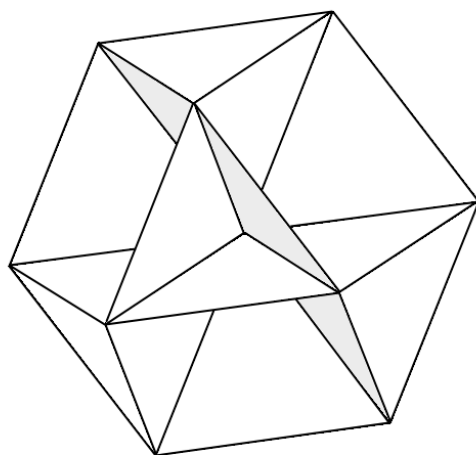


ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

№ 2 (16), том 8, 2011

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 2003 г.



www.polynumbers.ru

hypercomplex@mail.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Аналитические, дифференциально-геометрические и алгебраические свойства гладких функций поличисловой переменной	4
Владимиров Ю.С. Финслерова геометрия в теории гравитации	54
Питер Роуландс Метрика Бервальда-Моора в нильпотентном спинорном пространстве Дирака	66
Говард Брандт Физические финслеровы координаты в пространстве-времени	78
Рылов Ю.А. Геометризация физики: дискретная геометрия пространства-времени и теория относительности	88
Петухов С.В. Гиперкомплексные числа и алгебраическая система генетических алфавитов. Элементы алгебраической биологии	118
Людковский С.В. Интегрирование вдоль путей и дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка над алгебрами Кэли-Диксона ...	140
Информация для авторов	189
Информация для авторов (на английском)	190

CONTENTS

Pavlov D.G., Kokarev S.S. Analytic, differential-geometric and algebraic properties of smooth function over polynumbers.	4
Vladimirov Yu.S. Finsler geometry in theory of gravitation	54
Peter Rowlands The Berwald-Moor metric in nilpotent Dirac spinor space	66
Howard E. Brandt Physical Finsler coordinates in spacetime	78
Rylov Yu.A. Geometrization of physics: discrete space-time geometry and relativity theory	88
Petoukhov S.V. Hypercomplex numbers and the algebraic system of genetic alphabets. Elements of algebraic biology	118
Ludkovsky S.V. Line integration and second order partial differential equations over Cayley-Dickson algebras	140
Information for authors (in russian)	189
Information for authors	190

АНАЛИТИЧЕСКИЕ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ ПОЛИЧИСЛОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Д.Г.Павлов¹, С.С. Кокарев^{1,2}

¹ НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

² Российский научно-образовательный центр “Логос”, Ярославль, Россия

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

Статья представляет собой небольшой обзор сведений по теории дифференцируемых функций поличисловой переменной $P_n \rightarrow P_n$ и ее приложениям. На основе специальной классификации вырожденных (т.е. необратимых в обычном смысле) поличисел и теоремы об общем виде R -линейного отображения $P_n \rightarrow P_n$, определяется понятие производной функции поличисловой переменной. Голоморфные функции поличисловой переменной выделяются среди дифференцируемых функций совокупностью условий (поличисловой аналог условий Коши-Римана), которые в изотропной системе координат имеют вид: $\overset{k}{\partial} f = 0$, ($k = 1, \dots, n - 1$) где $\overset{k}{\partial} = C^k \partial$, C — сопряжение в алгебре P_n . Рассмотрены различные обобщенные классы голоморфности, $\mathcal{G}_{k_{\alpha_1}, k_{\alpha_2}, \dots, k_{\alpha_r}}^n$, которые определяются мономными дифференциальными уравнениями и классифицируются набором векторов неотрицательной целочисленной n -мерной решетки Z_+^n . Рассмотрен вопрос о голоморфном и аналитическом продолжении гладких функций $P_n \rightarrow P_n$, заданных на подмногообразии P_n . Обсуждается поличисловая версия теоремы Коши и интегральной формулы Коши вместе с многомерным обобщением первой. На основе симметричной формы Бервальда-Моора развивается симметричный аналог исчисления внешних форм Картана (симметричное умножение, звезда Ходжа и дифференциал). Рассмотрены трансформационные свойства производных скалярной поличисловой функции и геометрических объектов, которые строятся из них. В частности, рассмотрены вещественные скаляры, из которых может строиться лагранжиан поличисловой теории поля. На основе алгебры опор строится конструкция соприкосновения, играющая важную роль в физической интерпретации поличисловой теории поля. Выведены формулы для коэффициентов связности Леви-Чивиты, согласованной с формой Бервальда-Моора, а также формула для формы объема для n -корневых финслеровых метрик четного порядка. Рассмотрены некоторые деформационные аспекты гладких функций поличисловой переменной и показана вложимость любой R -алгебры в пространство билинейных форм над P_n . В целом статья может рассматриваться как предварительный набросок общей теории функций поличисловой переменной (ТФПП).

Ключевые слова: поличисла, аналитические функции, голоморфные функции.

1 Введение

Развитие теории относительности и квантовой теории привнесло в физику и математику комплекс идей, сформировавшихся в достаточно мощные и продуктивные принципы построения физических теорий. Речь идет о *принципе геометризации* и *принципе алгебраизации* [1]. Принцип геометризации вошел в физику со стороны теории относительности и ее первоначальных обобщений, развиваемых для объединения гравитации и электромагнетизма в рамках единой полевой теории [2, 3]. Его дальнейшая реализация послужила основанием для калибровочной концепции введения взаимодействий, лежащей в основе современной стандартной модели и ее важнейших обобщений [4]. Принцип алгебраизации,

понимаемый в широком смысле, вошел в физику XX века со стороны квантовой механики и квантовой теории поля. Алгебра операторов квантовой механики представляет собой важнейший пример физического приложения абстрактных алгебраических структур [5]. Разумеется, алгебраический и геометрический подходы к исследованию природы взаимно дополняют друг друга. Наиболее яркий пример симбиоза идей геометрии и алгебры заключается в концепции группы Ли — основном инструменте изучения и использования непрерывных симметрий [6]. Другой пример — алгебра комплексных чисел и геометрия евклидовой плоскости [7], которая индуцируется этой алгеброй посредством формы¹

$$\eta_C = \operatorname{Re}(dz_1 \otimes d\bar{z}_2) \quad (1)$$

Последнее обстоятельство представляется чрезвычайно интересным и неслучайным. Оно наводит на мысль об универсальной и фундаментальной связи между алгеброй и геометрией. Частные примеры такой связи, если ее понимать в широком смысле, хорошо известны [8, 9], но мы хотели бы заострить внимание именно на генетической связи геометрии и алгебры, яркую иллюстрацию которой мы можем наблюдать на примере формулы (1). Замечательно, что аналог формулы (1) работает и в алгебре так называемых двойных чисел P_2 [10]:

$$\eta_{P_2} = \operatorname{Re}(dh_1 \otimes d\bar{h}_2), \quad (2)$$

где $h = x + jy$, $j^2 = +1$, $x, y \in R$. Форма (2) является метрикой Минковского 2-мерной псевдоевклидовой плоскости. Хорошо известный факт существования делителей нуля в алгебре двойных чисел (именно этот факт не позволяет рассматривать эту алгебру как числовое поле) в геометрической интерпретации приводит к существованию изотропных направлений на плоскости двойных чисел, которые, в свою очередь, тесно связаны с кинематикой и физикой световых сигналов (в их усеченной 2-мерной версии) [11, 12].

Оказывается, у алгебры двойных чисел (в отличие от алгебры комплексных чисел) есть непосредственные многомерные коммутативно-ассоциативные обобщения [13, 14]. Они называются *алгебрами поличисел* или *алгебрами n -чисел* и мы далее будем обозначать их P_n . Несмотря на формальную простоту этих алгебр — в специальном базисе они устроены как прямая сумма одномерных алгебр вещественных чисел — их надлежало исследовать позволяет утверждать, что они обладают рядом специфических, интересных и содержательных свойств, не оставляющих сомнений в реальных возможностях их физических приложений [16]. В последнее время активность публикаций по алгебре поличисел, первоначальным попыткам ее физических приложений и смежным с ней направлениям заметно возросла [15, 16, 17, 18, 19] и потому, на наш взгляд, назрела необходимость привести в некоторую систему имеющиеся в этой области сведения.

Целью настоящей статьи является обзор физически ориентированных математических результатов, имеющихся на сегодняшний день по алгебре поличисел. Основной акцент в изложении материала сделан на аналитическом и голоморфном аспекте функций поличисловой переменной и связанными с ним вопросами. Часть результатов носит уточняющий и обобщающий характер и приводится впервые. Для удобства чтения статья разбита на достаточно мелкие разделы. Общий раздел 2 содержит все необходимые базовые сведения по алгебре и геометрии поличисел. В разделе 2.1 мы приводим сводку основных определений и базовых сведений по алгебре поличисел в специальном изотропном базисе, в котором свойства этой алгебры описываются наиболее просто. В разделе 2.2 предлагается классификация вырожденных поличисел с помощью понятия индекса Ind поличисла, которая позволяет несколько расширить операцию деления в алгебре P_n . В разделе 2.3 вводится набор $n - 1$ операций комплексного сопряжения, действующих на координаты

¹Мнимая часть этой формы индуцирует вещественную симплектическую метрику на плоскости.

полчисла в изотропном базисе как группа циклических перестановок, и определяется индуцируемая ими (псевдо)норма. Раздел 2.4 посвящен чисто алгебраическому определению n -корневой финслеровой метрики Бервальда-Моора ${}^{(n)}\epsilon$ в P_n и ее различным формам представления. Алгебра симметрий этой метрики (конформных симметрий и изометрий) приведена в разделе 2.5. В разделе 2.6 перечислены некоторые важные геометрические объекты (метрическая сфера S_{BM}^n , конус $\text{Con}(x)$, полиуглы), определение которых опирается на метрику Бервальда-Моора и ее свойства.

Материал статьи, объединенный в общий раздел 3, посвящен свойствам дифференцируемых функций поличисловой переменной. В разделе 3.1 мы определяем сходящиеся степенные ряды поличисловой переменной в топологии прямой суммы одномерных евклидовых метрик. Сходящиеся ряды позволяют нам сформулировать в разделе 3.2 понятие аналитической функции поличисловой переменной и сформулировать общую теорему о соответствии между аналитическими функциями сопряженных поличисловых переменных и наборами вещественных функций многих вещественных переменных. В разделе 3.3 мы даем определение сходящейся (в топологии прямой суммы) поличисловой последовательности и непрерывной функции поличисловой переменной, а также обсуждаем в общих чертах некоторые необычные черты сходимости и непрерывности по метрике Бервальда-Моора. Аналоги теорем комплексного анализа об общем виде C -линейных и R -линейных функций комплексной переменной формулируются для линейных функций поличисловой переменной в разделе 3.4. С помощью понятия индекса полчисла мы уточняем классические определения классов функций o и O в точке в разделе 3.5. На основе теорем и формулировок предыдущих разделов определение дифференцируемой функции поличисловой переменной дается в разделе 3.6. В разделе 3.7 мы даем определение голоморфной функции поличисловой переменной, у которой производная не зависит от направления (определяемого посредством финслеровых полиуглов). В разделе 3.8 предлагается обобщение понятия голоморфности, посредством наборов определяющих мономных дифференциальных операторов. Возможность голоморфного или аналитического продолжения поличисловых функций, заданных на кривых или поверхностях, обсуждается в разделе 3.9. В разделе 3.10 мы приводим формулировку и доказательство поличисловой теоремы Коши и обсуждаем ее соответствие с результатами ряда предыдущих работ.

Общий раздел 4 содержит некоторые интересные и потенциально важные для приложений геометрические аспекты голоморфных функций поличисловой переменной. В разделе 4.1 мы даем определение голоморфных и голоморфно-замкнутых форм и на их основе формулируем многомерное обобщение теоремы Коши в P_n . Отличительной особенностью формулировок является их CH_n -ковариантность, а не общая ковариантность. Раздел 4.2 содержит некоторые важные определения и формулы, касающиеся алгебры симметричных тензоров (полиад и кополиад) и симметричных аналогов внешней производной и звезды Ходжа. Трансформационные законы для голоморфных производных и их комбинаций обсуждаются в разделе 4.3. В разделе 4.4 мы строим вещественные скалярные инварианты, необходимые для формулировки принципа наименьшего действия поличисловой теории поля. Важная для физической интерпретации конструкция соприкасающихся с финслеровой метрикой Бервальда-Моора геометрических объектов излагается в разделе 4.5. Мы вводим в этом разделе алгебру опор и рассматриваем в качестве примера соприкасающиеся геометрические объекты в H_3 . Вывод формулы для коэффициентов связности Леви-Чивиты, согласованной с метрикой Бервальда-Моора, в произвольных координатах приведен в разделе 4.6. Вопрос о выражении для инвариантной формы объема в пространствах с многоиндексными метриками четного ранга обсуждается в разделе 4.7.

Небольшой заключительный общий раздел статьи 5 посвящен обсуждению некоторых интересных алгебраических аспектов голоморфных функций. В разделе 5.1 обсуждается связь голоморфных функций с абстрактной теорией деформационных структур, развитой

в [20], а в разделе 5.2 приводится вариант "теоремы вложения" всякой алгебры над полем вещественных чисел в пространство поличисловых билинейных форм соответствующей размерности.

Хотя материал настоящей статьи нельзя считать завершенной частью исследований в области приложений поличисел, мы надеемся, что настоящая статья будет полезной заинтересованному читателю и, во всяком случае, сэкономит его время, необходимое на поиски разрозненных журнальных публикаций, список которых (неполный) приведен в конце статьи. К основным публикациям, которые послужили фактической основой настоящей статьи, следует отнести [12, 16, 21, 22, 23].

Вычисления с поличислами и функциями от них обнаруживает неудобство общепринятого правила суммирования Эйнштейна по повторяющимся индексам, поэтому на протяжении всей статьи во избежании путаницы мы прописываем суммы или знаки суммирования явно.

2 Основные сведения по алгебре и геометрии поличисел

2.1 Алгебра и операции

Ассоциативно-коммутативная алгебра P_n над полем R (алгебра поличисел или n -чисел) обобщает на высшие измерения хорошо известную алгебру двойных чисел на плоскости [10]. Ее общий элемент имеет вид:

$$A = A^1 e_1 + \dots + A^n e_n, \quad (3)$$

где базис $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ алгебры P_n удовлетворяет соотношениям:

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_i \quad (\text{нет суммирования!}). \quad (4)$$

Из соотношения (4) вытекают простые правила умножения и деления поличисел:

$$AB = \sum_{i=1}^n A^i B^i e_i, \quad \frac{A}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{A^i}{B^i} e_i, \quad (5)$$

при этом деление определено только на т. н. невырожденные элементы, у которых все $B^i \neq 0$. Роль алгебраической единицы играет элемент $I_n = \sum_{i=1}^n e_i$. Базис (или точнее класс базисов), в котором таблица умножения имеет вид (4), будем называть *изотропным*.

2.2 Вырожденные элементы

Упомянутые в предыдущем пункте вырожденные элементы (т.е. такие, у которых по крайней мере одна из компонент в базисе $\{e_i\}$ равна нулю) играют важную роль в самой алгебре P_n и в ее приложениях. Они допускают следующую очевидную классификацию. Назовем *индексом* $\text{Ind}(A)$ элемента $A \in P_n$ элемент P_n , компоненты которого определяются по формуле:

$$\text{Ind}(A)^i = \begin{cases} 1, & A^i \neq 0; \\ 0, & A^i = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Отображение Ind задает отношение эквивалентности на P_n : два элемента A и B эквивалентны ($A \stackrel{\text{Ind}}{\sim} B$), если $\text{Ind}(A) = \text{Ind}(B)$. Классы эквивалентных элементов по отношению $\stackrel{\text{Ind}}{\sim}$ и дают классификацию вырожденных элементов. Эти классы можно отождествить с дискретным множеством \mathcal{I}_n двоичных последовательностей длины n , которое представляет собой n -кратное прямое произведение $\mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2$. Например, класс индекса $(1, 1, \dots, 1)$

представляет собой множество невырожденных элементов, а класс $(0, \dots, 0)$ одноэлементен и представляет нуль. На множестве индексов определена операция произведения (она наследуется из P_n). Нетрудно проверить справедливость следующего равенства:

$$\text{Ind}(AB) = \text{Ind}(A) \cdot \text{Ind}(B). \quad (7)$$

Это тождество, в частности, означает, что классы эквивалентности можно перемножать.

На множестве \mathcal{I}_n можно ввести частичный порядок \leq : для всяких $i_1, i_2 \in \mathcal{I}_n$ будем говорить, что $i_1 \leq i_2$, если $i_1 \cdot i_2 = i_1$. Очевидно также, что $(1, 1, \dots, 1)$ — наибольший элемент в \mathcal{I}_n , а $(0, \dots, 0)$ — наименьший. Очевидно, что для суммы элементов, в отличие от (7), имеет место лишь неравенство вида:

$$\text{Ind}(A + B) \leq \text{Ind}(\text{Ind}(A) + \text{Ind}(B)). \quad (8)$$

Теперь мы можем несколько расширить данное ранее в (5) определение операции деления. Мы доопределяем операцию деления A/B для всяких элементов A и B с упорядоченными индексами $\text{Ind}(A) \leq \text{Ind}(B)$ так, чтобы деление некоторой компоненты на ноль всегда сопровождалось наличием нуля в этой компоненте, причем мы полагаем $0/0 \equiv 0$. При этом $\text{Ind}(A/B) = \text{Ind}(A)$. Например, в частности, для равных индексов $\text{Ind}(A) = \text{Ind}(B) = (1, 1, \dots, 0, 0)$, где на первых k местах стоят единицы, а на последних $n - k$ — стоят нули, результат деления будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{A}{B} = \frac{A^1 e_1 + \dots + A^k e_k + 0e_{k+1} + \dots + 0e_n}{B^1 e_1 + \dots + B^k e_k + 0e_{k+1} + \dots + 0e_n} \equiv \sum_{i=1}^k \frac{A^i}{B^i} e_i + \sum_{j=k+1}^n 0e_j \in \text{Ind}^{-1}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k}, \dots, 0), \quad (9)$$

т.е. по существу он определяется на k -мерной подалгебре $P_k \subset P_n$ с невырожденными в ней элементами. Аналогично определяется деление элементов и с любыми другими упорядоченными индексами.

Отметим, что сделанное нами расширение операции деления важно для корректного определения дифференцирования функций поличисловой переменной (разделы 3.5 и 3.6). Для дальнейшего использования введем еще одну более грубую характеристику вырожденности элемента алгебры A :

$$\bar{A} \equiv (\text{Tr} \circ \text{Ind})(A) \equiv \sum_{i=1}^n \text{Ind}(A)^i, \quad (10)$$

которую назовем *сигнатурой* элемента A . Будем называть элемент A собственно невырожденным, если $0 < \bar{A} < n$.

2.3 Сопряжения и псевдонорма

На алгебре P_n определена операция сопряжения $C: P_n \rightarrow P_n$, действующая по правилу:

$$C(A) = C\left(\sum_{i=1}^n A^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n A^{i-1} e_i, \quad (11)$$

где $A^0 \equiv A^n$. Ее k -ая итерация действует по формуле:

$$C^k(A) = \sum_{i=1}^n A^{i-k} e_i, \quad (12)$$

где A^s с $-n \leq s \leq 0$ определяется формулой $A^s \equiv A^{n+s}$, т. е. сложение и вычитание индексов производится в арифметике по модулю n . Это правило по умолчанию будет всегда

подразумеваться и далее. Для $k = n$ имеет место тождество $C^n = \text{id}$. Таким образом, фактически, на алгебре P_n определена $n - 1$ операция комплексного сопряжения, что обобщает ситуацию для комплексных и двойных чисел.

Определенные нами комплексные сопряжения позволяют чисто алгебраически определить (псевдо)норму $\|A\|$ всякого элемента $A \in P_n$:

$$\prod_{k=1}^n C^k(A) = \prod_{k=1}^n A^k \sum_{s=1}^n e_s \equiv \|A\|^n I_n, \quad (13)$$

где первое равенство автоматически следует из определения комплексного сопряжения и таблицы умножения в P_n , а второй знак равенства следует понимать как определение n -ой степени псевдонормы элемента A . Отметим, что псевдонорма $\|A\|$ может принимать положительные отрицательные, нулевые и мнимые значения. Абсолютной величиной элемента A , будем называть вещественное число, равное

$$|A| = \sqrt[n]{\|A\|^n}. \quad (14)$$

Очевидно, что для всякого собственно вырожденного элемента A имеют место равенства: $\|A\| = |A| = 0$, в то время как для невырожденных элементов $\|A\| \neq 0$.

2.4 Скалярное полипроизведение и метрика Бервальда-Моора

Концепция нормы, определение которой опирается на форму n -ого порядка, легко обобщается до концепции *полискалярного произведения* элементов (A_1, \dots, A_n) , опирающейся на n -линейную форму вида:

$$\sum_{\sigma(i_1, \dots, i_n)} \prod_{k=1}^n C^k(A_{i_k}) \equiv (A_1, \dots, A_n) I_n, \quad (15)$$

где суммирование выполняется по всем перестановкам $\sigma(i_1, \dots, i_n)$ различных индексов i_1, \dots, i_n . Из (15) легко получается следующая более явная формула:

$$(A_1, \dots, A_n) \equiv \text{perm} \begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_n^1 \\ & \dots & \\ A_1^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где perm — перманент квадратной матрицы, имеющий структуру определителя, все знаки в котором полагаются плюсами.

Скалярное полипроизведение (как и перманент) может быть записано в компонентах в следующем виде:

$$(A_1, \dots, A_n) \equiv \epsilon_{i_1 \dots i_n} A_1^{i_1} \dots A_n^{i_n}, \quad (17)$$

где $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$ — симметричный символ Леви-Чивиты², совокупность компонент которого следует рассматривать как метрический тензор пространства P_n , отнесенный к базису $\{e_i\}$. Линейное пространство с полилинейной метрической формой (17) называется *пространством Бервальда-Моора* (обозначается H_n), а метрика в (17) называется *n -мерной метрикой Бервальда-Моора*, которую в настоящей статье мы будем обозначать ${}^{(n)}\epsilon$. Формулы (13) и (15) обнаруживают генетическую связь пространств P_n и H_n : алгебра поличисел индуцирует метрику Бервальда-Моора подобно тому, как алгебра комплексных чисел индуцирует евклидову метрику на плоскости (формула (1)). Отметим, что пространство Бервальда-Моора H_n относится к типу n -корневых финслеровых пространств, изучаемых финслеровой геометрией [24].

²Он определяется аналогично стандартному антисимметричному символу Леви-Чивиты, для которого мы оставляем обозначение $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$, с заменой знаков минус на плюс.

2.5 Изометрии и конформные симметрии

Рассмотрим некоторые дифференциально-геометрические аспекты пространства H_n , координаты которого будем обозначать здесь привычным образом посредством (x^1, \dots, x^n) . Метрика ${}^{(n)}\epsilon$ в этих координатах в соответствии с (16)-(17) принимает следующий вид:

$${}^{(n)}\epsilon = \hat{S}(dx^1 \otimes \dots \otimes dx^n), \quad (18)$$

где \hat{S} — оператор симметризации (без числового множителя). Непрерывные симметрии (конформные симметрии и изометрии) метрики Бервальда-Моора описываются алгеброй Ли векторных полей X , удовлетворяющих конформным уравнениям Киллинга:

$$L_X({}^{(n)}\epsilon) = \lambda \cdot {}^{(n)}\epsilon, \quad (19)$$

где λ — некоторая скалярная функция координат. Можно показать [25], что общее решение уравнений (19) исчерпывается следующими классами векторных полей:

1. $T_{(i)} = \partial_i$, ($i = 1, \dots, n$) (трансляции);
2. $D_{(i)} = x^{i+1}\partial_{i+1} - x^i\partial_i$, ($i = 1, n-1$) — (унимодулярные дилатации, суммирования по i нет!);
3. $C_{(F_1, \dots, F_n)} = \sum_{i=1}^n F_i(x^i)\partial_i$, где F_i ($i = 1, \dots, n$) — произвольные гладкие функции одной переменной (конформные преобразования).

Первые два класса векторных полей индуцируют группу изометрии $\text{Iso}(H_n)$, которая является полупрямым произведением $T_n(H_n) \times D_{n-1}(H_n)$ двух абелевых подгрупп: абелевой подгруппы трансляций $T_n(H_n)$ и абелевой подгруппы унимодулярных дилатаций $D_{n-1}(H_n)$. В конечном виде в координатах преобразования изометрии метрики Бервальда-Моора имеют следующий общий вид:

$$T_n : x^i \rightarrow x^i + c^i; \quad D_{n-1} : x^i \rightarrow a^i x^i, \quad \prod_{i=1}^n a^i = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad c^i, a^i \in R. \quad (20)$$

Третий класс векторных полей индуцирует бесконечномерную неабелеву группу конформных преобразований $C(H_n)$, явный конечный вид которой в выбранном изотропном базисе определяется набором произвольных гладких функций $\{f^i\}_{i=1, \dots, n}$ одной переменной:

$$C(H_n) : x^i \rightarrow y^i = f^i(x^i) \quad i = 1, \dots, n. \quad (21)$$

При этом метрика ${}^{(n)}\epsilon$ преобразуется по закону:

$${}^{(n)}\epsilon = \prod_{k=1}^n \left(\frac{df^k}{dx^k} \right) {}^{(n)}\epsilon'. \quad (22)$$

Подчеркнем, что рассматриваемая нами группа $C(H_n)$ является весьма специальной подгруппой группы диффеоморфизмов, поэтому конформное преобразование вида (22) не приводит к появлению нетривиальной кривизны метрики Бервальда-Моора.

2.6 Некоторые метрические объекты в H_n

Как показано выше, группа изометрии $\text{Iso}(H_n)$ содержит полную подгруппу трансляций T_n . Это означает, что выбранная нами изотропная система координат допускает класс аффинно-эквивалентных ей систем координат (т.е. связанных с исходной невырожденным

аффинным преобразованием), в котором компоненты метрики Бервальда-Моора остаются постоянными. Другими словами, мы можем работать в H_n с глобальными аффинными конструкциями (типа радиус-векторов, моментов различного порядка и т.д.), оставаясь в классе аффинно-эквивалентных систем координат (в котором, конечно, отнюдь не все представители будут являться изотропными системами). В силу возможности глобального отождествления касательного пространства $T_x H_n$ с самим H_n в любой точке x , полискалярное произведение тривиально переносится с дифференциально-геометрических (касательных) векторов в H_n на аффинные векторы.

2.6.1 Сфера S_{BM}^{n-1}

Рассмотрим уравнение метрической единичной сферы S_{BM}^{n-1} в пространстве БМ:

$$|^{(n)}\epsilon(x, \dots, x)| = 1, \tag{23}$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$ понимается как аффинный вектор в пространстве H_n в изотропной системе координат с фиксированным началом. Определенная таким образом метрическая сфера имеет 2^n связных некомпактных компонент S_α^{n-1} :

$$S_{BM}^{n-1} = \bigsqcup_{\alpha=1}^{2^n} S_\alpha^{n-1}. \tag{24}$$

Эти компоненты можно классифицировать элементами P_n вида $\{\tau_\alpha = (\pm 1, \dots, \pm 1)\}_{\alpha=1, \dots, 2^n}$, каждый из которых принадлежит ровно одной из связных компонент сферы. В соответствии с этой классификацией, компоненты можно разделить на четные или нечетные, в зависимости от количества отрицательных компонент в классификаторе τ_α . Компоненту S_{BM}^{n-1} , соответствующую элементу $\tau_1 \equiv (1, \dots, 1)$, будем называть положительной³. По своим геометрическим свойствам сфера S_{BM}^{n-1} весьма близка к плоскому $n - 1$ -мерному пространству: в S_{BM}^{n-1} , например, через любую точку, не лежащую на данной экстремали длины (т.е. на гладкой кривой, доставляющей экстремум функционалу длины на S_{BM}^{n-1} , индуцированному вложением $S_{BM}^{n-1} \rightarrow H_n$) можно провести единственную экстремаль, не пересекающуюся с первой [22]. Отметим здесь еще одну важную аналогию сферы S_{BM}^{n-1} с евклидовой сферой: точки, лежащие на четных компонентах сферы S_{BM}^{n-1} , рассматриваемые как элементы алгебры P_n , изображают подгруппу D_{n-1} (по умножению) группы изометрий $\text{Iso}(H_n)$.

2.6.2 Конус $\text{Con}(x)$

Назовем конусом $\text{Con}(x_0)$ точки $x_0 \in H_n$ множество точек в H_n , удовлетворяющих уравнению:

$$|x - x_0| = 0. \tag{25}$$

Очевидно, конусы всех точек изоморфны и этот изоморфизм устанавливается символической формулой:

$$\text{Con}(x_1) = \text{Con}(x_0) + \overrightarrow{x_1 - x_0}.$$

Элементы $x \in \text{Con}(x_0)$, если их интерпретировать как элементы алгебры P_n , представляют собой в точности все те элементы, для которых $x - x_0$ не имеет обратного по умножению.

³Также будем называть положительной часть P_n , содержащую все те элементы A , у которых $A^i > 0$ для всех $i = 1, \dots, n$.

2.6.3 Экспоненциальные углы и $\Omega^k P_n$ -пространства

Непосредственной проверкой с помощью (5) легко убедиться в справедливости следующего представления любого невырожденного поличисла⁴ $A \in P_n$:

$$A = \sum_{s=1}^n A^s e_s = \mathfrak{T}(A) |A| e^\chi, \quad (26)$$

где $\mathfrak{T}(A) \equiv \mathfrak{T}_{\alpha(A)}$ — классификатор той компоненты S_{BM}^{n-1} , которую пересекает луч λA , $R \ni \lambda > 0$,

$$\chi \equiv \sum_{s=1}^n \chi_A^s e_s \quad (27)$$

— полиугол A (т.е. угловая переменная, являющаяся по своей алгебраической природе поличислом того же типа, что и A),

$$\chi_A^s \equiv \ln \frac{\widehat{A}^s}{|\widehat{A}|} \quad (28)$$

т.н. экспоненциальные углы элемента A ,

$$\widehat{A} \equiv \frac{A}{\mathfrak{T}_{\alpha(A)}} \quad (29)$$

приведенный (к положительной компоненте S_{BM}^{n-1}) элемент A , у которого все компоненты в изотропном базисе положительны. По самому своему определению экспоненциальные углы удовлетворяют тождеству:

$$\text{Tr}(\chi) \equiv \sum_{s=1}^n \chi^s = 0, \quad (30)$$

что, в свою очередь, обеспечивает тождество

$$|e^\chi| = 1, \quad (31)$$

аналогичное по смыслу условию единичности модуля комплексных чисел, лежащих на единичной окружности в комплексной плоскости. Можно показать, что величина

$$|\chi_A| = |\chi_A^1 \cdots \chi_A^n|^{1/n} \quad (32)$$

имеет смысл аналога евклидова угла⁵ между элементами(-векторами) A и $\mathfrak{T}(A)$. Она называется *взаимным углом* между ними. Взаимный угол между невырожденными элементами $A \in P_n$ и $B \in P_n$ при $\mathfrak{T}(A) = \mathfrak{T}(B)$ определяется по формуле:

$$\phi(A, B) \equiv |\chi_{B/A}|. \quad (33)$$

Переход от элементов P_n к их полиуглам по формуле (28) можно понимать как некоторое отображение: $\flat : P_n \rightarrow P_n$. Наглядно образ $\flat(P_n) \equiv \Omega P_n$ изображается в пространстве P_n в виде гиперплоскости, ортогональной (в евклидовом смысле) пространственной

⁴Здесь мы несколько забегаем вперед, используя понятие экспоненты от поличисла. Достаточно бегло просмотреть раздел 3.1, в котором обсуждаются степенные ряды поличисловой переменной и аналитические функции от нее.

⁵Он обладает свойством аддитивности и может быть определен как длина экстремали на единичной сфере S_{BM}^{n-1} , соединяющий точку $\mathfrak{T}(A)$ и $e^{\chi(A)}$ на ней [22].

биссектрисе (понимаемой также в евклидовом смысле) положительной компоненты P_n , проходящей через нулевой элемент алгебры P_n . Отображение \flat , которое мы называем \flat -проекцией (бипроекцией), представляет собой нелинейное отображение линейных пространств и допускает последующие итерации:

$$P_n \xrightarrow{\flat} \Omega P_n \xrightarrow{\flat} \Omega^2 P_n \cdots \xrightarrow{\flat} \Omega^k P_n \xrightarrow{\flat} \dots \quad (34)$$

Каждый шаг итерации проецирует прообраз и понижает размерность образа (как подмногообразия P_n) на единицу. Таким образом, размерность многообразия полиуглов $\Omega^k P_n$ равна $n - k$, и всего существует лишь $n - 1$ независимых взаимных углов $\chi_A^{(k)}$. Эта последовательность независимых взаимных углов позволяет записать лестничное экспоненциальное представление поличисла [22].

Приведем без доказательства следующую очевидную формулу:

$$C^k A = \top(C^k A) |A| e^{C^k \chi}, \quad (35)$$

устанавливающую правило комплексного сопряжения поличисел в экспоненциальном представлении.

3 Аналитические и голоморфные функции поличисловой переменной

3.1 Степени и сходящиеся ряды

Правило (5) умножения поличисел в изотропном базисе позволяет определить любую целочисленную степень поличисла $A \in P_n$:

$$A^n = (A^1)^n e_1 + \cdots + (A^n)^n e_n. \quad (36)$$

Формула (36) годится и для отрицательных значений n в случае, когда A невырождено. Эта формула позволяет легко определить формальные степенные поличисловые ряды вида:

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \equiv \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} c_{ks} (x^s)^k e_s, \quad (37)$$

где $P_n \ni c_k = \sum_{s=1}^n c_{ks} e_s$, $P_n \ni x = x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n$. Равенство в (37), вытекающее из (36), означает, что степенной ряд поличисловой переменной в изотропном базисе распадается на сумму n независимых рядов вещественной переменной. Естественно назвать ряд $R(x)$ сходящимся, если и только если каждый из вещественных рядов в правой части (37) сходится в обычном смысле. Аналогично можно ввести определения абсолютно и условно сходящихся рядов $R(x)$ (если абсолютно сходятся вещественные ряды и условно сходятся хотя бы один из вещественных рядов). По сути дела, речь идет о сходимости рядов поличисловой переменной в прямоугольной метрической топологии R^n , в которой открытые ε -шары в окрестности некоторой точки $x_0 \in R^n$ задаются неравенством $\sum_{k=1}^n |x - x_0| < \varepsilon$.

3.2 Аналитические функции поличисловой переменной

Возможность определения степенных рядов позволяет определить класс аналитических функций поличисловой переменной $C^\omega(P_n)$ как совокупность отображений $P_n \rightarrow P_n$, представимых в виде сходящихся поличисловых степенных рядов вида (37) (с произвольным

центром разложения). Это определение допускает обобщение на отрицательные степени (поличисловые ряды Лорана) вне конуса центра разложения в ряд.

Пусть имеется некоторая аналитическая функция вещественной переменной $f : R \rightarrow R$, которая определяется своим разложением в ряд с некоторым центром разложения ξ_0 :

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\xi - \xi_0)^k, \quad (38)$$

где коэффициенты c_k вещественны. Элементарно проверяется, что ее аналитическое продолжение на P_n всегда существует, единственно и определяется формулой:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - \xi_0 I_n)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^n c_k (x^s - \xi_0)^k e_s = \sum_{i=1}^n f(x^i) e_i. \quad (39)$$

С учетом (37) аналогично имеем взаимно-однозначное соответствие между наборами $\{f_s\}_{s=1, \dots, n}$ аналитических функций вещественной переменной и аналитическими функциями одной поличисловой переменной, которое устанавливается формулой, обобщающей (39) и вытекающей из (37):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \equiv \sum_{s=1}^n f_s(x^s) e_s, \quad (40)$$

где

$$c_k = \sum_{s=1}^n c_{ks} e_s \quad \text{и} \quad f_s(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{ks} \xi^k,$$

$c_k \in P_n$, $c_{ks} \in R$. Дальнейшее обобщение (40) выражает следующая

Теорема 1. *Имеет место биективное соответствие между наборами $\{f_s\}_{s=1, \dots, n}$ n вещественных аналитических функций от k вещественных переменных $R^k \rightarrow R$ и аналитическими функциями $P_n \rightarrow P_n$ от k поличисловых переменных вида:*

$$P_n^{l_1} \times P_n^{l_2} \times \dots \times P_n^{l_k} \rightarrow P_n$$

где

$$P_n^{l_q} \equiv C^{l_q}(P_n)$$

и все l_q для $q = 1, \dots, k$ попарно различны.

Доказательство. Достаточно провести доказательство для одной из выборок $\{l_q\}$ (доказательство для других выборок сводится к простой перенумерации переменных). Пусть $l_q = q - 1$ для $q = 1, \dots, k$. Другими словами, рассмотрим аналитическую функцию f от k поличисловых переменных вида:

$$(x, \overset{1}{x}, \dots, \overset{k-1}{x}) \mapsto f(x, \overset{1}{x}, \dots, \overset{k-1}{x}) \in P_n, \quad \text{где} \quad \overset{s}{x} \equiv C^s x. \quad (41)$$

В силу аналитичности f имеем представление этой функции через сходящийся (покомпонентно) степенной ряд с некоторым центром разложения $x_0 \in P_n$:

$$f(x, \overset{1}{x}, \dots, \overset{k-1}{x}) = \sum_{m_0, \dots, m_{k-1}=0}^{\infty} C_{m_0 \dots m_{k-1}} (x - x_0)^{m_0} (\overset{1}{x} - \overset{1}{x}_0)^{m_1} \dots (\overset{k-1}{x} - \overset{k-1}{x}_0)^{m_{k-1}} \quad (42)$$

С учетом формулы (12) после перехода к разложениям по изотропному базису каждого сомножителя под знаком суммы в (42), получим:

$$\begin{aligned}
 f(x, x, \dots, x) = \\
 \sum_{m_0, \dots, m_{k-1}=0}^{\infty} \sum_{s=1}^n c_{m_0 \dots m_{k-1} s} (x^s - x_0^s)^{m_0} (x^{s-1} - x_0^{s-1})^{m_1} \dots (x^{s-k+1} - x_0^{s-k+1})^{m_{k-1}} e_s \\
 \sum_{s=1}^n f_s(x^s, x^{s-1}, \dots, x^{s-k+1}) e_s,
 \end{aligned} \tag{43}$$

где мы обозначили

$$\begin{aligned}
 f_s(x^s, x^{s-1}, \dots, x^{s-k+1}) \equiv \\
 \sum_{m_0, \dots, m_{k-1}=0}^{\infty} c_{m_0 \dots m_{k-1} s} (x^s - x_0^s)^{m_0} (x^{s-1} - x_0^{s-1})^{m_1} \dots (x^{s-k+1} - x_0^{s-k+1})^{m_{k-1}}
 \end{aligned} \tag{44}$$

и $C_{m_0 \dots m_{k-1}} = \sum_{s=0}^n c_{m_0 \dots m_{k-1} s} e_s$, $c_{m_0 \dots m_{k-1} s} \in R$. Набор функции $\{f_s\}_{s=1, \dots, n}$, определяемый по (43) и есть искомый набор аналитических функций от k вещественных переменных. Проводя рассуждению в обратную сторону, можно по любому такому набору восстановить аналитическую функцию k n -числовых переменных. \square

Рассмотренные нами ситуации являются обобщением на n измерений ситуаций на двойной плоскости⁶, которые, в свою очередь, являются алгебраическими аналогами аналитических, антианалитических и обобщенно-аналитических функций комплексной переменной [7].

3.3 Пределы и непрерывность

В основе анализа лежат операции предельного перехода. Перейдем к рассмотрению соответствующих конструкций в P_n . Назовем бесконечную поличисловую последовательность $\{x_q\}: \mathbb{N} \rightarrow P_n$ сходящейся, если соответствующие покомпонентные последовательности $\{x_q^s\}_{s=1, \dots, n}$ сходятся в смысле обычного анализа. Можно выделить особо *равномерно* (по компонентам) сходящиеся поличисловые последовательности $\{x^n\}$, если двойная последовательность $\{x_n^s\}$ как отображение $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}_n \rightarrow R$ сходится равномерно по множеству \mathbb{Z}_n в обычном смысле.

Данные нами определения сходимости никак не связаны с той геометрической структурой (метрикой Бервальда-Моора), которую индуцирует алгебра P_n и по сути, как уже отмечалось выше, индуцируются евклидовой метрикой в R_n (или, точнее, прямой суммой одномерных евклидовых метрик). Поэтому дадим еще одно определение сходимости: поличисло a называется *условным пределом* бесконечной поличисловой последовательности $\{x_q\}$, (мы будем обозначать этот факт в записи так: $\{x_q\} \rightsquigarrow a$, в отличие от записи традиционной сходимости: $\{x_q\} \rightarrow a$) если

$$\lim_{q \rightarrow \infty} |a - x_q|_{BM} = 0, \tag{45}$$

где $|\bullet|_{BM}$ — норма в метрике Бервальда-Моора. Понятие условного предела обобщает понятие обычного, в том смысле, что любой классический предел является и условным,

⁶Их три: аналитические функции (раскладываются по положительным степеням h), антианалитические функции (раскладываются по положительным степеням \bar{h}) и обобщенно-аналитические функции (раскладываются по положительным степеням h и \bar{h}).

в то время как не всякий условный предел является классическим. Рассмотрим, к примеру, семейство поличисловых последовательностей $\{x_q^s\}_{s=1,\dots,n}$, в котором последовательность $\{x_q^1\}$ сходится к нулю, а остальные последовательности ограничены (и не обязательно сходящиеся). В этом случае любой вырожденный элемент с индексом $(0, 1, 1, \dots, 1)$ в соответствии с (45) является условным пределом поличисловой последовательности $\{x_q = \sum_{s=1}^n x_q^s e_s\}$. Все такие условные пределы образуют гиперплоскость $x^1 = 0$ в классе изотропных базисов. Таким образом, отсутствие положительной определенности нормы, индуцируемой метрикой Бервальда-Моора, приводит к ряду необычных свойств условного предела. Например, возможна ситуация, когда все покомпонентные последовательности $\{x_q^s\}_{s=1,\dots,n}$ расходятся, но поличисловая последовательность $\{x_q\}$ условно сходится. Рассмотрим семейство последовательностей $\{x_q^s = (-1)^{q+s}\}$. Условный предел поличисловой последовательности $\{x_q = \sum_{s=1}^n x_q^s e_s\}$ совпадает с множеством вершин n -мерного куба $[-1; +1]^{\times n} = Q^n \subset P_n$ за исключением пары: вершины $(+1, -1, +1, -1, \dots, +1, -1)$ и противоположной ей. Также, в общем случае не выполняются привычные правила обращения с пределами. К примеру, если $\{x_q\} \rightsquigarrow a$ и $\{y_q\} \rightsquigarrow b$, то последовательность $\{x_q + y_q\}$ может не иметь в качестве своего условного предела поличисло $a + b$.

Можно сказать, что понятие условного предела, связанное с метрикой Бервальда-Моора, обнаруживает неполноту пространства P_n , понимаемого как множества точек — условный предел последовательности элементов-точек P_n может не быть точкой. В классическом анализе и топологии пределом последовательности точек топологического пространства (в том случае если он существует), является точка — элемент той же природы (т.е. не имеющий собственных подмножеств). Если теперь перейти от исходного множества (в нашем случае P_n) к множеству 2^{P_n} всех его подмножеств, то мы имеем обычную ситуацию: некоторые (сходящиеся) последовательности специальных (одноточечных подмножеств) элементов множества 2^{P_n} сходятся к элементам того же множества 2^{P_n} (подмножествам). Другими словами, для корректного согласования свойств метрики Бервальда-Моора и топологии естественно топологизировать не исходное пространство P_n , а 2^{P_n} . При этом открытыми подмножествами 2^{P_n} будут специальные семейства подмножеств в 2^{P_n} . Мы ограничим обсуждение вопроса о метрической топологии Бервальда-Моора пространств H_n здесь лишь этими общими комментариями.

