмотрим алгебру Ли \mathfrak{sl}_2 группы $SL_2(\mathbb{R})$. Один из возможных базисов в \mathfrak{sl}_2 таков [31, § 8.1]:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда коммутационные соотношения будут следующими:

$$[Z, A]_+, \quad [Z, B] = -2A, \quad [A, B] = -\frac{1}{2}Z. \quad (39)$$

Пусть у нас есть представление ρ группы $SL_2(\mathbb{R})$ в пространстве V . Рассмотрим производное представление $d\rho$ алгебры \mathfrak{sl}_2 [25, § VI.1] и будем использовать обозначение $\tilde{X} = d\rho(X)$ для $X \in \mathfrak{sl}_2$. Для анализа представления ρ оказывается полезным разложить V по собственным векторам оператора \tilde{X} для некоторого $X \in \mathfrak{sl}_2$, см. Предл. 26 и ряд Тейлора в комплексном анализе.

Пример 31. Уже не должно быть удивительным, что мы собираемся рассмотреть три случая:

1. Пусть $X = Z$ будет генератором подгруппы K (4). Так как эта подгруппа компактна, то собственные вектора $\tilde{Z}v_k = ikv_k$ параметризованы дискретным параметром $k \in \mathbb{Z}$. Особую роль играют операторы L^\pm повышения/понижения [25, § VI.2], [31, § 8.2], определённые коммутационными соотношениями:

$$[\tilde{Z}, L^\pm] = \lambda_\pm L^\pm. \quad (40)$$

Таким образом L^\pm являются собственными для операторов $\text{ad}Z$ присоединённого представления \mathfrak{sl}_2 [25, § VI.2]. Важно, что вектор L^+v_k так же является собственным для \tilde{Z} :

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(L^+v_k) &= (L^+\tilde{Z} + \lambda_+L^+)v_k = L^+(\tilde{Z}v_k) + \lambda_+L^+v_k = ikL^+v_k + \lambda_+L^+v_k \\ &= (ik + \lambda_+)L^+v_k. \end{aligned}$$

Полагая $L^+ = a\tilde{A} + b\tilde{B} + c\tilde{Z}$ из коммутационных соотношений (39) и определяющего равенства (40) получаем систему уравнений:

$$c = 0, \quad 2a = \lambda_+b, \quad -2b = \lambda_+a.$$

Эта система совместима тогда и только тогда, когда $\lambda_+^2 + 4 = 0$. В этом случае операторы повышения/понижения $L^\pm = \pm i\tilde{A} + \tilde{B}$ действуют на одномерной цепочке собственных подпространств:

$$\dots \xrightleftharpoons[L^-]{L^+} V_{k-2} \xrightleftharpoons[L^-]{L^+} V_k \xrightleftharpoons[L^-]{L^+} V_{k+2} \xrightleftharpoons[L^-]{L^+} \dots$$

2. Рассмотрим случай $X = B$ генератора подгруппы A' (6). Эта подгруппа некомпактна и собственные значения для \tilde{B} могут быть произвольным числом, однако операторы повышения/понижения по прежнему могут играть важную роль [10, § II.1], [28, § 1.1]. Будем опять искать решение в форме $L_h^+ = a\tilde{A} + b\tilde{B} + c\tilde{Z}$ для коммутатора $[\tilde{B}, L_h^+] = \lambda L_h^+$. Получаем систему:

$$2c = \lambda a, \quad b = 0, \quad \frac{a}{2} = \lambda c.$$

Она совместима только если $\lambda^2 = 1$. Очевидные значения $\lambda = \pm 1$ приводят к операторам $L_h^\pm = \pm \tilde{A} + \tilde{Z}/2$, которые и используются в [10, § II.1], [28, § 1.1]. В этом случае неприводимый \mathfrak{sl}_2 -модуль представляется одномерной цепочкой собственных значений. Допуская двойные числа мы можем удовлетворить условие совместимости $\lambda^2 = 1$ дополнительными значениями $\lambda = \pm j$. Тогда возникает дополнительная пара операторов повышения/понижения $L_j^\pm = \pm j\tilde{A} + \tilde{Z}/2$, которая сдвигает собственные значения в «ортогональном» направлении к действию традиционных операторов L_h^\pm . Следовательно неприводимый \mathfrak{sl}_2 -модуль может параметризоваться уже двумерной решёткой собственных значений на плоскости двойных чисел:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \dots & & \dots & & \dots \\ & & \updownarrow L_j^\pm & & \updownarrow L_j^\pm & & \updownarrow L_j^\pm \\ \dots & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & V_{(n-2)+j(k-2)} & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & V_{n+j(k-2)} & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & V_{(n+2)+j(k-2)} & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & \dots \\ & & \updownarrow L_j^\pm & & \updownarrow L_j^\pm & & \updownarrow L_j^\pm & & \\ \dots & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & V_{(n-2)+jk} & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & V_{n+jk} & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & V_{(n+2)+jk} & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & \dots \\ & & \updownarrow L_j^\pm & & \updownarrow L_j^\pm & & \updownarrow L_j^\pm & & \\ \dots & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & V_{(n-2)+j(k-2)} & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & V_{n+j(k-2)} & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & V_{(n+2)+j(k-2)} & \xrightleftharpoons[L_h^-]{L_h^+} & \dots \\ & & \updownarrow L_j^\pm & & \updownarrow L_j^\pm & & \updownarrow L_j^\pm & & \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \end{array}$$

3. Рассмотрим, наконец, случай $X = -B + Z/2$ генератора подгруппы N' (7). По описанной ранее процедуре получаем систему:

$$b + 2c = \lambda a, \quad -a = \lambda b, \quad \frac{a}{2} = \lambda c$$

с условием совместимости $\lambda^2 = 0$. Если мы ограничимся действительным (комплексным) корнем $\lambda = 0$, то соответствующие операторы $L_p^\pm = -\tilde{B} + \tilde{Z}/2$ не будут менять собственные значения и будут бесполезны в таком контексте. Однако дуальные значения $\lambda = \pm \varepsilon$ позволяют использовать операторы $L_\varepsilon^\pm = \pm \varepsilon \tilde{A} - \tilde{B} + \tilde{Z}/2$ для построения \mathfrak{sl}_2 -модулей с одномерной цепочкой собственных значений в дуальных числах.

Замечание 32. Стоит отметить, что

- введение комплексных чисел необходимо для *существования* операторов повышения/понижения в эллиптическом случае;
- в параболическом случае введение дуальных чисел необходимо для *полезности* этих операторов;
- в гиперболическом случае двойственные числа выглядят необязательными.

Подытожим рассмотренный пример подчеркнув в нём роль принципа сходства и соответствия:

Предложение 33. Пусть вектор $X \in \mathfrak{sl}_2$ порождает подгруппу K , N' или A' , то есть векторами $X = Z$, $B - Z/2$, или B соответственно. Пусть ι есть соответствующая гиперкомплексная единица.

Тогда операторы повышения/понижения L^\pm удовлетворяющие коммутационным соотношениям:

$$[X, L^\pm] = \pm \iota L^\pm, \quad [L^-, L^+] = 2\iota X.$$

имеют вид:

$$L^\pm = \pm \iota \tilde{A} + \tilde{Y}.$$

Здесь $Y \in \mathfrak{sl}_2$ является линейной комбинацией B и Z а так же удовлетворяет следующим условиям:

- $Y = [A, X]$.
- $X = [A, Y]$.
- форма Киллинга $K(X, Y)$ [12, § 6.2] равна нулю.

Любое из приведённых выше условий совместно с $Y \in \text{span}\{B, Z\}$ определяет Y с точностью до действительного множителя.

Кажется правдоподобным, что применение Принципа сходства и соответствия не ограничивается приведёнными здесь случаями. Например, сходным образом могут быть рассмотрены операторы рождения/уничтожения для гармонического осциллятора и представлений группы Гейзенберга [22].

Заключение

Введенные индуцированные представления заслуживают пристального исследования. Среди важных вопросов можно отметить следующие:

- прояснение связи с тремя основными сериями (дискретной, непрерывной, дополнительной) представлений группы $SL_2(\mathbb{R})$ [25];
- связь со многими \mathfrak{sl}_2 модулями [10, 28] (включая новые возможности для их унитаризации);
- приложение к теории обобщённых аналитических функций [13] и уравнений в частных производных [24];
- соответствующие функциональные исчисления [14], и т.д.

Эти направления являются частями Эрлангенской программы в широком смысле [15, 21] и должны быть продолжены в последующих работах. Ожидается, что Принцип сходства и соответствия окажет направляющую роль в поисках наиболее гармоничных конструкций.

Благодарности

Автор благодарен проф. Н.А. Громову за полезное обсуждение данной работы и многочисленные ценные замечания.

Литература

- [1] Arov D.Z., Dym H. J-contractive matrix valued functions and related topics. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Vol. 116, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [2] Boccaletti D., Catoni F., Cannata R., Catoni V., Nichelatti E., Zampetti P. The mathematics of Minkowski space-time and an introduction to commutative hypercomplex numbers. Springer Verlag, 2007.
- [3] Catoni F., Cannata R., Nichelatti E. The parabolic analytic functions and the derivative of real functions // *Advances in Applied Clifford algebras* 14, 2004, N. 2, pp. 185–190.
- [4] Davis M. Applied nonstandard analysis, Wiley-Interscience [John Wiley Sons], New York, 1977.
- [5] Громов Н.А. Контракции и аналитические продолжения классических групп. Единый подход. Акад. Наук СССР Урал. Отдел. Коми Научн. Центр, Сыктывкар, 1990.
- [6] Gromov N.A., Kuratov V.V. Noncommutative space-time models // *Czechoslovak J. Phys.* 55, 2005, N. 11, pp. 1421–1426.
- [7] Gromov N.A., Kuratov V.V. Possible quantum kinematics // *J. Math. Phys.* 47, 2006, N. 1, 013502, 9.
- [8] Herranz F.J., Ortega R., Santander M. Trigonometry of spacetimes: a new self-dual approach to a curvature/signature (in)dependent trigonometry // *J. Phys. A* 33, 2000, N. 24, pp. 4525–4551. E-print: arXiv:math-ph/9910041.
- [9] Herranz F.J., Santander M. Conformal compactification of spacetimes // *J. Phys. A* 35, 2002, N. 31, pp. 6619–6629. E-print: arXiv:math-ph/0110019.
- [10] Roger Howe and Eng Chye Tan Non-abelian harmonic analysis: Applications of $SL(2, \mathbb{R})$, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [11] Khrennikov A., Segre G. Hyperbolic quantization. Quantum probability and infinite dimensional analysis, 2007, pp. 282–287.
- [12] Kirillov A.A. Elements of the theory of representations, Springer-Verlag, Berlin, 1976. Translated from the Russian by Edwin Hewitt, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 220.
- [13] Kisil V.V. Analysis in $\mathbb{R}^{1,1}$ or the principal function theory // *Complex Variables Theory Appl.* 40, 1999, N. 2, 93–118. E-print: arXiv:funct-an/9712003.
- [14] Kisil V.V. Spectrum as the support of functional calculus // *Functional analysis and its applications*, 2004, pp. 133–141. E-print: arXiv:math.FA/0208249.
- [15] Kisil V.V. Erlangen program at large–0: Starting with the group $SL_2(\mathbb{R})$ // *Notices Amer. Math. Soc.* 54 (2007), N. 11, pp. 1458–1465. E-print: arXiv:math/0607387
- [16] Kisil V.V. Two-dimensional conformal models of space-time and their compactification // *J. Math. Phys.* 48, 2007, N. 7, 073506, 8. E-print: arXiv:math-ph/0611053
- [17] Kisil V.V. Erlangen program at large–2 1/2: Induced representations and hypercomplex numbers, submitted (2009). E-print: arXiv:0909.4464.
- [18] Kisil V.V. Erlangen program at large–2: Inventing a wheel. The parabolic one. Trans. Inst. Math. of the NAS of Ukraine, 2010, pp. 89–98. E-print: arXiv:0707.4024.

- [19] Kisil V.V. Erlangen program at large-1: Geometry of invariants, SIGMA, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 6, 2010, N. 076, 45 pages. E-print: arXiv:math.CV/0512416.
- [20] Kisil V.V. Erlangen Programme at Large 3.1: Hypercomplex representations of the Heisenberg group and mechanics, submitted (2010). E-print: arXiv:1005.5057.
- [21] Kisil V.V. Erlangen Programme at Large: A brief outline (2010). E-print: arXiv:1006.2115.
- [22] Kisil V.V. Erlangen Programme at Large 3.2: Ladder Operators in Hypercomplex Mechanics, Acta Polytechnica, v. 51, 2011, N. 4, pp. 44–53, E-print: arXiv:1103.1120.
- [23] Kollar J., Mori S. Birational geometry of algebraic varieties. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti. Paperback reprint of the hardback edition 1998., Cambridge Tracts in Mathematics 134. Cambridge: Cambridge University Press. viii, 254 p., 2008 (English).
- [24] Kononenko N. Projective structures and algebras of their differential invariants // *Acta Applicandae Mathematicae* 109, 2010, N. 1, pp. 87–99.
- [25] Lang S. $SL_2(\mathbb{R})$, Graduate Texts in Mathematics, vol. 105, Springer-Verlag, New York, 1985. Reprint of the 1975 edition.
- [26] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. Второе издание, Москва, “Наука”, 1977.
- [27] Litvinov G.L. The Maslov dequantization, and idempotent and tropical mathematics: a brief introduction, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 326, 2005, N. Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 13, pp. 145–182, 282. E-print: arXiv:math/0507014.
- [28] Mazorchuk V. Lectures on sl_2 -modules, World Scientific, 2009.
- [29] Пименов Р.И. Единая аксиоматика пространств с максимальной группой движений // *Литовский математический сборник*, 1965, Т. 5, № 3.
- [30] Понтрягин Л.С. Обобщения чисел. Библиотека “Квант”, том 54, “Наука”, Москва, 1986.
- [31] Taylor M.E. Noncommutative harmonic analysis. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 22, American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- [32] Ulrych S. Relativistic quantum physics with hyperbolic numbers // *Phys. Lett. B* 625 (2005), no. 3-4, 313–323.
- [33] Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? Москва, “Наука”, 1987. В прил.: “Нестандартное” построение степного ряда / В. Г. Кановой.
- [34] Vignaux J.C., A. Duranona y Vedia Sobre la teoria de las funciones de una variable compleja hiperbolica., Univ. nac. La Plata. Publ. Fac. Ci. fis. mat. 104, 1935, pp. 139–183 (Spanish). Zbl 62.1122.03.
- [35] Yaglom I.M. A simple non-Euclidean geometry and its physical basis, Springer-Verlag, New York, 1979.

INDUCED REPRESENTATIONS AND HYPERCOMPLEX NUMBERS

V.V. Kisil

University of Leeds, Leeds, Great Britain

kisilv@maths.leeds.ac.uk

We review the construction of induced representations of the group $G = SL_2(\mathbb{R})$. Firstly we note that G -action on the homogeneous space G/H , where H is any one-dimensional subgroup of $SL_2(\mathbb{R})$, is a linear-fractional transformation on hypercomplex numbers. This observation can be extended to further correspondences between structural components of $SL_2(\mathbb{R})$ and hypercomplex systems. Thus we investigate various hypercomplex characters of subgroups H . In particular we give examples of induced representations of $SL_2(\mathbb{R})$ on spaces of hypercomplex valued functions, which are unitary in some sense.

Key Words: induced representation, unitary representations, $SL(2, \mathbb{R})$, semisimple Lie group, complex numbers, dual numbers, double numbers, Möbius transformations, split-complex numbers, parabolic numbers, hyperbolic numbers, raising/lowering operators, creation/annihilation operators, tropical mathematics.

ЭКСТРАВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП В ТЕОРИИ ПОЛЯ

С.С. Кокарев

НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

Российский научно-образовательный центр "Логос", Ярославль, Россия

logos-center@mail.ru

В статье формулируется естественный алгоритм вычисления фундаментальных констант и лагранжианов в рамках любой фундаментальной теории, выводимой из вариационного принципа. Мы иллюстрируем идею метода примерами из классической механики, обобщенных теорий гравитации, единых \hbar -голоморфных теорий поля и многомерных теоретико-полевых моделей. Статья в значительной степени имеет поисковый характер.

Ключевые слова: экстравариационный принцип, общая теория поля, фундаментальные константы, лагранжиан.

1 Введение

Практически любая физическая теория содержит неопределяемые из самой теории параметры — эмпирические константы модели или фундаментальные физические константы. Так, классическая электродинамика содержит две фундаментальные константы: e и c , квантовая электродинамика содержит три константы: e , \hbar , c , а единая теория электрослабого взаимодействия — около 20 констант. Ньютоновская теория гравитации содержит одну константу G , а эйнштейновская ОТО — две константы G и c . Механика Ньютона не содержит фундаментальных констант¹. Следует отметить, что в вычислениях константы модели могут группироваться в определенные типичные для данной теории комбинации, которые и определяют экспериментально наблюдаемые величины. Такими комбинациями, к примеру, являются постоянная тонкой структуры $\alpha \equiv e^2/\hbar c$ в квантовой электродинамике и эйнштейновская гравитационная постоянная $8\pi G/c^4$ в ОТО.

Как правило, константы модели определяются из экспериментальных данных. Такой подход, однако, свидетельствует о принципиальной неполноте рассматриваемой теории. Было бы совершенно естественно ожидать, что полная фундаментальная "теория всего" (если она вообще существует!) должна давать средства для вычисления всех своих существенных параметров, т. е. тех, которые определяют экспериментально наблюдаемые величины. Более того, фундаментальная теория природы не должна содержать произвола в выборе некоторых фундаментальных зависимостей, определяющих динамические уравнения теории, например, вид потенциальной функции или даже вид лагранжиана.

В настоящей статье рассматривается одна из естественных возможностей решения этих задач, которая в принципиальном отношении существует в любой физической теории, допускающей вариационную формулировку. По сути дела, предлагается "продолжить" задачу оптимизации функционала действия по отношению к динамическим переменным на нединамические степени свободы теории — фундаментальные константы и сам лагранжиан. Для того, чтобы различать стандартную задачу на экстремум от оптимизации по константам и лагранжианам, мы будем называть последнюю процедуру задачей на суперэкстремум. Мы увидим, что задача на суперэкстремум имеет содержательное решение далеко не всегда. По самой идее такая задача вполне оправдана лишь в теориях, типа "теории всего", в которых суперэкстремум реализует некий универсальный и глобальный "телеологический принцип".

¹Что лишний раз подтверждает тезис о том, что законы механики Ньютона на самом деле являются принципами [1].

2 Супервариационный принцип для фундаментальных констант

Опишем общую идею задачи на суперэкстремум для фундаментальных констант. Рассмотрим действие вида $\mathcal{S}_\alpha[\phi]$ для некоторой фундаментальной теории, где ϕ — коллективный символ для набора динамических переменных (относящихся к частицам, полям и т.д.), а α — коллективный символ для набора фундаментальных констант теории. Пусть $\phi_\beta(\alpha)$ — решение уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\delta_\phi \mathcal{S}_\alpha[\phi] = 0,$$

с некоторыми начально-краевыми условиями, фиксированными посредством набора параметров β . Подставляя это решение обратно в действие (и регуляризуя результат, если это необходимо), мы получаем функцию многих переменных вида:

$$\Phi(\alpha, \beta) \equiv \mathcal{S}_{\text{reg } \alpha}[\phi_\beta(\alpha)]. \quad (2.1)$$

Ключевая идея излагаемого нами супервариационного принципа заключается в минимизации функции (2.1) по отношению к набору переменных α , для того чтобы получить выражения для набора параметров α или его части:

$$\alpha = \alpha_0(\beta), \quad (2.2)$$

связывающие значения фундаментальных констант с параметрами граничных условий.

Более кардинальный шаг заключается в минимизации (2.1) по отношению к полному набору переменных (α, β) , что в принципе определяет как существенные фундаментальные постоянные, так и граничные условия "из ничего".

2.1 Пример: гармонический осциллятор

В качестве простейшего примера рассмотрим гармонический осциллятор с действием

$$\mathcal{S}[x(t)] = \int \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \right] dt. \quad (2.3)$$

Общее решение уравнений движения, вытекающих из (2.3) хорошо известно:

$$x_0(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{k/m}, \quad (2.4)$$

где m — масса осциллятора, k — параметр его жесткости, A — амплитуда, φ — начальная фаза. Первые два параметра относятся к числу "фундаментальных постоянных" модели, вторые два — к числу начально-краевых условий. Подставляя (2.4) в (2.3), получаем для функции $\Phi_\beta(\alpha)$ ($\beta = \{A, \varphi, T\}$, $\alpha = \{m, k\}$) в (2.1):

$$\Phi_{(A, \varphi, T)}(k, m) \equiv \int_0^T L(x_0(t), \dot{x}_0) dt = \quad (2.5)$$

$$\frac{kA^2}{4\omega} [\sin 2(\omega T + \varphi) - \sin 2\varphi].$$

Здесь появился еще один параметр T — "время существования" осциллятора, которое следует отнести к параметрам, задающим граничные условия (размер "пространственно-временного ящика", в котором происходит динамика системы).. Очевидно, что экстремумы по k и по A тривиальны и дают нулевое действие. Условия экстремума для параметров ω и φ принимают вид системы уравнений:

$$(\chi - 2\varphi) \cos \chi - \sin \chi + \sin 2\varphi = 0; \quad \cos \chi = \cos 2\varphi, \quad (2.6)$$

где $\chi \equiv 2(\omega T + \varphi)$. Общее решение второго уравнения имеет вид:

$$\chi_k = \pm 2\varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.7)$$

Ветвь с плюсом приводит к независимым спектру частот и спектру фаз:

$$\omega_k = \frac{\pi k}{T}; \quad \varphi_l = (2l + 1)\frac{\pi}{4}, \quad k, l \in \mathbb{Z}. \quad (2.8)$$

Ветвь с минусом приводит к спектру частот и спектру фаз на двумерной целочисленной решетке:

$$\omega_{kl} = \frac{\chi_{kl} - \pi k}{T}; \quad \varphi_{kl} = \pi k - \frac{\chi_{kl}}{2}, \quad k, l \in \mathbb{Z}, \quad (2.9)$$

где χ_{kl} — один из корней безразмерного трансцендентного уравнения:

$$\tan \chi = \chi - \pi k. \quad (2.10)$$

Разумеется, для обычного осциллятора в виде грузика на нити или на пружинке у нас нет никаких оснований применять супервариационный принцип, поскольку такого рода осцилляторы искусственны и их параметры в определенном смысле случайны. Однако для "фундаментальных осцилляторов" в виде частиц или квазичастиц, рассмотренная нами супервариационная процедура дает в принципиальном (но, конечно, не количественном!) плане правдоподобные результаты: элементарные возбуждения связаны с глобальными фундаментальными характеристиками системы. Более того, спектр колебаний такого осциллятора согласно (2.8)-(2.9) оказывается квантованным, причем в формуле (2.8) он, как и в квантовой механике, эквидистантен, а в формуле (2.9) при возрастании абсолютной величины l он очень быстро становится таковым:

$$\omega_{kl} \stackrel{\text{as}}{\approx} \omega_0 \left(l - k - \frac{1}{2} \right), \quad (2.11)$$

где $\omega_0 = \pi/T$.

2.2 Задача Кеплера

Рассмотрим действие для центральной задачи двух тел в кулоновом поле притяжения:

$$\mathcal{S}[\vec{r}(t)] = \int \left[\frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{\alpha}{r} \right] dt, \quad (2.12)$$

где α — абсолютная величина константы взаимодействия. Общее решение уравнений движения, вытекающих из (2.12), описывается соотношениями:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad p = \frac{L^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}, \quad (2.13)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}. \quad (2.14)$$

Здесь p и ε — параметр и эксцентриситет орбиты, выражающиеся по приведенным выше формулам через константы задачи и интегралы момента L и полной энергии E . Теперь параметры α и m относятся к числу "фундаментальных постоянных", а L и E — к начальным данным. Рассмотрим подробно случай эллиптических орбит ($0 < \varepsilon < 1$ или $E < 0$),

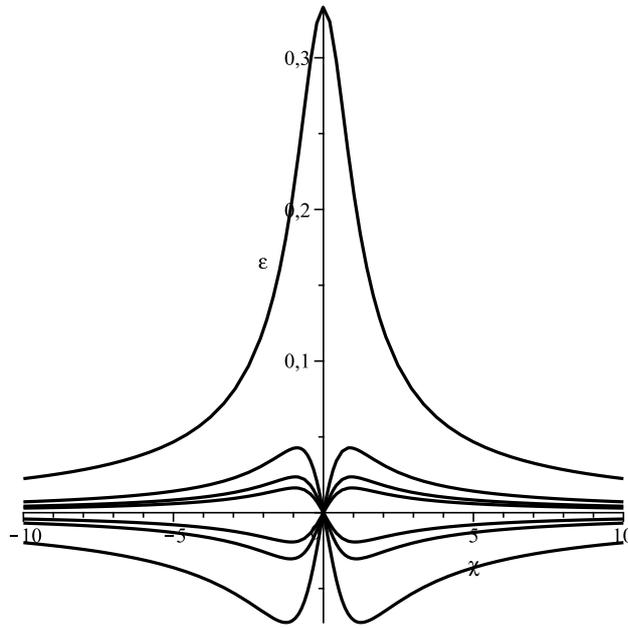


Рис. 1: Ветви зависимости $\varepsilon_k(\chi)$ для $k = 0$ (четная функция с максимумом), $k = \pm 1, \pm 2$ (нечетные функции, прижимающиеся к оси абсцисс с ростом k .)

который не требует регуляризации действия. Подставляя (2.13) в (2.12) и переходя с помощью (2.14) от интегрирования по t к интегрированию по φ , получаем для функции Φ в (2.1):

$$\Phi_{(L,\phi,E)}(m, \alpha) = \int_0^\phi \frac{L \varepsilon^2 + 3 + 4\varepsilon \cos \varphi}{2(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi = \frac{L}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left(3 \arctan \chi + \frac{\varepsilon \chi}{1 + \chi^2} \right), \quad (2.15)$$

где

$$\chi = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \tan \frac{\phi}{2}.$$

Таким образом, все параметры скомбинировались в один несущественный размерный нормировочный параметр L и два безразмерных параметра χ и ε . При монотонном изменении ϕ от $-\pi$ до π параметр χ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. При дальнейшем монотонном увеличении угла φ в знаменателе (2.15) появляется следующая ветвь арктангенса. Таким образом действие для частицы в кулоновом поле бесконечнолистно. Уравнения на экстремум (2.15) по ε и по χ принимают соответственно вид:

$$3\varepsilon \arctan \chi + \frac{\chi}{1 + \chi^2} = 0; \quad 3(1 + \chi^2) + \varepsilon(1 - \chi^2) = 0. \quad (2.16)$$

Выражая χ через ε из второго уравнения, находим:

$$\chi^2 = -\frac{3 + \varepsilon}{3 - \varepsilon} < 0 \quad (2.17)$$

при $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Таким образом, суперэкстремум действия по χ достигается при чисто мнимом значении χ . В задачах на обычный экстремум такой результат не имел бы смысла, однако в нашем случае мы вправе допустить, что "истинные" значения одних фундаментальных констант могут достигаться при комплексных значениях других параметров. Полагая $\chi = i\psi$ в (2.17) и первом уравнении (2.16), переходя в нем к гиперболическому

арктангенсу и сокращая на мнимую единицу, приходим к следующему трансцендентному уравнению на ψ :

$$\operatorname{Arcth}\psi = \frac{\psi(1 + \psi^2)}{9(1 - \psi^2)^2}, \quad (2.18)$$

которое имеет ровно два противоположных решения: $\psi_{\pm} \approx \pm 0.797$. Подставляя это значение в (2.17), находим $\varepsilon \approx -0.67$.

Если же игнорировать суперэкстремум по переменной χ , то получаем следующий спектр значений ε :

$$\varepsilon_k(\chi) = -\frac{\chi}{3(1 + \chi^2)(\arctan \chi + \pi k)}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.19)$$

где мы явно указали ветви арктангенса посредством целочисленного параметра k . Характерный вид зависимостей $\varepsilon_k(\chi)$, которые напоминают зонный спектр в физике твердого тела, представлены на рисунке 1.

2.3 Вращающиеся заряженные источники в ОТО

Применим изложенные выше идеи суперэкстремума к некоторым хорошо известным точным решениям ОТО. Нетрудно понять, что попытка отыскать суперэкстремальные значения параметров Керровской (а значит и шварцшильдовской) черной дыры (их два — параметр массы M и параметр вращения a), заведомо приведет к неудаче, поскольку на вакуумных решениях эйнштейновской ОТО лагранжиан гравитации $R = 0$. Этот аргумент не срабатывает для электровакуумных решений: хотя в электровакууме $R = 0$, лагранжиан электровакуумного решения будет отличным от нуля, поскольку имеется вообще говоря отличный от нуля вклад в него электромагнитного поля $-(1/16\pi)F^2$. Однако, как показывает простое вычисление, регуляризованное действие для простейшего электровакуумного решения — метрики Райсснера-Нордстрема, описывающей пространство-время невращающейся электрически-заряженной черной дыры, имеет следующий тривиальный вид:

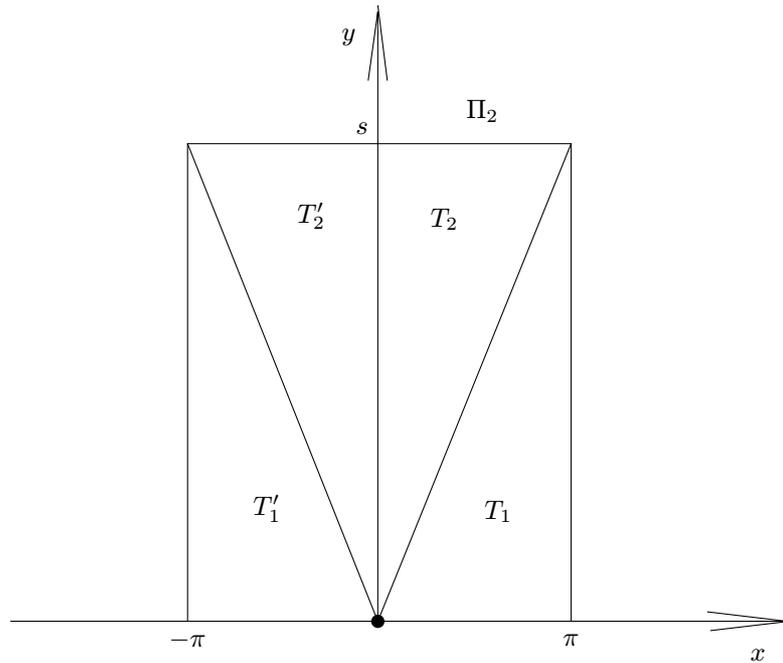
$$S_{R-N} = \frac{Q^2}{2R}T,$$

где R и T — параметры регуляризации, имеющие смысл размеров "пространственно-временного ящика", в котором заключена заряженная черная дыра, Q — параметр заряда. Все параметры скомбинировались в тривиальную мультипликативную комбинацию, минимизация по которым приведет к тривиальному результату: невращающиеся заряженные черные дыры должны отсутствовать!

Остановимся подробнее на стационарной черной дыре Керра-Ньюмена, представляющей собой общерелятивистский "симбиоз" решений Керра и решения Райсснера-Нордстрема. Такая черная дыра характеризуется уже тремя параметрами M, a, Q , которые нетривиально взаимодействуют и приводят к действию, которое имеет нетривиальные суперэкстремумы. Мы не приводим здесь явный вид метрики Керра-Ньюмена, который нам здесь не потребуется (вывод этой метрики вместе с обсуждением ее многих замечательных свойств можно найти в монографии [2]). Все, что нам нужно — это вычислить интеграл:

$$S_{K-N} = -\frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} F^2 \sqrt{-g} dt \wedge dr \wedge d\theta \wedge d\varphi, \quad (2.20)$$

где компоненты тензора электромагнитного поля представляют собой электромагнитную часть решения Керра-Ньюмена. Опуская промежуточные детали, связанные с подстанов-

Рис. 2: Область интегрирования Π_2 .

кой компонент² F в действие (2.20), приходим к выражению:

$$S_{\text{K-N}} = -\frac{Q^2}{8} T \int_{\Pi_1} \frac{r^4 + a^4 \cos^4 \theta - 6a^2 r^2 \cos^2 \theta}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^3} dr \sin \theta d\theta \quad (2.21)$$

$$= -\frac{Q^2}{8a} T \int_{\Pi_2} \frac{x^4 + y^4 - 6x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^3} dx dy.$$

Здесь T — времениподобный размер "пространственно-временного ящика", область интегрирования Π_1 на плоскости (θ, r) представляет собой прямоугольник с вершинами в точках $(\pi, 0)$, (π, R) , $(-\pi, R)$, $(-\pi, 0)$, а область интегрирования Π_2 на плоскости (x, y) ($x = R/a$, $y = -\cos \theta$) представляет собой прямоугольник с вершинами в точках $(1, 0)$, $(1, s)$, $(-1, s)$, $(-1, 0)$. Как и ранее, R — параметр регуляризации, $s = R/a$. В силу четности подынтегрального выражения интеграл (2.21) равен удвоенному интегралу, вычисленному по половине прямоугольника Π_2 , лежащей в области $x \leq 0$. Переходя в этом интеграле к полярной системе координат $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, приходим к интегралу вида:

$$S_{\text{K-N}} = \frac{Q^2}{4a} T \int_{T_1 \cup T_2} (1 - 8 \cos^2 \phi \sin^2 \phi) \frac{d\rho}{\rho} d\phi, \quad (2.22)$$

где T_1 и T_2 — два прямоугольных треугольника, на которые разбивается область интегрирования (половина прямоугольника Π_2 — см. рис. 2).

Учитывая, что на T_1 переменная ρ меняется в пределах от 0 до $1/\cos \phi$, переменная ϕ меняется в пределах от 0 до $\arctan s$, а на T_2 переменная ρ меняется от 0 до $s/\sin \phi$, а переменная ϕ меняется от $\arctan s$ до $\pi/2$, интеграл (2.22) можно привести к сумме

²Следует иметь в виду, что у автора [2] несколько иной порядок нумерации координат: $x^0 = t$, $x^1 = \varphi$, $x^2 = r$, $x^3 = \theta$. Кроме того, автор приводит тетрадные (а не координатные) компоненты F в жестком базисе, в котором тетрадные компоненты метрики имеют лоренцев вид.

интегралов вида:

$$S_{K-N} = \frac{Q^2}{4a} T \left(\int_0^{\arctan s} \ln \epsilon \cos \phi (8 \cos^2 \phi \sin^2 \phi - 1) d\phi \right. \\ \left. + \int_{\arctan s}^{\pi/2} \ln \left[\frac{\epsilon \sin \phi}{s} \right] (8 \cos^2 \phi \sin^2 \phi - 1) d\phi \right), \quad (2.23)$$

где ϵ — параметр регуляризации со стороны малых ρ . Нетрудно видеть, что слагаемые с $\ln \epsilon$ в (2.23) собираются в одно слагаемое

$$\ln \epsilon \int_0^{\pi/2} (8 \cos^2 \phi \sin^2 \phi - 1) d\phi = \ln \epsilon \int_0^{\pi/2} \cos 4\phi d\phi,$$

которое очевидно обращается в нуль. Оставшееся регуляризованное выражение для S_{K-N} имеет вид (2.23), где нужно положить $\epsilon = 1$. Вычисляя производную dS_{K-N}/ds и приравнявая ее к нулю, приходим после элементарных тригонометрических преобразований к уравнению:

$$\frac{dS_{K-N}}{ds} = \frac{Q^2}{4a} T \frac{s^2 - 1}{(1 + s^2)^2} = 0, \quad (2.24)$$

решения которого $s = \pm 1$ и $s = \infty$. Нетрудно убедиться, что суперэкстремум действия достигается именно при $s = \pm 1$ или $a = \pm R$.

3 Супервариационная процедура для потенциала

Рассмотренные выше идеи, касающиеся фундаментальных параметров теории, нетрудно распространить также и на фундаментальные зависимости теории, типа зависимостей ее потенциала от полевых переменных.

Пусть действие некоторой полевой теории имеет вид:

$$\mathcal{S}[\phi] = \int \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) d\text{vol}, \quad (3.1)$$

где лагранжиан $\mathcal{L} = (\partial\phi)^2 - U(\phi, \partial\phi)$. Пусть следствием уравнений Эйлера-Лагранжа является интеграл (или система интегралов) вида:

$$F(\phi, \partial\phi) = 0. \quad (3.2)$$

Если интеграл (3.2) это позволяет сделать, то исключим с помощью него кинетический член в лагранжиане \mathcal{L} . Обозначая совокупность переменных, от которых зависит потенциал U через y , а остальную совокупность через x' , приведем действие (3.1) к виду:

$$\mathcal{S}[\phi]|_F = \int \mathcal{L}|_F d\text{vol} = \\ \int \mathcal{L}'(x', y, U(y), \partial U(y)) J(x', y) d\text{vol}_y \wedge d\text{vol}_{x'} \equiv \mathcal{S}'[U(y)] \quad (3.3)$$

— функционала относительно функции $\mathcal{U}(y)$. Новое действие (3.3) получается ограничением исходного действия (3.1) на интеграл (3.2) и переходом от координатных переменных

(x) к новой системе "полевых координат" (x', y) (J в (3.3) — якобиан перехода). При этом совокупность переменных x' представляет собой совокупность параметров, по которым в последнем знаке равенства в (3.3) произведено усреднение (интегрирование с регуляризацией, если она требуется). Таким образом, рассматривая теперь функционал $\mathcal{S}'[U(y)]$, приходим к уравнениям экстремума:

$$\delta_U \mathcal{S}'[U(y)] = 0, \quad (3.4)$$

определяющим потенциал с точностью до констант.

3.1 Пример 1: одномерные задачи классической механики

Попробуем определить потенциал для одномерных консервативных систем классической механики (1-мерная теория поля), которые описываются действием вида:

$$\mathcal{S}[x(t)] = \int \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \right] dt. \quad (3.5)$$

Хорошо известно, что такая система допускает интеграл энергии:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U = E = \text{const}. \quad (3.6)$$

Выражая из него кинетическую энергию и одномерный "якобиан перехода":

$$J = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2(E - U)/m},$$

приходим к новому функционалу:

$$\mathcal{S}[U] = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{E - 2U(x)}{\sqrt{E - U(x)}} dx. \quad (3.7)$$

Поскольку этот функционал не зависит от производных U' , его экстремум может достигаться лишь на некоторой постоянной³ $U = \text{const}$. Простой расчет дает: $U = 5E/6$. Подстановка в исходное действие (3.5) приводит к выражению:

$$\mathcal{S}_0 = -\frac{2}{3}ET. \quad (3.8)$$

В силу неравенств $E \geq 0$, $T > 0$ можно заключить, что исходное действие (3.5) не имеет суперэкстремума по отношению к потенциалу!

С позиций экстремального принципа этот вывод означает определенного рода искусственность физических систем с действием вида (3.5).

³Традиционная точка зрения заключается в игнорировании полных производных в лагранжианах, к которым относятся и постоянные добавки к ним. В супервариационных задачах игнорирование полных производных, вообще говоря, недопустимо, поскольку они влияют на граничные условия, которые теперь также подлежат определению.

3.2 Движение в центральном поле

Можно попытаться несколько обобщить ситуацию, рассмотренную в разделе 2.2 и в предыдущем разделе, рассмотрев движение пробной частицы в поле с центрально-симметричной потенциальной функцией $U(r)$. Вычисления и подстановки, вполне аналогичные тем, которые были выполнены в разделах 2.2 и 3.1, приводят к интегралу для действия:

$$S_c = \int_{r_1}^{r_2} \frac{E - 2U(r)}{\sqrt{(2/m)(E - U(r) - L^2/2mr^2)}} dr, \quad (3.9)$$

где были использованы интегралы энергии E и момента L :

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = E = \text{const}; \quad mr^2\dot{\phi} = L = \text{const}. \quad (3.10)$$

Выражение (3.9) можно рассматривать как функционал относительно U . Приравнявая к нулю его первую вариацию по U , получаем в качестве решения:

$$U(r) = \frac{3}{2}E - \frac{L^2}{mr^2}. \quad (3.11)$$

Роль "констант взаимодействия" в выражении (3.11) играют константы, которые традиционно понимаются как случайные константы интегрирования. Такого рода связи констант взаимодействия и констант интегрирования получаются в другом контексте в рамках обобщенных преобразований Болина [3, 4]. Для нахождения констант подставим зависимость (3.11) обратно в (3.9). В результате приходим к интегралу:

$$S_{c1} = 2L \int_s^1 \sqrt{\frac{1}{\xi^2} - 1} d\xi, \quad (3.12)$$

где $s = \epsilon/r_{\max}$ — параметр обрезания со стороны малых r (в случае $E > 0$, который мы и рассматриваем траектория представляет собой спираль, наворачивающуюся на силовой центр; при этом максимальное удаление точки от центра равно $r_{\max} = L/\sqrt{mE}$). Дифференцируя (3.12) по s и приравнявая производную к нулю, приходим к простому результату $s = 1$ или $\epsilon = L/\sqrt{mE}$.

Как и в предыдущем разделе, с позиций экстремального принципа полученные результаты следует интерпретировать как некоторую искусственность (неполноту) физических систем с действием вида (3.9).

3.3 Пример 2: суперэкстремум в теории h -поля

Обратимся к действию 2-мерной гиперболической теории поля:

$$\mathcal{S}[F, \bar{F}] = \alpha \int_{\mathcal{H}_2} \{|F_{,h}|^2 - \mathcal{U}(|F_{,\bar{h}}|^2)\} dh \wedge d\bar{h}, \quad (3.13)$$

где h, \bar{h} — гиперболически комплексно сопряженные координаты, F — гиперболический потенциал, $\mathcal{U}(X)$ — потенциальная функция, зависящая только от гиперболического квадрата модуля неголоморфности $X = N\bar{N}$, где $N = F_{,\bar{h}}$ (см. [5]). Сейчас мы покажем, что оно обеспечивает существование вполне определенного суперэкстремума, который мы найдем

с точностью до пары фундаментальных констант. В [5] показано, что уравнения Эйлера-Лагранжа, вытекающие из (3.13), допускают первый интеграл вида:

$$F_{,\bar{h}}(1 - \mathcal{U}') = \varphi(\bar{h}) \quad (3.14)$$

где $\varphi(\bar{h})$ — произвольная антиголоморфная функция двойной переменной. Из интеграла (3.14), выведенного в этой работе, можно вывести следующее выражение для квадрата модуля неголоморфности:

$$X = \frac{|\varphi|^2}{(1 - \mathcal{U}')^2}. \quad (3.15)$$

Подставляя его⁴ в действие (3.13) и переходя от переменных (h, \bar{h}) к новым переменным⁵ (X, X') , приходим к новому действию вида:

$$S'[\mathcal{U}(X)] = \int \left[\frac{|\varphi|^2}{(1 - \mathcal{U}')^2} - U \right] dX \wedge dX'.$$

Варьируя его по U и исключая $|\varphi|^2$ посредством (3.15), мы приходим к уравнению суперэкстремума теории:

$$\frac{d}{dX} \left(\frac{X}{1 - \mathcal{U}'} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Его решение имеет вид:

$$\mathcal{U}(\xi) = \mathcal{U}_0(3\xi - 2\ln(1 + \xi)), \quad \xi = X/\mathcal{U}_0 + C, \quad (3.16)$$

где \mathcal{U}_0, C — пара "фундаментальных констант" теории.

Рассмотрим статическую вселенную с 1-мерным стержнем, описанную в работе [5] в качестве примера. Прежде всего, необходимо убедиться, что отбрасывание граничных членов является законной операцией в такой вселенной. Для кинетического члена в действии (3.13) имеем цепочку равенств:

$$F_{,h}\bar{F}_{,\bar{h}} = (F\bar{F}_{,\bar{h}})_{,h} - F\bar{F}_{,\bar{h},h} = (F\bar{F}_{,\bar{h}})_{,h} - (F\bar{F}_{,h})_{,\bar{h}} + X, \quad (3.17)$$

где $X = F_{,\bar{h}}\bar{F}_{,h}$ — квадрат гиперболического модуля неголоморфности. Рассмотрим интеграл по плоскости двойной переменной от полных производных в (3.17) (т.е. от первых двух слагаемых):

$$\int_{\mathcal{H}_2} [(F\bar{F}_{,\bar{h}})_{,h} - (F\bar{F}_{,h})_{,\bar{h}}] dh \wedge d\bar{h} = \oint_{\Gamma_\infty} F \cdot \bar{F}_{,\bar{h}} d\bar{h} + F \cdot \bar{F}_{,h} dh = \oint_{\Gamma_\infty} F d\bar{F}, \quad (3.18)$$

где Γ_∞ — квадратный контур с центром в начале координат, сторонами, параллельными координатным осям и удаленными на бесконечность. Последнее равенство было получено с учетом интегральной теоремы Стокса и гиперболической дифференцируемости потенциала F . Подынтегральное выражение можно расписать следующим образом:

$$F d\bar{F} = (U + jV)(dU - j dV) = \frac{1}{2}d(U^2 - V^2) + j(V dU - U dV). \quad (3.19)$$

⁴При этом мы, как обычно игнорируем граничные члены, делая определенные предположения о поведении решений на бесконечности. Для самосогласованности суперэкстремума следовало бы проверить эти предположения для решений, вытекающих из модели с суперэкстремальным потенциалом.

⁵Таким, что $\frac{D(X, X')}{D(h, \bar{h})} = \text{const}$. Доказательство существования такой системы координат представляет собой полезное упражнение с 1-формами!

Контурный интеграл от первого слагаемого справа в (3.19) равен нулю. Для установления равенства нулю контурного интеграла от второго слагаемого в (3.19) достаточно заметить, что в рассматриваемой нами статической вселенной $dU = U_{,x} dx$, $dV = V_{,x} dx$. Таким образом интегрирование второго слагаемого по Γ_∞ фактически сводится к двукратному интегрированию некоторой функции вещественной переменной x по вещественной прямой (на самом деле по отрезку $[-L/2; L/2]$) в противоположных направлениях, что в результате даст ноль. Мы установили тем самым, что в рассматриваемой нами статической вселенной пренебрежение граничными членами в процедуре вывода суперэкстремума законно.

Подставим теперь функцию (3.16) в действие (3.13), в котором кинетический член заменен на X . Интеграл по двойной плоскости фактически сводится к интегралу по мировой ленте стержня. Переходя к переменной $\xi = x/L$, получаем:

$$S = X_0 L T \int_0^1 \left(\frac{32\xi^2(1-\xi)^2}{\cosh^2(\xi - 1/2)} - 3\eta C + 2\eta \ln \left[1 + C - \frac{16\xi^2(1-\xi)^2}{\eta \cosh^2(\xi - 1/2)} \right] \right) d\xi, \quad (3.20)$$

где $X_0 = -X(L/2)$ — значение абсолютной величины неголономности в центре стержня, $\eta = U_0/X_0$. Составляя уравнения экстремума:

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial C} = 0,$$

(они будут существенно трансцендентными), и численно решая их, приходим к паре значений "фундаментальных констант" рассматриваемой вселенной: $\eta \approx -10^{10}$, $C \approx 0.364$. Даже в рассматриваемой нами "игрушечной вселенной" мы обнаруживаем "иерархию фундаментальных констант"!

3.4 Нелинейная гравитация со скалярным полем

В этом разделе мы рассмотрим достаточно общий класс моделей, описывающих самосогласованную систему взаимодействующих нелинейных гравитационного и скалярного полей на D -мерном многообразии \mathcal{M}_D . Действие модели запишем в виде:

$$S[g, \phi] = \int_{\mathcal{M}_D} [F_1(R, \phi) + F_2(R, \phi)(\nabla\phi)^2] \sqrt{|g|} d^D x, \quad (3.21)$$

где F_1 и F_2 — пока произвольные функции пары вещественных переменных, R — скалярная кривизна многообразия, вычисленная по метрике g , ϕ — скалярное поле, ∇ — ковариантная производная, согласованная с метрикой g , $|g| = \det(g)$, $d^D x = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^D$.

Уравнения движения для действия (3.21) имеют вид:

$$G_1 + G_2(\nabla\phi)^2 + F_2 \nabla\phi \otimes \nabla\phi = 0 \quad (3.22)$$

для экстремума (3.21) по метрике и

$$\dot{F}_1 + \dot{F}_2(\nabla\phi)^2 - 2(\nabla F_2 \cdot \nabla\phi) - 2F_2 \square\phi = 0, \quad (3.23)$$

для экстремума по ϕ . Здесь и далее точка будет обозначать производную функций F_1 и F_2 по ϕ , а штрих будет обозначать производную этих функций по R . В (3.22) G_i — это обобщенные тензоры Эйнштейна, возникающие в любой нелинейной теории гравитации:

$$G_i \equiv (Rc - \nabla \otimes \nabla + g\square)F'_i - \frac{1}{2}F_i g \quad (i = 1, 2). \quad (3.24)$$

Здесь $R_{\alpha\beta}$ — тензор Риччи многообразия \mathcal{M}_D , $\square \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta$. Вычисляя след (3.22), приходим к следствию:

$$\text{Tr}G_1 + (\text{Tr}G_2 + F_2)(\nabla\phi)^2 = 0. \quad (3.25)$$

В случае "модели общего положения" скобка при $(\nabla\phi)^2$ не обращается в нуль, следовательно скаляр $(\nabla\phi)^2$ можно выразить из (3.25) и подставить в (3.21). В результате приходим к следующему действию для суперэкстремума модели:

$$S[F_1, F_2] = \int_{\mathcal{M}_D} \frac{F_1 F_2 + F_1 \text{Tr}G_2 - F_2 \text{Tr}G_1}{F_2 + \text{Tr}G_2} \sqrt{|g|} d^D x. \quad (3.26)$$

Для более явного выражения действия, пригодного для варьирования по потенциалам модели F_1 и F_2 , примем во внимание явное выражение для следа обобщенного тензора Эйнштейна:

$$\text{Tr}G_i = ((D-1)\square + R)F'_i - \frac{D}{2}F_i. \quad (3.27)$$

Подставляя (3.27) в (3.26), приходим к действию следующего вида:

$$S[F_1, F_2] = \int_{\mathcal{M}_D} \frac{F_1 F_2 + F_1((D-1)\square + R)F'_2 - F_2((D-1)\square + R)F'_1}{(1-D/2)F_2 + ((D-1)\square + R)F'_2} \sqrt{|g|} d^D x. \quad (3.28)$$

Довольно громоздкая процедура варьирования (3.28) по F_1 и F_2 приводит к паре уравнений, которые после надлежащих преобразований можно привести к следующему компактному операторному виду:

$$\hat{\Sigma}_D \psi = -1 - \frac{D}{2} \psi, \quad (3.29)$$

$$\hat{\Sigma}_D \psi \chi = \left(1 - \frac{D}{2}\right) \psi \chi - \chi, \quad (3.30)$$

где

$$\hat{\Sigma}_D \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial R} \sqrt{|g|} ((D-1)\square + R) \quad (3.31)$$

— дифференциальный оператор 3-го порядка, а функции ψ и χ определяются формулами:

$$\psi = \frac{F_2}{(1-D/2)F_2 + ((D-1)\square + R)F'_2}; \quad (3.32)$$

$$\chi = \frac{(D/2)F_1 - ((D-1)\square + R)F'_1}{(1-D/2)F_2 + ((D-1)\square + R)F'_2} = (\nabla\phi)^2. \quad (3.33)$$

Последнее равенство следует из (3.25) и (3.27).

Обратимся к операторному уравнению (3.29). Прежде всего, вычислим значение оператора $\hat{\Sigma}_D$ на 1:

$$\hat{\Sigma}_D 1 = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial R} \sqrt{|g|} ((D-1)\square + R) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial R} \sqrt{|g|} R = 1 + \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial \ln R}. \quad (3.34)$$

Наложим теперь калибровочное условие $|g| = 1$ на координаты многообразия. Оно соответствует специальной системе координат, в которой физический объем совпадает с координатным, а его возможность связана с относительной тензориальностью величины детерминанта метрики. Тогда из (3.34) получим:

$$\hat{\Sigma}_D 1 = 1. \quad (3.35)$$

Записав уравнение (3.29) в виде рекуррентного соотношения

$$\psi = -\frac{2}{D}(1 + \hat{\Sigma}_D \psi),$$

приходим в выбранной калибровке с учетом (3.35) и линейности оператора $\hat{\Sigma}_D$ к цепочке равенств:

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{2}{D}(1 + \hat{\Sigma}_D \psi) = -\frac{2}{D} + \left(-\frac{2}{D}\right)^2 \hat{\Sigma}_D(1 + \hat{\Sigma}_D \psi) = \\ \dots &= -\frac{2}{D} + \left(-\frac{2}{D}\right)^2 + \left(-\frac{2}{D}\right)^3 + \dots + \left(-\frac{2}{D}\right)^k (1 + \hat{\Sigma}_D^k \psi). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Решение, для которого $\Sigma_D^\infty \psi < \infty$, легко получается из (3.36) суммированием геометрической прогрессии: $\psi = \psi_0 = -2/(2 + D)$. Тот факт, что полученное постоянное значение ψ является решением (3.29) в выбранной калибровке, проверяется и непосредственно подстановкой в (3.29). Разумеется, вопрос о существовании других решений остается открытым. Теперь подставляя решение $\psi = \psi_0$ в (3.30), получаем более простое операторное уравнение для χ :

$$\hat{\Sigma}_D \chi = 2\chi. \quad (3.37)$$

С учетом определений (3.32) и вида решения ψ_0 , приходим теперь к следующим уравнениям на F_1 и F_2 , обеспечивающим суперэкстремум действия (3.28) в калибровке $|g| = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial R}((D-1)\square + R)\chi = 2\chi, \quad (3.38)$$

$$\chi = \frac{[2((D-1)\square + R)F'_1 - DF_1]}{(D+2)F_2} = (\nabla\phi)^2; \quad (3.39)$$

$$((D-1)\square + R)F'_2 = -2F_2. \quad (3.40)$$

Приведем также для полноты явный вид уравнений экстремума (3.22)-(3.23):

$$(\text{Rc} - \nabla \otimes \nabla + g\square)F'_1 - \frac{1}{2}F_1g + [(\text{Rc} - \nabla \otimes \nabla + g\square)F'_2 - \frac{1}{2}F_2g] \times \quad (3.41)$$

$$\frac{[2((D-1)\square + R)F'_1 - DF_1]}{(D+2)F_2} + F_2\nabla\phi \otimes \nabla\phi = 0;$$

$$\dot{F}_1 - F_2 \frac{2((D-1)\square + R)F'_1 - DF_1}{(D+2)F_2} - 2F'_2(\nabla R \cdot \nabla\phi) - 2F'_2\square\phi = 0. \quad (3.42)$$

Система уравнений (3.38)-(3.42), рассматриваемая совместно с условием калибровки $|g| = 1$ и составляет предмет для дальнейшего исследования на суперэкстремум. Мы проведем полное исследование системы (3.38)-(3.42) для 2-мерных римановых многообразий в отдельной публикации, а здесь ограничимся частичным исследованием многообразий с $D \geq 5$, которое в достаточной мере проиллюстрирует нетривиальный характер суперэкстремальных теорий гравитации. Ограничение $D \geq 5$ связано с дополнительными калибровочными условиями, которые мы собираемся наложить для упрощения уравнений (3.38)-(3.42). Прежде всего, в предположении независимости скаляров ϕ и R выберем систему координат на многообразии \mathcal{M} таким образом, чтобы $y^1 = \phi$, $y^2 = R$, а остальные координаты подчинены единственному условию $|g| = 1$, чтобы выводы, сделанные ранее на основе этого условия, оставались в силе. В новой системе координат справедливы следующие равенства:

$$\nabla\phi \cdot \nabla\phi = g^{\phi\phi} = \chi; \quad \nabla\phi \cdot \nabla R = g^{\phi R}; \quad \nabla R \cdot \nabla R = g^{RR}. \quad (3.43)$$

Далее, наложим еще два условия:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} g^{\alpha R} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g^{\alpha\phi} = 0. \quad (3.44)$$

Наложенные условия обеспечивают простой вид волнового оператора, примененного к функциям F_i :

$$\square F_i = g^{\phi\phi} \ddot{F}_i + 2g^{R\phi} \dot{F}_i' + g^{RR} F_i''. \quad (3.45)$$

Таким образом, нам потребовалось 5 калибровочных условий, что не ограничивает общности многообразий лишь при размерности $D \geq 5$. В рассматриваемой калибровке уравнения (3.40), (3.38) принимают следующий вид:

$$(D-1)(g^{\phi\phi} \ddot{F}_2' + 2g^{R\phi} \dot{F}_2'' + g^{RR} F_2''') + R F_2' + 2F_2 = 0; \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial}{\partial R} [(D-1)(g^{\phi\phi} \dot{g}^{\phi\phi} + 2g^{R\phi} (\dot{g}^{\phi\phi})' + g^{RR} (g^{\phi\phi})'' + R g^{\phi\phi}] - 2g^{\phi\phi} = 0; \quad (3.47)$$

$$\dot{F}_1 - \dot{F}_2 g^{\phi\phi} - 2F_2' g^{\phi R} = 0. \quad (3.48)$$

Гравитационные уравнения (3.41) нам здесь не потребуются. Очевидно, что частным решением операторного уравнения (3.38) является тривиальное решение $\chi = 0$, которое дает $g^{\phi\phi} = (\nabla\phi)^2 = 0$ (изотропное скалярное поле) и тождественно удовлетворяет уравнению (3.47). Из уравнения (3.48) при $g^{\phi\phi} = 0$ выразим $g^{\phi R}$:

$$g^{\phi R} = \frac{\dot{F}_1}{2F_2'}$$

и результат подставим в (3.46) при $g^{\phi\phi} = 0$. Рассмотрим класс моделей, у которых функция F_2 удовлетворяет уравнению $F_2''' = 0$, т. е. таких, у которых F_2 является квадратичной функцией скалярной кривизны:

$$F_2 = A_2(\phi)R^2 + A_1(\phi)R + A_0(\phi). \quad (3.49)$$

Тогда компонента g^{RR} выпадает из уравнения (3.46) и оно превращается в уравнение, связывающее F_1 и F_2 :

$$(D-1) \left(\frac{2\dot{F}_1 \dot{A}_2}{2A_2 R + A_1} \right) + 4A_2 R^2 + 3A_1 R + 2A_0 = 0, \quad (3.50)$$

а система (3.46)-(3.48) в целом отщепляется от системы гравитационных уравнений. Общее решение для F_1 , вытекающее из (3.50), имеет вид:

$$F_1 = B_3(\phi)R^3 + B_2(\phi)R^2 + B_1(\phi)R + B_0(\phi) + f(R), \quad (3.51)$$

где

$$B_3 = -\frac{4}{D-1} \int \frac{A_2^2}{\dot{A}_2} d\phi; \quad B_2 = -\frac{5}{D-1} \int \frac{A_1 A_2}{\dot{A}_2} d\phi;$$

$$B_1 = -\frac{1}{D-1} \int \frac{2A_0 A_2 + 3A_1^2/2}{\dot{A}_2} d\phi; \quad B_0 = -\frac{1}{D-1} \int \frac{A_1 A_0}{\dot{A}_2} d\phi,$$

$f(R)$ — произвольная функция скалярной кривизны. Оставшиеся неопределенными функции скалярного поля A_i и B_i и функция $f(R)$ могут быть частично или полностью определены из системы гравитационных уравнений (3.41).