Назовем поличисло $A \in P_n$ пределом функции $f: P_n \rightarrow P_n$ в точке x_0 , если его вещественные компоненты A^i являются пределами соответствующих компонент функции f^i в обычном смысле. Аналогично, назовем функцию $f: P_n \rightarrow P_n$ непрерывной в точке $x_0 \in P_n$, если в этой точке непрерывны в обычном смысле ее вещественные компоненты. Эквивалентное условие непрерывности:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (46)$$

Снова отметим, что пределы и непрерывность функций поличисловой переменной, формулировка которых опиралась бы на норму, ассоциируемую с метрикой Бервальда-Моора, будут обладать очень странными свойствами. Рассмотрим функцию поличисловой переменной, задаваемую формулой:

$$\mathcal{D}(x) = \sum_{s=1}^n ((1 - (-1)^s)D(x^s) + (1 - D(x^s))(1 - (-1)^{s+1}))e_s, \quad (47)$$

где D — стандартная функция Дирихле от вещественной переменной. Несмотря на то, что ни одна из компонент функции $\mathcal{D}(x)$ не имеет предела ни в одной точке, функция

$\mathcal{D}(x)$ имеет (условный) предел по метрике Бервальда-Моора в любой точке, поскольку, к примеру

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |\mathcal{D}(x) - 0|_{BM} = 0.$$

Далее, несмотря на разрывность всех компонент функции $\mathcal{D}(x)$, эта функция "непрерывна" в "метрической топологии", ассоциированной с метрикой Бервальда-Моора. Кавычки подчеркивают тот факт, что (псевдо)норма Бервальда-Моора не порождает никакой топологии в классическом смысле этого слова.

3.4 R -линейные и P_n -линейные отображения

Назовем отображение $\ell: P_n \rightarrow P_n$ R -линейным (P_n -линейным), если

$$\ell(\lambda x + \mu y) = \lambda \ell(x) + \mu \ell(y) \tag{48}$$

для всяких $x, y \in P_n$ и всяких $\lambda, \mu \in R$ (всяких $\lambda, \mu \in P_n$.) Очевидно, что свойство P_n -линейности является более сильным, чем свойство R -линейности, поэтому класс P_n -линейных отображений является подмножеством (подпространством) R -линейных отображений. Общий вид R -линейных и P_n -линейных отображений устанавливает следующая

Теорема 2. 1) *Общий вид R -линейного отображения $\ell: P_n \rightarrow P_n$ имеет следующее представление:*

$$\ell(x) = \sum_{s=1}^n \alpha_s \overset{s}{x}, \tag{49}$$

где $\alpha_s \in P_n$.

2) *Общий вид P_n -линейных отображений имеет представление (49) с $\alpha_s = 0$ для всех $s = 1, \dots, n-1$ и произвольным $\alpha_n \in P_n$.*

Доказательство. 1) В силу R -линейности с одной стороны:

$$\ell(x) = \ell\left(\sum_{s=1}^n x^i e_i\right) = \sum_{s=1}^n x^i \ell(e_i) = \sum_{s,k=1}^n x^i \omega_i^k e_k, \tag{50}$$

где мы ввели обозначение ω_i^k для вещественных коэффициентов разложения поличисел $\ell(e_i)$ по изотропному базису: $\ell(e_i) = \sum_{k=1}^n \omega_i^k e_k$. С другой стороны, для любого набора поличисловых величин $\{\alpha_s\}_{s=1, \dots, n}$ мы будем иметь:

$$\sum_{s=1}^n \alpha_s \overset{s}{x} = \sum_{s,q=1}^n (\alpha_s^q e_q) \sum_{r,l=1}^n (\sigma_l^{sr} x^l e_r) = \sum_{s,r,l=1}^n \alpha_s^r \sigma_l^{sr} x^l e_r, \tag{51}$$

где α_s^q — вещественные коэффициенты разложения α_s по изотропному базису, σ_l^{sr} — матрица s -ого сопряжения (сопряжение — R -линейная операция и ее действие на координаты поличисла в изотропном базисе определяется набором матриц циклических перестановок), а последнее звено равенства (51) было получено с учетом таблицы умножения (4) элементов изотропного базиса. Приравнивая коэффициенты в (50) и (51) при произвольной комбинации $x^l e_r$ мы получаем после надлежащих переобозначений индексов суммирования:

$$\omega_l^r = \sum_{s=1}^n \alpha_s^r \sigma_l^{sr} \quad (\text{по } r \text{ нет суммирования!}). \tag{52}$$

Остается показать, что система матричных уравнений (52) разрешима относительно α_s^r . В этом случае, коэффициенты α_s^r будут однозначно выражаться через заданные самим

R -линейным отображением коэффициенты ω_l^r . Система (52) будет разрешима, если любое сечение пространственной кубической матрицы σ по второму верхнему индексу (т.е. квадратная матрица, составленная из элементов σ_l^{sr} при любом фиксированном r) будет обратимо в смысле обычном для квадратных матриц. Для выяснения вопроса об обратимости этих матриц заметим, что компоненты пространственной матрицы σ_l^{sr} задаются следующей общей формулой:

$$\sigma_l^{sr} = \delta_l^{r-s}, \quad (53)$$

при этом вычитание верхних индексов понимается по модулю n (т.е. $r - s = n + (r - s)$ при $r - s < 0$). Формула (53) утверждает, что матрицы комплексных сопряжений C^s получаются из единичной матрицы последовательными циклическими перестановками ее строк (следовательно, они все невырожденны). Но любая квадратная матрица с компонентами σ_l^{sr} при фиксированном r имеет аналогичную структуру (верхний индекс δ -символа в (53) последовательно пробегает те же значения), следовательно матрицы сечения кубической матрицы в (53) при фиксированном s и фиксированном r — это один и тот же набор матриц, в котором сечения отличаются лишь порядком расположения. Стало быть интересующие нас сечения невырожденны, каждое из них обратимо, а система (52) однозначно разрешима.

2) Расписывая условие P_n -линейности для общего представления (49), получим с одной стороны для $\ell(\beta x)$:

$$\begin{aligned} \ell(\beta x) &= \sum_{s=1}^n \alpha_s \beta^s x^s = \sum_{s,k=0}^n (\alpha_s^k e_k) \sum_{r,q=1}^n (\sigma_r^{sq} \beta^r e_q) \sum_{l,p=1}^n (\sigma_l^{sp} x^l e_p) \\ &= \sum_{s,k,l,r=1}^n \alpha_s^k \sigma_r^{sk} \sigma_l^{sk} \beta^r x^l e_k. \end{aligned} \quad (54)$$

С другой стороны

$$\beta \ell(x) = \sum_{r=1}^n \beta^r e_r \sum_{s,k=1}^n \alpha_s^k e_k \sum_{p,l=1}^n \sigma_p^{sl} x^p e_l \sum_{s,k,p=1}^n \alpha_s^k \beta^k \sigma_p^{sk} x^p e_k. \quad (55)$$

В силу произвольности β и x должны быть равны коэффициенты при одинаковых комбинациях $\beta^r x^p e_k$ в (54) и (55), откуда после надлежащего переобозначения индексов суммирования получается система ограничений на α_s^k следующего вида:

$$\sum_{s=1}^n \alpha_s^k \sigma_r^{sk} \sigma_l^{sk} = \sum_{s=1}^n \delta_r^k \alpha_s^k \sigma_l^{sk}. \quad (56)$$

Для случая $k = r$ равенство (56) принимает более простой вид:

$$\sum_{s=1}^n \alpha_s^r \sigma_r^{sr} \sigma_l^{sr} = \sum_{s=1}^n \alpha_s^r \sigma_l^{sr} \quad (57)$$

С учетом (53) соотношению (57) можно придать следующий вид:

$$\sum_{s=1}^n \alpha_s^r \delta_r^{r-s} \delta_l^{r-s} = \sum_{s=1}^n \alpha_s^r \delta_l^{r-s}. \quad (58)$$

В силу невырожденности матрицы-сечения δ_l^{r-s} при фиксированном r (см. обсуждение в предыдущем пункте доказательства), на компоненты δ_l^{r-s} можно "сократить" справа и слева в (58). В результате получим равенство без суммирования:

$$\alpha_s^r \delta_r^{r-s} = \alpha_s^r. \quad (59)$$

При $s = 0 \pmod n$ соотношение (59) дает тождество $\alpha_0^r = \alpha_0^r$, а при $s \neq 0 \pmod n$ оно выполняется только при $\alpha_s^k = 0$, $s = 1, 2, \dots, n - 1$. При $k \neq r$ мы получим из (56)

$$\sum_{s=1}^n \alpha_s^k \sigma_r^{sk} \sigma_l^{sk} = \sum_{s=1}^n \alpha_s^k \delta_r^{k-s} \delta_l^{k-s} = 0.$$

При $r \neq l$ дельта-символы в последней сумме отличны от нуля при разных s и мы получим тождество. При $r = l$ мы получим сумму с квадратом дельта-символа, которая равна сумме с первой степенью дельта-символа ($(\delta_s^k)^2 = \delta_s^k$), которая при условии $k \neq r$ и с учетом того, что $\alpha_s^k = 0$ при $s \neq 0 \pmod n$, обращается в нуль тождественно. \square

3.5 Классы o и O

Здесь и далее под ε -окрестностью точки x_0 будем понимать евклидов куб $Q_\varepsilon^n(x_0)$ с центром в точке x_0 и ребрами длины 2ε , параллельными координатным осям некоторой изотропной системы координат. Назовем индексом функции $f: P_n \rightarrow P_n$ в точке x поличисло $\text{Ind}(f(x))$. Рассмотрим множество $\mathcal{C}_{(a,\varepsilon)}(P_n)$ функций $P_n \rightarrow P_n$ которые непрерывны (в топологии прямой суммы евклидовых метрик) в $Q_\varepsilon^n(a)$ и каждая из которых имеет постоянный индекс в $Q_\varepsilon^n(a) \setminus \{a\}$. Для пары функций f и g из $\mathcal{C}_{(a,\varepsilon)}(P_n)$ с упорядоченными индексами в $Q_\varepsilon^n(a) \setminus \{a\}$ (т.е. при условии $\text{Ind}(f(x)) \leq \text{Ind}(g(x))$ при $x \in Q_\varepsilon^n(a) \setminus \{a\}$), будем говорить, что $f = o(g)$ в точке a , если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{60}$$

Если у пары функций f и g из $\mathcal{C}_{(a,\varepsilon)}(P_n)$ индексы совпадают на всей окрестности $Q_\varepsilon^n(a)$ и предел в (60) существует и отличен от нуля, то будем говорить, что $f = O(g)$ (или эквивалентно $g = O(f)$) в точке a . Очевидно, что отношения o и O между поличисловыми функциями в некоторой точке при условии упорядоченности значений индексов эквивалентны стандартным отношениям o и O между отличными в $Q_\varepsilon^n(a) \setminus \{a\}$ от тождественного нуля компонентами f и g .

3.6 Дифференцируемые функции

Назовем функцию $f: P_n \rightarrow P_n$ дифференцируемой в точке $x_0 \in P_n$, если ее приращение в этой точке представимо в виде:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = L(x_0, \Delta x) + B(x_0, \Delta x), \tag{61}$$

где $L(x_0, \Delta x)$ — R -линейная поличисловая функция относительно переменной Δx и непрерывная по x_0 , а $B(x_0, \Delta x)$ — функция, находящаяся в отношении "поли- o -малое" с Δx , т.е. представимая в виде:

$$B(x_0, \Delta x) = \sum_{s=1}^n \beta_s(x_0) o(\Delta \overset{s}{x}), \tag{62}$$

где $\beta_s(x_0)$ — некоторые непрерывные поличисловые функции от переменной x_0 . Функцию L мы, как обычно, называем дифференциалом функции f в точке x_0 на приращении Δx и обозначаем $df(x_0, \Delta x)$. Согласно утверждения теоремы 2, дифференциал представим в следующем виде:

$$df(x_0, \Delta x) = \sum_{m=1}^n \alpha_m(x_0) \Delta \overset{m}{x}. \tag{63}$$

Подставляя (62)-(63) в (61), получим с учетом (12) для компонент (61) следующее представление:

$$f^s(x_0^1 + \Delta x_0^1, \dots) - f^s(x_0^1, \dots) = \sum_{m=1}^n (\alpha_{ms} \Delta x^{s-m} + \beta_{ms} o_s(\Delta^m x)), \quad (64)$$

где по определениям (62) и (12) компоненты $o_s(\Delta^m x)$ функций $o(\Delta^m x)$ удовлетворяют равенствам:

$$\lim_{\Delta x^{s-m} \rightarrow 0} \frac{o_s(\Delta^m x)}{\Delta x^{s-m}} = 0. \quad (65)$$

Последовательно переходя к пределам при приращениях по одной из координат, получаем в качестве следствия условия дифференцируемости (61) существование всех частных производных и равенства:

$$\alpha_{ms}(x_0) \equiv \frac{\partial f^s}{\partial x^{s-m}}. \quad (66)$$

Рассмотрим формальные дифференциальные операторы $\{\partial\}_{k=1, \dots, n}^k$, определяемые по формуле:

$$\partial \equiv C^k(\partial), \quad (67)$$

где $\partial \equiv \sum_{s=1}^n e_s \partial_s$. Введение этих операторов мотивируется следующими соображениями, аналогичными мотивирующим соображениям для введения операторов ∂_z и $\partial_{\bar{z}}$ в комплексном анализе [7]. Умножая равенства

$$x^k = x^{n-k+1} e_1 + x^{n-k+2} e_2 \dots + x^{2n-k} e_n, \quad (68)$$

которые можно понимать как формулы перехода от вещественных координат к поличисловым, последовательно на e_l ($l = 1, \dots, n$) получим серию равенств:

$$e_1 x^{n-k+1} = e_1^k x; \quad e_2 x^{n-k+1} = e_2^{k+1} x; \quad \dots \quad e_n x^{n-k+1} = e_n^{k+n} x, \quad (69)$$

откуда получаем обратные формулы перехода от поличисловых переменных к вещественным⁷:

$$x^l = \sum_{k=1}^n x^{k-l} e_k, \quad (72)$$

где нумерация сопряжений как обычно производится по модулю n . Теперь, в соответствии с формулами (72) будем иметь по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} f = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial x^k} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^s} e_{k+s} \equiv \partial^k f \quad (73)$$

⁷Отметим для полноты картины, что формальная "якобиева матрица" задается компонентами:

$$\frac{\partial x^s}{\partial x^l} = \frac{\partial x^s}{\partial x^l} = e_{l+s}, \quad (70)$$

а якобианы — это невырожденные элементы из множества классификаторов $\Upsilon(P_n)$. Отметим также, что в силу (70) имеет место тождество:

$$\frac{\partial x^s}{\partial x^l} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial x^s}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x^l} = \sum_{m=1}^n e_{s+m} e_{l+m} = I_n \delta_l^s. \quad (71)$$

в соответствии с определением (67).

С учетом (12) и (66) будем иметь:

$$\overset{k}{\partial} f = \sum_{s=1}^n e_s \partial_{s-k} \sum_{m=1}^n f^m e_m = \sum_{m=1}^n \partial_{m-k} f^m e_m = \sum_{m=1}^n \alpha_{km} e_m. \quad (74)$$

Соотношение (74) можно записать более компактно в матричном виде:

$$Df = \alpha \cdot e, \quad (75)$$

где D столбец, составленный из операторов $\overset{k}{\partial}$, Df — "произведение" столбца на поличисловой скаляр f , α — вещественная матрица с компонентами α_{km} , e — столбец, составленный из базисных элементов алгебры P_n , умножение в правой части (75) стандартное матричное (матрица на столбец).

3.7 Голоморфные функции поличисловой переменной

Определим теперь *голоморфные функции поличисловой переменной* как такие отображения $P_n \rightarrow P_n$, у которых линейная часть L в (61) является P_n -линейной, а $B = \beta(x_0) o(\Delta x)$. В соответствии со второй частью теоремы 2, приращение P_n -голоморфной функции можно представить в виде:

$$\Delta f = \alpha(x_0) \Delta x + \beta(x_0) o(\Delta x), \quad (76)$$

где α и β — некоторые непрерывные функции $P_n \rightarrow P_n$. Класс голоморфных функций является весьма узким подклассом дифференцируемых функций, который характеризуется равенствами $\alpha_{ms} = 0$ для всех $m = 1, \dots, n - 1$. В соответствии с (75) эти условия можно записать с помощью формальных дифференциальных операторов $\{\overset{k}{\partial}\}$:

$$\overset{k}{\partial} f = 0, \quad k = 1, \dots, n - 1. \quad (77)$$

В компонентах условия (77) принимают вид *поличисловых условий Коши-Римана в изотропном базисе*:

$$\frac{\partial f^s}{\partial x^k} = 0 \quad \text{при} \quad s \neq k. \quad (78)$$

Таким образом, *голоморфные функции поличисловой переменной в изотропном базисе характеризуются произвольным набором $\{f^s\}_{s=1, \dots, n}$ n вещественно-дифференцируемых функций одной переменной*:

$$f(x) = f^1(x^1)e_1 + \dots + f^n(x^n)e_n. \quad (79)$$

Сделаем несколько замечаний по поводу голоморфных функций поличисловой переменной.

1. Несмотря на внешнюю схожесть выражений (79) и (40), выражение (79) описывает существенно более широкий класс функций, поскольку в нем на компоненты f^s накладываются лишь условия гладкости, а не аналитичности в отличие от (40). Таким образом, в отличие от классического комплексного анализа, *классы аналитических и голоморфных функций поличисловой переменной существенно различны* (аналитические являются подмножеством голоморфных).

2. Как и в комплексном случае, условию голоморфности можно придать вид условия независимости производной от направления. Действительно, расписывая условие дифференцируемости в общей форме (64) при фиксированном (невырожденном) направлении приращения $\Delta x = \Upsilon(\Delta x)\varrho e^x$, ($\chi = \text{const}_{P_n}$) получим:

$$\Delta f = \sum_{m=1}^n \alpha_m(x_0) \Upsilon(\Delta x)^m \varrho^m e^{mx} + \beta_m(x_0, \chi) o_m(\varrho), \quad (80)$$

получим для производной по невырожденному направлению χ в точке x_0 :

$$\frac{df}{d\chi}(x_0) \equiv \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Upsilon(\Delta x)\varrho e^x) - f(x_0)}{\Upsilon(\Delta x)\varrho e^x} = \sum_{m=1}^n \alpha_m(x_0) \Upsilon(\Delta x)^m / \Delta x e^{m-x}. \quad (81)$$

В общем случае значение производной df/dx дифференцируемой функции f при фиксированном направлении дифференцирования χ зависит от выбора этого направления. Если же функция f P_n -голоморфна, то зависимость от направления в (81) пропадает (аналогично комплексному случаю).

3. Сопоставляя формулы (79) и (40) с общим видом элемента конформных преобразований (21), мы приходим к выводу о том, что *голоморфные функции поличисловой переменной — это как раз те функции, которые осуществляют конформные преобразования метрики Бервальда-Моора*. Далее мы увидим, что с точностью до перестановки координат голоморфные функции — это *в точности* те функции, которые осуществляют конформные преобразования метрики. Инвариантность углов между невырожденными векторами X, Y касательного пространства $T_x H_n$ проверяется прямой выкладкой с учетом определения (33):

$$\phi(X, Y) = |\chi_{Y/X}| \xrightarrow{f} \phi(X', Y') = \phi(f'X, f'Y) = |\chi_{f'Y/f'X}| = |\chi_{X/Y}| = \phi(X, Y), \quad (82)$$

где $f' \equiv df/dx$ и учтено, что закон преобразования векторов при голоморфных преобразованиях координат задается простым алгебраическим правилом: $X' = f' \cdot X$.

4. Аналогично классическому комплексному анализу в точках, в которых модуль поличисловой производной f' голоморфной функции обращается в нуль:

$$|f'| = |\Delta_f|^{1/n} = 0, \quad (83)$$

где $\Delta_f = \prod_{s=1}^n \partial f^s / \partial x^s$ — (вещественный) якобиан преобразования координат, соответствующего голоморфной функции f , условие конформности преобразования может нарушаться. Например отображение $x \rightarrow x^2$ неконформно в точке $x = 0$ (рассуждение, приведенное в предыдущем пункте не пройдет ввиду того, что в определение экспоненциального угла входит норма векторов, которую мы на всех этапах рассуждения полагали отличной от нуля).

5. Перенесение всех предыдущих рассмотрений на случай тех или иных вырождений может потребовать специального исследования. Мы проведем его в одной из будущих публикаций.

3.8 Обобщенно-голоморфные функции поличисловой переменной

Рассмотренное выше условие голоморфности в форме равенства нулю некоторого набора частных производных первого порядка (77) допускает многочисленные обобщения, которые могут быть полезными в приложениях. Обозначим посредством \mathcal{A}_k^n поличисловое

линейное пространство гладких функций $f: P_n \rightarrow P_n$, удовлетворяющих уравнению:

$$\overset{k}{\partial} f = 0. \tag{84}$$

Другими словами, $\mathcal{A}_k^n = \ker \overset{k}{\partial}$. Нетрудно написать общий вид элемента $f \in \mathcal{A}_k^n$, переходя к вещественным координатам. Согласно (84)

$$\overset{k}{\partial} f = \sum_{s=1}^n \partial_{s-k} f_s e_s = 0, \tag{85}$$

откуда условие принадлежности f классу \mathcal{A}_k^n выражается формулами для компонент:

$$\frac{\partial f^s}{\partial x^{s-k}} = 0, \quad s = 1, \dots, n. \tag{86}$$

Теперь, с учетом соотношений (77), можно сказать, что определенный выше класс голоморфных функций описывается как пересечение ядерных подпространств вида:

$$\mathcal{G}_0^n \equiv \bigcap_{s=1}^{n-1} \mathcal{A}_s^n. \tag{87}$$

Аналогично, определим⁸ классы голоморфных функций \mathcal{G}_k^n $k = 1, \dots, n - 1$ посредством соотношения:

$$\mathcal{G}_k^n \equiv \bigcap_{s \neq k} \mathcal{A}_s^n. \tag{88}$$

Будем называть множество функций из класса \mathcal{G}_k^n *k-голоморфными*. В координатном представлении общий k -голоморфный элемент описывается формулой:

$$f(x) = \sum_{s=1}^n f^s(x^{s-k}) e_s = C^k g(x), \tag{89}$$

где $g(x) \in \mathcal{G}_0^n$.

Можно продолжить построенное обобщение и далее. Для этой цели рассмотрим обобщенное условие голоморфности в виде набора мономных дифференциальных уравнений вида:

$$\prod_{m=1}^n \left(\overset{m}{\partial} \right)^{k_\alpha^m} f \equiv D^{k_\alpha} f = 0. \tag{90}$$

В выражении (90) k_α — элемент n -мерной целочисленной неотрицательной решетки Z_+^n , k_α^m — его целочисленные неотрицательные компоненты, $\alpha = 1, \dots, r$ — число условий типа (90). Для краткости мы ввели символическое обозначение D^{k_α} — "вектор в степени вектор" ("вектор" D был введен ранее в формуле (75)), определение которого очевидно:

$$U^V = U_1^{V_1} U_2^{V_2} \dots U_n^{V_n}. \tag{91}$$

Ввиду того, что каждое условие вида (90) параметризуется целочисленным вектором, а композиция пары таких условий (которая является дифференциальным следствием исходных условий) характеризуется суммой целочисленных векторов, имеем взаимно-однозначное отображение дифференциальных операторов вида (90) в кольцо Z_+^n над Z_+ .

⁸Здесь и далее предполагается, что все функции имеют непрерывные частные производные такого порядка, который необходим для корректности вводимых определений.

Очевидно, задавая условие голоморфности набором элементов в Z_+^n , целесообразно ограничиваться линейно-независимыми⁹ в Z_+^n элементами кольца Z_+^n . Вводя обозначения:

$$\mathcal{A}_{k_\alpha}^n \equiv \ker D^{k_\alpha}, \quad (92)$$

получаем в качестве обобщенных классов голоморфных функций пересечения ядерных пространств вида:

$$\mathcal{G}_{(k_1, \dots, k_r)}^n \equiv \bigcap_{\alpha=1}^r \mathcal{A}_{k_\alpha}^n. \quad (93)$$

Рассмотренные выше классы $\mathcal{G}_k^n \equiv \mathcal{G}_{(E_1, \dots, \widehat{E_k}, \dots, E_n)}^n$, где $\{E_i\}_{i=1, \dots, n}$ — набор базисных векторов решетки Z_+^n (у E_i на i -ом месте стоит единица, на остальных местах — нули), а "шляпка", как обычно, означает принудительный пропуск соответствующего элемента.

Опишем более подробно структуру пространства $\mathcal{A}_{pE_k}^n$. Соответствующий ему аннулирующий оператор D^{pE_k} может быть представлен в виде:

$$D^{pE_k} \equiv (\partial)^p = (\partial)^{p-1} \circ \overset{k}{\partial}, \quad (94)$$

что вместе с определением (84) для \mathcal{A}_k^n дает следующее символическое уравнение для общего элемента $f \in \mathcal{A}_{pE_k}^n$:

$$D^{(p-1)E_k} f = \mathcal{A}_k^n. \quad (95)$$

Снова используя представление

$$D^{(p-1)E_k} = (\partial)^{p-2} \circ \overset{k}{\partial}, \quad (96)$$

и выполняя символическое интегрирование (95), получим:

$$D^{(p-2)E_k} f = \overset{k}{x} \otimes \mathcal{A}_k^n + \mathcal{A}_k^n. \quad (97)$$

Продолжая этот процесс далее, получим общий вид представителя класса голоморфности $\mathcal{G}_{pE_k}^n = \mathcal{A}_{pE_k}^n$:

$$\mathcal{A}_{pE_k}^n = \bigoplus_{q=0}^{p-1} \overset{k}{x}^q \otimes \mathcal{A}_k^n \quad (98)$$

или в явном виде:

$$\mathcal{A}_{pE_k}^n \ni f = f_0 + f_1 \overset{k}{x} + f_2 \overset{k}{x}^2 + \dots + f_{p-1} \overset{k}{x}^{p-1}, \quad (99)$$

где все $f_i \in \mathcal{A}_k^n$. Формулы типа (98) будем называть *формулами приведения* $\mathcal{A}_{pE_k}^n$ к \mathcal{A}_k^n . Можно выписать аналогичную формулу приведения и общих ядерных пространств $\mathcal{A}_{k_\alpha}^n$ к пространствам \mathcal{A}_k^n :

$$\mathcal{A}_{k_\alpha}^n = \bigoplus_{s=1}^n \bigoplus_{q=0}^{k_\alpha^s - 1} \overset{s}{x}^q \otimes \mathcal{A}_s^n, \quad (100)$$

справедливость которой вполне очевидна из предыдущего рассмотрения.

В заключение этого раздела опишем специальный класс $\mathcal{G}_{E_1 + \dots + E_n}^n$ -голоморфных функций, определяемый инвариантным (полискалярным) дифференциальным оператором:

$$\mathcal{O}_n \equiv \|\partial\|^n I_n \equiv \prod_{s=1}^n \overset{s}{\partial}. \quad (101)$$

⁹Несмотря на конечномерность Z_+^n как подмножества в Z^n , Z_+^n бесконечномерно как кольцо над Z_+ . К примеру, бесконечная последовательность элементов $(0, 0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), (2, 0, \dots, 0), \dots$ линейно независима в Z_+^n .

Оператор \bigcirc_n является поличисловой версией двумерного оператора Лапласа $\Delta_2 = 4\partial_z\partial_{\bar{z}}$ и многомерным обобщением 2-мерного волнового оператора $\square_2 = 4\partial_h\partial_{\bar{h}}$, где $h \in P_2$. По этой причине класс $\mathcal{G}_{E_1+\dots+E_n}^n$ будем для краткости называть *полигармоническими функциями* и обозначать $\text{Harm}(P_n)$. В соответствии с общей формулой приведения (100), мы получаем для этого класса следующее общее симметричное представление:

$$\text{Harm}(P_n) = \bigoplus_{k=1}^n \mathcal{A}_k^n \tag{102}$$

или в координатном виде:

$$\text{Harm}(P_n) \ni f = \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n f_k^s e_s, \tag{103}$$

где f_k^s — вещественные функции $R^{n-1} \rightarrow R$, удовлетворяющие условиям:

$$\frac{\partial f_k^s}{\partial x^k} = 0, \quad s, k = 1, \dots, n. \tag{104}$$

Сделаем несколько замечаний.

1. Концепция \mathcal{G}^n -голоморфности (обобщенной голоморфности) помимо формальной возможности оправдывает себя тем, что каждому типу этой голоморфности отвечает некоторая система дифференциальных уравнений на компоненты соответствующих голоморфных функций, играющих роль *обобщенных поличисловых условий Коши-Римана*. Так, для k -голоморфности они имеют вид

$$\frac{\partial f^s}{\partial x^l} = 0 \quad \text{при} \quad l \neq s - k, \quad s = 1, \dots, n, \tag{105}$$

вытекающий из (89); для $\mathcal{G}_{E_k}^n$ -голоморфных функций эти условия выражаются уравнениями (86); для полигармонических функций "условия Коши-Римана" принимают вид

$$\frac{\partial^n f^s}{\partial x^1 \dots \partial x^n} = 0, \quad s = 1, \dots, n, \tag{106}$$

вытекающий из (103). Отдельные интересные вопросы относятся к геометрической и физической интерпретациям этих условий. То обстоятельство, что эти интерпретации могут быть нетривиальными, можно заметить на некоторых частных случаях. К примеру, k -голоморфность характеризуется независимостью от направления производной k -голоморфной функции по переменной¹⁰ \bar{x} . Функции $\text{Harm}(P_2)$ — это в точности все гладкие решения 2-мерного волнового уравнения в области вне источников.

2. Аналогично тому, как в комплексном анализе конформные отображения комплексной плоскости описываются как голоморфными так и антиголоморфными функциями комплексной переменной (в области их некритических точек), в случае P_n конформные отображения реализуются алгебраическими аналогами голоморфных и антиголоморфных функций на C — k -голоморфными функциями (также в области их некритических точек). Действительно, общий вид элемента конформных преобразований, содержащих тождественное преобразование в (21), совпадает с классом 0-голоморфных функций. Класс k -голоморфных функций получается из класса 0-голоморфных действием оператора C^k :

$$\mathcal{G}_k^n = C^k(\mathcal{G}_0^n). \tag{107}$$

¹⁰В комплексном анализе функции, подчиняющиеся условию $\partial_z f = 0$ иногда называют *антиголоморфными*. Помимо конформного отображения они осуществляют локально изменение ориентации комплексной плоскости.

который геометрически действует на координаты многообразия H_n как оператор их циклической перестановки σ_k . Таким образом, если $f \in C_0(H_n) = \mathcal{G}_0^n$, то из условия

$$f^*(^{(n)}\epsilon) = \lambda \cdot ^{(n)}\epsilon, \quad (108)$$

выражающего конформность f (f^* — кодифференциал отображения f), в силу известного свойства кодифференциала композиции следует:

$$(\sigma_k \circ f)^*(^{(n)}\epsilon) = (f^* \circ \sigma_k^*)^{(n)*}({}^{(n)}\epsilon) = \lambda \cdot ^{(n)}\epsilon, \quad (109)$$

— свойство конформности для класса \mathcal{G}_k^n . Мы использовали в (109) факт инвариантности метрики Бервальда-Моора относительно циклических (на самом деле любых!) перестановок координат: $\sigma_k^*(^{(n)}\epsilon) = ^{(n)}\epsilon$. Отметим, что пополнение класса $C_0(H_n)$ классами \mathcal{G}_k^n с $k = 1, \dots, n-1$ не исчерпывает семейства всех конформных преобразований метрики ${}^{(n)}\epsilon$: остаются в стороне функции $P_n \rightarrow P_n$ вида σf , где $f \in \mathcal{G}_0^n$, а σ — оператор перестановки, не входящий в подгруппу циклических перестановок.

3. Остановимся немного на структуре кольца Z_+^n , которое классифицирует нам различные условия голоморфности. На этом кольце можно определить частичный порядок: назовем два различных элемента a и b из Z_+^n упорядоченными ($a < b$), если найдется $c \in Z_+^n$, такой, что $b = a + c$. Структура порядка на Z_+^n индуцирует включение соответствующих упорядоченным элементам Z_+^n классов голоморфности: $\mathcal{G}_a^n \subset \mathcal{G}_b^n$, если $a < b$. Если для двух классов \mathcal{G}_a^n и \mathcal{G}_b^n , входящих в совместное условие голоморфности (93), найдется элемент $M(a, b) \in Z_+^n$, такой что:

$$\mathcal{G}_a^n \cap \mathcal{G}_b^n = \mathcal{G}_{M(a,b)}^n, \quad (110)$$

то можно сократить число условий голоморфности на единицу, заменив классы, соответствующие элементам a и b , одним классом, соответствующим элементу $M(a, b)$. Это, очевидно возможно, только в том случае, когда у элементов a и b имеются общие меньшие элементы, при этом

$$M(a, b) \equiv \max_{c < a, c < b} c \quad (111)$$

— максимальный из них ¹¹. Отметим, что класс \mathcal{G}_0^n , состоящий из нулевой функции, лежит в пересечении любых классов голоморфности.

4. Назовем *модулем голоморфности* класса \mathcal{G}_a^n число

$$|\mathcal{G}_a^n| \equiv \sum_{s=1}^n a^s, \quad a \in Z_+^n \quad (112)$$

(это просто суммарный порядок соответствующего дифференциального монома). Число различных типов голоморфности модуля k в P_n дается следующей формулой:

$$B_k^n = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}, \quad (113)$$

которую нетрудно доказать по индукции.

¹¹Можно было бы также сказать, что объединению классов голоморфности, соответствующих элементам $a, b \in Z_+^n$, соответствует элемент $m(a, b)$, минимальный из элементов, одновременно больших a и b . Мы однако не рассматривали типов голоморфности, определяемых объединениями.

5. Рассматривая классы \mathcal{G}_a^n $a \in \mathbb{Z}_+^k$ как вершины n -мерной решетки и соединяя соседние классы стрелками, обозначающими вложения $\iota_i: \mathcal{G}_a^n \rightarrow \mathcal{G}_{a+E_i}^n$, мы получим n -мерный цепной комплекс $\mathcal{C}(\iota, D)$ для операторов ∂^k , точный в каждом звене, поскольку

$$\text{Im} \iota_i \subset \ker \partial^j. \tag{114}$$

Таким образом, на классах голоморфных функций определены (a, j) -когомологии

$$\mathfrak{H}_{(a,j)}^n \equiv \mathcal{G}_{a+E_j}^n / \mathcal{G}_a^n. \tag{115}$$

Формула приведения (100) фактически отражает строение \mathcal{G}_a^n в терминах классов его когомологий. Мы не развиваем в настоящей статье когомологический аспект обобщенной голоморфности далее.

6. Можно определить классы голоморфности еще более общего вида, рассматривая, к примеру, формальные полиномы $P[D, \mathfrak{C}]$ от $2n$ переменных с постоянными (поличисловыми) коэффициентами. Здесь

$$D = (\partial^1, \dots, \partial^n); \quad \mathfrak{C} = (C^1, \dots, C^m) \tag{116}$$

наборы дифференцирований и комплексных сопряжений (они не коммутируют друг с другом). Получающиеся условия голоморфности будут представлять собой довольно сложные системы дифференциальных уравнений¹² общего вида. Мы оставляем изучение этих возможностей для будущих публикаций.

3.9 Голоморфное продолжение

Рассмотрим гладкую кривую $\gamma: I \rightarrow P_n$, где I — любое связное подмножество вещественной прямой с граничными точками α_1 и α_2 (случай $\alpha_i = \pm\infty$ не исключаются). Пусть на кривой γ задана функция $f_0: \gamma(I) \rightarrow P_n$. Возникает вопрос: существует ли голоморфная (в каком-нибудь смысле) функция $f: L \rightarrow P_n$, где $\gamma(I) \subset L \subseteq P_n$, такая, что ее ограничение $f|_{\gamma(I)}$ совпадает с f_0 ?

Рассмотрим сначала случай *неизотропной* кривой γ , т.е. такой, которая не содержит кусков со скоростью \dot{x} нулевой нормы в метрике Бервальда-Моора. Здесь и далее точка обозначает дифференцирование по параметру $t \in I$. В этом случае, поличисловое представление кривой γ имеет вид¹³:

$$x(t) = \sum_{s=1}^n \varphi^s(t) e_s, \tag{118}$$

причем все $\varphi^s \neq \text{const}$ ни на одном из кусков I . Гладкую функцию $f_0: P_n \rightarrow P_n$ на кривой $\gamma \subset P_n$ можно понимать как функцию $I \rightarrow P_n$ вида:

$$f_0 \equiv \sum_{s=1}^n f_0^s(t) e_s, \tag{119}$$

¹²В отличие от предыдущих случаев эти уравнения не будут расщепляться на отдельные уравнения для компонент

¹³Соотношение (118) можно интерпретировать более наглядно, если ограничиться классом аналитических кривых. В этом случае

$$x(t) = \sum_{s=1}^n \varphi^s(t) e_s = F(tI_n), \tag{117}$$

где F — функция, определенная на части пространственной диагонали положительной компоненты P_n , имеющей смысл вещественной оси в P_n . Таким образом, в случае аналитических кривых мы можем рассматривать кривую γ как некоторую деформацию куска пространственной диагонали tI_n , ($t \in [\alpha_1; \alpha_2]$) в P_n .

т.е., фактически, тоже как кривую¹⁴ в P_n . Предполагая (локальную) обратимость компонент в (118), можно записать (119) следующим образом:

$$f_0 \equiv \sum_{s=1}^n f_0^s \circ (\varphi^s)^{-1} \circ \varphi(t) e_s. \quad (120)$$

Полагая теперь в (120) $f^s \equiv f_0^s \circ (\varphi^s)^{-1}$ и заменяя $\varphi^s(t) \rightarrow x^s$ (в s -ом слагаемом $\varphi^s(t)$ заменяем на x^s), мы получим требуемое продолжение вида:

$$f(x) = \sum_{s=1}^n f^s(x^s) e_s. \quad (121)$$

Оно удовлетворяет условию 0-голоморфности и, что очевидно из самого построения, локально единственно. Элементарная область L , на которую продолжается f_0 , представляет собой n -мерный евклидов параллелограмм

$$\mathcal{E}^n = [\varphi^1(\alpha'_1); \varphi^1(\alpha'_2)] \times \cdots \times [\varphi^k(\alpha'_1); \varphi^k(\alpha'_2)] \times \cdots \times [\varphi^n(\alpha'_1); \varphi^n(\alpha'_2)] \subseteq P_n, \quad (122)$$

где $\alpha'_1, \alpha'_2 \in I$ — границы подмножества области определения кривой γ , внутри которой все компоненты одновременно обратимы. Если кривая γ устроена не патологично, то ее область определения можно разбить на конечное (или, в крайнем случае, быть может счетное) число частей, на каждой из которых будет справедливо представление голоморфного расширения вида (121) с некоторым набором функций $\{f^s\}$, зависящим от выбора ветвей обратных (многозначных) функций $\{(\varphi^s)^{-1}\}$. При этом полная область голоморфного расширения будет представлять собой объединение параллелепипедов вида (122). Очевидно, в случае кривой общего положения, продолжение f_0 на все пространство P_n невозможно. Однозначные k -голоморфные расширения функции f_0 , заданной на кривой γ , получаются аналогично¹⁵

Рассмотрим теперь случай изотропной кривой. Предположим сначала, что только одна из компонент кривой имеет постоянное значение $x^q = \text{const} = a^q$ на некотором связном подмножестве $I' \subseteq I$ с граничными точками $\beta_1 \geq \alpha_1$ и $\beta_2 \leq \alpha_2$. Пусть при $\alpha_1 \leq t \leq \beta_1$ q -ая компонента кривой γ описывается непостоянной функцией $\phi_1(t)$, а при $\beta_2 \leq t \leq \alpha_2$ q -ая компонента кривой γ описывается непостоянной функцией $\phi_2(t)$. Будем обозначать обе эти компоненты однообразно с остальными компонентами посредством $\varphi^q(t)$. Ввиду непрерывности кривой $\phi_1(\beta_1) = \phi_2(\beta_2) = a^q$. Пусть f_0 — гладкая функция на кривой, задаваемая посредством соотношения (119). Для дальнейшего продвижения нам потребуется аналитичность компонент $\{f_0^s\}$ и $\{\varphi^s\}$. Для аналитических зависимостей мы можем утверждать, что $f_0^q(t) = A^q = \text{const}$ при $t \in [\beta_1; \beta_2]$. Рассмотрим произвольную гладкую функцию $\phi: R \rightarrow R$, область определения которой включает a^q , и положим

$$f^s(x^s) \equiv \begin{cases} f_0^s \circ (\varphi^s)^{-1}, & \varphi^s(\alpha_1) \leq x^s \leq \varphi^s(\beta_1), & s = 1, \dots, n; \\ A^q + \phi(x^q) - \phi(a^q), & s = q \text{ и } \varphi^s(\alpha_1) \leq x^s \leq \varphi^s(\alpha_2), & s = 1, \dots, \hat{q}, \dots, n; \\ f_0^s \circ (\varphi^s)^{-1}, & s \neq q \text{ и } \varphi^s(\alpha_1) \leq x^s \leq \varphi^s(\alpha_2), & s = 1, \dots, \hat{q}, \dots, n; \\ f_0^s \circ (\varphi^s)^{-1}, & \varphi^s(\beta_2) \leq x^s \leq \varphi^s(\alpha_2) & s = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (123)$$

в предположении, что соответствующие обратные функции существуют или выбраны их однозначные ветви. Тогда функция

$$f(x) = \sum_{s=1}^n \varphi^s(x^s) e_s, \quad (124)$$

¹⁴Которую, с учетом замечания предыдущей сноски, в случае аналитических функций можно понимать как последовательную деформацию отрезка $\lambda I_n \rightarrow \gamma \rightarrow \gamma'$.

¹⁵Для k -голоморфного расширения необходимо положить $f^s \equiv f_0^s \circ (\varphi^{s-k})^{-1}$.

у которой все компоненты за исключением q -ой фактически построены аналогично предыдущему случаю, а q -ая описывается формулой (123), совпадает на изотропной кривой γ с f_0 и является голоморфной. Произвол голоморфного продолжения функций с изотропных участков кривых заключается как в выборе функциональной зависимости, продолжающей постоянные компоненты (функция ϕ в (123) — произвольна), так и в выборе области голоморфного продолжения (ϕ как произвольная функция имеет произвольную область определения, включающую постоянное значение компоненты a^q). Область определения L функции (124) в общем случае остается объединением параллелепипедов. Действие операторов C^k на (124) позволяет получить соответствующие k -голоморфные расширения f_0 .

В случае, когда у изотропной кривой остаются постоянными несколько компонент, аналогичный произвол голоморфного расширения распространяется и на эти компоненты. При этом область голоморфного расширения "дробится" на параллелепипеды \mathcal{E}^n вида (122), грани которых параллельны координатным гиперплоскостям изотропной системы координат, а число параллелепипедов и координаты их граней определяются конкретным положением "точек поворота" компонент кривой и положением ее изотропных участков. Отметим, что мы показали возможность *голоморфного продолжения поличисловой функции с неизотропной кривой и лишь аналитического продолжения с изотропной*.

Рассмотрим в общих чертах возможность голоморфного продолжения функции f_0 с двумерной гладкой регулярной поверхности $\mathcal{S}_2 \subset P_n$. Предположим, что поверхность $\mathcal{S}_2: G_2 \rightarrow P_n$ (G_2 — область в R^2) описывается параметрически поличисловой функцией вида:

$$x(u, v) = \sum_{s=1}^n \varphi^s(u, v)e_s, \tag{125}$$

где $\varphi^s(u, v)$ — гладкие компоненты, удовлетворяющие условиям:

$$(1) \partial_u \vec{x} \wedge \partial_v \vec{x} \neq 0 \quad \text{и} \quad (2) |x_u||x_v| \neq 0. \tag{126}$$

В первом условии (126) геометрический радиус-вектор $\vec{x}(u, v)$ получается из поличисловой зависимости $x(u, v)$ заменой в ней $e_s \rightarrow \vec{e}_s$, а само условие выражает регулярность поверхности (локальный базис на поверхности невырожден). Второе условие представляет собой аналог условия неизотропности для кривых, которое может нарушаться теперь лишь на множестве меры нуль в G_2 . Регулярные поверхности с условием (2) в (126) будем называть *неизотропными*. Всякую поличисловую функцию на поверхности \mathcal{S}_2 можно рассматривать по аналогии со случаем кривых снова как поверхность \mathcal{S}'_2 , получаемую деформацией \mathcal{S}_2 и, стало быть, заданную в той же параметризации, что и \mathcal{S}_2 :

$$f_0 \equiv \sum_{s=1}^n f_0^s(u, v)e_s. \tag{127}$$

Сначала рассмотрим возможность 0-голоморфного продолжения зависимости (127). В этом случае мы должны построить поличисловую функцию вида (121), которая при ее ограничении на \mathcal{S}_2 давала бы (127). В компонентах вопрос сводится к исследованию совместности системы уравнений:

$$f^s(\varphi^s(u, v)) \equiv f_0^s(u, v) \quad (s = 1, \dots, n), \tag{128}$$

где φ^s и f_0^s заданные функции, а f^s подлежит отысканию. Из общих теорем многомерного вещественного анализа следует, что для локального существования функций f^s необходимо и достаточно обращение в нуль всех якобианов:

$$\frac{D(\varphi^s, f_0^s)}{D(u, v)} = 0, \quad s = 1, \dots, n. \tag{129}$$

Соотношения (129) можно записать более компактно на языке P_n -значных дифференциальных форм:

$$df_0 \wedge d\varphi = 0. \quad (130)$$

Условия (129) или (130) можно рассматривать как некоторые условия интегрируемости для голоморфного расширения. Мы видим, что, в отличие от 0-голоморфного продолжения с кривых, 0-голоморфное продолжение с поверхностей возможно лишь при достаточно жестких ограничениях как на саму поверхность, так и на функцию f_0 на ней. Очевидно, то же самое относится и ко всем типам k -голоморфных продолжений.

Более подходящим кандидатом на голоморфное продолжение с поверхности являются классы голоморфных функций $\mathcal{G}_{E_1, \dots, \hat{E}_i, \dots, \hat{E}_j, \dots, E_n}^n \equiv \mathcal{G}_{\hat{E}_i, \hat{E}_j}^n$. Рассмотрим для определенности вопрос о продолжении с поверхности в классе $\mathcal{G}_{\hat{E}_0, \hat{E}_1}^n$ голоморфности. В этом случае в компонентах вопрос о продолжении сводится к исследованию совместности системы функциональных уравнений вида:

$$f^s(\varphi^s(u, v), \varphi^{s-1}(u, v)) \equiv f_0^s(u, v), \quad s = 1, \dots, n. \quad (131)$$

Нетрудно видеть, что локально вопрос о возможности $\mathcal{G}_{\hat{E}_0, \hat{E}_1}^n$ -голоморфного продолжения решается положительно. Действительно, предполагая обратимость преобразований $(u, v) \mapsto (\varphi^s(u, v), \varphi^{s-1}(u, v))$ для всех $s = 1, \dots, n$, мы можем перейти в (131) к новым координатам: $x^s \equiv \varphi^s(u, v)$, $s = 1, \dots, n$. Тогда уравнения (131) фактически превращаются в определение искомых функций f^s , задающих искомое $\mathcal{G}_{\hat{E}_0, \hat{E}_1}^n$ -голоморфное продолжение:

$$f^s(x^s, x^{s-1}) \equiv f_0^s(\psi_1^s(x^s, x^{s-1}), \psi_2^s(x^s, x^{s-1})), \quad (132)$$

где отображение $\Psi^s: R^2 \rightarrow R^2$ с компонентами (ψ_1^s, ψ_2^s) является обратным к отображению $\Phi^s: R^2 \rightarrow R^2$ с компонентами $(\varphi^s, \varphi^{s-1})$. Вопрос о возможности голоморфных продолжений аналогичных типов $\mathcal{G}_{\hat{E}_i, \hat{E}_j}^n$ решается (локально!) также положительно. Элементарными областями голоморфного расширения остаются, как и в случае продолжений с кривых, евклидовы параллелепипеды.

Нетрудно сообразить, что аналогичным образом будут обстоять дела с возможностью $\mathcal{G}_{\hat{E}_{i_1}, \dots, \hat{E}_{i_k}}^n$ (все i_r — различны, назовем такое продолжение смешанным функциональной размерности k) продолжений с неизотропных подмногообразий $\mathcal{S}_m \subset P_n$ различных размерностей $m < n$: возможность смешанного голоморфного продолжения с функциональной размерностью $k < m$ имеется при выполнении достаточно жестких ограничений на подмногообразии \mathcal{S}_m и функцию f_0 на нем, а смешанное голоморфное продолжение с функциональной размерностью $k = m$ локально всегда возможно и (локально) единственно. При этом смешанные голоморфные продолжения с функциональной размерностью $m < k \leq n$ возможны и неединственны. Эти выводы проясняют общий характер корректных краевых задач, которые могут возникать в физических приложениях теории функций поличисловой переменной.

Мы не будем в настоящей статье касаться вопроса о голоморфных продолжениях более общего типа и вопроса о голоморфных продолжениях с изотропных подмногообразий \mathcal{S}_m при $m > 1$.

3.10 Интегральная теорема и формула Коши в P_n

Определим поличисловой интеграл от функции поличисловой переменной по гладкой параметризованной кривой γ по формуле:

$$\int_{\gamma} f dx \equiv \sum_{s=1}^n e_s \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f^s|_{\gamma} \dot{x}^s dt, \quad (133)$$

где $t \in [\alpha_1, \alpha_2] \subseteq R$ — параметр на кривой γ . В силу определения (133) существование и свойства поличислового интеграла от функции поличисловой переменной определяются существованием и свойствами обычных вещественных интегралов от компонент. Рассмотрим теперь некоторую 0-голоморфную поличисловую функцию f и рассмотрим поличисловой интеграл от нее по некоторому замкнутому контуру γ :

$$\langle \gamma, f \rangle \equiv \oint_{\gamma} f(x) dx. \quad (134)$$

Ввиду определения (133), s -ая компонента интеграла (γ_s — проекция γ на ось x^s):

$$\oint_{\gamma_s} f(x^s) dx^s = 0 \quad (135)$$

в силу формулы Ньютона-Лейбница. Очевидно, аналогичный вывод получится и для интегралов от k -голоморфных функций по замкнутым контурам, описываемым в терминах поличисловой переменной x^k :

$$\langle \gamma, f(x^k) \rangle \equiv \oint_{\gamma} f(x^k) d x^k = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (136)$$

Выражение (136) представляет собой ближайший алгебраический аналог классической теоремы Коши комплексного анализа.

Прежде чем перейти к поличисловой версии интегральной формулы Коши, рассмотрим поличисловой интеграл вида:

$$K^r \equiv \oint_{\gamma} (x - a)^r dx, \quad (137)$$

где $a \in P_n$, $a \notin \gamma$, $r \in Z$, γ — некоторый замкнутый контур в P_n . Поскольку функция $(x - a)^r$ аналитична при $x \neq a$, можем перейти к покомпонентной форме (137):

$$K^r = \sum_{s=1}^n e_s \int_{\gamma_s} (x^s - a^s)^r dx^s. \quad (138)$$

Если $r \geq 0$, то интеграл $K_r = 0$ в силу (136). Если проекция γ_s не включает в себя a^s , то соответствующая компонента $K_s^r = 0$ при всяком r . При $r < 0$ и $a^s \in \gamma^s$ интеграл K_s^r становится несобственным и строго говоря расходящимся. Его регуляризованное значение будет зависеть от выбора метода регуляризации. В настоящей статье мы выбираем регуляризацию, фактически основанную на приложении формулы Ньютона-Лейбница к расходящимся интегралам: несобственному интегралу от функции g приписывается значение $G(b) - G(a)$ (если оно существует в каком-нибудь смысле), где G — первообразная g , $a, b \in R$ — концевые точки. В нашем случае это правило дает $K_s^r = 0$, поскольку $a = b$. Поскольку смысл используемой нами регуляризации жестко привязан к изотропной системе координат, назовем выбранную нами регуляризацию *изотропной*¹⁶.

¹⁶Отметим, что в работе [23] в пространстве P_2 использовалась другая регуляризация, привязанная к гиперболической полярной системе координат (*полярная регуляризация*). Она давала для замкнутых контуров, охватывающих точку $a \in P_2$, значение $K^r = 0$ при любых вещественных r , а для контуров, состоящих из элементов конуса $\text{Con}(a)$ значение $K^r = 0$ при $r \neq -1$, а при $r = -1$ $K^{-1} = \pm j \ell_H$ (знаки \pm отражают два выбора направления обхода), где $j = e_1 - e_2$ — гиперболическая мнимая единица ($j^2 = +1$), а ℓ_H — бесконечная "фундаментальная константа" двумерной псевдоевклидовой геометрии, имеющая смысл размера пространства гиперболических углов (аналог 2π на евклидовой плоскости).

Рассмотрим теперь поличисловой интеграл типа Коши от 0-голоморфной функции f :

$$\oint_{\gamma} \frac{f(x)}{x-a} = \sum_{s=1}^n e_s \oint_{\gamma_s} \frac{f^s(x^s)}{x^s - a^s}, \quad (139)$$

где $a \notin \gamma$. Преобразуя подынтегральное выражение в (139):

$$\frac{f^s(x^s)}{x^s - a^s} = \frac{f^s(x^s) - f^s(a^s) + f^s(a^s)}{x^s - a^s} = f'^s(a^s) + \beta(x^s) + \frac{f^s(a^s)}{x^s - a^s}, \quad (140)$$

где в силу голоморфности f функция β — регулярна и непрерывна, и подставляя его в (139), получим с учетом (136) и равенства $K^{-1} = 0$ в изотропной регуляризации¹⁷:

$$\oint_{\gamma} \frac{f(x)}{x-a} = 0. \quad (141)$$

4 Геометрические аспекты H_n

В этом разделе мы остановимся на некоторых геометрических аспектах P_n или H_n , тесно связанных с введенными выше классами \mathcal{G}^n -голоморфных функций.

4.1 Многомерные версии теоремы Коши в P_n

Конструкции раздела (3.10) допускают многомерные обобщения. Прежде всего определим внешние P_n -значные дифференциальные голоморфные l -формы:

$$\omega_0^{k_1 \dots k_l} \equiv d x^{k_1} \wedge \dots \wedge d x^{k_l} = \sum_{s=1}^n dx^{s-k_1} \wedge \dots \wedge dx^{s-k_l} e_s. \quad (142)$$

В (142) все k_i различны, в левой части стоит элемент поличислового базиса P_n -значных голоморфных l -форм, а справа его разложение по базису в алгебре P_n . Очевидно, что не всякая P_n -значная дифференциальная l -форма является голоморфной. Например, таковой не будет 1-форма вида $dx^k I_n$. Нетрудно вывести необходимый критерий голоморфности l -формы вида:

$$\omega = \sum_{s=1}^n a_s dx^{k_1^s} \wedge \dots \wedge dx^{k_n^s} e_s. \quad (143)$$

Заметим, что коэффициенты a_s (постоянные или функции $P_n \rightarrow P_n$) выносятся в (143) за знак суммы в виде поличисловой величины $a = \sum_{s=1}^n a^s e_s$. Таким образом, ω можно всегда представить в виде $\omega = a\tilde{\omega}$, где $\tilde{\omega}$ дается формулой (143) при $a_s = 1$. Заметим теперь, что сумма значений индексов координат в s -ом слагаемом правой части (142) равна

$$t(s) = ls - (k_1 + \dots + \dots k_l) \bmod n, \quad (144)$$

следовательно разность соседних значений $t(s)$ равна:

$$t(s) - t(s-1) = ls - l(s-1) \bmod n = l \bmod n = \text{const} \bmod n, \quad (145)$$

т.е. не зависит от s . Таким образом, для того чтобы исследуемая нами форма $\tilde{\omega}$ была (пропорциональна) голоморфной, необходимо, чтобы суммы элементов k_j^i последовательных

¹⁷На P_2 в полярной регуляризации, для контуров, опирающихся на конус, в правой части (141) будет стоять $j\ell_H f(a)$ (см. пред. сноску).

строк $n \times l$ матрицы индексов координат в (143) отличались на l по модулю n . Разумеется, любая l -форма вида (143) может быть разложена по базису из голоморфных l -форм вида (142):

$$\omega = \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^n a_{k_1 \dots k_l} \omega_0^{k_1 \dots k_l} \quad (146)$$

где $a_{k_1 \dots k_l}$ — голоморфные компоненты (гладкие функции голоморфных координат). Это очевидно уже из подсчета вещественных размерностей соответствующих линейных пространств (они совпадают и равны nC_k^n). Обозначим пространство $(F(P_n)$ -модуль, $F(P_n)$ — кольцо гладких функций $P_n \rightarrow P_n$) дифференциальных форм степени l в P_n через $\bigwedge^l P_n$, а градуированную алгебру всех внешних форм $\bigwedge P_n$. Как и обычно

$$\bigwedge P_n = \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k P_n, \quad (147)$$

причем пространства $\bigwedge^0 P_n$ и $\bigwedge^n P_n$ изоморфны пространству функций $P_n \rightarrow P_n$. Определение внешнего дифференцирования $d: \bigwedge^l P_n \rightarrow \bigwedge^{l+1} P_n$ на $\bigwedge P_n$ очевидно. Приведем его выражение в голоморфных координатах:

$$d\omega \equiv \sum_{k, k_1, \dots, k_l=1}^n \frac{\partial a_{k_1 \dots k_l}}{\partial x^k} \omega_0^{kk_1 \dots k_l}. \quad (148)$$

Все свойства операции d , известные в вещественном анализе, остаются в силе и в P_n . Отметим лишь, что d коммутирует со всеми комплексными сопряжениями C^k .

Определим поличисловой интеграл от l -формы $\omega \in \bigwedge^l P_n$ по l -мерному подмногообразию \mathcal{S}_l следующим образом:

$$\langle \mathcal{S}_l, \omega \rangle \equiv \oint_{\mathcal{S}_l} \omega \equiv \sum_{s=1}^n e_s \oint_{\mathcal{S}_l} \omega_s, \quad (149)$$

где ω_s — s -ая компонента ω и каждое слагаемое под знаком суммы справа представляет собой стандартный вещественный интеграл от l -формы по l -мерному подмногообразию. Ввиду линейности операции разложения по поличисловому базису теорема Пуанкаре-Дарбу имеет место и для форм на P_n :

$$\int_{\mathcal{S}_{l+1}} d\omega = \oint_{\partial \mathcal{S}_{l+1}} \omega \quad (150)$$

(интеграл от дифференциала l -формы по $l+1$ -мерному подмногообразию в P_n равен интегралу от этой формы по l -мерной границе). Доказательство сводится к выписыванию поличисловых компонент (150) слева и справа и применению к ним стандартной вещественной версии теоремы Пуанкаре-Дарбу.

Перед тем как ввести следующее определение, напомним компактное доказательство теоремы Коши в комплексном анализе, основанное на комплексифицированной версии теоремы Пуанкаре-Дарбу [7]. Интеграл от произвольной гладкой функции $C \rightarrow C$ по замкнутому контуру $\gamma = \partial D$, где область D (и ее граница γ) не содержит особых точек, может быть сведен к интегралу по этой области:

$$\oint_{\gamma} f(z, \bar{z}) dz = \int_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz. \quad (151)$$

Если функция f — голоморфна в D (т.е. если всюду в D выполняется $\partial_{\bar{z}}f = 0$), то интеграл справа обращается в нуль и имеет место теорема Коши.

1-мерная версия именно этой ситуации фактически и была рассмотрена в предыдущем разделе. Ее многомерное обобщение в P_n мотивирует следующее определение. Назовем l -форму ω голоморфно-замкнутой, если в ее разложении (146) по голоморфному базису компоненты $a_{k_1 \dots k_l} \in \mathcal{G}_{\hat{E}_{k_1}, \dots, \hat{E}_{k_l}}^n$. Другими словами, голоморфно-замкнутые l -формы имеют вид:

$$\omega = \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^n a_{k_1 \dots k_l}(x^1, \dots, x^n) \omega_0^{k_1 \dots k_l}. \quad (152)$$

Замкнутость форм вида (152) проверяется простым вычислением (она очевидна). Голоморфно-замкнутые формы являются и точными, поскольку топологически P_n гомеоморфно R^n , а все группы когомологий R^n тривиальны. Разумеется, класс голоморфно-замкнутых форм представляет собой подмножество всех замкнутых форм (например 1-форма $\overset{1}{x} d \overset{2}{x} + \overset{2}{x} d \overset{1}{x} = d(x^1 x^2)$ — очевидно замкнута, но не является голоморфно-замкнутой), но многомерное поличисловое обобщение теоремы Коши наиболее естественно формулируется именно для голоморфно-замкнутых форм¹⁸. Обозначим этот класс посредством $CH_{(x)} \wedge^l P_n$, где индекс x указывает на отнесенность свойства замкнутости к некоторой системе изотропных координат (см. сноску).

Прежде всего, заметим, что формула (136) является частным случаем очевидного обобщения: $\langle \gamma, \omega \rangle = 0$, где $\omega \in CH_{(x)} \wedge^l P_n$. Действительно, в силу теоремы Пуанкаре-Дарбу имеем:

$$\langle \gamma, \omega \rangle = \oint_{\gamma} \omega = \int_{\partial^{-1}\gamma} d\omega = 0, \quad (153)$$

где $\partial^{-1}\gamma$ — любая гладкая регулярная поверхность, натянутая на контур γ . Соответственно, полным поличисловым обобщением теоремы Коши будет равенство нулю интеграла:

$$\langle \mathcal{S}_l, \omega \rangle = 0 \quad (154)$$

от всякой l -формы ω из класса $CH_{(x)} \wedge^l P_n$ по всякому замкнутому подмногообразию \mathcal{S}_l в P_n .

4.2 Контравариантная симметричная метрика и исчисление (ко)полиад

Рассмотрим пространство Бервальда-Моора H_n и метрику Бервальда-Моора ${}^{(n)}\epsilon$ в ней, отнесенную к некоторой изотропной системе координат (x^1, \dots, x^n) , в которой эта метрика имеет вид (18). Рассмотрим тензор ${}^{(n)}\tilde{\epsilon}$ вида:

$${}^{(n)}\tilde{\epsilon} \equiv \hat{\mathcal{S}}(\partial_1 \otimes \dots \otimes \partial_n), \quad (155)$$

который определяет "скалярное полипроизведение" в расслоении 1-форм $\wedge^1 H_n$ по формулам:

$$(\omega_1, \dots, \omega_n) \equiv \epsilon^{k_1 \dots k_n} (\omega_1)_{k_1} \dots (\omega_n)_{k_n} \equiv \text{perg} \begin{pmatrix} (\omega_1)_1 & \dots & (\omega_1)_n \\ \dots & \dots & \dots \\ (\omega_n)_1 & \dots & (\omega_n)_n \end{pmatrix}. \quad (156)$$

¹⁸Несколько забегаая вперед, отметим, что данное нами определение класса голоморфно-замкнутых 1-форм не является инвариантным относительно общекоординатных преобразований на P_n . Однако, оно является инвариантным относительно более узкого класса любых k -голоморфных преобразований, которые, как это было указано выше, являются конформными преобразованиями H_n .

В (156) мы использовали симметричный символ Леви-Чивиты с верхними индексами, определение которого аналогично (17). Тензор (155) будем называть *дуальным* или *обратным* к ${}^{(n)}\epsilon$. Это название оправдывается следующим свойством компонент ${}^{(n)}\epsilon$ и ${}^{(n)}\tilde{\epsilon}$:

$$\sum_{k_{r+1}, \dots, k_n} \epsilon_{k_1 \dots k_r k_{r+1} \dots k_n} \epsilon^{m_1 \dots m_r k_{r+1} \dots k_n} = \frac{n!(n-1)!}{(n+r-1)!} \text{perm} \begin{pmatrix} \delta_{k_1}^{m_1} & \dots & \delta_{k_r}^{m_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k_1}^{m_r} & \dots & \delta_{k_r}^{m_r} \end{pmatrix} \quad (157)$$

Равенства левой и правой частей (157) с точностью до коэффициента следуют из соображений симметрии, вид коэффициента следует из редукционной формулы для перманентов, вытекающей из простого подсчета перестановок:

$$\sum_{r=1}^n \begin{pmatrix} r & r_2 & \dots & r_s \\ r & m_2 & \dots & m_s \end{pmatrix} = (n+s-1) \begin{pmatrix} r_2 & \dots & r_s \\ m_2 & \dots & m_s \end{pmatrix}, \quad (158)$$

где

$$\begin{pmatrix} r_1 & \dots & r_s \\ m_1 & \dots & m_s \end{pmatrix} \equiv \text{perm} \begin{pmatrix} \delta_{m_1}^{r_1} & \dots & \delta_{m_s}^{r_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{m_1}^{r_s} & \dots & \delta_{m_s}^{r_s} \end{pmatrix} \quad (159)$$

— сокращенное обозначение для перманента, составленного из упорядоченных дельта-символов. Таким образом, в каждом H_n имеется, как минимум, четыре типа полискалярного произведения: два полностью антисимметричных произведения n -ок векторов или 1-форм, ассоциированных с формами объемов в касательном и кокасательном расслоениях:

$$\text{vol} \equiv dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad \widetilde{\text{vol}} \equiv \partial_1 \wedge \dots \wedge \partial_n, \quad (160)$$

которые порождаются операцией внешнего (кососимметричного) произведения \wedge и два симметричных произведения n -ок векторов или 1-форм, задаваемых симметричными полилинейными формами (18) и (155). Отметим, что формы (160) существуют на любом гладком многообразии, в то время как наличие форм (18) и (155) — специфическая особенность пространств H_n . Для восстановления более полной симметрии между антисимметричными и симметричными метриками, определим операцию \vee симметрического произведения векторов или 1-форм по формулам:

$$X \vee Y \equiv X \otimes Y + Y \otimes X; \quad \omega \vee \lambda \equiv \omega \otimes \lambda + \lambda \otimes \omega, \quad (161)$$

для всяких $X, Y \in TH_n$ и $\omega, \lambda \in T^*H_n$. Теперь мы можем написать по аналогии с (160):

$${}^n\epsilon(X_1, \dots, X_n) \equiv \text{Vol}(X_1, \dots, X_n); \quad {}^n\tilde{\epsilon}(\omega_1, \dots, \omega_n) \equiv \widetilde{\text{Vol}}(\omega_1, \dots, \omega_n), \quad (162)$$

где

$$\text{Vol} \equiv dx^1 \vee \dots \vee dx^n; \quad \widetilde{\text{Vol}} \equiv \partial_1 \vee \dots \vee \partial_n \quad (163)$$

— "симметричные формы объемов".

Аналогию между антисимметричными тензорами (p -формами или p -векторами) и симметричными тензорами (p -полиады и p -кополиады) можно продолжить и далее. Определим расслоение p -полиад $\mathbb{V}^p H_n$ как множество всех симметричных ковариантных тензорных полей. Они образуют $F(H_n)$ -модуль, базисом которого являются набор полиад $\{dx^{k_1} \vee \dots \vee dx^{k_p}\}_{k_1=1, \dots, n}$. Можно определить теперь градуированную алгебру полиад $\mathbb{V} H_n$, в которой операция полиадного умножения \vee между полиадами $P = \sum_{k_1, \dots, k_p} P_{k_1 \dots k_p} dx^{k_1} \vee \dots \vee dx^{k_p} \in \mathbb{V}^p H_n$ и $Q = \sum_{l_1, \dots, l_q} Q_{l_1 \dots l_q} dx^{l_1} \vee \dots \vee dx^{l_q} \in \mathbb{V}^q H_n$ определяется по формуле:

$$P \vee Q = Q \vee P \equiv \sum_{k_1, \dots, k_p} \sum_{l_1, \dots, l_q} P_{k_1 \dots k_p} Q_{l_1 \dots l_q} dx^{k_1} \vee \dots \vee dx^{k_p} \vee dx^{l_1} \vee \dots \vee dx^{l_q}. \quad (164)$$

Очевидно

$$\bigvee H_n = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigvee^p H_n. \quad (165)$$

Аналогично определяется симметричная градуированная алгебра кополиад $\bigvee^* H_n$ (т.е. алгебра контравариантных симметричных тензоров).

По аналогии с операциями дуализации (звезда Ходжа), ассоциированной с антисимметричными формами объемов, можно определить дуализацию *смешанных полиад* (или кополиад). Назовем полиаду $P \in \bigvee^p H_n$ смешанной, если она в каждой точке представляется в виде линейной комбинации *элементарных смешанных p -полиад* вида $dx^{k_1} \vee \dots \vee dx^{k_p}$, где все k_i различны¹⁹ (для смешанных кополиад элементарной кополиадой будет $\partial_{k_1} \vee \dots \vee \partial_{k_p}$, где все k_i различны). Линейное подпространство (оно не образует подалгебры) всех смешанных полиад степени p обозначим $\text{Mx}_{(x)} \bigvee^p H_n$ $0 \leq p \leq n$ (подпространство смешанных кополиад будет $\text{Mx}_{(x)}^* \bigvee^p H_n$). Определим отображение $\otimes: \text{Mx}_{(x)} \bigvee^p H_n \rightarrow \text{Mx}_{(x)} \bigvee^{n-p} H_n$ (*симметричная звезда Ходжа*) как линейный оператор, действующий на базис смешанных полиад по формуле:

$$\otimes(dx^{k_1} \vee \dots \vee dx^{k_p}) \equiv dx^{r_1} \vee \dots \vee dx^{r_{n-p}}, \quad (166)$$

где n цифр $(k_1, \dots, k_p, r_1, \dots, r_{n-p})$ (возможно после надлежащей перестановки) образуют последовательность $1, \dots, n$ (определение симметризованной звезды Ходжа на кополиадах аналогично). (Отметим, что симметрия операции \vee позволяет не следить за знаками и ориентацией.) К примеру, формы Vol и $\widetilde{\text{Vol}}$ в (163) с помощью симметричной звезды Ходжа записываются более компактно:

$$\text{Vol} = \otimes 1; \quad \widetilde{\text{Vol}} = \otimes 1^*, \quad (167)$$

где 1^* — постоянная (единичная) функция на H_n , рассматриваемая как элемент формального пространства кополиад $\bigvee^{0*} H_n$, которое мы отождествляем с $F(H_n)$.

Определим симметричный дифференциал \textcircled{d} , как R -линейное отображение $\bigvee^p H_n \rightarrow \bigvee^{p+1} H_n$, действующее в координатах по формуле:

$$\textcircled{d} P \equiv \sum_{k_1, \dots, k_p} \frac{\partial P_{k_1 \dots k_p}}{\partial x^s} dx^s \vee dx^{k_1} \vee \dots \vee dx^{k_p}, \quad (168)$$

где $P = \sum_{k_1, \dots, k_p} P_{k_1 \dots k_p} dx^{k_1} \vee \dots \vee dx^{k_p}$ — произвольный элемент $\bigvee^p H_n$. Отметим следующие свойства \textcircled{d} :

$$\textcircled{d}(P_1 + P_2) = \textcircled{d}P_1 + \textcircled{d}P_2 \text{ (линейность); } \quad \textcircled{d}(P \vee Q) = \textcircled{d}P \vee Q + P \vee \textcircled{d}Q \text{ (правило Лейбница);} \quad (169)$$

$$\textcircled{d} f = df, \text{ где } f \in \bigvee^0 H_n.$$

В этой статье мы не будем развивать теорию интегрирования полиад и полиадные (симметричные) аналоги теоремы Пуанкаре-Дарбу.

¹⁹Снова отметим, что определение смешанных полиад и кополиад не является инвариантным относительно множества всех координатных преобразований на H_n , однако оно является инвариантным относительно ее бесконечномерного подмножества конформных преобразований, осуществляемых набором k -голоморфных функций.

4.3 Геометрия производных функции поличисловой переменной

Для физических приложений важно уметь строить инвариантные (скалярные, векторные, тензорные и т.д.) характеристики из поличисловых объектов и их производных. Выше уже отмечалось, что преобразования, осуществляемые множествами k -голоморфных функций (и даже их расширениями до конформных преобразований CH_n) играют особую роль в геометрии P_n (точнее в геометрии H_n и алгебре P_n), поэтому мы отдельно проанализируем вопрос тензориальности геометрических объектов относительно преобразований CH_n (класс таких объектов, естественно, существенно шире, чем класс общековариантных тензоров). Будем именовать общековариантные тензоры G -тензорами, а величины, являющиеся тензорами относительно конформных преобразований CH_n но не являющиеся тензорами относительно общекоординатных преобразований — C -тензорами. Прежде всего, рассмотрим голоморфную производную от некоторой скалярной поличисловой функции:

$$\overset{k}{\partial} f = \sum_{s=1}^n \partial_{s-k} f^s e_s. \quad (170)$$

Ее вещественные компоненты — это различные частные производные от (различных!) скалярных функций. Как это хорошо известно из дифференциальной геометрии, ни частная производная по отдельности, ни вся их совокупность от разных функций в (170) не образует геометрического объекта относительно общих координатных диффеоморфизмов. Общековариантным геометрическим объектом является совокупность всех частных производных от всех компонент f , которые можно объединить в один голоморфный дифференциал:

$$df = \sum_{k=1}^n f^k d x^k = \sum_{s=1}^n df^s e_s, \quad (171)$$

компоненты которого также представляют собой общековариантные геометрические объекты — 1-формы df^s . В отличие от римановой геометрии с квадратичной метрикой, в геометрии Бервальда-Моора нет никакого простого способа построить из df или df^s вектор градиента. Конструкция соприкосновения, которую мы рассмотрим в следующем разделе, позволяет каждой 1-форме ставить в соответствие градиент, как контравариантный тензор валентности $n - 1$. Аналогично, векторным полям конструкция соприкосновения будет сопоставлять полиаду валентности $n - 1$.

Остановимся подробнее на преобразованиях из множества CH_n , имеющих следующий общий вид:

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x'^1, \dots, x'^n) = (f^1(x^{\sigma^{-1}(1)}), \dots, f^n(x^{\sigma^{-1}(n)})), \quad (172)$$

где σ — некоторая перестановка, действующая на множестве индексов $1, \dots, n$. Оператор $\overset{k}{\partial}$ преобразуется при таких преобразованиях по закону:

$$\overset{k}{\partial} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f^{\sigma(s-k)}}{\partial x^{s-k}} \overset{s-\sigma(s-k)}{\partial'} e_s, \quad (173)$$

что легко устанавливается при помощи формул (172), (72) и обратной к ней. При m -голоморфных преобразованиях σ действует на индексы как циклическая перестановка C^m . В этом случае $\sigma(p) = p + m$, $\sigma^{-1}(p) = p - m$, и (173) принимает вид:

$$\overset{k}{\partial} = (\overset{k}{\partial} f)^{\overset{k-m}{\partial'}}. \quad (174)$$

Наконец, при 0-голоморфных преобразованиях ($\sigma = \text{id}$) (173) принимает диагональный вид:

$$\overset{k}{\partial} = (\overset{k}{\partial} f)^{\overset{k}{\partial'}}, \quad (175)$$

что означает, что линейное пространство векторов голоморфного базиса приводится в этом случае к прямой сумме одномерных пространств и каждый из векторов $\overset{k}{\partial}$ ведет себя как вектор при 0-голоморфных преобразованиях координат. В промежуточной ситуации, когда перестановка σ имеет инвариантные подмножества индексов, линейное пространство векторов голоморфного базиса распадается на векторные подпространства и соответствующие подмножества множества $\{\overset{k}{\partial}\}$ становятся векторами относительно преобразований (171) с таким σ .

Опираясь на полученные результаты, обсудим роль преобразований $CH_n^0 \subset CH_n^k \subset CH_n$ (соответственно 0-голоморфных, k -голоморфных ($k = 2, \dots, n - 1$) и конформных), которую они играют в определенных ранее конструкциях. Тот факт, что преобразования из CH_n сохраняют углы, был доказан в замечании 2 раздела 3.8. Тесно связанный с этим факт — инвариантность конуса (в касательном пространстве) относительно преобразований из CH_n . Действительно, если в некоторой изотропной системе координат локальный конус определяется как объединение гиперплоскостей $dx^l = 0$, $l = 1, \dots, n$, то и в новой системе координат уравнения этих гиперплоскостей будут иметь в совокупности такой же вид: $dx^l = 0$, $l = 1, \dots, n$. Очевидно, что множества CH_n^0 , CH_n^k и CH_n замкнуты каждое по отдельности относительно композиций своих элементов, т.е. образуют группоиды. Если ограничиваться обратимыми голоморфными преобразованиями (для чего достаточно потребовать, чтобы производные всех f^s в (171) по своим единственным аргументам нигде не обращались в нуль), то преобразования CH_n^0 , CH_n^k и CH_n образуют вложенные в друг друга группы. Подгруппа CH_n^k группы CH_n играет особую роль в определениях обобщенной голоморфности, данных в разделе 3.8. Действительно, дифференциальные мономы $D^{k\alpha}$ смешанного типа (т.е. с $k_\alpha = E_{i_1} + E_{i_2} + \dots + E_{i_m}$ с различными i_r), входящие в условие (90), являются тензорами относительно преобразований CH_n^k , и не являются таковыми относительно CH_n . Первый вывод прямо следует из формул (174)-(175), а второй — из рассмотрения простого примера в малой размерности. Таким образом, *CH_n^k -инвариантный смысл можно придать лишь смешанным типам голоморфности*. Остальные введенные типы инвариантны лишь относительно P_n -линейных преобразований, а их инвариантное описание относительно CH_n^k -преобразований возможно лишь в терминах соответствующих дифференциальных полиномов. Легко проверяется, что введенные в 3.10 голоморфные l -формы конформно инвариантны относительно CH_n , а голоморфно-замкнутые формы инвариантны относительно CH_n . Также инвариантными относительно CH_n являются пространства $\text{Mx}_{(x)} \bigvee^p H_n$ $0 \leq p \leq n$ и $\text{Mx}_{(x)}^* \bigvee^p H_n$ смешанных полиад и кополиад, введенные в 4.2.

4.4 Скалярные инварианты

Для построения поличисловой теории поля с помощью принципа наименьшего действия, необходимо иметь набор независимых скалярных вещественных инвариантов, функцией которых может являться лагранжиан теории. Опираясь на опыт построения алгебраической теории в H_2 [16], можно сформулировать следующие вопросы, на которые мы должны ответить, прежде чем записать принцип наименьшего действия в поличисловой теории поля произвольной размерности:

- Как строить вещественные комбинации полей и их производных?
- Как строить скалярные комбинации полей и их производных?

Наводящие общие соображения, и конкретные соображения, которые возникают при анализе структуры теории в H_2 , мы перечислим в виде следующих пунктов.

1. Уравнения теории H_2 — второго порядка, они включают в себя скалярный волновой

оператор

$$\square_2 = 4 \frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial}{\partial \bar{h}}. \quad (176)$$

В многомерных поличисловых теориях на место оператора \square_2 естественным образом выступает оператор n -ого порядка \bigcirc_n , введенный ранее в (101).

2. Таким образом, внутренняя логика многомерных теорий обнаруживает, что их уравнения должны быть дифференциальными уравнениями n -ого порядка вида:

$$\bigcirc_n F = {}^{(n)}J, \quad (177)$$

где ${}^{(n)}J$ — источник поличислового потенциала.

3. По аналогии с H_2 источник ${}^{(n)}J$ должен выражаться через потенциал \mathcal{U} самодействия поличислового поля.
4. Из общего вида уравнений Эйлера-Лагранжа теории поля и вида (177), следует, что искомым лагранжиан теории должен зависеть от производных $n - 1$ порядка.
5. Лагранжиан теории должен также быть скаляром относительно координатных преобразований.
6. В теории H_2 неголоморфность X и кинетический член Y вариационно эквивалентны, т.е. интегралы от них по \mathcal{H}_2 отличаются только граничными членами. Это свойство оказывается существенным в H_2 для применимости экстравариационного принципа [26]. Можно ожидать, что подобное свойство должно выполняться и в H_n .
7. Одновременная подстановка $h \leftrightarrow \bar{h}$, $F \leftrightarrow \bar{F}$ в действии теории H_2 не меняет X, Y , а следовательно и всего действия. Можно ожидать, что одновременные подстановки:

$$h \rightarrow C(h) \rightarrow \dots C^n(h) \rightarrow h, \quad F \rightarrow C(F) \rightarrow \dots C^n(F) \rightarrow F, \quad (178)$$

обобщающие приведенную выше подстановку для H_2 , также не должны менять соответствующих фундаментальных комбинаций и самого действия. Эта симметрия по существу отражает равноправие координат в исходном пространстве поличисел и вещественность выражений.

Простейшим (и, по всей видимости, единственным) набором фундаментальных комбинаций производных гиперкомплексного потенциала в H_n , удовлетворяющий всем перечисленным выше свойствам, является набор $\{X^{(k)}\}_{k=1, \dots, n}$, который описывается следующей общей формулой:

$$X^{(k)} \equiv \sum_{s=1}^n \frac{\partial^{k+s-2} F}{\partial x^{s-1}} \frac{\partial^{k+s-1} F}{\partial \bar{x}^s \partial x^{s+1} \dots \partial x^{s+n-2}}. \quad (179)$$

Для \mathcal{H}_2 эта формула дает уже известные комбинации:

$$X^{(1)} = F_{,h} \bar{F}_{,\bar{h}}; \quad X^{(2)} = \bar{F}_{,h} F_{,\bar{h}} \quad (180)$$

— кинетический член и неголоморфность, ранее обозначавшиеся как Y и X соответственно.

Сделаем три замечания.

1. Инварианты $X^{(k)}$ являются C -скалярами, но не являются G -скалярами (это проще всего увидеть, на примере X и Y в H_2 (формула (180))). Таким образом, *поличисловая теория поля (теория первого уровня), построенная на основе лагранжиана вида $L = L(X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$ будет представлять собой не общековариантную теорию,*

а CH_n -инвариантную теорию. Это обстоятельство осталось незамеченным в работе ([16]). Тем не менее, после вывода уравнений поличислового потенциала, их решения и физической интерпретации посредством конструкции соприкосновения, мы приходим к общековариантной теории поля (теории второго уровня). Отметим, что G -скаляром является комбинация общековариантных обобщений $X^{(k)}$ вида:

$$X^{(1)} + \dots + X^{(n)}, \quad (181)$$

где в каждом $X^{(k)}$ частные производные в вещественных компонентах заменены на ковариантные (см. раздел 4.6).

2. Легко указать фундаментальный вещественный (G)-скаляр ξ_n , зависящий от самого поля, а не его производных. Он будет иметь вид

$$\xi_n = \|F\|^n \equiv \prod_{s=1}^n \overset{s}{F} I_n. \quad (182)$$

В работе [16] он не использовался.

3. Нетрудно построить и другие вещественные (C -)скаляры, например:

$$K^{(s)} \equiv \|d \overset{s}{F}\|^n, \dots \quad (183)$$

но они будут приводить к теории поля с низшими производными (меньшими n).

4.5 Соприкасающиеся объекты

Рассмотрим координатные m -плоскости L_m изотропной системы координат, которые определяются набором уравнений вида:

$$x^{i_1} = 0, \dots, x^{i_{n-m}} = 0. \quad (184)$$

Как это следует из (18), стандартная процедура ограничения метрики на подмногообразии дает тривиальный результат: ${}^{(n)}\epsilon|_{L_m} = 0$. Более корректный переход на подмногообразия L_m осуществляется посредством *конструкции соприкосновения*: мы говорим, что метрика

$${}^{(m)}\epsilon \equiv {}^{(n)}\epsilon(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_{n-m}}, \underbrace{\phantom{\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_{n-m}}}}_{m \text{ пустых аргументов}}) \quad (185)$$

соприкасается с метрикой ${}^{(n)}\epsilon$ вдоль координатных векторных полей $\{\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_{n-m}}\}$ и обозначаем этот факт следующим образом:

$${}^{(m)}\epsilon \equiv \mathcal{E}^{n-m} \uparrow {}^{(n)}\epsilon, \quad (186)$$

где $\mathcal{E}^{n-m} = (\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_{n-m}})$ — система $n-m$ векторных полей (задающая некоторое распределение в H_n). Тот факт, что выражение в правой части (185) является m -мерной метрикой Бервальда-Моора на m -плоскости L_m (что отражено в обозначениях левой части (185)), проверяется элементарно. Это означает в частности, что конструкция соприкосновения (185) устанавливает изоморфизм (изометрию) L_m и H_m .

Разумеется, конструкция соприкосновения распространяется не только на координатные векторные поля для решения проблемы ограничения метрики на изотропные подпространства. Конструкцию (185) можно обобщить на любую совокупность $\{X_1, \dots, X_{n-m}\}$

векторных полей, причем некоторые поля в этой совокупности могут повторяться. Будем называть эту совокупность *опорой* и обозначать ее посредством более подробной записи

$$\mathcal{E}^{n-m} \equiv \{X_1^{\alpha_1}, \dots, X_k^{\alpha_k}\}, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_k = n - m. \quad (187)$$

В случае с повторяющимися векторными полями опоры \mathcal{E}^{n-m} уже не описывается в терминах классического распределения. На опорах \mathcal{E}^{n-m} можно ввести $F(H_n)$ -алгебру, полагая

$$\mathcal{E}_1^{n-m_1} \uplus \mathcal{E}^{n-m_2} = \begin{cases} \mathcal{E}^{n-m_1-m_2}, & m_1 + m_2 \leq n \\ \mathcal{E}^\emptyset, & m_1 + m_2 > n \end{cases}, \quad (188)$$

где $\mathcal{E}^{n-m_1-m_2}$ получается из \mathcal{E}^{n-m_1} и \mathcal{E}^{n-m_2} объединением их элементов (для общих векторных полей их индексы-показатели α_i складываются), а \mathcal{E}^\emptyset — пустая опора, для которой

$$\mathcal{E}^\emptyset \uparrow^n \epsilon \equiv 0. \quad (189)$$

Умножение опор на скалярные функции производится покомпонентно (каждое векторное поле независимо от его кратности умножается на функцию). Алгебра опор следующим образом взаимодействует с операцией соприкосновения:

$$\mathcal{E}^{n-m_2} \uparrow (\mathcal{E}^{n-m_1} \uparrow^n \epsilon) = (\mathcal{E}^{n-m_1} \uplus \mathcal{E}^{n-m_2}) \uparrow^n \epsilon; \quad (f \mathcal{E}^{n-m}) \uparrow^n \epsilon = f^{n-m} (\mathcal{E}^{n-m} \uparrow^n \epsilon). \quad (190)$$

Рассмотрим соприкасающиеся конструкции, основанные на применении идеи соприкосновения к результатам раздела (4.3). Исследование таких конструкций необходимо для формулировки поличисловой теории поля, в которой основным объектом является поличисловой скалярный потенциал, а наблюдаемые физические характеристики строятся из этого потенциала и его производных. Как было установлено выше, голоморфный дифференциал df от функции поличисловой переменной определяет набор обычных дифференциалов: $df = \sum_{s=1}^n df^s e_s$. Мы можем рассмотреть совокупность

$$\tilde{\mathcal{E}}^{n-m} = \{(df^{k_1})^{\alpha_1}, \dots, (df^{k_r})^{\alpha_r}\}, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_r = n - m \quad (191)$$

и образовать ее соприкосновение с метрикой ${}^{(n)}\tilde{\epsilon}$. В результате мы получим m -вектор

$$\tilde{\mathcal{E}}^{n-m} \uparrow^n \tilde{\epsilon} \equiv \overrightarrow{df}_{k_\alpha}, \quad (192)$$

где $k_\alpha \in Z_+$ — вектор неотрицательной n -мерной решетки (обозначение как в разделе 3.8). Таким образом, голоморфный дифференциал, описывающийся в общем случае набором n 1-форм — вещественных дифференциалов от компонент поличислового потенциала — порождает множество полилинейных по этим 1-формам симметричных m -кополиад. В частности, ковариантные опоры вида $\tilde{\mathcal{E}}^{n-1}$ порождают посредством конструкции соприкосновения различные векторные поля.