Таким образом, мы описали достаточно общий класс нелинейных моделей гравитации с изотропным скалярным полем при $D \geq 5$. Он включает в себя как предельный случай нелинейную гравитацию без скалярного поля ($F_1 = f(R)$, $F_2 = 0$), но не включает традиционный лагранжиан системы гравитационного и скалярного полей ($\dot{F}_1' = 0$, $F_2 = 1$). Изучение физических свойств рассмотренного класса моделей выходит за рамки настоящей статьи.

Для случаев многообразий малой размерности $D < 5$ использование части калибровочных (координатных) условий становится невозможным, однако при этом сама система уравнений экстремума и суперэкстремума становится проще. Поэтому исследование низкоразмерных теорий представляет собой отдельную задачу для каждого $D < 5$. Мы оставляем ее решение для будущих исследований.

4 Заключение

Опираясь на проведенное исследование, которое нужно рассматривать как "предварительную разведку", попробуем сформулировать некоторые предварительные выводы.

1. Примеры с суперэкстремальными константами наводят на мысль, что модель с нетривиальными суперэкстремумами должна быть в определенном смысле "достаточно богатой". Это означает, что модель должна включать достаточное число независимых параметров и они должны входить в лагранжиан нетривиальным образом. Поскольку размерность действия совпадает с размерностью постоянной Планка, то выделив эту постоянную из действия мультипликативным образом, мы придем к ситуации, в которой все остальные параметры модели под интегралом действия комбинируются в некие безразмерные комбинации, которые (опять-таки, возможно не все!) в принципе и подлежат определению из условия суперэкстремума. Интересно, что сама постоянная Планка оказывается таким образом в принципе не вычислимой! Физически это означает, что ее конкретное числовое значение имеет условный (нормировочный) характер — важно лишь то, что она отлична от нуля и то, к каким значениям безразмерных параметров она приводит в комбинации с другими размерными константами модели.
2. Рассмотренные примеры обнаруживают необходимость разумной регуляризации действия. Такая необходимость связана в основном с пространственно-временной некомпактностью моделей. Ввиду некоторой искусственности процедуры регуляризации, можно предположить, что фундаментальная "теория всего" должна иметь дело с компактными моделями, в которых все основные параметры конечны и процедура регуляризации не требуется.
3. В частности, в примере с гармоническим осциллятором мы обнаружили интересное проявление "временной компактности" модели: суперэкстремальные частоты подчиняются закону квантования, весьма близкому к известному квантово-механическому спектру одномерного гармонического осциллятора. Таким образом, потенциально условие суперэкстремума включает в себе существенно больше, чем в него закладывалось: уравнения суперэкстремума могут порождать дискретный спектр решений. Возникает еще одна интересная точка зрения на процедуру квантования физических систем: квантово-механические спектры физических величин можно рассматривать как набор точек суперэкстремума действия соответствующей физической системы.
4. Обычно в задачах теории поля начально-краевые условия считаются произвольными, либо случайными. Рассмотренные примеры обнаруживают, что функционал действия допускает оптимизацию и по этим условиям. Разумеется, такая оптимизация не имеет смысла в рамках частной феноменологической теории, изучающей узкий класс явле-

ний. В рамках же любой фундаментальной теории, оптимизация по начально-краевым условиям правомерна. Более того, по существу идея суперэкстремума или ее надлежащие модификации — это по существу единственный (хотя и в значительной степени спекулятивный) теоретический метод исследования объектов, напрямую недоступных экспериментам и наблюдениям. К примеру, так обстоят дела в космологических решениях уравнений Эйнштейна, содержащих произвольные константы интегрирования и гипотезы о глобальной топологии пространства-времени. Отметим еще раз, что идея оптимальности по начально-краевым условиям вводит в физику некоторый новый принцип, который выходит за рамки классического принципа наименьшего действия и требует дальнейшего изучения в рамках конкретных "теорий всего".

5. Очевидно, что идея о суперэкстремуме по лагранжианам не столь проста, как идея суперэкстремума по константам. С технической точки зрения можно ожидать, что не во всякой теории поля существует возможность ввести в качестве координат на многообразии поля, от которых зависит потенциальная функция. Простым примером, когда это сделать невозможно, является классическая механика точки на плоскости (одномерная "теория поля" с двумя "полями" — компонентами закона движения). В общем случае, необходимо (но недостаточно!), чтобы размерность базы конфигурационного расслоения была не меньше, чем число независимых полевых инвариантов, от которых может зависеть потенциал. Могут возникнуть и другие проблемы: отсутствие явно решаемых интегралов, функциональная зависимость инвариантов и т.д. Рассмотренный нами пример с 2-мерной теорией поля на двойных числах, обнаруживает что эта теория "идеальна" для задач суперэкстремума: нам удалось вычислить в ней как потенциал, общий вид которого навеян соображениями гиперболической голоморфности и некоторыми аналогиями с физическими приложениями теории функций комплексного переменного, так и фундаментальные константы для конкретной статической вселенной, деформированной самодействующим упругим стержнем.
6. Несмотря на очевидные трудности, идея суперэкстремума действия по лагранжиану выглядит весьма привлекательной: ее полная реализация означает, что, вопреки сложившемуся мнению, на самом деле у нас нет никакой свободы в выборе лагранжианов. Принцип суперэкстремума по лагранжиану определяет его общий вид с точностью до фундаментальных констант, которые появляются как константы интегрирования уравнений суперэкстремума. Далее, решая систему уравнений Эйлера-Лагранжа с найденным лагранжианом, мы получаем решения, выражающиеся через начально-краевые условия. Подставляя их обратно в действие и оптимизируя его по фундаментальным константам и параметрам начально-краевых условий, мы восстанавливаем всю физику. Весь произвол, который оставляет нам как исследователям, принцип суперэкстремума, заключается в выборе системы единиц, определяющих несущественную мультипликативную константу, имеющую размерность действия (постоянная Планка?). При этом получающаяся теория должна быть внутренне самосогласованной и с точки зрения квантовой теории: суперэкстремальный лагранжиан теории уже содержит в себе все "квантовые поправки" и попытка вычислить их на основе надлежащей схемы квантования такой теории должна приводить к тривиальному, т.е. нулевому результату.

Разумеется, все вышесказанное в заключении надо рассматривать скорее как заметки на будущее и программу действий, а не окончательный результат.

Литература

- [1] Кокарев С.С. Три лекции о законах Ньютона. В сб. трудов РНОЦ "Логос", Ярославль, вып.1, 2006, с. 45-72. E-print: arXiv: gr-qc/0905.3285v1.

- [2] Чандрассекар С. Математическая теория черных дыр (в 2-х томах). Новокузнецк, НФМИ, 1998
- [3] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., ГИФМЛ, 1989.
- [4] Кокарев С.С. Обобщение теоремы Болина-Арнольда и её применение в ОТО // *Изв. вузов (физика)*, 11, 2000, с. 36.
- [5] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (14), том 7, 2010, с. 11-37

EXTRA-VARIATIONAL PRINCIPLE IN THE THEORY OF FIELD

S.S. Kokarev

*Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia
RSEC Logos, Yaroslavl, Russia*

logos-center@mail.ru

We formulate natural algorithm for calculation of fundamental constants and Lagrangians within every fundamental theory, which can be derived from standard variational principle. We illustrate the method by multiple examples in classical mechanics, generalized gravitational theories, unified h-holomorphic theories, low dimensional and high dimensional field-theoretical models.

Key Words: extravariational principle, unified field theory, fundamental constants, lagrangians.

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ ОБ АНИЗОТРОПНОЙ ГЕОМЕТРОДИНАМИКЕ

С.В. Сипаров

Государственный университет гражданской авиации, Санкт-Петербург, Россия
НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

sergey@siparov.ru

Обсуждаются некоторые важные аспекты предложенного ранее подхода (анизотропной геометродинамики), причины расхождения предсказаний классической ОТО с рядом наблюдений на галактическом масштабе и альтернативная интерпретация наблюдений, связанных с гипотезой о наличии темной материи в гравитационных линзах.

Ключевые слова: гравитация, анизотропное пространство, постановка задачи, краевые условия, гравитационные линзы.

Анизотропной геометродинамикой (АГД) будем называть модификацию теории гравитации (ОТО), возникновение которой было мотивировано наблюдательными проблемами, перечисленных в [1] и характерными для космологических масштабов. Основными проблемами являются следующие: плоские кривые вращения спиральных галактик, закон Талли-Фишера для светимости, поведение звездных шаровых скоплений в нашей галактике (Кеплеровское движение в плоскости, перпендикулярной плоскости галактики, аномальная преимущественная локализация скоплений вблизи центра галактики), наблюдаемый эффект гравитационного линзирования зачастую превосходит теоретический в несколько раз. Объяснения этих эффектов в рамках классической ОТО отсутствуют, для первого и последнего случаев вводится понятие темной материи — гипотетического вещества, проявляющего себя только в гравитационном взаимодействии, масса такого вещества, необходимое для соответствия наблюдениям, должно превосходить массу барионной (видимой) материи в три раза. Наиболее острой проблемой являются плоские кривые вращения — эффект выражен, несложен и статистически достоверен.

Известные теоретические попытки справиться с проблемой, обсуждавшиеся в [2], включали:

- изменение подынтегрального выражения в действии Гильберта-Эйнштейна, ($f(R)$ -теории (Де Витт), введение дополнительного скалярного поля (Бранс-Дике), антисимметризация метрики, эквивалентная введению 5-й силы (Моффат), использование тензора Вейля (Маннхейм));
- увеличение числа измерений (Калуца-Клейн и далее к бранам);
- феноменологическая теория МОНД и ее ковариантное обобщение (Мильгрэм и Бекенштейн), сводящееся к введению дополнительного поля.

Все они оказались не свободными от недостатков, в том числе и МОНД, ориентированная на эксперимент и использующая новую эмпирическую константу, значение которой оказалось близким к cH , где c — скорость света, а H — постоянная Хаббла. Смысл такого совпадения остался неясен.

В работах [3-6] была рассмотрена возможность зависимости гравитационной силы от скоростей взаимодействующих тел, способом, принципиально отличающимся от известных, что соответствовало переходу к рассмотрению анизотропного пространства с анизотропной метрикой. Отличие состоит в том, что в классической ОТО скорости появляются

в выражении для гравитационной силы лишь в высоких порядках разложения силы по v/c , а в так называемом гравитоэлектромагнетизме (ГЭМ) построение теории гравитации происходит по прямой аналогии с электродинамикой, что не является оправданным. В основе АГД лежат геометрическое тождество Максвелла, общее для гравитации и электромагнетизма, и физический принцип эквивалентности, подразумевающий зависимость сил инерции от скоростей.

Модификация проводилась следующим образом. Сначала было введено пространство (x^i, y^i) , $i = 0, 1, 2, 3$, где $y^i = \frac{dx^i}{ds}$, с метрикой, мало отличающейся от метрики плоского пространства

$$g_{ij}(x, y) = \eta_{ij} + \varepsilon_{ij}(x, y); \quad |\varepsilon_{ij}| \ll 1, \quad (1)$$

т.е. поле считалось слабым, а теория линеаризуемой. Затем были получены уравнения обобщенной геодезической

$$\frac{dy^i}{ds} + (\Gamma_{lk}^i + \frac{1}{2}\gamma^{it} \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x^j \partial y^t} y^j) y^k y^l = 0, \quad (2)$$

которые позволили получить выражения для уравнения движения, а затем для гравитационной силы

$$\vec{F}^{(g)} = \frac{mc^2}{2} \left\{ -\nabla \varepsilon_{00} + [\vec{v}, \text{rot} \frac{\partial \varepsilon_{00}}{\partial \vec{v}}] + \nabla(\vec{v}, \frac{\partial \varepsilon_{00}}{\partial \vec{v}}) \right\}. \quad (3)$$

После ряда упрощений была введена модель элементарного источника гравитации, который в отличие от ОТО более не является массивной точкой, а представляет собой систему «центр плюс ток», т.е. массивная точка окружена (круговым) контуром тока массы. Эта модель была использована для моделирования динамики спиральной галактики, что привело к выражениям

$$v_{orb} \sim \text{const}; \quad v_{orb} \sim L_{lum}^{1/4} \quad (4)$$

соответствующим плоским кривым вращения и закону Талли-Фишера, (здесь v_{orb} — орбитальная скорость светящегося вещества на периферии спиральной галактики, L_{lum} — светимость). Выражение (3) для силы позволяет объяснить парадоксы, связанные с движением шаровых скоплений и рассчитать движение в поле спиральной галактики, соответствующее наблюдаемым характеристикам гравитационных линз. Оказывается возможным существование также и рассеивающих гравитационных линз, позволяющих по-новому подойти к возможной интерпретации наблюдений сверхновых типа Ia.

В АГД классическая теория гравитации (ОТО) и все ее результаты остались применимыми на планетарном масштабе, а парадоксы на галактическом масштабе явились естественными следствиями предложенной модифицированной теории, для проверки которой был начат радиоастрономический эксперимент на базе Пушинской РАО [7]. В данной статье обсуждаются некоторые особенности, поясняющие суть подхода и являющиеся характерными для АГД.

Замечание 1: О фазовом пространстве-времени

Построение АГД фактически начинается с введения нового — 8-мерного — пространства: каждой точке основного многообразия M приписываются не только 4 координаты x^i , но и 4 новых координаты y^i , вычисляемых по правилу $y^i = \frac{dx^i}{ds}$, где s — естественный параметр для кривой, принадлежащей многообразию (длина дуги), т.е. $(x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow$

$(x^0, x^1, x^2, x^3, y^0, y^1, y^2, y^3)$. Таким образом, происходит переход к рассмотрению касательного расслоения TM . И если M при физической интерпретации играет роль 4-мерного пространства-времени, то совокупность M и TM при интерпретации будет играть роль 8-мерного фазового пространства-времени.

Следует отметить два обстоятельства. Первое: процедура использования математической модели для описания интуитивного представления о реальности как о пространстве с протекающими в нем явлениями, упорядоченными во времени, в явном виде была предложена впервые, по-видимому, Г. Минковским в 1908 г. До этого все обсуждения, включая точку зрения Н. Лобачевского, исследовавшего возможности обоснованного использования геометрии Евклида при астрономических наблюдениях, и В. Клиффорда, обсуждавшего понятие кривизны и его связь с физикой, касались лишь 3-мерного пространства. Даже сам А. Эйнштейн в своей классической работе 1905 г., уже выполнив все необходимые построения, не говорил о таком объекте, как 4-мерное пространство-время. Идея Минковского, к которой современная наука давно привыкла, не была очевидной или естественной во времена своего появления. В частности, А. Пуанкаре, предвосхитивший ее четырьмя годами ранее, считал ее искусственной, а трудности на пути ее внедрения в науку непомерно большими и не заслуживающими серьезного отношения. Таким образом, результаты опыта Майкельсона-Морли и их осмысление Эйнштейном привели к явному представлению о продуктивной возможности моделирования реальности с помощью нетривиальных и неочевидных геометрических построений.

Второе обстоятельство состоит в том, что при переходе к физической интерпретации в математической модели появляется некоторая фундаментальная константа, имеющая размерность скорости. Это связано с тем, что одна из координат 4-мерного пространства-времени измеряется прибором другого типа, чем остальные три координаты, и необходим переводной коэффициент. То, что эта константа, эта скорость полагалась равной именно скорости света, было продиктовано стремлением сохранить фундаментальный характер электродинамики и обеспечить инвариантность уравнений Максвелла.

Поэтому предложение теории АГД использовать 8-мерное пространство (фазовое пространство-время) для моделирования интуитивного представления о реальности является в определенном смысле аналогом предложения, сделанного Минковским в начале 20-го века. Дополнительные пространственные измерения не являются фиктивными, как в теориях типа Калуцы-Клейна, они имеют простой физический смысл, а обычное 6-мерное фазовое пространство общей физики давно используется при исследовании и описании различных процессов. Как уже упоминалось [3-6], при физической интерпретации соображения размерности вновь диктуют необходимость появления фундаментальной константы l , на этот раз с размерностью длины. Если связать ее с ранее введенной фундаментальной скоростью c и использовать $l = c/H$, то размерность новой константы может быть связана и со временем, а ее величина может выбираться из соображений, аналогичных тем, что были использованы в прошлом веке. Только теперь теорией, фундаментальный характер которой хотелось бы сохранить, является теория гравитации (ОТО), а уравнениями, инвариантность которых хотелось бы обеспечить, являются уравнения Эйнштейна.

У фазового пространства-времени имеется важная нетривиальная особенность, состоящая в том, что при использовании соотношения $ds = cdt$ первая из новых координат, т.е. y^0 , оказывается постоянной, т.е. все события будут происходить фактически на 7-мерном подпространстве 8-мерного фазового пространства-времени.

Оба последних обстоятельства, т.е. наличие у теории фундаментального параметра с размерностью длины и существование постоянной координаты немедленно вызывают целый ряд ассоциаций, связанных с хорошо разработанными разделами теорий относительности и гравитации и связанных с ними теорий. Перечислим их.

1. Классическое пространство Де Ситтера является 4-мерным подпространством 5-мерного пространства с фиксированным значением одной из координат, содержит фундаментальный параметр с размерностью длины и используется при обсуждении космологических проблем, начиная от Большого взрыва и до связи радиуса кривизны с космологической константой и темной энергией.
2. Теоретико-групповые соображения:
 - (а) Непосредственная связь с обобщенным преобразованием Лоренца [8], сохраняющие наблюдаемое равномерное прямолинейное движение и содержащие фундаментальную длину;
 - (б) Группа Де Ситтера, соответствующая преобразованию $x^{i'} = \frac{L_j^i x^j + a_i x^i}{1 + l^{-1} b_i x^i}$ (где a_i и b_i — безразмерные), является наиболее общей группой преобразований (Бакри), она также содержит фундаментальную константу с размерностью длины и, как и группа Пуанкаре, является десяти-параметрической группой; связанная с ней однородная группа $x^{i'} = \frac{L_j^i x^j}{1 + l^{-1} b_i x^i}$ не сохраняет интервал пространства Минковского;
 - (в) Сжатие группы Де Ситтера с помощью введения координат Бельтрами до группы Ньютона-Гука, пригодной при интерпретации астрономических событий.
3. В теории частиц высоких энергий для описания их скоростей эффективно используется геометрия Лобачевского.
4. Если выбрать фундаментальный параметр 8-мерного фазового пространства-времени равным c/H и при интерпретации положить H равной постоянной Хаббла, что довольно естественно при обращении к космологическим масштабам, то связь фундаментальных констант теории с эмпирической постоянной теории МОНД, близкой к cH , становится неслучайной, т.к. в АГД именно это значение определяет область применимости теории.

Итак, в подходе АГД все эти мотивы становятся естественно связанными друг с другом, что обусловлено использованием (обобщенной Лагранжевой) геометрии 8-мерного фазового пространства-времени. Это, в том числе, означает, что при рассмотрении ситуаций и задач в пространствах меньшей размерности, т.е. пределах лишь некоторых проекций 8-мерного фазового пространства-времени, могут возникать дополнительные проблемы и трудности, что, собственно, и имеет место.

Замечание 2: О плоском пространстве

Хронологически специальная теория относительности предшествовала общей, и именно первая обоснованно считается фундаментом любых дальнейших построений. С точки зрения геометрии пространство СТО является плоским, и его метрика имеет вид метрики Минковского $\eta_{ij} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$. «Надстраивая» на этой базе теорию, в которой учитываются и ускоренные движения, что согласно принципу эквивалентности превращает ее в теорию гравитации, а заодно искривляет пространство, мы не только вступаем в противоречие с логикой, но и чрезмерно опираемся на математические построения, переходя от наблюдений физического мира к требованиям его соответствия идеальной математической модели. Последнее неоднократно встречалось в истории науки (небесные сферы со звездами на них, правильные Платоновы тела, вписанные в сферы и описанные около них, причем радиусы сфер должны соответствовать радиусам орбит планет, и др.), что и неудивительно, в силу известной «непостижимой эффективности математики в

естествознании». Однако прорывы в естествознании наступали как раз в результате признания такого несоответствия и учета наблюдаемых явлений в дальнейших построениях. Прекрасной иллюстрацией является само появление СТО.

Логическое противоречие состоит в том, что предельные случаи должны соответствовать упрощению, вырождению структур, а не их усложнению. В применении к теории гравитации это означает, что можно надеяться получить разумный результат, рассматривая «пространство вдали от тел» в теории, изначально построенной с учетом наличия тел. Однако «внося малые тела» в пустое (плоское) пространство в качестве малой поправки, никаких гарантий по поводу существования, единственности и осмысленности решений соответствующих задач получить невозможно. Обнаруживая несоответствие полученных решений с наблюдениями, и возвращаясь к рассмотрению пустого пространства с целью изменения его свойств путем подгона, например, требуя наличия кривизны и других свойств у *пустого* пространства, исследователь окончательно переходит в область красивых математических фантазий и отказывается от основополагающего физического принципа ОТО, состоящего в том, что источником кривизны пространства-времени является масса (или энергия) содержащихся в нем тел. Поскольку привычный формализм теории при этом сохраняется, такой переход оказывается замаскированным.

Важным обстоятельством является также и то, что требование Лоренц-инвариантности теории в классическом смысле может быть оправдано только для случаев, когда состояние движения самого наблюдателя можно считать известным. Но такая ситуация реализуется не всегда. Более последовательным является требование *обобщенной* Лоренц-инвариантности, в которой речь идет не о переходе в другую систему отсчета, движущуюся равномерно и прямолинейно в абсолютном смысле, а о переходе в систему, которая предстает инерциальной в наблюдениях, т.е. необходимо исключить или учесть неизвестное движение наблюдателя. Именно такой подход необходим при построении теории гравитации (обобщенной теории относительности и гравитации) в изначально непустом пространстве, содержимое которого может влиять на движение наблюдателя, которое невозможно измерить в абсолютном смысле. Результаты такой теории могут быть сопоставлены с наблюдениями более обоснованно.

Замечание 3: О локальности и граничных условиях

К предыдущему замечанию примыкает и вопрос о локальности. Он имеет два аспекта. Первый имеется в виду в принципе эквивалентности, когда говорят о неразличимости сил инерции и гравитации *в точке*. Второй возникает, когда рассматриваются решения уравнений поля, удовлетворяющие граничному условию в виде требованиям перехода к плоской метрике на бесконечности, т.е. *вдали от (локализованных) тел*. Если для моделирования реальности используется пространство, имеющее характерный параметр с размерностью длины, возникает естественное разбиение любой задачи на две — внутреннюю и внешнюю по отношению к области, имеющей радиус порядка такой длины. Тогда все результаты классической ОТО соответствуют внешней задаче, например, планетным системам звезд, но для описания динамики галактик такая постановка будет неприменима, и ожидать совпадения решений с наблюдениями нет оснований.

Возникают следующие вопросы:

1. Является ли переход от метрики в области, занятой телами, к области вдали от тел монотонным?
2. Чему соответствуют решения вне и внутри области и в чем особенности условия сшивания на границе?
3. Какую из задач следует использовать для моделирования того или другого природного

феномена?

Само осознание возможности постановки и использования двух таких задач немедленно приводит к дополнительным соображениям, связанным с понятием *темной материи*, которое интенсивно исследуется в последние годы и утвердилось в науке благодаря наблюдениям плоских кривых вращения. Известно, что эффективным методом решения статических задач является так называемая инверсия. Согласно теореме Кельвина об инверсии, если $\Phi(r, \theta, \varphi)$ есть решение уравнения Лапласа для области $r < R$, то в области $r > R$ решением будет $\frac{R}{r}\Phi\left(\frac{R^2}{r}, \theta, \varphi\right)$ и наоборот. При этом при инверсии меняется не только взаимное расположение зарядов, но и их величина. Поэтому, когда оказывается, что наблюдения соответствуют не тем «зарядам», которые используются в теории, это может означать, что результат теории соответствовал решению внешней задаче, в то время как моделируемый объект должен был описываться внутренней задачей.

Рассмотрим любопытный пример. В ряде физически интересных случаев для описания гравитации внутри однородного шара используется внутренняя задача Шварцшильда [9], а естественным условием сшивания на поверхности шара является совпадение получаемого решения с решением общеизвестной внешней задачи. Тогда для собственного времени внутри получаем

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{r_s}{R_0}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_s r^2}{R_0^3}\right)^{1/2} \quad (5)$$

где t — координатное время, измеряемое бесконечно удаленными часами, $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ — радиус Шварцшильда, R_0 — радиус шара, r — текущая координата. Тогда в центре шара, при $r = 0$ получаем

$$d\tau = dt \left[\frac{3}{2} \left(1 - \frac{r_s}{R_0}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} \right] \quad (6)$$

и если радиус шара $R_0 < (9/8)r_s$ или сжимающееся вещество минует это значение в процессе гравитационного коллапса, то время в центре меняет знак, что соответствует переходу к гравитационному отталкиванию, и возникает вопрос о самой возможности коллапса.

Обычные представления о радиусе Шварцшильда соответствуют весьма малой величине, но такие представления обманчивы — роль играет полная масса. Так, для Вселенной, общее число протонов в которой оценивается в 10^{80} штук, радиус видимой Вселенной совпадает с ее радиусом Шварцшильда. И возникает вопрос о типе задачи для описания явлений во Вселенной, в частности, и об ускорении и причине ее расширения, если окажется, что современная интерпретация наблюдений сверхновых SN1a оправдана, и оно имеет место.

Таким образом, традиционный выбор граничных условий в классической теории вызывает вопросы, и следовало бы учесть условия сшивания внутренней и внешней задач. При наличии параметра с размерностью длины это является естественным. Геометрия 8-мерного фазового пространства времени в случае ее применения для интерпретации космологических проблем в рамках АГД его автоматически содержит. При этом в условия сшивания может входить зависимость от скоростей. В частности, в решения внутренней и внешней задачи может входить одно и то же слагаемое, зависящее от скоростей, поскольку при решении задачи Пуассона постоянная интегрирования может теперь не обращаться тождественно в ноль, а зависеть от скоростей. Одновременно такое решение должно удовлетворять обобщенному уравнению геодезической. Все сказанное означает, что при рассмотрении внутренней задачи гравитационный потенциал поля может и расти с удалением от наблюдателя, и лишь во внешней области монотонно стремиться к нулю.

Замечание 4: О токах массы в АГД

Несмотря на то, что рецепт вычисления токов массы в АГД такой же, как в электродинамике, что обусловлено их общим геометрическим происхождением, т.е. тождеством Максвелла, их смысл и особенности отличаются от известных. Токи, возникающие в теории ГЭМ, имеют недостаток, связанный с непоследовательностью самой этой теории. Она проявляется в разделении массы на создающую кривизну пространства, т.е. входящую в метрику, и движущуюся в нем. В изотропном пространстве классической ОТО также появляются токовые слагаемые вида $\partial_j h_{0k}(x) - \partial_k h_{0j}(x)$, где $h_{ik}(x)$ — малая изотропная поправка к метрике Минковского. Они описывают соленоидальность полей (здесь соленоидальным полем является h_{ik}) и обусловлены выбором системы отсчета. В изотропном случае такие слагаемые отличаются от нуля, только если система не является чисто инерциальной, например, вращающейся. Но в анизотропном пространстве АГД слагаемые указанного вида возникают в связи с частью метрики, соответствующей нулевой компоненте анизотропного возмущения $\varepsilon_{00}(x, y)$. Поэтому даже чисто инерциальная система не свободна от соленоидальных полей. Токи массы в АГД имеют существенно метрическое происхождение.

Замечание 5: Об уравнениях поля

Естественный вопрос об изменении уравнений поля в связи с переходом к рассмотрению анизотропного пространства (8-мерного фазового пространства-времени) и об изменении уравнений возникающих при использовании вариационного принципа имеет ответ, базирующийся на доказательстве, проведенном в [10]. Оказывается, что в анизотропном случае для слабой (линеаризуемой) деформации плоского пространства вариационные уравнения не изменятся, новых уравнений не появится, и в результате возникнет обычное уравнение Эйнштейна. Однако входящие в него величины, в частности коэффициенты связности, могут и будут зависеть от y . Поэтому в первом порядке теории возмущений все рассуждения аналогичные решению Эйнштейна [11] остаются в силе, а результат учитывает анизотропию пространства.

Замечание 6: Возвращаясь к наблюдениям

Ранее [3-6] уже упоминалось, что такие принципиальные для современных космологических представлений наблюдательные данные, как линейный закон Хаббла, могут быть интерпретированы и без учета или наряду с учетом радиального расширения Вселенной. В частности, сам Хаббл в своей статье [12] отметил, что полученный результат находится в соответствии с космологическими представлениями Де Ситтера, которые предусматривали смещение спектров в связи с замедлением времени. С точки зрения АГД анизотропный потенциал, создаваемый тангенциально движущимися удаленными телами, также обеспечивает линейную зависимость, полученную Хабблом.

Упомянем еще некоторые наблюдения, которые можно интерпретировать на основе АГД наряду с наблюдениями, указанными в начале статьи. Рассмотрим собирающие гравитационные линзы, в которых учтем влияние токов массы на движение пробных частиц (и на распространение световых лучей). Напомним основные соотношения теории гравитационных линз. Угол отклонения луча света, проходящего мимо массивного тела

$$\theta = \frac{2r_s}{\xi} \quad (7)$$

где $\frac{r_s}{\xi} = \varphi_{(N)}$ — Ньютоновский потенциал, $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ — радиус Шварцшильда, ξ —

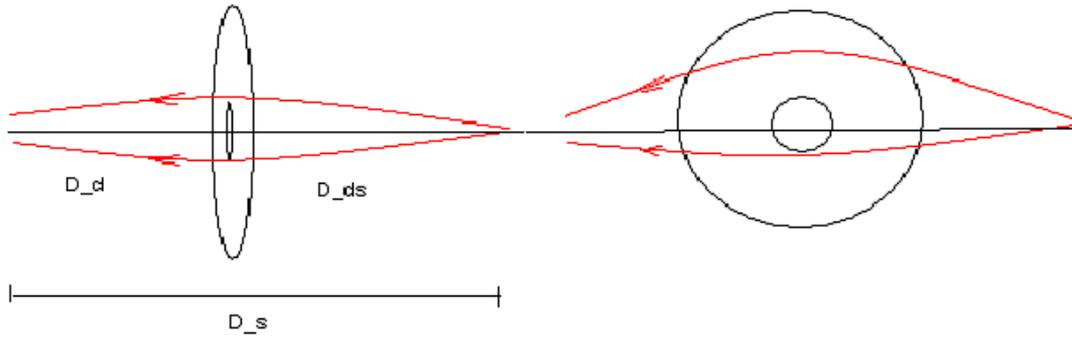


Рис. 1: Фронтальная и профильная ориентации спиральной галактики, играющей роль гравитационной линзы. Второй случай учитывается АГД.

минимальное расстояние между лучом и центром тела. Формула гравитационной линзы имеет вид

$$\eta = \frac{D_s \xi}{D_d} - D_{ds} \frac{2r_s}{\xi} \quad (8)$$

где η и ξ — перпендикулярные к лучу зрения координаты источника в плоскости источника и в плоскости линзы соответственно, D_s — расстояние между источником и наблюдателем, D_d — расстояние между линзой и наблюдателем, D_{ds} — расстояние между линзой и источником. Полагая $\xi = 0$, получим условия, когда источник, линза и наблюдатель находятся на одной прямой. Соответствующее значение

$$\xi_0 = \sqrt{2r_s \frac{D_d D_{ds}}{D_s}} \quad (9)$$

называется радиусом Хвольсона-Эйнштейна.

Гравитационный потенциал в АГД в классическом приближении имеет вид

$$\varphi_{(AGD)} = \varphi_{(N)} + \frac{8}{c^2} (\vec{u}, \vec{v}), \quad (10)$$

где $u = V_{eff}$ — эффективное значение линейной скорости массового тока вдоль контура, а v — скорость пробного тела, т.е., например, одной из звезд галактики. Для практических оценок, пригодных для сопоставления с наблюдениями, сделаем несколько приближений. Во-первых, используем $V_{eff} = \Omega_{eff} R_{eff}$, где радиус R_{eff} и угловая скорость Ω_{eff} в модели, описывающей галактику, определены так же, как в [3-6]. А во-вторых, вместо скорости пробного тела возьмем скорость света. Возможные погрешности могут повлиять на количественные оценки, однако, не больше, чем погрешности определения астрономических параметров, которые обычно участвуют в таких расчетах. Качественная сторона дела при этом не изменится. Ясно, что когда луч от источника лежит в плоскости (спиральной) галактики-линзы, второе слагаемое в формуле (10) входит с разными знаками в зависимости от того, с какой стороны от центра проходит луч. Тогда для угла отклонения света можно получить выражение

$$\theta = 2\varphi_{(AGD)} = 2\varphi_{(N)} + \frac{16}{c^2} (V_{eff}, v) = \frac{2r_s}{\xi} + 16 \frac{(V_{eff}, c)}{c^2}. \quad (11)$$

Соответственно, в случае, когда гравитационная линза представляет собой спиральную галактику, имеющую профильную ориентацию относительно луча зрения (рис.1), теория

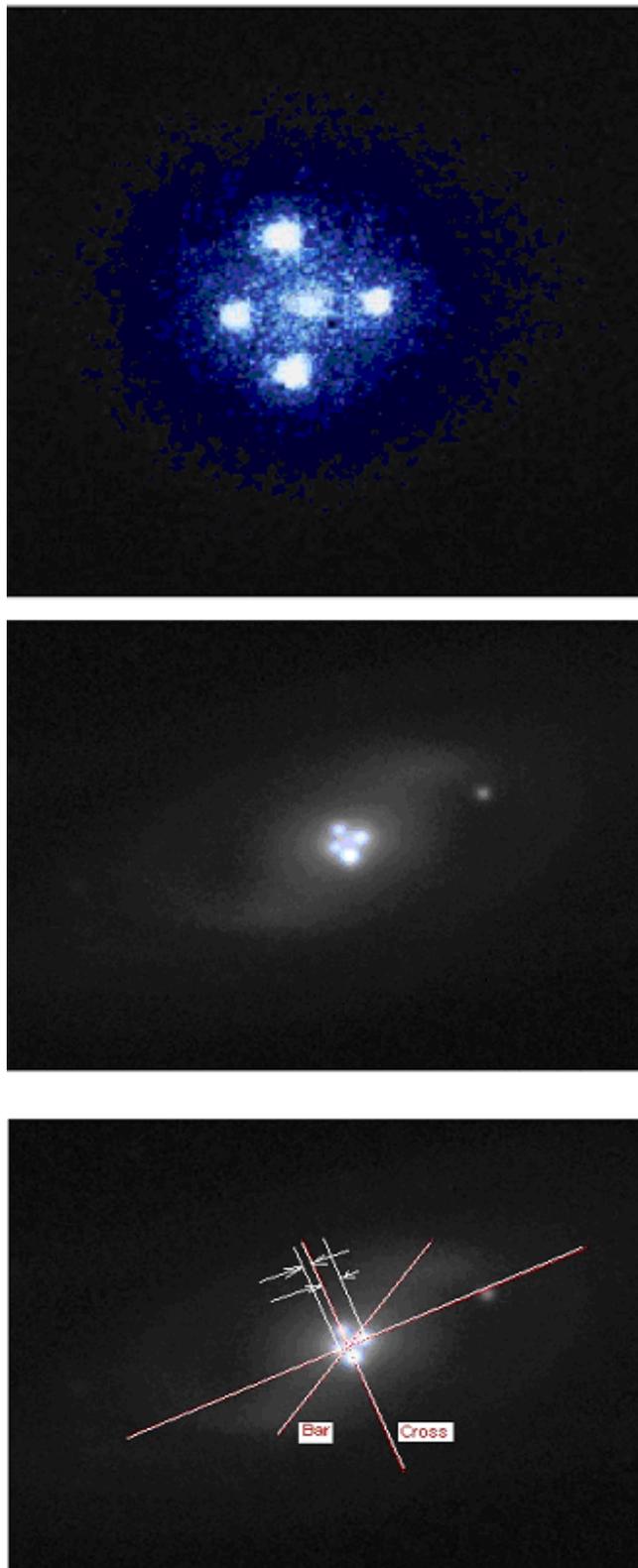


Рис. 2: Крест Эйнштейна.

- а) Квazar: 2237 + 030 (удаление $8 \cdot 10^9$ с.л.), Hubble Telescope NASA/ESA;
б) Линза, заметная на переднем плане — спиральная галактика ZW 2237+030 (удаление $4 \cdot 10^8$ с.л.). Взято из http://www.noao.edu/image_gallery/html/im0553.html;
в) Оси соответствуют изображению креста и положению бара галактики-линзы. Стрелками указаны отрезки, определяемые формулой (10а)

АГД дает следующие формулы. Для гравитационной линзы получим уравнение

$$\frac{1}{\xi} \left[\eta + D_{ds} \left(\frac{2r_S}{\xi} + 16 \frac{V_{eff}}{c} \right) \right] = \frac{D_s}{D_d}, \quad (12)$$

а роль радиусов Хвольсона-Эйнштейна при различном прохождении лучей будут играть два неравных отрезка, длины которых определяются формулой

$$\xi_{1or2} = 4\xi_0 \frac{\xi_0 V_{eff}}{r_S c} \left[\pm 1 + \sqrt{1 + \frac{c^2}{V_{eff}^2} \frac{r_S D_s}{32 D_{ds} D_d}} \right] \quad (13)$$

Отношение полученных длин отрезков ξ_1 и ξ_2 , которое можно сопоставить с наблюдениями, равно

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{c^2}{V_{eff}^2} \frac{r_S D_s}{32 D_{ds} D_d}}}{-1 + \sqrt{1 + \frac{c^2}{V_{eff}^2} \frac{r_S D_s}{32 D_{ds} D_d}}} \quad (14)$$

Для оценки величин, стоящих в (14) можно считать эффективную скорость имеющей порядок 10^5 м/с, что соответствует асимптотикам кривых вращения.

В качестве примера рассмотрим известный крест Эйнштейна (рис.2). Для этого объекта получено также и изображение соответствующей линзы, являющейся спиральной галактикой, повернутой так, как это требуется для проверки предсказаний сделанных на основе АГД. Подставляя в формулу (14) удаления, указанные в подписи к рис.2, получим, что отношение имеет порядок 10^0 , что не противоречит наблюдениям. О большей точности говорить не имеет смысла, т.к. оценки удалений и массы недостаточно точны, однако качественное соответствие расчета и наблюдений является указанием на непротиворечивость подхода АГД и возможность его использования для интерпретации наблюдательных данных.

Литература

- [1] Aguirre A., Burgess C.P., Friedland A., Nolte D. Astrophysical constraints on modifying gravity at large distances // *Class. Quantum Grav.* 18, 2001, pp. R223–R232.
- [2] Siparov S. Theory of the zero order effect suitable to investigate the space-time geometrical properties // *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis*, vol. 24, 2008, pp. 135-154.
- [3] Сипаров С. Закон гравитации и модель источника в анизотропной геометродинамике // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике* 2(6), №12, 2009, с. 143-160.
- [4] Siparov S. Proc.4-th Int. Gamow Conf., Odessa-2009. Eds. S.K. Chakrabarti, G.S. Bisnovaty-Kogan, A.I. Zhuk // *AIP Conf. Proc.*, Melville, New York, V.1206, p. 152.
- [5] Siparov S. Proc. Int. Conf. DGDS-2009, BSG Proc. Eds. K. Udriste, V. Balan // *Geom.Balkan Press*, V.17, 2010, p. 190.
- [6] Siparov S. Proc.Int. Conf."Math. and Astron.", Madrid-2009. Eds. M. de Leon, D.M. de Diego, R.M. Ros // *AIP Conf. Proc.*, Melville, New York, 2010, V.1283, 222.
- [7] Сипаров С.В., Самодуров В.А. Выделение составляющей излучения космического мазера, возникающей из-за гравитационно-волнового воздействия // *Компьютерная оптика* т.33, №1, 2009, с. 79-85.
- [8] Kerner E.H. An extension of the concept of inertial frame and of Lorentz transformation // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, vol. 73, №5, 1976, pp. 1418-1421.

- [9] Hobson M.P., Efstathion G., Lasenby A.N. *General Relativity*. Cambridge, 2009.
- [10] Voicu N. Proc.Int. Conf. "Math. and Astron." Madrid-2009. Eds. M. de Leon, D.M.de Diego, R.M.Ros // *AIP Conf. Proc.*, Melville, New York, V.1283, 2010, с. 249.
- [11] Einstein A. I fondamenti della teoria della relativita generale, Die Grundlage der allgemeinen Relativitatstheorie // *Ann. d. Phys.* 49, 1916, pp. 769-822.
- [12] Hubble E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae // *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 15 (3), 1929, pp. 168-173.

SEVERAL REMARKS ON THE ANISOTROPIC GEOMETRODYNAMICS

S.V. Siparov

State University of Civil Aviation, St-Petersburg, Russia

Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fрязино, Russia

sergey@siparov.ru

The paper contains the discussion of several important aspects of the approach suggested earlier (anisotropic geometrodynamics), the analysis of the disagreement between the GRT predictions and some observations on the galactic scale, and the alternative interpretation of the observations related to the hypothesis of the dark matter existence in the gravitational lenses.

Key Words: gravitation, anisotropic space, formulation of a problem, boundary conditions, gravitational lenses.

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НА ДЕКАРТОВЫХ СТЕПЕНЯХ ГРУППОИДОВ, ПОЛУГРУПП И КОЛЕЦ

А.М. Гальмак

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилёв, Беларусь
mgur@mogilev.by

Ранее было показано [2], что для любых $n \geq 3$, $s \geq 1$, $m \geq 2$ на декартовых степенях A^{n-1} и $A^{m(n-1)}$ полугруппы A определяются соответственно $(s(n-1)+1)$ -арная операция $[]_{s(n-1)+1, n-1}$ и n -арная операция $[]_{n, m, m(n-1)}$. Также было показано [3], что для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$, $m \geq 1$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на декартовой степени B^{mk} множества B определяется l -арная операция $[]_{l, \sigma, m, mk}$. В настоящей статье продолжают исследования автора, посвященные изучению многоместных операций на декартовых степенях универсальных алгебр.

Ключевые слова: многоместная операция, группоид, полугруппа, кольцо.

1 Введение

В предыдущих работах автора [1–6] изучалась l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$, которая была определена для любых $l \geq 2$, $k \geq 2$ и произвольной подстановки $\sigma \in S_k$ на k -ой декартовой степени A^k полугруппы A . Если $l = m$, $k = m - 1$, $\sigma = (12 \dots m - 1)$, $A = S_X$ — симметрическая группа всех биекций множества X на себя, то операция $[]_{l, \sigma, k}$ совпадает с m -арной операцией, которую Э. Пост определил [7] на $(m - 1)$ -ой декартовой степени группы S_X . Там же в [7] аналогичную m -арную операцию Э. Пост определил на группе $\mathbf{GL}(n, C)$ всех невырожденных матриц порядка n над полем комплексных чисел C . В данной работе рассматриваются универсальные алгебры $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, у которых множество A может быть группоидом, полугруппой, регулярной полугруппой, инверсной полугруппой, кольцом, регулярным кольцом.

Напомним некоторые понятия, используемые в работе.

n -Арный группоид $\langle A, [] \rangle$, в котором для любого $i = 1, 2, \dots, n - 1$ выполняется тождество

$$[[a_1 \dots a_n] a_{n+1} \dots a_{2n-1}] = [a_1 \dots a_i [a_{i+1} \dots a_{i+n}] a_{i+n+1} \dots a_{2n-1}],$$

называют n -арной полугруппой, а n -арную операцию $[]$ в этом случае называют ассоциативной.

n -Арную полугруппу $\langle A, [] \rangle$ называют n -арной группой, если в ней для всех $a_1, \dots, a_n, b \in A$ разрешимы уравнения

$$[xa_2 \dots a_n] = b, [a_1 \dots a_{n-1}y] = b.$$

Элемент a n -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ называют его:

1. идемпотентом, если $\underbrace{[a \dots a]}_n = a$;

2. нулем, если для всех $x_1, \dots, x_{n-1} \in A$ верно

$$[ax_1 \dots x_{n-1}] = [x_1 ax_2 \dots x_{n-1}] = \dots = [x_1 \dots x_{n-1} a] = a;$$

3. единицей, если для любого $x \in A$ верно

$$\underbrace{[xa \dots a]}_{n-1} = \underbrace{[ax a \dots a]}_{n-2} = \dots = \underbrace{[a \dots a x]}_{n-1} = x.$$

Понятно, что n -арный группоид не может иметь более одного нуля, а всякая единица n -арного группоида является его идемпотентом.

Если в n -арном группоиде $\langle A, [] \rangle$ для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ выполняется тождество

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = [a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(n)}],$$

то n -арный группоид $\langle A, [] \rangle$ и n -арную операцию $[]$ называют *абелевыми*.

n -Арный группоид $\langle A, [] \rangle$, в котором выполняется тождество

$$[aa_1 \dots a_{n-2}b] = [ba_1 \dots a_{n-2}a],$$

называют *полуабелевыми*. *Полуабелевой* в этом случае называют и саму n -арную операцию $[]$.

Более подробную информацию об n -арных полугруппах и n -арных группах можно найти в [8 – 10].

Универсальную алгебру $\langle A, +, [] \rangle$ с бинарной и n -арной операциями $+$ и $[]$ называют $(2, n)$ -кольцом, если выполняются следующие условия:

1. $\langle A, + \rangle$ – абелева группа;
2. в $\langle A, +, [] \rangle$ для любого $i = 1, \dots, n$ выполняется тождество дистрибутивности

$$[a_1 \dots a_{i-1}(b_1 + b_2)a_{i+1} \dots a_n] = [a_1 \dots a_{i-1}b_1a_{i+1} \dots a_n] + [a_1 \dots a_{i-1}b_2a_{i+1} \dots a_n]. \quad (1)$$

Таким образом, можно сказать, что $(2, n)$ -кольцо – это абелева группа, с определенной на ней n -арной операцией $[]$, которая связана с групповой операцией $+$ тождеством (1). Операцию $[]$ в этом случае называют *дистрибутивной* относительно операции $+$.

При $n = 2$ определение $(2, n)$ -кольца превращается в определение обычного кольца, то есть понятие $(2, 2)$ -кольца совпадает с понятием кольца.

Если n -арная операция $[]$ удовлетворяет некоторому n -арному аналогу тождества $xy = yx$, то соответствующий тип абелевости выносится в название $(2, n)$ -кольца. Например, если $[]$ – абелева (полуабелева), то $(2, n)$ -кольцо $\langle A, +, [] \rangle$ называют *абелевым* (*полуабелевым*).

$(2, n)$ -Кольцо $\langle A, +, [] \rangle$ называют *ассоциативным*, если n -арная операция $[]$ ассоциативна, то есть n -арный группоид $\langle A, [] \rangle$ является n -арной полугруппой.

В [11, 12] $(2, n)$ -кольцами называются ассоциативные $(2, n)$ -кольца. Там же дано более общее определение (m, n) -кольца, где $m \geq 2$. $(2, n)$ -Кольцам посвящены работы [13, 14].

2 Определение операции $[]_{1, \sigma, k}$

Определение [6]. Пусть A – группоид, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_k . Определим на A^k вначале бинарную операцию

$$\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1 y_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)}, \dots, x_k y_{\sigma(k)}), \quad (2)$$

а затем l -арную операцию

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, k} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\dots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \dots)). \quad (3)$$

Понятно, что операция $[]_{2, \sigma, k}$ совпадает с операцией $\overset{\sigma}{\circ}$.

Легко заметить, что если $\sigma = (12 \dots k)$, то операция $\overset{\sigma}{\circ}$ совпадает с операцией

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \circ (y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1 y_2, x_2 y_3, \dots, x_{k-1} y_k, x_k y_1)$$

из [5, определения 2.2.3], а операция $[\]_{l,\sigma,k}$ — с операцией $[\]_{l,k}$ из того же определения. Операции \circ и $[\]_{l,k}$ впервые были определены в [1]. Там же в [1] впервые была определена и операция $[\]_{l,\sigma,k}$ для случая полугруппы A .

2.2. Теорема. [6]. *Если σ — нетождественная подстановка, а группоид A содержит более одного элемента, то в l -арном группоиде $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ нет единицы.*

2.3. Замечание. Если 0 и 1 — нуль и единица группоида A , то элемент $\mathbf{0} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k$ является нулём l -арного группоида $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$, а элемент $\mathbf{e} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_k$ — его идемпотентом.

2.4. Теорема [6]. *Пусть σ — нетождественная подстановка, а группоид A содержит единицу и элемент a , отличный от единицы. Тогда l -арный группоид $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ неабелев.*

2.5. Теорема [6]. Пусть A — полугруппа,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = (y_1, y_2, \dots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

2.6. Следствие. Пусть A — полугруппа, $k = l - 1$, $\sigma = (12 \dots l - 1)$,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i(l-1)}) \in A^{l-1}, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,l-1} = (y_1, y_2, \dots, y_{l-1}),$$

где

$$y_j = x_{1j} x_{2(j+1)} \dots x_{(l-j)(l-1)} x_{(l-j+1)1} \dots x_{(l-1)(j-1)} x_{lj}, \quad j = 1, 2, \dots, l - 1.$$

Из теоремы 2.5 вытекает, что если A — полугруппа, то определение 2.1 и определение 3.1.4 из [5] определяют одну и ту же l -арную операцию. Можно также сказать, что определение 2.1 обобщает l -арную операцию, определяемую определением 3.1.4 из [5], на случай группоидов.

2.7. Теорема [1, 5]. Пусть A — полугруппа (группа), σ — подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда универсальная алгебра $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ является l -арной полугруппой (l -арной группой).

2.8. Теорема [5]. Если полугруппа A содержит единицу 1 , а подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ является полуабелевой тогда и только тогда, когда полугруппа A — абелева.

В разделе 3 нам понадобится следующая лемма, являющаяся следствием определения 2.1, и которая обобщает лемму 2.2.4 из [5].

2.9. Лемма. Пусть A — группоид, $m \in \{1, \dots, l - 2\}$. Тогда

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_m [\mathbf{x}_{m+1} \dots \mathbf{x}_l]_{l-m,\sigma,k}]_{m+1,\sigma,k},$$

в частности,

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} &= \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} [\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l-1,\sigma,k}, \\ [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} &= [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{l-2} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)]_{l-1,\sigma,k}. \end{aligned}$$

3 Дистрибутивность операции $[]_{l,\sigma,k}$

3.1. Лемма. Пусть на множестве A определены бинарная операция $+$ и дистрибутивная относительно нее бинарная операция \times , обозначение которой в дальнейшем для краткости записей указывать не будем. Пусть также $k \geq 2$. Тогда операция $\overset{\sigma}{\circ}$, определяемая на A^k с помощью (2), является дистрибутивной относительно операции $+$, определенной на A^k покомпонентно.

Доказательство. Используя определение операции $\overset{\sigma}{\circ}$ и дистрибутивность в A операции \times относительно операции $+$, получим

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, \dots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} ((y_1, y_2, \dots, y_k) + (z_1, z_2, \dots, z_k)) = \\ & = (x_1, x_2, \dots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_k + z_k) = \\ & = (x_1(y_{\sigma(1)} + z_{\sigma(1)}), x_2(y_{\sigma(2)} + z_{\sigma(2)}), \dots, x_k(y_{\sigma(k)} + z_{\sigma(k)})) = \\ & = (x_1 y_{\sigma(1)} + x_1 z_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)} + x_2 z_{\sigma(2)}, \dots, x_k y_{\sigma(k)} + x_k z_{\sigma(k)}) = \\ & = (x_1 y_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)}, \dots, x_k y_{\sigma(k)}) + (x_1 z_{\sigma(1)}, x_2 z_{\sigma(2)}, \dots, x_k z_{\sigma(k)}) = \\ & = (x_1, x_2, \dots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (y_1, y_2, \dots, y_k) + (x_1, x_2, \dots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (z_1, z_2, \dots, z_k), \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, \dots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} ((y_1, y_2, \dots, y_k) + (z_1, z_2, \dots, z_k)) = \\ & = (x_1, x_2, \dots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (y_1, y_2, \dots, y_k) + (x_1, x_2, \dots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (z_1, z_2, \dots, z_k). \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} & ((y_1, y_2, \dots, y_k) + (z_1, z_2, \dots, z_k)) \overset{\sigma}{\circ} (x_1, x_2, \dots, x_k) = \\ & = (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_k + z_k) \overset{\sigma}{\circ} (x_1, x_2, \dots, x_k) = \\ & = ((y_1 + z_1)x_{\sigma(1)}, (y_2 + z_2)x_{\sigma(2)}, \dots, (y_k + z_k)x_{\sigma(k)}) = \\ & = (y_1 x_{\sigma(1)} + z_1 x_{\sigma(1)}, y_2 x_{\sigma(2)} + z_2 x_{\sigma(2)}, \dots, y_k x_{\sigma(k)} + z_k x_{\sigma(k)}) = \\ & = (y_1 x_{\sigma(1)}, y_2 x_{\sigma(2)}, \dots, y_k x_{\sigma(k)}) + (z_1 x_{\sigma(1)}, z_2 x_{\sigma(2)}, \dots, z_k x_{\sigma(k)}) = \\ & = (y_1, y_2, \dots, y_k) \overset{\sigma}{\circ} (x_1, x_2, \dots, x_k) + (z_1, z_2, \dots, z_k) \overset{\sigma}{\circ} (x_1, x_2, \dots, x_k), \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} & ((y_1, y_2, \dots, y_k) + (z_1, z_2, \dots, z_k)) \overset{\sigma}{\circ} (x_1, x_2, \dots, x_k) = \\ & = (y_1, y_2, \dots, y_k) \overset{\sigma}{\circ} (x_1, x_2, \dots, x_k) + (z_1, z_2, \dots, z_k) \overset{\sigma}{\circ} (x_1, x_2, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Из доказанных тождеств следует дистрибутивность операции $\overset{\sigma}{\circ}$ относительно операции $+$. Лемма доказана.

3.2. Предложение. Пусть на множестве A определены бинарная операция $+$ и дистрибутивная относительно нее бинарная операция \times , обозначение которой в дальнейшем указывать не будем. Тогда l -арная операция $[]_{l,\sigma,k}$, определяемая на A^k с помощью (3), является дистрибутивной относительно операции $+$, определенной на A^k покомпонентно.

Доказательство. Случай $l = 2$ доказан в лемме 3.1.

Пусть теперь $l > 2$. Рассмотрим три случая.

1. $i = 1$. Используя леммы 2.9 и 3.1, получим

$$\begin{aligned} [(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)\mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k} &= (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) \overset{\sigma}{\circ} [\mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l-1,\sigma,k} = \\ &= \mathbf{b}_1 \overset{\sigma}{\circ} [\mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l-1,\sigma,k} + \mathbf{b}_2 \overset{\sigma}{\circ} [\mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l-1,\sigma,k} = [\mathbf{b}_1\mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k} + [\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k}, \end{aligned}$$

то есть

$$[(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)\mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{b}_1\mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k} + [\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k}.$$

2. $i = l$. Используя (3), затем $l - 1$ раз дистрибутивность слева операции $\overset{\sigma}{\circ}$ относительно операции $+$ (лемма 3.1) и снова (3), получим

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)]_{l,\sigma,k} &= \mathbf{a}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\dots (\mathbf{a}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)))) \dots) = \\ &= \mathbf{a}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\dots (\mathbf{a}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{b}_2)) \dots)) = \dots \\ \dots &= \mathbf{a}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\dots (\mathbf{a}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{b}_1)) \dots)) + \mathbf{a}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\dots (\mathbf{a}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{b}_2)) \dots)) = \\ &= [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{b}_1]_{l,\sigma,k} + [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{b}_2]_{l,\sigma,k}, \end{aligned}$$

то есть

$$[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{b}_1]_{l,\sigma,k} + [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{b}_2]_{l,\sigma,k}.$$

3. $i \in \{2, \dots, l - 1\}$. Используя лемму 2.9, затем рассмотренные выше случаи 1) и 2) и снова лемму 2.9, получим

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)\mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k} &= \\ &= [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1}[(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)\mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_l]_{l-i+1,\sigma,k}]_{i,\sigma,k} = \\ &= [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1}([\mathbf{b}_1\mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_l]_{l-i+1,\sigma,k} + [\mathbf{b}_2\mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_l]_{l-i+1,\sigma,k})]_{i,\sigma,k} = \\ &= [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1}[\mathbf{b}_1\mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_l]_{l-i+1,\sigma,k}]_{i,\sigma,k} + [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1}[\mathbf{b}_2\mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_l]_{l-i+1,\sigma,k}]_{i,\sigma,k} = \\ &= [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{b}_1\mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k} + [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{b}_2\mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k}, \end{aligned}$$

то есть

$$[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)\mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{b}_1\mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k} + [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{b}_2\mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k}.$$

Таким образом, доказано, что последнее тождество выполняется в A^k для любого $i = 1, \dots, l$. Следовательно, l -арная операция $[\]_{l,\sigma,k}$ дистрибутивна относительно операции $+$. Предложение доказано.

3.3. Следствие. Если $\langle A, +, \times \rangle$ — кольцо, то $\langle A^k, +, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ — $(2, l)$ -кольцо.

Теорема 2.7 и предложение 3.2 позволяют сформулировать следующую теорему.

3.4. Теорема. Пусть $\langle A, +, \times \rangle$ — ассоциативное кольцо, σ — подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда универсальная алгебра $\langle A^k, +, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ является ассоциативным $(2, l)$ -кольцом.

3.5. Следствие. Пусть $\langle A, +, \times \rangle$ — ассоциативное кольцо, k делит $l - 1$, σ — цикл длины k из S_k . Тогда универсальная алгебра $\langle A^k, +, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ является ассоциативным $(2, l)$ -кольцом.

3.6. Следствие. Пусть $\langle A, +, \times \rangle$ — ассоциативное кольцо, $k \geq 2$, σ — цикл длины k из

S_k . Тогда универсальная алгебра $\langle A^k, +, []_{k+1, \sigma, k} \rangle$ является ассоциативным $(2, k+1)$ -кольцом.

3.7. Следствие. Пусть $\langle A, +, \times \rangle$ — ассоциативное кольцо. Тогда универсальная алгебра $\langle A^k, +, []_{k+1, (12\dots k), k} \rangle$ является ассоциативным $(2, k+1)$ -кольцом.

3.8. Замечание. Если σ — нетождественная подстановка, а кольцо $\langle A, +, \times \rangle$ содержит единицу и элемент, отличный от единицы, то по теореме 2.4 $(2, l)$ -кольцо $\langle A^k, +, []_{l, \sigma, k} \rangle$ неабелево.

3.9. Замечание. Если ассоциативное кольцо $\langle A, +, \times \rangle$ содержит единицу, то по теореме 2.8 ассоциативное $(2, l)$ -кольцо $\langle A^k, +, []_{l, \sigma, k} \rangle$ является полуабелевым тогда и только тогда, когда абелево кольцо $\langle A, +, \times \rangle$.

4 Регулярные l -арные полугруппы

После доклада автора на VI-ой Международной конференции FERT-2010 (Москва, 3 ноября 2010 г.) З.К. Силагадзе задал докладчику вопрос: *будет ли инверсной l -арная полугруппа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, если инверсна полугруппа A ?*

Так как всякая инверсная полугруппа является регулярной, то вначале необходимо ответить на вопрос: *будет ли регулярной l -арная полугруппа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, если регулярна полугруппа A ?*

Оба вопроса корректны, так как понятия регулярности и инверсности в теории l -арных полугрупп присутствуют и являются обобщениями соответствующих бинарных понятий.

В этом разделе ответим на второй вопрос.

Напомним, что элемент a — полугруппы A называется *регулярным*, если в A существует такой элемент x , что

$$axa = a. \tag{4}$$

Полугруппа A называется *регулярной*, если все ее элементы регулярны. Другими словами, полугруппа A регулярна, если в ней для любого $a \in A$ разрешимо уравнение (4) [15, с. 104; 16, с. 48].

Понятие регулярности переносится на n -арные полугруппы любой арности.

Элемент a n -арной полугруппы $\langle A, [] \rangle$ называется *регулярным*, если существуют такие элементы $x_1, \dots, x_{2n-3} \in A$, что

$$[ax_1 \dots x_{2n-3}a] = a. \tag{5}$$

n -Арная полугруппа $\langle A, [] \rangle$ называется *регулярной*, если все ее элементы регулярны [17]. Другими словами, n -арная полугруппа $\langle A, [] \rangle$ регулярна, если в ней для любого $a \in A$ разрешимо уравнение (5).

При $n \geq 3$ уравнение (5) разрешимо тогда и только тогда, когда разрешимо уравнение

$$[ax_1 \dots x_{n-2}a] = a. \tag{6}$$

Поэтому в определении регулярного элемента и регулярной n -арной полугруппы при $n \geq 3$ вместо (5) можно рассматривать (6).

4.1. Лемма. Для любого элемента a регулярной полугруппы A и любого $k \geq 1$ в A разрешимо уравнение

$$ax_1 \dots x_k a = a.$$

4.2. Предложение. Если A — полугруппа, σ — подстановка из S_k , удовлетворяющая

условию $\sigma^l = \sigma$, то элемент $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k$ является регулярным в l -арной полугруппе $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$ тогда и только тогда, когда все его компоненты a_1, \dots, a_k регулярны в полугруппе A .

Доказательство. Необходимость. Из регулярности \mathbf{a} в $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$ вытекает существование таких элементов

$$\mathbf{a}_2 = (a_{21}, \dots, a_{2k}), \dots, \mathbf{a}_{l-1} = (a_{(l-1)1}, \dots, a_{(l-1)k}) \in A^k, \quad (7)$$

что

$$[\mathbf{a}\mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{a}]_{l,\sigma,k} = \mathbf{a}, \quad (8)$$

откуда, используя теорему 2.5 и тождественность подстановки σ^{l-1} , получим

$$a_1 a_{2\sigma(1)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)} a_1 = a_1, \dots, a_k a_{2\sigma(k)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)} a_k = a_k. \quad (9)$$

Таким образом, полагая

$$x_1 = a_{2\sigma(1)}, \dots, a_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)}, \dots, x_k = a_{2\sigma(k)}, \dots, a_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)} \quad (10)$$

видим, что в полугруппе A разрешимы уравнения

$$a_1 x_1 a_1 = a, \dots, a_k x_k a_k = a_k,$$

что означает регулярность в полугруппе A ее элементов a_1, \dots, a_k .

Достаточность. Если a_1, \dots, a_k — регулярные элементы полугруппы A то ввиду леммы 4.1, в A существуют такие элементы (10), что выполняются равенства (9), откуда следует (8), где элементы $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{l-1}$ имеют вид (7). Таким образом, \mathbf{a} — регулярный элемент в $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$. Предложение доказано.

Предложение 4.2 позволяет сформулировать следующую теорему.

4.3. Теорема. Пусть A — полугруппа, σ — подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда для регулярности l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$ необходимо и достаточно, чтобы регулярной была полугруппа A .

Доказательство. Прежде всего, заметим, что согласно теореме 2.7, универсальная алгебра $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$ является l -арной полугруппой.

Достаточность. Если A — регулярная полугруппа, то все компоненты a_1, \dots, a_k произвольного элемента $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k$ регулярны в ней. Сам элемент \mathbf{a} по предложению 4.2 является регулярным в $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$. Следовательно, $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$ — регулярная l -арная полугруппа.

Необходимость. Пусть $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$ — регулярная l -арная полугруппа, a — произвольный элемент из A , который можно рассматривать как компоненту, например первую, некоторого элемента $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$. Из регулярности этого элемента в $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$, в силу предложения 4.2, вытекает регулярность элемента $a_1 = a$. Следовательно, полугруппа A регулярна. Теорема доказана.

4.4. Следствие. Пусть A — регулярная полугруппа, k делит $l-1$, σ — цикл длины k из S_k . Тогда $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$ — регулярная l -арная полугруппа.

4.5. Следствие. Пусть A — регулярная полугруппа, σ — цикл длины k из S_k . Тогда $\langle A^k, []_{k+1,\sigma,k} \rangle$ — регулярная $(k+1)$ -арная полугруппа.

Полагая в следствии 4.5 $\sigma = (12 \dots k) \in S_k$, получим

4.6. Следствие. Если A — регулярная полугруппа, то $\langle A^k, []_{k+1,(12 \dots k),k} \rangle$ — регулярная $(k+1)$ -арная полугруппа.

Так как полугруппы F_X — всех преобразований множества X , PF_X — всех частичных преобразований множества X , I_X — всех взаимно однозначных частичных преобразований множества X , B_X — всех бинарных отношений на множестве X регулярны [18, с. 34],

то из теоремы 4.3 вытекает

4.7. Следствие. Если подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle F_X^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$, $\langle PF_X^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$, $\langle I_X^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$, $\langle B_X^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$ — регулярные l -арные полугруппы.

Напомним, что ассоциативное кольцо $\langle A, +, \times \rangle$ называют регулярным [19, с. 337], если уравнение (4) разрешимо для любого $a \in A$. Иначе говоря, ассоциативное кольцо называют регулярным, если регулярна его мультипликативная полугруппа.

Ассоциативное $(2, l)$ -кольцо $\langle A, +, [] \rangle$ назовем регулярным, если регулярна его полугруппа $\langle A, [] \rangle$.

Теоремы 3.4 и 4.3 позволяют сформулировать следующую теорему.

4.8. Теорема. Пусть $\langle A, +, \times \rangle$ — ассоциативное кольцо, σ — подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда для регулярности $(2, l)$ -кольца $\langle A^k, +, []_{l,\sigma,k} \rangle$ необходимо и достаточно, чтобы регулярным было кольцо $\langle A, +, \times \rangle$.

Для теорем 4.7 и 4.8 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 4.4 — 4.6.

Так как кольцо матриц над регулярным кольцом, в частности, над телом регулярно [19, с. 338], то из теоремы 4.8 вытекает

4.9. Следствие. Пусть A — кольцо матриц над регулярным кольцом, в частности, над телом, σ — подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда $\langle A^k, +, []_{l,\sigma,k} \rangle$ — регулярное $(2, l)$ -кольцо.

Так как кольцо всех эндоморфизмов линейного пространства над телом регулярно [19, с. 338], то из теоремы 4.8 вытекает

4.10. Следствие. Пусть A — кольцо всех эндоморфизмов линейного пространства над телом, σ — подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда $\langle A^k, +, []_{l,\sigma,k} \rangle$ — регулярное $(2, l)$ -кольцо.

5 Инверсные l -арные полугруппы

Для фиксированных элементов $a_1, \dots, a_{n-1} \in A$ элементарные трансляции

$$\varphi : x \rightarrow [a_1 \dots a_{n-1}x], \quad \psi : x \rightarrow [xa_1 \dots a_{n-1}]$$

l -арной полугруппы $\langle S, [] \rangle$ называют ее сдвигами, соответственно левым и правым.

Регулярную l -арную полугруппу $\langle A, [] \rangle$ называют инверсной [17], если любые два ее идемпотентных сдвига перестановочны.

Это определение можно рассматривать как обобщение на l -арный случай определения инверсной полугруппы как регулярной полугруппы, в которой перестановочны любые два ее идемпотента [16, с.50].

5.1. Теорема. Пусть A — полугруппа, σ — подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1. если A инверсна, то l -арная полугруппа $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$ также инверсна;
2. если l -арная полугруппа $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$ инверсна и выполняется одно из следующих условий:
 - (a) A — полугруппа с левым сокращением;
 - (b) A — полугруппа с правым сокращением;
 - (c) A обладает левой единицей;

(d) A обладает правой единицей,

то полугруппа A также инверсна.

Доказательство.

1. Так как полугруппа A регулярна, то по теореме 4.3 $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$ — регулярная l -арная полугруппа.

Так как любой правый сдвиг l -арной полугруппы перестановочен с любым ее левым сдвигом, то для доказательства инверсности l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$ достаточно доказать перестановочность любых двух левых (правых) идемпотентных сдвигов.

Положим

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k), \mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{ik}), \mathbf{b}_i = (b_{i1}, \dots, b_{ik}), i = 1, \dots, l.$$

Если

$$\varphi_1 : \mathbf{x} \rightarrow [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1} \mathbf{x}]_{l,\sigma,k}, \varphi_2 : \mathbf{x} \rightarrow [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{l-1} \mathbf{x}]_{l,\sigma,k}$$

— произвольные идемпотентные левые сдвиги l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$, то из равенств $\varphi_1 \varphi_1 = \varphi_1, \varphi_2 \varphi_2 = \varphi_2$ вытекает

$$[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1} \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1} \mathbf{x}]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1} \mathbf{x}]_{l,\sigma,k},$$

$$[\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{l-1} \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{l-1} \mathbf{x}]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{l-1} \mathbf{x}]_{l,\sigma,k}.$$

Из последних двух равенств, используя определение l -арной операции $[]_{l,\sigma,k}$ и тождественность подстановки σ^{l-1} , для любого $j = 1, \dots, k$ получим

$$a_{1j} a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} a_{1j} a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_j = a_{1j} a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_j,$$

$$b_{1j} b_{2\sigma(j)} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} b_{1j} b_{2\sigma(j)} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_j = b_{1j} b_{2\sigma(j)} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_j.$$

Из полученных равенств следуют равенства

$$a_j a_j x_j = a_j x_j, b_j b_j x_j = b_j x_j, \quad (11)$$

где

$$a_j = a_{1j} a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, b_j = b_{1j} b_{2\sigma(j)} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}.$$

Каждый элемент полугруппы A , являясь регулярным, обладает и регулярной левой единицей и регулярной правой единицей [15, с. 106]. Обозначим через e_j регулярную правую единицу элемента a_j , а через ε_j — регулярную правую единицу элемента b_j .

Так как элемент x_j может быть выбран в A произвольно, то из (11) вытекает

$$a_j a_j e_j = a_j e_j, b_j b_j \varepsilon_j = b_j \varepsilon_j,$$

откуда следует $a_j a_j = a_j, b_j b_j = b_j$, то есть a_j и b_j — идемпотенты в полугруппе A . А так как, ввиду инверсности A , $a_j b_j = b_j a_j$, то

$$\begin{aligned} a_{1j} a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} b_{1j} b_{2\sigma(j)} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_j &= \\ &= b_{1j} b_{2\sigma(j)} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} a_{1j} a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_j, \end{aligned}$$

для любого $j = 1, \dots, k$. Снова, используя определение l -арной операции $[]_{l,\sigma,k}$ и тождественность подстановки σ^{l-1} , получаем

$$[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1} \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{l-1} \mathbf{x}]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{l-1} \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1} \mathbf{x}]_{l,\sigma,k},$$

откуда $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$, то есть идемпотентные левые сдвиги φ_1 и φ_2 перестановочны. Если теперь

$$\psi_1 : \mathbf{x} \rightarrow [\mathbf{xa}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k}, \quad \psi_2 : \mathbf{x} \rightarrow [\mathbf{xb}_2 \dots \mathbf{b}_l]_{l,\sigma,k}$$

— произвольные идемпотентные правые сдвиги l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$, то, рассуждая аналогично предыдущему, получим

$$x_j a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} a_{lj} a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} a_{lj} = x_j a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} a_{lj},$$

$$x_j b_{2\sigma(j)} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} b_{lj} b_{2\sigma(j)} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} b_{lj} = x_j b_{2\sigma(j)} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} b_{lj},$$

для любого $j = 1, \dots, k$, откуда

$$x_j c_j c_j = x_j c_j, \quad x_j d_j d_j = x_j d_j, \tag{12}$$

где

$$c_j = a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} a_{lj}, \quad d_j = b_{2\sigma(j)} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} b_{lj}.$$

Подставляя вместо x_j в первое равенство из (12) регулярную левую единицу элемента c_j , а во второе равенство из (12) — регулярную левую единицу элемента d_j , получим идемпотентность, а значит и перестановочность элементов c_j и d_j . Поэтому

$$\begin{aligned} x_j a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} a_{lj} b_{2\sigma(j)} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} b_{lj} &= \\ = x_j b_{2\sigma(j)} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} b_{lj} a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} a_{lj}, \end{aligned}$$

откуда

$$[\mathbf{xa}_2 \dots \mathbf{a}_l \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_l]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{xb}_2 \dots \mathbf{b}_l \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k}.$$

Следовательно, $\psi_1\psi_2 = \psi_2\psi_1$, то есть идемпотентные правые сдвиги ψ_1 и ψ_2 перестановочны.

2. Так как l -арная полугруппа $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$ регулярна, то по теореме 4.3 A — регулярная полугруппа.

Для любых идемпотентов a и b и любых элементов x_1, \dots, x_k этой регулярной полугруппы положим

$$\mathbf{a} = (\underbrace{a, \dots, a}_k), \quad \mathbf{b} = (\underbrace{b, \dots, b}_k), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k),$$

$$\tau_1 : \mathbf{x} \rightarrow [\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{l-1} \mathbf{x}]_{l,\sigma,k}, \quad \tau_2 : \mathbf{x} \rightarrow [\underbrace{\mathbf{b} \dots \mathbf{b}}_{l-1} \mathbf{x}]_{l,\sigma,k}.$$

Ввиду идемпотентности a и b , для любого $j = 1, \dots, k$ верно

$$aax_j = ax_j, \quad bbx_j = bx_j,$$

откуда вытекает

$$\underbrace{a \dots a}_{l-1} \underbrace{a \dots a}_{l-1} x_j = \underbrace{a \dots a}_{l-1} x_j, \quad \underbrace{b \dots b}_{l-1} \underbrace{b \dots b}_{l-1} x_j = \underbrace{b \dots b}_{l-1} x_j,$$

а затем

$$[\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{l-1} \underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{l-1} \mathbf{x}]_{l,\sigma,k} = [\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{l-1} \mathbf{x}]_{l,\sigma,k}, \quad [\underbrace{\mathbf{b} \dots \mathbf{b}}_{l-1} \underbrace{\mathbf{b} \dots \mathbf{b}}_{l-1} \mathbf{x}]_{l,\sigma,k} = [\underbrace{\mathbf{b} \dots \mathbf{b}}_{l-1} \mathbf{x}]_{l,\sigma,k}.$$

Следовательно,

$$\tau_1\tau_1 = \tau_1, \tau_2\tau_2 = \tau_2,$$

то есть τ_1 и τ_2 — идемпотентные левые сдвиги инверсной l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$.

А так как в инверсной l -арной полугруппе $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$, то

$$\underbrace{[a \dots a]_{l-1}}_{l-1} \underbrace{[b \dots b]_{l-1}}_{l-1} \mathbf{x} = \underbrace{[b \dots b]_{l-1}}_{l-1} \underbrace{[a \dots a]_{l-1}}_{l-1} \mathbf{x},$$

откуда для любого $j = 1, \dots, k$ верно

$$\underbrace{a \dots a}_{l-1} \underbrace{b \dots b}_{l-1} x_j = \underbrace{b \dots b}_{l-1} \underbrace{a \dots a}_{l-1} x_j.$$

Так как a и b — идемпотенты, то из последних равенств получаем

$$abx_j = bax_j. \quad (13)$$

Аналогично доказывается равенство

$$x_jab = x_jba. \quad (14)$$

Если верно b) или d), то из (13) вытекает $ab = ba$.

Если верно а) или с), то из (14) вытекает $ab = ba$.

Таким образом, идемпотенты a и b перестановочны. Теорема доказана.

5.2. Замечание. Можно было доказать 2) в теореме 5.1, рассматривая идемпотентные правые сдвиги l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$.

Из теоремы 5.1 следует положительный ответ на вопрос З.К. Силагадзе, сформулированный в начале предыдущего раздела. Более того, перенос инверсности осуществляется не только с полугруппы A на l -арную полугруппу $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$, но и в обратном направлении, если в полугруппе A выполняется одно из условий а) – d).

Так как I_X — инверсная полугруппа [18, с. 35], то из теоремы 5.1 вытекает

5.3. Следствие. Если подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle I_X^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$ — инверсная l -арная полугруппа.

6 Регулярные матричные $(2, l)$ -кольца

Обозначим через $M(n, k, F)$ множество всех упорядоченных наборов (A_1, \dots, A_k) матриц A_1, \dots, A_k порядка n над ассоциативным кольцом F . Э. Пост рассматривал такие наборы над полем комплексных чисел, причем все компоненты, рассматривавшихся Э. Постом наборов, являлись невырожденными матрицами [7].

Ясно, что множество $M(n, k, F)$ совпадает с k -ой декартовой степенью множества $M(n, F)$ всех квадратных матриц порядка n над кольцом F :

$$M(n, k, F) = \underbrace{M(n, F) \times \dots \times M(n, F)}_k.$$

А так как множества $M(n, F)$ всех квадратных матриц порядка n над ассоциативным кольцом F является ассоциативным кольцом относительно операции $+$ — сложения матриц и \times — умножение матриц, то ввиду теоремы 3.4, имеет место

6.1. Предложение. Пусть F — ассоциативное кольцо, σ — подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда универсальная алгебра $\langle M(n, k, F), +, []_{l,\sigma,k} \rangle$ является ассоциативным $(2, l)$ -кольцом.

Как уже отмечалось, кольцо $M(n, F)$ над регулярным кольцом F регулярно. Поэтому, ввиду теоремы 4.8, имеет место

6.2. Теорема. Пусть F — регулярное кольцо, σ — подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда $\langle M(n, k, F), +, []_{l, \sigma, k} \rangle$ — регулярное $(2, l)$ -кольцо.

Заметим, что теорема 6.2 — это иная формулировка следствия 4.9.

Литература

- [1] Гальмак А.М. Многместные ассоциативные операции на декартовых степенях // *Вестні НАН Беларусі*, №3, 2008, с. 28–34.
- [2] Гальмак А.М. Полиадические операции на декартовых степенях // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.*, №1, 2008, с. 112–139.
- [3] Гальмак А.М. Многместные операции на декартовых степенях // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.*, №2, 2008, с. 172–192.
- [4] Гальмак А.М. Об n -арных операциях на декартовых степенях n -арных группоидов // *Вестнік МДУ ім. А.А. Куляшова.*, № 2-3(33), 2009, с. 172–178.
- [5] Гальмак А.М. Многместные операции на декартовых степенях. Минск: Изд. центр БГУ, 2009, 265 с.
- [6] Гальмак А.М. Об операции $[]_{l, \sigma, k}$ // *Вестнік МДУ ім. А.А. Куляшова.*, № 1(35), 2010, с. 34–38.
- [7] Post E.L. Polyadic groups // *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 48, №2, 1940, pp. 208–350.
- [8] Гальмак А.М. n -Арные группы. Часть 1. Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины, 2003, 202с.
- [9] Гальмак А.М. n -Арные группы. Часть 2. Минск, Изд. центр БГУ, 2007, 324с.
- [10] Гальмак А.М. n -Арные группы // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.*, Москва, №1, 2007, с. 112–139.
- [11] Џирона G. On $[m, n]$ -rings / G. Џирона // *Bull. Soc. math. phys. Mased.*, Vol. 16, 1965, pp. 5–10.
- [12] Crombez G. On (n, m) -rings // *Abh. Math. Sem. Univ.*, Vol. 37, 1972, pp. 180–199.
- [13] Никитин А.Н. Радиал Джекобсона артиновых $(2, n)$ -колец. // *Вестн. Моск. ун-та: Сер. 1. — Математика. Механика.*, №4, 1984, с. 18–22.
- [14] Никитин А.Н. Полупростые артиновы $(2, n)$ -кольца // *Вестн. Моск. ун-та: Сер. 1. — Математика. Механика.*, №6, 1984, с. 3–7.
- [15] Ляпин Е.С. Полугруппы. М., Физматлит, 1960, 592 с.
- [16] Клиффорд А. Алгебраическая теория полугрупп. М., Мир, 1972, 285 с.
- [17] Колесников О.В. Полиадические полугруппы. Препринт. Деп. в ВИНТИ, №2079-77 Деп., 1977, 28 с.
- [18] Шеврин Л.Н. Полугруппы. Общая алгебра. Т. 2. М., Наука, 1991, с. 11–191.
- [19] Скорняков Л.А. Кольца и модули. Общая алгебра. Т. 1. М., Наука, 1990, с. 291–561.
- [20] Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М., Наука, 1983, 272 с.

POLYADIC OPERATIONS ON THE CARTESIAN POWERS OF GROUPOIDS, SEMIGROUPS AND RINGS

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technology, Belarus

mgup@mogilev.by

Previously was shown [2] that for any numbers $n \geq 3$, $s \geq 1$, $m \geq 2$, on the Cartesian powers A^{n-1} and $A^{m(n-1)}$ of the semigroup A , are respectively defined the $(s(n-1)+1)$ -ary operation $[]_{s(n-1)+1, n-1}$, and the n -ary operation $[]_{n, m, m(n-1)}$. Also was shown that for any three integers $k \geq 2$, $l \geq 2$ and $m \geq 1$, and any permutation $\sigma \in S_k$ on the Cartesian power B^{mk} of the set B , is defined an l -nary relation $[]_{l, \sigma, m, mk}$. In the present paper studies concerning the polyadic operations on the cartesian powers of universal algebras are continued.

Key Words: polyadic operation, groupoid, semigroup, rings.

О ПРОСТРАНСТВЕ НАД АЛГЕБРОЙ ПОЛИЧИСЕЛ С МЕТРИКОЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА

А.В. Букушева

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

bukusheva@list.ru

На гладком многообразии определяется полиаффинорная алгебра, согласованная с метрикой Бервальда-Моора. Определяются условия, при которых многообразие с полиаффинорной алгеброй наделяется структурой пространства над алгеброй поличисел.

Ключевые слова: метрика Бервальда-Моора, полиаффинорная алгебра.

1 Введение

Под пространством поличисел понимается коммутативная ассоциативная алгебра, естественным образом согласованная с метрической функцией Бервальда-Моора (БМ). Алгебра поличисел P_n является обобщением алгебры двойных чисел. В алгебре поличисел P_n существует базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ такой, что $\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha$. Исследование пространств такого вида получило свое развитие в работах [1, 2]. Если алгебру поличисел рассматривать как гладкое многообразие M , то соответствующая метрика БМ определяется функцией, не зависящей от выбора точки многообразия M . В более общей ситуации, метрическая функция БМ определяется некоторым гладким полем полиформ. В дальнейшем для удобства всякое тензорное поле мы будем называть тензором и, в частности, поле полиформ - полиформой. Пространство с метрикой БМ изучено достаточно подробно (см., например, [3, 4]). При исследовании пространств БМ, как правило, используются методы финслеровой геометрии. Однако, учитывая, что в основе определения метрики БМ лежит полилинейная форма, при изучении пространств БМ можно использовать линейную ковариантную производную и соответствующие ей дифференциальные инварианты - кривизну, кручение и т.д. В настоящей работе на многообразии M с метрикой Бервальда-Моора, определяемой полилинейной формой g , естественным образом задается полиаффинорная алгебра с аффинорами $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$. В случае, когда тензорная структура $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, g)$ интегрируема, мы получаем уже известное пространство поличисел. Используя сведения по интегрируемым аффинорным структурам и пространствам над алгебрами, содержащиеся в обзорах [5, 6], а также работу по гиперкомплексным структурам [7], мы находим условия, при которых финслерово многообразие с метрикой БМ и согласованной с ней полиаффинорной структурой является пространством над алгеброй поличисел.

2 Определение полиаффинорной структуры

Пусть M - связное C^∞ - многообразие размерности n . Все встречающиеся на M функции и геометрические объекты будем считать бесконечно дифференцируемыми. Рассмотрим на многообразии M алгебраическую метрику n -го порядка, т.е. n -линейную симметрическую форму g с компонентами $g_{\alpha_1\alpha_2,\dots,\alpha_n}(x)$ относительно произвольного, вообще говоря, неголономного поля базисов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.

Будем говорить, что ненулевой вектор \vec{e} определяет нулевое направление формы g , если

$$g(\vec{e}, \vec{e}, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_n) = 0.$$

Не нулевая алгебраическая метрика называется метрикой Бервальда-Моора, если существует поле базисов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ таких, что каждый вектор \vec{e}_α базиса задает нулевое направление формы g . Такое поле базисов будем называть адаптированным базисом формы g , или, просто адаптированным базисом. Форма g в адаптированном базисе имеет единственную, с точностью до перестановки индексов, отличную от нуля компоненту $g_{12\dots n}$.

В области определения поля адаптированных базисов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ определим n -гладких одномерных распределений D_1, D_2, \dots, D_n , полагая

$$D_\alpha = \langle \vec{e}_\alpha \rangle. \quad (1)$$

Из сформулированной ниже теоремы следует, что распределения D_1, D_2, \dots, D_n могут быть корректно определены на всем многообразии M .

Теорема 1. *Всякий вектор \vec{e} , задающий нулевое направление формы g , коллинеарен одному из векторов адаптированного базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.*

Таким образом, определение распределений D_α не зависит от выбора адаптированного базиса и тем самым, метрика БМ определяет на M структуру почти произведения:

$$TM = \bigoplus_{\alpha=1}^n D_\alpha. \quad (2)$$

Очевидно, что две метрики g_1, g_2 Бервальда-Моора конформны ($g_1 = \lambda(x)g_2$) тогда и только тогда, когда они определяют одно и тоже разложение (2).

Рассмотрим n распределений $D_{\hat{\alpha}}$ определяемых следующим образом:

$$D_{\hat{\alpha}} = D_1 \oplus \dots \oplus D_{\alpha-1} \oplus D_{\alpha+1} \oplus \dots \oplus D_n.$$

Для любого α , таким образом, получаем разложение

$$TM = D_\alpha \oplus D_{\hat{\alpha}}. \quad (3)$$

Разложение (3) определяет семейство проекторов

$$\varphi_\alpha : TM \rightarrow D_\alpha.$$

Совокупность аффиноров φ_α относительно операции композиции образует n -мерную полиаффинорную алгебру, обозначаемую нами AH_n , изоморфную алгебре P_n . Будем говорить, что алгебра AH_n и метрика g - согласованы.

Еще раз подчеркнем, что задание метрики БМ влечет задание полиаффинорной алгебры специального вида. Обратное, если на гладком многообразии задана полиаффинорная алгебра, определяемая разложением (2), то всякая полилинейна форма, удовлетворяющая равенству

$$g(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = \sum_{\sigma} g(\varphi_1(\vec{x}_{\sigma(1)}), \varphi_2(\vec{x}_{\sigma(2)}), \dots, \varphi_n(\vec{x}_{\sigma(n)})) \quad (4)$$

представляет собой метрику БМ, согласованную с полиаффинорной структурой. Любые две такие метрики конформны.

Базис, адаптированный форме g , естественно назвать адаптированным к полиаффинорной алгебре. Впредь такой базис будем называть адаптированным.

Если на многообразии M существует атлас, состоящий из карт, адаптированных к метрике g , т.е., задающих адаптированный базис: $\partial_\alpha = \vec{e}_\alpha$, то алгебра AH_n оказывается интегрируемой. В этом случае многообразие M может рассматриваться как многообразие $M(P_n, g)$ над алгеброй поличисел P_n . Впредь будем считать, что полиаффинорная алгебра интегрируема, а любая используемая система координат - адаптированная.

В адаптированном базисе аффино́р φ_α имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{5}$$

В матрице (5) единица стоит на пересечении α - строки и α - столбца.

3 Связности, совместимые с метрикой БМ

Рассмотрим задачу нахождения связности, совместимой с метрикой БМ. Имеет место

Теорема 2. *На многообразии $M(P_n, g)$ существует единственная связность нулевого кручения, совместимая с метрикой БМ g .*

Предположим, что на $M(P_n, g)$ существует линейная связность ∇ , совместимая с метрикой g . Используя равенство $\nabla g = 0$, получаем, что её коэффициенты $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ обращаются в нуль, если $\beta \neq \gamma$, кроме того, выполняется равенство

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\beta = \frac{\partial_\alpha g_{12\dots n}}{g_{12\dots n}}.$$

Если потребовать обращения кручения S в нуль, то отличными от нуля компонентами связности ∇ будут:

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha = \frac{\partial_\alpha g_{12\dots n}}{g_{12\dots n}}. \tag{6}$$

В равенстве (6) суммирования по α нет.

Для доказательства существования связности нулевого кручения совместимой с метрикой БМ g , достаточно в адаптированных картах задать её ненулевые компоненты с помощью равенства (6) и показать корректность такого задания связности.

Тензорной структурой на гладком многообразии называется определенная совокупность тензорных полей. Таким образом, в нашем рассмотрении находится тензорная структура, включающая в себя систему полиаффино́ров и согласованную с этой системой полилинейную форму.

Тензорная структура называется интегрируемой, если на многообразии можно найти такой атлас, что всякий тензор структуры имеет в любой карте из этого атласа постоянные компоненты. Кручкович Г.И. в своей работе [7] сформулировал следующее утверждение: "Если тензорная структура допускает совместимую связность нулевой кривизны без кручения, то такая структура интегрируема. Всякая интегрируемая тензорная структура допускает связность нулевой кривизны без кручения, по крайней мере, локально".

Предложение Кручковича позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Тензорная структура $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, g)$ интегрируема тогда и только тогда, когда тензор кривизны связности (6) равен нулю.*

Используя равенство (6) и выражение в координатах тензора кривизны R получаем, что единственным отличным от нуля компонентом тензора R являются

$$K_{acc}^c = \partial_a \frac{\partial_c g_{12\dots n}}{g_{12\dots n}}$$

($a \neq c$, по c суммирования нет).

Таким образом, имеет место

Теорема 4. *Метрика БМ интегрируема тогда и только тогда, когда ее компоненты удовлетворяют следующей системе уравнений в частных производных*

$$\partial_\alpha \frac{\partial_c g_{12\dots n}}{g_{12\dots n}} = 0.$$

Найдем условия, при которых на многообразии с тензорной структурой $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, g)$ допускается структура многообразия над алгеброй поличисел. Последнее означает, что среди действительных карт можно составить атлас из карт, связанных между собой Н-аналитическими преобразованиями.

Известно [7], что Н-аналитичность эквивалентна выполнению следующего условия: $C_\alpha D = DC_\alpha$. Нетрудно убедиться в том, что две действительные карты $\chi_1(x^\alpha)$, $\chi_2(y^\alpha)$ связаны между собой Н-аналитическими преобразованиями тогда и только тогда, когда $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$, $\alpha \neq \beta$.

В тоже время, Н-аналитичность эквивалентна интегрируемости полиаффинорной алгебры. Это означает, что условие $\partial_\alpha \frac{\partial_c g_{12\dots n}}{g_{12\dots n}} = 0$ влечет выполнения условия $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$, $\alpha \neq \beta$ для некоторого атласа адаптированных карт. Интегрируемость метрики БМ влечет интегрируемость алгебры $АН_n$ и, одновременно, то, что эта метрика индуцирует метрику, не зависящую от точки, уже на пространстве над алгеброй [7]. Отсюда следует, что справедливыми оказываются следующие утверждения:

Теорема 5. *Полиаффинорная алгебра $АН_n$ интегрируема тогда и только тогда, когда выполняются условия $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$, $\alpha \neq \beta$.*

Теорема 6. *Многообразие с тензорной структурой $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, g)$ является пространством над алгеброй поличисел с постоянной метрикой тогда и только тогда, когда тензор кривизны связности (6) равен нулю.*

Литература

- [1] Павлов Д.Г. Обобщённые аксиомы скалярного произведения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, №1, 2004, с. 5-19.
- [2] Гарасько Г.И., Павлов Д.Г. Геометрия невырожденных поличисел // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, №1(7), 2007 с. 3-25.
- [3] Рунд, Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., Наука, 1981, 502 с.
- [4] Atanasiu Gh., Balan V., Neagu M. The 4-poliforms of momenta $K(p) = \sqrt[4]{p_1 p_2 p_3 p_4}$ and its applications in the Hamilton Geometry, lecture at The Workshop "Geometry of Finsler spaces with the Berwald-Moor metric 15-22 October 2005, Cairo, Egypt.
- [5] Широков А.П. Пространства над алгебрами и их применения // *Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения/ВИНИТИ*. - М., 2002. т. 73, с. 135-161.
- [6] Вишневский В.В. Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации // *Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения/ВИНИТИ*. М., 2002. т. 73, с. 5-64.
- [7] Кручкович Г.И. Гиперкомплексные структуры на многообразиях, I // *Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу*. М., 1972. т. 16, с. 174-201.

THE SPACE OVER THE ALGEBRA OF POLYNOMIALS WITH BERWALD-MOOR METRIC

A.V. Bukusheva

Saratov State University, Saratov, Russia

bukusheva@list.ru

On a smooth manifold is defined a poly-affine algebra compatible with a Berwald-Moor metric. We define the conditions under which a manifold with a poly-affine algebra can be equipped with the structure of a space over the algebra of polynomials.

Key Words: a Berwald-Moor metric, a poly-affine algebra.

ПОСТРОЕНИЕ КРИВИЗНЫ НА АЛГЕБРЕ ОКТАВ КЭЛИ

В.Ю. Дорофеев

ГОУ ВПО Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена,
Санкт-Петербург, Россия

friedlab@mail.ru

На алгебре октав Кэли построен лагранжиан материальных полей лептон-электронного сектора. Пространство состояний модели оказывается десятимерным. Предлагается определить неассоциативную часть лагранжиана как проявление гравитации. Оказалось, что пара противоположно заряженных безмассовых векторных бозонов индуцирует гравитацию. Показывается, что модель данного лагранжиана с метрикой Фридмана и Шварцшильда согласована.

Ключевые слова: октонионы, октавы Кэли, слабые взаимодействия, неассоциативность, ОТО.

Введение

Современная теория поля сталкивается с проблемой объединения электрослабых взаимодействий, имеющих лоренц-инвариантную структуру и теорию гравитации ОТО, основанную на общекординатных преобразованиях. Решение этой проблемы возможно, например, за счёт введения дополнительных измерений, которые предполагаются заметными только на малых расстояниях. Этим фактически предполагается сложная топологическая структура окружающего нас пространства. Автор этой работы предлагает иной мировоззренческий подход. А что, если всё дело в математическом аппарате, посредством которого мы пытаемся описать окружающий нас мир? Современные теории электромагнитных и слабых взаимодействий — это теории, основанные на ассоциативной алгебре. В этих теориях пространство-время играет роль параметров-координат векторных полей. Сами взаимодействия обусловлены векторными полями. Векторный характер этих полей имеет динамическую природу так как вводится за счёт удлинения производной и имеет по выражению Д.Д. Иваненко, компенсационный характер. Но этот термин не прижился, так как он отражает только способ введения взаимодействия, сам же лагранжиан строится по принципу калибровочной инвариантности, по этой причине и векторные поля — переносчики взаимодействия называются калибровочными. Современная теория гравитации строится как теория общекординатной инвариантности лагранжиана. В случае квантования — корпускулярная интерпретация накладывается как на полевой сектор, так и на сектор общекординатных преобразований. Тем самым параметры взаимодействия — координаты частицы — оказываются физическими полями. Автору представляется такой подход противоречивым. Может быть имеющиеся теории хороши только в своих областях? Скажем для ТЕР-ных энергий справедлива СТ и ОТО по отдельности. Но их объединённая модель требует другой алгебры? Поисками этой новой алгебры и решил заняться автор данной работы. Так как $SU(2) \times U(1)$ -симметрия может быть описана в рамках кватернионных представлений, то можно попробовать рассмотреть расширение кватернионной алгебры. Если судить по СТ, то это расширение должно быть обратимым, то есть алгебра с делением. Проблема нахождения всех гиперкомплексных систем с делением не решена до сих пор. Тем не менее известна **теорема Фробениуса**: *любая ассоциативная алгебра с делением изоморфна одной из трёх алгебр: алгебре действительных чисел, алгебре комплексных чисел или алгебре кватернионов*. Поэтому, видимо, необходимо выйти за пределы ассоциативных алгебр и тогда на помощь приходит **обобщённая теорема Фробениуса**: *любая альтернативная алгебра с делением изоморфна одной из четырёх*

алгебр: алгебре действительных чисел, алгебре комплексных чисел, алгебре кватернионов, или октав.

Возможно первой попыткой применения алгебры октонионов был сделан в работе [1], где вводилась октонионная квантовая механика. Некоторые авторы связывают расширенную алгебру с расширенной интерпретацией пространства-времени [2]. Ряд авторов понимают расширение на новую алгебру как получение новых свойств в рамках электромагнитной теории [3]. Предлагается полевая интерпретация нового вида взаимодействия на алгебре октонионов [4].

Прогресс в возможности расширения физической теории на алгебру октонионов можно связать с развитием формализма представления алгебры октав Кэли в работах Цорна [5, 6], когда были предложены хорошие матричные представления неассоциативной алгебры. Платой за матричный вид был особый закон умножения.

В данной работе автор придерживается полевой интерпретации расширения физической теории на новую алгебру, отражённую в работе [7]. В работе [8] автором была предложена физическая интерпретация октонионных полей. Наконец, теоретическую схему построения лагранжиана, предложенную в [7], автор предлагает назвать О-теорией [9].

1 Алгебра октонионов

Удвоение алгебры кватернионов приводит, в частности, к алгебре октонионов — \mathcal{O} , образующих линейное пространство над вещественным полем \mathbb{R} : всякий элемент \mathbf{o} алгебры октонионов \mathcal{O} имеет линейное представление вида

$$\mathbf{o} = \sum_{j=0}^7 \alpha^j e^j, \quad \alpha^j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, 2, \dots, 7.$$

Над образующими $e^j \in \mathcal{O}$ определена операция умножения. В частности,

$$(e^0)^2 = 1, \quad (e^j)^2 = -1, \quad j = 1, 2, \dots, 7$$

то есть первая компонента — это фактически вещественное число, а остальные играют роль комплексных единиц.

Если ввести обозначение $\hat{e}^k = e^{k+4}, k = 1, 2, 3$, то умножение на алгебре октонионов определяется следующим образом ($i, j, k = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} e^i e^j &= -\delta^{ij} e^0 + \varepsilon^{ijk} e^k & \hat{e}^i \hat{e}^j &= -\delta^{ij} e^0 - \varepsilon^{ijk} e^k \\ e^i \hat{e}^j &= -\delta^{ij} e^4 - \varepsilon^{ijk} \hat{e}^k & e^i e^4 &= \hat{e}^i, \quad e^4 \hat{e}^i = e^i \end{aligned} \tag{1}$$

где введён полностью антисимметричный символ $\varepsilon^{123} = 1$ по перестановке своих индексов. Нетрудно убедиться, что указанное правило умножения образующих приводит к неассоциативной алгебре. При этом ($i, j, k, l = 1, 2, \dots, 7$)

$$\{e^i, e^j, e^k\} = (e^i e^j) e^k - e^i (e^j e^k) = 2\varepsilon^{ijkl} e^l \tag{2}$$

где ε^{ijkl} — полностью антисимметричный символ, равный единице для следующих комбинаций:

$$1247, \quad 1265, \quad 2345, \quad 2376, \quad 3146, \quad 3157, \quad 4576. \tag{3}$$

Умножение (1) можно представить в виде таблицы

	e^1	e^2	e^3	e^4	e^5	e^6	e^7
$i = e^1$	-1	e^3	$-e^2$	e^5	$-e^4$	$-e^7$	e^6
$j = e^2$	$-e^3$	-1	e^1	e^6	e^7	$-e^4$	$-e^5$
$k = e^3$	e^2	$-e^1$	-1	e^7	$-e^6$	e^5	$-e^4$
$E = e^4$	$-e^5$	$-e^6$	$-e^7$	-1	e^1	e^2	e^3
$I = e^5$	e^4	$-e^7$	e^6	$-e^1$	-1	$-e^3$	e^2
$J = e^6$	e^7	e^4	$-e^5$	$-e^2$	e^3	-1	$-e^1$
$K = e^7$	$-e^6$	e^5	e^4	$-e^3$	$-e^2$	e^1	-1

Таблица 1:

Известно, что алгебра октонионов является альтернативной относительно умножения, то есть для любых её двух элементов a, b выполняется свойство

$$(a \cdot b) \cdot b = a \cdot (b \cdot b), \quad b \cdot (b \cdot a) = (b \cdot b) \cdot a \quad (4)$$

Дополнительно можно показать, что

$$(a \cdot b) \cdot \bar{b} = a \cdot (b \cdot \bar{b}), \quad \bar{b} \cdot (b \cdot a) = (\bar{b} \cdot b) \cdot a \quad (5)$$

Алгебра октонионов не может быть представлена в виде матриц с обычным умножением, но можно ввести специальное умножение, которое допускает такое представление. В качестве таких матриц можно выбрать единичную матрицу, соответствующую единичному элементу e^0 и семь матриц $\tilde{\Sigma}^k$ для которых можно определить закон умножения $*$ по правилу ($i, j, k = 1, 2, \dots, 7$):

$$\tilde{\Sigma}^i * \tilde{\Sigma}^j = -\delta^{ij} + \varepsilon^{ijk} \tilde{\Sigma}^k \quad (6)$$

где ненулевыми значениями полностью антисимметричного символа ε^{ijk} является только

$$\varepsilon^{123} = \varepsilon^{145} = \varepsilon^{176} = \varepsilon^{246} = \varepsilon^{257} = \varepsilon^{347} = \varepsilon^{365} = 1 \quad (7)$$

Вместо матриц $\tilde{\Sigma}^k, k = 1, 2, \dots, 7$ удобно пользоваться матрицами $\Sigma^k = i\tilde{\Sigma}^k, k = 1, 2, \dots, 7$, для которых, как следует из (6), умножение определяется следующим образом:

$$\Sigma^i * \Sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk} \Sigma^k, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, 7. \quad (8)$$

Определим матрицы Σ^i следующим образом [5, 6], $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \Sigma^0 &= \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^0 \end{pmatrix} & \Sigma^i &= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\ \Sigma^4 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \Sigma^{4+i} &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

где σ^0 — единичная матрица и $\sigma^i, i = 1, 2, 3$ — матрицы Паули:

$$\begin{aligned} \sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \sigma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

Ясно, что данная алгебра матриц реализует представление гиперкомплексного множества вещественных чисел размерности 8 — алгебру октав Кэли над полем вещественных чисел. С другой стороны, можно учесть тот факт, что образующие имеют матричное представление: складывать эти матрицы будем как обычно — при сложении двух матриц складываются их соответствующие элементы. Умножать эти матрицы на число будем по правилу: при умножении матрицы на число умножаются все элементы этой матрицы на число. Понятно, что данное правило коммутативно как для действительных, так и для комплексных чисел. Если мы работаем только лишь в поле вещественных чисел (относительно умножения), то правило сложения матриц и умножение на число позволяет любой элемент алгебры октав Кэли представить в виде матрицы, которую при желании можно представить разложением по образующим. Тогда любой элемент алгебры октав Кэли в данном матричном представлении имеет вид:

$$\mathfrak{o} = \begin{pmatrix} \lambda I & A \\ A^+ & \lambda^* I \end{pmatrix} \quad (11)$$

где A, B — линейная комбинация матриц Паули с комплексными коэффициентами, λ — комплексное число и $I = \sigma^0$ [6].

Кроме матриц Σ^i введём также обобщённые матрицы $\mathfrak{O} \supset \mathcal{O}$ по правилу: всякая обобщённая матрица $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ имеет вид:

$$\mathfrak{o} = \begin{pmatrix} \lambda I & A \\ B & \xi I \end{pmatrix} \quad (12)$$

где A, B — комплексные матрицы (2×2) , λ, ξ — комплексные функции.

Складываются обобщённые матрицы так:

$$\mathfrak{o} + \mathfrak{o}' = \begin{pmatrix} \lambda I & A \\ B & \xi I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda' I & A' \\ B' & \xi' I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \lambda')I & A + A' \\ B + B' & (\xi + \xi')I \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Закон умножения для таких матриц определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{o} * \mathfrak{o}' &= \begin{pmatrix} \lambda I & A \\ B & \xi I \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda' I & A' \\ B' & \xi' I \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda\lambda' + \frac{1}{2}\text{tr}(AB'))I & \lambda A' + \xi' A + \frac{i}{2}[B, B'] \\ \lambda' B + \xi B' - \frac{i}{2}[A, A'] & (\xi\xi' + \frac{1}{2}\text{tr}(BA'))I \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

Нетрудно проверить, что относительно умножения (14) матрицы $\Sigma^i, i = 1, 2, \dots, 7$ образуют алгебру октонионов.

Эрмитово сопряжение на алгебре обобщённых матриц определяется так:

$$\begin{pmatrix} \lambda I & A \\ B & \xi I \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} \lambda^* I & B^+ \\ A^+ & \xi^* I \end{pmatrix} \quad (15)$$

где λ^*, ξ^* — комплексносопряжённые функции и A^+, B^+ — эрмитово сопряжённые матрицы. Из определения эрмитова сопряжения следует, что введённые ранее матрицы $\Sigma^k, k = 0, 1, \dots, 7$ эрмитовы, а матрицы $\tilde{\Sigma}^k, k = 1, 2, \dots, 7$ — антиэрмитовы.

Очевидно, что как сложение, так и умножение не выводит обобщённые матрицы из пространства обобщённых матриц.

2 Вектор состояния на алгебре октонионов

Ввиду специального закона умножения матриц на алгебре октонионов невозможно определить умножение матрицы на столбец как это имеет место в случае обычного умножения матриц. Поэтому в качестве вектора состояния будем использовать не вектор-столбцы, а матрицы $\Psi(x)$ из обобщённой алгебры матриц, введённой выше:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda(x)I & A(x) \\ B(x) & \xi(x)I \end{pmatrix} \quad (16)$$

Договоримся квадратом нормы вектора состояния $\Psi(x)$ называть число

$$\begin{aligned} \|\Psi(x)\|^2 &= \frac{1}{2} \cdot \text{tr}(\Psi^* * \Psi) = \frac{1}{2} \cdot \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \lambda^* I & B^+ \\ A^+ & \xi^* I \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda I & A \\ B & \xi I \end{pmatrix} \right) = \\ &= \lambda^* \lambda + \xi^* \xi + \frac{1}{2} \text{tr}(B^+ B + A^+ A) \end{aligned} \quad (17)$$

(Сопряжённое состояние Ψ^* будем понимать в смысле эрмитова сопряжения (15), то есть $\Psi^* = \Psi^+$)

Таким образом на алгебре расширенного матричного представления октонионов можно ввести декуплет комплексных полей $\varphi_i(x)$: $\lambda(x), \xi(x), \varphi_1^i(x), \varphi_2^i(x), i = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda(x)I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \varphi_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi(x)I \end{pmatrix} \\ \varphi_{2+i}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \varphi_{(1)}^i(x)\sigma^i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \varphi_{6+i}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_{(2)}^i(x)\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

(по индексу i здесь нет суммирования) или их линейных комбинаций.

В дальнейшем на векторах состояния нас будет интересовать потенциальная энергия

$$V(\Psi) = -m^2 \|\Psi^* * \Psi\| + \frac{f}{4} \|\Psi^* * \Psi\|^2 \quad (19)$$

где m и f — некоторые постоянные.

Малость вектора состояния $\Psi(x)$ (обозначим его как $\delta\Psi(x)$), будем понимать как малость его нормы, то есть как следует из (17) все матричные элементы $\delta\Psi(x)$ близки к

нулю. В этом случае под вариацией потенциальной энергии понимаем величину:

$$\begin{aligned} \delta V(\Psi) &= -m^2 \text{tr}(\delta \Psi^* * \Psi) - m^2 \text{tr}(\Psi^* * \delta \Psi) + \frac{f}{2} \text{tr}(\delta \Psi^* * \Psi) + \frac{f}{2} \|\Psi\|^2 \text{tr}(\Psi^* * \delta \Psi) = \\ &= \text{tr}(\delta \Psi^* * (-m^2 + \frac{f}{2} \|\Psi\|^2) \Psi) + \Psi^* (-m^2 + \frac{f}{2} \|\Psi\|^2) * \delta \Psi \end{aligned} \quad (20)$$

Будем понимать частные производные по состояниям $\Psi(x)$ и $\Psi^*(x)$ в смысле вариации (20).

Минимальное значение потенциальной энергии $V(\Psi)$ находится при

$$\frac{\partial V}{\partial \Psi} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \Psi^*} = 0 \quad (21)$$

что при $m^2, f > 0$, как видно из (20), даёт

$$\|\Psi_0\|^2 = \frac{2m^2}{f}$$

Введём лагранжиан матрицы состояния $\Psi(x)$:

$$\mathfrak{L}_\Psi = \text{tr}(\partial_\mu \Psi^* * \partial^\mu \Psi) + m^2 \|\Psi\|^2 - \frac{f}{4} \|\Psi\|^4 \quad (22)$$

Представим поле $\Psi(x)$ вблизи минимума потенциальной энергии следующим образом

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2m}{\sqrt{f}} \cdot I + \sigma(x) \cdot I + \Theta^k(x) \cdot i\Sigma^k \right) * \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^3 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (23)$$

полагая, что $\sigma(x)$ и $\Theta^k(x)$ — некоторые функции (здесь и далее по повторяющимся индексам $k = 1, 2, \dots, 7$ подразумевается суммирование, если не оговорено иное). Так как в дальнейшем нас будет интересовать только один случай — равенство их нулю, то вид и свойства этих функций в данной работе рассматриваться не будут. Как нетрудно убедиться:

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^3 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right\|^2 = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i\sigma^3 & I \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^3 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right) = 4.$$

3 Алгебраическая структура пространства состояний

Умножение (14) определено для матриц более широкого класса, чем матриц, являющихся представлением алгебры октонионов, $\Sigma^a, a = 0, 1, 2, \dots, 7$ введённых ранее. Можно ввести ещё две эрмитовы матрицы

$$f^8 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad f^9 = \begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

которые сохраняют произведение (14).

Таким образом совокупность матриц

$$f^a = \Sigma^a, \quad a = 0, 1, \dots, 7, \quad f^8, \quad f^9 \quad (25)$$

образует базис линейного пространства над полем комплексных чисел, которое назовём расширенным пространством октонионов $\overline{\mathcal{O}}$.

Заметим, что

$$(f^8 * f^1) * (f^1 * f^8) = 0, \quad f^8 * (f^1 * f^1) * f^8 = 1.$$

С помощью умножения (14) введём свёртку в пространстве $\overline{\mathcal{O}}$ (то есть отображение $\overline{\mathcal{O}} \times \overline{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} (\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2) &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathfrak{o}_1^+ * \mathfrak{o}_2) = \frac{1}{2} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1^* I & B_1^+ \\ A_1^+ & \xi_1^* I \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda_2 I & A_2 \\ B_2 & \xi_2 I \end{pmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} (\lambda_1^* \lambda_2 + \frac{1}{2} \text{tr}(B_1^+ B_2)) I & \lambda_1^* A_2 + \xi_2 B_1^+ + \frac{i}{2} [A_1^+, B_2] \\ \lambda_2 A_1^+ + \xi_1^* B_2 - \frac{i}{2} [B_1^+, A_2] & (\xi_1^* \xi_2 + \frac{1}{2} \text{tr}(A_1^+ A_2)) I \end{pmatrix} \right) = \\ &= \lambda_1^* \lambda_2 + \xi_1^* \xi_2 + \frac{1}{2} \text{tr}(B_1^+ B_2) + \frac{1}{2} \text{tr}(A_1^+ A_2). \end{aligned} \quad (26)$$

Нормой вектора \mathfrak{o} в обобщённом пространстве октонионов $\overline{\mathcal{O}}$

$$\mathfrak{o} = \begin{pmatrix} \lambda^* I & B^+ \\ A^+ & \xi^* I \end{pmatrix}$$

называется число

$$\|\mathfrak{o}\| = \sqrt{|\lambda|^2 + |\xi|^2 + \frac{1}{2} \text{tr}(A^+ A) + \frac{1}{2} \text{tr}(B^+ B)}.$$

Относительно свёртки (26) имеется ортонормированный базис

$$\begin{aligned} e^0 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ e^{4+i} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad e^8 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

4 Неассоциативность следа произведения четырёх октонионов

Покажем, что след от произведения любых трёх матриц представления алгебры октонионов ассоциативен, то есть

$$\text{tr}((A * B) * C) = \text{tr}(A * (B * C)) = \text{tr}(A * B * C)$$

Очевидно, что достаточно убедиться в ассоциативности образующих. Рассмотрим $\Sigma^a * \Sigma^b * \Sigma^c$. Если одна из образующих единица, то утверждение очевидно. Пусть среди них нет единичной. Тогда

$$\text{tr}((\Sigma^a * \Sigma^b) * \Sigma^c) = \text{tr}((\delta^{ab} + i\varepsilon^{abd}\Sigma^d) * \Sigma^c) = 4i\varepsilon^{abc}$$

$$\text{tr}(\Sigma^a * (\Sigma^b * \Sigma^c)) = \text{tr}(\Sigma^a * (\delta^{bc} + i\varepsilon^{bcd}\Sigma^d)) = 4i\varepsilon^{bca} = 4i\varepsilon^{abc}$$

что и требовалось доказать.