Конструкцию соприкосновения можно распространить и на вторую метрику — форму объема vol или vol . Теперь, правда, соприкасающиеся конструкции будут отличны от нуля только в том случае, если опоры не содержат повторяющихся элементов (индексы α_i в (37) либо 1 либо 0). Получающиеся конструкции на ковариантных опорах $\tilde{\mathcal{E}}^{n-m}$ будут давать m -векторы (антисимметричные тензоры валентности m). Комбинируя эти m -векторы с симметричными m -кополиадами, можно получать контравариантные тензоры с различными типами симметрии.

Составляя опору $\tilde{\mathcal{D}}^{n-m}$ из дифференциальных операторов ∂_i ($i = 1, \dots, n$):

$$\tilde{\mathcal{D}}^{n-m} = \{\partial_{k_1}, \dots, \partial_{k_{n-m}}\} \quad (193)$$

(все k_i различны) и соприкасая вдоль нее метрику Бервальда-Моора, получим тензорный дифференциальный оператор $n - m$ порядка валентности m :

$$\tilde{\partial}^{n-m} \uparrow^n \epsilon \equiv \vec{D}_{(n-m)}, \quad (194)$$

или в компонентах:

$$D_{(n-m)}^{i_1 \dots i_m} \equiv \epsilon^{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_{n-m}} \partial_{j_1} \dots \partial_{j_{n-m}}. \quad (195)$$

Заменой ∂_i на ∇_i (см. следующий раздел) эти операторы превращаются в общековариантные. Относительно преобразований CH_n эти операторы ведут себя как тензоры и с частными производными. Отметим, что оператор $\vec{D}_{(n)}$ совпадает с оператором \bigcirc_n , введенным в разделе 3.8.

В качестве наглядного примера рассмотрим соприкасающиеся конструкции в H_3 . Выберем в качестве поличислового потенциала функцию \ln :

$$f(x) = \ln x = \sum_{s=1}^3 \ln x^s e_s. \quad (196)$$

Голоморфный дифференциал дает 1-формы $\omega_s = dx^s/x^s$, $s = 1, 2, 3$. Опоры $\mathcal{E}_s^1 = \{\omega_s\}$ и $\mathcal{E}_s^2 = \{\omega_i, \omega_j\}$, (все i, j, s — различны), порождают вырожденные соприкасающиеся объекты, поэтому рассмотрим усредненные симметричные объекты в H_3 :

$$\tilde{g} \equiv \sum_{s=1}^3 \tilde{\mathcal{E}}_s^1 \uparrow^{(3)} \epsilon; \quad V \equiv \sum_{s=1}^3 \tilde{\mathcal{E}}_s^2 \uparrow^{(3)} \epsilon; \quad S \equiv \tilde{\mathcal{E}}^3 \uparrow^{(3)} \epsilon, \quad (197)$$

где $\tilde{\mathcal{E}}^3 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ — единственная опора третьего порядка, дающая отличный от нуля скаляр S . В явном виде компоненты симметричного тензора \tilde{g} , векторного поля V и скаляра S выражаются следующими формулами:

$$(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/x^3 & 1/x^2 \\ 1/x^3 & 0 & 1/x^1 \\ 1/x^2 & 1/x^3 & 0 \end{pmatrix}; \quad (V) = \left(\frac{2}{x^2 x^3}, \frac{2}{x^1 x^3}, \frac{2}{x^1 x^2} \right); \quad S = \frac{6}{x^1 x^2 x^3}. \quad (198)$$

Представляет интерес более подробно рассмотреть свойства 3-мерного риманова многообразия, которое порождает конструкция соприкосновения с поличисловым логарифмом. Ковариантная метрика g имеет вид:

$$(g) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2 x_3}{x_1} & x_3 & x_2 \\ x_3 & -\frac{x_1 x_3}{x_2} & x_1 \\ x_2 & x_1 & -\frac{x_1 x_2}{x_3} \end{pmatrix}. \quad (199)$$

Алгебра изометрий метрики (199) 3-мерна и представляется следующими векторными полями:

$$X_{(1)} = x^1 \partial_1 - x^3 \partial_3; \quad X_{(2)} = x^2 \partial_2; \quad X_{(3)} = x^1 \ln \left[\frac{x^2}{x^3} \right] \partial_1 + x^2 \ln \left[\frac{x^3}{x^1} \right] \partial_2 + x^3 \ln \left[\frac{x^1}{x^2} \right] \partial_3. \quad (200)$$

Можно сделать вывод о том, что риманово многообразие, соприкасающееся с метрикой Бервальда-Моора вдоль голоморфной 1-формы поличислового логарифма, однородно. Если в качестве координаты T мирового времени выбрать комбинацию $\Delta^{1/2} = (x^1 x^2 x^3)^{1/2}$ (для компоненты в положительном октанте), то на поверхности \mathcal{S}_T^2 одновременных событий $T = \text{const}$ и мы будем иметь

$$dx^3 = -T^2 \left(\frac{dx^1}{(x^1)^2 x^2} + \frac{dx^2}{(x^2)^2 x^1} \right). \quad (201)$$

Таким образом, ограничение метрики g на \mathcal{S}_T^2 примет вид:

$$h_T = \sum_{i,k=1}^3 g_{ik} dx^i \otimes dx^k|_{x^1 x^2 x^3 = T^2} \stackrel{201}{=} \dots = -2T^2((du^1)^2 + (du^2)^2 + du^1 du^2), \quad (202)$$

где $u^1 = \ln x^1$, $u^2 = \ln x^2$. Из вида (202) следует, что подмногообразие \mathcal{S}_T^2 одновременных событий — плоские и евклидовы (!), что еще раз подтверждает вывод об аналогичности свойств сферы \mathcal{S}_{BM}^2 свойствам 2-мерного евклидова пространства, упомянутый в разделе 2.6.1, а также иллюстрирует факт о нетривиальном включении в многомерные гиперболические пространства евклидовых пространств с компактной группой вращений.

4.6 Ковариантная производная

Рассмотрение предыдущих конструкций в произвольной криволинейной (т.е. неизотропной) системе координат требует введения ковариантной производной ∇ . Минимальная ее версия получится, если мы потребуем обращения в нуль ее кручения:

$$\text{Tors}_{\nabla}(X, Y) \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \quad (203)$$

потребуем коммутативность ковариантного дифференцирования со сверткой (т.е. согласованность ковариантного дифференцирования векторов и 1-форм) и ковариантное постоянство метрики Бервальда-Моора:

$$\nabla^{(n)} \epsilon = 0. \quad (204)$$

Переходя к координатному представлению связности с помощью символов Кристоффеля:

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad (205)$$

где ∂_i — координатные векторные поля, и дифференцируя компоненты метрики Бервальда-Моора (в произвольной системе координат), получим²⁰:

$$\frac{\partial E_{k_1 \dots k_n}}{\partial x^l} \equiv \nabla_{\partial_l}^{(n)} \epsilon(\partial_{k_1}, \dots, \partial_{k_n}) = \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \Gamma_{k_s l}^r E_{k_1 \dots r \dots k_n}, \quad (206)$$

где была использована симметричность символов Кристоффеля по нижним индексам, вытекающая из равенства нулю кручения и ковариантное постоянство метрики Бервальда-Моора. Из формулы (206) и формулы (157) для свертки многомерной матрицы метрики Бервальда-Моора и обратной к ней, легко получить следующую формулу:

$$\sum_{k_1, \dots, k_{n-1}} E^{mk_1 \dots k_{n-1}} \frac{\partial E_{rk_1 \dots k_{n-1}}}{\partial x^s} = \frac{2n(n-1)!}{n+1} \Gamma_{sr}^m + \frac{(n-1)(n-1)!}{n+1} \sum_{l=1}^n \Gamma_{ls}^l \delta_r^m. \quad (207)$$

Образуя свертку выражения (207) по индексам m и s и выражая свернутые символы Кристоффеля, находим:

$$\sum_{l=1}^n \Gamma_{lr}^l = \frac{n+1}{(3n-1)(n-1)!} \sum_{m, k_1, \dots, k_{n-1}} E^{mk_1 \dots k_{n-1}} \frac{\partial E_{rk_1 \dots k_{n-1}}}{\partial x^m}. \quad (208)$$

²⁰Для экономии букв мы оставляем для метрики Бервальда-Моора обозначение $^{(n)}\epsilon$, а для ее компонент принимаем обозначение E_{k_1, \dots, k_n} , поскольку в произвольной системе координат эти компоненты отнюдь не совпадают с компонентами симметричного символа Леви-Чивиты. При этом и компоненты $E^{k_1 \dots k_n}$ обратной метрики $^{(n)}\tilde{\epsilon}$ не совпадают с ними, однако соотношения обратности (157) (с заменой ϵ на E) имеют место в любой системе координат, поскольку смешанный дельта-символ — общековариантный тензор.

Подставляя это в (207) и выражая символы Кристоффеля, получаем окончательно для коэффициентов симметричной связности, согласованной с метрикой Бервальда-Моора:

$$\Gamma_{sr}^m = \frac{n+1}{2n(n-1)!} \left(\sum_{k_1, \dots, k_{n-1}} E^{mk_1 \dots k_{n-1}} \frac{\partial E_{rk_1 \dots k_{n-1}}}{\partial x^s} - \frac{n-1}{3n-1} \delta_r^m \sum_{q, k_1, \dots, k_{n-1}} E^{qk_1 \dots k_{n-1}} \frac{\partial E_{sk_1 \dots k_{n-1}}}{\partial x^q} \right) \quad (209)$$

при $n > 2$. При $n = 2$ имеет место стандартная формула.

4.7 Формы объема для вложенных объектов

В геометриях финслерова типа возникает проблема конструирования инвариантной (общеквариантной) формы объема. Координатная форма vol , построенная ранее является скаляром лишь относительно подгруппы унимодулярных диффеоморфизмов. С другой стороны, прямолинейное применение рассуждений, позволяющих в римановой геометрии рассматривать в качестве формы объема величину $\sqrt{|\Delta|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ (Δ (детерминант матрицы метрического тензора) в нашем случае не проходит, ввиду проблемы конструирования относительного скаляра из компонент финслеровой метрики, матрица которой является многомерной. В настоящем разделе мы рассмотрим одну достаточно общую конструкцию, которая позволяет строить формы объема для всяких метрических форм четной валентности [20]. Напомним, что в случае римановой геометрии имеется невырожденная метрика с квадратной матрицей компонент (g) . Закон преобразования метрики при смене системы координат в матричной форме имеет вид:

$$(g) = J^T \cdot (g)' \cdot J, \quad (210)$$

где J — матрица Якоби. Вычисляя детерминант левой и правой частей, получаем:

$$\Delta = (\det J)^2 \Delta', \quad (211)$$

откуда

$$\sqrt{\Delta'} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\det J}. \quad (212)$$

Равенство (212) означает, что величина $\sqrt{\Delta}$ ведет себя как относительный скаляр с весом -1 , в то время как координатная форма объема — это относительный скаляр с весом $+1$. Следовательно их произведение является скаляром с весом нуль (на самом деле это будет псевдоскаляр, поскольку он "чувствует" ориентацию системы координат). Идея нашей конструкции заключается в приведении многомерных матриц к квадратным и использованию (211)-(212).

Рассмотрим пространство $(T_x^* \mathcal{M})^{\otimes p}$ всех форм (ковариантных тензоров) степени p в некоторой фиксированной точке $x \in \mathcal{M}$ многообразия \mathcal{M} , $\dim \mathcal{M} = d$. После фиксации базиса это множество можно отождествить с пространством p -кубических вещественных матриц $M_{d \times p}$ размерности d . Пусть теперь $d = 2k$ и пусть зафиксировано некоторое произвольное разбиение множества векторных аргументов всех $2k$ -форм на два подмножества по k элементов. Без ограничения общности мы можем считать, что первые k аргументов отнесены к первому подмножеству, а вторые k элементов — ко второму. Определим отображение $\chi: (Z_d^+)^{\times k} \rightarrow \{1, \dots, d^k\}$, которое упорядочивает множество элементов k -мерного куба целочисленной (неотрицательной) решетки. Это отображение упорядочивания индуцирует изоморфизм (неканонический, поскольку он зависит от выбора χ) $\chi_*: M_{d \times 2k} \leftrightarrow M_{d^k \times d^k}$ между пространствами $2k$ -кубических матриц размерности d и квадратных матриц размерности d^k , который каждому элементу $A_{\alpha_1 \dots \alpha_k \alpha_{k+1} \alpha_{2k}}$ всякой p -кубической матрицы A

ставит в соответствие элемент $\chi_*(A)_{ab}$ по правилу²¹:

$$\chi_*(A)_{ab} \equiv A_{\chi^{-1}(a)\chi^{-1}(b)}. \quad (213)$$

Построенный изоморфизм позволяет перенести все операции из стандартной алгебры квадратных матриц с $M_{d^k \times d^k}$ в $M_{d \times 2k}$. А именно, пусть $\hat{\alpha}: M_{d^k \times d^k} \rightarrow M_{d^k \times d^k}$ — оператор на $M_{d^k \times d^k}$, $\beta: M_{d^k \times d^k} \rightarrow R$ — числовая функция на $M_{d^k \times d^k}$ и $\star: M_{d^k \times d^k} \times M_{d^k \times d^k} \rightarrow M_{d^k \times d^k}$ — бинарная операция на $M_{d^k \times d^k}$. Тогда изоморфизм χ_* индуцирует оператор $\hat{\alpha}_\chi: M_{d \times 2k} \rightarrow M_{d \times 2k}$, числовую функцию $\beta_\chi: M_{d \times 2k} \rightarrow R$ и бинарную операцию $\overset{\chi}{\star} M_{d \times 2k} \times M_{d \times 2k} \rightarrow M_{d \times 2k}$ согласно следующим формулам:

$$\hat{\alpha}_\chi \equiv \chi_*^{-1} \circ \hat{\alpha} \circ \chi_*; \quad (I) \quad \beta_\chi \equiv \beta \circ \chi_*; \quad (II) \quad \bullet \overset{\chi}{\star} \bullet \equiv \chi_*^{-1}(\chi_*(\bullet) \star \chi_*(\bullet)) \quad (III). \quad (214)$$

Формулы I, II, III в (214) как частные случаи включают в себя операции суммы, умножения, транспонирования матриц²² и различные числовые характеристики матрицы (например, ее детерминант или перманент).

Пусть теперь j будет матрицей Якоби некоторого невырожденного преобразования координат на исходном многообразии \mathcal{M} :

$$j_\beta^\alpha \equiv \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \quad (215)$$

и пусть j^{-1} будет обратная к ней. В пространстве $2k$ -форм $(T_x^*)^{\otimes 2k}$ это преобразование индуцирует $2k$ -кубическую матрицу J^{-1} , такую, что

$$\Theta'_{\alpha_1 \dots \alpha_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_{2k}} = (J^{-1})_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{\beta_1 \dots \beta_k} \Theta_{\beta_1 \dots \beta_k \beta_{k+1} \dots \beta_{2k}} (J^{-1})_{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{2k}}^{\beta_{k+1} \dots \beta_{2k}}, \quad (216)$$

для всякой формы $\Theta \in (T_x^*)^{\otimes 2k}$. Очевидно, что $J^{-1} = (j^{-1})^{\otimes k}$. Выражение (216) посредством χ_* может быть переведено в $M_{d^k \times d^k}$:

$$\chi_*(\Theta') = \chi_*(\Theta)' = \chi_*(J^{-1})^T \chi_*(\Theta) \chi_*(J^{-1}). \quad (217)$$

Формула (217) аналогична (210). Вычисляя детерминант от обеих частей (217), получаем:

$$\det \chi_*(\Theta)' = \frac{\det \chi_*(\Theta)}{[\det \chi_*(J)]^2}, \quad (218)$$

где было использовано соотношение $\chi_*(J^{-1}) = \chi_*(J)^{-1}$, которое в свою очередь, непосредственно следует из (214)-I. Из (218) следует, что для формы Θ скалярная плотность веса -1 существует, при условии (достаточном, но не необходимом!), что $[\det \chi_*(J)]^2$ является некоторой степенью детерминанта $\det j$. В этом случае, степени выражений $[\det \chi_*(J)]^2$ и $\det j$ как однородных полиномов относительно производных $\partial x' / \partial x$ должны быть связаны соотношением:

$$\deg_{(\partial x' / \partial x)} [\det \chi_*(J)]^2 = l \deg_{(\partial x' / \partial x)} \det j, \quad (219)$$

²¹Например, в качестве a и b могут быть взяты k -значные цифры d -адичного представления соответствующей половины группы индексов:

$$a = \alpha_1 d^0 + \alpha_2 d^1 + \dots + \alpha_k d^{k-1}; \quad b = \beta_1 d^0 + \beta_2 d^1 + \dots + \beta_k d^{k-1}.$$

²²Умножение матриц на число сводится к произведению матрицы на матрицу, пропорциональную единичной.

где $l \in \mathbb{R}$. Поскольку

$$\deg_{(\partial x'/\partial x)} \det j = d, \quad \deg_{(\partial x'/\partial x)} [\det \chi_*(J)]^2 = 2 \cdot \deg J \cdot \deg \det |M_{d^k \times d^k}| = 2kd^k, \quad (220)$$

мы приходим к соотношению:

$$l = 2kd^{k-1}, \quad (221)$$

которое означает, что величина

$$|\det \chi_*(\Theta)|^{1/l} = |\det \chi \Theta|^{1/2kd^{k-1}} \quad (222)$$

является подходящим кандидатом на скалярную плотность веса -1 относительно общих координатных преобразований. В частном (выделенном) случае квадратичных форм ($k = 1$), $l = 2$ и мы приходим к стандартному выражению для формы объема, которое не зависит от размерности многообразия (при этом форма не обязана быть симметричной).

Разумеется, условие (219) не является достаточным для справедливости всех наших рассуждений, поскольку мы должны убедиться в том, что выражение $|\det \chi_*(J)|^{2/l}$ с l из (221) есть в действительности с точностью до знака $\det j$. Рассмотрим преобразование $\zeta_{\mu\nu} : j \rightarrow \tilde{j}$, которое осуществляет перестановку строк в j : ν -ой и μ -ой. Перестановка строк (как оператор) индуцирует преобразование $\zeta'_{\mu\nu} : J \rightarrow \tilde{J}$ в $M_{d \times 2k}$, которое переставляет любой матричный элемент J верхний индекс которого содержит μ и (или) ν с элементами, которые в на тех же позициях имеют индексы ν и (или) μ соответственно. Это преобразование, в свою очередь, индуцирует преобразование $(\zeta'_{\mu\nu})_* : \chi_*(J) \rightarrow \widetilde{\chi_*(J)}$, действующее по правилу: $(\zeta'_{\mu\nu})_*(\chi_*(J)) = \chi_*(\zeta'_{\mu\nu} J)$. Оно взаимно переставляет строки матрицы $\chi_*(J)$, с номерами, прообразы которых $\chi^{-1}(a) = \alpha_1 \dots \alpha_k$ содержат μ и (или) ν . Полное число таких перестановок в матрице $\chi_*(J)$ равно:

$$P = \sum_{i=1}^k 2^{i-1} C_i^k = (3^k - 1)/2. \quad (223)$$

Таким образом, при любой перестановке двух строк матрицы j (для столбцов все рассуждения дословно повторяются), $\det \chi_*(J)$, рассматриваемый как однородный полином от производных $\partial x'/\partial x$ будет преобразовываться по правилу: $\det(\zeta'_{\mu\nu})_*(\chi_*(J)) = (-1)^P \det \chi_*(J)$. Это значит, что детерминант $\det \chi_*(J)$ с точностью до постоянного множителя есть $P + 2m$ -ая (m — любое целое) степень $\det j$ который является единственной (с точностью до множителя) функцией $\partial x'/\partial x$, обладающий свойством антисимметрии по отношению к перестановке любых пар строк или столбцов. Ввиду вида самого изоморфизма χ_* (отождествление соответствующих элементов) и структуре тензорного произведения $j^{\otimes l}$ матрицы J , постоянный множитель не может зависеть от самой матрицы j . Тот факт, что он равен единице, непосредственно проверяется вычислением детерминанта образа тождественного координатного преобразования:

$$\det \chi_*(E) = \det I_{d \times d} = 1. \quad (224)$$

Теперь мы должны сравнить выражения:

$$\det \chi_*(J) = (\det j)^{P+2m} \quad (225)$$

с (220) и (222). Сравнивая, приходим к равенству: $P + 2m = l/2$ или с учетом (221) и (223):

$$3^k - 2kd^{k-1} = 4m + 1, \quad (226)$$

которое следует рассматривать как условие на размерность многообразия d и степень $2k$ -формы, для которых форма объема может быть записана используемым нами методом. Все решения (227) представляют собой тройки (m, k, d) . Для $-5 \leq m \leq 5$ имеются следующие решения (226):

$$(0, 1, d) \text{ (— стандартный случай)}, (0, 2, 2), (1, 2, 1), (-1, 2, 3), (2, 2, 0), \quad (227)$$

$$(-2, 2, 4), (-3, 2, 5), (4, 4, 2), (-4, 2, 6), (5, 3, 1), (-5, 2, 7).$$

Для метрик типа метрики Бервальда-Моора подход работает только в четных размерностях. Полагая в (226) $d = 2k$, приходим к формуле:

$$3^k - (2k)^k = 4m + 1. \quad (228)$$

Решения для $d = 2, 4, 8$ имеют вид:

$$(0, 1, 2), (-2, 2, 4), (-1004, 4, 8). \quad (229)$$

Любопытно, что для $d = 6$ (H_6) уравнение (228) не имеет решений.

С учетом формул (221)-(222) имеем следующее представление для инвариантной формы объема в H_4 :

$$\text{vol} = |\det_{\chi}^{(4)} \epsilon|^{1/16} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4. \quad (230)$$

Отметим, что конкретный выбор χ влияет на значение $\det_{\chi}^4 \epsilon$, (и вообще детерминантов многомерных кубических матриц) но не влияет на трансформационные свойства этого выражения.

5 Алгебраические аспекты поличисловых голоморфных функций

5.1 Деформации подмногообразий P_n .

В разделе 3.9 мы уже касались деформационных аспектов голоморфных функций поличисловой переменной. В настоящем разделе мы остановимся на этом вопросе немного подробнее. Напомним некоторые общие сведения из абстрактной теории деформационных структур на гладких многообразиях [20].

Свободной деформационной структурой \mathfrak{D} называется совокупность $\langle \mathcal{B}, \mathcal{M}, \mathcal{E}, \Theta \rangle$, где: \mathcal{B} и \mathcal{M} — гладкие связные замкнутые многообразия, $\dim \mathcal{B} = d$, $\dim \mathcal{M} = n \geq d$; $\mathcal{E} \subseteq \text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{M})$ — некоторое подмножество гладких вложений $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{M}$; $\Theta \in (T^*\mathcal{M})^{\otimes p}$ — некоторая гладкая вещественно-значная форма степени p на \mathcal{M} . Примем следующую деформационную терминологию: \mathcal{B} — d -тело, \mathcal{M} — d -многообразие, Θ — d -метрика, образ $\iota(\mathcal{B}) \equiv \mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ для некоторого $\iota \in \mathcal{E}$ — d -объект или деформант.

Всякое вложение ι индуцирует форму $(d\iota)^* \in (T^*\mathcal{B})^{\otimes p}$, где $(d\iota)^*$ — кодифференциал вложения ι , отображающий $(T^*\mathcal{M})^{\otimes p} \rightarrow (T^*\mathcal{B})^{\otimes p}$. Рассмотрим некоторое другое вложение $\iota' \in \mathcal{E}$, которое имеет свой собственный d -объект $\iota'(\mathcal{B}) \equiv \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{M}$. На расслоении $(T^*\mathcal{B})^{\otimes p}$ мы получим форму $(d\iota')^* \Theta$. Легко видеть, что композиция

$$\iota' \circ \iota^{-1} \equiv \zeta \quad (231)$$

есть диффеоморфизм $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}' = \zeta(\mathcal{S})$, который мы будем называть *деформацией* d -тела в \mathcal{M} . Всякая деформация имеет ζ имеет естественную локальную меру — разность двух форм (перенесенных на d -тело d -метрик), взятых в одной и той же точке $b \in \mathcal{B}$:

$$(d\iota')^* \Theta(b) - (d\iota)^* \Theta(b) \equiv \Delta_{\mathcal{B}}(b), \quad (232)$$

где мы ввели обозначение $\Theta_{\mathcal{B}}$ для формы деформации на \mathcal{B} . Используя определение (231) и известное свойство дифференциала от композиции отображений:

$$(d(\alpha \circ \beta))^* = (d\beta)^* \circ (d\alpha)^*, \quad (233)$$

приходим к эквивалентному представлению формы деформаций:

$$\Delta_{\mathcal{B}} = (d\iota)^*((d\zeta)^*\Theta - \Theta) \quad (234)$$

и определяем форму деформации

$$\Delta_{\mathcal{S}} \equiv ((d\iota)^*)^{-1}\Delta_{\mathcal{B}} = (d\zeta)^*\Theta - \Theta \quad (235)$$

на деформанте \mathcal{S} .

Отметим, что описанная выше абстрактная конструкция обобщает базовые концепции физики сплошных сред и теории упругости [27, 28] (упругие тела, тензор деформаций, материальное и относительное (лагранжево) описание кинематики сплошных сред и т.д.) и является основой для представления многих современных полевых теорий [29, 30, 31, 32]. В работе [20] показано, что деформации образуют специальную алгебру, допускают классификацию и описание деформационной истории.

Для нашей статьи представляет интерес случай, когда $\mathcal{M} = P_n$ (или $\mathcal{M} = H_n$), и $\Theta = {}^{(n)}\epsilon$. Пусть задана некоторая деформация d -тела: $\zeta: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$. Оказывается, что средства полиномиальной алгебры и голоморфных функций позволяют интерпретировать эту деформацию как сужение на \mathcal{S} некоторой голоморфной функции $f: P_n \rightarrow P_n$. Действительно, тот факт, что такое сужение можно интерпретировать как деформацию уже обсуждался в разделе 3.9. Коротко повторяя рассуждения, мы можем констатировать следующее: любая функция $P_n \rightarrow P_n$, ограниченная на подмногообразии, будет в качестве образа иметь подмногообразие, т.е. может рассматриваться как деформация²³. Мы должны лишь убедиться, что всякая деформация может быть реализована как отображение $P_n \rightarrow P_n$. Для наглядности рассуждений удобно перейти к координатам. Пара вложений d -тела описывается парой функций $\mathcal{B} \rightarrow P_n$ вида:

$$\Phi = \sum_{s=1}^n \varphi^s(u_1, \dots, u_d) e_s, \quad \Psi = \sum_{s=1}^n \psi^s(u_1, \dots, u_d) e_s, \quad (236)$$

где $\{u_k\}_{k=1, \dots, d}$ — координаты на \mathcal{B} . Наша цель заключается в том, чтобы показать, что для всяких Φ и Ψ найдется $f: P_n \rightarrow P_n$, удовлетворяющее условию:

$$\Psi = f \circ \Phi. \quad (237)$$

В дальнейших рассуждениях ограничимся неизотропными деформантами и их общими положениями. Рассмотрим в качестве функции f функцию из класса голоморфности $\mathcal{G}_{E_{i_1}, \dots, E_{i_{n-d}}}^n$, где все i_s — различны. В координатах такая функция будет иметь вид

$$f = \sum_{s=1}^n f^s(x^{k_1^s}, \dots, x^{k_d^s}), \quad (238)$$

где все $\{k_i^s\}$ различны для каждого фиксированного s , и $k_i^{s+1} = k_i^s + 1$. С учетом вида (238), уравнение (237) покомпонентно будет приводить к вещественным функциональным уравнениям вида:

$$\varphi^s(u_1, \dots, u_d) = f^s(\psi^{k_1^s}(u_1, \dots, u_d), \dots, \psi^{k_d^s}(u_1, \dots, u_d)) \quad s = 1, \dots, n, \quad (239)$$

²³Мы должны исключить из рассмотрения деформации, сопровождающиеся изменением размерности (склеивания и сплющивания).

относительно функций f^s . Для некоторого фиксированного s в (239) перейдем к новой системе координат на \mathcal{B} :

$$y^1 = \psi^{k_1^s}(u_1, \dots, u_d); \dots y^d = \psi^{k_d^s}(u_1, \dots, u_d). \quad (240)$$

Такой переход возможен в силу максимальности ранга дифференциала вложения (он равен d) и предположению об общем положении деформанта в P_n . Подставляя обращения (240) в левую часть (239) получим:

$$\varphi^s(\chi^1(y^1, \dots, y^d), \dots, \chi^d(y^1, \dots, y^d)) = f^s(y^1, \dots, y^d) \quad (241)$$

мы приходим к явному выражению искомой функции f^s (функции φ^s и χ^i известны). Повторяя аналогичные рассуждения для остальных компонент f , мы придем к некоторому полному ее выражению. Таким образом, деформации d -тел общего положения в P_n можно описывать голоморфными функциями класса $\mathcal{G}_{E_{i_1}, \dots, E_{i_{n-d}}}^n$. Если на каком-то шаге предположение об общности положения не работает и замена координат не проходит, следует рассмотреть функцию f другого класса того же типа $\mathcal{G}_{E_{i_1}, \dots, E_{i_{n-d}}}^n$ (т.е. класс с другим набором различных индексов $\{i_1, \dots, i_{n-d}\}$). Замечательным обстоятельством является *локальная единственность голоморфной функции f , осуществляющей деформацию*. Этот факт следует из рассмотрения в разделе 3.9 вопроса о голоморфном продолжении с подмногообразий. Описание деформаций изотропных деформантов с помощью голоморфных функций возможно, но технически оно устроено более сложно и, в соответствии с рассмотрениями раздела 3.9, оно не будет обладать свойство единственности. Мы не будем в настоящей статье подробно останавливаться на этом вопросе.

Деформационная структура $\langle \mathcal{B}, P_n, \mathcal{E}, {}^{(n)}\epsilon \rangle$ представляет собой естественную основу для построения специального финслерова аналога теории сплошных сред и специальной финслеровой теории поля в деформационном представлении.

5.2 Поличисловые реализации абстрактных алгебр

В настоящем разделе мы покажем, что между R -алгебрами и квадратичными функциями $P_n \rightarrow P_n$ (билинейными формами голоморфных координат) имеется взаимно-однозначное соответствие. Таким образом, алгебра поличисел представляет собой в этом смысле универсальный инструмент для описания и исследования R -алгебр.

Как известно, всякая n -мерная R -алгебра \mathcal{A}_n задается в некотором базисе своими структурными постоянными $\{c_{ij}^k\}_{k=1, \dots, n}$:

$$\delta_i \cdot \delta_j = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k \delta_k, \quad (242)$$

где $\{\delta_i\}_{i=1, \dots, n}$ — некоторый базис алгебры \mathcal{A}_n . Произведение двух элементов $a = \sum_{i=1}^n a^i \delta_i$ и

$b = \sum_{i=1}^n b^i \delta_i$ из \mathcal{A}_n имеет с учетом (242) вид:

$$a \cdot b = \sum_{i,j,k=1}^n c_{ij}^k a^i b^j \delta_k. \quad (243)$$

Рассмотрим теперь алгебру \mathcal{A}_n и алгебру P_n . Фиксируем в \mathcal{A}_n некоторый произвольный базис $\{\delta_i\}_{i=1, \dots, n}$, а в P_n некоторый изотропный базис $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ и построим биективное отображение $\rho: \mathcal{A}_n \rightarrow P_n$ по равенству координат элементов:

$$a = \sum_{i=1}^n a^i \delta_i \mapsto \rho(a) = \sum_{i=1}^n a^i e_i. \quad (244)$$

Очевидно, отображение ρ согласовано с линейными операциями в \mathcal{A} (сумма отображается в сумму, а умножение на скаляр — в умножение на скаляр). Покажем, что операция умножения \cdot отображением ρ переводится в операцию $\overset{\rho}{\cdot}$, которая описывается следующей формулой:

$$a \cdot b = c \xrightarrow{\rho} \rho(a) \overset{\rho}{\cdot} \rho(b) = \rho(c), \quad (245)$$

где

$$\rho(a) \overset{\rho}{\cdot} \rho(b) = (X_{\rho(a)})^T(\mathcal{Q}^A)(X_{\rho(b)}), \quad (246)$$

где (X_A) — вектор-столбец составленный из голоморфных координат $\{A^1, \dots, A^n\}$ элемента $A \in P_n$, (\mathcal{Q}^A) — некоторая поличисловая матрица, которая при фиксированных базисах в \mathcal{A}_n и P_n однозначно определяется алгеброй \mathcal{A}_n , точнее ее кубической матрицей структурных констант.

Для доказательства (245)-(246) и вывода явной формулы для \mathcal{Q}^A , вычислим правую часть (246) с учетом того, что $\rho(a)^i = a^i$, $\rho(b)^i = b^i$:

$$(X_{\rho(a)})^T(\mathcal{Q}^A)(X_{\rho(b)}) \sum_{l,m=1}^n \mathcal{Q}_{lm}^A a^l b^m = \sum_{l,m,s=1}^n \mathcal{Q}_{lm}^A a^{s-l} b^{s-m} e_s. \quad (247)$$

Сравнивая (247) с (243) (для сравнения удобно сделать замену индексов суммирования в (247): $l \rightarrow k = s - l$, $m \rightarrow p = s - m$), приходим к выводу, что правые части выражений (247) и (243) будут переходить друг в друга при отображении ρ , если

$$c_{kp}^s = (\mathcal{Q}^A)_{s-k,s-p}^s \quad (248)$$

(вычитания индексов как обычно производится по модулю n). Таким образом, умножение в любой алгебре, посредством отображения ρ действительно можно описывать поличисловыми билинейными формами.

Приведем явный вид соответствующих поличисловых матриц для некоторых известных R -алгебр:

$$\mathcal{Q}^{\mathcal{A}_2^k} = \begin{pmatrix} k e_1 & e_2 \\ e_2 & e_1 \end{pmatrix}, \quad (249)$$

где $\mathcal{A}_2^{-1} = C$, $\mathcal{A}_2^{+1} = P_2$ и \mathcal{A}_2^0 — алгебра дуальных чисел (базис $\{1, \omega\}$, $\omega^2 = 0$.)

Для алгебры кватернионов с стандартном базисе получаем матрицу

$$\mathcal{Q}^{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} -e_1 & -e_4 & -e_3 & e_2 \\ e_4 & -e_1 & -e_2 & e_3 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & e_4 \\ e_2 & e_3 & e_4 & -e_1 \end{pmatrix}. \quad (250)$$

Отметим, что формула (248) имеет место только в классе изотропных базисов, т.е. она инвариантна лишь относительно абелевой подгруппы D_{n-1} группы $GL(n, R)$ унимодулярных дилатаций. Произвольная смена базиса в алгебре \mathcal{A}_n изменит конкретный вид формулы (248), но сам факт биективного соответствия алгебры \mathcal{A}_n и алгебры P_n с умножением посредством некоторой билинейной формы от выбора базисов не зависит²⁴.

²⁴Использование изотропного базиса упрощает доказательство и дает относительно простую формулу связи матрицы \mathcal{Q}^A с матрицей структурных констант. Переходя на язык аналогий с физикой, можно сказать, что класс изотропных базисов соответствует классу инерциальных систем отсчета, а возможность локального описания произвольного движения в терминах инерциальных систем отсчета (посредством перехода в локально сопутствующую инерциальную систему) соответствует нашему приему описания произвольной алгебры в терминах алгебры поличисел в изотропном базисе посредством покомпонентной биекции ρ .

Литература

- [1] Пенроуз Р. Путь к реальности или законы, управляющие вселенной. РХД, Москва-Ижевск, 2007.
- [2] Владимиров Ю.С. Пространство-время: явные и скрытые размерности. (изд-е 2-е переработанное) М., Книжный дом «Либроком», 2010.
- [3] Кокарев С.С. Три лекции о законах Ньютона, В сб. трудов РНОЦ "Логос Ярославль, вып.1, с. 45-72, 2006; arXiv: 0905.3285v1[gr-qc].
- [4] Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля (в 4-х томах), М., УРСС, 1996-2000.
- [5] Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М., Наука, 1987.
- [6] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М., Наука, 1979.
- [7] Шабат Б.О. Введение в комплексный анализ. М., Наука, 1985.
- [8] Балк М.Б., Балк Г.Д. Реальные применения мнимых чисел. Киев, Радянська школа, 1988.
- [9] Элиович А.А., Санюк В.И. Некоторые аспекты применения полиномов в теории поля // *ТМФ*, 2010, 2, 162, с. 163-178.
- [10] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973.
- [11] Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. М., Наука, 1969.
- [12] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(13), т. 7, с. 78-126, 2010.
- [13] Гарасько Г.И., Павлов Д.Г. Геометрия невырожденных поличисел. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(7), 4, с. 3-25, 2007.
- [14] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., Тетру, 2009, 265 с.
- [15] Balan V., Bogoslovskiy G.Yu., Kokarev S.S., Pavlov D.G., Siparov S.V., Voicu N. Geometrical Models of the Locally Anisotropic Space-Time. // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 1 (15), том 8, с. 4-37, 2011; arXiv: 1111.4346.
- [16] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (14), том 7, с. 11-37, 2010.
- [17] Siparov S. Anisotropic geometrodynamics in cosmological problems. // *AIP. Conf. Proc.*, 1283, 222, 2010.
- [18] Balan V., Lebedev S. On the Legendre transform and Hamiltonian formalism in Berwald-Moor Geometry. // *Dyff.Geom.Dyn.Syst.* 12, 1, 4, 2010.
- [19] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналогов множества Жюлиа на плоскости двойной переменной. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (12), том 6, с. 163-176, 2009.
- [20] Kokarev S.S. Deformational structures on smooth manifolds. In "Trends in Mathematical Physics Research", Nova Science Publisher Inc., (Charles V. Benton), New-York, pp. 113-154.
- [21] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Римановы метрики, соприкасающиеся с 3-мерной финслеровой метрикой Бервальда-Моора. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (10), т. 5, с. 15-24, 2008.

- [22] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Метрические бинглы и тринглы в H_3 . // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(11), т. 6, с. 42-67, 2009.
- [23] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. h -голоморфные функции двойной переменной и их приложения. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (13), т. 7, с. 44-77, 2010.
- [24] Balan V. Spectral properties and applications of of numerical multilinear algebra of m -root structures. // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 2 (10), v. 5, p. 101-107, 2008.
- [25] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Конформные калибровки геометрии Бервальда-Моора и индуцируемые ими нелинейные симметрии. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (10), 5, с. 3-14, 2008.
- [26] Кокарев С.С. Экстравариационный принцип в теории поля. В сб. трудов РНОЦ «Логос», вып. 6, с. 123-146, 2011.
- [27] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., Мир, 1975.
- [28] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. Т. 7, Теория упругости. М., Наука, 1987.
- [29] Kokarev S.S. Space-time as multidimensional elastic plate. // *Nuovo Cimento*, B113, pp. 1339-1350, 1998.
- [30] Kokarev S.S. Space-time as strongly bent plate. // *Nuovo Cimento*. B114, pp. 903-921, 1999.
- [31] Kokarev S.S. Classical solids dynamics as 4D static of elastic strings. // *Nuovo Cimento*, B116, pp. 915-936, 2001.
- [32] Kokarev S.S. Nematic structure of space-time and its topological defects in 5D Kaluza-Klein theory. // *GRG*, 35, pp. 1399-1415, 2003.

ANALYTIC, DIFFERENTIAL-GEOMETRIC AND ALGEBRAIC PROPERTIES OF SMOOTH FUNCTION OVER POLYNUMBERS.

D.G. Pavlov¹, S.S. Kokarev^{1,2}

¹ *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fрязино, Russia*

² *RSEC Logos, Yaroslavl, Russia*

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

The paper is a brief review of results on the theory of differentiable functions of polynumbers variable $P_n \rightarrow P_n$ and of its applications. We define derivative of a function of polynumbers variable, basing on special classification of degenerated (i. e. irreversible) polynumbers and on the theorem stating general form of R -linear mapping $P_n \rightarrow P_n$. Then we define holomorphic function of polynumbers variable as subclass of differentiable functions by the set of differential conditions (polynumbers analog of Cauchy-Riemannian conditions), which in isotropic basis have the form: $\overset{k}{\partial} f = 0$, ($k = 1, \dots, n-1$) where $\overset{k}{\partial} = C^k \partial$, C – conjugation in algebra P_n . Some generalized classes of holomorphic functions $\mathcal{G}_{k_{\alpha_1}, k_{\alpha_2}, \dots, k_{\alpha_r}}^n$ are defined by monomic differential equations, which can be classified by the set of vectors of non-negative integer n -dimensional lattice Z_+^n . The question of holomorphic continuation of some smooth function from submanifolds of P_n to P_n is discussed. We derive polynumbers version of Cauchy theorem and Cauchy integral formulae together with possible multidimensional generalization the first one. Using symmetric Berwald-Moor form we develop symmetric analog of differential forms calculus (Symmetric product, Hodge star and external differential). We analyze transformation properties of derivatives of scalar polynumbers functions and of those geometrical objects, that can be constructed from these derivatives. In particular, we construct real scalar invariants, appropriate for Lagrangian formalism in polynumbers field theory. Basing on supports algebra we formulate tangent construction, playing important role in physical interpreting of polynumbers field theory. The formula for Levi-Civita connections coefficients concordant with Berwald-Moore form and formula for volume form based on n -root metric of Finsler type in even dimensions are derived. Also we consider some deformational aspects of smooth function of polynumbers variable and prove the statement, that any R -algebra can be embedded into space of bilinear forms over P_n . The paper can be treated as preliminary sketch of general theory of functions of polynumbers variable (TFPV).

Key Words: polynumbers, analytic function, holomorphic functions.

ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Ю.С. Владимиров

Московский Государственный Университет, Москва, Россия
yusvlad@rambler.ru

Традиционная форма специальной теории относительности формулирует теорию в незавершенном виде. Динамические уравнения для движения частицы записываются в соответствии с принципами теории относительности, тогда как состояние частицы описывается в нерелятивистском виде. Игнорируя нерелятивистское понятие состояния частицы, удастся построить единый формализм для описания детерминированных и недетерминированных частиц, который приводит к необходимости многовариантной геометрии пространства-времени. Квантовые принципы основаны на многовариантной геометрии и теряют роль первых физических принципов. Каркасная концепция элементарных частиц осуществляет релятивистское описание состояния частицы, которое оказывается пригодным для случая дискретной и многовариантной геометрии пространства-времени. Каркасная концепция завершает переход от нерелятивистской физики к физике релятивистской и реализует полную геометризацию физики.