Введём матрицу

$$u_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^3 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\Sigma^0 + \Sigma^4 - \Sigma^3 - i\Sigma^7) \quad (28)$$

Так как матрица u_0 играет важную роль в построении лагранжиана октонионов, то найдём скалярные произведения этой матрицы с образующими Σ^a алгебры октонионов.

$$\text{tr}((u_0^+ * (\Sigma^a * \Sigma^b) * u_0),$$

$$\text{tr}((u_0^+ * \Sigma^a) * (\Sigma^b * u_0))$$

(Очевидно оставшиеся способы расстановки скобок являются следствием выписанных и ассоциативности следа трёх матриц.)

$b = 1, \dots, 7$	$\text{tr}(u_0^+ * \Sigma^b * u_0) =$	$-\delta^{3b}$
$a, b = 1, 2, 3$	$\text{tr}((u_0^+ * \Sigma^a) * (\Sigma^b * u_0)) =$	δ^{ab}
$a, b = 1, 2, 3$	$\text{tr}(u_0^+ * (\Sigma^a * \Sigma^b) * u_0) =$	$\delta^{ab} - i\varepsilon^{4ab7}$
$a, b = 5, 6, 7$	$\text{tr}((u_0^+ * \Sigma^a) * (\Sigma^b * u_0)) =$	δ^{ab}
$a, b = 5, 6, 7$	$\text{tr}(u_0^+ * (\Sigma^a * \Sigma^b) * u_0) =$	$\delta^{ab} - i\varepsilon^{4ab7}$
$a = 4, b = 1, 2, 3$	$\text{tr}(u_0^+ * (\Sigma^4 * \Sigma^b) * u_0) =$	0
$a = 4, b = 1, 2, 3$	$\text{tr}((u_0^+ * \Sigma^4) * (\Sigma^b * u_0)) =$	0
$a = 4, b = 5, 6, 7$	$\text{tr}(u_0^+ * (\Sigma^4 * \Sigma^b) * u_0) =$	$-i\delta^{7b}$
$a = 4, b = 5, 6, 7$	$\text{tr}((u_0^+ * \Sigma^4) * (\Sigma^b * u_0)) =$	$-i\delta^{7b}$
$a = 1, 2, 3, b = 5, 6, 7$	$\text{tr}((u_0^+ * \Sigma^a) * (\Sigma^b * u_0)) =$	0
$a = 1, 2, 3, b = 5, 6, 7$	$\text{tr}(u_0^+ * (\Sigma^a * \Sigma^b) * u_0) =$	$-i\varepsilon^{4ab3}$
$a = 5, 6, 7, b = 1, 2, 3$	$\text{tr}((u_0^+ * \Sigma^a) * (\Sigma^b * u_0)) =$	0
$a = 5, 6, 7, b = 1, 2, 3$	$\text{tr}(u_0^+ * (\Sigma^a * \Sigma^b) * u_0) =$	$-i\varepsilon^{4ab3}$

Четверные произведения можно представляются в виде:

$$\text{tr}(u_0^+ * \Sigma^a * \Sigma^b * u_0) = c_1^{ab} \delta^{ab} + ic_2^{ab} A^{ab} \quad (29)$$

Здесь A^{ab} — антисимметричная величина, равная $0, \pm 1$. Её значения отличны от нуля только в специальном способе расстановки скобок

$$\text{tr}(u_0^+ * (\Sigma^a * \Sigma^b) * u_0) = iA^{ab} \quad (30)$$

при этом её ненулевые значения — это

$$A^{21} = A^{65} = A^{25} = A^{74} = 1 \quad (31)$$

и в случае $a = 4$ порядок скобок не важен

$$\text{tr}((u_0^+ * \Sigma^4) * (\Sigma^b * u_0)) = \text{tr}(u_0^+ * (\Sigma^4 * \Sigma^b) * u_0) \quad (32)$$

$$\text{tr}((u_0^+ * \Sigma^4) * (\Sigma^b * u_0)) = \text{tr}(u_0^+ * (\Sigma^4 * \Sigma^b) * u_0) \quad (33)$$

а постоянные c_1^{ab}, c_2^{ab} определяются моделью расстановки скобок в произведении октонионных сомножителей. Можно предложить, например, три модели:

Вероятностная модель.

$$\text{tr}(A * B * C * D) = p_1 \text{tr}(((A * B) * C) * D) + p_2 \text{tr}(A * (B * C) * D) \quad (34)$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

Здесь введены частоты p_1 и p_2 . Их значения определяются количеством перестановок скобок в (34), дающих одинаковый результат. Например, в случае (34) логично считать, что $p_1 = 3/4, p_2 = 1/4$ так как три варианта перестановки скобок дают одинаковый ответ в первом члене правой части (34) и только один вариант — во втором члене правой части (34).

Определение (34) распространяется и на большее число элементов.

Минимальная модель.

$$f(ABCD)\text{tr}(A * B * C * D) = \min_0(f(ABCD)\text{tr}(A * B * C * D)) \quad (35)$$

Правая часть (35) означает выбор такой расстановки скобок, при котором значение $f(ABCD)\text{tr}(A * B * C * D)$ минимально. Здесь введён коэффициент $f(ABCD)$ (который может равняться единице), стоящий перед tr . Заметим, если перед tr стоит коэффициент, то это не означает его автоматическое включение в определение минимальной модели.

Аналогично определяется **максимальная модель**.

Очевидно, что в случае ассоциативности мы получаем тот же результат, что и в определённых выше моделях.

Найдём след от произведения четырёх матриц $\Sigma^i, i = 1, \dots, 7$

$$\frac{1}{4}\text{tr}(\Sigma^i * \Sigma^j * \Sigma^k * \Sigma^l) \quad (36)$$

Пусть в (36) имеется только две различные матрицы. Понятно, что вне зависимости от расстановки скобок (учитывая ассоциативность для трёх элементов) получим ($i \neq k$):

$$\frac{1}{4}\text{tr}(\Sigma^i * \Sigma^k * \Sigma^i * \Sigma^k) = -1 \quad (37)$$

В том случае, когда только три матрицы различны след (36) равен нулю.

Если различны все индексы в (36), то произведение зависит от выбранного порядка умножения. При этом

$$\frac{1}{4}\text{tr}((\Sigma^i * \Sigma^j) * (\Sigma^k * \Sigma^l)) = -\varepsilon^{ijkl} \quad (38)$$

$$\frac{1}{4}\text{tr}(\Sigma^i * (\Sigma^j * \Sigma^k) * \Sigma^l) = \varepsilon^{ijkl} \quad (39)$$

Следовательно, при $i \neq j, k \neq l$

$$\frac{1}{4}\text{tr}(\Sigma^i * \Sigma^j * \Sigma^k * \Sigma^l) = -\varepsilon^{ijkl}\delta^{ik}\delta^{jl} + A^{ijkl} \quad (40)$$

где число A^{ijkl} равно $\pm 1, 0$ в зависимости от выбора скобок в произведении и значений индексов.

5 Обобщение лагранжиана Вайнберга-Салама на алгебру октав Кэли

В пространстве Минковского (M_4), где квадрат интервала ds определён как

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dx_\mu dx^\mu = dt^2 - dl^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (41)$$

($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, по разновысотным греческим индексам осуществляется суммирование с метрическим тензором пространства Минковского $\eta_{\mu\nu}$) свободное уравнение Дирака для спинорного поля $\psi(x)$ массы m имеет вид [10]:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (42)$$

где $\partial_\mu \psi(x) = \partial\psi/\partial x^\mu = \psi_{,\mu}$. Верхние и нижние индексы тензоров опускаются и поднимаются в M_4 взаимнообратными тензорами $\eta_{\mu\nu}$ и $\eta^{\mu\nu}$, γ^μ — матрицы Дирака ($\mu = 0, 1, 2, 3$):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (43)$$

Взаимодействие частицы с внешним полем будем вводить минимальным образом. Объединение электромагнитного и слабого взаимодействий через минимальную связь в стандартной теории Вайнберга-Салама на группе $SU(2) \times U(1)$ с полями $A_\mu^{k(1)} = A_\mu^k$, $k = 1, 2, 3$ и $A_\mu^{(2)} = B_\mu$ и зарядами $g^k = g$ — групповой постоянной $SU(2)$ симметрии и $g^{(0)}$ — постоянной абелевой симметрии требует:

$$\mathbf{A}_\mu = \mathbf{A}_\mu^{(1)} + \mathbf{A}_\mu^{(2)} = gA_\mu^{k(1)}T^{k(1)} + g^{(0)}A_\mu^{(2)}T^{(2)} = \frac{i}{2}g\sigma^k A_\mu^k + \frac{i}{2}g^{(0)}Y B_\mu \quad (44)$$

$$T^{k(1)} = \frac{\sigma^k}{2}, \quad T^{(2)} = Y, \quad Y = c_Y I$$

поэтому уравнение Дирака во внешнем неабелевом поле для фермионов $\psi(x)$, с гиперзарядом Y (в частности у дублета лептонов $Y = -I$, а синглета $Y = -2$) принимает вид [11]

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{i}{2}g^{(1)}\sigma^k A_\mu^k + \frac{i}{2}g^{(0)}Y B_\mu) - m)\psi(x) = 0 \quad (45)$$

Подчеркнём — так как речь идёт о тензорном произведении групп, то матрицы σ^i и матрицы Дирака γ^i матрично не умножаются, а спинор $\psi(x)$ — это дублет спинорных полей. Наконец, абелево поле B_μ вводится не только с постоянной взаимодействия $g^{(0)}$, но и с гиперзарядом Y — отвечающим за различные спинорные поля. Фактически, это различие проявляется в разных значениях c_Y — постоянной гиперзаряда. (Напомню, что для электрона $c_Y = -1$, а для кварков u, d оказывается $c_Y = 1/3$.)

Лагранжиан свободного электрослабого поля имеет вид [11]:

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{2}\text{tr} G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (46)$$

Здесь первый член лагранжиана ($k = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \text{tr}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} &= \text{tr}((\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig^{(1)}(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)) \cdot \\ &\cdot (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - ig^{(1)}(A^\mu A^\nu - A^\nu A^\mu))), \end{aligned} \quad (47)$$

$$A_\mu = A_\mu^k \sigma^k / 2$$

отвечает за неабелеву симметрию, а второй — за абелеву:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) \quad (48)$$

В данной работе делается попытка отойти от обычного введения взаимодействующего поля как поля, соответствующего определённой симметрии и предлагается вводить поле минимальным образом как характеристику алгебраической структуры взаимодействия. В этом подходе наличие симметрии, например, $SU(2)$ является следствием алгебраической структуры поля и некоторых физических предположений. Таким образом, договоримся что обобщение уравнения Дирака на взаимодействующие поля — это обобщение на октонионные поля. Ограничимся матричным представлением октонионов. Пусть обобщение происходит за счёт удлинения производной:

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + \frac{i}{2}c_{\Psi_a} q^a A_\mu^a \Sigma^a \quad (49)$$

где q_a — заряд поля $A_\mu^a(x)$, c_{Ψ_a} — постоянные взаимодействия спинора с полем A_μ^a , Σ^a , $a = 0, 1, \dots, 7$ — эрмитовы образующие алгебры октонионов.

Введём дублет левополяризованных лептонов $L(x)$ (ограничимся электронным сектором, состоящим из электрона $e(x) = e^-(x)$ и электронного нейтрино $\nu = \nu_e(x)$), синглет правополяризованного электрона $e_R = e_R^-(x)$ и декуплет скалярных мезонов $\varphi^a(x)$ (23):

$$L = \begin{pmatrix} (\alpha_1\nu + \alpha_2 e)I & A_1\nu(x) + A_2e(x) \\ B_1\nu(x) + B_2e(x) & (\beta_1\nu + \beta_2 e)I \end{pmatrix}_L = \Psi_L, \quad (50)$$

$$R(x) = e_R^-(x), \quad \varphi^a(x), i = 0, 1, \dots, 7$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\Psi &= L, & \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\Psi &= R \\ \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)e(x) &= R, & \gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \end{aligned} \quad (51)$$

Матрицы A_1, A_2 и B_1, B_2 имеют вид $A_i = \alpha_i^k \sigma^k$ и $B_i = \beta_i^k \sigma^k$ с пока неизвестными числовыми постоянными α_i^k и $\beta_i^k, i = 1, 2, k = 0, 1, 2, 3$. Числа $\alpha_{1,2}$ и $\beta_{1,2}$ также пока неизвестны.

Определим локализованный на алгебре октонионов лагранжиан следующим образом ($a, b = 0, 1, \dots, 7; i, j, k, l = 1, 2, \dots, 7$):

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{oct.} &= \mathfrak{L}_f + \text{tr} \left(\left(\partial_\mu \Psi_\varphi^* - \frac{i}{2} q^a A_\mu^a \Psi_\varphi^* * \Sigma^a \right) * \left(\partial^\mu \Psi_\varphi + \frac{i}{2} q^b A^{\mu(b)} \Sigma^b * \Psi_\varphi \right) + \right. \\ &+ \frac{i}{2} \bar{L} * \gamma_\mu \left(\overrightarrow{\partial}^\mu L + \frac{i}{2} c_L q^k A^{\mu(k)} \Sigma^k * L + \frac{i}{2} c_{L_0} q^0 A^{\mu(0)} L \right) - \\ &- \frac{i}{2} \bar{L} * \gamma_\mu \left(\overleftarrow{\partial}^\mu L - \frac{i}{2} c_L q^k A^{\mu(k)} \Sigma^k * L - \frac{i}{2} c_{L_0} q^0 A^{\mu(0)} L \right) + \\ &+ \frac{i}{2} \bar{R} \gamma_\mu \left(\overrightarrow{\partial}^\mu R + i q^0 A^{\mu 0} R \right) - \frac{i}{2} \bar{R} \gamma_\mu \left(\overleftarrow{\partial}^\mu R - i q^0 A^{\mu 0} R \right) - \\ &\left. - \tilde{h} \bar{L} * \Psi_\varphi R - \tilde{h} \bar{R} \Psi_\varphi^* * L \right) + m^2 \|\Psi_\varphi\|^2 - \frac{f}{4} \|\Psi_\varphi\|^4 \end{aligned} \quad (52)$$

Введено обозначение для лагранжиана свободных полей \mathfrak{L}_f .

$$\mathfrak{L}_f = -\frac{1}{16} \text{tr}(F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu})_{oct} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^0 * F^{\mu\nu(0)} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu})_{oct} &= \text{tr}(((\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i) \Sigma^i + i q^{ij} (A_\mu^i A_\nu^j - A_\nu^i A_\mu^j) \Sigma^i * \Sigma^j) \\ &* ((\partial^\mu A^{\nu(k)} - \partial^\nu A^{\mu(k)}) \Sigma^k + i q^{kl} (A^{\mu(k)} A^{\nu(l)} - A^{\nu(k)} A^{\mu(l)}) \Sigma^k * \Sigma^l)) \end{aligned} \quad (54)$$

Понятно, что, если две матрицы $\Sigma^i, i = 1, \dots, 7$ в этом произведении оказались одинаковыми, то след их произведения ассоциативен, если же все четыре матрицы различны, то ассоциативности нет. Поэтому можно выделить ассоциативную и неассоциативную части в виде:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{16} \text{tr}(F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu})_{oct} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i * F^{\mu\nu(i)} + \\ &+ \frac{1}{16} f^{ijkl} (A_\mu^i A_\nu^j - A_\nu^j A_\mu^i) (A^{\mu(k)} A^{\nu(l)} - A^{\nu(k)} A^{\mu(l)}) \end{aligned} \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i - \varepsilon^{ijk} q^{jk} (A_\mu^j A_\nu^k - A_\nu^j A_\mu^k) \\ f^{ijkl} &= q^{ij} q^{kl} \text{tr}(\Sigma^i * \Sigma^j * \Sigma^k * \Sigma^l) \end{aligned} \quad (56)$$

(Символ f^{ijkl} отличен от нуля только для индексов (3) и их перестановок.)

То, что выражение (56) неассоциативно, понятно из следующих равенств, полученных из (7-8) и бесследовости матриц $\Sigma^i, i = 1, 2, \dots, 7$:

$$\text{tr}((\Sigma^4 * \Sigma^5) * (\Sigma^6 * \Sigma^7)) = 4, \quad \text{tr}(\Sigma^4 * (\Sigma^5 * \Sigma^6) * \Sigma^7) = -4 \quad (57)$$

Заметим, что данный лагранжиан остался калибровочно инвариантным относительно калибровочной симметрии $U(1)$ так как матрицы $\Sigma^i, i = 1, 2, \dots, 7$ коммутативны относительно умножения на комплексную функцию, поэтому лагранжиан октонионов инвариантен относительно замен:

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow e^{i\alpha(x)/2}\Psi(x), & A_\mu^0 &\rightarrow A_\mu^0 - \frac{1}{q_0}\partial_\mu\alpha(x) \\ L &\rightarrow e^{ic_{L_0}\alpha/2}L, & R &\rightarrow e^{i\alpha}R \end{aligned} \quad (58)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \partial_\mu(e^{\frac{i}{2}\alpha}\Psi_\varphi) + \frac{i}{2}q^0(A_\mu^0 - \frac{1}{q_0}\partial_\mu\alpha)e^{\frac{i}{2}\alpha}\Psi_\varphi &= e^{\frac{i}{2}\alpha}(\partial_\mu\Psi_\varphi + \frac{i}{2}q^0A_\mu^0\Psi_\varphi) \\ \partial_\mu(e^{\frac{i}{2}\alpha}L) + \frac{i}{2}c_{L_0}q^0(A^{\mu(0)} - \frac{1}{q_0}\partial_\mu\alpha)e^{\frac{i}{2}\alpha}L &= e^{\frac{i}{2}\alpha}(\partial_\mu L + c_{L_0}\frac{i}{2}q^0A_\mu^0L) \end{aligned} \quad (59)$$

(Эрмитовосопряжённые преобразования и преобразования для R аналогичны поэтому не выписаны.)

Говорить о другой калибровочной симметрии, содержащей поля $A_\mu^i, i = 1, \dots, 7$ нет смысла, так как преобразования, затрагивающие Σ^i , приводят к неассоциативным членам вида (57), вычисление которых неопределено до момента определения порядка умножения сомножителей (порядок умножения можно связывать даже с коэффициентами перед неассоциативным выражением вида (57)). Исключаем из рассмотрения декуплет полей (18), выбирая состояние Ψ в виде Ψ_0 (23), соответствующее стационарному состоянию потенциальной энергии, что приводит в (52) к

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{oct.} &= \mathcal{L}_f + \text{tr} \left(\frac{1}{4}q_a q_{a'} A_\mu^a A^{\mu(a')} \Psi_0 * \Sigma^a * \Sigma^{a'} * \Psi_0 \right. \\ &+ \frac{i}{2} (\bar{L} * \gamma_\mu \partial^\mu L - \partial^\mu \bar{L} \gamma_\mu * L) + \frac{i}{2} (\bar{R} * \partial^\mu \gamma_\mu R - \partial^\mu \bar{R} \gamma_\mu * R) \\ &- \frac{1}{2} c_{L_a} q^a A^{\mu(a)} \bar{L} * \gamma_\mu \Sigma^a * L - \frac{1}{2} c_{L_0} q^0 A^{\mu(0)} \bar{R} \gamma_\mu R \\ &\left. - h \bar{L} * \Psi_0 R - h \bar{R} \Psi_0 * L \right) + \frac{m^4}{f} \end{aligned} \quad (60)$$

Подставим Ψ_0 в (60) (в первую строку выражения). Ясно, что произведение четырёх матриц $\Sigma^k, k = 1, \dots, 7$ в (60) неассоциативно, поэтому окончательно получим (введем $o^{ij} = \pm i q^{ij}, 0$ в зависимости от способа снятия неассоциативности)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{oct.} &= \mathcal{L}_f + \frac{q_a^2 m^2}{2f} A_\mu^a A^{\mu(a)} + \frac{o^{ij} m^2}{2f} A_\mu^i A^{\mu(j)} - \frac{q_3 q_0 m^2}{f} A_\mu^3 B^\mu \\ &+ \frac{i}{2} (\bar{L} * \gamma_\mu \partial^\mu L - \partial^\mu \bar{L} \gamma_\mu * L) + \frac{i}{2} (\bar{R} * \partial^\mu \gamma_\mu R - \partial^\mu \bar{R} \gamma_\mu * R) \\ &- \frac{1}{2} c_{L_a} q^a A^{\mu(a)} \bar{L} * \gamma_\mu \Sigma^a * L - \frac{1}{2} c_{L_0} q^0 A^{\mu(0)} \bar{R} \gamma_\mu R \\ &- h \bar{L} * \Psi_0 R - h \bar{R} \Psi_0 * L + \frac{m^4}{f} \end{aligned} \quad (61)$$

Лагранжиан (61) для нас в дальнейшем будет основным, относительно которого ищется поставленное в начале работы решение. Перейдём к лагранжиану стандартной теории (СТ).

В СТ слабых взаимодействий Вайнберга-Салама имеем исходный лагранжиан, инвариантный относительно локальной группы $SU(2) \times U(1)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ST} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(k)}F^{\mu\nu(k)} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2 \varphi^* \varphi - \frac{f}{4}(\varphi^* \varphi)^2 + \\ & + \left(\partial_\mu \varphi^* - \frac{i}{2}g \varphi^* \sigma^k A_\mu^k - \frac{i}{2}g^{(0)} \varphi^* B_\mu \right) \cdot \left(\partial^\mu \varphi + \frac{i}{2}g \sigma^k A^{\mu(k)} \varphi + \frac{i}{2}g^{(0)} B^\mu \varphi \right) \\ & F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad F_{\mu\nu}^k = \partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k - \frac{g}{2}\varepsilon^{ijk}(A_\mu^i A_\nu^j - A_\nu^i A_\mu^j) \\ & \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{2m}{\sqrt{f}} + \sigma(x) + i\sigma^i \theta^i(x) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (62)$$

(здесь $i, j, k = 1, 2, 3$, $\sigma(x)$ и $\theta^i(x)$ — скалярные поля, σ^i — матрицы Паули.)

После спонтанного нарушения симметрии лагранжиан СТ без хиггсова сектора и выбора аналогичной калибровки получим в СТ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ST} = & -\frac{1}{4}\text{tr} \left(F_{\mu\nu}^{(i)} F^{\mu\nu(i)} \right) + \frac{g^2 m^2}{2f} A_\mu^i A^{\mu(i)} - \frac{gg^{(1)} m^2}{f} A_\mu^3 B^\mu + \\ & + \frac{g^{(1)}}{2} \bar{\nu}_L \gamma_\mu B^\mu \nu_L + \frac{g^{(1)}}{2} \bar{e}_L \gamma_\mu B^\mu e_L + \frac{g}{2} \bar{e}_L \gamma_\mu A^{\mu 3} e_L - \frac{g}{2} \bar{\nu}_L \gamma_\mu A^{\mu 3} \nu_L - \\ & - \frac{g}{2} \bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L (A^{\mu 1} - iA^{\mu 2}) - \frac{g}{2} \bar{e}_L \gamma_\mu \nu_L (A^{\mu 1} + iA^{\mu 2}) + \\ & + \frac{i}{2} (\bar{e}_L \gamma_\mu \partial^\mu e_L - \partial^\mu \bar{e}_L \gamma_\mu e_L) + \frac{i}{2} (\bar{\nu}_L \gamma_\mu \partial^\mu \nu_L - \partial^\mu \bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L) \\ & + \frac{i}{2} (\bar{e}_R \gamma_\mu \partial^\mu e_R - \partial^\mu \bar{e}_R \gamma_\mu e_R) + g^{(1)} \bar{e}_R \gamma_\mu B^\mu e_R + \frac{\sqrt{2}hm}{\sqrt{f}} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) + \frac{m^4}{f} \end{aligned} \quad (63)$$

Известно, что данный лагранжиан диагонализуется по полям $A_\mu^i(x)$ и B_μ , если ввести заряженные W, \bar{W} и нейтральный Z^0 бозоны и электромагнитный вектор-потенциал A_μ :

$$A_\mu^3 = Z_\mu^0 \cos \theta + A_\mu \sin \theta, \quad B_\mu = A_\mu \cos \theta - Z_\mu^0 \sin \theta \quad (64)$$

$$A_\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu \cos \theta + \bar{W}_\mu \sin \theta), \quad A_\mu^2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(W_\mu \cos \theta - \bar{W}_\mu \sin \theta) \quad (65)$$

Покажем, что имеется матрица состояния, что на ассоциативном секторе лагранжиан октонионов (в (61) изучаем только $a = 0, 1, 2, 3$, остальные считаем равными нулю) совпадёт с лагранжианом СТ.

Из сравнения лагранжианов (63) и (61) видим, что можно взять

$$q^1 = q^2 = q^3 = q^{23} = g, \quad q^0 = g^{(1)}, \quad A_\mu^0 = B_\mu \quad (66)$$

(Поля A_μ^k , $k = 1, 2, 3$ в СТ и в теории на алгебре октонионов равны и по обозначению и по смыслу.)

Равенство

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2}(\bar{L} * \gamma_\mu \partial^\mu L - \partial^\mu \bar{L} \gamma_\mu * L) + \frac{i}{2}(\bar{R} * \gamma_\mu \partial^\mu R - \partial^\mu \bar{R} \gamma_\mu * R) = \\ & = \frac{i}{2}(\bar{e}_L \gamma_\mu \partial^\mu e_L - \partial^\mu \bar{e}_L \gamma_\mu e_L) + \frac{i}{2}(\bar{\nu}_L \gamma_\mu \partial^\mu \nu_L - \partial^\mu \bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L) + \\ & \quad + \frac{i}{2}(\bar{e}_R \gamma_\mu \partial^\mu e_R - \partial^\mu \bar{e}_R \gamma_\mu e_R) \end{aligned}$$

обеспечивается требованием $R = e_R(x)$ и

$$L = \frac{c_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & (2i\sigma^1 - 2\sigma^2)\nu(x) + (y_0 I + \frac{2i}{3}\sigma^1 + \frac{2}{3}\sigma^2 + i\sigma^3)e(x) \\ (-\frac{i}{8}\sigma^1 + \frac{1}{8}\sigma^2)\nu(x) + (-\frac{3i}{8}\sigma^1 - \frac{3}{8}\sigma^2 + \frac{9i}{16}\sigma^3)e(x) & 0 \end{pmatrix}_L$$

$$\bar{L} = L + \gamma^0 \tag{67}$$

$$\bar{L} = \frac{c_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & (\frac{i}{8}\sigma^1 + \frac{1}{8}\sigma^2)\bar{\nu}(x) + (\frac{3i}{8}\sigma^1 - \frac{3}{8}\sigma^2 - \frac{9i}{16}\sigma^3)\bar{e}(x) \\ (-2i\sigma^1 - 2\sigma^2)\bar{\nu}(x) + (y_0 I - \frac{2i}{3}\sigma^1 + \frac{2}{3}\sigma^2 - i\sigma^3)\bar{e}(x) & 0 \end{pmatrix}_L$$

Нетрудно убедиться, что тогда

$$\begin{aligned} c_L \text{tr} \bar{L} * \Sigma^1 * L &= c_L c_0^2 (\bar{\nu}_L e_L + \bar{e}_L \nu_L) \\ c_L \text{tr} \bar{L} * \Sigma^2 * L &= c_L c_0^2 (-i\bar{\nu}_L e_L + i\bar{e}_L \nu_L) \\ c_L \text{tr} \bar{L} * \Sigma^3 * L &= c_L c_0^2 (\bar{\nu}_L \nu_L - \bar{e}_L e_L) \\ \text{tr} \bar{L} * L &= c_0^2 \left(\frac{257}{32} \bar{\nu}_L \nu_L + \left(y_0^2 + \frac{5729}{2304} \right) \bar{e}_L e_L \right) \end{aligned} \tag{68}$$

(Заметим, что при вычислении следов в (68) оказывается не принципиальным порядок умножения.) Если взять

$$y_0^2 = \frac{257}{32} - \frac{5729}{2304}, \quad c_0^2 = \frac{32}{257}, \quad c_L = (c_0^2)^{-1}$$

то

$$\begin{aligned} \text{tr} \bar{L} * L &= \bar{\nu}_L \nu_L + \bar{e}_L e_L \\ \text{tr}(\bar{L} * (q^1 A^{\mu 1} \Sigma^1 + q^2 A^{\mu 2} \Sigma^2 + q^3 A^{\mu 3} \Sigma^3) * \gamma_\mu L) &= \\ &= \frac{g}{2} (\bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L (A^{\mu 1} - iA^{\mu 2}) + \bar{e}_L \gamma_\mu \nu_L (A^{\mu 1} + iA^{\mu 2}) - \\ &\quad - \bar{e}_L \gamma_\mu A^{\mu 3} e_L + \bar{\nu}_L \gamma_\mu A^{\mu 3} \nu_L) \end{aligned}$$

Равенство

$$-c_{L_0} \text{tr}(A^{\mu 0} \bar{L} \gamma_\mu * L + A^{\mu 0} \bar{R} \gamma_\mu R) = \bar{\nu}_L \gamma_\mu B^\mu \nu_L + \bar{e}_L \gamma_\mu B^\mu e_L + \bar{e}_R \gamma_\mu B^\mu e_R$$

обеспечивается, если положить $c_{L_0} = -1$.

Равенство

$$\mathrm{tr}(\tilde{h}\bar{L} * \Psi_0 R + \tilde{h}\bar{R} * \Psi_0 L) = \frac{\sqrt{2}hm}{\sqrt{f}}(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \quad (69)$$

обеспечивается, если положить $\tilde{h} = 2\sqrt{2}h/c_0$.

Таким образом предложен лагранжиан на обобщённой алгебре октав Кэли, который в частном случае переходит в лагранжиан стандартной теории электрослабых взаимодействий, при этом функция состояния имеет вид:

$$L = \frac{c_0}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 2i\sigma^1 - 2\sigma^2 \\ -\frac{i}{8}\sigma^1 + \frac{1}{8}\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \nu_L + \begin{pmatrix} 0 & y_0 I + \frac{2i}{3}\sigma^1 + \frac{2}{3}\sigma^2 + i\sigma^3 \\ -\frac{3i}{8}\sigma^1 - \frac{3}{8}\sigma^2 + \frac{9i}{16}\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} e_L \right)$$

6 Диагонализация полного лагранжиана

Таким образом полный лагранжиан на неассоциативной алгебре в выбранном представлении имеет следующий вид ($i, j, k = 1, 2, \dots, 7$):

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{oct} = & \frac{q^{(k)2}m^2}{2f} A_\mu^k A^{\mu(k)} + \frac{o^{ij}m^2}{2f} A_\mu^i A^{\mu(j)} + \frac{g^{(1)2}m^2}{2f} B_\mu B^\mu - \frac{gg^{(1)}m^2}{f} A_\mu^3 B^\mu + \\ & + \mathfrak{L}_f + \frac{g^{(1)}}{2} \bar{\nu}_L \gamma_\mu B^\mu \nu_L + \frac{g^{(1)}}{2} \bar{e}_L \gamma_\mu B^\mu e_L + \frac{g}{2} \bar{e}_L \gamma_\mu A^{\mu 3} e_L - \frac{g}{2} \bar{\nu}_L \gamma_\mu A^{\mu 3} \nu_L - \\ & - \frac{g}{2} \bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L (A^{\mu 1} - iA^{\mu 2}) - \frac{g}{2} \bar{e}_L \gamma_\mu \nu_L (A^{\mu 1} + iA^{\mu 2}) + \frac{m^4}{f} + \\ & + \frac{i}{2} (\bar{e}_L \gamma_\mu \partial^\mu e_L - \partial^\mu \bar{e}_L \gamma_\mu e_L) + \frac{i}{2} (\bar{\nu}_L \gamma_\mu \partial^\mu \nu_L - \partial^\mu \bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L) + \\ & + \frac{i}{2} (\bar{e}_R \gamma_\mu \partial^\mu e_R - \partial^\mu \bar{e}_R \gamma_\mu e_R) + g^{(1)} \bar{e}_R \gamma_\mu B^\mu e_R - \frac{\sqrt{2}hm}{\sqrt{f}} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) - \\ & - g_4 A^{\mu(4)} (\kappa_1 \bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - \kappa_2 \bar{e}_L \gamma_\mu e_L) - \frac{3}{2} g_6 A^{\mu(6)} \bar{e}_L \gamma_\mu e_L - \\ & - \frac{5}{4} (g_6 A^{\mu(6)} + i g_5 A^{\mu(5)}) \bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L - \frac{5}{4} (g_6 A^{\mu(6)} - i g_5 A^{\mu(5)}) \bar{e}_L \gamma_\mu \nu_L \end{aligned} \quad (70)$$

По аналогии со СТ, вводя векторные поля

$$C_\mu = A_\mu^4, \quad M_\mu = A_\mu^7 \quad (71)$$

$$D_\mu^+ = \frac{1}{2g_D} (g_6 A_\mu^6 + i g_5 A_\mu^5), \quad D_\mu^- = \frac{1}{2g_D} (g_6 A_\mu^6 - i g_5 A_\mu^5) \quad (72)$$

запишем окончательный лагранжиан в виде

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{all.} = & \mathcal{L}_{ST} + \mathcal{L}_{int} + f_{abcd}A_\mu^a A_\nu^b A^{\mu(c)} A^{\nu(d)} + \frac{\sigma^{ij}m^2}{2f}A_\mu^i A^{\mu(j)} - \\
 & - \frac{1}{4}(\partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu)(\partial^\mu C^\nu - \partial^\nu C^\mu) + \frac{g_C^2 m^2}{2f}C_\mu C^\mu - \\
 & - g_C C^\mu (\kappa_1 \bar{\nu} \gamma_\mu \nu - \kappa_2 \bar{e}_L \gamma_\mu e_L) - \\
 & - \frac{1}{4}(\partial_\mu M_\nu - \partial_\nu M_\mu)(\partial^\mu M^\nu - \partial^\nu M^\mu) + \frac{g_M m^2}{2f}M_\mu M^\mu - \\
 & - \frac{1}{4}(\partial_\mu \overset{*}{D}_\nu - \partial_\nu \overset{*}{D}_\mu)(\partial^\mu D^\nu - \partial^\nu D^\mu) + \frac{g_D^2 m^2}{2f}\overset{*}{D}_\mu D^\mu - \\
 & - \frac{3}{4}g_D(\overset{*}{D}^\mu + D^\mu)\bar{e}_L \gamma_\mu e_L - \frac{5}{4}g_D \bar{\nu}_L \gamma_\mu D^\mu e_L - \frac{5}{4}g_D \overset{*}{D}^\mu \bar{e}_L \gamma_\mu \nu_L
 \end{aligned} \tag{73}$$

(Здесь \mathcal{L}_{int} обозначает ассоциативные члены третьего и четвёртого порядков по полям A_μ^k .)

На самом деле нет оснований говорить о диагональном виде лагранжиана, так как он по-прежнему содержит квадратичные по полям слагаемые. Методы снятия неассоциативности могут очень сильно изменить корпускулярный смысл лагранжиана (73). Тем не менее вид (73) лагранжиана октонионных полей отражает всю содержательную структуру попытки расширения модели Стандартной Теории на алгебру октонионов.

7 Исследование лагранжиана октонионов

1. Рассмотрим неассоциативные слагаемые лагранжиана (70). Во-первых это квадратичный по полям A_μ^k член

$$\frac{\sigma^{ij}m^2}{2f}A_\mu^i A^{\mu(j)} = ic_2^{ij}A^{ij}\frac{q^i q^j m^2}{2f}A_\mu^i A^{\mu(j)} \tag{74}$$

Применим к этому члену вероятностную модель снятия ассоциативности. Считаем, что для ненулевых компонент $c^{ij} = c^{ji} = 1/4$. Но тогда в силу симметричности выражения $q^i q^j A_\mu^i A^{\mu(j)}$ по i, j (по i, j нет суммирования) и антисимметричности множителя A^{ij} этот член равен нулю.

2. Лагранжиан свободных полей \mathcal{L}_f содержит неассоциативность четвёртого порядка по полям A_μ .

$$f^{ijkl}(A_\mu^i A_\nu^j - A_\nu^j A_\mu^i)(A^{\mu(k)} A^{\nu(l)} - A^{\nu(k)} A^{\mu(l)}) \tag{75}$$

Формально это слагаемое в лагранжиане можно рассматривать как потенциальную энергию (что-то вроде $\lambda\varphi^4$), поэтому к нему имеет смысл применить максимальную схему расстановки скобок (имея в виду, что $L = T - V$). Если этот член рассматривать со знаком минус, то модель расстановки скобок была бы минимальной. Поэтому, подразумевая физическое приложение задачи, в дальнейшем выбор скобок по правилу max или min будем называть как **потенциальную модель**.

3. Лагранжиан (70) содержит нейтральный ток

$$-q^4 A^{\mu(4)}(\kappa_1 \bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - \kappa_2 \bar{e}_L \gamma_\mu e_L) \tag{76}$$

взаимодействующий только с левыми спинорами. Тем самым определяется нейтральный векторный бозон C_μ

$$q_C C_\mu = -q^4 A^{\mu(4)}. \tag{77}$$

4. Лагранжиан (70) содержит ток вида

$$-\frac{5}{4}\bar{\nu}_L\gamma_\mu(q^6 A^{\mu(6)} + iq^5 A^{\mu(5)})e_L - \frac{5}{4}(q^6 A^{\mu(6)} - iq^5 A^{\mu(5)})\bar{e}_L\gamma_\mu\nu_L \quad (78)$$

который указывает на необходимость введения двух противоположно заряженных векторных бозонов

$$\begin{aligned} q_D D_\mu &= -\frac{5}{4}q^6 A^{\mu(6)} - i\frac{5}{4}q^5 A^{\mu(5)} \\ q_D \bar{D}_\mu &= -\frac{5}{4}q^6 A^{\mu(6)} + i\frac{5}{4}q^5 A^{\mu(5)} \end{aligned} \quad (79)$$

с зарядом $\pm q_D$.

Следовательно необходимо модифицировать ток $q^6 A^{\mu(6)}\bar{e}_L\gamma_\mu e_L$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &-\frac{3}{2}q^6 A^{\mu(6)}\bar{e}_L\gamma_\mu e_L = \\ &= -\frac{3}{4}\bar{e}_L\gamma_\mu(q^6 A^{\mu(6)} + iq^5 A^{\mu(5)})e_L - \frac{3}{4}(q^6 A^{\mu(6)} - iq^5 A^{\mu(5)})\bar{e}_L\gamma_\mu e_L. \end{aligned} \quad (80)$$

5. Лагранжиан (70) содержит лагранжиан левых электронных полей, взаимодействующих с векторным полем $A^{\mu(6)}$

$$\frac{i}{2}(\bar{e}_L\gamma_\mu\partial^\mu e_L - \partial^\mu\bar{e}_L\gamma_\mu e_L) - \frac{3}{2}q^6 A^{\mu(6)}\bar{e}_L\gamma_\mu e_L \quad (81)$$

которое эквивалентно (по аналогии с электромагнитным полем) выражению с длинной производной в виде

$$\partial^\mu - i\frac{3}{4}q^6 A^{\mu(6)} \quad (82)$$

но, учитывая замечание 4, длинная производная приобретает вид

$$\partial^\mu - i\frac{3}{4}q^6 A^{\mu(6)} - \frac{3}{4}q^5 A^{\mu(5)} \quad (83)$$

Таким образом, лагранжиан материальных полей, взаимодействующих с векторными полями можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{i}{2}\bar{e}_L\gamma_\mu\partial^\mu e_L - \frac{i}{2}\partial^\mu\bar{e}_L\gamma_\mu e_L - \frac{3}{2}q^6 A^{\mu(6)}\bar{e}_L\gamma_\mu e_L = \\ &= \frac{i}{2}\bar{e}_L\gamma_\mu \left(\left(\partial^\mu - i\frac{3}{4}q^6 A^{\mu(6)} - \frac{3}{4}q^5 A^{\mu(5)} \right) e_L \right) - \\ &\quad - \frac{i}{2} \left(\left(\partial^\mu + i\frac{3}{4}q^6 A^{\mu(6)} - \frac{3}{4}q^5 A^{\mu(5)} \right) \bar{e}_L \right) \gamma_\mu e_L \end{aligned} \quad (84)$$

8 Тетрадное представление

Ограничимся случаем риманова пространства, по крайней мере в некоторой окрестности. Например, можно считать, что в пространстве R^n

$$R^n = \{(y^1, \dots, y^n), y^k \in R, k = 1, \dots, n, n > 4\} \quad (85)$$

с индефинитной метрикой

$$ds^2 = \eta_{ik} dy^i dy^k, \quad i, k = 1, \dots, n \quad (86)$$

в некоторой окрестности задана поверхность $y^k = y^k(x^0, x^1, x^2, x^3)$, где $x^i, i = 0, \dots, 3$ — параметры, определяющие точку на поверхности в пространстве R^n . Так как

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad (87)$$

то

$$ds^2 = \eta_{ik} \frac{\partial y^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^k}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (88)$$

где введено обозначение

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ik} \frac{\partial y^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^k}{\partial x^\nu} \quad (89)$$

В этом параграфе будем различать греческие и латинские индексы, полагая, что греческие индексы относятся к риманову пространству, а латинские — к евклидовому.

Считая, что $x^\mu = x^\mu(x')$, где x' — новая система координат, рассмотрим переход от x^μ к x'^ν $x^\mu = x^\mu(x')$ с невырожденным определителем преобразования $\partial x^\mu / \partial x'^\nu$. Дифференциалы dx^μ — при преобразовании координат

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu = \Lambda_\nu^\mu dx'^\nu \quad (90)$$

по определению ведут себя как компоненты контрвариантного вектора. В соответствии с определением всякий контрвариантный вектор A^μ при переходе к новой системе координат преобразуется по формуле (90). При параллельном переносе вектора $A^\mu = \frac{\partial y^i}{\partial x^\mu} A^i$ в соседнюю точку поверхности проекция вектора A^μ на поверхность изменяется на величину $\delta A^\mu = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda$ [12], где введены символы Кристоффеля второго рода $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} (g_{\mu\kappa,\nu} + g_{\nu\kappa,\lambda} - g_{\lambda\nu,\kappa}) \quad (91)$$

поэтому обычная производная $A_{,\nu}^\mu = \partial A^\mu / \partial x^\nu$ вектором не является. Но тогда производная $A_{,\nu}^\mu = A_{,\nu}^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\lambda$ преобразуется по закону (90), то есть это вектор.

Символы Кристоффеля не образуют тензора. Тензорному закону преобразования подчиняется комбинация символов Кристоффеля — тензор Римана, который определим в соответствии с [12]

$$R_{\mu\nu\lambda}^\tau = \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\tau - \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\tau + \Gamma_{\sigma\nu}^\tau \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma - \Gamma_{\sigma\lambda}^\tau \Gamma_{\mu\nu}^\sigma. \quad (92)$$

Квадратичная форма (88) может быть приведена к диагональному виду в некоторой новой системе координат. Ассоциируя параметры поверхности с параметрами физического пространства-времени, считаем что в некоторой системе координат метрика приведена к виду метрики пространства Минковского:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b \quad (93)$$

Соответственно в каждой точке пространства-времени введём тетрады $h_a^\mu = \partial x^\mu / \partial x^a, a = 0, 1, 2, 3$ осуществляющие данный переход. Тетрады обладают естественным свойством ортогональности

$$h_\mu^b h_{a,\nu}^\mu = \delta_a^b, \quad h^{\mu(a)} h_a^\nu = g^{\mu\nu} \quad (94)$$

и свойствами по поднятию и опусканию индексов.

$$\delta A^\mu = \delta(A^a h_a^\mu) = \delta A^a h_a^\mu + A^a h_{a,\nu}^\mu \delta x^\nu = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu \delta x^\lambda \quad (95)$$

В каждой точке риманова пространства контрвариантный вектор A^μ может быть представлен в диагональной системе координат $A^a = A^\mu h_\mu^a$. Так как

$$\delta A^\mu = \delta(A^a h_a^\mu) = \delta A^a h_a^\mu + A^a \delta h_a^\mu \quad (96)$$

и учитывая $h_\mu^b h_{a,\nu}^\mu + h_{\mu,\nu}^b h_a^\mu = 0$, находим

$$\delta A^b = \gamma_{ac}^b A^a \delta x^c, \quad \gamma_{ac}^b = h_{\mu;\nu}^b h_a^\mu h_c^\nu \quad (97)$$

где γ_{ac}^b коэффициенты вращения Риччи.

Известно преобразование спинора $\Psi(x)$ в случае произвольного лоренцева преобразования [13]

$$\Psi \rightarrow \Psi + \frac{1}{2} \omega^{ab} \sigma^{ab} \Psi, \quad \sigma^{ab} = \frac{1}{4} [\gamma^a, \gamma^b], \quad a, b = 0, 1, 2, 3 \quad (98)$$

где введена постоянная матрица инфинитезимального преобразования ω^{ab} , определяющая лоренцев поворот. Матрицы Дирака удовлетворяют следующему правилу умножению с матрицами σ^{ab} :

$$\gamma^a \sigma^{bc} = \frac{1}{4} \gamma^a [\gamma^b, \gamma^c] = \frac{1}{2} \eta^{ab} \gamma^a - \frac{1}{2} \eta^{ac} \gamma^b - \frac{i}{2} \varepsilon^{dabc} \gamma^5 \gamma_d \quad (99)$$

Известно, что $\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ является вектором при общекоординатных преобразованиях [13]. Это в свою очередь накладывает требования на преобразования спиноров. Для согласования общекоординатного преобразования и лоренцева преобразования заменим постоянную инфинитезимальную матрицу ω^{ab} на матрицу, зависящую от x , $\omega^{ab} = \omega^{ab}(x)$ по аналогии с локальной калибровочной симметрией. В результате найдём общий вид производной в локально плоском пространстве Минковского, которая будет вектором при общекоординатных преобразованиях

$$\partial_a \Psi \rightarrow D_a \Psi = \partial \Psi / \partial x^a - i \Phi_a \psi - \Gamma_a \Psi \quad (100)$$

Данное преобразование впервые найдено в работе Фока-Иваненко [14]. Было показано, что Γ_l — вещественная величина, являющаяся функцией коэффициентов вращения γ_{abc} и матриц Дирака, а Φ_a — вещественная величина, пропорциональная единичной матрице. В дальнейшем Φ_a отождествляется исключительно с электромагнитным полем. Матрица Γ_a имеет вид

$$\Gamma_a = -\frac{1}{2} \gamma_{abc} \sigma_{bc}, \quad \gamma_{abc} = h_{(b)\mu;\nu} h_a^\mu h_c^\nu \quad (101)$$

В частности, если гравитационное поле рассматривается в ортогональных координатах в римановом пространстве с метрикой:

$$ds^2 = H^{(0)2} dx^{(0)2} - H^{(1)2} dx^{(1)2} - H^{(2)2} dx^{(2)2} - H^{(3)2} dx^{(3)2} \quad (102)$$

то

$$-\gamma^a \Gamma_a = \frac{1}{4} h_a^\mu h_b^\nu h_{(c)\nu;\mu} \left(\frac{1}{2} \eta^{ab} \gamma^a - \frac{1}{2} \eta^{ac} \gamma^b - \frac{i}{2} \varepsilon^{dabc} \gamma^5 \gamma_d \right) \quad (103)$$

Но в силу диагональности метрики (102), а поэтому и диагональности тетрады $h_{\mu(a)}$ при различных значениях a, b, c получим

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda h_{c\lambda} h_b^\mu h_c^\nu = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} (g_{\mu\kappa,\nu} + g_{\nu\kappa,\lambda} - g_{\lambda\nu,\kappa}) h_{c\lambda} h_b^\mu h_c^\nu = 0 \quad (104)$$

поэтому

$$\begin{aligned} -\gamma^a \Gamma_a &= \frac{1}{4} h_a^\mu h^{\nu(a)} h_{(c)\nu;\mu} \gamma^c - \frac{1}{4} h^{\mu(a)} h^{\nu(b)} h_{(a)\nu;\mu} \gamma^b = \\ &= \frac{1}{4} h_{c;\mu}^\mu \gamma^c + \frac{1}{4} h^{\mu(a)} h_{b;\mu}^\nu h_{(a)\nu;\mu} \gamma^b = \frac{1}{2} h_{c;\mu}^\mu \gamma^c \end{aligned} \quad (105)$$

и уравнение Дирака принимает вид [15]:

$$\left(\gamma^a (H^a)^{-1} \left(\partial_a - i\Phi_a + \frac{1}{2} \partial_a \left(\ln \frac{\sqrt{-g}}{H^a} \right) \right) - m \right) \psi = 0 \quad (106)$$

В данной работе предлагается отождествить поле Φ_a с A_a^6 , поле Γ_a — с A_a^5 (в отсутствии электромагнитного поля). Эта аналогия следует из сравнения уравнений Дирака (84) и (106).

Фактически криволинейное пространство возникает как метод решения уравнения Дирака во внешнем поле A_μ^5 . Но так как независимые переменные x^k имеют вполне точный физический смысл мы приходим к выводу, что обобщение теории Вайнберга-Салама на алгебру октав Кэли предлагаемым в данной работе способом означает введение криволинейного пространства на фоне которого необходимо рассматривать распространение материальных полей.

9 Пространство Фридмана

Покажем, что в плоском пространстве Фридмана имеется самосогласованное решение лагранжиана октонионов.

Рассмотрим однородную и изотропную Вселенную

$$ds^2 = dx^{(0)2} - a^2(t)(dx^{(1)2} + dx^{(2)2} + dx^{(3)2}) = a^2(\eta)(d\eta^2 - dl^2), \quad (107)$$

где введено конформное время $dt = a(\eta)d\eta$, при этом

$$g_{00} = a^2(\eta), \quad g_{\alpha\beta} = a^2(\eta)\eta_{\alpha\beta} \quad (108)$$

С помощью (91) находим все ненулевые компоненты символа Кристоффеля:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{a'}{a^3}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^0 = -\frac{a'}{a^3}g_{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{0\beta}^\alpha = \frac{a'}{a}\delta_\beta^\alpha \quad (109)$$

и вычислим величину

$$G = g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\kappa}^\kappa - \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa) = \frac{6a'^2}{a^4}, \quad (110)$$

где штрих означает производную по конформному времени.

Запишем уравнение Дирака в метрике Фридмана (107)

$$\left(\gamma^j (H^j)^{-1} \left(\partial_j - i\Phi_j + \frac{1}{2} \partial_j \left(\ln \frac{\sqrt{-g}}{H^j} \right) \right) - m \right) \psi = 0 \quad (111)$$

Из (107) получаем, что

$$q_D A_\mu^5 = (2da/(adt), \vec{0}) \quad (112)$$

Так как поля A_μ^5 и A_μ^6 объединяются в одно векторное поле D_μ считаем, что в нашем случае $A_\mu^5 = A_\mu^6$

Предположим, что

$$f^{4567} q^{47} q^{56} A^{(4)\mu} A_\mu^{(7)} = -\frac{3q_D^2}{2\kappa} \quad (113)$$

тогда неассоциативный по полям член лагранжиана (70) приобретает вид

$$f^{4567} q^{47} q^{56} A^{(4)\mu} A_\mu^{(7)} A^{(5)\nu} A_\nu^{(6)} = -\frac{6}{\kappa} \left(\frac{da}{dta^2} \right)^2 \quad (114)$$

вычисленный по правилу потенциальной схемы снятия неассоциативности. Будем ассоциировать это выражение с лагранжианом гравитационного поля

$$\mathfrak{L}_{grav.} = f^{4567} q^{47} q^{56} A^{(5)\mu} A_{\mu}^{(6)} A^{(4)\nu} A_{\nu}^{(7)} = -\frac{1}{\kappa} G \quad (115)$$

при этом действие гравитационного поля представим в виде

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2\kappa} G + \mathfrak{L}_{mat.} \right) = \int d^4x \left(-\frac{1}{2\kappa} (G + \mathfrak{L}_{mat.}) \right) + \int d^3x \operatorname{div} \Gamma \\ &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2\kappa} R + \mathfrak{L}_{mat.} \right) \end{aligned} \quad (116)$$

где R — кривизна. Откуда получаем уравнения Эйнштейна

$$R_{ik} = \kappa T_{ik} \quad (117)$$

Тем не менее возникает вопрос о допустимости (113) и (112). С этой целью найдём решения для свободных старших октонионных полей.

Пусть $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_f$ и $q^5 A_{\mu}^5 = q^6 A_{\mu}^6 = q_D D_{\mu}$. Так как $A_{\mu}^k = 0, k = 0, \dots, 3$, то учитывая (7) получим

$$F^{\mu\nu(D)} = D_{,\nu}^{\mu} - D_{,\mu}^{\nu} \quad (118)$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа имеют вид:

$$F_{,\mu}^{\mu\nu(D)} + (m^2 - q^{47} q^{56} A^{\mu(4)} A_{\mu}^7) D^{\nu} = 0 \quad (119)$$

Если масса m такая, что скобка в (119) обращается в ноль, то D -бозон оказывается безмассовым и находим решения

$$F_{,\mu}^{\mu\nu(5)} = F_{,\mu}^{\mu\nu(6)} = 0, \quad (120)$$

$$A_{\mu}^5 = A_{\mu}^6 = (g(t), \vec{0})$$

где $g(t)$ — произвольная функция. Таким образом D -бозоны оказываются безмассовыми векторными частицами.

Рассмотрим уравнение для C и E бозонов. В силу (7) напряженности $F^{\mu\nu(C,E)}$ не содержат нелинейности по полям A_{μ}^k . При этом

$$F_{,\mu}^{\mu\nu(C)} + (m_C^2 - \frac{da}{adt}) C^{\nu} = 0, \quad (121)$$

$$F_{,\mu}^{\mu\nu(E)} + (m_E^2 - \frac{da}{adt}) E^{\nu} = 0$$

Если считать, что массы C и E -бозонов одинаковы и равны m и

$$m^2 \gg \frac{da}{adt} \quad (122)$$

то приходим к уравнению для свободных векторных массивных частиц. Для решений

$$C_{\mu} = e^{ikx} c_{\mu}, \quad E_{\mu} = e^{-ikx} e_{\mu} \quad (123)$$

с постоянными векторами поляризации c_{μ} и e_{μ} получим

$$C_{\mu} E_{\mu} = c_{\mu} e_{\mu} = \text{Constant} \quad (124)$$

получаем условие (113).

Так как ставилась задача о существовании решений типа Фридмана на лагранжиане октонионов, то можно считать, что она выполнена.

Решения для швардшильдовской метрики не требуют источников — вполне достаточно требования движения по геодезической в римановом пространстве. Этому требованию вполне удовлетворяет уравнение Дирака (111), записанное сферически симметричной однородной стационарной метрике.

10 Решение Швардшильда

Рассмотрим пространство в котором имеется массивное сферически симметричное тело. Пусть это тело является источником октонионного поля. На значительном расстоянии от этого тела электро-слабым взаимодействием можно пренебречь, поэтому это тело может быть источником разве что старших октонионных полей. В силу симметрии задачи можно считать, если на большом расстоянии имеются октонионные поля, источником которых является массивное тело, то они создаются вектор-потенциалом $A_\mu^k = A_\mu^k(r)$, $k = 4, 5, 6, 7$.

Пусть в этом пространстве движется, например, электрон. Пространство, в котором этот электрон движется — по определению — пространство Минковского. В сферически симметричных координатах метрика в этом пространстве имеет вид:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) \quad (125)$$

Ограничимся левыми спинорами. Запишем его уравнение движения в октонионном поле массивного источника, предполагая, что с полями $A_\mu^{4,7}$ он не взаимодействует:

$$\left(i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^r \left(\partial_r - \vec{\Sigma} \cdot \hat{L} - \frac{3i}{4} q^6 A_r^6 - \frac{3}{4} q^5 A_r^5 \right) + m \right) \psi = 0 \quad (126)$$

Здесь введено обозначение

$$\gamma^r = \gamma^1 \sin \theta \cos \varphi + \gamma^2 \sin \theta \sin \varphi + \gamma^3 \cos \theta,$$

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

где $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ — оператор углового момента [16].

Сравнение уравнения (126) с уравнением Иваненко-Соколова (106), наводит на мысль, что формально его решение можно искать в искривлённом пространстве, в котором

$$\frac{1}{2} \partial_a \left(\ln \frac{\sqrt{-g}}{H^a} \right) = -\frac{3}{4} q^5 A_r^5 \quad (127)$$

С другой стороны, в сферически-симметричной, стационарной метрике Швардшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) \quad (128)$$

где $r_g = 2M/r$ — гравитационный радиус, находим H^a . Тогда, с точки зрения развиваемого здесь формализма необходимо считать, что имеется дополнительное векторное поле D_μ , что

$$q_D D_\mu = q_6 A_\mu^6 + i q_5 A_\mu^5, \quad (129)$$

$$q_5 A_\mu^5 = q_6 A_\mu^6 = f_{,r}/f \approx \frac{r_g}{2r^2}$$

где введено обозначение $f^2 = 1 - r_g/r$.

Тем не менее возникает вопрос о допустимости (129), поэтому исследуем свободный лагранжиан октонионов \mathcal{L}_f . Так как нас интересует его дальнедействующая часть без электромагнитного поля, то исключим A_μ^k , $k = 0, 1, 2, 3$. Пусть $q^5 A_\mu^5 = q^6 A_\mu^6 = q_D D_\mu$ тогда

$$F_{\mu\nu}^D = D_{\nu,\mu} - D_{\mu,\nu} \quad (130)$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа имеют вид:

$$F_{,\mu}^{\mu\nu(D)} + (m_D^2 - q^{47} q^{56} A^{\mu(4)} A^{\nu(7)}) D^\nu = 0 \quad (131)$$

Пусть масса m_D такова, что выражение в скобках в (131) равно нулю

$$m_D^2 - q^{47} q^{56} A^{\mu(4)} A^{\nu(7)} = 0 \quad (132)$$

Так как выражение в скобках равно нулю, то находим решение для векторного D -бозона

$$F_{,\mu}^{\mu\nu(D)} = 0, \quad (133)$$

$$A_\mu^5 = A_\mu^6 = (0, g(r), 0, 0)$$

где $g(r)$ — произвольная функция координат. Таким образом D — бозоны оказываются безмассовыми векторными заряженными частицами.

Рассмотрим уравнение для C и E бозонов.

$$F_{,\mu}^{\mu\nu(C)} + m_C^2 C^\nu - q^{47} q^{56} \frac{r^2}{4r^4} E^\nu = 0 \quad (134)$$

$$F_{,\mu}^{\mu\nu(E)} + m_E^2 E^\nu - q^{47} q^{56} \frac{r^2}{4r^4} C^\nu = 0$$

Если считать, что массы C и E — бозонов таковы, что

$$m_C^2 C^\nu - q^{47} q^{56} \frac{r^2}{4r^4} E^\nu \approx m_C^2 C^\nu \quad (135)$$

$$m_E^2 E^\nu - q^{47} q^{56} \frac{r^2}{4r^4} C^\nu \approx m_E^2 E^\nu$$

то приходим к уравнению для свободных векторных массивных частиц. Для решений

$$C_\mu = e^{ikx} c_\mu, \quad (136)$$

$$E^\mu = e^{-ikx} e^\mu$$

с постоянными векторами поляризации c_μ и e_μ получим

$$C_\mu E^\mu = c_\mu e^\mu = \text{Constant} \quad (137)$$

получаем условие (113).

Также как и ранее необходимо полагать, что пары $C\bar{E}$ образуют в обычных условиях устойчивое состояние.

Наконец лагранжиан гравитационного поля G оказывается равным

$$G \approx A_\mu^5 A^{(6)\mu} \approx \frac{r^2}{4r^4} \quad (138)$$

можно считать пренебрежимо малым, то есть пусть $R = 0$.

Так как ставилась задача о существовании решений типа Швардшильда на лагранжиане октонионов, то можно считать, что она выполнена.

Формально в работе указывается на существование приближения октонионного поля, которое могло бы соответствовать физической реальности. Уже эти представления представляются автору заслуживающими самое пристальное внимание к предлагаемому подходу по развитию октонионной гравитации.

Благодарности

Автор выражает благодарность за содержательное обсуждение работы участникам семинара Лаборатории им. А.А. Фридмана, особенно А.А. Грибу, С.В. Красникову, А. Лобашеву и Ю.В. Павлову.

Литература

- [1] Jordan P., Neumann J., Wigner E. // *Ann. Math.*, 35, 1934, pp. 29-64.
- [2] Павлов Д.Г. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(1), 2004, pp. 33-42.
- [3] Gogberashvili M. // *J. Phys.*, A39, 2006, pp. 7099-7104.
- [4] Калашников О.К., Бронштейн С.Е., Фрадкин Е.С. // *Ядерная физика*, 29, в. 6, 1979, с. 1660-1669.
- [5] Zorn M. // *Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ.*, 9, 1933, pp. 395-402.
- [6] Daboul J., Delbourgo R. // *J. Math. Phys.*, 40, 1999, pp. 4134-4150, hep-th/9906065.
- [7] Дорофеев В.Ю. // *Известия ВУЗов. Математика*, 11, 2011, с. 3-12. arxiv.org math-ph:0908.3247v1 (2009)
- [8] Дорофеев В.Ю. E-print: arxiv.org gr-qc:1003.3228 (2010)
- [9] Дорофеев В.Ю. E-print: arxiv.org gr-qc:1010.1928 (2010)
- [10] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М., Наука, 1957.
- [11] Окунь Л.Б. Лептоны и кварки. М., Наука, 1990.
- [12] Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. М., Гос. изд. иностранной литературы, 1948.
- [13] Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. М., Наука, 1981.
- [14] Fock V., Ivanenko D. C.R., Paris 188, 1929, p. 1470.
- [15] Соколов А., Иваненко Д. Квантовая теория поля, М., Наука, 1952.
- [16] Brill D.R., Wheeler J.A. // *Rev. Mod. Phys. D.*, 29, 1957, pp. 465-479.

CONSTRUCTION OF THE CURVATURE ON CAYLEY ALGEBRA OCTAVES

V.Yu. Dorofeev

Friedmann Laboratory for Theoretical Physics, St-Petersburg, Russia

friedlab@mail.ru

Lagrangian of matter fields of electron-lepton sector is constructed on Cayley algebra octaves. It is inferred from the model that the state space is ten-dimensional. It is proposed to determine the non-associative part of the Lagrangian as a manifestation of gravity. It turns out a pair of oppositely charged massless vector bosons induces gravity. It is shown the model of the Lagrangian with Schwarzschild as well as Friedman metric is consistent.

Key Words: octonions, Cayley octaves, the weak interaction, nonassociative, GRG.

ЭФФЕКТЫ ФИНСЛЕРОВОЙ ГЕОМЕТРИИ В ФИЗИКЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЯВЛЕНИЙ: СЛУЧАЙ МОНОСЛОЙНЫХ СИСТЕМ

Г.В. Грушевская, Н.Г. Крылова

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

grushevskaja@bsu.by, nina-kr@tut.by

Проведена геометризация взаимодействий в ЛБ-монослое таким образом, чтобы решения уравнений движения частиц в монослое аппроксимировались геодезическими в двумерном финслеровом пространстве. Исследованы эффекты двумерной финслеровой метрики в физике поверхностных явлений в случае ЛБ-монослоя. В резонансном приближении рассчитана фигуратриса для предложенной модели геометризации взаимодействий при формировании монослоя. Численное моделирование показало наличие нескольких режимов формирования структуры, зависящих от скорости сжатия и параметров двойного электрического слоя.

Ключевые слова: финслерова метрика, двумерное пространство, поверхностные явления, структуризация ЛБ-монослоя.

1 Введение

В настоящее время технология Лэнгмюра – Блоджетт (ЛБ) [1, 2] нашла важное применение при изготовлении наноструктурных материалов, включающих слои из амфифильных молекул, таких как жирные кислоты ($\text{CH}_3(\text{CH}_2)_n\text{COOH}$), фосфолипиды и др. Амфифильные молекулы формируют на поверхности воды мономолекулярные слои (монослои), в которых гидрофильные группы погружены в воду, а гидрофобные алкановые цепочки находятся снаружи. Эти наноструктурные материалы представляют собой либо несколько бислоев (ламеллярных мицелл), либо состоят из одного монослоя и нескольких бислоев при получении мультислоев Y-типа по технологии Лэнгмюра – Блоджетт [3].

При подходящих значениях pH и температуры ЛБ-технология позволяет формировать монослои, пригодные для использования в качестве покрытий, если выполняется условие неразрушающего погружения твердой подложки в поджатый монослой на поверхности воды с последующим неразрушающим структуру монослоя нанесением. Монослои Лэнгмюра-Блоджетт являются высокоупорядоченными и анизотропными, причем их молекулярное упорядочение определяется структурой поджатого монослоя на поверхности субфазы до перенесения, [3, 4, 5], а не структурой подложки. Силы адгезии со стороны подложки могут только исказить исходную структуру монослоя. Создание таких покрытий возможно, если поджатый монослой находится в кристаллическом (твердом) состоянии.

Переносящиеся монослои (ЛБ-монослои) существуют, как уже сказано, при строго определенных значениях pH и температуры в отличие от лэнгмюровских монослоев, которые являются результатом растворения амфифильных молекул в приповерхностных слоях субфазы и неотделимы от нее, поскольку сами входят в состав субфазы. Напротив, в ЛБ-монослоях амфифильные молекулы присутствуют в виде супрамолекулярных комплексов, и поэтому происходит расслоение приповерхностных слоев субфазы на отдельные фазы: собственно ЛБ-монослой и приповерхностные слои субфазы. Моделирование процесса расслоения фаз с образованием ЛБ-монослоя проводилось в работе [6] с использованием кинетической теории среднего поля для описания реакций с диффузией.

Исследование процессов структуризации при формировании молекулярных ЛБ-монослоев представляет большой интерес в связи с применением высокоупорядоченных

ЛБ-пленок в нанoeлектронике, электрооптике, микролитографии, трибологии и биохимических датчиках [7]. Однако молекулярные механизмы структурообразования в переносимых монослоях остаются до конца невыясненными. Предполагается, что если вклад процессов растворения в кинетику формирования преобладает над процессами комплексообразования, то формируются лэнгмюровские монослои. Поэтому для описания формирования лэнгмюровских монослоев строят или высокоидеализированные крупнозернистые модели, чтобы понять влияние той или иной степени идеализации формы на механизмы, ответственные за фазовые переходы с изменением наклона хвоста в конденсированных фазах при постоянном давлении [8]; или идеализированные частично крупнозернистые модели, учитывающие гибкость гидрофобных хвостов, лежащих на поверхности, но представляющие сегменты, находящиеся вне поверхности, в виде прямостоящих жестких стержней, не вносящих вклад в энтропию системы [9]; или идеализированные крупнозернистые модели, учитывающие эффект хиральности молекул (переход из гетерохиральной фазы в однородную хиральную фазу) [10]. Эти зерненные модели не являются реалистичными физико-химическими моделями и не учитывают перераспределение плотности заряда двойного электрически заряженного слоя Гельмгольца при формировании лэнгмюровских монослоев.

Более реалистичными являются решеточные модели, учитывающие как диффузию, так и химические реакции в фазово-полевом приближении [6]. В этих моделях расслоение фаз может происходить при определенных рН и температуре. Поэтому они позволяют описывать формирование не только лэнгмюровских, но и ЛБ-монослоев [6]. Однако и в химико-физических моделях ЛБ-монослоев не учитываются процессы образования гидратных комплексов амфифильных молекул и наличие двойного электрического слоя. Механизм распада гидратных комплексов амфифильных молекул в сжатых монослоях при формировании ЛБ-структуры неизвестен. Маловероятно, что распад этих комплексов происходит при отрыве поджатого монослоя от поверхности воды. Структурный анализ методами сканирующей атомно-силовой микроскопии (АСМ) показал наличие "впадинок" на поверхности ЛБ-пленки в местах, где капельки воды растеклись между бислоями тонкой ЛБ-пленки с последующим их испарением [11]. Структурный анализ с использованием АСМ также выявил наличие капелек воды в связанном состоянии в виде бугорков между бислоями толстых ЛБ-пленок [11]. В экспериментах по рентгеновской дифракции и оптической микроскопии под углом Брюстера наблюдались холмообразные структуры для поджатых монослоев в жидкокристаллических, локально анизотропных фазах L_2 , L'_2 , Ov , S с локально кристаллической структурой, а также для двумерных кристаллических фаз L'_2 , CS [12, 13, 14, 15]. В случае жидко-кристаллических (ЖК) фаз наблюдаемые холмообразные структуры статичны, а в случае кристаллических фаз – появляются и исчезают [15]. Наблюдаемые бугорки представляют собой выброшенную из ЖК и твердотельной фаз воду в результате процесса расслоения фаз. Для твердотельной фазы расслоение происходит по всей поверхности субфазы, и поэтому капельки воды растекаются, что дает возможность ликвидировать дефект в процессе самоорганизации (расслоения фаз).

В работе [15] было показано, что вещество, выбрасываемое из поджатого кристаллического монослоя, включает не только воду, но и избыточное число амфифильные молекул. Выброс последних приводит к минимизации площади поверхности кристаллической пленки и, следовательно, к исчезновению бугорка. Параметры этого процесса зависят от скорости поджатия монослоя [15]. В работе [16] было показано, что упорядочение молекул наблюдается в квази-равновесном состоянии монослоя не только при низких скоростях v движения барьера. Структуризация монослоев в процессе фазового перехода первого рода происходит при ряде определенных значений скорости сжатия, причем между этими значениями фазовый переход не наблюдался. При этом типичная зависимость поверхностного натяжения π от площади поверхности S для фазовых переходов первого рода

наблюдалась для таких скоростей сжатия, при которых процесс сжатия происходит вдали от равновесного состояния. В работе [17] мы предположили, что проблема описания структуризации монослоев может быть переформулирована геометризацией поверхностного натяжения монослоя как свойства, определяемого двумерной метрикой, зависящей от времени сжатия.

Нами будут использоваться методы дифференциальной геометрии двумерных (2D) финслеровых пространств. Как было показано в [18], геометрия финслерова 2D-пространства (x, y) может быть реализована наложением ограничений (связей) на трехмерном (3D) пространстве (x, y, z) путем введения определенной области изменения переменной z согласно условию $dy = zdx$. Для этого пространства, называемого пространством линейных элементов, существует такая система отсчета, где расстояние dl определяется финслеровой метрикой: $dl = L\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}\right) dx$. Далее, мы будем развивать такого рода подход к построению финслерова пространства. Однако связи будут налагаться исходя из физики ЛБ-монослоя. В общем случае n переменных x^i , преобразующихся как $x^{i'} = y^{i'}(x^i(t))$, их дифференциалы преобразуются в виде $dx^{i'} = \frac{\partial y^{i'}}{\partial x^i} dx^i$. Так как координаты смещения являются координатами касательного вектора, то финслерово пространство является расслоением касательных пространств. Поэтому линейный элемент (x^i, dx^i) можно формально записать в виде (x^i, \dot{x}^i) , понимая, что \dot{x}^i – касательный вектор. Поэтому финслерова метрика $F(x^i, dx^i)$ является метрикой, зависящей от направления смещения dx^i : $F(x^i, dx^i) = F(x^i, \dot{x}^i)$ [19].

Целью работы является описание влияния перераспределения плотности электрического заряда двойного слоя на процессы структуризации ЛБ-монослоев и геометризация взаимодействий в ЛБ-монослое таким образом, чтобы решения уравнений движения частицы в монослое аппроксимировались геодезическими в двумерном финслеровом пространстве.

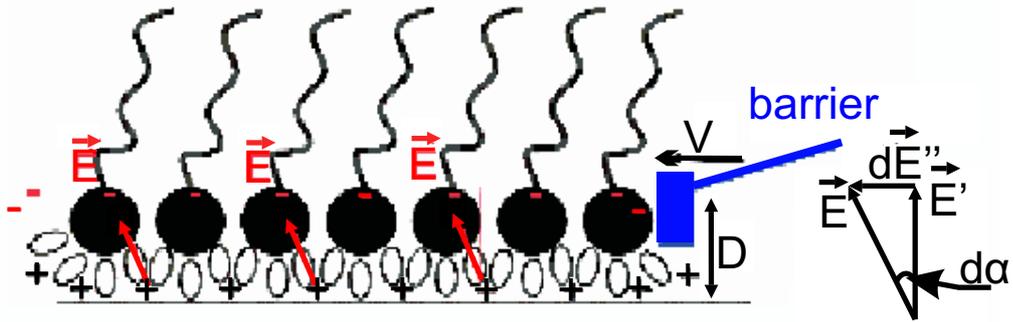
2 Явление электрокапиллярности

Пусть некоторое количество амфифильных молекул, формирующих ЛБ-монослой (рис. 1а), распределено на поверхности жидкой субфазы. Гидрофильные части амфифильных молекул погружены в электролит, а гидрофобные части находятся снаружи. В воде гидрофильные группы ("головки") молекул диссоциируют на положительно заряженный ион водорода и отрицательно заряженную гидрофильную "головку". При этом молекулы воды и положительно заряженные ионы электролита ориентируются таким образом, чтобы компенсировать заряд амфифильных молекул, образуя двойной электрический слой толщиной D (рис. 1а). Отрицательно заряженная "головка" молекулы и положительно заряженная "шуба" ионов и молекул воды формируют диполь (рис. 1а). По поверхности субфазы движется барьер, поджимая монослой амфифильных молекул. Для простоты, будем рассматривать формирование монослоя в случае сферически симметричной ванны. Круговой ЛБ-монослой сжимается по окружности с постоянной радиальной скоростью V . Выберем ортогональную цилиндрическую систему координат (r, ϕ, z) , в которой ЛБ-монослой расположен в плоскости XY с $z = 0$ и центром в начале координат (рис. 1б). Скорость \dot{r} молекул монослоя в точке (r, ϕ) определяется как притяжением между молекулами, так и движущей силой со стороны равномерно сжимающего барьера.

Поверхностное натяжение монослоя

Определим энергию σ поверхностного натяжения ЛБ-монослоя. ЛБ-монослой рассматриваем как двумерный объект. Выберем произвольную круговую область ЛБ-монослоя с границей L радиуса r , и пусть $\tilde{\sigma}$ – потенциальная энергия точки (r, ϕ) этой границы.

(a)



(б)

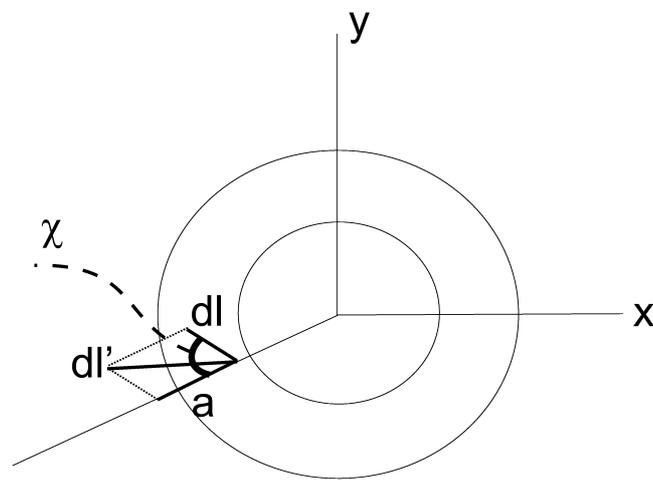


Рис. 1: (a) ЛБ-монослой и двойной электрический слой в процессе поджатия.

(б) Явление электрокапиллярности в радиальной ЛБ-ванне

Вычисляя силу $\vec{\nabla}\tilde{\sigma}$, которая действует в каждой точке границы, можно определить энергию поyерностного натяжения σ ЛБ-монослоя как

$$\sigma = \int dr \oint_L \vec{\nabla}\tilde{\sigma} d\vec{l} \equiv \int \vec{\nabla}\sigma \cdot d\vec{r}. \quad (1)$$

Отсюда следует, что

$$\vec{\nabla}\sigma = \oint_L \vec{\nabla}\tilde{\sigma} dl = 2\pi r \vec{\nabla}\tilde{\sigma} \quad (2)$$

По определению, коэффициент поyерностного натяжения $\tilde{\pi}$ имеет смысл силы, действующей на единицу длины одномерной границы монослоя:

$$\oint_L \tilde{\pi} d\vec{l} = \vec{\nabla}\tilde{\sigma}. \quad (3)$$

Теперь, можно переписать энергию поyерностного натяжения в виде суммы

$$\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma \quad (4)$$

где σ_0 — энергия молекул на границе субфазы, $\Delta\sigma$ — приращение энергии поверхностного натяжения за счет наличия заряда на границе раздела фаз [20, 21, 22]. Из теории электрокапиллярности [22, 23] известно, что зависимость коэффициента поверхностного натяжения $\Delta\tilde{\pi}$ от электрического заряда на границе раздела фаз при фиксированном давлении p и температуре T имеет вид:

$$q\rho = - \left(\frac{d\Delta\tilde{\pi}}{d\varphi} \right)_{p,T} \quad (5)$$

где φ — разность потенциалов на границе раздела фаз, q — заряд одной молекулы, $\rho \equiv \rho(r, t)$ — поверхностная плотность молекул в монослое.

Представим монослой толщиной D как плоскопараллельный конденсатор с емкостью C и зарядом Q на обкладках. Разность потенциалов φ' между обкладками конденсатора выражается по формуле

$$\varphi' = \frac{Q}{C} = \frac{QD}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{q\rho(r, t)D}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad (6)$$

где ε_0 — диэлектрическая постоянная, ε — диэлектрическая проницаемость, S — площадь пластин конденсатора. Тогда, принимая во внимание, формулы (1) и (3), выражение (5) может быть переписано в виде:

$$q\rho S = - \frac{1}{L} \left(\frac{d\Delta\sigma}{d\varphi} \right)_{p,T}. \quad (7)$$

При дальнейшем рассмотрении задачи символ " Δ " будет опускаться. Таким образом, частица движется в двумерном пространстве (плоскости), которое равномерно сжимается (или расширяется) относительно выбранного центра. Частица будет полностью увлекаться пространством, приобретая дополнительную радиальную компоненту скорости. В рассматриваемой задаче пространство представляет собой мономолекулярный слой, а частица (молекула) увлекается остальными молекулами монослоя.

Пусть угол χ — угол между направлением собственной скорости движения \dot{r}_0 частицы и скорости \dot{r}_1 деформации монослоя за счет электрокапиллярных эффектов. Тогда частица за время dt изменит направление своего движения с \vec{dl} до \vec{dl}' и пройдет расстояние $|dl'| = |dl + a| = |\dot{r}_0 + \dot{r}_1|dt$ как показано на рис. 1б. Следовательно, метрическое пространство ЛБ-монослоя приобретает кривизну.

3 Метрическая функция

Поджатие монослоя барьером приводит к движению отрицательно заряженных молекул монослоя относительно положительно заряженной "шубы" ионов и молекул воды. Поэтому, вообще говоря, напряженность электрического поля \vec{E} двойного электрического слоя направлена не перпендикулярно, а под некоторым углом к плоскости монослоя, что создает дополнительную радиальную компоненту силы, действующей против направления движения барьера (рис. 1а). Угол вращения вектора напряженности электрического поля \vec{E} зависит от соотношения скоростей движения барьера и релаксационных процессов в "шубе". Обозначим напряженность вертикальной составляющей электрического поля двойного слоя через \vec{E}' : $\vec{E}' = \vec{\nabla}\varphi'$. За бесконечно малый интервал времени dt заряженные гидрофильные группы сдвинутся на расстояние $\dot{r}dt\vec{i}_r$ и образуют угол $d\alpha$ относительно вектора $D\vec{i}_z$. Тангенс угла $d\alpha$ равен $\tan d\alpha = \dot{r}dt/D$ (см. 1а). Градиент электрического поля \vec{E} также расположен под углом $d\alpha$ к предыдущему направлению $\vec{E}' = E'\vec{i}_z$. Следовательно, перераспределение электрического заряда можно охарактеризовать напряженностью электрического поля \vec{E} и углом поворота: $\cos d\alpha = E'/E$. Тогда, в силу

неразличимости частиц, работа монослоя за время t выражается формулой

$$d\vec{r} \cdot \int d\vec{E}'' = dr \int |\vec{E}'| \tan d\alpha = \frac{1}{D} \dot{r} dr \int |\vec{E}'| dt \quad (8)$$

где $d\vec{E}''$ — компонента напряженности электрического поля, располагающаяся в плоскости ЛБ-монослоя. С другой стороны, вращение электрического поля \vec{E}' дает дополнительный вклад $\frac{e}{c} \vec{A} \cdot d\vec{R}$ в дифференциал действия dF [24]. Здесь вектор-потенциал \vec{A} удовлетворяет условию $\vec{A} \sim \int \vec{E}' dt$, где \vec{R} — радиус-вектор точки монослоя в 3D-пространстве. Нерелятивистскую метрическую функцию dl ЛБ-монослоя в евклидовом 3D-пространстве можно записать в виде

$$dl \equiv dF = mc^2 dt - L_0 dt + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot d\vec{R} \quad (9)$$

где m — масса молекулы, L_0 — функция Лагранжа без учета электрокапиллярности, c — скорость света. Подставляя выражение (8) в формулу (9), получаем метрическую функцию двумерного монослоя

$$dF = mc^2 dt - L_0(x, y) dt + eAdz/c \quad (10)$$

где $dz \sim \dot{r} dr/D$, z — проекция радиус-вектора частицы \vec{R} на ось Z . Так как пространство монослоя имеет кривизну, то частица движется с ускорением a : $\dot{r} \sim at$. Это означает, что области изменения переменной z различны в разных направлениях (dx, dy). Так как $dz \sim at dr/D$, то пространство, в котором движется частица в ЛБ-монослое, является пространством линейных элементов (x, y, z, t) , геометрией которого, как указывалось во введении, является геометрия Финслера.

Найдем потенциальную энергию поверхностного натяжения $U_s(r, t)$ в точке $r(t)$ ЛБ-монослоя в момент времени t . Для этого перепишем выражение (7) в виде:

$$-\vec{\nabla}\sigma = q\rho S \vec{\nabla}\varphi L = q\rho S \vec{E} L = q\rho S \left(\vec{E}' + \int d\vec{E}'' \right) L \quad (11)$$

Используя ортогональность векторов \vec{E}' и \vec{r} , из выражения (11) находим выражение для приращения энергии системы за время t :

$$-\int \vec{\nabla}\sigma \cdot d\vec{r} = q \int \int d\vec{E}'' \cdot d\vec{r} \rho(r, t) S L. \quad (12)$$

Учитывая, что $\vec{E}' = \vec{\nabla}\varphi'$, подстановка формул (6) и (8) в (12) дает выражение для дифференциала $d\sigma$ при постоянных давлении и температуре:

$$\begin{aligned} -d\sigma &= \int \frac{\dot{r} dt}{D} q L(t) S(t) \rho(r, t) d\varphi' = \\ &= \int \frac{q^2 \dot{r}}{\varepsilon \varepsilon_0} dt L(t) S(t) \rho(r, t) d\rho = \\ &= \int \frac{q^2 \dot{r}}{2\varepsilon \varepsilon_0} dt L(t) S(t) d\rho^2 \end{aligned} \quad (13)$$

где $L(t) = 2\pi r(t)$. Перепишем уравнение (13) через емкость C

$$-d\sigma = \int dt \frac{q^2 \dot{r} D}{2\varepsilon^2(t) \varepsilon_0^2} C(t) L(t) d\rho^2(r, t). \quad (14)$$

Интегрируя правую и левую части уравнения (14) по $d\sigma$ и $d\rho^2(r, t)$ соответственно, получаем выражение, описывающее зависимость энергии поверхностного натяжения монослоя от плотности заряда на границе фаз:

$$\sigma = - \int \frac{\pi q^2 \dot{r} D}{\varepsilon^2(t) \varepsilon_0^2} dt r(t) C(t) \rho^2(r, t). \quad (15)$$

Так как количество вещества должно сохраняться, а сжатие монослоя происходит равномерно, вещество, которое в момент времени t находилось в кольце радиуса r и толщиной dr за время dt перейдет в кольцо радиуса $r + \dot{r} dt$ той же толщины dr :

$$2\pi r dr \rho(t) = 2\pi(r + \dot{r} dt) dr \rho(t + dt). \quad (16)$$

Получаем, что

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{\dot{r} dt}{r}. \quad (17)$$

Интегрируя равенство (17), находим выражение для зависимости плотности монослоя от времени и координаты:

$$\rho(r, t) = \rho_0 e^{-\int \frac{\dot{r}}{r} dt}, \quad (18)$$

где ρ_0 — плотность монослоя в начальный момент времени t_0 . Предположим, что диэлектрическая проницаемость ε не зависит от времени t . Тогда, учитывая $S(t) = \pi r^2(t)$, выражение (15) преобразуется к виду

$$\sigma = - \frac{\pi^2 q^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \int \dot{r} dt r^3(t) \rho^2(r, t). \quad (19)$$

Подставляя (18) в (19), получаем окончательное выражение для энергии поверхностного натяжения монослоя $\sigma(r, t)$

$$\sigma(r, t) = - \frac{\pi^2 q^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho_0^2 \int \dot{r} dt r^3 e^{-\int_{t_0}^t \frac{2\dot{r}}{r(t')} dt'}. \quad (20)$$

Теперь можно найти приращение потенциальной энергии монослоя $\Delta\sigma$ за время dt при изменении площади поверхности монослоя на величину ΔS , равную площади кольца радиуса r и толщиной dr , согласно формуле (1):

$$\begin{aligned} \Delta\sigma(r, t) &= \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial\sigma}{\partial r} \Delta S = \\ &= \frac{1}{2\pi r dr} (\sigma(r + dr, t + dt) \Delta S(r + dr, t + dt) - \sigma(r, t) \Delta S(r, t)) = \\ &= \frac{1}{2\pi r} (\sigma(r + dr, t + dt) 2\pi(r + dr) - \sigma(r, t) 2\pi r). \end{aligned} \quad (21)$$

Очевидные преобразования формулы (21) дают выражение:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma(r, t) &= \frac{1}{2\pi r} (2\pi r \sigma(r + dr, t + dt) + 2\pi dr \sigma(r + dr, t + dt) - 2\pi r \sigma(r, t)) = \\ &= \frac{1}{2\pi r} (2\pi r \cdot (\sigma(r + dr, t + dt) - \sigma(r, t)) + 2\pi dr \cdot \sigma(r + dr, t + dt)) = \\ &= \left[\frac{\sigma(r + dr, t + dt) - \sigma(r, t + dt)}{dr} \right] dr + \\ &+ \left[\frac{\sigma(r, t + dt) - \sigma(r, t)}{dt} \right] dt + \frac{dr}{r} \sigma(r + dr, t + dt). \end{aligned} \quad (22)$$

Согласно формуле (22), выражение для потенциальной энергии $U_s(r, t)$ в произвольной точке монослоя с координатами (r, t) дается формулой:

$$\begin{aligned}
 U_s(r, t) &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta \sigma(r, t)}{\Delta r} = \\
 &= \left[\frac{\sigma(r + dr, t + dt) - \sigma(r, t + dt)}{dr} \right] + \\
 &+ \left[\frac{\sigma(r, t + dt) - \sigma(r, t)}{dt} \right] \frac{dt}{dr} + \frac{\sigma(r + dr, t + dt)}{r}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Заметим, что при устремлении $(dr, dt) \rightarrow 0$, в формуле (23) появляются соответствующие производные:

$$U_s(r, t) = \sigma'_r + \frac{\sigma'_t}{\dot{r}} + \frac{\sigma}{r} \tag{24}$$

где штрих обозначает производную по соответствующему индексу.

4 Численное моделирование в случае равномерной внешней деформации монослоя

Рассмотрим эффeкты электрокапиллярности, возникающие в случае равномерной деформации монослоя извне. При равномерном поджатии монослоя со скоростью V , радиальная скорость сжатия складывается со скоростью молекулы в монослое, и в формуле (20) необходимо произвести замену $\dot{r} \rightarrow \dot{r} - |V|$:

$$\sigma(r, t) = -\frac{\pi^2 q^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho_0^2 \int (\dot{r} - |V|) dt r^3 e^{-\int_{t_0}^t \frac{2(\dot{r} - |V|)}{r(t')} dt'}. \tag{25}$$

Полагая r и t независимыми переменными и $r(t_0 = 0) = R_0$, интеграл (25) по t может быть вычислен как

$$\begin{aligned}
 \sigma(r, t) &= -\frac{\pi^2 q^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho_0^2 \int (\dot{r} - |V|) dt r^3 e^{-\int_{t_0}^t \frac{2(\dot{r} - |V|)}{r(t')} dt'} = \\
 &= -\frac{\pi^2 q^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\rho_0^2}{R_0^2} \left(\left(-\frac{1}{3} r^6 + \frac{1}{15} (|V|t) r^5 + \frac{1}{30} (|V|t)^2 r^4 + \frac{1}{45} (|V|t)^3 r^3 + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{1}{45} (|V|t)^4 r^2 + \frac{2}{45} (|V|t)^5 r \right) \times e^{\frac{2|V|t}{r}} - \frac{4}{45} (|V|t)^6 \text{Ei} \left[\frac{2|V|t}{r} \right] \right)
 \end{aligned} \tag{26}$$

где $\text{Ei} \left[\frac{2|V|t}{r} \right]$ – интегральная экспонента, являющаяся специальной функцией. Подставляя выражение (26) в формулу для потенциальной энергии $U_s(r, t)$ (24) в заданной точке $r(t)$ монослоя, получаем

$$\begin{aligned}
 U_s(r, t) &= -\frac{\pi^2 q^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\rho_0^2}{R_0^2} \left(\left(-\frac{4}{3} r^5 + \frac{16}{15} (|V|t) r^4 + \frac{1}{30} (|V|t)^2 r^3 + \right. \right. \\
 &+ \frac{1}{45} (|V|t)^3 r^2 + \frac{1}{45} (|V|t)^4 r + \frac{2}{45} (|V|t)^5 - r^5 \frac{|V|}{\dot{r}} \left. \right) e^{\frac{2|V|t}{r}} - \\
 &- \frac{4}{45} \frac{(|V|t)^6}{r} \text{Ei} \left[\frac{2|V|t}{r} \right] \left. \right).
 \end{aligned} \tag{27}$$

В общем случае движения частицы в некотором потенциальном поле $U_s(r, t)$ можно записать функцию Лагранжа L в виде:

$$L = m \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{2dt^2} - U_s(r, t). \tag{28}$$

После подстановки выражения (27) в формулу (28) получаем

$$L = m \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{2dt^2} + \frac{\pi^2 q^2 \rho_0^2}{\varepsilon \varepsilon_0 R_0^2} \left(\left(-\frac{4}{3} r^5 + \frac{16}{15} (|V|t) r^4 + \frac{1}{30} (|V|t)^2 r^3 + \frac{1}{45} (|V|t)^3 r^2 + \frac{1}{45} (|V|t)^4 r + \frac{2}{45} (|V|t)^5 - r^5 \frac{|V|}{\dot{r}} e^{\frac{2|V|t}{r}} - \frac{4}{45} \frac{(|V|t)^6}{r} \text{Ei} \left[\frac{2|V|t}{r} \right] \right) \right). \quad (29)$$

Уравнение индикатрисы, которая является гиперповерхностью радиус-векторов единичной длины соответствующего центроаффинного касательного пространства с полученной метрикой, определяется по формуле:

$$dl = mc^2 dt - L dt = 1. \quad (30)$$

Подстановка выражения (29) в уравнение (30) дает

$$dl = mc^2 \dot{\xi} - m \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}{2\dot{\xi}} - \frac{\pi^2 q^2 \rho_0^2}{\varepsilon \varepsilon_0 R_0^2} \left(\left(-\frac{4}{3} r^5 + \frac{16}{15} (|V|t) r^4 + \frac{1}{30} (|V|t)^2 r^3 + \frac{1}{45} (|V|t)^3 r^2 + \frac{1}{45} (|V|t)^4 r + \frac{2}{45} (|V|t)^5 - r^5 \frac{|V|}{\dot{r}} \dot{\xi} \right) e^{\frac{2|V|t}{r}} - \frac{4}{45} \frac{(|V|t)^6}{r} \text{Ei} \left[\frac{2|V|t}{r} \right] \right) \dot{\xi} = 1 \quad (31)$$

где $\dot{\xi}$, \dot{r} , и $\dot{\varphi}$ соответствующие производные от t , r , и ϕ по эволюционному параметру τ .

Введем параметры A, B, C так, чтобы переписать выражение (31) в виде

$$A \dot{\xi}^3 + B \dot{\xi}^2 \dot{r} - C \dot{r} \frac{(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)}{2c^2} - \dot{\xi} \dot{r} = 0 \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} A &= p |V| r^5 e^{\frac{2|V|t}{r}}, \\ B &= mc^2 - p \left(\left(-\frac{4}{3} r^5 + \frac{16}{15} (|V|t) r^4 + \frac{1}{30} (|V|t)^2 r^3 + \frac{1}{45} (|V|t)^3 r^2 + \frac{1}{45} (|V|t)^4 r + \frac{2}{45} (|V|t)^5 \right) e^{\frac{2|V|t}{r}} - \frac{4}{45} \frac{(|V|t)^6}{r} \text{Ei} \left[\frac{2|V|t}{r} \right] \right), \\ C &= mc^2, \\ p &= \frac{\pi^2 q^2 \rho_0^2}{\varepsilon \varepsilon_0 R_0^2}, \\ \dot{r} &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}. \end{aligned} \quad (33)$$

Проведем перенормировку переменных, входящих в (32), вида:

$$\dot{r}' = \frac{\dot{r}}{c}, \quad \dot{x}' = \frac{\dot{x}}{c}, \quad \dot{y}' = \frac{\dot{y}}{c}. \quad (34)$$

Индикатриса в перенормированных координатах имеет вид

$$\frac{A}{c} \dot{\xi}'^3 + B \dot{\xi}'^2 \dot{r}' - C \dot{r}' \frac{(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2)}{2} - \dot{\xi}' \dot{r}' = 0. \quad (35)$$

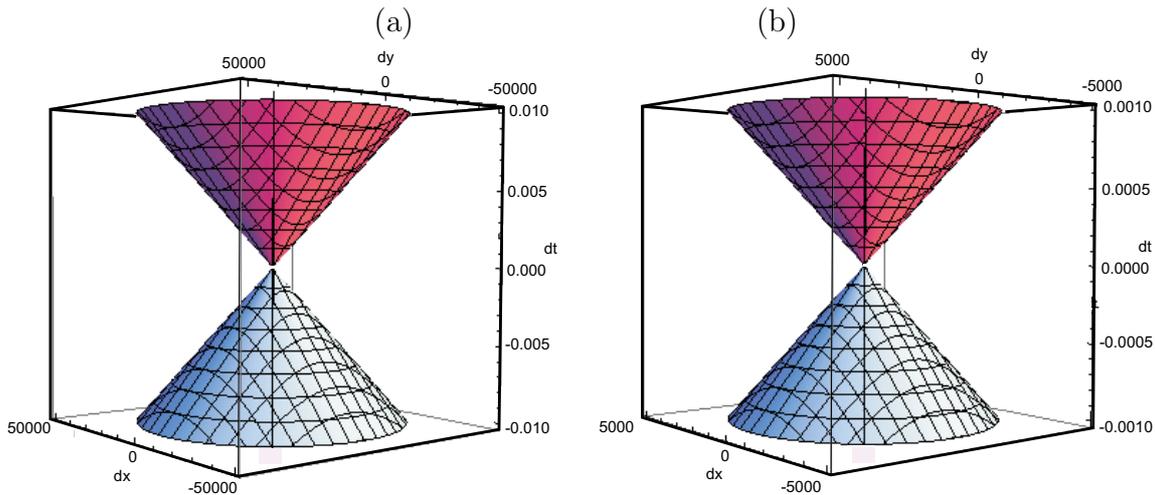


Рис. 2: Индикатрисы пространства ЛБ-монослоя для малой скорости поджатия $V = 0,05$ в точках монослоя $\{x_0, y_0, t_0\} = \{0.0796186, 0.1, 0.01\}$ (a), $\{0.0796185, 0.1, 0.01\}$ (b) с $B = 408422.0, 408421.0$ соответственно.

Сделаем замену $dt \rightarrow -dt$, что соответствует $\dot{\xi} \rightarrow -\dot{\xi}$

$$-\frac{A}{c}\dot{\xi}^3 + B\dot{\xi}^2\dot{r}' - C\dot{r}'\frac{(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2)}{2} + \dot{\xi}\dot{r}' = 0. \quad (36)$$

Выражая \dot{r}' через \dot{x}' и \dot{y}' , получаем

$$-\frac{A}{c}\dot{\xi}^3 + B\dot{\xi}^2\frac{(x'\dot{x}' + y'\dot{y}')}{r'} - C\frac{(x'\dot{x}' + y'\dot{y}')}{r'}\frac{(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2)}{2} + \dot{\xi}\frac{(x'\dot{x}' + y'\dot{y}')}{r'} = 0. \quad (37)$$

Проведенное численное моделирование с использованием экспериментальных значений параметров: $C = 4.23 \times 10^{-8}$, $A = 15363.9$, 4.78079×10^7 для $V = 0.05, 15.0$ показало, что когда скорость поджатия монослоя стремится к нулю, коэффициент A также стремится к нулю, и индикатриса имеет вид двухполостного гиперboloида, что является типичным для пространства Минковского (рис. 2). Однако при высоких скоростях поджатия, существуют области пространства-времени, в которых вид индикатрисы радикально меняется (рис. 3). Это означает, что мы помещаем частицу в точку пространства с наибольшим значением потенциала U_s и, следовательно, в точку пространства с наибольшей кривизной. Это приводит к существенным ограничениям возможных значений скорости движения частица как по модулю, так и по направлению. Численное моделирование дало следующие результаты. При низких скоростях поджатия ($V = 0.05$) в окрестности точки r_0 от 0.0796186 до 0.0796185 вид индикатрисы не изменяется (рис. 2). Поэтому при низких скоростях классическая физика поверхностных явлений хорошо описывается в пространстве-времени Минковского. Однако при высоких скоростях поджатия ($V = 15.0$) вид индикатрисы в той же окрестности точки r_0 изменяется, как представлено на рис. 3. Таким образом, для описания поверхностных явлений при высоких скоростях поджатия необходимо использовать финслерово пространство с метрикой, зависящей от времени.

Согласно результатам численного моделирования внешнего деформирующего воздействия на монослой, уравнения движения частицы, соответствующие разным видам индикатрисы, имеют место в окрестности меньшей, чем 10^{-8} . Реальные размеры ванны порядка 0.2 м. Переходя от безразмерных величин к размерным, получаем, что уравнение движения в данной, независимой от времени геометрии и с данной индикатрисой является правильным в окрестности около 1 нм. Однако классические уравнения движения частицы не корректны в наноразмерной области, так как на таких масштабах диффузия

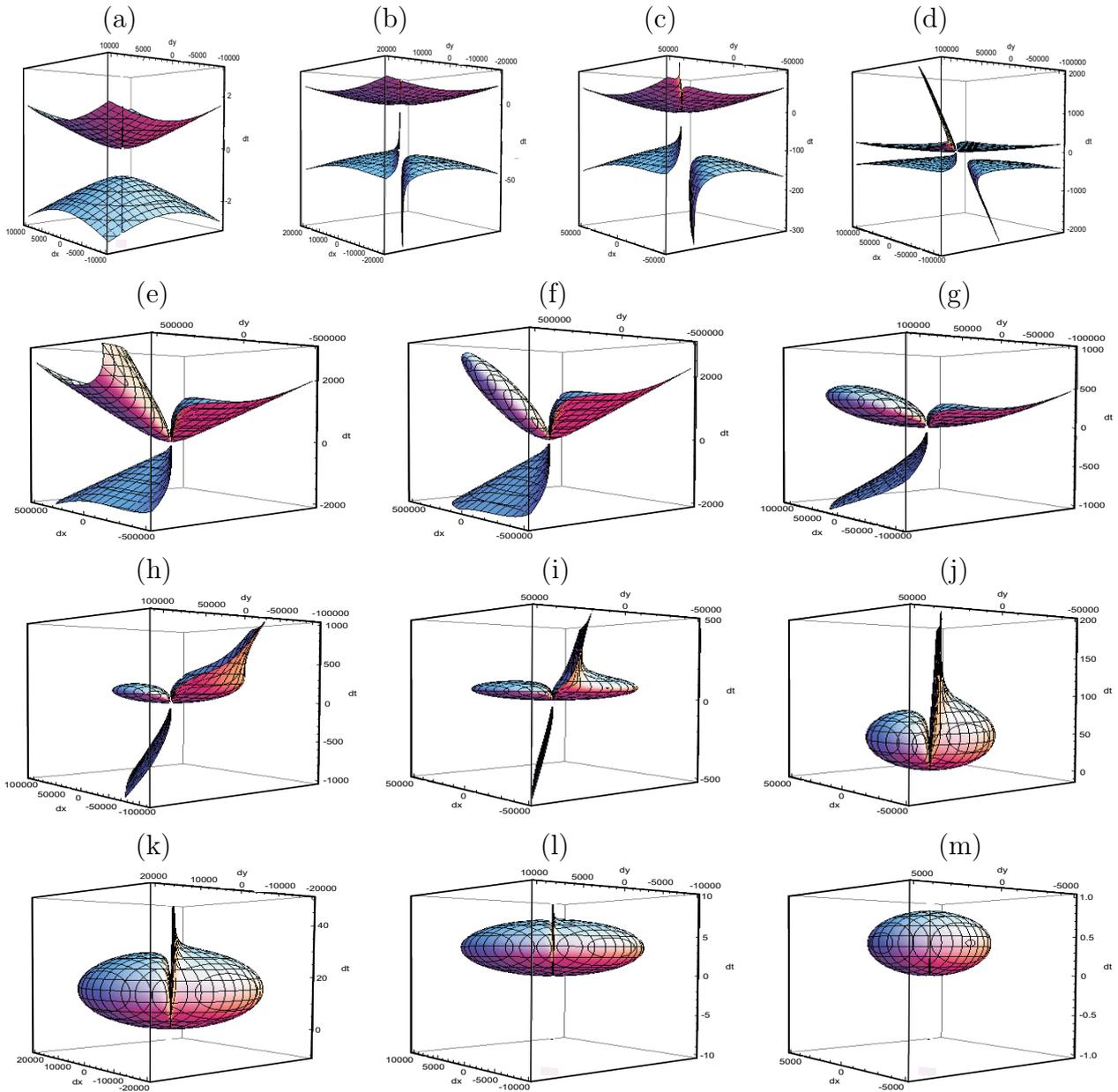


Рис. 3: Индикатрисы пространства ЛБ-монослоя при большом значении скорости поджатия $V = 15,0$ в точках монослоя $x_0 = 0.0796186$ (a), 0.079618558 (b), 0.079618557 (c), 0.0796185568 (d), 0.0796185566 (e), 0.07961855657 (f), 0.0796185565 (g), 0.0796185564 (h), 0.0796185562 (i), 0.079618556 (j), 0.079618555 (k), 0.079618553 (l), 0.0796185 (m) при $B = 0.922721$ (a), 0.0315175 (b), 0.0102984 (c), 0.00605459 (d), 0.00181076 (e), 0.00117419 (f), -0.00031115 (g), -0.00243306 (h), -0.00667689 (i), -0.0109207 (j), -0.0321398 (k), -0.0745781 (l), -1.19919 (m) соответственно; $y_0 = 0.1, t_0 = 0.01$.

частицы в монослое становится квантовой. Поэтому описание в терминах финслерового пространства должно быть проквантовано. В следующем разделе будет предложен метод квантования финслеровой метрики.

5 Построение фигуратрисы (гамильтониана в каждой точке)

Элемент длины F (метрика Бервальда-Мора [25, 26]) может быть определен через элемент объема dV , зависящий от дифференциалов декартовых координат dx, dy, dz изотропного евклидового 3D-пространства, в виде:

$$F = (\dot{z} \wedge \dot{y} \wedge \dot{x})^{1/3}, \tag{38}$$

где \wedge — кососимметричное произведение, поскольку элемент объема dV является 3-формой: $dV = dz \wedge dy \wedge dx$. Как показано на рис. 4, локально частица движется по сфере вдоль геодезических, которые являются большими кругами. Девиация геодезических в точках \vec{r}_1 и \vec{r}_0 определяется углом между направлениями скоростей \dot{r}_1 и \dot{r}_0 .

Метрический тензор g_{ij}^{3D} определяется по формуле

$$g_{ij}^{3D} \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} F^2 \right] \dot{x}^i \dot{x}^j. \tag{39}$$

Благодаря кососимметричности метрической функции (38), можно вычислить метрический тензор g_{ij}^{3D} (39) по следующей формуле:

$$g_{ij}^{3D} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \begin{cases} (\epsilon_{ijk} \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k)^{2/3} & i \neq j \\ (\epsilon_{123} \dot{x}^1 \dot{x}^2 \dot{x}^3)^{2/3} & i = j \end{cases}. \tag{40}$$

Учтем квазидвумерность системы, как малость компонент $|\dot{x}_2|, |\dot{x}_1|$ по сравнению с компонентой скорости $|\dot{x}_3|$: $|\dot{x}_2|, |\dot{x}_1| \ll |\dot{x}_3|$. В этом приближении остаются только слагаемые с \dot{x}_2, \dot{x}_1 в выражении (39) в декартовых координатах, и для двумерного пространства можно определить метрический тензор g_{ij}^{2D} с началом отсчета в точке $\{\dot{z}, \dot{y}^{(0)}, \dot{x}^{(0)}\} \equiv$

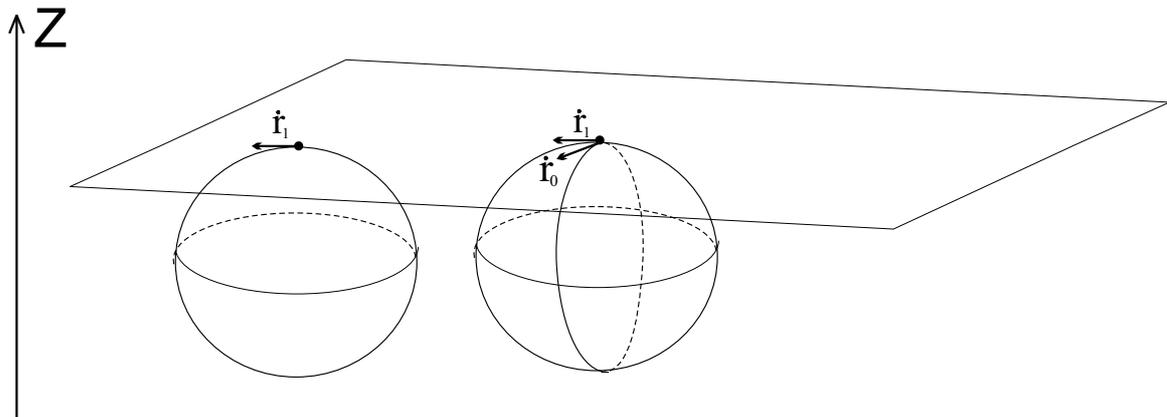


Рис. 4: Геометризация двумерным финслеровым пространством. Локально траектория частицы лежит на сфере.

$\{\dot{x}^3, \dot{x}_{(0)}^2, \dot{x}_{(0)}^1\}$:

$$\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}^{2D} \dot{x}^i \dot{x}^j \stackrel{def}{=} \sum_{i,j=1}^3 g_{ij}^{3D} \dot{x}^i \dot{x}^j \Big|_{\{\dot{x}_{(0)}^2, \dot{x}_{(0)}^1\}} \approx \sum_{i=1}^2 a_{ii} (\dot{x}^i)^2 + \sum_{i \neq j=1}^2 a_{ij} \dot{x}^i \wedge \dot{x}^j,$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} F^2 \right]_{\{\dot{x}_{(0)}^2, \dot{x}_{(0)}^1\}} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{9} (\dot{x}^3)^{\frac{2}{3}} \frac{(\dot{x}^i)^2}{(\dot{x}^1 \dot{x}^2)^{\frac{4}{3}}} \Big|_{\{\dot{x}_{(0)}^2, \dot{x}_{(0)}^1\}}, & i = j \\ \frac{1}{3} (\dot{x}^3)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{(\dot{x}^1 \dot{x}^2)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3} \frac{\dot{x}^i \dot{x}^j}{(\dot{x}^1 \dot{x}^2)^{\frac{4}{3}}} \right) \Big|_{\{\dot{x}_{(0)}^2, \dot{x}_{(0)}^1\}} = \frac{2}{9} (\dot{x}^3)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{(\dot{x}^1 \dot{x}^2)^{\frac{1}{3}}} \Big|_{\{\dot{x}_{(0)}^2, \dot{x}_{(0)}^1\}}, & i \neq j \end{cases} \quad (41)$$

В силу кососимметричности формы $\dot{x}^i \wedge \dot{x}^j = \epsilon_{ij3} \dot{x}^i \dot{x}^j$ формула (41) сводится к виду:

$$F_{(2D)}^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}^{2D} dx^i dx^j = -\frac{1}{9} (\dot{x}^3)^{2/3} \sum_{i=1}^2 \frac{(\dot{x}_{(0)}^i)^2}{(\dot{x}_{(0)}^1 \dot{x}_{(0)}^2)^{4/3}} (dx^i)^2. \quad (42)$$

Геодезические траектории являются большими кругами сфер, так как диагональные элементы g_{ii}^{3D} равны друг другу согласно выражению:

$$g_{kk}^{3D} (\dot{x}^k)^2 = -\frac{1}{9} \frac{(\dot{x}_{(0)}^i)^2 (\dot{x}_{(0)}^j)^2 (\dot{x}^k)^2}{(\dot{x}_{(0)}^i \dot{x}_{(0)}^j \dot{x}_{(0)}^k)^{4/3}} = -\frac{1}{9} \frac{|\dot{x}_{(0)}^i|^2 |\dot{x}_{(0)}^j|^2 |\dot{x}_{(0)}^k|^2}{(\dot{x}_{(0)}^i \dot{x}_{(0)}^j \dot{x}_{(0)}^k)^{4/3}} (\dot{y}^k)^2. \quad (43)$$

В (43) нет суммирования по одинаковым индексам, и $\dot{y}^k = \frac{\dot{x}^k}{|\dot{x}^k|}$. Выражение (43) позволяет заключить, что существует такая система координат, в которой начало отсчета имеет координаты, удовлетворяющие условию $(\dot{x}_{(0)}^i)^2 = |\dot{x}_{(0)}^1| |\dot{x}_{(0)}^2|$. Следовательно, при условии (43) метрика (42) становится конформно-инвариантной

$$F_{(2D)}^2 = -\frac{1}{9} (\dot{x}^3)^{2/3} a \sum_{i,j=1}^2 (dx^i)^2 = -\frac{1}{9} (\dot{x}^3)^{2/3} a r^2, \quad a = \frac{|\dot{x}_{(0)}^1| |\dot{x}_{(0)}^2|}{(\dot{x}_{(0)}^1 \dot{x}_{(0)}^2)^{4/3}}. \quad (44)$$

Уравнение для фигуратрисы H можно получить из следующего выражения [19]:

$$\frac{\partial g_{ik}(x, \dot{x})}{\partial x^h} \dot{x}^i \dot{x}^k = -\frac{\partial g^{ik}(x, p)}{\partial x^h} p_i p_k, \quad \dot{x}^i = g^{ij} p_j, \quad p_i = g_{ij} \dot{x}^j, \quad (45)$$

если учесть, что

$$F^2(x, \dot{x}) = g_{ik}(x, \dot{x}) \dot{x}^i \dot{x}^k, \quad H^2(x, p) = g^{ik}(x, p) p_i p_k. \quad (46)$$

Отсюда следует, что метрическая функция F связана с гамильтонианом H следующим соотношением:

$$\frac{\partial F^2(x, \dot{x})}{\partial x^h} = -\frac{\partial H^2(x, p)}{\partial x^h}. \quad (47)$$

Теперь, продифференцируем левую часть уравнения (47) и учтем зависимость кинетической энергии только от импульса. Тогда, уравнение (47) принимает вид

$$\frac{\partial F^2(x, \dot{x})}{\partial x^h} = -H \frac{\partial V(x, \dot{x})}{\partial x^h}. \quad (48)$$

Выражение (48) может быть проквантовано посредством замены переменных на их операторные аналоги, а именно, операторы координат \hat{x} и импульса \hat{p} . Проквантованное выражение (48) имеет вид

$$\frac{\partial(\widehat{F^2})(x, \dot{x})}{\partial x^h} \Psi = -\hat{H} \frac{\partial \hat{V}(x, \dot{x})}{\partial x^h} \Psi. \quad (49)$$

Здесь Ψ — волновая функция системы. В дальнейшем, вычисления будут проводиться в координатном представлении. В координатном представлении оператор метрики и оператор потенциальной энергии \hat{V} являются некоторыми функциями:

$$\frac{\partial(F^2)(x, \dot{x})}{\partial x^h} \psi_\kappa(x) = -\hat{H} \frac{\partial V(x, \dot{x})}{\partial x^h} \psi_\kappa(x) \quad (50)$$

где κ обозначает набор квантовых чисел. В качестве потенциальной энергии V в (50) будем использовать модельный потенциал (24), установленный ранее:

$$V(r, \dot{r}, t) = \sigma'_r + \frac{\sigma'_t}{\dot{r}} + \frac{\sigma}{r}, \quad \sigma(r, \dot{r}, t) = -\frac{\pi^2 q^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho_0^2 \int \dot{r} dt r^3 e^{-\int_{t_0}^t \frac{2}{r} \dot{r} dt'}. \quad (51)$$

Тогда, подставляя выражение (51), учитывая коммутативность оператора \hat{H} с операторами координат и импульса, входящими в (50), и используя представление кет(бра)-векторов Дирака, перепишем диагональные элементы оператора для метрики в виде:

$$\begin{aligned} & \left\langle \psi_\kappa(x) \left| \frac{\partial F^2(x, \dot{x})}{\partial x^h} \right| \psi_\kappa(x) \right\rangle = \\ & = - \left\langle \psi_\kappa(x) \left| E_\kappa \frac{\partial}{\partial x^h} \frac{\pi^2 q^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho_0^2 \left(-2 \int \dot{r} dt e^{-\int_{t_0}^t \frac{2}{r} \dot{r} dt'} \left(3 - 2 \frac{r \partial}{\dot{r} \partial t} \int_{t_0}^t \dot{r} dt' / r \right) - \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. - \int \dot{r} dt e^{-\int_{t_0}^t \frac{2}{r} \dot{r} dt'} \right) r^2 \right| \psi_\kappa(x) \right\rangle = \\ & = - \left\langle \psi_\kappa(x) \left| E_\kappa \frac{\partial}{\partial x^h} \frac{\pi^2 q^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho_0^2 \left(-3 \int \dot{r} dt e^{-\int_{t_0}^t \frac{2}{r} \dot{r} dt'} \right) r^2 \right| \psi_\kappa(x) \right\rangle \end{aligned} \quad (52)$$

где $E_\kappa, |\psi_\kappa(x)\rangle$ — собственные значения и собственные функции оператора \hat{H} . Подставляя выражение (44) в левую часть уравнения (52) для $F^2(x, \dot{x})$, найдем конформный фактор метрики:

$$\frac{2}{9} (\dot{x}^3)^{2/3} a = -3 E_\kappa \frac{\pi^2 q^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho_0^2 \int \dot{r} dt e^{-\int_{t_0}^t \frac{2}{r} \dot{r} dt'}. \quad (53)$$

К сожалению, из-за неизвестности множителя E_κ , диагональные элементы оператора метрической функции

$$\langle \psi_\kappa(x) | F^2(x, \dot{x}) | \psi_\kappa(x) \rangle$$

определены неоднозначно.