Ключевые слова: финслерова геометрия, теория гравитации.

1 Введение

Прежде всего, следует отметить, что имеется ряд пониманий финслеровой геометрии. Наиболее распространенным является случай, когда метрический тензор зависит не только от координат, но и от векторов в касательном пространстве (от скоростей). Этот вариант финслеровых геометрий подробно рассмотрен в ряде монографий (см, например, [1]).

Другой вариант финслеровых геометрий рассматривается в группе Д.Г. Павлова [2]. В его основу положена геометрия Бервальда-Моора, в которой мерропределение задается не общепринятым квадратичным, а выражением четвертой степени по дифференциалам.

Как нам представляется, к развиваемому Д.Г. Павловым варианту финслеровых геометрий примыкают многоточечные геометрии, развивавшиеся в группе В.Я. Скоробогатько [3].

Последнее утверждение основано на том, что, по нашему убеждению, в основе любой теории, претендующей на физическую, лежит описание физических взаимодействий, и вид мероопределения непосредственно связан с характером рассматриваемых взаимодействий. Если в основу теории кладутся парные взаимодействия, как это имеет место в случае электромагнетизма или ньютоновой гравитации, то им соответствует квадратичное мероопределение. В случае учета 3-точечных, 4-точечных и т. д. взаимодействий следует использовать геометрию с мероопределением соответствующей степени.

В настоящее время общепринято описывать гравитационные взаимодействия на базе эйнштейновской общей теории относительности (ОТО), однако имеется ряд других, менее известных теорий, в рамках которых описываются классические эффекты ОТО. В свое время этот вопрос рассматривался К. Торном, который показал, что имеется более десятка таких теорий. Среди них можно назвать теории прямого межчастичного взаимодействия фоккеровского типа [4] релятивистскую теорию гравитации А.А. Логунова, и некоторые другие.

В связи с этим следует отметить, что множество всех известных теорий можно классифицировать по нескольким метафизическим парадигмам, среди которых наибольший интерес представляют три дуалистические парадигмы: теоретико-полевая, к которой можно

отнести теорию Логунова, геометрическая, в основе которой лежит ОТО, и реляционная, которая ныне представлена теориями прямого межчастичного взаимодействия. В данной работе рассматриваются теории гравитации в рамках геометрического и реляционного подходов.

При рассмотрении вопроса о связи геометрии и физики не следует забывать также соображения, высказанные в свое время А. Пуанкаре, который сформулировал своеобразный принцип дополнительности вида физических уравнений и используемой при этом геометрии. Он полагал, что, в принципе, можно использовать любую геометрию, но тогда под нее следует подбирать соответствующие уравнения физики. Наиболее простой является геометрия плоского пространства-времени. Именно такая геометрия, как правило, используется в теоретико-полевой и реляционной парадигмах. Физические взаимодействия вводятся специальными постулатами, однако всякий раз оказывается, что построенную таким образом теорию можно представить в римановом пространстве с некой эффективной метрикой.

В данной работе показаны проявления идей финслеровой геометрии в 5 вариантах теорий физических взаимодействий:

- 1) в теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия Фоккера–Фейнмана, где опережающие воздействия устраняются посредством учета трехчастичных взаимодействий;
- 2) в теории прямого линеаризованного гравитационного взаимодействия, где, как и в случае электромагнетизма, для устранения опережающих воздействий необходимо учитывать мировой поглотитель в виде всех третьих частиц окружающего мира;
- 3) в теории прямого гравитационного взаимодействия фоккеровского типа, совпадающей с эйнштейновской общей теорией относительности во всех порядках разложения по гравитационной константе, где нелинейности ОТО обусловлены учетом тройных, четверных и т. д. воздействий;
- 4) в реляционной объединенной теории гравитации и электромагнетизма, где гравитация возникает в качестве квадратичного электромагнетизма в низшем линеаризованном приближении и характеризуется также слагаемыми, соответствующими кубичным и четверным взаимодействиям;
- 5) в бинарной геометрофизике, нацеленной на вывод классических пространственно-временных представлений из закономерностей физики микромира. В этой теории простейшие элементы описываются финслеровыми спинорами, от которых можно перейти к финслеровым (унарным) геометриям.

2 Идеи финслеровой геометрии в теории прямого электромагнитного взаимодействия

Спрашивается, как можно совместить столь широкий спектр возможных теорий с идеями финслеровой геометрии? Некоторый намек на решение данного вопроса дает теория прямого межчастичного взаимодействия фоккеровского типа [5]. В основе этой теории лежит принцип Фоккера, означающий равенство нулю вариации от действия, в котором взаимодействие между парой частиц i и k определяется выражением

$$S_{int}(i, k) = \int \int j_{(i)}^\mu j_{(k)\mu} \delta(s^2(i, k)) ds_i ds_k, \quad (1)$$

где j^μ -векторы 4-токов заряженных частиц, ds - смещения вдоль мировых линий. Интегрирование производится вдоль мировых линий взаимодействующих зарядов. В это вы-

ражение входит дираковская δ -функция от квадрата интервала $s^2(i, k)$ между рассматриваемыми частицами, которая представляется в виде двух слагаемых

$$\delta(s^2(i, k)) = \frac{1}{2|r_{ik}|} [\delta(ct_{ik} - r_{ik}) + \delta(ct_{ik} + r_{ik})], \quad (2)$$

соответствующих запаздывающим и опережающим взаимодействиям между частицами.

Характерно, что в фоккеровском действии отсутствуют поля переносчиков взаимодействий. Все определяется лишь характеристиками самих частиц.

В теории прямого электромагнитного взаимодействия Фоккера вскрылся серьезный недостаток, – в ней симметрично присутствовали запаздывающие и опережающие взаимодействия между парами частиц, тогда как, согласно физическому принципу причинности, должны быть лишь запаздывающие взаимодействия. Этот недостаток теории Фоккера был устранен в работе Дж. Уилера и Р. Фейнмана в 1945 г. [6], где было показано, что кроме парных отношений необходимо учитывать также тройные и более общие отношения (т. е. взаимодействия) между электрически заряженными частицами. Другими словами, теория Фоккера была дополнена фейнмановской теорией поглотителя, которая проиллюстрирована на рисунке 1, где показано воздействие на пару взаимодействующих частиц i и k со стороны окружающих частиц s .

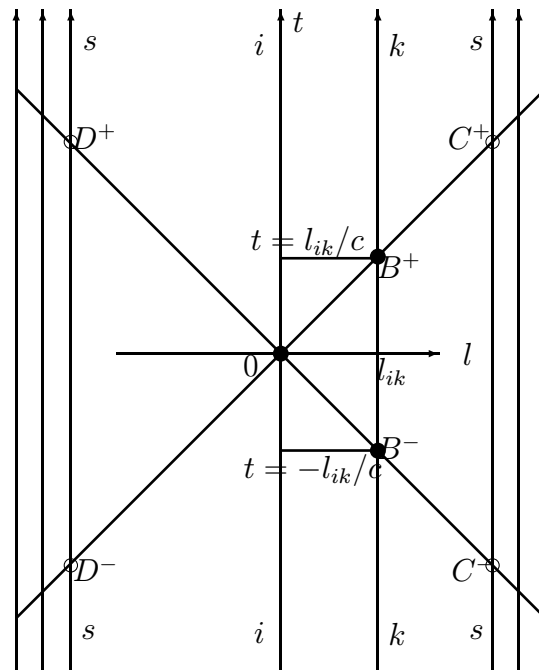


Рис. 1: Влияние фейнмановского поглотителя на электромагнитное взаимодействие двух зарядов.

Этот учет приводит к устранению опережающих воздействий и к удвоению запаздывающих взаимодействий. Кроме того, в уравнениях движения заряженных частиц автоматически возникает сила радиационного трения, пропорциональная третьей производной от координат.

Эти результаты следует трактовать, с одной стороны, как *проявления принципа Маха*, понимаемого в самом широком смысле как влияние на все локальные понятия и события со стороны всех тел окружающей Вселенной, а с другой стороны, это можно понимать как *проявления финслеровой геометрии* в данном выше ее определении через многоточечность используемых понятий. Это выражается, во-первых, в учете 3-частичных (и более общих) взаимодействий между заряженными частицами, и, во-вторых, в третьей производной, через которую записывается сила радиационного трения.

3 Идеи финслеровой геометрии в теории гравитации

Вопрос о построении теории прямого гравитационного взаимодействия пытались решить в своих работах Ф. Хойл и Дж. Нарликар, говорил о гравитации и Г.В. Рязанов. Но реальный шаг в этом направлении был сделан в работах А.А. Пантюшина и Я.И. Грановского [4].

Основная идея этих работ была чрезвычайно простой и вполне соответствовала математической реализации идей Фоккера. Нужно было построить выражение для действия гравитационного взаимодействия двух массивных частиц. Эти авторы использовали точно такую же комбинацию, только вместо токовых отношений в электродинамике записали специфическое скалярное произведение не токов, а тензоров энергии-импульса взаимодействующих тел:

$$S_{int}^{(g)}(i, k) = G \frac{m_i m_k}{c} \int \int u_{(i)}^\mu u_{(i)}^\nu (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - c_3 \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}) u_{(k)}^\alpha u_{(k)}^\beta \delta(s^2(i, k)) ds_i ds_k. \quad (3)$$

Последние представляют собой произведения масс на квадратичные комбинации из компонент их 4-скоростей. Это могло быть навеяно тем, что, если в уравнениях Максвелла источником электромагнитного поля являются токи заряженных частиц, то в случае гравитации источником в правой части уравнений Эйнштейна является тензор энергии-импульса гравитирующих объектов.

Второй составляющей в действии для гравитационного взаимодействия, как и у Фоккера, была выбрана дираковская дельта-функция. Вся проблема состояла лишь в записи "скалярного произведения" тензоров энергии-импульса двух частиц. Это несложно было найти, рассматривая линейное приближение в эйнштейновской теории гравитации. В итоге у Грановского и Пантюшина получилось действие фоккерского типа для линейризованной теории гравитации.

В этой теории, как и у Фоккера, нет среди первичных понятий гравитационного поля. Все записывается исключительно через характеристики взаимодействующих частиц: их скорости, массы и взаимные интервалы. Однако при желании можно ввести понятие потенциалов гравитационного поля, как ранее вводилось понятие компонент электромагнитного поля, но это теперь некие вторичные, можно сказать, вспомогательные понятия. Через эти потенциалы строится эффективная метрика риманова пространства, и легко показать, что для этой метрики тождественно выполняются уравнения Эйнштейна в линейном приближении. Здесь ситуация полностью аналогична случаю электродинамики, где в теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия также тождественно выполняются уравнения Максвелла.

Однако в данной теории компоненты эффективной римановой метрики определены лишь в тех точках, где присутствуют материальные объекты. Вне их понятие гравитационного поля теряет всякий смысл. Естественно, в этой теории, в линейном приближении совпадающей с ОТО, в принципе невозможны вакуумные решения уравнений Эйнштейна, а следовательно, отсутствуют и немаховские решения, вызывавшие многочисленные дискуссии в случаях, когда исходят из уравнений Эйнштейна как первичных постулатов теории. Это представляет собой то, к чему стремились в своем варианте теории Хойл и Нарликар.

Первого приближения вполне достаточно для расчета наблюдаемых гравитационных эффектов. Для решения ряда конкретных задач этот путь решения оказывается проще и нагляднее, чем в рамках ОТО.

Опять возникают проблемы с наличием опережающих воздействий, которые можно устранить учетом 3-частичных (и более общих) отношений, т. е. опять с помощью принципа Маха или учета финслеровой геометрии в пространстве скоростей.

4 Финслерова геометрия и теория прямого гравитационного взаимодействия, совпадающая с ОТО

В нашей с А.Ю. Турыгиным работе [7] было произведено обобщение линеаризованной теории гравитации на общий случай теории с нелинейностями, совпадающей с ОТО в любом порядке разложения по гравитационной константе G .

Эта задача решалась методом последовательного приближения по константе G . Поскольку в фоккеровском принципе для гравитационного взаимодействия вместо векторов токов фактически стоят тензоры энергии-импульса частиц, следовало подставлять последовательно первое, второе и т. д. приближения по G для выражений тензора энергии-импульса взаимодействующей частицы. Кроме того, следовало обобщить выражения для используемой функции Грина. Напомним, в линеаризованной теории она представлялась в виде дираковской дельта-функции от квадрата интервала между взаимодействующими частицами. Теперь она приобрела более сложный вид, зависящий от эффективной метрики в соответствующих приближениях.

Последовательно для каждого из этих разложений решались задачи, ранее рассматривавшиеся для линеаризованной гравитации. Это означало, во-первых, обобщение фоккеровского вариационного принципа на случай учета нелинейных гравитационных воздействий. Возникающий здесь произвол в выборе констант решался из требования, чтобы получающиеся из вариационного принципа уравнения движения частиц совпадали с уравнениями геодезических линий частиц в эффективной метрике в соответствующем приближении.

Во-вторых, следовало обеспечить тождественную выполнимость уравнений Эйнштейна в каждом из рассматриваемых приближений по константе G . Это требование позволило устранить весь произвол в выборе констант в принципе Фоккера для гравитационного взаимодействия.

В-третьих, следовало развить теорию гравитационного поглотителя, аналогичную ранее развитой для случая электродинамики.

Естественно было начать решение этих задач со второго приближения. Получившееся при этом довольно сложное выражение для принципа фоккеровского типа можно было проинтерпретировать в виде трех типов фейнмановских диаграмм (см. рис. 2). Первый

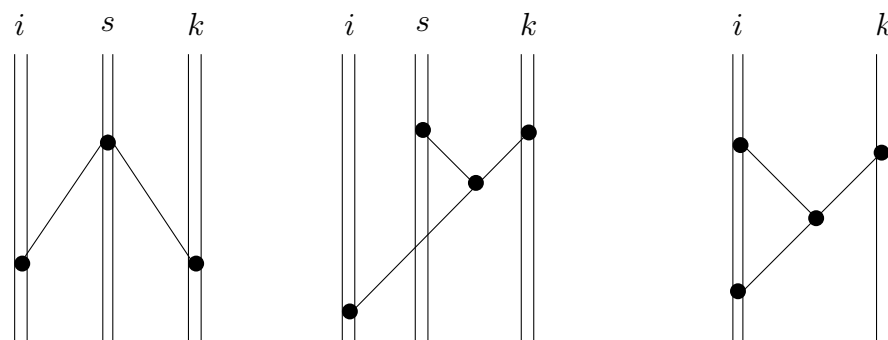


Рис. 2: Диаграммы фейнмановского типа, иллюстрирующие слагаемые второго порядка в теории прямого гравитационного взаимодействия

тип диаграмм означал прямую замену двухточечных взаимодействий на трехточечные. Второй тип можно было проинтерпретировать через трехточечные взаимодействия с учетом введения трехгравитонных вершин на одной из возможных гравитонных линий, а третий тип диаграмм соответствовал парным отношениям между частицами через пару гравитонных линий.

Заметим, что полученные данным методом выражения, иллюстрируемые через фейнмановские диаграммы, соответствуют диаграммной технике, которую развивал сам Фейнман, идя от уже известной общей теории относительности.

Полученные вариационным методом уравнения движения пробных частиц были представлены в виде уравнений геодезических линий в эффективной римановой метрике второго порядка по гравитационной константе. Это позволило частично снять произвол в константах.

Затем, записав символы Кристоффеля и кривизну через эффективную метрику во втором приближении и используя уравнение для функции Грина в рассматриваемом приближении, было показано, при каком выборе оставшихся неопределенных констант достигается тождественная выполнимость уравнений Эйнштейна.

Эти задачи были рассмотрены и для следующих приближений. Был выработан алгоритм задания констант так, чтобы уравнения Эйнштейна выполнялись и во всех последующих приближениях по константе G .

В итоге было продемонстрировано, во-первых, что методом последовательных приближений можно построить теорию прямого межчастичного гравитационного взаимодействия во всех порядках по G совпадающую с эйнштейновской общей теорией относительности. Во-вторых, было показано, что использованная методика означала учет, кроме парных, еще трехчастичных, четырехчастичных и т. д. взаимодействий между частицами Вселенной. Это также можно воспринимать как проявления финслеровых геометрий в теории гравитации.

5 Финслерова геометрия и реляционная теория гравитации

Отметим, что в наших работах [8, 9] был построен еще один вариант прямого гравитационного взаимодействия, всецело опирающийся на реляционный подход к физическим взаимодействиям.

Выписанное выше фоккеровское действие взаимодействия для пары частиц можно рассматривать как парное отношение, представленное в виде двух слагаемых, которые сами по себе представляют отдельные парные отношения: пространственно-временное и токовое, каждое из которых характеризуется своей геометрией. Они характеризуются своими законами, представляющими собой равные нулю соотношения для парных отношений между фиксированным числом элементов (точек).

Так, закон для пространственно-временных отношений, соответствующих геометрии Минковского, записывается в виде равенства нулю определителя Кэли–Менгера для 6 событий:

$$D_{ikabcd} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s_{ik}^2 & s_{ia}^2 & s_{ib}^2 & s_{ic}^2 & s_{id}^2 \\ 1 & s_{ki}^2 & 0 & s_{ka}^2 & s_{kb}^2 & s_{kc}^2 & s_{kd}^2 \\ 1 & s_{ai}^2 & s_{ak}^2 & 0 & s_{ab}^2 & s_{ac}^2 & s_{ad}^2 \\ 1 & s_{bi}^2 & s_{bk}^2 & s_{ba}^2 & 0 & s_{bc}^2 & s_{bd}^2 \\ 1 & s_{ci}^2 & s_{ck}^2 & s_{ca}^2 & s_{cb}^2 & 0 & s_{cd}^2 \\ 1 & s_{di}^2 & s_{dk}^2 & s_{da}^2 & s_{db}^2 & s_{dc}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

где парные отношения (интервалы) представляются в виде

$$s_{ik}^2 = (x_i^o - x_k^o)^2 - \sum_{l=1}^3 (x_i^l - x_k^l)^2 \equiv \tau_{ik}^2 - l_{ik}^2. \quad (5)$$

Выполнимость закона для любых 6 событий составляет принцип фундаментальной симметрии данной системы отношений. Миноры меньшего порядка определителя Кэли-Менгера на 6 точках-событиях в общем случае могут быть отличны от нуля и определяют все известные геометрические понятия: интервалы (минор минимального первого порядка), координаты точек-событий, площади, объемы, плоские и двугранные углы и т. д. Это обстоятельство составляет обобщенный принцип Клиффорда.

Для токовых отношений, соответствующих геометрии Лобачевского (пространству скоростей) закон представляет собой равенство нулю определителя Грама для 5 элементов (скоростей или токов 5 заряженных частиц):

$$\Phi_{(5)} = \begin{vmatrix} \tilde{e}^2 & \tilde{u}_{ik} & \tilde{u}_{ij} & \tilde{u}_{is} & \tilde{u}_{il} \\ \tilde{u}_{ki} & \tilde{e}^2 & \tilde{u}_{kj} & \tilde{u}_{ks} & \tilde{u}_{kl} \\ \tilde{u}_{ji} & \tilde{u}_{jk} & \tilde{e}^2 & \tilde{u}_{js} & \tilde{u}_{jl} \\ \tilde{u}_{si} & \tilde{u}_{sk} & \tilde{u}_{sj} & \tilde{e}^2 & \tilde{u}_{sl} \\ \tilde{u}_{li} & \tilde{u}_{lk} & \tilde{u}_{lj} & \tilde{u}_{ls} & \tilde{e}^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

где парные отношения представляются в виде скалярных произведений токов взаимодействующих частиц

$$\tilde{u}_{ik} = \tilde{e}_i \tilde{e}_k u_{ik} = \tilde{e}_i \tilde{e}_k u_{(i)}^\mu u_{(k)\mu}. \quad (7)$$

Обратим внимание на тот факт, что в принципе Фоккера для электромагнитных взаимодействий стоит произведение токов двух взаимодействующих частиц, представляющее собой минор минимального порядка из определителя в законе токовых отношений. Используем (постулируем) обобщенный принцип Клиффорда. Оказывается, все миноры от первого до четвертого порядка из определителя Грама в законе токовых отношений имеют некоторый физический смысл.

Возьмем простейшее обобщение случая электромагнетизма: подставим в принцип Фоккера диагональный минор второго порядка из токовых отношений:

$$D_{ik}^{(2)} = \begin{vmatrix} \tilde{e}^2 & \tilde{u}_{ik} \\ \tilde{u}_{ki} & \tilde{e}^2 \end{vmatrix} = \tilde{e}^4 (1 - u_{ik} u_{ki}) = -\frac{\tilde{e}^4}{2} u_{(i)}^\mu u_{(i)}^\nu (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - 2\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}) u_{(k)}^\alpha u_{(k)}^\beta, \quad (8)$$

сохранив дельта-функцию из пространственно-временных отношений. Легко видеть, что в этом случае получается записанное выше действие для принципа Фоккера в теории прямого межчастичного (линеаризованного) гравитационного взаимодействия:

Это означает, что в этом подходе гравитация оказалась не первичным видом взаимодействий, а производным от электромагнетизма видом взаимодействий. Она выступает в виде своеобразного квадрата от электромагнетизма. Заметим, что этот результат уже можно было предугадать в рамках 5-мерной геометрической модели гравитации и электромагнетизма, предложенным Т. Калуцей, где 4-мерный метрический тензор $g_{\mu\nu}$ представляется через компоненты 5-мерного метрического тензора G_{MN} в виде

$$g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - G_{5\mu} G_{5\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{4G}{c^4} A_\mu A_\nu; \quad A_\mu = \frac{c^2}{2\sqrt{G}} G_{5\mu}. \quad (9)$$

Диагональные миноры более высоких третьего и четвертого порядков определяют нелинейные слагаемые в прямом межчастичном гравитационном взаимодействии [8, 11]. Они проиллюстрированы первой колонкой таблицы 1. Во второй колонке обозначены выражения соответствующие электромагнитным взаимодействиям с учетом гравитации (воздействия со стороны третьих и четвертых частиц). Третья колонка соответствует слагаемым,

Таблица 1.

Gravitation	Electromagnetics	Mach's principle
$\tilde{e}^2 = \frac{e^2}{hc} = Const$	\tilde{u}_{ik}	0
$D_{ik}^{(2)} = \begin{vmatrix} \tilde{e}_i^2 & \tilde{u}_{ik} \\ \tilde{u}_{ki} & \tilde{e}_k^2 \end{vmatrix}$	$D_{ik,j}^{(2)} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{ki} & \tilde{u}_{kj} \\ \tilde{u}_{ji} & \tilde{e}_j^2 \end{vmatrix}$	$D_{ikjs}^{(2)} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{ij} & \tilde{u}_{is} \\ \tilde{u}_{kj} & \tilde{u}_{ks} \end{vmatrix}$
$D_{ikj}^{(3)} = \begin{vmatrix} \tilde{e}_i^2 & \tilde{u}_{ik} & \tilde{u}_{ij} \\ \tilde{u}_{ki} & \tilde{e}_k^2 & \tilde{u}_{kj} \\ \tilde{u}_{ji} & \tilde{u}_{jk} & \tilde{e}_j^2 \end{vmatrix}$	$D_{ik,js}^{(3)} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{ik} & \tilde{u}_{ij} & \tilde{u}_{is} \\ \tilde{u}_{jk} & \tilde{e}_j^2 & \tilde{u}_{js} \\ \tilde{u}_{sk} & \tilde{u}_{sj} & \tilde{e}_s^2 \end{vmatrix}$	$D_{ikjs,l}^{(3)} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{ij} & \tilde{u}_{is} & \tilde{u}_{il} \\ \tilde{u}_{kj} & \tilde{u}_{ks} & \tilde{u}_{kl} \\ \tilde{u}_{lj} & \tilde{u}_{ls} & \tilde{e}_l^2 \end{vmatrix}$
$D_{ikjs}^{(4)} = \begin{vmatrix} \tilde{e}_i^2 & \tilde{u}_{ik} & \tilde{u}_{ij} & \tilde{u}_{is} \\ \tilde{u}_{ki} & \tilde{e}_k^2 & \tilde{u}_{kj} & \tilde{u}_{ks} \\ \tilde{u}_{ji} & \tilde{u}_{jk} & \tilde{e}_j^2 & \tilde{u}_{js} \\ \tilde{u}_{si} & \tilde{u}_{sk} & \tilde{u}_{sj} & \tilde{e}_s^2 \end{vmatrix}$	$D_{ik,jsl}^{(4)} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{ik} & \tilde{u}_{ij} & \tilde{u}_{is} & \tilde{u}_{il} \\ \tilde{u}_{jk} & \tilde{e}_j^2 & \tilde{u}_{js} & \tilde{u}_{jl} \\ \tilde{u}_{sk} & \tilde{u}_{sj} & \tilde{e}_s^2 & \tilde{u}_{sl} \\ \tilde{u}_{lk} & \tilde{u}_{lj} & \tilde{u}_{ls} & \tilde{e}_l^2 \end{vmatrix}$	0

описывающим проявления принципа Маха в теории прямого электромагнитного взаимодействия.

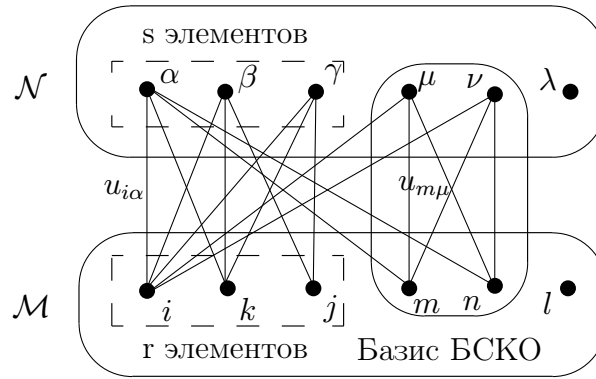
Упомянутые слагаемые описывают 3-х- и 4-х-частичные взаимодействия, что опять можно трактовать как проявления финслеровых геометрий в пространстве скоростей. Они же позволяют описывать принцип Маха.

6 Идеи финслеровой геометрии в бинарной геометрофизике.

Однако все изложенное соответствует проявлениям финслеровых геометрий наряду с геометрией общепринятого квадратичного мероопределения в качестве следующих приближений к физической реальности. Но в программе финслеровой геометрии, развиваемой в группе Д.Г. Павлова, провозглашается принципиально иная роль финслеровой геометрии: предлагается исходить из финслеровой геометрии (Бервальда–Моора) и получить геометрию с квадратичным мероопределением как вторичную, производную от финслеровой. Спрашивается, насколько физически обоснована постановка такой задачи? На наш взгляд, такой подход реалистичен, если существенно обобщить подход Павлова и исходить не из сферы классической геометрии и физики, а из закономерностей физических взаимодействий в микромире и рассматривать общепринятую геометрию и всю классическую физику как нечто вторичное, производное от закономерностей физики микромира.

Такая программа под названием бинарная геометрофизика [9-11] развивается в нашей группе, сотрудничающей с группой Д.Г. Павлова. В основу этой программы кладется теория бинарных систем комплексных отношений (БСКО), представляющая собой своеобразную геометрию на двух множествах элементов, а не на одном множестве точек, как в обычных геометриях. Между элементами двух множеств задается комплексная метрика, которая удовлетворяет некоторым законам, т. е. соотношениям для отношений между произвольными r элементами одного множества и s элементами другого множества (см. рис. 3).

Считать теорию БСКО геометрией дает основание тот факт, что общепринятую гео-

Рис. 3: Бинарные системы отношений ранга (r, s)

метрию на одном множестве элементов (точек) также можно сформулировать точно по таким же правилам на основе задания закона вещественных парных отношений между произвольными r точками одного множества рассматриваемого многообразия.

Теория БСКО соответствует геометрии в микромире. Об этом свидетельствует, прежде всего, тот факт, что элементы бинарной геометрии минимального невырожденно-го ранга $(3,3)$ описываются 2-компонентными спинорами, лежащими в основе описания фермионных частиц в микромире. Можно утверждать и обратное, – спинорный характер элементарных частиц можно считать проявлением в физике (и в геометрии) БСКО ранга $(3,3)$. Характерно, что 2-компонентные спиноры характеризуются тем, что при выделенной группе преобразований $SL(2, C)$ остается инвариантной антисимметричная квадратичная форма. Как известно, теория 2-компонентных спиноров соответствует 4-мерной геометрии Минковского также с квадратичным мероопределением.

Факт замены в теории БСКО общепринятой вещественной метрики на комплексную является вполне естественным, если учесть, что как квантовая механика, так и вся физика микромира описывается на основе комплексных чисел. Как известно, из комплексных компонент квантовомеханических волновых функций строятся вещественные величины, интерпретируемые как скорости или координаты в классической физике.

В наших работах показано, что для описания физических взаимодействий необходимо перейти к своеобразному бинарному многомерию на базе БСКО более высокого ранга $(4,4)$ или в самом общем случае – к рангу $(6,6)$. При этом возникает естественное обобщение теории 2-компонентных спиноров. Так, закон БСКО ранга $(4,4)$ записывается в виде

$$\Phi_{(4,4)} = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\lambda} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\lambda} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\lambda} \\ u_{l\alpha} & u_{l\beta} & u_{l\gamma} & u_{l\lambda} \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

где парные отношения представляются в форме

$$u_{i\alpha} = i^1 \alpha^1 + i^2 \alpha^2 + i^3 \alpha^3. \quad (11)$$

Элементы этой системы отношений описываются 3-компонентными спинорами. Для них характерной является инвариантность кубичной формы

$$b_{(ikj)} \equiv \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} = i^1 k^2 j^3 + i^3 k^1 j^2 + i^2 k^3 j^1 - i^3 k^2 j^1 - i^2 k^1 j^3 - i^1 k^3 j^2 \quad (12)$$

при преобразованиях из группы $SL(3, C)$. На этом основании они названы финслеровыми спинорами [12].

От бинарных геометрий рангов (4,4) и более высоких по правилам, аналогичным теории БСКО ранга (3,3), можно перейти к унарным финслеровым геометриям, однако они оказываются более высоких размерностей.

Известные виды физических взаимодействий удается описать в рамках БСКО ранга (6,6). Этот ранг обусловлен тем, что необходимо описать взаимодействие пары частиц, каждая из которых представляется тройками элементов. Последнее соответствует трехкварковой структуре сильно взаимодействующих частиц – барионов. Прообраз таких взаимодействий характеризуется так называемым базовым 6×6 -отношением, которое проиллюстрировано на рисунке 4.

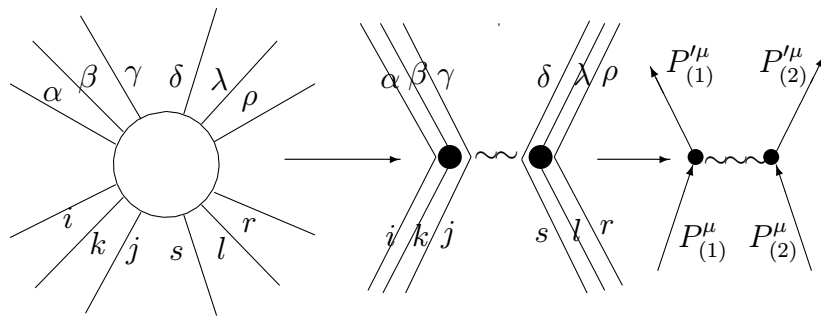


Рис. 4: Физическая иллюстрация базового 6×6 -отношения

Это выражение фактически представляет собой многоточечное отношение, типичное для финслеровых геометрий.

Своеобразие такой теории состоит в том, что в физическом мире проявляется финслерова геометрия не в чистом (многомерном) виде, а в виде своеобразной композиции своих подсистем: теория БСКО ранга (6,6) расщепляется на композицию из БСКО ранга (3,3), соответствующей общепринятому 4-мерию, и на БСКО ранга (4,4), которая оказывается соответствующей внутреннему изотопическому пространству в сильных взаимодействиях. В ней, как уже отмечалось, имеют место кубические инварианты, вместо 2×2 -матриц Паули выступают 3×3 -матрицы Гелл-Манна, а элементы описываются 3-компонентными спинорами, что соответствует трем цветовым зарядам кварков.

В рамках бинарной геометрофизике фактически предложен вариант объединения известных видов фундаментальных физических взаимодействий. Если внутреннее изотопическое пространство сильных взаимодействий описывается БСКО ранга (4,4), то внутреннее пространство электрослабых взаимодействий возникает в результате своеобразного вырождения этой систем отношений, при котором типичная для БСКО ранга (4,4) группа $SU(3)$ сужается до группы $SU(2)$. Электромагнитное взаимодействие получается для случая еще большего вырождения пространства внутренних симметрий.

Характерно, что в бинарной геометрофизике все рассуждения проводятся независимо от понятий классического пространства-времени. Истоком понятия длины (метрики) является БСКО минимального ранга (2,2), являющаяся подсистемой БСКО более высоких рангов (3,3), (4,4) и т.д. Именно эта БСКО ответственная за появление фазовых вкладов у элементарных частиц. Мир оказался устроенным таким образом, что за возникновение координатного пространства является ответственной композиция двух БСКО минимальных рангов (2,2) и (3,3). При этом БСКО ранга (3,3) ответственна за появление угловых координат и наблюдаемой классической размерности 4, а БСКО ранга (2,2) является истоком понятия длины, т. е. самого мероопределения.

В связи с этим уместно напомнить неоднократные высказывания Дж. Уилера о роли фаз в образовании структуры геометрии (см. [13]).

Таковы истоки существующих ныне представлений о классическом пространстве-времени и физических взаимодействиях.

7 Заключение

В заключение перечислим ряд доводов в пользу исследований и применений в физике финслеровых геометрий.

1. Нелинейность в эйнштейновской ОТО можно понимать обусловленной совокупностью вкладов от финслеровых геометрий с кубичным, 4-й степени и т.д. мероопределениями.

2. Анализ физики микромира в рамках реляционного подхода показывает, что в основание может быть положена бинарная система комплексных отношений ранга (6,6), элементы которой (кварки или компоненты частиц) описываются финслеровыми спинорами. Для них имеют место не квадратичные, как в случае 2-компонентных спиноров, а кубичные или более высокой степени комбинации из спинорных компонент.

3. От финслеровых спиноров можно перейти к финслеровым геометриям, в которых мероопределение осуществляется не квадратичными выражениями, а кубичными, четвертой и т. д. степеней.

4. Все имеющиеся физические теории физических взаимодействий можно рассматривать как проявления финслеровых геометрий, в которых, однако, произведена процедура $(4 + n)$ -расщеплений типа $(4 + 1)$ -расщепления в 5-мерной геометрической модели типа теории Калуцы. В такой теории заряды частиц можно рассматривать как проявления дополнительных компонент финслеровых спиноров или соответствующих им дополнительных компонент векторов.

5. Довольно давно обсуждаемый физиками-теоретиками принцип Маха естественным образом можно трактовать как проявление финслеровых геометрий в данном выше их понимании. Напомним, что в самом широком смысле принцип Маха означает, что на взаимодействие между любыми двумя частицами оказывают влияние третьи, четвертые и т. д. объекты всего окружающего мира. Это приводит к тому, что многие используемые в физике понятия, приписываемые отдельным частицам, такие как их свойства инерции, значения масс и т. д., на самом деле обусловлены влияниями со стороны всего окружающего мира. Это достаточно ярко было продемонстрировано в работах Дж. Уилера и Р. Фейнмана в теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия. Они показали, что посредством учета вкладов в парные взаимодействия от третьих части окружающего мира исключаются опережающие взаимодействия и обосновывается появление в уравнениях движения силы радиационного трения.

Литература

- [1] Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., Наука, 1981.
- [2] Павлов Д.Г. Философские и математические основания финслеровых расширений теории относительности // *Гиперкомплексные числа и геометрии в физике*. 2(4), с. 12-18, 2005.
- [3] Скоробогатько В.Я., Фешин Г.Н., Пелых В.А. N-Точечная геометрия типа Евклида // *Сб. "Математические методы и физико-механические поля"*. Киев, Наукова думка, Вып. 1, с. 5-10, 1975.
- [4] Грановский Я.И., Пантюшин А.А. К релятивистской теории тяготения // *Известия АН Каз. ССР, сер. физ-мат.* 2, с. 65-69, 1965.

- [5] Fokker A.D. Ein invarianter Variationsatz für die Bewegung mehrerer elektrischer Massenteilchen // *Z. Phys.* Bd. 58, pp. 386-393, 1929.
- [6] Wheeler J.A., Feynman R.P. Interaction with the absorber as the mechanism of radiation // *Rev. Mod. Phys.* Vol. 17, pp. 157-181, 1945.
- [7] Владимиров Ю.С., Турыгин А.Ю. Теория прямого межчастичного взаимодействия. М., Энергоатомиздат, 1986.
- [8] Vladimirov Yu.S. Gravitation interaction in the relational approach // *Gravitation and Cosmology.* Vol. 14, No. 1 (53), pp. 41-52, 2008.
- [9] Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть II. Теория физических взаимодействий. М., Изд-во Московск. ун-та, 1998.
- [10] Владимиров Ю.С. Метафизика. (2-е издание). М., Изд-во БИНОМ (Лаборатория базовых знаний), 568 с, 2009.
- [11] Владимиров Ю.С. Основания физики. М., Изд-во БИНОМ, 456 с, 2008.
- [12] Solov'ov A.V., Vladimirov Yu.S. Finslerian N-spinors: Algebra // *International Journal of Theoretical Physics.* Vol. 40, No. 8, pp. 1511-1523, 2001.
- [13] Уилер Дж. Гравитация, нейтрино и Вселенная. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1962.

FINSLER GEOMETRY IN THEORY OF GRAVITATION

Yu.S. Vladimirov

Moscow State University, Moscow, Russia

yusvlad@rambler.ru

Special relativistic theory in its traditional form formulates theory as incomplete. Particle movement dynamic equation is fixed in accordance with relativistic theory principles while particle condition is fixed in non-relativistic form. Ignoring the non-relativistic idea of particle condition we manage to construct a single formal description for determinate and nondeterminate particles which leads to the necessity of multivariant spacetime geometry. Quantum principles are based on multivariant geometry and lose role of the first physical principles. The frame concept of elementary particles gives relativistic description of particle condition which turns out to be applicable for the case of discrete and multivariant spacetime geometry. The frame concept finishes transition from nonrelativistic physics to relativistic one and realizes complete geometrization of physics.

Key Words: Finsler geometry, gravitation theory.

THE BERWALD-MOOR METRIC IN NILPOTENT DIRAC SPINOR SPACE

Peter Rowlands

University of Liverpool, Liverpool, UK

p.rowlands@liverpool.ac.uk

The nilpotent version of the Dirac equation can be constructed on the basis of the algebra of a double vector space or complexified double quaternions. This algebra is isomorphic to the standard gamma matrix algebra, with 64 units which can be produced by just 5 generators. The H_4 algebra used in the Berwald-Moor metric is a distinct subalgebra of this 64-part algebra. The creation of the 5 generators requires the rotation symmetry of one of the two component vector spaces to be preserved while the other is broken. It is convenient to identify the respective spaces as an observable real space and an unobservable ‘vacuum’ space, with corresponding physical properties. In combination the 5 generators produce a nilpotent structure which can be identified as a fermionic wavefunction or solution of the Dirac equation. The spinors required to generate the 4 components of the wavefunction can be derived from first principles and have exactly the same form as the four components of the Berwald-Moor metric. They also incorporate the units of the H_4 algebra in an identical way. The spinors produce a zero product which can be interpreted in terms of a fermionic singularity arising from the distortion introduced into the vacuum (or spinor) space by the application of a nilpotent condition.

Key Words: Berwald-Moor metric, nilpotent, spinor, vector space.

1 A dual vector space

We need to begin by describing a number of significant algebras. The four quaternion units, $i, j, k, 1$, follow the well-known multiplication rules:

$$i^2 = kj^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (1)$$

$$ii = -ji = k \quad (2)$$

$$jk = -kj = i \quad (3)$$

$$ki = -ik = j. \quad (4)$$

The multivariate vector units, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, 1$, are effectively complexified quaternions ($i\mathbf{i}$) = \mathbf{i} , ($i\mathbf{j}$) = \mathbf{j} , ($i\mathbf{k}$) = \mathbf{k} , ($i1$) = i , and follow the multiplication rules:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{1} \quad (5)$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{ik} \quad (6)$$

$$\mathbf{jk} = -\mathbf{kk} = \mathbf{ii} \quad (7)$$

$$\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{ij}. \quad (8)$$

They are isomorphic to Pauli matrices. If we complexify this algebra, we revert to quaternions, so ($i\mathbf{i}$) = i , ($i\mathbf{j}$) = j , ($i\mathbf{k}$) = k , etc. Multivariate vectors differ from ordinary vectors in having a full (algebraic) product:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (9)$$

from which all the rules concerning unit vector multiplication may be derived. Terms like $i\mathbf{i}$, $i\mathbf{j}$, $i\mathbf{k}$ are pseudovectors (e.g. area, angular momentum) and i is a pseudoscalar (e.g. volume). The units $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ define a complete Clifford algebra of 3D space:

i	j	k	<i>vector</i>		
<i>i</i>	<i>ij</i>	<i>ik</i>	<i>bivector</i>	<i>pseudovector</i>	<i>quaternion</i>
			<i>trivector</i>	<i>pseudoscalar</i>	
1			<i>scalar</i>		

Pseudovectors and pseudoscalars give us areas and volumes, etc. The intrinsic complexification produces a kind of doubling of the elements. Let us suppose we have another such algebra, isomorphic with the first:

I	J	K	<i>vector</i>		
<i>iI</i>	<i>iJ</i>	<i>iK</i>	<i>bivector</i>	<i>pseudovector</i>	<i>quaternion</i>
			<i>trivector</i>	<i>pseudoscalar</i>	
1			<i>scalar</i>		

If we combine these two algebras commutatively in a tensor product, or alternatively take the algebraic product of the eight base units, 1, **i**, **j**, **k**, *i*, **I**, **J**, **K**, we obtain 64 terms, which are «+» and «-» versions of:

i	j	k	<i>i</i>	I	J	K	<i>iI</i>	<i>iJ</i>	<i>iK</i>	<i>i</i>	1
I	J	K	<i>iI</i>	<i>iJ</i>	<i>iK</i>						
<i>iI</i>	<i>iJ</i>	<i>iK</i>									
<i>iJ</i>	<i>iK</i>										
<i>iK</i>											

We can describe this as a double vector algebra or a double Clifford algebra of 3D space. Alternatively, we can take the algebraic product of the four quaternion units, 1, **i**, **j**, **k**, and the four vector units *i*, **i**, **j**, **k**, to obtain «+» and «-» versions of:

i	j	k	<i>i</i>	I	J	K	<i>iI</i>	<i>iJ</i>	<i>iK</i>	<i>i</i>	1
<i>i</i>	<i>ij</i>	<i>ik</i>									
<i>ii</i>	<i>iji</i>	<i>iki</i>									
<i>ij</i>	<i>jj</i>	<i>kj</i>									
<i>ik</i>	<i>jk</i>	<i>kk</i>									

This is exactly isomorphic to the previous algebra and can be described as a vector quaternion algebra. A third version of the same algebra could be obtained by complexifying the algebraic product of two commutative sets of quaternion units **i**, **j**, **k**, **I**, **J**, **K**. This algebra has «+» and «-» versions of:

i	j	k	<i>ii</i>	<i>ij</i>	<i>ik</i>	<i>i</i>	1
I	J	K	<i>iI</i>	<i>iJ</i>	<i>iK</i>		
<i>iI</i>	<i>iJ</i>	<i>iK</i>					
<i>iJ</i>	<i>iK</i>						
<i>iK</i>							

This can be described as a complexified double quaternion algebra.