С другой стороны, гамильтониан \hat{H} пропорционален производной по времени $\partial/\partial t$:

$$\hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (54)$$

Подставляя выражение (54) в выражение (50) и учитывая выражение (51), находим недиагональные матричные элементы оператора метрики:

$$\begin{aligned} \langle \kappa', t | F^2(x, \dot{x}) | \kappa, t \rangle = & -i\hbar \frac{\pi^2 q^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho_0^2 \langle \kappa', t | e^{-\int_{t_0}^t \frac{2}{r} \dot{r} dt'} (-3\dot{r} + 2\ddot{r} - \dot{r}^2) r^2 | \kappa, t \rangle + \\ & + i\hbar \langle \kappa', t | V(x, \dot{x}) \frac{\partial}{\partial t} | \kappa, t \rangle, \end{aligned} \quad (55)$$

где $|\kappa, t\rangle \equiv |\psi_\kappa(x)\rangle$.

6 Резонансное приближение

Теперь рассмотрим случай квантовой системы, волновая функция которой медленно изменяется во времени: $E \rightarrow 0$, $\exp(-iEt/\hbar) \sim 1$. Тогда, в нулевом приближении, которое назовем нулевым порядком ($E_\kappa = 0$) резонансного приближения, диагональные матричные элементы (52) квантованной метрики равны нулю, и, следовательно, конформный фактор можем определить однозначно.

В нулевом порядке резонансного приближения последний член в правой части выражения (55) исчезает:

$$\langle \kappa', t | F^2(x, \dot{x}) | \kappa, t \rangle = i\hbar \frac{2\pi^2 q^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho_0^2 \langle \kappa', t | \dot{r} e^{-\int_{t_0}^t \frac{2}{r} \dot{r} dt'} r^2 | \kappa, t \rangle, \quad \kappa' \neq \kappa. \quad (56)$$

Подставляя выражение (44) в левую часть уравнения (56) для $F^2(x, \dot{x})$, находим недиагональные матричные элементы оператора метрики (конформного фактора):

$$\frac{2}{9} a \langle \kappa', t | (\dot{x}^3)^{2/3} | \kappa, t \rangle = -i\hbar \frac{2\pi^2 q^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho_0^2 \langle \kappa', t | \dot{r} e^{-\int_{t_0}^t \frac{2}{r} \dot{r} dt'} | \kappa, t \rangle, \quad \kappa' \neq \kappa. \quad (57)$$

Так как уравнение (57) не содержит множитель E_κ , недиагональные матричные элементы задаются гамильтонианом с модельным потенциалом (51) однозначно.

В классическом случае ковариантная производная $(\delta/\delta u)$ вариации $z^i(u, v) = x^i(u + \varepsilon, v + \varepsilon) - x^i(u, v)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ геодезических $x^i(u + \varepsilon, v + \varepsilon)$ и $x^i(u, v)$ по параметрам u, v удовлетворяет уравнению Леви-Чивита [27, 28]

$$\frac{\delta^2 z^i}{\delta u^2} + K_j^i{}_{hk}(x, \xi) \xi^j \xi^h z^k - f''(u) \xi^i = 0 \quad (58)$$

с $f'' = 0$ для вариации, измеренной по нормали к геодезическим, которая называется нормальной вариацией. Выразим вариацию z^i через единичный вектор \vec{N} нормали к геодезическим:

$$z^i = z N^i.$$

Тогда уравнение (58) переписывается в виде [29]

$$z'' + \left[R_C(x, \xi, N) - g_{ij}(x, \xi) \frac{\delta N^i}{\delta u} \cdot \frac{\delta N^j}{\delta u} \right] z = 0, \quad (59)$$

$$R_C(x, \xi, N) = K_{jihk}(x, \xi)\xi^j\xi^h N^i N^k, \quad (60)$$

где $R_C(x, \xi, N) = K_{jihk}(x, \xi)\xi^j\xi^h N^i N^k$ — скалярная кривизна [30]. Для двумерного пространства $\frac{\delta N^i}{\delta u} = 0$. Таким образом, окончательно уравнение (59) запишется в виде уравнения Якоби

$$z'' + R_C(x, \xi, N)z = 0. \quad (61)$$

Кривизна R_C определяется производной Шварца [31, 32]

$$\frac{\Upsilon''_{12}}{\Upsilon_{12}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\Upsilon'_{12}}{\Upsilon_{12}} \right)^2 = 2R_C, \quad \Upsilon_{12} = \frac{\phi_1}{\phi_2} \quad (62)$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — два различных частных интеграла уравнения (61).

В квантовом случае, используя технику проективных операторов [33], необходимо записать выражение (60) для R_C и, следовательно, уравнение (61) в операторной форме:

$$\begin{aligned} R_C(x, \xi, N) &= \langle m | N^i \rangle \langle \xi^j | |n\rangle \langle n | K_{jihk}(x, \xi) |l\rangle \langle l | \xi^h \rangle \langle N^k | m \rangle = \\ &= \langle m | \hat{N}^i |0\rangle \langle 0 | \hat{\xi}^j |0\rangle \langle 0 | \hat{K}_{jihk}(\hat{x}, \hat{\xi}) |0\rangle \langle 0 | \hat{\xi}^h |0\rangle \langle 0 | \hat{N}^k |m\rangle = \\ &= \text{Tr } \hat{N}^i \hat{\xi}^j \hat{K}_{jihk}(\hat{x}, \hat{\xi}) \hat{\xi}^h \hat{N}^k. \end{aligned} \quad (63)$$

Далее мы моделируем действие электрокапиллярных сил на комплекс, состоящий из гидрофильной части амфифильной молекулы в окружении диполей молекул воды, как двухуровневую квантовую систему. Физическая сущность воздействия заключается в том, что частица может приобрести скорость, позволяющую ей уйти из комплекса. Это возможно, если реализуются резонансные условия, когда частота воздействия близка к собственной частоте системы. Рассмотрим уравнение Шредингера для двухуровневой квантовой системы с взаимодействием $V = -A\hat{d} \sin(\Delta\omega t) \cos(2\omega_0 t)$ между диполем \hat{d} и резонансным квази-монохроматическим полем, имеющим частоту $2\omega_0$ с медленно изменяющейся амплитудой: $\Delta\omega \ll 1$. Так как матричные элементы \hat{d} удовлетворяют соотношениям $\hat{d}_{12} = \hat{d}_{21} = -d$ и $\hat{d}_{11} = \hat{d}_{22} = 0$, задача состоит в решении системы уравнений [34, 35]

$$\hbar^2 \frac{d^2 X_{1,2}}{dt^2} + \Omega_{1,2}^2 X_{1,2} = 0, \quad (64)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{1,2}^2 &= \tilde{E}'^2 \mp i\hbar V_{12} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_D}{A d \sin(\Delta\omega t)} \right) + \hbar^2 \{V_{12}, t\} / 2, \\ V_{12} &= \frac{1}{2} A d \sin(\Delta\omega t), \\ \hbar &= 1, \end{aligned} \quad (65)$$

R_D — расстройка резонанса : $R_D = 2\omega - 2\omega_0 \rightarrow 0$, $\{ \}$ — производная Шварца, имеющая вид

$$\begin{aligned} \{V_{12}, t\} &= \frac{1}{V_{12}} \frac{d^2 V_{12}}{dt^2} - \frac{3}{2V_{12}^2} \left(\frac{dV_{12}}{dt} \right)^2, \\ E' &= \frac{1}{2} \sqrt{R_D^2 + (A d)^2 \sin^2(\Delta\omega t)}. \end{aligned}$$

Предположим, что выполняется следующее условие саморасстройки резонанса: $\Delta\omega = R_D$. Принимая его во внимание, подстановка скалярной кривизны $R_C(x, \xi, N)$ в (65) дает выражение

$$\left\{ \frac{1}{2} F \sin(R_D t), t \right\} = 2R_C \quad (66)$$

где $F = Ad$. Последнее уравнение дает расстройку резонанса R_D . Теперь можно оценить собственное значение λ гамильтониана \hat{H} как приблизительно равное расстройке резонанса R_D :

$$H\psi_\kappa(x) = \lambda\psi_\kappa(x) \approx \pm R_D\psi_\kappa(x)/2. \quad (67)$$

Подставляя формулу (67) в выражение (50), получаем метрическую функцию в виде:

$$\frac{\partial F^2(x, \dot{x})}{\partial x^h} = -R_D \frac{\partial V(x, p)}{\partial x^h}, \quad g^{ij} p_j = \dot{x}^i. \quad (68)$$

Физический смысл предложенной теории возмущений состоит в нахождении резонансного решения в качестве нулевого приближения задачи с модельной потенциальной энергией (51).

Заключение

Итак, получен двумерный метрический тензор для конформно-инвариантной метрики, позволяющий описать структуризацию квазидвумерного ЛБ-монослоя на поверхности воды в процессе сжатия. Предложенная в работе модель геометризации взаимодействий в формирующемся ЛБ-монослое позволила найти соответствующую фигуратрису в резонансном приближении. Проведено численное моделирование системы, которое показало наличие нескольких режимов структурирования, зависящих от скорости сжатия и параметров двойного электрического слоя.

Литература

- [1] Blodgett K.B. // *J.Amer.Chem.Soc.*, Vol. 56, 1934, p. 495.
- [2] Blodgett K.B., Langmuir I. // *Phys.Rev.*, 51, 1937, p. 964.
- [3] Суздаев И.П. Нанотехнология: Физико-химия нанокластеров, наноструктур и наноматериалов. М., Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009, с. 552.
- [4] Wöll C., Vogel V. Adhesion and Friction. Springer, Heidelberg, 1989, p. 17.
- [5] Schwartz D.K. Langmuir-Blodgett film structure // *Surface Science Reports*, Vol. 27, 1997, pp. 241–334.
- [6] Grushevskaya H.V., Krylov G., Hrushevsky V.V. Kinetic Theory of Phase Foliation at Formation of Langmuir-Blodgett Monolayers // *J. Nonlin. Phenom. in Compl.Sys.*, Vol. 7, no. 1, 2004, pp. 17–33.
- [7] Drapeza A.I., Grushevskaya H.V., Hrushevsky V.V., Lipnevich I.V., Orekhovskaya T.I., Shulitsky B.G., Sudnik Yu.M., Semenkova G.N., Krylova N.G., Kulahava T.A. Nanosensing based on LB-CNT-clusters to register a functioning of membrane-dependent biological reactions // *Proc. of Int. Conf. "Optical Techniques and Nano-Tools for Material and Life Sciences"* (ONT₄MLS-2010), 15-19 june 2010, Minsk. Eds. A.N.Rubinov. V. 2. 2010, pp. 191-197.
- [8] Haas F.M., Hilfer R. Constant pressure of stiff chain molecules at surfaces // *J.Chem.Phys.*, 105, 1996, pp. 3859–3867.
- [9] Robazzi W. da S., Mokross B.J. Influence of interaction energy in fluid-fluid phase transitions on Langmuir monolayers // *Brazilian J.of Physics*, Vol. 36, no. 3B, 2006, pp. 1013–1016.
- [10] Fiore C.E., Carneiro C.E.I. Obtaining pressure versus concentration phase diagrams in spin systems from Monte Carlo simulations. arXiv: cond-mat.stat-mech/0809.4023v1, 2008.

- [11] Anishchik V.M., Dorozhkin N.N., Grushevskaya H.V., Hrushevsky V.V., Krylov G.G., Kukharensko L.V., Senyuk M.A. Dynamical instability of band structure for Fe-containing nanostructured Langmuir-Blodgett films // *Proc. SPIE*. Vol. 5219, 2003, pp. 141-150.
- [12] Andelman D., Brochard F., Knobler C., Rondelez F. *Micelles, Membranes, Microemulsions and Monolayers*. Springer, Heidelberg, 1994, p. 559.
- [13] Bibo A., Knobler C., Peterson I. // *J.Phys.Chem.*, 95, 1991, p. 5591.
- [14] Kennetal R. // *J.Phys.Chem.*, 95, 1991, p. 2092.
- [15] Ramos S., Castillo R. Langmuir monolayers of C₁₇, C₁₉, and C₂₁ fatty acids: Textures, phase transitions, and localized oscillations // *J. of Chem.Phys.*, Vol. 110, no. 14, 1999, pp. 7021–7030.
- [16] Грушевский В.В., Крылова Г.В. Термодинамика фазовых состояний в монослоях Лэнгмюра-Блоджетт // *Низкоразмерные системы-2*, Вып. 4: сб. науч. работ / Гродненский гос. ун-т; под ред. С.А. Маскевича, В.Ф. Стельмаха, А. К. Федотова. – Гродно, 2005, с. 30–36.
- [17] Grushevskaya H.V., Krylova N.G. A Finsler geometrization of interactions at structure formation in Langmuir – Blodgett monolayers. // *Materials of 7th Int. Conf. on Non-Euclidean Geometry and its Applications*, Cluj-Napoca, Romania, 5-9 july 2010, Babes-Bolyai University, Romania, 2010, p. 29.
- [18] Рашевский П. // *Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии и физике*, том 5. Под ред. В.Ф. Кагана. State publishing company of technical and theoretical literature, Moscow, Leningrad, 1941, pp. 21-147
- [19] Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. Moscow, Nauka, 1981, с. 504
- [20] Lippman G. // *Ann. Chim. Phys.*, Vol. 5, 1875, p. 494.
- [21] Frumkin A. // *Actial. Sci. Ind.*, Vol. 373, 1936, p. 5.
- [22] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика of continuous mediums. Теоретическая физика. Том 8. Наука, Москва, 1982, с. 142.
- [23] Gibbs J.W. The collected works of J. Willard Gibbs, vol. 1. Longmans and Green, New York, 1931, p. 315.
- [24] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Теоретическая физика. Том 2. Наука, Москва, 1988, с. 97.
- [25] Matsumoto M., Shimada H. On Finsler spaces with 1-form metric. II: Berwald – Moor’s metric $L=(y^1y^2\dots y^n)^{1/n}$ // *Tensor*, vol. 32, no. 2, 1978, p. 275-278.
- [26] Гарасько Г.И. Основы финслеровой геометрии для физиков. ТЕТРУ, Москва, 2009, 268 с.
- [27] Levi-Civita T. Sur l’ecart géodesique // *Math. Ann.*, vol.97, 1926, pp. 291-320.
- [28] Rund H. Theory of curvature in Finsler spaces. Coll. Topologie Strasbourg. 1951, no. 4. (La Bibliotheque Nationale et Universitaire de Strasbourg, 1952); Rund H. Eine Krümmungstheorie der Finslerschen Räume. // *Math. Ann.* Vol. 125, 1952, pp. 1-18.
- [29] Blaschke W. Differential geometry. Vol. 1. ONTI, Moscow, 1935, pp. 216-218.
- [30] Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. ИЛ, Москва, 1948, с. 81.
- [31] Springer C.E. Geometry and analysis of projective spaces. Freeman, San Francisco, 1964.
- [32] Funk P. Über zweidimensionale Räume, insbesondere über solche mit geradlinigen Extremalen und positiver kostranter Krümmung // *Math. Z.*, vol. 40. 1935, p. 86-93.

- [33] Крылова Г.В. Транспорт электрического заряда и нелинейная поляризация периодически упакованных структур в сильных электромагнитных полях. Издательский центр БГУ, Минск, 2008, 199 с.
- [34] Grushevskaja H.V. Chaos in near-hamiltonian system with singular perturbation: Applications to oscillatory model of Hodgkin-Huxley neuron // *NPCS*. Vol. 2, no. 2, 1999, pp. 11–24.
- [35] Grushevskaya H.V. Deterministic Chaos in Quantum Two-level Systems Perturbed by Kicks: Application to Models of Hodgkin-Huxley Neuron // *Prog. Theor. Phys. Suppl.* No. 139, 2000, pp. 453-459.

FINSLER GEOMETRY EFFECTS IN SURFACE PHENOMENA PHYSICS: THE CASE OF MONOLAYER SYSTEMS

H.V. Grushevskaya, N.G. Krylova

Belarusan State University, Minsk, Belarus

grushevskaja@bsu.by, nina-kr@tut.by

Interactions in a LB-monolayer have been geometrized in such a way that solutions of equations for a motion of particles in the monolayer are approximated by geodesics of Finsler two-dimensional space. Two-dimensional Finsler metric effects in surface phenomena physics for the monolayer case were investigated. The calculations of model proposed to geometrize interactions at LB-monolayer formation were carried out in a resonance approximation. A simulation has shown that there exist several regimes of the structure formation which depend on compression speed and characteristics of double electrical layer.

Key Words: Finsler metric, two-dimensional space, surface phenomena, LB-monolayer structurization.

АНИЗОТРОПИЯ КРАСНОГО СМЕЩЕНИЯ

С.Ф. Левин

Московский институт экспертизы и испытаний, Москва, Россия

info@rostest.ru, antoninaEL@rostest.ru

Рассмотрены статистический и метрологический аспекты проблемы анализа данных измерений в исследованиях анизотропии излучения внегалактических источников. Показано, что дипольная анизотропия реликтового излучения и красного смещения в спектрах галактик, радиогалактик и квазаров связана с крупномасштабной неоднородностью Вселенной.

Ключевые слова: анизотропия, красное смещение, реликтовое излучение.

Введение

Основу космологии XX века составляли принцип изотропии, шкалы фотометрических расстояний D_L на основе переменных звезд и статистических параллаксов, красное смещение в спектрах галактик z , которое обнаружил в 1914 году V. Slipher, уравнение Гильберта–Гроссмана–Эйнштейна, его нестационарное (без т.н. Λ -члена) решение 1922 года как модель «расширяющейся Вселенной» А. Фридмана и установленная семью годами позже статистическая зависимость «скорости разбегания» cz галактик от расстояния r — закон Хаббла [1]:

$$cz = H_0 \cdot r, \tag{1}$$

где c — скорость света в вакууме, r — расстояние, H_0 — постоянная Хаббла, которая была оценена как $550 \text{ км}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{Мпс}^{-1}$. Эта оценка с 1936 по 1971 год уменьшилась на порядок, за что ее назвали «переменной Хаббла» [2].

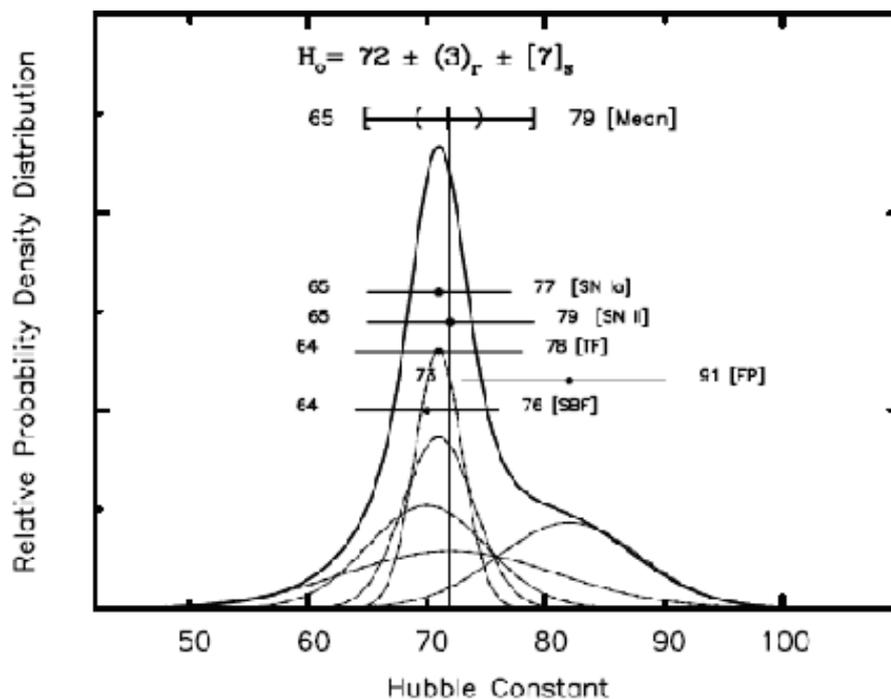


Рис. 1: [57, Fig. 3]. Распределения частот повторения оценок постоянной Хаббла в рамках HST КР. Средняя точка совокупного распределения (медиана) $H_0 = 72(71) \pm 4 \pm 7 \text{ км}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{Мпс}^{-1}$ [57].

Таблица 1: Характерные оценки постоянной Хаббла в XX веке. (СлП — случайная погрешность, НСП — неисключенная систематическая погрешность.)

Год	Источник	Результаты, $(H_0 \pm \text{СлП} \pm \text{НСП}) \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$
1929	Hubble E.	$H_0 = 500$ [1]; 550 (1931), 530 (1936) [10].
1955	Baade W., Swope H.	$H_0 = 100$ [3].
1956	Humason M. et al.	$H_0 = 170$, $1/H_0 = 5.84 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}$ [4].
1962–1971	Sandage A.R.	$H_0 = 98 \pm 15$ [5]; $H_0 \leq 75$ (1968) [6]; $H_0 \approx 50$ (1967) [7].
1982	Sandage A., Tammann G.	$H_0 = 50 \pm 7$ [112].
1990	Capaccioli M. et al.	$H_0 = 70 \pm 15$ [113].
1996	Hoeflich P., Khokhlov A.	$H_0 = 67 \pm 9$ [115].
1999	Tripp R., Branch D.	$H_0 = 62.9 \pm 4.7$ [114].
2000	Freedman W. et al.	Hubble Space Telescope Key Project (HST KP) [57] (рис. 1): по сверхновым типа Ia — $H_0 = 71 \pm 2 \pm 6$; по соотношению Талли–Фишера — $H_0 = 71 \pm 2 \pm 7$; по флуктуациям поверхностной яркости — $H_0 = 70 \pm 5 \pm 6$; по сверхновым типа II — $H_0 = 72 \pm 9 \pm 7$; среднее — $H_0 = 82 \pm 6 \pm 9$; среднее взвешенное — $H_0 = 72 \pm 8$.

В 1958 году W. Mattig решил уравнение Фридмана для различных z :

$$\lg \left\{ cz + (1 - 1/q_0) \cdot \left[\sqrt{2q_0z + 1} - 1 \right] \right\} = 1 + \lg(H_0 q_0) + 0.2 \cdot (m - M_*)$$

где m и M_* — наблюдаемая и абсолютная звездные величины объектов для типа «*» объектов (галактик, радиогалактик, квазаров), $(m - M_*)$ — модуль расстояния, q_0 — параметр замедления «расширения» [9]. При $q_0 = 1$ решение Маттига принимает стандартный вид

$$\begin{aligned} \lg cz &= (1 + \lg H_0 - M_*) + 0.2 \cdot m', \\ \lg cz &= \theta_0 + \theta_1 \cdot m', \end{aligned} \tag{2}$$

где $1 + \lg H_0 - M_* = \theta_0$ и $\theta_1 = 0.2$ — параметры нуля–пункта и наклона, m' — светимости объектов, исправленные за эффект апертуры, поглощение света в Галактике, К-поправку [4] и др.

На соотношениях (2) основана диаграмма Хаббла (рис. 2), используемая для установления шкалы космологических расстояний.

Источниками погрешностей этой шкалы являются неопределенности характеристики положения (2) и ее параметров, а также неопределенности характеристик рассеяния диаграммы, наиболее полной из которых является распределение вероятностей отклонений

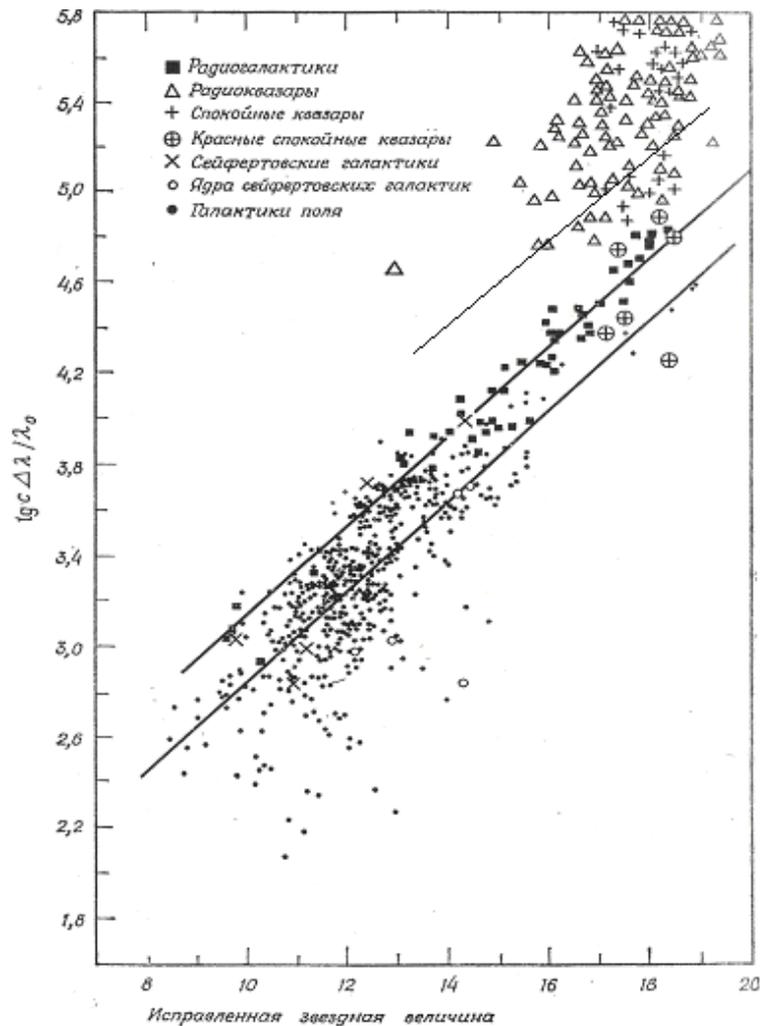


Рис. 2: [10, рис. 35]. Диаграмма Хаббла. Характеристики положения: нижняя линия – для 474 галактик поля; средняя линия – для 65 ярчайших галактик; верхняя линия (добавлена) – для 200 квазаров [10].

объектов от характеристики положения с учетом погрешностей идентификации. В них входят погрешности измерений и погрешности неадекватности, связанные с нарушениями условий применимости статистических методов и полнотой представления характеристик (табл. 2).

В 1961 году F. Hoyle [11] для выявления неевклидовости пространства по данным астрономических наблюдений дополнил закон Хаббла:

$$z = (H_0/c) \cdot r + Kr^2. \quad (3)$$

В 1966 году, когда A. Sandage [12] установил, что галактики на расстоянии миллиарда световых лет движутся на $10000 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$ быстрее, чем предсказывает закон Хаббла, было замечено, что $K \approx (H_0/c)^2$ [13], а модели (1) и (3) представляют собой разложения в ряд функции

$$z = (H_0/c) \cdot r / [1 - (H_0/c) \cdot r]. \quad (4)$$

Для ее вариантов $(H_0/c) \cdot r / [1 - (H_0/c) \cdot r]^\alpha$ и $[1 - (H_0/c) \cdot r]^{-\beta} - 1$ модель (3) принимает вид $z = (H_0/c) \cdot r + \alpha \cdot (H_0/c)^2 \cdot r^2$. Это при $H_0 = 170 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$ [4] снижает возраст Вселенной до геологического возраста Земли, что указывает на трудности проверки неевклидовости в рамках закона Хаббла.

Таблица 2: Идентификация характеристик диаграммы Хаббла в XX веке.

Год	Источник	Результаты, (H_0 в $\text{км}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{Мпс}^{-1}$)
1958	Mattig W.	Решение уравнения Фридмана [9]: $D_L = c\{z + (1 - q_0^{-1})[\sqrt{2q_0z + 1} - 1]\}/(H_0q_0)$
1961	Noyle F.	Введение членов 2-го порядка в закон Хаббла [11]: $z = (H/c)r + Kr^2$
1966	Левин С.Ф.	Обобщение модели Ноyle: $z = (H_0/c) \cdot r/[1 - (H_0/c) \cdot r]$
1967	Агр Н.	Несоответствие красного смещения квазаров закону Хаббла [15].
1967	Бербидж Дж. Бербидж М.	Иллюстрация влияния эффектов селекции и выделяющихся данных на оценку постоянной Хаббла для квазаров [16].
1976	Faber S.M., Jackson R.E.	Обнаружение корреляции светимости эллиптических галактик с шириной эмиссионной линии нейтрального водорода [17].
1977	Tully R.V., Fisher J.R.	Обнаружение корреляции светимости спиральных галактик с шириной эмиссионной линии нейтрального водорода [18].
1980	Левин С.Ф.	Анализ методов идентификации диаграммы Хаббла [13].
1985	Vaucouleurs G. Peters W.L.	Обнаружение области значений $H_0 \approx 50$ в Virgo при среднем значении $H_0 \approx 100$ для $N = 500$ галактик [19].
1998	Караченцев И.Д. и др.	Обнаружение квадрупольной анизотропии локальной постоянной Хаббла для галактик [50].
1998	Левин С.Ф.	Обнаружение диполя анизотропии красного смещения по прямому восхождению $\alpha \approx 15$ ч для $N = 119$ радиогалактик и $N = 124$ квазаров [20].
1999	Макаров Д.И.	Обнаружение выброса $H_0(2 \text{ Мпс}) \sim 90$ и эллипсоида анизотропии H_0 для $N = 303$ галактик: $H_\alpha = 81 \pm 3$, $H_\beta = 62 \pm 3$, $H_\gamma = 48 \pm 5$ с апексом в галактических и экваториальных координатах соответственно ($l_\alpha = 310^\circ$, $b_\alpha = +49^\circ$) и ($\alpha_\alpha \approx 13$ ч, $\delta_\alpha \approx -15^\circ$) [58].

В 1941 году W. Adams [21] измерил поглощение света звезды ζ Ophiuchus возбужденными радикалами межзвездного циана, A. McKellar [22] оценил температуру неизвестного источника возбуждения: ≈ 2.3 К.

На этом «бесперспективные» исследования были прекращены.

В 1946 году Г. Гамов в рамках теории «горячей Вселенной» предсказал существование остаточного (реликтового) излучения, соответствующего температуре ~ 3 К [23]. Его в 1957 году фактически зарегистрировал рупорной антенной на волне 3.2 см аспирант ФИАН

Таблица 3: Дипольная анизотропия реликтового излучения [26].

Год	Исследователи	Амплитуда ΔT , мК	Длина волны, см.	Прямое восхождение максимума, ч
1967	Partridge R.B., Wilkinson D.T.	2.2 ± 1.8	3.2	17
1968	Partridge R.B., Wilkinson D.T.	1.5 ± 2.7	3.2	8(?)
1968	Dismukis (?)	2.2 ± 2.1	3.2	2(?)
1971	Henry P.S.	3.2 ± 0.8	2.9	10...11
1971	Bougn S.P., Fram D.M., Partridge R.B.	7.5 ± 11.6	0.86	6(?)
1972	Conklin E.K.	2.3 ± 0.9	3.8	11

Таблица 4: Движение относительно реликтового излучения.

Год	Источник	Амплитуда диполя, мК	V, км·с ⁻¹	Координаты апекса	
				α , ч; l°	δ° ; b°
1967	Sciama D.W. [31]	—	400	$l \sim 335^\circ$	$b \sim 7^\circ$
1977	Smoot G.F. et al. [32]	3.5	350	$\alpha = 11$ ч	$\delta = +4^\circ$
1981	Gorenstein M.V., Smoot G.F. [33]	3.6 ± 0.5	360 ± 50	$\alpha = (11.2 \pm 0.5)$ ч	$\delta = (19 \pm 8)^\circ$
1985	Lubin P. et al. [34]	3.44 ± 0.17	—	$\alpha = (11.2 \pm 0.1)$ ч	$\delta = (-6.0 \pm 1.5)^\circ$
1992	[35]: Солнечная система;	3.35	366	$l = 264.26^\circ$; $\alpha = 11.2$ ч	$b = +48.22^\circ$; $\delta = -7.1^\circ$
	Местная группа галактик;	—	635	$l = 269^\circ$	$b = +29^\circ$
	119 скоплений галактик.	—	700	—	—

Т. Шмаонов [24] под руководством одного из ведущих радиоастрономов СССР Э. Хайкина. Но они не стали уточнять источник зарегистрированного «шума».

Обнаружили же и идентифицировали реликтовое излучение случайно в 1965 году А. Penzias и R. Wilson [25], а шесть лет спустя его дипольную анизотропию амплитудой $\Delta T = (3.2 \pm 0.8)$ мК и максимумом на прямом восхождении $\alpha = 11$ ч наблюдали Р. Henry и Е. Conklin (табл. 3).

Анизотропию реликтового излучения связывают с анизотропией Вселенной, ее расширением и сопутствующим эффектом Доплера [27-30].

В 1977 году G. Smoot и др. [32] установили, что относительно реликтового излучения Солнце движется со скоростью 350 км·с⁻¹ к точке в созвездии Leo (Лев) с координатами $\alpha = 11$ ч и $\delta = +4^\circ$ (склонение). А в 1981 году М. Gorenstein и G. Smoot [33] по данным измерений на самолетах-разведчиках U-2 идентифицировали диполь реликтового излучения (рис. 3) на оси Leo–Aquarius (Водолей) (табл. 4).

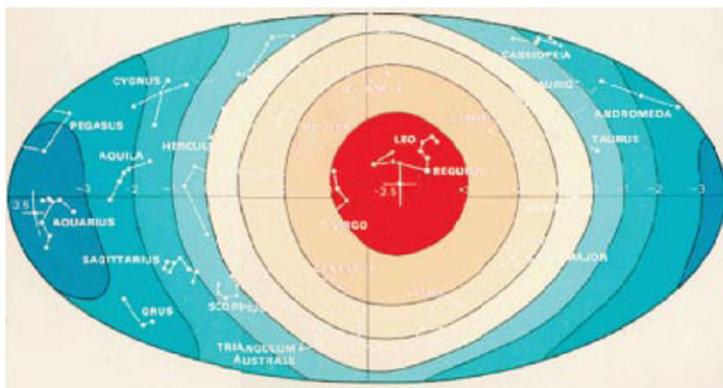


Рис. 3: Дипольная анизотропия реликтового излучения в экваториальных координатах (U-2)

Таблица 5: Параметры диполя крупномасштабного потока галактик.

Год	Источник	V , км·с ⁻¹	$V_{\text{макс}}$, км·с ⁻¹	N	$z_{\text{макс}}$	l	b
1981	Tonry L.M., Davis M. [36]	~ 300	поток в Местном сверхскоплении к центру сверхскопления Virgo				
1982	Aaronson M. et al. [37]						
1986	Kraan- Korteweg R.C. [38]						
1987	Dressler A. et al. [39]	200 – 600	движение на масштабе 50 Мпк к сверхскоплению Great Attractor				
1992	Mathewson D.S. et al. [41]						
1988	Linden-Bell D. et al. [39]	570	3200 – 8000	400	0.03	307°	+9°
1994	Hudson M.J. [42]	455	< 8000	689	0.03	299°	+8°
1994	Lauer T.R., Postman M. [43]	689	< 15000	124	0.05	343°	+52°
1998	Giovanelli R. et al. [44]	200	< 6500	1289	0.022	295°	+25°
1998	Giovanelli R. et al. [45]	310	1000 – 9200	374	0.03	337°	-15°
1999	Hudson M.J. et al. [46]	630	3000–14000	699	0.047	260°	-1°
1999	Dekel A. et al. [47]	370	< 5000	~ 3000	0.017	305°	+14°
1999	Kraan- Korteweg R.C., Lahav O. [48–49]	600	в направлении Hydra, внутри 20° диполя реликтового излучения				
2000	Karachentsev I.D. et al. [50]	300	< 18000	983	0.06	328°	+7°
2000	Макаров И.Д. [51]	300 ± 75	–	335	0.017	328° ± 15°	+7° ± 15°

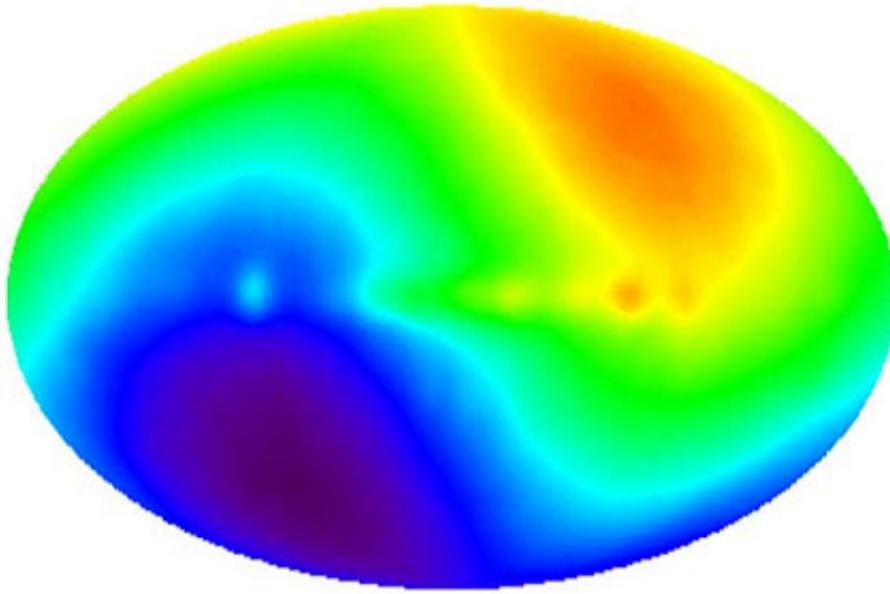


Рис. 4: Карта дипольной анизотропии реликтового излучения в галактических координатах (COBE)

И уже в 1980-е годы были обнаружены крупномасштабные потоки галактик (табл. 5): первым — поток к сверхскоплению в созвездии Virgo (Дева) со скоростью $V = 300 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$, а далее — потоки к сверхскоплению Great Attractor (Великий Аттрактор) в созвездии Centaurus (Центавр) со скоростями порядка $V = 200 \dots 600 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$.

В 1992 году космические аппараты «Реликт» и COBE (Cosmic Background Explorer) позволили уточнить характеристики диполя реликтового излучения (рис. 4) [52].

В 1998 году при исследовании в рамках проекта «Прогноз–ММК» [53] системы «ММК–стат М» идентификации многомерных моделей для 119 радиогалактик (RG) и 124 квазаров (QSO) [10] было установлено, что

$$\begin{aligned} \lg cz_{RG} = & 0.54940486 + 0.3237032m - 5.2395416 \cdot 10^{-3}m^2 - 8.3738443 \cdot 10^{-4}\theta - \\ & - 1.3164689 \cdot 10^{-5}\alpha^2 + 1.8626636 \cdot 10^{-4}\delta^2 - 1.5006558 \cdot 10^{-4}\alpha\delta + \\ & + 2.6678378 \cdot 10^{-4}\alpha m + 1.177783 \cdot 10^{-6}\theta^2 + 2.35884732 \cdot 10^{-6}\delta\theta \pm 0.123 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \lg cz_{QSO} = & -1.8650157 \cdot 10^{-3}\delta - 2.6945406 \cdot 10^{-1}\alpha + 8.2279198 \cdot 10^{-2}m + \\ & + 4.3915797 \cdot 10^{-2}\theta + 2.2102848 \cdot 10^{-3}\alpha^2 + 1.2364350 \cdot 10^{-2}\alpha m + 4.9220020 \cdot 10^{-5}\theta^2 + \\ & + 1.0164755 \cdot 10^{-4}\delta\theta - 3.3828735 \cdot 10^{-3}m\theta \pm 0.367 \end{aligned} \quad (6)$$

где m — звездные величины, α и δ — экваториальные координаты, θ — угловые размеры внегалактических объектов, а знак \pm сопровождает средний модуль погрешности неадекватности [54–55]. При этом была отмечена аналогия с анизотропией реликтового излучения (рис. 5) [20].

В том же 1998 году на Специальной астрофизической обсерватории РАН группа И. Караченцева обнаружила для галактик квадрупольную анизотропию постоянной Хаббла [50] (рис. 6), а Д. Макаров идентифицировал диполь ее анизотропии для галактик местного поля (рис. 7) [51].

Накопленные в XX веке данные астрофизических измерений открыли «новую эру в космологии, положив начало ее превращению из мифа и спекуляций в полноценное научное направление» [56].

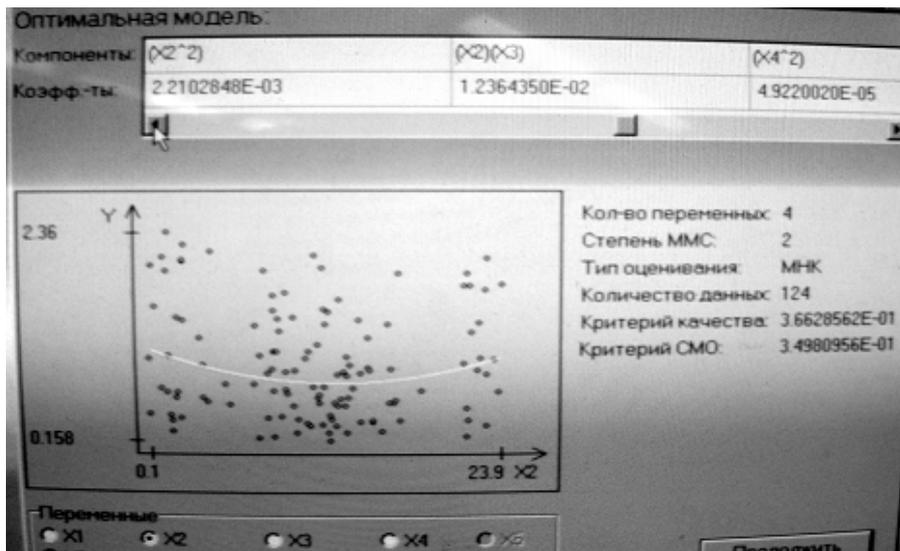


Рис. 5: Зависимость красного смещения квазаров от прямого восхождения (минимум $\alpha \approx 15$ ч в Virgo–Leo)

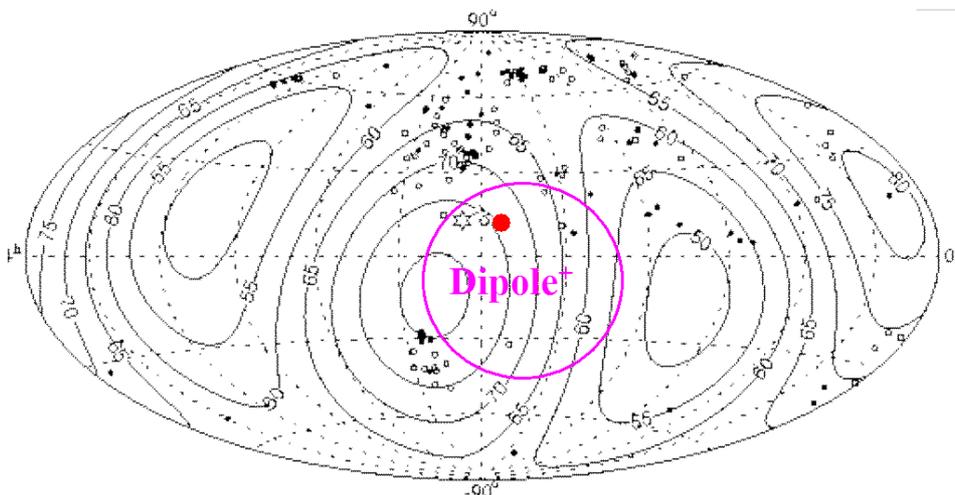


Рис. 6: [51, рис. 4.2]: Распределение локальной постоянной Хаббла местного поля галактик в экваториальных координатах. ● — сверхскопление Virgo.

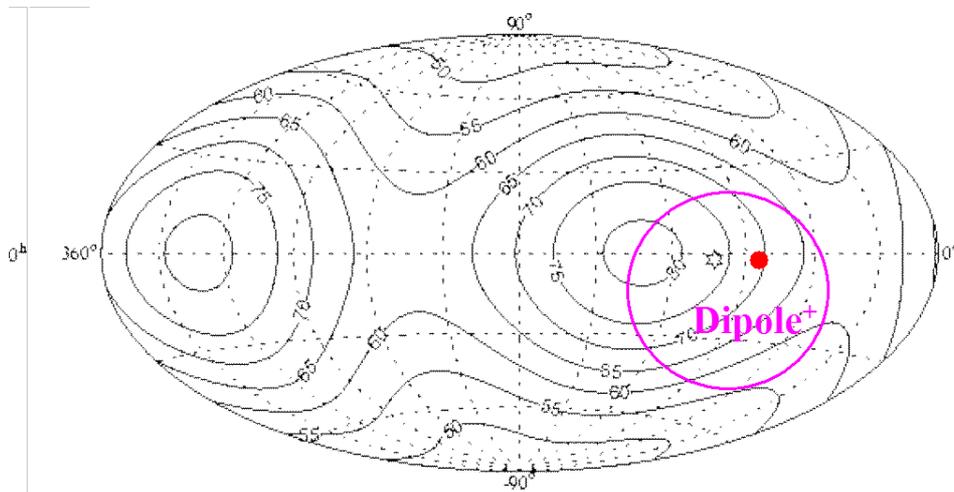


Рис. 7: [51, рис. 4.5]: Карта анизотропии местного поля скоростей галактик в сверхгалактических координатах. ● — сверхскопление Virgo.

Таблица 6: Оценки постоянной Хаббла в XXI веке.

Год	Источник	Результаты, $\text{км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$
2003	Spergel D.N. et al.	WMAP-1 [58]: $H_0 = 71^{+4}_{-3}$
2006	Sandage A.R. et al.	HST [59]: $H_0 = 62.3 \pm 2 \pm 6$ по цефеидам и сверхновым типа Ia до 200 Мпс.
2006	Смут Дж.Ф.	WMAP-3 [56]: $H_0 = 73.5 \pm 3.2$.
2007	Leeuwen van F. et al.	[60]: $H_0 = 62 \rightarrow 70 \pm 5$ по нуль-пункту для параллакса цефеид.
2008	Dunkley J. et al.	H_0 [61]: $71.9^{+2.6}_{-2.7}$ (WMAP-5); $73.2^{+3.1}_{-3.2}$ (WMAP-3).
2009	Riess G. et al.	HSTKP [62]: $H_0 = 74.2 \pm 3.6$ по данным наблюдений 240 долгопериодических цефеид, 6 сверхновых типа Ia и NGC 4258.

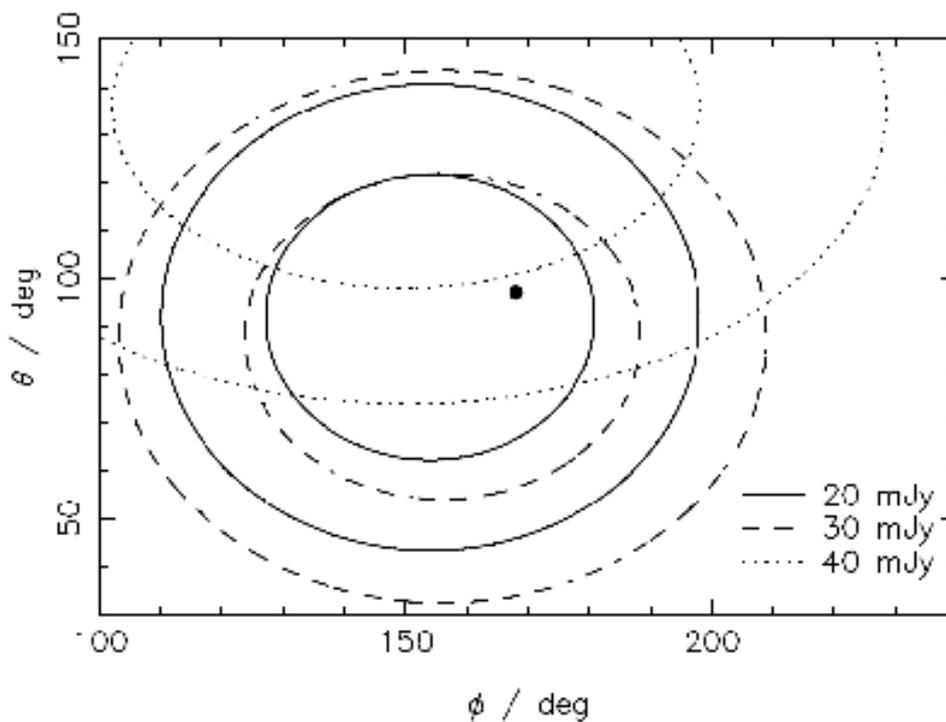


Рис. 8: Карта плотности излучения радиогалактик. Точка — ось диполя реликтового излучения.

В XXI веке исследование анизотропии получило дальнейшее развитие на новом уровне точности измерений, первым символом которых стал космический зонд WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe). При этом точность измерений по сравнению с COBE возросла еще на три порядка, чувствительность — в 45 раз, а угловое разрешение — в 33 раза.

В 2002 году С. Blake и J.Wall [63] идентифицировали диполь анизотропии плотности радиогалактик в области: $\alpha = 11.2$ ч и $\delta = -7.2^\circ$ (рис. 8). В 2003 году по данным WMAP методом максимального правдоподобия по критерию χ^2 для гипотезы гауссовости была обнаружена предсказанная теорией «расширяющейся Вселенной» мультипольная анизотропия реликтового излучения (рис. 9) [58].

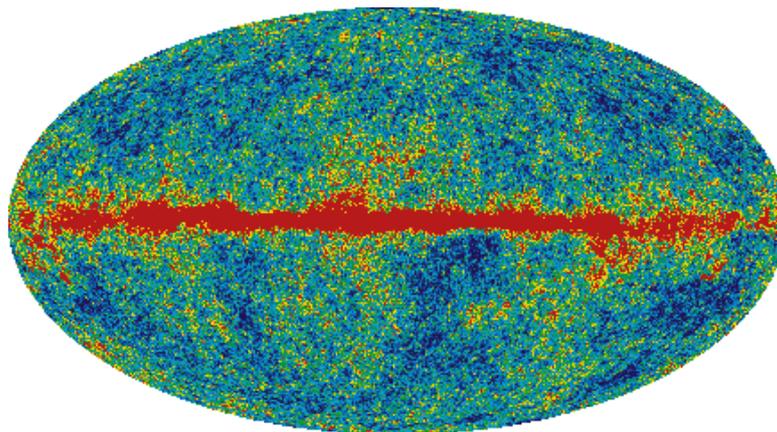


Рис. 9: Мультипольная анизотропия реликтового излучения в галактических координатах (полоса — излучение Млечного Пути)

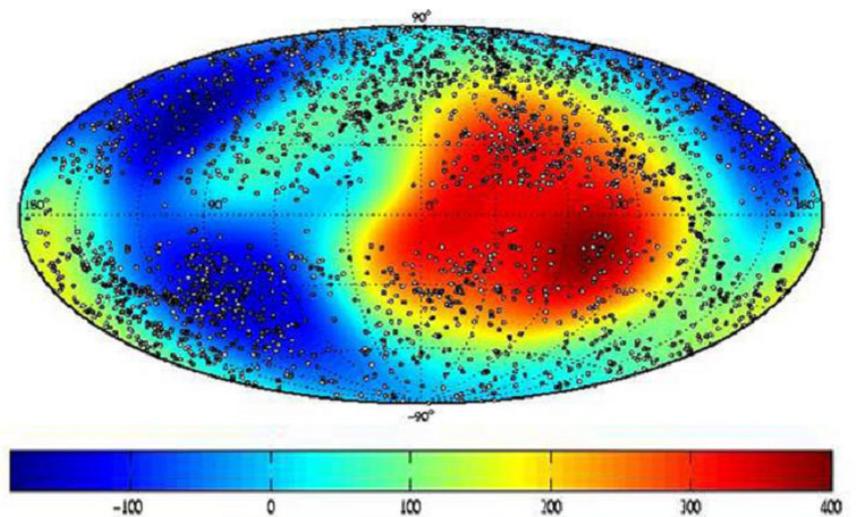


Рис. 10: Поле пекулярных скоростей (км/с) галактик каталога 2MFGC.

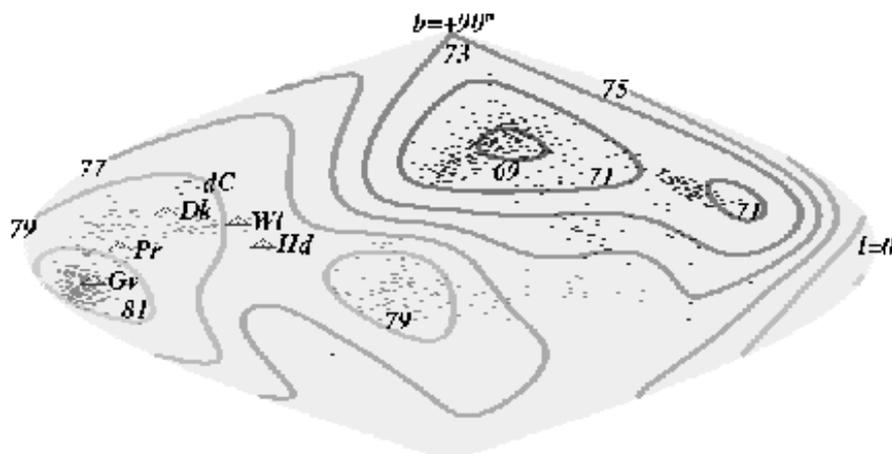


Рис. 11: Карта HST Key Project распределения постоянной Хаббла H_0 ($\text{км} \cdot \text{с}^{-1} \text{Мпс}^{-1}$)

В 2005 году И. Караченцев и С. Митронова идентифицировали поле пекулярных скоростей 2724 галактик в объеме 100 Мпс (рис. 10) с максимумами в Hydra (Гидра) и Centaurus, а также минимумами в зонах Bootes (Волопас) и Местной пустоты [64].

В 2006 году А. Sandage и др. [59] по данным HST о сверхновых типа Ia и це-

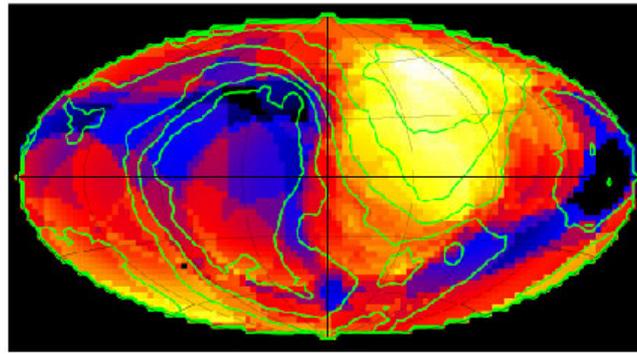


Рис. 12: Распределение галактик в радиусе 70 Мпс. Контурсы — данные спутника IRAS.

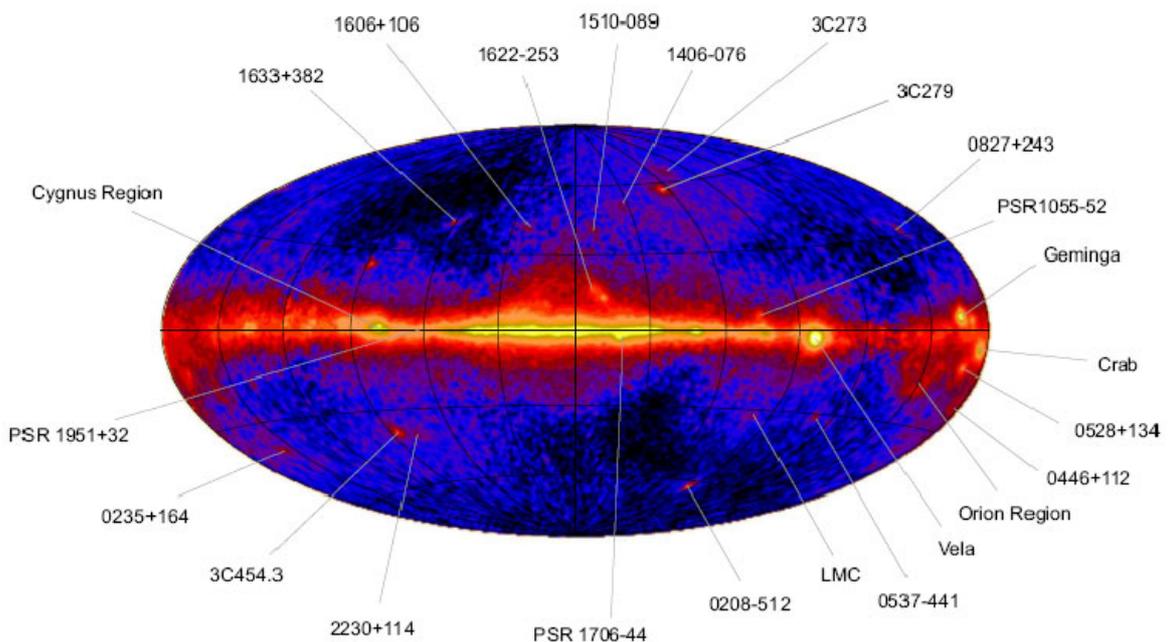


Рис. 13: Карта гамма-излучения, полученная телескопом EGRET обсерватории имени Комптона.

Таблица 7: Параметры диполя крупномасштабного потока галактик

Год	Источник	V , $\text{км}\cdot\text{с}^{-1}$	$V_{\text{макс}}$, $\text{км}\cdot\text{с}^{-1}$	Выборка	$z_{\text{макс}}$	l	b
2005	Караченцев И.Д., Митронова С.Н. [64]	224 ± 36	—	2724		$302^\circ \pm 11^\circ$	$-8^\circ \pm 7^\circ$
2008	Castelvecchi D. [60]	~ 1000	~ 700 скоплений		0.08	Centaurus и Vela	

феидах на масштабе от 4 до 200 Мпс получила новую оценку постоянной Хаббла: $H_0 = 62.3 \pm 8 \text{ км}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{Мпс}^{-1}$. А в 2007 году М. McClure и С. Дюер по данным HST Key Project по 76 объектам (рис. 11) оценили угловые вариации $\Delta H_0 \sim 9 \text{ км}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{Мпс}^{-1}$ на масштабах $(10 \dots 20)^\circ$ [65], что выявило причины расхождения оценок постоянной Хаббла (рис. 12).

В том же году Р. Кривонос [66] данными о гамма-излучении галактик (рис. 11) подтвердил данные [50, 51, 64, 65, 67, 117]: аномалии реликтового излучения совпали с мощными внегалактическими источниками и излучением Млечного Пути (рис. 13).

Таблица 8: Движение Солнца относительно реликтового излучения.

Год	Источник	Амплитуда диполя, 10^{-3}K	Скорость, $\text{км}\cdot\text{с}^{-1}$	Координаты апекса	
				α , ч(h); l°	δ ; b
2003	Spergel D.N. et al. [58]:	3.346 ± 0.017	—	$l = 263.86^\circ$	$b = +48.25^\circ$
2007	Смут Дж.Ф. [56]:	$3.358 \pm 0,024$	—	$l=(264.31\pm 0.16)^\circ$	$b=(+48.05\pm 0.10)^\circ$
	Jarosik N. at al. [69]:	3.358 ± 0.017	368 ± 2	$l=(263.86\pm 0.10)^\circ$	$b=(+48.25\pm 0.10)^\circ$
2008	Hinshaw G. et al. [70]:	3.355 ± 0.008	369.0 ± 0.9	$l=(263.99\pm 0.14)^\circ$	$b=(+48.26\pm 0.03)^\circ$

Таблица 9: Анизотропия космического излучения.

Год	Источник с указанием фактора
2006	Guillan G., Oyama Y. [71]: детектор Суперкамиоканде зарегистрировал две области для космических мюонах, где в одной (Taurus) — плотность мюонов выше средней, в другой (Virgo) — ниже. Угловое расстояние между ними ~ 130 градусов. Различия в амплитудах сигналов невелики, но устойчивы и подтверждены экспериментами по гамма-квантам в обсерваториях Малагро и на Тибете. Аналогичное распределение — в распадах протонов в эксперименте IMB.
2007	Кривонос Р.А. [66]: по данным гамма-обсерватории ИНТЕГРАЛ космического рентгеновского фона обнаружена согласующаяся с крупномасштабной структурой Вселенной дипольная анизотропия объемной плотности активных ядер галактик на красных смещениях в пределах 70 Мпс.
2007	Gurzadyan V.G. и др. [72]: В Европейском центре по изучению синхротронного излучения в Гренобле (Франция) изучалось комптоновское рассеяние лазерного света на пучке электронов с энергиями 6 ГэВ. Если ранее в подобных экспериментах анизотропии скорости света не наблюдалось, то теперь получен положительный результат с достоверностью 10 сигма над уровнем фона. Отмечены суточные вариации сигнала, возможно, связанные с вращением Земли и изменением ориентации установки по отношению к направлению движения относительно реликтового излучения.
2007	Rudnick L. [73]: Обзор NRAO VLA Sky Survey (NVSS) системой радиотелескопов Very Large Array (VLA): В Eridanus плотность галактик [$\alpha \approx (3 \dots 5)$ ч, $\delta \approx (-25 \dots 0)^\circ$] значительно ниже средней и область пониженной температуры реликтового излучения и пустота размером 6-10 млрд. св. лет.

К 2008 году факт коллективного движения 700 скоплений галактик со скоростью $\sim 1000 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$ к Centaurus-Vela (Паруса) по данным орбитального рентгеновского телескопа ROSAT подтвердило NASA [68]. Были уточнены параметры диполя местного потока галактик (табл. 7) и данные о движении Солнца, полученные COBE и WMAP (табл. 8), а также обнаружена анизотропия других видов космического излучения (табл. 9).

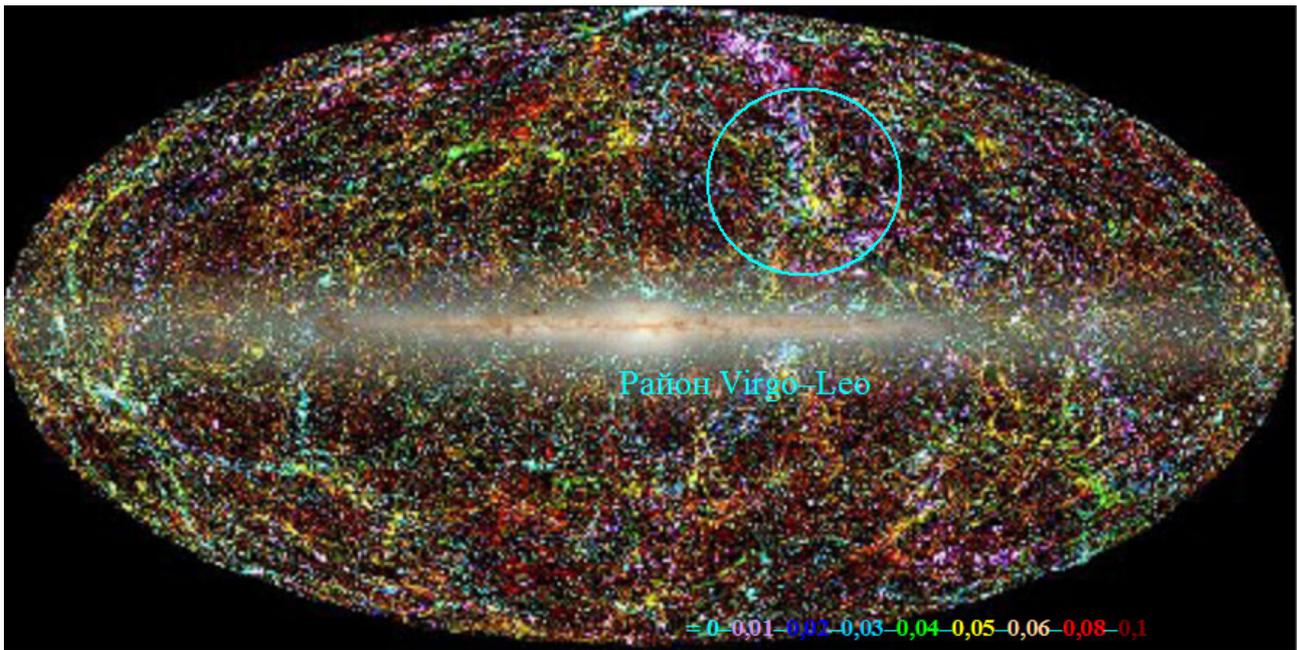


Рис. 14а: [118, Fig. 3]. Распределение красных смещений в спектрах галактик в галактических координатах.

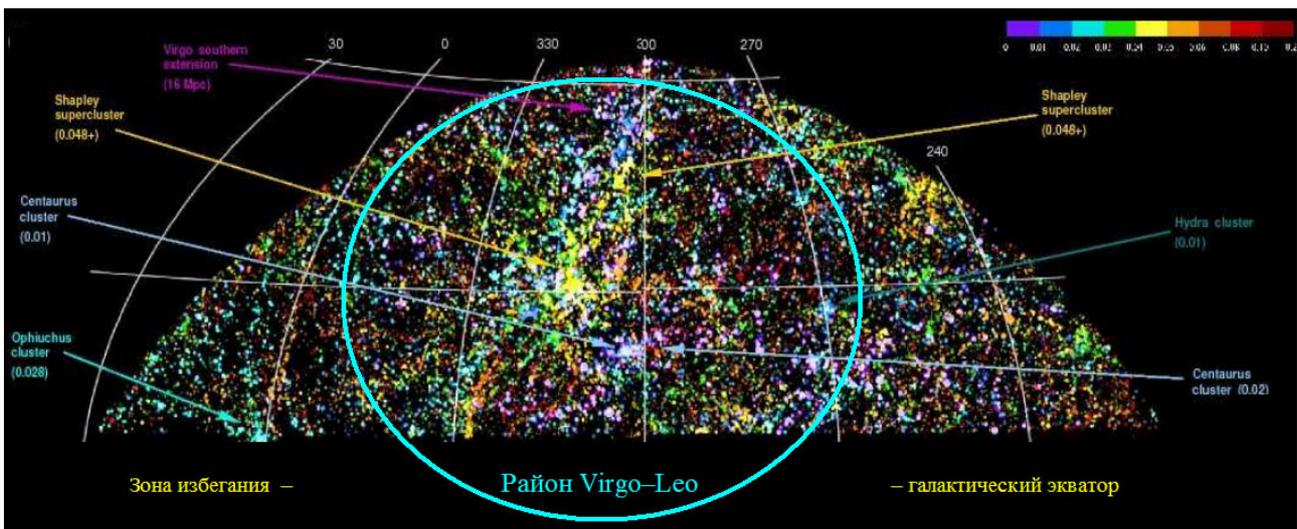


Рис 14. б: Обзор 6dF Galaxy Survey [75] распределения красных смещений в спектрах галактик.

Проблема анализа диаграммы Хаббла

Описанные выше результаты получены методами, применение которых требует проверки выполнения условий, известных в теории измерительных задач и математической статистике [55, 74], а именно: статистической однородности, центрированности, гауссовости, некоррелированности, неконфлюэнтности, неограниченности переменных модели, единообразия принципов определения точности и корректности формулировки цели измерительной задачи.

Нарушение условия статистической однородности данных (стохастичности по А.Н. Колмогорову) ведет к появлению ненаблюдаемых дополнительных случайных погрешностей оценок и даже к некорректному применению математической статистики. Это обстоятельство иллюстрируют данные [118] о красном смещении z в цветовой шкале (рис. 14).

Нарушение условия центрированности вызвано наличием неисключенных системати-

Таблица 10: Концепции вероятности.

Концепция	Принципы определения вероятностей для значений x случайной величины X
Аксиоматическая Муавра–Лапласа	<i>принцип равной вероятности:</i> $P\{a \leq x_n < X < x_b \leq b\} = (x_b - x_n)/(a - b).$
Частотная Пуассона–Мизеса	<i>принцип апостериорной вероятности:</i> $P a \leq x_n < X < x_b \leq b = \omega\{a \leq x_n < X < x_b \leq b\}/N.$
Субъективная Бернулли–Бейеса	<i>принцип априорной вероятности:</i> экспертная оценка возможности события $\{a \leq x_n < X < x \leq b\}$, конвенция.
Интерполяционная Гаусса–Фишера	<i>принцип наибольшего правдоподобия:</i> интерполяция статистического распределения величины X распределением вероятностей по критериям максимума правдоподобия и вероятности согласия или минимума погрешности неадекватности.

ческих погрешностей измерений и использованием статистик, не соответствующих в методе максимального правдоподобия виду распределения.

Известно, что статистическая обработка данных WMAP ведется методами максимального правдоподобия [61] и байесовского оценивания [76]. Их используют, как правило, в режиме «подгонки», и для одних и тех же данных они дают различные оценки.

Так, неожиданно малую амплитуду квадруполь и октополь реликтового излучения по данным WMAP авторы [109] анализируют при помощи частотных и байесовских статистик несоответствия с точки зрения статистической значимости и, вопреки [110], делают вывод об отсутствии необходимости привлекать т.н. новую физику для объяснения эффекта.

На это обратили внимание в ГАИШ в 2006 году [77]. А ведь эти методы связаны с различными концепциями вероятности (табл. 10) [78].

На мультиполи реликтового излучения влияет эффект «интерполяции» сферическими гармониками. Он характерен и разложению Фурье, гармоники которого привязаны к интервалу наблюдения. Для его преодоления применяют сканирование по частоте или периоду [79 – 80].

Поэтому введение неевклидовых геометрий — это следствие исчерпания ресурса точности описания математическими моделями космические объекты измерений в системах координат евклидовой геометрии.

Нарушение условия гауссовости является жестким ограничением на применение регрессионного анализа — его оценки теряют привлекательные свойства. Отсутствие альтернатив гипотезе гауссовости в сочетании с группированием данных и критерием χ^2 , придающим больший вес наименее надежной части данных на краях распределений, упрощает вычисления, но искажает вид распределения и завышает вероятность согласия.

Так, Е. Komatsu и др. [81] объявили о 95% достоверности гауссовости фона реликтового излучения, но представили карту ILC (internal linear combination — рис. 15), не предназначенную для исследования реликтового излучения из-за «сложных свойств шума». Они же утверждают, что 6-параметрическая Λ CDM-модель в плоском пространстве

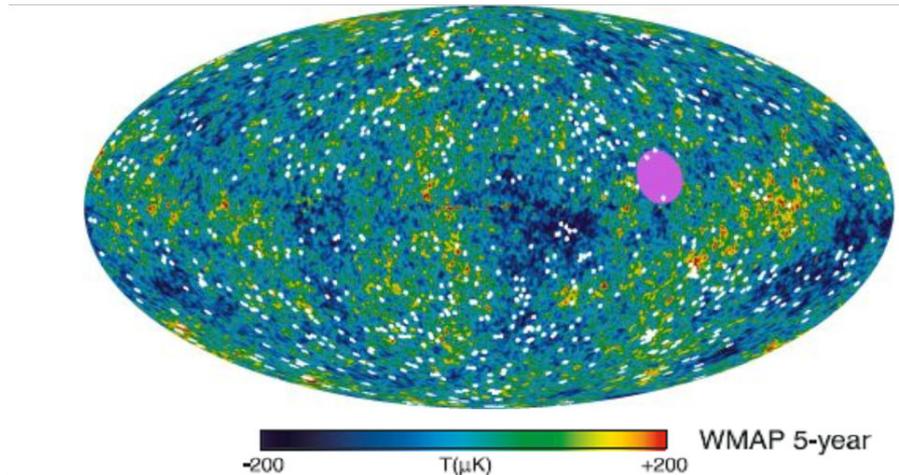


Рис. 15: ILC-карта реликтового излучения (μK). Кругом отмечен район Virgo–Leo.

Таблица 11: Асимптотическая относительная эффективность оценок [82]

Отношение	Возмущающее распределение Гаусса (G)												
	ε	0	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05	0.10	0.15	0.25	0.5	1
СКО/САО		0.876	0.948	1.016	1.198	1.439	1.752	2.035	1.903	1.689	1.371	1.017	0.876

Таблица 12: Эффективность оценок.

Оценка	ε	Вид возмущающего распределения			
		Гаусса	Лапласа	Равномерное	Коши
среднее	0	1	1	1	1
медиана		0.637	0.637	0.637	0.637
среднее	0.05	0.808	0.682	0.362	0.282
медиана		0.669	0.894	0.781	0.765
среднее	1	1	0.5	0.063	0.032
медиана		0.637	1	0.835	0.811

дает приемлемое описание экспериментальных данных о спектрах, но величины χ^2 для нее недопустимо велики, а вероятность принятия модели $\sim 5\%$ [30].

М. Tegmark и др. [64] тоже объявили о гауссовости карт FCM (foreground cleaned map) и WFM (Wiener-filtered map). Но D. Spergel и др. [58] указали, что избыток χ^2 обусловлен гравитационным линзированием, угловыми вариациями диаграммы направленности WMAP и небольшим негауссовым шумом [30]. Последствия «небольшой негауссовости» иллюстрирует схема « ε -загрязнения» Дж. Тьюки [82]:

$$f_{\Xi}(\xi) = (1 - \varepsilon) \cdot f_G(\theta_{G1}, \theta_{G2}; \xi) + \varepsilon \cdot f_G(\theta_{G1}, \beta\theta_{G2}; \xi) \quad (7)$$

где ε — доля, β — параметр масштаба « ε -загрязнения». Так, в задаче Эддингтона-Фишера для оценок равной точности параметра рассеяния смеси (7) при $\varepsilon = 0$ и $\beta = 3$ среднеквадратическое отклонение (СКО) требует на 12% меньшего объема выборки, чем среднее абсолютное отклонение (САО). При $\varepsilon > 0.0018$ это отношение резко меняется (Таблица 11)!

При негауссовом возмущающем распределении резко снижается эффективность среднего как оценки параметра положения (Таблица 12) [83]. А при наличии «выбросов» на фоне «гауссовости» без нарушения условий измерений выборочные дисперсия и среднее

несостоятельны.

Негауссовость данных WMAP обнаружила группа О.В. Верходанова [84 – 85]. Этот результат подтвердили W. Colley и др. [86], P. Vielva и др. [87] и H. Eriksen и др. [88].

Нарушение условия гомоскедастичности проявляется как снижение эффективности оценок параметров регрессионной модели и как существенное занижение оценок дисперсий и ковариаций параметров, что и показывает схема «ε-загрязнения». Часто полагают, что объединение «неравноточных» данных при помощи схем «взвешивания» повышает точность конечного результата. Так, в HSTKP постоянную Хаббла оценивали различными методами (см. Табл. 1, Рис. 1) [57]. Среднее же взвешенное дало «лучшую» оценку $H_0 = 72 \pm 8 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$!

Но оценка параметра рассеяния среднего взвешенного в \sqrt{N} раз меньше оценки параметра рассеяния смеси распределений, и конечный результат в принципе не может быть точнее наиболее точного компонента. А весовые коэффициенты в методе максимального правдоподобия определяют долями данных источников [89].

В HST KP корректную оценку характеристик точности дала бы схема «ε-загрязнения» Дж. Тьюки (7) для долей распределений [82].

По этой причине «открытия», сделанные при объединении данных WMAP с данными менее точных экспериментов, были «закрыты» [90].

Нарушение условия некоррелированности приводит к последствиям, сходным с последствиями нарушения гомоскедастичности:

- оценки параметров не смещены, но теряют эффективность;
- дисперсии оценок параметров становятся смещенными, что может привести к признанию статистически значимыми входных переменных, которые таковыми в действительности могут и не являться;
- дисперсия оценки регрессионной модели занижается;
- нарушаются условия применимости критериев Стьюдента и Фишера.

Со «статистическим рецептом» Р. Фишера в отношении спецификации параметрической модели этими критериями, основанными на гипотезе нормальности, связан «парадокс Хампеля» [91]. В «рецепте» Р. Фишера нет ни слова о возможном отсутствии независимости и о катастрофической неробастности F -критерия. Ни слова о том, что различные критерии согласия оценивают различные (в т.ч. и несущественные) аспекты подгонки, что при достаточно больших выборках практически все критерии превышают уровень значимости. И, самое главное, ни слова о том, что «плавную», неизолированную нулевую гипотезу никогда статистически доказать нельзя, статистически ее можно только опровергнуть [91].

Примерами «статистических доказательств», которые уже стали классическими, особенно богата история физики начала XX-го века.

Условие неконфлюэнтности нарушают случайные числа в регрессионной матрице: смещение регрессоров занижает оценки дисперсии, а оценки параметров теряют состоятельность [92].

Ограниченность переменных ведет к корреляции в регрессионной матрице, к стохастической мультиколлинеарности [93], вызывающей:

- неустойчивость оценок (добавление или исключение даже одного отсчета ведет к сильному изменению оценок параметров регрессионной модели и к резкому уменьшению точности предсказания по модели);
- численную неустойчивость процедуры оценивания за счет погрешностей округления и их накопления;

- сильную корреляцию оценок параметров регрессионной модели, что лишает смысла ее интерпретацию;
- резкое увеличение дисперсии оценок параметров модели;
- ненадежность применения критериев значимости, т.к. значения среднеквадратических отклонений входят в формулы этих критериев.

По условию адекватности модель не должна быть ни избыточной, это вызывает рост дисперсий оценок, ни неполной, это смещает остатки.

Часто полагают, что увеличение числа параметров модели повышает точность аппроксимации экспериментальных данных [30].

Так, при статистической обработке данных WMAP на основе простой 6-параметрической Λ CDM-модели, «которая может объяснить наблюдаемую анизотропию (TT -спектр) и кросс-корреляцию анизотропии и E -моды поляризации (TE -спектр)», авторы [58] утверждают, что «большинство параметров хорошо определяются в рамках принятой модели. Исключение составляют два параметра: спектральный индекс n_s и оптическая толщина τ . По этим параметрам существует явное вырождение. Так, функция правдоподобия меняется только на 0.05 при изменении оптической толщины в интервале $0.11 < \tau < 0.19$ » [30].

Модель с квинтэссенцией с уравнением состояния $w = -0.5$ и параметрами $\Omega_m = 0.47$, $h = 0.57$ удовлетворяет экспериментальным данным WMAP так же хорошо, как и стандартная Λ CDM-модель. Но она была отвергнута, т.к. получающееся значение параметра Хаббла на 2σ меньше, чем значение того же параметра, полученное на телескопе Хаббла [57]. Так же отвергнута модель с неплоским пространством и набором параметров $H_0 = 32.5 \text{ км}\cdot\text{с}^{-1}\text{Мпс}^{-1}$, $\Omega_\Lambda = 0$, $\Omega_{total} = 1.28$ [30].

Заметим, что статистический анализ при выполнении перечисленных выше условий называют классическим линейным регрессионным, и согласно теореме Гаусса-Маркова его оценки обладают свойствами состоятельности, несмещенности и эффективности. При этом дисперсия оценки характеристики положения модели становится известной функции регрессора, а смещение среднего квадрата случайной составляющей погрешности неадекватности определяется числом параметров модели.

Нарушения условия единообразия принципов определения характеристик точности требует более подробных пояснений.

В работах [58, 61, 70, 81, 64, 76] по анализу данных WMAP оценки точности результатов с символом « \pm » сопровождают метки «68%», «CL 95%», «CL 68%», «68% CL uncertainties», «the corresponding 68% intervals», «68% confidence intervals», реже — «68% and 95% confidence levels» или «99,5% confidence», чаще — пояснений нет. А в отчете команды WMAP за 5 лет [94] указано, что оценке $H_0 = 71.9 + 2.6 / - 2.7 \text{ км}\cdot\text{с}^{-1}\text{Мпс}^{-1}$ соответствует «the corresponding 68% intervals».

Завышение точности в оценках такого рода часто связано с игнорированием того обстоятельства, что полной характеристикой результата решения измерительной задачи является распределение вероятностей [55].

Это очевидное обстоятельство получило международное признание только в 2007 году в примечаниях к 3-й редакции словаря VIM-3 [95].

Путаницу в этот вопрос внесла произвольная интерпретация «Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement» (GUM) [96], термины которого «confidence level» и «confidence interval» («coverage interval») не соответствуют одноименным терминам математической статистики «доверительная вероятность», «уровень доверия» и «доверительный интервал», что, между прочим, отмечено непосредственно в GUM.

Ситуацию усугубил некорректный перевод термина «tolerance interval» как «допусти-

Таблица 13: Определения гравитационной постоянной [102]

Год	Источник	Оценка, $\text{м}^3 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1}$	Год	Источник	Оценка, $\text{м}^3 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1}$
1972	Facy, Pontikis C.	$6.6714(6) \cdot 10^{-11}$	1982	Luther, Towler	$6.6726(5) \cdot 10^{-11}$
1979	Sagitov et al.	$6.6745(8) \cdot 10^{-11}$	1988	Karagioz	$6.6731(4) \cdot 10^{-11}$

мый интервал» в ГОСТ Р 50779.10–2000 [97]. Правильное определение дано ГОСТ Р ИСО 16269-6-2005 [98] и МИ 2916-2005 [99].

Ошибку совершают уже при постановке измерительной задачи, не усматривая различий между «измерением как сравнением с мерой» и «измерительной задачей как математической задачей, решаемой по данным измерений», и полагая «результатом измерения» статистическую оценку параметра положения данных многократных измерений.

Следствием этой ошибки становятся еще три ошибки.

Во-первых, точность точечной оценки параметра положения совокупности данных измерений (вычислений, в методе косвенного измерения) в большинстве рассматриваемых работ характеризуют точечной оценкой параметра рассеяния для возможных значений оценки параметра положения. Она меньше оценки параметра рассеяния возможных значений искомой величины в \sqrt{N} раз, но оценки такого рода значение объема выборки N , как правило, не сопровождает.

Так, в 1998 году по данным опытов 1982 года (Таблица 13) CODATA принято значение гравитационной постоянной $6.673(10) \cdot 10^{-11} \text{м}^3 \text{с}^{-2} \text{кг}^{-1}$ [100], «менее точное», чем в 1986 году: $6.67259(85) \cdot 10^{-11} \text{м}^3 \text{с}^{-2} \text{кг}^{-1}$ [101].

Числа в скобках, СКО от средних арифметических или взвешенных оценок константы, для этих определений интерпретируют так:

$$\begin{aligned} 6.6714(6) \cdot 10^{-11} &= (6.6708 \dots 6.6720) \cdot 10^{-11}, \\ 6.6745(8) \cdot 10^{-11} &= (6.6737 \dots 6.6753) \cdot 10^{-11}, \\ \mathbf{6.6726(5)} \cdot 10^{-11} &= (\mathbf{6.6721} \dots \mathbf{6.6731}) \cdot 10^{-11}, \\ 6.6731(4) \cdot 10^{-11} &= (6.6727 \dots 6.6735) \cdot 10^{-11}. \end{aligned}$$

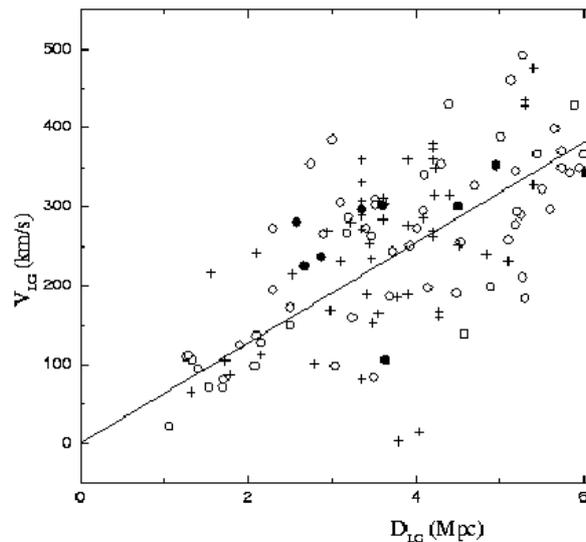
Поэтому вывод [102] о несогласованности этих оценок был очевиден.

Во-вторых, точность точечных оценок параметров распределений характеризуют доверительными интервалами, причем доверительные границы статистических погрешностей оценивания параметров в методе максимального правдоподобия связаны с оценками параметров рассеяния коэффициентами на основе распределений Стьюдента и χ^2 .

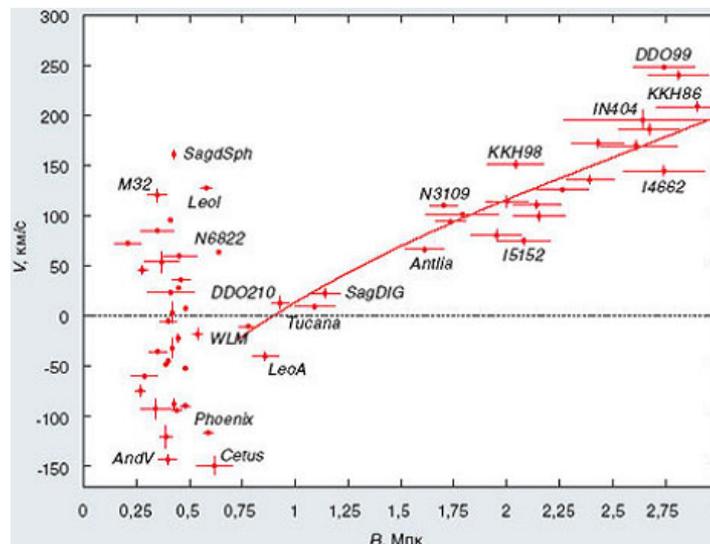
В-третьих, интервальную оценку точности результата решения размерностной измерительной задачи следует строить не по доверительному, а по толерантному интервалу, содержащему с данной вероятностью заданную долю распределения искомой величины [103], а не параметра положения ее распределения! При этом толерантные интервалы можно строить по доверительным интервалам, но всех параметров распределения при соответствии доверительной вероятности их композиции.

Так, согласно [104] дефект «метки» «CL 68%» $\pm 1\sigma$ -интервала исчезает только при точно известных параметрах распределения Гаусса!

Статистический разброс данных и инструментальные погрешности измерений характеризуют различными распределениями вероятностей, по свертке которых и следует находить толерантный интервал. А так как для НСП в поверочных схемах принято равномерное распределение [105], то распределение результата свертки уже не будет гауссовым [99].



а) для 151 галактики при $H_0=64\pm 2 \text{ км}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{Мпс}^{-1}$ и характеристике рассеяния $s=74 \text{ км}\cdot\text{с}^{-1}$ [5, рис. 4.1].



б) для ближайших галактик относительно центра Местной группы (разброс галактик $< 28 \text{ км}/\text{с}$ [111]).

Рис. 16: Характеристики положения зависимости между скоростью и расстоянием.

К этому добавляется произвол суммирования погрешностей, правила которого в теории вероятностей установлены якобианом преобразования.

Корректность формулировки цели измерительной задачи [55] связана с ее выражением в терминах характеристик модели. К ним относятся не только характеристики положения, но и характеристики рассеяния зависимостей между физическими величинами. При заданных значениях аргументов они становятся параметрами положения и рассеяния распределений. А так как СКО оценки параметра положения в \sqrt{N} раз меньше СКО s величины, то нахождение погрешностей входной переменной по погрешностям оценивания параметра наклона и выходной переменной линейной регрессии — грубая ошибка, что иллюстрирует рисунок 16, где доверительные интервалы оценок уже доверительной зоны регрессии.

Это относится ко всем регрессионным моделям.

Но усугубляют проблему не только статистические причины.

Первая причина — гипотеза о не полном космологическом и доплеровском характе-

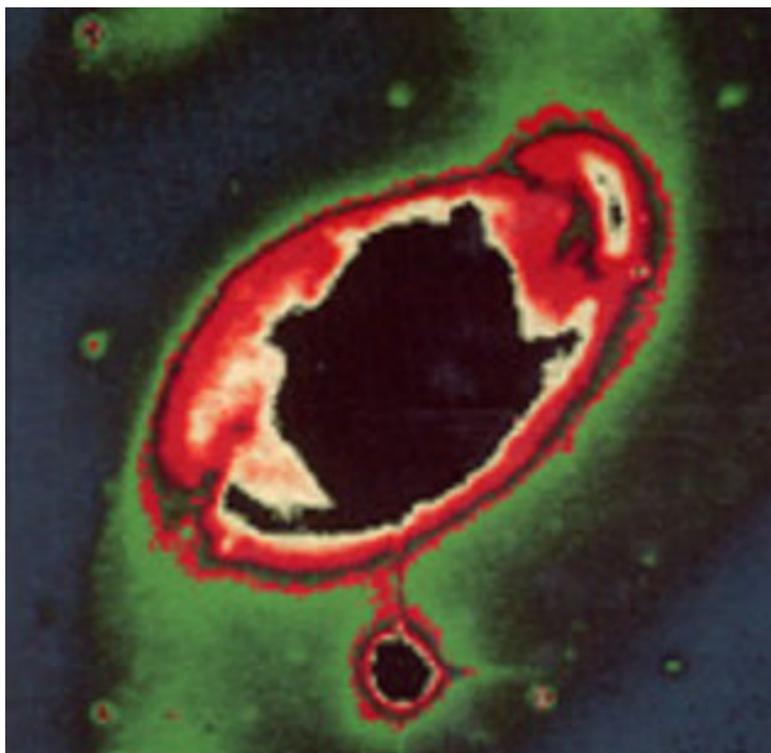


Рис. 17: [106]. NGC 4319 и Markarian 205.

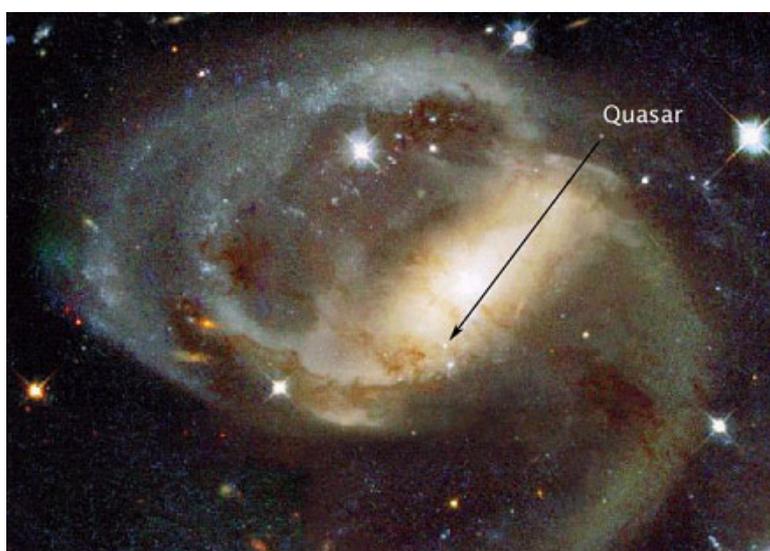


Рис. 18: [106]. Квазар на фоне NGC 7319.

ре красного смещения квазаров, ее выдвинул опытнейший астроном бывший ассистент Э. Хаббла – Н. Агр. Он собрал каталог взаимодействующих галактик и квазаров с существенно различающимися красными смещениями. Так, например, галактика NGC 4319 и квазар Markarian 205 связаны перемычкой (рис. 17).

Комментарий NASA: «Видимое может обманывать. NGC 7319 находится в 80 миллионах световых лет, Markarian 205 — более чем в 14 раз дальше, то есть в 1 миллиарде световых лет. Это — просто случайность».

Пример же, для которого комментарии NASA не известны (рис. 18): квазар при $z = 2.11$ на фоне галактики NGC 7319 при $z = 0.0225$ [106].

Вторая причина в том, что повышение точности измерений при определении харак-

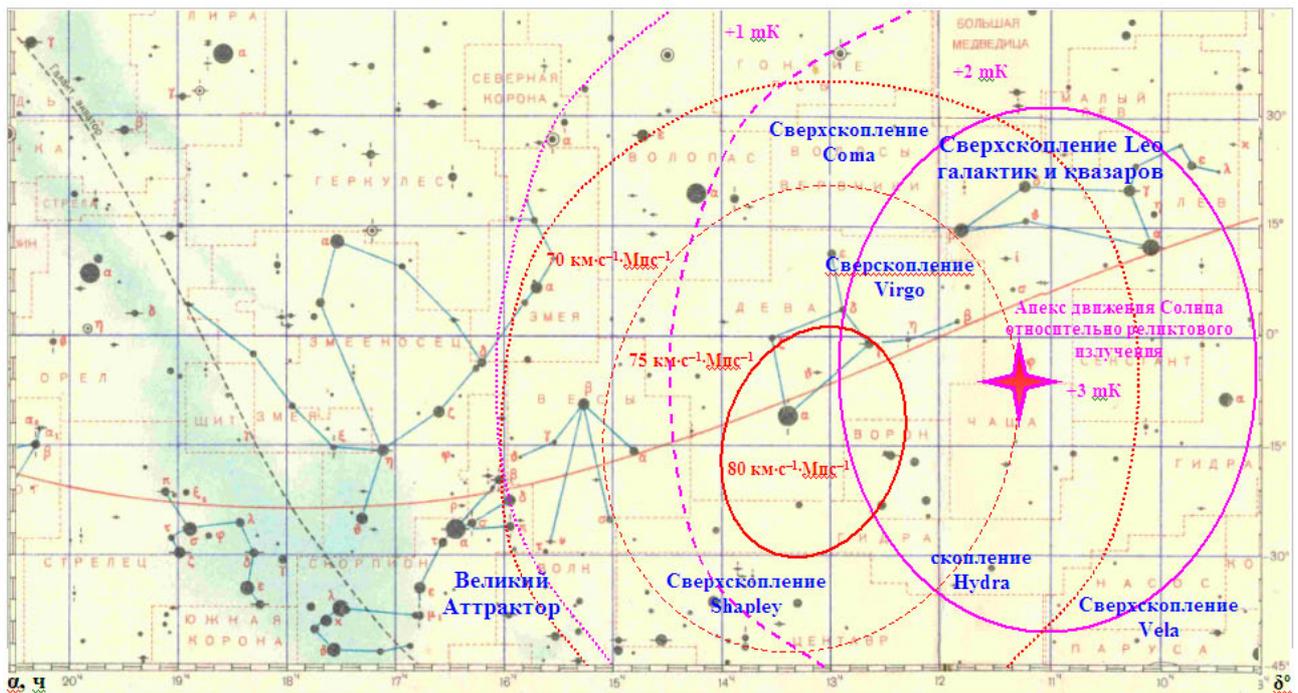


Рис. 19: Анизотропия реликтового излучения и красного смещения в Местной группе галактик в Virgo–Leo.

теристик реликтового излучения привело в задачах идентификации космологических моделей к парадоксу. Так, по стандартной Λ CDM-модели плоской Вселенной с помощью программы CMBFAST строят различные зависимости и смотрят, при каких значениях параметров достигается наилучшее согласие теории и эксперимента [77]. Параметрами этой модели являются плотности Ω_b барионной материи (обычного вещества), Ω_C «темной материи» (Cold Dark Matter) и Ω_Λ «темной энергии» неизвестной природы. Параметр Ω_Λ ставят в соответствие Λ -члену в уравнении Гильберта–Гроссмана–Эйнштейна, нестационарное решение которого при $\Lambda = 0$ и получил А. Фридман в 1922 году.

Фактически параметры Ω_b , Ω_C и Ω_Λ в единицах т.н. критической плотности в стандартной Λ CDM-модели используются как дополнительные степени свободы для аппроксимации экспериментальных данных. Если $\Omega_b + \Omega_C + \Omega_\Lambda < 1$, то «расширение» Вселенной будет неограниченным, в противном случае — сменится сжатием. Но по данным измерений WMAP за 5 лет $\Omega_b = 0.00441 \pm 0.0030$, $\Omega_C = 0.214 \pm 0.027$ и $\Omega_\Lambda = 0.742 \pm 0.030$.

То есть $\Omega_\Sigma = \Omega_b + \Omega_C + \Omega_\Lambda = 0.96 \pm 0.06$.

И получается, что «расширение» Вселенной связано неизвестно с чем.

Λ CDM-модель и данные WMAP на больших и малых угловых масштабах небесной сферы значимо различаются [58]. Если несовпадения на малых масштабах можно убрать нестепенным спектром возмущений, то несовпадения на больших масштабах более загадочно [30]. Авторы [58] считают, что, возможно, это указание на эффекты новой физики.

Третья причина в том, что апекс движения Солнца относительно реликтового излучения находится на границе созвездий Льва и Чаши в районе температурного максимума реликтового излучения (Dipole⁺). Там же — сверхскопления Shapley, Virgo, Vela, Coma, Hydra, Великий Аттрактор и сверхскопление галактик и квазаров Leo (рис. 19), а также минимум потока космических мюонов. При этом рядом в секторе $\alpha = 17 \dots 19$ ч находится центр Млечного пути (ЦМП). Антиапексу движения Солнца соответствует температурный минимум (Dipole⁻) реликтового излучения в Aquarius, максимум потока космических мюонов и гигантская пустота (Super void) размером до 3 Гпс в Eridanus (Эридан).

Сенсацией стали данные, которые получил G. Verschuur [107]: флуктуации реликтового излучения хорошо коррелируют с распределением облаков нейтрального водорода в Галактике и связаны с излучением неизвестной природы. Это обстоятельство вносит в данные измерений неучтенные систематические погрешности и ведет к необходимости уточнения и даже пересмотра космологических моделей.

Таким образом, повышение точности измерений, обнаружение «темных пятен» при интерпретации экспериментальных данных, а также обнаружение связи реликтового излучения и красного смещения с крупномасштабными пространственными структурами Вселенной ставит перед космологией проблему пересмотра математических моделей.

Решение измерительных задач в условиях априорной неопределенности.

Метод максимального правдоподобия основан на функции правдоподобия — совместной плотности распределения вероятностей (ПРВ) $f_*(x)$. Но в математической статистике сходимость статистического распределения к распределению вероятностей рассматривается не для относительных частот и ПРВ, а только для статистической функции распределения $F_{(N)}(\xi)$ (СФР) как несмещенной и состоятельной оценки функции распределения вероятностей $F_*(x)$ (ФРВ).

Методы статистического анализа данных классифицируют по объему используемой информации [92]: «Чем больше априорной информации использует статистическая процедура, тем выше качество выдаваемых ею решений. Чем меньше априорной информации заложено в процедуру, тем слабее ухудшает решение ее ложность».

Поэтому для решения начальных задач математической статистики [93], т.е. при отсутствии достоверной априорной информации о выполнении условия стохастичности [94] и виде распределения вероятностей, в рамках интерполяционной концепции вероятности в 1980-е годы был разработан метод максимума компактности (ММК) [9, 93, 77, 95–100].

Этот метод основан на следующих положениях и результатах.

1. Вероятность согласия $\alpha_{1,2}$ ПРВ имеет линейное представление, равное обобщенному расстоянию Колмогорова D_F [77, 100] (рис. 20):

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &\equiv 1 - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x) - f_2(x)| dx \equiv \\ &\equiv 1 - \sum_{m=1}^M (-1)^{m-1} \cdot |F_1(x_m) - F_2(x_m)| \equiv 1 - D_F \equiv 1 - \sum_{m=1}^M D_{Fm} \end{aligned}$$

2. Состоятельной оценкой вероятности согласия ФРВ $F_*(\xi)$ вида «*» и СФР $F_{(N)}(\xi)$ совокупности данных является статистика

$$\hat{\alpha}_* \equiv 1 - \sum_{r=1}^R \left| D_{*[r]}^+ - D_{*[r]}^- \right| \rightarrow \hat{d}_* = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left| \frac{F_{(N)}^+(\hat{\xi}_{[r]}) + F_{(N)}^-(\hat{\xi}_{[r]})}{2} - F_*(\hat{\xi}_{[r]}) \right| \quad (8)$$

где $F_{(N)}^+(\hat{\xi}_{[r]}) = \max F_{(N)}(\hat{\xi}_{[r]})$ и $F_{(N)}^-(\hat{\xi}_{[r]}) = \min F_{(N)}(\hat{\xi}_{[r]})$, $\hat{\xi}_{[r]}$ — точки роста,

$$D_{*[r]}^+ = \left| F_{(N)}^+(\hat{\xi}_{[r]}) - F_*(\hat{\xi}_{[r]}) \right| \text{ и } D_{*[r]}^- = \left| F_{(N)}^-(\hat{\xi}_{[r]}) - F_*(\hat{\xi}_{[r]}) \right|$$

— погрешности аппроксимации СФР при помощи ФРВ как случайная составляющая погрешности неадекватности распределения вероятностей. Формула (8) дает оценку вероятности согласия «по сумме высот ступенек СФР, пересекаемых ФРВ», и иллюстрирует парадокс Хампеля [91].

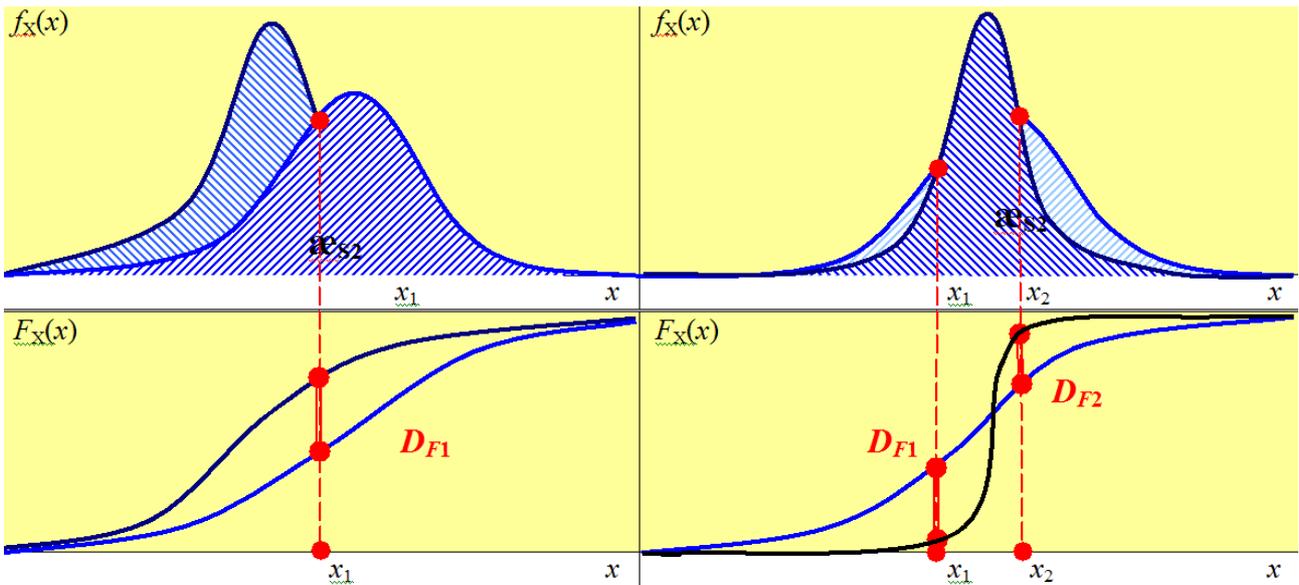


Рис. 20: Геометрический смысл вероятности согласия и обобщенного расстояния Колмогорова.

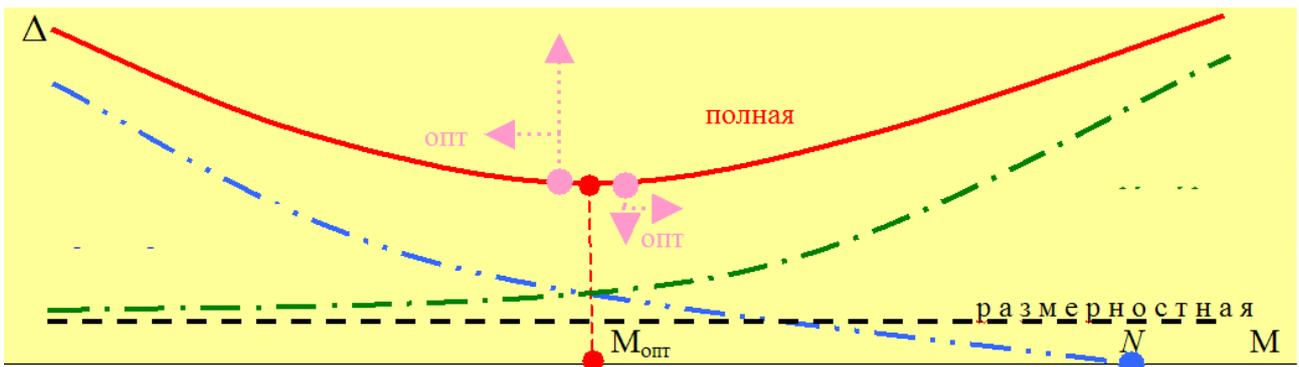


Рис. 21: Взаимосвязь составляющих погрешности неадекватности для моделей объектов измерений.

Так, с ростом объема выборки уменьшаются высоты ступенек СФР, соответственно, начиная с некоторого, возможно, относительно большого значения N , уменьшается вероятность согласия. Группирование же данных при использовании критерия χ^2 или искусственное усреднение СФР приводит к завышению вероятности согласия.

- Установление понятия погрешности неадекватности для математической модели объекта измерений и схемы перекрестного наблюдения для ее идентификации [66] дают метрологическую интерпретацию известного феномена теоретической физики – существование оптимальных по сложности моделей с наименьшими погрешностями неадекватности (рис. 21). Предпочтение отдается моделям, обладающим более высокой воспроизводимостью и дающим более точное предсказание добавляемых к выборке значений физических величин.

Необоснованное усложнение моделей ведет к повышению их чувствительности к вариациям данных измерений, к потере статистической устойчивости и, в конечном итоге, к «вырождению». Эффективным средством против этого явления стала схема перекрестного наблюдения как прямая проверка на адекватность при экстраполяции зависимости между физическими величинами.

Согласно постулату Колмогорова–Шеня об отсутствии критерия, различающего случайные и детерминированные числовые последовательности, в ММК статистическая

устойчивость или явление стохастичности рассматривается не только как свойство данных или условий измерений, а и как результат структурно-параметрической идентификации интерпретирующей модели зависимости между физическими величинами. При этом робастные методы, менее чувствительные к нарушению условий их применимости, чем параметрические, получили дальнейшее развитие как статистический анализ по критериям воспроизводимости.

Анизотропия диаграммы Хаббла для радиогалактик и квазаров

Для диаграммы Хаббла открытыми остаются вопросы нарушения условия статистической однородности данных о светимости и условия неконфлюэнтности для традиционных линейных регрессионных моделей — наличие крупномасштабных пространственных структур в распределении данных о красном смещении и зоны «избегания», а также погрешностей определения модулей расстояния. Открытым остается и вопрос калибровки шкалы расстояний для квазаров. А гипотеза Х. Арпа [11] о не полном космологическом и доплеровском характере красного смещения в спектрах их излучения не отклонена.

Данные о характеристиках нелинейности и анизотропии диаграммы Хаббла для различных типов объектов представлены в Таблице 14.

Основания для формулировки измерительной задачи идентификации крупномасштабной пространственно-угловой анизотропии красного смещения z в спектрах радиогалактик и квазаров по данным [1] возникли на фоне описанной выше комплексной проблемы в ходе апробации системы метрологического сопровождения «ММК–стат М» [101]. С ее

Таблица 14: Идентификация характеристик диаграммы Хаббла в XXI веке.

Год	Источник	Результаты, H_0 [$\text{км}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{Мпс}^{-1}$]
2002	Blake C. Wall J.	Диполь анизотропии поверхностной плотности распределения радиогалактик с апексом $\varphi = 168.0^\circ$ ($\alpha = 11.2$ ч) и $\theta = 97.2^\circ$ в области диполя реликтового излучения [104].
2003	Левин С.Ф.	Нелинейность диаграммы для $N = 63$ радиогалактик и $N = 103$ квазаров [105].
2005	Караченцев И.Д. Митронова С.Н.	Диполь пекулярных скоростей галактик в объеме 100 Мпс [59]: а) максимумы — ($l = 170^\circ, b = -45^\circ$) и ($l=196^\circ, b = -18^\circ$); б) минимумы — ($l = 120^\circ, b = +40^\circ$; $l = 80^\circ, b = -30^\circ$; $l = 200^\circ, b = +30^\circ$); Апекс потока ($l = 292^\circ, b = +3^\circ$) в области центроида рентгеновских скоплений.
2007	McClure M.L. Dyer C.C.	[61]: Угловые вариации $H_0 \sim 9 \text{ км}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{Мпс}^{-1}$ на масштабах 10...20 градусов. При этом локальные значения $H_0 = 54.8 \pm 8.6 \dots 124.4 \pm 19.0$ [57].
2009	Левин С.Ф.	Аномалии $\lg cz$ в Virgo-Coma ($\alpha = 11 \dots 14$ ч, $\delta = 0 \dots 30^\circ$) для $N = 120$ квазаров и по оси Eridanus — Virgo-Hydra-Centaurus ($\alpha = 3 \dots 14$ ч, $\delta = -46 \dots 6^\circ$) для $N = 120$ радиогалактик [106].



Рис. 22: Композиционная идентификация диполя красного смещения радиогалактик и квазаров.



Рис. 23: Проверка гипотез о статистической однородности выборок радиогалактик.

помощью в 1998 году по данным [1] была обнаружена зависимость красного смещения в спектрах радиогалактик и квазаров от их звездных величин, угловых координат и угловых размеров [102]. Но тогда эти результаты развития не получили.

«ММК–стат М» ориентирован на начальные задачи математической статистики в классе многомерных математических моделей, т.е. на их структурно-параметрическую идентификацию в рамках интерполяционной концепции вероятности на основе обобщенного критерия Колмогорова и схемы перекрестного наблюдения погрешностей неадекватности при отсутствии достоверных данных о виде распределения вероятностей.

Схему перекрестного наблюдения в сочетании с критериями воспроизводимости можно рассматривать как способ регуляризации задачи в условиях статистической неоднородности, конфлюэнтности и стохастической мультиколлинеарности путем непосредственной проверки математических моделей на адекватность по погрешностям экстраполяции.

Другими словами, задача структурно-параметрической идентификации анизотропии характеристик положения диаграммы Хаббла по данным о красном смещении в спектрах радиогалактик и квазаров [1], которые рассматриваются как стандартизованные, может быть сведена к композиционной идентификации [77].

Единая доплеровская интерпретация анизотропии реликтового излучения [26, 20] и красного смещения [58] указывает на известную трудность решения рассматриваемой задачи для радиогалактик и квазаров, связанную с аналогией между низшими мультиполями спектра мощности реликтового излучения и диполем красного смещения. Такие решения были получены для 24 кластеров из перечня [10] по 120 радиогалактик и квазаров со смещением на 1 час по прямому восхождению при помощи системы «ММК-стат» [108].

По критерию минимума суммарной абсолютной погрешности неадекватности была

Таблица 15: Стандартные решения для диаграммы Хаббла.

Алгоритм	Радиогалактики	Квazarы
Linear Reg	$1.29400272 + 0.18884519 \cdot m$	$3.53624348 + 0.10514146 \cdot m$
Med-Med:	$1.15657422 + 0.19943534 \cdot m$	$2.33850079 + 0.17799605 \cdot m$

Таблица 16: Анизотропия красного смещения радиогалактик и квазаров.

N	α , часы	Состав кластера	Радиогалактики		
			Нуль-пункт	CAO, d	H_0 , $\text{км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$
172	0-23	—	1.102781368	0.1675391195	74.2
41	2-7	Super void	1.010846809	0.1939608458	60.04409401
55	8-14	Dipole ⁺	1.10316107	0.1580165622	74.26506365
39	15-21	ЦМП	1.167932969	0.1726058948	86.20976408
37	22-1	Dipole ⁻	1.163169039	0.1314588212	85.26926627

N	α , часы	Состав кластера	Квazarы		
			Нуль-пункт	CAO, d	H_0 , $\text{км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$
172	0-23	—	1.927545494	0.2713123928	74.2
41	2-7	Super void	1.994812783	0.2558856358	86.6305745
55	8-14	Dipole ⁺	1.882339956	0.2903283077	66.86492579
39	15-21	ЦМП	1.91629875	0.1750253695	72.30314055
37	22-1	Dipole ⁻	1.992599459	0.26001399	86.19019647

установлена кластеризация данных, которая позволила выделить в качестве статистической неоднородности диполь красного смещения (рис. 22). Это позволило для полного перечня [10] ($N = 172$ радиогалактики и $N = 201$ квазар) по данным 2009 года перепреопределения постоянной Хаббла в программе HSTKP [62] провести калибровку модуля расстояния: $M_{\text{МНК}} = -25.06$; $M_{\text{Мед}} = -25.29$.

Анализ алгоритмов структурно-параметрической идентификации на основе различных методов в схеме перекрестного наблюдения погрешности неадекватности показал, что предпочтительное решение для диаграммы Хаббла по данным [10] дает медианный алгоритм (Таблица 15), т.к. при этом оценка параметра наклона диаграммы ближе к стандартному значению 0,2 (рис. 23).