2 The gamma matrices and the H_4 algebra

The three 64-part algebras are completely isomorphic. The units can be represented as a group of order 64, with a minimum of 5 generators. Their physical significance is that they are also isomorphic to the gamma algebra of the Dirac equation, based on 4×4 matrices. In fact all possible gamma matrices can be derived from the products of two commuting sets of Pauli matrices, say $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ and $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$. Relativistic quantum mechanics, it seems, requires

a dual vector space. This is in addition to the ‘doubling’ produced by the complex nature of each vector space [1, 2].

The 5 generators of the group can be matched to the 5 gamma matrices in a number of ways, for example:

$$\gamma_0 = i\mathbf{k}; \quad \gamma_1 = i\mathbf{i}; \quad \gamma_2 = i\mathbf{j}; \quad \gamma_3 = i\mathbf{k}; \quad \gamma_5 = ij.$$

There are many ways of doing this but the overall structure is always the same.

A particular subalgebra of the 64-part algebra is the H_4 algebra. This can be obtained using coupled quaternions, with units 1, $i\mathbf{I}$, $j\mathbf{J}$, $k\mathbf{K}$. The result is a cyclic but commutative algebra with multiplication rules

$$i\mathbf{I}i\mathbf{I} = j\mathbf{J}j\mathbf{J} = k\mathbf{K}k\mathbf{K} = 1 \tag{10}$$

$$i\mathbf{I}j\mathbf{J} = j\mathbf{J}i\mathbf{I} = k\mathbf{K} \tag{11}$$

$$j\mathbf{J}k\mathbf{K} = k\mathbf{K}j\mathbf{J} = i\mathbf{I} \tag{12}$$

$$k\mathbf{K}i\mathbf{I} = i\mathbf{I}k\mathbf{K} = j\mathbf{J} \tag{13}$$

The same algebra can be achieved with the negative values of the paired vector units 1, $-i\mathbf{I}$, $-j\mathbf{J}$, $-k\mathbf{K}$. (1 is equivalent here to $-ii$.) This time we have:

$$(-i\mathbf{I})(-i\mathbf{I}) = (-j\mathbf{J})(-j\mathbf{J}) = (-k\mathbf{K})(-k\mathbf{K}) = 1 \tag{14}$$

$$(-i\mathbf{I})(-j\mathbf{J}) = (-j\mathbf{J})(-i\mathbf{I}) = (-k\mathbf{K}) \tag{15}$$

$$(-j\mathbf{J})(-k\mathbf{K}) = (-k\mathbf{K})(-j\mathbf{J}) = (-i\mathbf{I}) \tag{16}$$

$$(-k\mathbf{K})(-i\mathbf{I}) = (-i\mathbf{I})(-k\mathbf{K}) = (-j\mathbf{J}) \tag{17}$$

If we use the symbols $I = i\mathbf{I} = -i\mathbf{I}$, $J = j\mathbf{J} = -j\mathbf{J}$, $K = k\mathbf{K} = -k\mathbf{K}$, 1, to represent this algebra, we can structure the relationships in a group table:

*		1	I	J	K
1		1	I	J	K
I		I	1	K	J
J		J	K	1	I
K		K	I	J	1

The group is a Klein-4 group, a noncyclic group of order 4.

3 Nilpotent quantum mechanics

One of the most significant aspects of the algebraic versions of the gamma algebra is that they allow us to create a very powerful and streamlined version of relativistic quantum mechanics [1, 2]. The simplest way to derive this is to begin with Einsteins energy-momentum conservation equation (with the usual convention that $c = 1$):

$$E^2 - p^2 - m^2 = 0 \tag{18}$$

We can now use our algebra to factorize this equation, Here we will use the combination of four quaternion units (1, i , j , k) and four multivariate vector units (i , \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k}) though we could equally use the double vector or complex double quaternion algebras. The eight base units (1, i , j , k , \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , i) have a similar structure to Penrose’s twistors, [3] with four real or norm -1 components and four imaginary or norm 1 components. There is a significant difference,

however, in that the connection between the units of space and time is a quantum rather than a classically relativistic one. Even in conventional relativistic quantum mechanics, the connection between space and time is not that of a true 4-vector, but rather one mediated by the gamma matrices, with different gammas applied to the space and time components. The algebra now allows us to factorize (18) in the form

$$(ikE + \mathbf{i}p_x + \mathbf{j}p_y + \mathbf{k}p_z + jm)(ikE + \mathbf{i}p_x + \mathbf{j}p_y + \mathbf{k}p_z + jm) = \mathbf{0} \quad (19)$$

or

$$(ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + jm)(ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + jm) = \mathbf{0}. \quad (20)$$

If we now apply a canonical quantization procedure to the first bracket in these squared expressions, to replace the terms i and \mathbf{p} by the operators $E \rightarrow i\partial/\partial t$, $\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla$ (this time equating \hbar to 1), and assume that the operators act on the phase factor for a free fermion, $e^{-i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}$, we obtain the nilpotent Dirac equation for a free fermion:

$$\left(\mp \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial t} \mp i\mathbf{i}\nabla + jm \right) (\pm ikE \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + jm) e^{-i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} = \mathbf{0} \quad (21)$$

If we use a multivariate vector for the \mathbf{p} or ∇ term it automatically includes spin (through the extra \times term in the full product) [4]. So, here, \mathbf{p} is interchangeable with $\sigma\cdot\mathbf{p}$ and ∇ with $\sigma\cdot\nabla$. However, if we should revert to using ordinary vectors at any time, we would have to include an explicit spin or angular momentum term.

As usual, 4 simultaneous solutions are required for the wavefunction: 2 for fermion / antifermion \times 2 for spin up / spin down. Rather than a 4×4 matrix differential operator and a column vector wavefunction, we use a row vector operator and a column vector wavefunction, each of which may be represented in abbreviated form by $(\pm ikE \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + jm)$. In the nilpotent formalism, the four solutions can be represented as, say:

$(ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + jm)$	<i>fermion</i>	<i>spin</i>	<i>up</i>
$(ikE - \mathbf{i}\mathbf{p} + jm)$	<i>fermion</i>	<i>spin</i>	<i>down</i>
$(-ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + jm)$	<i>antifermion</i>	<i>spin</i>	<i>down</i>
$(-ikE - \mathbf{i}\mathbf{p} + jm)$	<i>antifermion</i>	<i>spin</i>	<i>up</i>

The observed particle state is the first in the column, while the others are the accompanying vacuum states, or states into which the observed particle could transform by respective P , T and C transformations:

P	$\mathbf{i}(ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + jm)\mathbf{i}$	$=$	$(ikE - \mathbf{i}\mathbf{p} + jm)$
T	$\mathbf{k}(ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + jm)\mathbf{k}$	$=$	$(-ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + jm)$
C	$-\mathbf{j}(ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + jm)\mathbf{j}$	$=$	$(-ikE - \mathbf{i}\mathbf{p} + jm)$

Replacing the observed fermion state spin up with any of the others would simultaneously transform all four states by P , T or C . It is often convenient to specify just the first term, with the others assumed to be automatic consequences. The relation between the P , T , C transformations and vacuum can be shown in a relatively simple way. If we take $(\pm ikE \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + jm)$ and post-multiply it by the idempotent $\mathbf{k}(\pm ikE \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + jm)$ any number of times, the only effect is to introduce a scalar multiple, which can be normalized away.

$$(\pm ikE \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + jm)\mathbf{k}(\pm ikE \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + jm)\mathbf{k}(\pm ikE \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + jm) \dots \rightarrow (\pm ikE \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + jm) \quad (22)$$

Similarly with $(jE \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + jm)$ or $(iE \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + jm)$. All these idempotent quantities can be regarded as vacuum operators, and \mathbf{k} , \mathbf{i} and \mathbf{j} , or, equivalently, \mathbf{K} , \mathbf{I} and \mathbf{J} , as coefficients of a 'vacuum

space'. Nilpotent quantum mechanics (NQM) produces all the standard results of conventional relativistic quantum mechanics, which can easily be obtained by replacing (21) with

$$-i\gamma_5 \left(\gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} + im \right) = 0 \quad (23)$$

Standard classic results obtainable through NQM include spin, one-handed helicity for weakly interacting states, and the *zitterbewegung* which emerges as an automatic switching process between the four states in the wavefunction, and which is interpreted as a mass-generating switching between the fermion and its antifermion vacuum partner, and the two helicity states, which are already mixed in real fermions. NQM also produces many new results. [1] Among the most important are the descriptions of three different boson-type states, which are combinations of the fermion state which any of the P , T or C transformed ones, the result being a scalar wavefunction.

$$\begin{array}{ll} (\pm ikE \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)(\mp ik\mathbf{E} \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) & \text{spin 1 boson} \\ (\pm ikE \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)(\mp ik\mathbf{E} \mp \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) & \text{spin 0 boson} \\ (\pm ikE \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)(\pm ik\mathbf{E} \mp \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) & \text{fermion-fermion combination} \end{array}$$

One of the most significant aspects of this formalization is that a spin 1 boson can be massless, but a spin 0 boson cannot, as then $(\pm ikE \pm \mathbf{i}\mathbf{p})(\mp ik\mathbf{E} \mp \mathbf{i}\mathbf{p})$ would immediately zero: hence Goldstone bosons must become Higgs bosons in the Higgs mechanism.

The key aspect of NQM, is the fact that an operator of the form $(ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$ automatically generates a phase term on which it operates to produce a nilpotent amplitude of the form $(ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$, that is, one that squares to zero. We don't really need an equation. The fermion needn't be free. We can incorporate field terms or covariant derivatives into the operator, with, for example, $E \rightarrow i\partial/\partial t + e\phi + \dots$, and $\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla + e\mathbf{A} + \dots$. We can still represent the operator as $(ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$, but the phase term will no longer be $e^{-i(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}$. It will be whatever is needed to create an amplitude of the general form $(ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$, which squares to zero, with the eigenvalues E and \mathbf{p} representing the more complicated expressions that will result from the presence of the field terms. In principle, this means that we can do relativistic quantum mechanics for a fermion in any state, subject to any number of interactions, simply by defining an operator of the form $(\pm ikE \pm \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$. This will then uniquely determine the phase factor which makes the amplitude nilpotent. There is no need to define any equation at all:

$$\text{operator acting on phase factor}^2 = \text{amplitude}^2 = 0. \quad (24)$$

In NQM the total structure of the universe is exactly zero. Pauli exclusion, a fundamentally nonlocal phenomenon, is an immediate consequence. Imagine creating a fermion wavefunction of the form $\psi_f = (ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$ from absolutely nothing; then we must simultaneously create the dual term, 'vacuum', $\psi_v = -(ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)$, which negates it both in superposition and combination:

$$\psi_f + \psi_v = (ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) - (ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) = \mathbf{0} \quad (25)$$

$$\psi_f \psi_v = -(ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m)(ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) = \mathbf{0} \quad (26)$$

Pauli exclusion then says that no two fermions share the same vacuum.

As an example of the power of NQM, we may show a calculation involving the Coulomb interaction. The $U(1)$ symmetry group for the Coulomb interaction comes from the characterization of a fermion as a point source with spherical symmetry. It is a purely scalar symmetry defined only by the magnitude of the charge, or source of the interaction. This is effectively equivalent to defining a coupling constant for the interaction, which maintains its value independent of the distance from the source. Here, we use a version of Dirac's standard prescription for

converting the differential operator to polar coordinates, [5] with the explicit inclusion of a fermionic spin / angular momentum term:

$$\left(\pm i\mathbf{k}E \pm i \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \pm i \left(\frac{j + \frac{1}{2}}{r} \right) \right) + jm \right). \quad (27)$$

The fundamental condition necessary to assign this operator to a fermion state is that it maintains Pauli exclusion and leads to a nilpotent solution when applied to a phase factor. This leads to the local manifestation of the $U(1)$ symmetry. It can be seen, simply by inspection, that it will be impossible to obtain a nilpotent solution (i.e. a nilpotent amplitude) and Pauli exclusion with any phase factor unless the operator $i\mathbf{k}E$ includes a potential energy term varying with $1/r$ to cancel out the effect of that in the i part of the operator. So, simply requiring spherical symmetry for a point particle, requires a term of the form A/r to be added to E .

$$\left(\pm i\mathbf{k} \left(E + \frac{A}{r} \right) \pm i \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \pm i \left(\frac{j + \frac{1}{2}}{r} \right) \right) + jm \right). \quad (28)$$

Deriving the solution for this case provides a model for all other cases. If all point particles are spherically symmetric sources, then the minimum nilpotent operator will be of the form (28). To establish that this is a nilpotent, we must now find the phase to which this must apply to create a nilpotent amplitude. This is a convenient example for showing how an operator fixes the phase factor and quite quickly produces the characteristic solution for the Coulomb force (hydrogen atom, etc.). The solution for (28) is relatively straightforward. The ease of calculation is due to the fact that the structure provides dual information about both fermion and vacuum. We apply the specified operator to the phase factor

$$e^{-ar} r^\gamma \sum_{\nu=0} a_\nu r^\nu \quad (29)$$

to find the amplitude (derived, as in the conventional solution, by inspired guesswork or trial and error), and equate the squared amplitude to zero.

$$\begin{aligned} 4 \left(E + \frac{A}{r} \right)^2 &= -2 \left(-a + \frac{\gamma}{r} + \frac{\nu}{r} + \dots + i \left(\frac{j + \frac{1}{2}}{r} \right) \right) - \\ &- 2 \left(-a + \frac{\gamma}{r} + \frac{\nu}{r} + \dots - i \left(\frac{j + \frac{1}{2}}{r} \right) \right) + 4m^2 \end{aligned} \quad (30)$$

Equating constant terms, we find:

$$a = \sqrt{m^2 - E^2} \quad (31)$$

Equating terms in $1/r^2$, with $\nu = 0$:

$$\gamma = -1 + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - A^2} \quad (32)$$

Assuming the power series terminates at n' , and equating coefficients of $1/r$ for $\nu = n'$:

$$2EA = -2\sqrt{m^2 - E^2}(\gamma + 1 + n') \quad (33)$$

and

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{A^2}{(\gamma + 1 + n')^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{A^2}{(\sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - A^2 + n'})^2}}}. \quad (34)$$

When $A = Ze^2$ we have the ‘hydrogen atom’ solution in just 6 lines!

4 The fermion as a singularity

One way of looking at fermion structure is to say that it requires two ‘spaces’ to define a particle singularity. We can describe one of these as real space and the other as the ‘vacuum space’ which we have previously defined. This space is closely connected with charge and the weak, strong and electric interactions, as well as with T , P and C transformations. The generators of the combined 64-part algebra, significantly, require the symmetry of one space to be broken while the other is preserved:

K	<i>i</i>I <i>i</i>J <i>i</i>K	<i>i</i>J
<i>energy</i>	<i>momentum</i>	<i>mass</i>
<i>time</i>	<i>space</i>	<i>proper time</i>

The space with the unbroken symmetry (lower case symbols) is real space, the space of observation. The space with the broken symmetry (upper case symbols) is ‘vacuum space’, the space of all unobservable quantities (time, mass, charge, etc). The creation of a singularity using these two spaces determines that they are precisely dual and that each contains the same information as the other, though in a different form as regards observation. The fermionic singularity produces an asymmetry or chirality in the space of observation because of its combination in the asymmetric nilpotent structure with the unobserved dual vacuum space.

The combination of fermion singularity and spatial duality has many manifestations: spin and nonzero rest mass occur because the fermion ‘rotation’ has to negotiate 2 spaces but with an observed asymmetry; *zitterbewegung* comes from the switching determined by the duality between the spaces; spin chirality of fermions emerges through exactly the same process as the chirality producing mass via *zitterbewegung*, because the spinor process produces an observed asymmetry between the spaces that are dual in their original formulation. And it becomes apparent that the *zitterbewegung* mass is exactly that produced by the chirality of vacuum space in the Higgs mechanism. Berry phase is an expression of the singularity of the fermion state and is equivalent to spin (topology with a singularity produces an extra twist, equivalent to). The pole in the fermion propagator occurs at the boundary between observed space ($+E$) and vacuum space ($-E$), the combination which produces the singularity.

A possible analogy between the two spaces is, if we create a knot out of two pieces of string, say red and blue, but imagine that each doesn’t know that the other exists (which is effectively the meaning of commutativity). We then imagine seeing the universe from the point of view of one of them, say, the blue string. From the blue perspective (‘blue space’ / lower case symbols), the blue string is straight, so we must devise some special contortion to create the state of the red string from the blue’s perspective. The spatial ‘double twist’ becomes equivalent to a singularity, an additional structure within the space. (The paired quaternion / vector units, $I = \mathbf{iI} = -\mathbf{iI}$, $J = \mathbf{jJ} = -\mathbf{jJ}$, $K = \mathbf{kK} = -\mathbf{kK}$, in fact, define a minimal degree of mathematical knottedness in that each operated on by one of the others produces the third, with no anticommutativity.)

Penrose has examined something similar from the point of view of twistor theory, which has a family resemblance to the algebra of the dual space in that it is constructed of four real units

and four imaginary. Visually, the effect can be represented in the Robinson congruence. [3, 6] Penrose’s theory, however, assumes a classical 4-dimensional relation between space and time or momentum and energy, while NQM requires a quantum connection to be made via ‘vacuum space’ $(\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, or through the ‘gamma matrices’:

$i\mathbf{k}$	$i\mathbf{i} \ i\mathbf{j} \ i\mathbf{k}$	\mathbf{j}
\mathbf{K}	$i\mathbf{i} \ i\mathbf{j} \ i\mathbf{k}$	$i\mathbf{J}$
<i>energy</i>	<i>momentum</i>	<i>mass</i>
<i>time</i>	<i>space</i>	<i>proper time</i>

In effect, Penrose has to eliminate the mass and take the scalar product of the space-time to preserve the 4-vector structure which he has privileged.

The twistors derive their dual 4-D vector space from the intrinsic duality of a 3-D vector space, in requiring vectors and pseudovectors. However, NQM really requires an additional duality – a dual dual space, which does not require an arbitrary extension to 4-D. The apparent ‘4-dimensionality’ comes from a combination of 2×3 -D. Mass emerges from this extra duality even if we assume that the intrinsic motion of the particles is at the speed of light. Defining a physical singularity in terms of two vector spaces produces mass, as well as spin and chirality.

5 Defining a dual space spinor

In standard relativistic quantum mechanics, the wavefunction, say ψ , is multiplied by a 4-spinor, a summation of 4 terms which adds to 1. ψ is a solution of the Dirac equation, and so is ψ multiplied by any of the 4 terms in the spinor. Individual terms in the spinor are used as projection operators to project out individual states fermion / antifermion, spin up / down. The nilpotent formalism doesn’t need spinors because the terms are already projected, but it is possible to set it up in such a way as spinors can be used. The most convenient way is to use both pre- and post-multiplication of ψ , as with the C, P, T operators. This dual multiplication emerges from the fact that the nilpotent wavefunction is already pre-multiplied by an algebraic operator, by comparison with the conventional one.

All the standard aspects of spin and helicity are easily recovered with NQM. This means that it is possible to find a spinor structure which will generate the NQM state vector. A set of primitive idempotents constructing a spinor can be defined in terms of the H_4 algebra, constructed from the dual vector spaces:

$$\begin{aligned} & (1-i\mathbf{I}-j\mathbf{J}-k\mathbf{K})/4 \\ & (1-i\mathbf{I}+j\mathbf{J}+k\mathbf{K})/4 \\ & (1+i\mathbf{I}-j\mathbf{J}+k\mathbf{K})/4 \\ & (1+i\mathbf{I}+j\mathbf{J}-k\mathbf{K})/4 \end{aligned}$$

As required the 4 terms add up to 1, and are orthogonal as well as idempotent, all products between them being 0. The same terms can be generated using coupled quaternions rather than vectors:

$$\begin{aligned} & (1+i\mathbf{I}+j\mathbf{J}+i\mathbf{I})/4 \\ & (1+i\mathbf{I}-j\mathbf{J}-i\mathbf{I})/4 \\ & (1-i\mathbf{I}+j\mathbf{J}-i\mathbf{I})/4 \\ & (1-i\mathbf{I}-j\mathbf{J}+i\mathbf{I})/4 \end{aligned}$$

Complexified vector quaternions produce the same structures as the dual vectors:

$$\begin{aligned} & (1-i\mathbf{ii}-i\mathbf{jj}-i\mathbf{kk})/4 \\ & (1-i\mathbf{ii}+i\mathbf{jj}+i\mathbf{kk})/4 \\ & (1+i\mathbf{ii}-i\mathbf{jj}+i\mathbf{kk})/4 \\ & (1+i\mathbf{ii}+i\mathbf{jj}-i\mathbf{kk})/4 \end{aligned}$$

These spinor structures were produced following discussions with J.B. Almeida, who has been working on an extensive theory of spinor structure.

The ‘spaces’ in the spinor structure are notably completely dual. The system, however, introduces chirality, for the signs cannot be completely reversed. We can only reverse two of them, e.g.

$$\begin{aligned} & (1+\mathbf{iI}-\mathbf{jJ}+\mathbf{kK})/4 \\ & (1+\mathbf{iI}+\mathbf{jJ}-\mathbf{kK})/4 \\ & (1-\mathbf{iI}-\mathbf{jJ}-\mathbf{kK})/4 \\ & (1-\mathbf{iI}+\mathbf{jJ}+\mathbf{kK})/4 \end{aligned}$$

Pre- and post-multiplying a ‘pre-spinor’ form of the nilpotent by either the original set of double vector spinors, or the set with signs reversed, typically gives results such as

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\mathbf{k}\mathbf{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\mathbf{i}\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\mathbf{j}\mathbf{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m \\ ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m \\ ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m \\ ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\mathbf{k}\mathbf{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\mathbf{i}\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\mathbf{j}\mathbf{j} \end{pmatrix} = \quad (35)$$

$$= ((ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) \quad (ikE - \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) \quad (-ikE + \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m) \quad (-ikE - \mathbf{i}\mathbf{p} + \mathbf{j}m))$$

which is the full ‘spinor’ form of the nilpotent wavefunction, with the chirality assigned to the mass term. (An alternative approach would be to assume that the columns in the first 4×4 matrix bear the coefficients 1, \mathbf{k} , \mathbf{i} , \mathbf{j} , and the rows 1, $i\mathbf{k}$, $i\mathbf{i}$, $i\mathbf{j}$, the position being reversed in the second 4×4 matrix; a version of this technique has been used previously to relate the nilpotent version of the Dirac equation to the conventional one based on matrices.[1]) Clearly, any two nonidentical spinor matrices will produce a physically meaningful version of the 4-component wavefunction.

One of the remarkable things about the spinor structures generated is that they have the exact form of the components of the two forms of the Berwald-Moor metric:

$$(t - x - y - z)(t - x + y + z)(t + x - y + z)(t + x - y - z) \quad (36)$$

$$(t + x + y + z)(t + x - y - z)(t - x + y - z)(t - x - y + z) \quad (37)$$

If we multiply the 4 components in any order, we will always get zero. In a sense this is like defining a singularity in ‘spinor space’. The zero product can thus be interpreted as a fermionic singularity arising from the distortion introduced into the vacuum (or spinor) space by the application of a nilpotent condition. The space becomes quartic because it is created out of two quadratic spaces. We can see this from the fact that the spinor structure ultimately emerges from 4×4 matrices which are created from two sets of 2×2 matrices, which are isomorphic to the units of the usual quadratic vector spaces.

As the two vector spaces are dual, it is possible to restructure physical equations so that their positions are reversed, and so the singularity in spinor (= vacuum) space implies that there must also be a singularity in the observed ‘real’ space. The quartic Berwald-Moor metric becomes an expression of the fundamentally rotationally quartic nature of the underlying algebra. While multiplication of the units of the algebra produces rotations in the spaces and identity after a complete cycle, multiplication of the spin metric shows that it describes a singularity.

In fact, the H_4 algebra has many manifestations at a fundamental level in physics. A long-standing theory of my own is that the fundamental parameters mass(-energy), time, charge (electric, strong and weak) and space have a Klein-4 symmetry relating their properties to each other [1,7-9]. Klein-4, as we have shown, is essentially the group structure of H_4 . The same

applies to identity and the T , C and P transformations, which are related to the respective properties of mass, time, charge and space. Also, their fundamental algebraic natures are respectively scalar, pseudoscalar, quaternion and vector, which, when expressed as the Clifford algebra equivalents scalar, trivector, bivector and vector (where these are taken in 1-D), also have a Klein-4 symmetry. If we take mass, time, charge and space as successive descriptions of the universe generated by a ‘universal rewrite system’ (as work done over the last decade suggests we should [1, 10-11]), then we have four commutative algebras existing as a simultaneous description. In effect, because the first two are scalar and complex, this reduces to a combination of scalar, complex coefficient and quaternion acting as though it were a vector space, and another vector space. The combination is not physical, and so is unobservable. This is what we have called ‘vacuum space’. The breaking of the symmetry of this ‘space’ in creating the 5 generators of the algebra is the ultimate source of the breaking of symmetry between the physical interactions [1].

6 Using discrete differentiation

A discrete or anticommutative differentiation process, developed by Kauffman, [12] offers us a possible link between quantum and classical conditions. In this mathematics, the differentials are replaced by commutators. Defining

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] = [F, E] \quad (38)$$

and

$$\frac{\partial F}{\partial X_i} = [F, P_i] \quad (39)$$

we can remove the phase factor from the amplitude and the mass term from the operator (and $\frac{\partial F}{\partial t}$ can replace $\frac{dF}{dt}$ where there is no explicit use of a velocity operator). In our physical application, we can define a nilpotent amplitude

$$\psi = i\mathbf{k}E + i\mathbf{i}P_1 + i\mathbf{j}P_2 + i\mathbf{k}P_3 + jm \quad (40)$$

and an operator

$$D = i\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial t} - i\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial X_1} - i\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial X_2} - i\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial X_3} \quad (41)$$

with

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = [\psi, H] = [\psi, E] \quad (42)$$

and

$$\frac{\partial \psi}{\partial X_i} = [\psi, P_i]. \quad (43)$$

With some straightforward algebraic manipulation, we find that

$$D = i\psi(i\mathbf{k}E + i\mathbf{i}P_1 + i\mathbf{j}P_2 + i\mathbf{k}P_3 + jm) + i(i\mathbf{k}E + i\mathbf{i}P_1 + i\mathbf{j}P_2 + i\mathbf{k}P_3 + jm)\psi - 2i(E - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2 - m^2). \quad (44)$$

When is ψ nilpotent, then

$$D\psi = \left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{i}\nabla \right) \psi = 0. \quad (45)$$

This is a Dirac equation using discrete differentials. Generalising this to four states, with D and ψ represented as 4-spinors, then

$$D\psi = \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial t} \pm i\mathbf{i}\nabla \right) (\pm i\mathbf{k}E \pm i\mathbf{i}P_1 \pm i\mathbf{j}P_2 \pm i\mathbf{k}P_3 + jm) = \mathbf{0} \quad (46)$$

becomes the equivalent to the Dirac equation in this calculus. Significantly we did not use i or $i\hbar$ in defining the differentials, though this is usually required in canonical quantization. The equation is thus valid, where nilpotency is a fundamental condition, in discrete classical as well as in quantum contexts.

In a further development, we can also extend the definition of D , following Kauffman, to include covariant terms, such as A_i , so that D becomes $D - A_i$. The covariant terms A_i can be seen as representing either a field source or an expression of the distortion of the Euclidean space-time structure, for example, that produced by the presence of mass in general relativity. This means that, if we choose to use structures of this kind to replace the direct use of mass, then a massless covariant D operator provides us with a convenient route to achieving this.

In this context, we observe that Bogoslovsky [13] sees the field of a fermion-antifermion condensate as a source of space-time anisotropy, with a phase transition in which the particles acquire masses from the space-time, the mass shell taking the form of two hyperboloid inscribed cones. By introducing exponents into the expression for the metric function, Bogoslovsky finds a geometric phase transition, which could be interpreted as a mass-creating spontaneous-symmetry breaking in the fermion-antifermion condensate. According to Bogoslovsky, the generalised Lorentz transformations responsible for the process lead directly to the Berwald-Moor metric. In the discrete version of the double nilpotent representation of the bosonic state (or 'fermion-antifermion condensate'), no mass term appears in the operator, but the differentials may be replaced by covariant derivatives, and so the opportunity arises to represent the appearance of mass directly in terms of an anisotropic space-time structure. Of course, the dual space structure we have used is directly responsible for the creation of mass, as this emerges with spin, chirality and *zitterbewegung* from the creation of the fermionic singularity.

7 Conclusion

An analysis of the true nature of the gamma algebra and its origins suggests that the most significant aspects of relativistic quantum mechanics and the fermionic state – singularity, nilpotency, spin 1/2, chirality, *zitterbewegung*, the origin of mass, and symmetry breaking – can be described through a spinor structure which is a manifestation of the ultimate spatial distortion – a singularity. The singularity is created through a combination of two quadratic spaces, made dual through a nilpotent connection. In fact, if we reverse the topological argument for explaining spin and Berry phase, this is probably the only true way of creating a physical singularity in nature. The Berwald-Moor metric, by appearing in the spinor space which defines this singularity, has a truly fundamental role to play in quantum physics. The nilpotent condition, however, can be applied beyond quantum physics, and a version of the nilpotent Dirac equation can be applied to systems that are classical but discrete, if we use a calculus based on commutators rather than differentials. It is possible that the Berwald-Moor metric may be significant also under these, as well as under quantum, conditions.

References

- [1] Rowlands P. Zero to Infinity: The Foundations of Physics. // *World Scientific*. Singapore and Hackensack, NJ, 2007.

- [2] Rowlands P. Physical interpretations of nilpotent quantum mechanics, arXiv: 1004.1523, 2010.
- [3] Penrose R. Twistor quantization and the curvature of spacetime. // *Int J Theor Phys*, 1, pp. 61-99, 1968.
- [4] Hestenes D. *Space-Time Algebras*, Gordon and Breach, New York, 1966.
- [5] Dirac P. A. M. *The Principles of Quantum Mechanics*, fourth edition. Clarendon Press, Oxford, 1958.
- [6] Penrose R. *The Road to Reality*, Jonathan Cape, London, 2004.
- [7] Rowlands P. The fundamental parameters of physics. // *Speculat Sci Tech*, 6, pp. 69-80, 1983.
- [8] Rowlands P. A foundational approach to physics, arXiv:physics/0106054, 2001.
- [9] Rowlands P. Are there alternatives to our present theories of physical reality?, arXiv:0912.3433. 2009.
- [10] Rowlands P., Diaz B. A universal alphabet and rewrite system, arXiv:cs.OH/0209026, 2002.
- [11] Diaz B., Rowlands P. A computational path to the nilpotent Dirac equation. // *Int J Comp Anticip Syst*, 16, pp. 203-18, 2005.
- [12] Kauffman L.H. Non-commutative worlds. // *New J Phys*, 6, pp. 2-46, 2004.
- [13] Bogoslovsky G.Yu. Lorentz symmetry violation without violation of relativistic symmetry. // *Phys Lett A*, 350, pp. 5-10, 2006.

МЕТРИКА БЕРВАЛЬДА-МООРА В НИЛЬПОТЕНТНОМ СПИНОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДИРАКА.

Питер Роуландс

Университет Ливерпуля, Ливерпуль, Великобритания

p.rowlands@liverpool.ac.uk

Нильпотентная версия уравнения Дирака может быть построена на основе алгебры двойного векторного пространства или комплексифицированных двойных кватернионов. Такая алгебра изоморфна стандартной алгебре гамма-матриц: 64 единицы, которые могут быть получены всего лишь пятью генераторами. Алгебра H_4 , используемая в метрике Бервальда-Моора — очевидная подалгебра этой 64-элементной алгебры. Создание пяти генераторов требует сохранения вращательной симметрии одного из двух компонентов векторных пространств, в то время как симметрия второго — нарушена. Целесообразным будет определить указанные пространства, как: одно — доступное наблюдению действительное пространство и второе - «вакуумное», недоступное наблюдению пространство с соответствующими физическими свойствами. В сочетании друг с другом эти 5 генераторов создают нильпотентную структуру, которую можно определить, как фермионную волновую функцию или решение уравнения Дирака. Спиноры, необходимые для генерации 4-х компонент волновой функции, могут быть получены из первых принципов и иметь точно такую же форму, как и четыре компоненты метрики Бервальда-Моора. Также, подобным образом, они включают в себя единицы алгебры H_4 . Спиноры дают нулевое произведение, которое можно интерпретировать через призму фермионных сингулярностей, возникающих в результате возмущения, вводимого в вакуумное (или спинорное) пространство наложением условий нильпотентности.

Ключевые слова: Метрика Бервальда-Моора, нильпотент, спинор, векторное пространство.

PHYSICAL FINSLER COORDINATES IN SPACETIME

Howard E. Brandt

U.S. Army Research Laboratory, Adelphi, USA

howard.e.brandt.civ@mail.mil

In Finsler geometry a Finsler coordinate is a coordinate in the tangent space manifold of a given base manifold. As such it has been given various definitions in the relativity and field theory literature and often even remains undefined physically. Physically meaningful coordinates of a point in the tangent bundle of spacetime are the spacetime and four-velocity coordinates of the measuring device. It is here emphasized that the four-velocity of the measuring device need not be the same as the four-velocity of the measured object, either classically or quantum mechanically. The four-velocity of a measured particle excitation of a Finslerian quantum field in the tangent space manifold of spacetime is not a suitable physical Finsler coordinate. The role of the Finsler coordinate is elaborated in a detailed example involving a Finslerian quantum field and associated microcausality.

Key Words: Finsler geometry, Finslerian fields, quantum field theory, microcausality, maximal proper acceleration, spacetime tangent bundle, relativity, light cone, causal domain.

1 Introduction

For the last thirty years I have been exploring possible physical implications of a possible physical upper bound on the curvature of worldlines in spacetime. Equivalently, it can be argued that there is a physical upper bound on the proper acceleration a_0 of any physical object relative to the vacuum and that it is of the order of one Planck length per squared Planck time [1], [2]. If, as one normally expects, the universal gravitational constant has the same value at submicroscopic distances as at macroscopic distances, then the maximal proper acceleration a_0 is of the order of 10^{52} m/s². (If this is not the case, as in currently popular theories of a running gravitational coupling constant or extra dimensions, then the maximal proper acceleration a_0 would be much less because what enters in its evaluation is the gravitational constant near the Planck scale [2].) In a long series of papers, it was argued that the universal upper limit on attainable proper acceleration relative to the vacuum imposes restrictions on the differential geometric structure of the tangent bundle of spacetime [2]-[7]. One is lead naturally to a Finslerian structure for spacetime in which the spacetime metric depends not only on the spacetime coordinates, but also on the four-velocity coordinates of the tangent space manifold. Various features of the differential geometry of the tangent bundle of spacetime were obtained, including the bundle metric, connection, curvature, and geodesics [2]-[7]. In a personal communication, Anadi Das pointed out to me in 1991 that the differential geometric structure which I had obtained had a form very similar to that appearing in the mathematical work of Kentaro Yano and Evan Tom Davies on the tangent bundles of Finsler and Riemannian manifolds [6], [9], [10]. Exploiting this work of Yano and Davies, I undertook a series of investigations concerning possible differential geometric structures of a Finsler spacetime. The Levi-Civita bundle connection coefficients and the Riemann curvature scalar were determined [8]. An almost complex structure was constructed on the bundle, and conditions were given that the tangent bundle be Kaehler and/or complex [11], [12]. The inclusion of bundle torsion was addressed [13], [14]. Possible physical implications were investigated for the differential geometric structure of spacetime and gravitation [4]-[6], [15]-[17]. Much of this work was summarized in 1995 at the Joint Summer Research Conference on Finsler Geometry organized by David Bao, Shing-Shen Chern, and Zhongmin Shen [15]. On that occasion, Chern requested that all of the speakers include in their papers a list of open problems. One of the problems posed by me (Problem 5) was to

construct classical and quantum field theories defined covariantly on a Finslerian spacetime tangent bundle, and this problem motivated most of my subsequent work on Finslerian fields [16]-[28].

2 Physical finsler coordinates

Throughout all of my earlier work, the question arose as to the physical interpretation of the tangent space Finsler coordinate, namely the four-velocity. It is the four velocity of what? The four-velocity appears implicitly in all possible Finslerian fields [5]. For example, the metric of the tangent bundle of spacetime adapted to the affine connection is

$$G^{MN}(x, v) = \begin{bmatrix} g_{\mu\nu}(x, v) & 0 \\ 0 & g_{\mu\nu}(x, v) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

in which the spacetime and four-velocity coordinates are designated by:

$$\{x^M\} \equiv \{x^\mu, \rho_0 v^\mu\}, \quad \{M = 0, 2, \dots, 7; \mu = 0, 1, 2, 3\}, \quad (2)$$

where $v^\mu = dx^\mu/ds$, $\rho_0 = c^2/a_0$ is a constant of the order of the Planck length, and c is the canonical speed of light in vacuum [5]. Evidently the metric field $g_{\mu\nu}(x, v)$ depends on the spacetime point x^μ at which the field is measured or else acts on some object, and x^μ would also be the spacetime coordinate of the measuring device. It follows that v^μ would be the four-velocity of the measuring device. Analogously, for example, the bundle connection also depends, through the metric on both x^μ and v^μ , and the geodesic equation yields the spacetime and four-velocity coordinates of an object such as the measuring device acted on by the gravitational field [5]. Also, for example, the Laplace Beltrami operator for the bundle depends on the spacetime coordinate of the measuring device and its four-velocity [16]. The four-velocity of the measuring device will be referred to in the following as the physical Finsler coordinate, it being the tangent space coordinate in the Finslerian tangent bundle of spacetime. As an explicit example of the possible role of physical Finsler coordinates, in the remainder of this paper I review its role in an analysis of microcausality in quantum field theory.

3 Example

In the following example, for simplicity, the role of the four-velocity Finsler coordinate is considered in a scalar quantum field theory in the spacetime tangent bundle restricted by the limiting proper acceleration [16]-[28]. For simplicity, a Minkowski spacetime in the base manifold is assumed. Of course, Minkowski spacetime is a very special case of a more general Finslerian spacetime, but understanding this simple case may facilitate future analyses involving a more general Finslerian spacetime. The quantum field is Finslerian in the sense that it depends not only on the spacetime coordinates of the device measuring particle excitations of the quantum field, but also on the four-velocity of the measuring device.

Canonical quantum field theory in Minkowski spacetime suffers from the divergences occurring at very small distances and/or very high energies. This long standing issue is also manifested in the singular delta function appearing in the microcausality relation involving the commutator of the quantum field at two points separated in spacetime. It has been argued in earlier work that an implication of a physical upper bound on allowed proper acceleration relative to the vacuum is that the canonical microcausality relation is modified to include dependence of the field on the four-velocity of the device measuring the field, so that the delta function is replaced by a function concentrated near the Planck scale of spatial separation between the two devices measuring the field, or within a much larger separation when the relative speed of the two measuring devices is near the canonical speed of light [20], [21]. A consequence

is that the causal boundary, canonically defined by the light cone, is warped at these scales so that the timelike region extends into the canonical spacelike region. The speed of the associated causal connectivity can exceed the canonical measured speed of light. The condition for this warp-speed causal connectivity to occur optimally with instantaneous transmission is when the spatial component of relative four-velocity of the two measuring devices is orthogonal to their spatial separation, and for spatial separations near the Planck scale. When the relative speed of the measuring devices is very large, the range for warp-speed causal connectivity may extend well beyond the Planck scale; however if the wavelength in the frame of the moving measuring device is much less than the range, the field is extremely reduced, and any warp-speed causal connectivity is exponentially suppressed.

The limiting proper acceleration a_0 determines the structure of the metric on the tangent bundle of spacetime [5]. Among the many differential geometric invariants determined by the bundle metric is the Laplace-Beltrami operator [16], [20]:

$$\mathcal{L} = G^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^M} \left(G^{1/2} G^{MN} \frac{\partial}{\partial x^N} \right). \quad (3)$$

This is the invariant generalization of the wave operator, or d'Alembertian, of standard field theory. A simple invariant field equation for a scalar field $\phi(x, v)$ is then given by [16]

$$\mathcal{L}\phi(x, v) = 0. \quad (4)$$

Again, as for any Finslerian field, x^μ denotes the location in spacetime where the field is measured, or equivalently, the location of a particle excitation of the quantum field or the location of the device measuring this excitation, and v^μ , the Finsler coordinates, denote the location in four-velocity space of the measuring device. It is important to stress that v^μ is not the four velocity of the particle excitation, and also that x^μ and v^μ are classical commuting variables since they are the coordinates of a measuring device, which is classical. For a flat Minkowski spacetime, the wave equation, Eq. (4), reduces to [18]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x_\mu} + \rho_0^{-2} \frac{\partial^2}{\partial v^\mu \partial v_\mu} \right) \phi(x, v) = 0, \quad (5)$$

for the Lorentz-invariant field $\phi(x, v)$, where ρ_0 is of the order of the Planck length. For this case, it was argued in earlier work that a scalar quantum field satisfying Eq. (4) is given by [16], [27]

$$\begin{aligned} \phi(x, v) = 2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2} (2p^0 N)^{1/2}} & \left[e^{-ipx/\hbar} e^{-\rho_0 pv/\hbar} \theta(\rho_0 pv/\hbar) a(\mathbf{p}) \right. \\ & \left. + e^{ipx/\hbar} e^{\rho_0 pv/\hbar} \theta(-\rho_0 pv/\hbar) a^\dagger(\mathbf{p}) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

where \hbar is Planck's constant divided by 2π , p denotes the four-momentum $p^\mu = \{p^0, p^1, p^2, p^3\}$ of a particle excitation of the field, $a^\dagger(\mathbf{p})$ and $a(\mathbf{p})$ are particle creation and annihilation operators satisfying the commutation relations,

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad [a(\mathbf{p}), a(\mathbf{p}')] = 0, \quad [a^\dagger(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = 0, \quad (7)$$

$\delta^3(\mathbf{p})$ is the three-dimensional Dirac delta function, and $\theta(z)$ is the Heaviside function,

$$\theta(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ \frac{1}{2}, & z = 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}. \quad (8)$$

Also in Eq. (6), N is a normalization factor. For vanishing ρ_0 , or equivalently, infinite a_0 , Eq. (6) reduces to a standard relativistic free scalar quantum field.

Next, it can be shown that the Pauli-Jordan function, expressing microcausality through the field commutator at two points (x, v) and (x', v') in the tangent bundle, generalized for the upper bound on proper acceleration, is given by [20, 21, 28]

$$\begin{aligned} [\phi(x, v), \phi(x', v')] &= \frac{m\hbar}{\pi^2 N} \left[\theta\left(\frac{\rho_0 m c v^0}{\hbar}\right) \theta\left(-\frac{\rho_0 m c v^{0'}}{\hbar}\right) - \theta\left(\frac{\rho_0 m c v^{0'}}{\hbar}\right) \theta\left(-\frac{\rho_0 m c v^0}{\hbar}\right) \right] \\ &\quad \times \frac{K_1\left((m c / \hbar) [-(x - x' - i\rho_0(v - v'))^2]^{1/2}\right)}{[-(x - x' - i\rho_0(v - v'))^2]^{1/2}}, \end{aligned} \quad (9)$$

where m is the mass of a particle excitation of the quantum field, $\theta(z)$ is the Heaviside function defined by Eq. (8), and $K_1(z)$ is the modified Bessel function of the third kind of order one. Equation (9) is divergent for

$$[x - x' - i\rho_0(v - v')]^2 = 0. \quad (10)$$

Equation (10) determines the causal boundary separating the future from the past and the spacelike region and describes a warping of the standard light cone near the origin in a region of the order of the Planck length, and at much larger distances for large relative four-velocities. The warped region is timelike, whereas without the warping, that region would be spacelike (outside the standard light cone). For vanishing ρ_0 , and also for equal four-velocities, $v = v'$, Eq. (10) reduces to the standard light cone. Also, it can be argued that other bosonic and fermionic fields may also be expected to satisfy the same wave equation, and the same causal boundary, Eq. (10), will apply. Particle excitations of the field can be expected to propagate along the causal boundary. It is to be noted that the relative Finsler coordinates $(v - v')$ warp the causal boundary corresponding to the standard light cone.

Taking the real and imaginary parts of Eq. (10), one obtains the following two equations defining the causal boundary:

$$(x - x')^2 = (\rho_0(v - v'))^2 \quad (11)$$

and

$$\rho_0(v - v') \cdot (x - x') = 0. \quad (12)$$

Rewriting Eqs. (11) and (12) in explicit component form, they become:

$$(\Delta x^0)^2 = \left| \overrightarrow{\Delta x} \right|^2 + \rho_0^2 (\Delta v^0)^2 - \rho_0^2 (\overrightarrow{\Delta v})^2, \quad (13)$$

and

$$\rho_0 \Delta v^0 \Delta x^0 = \rho_0 \overrightarrow{\Delta v} \cdot \overrightarrow{\Delta x}, \quad (14)$$

where $\Delta x^0 \equiv x^{0'} - x^0$, $\overrightarrow{\Delta x} \equiv \overrightarrow{x}' - \overrightarrow{x}$, $\Delta v^0 \equiv v^{0'} - v$, and $\overrightarrow{\Delta v} = \overrightarrow{v}' - \overrightarrow{v}$. Next multiplying Eq. (13) by $(\Delta x^0)^2$ and substituting Eq. (14), one obtains

$$(\Delta x^0)^4 - \left(\left| \overrightarrow{\Delta x} \right|^2 - \rho_0^2 (\overrightarrow{\Delta v})^2 \right) (\Delta x^0)^2 - \rho_0 \left| \overrightarrow{\Delta v} \cdot \overrightarrow{\Delta x} \right|^2 = 0. \quad (15)$$

Equation (15) has the solution:

$$\begin{aligned} \Delta x^0 &= \pm \left(\left| \overrightarrow{\Delta x} \right|^2 - \rho_0^2 (\overrightarrow{\Delta v})^2 \right)^{1/2} \times \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{2\rho_0 \overrightarrow{\Delta v} \cdot \overrightarrow{\Delta x}}{\left| \overrightarrow{\Delta x} \right|^2 - \rho_0^2 (\overrightarrow{\Delta v})^2} \right)^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Next dividing both sides of Eq. (16) by $\rho_0 |\overrightarrow{\Delta v}|$, and choosing the positive sign inside the bracket in order that Δx^0 be real, one obtains

$$T = \pm \left\{ \frac{1}{2} (X^2 - 1) + \frac{1}{2} [X^4 + 2(\cos 2\theta) X^2 + 1]^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (17)$$

in which the normalized temporal separation T is defined by

$$T = \frac{\Delta x^0}{\rho_0 |\overrightarrow{\Delta v}|}, \quad (18)$$

and the normalized spatial separation X is

$$X = \frac{|\overrightarrow{\Delta x}|}{\rho_0 |\overrightarrow{\Delta v}|}. \quad (19)$$

Also in Eq. (17), the angle θ between the spatial separation $\overrightarrow{\Delta x}$ and the relative spatial component $\overrightarrow{\Delta v}$ of four-velocity is

$$\theta = \cos^{-1} \frac{|\overrightarrow{\Delta v} \cdot \overrightarrow{\Delta x}|}{|\overrightarrow{\Delta v}| |\overrightarrow{\Delta x}|}. \quad (20)$$

Also, Eq. (14) becomes

$$V = \frac{X}{T} \cos \theta, \quad (21)$$

where the normalized relative time component four-velocity is defined by

$$V = \frac{\rho_0 \Delta v^0}{\rho_0 |\overrightarrow{\Delta v}|}. \quad (22)$$

For T , X , and V , the scale is here set by the relative spatial component of four-velocity $|\overrightarrow{\Delta v}|$ together with the factor ρ_0 of the order of the Planck length. Substituting Eq. (17) in Eq. (21), one obtains

$$V = \pm X \cos \theta \left\{ \frac{1}{2} (X^2 - 1) + \frac{1}{2} [X^4 + 2(\cos 2\theta) X^2 + 1]^{1/2} \right\}^{-1/2}. \quad (23)$$

According to Eq. (17), near $\theta = \pi/2$, for $X^2 < 1$, or equivalently within the sphere $|\overrightarrow{\Delta x}|^2 \leq \rho_0^2 (\overrightarrow{\Delta v})^2$, the temporal interval Δx^0 is near vanishing, and near instantaneous causal connectivity occurs between spacelike-separated points. This is consistent with the possible existence of extended excitations such as strings. The standard light cone, $X = T$, is effectively warped in this region. The biggest effect is infinitesimally near $\theta = \pi/2$ and for $|\overrightarrow{\Delta x}| \leq \rho_0 \overrightarrow{\Delta v}$, for which $\overrightarrow{\Delta x}/\Delta t$ is infinite. For vanishing θ , the standard light cone is not warped. Thus the warped light cone and associated causal boundary are anisotropic. Also, for $X \gg 1$, or equivalently for $|\overrightarrow{\Delta x}| \gg \rho_0 \overrightarrow{\Delta v}$, the warped light cone effectively becomes the standard light cone and becomes asymptotically isotropic and not warped.

When the measuring device detects a field excitation, the speed of the device is at the causal boundary, Eqs. (11) and (12), determined by the ϕ -field excitations. The measuring device at

the origin is here taken to be at rest, and $d\vec{x}'/dt$ is defined to be the velocity of the moving device relative to the one at rest. The velocities of the two devices can be interchanged because only the magnitude of the relative velocity enters. We proceed to derive the velocity of the moving measuring device. First, according to Eq. (22), one has

$$\Delta v^0 = \left| \overrightarrow{\Delta v} \right| V. \quad (24)$$

It is important to note that, in accord with special relativity, the moving measuring device has time component of four-velocity $v^{0'} = \gamma' \equiv \left(1 - \left| \frac{d\vec{x}'}{cdt} \right|^2 \right)^{-1/2}$ and spatial component of four-velocity $\vec{v}' = \gamma' \frac{d\vec{x}'}{cdt}$. The device at rest has time component $v^0 = 1$ and spatial component $\vec{v} = 0$. Therefore $\left| \overrightarrow{\Delta v} \right| = \gamma' \left| \frac{d\vec{x}'}{cdt} \right|$, and Eq. (24) becomes

$$\gamma' - 1 = \gamma' \left| \frac{d\vec{x}'}{cdt} \right| V, \quad (25)$$

or solving for γ' , then,

$$\gamma' = \frac{1}{1 - \left| \frac{d\vec{x}'}{cdt} \right| V}, \quad (26)$$

or equivalently,

$$\left(1 - \left| \frac{d\vec{x}'}{cdt} \right|^2 \right)^{-1/2} = \left(1 - \left| \frac{d\vec{x}'}{cdt} \right| V \right)^{-1}. \quad (27)$$

Solving Eq. (27), one obtains for the speed $\left| \frac{d\vec{x}'}{cdt} \right|$ of the measuring device in units of c :

$$\left| \frac{d\vec{x}'}{cdt} \right| = \frac{2V}{1 + V^2}. \quad (28)$$

We proceed to obtain an expression for the actual range $R = \left| \overrightarrow{\Delta x} \right| / \rho_0$ between the two measuring devices, expressed in units of ρ_0 (of the order of the Planck length). According to Eq. (19), one has

$$\left| \overrightarrow{\Delta x} \right| = \rho_0 \left| \overrightarrow{\Delta v} \right| X, \quad (29)$$

and it then follows that the range is given by

$$R = \frac{\left| \overrightarrow{\Delta x} \right|}{\rho_0} = \gamma \left| \frac{d\vec{x}'}{cdt} \right| X = \frac{\left| \frac{d\vec{x}'}{cdt} \right|}{\left(1 - \left| \frac{d\vec{x}'}{cdt} \right|^2 \right)^{1/2}} X. \quad (30)$$

It is to be noted that the range R approaches infinity as the speed of the moving detector $\left| \frac{d\vec{x}'}{dt} \right|$ approaches c , the canonical speed of light. Of course, extremely high energies are required to accelerate a detector to such high speed. For $\theta = .4999\pi$ and very small X , one calculates, for example, $R \sim 10^4$.

The speed in units of c , namely, $\left| \frac{d\vec{x}'}{cdt} \right|$, of the moving measuring device is determined by Eqs. (28) and (23). This gives the speed at which the moving measuring device must move for it to be at the causal boundary and detect a particle excitation. It can be shown that near standard light speed for the device is required in the region, $\theta = \pi/2$, $0 < X < 1$, in which warp-speed connectivity occurs.

The speed of the causal connectivity between the two measurements is here defined by $W = \left| \frac{d\vec{x}}{\Delta x^0} \right|$ and is called the warp speed. It then follows from Eq. (17) that

$$W = \frac{\left| \frac{d\vec{x}}{\Delta x^0} \right|}{T} = \frac{X}{\left\{ \frac{1}{2}(X^2 - 1) + \frac{1}{2}[X^4 + 2(\cos 2\theta)X^2 + 1]^{1/2} \right\}^{1/2}}. \quad (31)$$

The warp speed W is the speed of causal connectivity expressed in units of the standard speed of light. For θ infinitesimally near $\pi/2$, and $X \leq 1$, the warp speed approaches infinity. For $\theta = .4999\pi$ and very small X , one calculates, for example, $W = 2000$. Thus warp-speed causal connectivity occurs near the Planck scale of spatial separation between the devices measuring the field, or at much larger separations when the relative speed of the two measuring devices is near the standard speed of light. However, it is argued below that the field is exponentially attenuated for wave lengths of the field excitation less than the spatial separation of the two points where the field is measured. For larger wave lengths, such connectivity is no surprise, since the location of the particle excitation is only definable up to a wavelength.

For particle excitations of negligible rest mass, according to Eq. (6) and [19], the field strength ϕ as a function wavelength λ of the excited particle is proportional to

$$\phi \sim e^{-\rho_0|pv|/\hbar} = \exp \left\{ -\frac{\rho_0}{\lambda} \gamma' \left(1 - \left| \frac{d\vec{x}'}{cdt} \right| \cos \theta' \right) \right\}, \quad (32)$$

in which θ' is the angle between the wave vector of the excited field and the velocity of the device measuring the field. (It is significant to note in passing that the field has an automatic spectral cutoff beyond the Planck mass [22], [23].) Proceeding to evaluate Eq. (32), according to Eq. (19), one first has

$$\left| \frac{d\vec{x}}{\Delta x^0} \right| = \rho_0 \left| \frac{d\vec{v}}{\Delta v} \right| X, \quad (33)$$

or equivalently,

$$\frac{\left| \frac{d\vec{x}}{\Delta x^0} \right|}{\rho_0 X} = \gamma' \left| \frac{d\vec{v}}{cdt} \right|, \quad (34)$$

and therefore solving for γ' , one obtains

$$\gamma' = \left(1 + \left(\frac{\left| \frac{d\vec{x}}{\Delta x^0} \right|}{\rho_0 X} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (35)$$

Thus for $\theta' = \pi/2$, Eq. (32) becomes

$$\phi \sim \exp \left(-\frac{\rho_0}{\lambda} \gamma \right) = \exp \left[-\frac{\rho_0}{\lambda} \left(1 + \left(\frac{\left| \frac{d\vec{x}}{\Delta x^0} \right|}{\rho_0 X} \right)^2 \right)^{1/2} \right]. \quad (36)$$

For $|\vec{\Delta x}| \gg \rho_0$ and $X < 1$, Eq. (36) reduces to

$$\phi \sim \exp \left[- \left(\frac{|\vec{\Delta x}|}{\lambda} \right) \frac{1}{X} \right]. \quad (37)$$

One notes that for particle wavelength $\lambda \ll |\vec{\Delta x}|$, the field strength is greatly attenuated. As an example of the field attenuation, for $X = 0.001$ and $\theta = 0.4999\pi$, one obtains $\frac{|\vec{\Delta x}|}{\rho_0} = 7.1 \times 10^7 \approx \gamma$. Also, the corresponding speed of the measuring device is near the canonical speed of light, $\left| \frac{d\vec{x}'}{dt} \right| \sim c$, and the field is

$$\phi \sim \exp \left[- \left(\frac{|\vec{\Delta x}|}{\lambda} \right) \frac{1}{X} \right] = \exp \left[- \frac{7.1 \times 10^7 \rho_0}{\lambda} \right]. \quad (38)$$

The corresponding warp speed $W = 3,183$.

4 Conclusion

It has been argued that the appropriate Finsler coordinates for Finslerian fields such as the spacetime metric and any field defined over the spacetime tangent bundle are given by the four-velocity tangent space coordinates in the tangent space manifold of the tangent bundle of spacetime. The four-velocity here is that of a device measuring the field or any object acted on by the field. An example has been given of the role of physical Finsler coordinates in the analysis of microcausality in quantum field theory. The Finsler coordinate is the four-velocity of the measuring device measuring particle excitations of the quantum field. An implication of a physical upper bound on allowed proper acceleration relative to the vacuum is that near the Planck scale of spatial separation between the two devices measuring the field, or at much larger separations when the relative speed of the two measuring devices is near the canonical speed of light, the standard causal boundary, canonically defined by the light cone, is warped, so that the timelike region extends into the canonical spacelike region. The speed of the associated causal connectivity can exceed the canonical measured speed of light by many orders of magnitude. The condition for this warp-speed causal connectivity to occur optimally with instantaneous transmission is when the spatial component of the relative four-velocity of the two measuring devices is orthogonal to their spatial separation, and for spatial separations near the Planck scale. The range for warp-speed causal connectivity may extend well beyond the Planck scale when the relative speed of the measuring devices is very large, however for practical cases in which the wavelength is much less than the range, the field is extremely attenuated. Analogous behavior may also be expected not only for a scalar field but also for other bosonic and fermionic fields. It is also significant to note that the modified quantum field is Lorentz invariant, and causal connectivity backward in time remains impossible. A proper understanding of the appropriate physical Finsler coordinates is an essential ingredient in all of this analysis.

References

- [1] Brandt H.E. Maximal Proper Acceleration Relative to the Vacuum. // *Lett. Nuovo Cim.*, 38, pp. 522-524, 1983; 39, p. 192, 1984.

- [2] Brandt H.E. Maximal Proper Acceleration and the Structure of Spacetime. // *Found. Phys. Lett.*, 2, pp. 39-58, 1991.
- [3] Brandt H.E. Kinetic Theory in Maximal-Acceleration Invariant Phase Space. // *Nucl. Phys. B*, 6, pp. 367-369, 1989.
- [4] Brandt H.E. Connection and Geodesics in the Spacetime Tangent Bundle. // *Found. Phys.*, 21, pp. 1285-1295, 1991.
- [5] Brandt H.E. Structure of Spacetime Tangent Bundle. // *Found. Phys. Lett.*, 4, pp. 523-536, 1991.
- [6] Brandt H.E. Differential Geometry of Spacetime Tangent Bundle. // *International J. Theor. Phys.*, 31, pp. 575-580, 1992.
- [7] Brandt, H.E. Riemann Curvature Scalar of Spacetime Tangent Bundle. // *Found. Phys. Lett.*, 5, pp. 43-55, 1992.
- [8] Brandt H.E. Finsler-Spacetime Tangent Bundle. // *Found. Phys. Lett.*, 5, pp. 221-248, 1992.
- [9] Yano K., Davies E.T. On the Tangent Bundles of Finsler and Riemannian Manifolds. // *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 12, pp. 211-228, 1963.
- [10] Yano K., Davies E.T. On the Connection in Finsler Space as an Induced Connection. // *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 3, pp. 409-417, 1958.
- [11] Brandt H.E. Kaehler Spacetime Tangent Bundle. // *Found. Phys. Lett.*, 5, pp. 315-336, 1992.
- [12] Brandt H.E. Complex Spacetime Tangent Bundle. // *Found. Phys. Lett.*, 6, pp. 245-255, 1993.
- [13] Brandt H.E. Spacetime Tangent Bundle with Torsion. // *Found. Phys. Lett.*, 6, pp. 339-369, 1993.
- [14] Brandt H.E. Solution to Torsion Relations in Finsler-Spacetime Tangent Bundle. // *Found. Phys. Lett.*, 7, pp. 297-301, 1994.
- [15] Brandt H.E. Finslerian Spacetime. // *Contemporary Math.*, 196, pp. 273-287, 1996.
- [16] Brandt H.E. Quantum Fields in the Spacetime Tangent Bundle. // *Found. Phys. Lett.*, 11, pp. 265-275, 1998.
- [17] Brandt H.E. Finslerian Fields in the Spacetime Tangent Bundle. // *Chaos, Solitons & Fractals.*, 10, pp. 267-282, 1999.
- [18] Brandt H.E. Finslerian Fields, in *Finslerian Geometries: A Meeting of Minds*, P.L. Antonelli, Editor, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 131-138, 2000.
- [19] Brandt H.E. Particle Geodesics and Spectra in the Spacetime Tangent Bundle. // *Rep. Math. Phys.*, 45, pp. 389-405, 2000.
- [20] Brandt H.E. Finslerian Quantum Fields and Microcausality. // *Found. Phys. Lett.*, 13, pp. 307-328, 2000.
- [21] Brandt H.E. Causal Domain of Minkowski-Spacetime Tangent Bundle. // *Found. Phys. Lett.*, 13, pp. 581-588, 2000.
- [22] Brandt H.E. Lorentz-Invariant Quantum Fields in the Spacetime Tangent Bundle. // *Internat. J. Math. and Math. Sci.*, 24, pp. 1529-1546, 2003.
- [23] Brandt H.E. Quantum Vacuum Heuristics. // *J. Mod. Optics*, 50, pp. 2455-2463, 2003.
- [24] Brandt H.E. Intrinsic Gravitational Regularization of Quantum Fields. // *Found. Phys. Lett.*, 17, pp. 295-300, 2004.
- [25] Brandt H.E. Finite Vacuum Energy Density in Quantum Field Theory. // *J. Mod. Optics*, 10, pp. 2753-2759, 2004.

- [26] Brandt H.E. Finsler Geometry and Quantum Field Theory. // *Problems of Nonlinear Anal. in Engineering Systems*, 11, pp. 77-89, 2005.
- [27] Brandt H.E. Finslerian Quantum Field Theory. // *Nonlinear Anal.*, 63, pp. 119-130, 2005.
- [28] Brandt H.E. Warp-Speed Causal Connectivity. // *J. Mod. Optics*.
DOI:10.80/09500340.291.591506 (online).

ФИЗИЧЕСКИЕ ФИНСЛЕРОВЫ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Говард Брандт

Исследовательская лаборатория армии США, Адельфи, США

howard.e.brandt.civ@mail.mil

В финслеровой геометрии финслерова координата – это координата в касательном пространстве данного базисного многообразия. Как таковую ее пытались определить много раз в литературе, посвященной теории относительности и теории поля, часто она даже остается неопределенной в физическом смысле. Физически значимые координаты точки в касательном расслоении пространства-времени – это координаты пространства-времени и 4-скорости измерительного прибора. Здесь акцент делается на том, что 4-скорость измерительного прибора – это не то же самое, что 4-скорость измеряемого объекта, классического или квантовомеханического. 4-скорость измеряемого возбуждения частицы финслерова квантового поля в касательном пространственном многообразии не является подходящей физической финслеровой координатой. Роль финслеровой координаты подробно рассматривается на детальном примере, касающемся финслерова квантового поля и сопутствующей микропричинности.

Ключевые слова: финслерова геометрия, финслеровы поля, квантовая теория поля, микропричинность, максимальное релятивистски равноускоренное движение, пространственно-временное касательное расслоение, относительность, световой конус, причинная область.

ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ФИЗИКИ: ДИСКРЕТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Ю.А. РЫЛОВ

Институт проблем механики, РАН, Москва, Россия
rylov@ipmnet.ru

Традиционная форма специальной теории относительности формулирует теорию в незавершенном виде. Динамические уравнения для движения частицы записываются в соответствии с принципами теории относительности, тогда как состояние частицы описывается в нерелятивистском виде. Игнорируя нерелятивистское понятие состояния частицы, удастся построить единый формализм для описания детерминированных и недетерминированных частиц, который приводит к необходимости многовариантной геометрии пространства-времени. Квантовые принципы основаны на многовариантной геометрии и теряют роль первых физических принципов. Каркасная концепция элементарных частиц осуществляет релятивистское описание состояния частицы, которое оказывается пригодным для случая дискретной и многовариантной геометрии пространства-времени. Каркасная концепция завершает переход от нерелятивистской физики к физике релятивистской и реализует полную геометризацию физики.

Ключевые слова: дискретная геометрия, неаксиоматизируемые геометрии, многовариантность геометрии пространства-времени, стохастичность как следствие геометрии пространства-времени, каркасная концепция элементарных частиц.

1 Введение

Эта работа представляет собой краткий обзор развития геометризации физики за последние два десятилетия. Геометризация физики началась в конце девятнадцатого века. Последовательными этапами геометризации физики являются:

1. связь законов сохранения со свойствами геометрии пространства-времени (однородностью и изотропностью),
2. специальная теория относительности,
3. общая теория относительности,
4. пространственно-временная геометрия Калуцы-Клейна.

Большинство физиков не верит в возможность геометризации физики в микромире. Они верят в квантовую природу физических явлений в микромире и не знают физической геометрии, позволяющей объяснить квантовые явления как геометрические эффекты. По этой причине сейчас почти никто не работает с геометризацией физики. По необходимости обзор новейшего развития геометризации физики представляет собой обзор работ одного автора.

Идея геометризации физики основана на следующем обстоятельстве. Описание движения частицы содержит два существенных элемента: геометрию пространства-времени и законы динамики. Эти две категории связаны. Можно исследовать эти две категории только вместе, и граница между законами геометрии и законами динамики не является жестко заданной. Можно сдвигать эту границу. Например, можно выбрать очень

простую геометрию пространства-времени, тогда законы динамики окажутся довольно сложными. Можно попытаться использовать геометрию пространства-времени, выбранную таким образом, чтобы динамические законы были бы очень простыми. Например, возможно существует такая геометрия пространства-времени, где элементарные частицы движутся свободно. Взаимодействие между частицами осуществляется через геометрию пространства-времени. Геометрия Калуцы-Клейна представляет собой пример такой геометрии, где электромагнитное поле является свойством геометрии пространства-времени. Электромагнитное взаимодействие частиц объясняется как результат взаимодействия с электромагнитным полем, если используется пространственно-временная геометрия Минковского (вместо геометрии Калуцы-Клейна).

Пространство-время Минковского однородно и изотропно. Можно легко написать законы сохранения энергии-импульса и углового момента в пространстве-времени Минковского. Нельзя написать законы сохранения в пространстве-времени Калуцы-Клейна с электромагнитным полем, потому что это пространство-время, вообще говоря, не является однородным и изотропным. Такое различие обусловлено тем обстоятельством, что в пространстве-времени Минковского электромагнитное поле является вещественной сущностью, тогда как в пространстве Калуцы-Клейна электромагнитное поле является только свойством пространственно-временной геометрии.

Какая из этих двух точек зрения является правильной? Мы полагаем, что следует использовать оба подхода. При геометрическом подходе число сущностей меньше (в пределе полной геометризации остается только одна сущность), и легче устанавливать физические (и геометрические) принципы, ответственные за описание различных сторон физических явлений. С другой стороны, когда связь между различными сторонами физического явления уже установлена, можно рассматривать различные стороны физического явления как разные сущности. Такой подход позволяет описывать конкретные физические явления проще и привычнее, рассматривая их как результат взаимодействия разных сущностей.

Развивая геометризацию физики, мы стремимся работать с физическими принципами, полагая, что добрые старые классические принципы верны. Мы уклоняемся от введения новых физических принципов на основе рассмотрения отдельных физических явлений. Мы полагаем, что классические принципы верны, хотя иногда они применяются неправильно. Нам удалось обнаружить несколько ошибок в применении классических принципов физики. Некоторые из ошибок связаны с нашим несовершенным знанием геометрии и незавершенностью теории относительности.

При полной геометризации физики геометрия пространства-времени выбирается таким образом, что все частицы движутся свободно. Силовые поля и их взаимодействие с частицами возникают только в том случае, когда геометрия пространства-времени выбрана неправильно. В том случае, когда геометрия пространства-времени отличается от истинной геометрии, различие геометрий порождает коррекцию в виде силовых полей. Полная геометризация физики известна для классических (гравитационного и электромагнитного) взаимодействий. Однако, полная геометризация физики еще не известна для микромира. Причина этого обстоятельства лежит главным образом в том, что наши знания геометрии несовершенны. Полная геометризация физики возможна только при более совершенном описании геометрии пространства-времени.

Геометрия как наука о расположении геометрических объектов в пространстве или в пространстве событий (пространстве-времени) полностью описывается расстоянием $\rho(P, Q)$ между любыми двумя точками P и Q , или мировой функцией $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$. Геометрия, которая полностью описывается мировой функцией, называется физической геометрией. После полной геометризации физики динамика частиц превращается в монистическую концепцию, полностью описываемую в терминах одной величины (мировой функции).

Любая концепция, которая содержит несколько базовых понятий (величин) нуждается в согласованности между всеми понятиями, используемыми в концепции. Достижение такого согласия очень трудная задача. Это можно увидеть на примере геометрии. Физическая геометрия является монистической концепцией, потому что она описывается с помощью одной только мировой функции. При традиционном описании римановых геометрий используются несколько базовых понятий (многообразие, система координат, метрический тензор), и риманова геометрия оказывается менее общей концепцией, чем физическая геометрия. Кроме того риманова геометрия оказывается несогласованной в некоторых пунктах.

Альберт Эйнштейн мечтал о создании единой теории поля. Такая теория была бы монистической концепцией, и это обстоятельство было бы наиболее привлекательной чертой такой теории. Однако монистическая концепция на основе геометрии представляется более привлекательной, чем монистическая теория, основанная на едином поле, потому что главный объект физической геометрии (мировая функция) является более простым объектом, чем силовое поле единой теории поля.

Трудности геометризации физики появились, когда физики начали исследовать физические явления в микромире. Мы не можем точно знать геометрию пространства-времени в микромире. Довольно естественно, что геометрия пространства-времени в микромире может оказаться дискретной. Современные исследователи рассматривают дискретную геометрию как геометрию на решетчатом множестве точек. В частности, имеется специальный раздел в публикациях Архива, озаглавленный High Energy Physics - Lattice. Решетчатое множество точек не может быть однородным и изотропным. В соответствии с этим обстоятельством считается, что дискретная геометрия пространства-времени (геометрия на решетке) не может считаться однородной и изотропной.

На самом деле дискретная геометрия пространства-времени не обязательно является геометрией на решетке. Дискретная геометрия пространства-времени может быть задана на континуальном множестве точек. В частности она может быть задана на том же самом многообразии, где задана геометрия Минковского. Это связано с тем, что дискретность геометрии является свойством геометрии, а не свойством множества точек, на котором задана геометрия.

Дискретная геометрия \mathcal{G}_d есть такая геометрия, где нет близких точек. Математически это означает, что

$$|\varrho(P, Q)| \notin (0, \lambda_0), \quad \forall P, Q \in \Omega \quad (1.1)$$

Здесь Ω есть множество точек, на котором задана геометрия, и $\varrho(P, Q)$ есть расстояние между точками P, Q . Величина λ_0 является элементарной длиной дискретной геометрии \mathcal{G}_d . Геометрия на решетке может удовлетворять свойству(1.1), но такая геометрия является очень специальным видом дискретной геометрии, которая не может быть однородной и изотропной.

Пусть σ_M является мировой функцией геометрии Минковского \mathcal{G}_M

$$\sigma_M(x, x') = \frac{1}{2} g_{ik} (x^i - x'^i) (x^k - x'^k), \quad \sigma_M(x, x') = \frac{1}{2} \rho_M^2(x, x') \quad (1.2)$$

где $\rho_M(x, x')$ есть расстояние (интервал) между точками с инерциальными координатами $x = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ и $x' = \{x'^0, x'^1, x'^2, x'^3\}$. Мировая функция σ_d

$$\sigma_d = \sigma_M + \frac{\lambda_0^2}{2} \text{sgn}(\sigma_M), \quad \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{если } x = 0 \\ -1 & \text{если } x < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

описывает дискретную геометрию \mathcal{G}_d , которая удовлетворяет ограничению (1.1), хотя геометрия \mathcal{G}_d задана на том же самом точечном множестве Ω_M , где задана геометрия Минковского. Геометрия \mathcal{G}_d оказывается однородной и изотропной. Кроме того дискретная геометрия \mathcal{G}_d оказывается многовариантной и неаксиоматизируемой [1, 2]. В дискретном пространстве-времени частица не может описываться мировой линией, потому что всякая мировая линия представляет собой множество связанных бесконечно малых отрезков прямой. Но в дискретной геометрии \mathcal{G}_d нет отрезков короче, чем элементарная длина λ_0 . Это означает, что вместо мировой линии имеется мировая цепь

$$C = {}_s P_s P_{s+1} \quad (1.4)$$

состоящая из геометрических векторов $P_s P_{s+1} = \{P_s, P_{s+1}\}$, $s = \dots - 1, 0, 1, \dots$ конечной длины μ . Геометрический вектор (g -вектор) представляет собой упорядоченное множество $PQ = \{P, Q\}$ из двух точек P и Q . Первая точка P является началом вектора, тогда как вторая точка Q является концом g -вектора. Такое определение вектора используется в физике. Однако, математики предпочитают другое определение. Они определяют вектор как элемент линейного векторного пространства.

Замечание. Мы используем специальный термин «геометрический вектор», потому что традиционно термин "вектор" означает некоторую много-компонентную величину (компоненты вектора в некоторой системе координат). Вообще говоря, в современной геометрии вектор определяется как элемент линейного векторного пространства. В этом случае вектор может быть разложен по базисным векторам системы координат и представлен как множество координат вектора. Такое определение удобно, когда говорят о векторном поле, имеющем несколько составляющих. В собственно евклидовой геометрии понятие геометрического вектора совпадает с традиционным определением вектора как элемента линейного векторного пространства. В евклидовой геометрии g -вектор может быть разложен по базисным векторам и представлен как множество координат. Однако в дискретной геометрии, описываемой мировой функцией (1.3), геометрический вектор не может быть представлен как сумма проекций на базисные векторы, потому что в дискретной геометрии (1.3) нельзя ввести линейное векторное пространство даже локально. Однако, определение вектора как множества из двух точек не содержит ссылки на систему координат и специальные свойства евклидовой геометрии (такие как линейное векторное пространство). Определение геометрического вектора является более общим, и в соответствии с законами логики термин "вектор" следует использовать по отношению к геометрическому вектору. Дискретная геометрия \mathcal{G}_d получается из геометрии Минковского \mathcal{G}_M с помощью деформации геометрии Минковского, когда мировая функция σ_M заменяется мировой функцией σ_d [3] во всех определениях геометрии Минковского.

Мировые цепи в дискретной геометрии пространства-времени оказываются стохастическими. Пусть элементарная длина λ_0 имеет вид

$$\lambda_0^2 = \frac{\hbar}{bc} \quad (1.5)$$

где \hbar есть квантовая постоянная, c есть скорость света и b есть универсальная постоянная, связывающая геометрическую массу μ (длину звена мировой цепи) с массой m частицы, с помощью соотношения

$$m = b\mu \quad (1.6)$$

Тогда статистическое описание стохастических мировых цепей приводит к уравнению Шредингера [4]. В результате квантовые эффекты описываются как геометрические эффекты дискретной геометрии пространства-времени. Квантовые принципы перестают

быть первыми физическими принципами. Они становятся вторичными принципами, которые не следует применять всегда и везде. В частности, не возникает необходимости квантовать гравитационное поле.

В дискретной геометрии пространства-времени теория относительности оказывается незавершенной. Дело в том, что переход от нерелятивистской физики к физике релятивистской сопровождается видоизменением динамических уравнений, описывающих движение частицы. Описание состояния частицы остается тем же, что и нерелятивистской физике. Состояние частицы описывается точкой в фазовом пространстве координат и импульсов. Импульс частицы p_k определяется как касательный вектор к мировой линии частицы $x^k = x^k(\tau)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

$$p_k(\tau) = \frac{mg_{kl}u^l(\tau)}{\sqrt{g_{js}u^j(\tau)u^s(\tau)}}, \quad u^l(\tau) = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{x^l(\tau + d\tau) - x^l(\tau)}{d\tau} = \frac{dx^l(\tau)}{d\tau} \quad (1.7)$$

где τ есть параметр вдоль мировой линии. В дискретной геометрии пространства-времени нет мировых линий, и предел (1.7) не существует. В физике на обычных пространственно-временных масштабах характерные длины много больше, чем элементарная длина λ_0 , ограничивающая длину звеньев мировой цепи. В этом случае допустимо использовать предел (1.7) как удовлетворительное приближение. Но в физике микромира такое приближение оказывается неудовлетворительным, потому что характерные длины в физических явлениях оказываются порядка элементарной длины λ_0 . В результате понятия теории элементарных частиц, основанные на понятии состояния частицы как точки фазового пространства, оказываются неудовлетворительными.

Последовательное релятивистское описание частиц в микромире не должно использовать фазовое пространство и его точки. Вместо этого используется каркасная концепция описания элементарных частиц, где частица описывается ее каркасом $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, который состоит из $n + 1$ жестко связанных пространственно-временных точек P_0, P_1, \dots, P_n . В случае точечной частицы ее каркас состоит из двух точек P_0, P_1 , которые определяют вектор импульса частицы. В данном случае все характеристики частицы (масса, заряд, импульс) определяются геометрически двумя точками P_0, P_1 . В случае более сложных частиц, описываемых каркасом $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, имеется $n(n + 1)/2$ инвариантов $|\mathbf{P}_k \mathbf{P}_i|$, $i, k = 0, 1, \dots, n$, описывающих геометрически все характеристики частицы. Вопрос о природе связи между точками каркаса не возникает, потому что дискретная геометрия пространства-времени может обладать ограниченной делимостью.

Каркас частицы является аналогом репера, жестко прикрепленного к частице (физическому телу). Следя за движением каркаса, мы следим за движением частицы.

В начале двадцатого века было естественно думать, что квантовые частицы – это просто недетерминированные (стохастические) частицы, что-то вроде броуновских частиц. Были попытки объяснить квантовую механику как статистическое описание стохастически движущихся частиц [5, 6]. Однако эти попытки оказались неудачными из-за того, что использовалась *вероятностная концепция статистического описания*.

Статистическое описание используется в физике для описания недетерминированных частиц (или систем), когда нет динамических уравнений или начальные условия точно не определены. Рассматривается статистический ансамбль \mathcal{E} недетерминированных частиц, т.е. много одинаковых независимых частиц. Оказывается, что существуют динамические уравнения для статистического ансамбля \mathcal{E} недетерминированных частиц, которые являются конститuantами этого статистического ансамбля \mathcal{E} . Рассмотрение статистического ансамбля как динамической системы является *динамической концепцией статистического описания* (ДКСО). Это изначальная концепция статистического описания. Использование ДКСО основано на независимости конститuant статистического ансамбля. Случайные

составляющие движения компенсируются из-за их независимости, тогда как регулярные составляющие движения накапливаются.

В нерелятивистской физике используется вероятностная концепция статистического описания (ВКСО). Например, ВКСО успешно используется для описания броуновских частиц. При использовании ВКСО следят за движением точки в фазовом пространстве. Точка изображает состояние недетерминированной частицы, и движение точки в фазовом пространстве описывается вероятностью перехода. Попытки описания квантовой механики в качестве результата статистического описания в рамках ВКСО оказались неудачными, потому что ВКСО есть нерелятивистское описание, тогда как *нерелятивистская квантовая механика является релятивистским построением*, и квантовую механику следует получать как статистическое описание в терминах ДКСО.

Но почему нерелятивистская квантовая механика является релятивистским построением? Потому что стохастическая составляющая движения квантовой частицы может быть релятивистской, и следует использовать динамическую концепцию статистического описания (ДКСО), которая не использует нерелятивистского понятия фазового пространства. Кроме того нельзя использовать предел (1.7) в определении импульса частиц, описываемых стохастическими мировыми линиями, которые не имеют касательных векторов.

В самом деле, в рамках ДКСО удастся получить квантовую механику, как статистическое описание стохастически движущихся частиц [7, 8, 9]. Это использование динамической концепции статистического описания не является этапом в геометризации физики. ДКСО является просто преодолением незавершенности теории относительности, когда релятивистские динамические уравнения применяются к нерелятивистскому понятию состояния частицы. Однако, объяснение эффектов квантовой механики как результат статистического описания стохастического движения частиц поднимает вопрос о природе стохастичности движения квантовых частиц.

Первоначально стохастичность движения частиц интерпретировалась как результат взаимодействия с эфиром. Однако, в дальнейшем появилась идея, что сама геометрия пространства-времени может играть роль эфира. Другими словами, геометрия пространства-времени должна определять движение свободной частицы. Если движение свободной частицы является стохастическим, то геометрия пространства-времени не может быть геометрией Минковского, потому что в пространственно-временной геометрии Минковского движение свободной частицы является детерминированным. Реальная геометрия пространства-времени должна быть однородной и изотропной, но она должна отличаться от геометрии Минковского. Геометрия должна быть многовариантной. Это означает что в точке Q_0 имеется много векторов $Q_0Q_1, Q_0Q'_1, Q_0Q''_1, \dots$ которые эквивалентны вектору P_0P_1 в точке P_0 . Но векторы $Q_0Q_1, Q_0Q'_1, Q_0Q''_1, \dots$ не эквивалентны между собой. Это означает, что отношение эквивалентности интранзитивно. Такая геометрия не может быть аксиоматизируемой, потому что в любой аксиоматизируемой геометрии отношение эквивалентности транзитивно. Неаксиоматизируемые геометрии не были известны в семидесятых годах двадцатого века. Дискретная геометрия (1.3) тоже не была известна, потому что в то время дискретная геометрия воспринималась как геометрия на решетчатом множестве точек.

Идея физической геометрии, полностью описываемой мировой функцией, появилась только в девяностых годах двадцатого века [10]. Близкая идея дистантной (метрической) геометрии появилась раньше [11, 12]. Но такая геометрия не могла быть использована для описания геометрии пространства-времени.

Дискретная геометрия (1.3) используется для объяснения стохастичности движения свободных частиц [4]. Однако, эта геометрия использовалась сначала как простейшее многовариантное обобщение геометрии Минковского, а не как дискретная геометрия. Тот факт, что пространственно-временная геометрия (1.3) является дискретной, был замечен

несколькими годами позднее. Естественно, что исходя из идеи дискретной геометрии, приходишь к геометрии на решетке, потому что нельзя получить геометрию (1.3), если физическая геометрия не известна.

Применение физической геометрии для описания пространства-времени имеет серьезные последствия для физики микромира. Оказывается, что квантовые принципы не являются первыми принципами природы. Теория относительности оказывается незавершенной. Нужно пересмотреть понятие состояния частицы. Математический аппарат, используемый для описания физических явлений в микромире, существенно изменяется. Динамические уравнения перестают быть дифференциальными уравнениями и превращаются в уравнения в конечных разностях. Описание движения частиц и описание влияния частиц на гравитационное поле становится бескоординатным. Это было прогрессом в описании движения частиц в микромире.

Переход от традиционного описания в терминах дифференциальных уравнений к бескоординатному описанию в терминах мировой функции был несколько неожиданным. Он связан с вырожденным характером собственно евклидовой геометрии по отношению к физической геометрии. Это означает, что некоторые геометрические объекты и некоторые геометрические понятия, которые различны в физической геометрии, оказываются совпадающими в собственно евклидовой геометрии. Например, геометрический вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ определяемый как упорядоченное множество из двух точек P_0 и P_1 является вектором в физической геометрии и в евклидовой геометрии. Проекция p_l вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ на базисные координатные векторы $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_l$, $l = 1, 2, \dots, n$ определяются соотношениями

$$p_l = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_l), \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (1.8)$$

Здесь $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_l)$ есть скалярное произведение двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_l$, которое определяется в терминах мировой функции соотношением

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_l) = \sigma(P_0, Q_l) + \sigma(P_1, Q_0) - \sigma(P_0, Q_0) - \sigma(P_1, Q_l) \quad (1.9)$$

Выражение скалярного произведения (1.9) через мировую функцию одно и то же в физической геометрии и в собственно евклидовой геометрии. В физической геометрии соотношение (1.9) представляет собой определение скалярного произведения, тогда как в евклидовой геометрии соотношение (1.9) получается как следствие теоремы косинусов, но в обоих случаях выражение (1.9) верно. В евклидовой геометрии скалярное произведение имеет известные линейные свойства, но эти свойства, вообще говоря, отсутствуют в физической геометрии. В результате составляющие p_l геометрического вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ не определяют вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ в физической геометрии, хотя они определяют вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ в собственно евклидовой геометрии. Это означает, что вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и его составляющие p_l , $l = 1, 2, \dots, n$ означают одну и ту же величину в евклидовой геометрии, тогда как это, вообще говоря, различные величины в физической геометрии.

Аналогично выражение для кругового цилиндра $Cyl_{P_0P_1Q}$, определяемого точками P_0, P_1 ($P_0 \neq P_1$) на оси цилиндра и точкой Q на поверхности цилиндра, представляет собой множество точек R , удовлетворяющих соотношению

$$Cyl_{P_0P_1Q} = \{R | S_{P_0P_1R} = S_{P_0P_1Q}\} \quad (1.10)$$

где $S_{P_0P_1Q}$ есть площадь треугольника, определяемого его вершинами P_0, P_1, Q . Площадь $S_{P_0P_1Q}$ определяется с помощью формулы Герона. Пусть точка $P_3 \in \mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, где $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ есть отрезок прямой линии между точками P_0, P_1 . Этот отрезок определяется соотношением

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]} = \left\{ R | \sqrt{2\sigma(P_0, R)} + \sqrt{2\sigma(P_1, R)} = \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} \right\} \quad (1.11)$$

Тогда в собственно евклидовой геометрии $Cyl_{P_0P_1Q} = Cyl_{P_0P_3Q} = Cyl_{P_1P_3Q}$. Но в физической геометрии, вообще говоря, $Cyl_{P_0P_1Q} \neq Cyl_{P_0P_3Q} \neq Cyl_{P_1P_3Q}$. Другими словами, много различных цилиндров $Cyl_{P_0P_1Q}$, $P_0, P_1 \in \mathcal{T}_{[S_1S_2]}$ физической геометрии вырождаются в собственно евклидовой геометрии в один цилиндр, определяемый его осью $\mathcal{T}_{[S_1S_2]}$ и точкой Q на поверхности цилиндра, потому что отрезок прямой (1.11) является одномерным в случае собственно евклидовой геометрии, но он является, вообще говоря, многомерной поверхностью в случае физической геометрии.

Одномерность отрезка $\mathcal{T}_{[S_1S_2]}$ в евклидовой геометрии в терминах мировой функции формулируется следующим образом. Всякое сечение $S(\mathcal{T}_{[S_1S_2]}, Q)$ отрезка $\mathcal{T}_{[S_1S_2]}$ в точке $Q \in \mathcal{T}_{[S_1S_2]}$ состоит из одной точки Q . Сечение $S(\mathcal{T}_{[S_1S_2]}, Q)$ определяется как множество точек R

$$S(\mathcal{T}_{[S_1S_2]}, Q) = \{R | \sigma(S_1, R) = \sigma(S_1, Q) \wedge \sigma(S_2, R) = \sigma(S_2, Q)\} \quad (1.12)$$

В собственно евклидовой геометрии $S(\mathcal{T}_{[S_1S_2]}, Q) = \{Q\}$, $\forall Q \in \mathcal{T}_{[S_1S_2]}$, тогда как в случае физической геометрии это равенство не выполняется, вообще говоря.