Протокол результатов решения задачи медианным алгоритмом дан в Таблице 16 с указанием CAO данных [10] от модели (3).

Заключение

Решение измерительной задачи идентификации анизотропии красного смещения галактик, радиогалактик и квазаров, которое следует рассматривать как иллюстрацию применения алгоритмов структурно-параметрической идентификации на основе схемы перекрестного наблюдения, показывает, что анизотропия красного смещения согласуется с диполем реликтового излучения и связана с крупномасштабной неоднородностью структуры Вселенной. При этом структурные различия зависимостей красного смещения для радиогалактик и квазаров в секторе апекса движения Солнца относительно реликтового излучения указывают на различия доплеровского вклада в красное этих объектов, что согласуется с гипотезой Х. Арпа.

Задача об анизотропии красного смещения могла быть решена по данным [10] методом композиционной идентификации [93] еще в 1988 году. Но тогда первоочередным был анализ причин катастрофического феномена 1985-1986 годов в авиационной, ракетно-космической и ядерно-энергетической технике [96], когда катастрофа Challenger 28 января 1986 года задержала эксперимент COBE и запуск Hubble Space Telescope на несколько лет [20].

Литература

- [1] Hubble E.P. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae // *Proc. Nat. Acad. Sci. (Wash.)*, 1929, V.15, p. 168.
- [2] Тамманн Г.А. Постоянная Хаббла и параметр ускорения. Космология. Теории и наблюдения. М., Мир, 1978, с. 70.
- [3] Baade W., Swope H. The Palomar survey of variables in M 31 // *Astronomical Journal*, 1955, V.60, p. 151.
- [4] Humason M.L., Mayall N.U., Sandage A.R. Red shift and magnitudes of extragalactic nebulae // *Astronomical Journal*, 1956, V.61, p. 97.
- [5] Sandage A.R. The distance scale // In «Problems in extragalactic research» ed. G. McVittie. New York, Macmillan, 1962.
- [6] Sandage A.R. A new determination of the Hubble constant from globular clusters in M87 // *Astrophysical Journal*, 1968, V.152, L.149.
- [7] Sandage A.R. The age of the galaxies and globular clusters, problems of finding the Hubble constant and deceleration parameter «Nuclei of galaxies» ed. D.K. O'Connell. Amsterdam: Pontifical academia science, 1971.
- [8] Willick J.A., Batra P. A determination of the Hubble Constant from Cepheid distances and a model of the local peculiar velocity field // *Astrophysical Journal*, 2001, V.548, p. 564.
- [9] Mattig W. Uber den Zusammenhang zwischen Rotverschiebung und scheinbaren Helligkeit // *Astronomische Nachrichten*, V.284, 1958, s. 109.
- [10] Ленг К. Астрофизические формулы. М., Мир, 1978.
- [11] Хойль Ф. Проверка космологии наблюдениями. Уилер Дж. Гравитация, нейтрино и Вселенная. М., ИЛ, 1962, с. 372.
- [12] Sandage A.R. Die Rotverschiebung. – «Das Universum»/Поликарпов А. Относительность и кванты. М., Прогресс, 1966, с. 288.
- [13] Левин С.Ф. Оптимальная интерполяционная фильтрация статистических характеристик случайных функций в детерминированной версии метода Монте-Карло и закон красного смещения. М., АН СССР, ИСК, 1980.
- [14] Mattig W. Uber den Zusammenhang zwischen der Anzahl der extragalaktischen Objekte und der scheinbaren Helligkeit // *Astronomischen Nachrichten*, V.285, 1959, s. 1.
- [15] Arp H. Peculiar Galaxies and Radio Sources // *Astrophysical Journal*, 1967, V.148, p. 321.
- [16] Бербидж Дж., Бербидж М. Квазары. М., Мир, 1969.
- [17] Faber S.M., Jackson R.E. // *Astrophysical Journal*, 1976, V.204, p. 668.
- [18] Tully R.B., Fisher J.R. // *Astronomy and Astrophysics*, 1977, V.54, p. 661.
- [19] Vaucouleurs G. de, Peters W.L. // *Astrophysical Journal*, 1985, V.297, p. 27.
- [20] Левин С.Ф. Метрологическая аттестация математических моделей в измерительных задачах гравитации и космологии/Теоретические и экспериментальные проблемы об-

- щей теории относительности и гравитации. X Российская гравитационная конференция. Тезисы докладов. М.: РГО, 1999, с. 245.
- [21] Adams W. S. Some results with Coude spectrograph of the Mount Wilson observatory // *Astrophysical Journal*, 1941, V.93, p. 11.
- [22] McKellar A. Molecular lines from the lowest states of diatomic molecules composed of atoms probably present in interstellar space // *Publication Dominion astrophysical observatory Victoria*, 1941, V.7, No 15, p. 251.
- [23] Gamov G. Expanding Universe and the origin of the elements // *Physical Review*, V.70, p. 572.
- [24] Шмаонов Т.А. Методика абсолютных измерений эффективной температуры радиоизлучения с низкой эквивалентной температурой // *Приборы и техника эксперимента*, 1957, №1, с. 83.
- [25] Penzias A.A., Wilson R.W. A measurement of excess antenna temperature at 4080 MHz // *Astrophysical Journal*, 1965, V.142, p. 419.
- [26] Партридж Б.Р. Крупномасштабная анизотропия космического микроволнового фона // *Космология: Теории и наблюдения*, М., Мир, 1978, с. 207.
- [27] Sachs R.K., Wolfe A.M. Perturbations of a Cosmological Model and angular variations of the microwave background // *Astrophysical Journal*, 1967, V.147, p. 143.
- [28] Silk J. Fluctuations in the primordial fireball // *Nature*, 1967, V.215, p. 11.
- [29] Шама Д.В. Современная космология. М., Мир, 1973.
- [30] Сажин М.В. Анизотропия и поляризация реликтового излучения. Последние данные // *УФН*, 2004, Том 174, №2, с. 197.
- [31] Sciama D.W. Peculiar velocity of the Sun and the cosmic microwave background // *Physical Review Letters*, 1967, V.18, p. 1065.
- [32] Smoot G.F., Gorenstein M.V., Muller R.A. Detection of anisotropy in the cosmic blackbody radiation // *Physical Review Letters*, 1977, V.39, p. 898.
- [33] Gorenstein M.V., Smoot G.F. Large-angular-scale anisotropy in the cosmic background radiation // *Astrophys. J.*, 1981, V.244, p. 361.
- [34] Lubin P. et al. A map of the cosmic background radiation at 3 millimeters // *Astrophysical Journal Letters*, 1985, V.298, L.1.
- [35] Микроволновой фон как «новый эфир». E-print: <http://slovari.jandex.ru/dict/krugosvet/article/b3/1009704.html>.
- [36] Tonry L.M., Davis M. // *Astrophysical Journal*, 1981, V.246, p. 680.
- [37] Aaronson M., Huchra J., Mould J., Schechter P.L., Tully R.B. // *Astrophysical Journal*, 1982, V.258, p. 64.
- [38] Kraan-Korteweg R.C. // *Astronomy and Astrophysics*, 1986, V.66, p. 255.
- [39] Dressler A., Faber S.M., Burstein D., Davies R.L., Lyndon-Bell D., Terlevich R.J., Wegner G. // *Astrophysical Journal*, 1987, V.313, L.37.
- [40] Linden-Bell D., Faber S.M., Burstein D., Davies R.L., Dressler A., Terlevich R.J., Wegner G. // *Astrophysical Journal*, 1988, V. 326, p. 219.
- [41] Mathewson D.S., Ford V.L., Buchhorn M. // *Astrophysical Journal Supplements*, 1992, V.81, p. 41.
- [42] Hudson M.J. // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1994, V.266, p. 475.
- [43] Lauer T.R., Postman M. // *Astrophysical Journal*, 1994, V.425, p. 418.
- [44] Giovanelli R., Haynes M.P., Freudling W., da Costa L.N., Salzer J.J., Wegner G. // *Astrophysical Journal*, 1998, V.505, L.91.

- [45] Giovanelli R., Haynes M.P., Salzer J.J., Wegner G., da Costa L.N., Freudling W. // *Astronomischer Jahresberichten*, 1998, V.116, P. 2632.
- [46] Hudson M.J., Smith R.J., Lucey J.R., Schlegel D.J., Davies R.L. // *Astrophysical Journal*, 1999, V.512, L.79.
- [47] Dekel A., Eldar A., Kolatt T., Yahil A., Willick J.A., Faber S.M., Courteau S., Burstein D. // *Astrophysical Journal*, 1999, V.522, p. 1.
- [48] Kraan-Korteweg R.C., Lahav O. Galaxies behind the Milky Way. – Scientific American. E-print: <http://www.astro.spbu.ru/homepages/viva/Book/Galaxies/>.
- [49] Kraan-Korteweg R.C. et al. A nearby massive cluster behind the Milky Way // *Nature*, 1996, V.370, p. 519.
- [50] Karachentsev I.D. et al. // *Astronomische Zeitschrift*, 2000, V.77, p. 175.
- [51] Макаров Д.И. Движения галактик на больших и малых масштабах/Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Н. Архыз: CAO РАН, 2000.
- [52] Сажин М.В. Анизотропия и поляризация реликтового излучения. Последние данные // *УФН*, 2004, Том 174, №2, с. 197.
- [53] Левин С.Ф. Метод максимума компактности и комплексные измерительные задачи // *Измерительная техника*, 1995, №7, с. 15.
- [54] Левин С.Ф., Блинов А.П. Научно-методическое обеспечение гарантированности решения метрологических задач вероятностно-статистическими методами // *Измерительная техника*, 1988, №12, с. 5.
- [55] Р 50.2.004–2000 ГСИ. Определение характеристик математических моделей зависимостей между физическими величинами при решении измерительных задач. Основные положения.
- [56] Смут Дж.Ф. Анизотропия реликтового излучения: открытие и научное значение // *УФН*, 2007, Т.177, №12, с. 1294.
- [57] Freedman W.L. et al. Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant // *Astrophysical Journal*, 2001, V.553, p. 47.
- [58] Spergel D.N. et al. First-year WMAP observations: Determination of cosmological parameters // *Astrophysical Journal Supplements*, 2003, V.148, p. 175.
- [59] Sandage A.R. et al. The Hubble Constant: A Summary of the HAST Program for the Luminosity Calibration of Type Ia Supernovae by Means of Cepheid's // *Astrophysical Journal*, 2006, V.653, p. 843.
- [60] Leeuwen van F. et al. Cepheid parallaxes and the Hubble Constant. – Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. E-print: arXiv: astro-ph/0705.1592v1.
- [61] Dunkley J. et al. Five-year WMAP observation: Likelihoods and Parameters from the WMAP data. – Astrophysical Journal Supplements. E-print: arXiv: astro-ph/0803.0586v2.
- [62] Riess A.G. et al. A redetermination of the Hubble constant with the Hubble space telescope from a differential distance ladder. E-print: arXiv: astro-ph/0905.0695v1.
- [63] Blake C., Wall J. A velocity dipole in the distribution of radio galaxies // *Nature*, 2002, V.416, P. 150 (Blake C., Wall J. Detection of the velocity dipole in the radio galaxies of the NRAO VLA Sky Survey. – [arXiv:astro-ph/0203385v1]).
- [64] Караченцев И.Д., Митронова С.Н. Пекулярные скорости плоских спиральных галактик 2MASS обзора в объеме 100 Мпс/Отчет 2004-2005 гг. Н.Архыз: CAO РАН, 2005, с. 42.

- [65] McClure M.L., Dyer C.C. Anisotropy in the Hubble constant as observed in the HST Extragalactic distance scale Key Project results // *New Astronomy*, 2007, V. 12, p. 533.
- [66] Кривонос Р.А. Жесткое рентгеновское излучение на больших угловых масштабах – фоновое излучение Галактики и внегалактический фон Вселенной/Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М., ИКИ РАН, 2007.
- [67] Saunders W. et al. // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2000, V.317, p. 55.
- [68] Castelvecchi D. Galaxies on the Move: Scientists detect a mysterious flow of galactic clusters // *Science News*. 2008, V.174, No 9, p. 12.
- [69] Jarosik N. et al. Three-year WMAP observation: beam profiles, data processing, radiometer characterization and systematic error limits // *Astrophysical Journal Supplements*, 2007, V.170, p. 263. E-print: arXiv: astro-ph/0603452
- [70] Hinshaw G. et al. Five-year WMAP observations: Data Processing, Sky Maps Basic Results // *Astrophysical Journal Suppl.*, E-print: arXiv:0803.0732v2
- [71] CNews/ru: Обнаружен новый аналог «оси Зла». 16.05.06. <http://www.techportal.ru/img/db/14147.jpg>.
- [72] Gurzadyan V.G. et al. Lowering the Light Speed Isotropy Limit: European Synchrotron Radiation Facility Measurements // *УФН*, 2007, № 2; E-print: arXiv:astro-ph/0701127v2.
- [73] IMG: Ключ к загадке «Оси Зла» лежит в созвездии Эридана. <http://pick.rbc.ru/img/cnews/2007/08/27/eridan1.jpg>.
- [74] Левин С.Ф. Математическая теория измерительных задач. Метод совместных измерений // *Контрольно-измерительные системы и приборы*, 2006, № 3, с. 23; № 4, с. 32; № 5, с. 33.
- [75] Jones D.H. et al. The 6dF Galaxy Survey: Final Redshift Release (DR3) and Southern Large-Scale Structures. – *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 31 March 2009.
- [76] Dunkley J. et al. Five-year WMAP observation: Bayesian estimation of CMB Polarization maps // *Astrophysical Journal Suppl.*, E-print arXiv: astro-ph/0811.4280v1.
- [77] Прохоров М.Е. Три года наблюдений WMAP. <http://www.astronet.ru/db/msg/1212514>.
- [78] Левин С.Ф. Обеспечение единства измерений при испытаниях средств измерений // *Измерительная техника*, 2008, № 10, с. 13.
- [79] Левин С.Ф., Ковальчук В.Ф., Кондрашев А.А., Кульбий Л.А. Анализ спектра амплитудной модуляции короткого ряда импульсов медианными алгоритмами метода максимума компактности//Сб. тезисов докладов 9-й Всесоюзной конференции по теории кодирования и передачи информации. Часть 2. – Одесса, АН СССР, 1988, с. 298.
- [80] Левин С.Ф. Математическая теория измерительных задач. Измерительные задачи спектрального анализа // *Контрольно-измерительные приборы и системы*, 2001, №3, с. 20.
- [81] Komatsu E. et al. First Year WMAP observations: Tests of Gaussianity. // *Astrophysical Journal Suppl.*, 2003, V.148, p. 119.
- [82] Хьюбер П. Робастность в статистике. М.: Мир, 1984.
- [83] Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. М.: Финансы и статистика, 1983.
- [84] Chiang L.-Y. et al. Non-Gaussianity of the Derived Maps from the First-Year WMAP Data // *Astrophysical Journal*, 2003, V.590. L.65.

- [85] Верходанов О.В. Методы и результаты наблюдательной космологии/Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Н. Архыз: САО РАН, 2006.
- [86] Colley W.N., Gott J.R. Genus Topology of the Cosmic Microwave Background from WMAP. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2003, V.344, p. 686.
- [87] Vielva P. et al. Detection of non-Gaussianity in the WMAP First-year data using spherical wavelets // *Astrophysical Journal*, 2004, V.609, p. 22.
- [88] Eriksen H.K. et al. Testing for non-Gaussianity in the WMAP Data: Minkowski Functionals and the Length of the Skeleton // *Astrophysical Journal*, 2004, V.612, p. 64.
- [89] Левин С.Ф. Легенда о неравноточности // *Партнеры и конкуренты*, 2000, № 3, с. 19.
- [90] Что измерил WMAP. E-print: <http://www.astronet.ru/db/msg/1187213>.
- [91] Хампель Ф. и др. Робастность в статистике. Пер. с англ. М., Мир, 1989.
- [92] Грешилов А.А. Анализ и синтез стохастических систем. М., Радио и связь, 1990.
- [93] Вучков И., Бояджиева Л., Солаков Е. Прикладной линейный регрессионный анализ. М., Финансы и статистика, 1987.
- [94] Komatsu E. et al. Five-year WMAP observations: Cosmological interpretations // *Astrophysical Journal*, 2008, E-print: arXiv: astro-ph/0803.0547v2.
- [95] International Vocabulary of Metrology: Basic and General Concepts and Associated Terms/3rd edition. – Final 2007-05-18. JCGM/WG 2. Document N 341.
- [96] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Sec. Ed. – Geneva: BIMP, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, 1995 (Руководство по выражению неопределенности измерения. – СПб: ВНИИМ имени Д.И. Менделеева, 1999).
- [97] ГОСТ Р 50779.10-2000 Статистические методы. Вероятность и основы статистики. Термины и определения.
- [98] ГОСТ Р ИСО 16269-6-2005 Статистические методы. Статистическое представление данных. Определение статистических толерантных интервалов.
- [99] МИ 2916-2005 ГСИ. Идентификация распределений вероятностей при решении измерительных задач.
- [100] Сб. «Российская метрологическая энциклопедия». СПб., «Лики России», 2001.
- [101] Melnikov V.N. Fundamental physical constants and multidimensional black holes. – *Gravitation Cosmology*, 2000, V.6, No 22, p. 81.
- [102] Бронников К.А., Константинов М.Ю., Мельников В.Н. Сравнительный анализ проектов космических экспериментов по определению гравитационной постоянной. // *Измерительная техника*, 1996, №5.
- [103] ГОСТ Р ИСО 16269-6-2005 Статистические методы. Статистическое представление данных. Определение статистических толерантных интервалов.
- [104] ГОСТ Р 50779.21-2004. Статистические методы. Правила определения и методы расчета статистических характеристик по выборочным данным. Часть 1. Нормальное распределение.
- [105] МИ 1317-2004 ГСИ. Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроле их параметров.
- [106] Arp H. Quasars, Red Shifts and Controversies. – Berkeley: Cambridge University Press, 1989.
- [107] CNews.ru: Главные новости. «Ось Зла»: неожиданный поворот. – <http://cnews.ru/top/print.shtml/2007/11/13/274773/>.

- [108] Levin S.F. On spatial anisotropy of red shift in spectrums of ungalaxy sources. – Physical Interpretations of relativity Theory/Proc. of XV International Scientific Meeting PIRT-200. Moscow, 6-9 July, 2009, M., BMSTU, 2009, p. 234.
- [109] Efstathiou G. The Statistical Significance of the Low CMB Multipoles. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* E-print: arXiv: astro-ph/0306431v3.
- [110] Kesden M., Kamionkowski M., Cooray A. Can Cosmic Shear Shed Light on Low Cosmic Microwave Background Multipoles? E-print: arXiv:astro-ph/0306597v2.
- [111] Караченцев И.Д., Чернин А. Острова в океане тёмной энергии. http://wsyachina.narod.ru/astronomy/dark_energy_4.html.
- [112] Sandage A., Tammann G.A. // *ApJ*, 1982, V. 256, p. 339.
- [113] Capaccioli M., Cappellaro E., della Valle M., D'Onofrio M., Rosino L., Turatto M. // *ApJ*, 1990, V. 350, p. 110.
- [114] Tripp R., Branch D. // *ApJ*, 1999, V. 525, p. 209.
- [115] Hoeflich P., Khokhlov A. // *ApJ*, 1996, V. 457, p. 500.
- [116] Kelson D. et al. // *ApJ*, 2000, V. 529, p. 768.
- [117] Saunders W., et al. // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2000, V. 317, p. 55.
- [118] Freedman W.L., Kennicutt R.C., Mould J.R. Measuring the Hubble constant with the Hubble space telescope. E-print: arXiv: astro-ph/0910.5775v1.

ANISOTROPY OF RED SHIFT

S.F. Levin

Moscow Institute for expertise and tests, Moscow, Russia

info@rostest.ru, antoninaEL@rostest.ru

Statistical and metrological aspects of measurement date analysis problem for research of anisotropy of radiation of extra galaxies source have been considered. As illustrated in the review, the reason for dipoles anisotropy of cosmic background radiation and red shift of galaxies, radio galaxies and quasars is large-scale of universe heterogeneity.

Key Words: anisotropy, red shift, cosmic microwave background.

О ВОЗМОЖНОМ ОТКЛОНЕНИИ РЕГИСТРИРУЕМОЙ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ОТ СКОРОСТИ СВЕТА В ВАКУУМЕ

В.О. Гладышев

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

vgladyshev@mail.ru

Показано, что для фундаментальных взаимодействий, распространяющихся в пространстве независимых переменных, результаты измерительной процедуры, построенной на измерении частных дифференциалов преобразований, зависят от скорости лабораторной ИСО относительно пространства распространения взаимодействий. Дана возможная интерпретация нарушения инвариантности на детекторе OPERA и в эксперименте по измерению времени регистрации нейтринного всплеска от SN1987A нейтринными и гравитационно-волновыми детекторами. Предложен способ оценки анизотропии пространства. Он основан на измерении вариаций сигнала при изменении ориентации лабораторной установки в пространстве. Отмечено, что наиболее эффективным способом определения параметра анизотропии является эксперимент SADE, предложенный в работах [1, 2] и заключающийся в поиске пространственной анизотропии по результатам интерферометрической регистрации скорости распространения электромагнитного излучения во вращающемся оптическом диске.

Ключевые слова: фундаментальные взаимодействия, анизотропия пространства, скорость нейтрино, системы отсчета, преобразования координат, замедление времени.

Введение

В последнее время широко обсуждается проблема измерения скорости распространения нейтрино в связи с результатами, полученными на детекторе OPERA (Oscillation Project with Emulsion-tRacking Apparatus), который находится на глубине 1400 метров под итальянскими Апеннинскими горами в подземной лаборатории Гран-Сассо (Laboratori Nazionali del Gran Sasso) [3].

Проблема заключается в том, что до последнего времени считалось, что скорость света в вакууме — предельная скорость распространения физических сигналов, что является результатом обобщения принципа относительности и постулата о постоянстве скорости света.

Предельность скорости распространения фундаментальных физических взаимодействий и ее постоянство являются до настоящего времени краеугольными камнями современных представлений о пространстве-времени.

Поэтому для нас важным является ответ на вопрос, может ли в эксперименте наблюдаться отклонение скорости распространения частиц — переносчиков фундаментальных взаимодействий от скорости света в вакууме при одновременном сохранении принципа предельности скорости.

Оказывается, что в некоторых типах экспериментов измеренное значение скорости может отличаться от реального.

Отличие реальной скорости от экспериментальной само по себе вполне допустимо. Например, в работах [4,5] было показано, что при определенном наборе параметров временное положение максимума оптического отклика резонатора Фабри-Перо опережает максимум гравитационно-волнового квазипериодического сигнала. Для наблюдателя регистрация

отклика гравитационно-волнового детектора, который опережает сигнал, распространяющийся со скоростью света в вакууме, воспринимается как сверхсветовая скорость передачи сигнала. Однако, парадокс убедительно объясняется интерференционной природой оптического отклика.

Существует и другое объяснение сверхсветовых скоростей, наблюдаемых в эксперименте.

Если эксперимент проводится с использованием ИСО, движущихся друг относительно друга, или в неинерциальной СО, а также при наличии в опыте движущихся элементов или сред, с которыми взаимодействует излучение при распространении, могут проявляться неинвариантные свойства преобразований [6,7], в результате чего измеряемая скорость распространения сигнала может отличаться от истинной.

При описании подобных экспериментов в ИСО наблюдателя потребуется использование преобразований 4-координат событий. При рассмотрении процесса, происходящего во времени, необходимо найти полный дифференциал функции нескольких переменных, содержащий все частные производные исходного преобразования. Если какую-либо переменную удерживать постоянной, то член с соответствующей частной производной будет равен нулю и при переходе к другой ИСО мы получим для сохранения инвариантности формы дифференциала новые преобразования. В противном случае, используя известные преобразования для полного дифференциала, мы получим для неполного дифференциала в новой ИСО другую форму, что будет означать отказ от инвариантности.

Однако, в общем случае, в физическом эксперименте измерение неполного дифференциала является часто реализуемой процедурой. Например, когда мы измеряем интервалы времени синхронизированных часов, покоящихся в различных движущихся ИСО, то мы можем сравнить эти интервалы благодаря преобразованию частных дифференциалов общих преобразований, в которых частные производные координат равны нулю. К этому типов экспериментов относится сравнение времени жизни мезонов, движущихся в атмосферном ливне, и мезонов, рожденных в лабораторной ИСО. В подобных экспериментах производится сравнение мгновенных показаний часов (например, длительности усредненного по множеству частиц элементарного акта распада частицы) в различных ИСО.

Физическое происхождение отличия преобразований для полных преобразований, в которых обнуляются некоторые переменные, и преобразований частных дифференциалов можно пояснить следующим путем.

В первом случае частные производные, стоящие перед дифференциалами переменных, зависят от поворота в 4-пространстве и для двух произвольных движущихся ИСО, соответствующих двум поворотам в исходном пространстве-времени, являются физически взаимозависимыми. Хотя, разумеется, с точки зрения математической зависимости любое новое 4-пространство будет построено на независимых переменных.

Во втором случае т.к. мы осуществляем лишь перенормировку одного масштаба, смешение переменных не возникает и частные дифференциалы физических переменных в различных ИСО являются строго независимыми.

Другими словами, если в первом случае замедление времени движущихся часов может частично компенсироваться их смещением, то во втором случае этого не может произойти в принципе.

Безусловно, и в том и в другом случае выражения для полных дифференциалов должны иметь инвариантную форму.

Здесь можно указать на эксперимент по измерению времени регистрации нейтринного всплеска от SN1987A нейтринными и гравитационно-волновыми детекторами, в котором была измерена аномально большая задержка времени регистрации сигнала разнесенными детекторами [8, 9]. Вспышка была зарегистрирована гравитационными антеннами в Мэриленде и Риме, а также нейтринным детектором в Монте-Бланке, имеющими привязку к

всемирному времени. Показания детекторов имеют корреляцию в течение 2 часов с отставанием сигнала, записанного нейтринным детектором, на 1.1 с. Вероятность случайного совпадения показаний составляет 10^{-5} .

Очевидно, что даже незначительное отклонение скорости распространения нейтрино от скорости света привело бы к тому, что разность времен регистрации сигналов оптическими телескопами, а также нейтринными и гравитационными детекторами вследствие большого расстояния между излучателем и приемником имела бы на порядки большие значения, чем то, что наблюдалось.

Кроме того, измеренная задержка времени регистрации сигнала, распространяющегося со скоростью света в вакууме в любой ИСО, не может быть объяснена временем запаздывания сигнала при распространении между детекторами и приводит к необходимости анализа используемой измерительной процедуры и соответствующих преобразований координат.

Используемая в данном эксперименте измерительная процедура построена на сравнении мгновенных значений собственных параметров физических процессов (собственного времени разнесенных часов) в различные моменты времени и основана на процедуре синхронизации удаленных часов. Это приводит к необходимости получения преобразований, которые могут применяться в случае процедуры сравнения мгновенных значений собственных параметров в различных движущихся ИСО в различные моменты времени.

Подобные преобразования точно согласуются с результатами преобразований используемой группы относительно исходной ИСО, имеют согласие с известными экспериментами и могут быть использованы при расширении группы Лоренца.

1 Сравнение мгновенных значений собственных параметров физических процессов

Рассмотрим преобразования, построенные на независимых переменных x_0^i в некоторой исходной ИСО. Пусть соотношения для дифференциалов dx_1^i , dx_2^i в двух произвольных движущихся с различными скоростями ИСО имеют вид

$$dx_0^i = \frac{\partial f_{1,2}^i}{\partial x_{1,2}^k} dx_{1,2}^k, \quad i, k = 0, 1, 2, 3. \quad (1)$$

Преобразования, соответствующие переменным $x_{1,2}^i$, могут быть получены из требования инвариантности интервала. Для соответствующих дифференциалов получим

$$dx_1^i = \frac{\partial f_0^i}{\partial x_2^k} dx_2^k \quad (2)$$

Построим преобразования с дифференциалами вида (2), удерживая переменные времени и координат независимыми. Для простоты рассмотрим ортогональные преобразования, с точностью до поворота удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} dx_1^\mu &= \frac{\partial f^\mu}{\partial x_2^\nu} dx_2^\nu, & \mu, \nu &= 0, 1 \\ dx_1^\alpha &= dx_2^\beta, & \alpha, \beta &= 2, 3 \end{aligned} \quad (3)$$

Преобразования для (1), (2) имеют аналогичный вид.

Будем полагать поочередно $dx_{1,2}^\nu = 0$ для $\nu = 0$ и $\nu = 1$. Тогда, совместное решение (1) приведет к выражениям

$$\frac{\partial f^\mu}{\partial x_2^\mu} = \frac{\partial f_2^\mu}{\partial x_2^\mu} \left(\frac{\partial f_1^\mu}{\partial x_1^\mu} \right)^{-1} \quad (4)$$

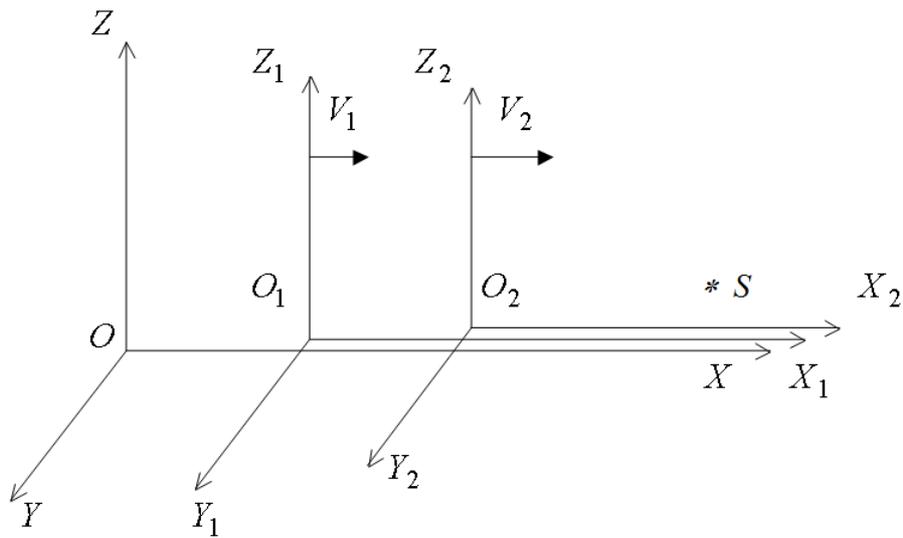


Рис. 1: Случай параллельного движения двух ИСО со скоростями относительно некоторой исходной ИСО

Введем величины α_μ , удовлетворяющие равенствам

$$\frac{\partial f^\mu}{\partial x_2^\mu} = \frac{\partial f_0^\mu}{\partial x_2^\mu} + \alpha_\mu \quad (5)$$

После подстановки в (2) получим для $\mu \neq \nu$

$$\frac{\partial f^\mu}{\partial x_2^\nu} dx_2^\nu = \frac{\partial f_0^\mu}{\partial x_2^\nu} dx_2^\nu - \alpha_\mu dx_2^\mu \quad (6)$$

Так как в левой части находится дифференциал фиксированной независимой переменной в каждом из уравнений (6) справа должна быть та же переменная, откуда следует, что

$$\frac{\partial f^\mu}{\partial x_2^\nu} = \frac{\partial f_0^\mu}{\partial x_2^\nu} - \alpha_\mu \quad (7)$$

Величины α_μ могут быть найдены из (5) и (4), поэтому частные производные искомым преобразований определяются однозначно.

Для иллюстрации неинвариантных свойств частных дифференциалов рассмотрим случай параллельного движения относительно некоторой исходной ИСО (рис. 1).

Преобразования координат в этом случае имеют вид:

$$x^\alpha = g_{\beta i}^\alpha x_i^\beta, \quad (8)$$

$$i = 1, 2, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$$

где

$$g_{\beta i}^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma_i & 0 & 0 & \gamma_i V_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma_i \frac{V_i}{c^2} & 0 & 0 & \gamma_i \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\gamma_i = (1 - \beta_i^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta_i = V_i/c$$

Относительная скорость движения ИСО_i может быть измерена в любой из движущихся ИСО и соответствует выражению

$$V_0 = \frac{V_2 - V_1}{1 - V_1 V_2 / c^2} \quad (10)$$

Используя (10), можно получить преобразования координат между двумя произвольными ИСО_i:

$$x_1^\alpha = g_{\beta 0}^\alpha x_2^\beta \quad (11)$$

где $g_{\beta 0}^\alpha$ включает $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{\frac{1}{2}}$, $\beta_0 = V_0/c$, V_0 — относительная скорость движения ИСО_i.

Если мы хотим сравнить собственные интервалы времени, отсчитываемые часами в двух произвольных ИСО_i, это можно сделать следующими путями. В первом случае можно взять дифференциал из (8)

$$dx^\alpha = g_{\beta i}^\alpha dx_i^\beta, \quad (12)$$

и положить $dx_i^\beta = 0$ при $\beta = 1, 2, 3$, считая часы T_i покоящимися в ИСО_i. Тогда, получив два соотношения

$$dx^4 = \gamma_i dx_i^4, \quad (13)$$

и исключив dx^4 , с учетом (10) можно получить

$$dx_1^4 = \gamma_0 (1 + \beta_0 \beta_1) dx_2^4. \quad (14)$$

Второй путь заключается в том, что мы берем дифференциал для (11) и получаем, положив $dx_2^\beta = 0$ при $\beta = 1, 2, 3$, соотношение

$$dx_1^4 = \gamma_0 dx_2^4. \quad (15)$$

Полученные соотношения (14) и (15) соответствуют различным измерительным процедурам.

Заметим, что те же рассуждения можно сделать для пространственных координат. В этом случае соотношения для дифференциалов соответствуют сравнению длины стержней, покоящихся в различных ИСО.

Таким образом, результат анализа зависит от того, какую ИСО можно считать исходной, относительно которой преобразования координат связывают физически независимые величины.

Предположим, что выбранная ИСО обладает такими свойствами. Тогда для сравнения собственных интервалов времени часов T_i , покоящихся в двух произвольных ИСО_i, мы можем использовать (14) после перехода от дифференциалов dx_i^4 к конечным приращениям Δx_i^4 . Последний переход мы всегда можем сделать, т.к. преобразования являются линейными.

На рис. 2 изображена зависимость отношения измеренных в различных ИСО приращений времени $\Delta t_1/\Delta t_2$ (в используемых выше обозначениях $\Delta x_1^4/\Delta x_2^4$) от модуля параметра относительной скорости часов $|\beta_0|$ при $\beta_1 = 0, 2$ и при $\beta_1 = 0$ (пунктир).

Из рис. 2 видно, что при $\beta_0 = 0$ (т. "a") собственные интервалы времени часов T_i равны. В случае, когда $\beta_0 = -\beta_1$ (т. "b"), часы T_2 покоятся в исходной ИСО, поэтому $\Delta t_2 > \Delta t_1$ и график имеет экстремум (min). В т. "c" часы T_2 движутся в исходной ИСО со скоростью $-\beta_1$, т.е. аналогично часам T_1 , но в противоположную сторону. Этому случаю соответствует относительная скорость движения $V_0 = -2V_0/(1 - \beta_1^2)$ и $\Delta t_1 = \Delta t_2$.

В результате мы приходим к выводу, что если часы T_2 покоятся относительно T_1 , интервал времени, отсчитываемый ими, не является максимальным, т.к. ИСО₁ движется относительно исходной ИСО.

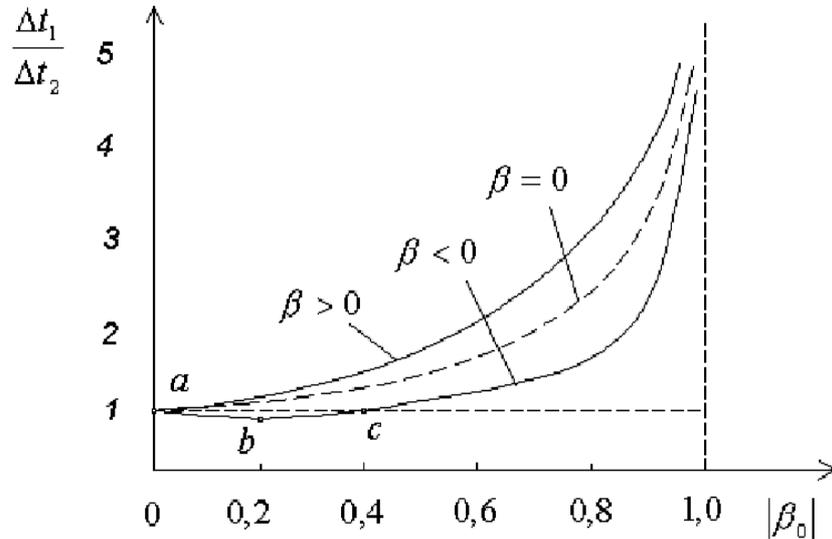


Рис. 2: Зависимость $\Delta t_1/\Delta t_2$ от модуля параметра относительной скорости часов $|\beta_0|$ при $\beta_1=0, 2$ и при $\beta_1 = 0$ (пунктир).

Для того чтобы понять физический источник происхождения Лоренц-инвариантной формы преобразований (11), (12), необходимо найти причину отсутствия в этих формулах дополнительного члена с $\beta_0\beta_1$, возникающего в (14).

Рассмотрим процедуру измерения времени распространения светового сигнала от источника S к T_2 .

Пусть в момент $x_2^4 = 0$ источник S посылает световой сигнал в направлении T_2 . В момент получения сигнала часы T_2 отсчитают время dx_2^4 . По часам T_1 этому процессу будет соответствовать интервал dx_1^4 .

Рассмотрим два случая: в первом из них T_1 имеют $V_1 = 0$, что позволяет использовать (15), а во втором — $V_1 \neq 0$ и тогда справедливо выражение (14).

Отличие в соотношениях частных дифференциалов (14) и (15) равно

$$\delta x_1^4 = \gamma_0 \beta_0 \beta_1 dx_2^4 \quad (16)$$

Поясним кинематический смысл дополнительного члена δx_1^4 . Величина $\beta_0 \beta_1 dx_2^4$ есть интервал времени по часам T_2 , необходимый световому сигналу, чтобы преодолеть расстояние, на которое переместятся T_1 за время распространения света от T_2 к T_1 . Умножение на γ_0 дает тот же интервал, но измеренный по часам T_1 .

Следовательно, δx_1^4 — величина, на которую уменьшается интервал времени, отсчитываемый движущимися часами T_1 при распространении сигнала от T_2 к T_1 .

С другой стороны, δx_1^4 является результатом дополнительного эффекта замедления хода часов T_2 относительно хода движущихся часов T_1 , как это следует из (14).

Из того, что в преобразованиях частных дифференциалов (14) присутствует дополнительный член, а в (15) и в преобразованиях (11) он отсутствует, вытекает точное равенство величины дополнительного эффекта замедления часов T_2 кинематическому эффекту уменьшения времени распространения светового сигнала от T_2 к T_1 благодаря смещению T_1 в исходной ИСО.

Согласно данному выводу можно представить некоторое физическое пространство (ФП) 4-х независимых переменных с множеством покоящихся в нем ИСО, в которых скорость света, в общем случае, находится из решения соответствующих дисперсионных

уравнений для конкретного распределения среды и ее скорости. Относительно этих ИСО можно задать бесконечное множество движущихся ИСО, переход к которым осуществляется преобразованиями Лоренца с соответствующими частными дифференциалами. В силу точной компенсации эффектов замедления времени и кинематического эффекта изменения интервала времени распространения светового сигнала между часами произвольно движущихся ИСО, измеряемая скорость распространения фундаментальных взаимодействий в движущихся ИСО без учета среды также равна c .

Таким образом, существование неинвариантных свойств частных дифференциалов позволяет ввести понятие физического пространства, представляющего собой совокупность покоящихся друг относительно друга ИСО, относительно которых можно записать преобразования пространства-времени, связывающие переменные исходных ИСО с переменными любой другой движущейся ИСО.

Приведенные выше рассуждения относились к случаю плоского пространства и параллельного движения ИСО вдоль выбранной оси. Для решения пространственных задач необходимо использовать общие преобразования 4-мерного пространства [6,7]. Подчеркнем, что искомые преобразования удовлетворяют Лоренц-инвариантности, дают правильную форму для соотношений частных дифференциалов, удовлетворяют постулату о постоянстве измеряемой скорости света и имеют согласие с известными экспериментами.

Подобный анализ приводит к следующему выводу. Если в природе реализуется физическое пространство и соответствующее ему множество покоящихся ИСО, относительно которого для всех движущихся ИСО выполняются (1), и в этом пространстве координаты x_0^i независимы, то для любых двух движущихся ИСО преобразования дифференциалов физически независимых координат будут отличаться от (1). Таким образом, если фундаментальные взаимодействия распространяются в данном ФП, то результаты измерительной процедуры, построенной на измерении частных дифференциалов величин, входящих в преобразования координат, будет зависеть от скорости той или иной ИСО относительно пространства распространения взаимодействий.

Именно этот момент в наших рассуждениях может объяснить, почему при постоянной скорости распространения фундаментальных физических взаимодействий может наблюдаться экспериментальное отличие в наблюдаемой скорости передачи сигналов.

Величину рассогласования координат пространства распространения фундаментальных физических взаимодействий и реального пространства, в котором проводятся измерения, можно связать с параметром анизотропии, который будем интерпретировать как числовой коэффициент, пропорциональный скорости движения ИСО пространства наблюдений относительно ИСО, в которой дипольная составляющая реликтового излучения равна нулю, т.е. в ФП. Заметим, что анизотропность наблюдаемых свойств Вселенной установлена достоверно на основе изучения процессов разной физической природы [10-12].

2 Расчет собственного интервала времени равноускоренных часов относительно движущейся ИСО

В качестве качественной иллюстрации применимости полученных преобразований рассмотрим задачу расчета собственного интервала времени для часов, равноускоренных относительно часов неподвижных и движущихся в исходной ИСО со скоростью v_1 .

Если движение происходит вдоль некоторой оси в соответствии с (8) для $x_1^0 = ct_1$, $x_2^0 = ct_2$ можно записать

$$t_2 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dt_1}{g_1^1(t_1)} \quad (17)$$

Выражение для g_1^1 является функцией t_1 , так как для равноускоренного движения

$$\beta(t_1) = \frac{\omega_0 t_1 / c}{\sqrt{1 + \omega_0^2 t_1^2 / c^2}} \quad (18)$$

здесь ω_0 — измеренная величина ускорения часов.

Возьмем $\tau_1 = 0$ и введем обозначение $\tilde{p} = \frac{\omega_0 t_1}{c}$, $p = \frac{\omega_0 \tau_2}{c}$. Тогда (17) примет вид

$$t_2 = \frac{c}{\omega} \int_0^p \frac{\sqrt{1 - \beta^2(\tilde{p})} d\tilde{p}}{1 + \beta_1 \beta(\tilde{p})} \quad (19)$$

Перейдем к переменной β и после преобразований получим

$$t_2 = \frac{c}{\omega} \frac{1}{1 - \beta_1^2} [J_1 - J_2], \quad (20)$$

где

$$J_1 = \int_0^{\beta_2} \frac{1 - \beta_1 \beta}{1 - \beta} d\beta, \quad J_2 = \int_0^{\beta_2} \frac{\beta_1^2}{1 - \beta_1 \beta} d\beta, \quad (21)$$

$$\beta_2 = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Так как интегралы J_1 , J_2 сводятся к табличным, решение (21) имеет вид

$$t_2(\beta_1, p) = \frac{c}{\omega_0} \frac{1}{1 - \beta_1^2} \ln \left| \frac{p + \sqrt{1 + p^2}}{(\beta_1 p + \sqrt{1 + p^2})^{\beta_1}} \right|. \quad (22)$$

Данное выражение содержит параметр β_1 , что является следствием неинвариантности неполного дифференциала для преобразований, нелинейных относительно скорости ИСО.

Найдем t_2 в пределе, когда $\beta_1 \rightarrow 1$:

$$t_2 = \frac{c}{2\omega_0} \left(\ln \left| p + \sqrt{1 + p^2} \right| + \frac{p}{p + \sqrt{1 + p^2}} \right) \quad (23)$$

При длительном измерении $p \gg 1$ и мы получаем выражение

$$t_2 \cong \frac{1}{2} \frac{c}{\omega_0} \ln 2p. \quad (24)$$

отличающееся коэффициентом $1/2$ от выражения при $\beta_1 = 0$.

Следовательно, часы, движущиеся равноускоренно относительно лабораторной ИСО, имеющей некоторую скорость в пространстве распространения фундаментальных взаимодействий, будут идти более медленно, чем в том случае, если движение происходит относительно неподвижной ИСО.

Вернемся теперь к прогнозированию результатов эксперимента. Разумеется, что указанное отличие в показаниях часов можно обнаружить только при выполнении определенных метрологических процедур. Необходимо точно выполнить процедуру синхронизации, иметь независимое определение скорости движения и расстояния до движущегося объекта (часов). В противном случае полученный результат может содержать неопределенность, которую можно отождествить с параметром анизотропии пространства.

3 Оценка времени задержки регистрации сигнала наземными удаленными детекторами

Рассмотрим теперь процедуру измерений, имеющую практическое значение при регистрации астрофизического сигнала различными детекторами. Данная процедура реализована в эксперименте по регистрации нейтринного сигнала от SN1987A разносенными детекторами [8, 9], а также в эксперименте на детекторе OPERA [3].

Пусть детекторы космического излучения D_1, D_2 покоятся в некоторой ИСО на расстоянии l друг от друга. На прямой, соединяющей детекторы, расположена служба времени S , которая характеризуется расстояниями l_1, l_2 до D_1, D_2 .

Будем считать, что данная ИСО имеет скорость \vec{V}_1 , сонаправленную с вектором $\overrightarrow{D_1 D_2}$ относительно исходной ИСО пространства распространения взаимодействий. Для этого случая разность времени прихода сигналов от S к D_1, D_2 равна

$$\delta t_1 = \frac{\Delta l + l\beta_1}{c(1 - \beta_1^2)} \quad (25)$$

где $\Delta l = l_1 - l_2$, а выражение является форминвариантным.

Пусть плоский волновой фронт космического излучения, имеющего скорость c в исходной ИСО, образует угол α с вектором $\overrightarrow{D_1 D_2}$ в ИСО детекторов. Тогда, разность времени прихода сигнала в D_1, D_2 рассчитывается по формуле

$$\Delta t_1 = \frac{l \sin \alpha}{c(1 - \beta_1 \sin \alpha)} \quad (26)$$

Сумма $\delta t_1 + \Delta t_1$ дает общую разность времени прихода сигнала с учетом синхронизации. Из (25), (26) имеем

$$\begin{aligned} \beta_1^3 + a_1 \beta_1^2 + a_2 \beta_1 + a_3 &= 0. \\ a_1 &= -2\rho - \operatorname{cosec} \alpha, \quad a_2 = -\sigma - \rho \operatorname{cosec} \alpha, \quad a_3 = \sigma \operatorname{cosec} \alpha - \rho, \\ \rho &= \frac{l}{c}(\delta t_1 + \Delta t_1), \quad \sigma = 1 - \frac{\Delta l}{c(\delta t_1 + \Delta t_1)} \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим случай $\alpha = \pi/2$. Тогда решение (27) имеет вид где $\beta_1 = \sqrt{1 - \lambda + \lambda^2} - \lambda$, где $\lambda = \frac{l + \Delta l}{c(\delta t_1 + \Delta t_1)}$.

В пределе $\beta_1 = 0, \delta t_1 = 0$ и расчет разности времени прихода сигнала в D_1, D_2 по формуле (25) для $l = R_\oplus, \Delta l = 0$ соответствует $\Delta t_1 \cong 0.021s$. Используя (27) или решая (26) для произвольного α можно определить параметр β_1 для суммы $\delta t_1 + \Delta t_1$, полученной в эксперименте.

Сделаем оценку β_1 для эксперимента по измерению времени регистрации нейтринного всплеска от SN1987A нейтринными и гравитационно-волновыми детекторами, в котором вероятность случайного совпадения составляла 10^{-5} [9]. В этом эксперименте задержка времени прихода сигнала к различным детекторам равнялась $1s$, поэтому, полагая $\delta t_1 + \Delta t_1 \cong 1s, l = R_\oplus$ можно получить оценку $\beta_1 \cong 0.97$.

Используемые предположения о сонаправленности вектора \vec{V}_1 и волнового вектора космического излучения могут значительно отклонять реальную величину этого параметра, поэтому здесь можно говорить о возможности применения данного подхода к объяснению экспериментов с аналогичной измерительной процедурой. Но главный вывод, к которому можно придти на основе проведенных рассуждений, заключается в том, что реальная

скорость распространения частиц, в том числе фундаментальных физических взаимодействий, может отличаться от измеренной в конкретном эксперименте.

Аналогичная картина может изменить наши представления о скорости нейтрино, полученными в результате измерений на детекторе OPERA.

С другой стороны, важным моментом является то, что зависимость результатов экспериментов от параметра анизотропии дает возможность определить параметр анизотропии. В частности, в приведенном примере для получения информации о пространственном направлении \vec{V}_1 , например, в топоцентрической системе координат, необходимо провести не менее 3-х экспериментов с различными некопланарными векторами \vec{D}_1, \vec{D}_2 .

Возможно, более эффективным способом определения параметра анизотропии является эксперимент SADE, предложенный в работах [1, 2] и заключающийся в поиске пространственной анизотропии по результатам интерферометрической регистрации скорости распространения электромагнитного излучения во вращающемся оптическом диске.

Однако, главным выводом приведенных рассуждений является возможное отличие измеряемой скорости распространения физического сигнала от его реальной скорости в физическом пространстве независимых переменных.

Заключение

Результаты ряда наземных и астрофизических экспериментов свидетельствуют о невозможности корректного описания некоторых физических процессов в рамках преобразований, полученных на основе инвариантности квадрата интервала. Анализ приводит к выводу о том, что в данных экспериментах измерительная процедура отличается от стандартной и построена на измерении мгновенных значений собственных параметров физических процессов в разных ИСО. Для адекватного описания подобных измерений необходимо использовать преобразования, в которых физические переменные являются независимыми в произвольных движущихся ИСО. Этим требованиям могут удовлетворять преобразования с частными дифференциалами неинвариантной формы.

Данные преобразования строятся относительно исходного множества покоящихся ИСО, в которых задана скорость распространения фундаментальных взаимодействий. Поэтому эксперименты с классической измерительной процедурой определения полных дифференциалов дадут ту же скорость распространения взаимодействий в любой движущейся ИСО. С другой стороны, результаты экспериментов, построенных на измерении частных дифференциалов, будут зависеть от параметра анизотропии пространства, который можно интерпретировать как скорость лабораторной ИСО относительно пространства распространения фундаментальных взаимодействий.

Литература

- [1] Gladyshev V.O., Leontiev A.D., Tiunov P.S., Sharandin Ye.A. Space anisotropy detection experiment (SADE) // *Современные проблемы гравитации, космологии и релятивистской астрофизики*. Тезисы докладов Международной конференции. 27 июня – 3 июля 2010г. -М.: РУДН, 2010, с. 139-140.
- [2] Gladyshev V. etc. SADE - Space Anisotropy Detection Experiment // E-print: http://www.space-lab.ru/view_experiment.php?lang=rus
- [3] Adam T., Agafonova N., Aleksandrov A., etc. Measurement of the neutrino velocity with the OPERA detector in the CNGS beam // E-print: <http://arxiv.org/abs/1109.4897>
- [4] Гладышев В.О., Морозов А.Н. Низкочастотный оптический резонанс в многолучевом интерферометре Фабри-Перо // *Письма в ЖТФ*. Т. 19, вып. 14, 1993, с. 38-42.

- [5] Gladyshev V.O., Morozov A.N. The theory of a Fabry-Perot interferometer in a gravitational-wave experiment. // *J. Moscow Phys. Soc.* V. 6, № 3, 1996, pp. 209-221.
- [6] Гладышев В.О. Необратимые электромагнитные процессы в задачах астрофизики: физико-технические проблемы. М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. – 276с. (E-print: <http://www.space-lab.ru/files/publications/000-032-00-00.pdf>)
- [7] Гладышев В.О., Тиунов П.С. Математическое моделирование процессов синхронной регистрации сигналов детекторами, движущимися в различных квазиинерциальных системах отсчета // *Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. «Естественные науки».* № 2, 2010, с. 16-30.
- [8] Pizzella G. Correlations among gravitational wave and neutrino detector data during SN1987A // *Nuovo cim.B.*, V. 105, N 8-9, 1990, pp. 993-1008.
- [9] Pizzella G. Correlation between gravitational-wave detectors and particle detectors during SN1987A // *Nuovo cim.C.*, V. 15, N 6, 1992, pp. 931-941.
- [10] Vargashkin V.Ya. The analysis of anisotropy of a visible part of the Universe about use astro- and photometry of quasars // *Physical Interpretation of Relativity Theory. Proceedings of XV International Meeting. Moscow, 6 – 9 July 2009.* – Moscow: BMSTU, 2009, pp. 225-234.
- [11] Levin S.F. On spatial anisotropy of red shift in spectrums of ungalaxy sources // *Physical Interpretation of Relativity Theory. Proceedings of XV International Meeting. Moscow, 6 – 9 July 2009.* – Moscow: BMSTU, 2009, pp. 235-241.
- [12] Варгашкин В.Я. Результаты поиска выделенного направления и неоднородностей Вселенной на основе статистики распределения квазаров // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, №1 (11), Том. 6, 2009, с. 162-178.

ON POSSIBLE DEPARTURE DETECTED VELOCITY OF PROPAGATION OF FUNDAMENTAL INTERACTIONS FROM LIGHT VELOCITY IN VACUUM

V.O. Gladyshev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fiazino, Russia

vgladyshev@mail.ru

It was shown that for the fundamental interactions, which propagate in a space of independent variables, results of measuring procedure, based on measurements of partial differentials of transformations, depend on laboratory inertial frame velocity relative to a space of propagation of interactions. Possible interpretation for invariance violation on the detector OPERA and in the experiment on measuring the time of a neutrino splash from SN1987A with neutrino and gravitational detectors was given. The estimation method of space anisotropy was offered. It is based on measurement of signal variations when the laboratory set changes its orientation in a space. It was pointed out that the main effective method of determining the anisotropy parameter is the experiment SADE suggested in the works [1, 2]. In the experiment space anisotropy was estimated on results of interference detection for velocity of electromagnetic radiation propagation in a rotating optical disk.

Key Words: fundamental interactions, space anisotropy, velocity of neutrino, reference frame, transformations of coordinates, time dilation.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных алгебр в физике, е) Экспериментальные исследования возможной анизотропии пространства-времени и иных проявлений финслеровой геометрии.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.
2. Объем статьи не должен превышать 1 печ. листа (24 усл. маш. стр.)
3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате \LaTeX (версия $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$, для набора формул используется \LaTeX) и файл статьи в формате PostScript или PDF.
4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).
5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок), ключевые слова. Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.
6. Название статьи, аннотация, ключевые слова, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.
7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.
8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи.
9. Публикация бесплатна для всех авторов.

INFORMATION FOR AUTHORS

In the journal published are the original articles and reviews of the Russian and foreign authors on the following topics: a) Hypercomplex numbers; b) Geometries connected with hypercomplex numbers; c) Finsler spaces; d) Fractals based on hypercomplex numbers; e) Application of the hypercomplex algebras in physics; f) Experimental investigation of the possible space-time anisotropy and other manifestations of Finsler geometry.

Editorial staff informs authors of the articles about the journal rules:

1. Articles are published either in Russian or in English.
2. The size of the article should not exceed that of a printed sheet (24 conventional typewritten pages)
3. Author makes his article file available for the editorial board in \LaTeX format ($\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ version, \AMS-L\TeX is used for formulas) as well as in either PostScript or PDF format.
4. Accepted picture formats are as follows: TIFF, GIF, PNG for bit images (encapsulation in EPS should be possible); EPS, PDF, TEX for vector images. Each image should be represented as a separate file. Colour scheme may be either black and white or grey (8 bit).
5. Article should contain an abstract (no lengthy formulas or references) and keywords.
6. Title of the article, abstract, keywords, names and affiliation of the authors should be available both in Russian and in English.
7. Author should give his or her e-mail and telephone number to make operative communication possible. If the article is sent back to the author for him or her to improve it, it doesn't mean that the article is accepted.
8. Any deviation from the given rules makes the chance of the publication lower.
9. Publication is free for all authors.

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА
В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

Научный журнал. Основан в 2003 г.

№ 1 (15), том 8, 2011

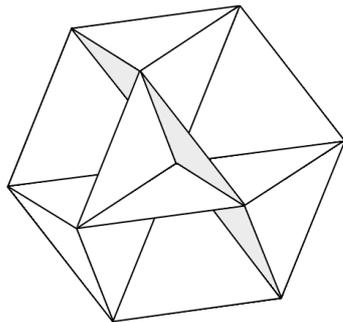
Главный редактор Павлов Д. Г.
Зам. главного редактора Панчелюга В. А.
Технический секретарь Панчелюга М. С.

www.polynumbers.ru
hypercomplex@mail.ru

Свидетельство о регистрации
ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.

ISSN 1814-3946

© НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике,
Российское гиперкомплексное общество, ОАО "МОЗЭТ"



Типографские данные