Таким образом, геометрия, вообще говоря, вырождается при переходе от физической геометрии к собственно евклидовой геометрии. Различные геометрические объекты физической геометрии и понятия могут совпадать в евклидовой геометрии. Наоборот, при переходе от собственно евклидовой геометрии к физической геометрии некоторые объекты евклидовой геометрии расщепляются на различные геометрические объекты. Переход от общего случая к частному воспринимается легче, тогда как переход от частного случая к общему сопровождается расщеплением геометрических объектов и геометрических понятий, и это воспринимается гораздо труднее.

2 Релятивистская инвариантность

Релятивистская инвариантность обычно представляется как инвариантность динамических уравнений относительно группы Пуанкаре преобразований инерциальных координат. Нерелятивистские динамические уравнения считаются инвариантными относительно группы галилеевых преобразований инерциальных координат. Возможно ли сформулировать различие между релятивистской и нерелятивистской физикой в инвариантных терминах, т.е. без ссылки на системы координат и законы их преобразования? Да, это возможно.

В релятивистской физике геометрия пространства-времени описывается с помощью одной структуры σ , которая известна как квадрат пространственно-временного интервала, или мировая функция. В нерелятивистской физике пространство событий (пространство-время) описывается двумя геометрическими структурами. Такое двухструктурное описание не является пространственно-временной геометрией, потому что геометрия пространства-времени описывается одной структурой σ . Если имеется другая пространственно-временная структура, то такое построение следует квалифицировать как обогащенную геометрию, т.е. геометрию с дополнительной геометрической структурой. Такой дополнительной структурой является временная структура $T(P, Q)$, которая представляет собой разность абсолютного времени между точками P и Q . Можно построить другую геометрическую структуру $S(P, Q)$, которая является разностью абсолютных пространственных положений точек P и Q . Структура $S(P, Q)$ не является независимой структурой. Пространственная структура $S(P, Q)$ может быть построена из двух структур σ и T . В любом случае в нерелятивистской физике имеются две независимые геометрические структуры. В релятивистской физике имеется только одна структура σ .

В нерелятивистской физике обычно используется временная структура T и пространственная структура S . Однако можно использовать геометрические структуры σ и T . В этом случае следует исследовать дополнительные ограничения, налагаемые временной

структурой T на пространственно-временную геометрию Минковского. Геометрические структуры пространства-времени определяют группу движений пространства-времени, и эта группа движений пространства-времени определяет группу инвариантности динамических уравнений. Таким образом, различие между релятивистской и нерелятивистской физикой определяется числом геометрических структур. Это различие может быть сформулировано в бескоординатном виде. Законы преобразования динамических уравнений являются только следствиями существования этих геометрических структур.

3 Статистическое описание стохастического движения частиц

Статистическое описание стохастических (недетерминированных) частиц является источником физической геометрии, потому что оно ставит вопрос о природе индетерминизма, который может быть объяснен только более общей однородной геометрией пространства-времени, чем геометрия Минковского.

Как упоминалось во введении, статистическое описание недетерминированных частиц было впервые получено с помощью динамической концепции статистического описания (ДКСО). Этот подход основан на релятивистском понятии состояния частицы [7, 8, 9]. Другой метод описания стохастических частиц был использован позднее, когда статистический ансамбль использовался как базовый элемент динамики частиц (вместо отдельной частицы) [13]. В этом методе не используется понятие отдельной частицы и понятие фазового пространства. Этот метод обходит понятие состояния частицы. Он не использует это понятие. Используется только понятие состояния ансамбля, которое не чувствительно к проблеме существования предела (1.7). С формальной точки зрения этот метод использует ДКСО, а не ВКСО.

Действие для статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]$ свободных недетерминированных частиц \mathcal{S}_{st} записывается в виде

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]}[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int_{V_{\xi}} \left\{ \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{m}{2} \mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2} \nabla \mathbf{u} \right\} dt d\xi, \quad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (3.1)$$

Независимые переменные $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ маркируют конститунты \mathcal{S}_{st} статистического ансамбля. Зависимые переменные $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \xi)$ описывают регулярную составляющую движения частицы. Переменная $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ описывает среднее значение стохастической составляющей скорости, \hbar есть квантовая постоянная. Второй член в (3.1) описывает кинетическую энергию стохастической составляющей скорости. Третий член описывает взаимодействие между стохастической составляющей скорости $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ и регулярной составляющей $\dot{\mathbf{x}}(t, \xi)$. Оператор

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\} \quad (3.2)$$

определен в пространстве координат \mathbf{x} . Динамические уравнения для динамической системы $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]$ получаются в результате варьирования действия (3.1) по динамическим переменным \mathbf{x} и \mathbf{u} .

Действие для одной недетерминированной частицы \mathcal{S}_{st} имеет вид

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{st}}[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int \left\{ \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{m}{2} \mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2} \nabla \mathbf{u} \right\} dt, \quad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (3.3)$$

Это действие определено некорректно, потому что оператор ∇ определен на 3D-пространстве координат $\mathbf{x} = \{x^1, x^2, x^3\}$, тогда как в функционале действия (3.3) переменная \mathbf{x} используется только на одномерном множестве. Это означает, что не существует

динамических уравнений для частицы \mathcal{S}_{st} , и частица \mathcal{S}_{st} является стохастической (а не динамической) системой. Однако, функционал действия (3.1) является хорошо определенным для статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]$ существуют динамические уравнения, хотя динамических уравнений не существует для конститuant этого статистического ансамбля.

Вариация действия (3.1) приводит к динамическим уравнениям

$$\delta \mathbf{u} : \quad m\rho \mathbf{u} + \frac{\hbar}{2} \nabla \rho = 0, \quad \mathbf{u} = -\frac{\hbar}{2m} \nabla \ln \rho \quad (3.4)$$

$$\delta \mathbf{x} : \quad m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \nabla \left(\frac{m}{2} \mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2} \nabla \mathbf{u} \right) \quad (3.5)$$

где

$$\rho = \frac{\partial (\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial (x^1, x^2, x^3)} = \left(\frac{\partial (x^1, x^2, x^3)}{\partial (\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \right)^{-1} \quad (3.6)$$

После надлежащей замены переменных динамические уравнения приводятся к уравнению [13]

$$i\hbar \partial_0 \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{\hbar^2}{8m} \nabla^2 s_\alpha \cdot (s_\alpha - 2\sigma_\alpha) \psi - \frac{\hbar^2}{4m} \frac{\nabla \rho}{\rho} \nabla s_\alpha \sigma_\alpha \psi = 0 \quad (3.7)$$

где ψ есть двухкомпонентная комплексная волновая функция

$$\rho = \psi^* \psi, \quad s_\alpha = \frac{\psi^* \sigma_\alpha \psi}{\rho}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (3.8)$$

σ_α суть 2×2 матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

Если составляющие ψ_1 и ψ_2 линейно независимы $\psi = \begin{pmatrix} a\psi_1 \\ b\psi_1 \end{pmatrix}$, $a, b = \text{const}$, то $\mathbf{s} = \text{const}$.

Два последних члена уравнения (3.7) обращаются в нуль, и уравнение превращается в уравнение Шредингера

$$i\hbar \partial_0 \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = 0 \quad (3.10)$$

Таким образом, уравнение Шредингера и интерпретация квантовой механики возникают из динамической системы $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]$, описываемой функционалом действия (3.1). Этот факт кажется несколько неожиданным, потому что волновая функция в квантовой механике рассматривается как особый квантовый объект, не имеющий аналога в классической физике. На самом деле, волновая функция есть просто способ описания идеальной сплошной среды [14]. Можно описывать идеальную жидкость в терминах гидродинамических переменных: плотности ρ и скорости \mathbf{v} . Можно описывать идеальную жидкость в терминах волновой функции. Статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]$ представляет собой динамическую систему типа сплошной среды. Эти два представления динамических уравнений для динамической системы $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]$ можно преобразовывать одно в другое.

Обобщение действия (3.3) на случай стохастических релятивистских частиц, движущихся в электромагнитном поле, имеет вид [15]

$$\mathcal{A}[x, \kappa] = \int \left\{ -mcK \sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k} - \frac{e}{c} A_k \dot{x}^k \right\} d^4 \xi, \quad d^4 \xi = d\xi_0 d\xi, \quad (3.11)$$

$$K = \sqrt{1 + \lambda^2 (\kappa_l \kappa^l + \partial_l \kappa^l)}, \quad \lambda = \frac{\hbar}{mc} \quad (3.12)$$

где $x = \{x^i(\xi_0, \xi)\}$, $i = 0, 1, 2, 3$ суть зависимые переменные. $\xi = \{\xi_0, \xi\} = \{\xi_k\}$, $k = 0, 1, 2, 3$ суть независимые переменные, и $\dot{x}^i \equiv dx^i/d\xi_0$. Величины $\kappa^l = \{\kappa^l(x)\}$, $l = 0, 1, 2, 3$ являются зависимыми переменными, описывающими стохастическую составляющую движения частицы, $A_k = \{A_k(x)\}$, $k = 0, 1, 2, 3$ есть потенциал электромагнитного поля. Динамическая система с действием (3.11), (3.12) является статистическим ансамблем недетерминированных частиц, который выглядит как некоторая сплошная среда. Переменные κ^l связаны со стохастической составляющей 4-скорости u^l частицы с помощью соотношения

$$\kappa^l = \frac{m}{\hbar} u^l, \quad l = 0, 1, 2, 3 \quad (3.13)$$

В нерелятивистском приближении можно пренебречь временной составляющей $\kappa^0 = \frac{m}{\hbar} u^0$ по сравнению с пространственной $\kappa = \frac{m}{\hbar} \mathbf{u}$. Полагая $\xi_0 = t = x^0$ и $A_k = 0$ в (3.11), (3.12), получаем действие (3.1) вместо (3.11), (3.12).

После надлежащей замены переменных получаем динамическое уравнение для действия (3.11), (3.12). Это динамическое уравнение имеет вид [15]

$$\begin{aligned} & \left(-i\hbar\partial_k + \frac{e}{c}A_k\right) \left(-i\hbar\partial^k + \frac{e}{c}A^k\right) \psi - \left(m^2c^2 + \frac{\hbar^2}{4}(\partial_l s_\alpha)(\partial^l s_\alpha)\right) \psi = \\ & = -\hbar^2 \frac{\partial_l(\rho\partial^l s_\alpha)}{2\rho} (\sigma_\alpha - s_\alpha) \psi \end{aligned} \quad (3.14)$$

где используются обозначения (3.8), (3.9). В случае, когда волновая функция ψ однокомпонентна, вектор $\mathbf{s} = \text{const}$, и динамическое уравнение (3.14) превращается в уравнение Клейна-Гордона

$$\left(-i\hbar\partial_k + \frac{e}{c}A_k\right) \left(-i\hbar\partial^k + \frac{e}{c}A^k\right) \psi - m^2c^2\psi = 0 \quad (3.15)$$

Преобразование гидродинамических уравнений (3.4) в динамические уравнения в терминах волновой функции ψ основано на том факте, что волновая функция представляет собой способ описания гидродинамических уравнений. [14]. Преобразование гидродинамических уравнений, описываемых в терминах гидродинамических переменных (плотность ρ и скорость \mathbf{v}), к описанию в терминах волновой функции довольно громоздко, потому что оно использует частичное интегрирование динамических уравнений. Это интегрирование приводит к появлению произвольных функций $g^a(\xi)$. Волновая функция строится из этих функций [14].

Можно следующим образом пояснить создавшуюся ситуацию. Хорошо известно, что уравнение Шредингера может быть записано в гидродинамической форме Маделунга-Бома [17, 18]. Волновая функция представляется в виде ψ

$$\psi = \sqrt{\rho} \exp(i\varphi/\hbar) \quad (3.16)$$

Подставляя (3.16) в уравнение Шредингера (3.10), получаем два вещественных уравнения для динамических переменных ρ и φ . Взяв градиент от уравнения для φ и вводя обозначения

$$\mathbf{v} = -\frac{\hbar}{m} \nabla\varphi, \quad \text{curl}\mathbf{v} = 0 \quad (3.17)$$

получаем четыре уравнения гидродинамического типа

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{m} \nabla U_B \quad (3.18)$$

где U_B есть потенциал Бома, определяемый соотношением

$$U_B = U(\rho, \nabla\rho, \nabla^2\rho) = \frac{\hbar^2}{8m\rho} \left(\frac{(\nabla\rho)^2}{\rho} - 2\nabla^2\rho \right) = -\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}} \nabla^2\sqrt{\rho} \quad (3.19)$$

Гидродинамические уравнения (3.18) могут быть легко получены из уравнений (3.4), (3.5). Чтобы получить уравнения (3.18), (3.19) в терминах волновой функции, надо проинтегрировать эти уравнения, потому что они получены с помощью дифференцирования уравнения Шредингера. Это интегрирование легко произвести, если выполнено условие (3.17), и течение жидкости потенциально.

В общем случае завихренного течения интегрирование существенно сложнее. Тем не менее это интегрирование было произведено [14], и получено более сложное уравнение (3.7), где два последних члена описывают завихренность течения. Уравнение Шредингера (3.10) представляет собой частный случай более общего уравнения (3.7).

Заметим, что уравнение (3.7) нелинейно, хотя оно инвариантно относительно преобразования

$$\psi \rightarrow \tilde{\psi} = A\psi, \quad A = \text{const} \quad (3.20)$$

которое позволяет нормировать волновую функцию к любому неотрицательному значению. Это свойство описывает независимость статистического ансамбля от числа конститuant.

Представление квантовой механики как описание статистического ансамбля классических недетерминированных частиц позволяет интерпретировать квантовые соотношения в терминах статистического описания. Эта интерпретация различается в некоторых пунктах от традиционной (копенгагенской) интерпретации квантовой механики.

В любом статистическом описании имеются два вида измерений, которые обладают различными свойствами. Массовое измерение (M-измерение) производится над всеми конститuantами статистического ансамбля. Результатом M-измерения величины R является распределение величины R , которое может быть предсказано в результате решения динамических уравнений для статистического ансамбля.

Отдельное измерение (S-измерение) производится над одной из конститuant статистического ансамбля. Результатом S-измерения величины R является некоторое случайное значение величины R , которое не может быть предсказано теорией. В копенгагенской интерпретации квантовой механики предполагается, что волновая функция описывает отдельную частицу (а не статистический ансамбль частиц). В результате имеется только один тип измерения, который иногда рассматривается как M-измерение, а иногда как S-измерение. Поскольку M-измерение и S-измерение обладают разными свойствами, то отождествление этих двух видов измерения является источником многочисленных противоречий и парадоксов. [19].

Представление квантовой механики в виде статистического описания движения недетерминированных частиц имеет два важных следствия: (1) Исключение квантовых принципов из числа первых принципов. (2) возникновение проблемы изначального стохастического движения свободных частиц.

4 Принцип деформации

То, что геометрия может полностью описываться с помощью расстояния (или мировой функции) — это очень старая идея. Сначала это было метрическое пространство, описываемое метрикой (расстоянием). Метрика была ограничена рядом условий таких как аксиома треугольника и неотрицательность метрики. Требование неотрицательности метрики не позволяло применить метрическое пространство для описания пространства-времени. Главный недостаток метрической геометрии и дистантной геометрии [11, 12] — это невозможность (неумение) построения геометрических объектов в терминах мировой функции или в терминах метрики. Построение геометрических объектов в терминах мировой функции должно быть возможно, потому что предполагается, что геометрия полностью

описывается мировой функцией и в терминах мировой функции. Более того, физическая геометрия позволяет осуществлять бескоординатное описание.

Такая ситуация возможна, если правильно определить понятия геометрии и геометрических объектов.

Определение 4.1: Физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ представляет собой точечное множество Ω с заданной на нем однозначной мировой функцией σ

$$\sigma : \quad \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma(P, P) = 0, \quad \sigma(P, Q) = \sigma(Q, P), \quad P, Q \in \Omega \quad (4.1)$$

Определение 4.2: Две физические геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma_1, \Omega_1\}$ и $\mathcal{G}_2 = \{\sigma_2, \Omega_2\}$ эквивалентны ($\mathcal{G}_1 \text{eqv} \mathcal{G}_2$) если множество точек $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \wedge \sigma_1 = \sigma_2$, или $\Omega_2 \subseteq \Omega_1 \wedge \sigma_2 = \sigma_1$.

Замечание: Совпадение точечных множеств Ω_1 и Ω_2 не является необходимым для эквивалентности геометрий \mathcal{G}_1 и \mathcal{G}_2 . Если потребовать совпадения Ω_1 и Ω_2 в случае эквивалентности геометрий \mathcal{G}_1 и \mathcal{G}_2 , то удаление одной точки P из точечного множества Ω_1 превращает геометрию $\mathcal{G}_1 = \{\sigma_1, \Omega_1\}$ в геометрию $\mathcal{G}_2 = \{\sigma_1, \Omega_1 \setminus P\}$, которая оказывается неэквивалентной геометрии \mathcal{G}_1 . такая ситуация представляется неприемлемой, потому что геометрия на части $\omega \subset \Omega_1$ точечного множества Ω_1 оказывается неэквивалентной геометрии на всем точечном множестве Ω_1 .

В соответствии с определением геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma, \omega_1\}$ и $\mathcal{G}_2 = \{\sigma, \omega_2\}$ на частях Ω , $\omega_1 \subset \Omega$ и $\omega_2 \subset \Omega$ эквивалентны ($\mathcal{G}_1 \text{eqv} \mathcal{G}$), ($\mathcal{G}_2 \text{eqv} \mathcal{G}$) геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$, тогда как геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma, \omega_1\}$ и $\mathcal{G}_2 = \{\sigma, \omega_2\}$, вообще говоря, неэквивалентны, если $\omega_1 \not\subset \omega_2$ или $\omega_2 \not\subset \omega_1$. Таким образом, отношение эквивалентности, вообще говоря, интранзитивно. Геометрия пространства-времени может видоизменяться в различных областях пространства-времени. Это означает, что физическое тело, описываемое геометрическим объектом, может эволюционировать таким образом, что оно оказывается в областях с разной геометрией пространства-времени.

Определение 4.3: Геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n}$ геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ является подмножеством $g_{\mathcal{P}_n} \subset \Omega$ точечного множества Ω . Этот геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n}$ представляет собой множество корней $R \in \Omega$ функции $F_{\mathcal{P}_n}$

$$F_{\mathcal{P}_n} : \quad \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

где

$$F_{\mathcal{P}_n} : \quad F_{\mathcal{P}_n}(R) = G_{\mathcal{P}_n}(u_1, u_2, \dots, u_s), \quad s = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \quad (4.2)$$

$$u_l = \sigma(w_i, w_k), \quad i, k = 0, 1, \dots, n+1, \quad l = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \quad (4.3)$$

$$w_k = P_k \in \Omega, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad w_{n+1} = R \in \Omega \quad (4.4)$$

Здесь $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\} \subset \Omega$ суть $n+1$ точек которые являются параметрами, определяющими геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n}$

$$g_{\mathcal{P}_n} = \{R | F_{\mathcal{P}_n}(R) = 0\}, \quad R \in \Omega, \quad \mathcal{P}_n \in \Omega^{n+1} \quad (4.5)$$

$F_{\mathcal{P}_n}(R) = G_{\mathcal{P}_n}(u_1, u_2, \dots, u_s)$ есть произвольная функция $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ аргументов u_s и $n+1$ параметров \mathcal{P}_n . Множество \mathcal{P}_n параметров геометрического объекта называется каркасом геометрического объекта. Подмножество $g_{\mathcal{P}_n}$ называется оболочкой каркаса (геометрического объекта). Один каркас может иметь много разных оболочек. Когда частица рассматривается как геометрический объект, ее движение в пространстве-времени описывается ее каркасом \mathcal{P}_n , который интерпретируется как репер, жестко прикрепленный к частице.

Замечание: Произвольное подмножество точечного множества Ω , вообще говоря, не является геометрическим объектом. Предполагается, что физические тела могут иметь только форму геометрических объектов, потому что только в этом случае можно отождествить одинаковые физические тела в различных геометриях пространства-времени.

Существование одних и тех же геометрических объектов в разных областях пространства-времени, имеющих различные геометрии, поднимает вопрос об эквивалентности геометрических объектов в разных геометриях. Такой вопрос не возникал раньше, потому что не рассматривалась такая ситуация, когда физическое тело перемещается из одной области пространства-времени в другую область, имеющую другую геометрию. Вообще говоря, традиционный математический аппарат геометрии пространства-времени не приспособлен для одновременного рассмотрения нескольких различных геометрий пространства-времени.

Мы можем воспринимать геометрию пространства-времени только через движение физических тел в нем, или через построение геометрических объектов, соответствующих этим физическим телам. Как следует из *определения 4.3* геометрического объекта, функция F как функция ее аргументов (мировых функций от различных точек) имеет один и тот же вид во всех физических геометриях. Это означает, что геометрический объект \mathcal{O}_1 в геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma_1, \Omega_1\}$ получается из того же самого геометрического объекта \mathcal{O}_2 в геометрии $\mathcal{G}_2 = \{\sigma_2, \Omega_2\}$ с помощью замены $\sigma_2 \rightarrow \sigma_1$ в определении геометрического объекта.

Поскольку физическая геометрия определяется построением ее геометрических объектов, физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ может быть получена из некоторой стандартной геометрии $\mathcal{G}_{st} = \{\sigma_{st}, \Omega\}$ с помощью деформации стандартной геометрии \mathcal{G}_{st} . Деформация стандартной геометрии \mathcal{G}_{st} осуществляется заменой $\sigma_{st} \rightarrow \sigma$ во всех определениях геометрических объектов стандартной геометрии. Собственно евклидова геометрия является аксиоматизируемой геометрией. Она построена как логическое построение с помощью метода Евклида. Одновременно собственно евклидова геометрия является физической геометрией. Она может использоваться как стандартная геометрия \mathcal{G}_{st} . Построение физической геометрии в результате деформации собственно евклидовой геометрии называется принципом деформации. Большинство физических геометрий являются неаксиоматизируемыми геометриями. Они могут быть построены только с помощью принципа деформации.

Описание движения элементарных частиц в пространстве-времени содержит только каркас частицы $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$. Вид функции (4.2) не является существенным в первом приближении. В динамике элементарных частиц существенна только эквивалентность векторов $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_k$, $i, k = 0, 1, \dots, n$. Эти векторы определяются каркасом частицы \mathcal{P}_n .

Эквивалентность $(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \text{eqv} \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1$ определяется соотношениями

$$(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \text{eqv} \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1) : \quad (\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1| \wedge |\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1| \quad (4.6)$$

где

$$|\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1| = \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} \quad (4.7)$$

и скалярное произведение $(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1)$ определяется соотношением (1.9)

$$(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1) = \sigma(P_0, Q_1) + \sigma(P_1, Q_0) - \sigma(P_0, Q_0) - \sigma(P_1, Q_1) \quad (4.8)$$

Каркасы $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ и $\mathcal{P}'_n = \{P'_0, P'_1, \dots, P'_n\}$ могут принадлежать одному и тому же геометрическому объекту, если

$$|\mathbf{P}_i \mathbf{P}_k| = |\mathbf{P}'_i \mathbf{P}'_k|, \quad i, k = 0, 1, \dots, n \quad (4.9)$$

т.е. длины всех векторов $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_k$ и $\mathbf{P}'_i \mathbf{P}'_k$ равны. Однако этого недостаточно для эквивалентности каркасов \mathcal{P}_n and \mathcal{P}'_n .

Каркасы $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ и $\mathcal{P}'_n = \{P'_0, P'_1, \dots, P'_n\}$ эквивалентны

$$(\mathcal{P}_n \text{eqv} \mathcal{P}'_n) : \quad \text{если} \quad \mathbf{P}_i \mathbf{P}_k \text{eqv} \mathbf{P}'_i \mathbf{P}'_k, \quad i, k = 0, 1, \dots, n \quad (4.10)$$

Другим словами, эквивалентность каркасов требует равенства длин векторов $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_k$ и $\mathbf{P}'_i \mathbf{P}'_k$ и равенства их взаимных ориентаций.

5 Многовариантность

Физическая геометрия обладает свойством многовариантности. Это означает, что в точке P_0 имеется много векторов $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0 \mathbf{P}'_1, \mathbf{P}_0 \mathbf{P}''_1, \dots$, которые эквивалентны вектору $\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1$ в точке Q_0 , но они не эквивалентны между собой. Собственно евклидова геометрия не обладает свойством многовариантности. В собственно евклидовой геометрии имеется только один вектор $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$ в точке P_0 , который эквивалентен вектору $\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1$ в точке Q_0 .

Формально многовариантность связана с определением эквивалентности векторов через алгебраические соотношения (4.6) - (4.8). Если вектор $\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1$ задан, и нужно определить эквивалентный вектор $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$ в точке P_0 , то нужно решить два уравнения (4.6) относительно точки P_1 . Если эти два уравнения имеют единственное решение, то имеется только один эквивалентный вектор $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$ (одновариантность). Если имеется много решений, то имеется много векторов $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0 \mathbf{P}'_1, \mathbf{P}_0 \mathbf{P}''_1, \dots$, которые эквивалентны вектору $\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1$ (многовариантность). Возможен такой случай, когда нет решений. В этом случае имеет место нуль-вариантность.

Многовариантность геометрии пространства-времени ведет к расщеплению мировой цепи на много стохастических мировых цепей. В результате многовариантность геометрии пространства-времени приводит к появлению квантовых эффектов.

Нуль-вариантность появляется в случае многоточечных каркасов. Это интересно в том отношении, что нуль-вариантность может запрещать элементарные частицы с многоточечными каркасами.

6 Дискретность геометрии пространства-времени

Мировая функция (1.3) описывает полностью дискретную геометрию. Однако, геометрия пространства-времени может быть частично дискретной. Можно ввести плотность точек $\rho = d\sigma_M/d\sigma_d$ в дискретной геометрии по отношению к плотности точек в геометрии Минковского. Дискретная геометрия может описываться относительной плотностью точек

$$\rho(\sigma_d) = \frac{d\sigma_M(\sigma_d)}{d\sigma_d} = \begin{cases} 0 & \text{если } 0 < |\sigma_d| < \frac{\lambda_0^2}{2} \\ 1 & \text{если } |\sigma_M| \geq \frac{\lambda_0^2}{2} \end{cases} \quad (6.1)$$

Для близких точек относительная плотность точек дискретной геометрии обращается в нуль, и это обстоятельство рассматривается как дискретность геометрии. Однако, дискретность геометрии может быть не полной.

Рассмотрим геометрию пространства-времени с мировой функцией σ_g

$$\sigma_g = \sigma_M + \frac{\lambda_0^2}{2} \begin{cases} \text{sgn}(\sigma_M) & \text{если } |\sigma_M| \geq \sigma_0 \\ \frac{\sigma_M}{\sigma_0} & \text{если } |\sigma_M| < \sigma_0 \end{cases}, \quad \lambda_0, \sigma_0 = \text{const} \quad (6.2)$$

Относительная плотность точек в геометрии (6.2) имеет вид

$$\rho(\sigma_g) = \frac{d\sigma_M(\sigma_g)}{d\sigma_g} = \begin{cases} 1 & \text{если } |\sigma_g| \geq \sigma_0 + \frac{\lambda_0^2}{2} \\ \frac{\sigma_0}{\sigma_0 + \frac{\lambda_0^2}{2}} & \text{если } |\sigma_g| < \sigma_0 + \frac{\lambda_0^2}{2} \end{cases} \quad (6.3)$$

Если $\sigma_0 \ll \lambda_0^2$ относительная плотность точек в области, где $|\sigma_g| \in \left(0, \sigma_0 + \frac{\lambda_0^2}{2}\right)$ много меньше, чем 1. Если $\sigma_0 \rightarrow 0$, относительная плотность точек (6.3) стремится к (6.1). Геометрию (6.2) следует квалифицировать как частично дискретную геометрию пространства-времени. Будем называть геометрию (6.2) зернистой геометрией. В зернистой геометрии пространства-времени относительная плотность точек, разделенных малым расстоянием меньшим, чем λ_0 , много меньше, чем относительная плотность других точек. Зернистая геометрия, описываемая мировой функцией

$$\sigma_g = \sigma_M + \frac{\lambda_0^2}{2} \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sigma_M) & \text{если } |\sigma_M| > \sigma_0 \\ f\left(\frac{\sigma_M}{\sigma_0}\right) & \text{если } |\sigma_M| \leq \sigma_0 \end{cases}, \quad \lambda_0, \sigma_0 = \operatorname{const} \quad (6.4)$$

$$f(x) = -f(-x), \quad f(1) = 1$$

является обобщением геометрии (6.2).

7 Динамика элементарных частиц

Динамика элементарных частиц в зернистой геометрии пространства-времени рассматривается [20]. Состояние частицы описывается ее каркасом $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, состоящим из $n+1$ пространственно-временных точек. Такое описание состояния частицы является полным в том смысле, что не нужны параметры частицы (масса, заряд, спин и т.д.). Вся эта информация описывается расположением точек в каркасе. Это означает геометризацию параметров элементарных частиц. Кроме того, традиционное описание состояния частицы как точки в фазовом пространстве оказывается нерелятивистским. Зернистая геометрия, вообще говоря, многовариантна. Движение частицы является стохастическим, и предел (1.7), определяющий импульс частицы не существует. *Таким образом, мы вынуждены описывать состояние частицы ее каркасом для того, чтобы удовлетворить принципам теории относительности при описании динамики стохастических частиц.*

Эволюция состояния частицы описывается мировой цепью \mathcal{C} , состоящей из связанных каркасов $\mathcal{P}_n^{(s)} = \{P_0^{(s)}, P_1^{(s)}, \dots, P_n^{(s)}\}$, $s = \dots - 1, 0, 1, \dots$

$$\mathcal{C} = {}_s\mathcal{P}_n^{(s)}, \quad P_n^{(s)} = P_0^{(s+1)}, \quad s = \dots - 1, 0, 1, \dots \quad (7.1)$$

Связь между каркасами мировой цепи возникает, потому что вторая точка $P_1^{(s)}$ s -ого каркаса совпадает с первой точкой $P_0^{(s+1)}$ $(s+1)$ -ого каркаса. Вектор $\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)} = \mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_0^{(s+1)}$ называется ведущим вектором, определяющим форму мировой цепи. Все каркасы в цепи одинаковы в том смысле, что

$$\left| \mathbf{P}_i^{(s)}\mathbf{P}_k^{(s)} \right| = \mu_{ik} = \operatorname{const}, \quad i, k = 0, 1, \dots, n, \quad s = \dots - 1, 0, 1, \dots \quad (7.2)$$

Определение: Два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ эквивалентны ($\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \operatorname{eqv} \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$), если

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \wedge |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \quad (7.3)$$

Если частица является свободной, то движение ее каркаса поступательно (т.е. движение без вращения), и ориентация смежных каркасов $\mathcal{P}_n^{(s)}$, $\mathcal{P}_n^{(s+1)}$ одна и та же.

$$\left(\mathbf{P}_i^{(s)}\mathbf{P}_k^{(s)} \cdot \mathbf{P}_i^{(s+1)}\mathbf{P}_k^{(s+1)} \right) = \left| \mathbf{P}_i^{(s)}\mathbf{P}_k^{(s)} \right| \cdot \left| \mathbf{P}_i^{(s+1)}\mathbf{P}_k^{(s+1)} \right| = \mu_{ik}^2, \quad (7.4)$$

$$i, k = 0, 1, \dots, n, \quad s = \dots - 1, 0, 1, \dots$$

Уравнения (7.2), (7.4) означают, что смежные каркасы мировой цепи эквивалентны $\mathcal{P}_n^{(s)} \text{eqv} \mathcal{P}_n^{(s+1)}$, $s = \dots - 1, 0, 1, \dots$. Смежные каркасы эквивалентны, если эквивалентны соответствующие векторы смежных каркасов

$$\left(\mathbf{P}_i^{(s)} \mathbf{P}_k^{(s)} \text{eqv} \mathbf{P}_i^{(s+1)} \mathbf{P}_k^{(s+1)} \right), \quad i, k = 0, 1, \dots, n, \quad s = \dots - 1, 0, 1, \dots \quad (7.5)$$

Получаем $n(n+1)$ динамических уравнений в конечных разностях (7.5) (или (7.2), (7.4)), которые описывают эволюцию состояния частицы. Вводя систему координат, получаем nD динамических переменных, чьи значения определяются динамическими уравнениями (7.5). Здесь D есть размерность пространства-времени (число координат, описывающих положение точки). В частности, в случае точечной частицы, чье состояние описывается двумя точками P_0, P_1 , число динамических уравнений $n_d = 2$, тогда как в четырехмерном пространстве-времени число переменных $n_v = 4$. В многовариантном пространстве-времени динамические уравнения имеют много решений. В результате мировая цепь оказывается многовариантной (стохастической).

В римановом пространстве-времени и пространстве-времени Минковского мировая цепь может быть аппроксимирована мировой линией, при условии, что характерные размеры задачи много больше, чем длины звеньев мировой цепи. В этом случае динамические уравнения (7.5) приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Если мировая линия времениподобна [20], решения динамических уравнений оказываются единственными. Если векторы $\mathbf{P}_0^{(s)} \mathbf{P}_1^{(s)}$ пространственноподобны, динамические уравнения имеют много решений даже в римановом пространстве-времени. Это связано с тем обстоятельством, что риманова геометрия так же как и геометрия Минковского многовариантны по отношению к пространственноподобным векторам. При традиционном подходе пространственноподобные мировые линии не рассматриваются, вообще. Такие мировые линии недопустимы по определению (это - постулат).

В [21] была сделана попытка получить дифференциальные уравнения для точечной частицы. Сперва было получено уравнение для точечной частицы в пространстве Минковского. Это только одно уравнение, тогда как при традиционном подходе получаются три уравнения для составляющих скорости $\beta = \mathbf{v}/c$. Это уравнение имеет вид

$$\dot{\beta}^2 + \frac{(\beta \dot{\beta})^2}{1 - \beta^2} = 0, \quad \dot{\beta} \equiv \frac{d\beta}{dt} \quad (7.6)$$

Введем обозначения

$$\beta \dot{\beta} = \sqrt{\beta^2 \dot{\beta}^2} \cos \phi \quad (7.7)$$

где ϕ есть угол между векторами β and $\dot{\beta}$. Уравнение (7.6) принимает вид

$$\dot{\beta}^2 \left(1 + \frac{\beta^2 \cos^2 \phi}{1 - \beta^2} \right) = 0 \quad (7.8)$$

Если мировая линия времениподобна $\beta^2 < 1$, и $\cos^2 \phi \leq 1$, то скобка в (7.8) положительна. Тогда заключаем из (7.8), что

$$\dot{\beta}^2 = 0 \quad (7.9)$$

Получаем три уравнения из одного уравнения (7.9)

$$\dot{\beta} \equiv c^{-1} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad (7.10)$$

Если мировая линия пространственноподобна, то $\beta^2 > 1$, и скобка в (7.9) обращается в нуль при

$$\cos^2 \phi = \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2} < 1 \quad (7.11)$$

Ускорение $\dot{\mathbf{v}} = c\dot{\beta}$ становится неопределенным при этом значении угла ϕ между $\dot{\beta}$ и β . Это следует интерпретировать как невозможность существования пространственноподобных мировых линий. При традиционном подходе такая невозможность существования пространственноподобных мировых линий просто постулируется.

Такой результат довольно очевиден, потому что пространственно-временная геометрия Минковского одновариантна относительно времениподобных векторов и многовариантна относительно пространственноподобных векторов. Для времениподобных векторов можно получить три динамических уравнения (7.10) из одного уравнения (7.8). Для пространственноподобных векторов это невозможно.

Другой пример рассматривается в работе [21]. Рассматривается движение точечной частицы в гравитационном поле массивной сферы массы M . В ньютоновском приближении мировая функция $\sigma(t, \mathbf{y}; t', \mathbf{y}')$ между точками с координатами (t, \mathbf{y}) и (t', \mathbf{y}') имеет вид

$$\sigma(t, \mathbf{y}; t', \mathbf{y}') = \frac{1}{2} \left(c^2 - \frac{2GM}{\sqrt{\mathbf{x}^2}} \right) (t - t')^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{y}')^2 \quad (7.12)$$

где G есть гравитационная постоянная, и

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{y} + \mathbf{y}'}{2} \quad (7.13)$$

Метрический тензор имеет традиционный вид

$$g_{ik} = g_{ik}(\mathbf{x}) = \text{diag} \left(c^2 - \frac{2GM}{\sqrt{\mathbf{x}^2}}, -1, -1, -1 \right) \quad (7.14)$$

и геометрия пространства-времени, описываемая мировой функцией (7.12) не является римановой. Но мировая функция оказывается однозначной.

Риманова геометрия концептуально дефективна в том смысле, что мировая функция римановой геометрии с метрическим тензором (7.14) является многозначной, тогда как мировая функция должна быть однозначной. Но риманова геометрия одновариантна относительно времениподобных векторов, имеющих общее начало. В результате времениподобные мировые цепи в римановой геометрии пространства-времени оказываются детерминированными. Они могут быть заменены детерминированными мировыми линиями.

Геометрия (7.12) пространства-времени многовариантна, вообще говоря, но ее мировая функция (7.12) однозначна. Мировая функция (7.12) получается в расширенной общей теории относительности, когда удалены необоснованные ограничения, требующие римановости геометрии пространства-времени [22].

Для получения дифференциальных динамических уравнений для свободной частицы рассмотрим два связанных звена мировой цепи, определяемые точками P_0, P_1, P_2 , имеющими координаты

$$P_0 = \{y - dy_1\}, \quad P_1 = \{y\}, \quad P_2 = \{y + dy_2\} \quad (7.15)$$

где

$$y = \{t, \mathbf{y}\}, \quad dy_1 = \{dt_1, d\mathbf{y}_1\}, \quad dy_2 = \{dt_2, d\mathbf{y}_2\} \quad (7.16)$$

суть координаты в некоторой инерциальной системе координат. Динамические уравнения (7.2), (7.4) принимают вид

$$\sigma(y, y - dy_1) = \sigma(y, y + dy_2) \quad (7.17)$$

$$4\sigma(y, y - dy_1) = \sigma(y - dy_1, y + dy_2) \quad (7.18)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d\mathbf{y}_1}{dt_1}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{d\mathbf{y}_2}{dt_2}, \quad \beta_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{c}, \quad \beta_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{c} \quad (7.19)$$

$$\beta_1 = \beta - \frac{1}{2}\dot{\beta}dt, \quad \beta_2 = \beta + \frac{1}{2}\dot{\beta}dt, \quad \dot{\beta} \equiv \frac{d\beta}{dt}, \quad dt = \frac{dt_1 + dt_2}{2} \quad (7.20)$$

где

$$\mathbf{v} = c\beta \quad \dot{\mathbf{v}} = c\dot{\beta} \quad (7.21)$$

$$V = V(\mathbf{y}) = \frac{GM}{\sqrt{(\mathbf{y})^2}}, \quad U = U(\mathbf{y}) = \frac{V(\mathbf{y})}{c^2} \quad (7.22)$$

Преобразуя два уравнения (7.17), (7.18) с использованием обозначений (7.19) - (7.22) и рассматривая dt, dy_1, dy_2 как бесконечно малые величины, получаем после упрощений

$$\frac{1}{2}\dot{\beta}^2 (dt)^2 - c\dot{\beta}\nabla U (dt)^2 + \frac{1}{2} \frac{(c\beta\nabla U + \beta\dot{\beta})^2}{1 - 2U - \beta^2} (dt)^2 + \frac{c^2}{2}\beta^\alpha\beta^\beta\partial_\alpha\partial_\beta U (dt)^2 = 0 \quad (7.23)$$

где

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

Заметим, что члены порядка dt исчезают.

В терминах переменных $\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, V$, определенных соотношениями (7.21), (7.22) соотношения (7.23) имеют вид

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{v}}^2 - \dot{\mathbf{v}}\nabla V + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{v}\nabla V + \mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})^2}{c^2(1 - 2c^{-2}V - c^{-2}\mathbf{v}^2)} + \frac{1}{2c^2}v^\alpha v^\beta \partial_\alpha \partial_\beta V = 0 \quad (7.24)$$

Получаем в нерелятивистском приближении

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{v}}^2 - \dot{\mathbf{v}}\nabla V = 0 \quad (7.25)$$

Очевидно, что нельзя определить три составляющих вектора $\dot{\mathbf{v}}$ из одного уравнения (7.25). Можно определить только среднюю величину $\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle$ вектора $\dot{\mathbf{v}}$, выбрав некоторый принцип усреднения.

Представим \mathbf{v} в виде

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_{\parallel} + \dot{\mathbf{v}}_{\perp}, \quad \dot{\mathbf{v}}_{\parallel} = \nabla V \frac{(\dot{\mathbf{v}}\nabla V)}{|\nabla V|^2}, \quad \dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \dot{\mathbf{v}} - \nabla V \frac{(\dot{\mathbf{v}}\nabla V)}{|\nabla V|^2} \quad (7.26)$$

где \mathbf{v}_{\parallel} и \mathbf{v}_{\perp} суть компоненты вектора \mathbf{v} , причем \mathbf{v}_{\parallel} параллельна вектору ∇V и \mathbf{v}_{\perp} перпендикулярна к вектору ∇V . Из (7.25) следует

$$\dot{\mathbf{v}}_{\parallel}^2 - 2\dot{\mathbf{v}}_{\parallel}\nabla V + \dot{\mathbf{v}}_{\perp}^2 = 0 \quad (7.27)$$

Пусть

$$\dot{v}_{\parallel} = \frac{\dot{\mathbf{v}} \nabla V}{|\nabla V|} = \frac{\dot{\mathbf{v}}_{\parallel} \nabla V}{|\nabla V|}, \quad \dot{\mathbf{v}}_{\parallel} = \nabla V \frac{(\dot{\mathbf{v}} \nabla V)}{|\nabla V|^2} = \frac{\nabla V}{|\nabla V|} \dot{v}_{\parallel}$$

Уравнение (7.27) может быть переписано в виде

$$\dot{v}_{\parallel}^2 - 2\dot{v}_{\parallel} |\nabla V| + \dot{\mathbf{v}}_{\perp}^2 = 0 \quad (7.28)$$

или

$$\dot{v}_{\parallel} = |\nabla V| \pm \sqrt{|\nabla V|^2 - \dot{\mathbf{v}}_{\perp}^2} \quad (7.29)$$

Из(7.29) следует, что

$$0 < \dot{\mathbf{v}}_{\perp}^2 \leq |\nabla V|^2, \quad 0 < \dot{v}_{\parallel} < 2|\nabla V| \quad (7.30)$$

Величина \dot{v}_{\parallel} колеблется вокруг среднего значения $\langle \dot{v}_{\parallel} \rangle = |\nabla V|$.

$$\langle \dot{\mathbf{v}}_{\parallel} \rangle = \frac{\nabla V}{|\nabla V|} \langle \dot{v}_{\parallel} \rangle = \nabla V \quad (7.31)$$

Принимая во внимание симметрию и предполагая, что $\langle \dot{\mathbf{v}}_{\perp} \rangle = 0$, получаем

$$\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle = \langle \dot{\mathbf{v}}_{\parallel} \rangle = \nabla V = \nabla \frac{GM}{r}, \quad r = |\mathbf{y}| \quad (7.32)$$

В общем случае получаем вместо (7.27)

$$\begin{aligned} & \dot{v}_{\parallel}^2 - 2\dot{v}_{\parallel} |\nabla V| + \dot{\mathbf{v}}_{\perp}^2 = \\ & = -\frac{(\mathbf{v} \nabla V)^2 + 2(\mathbf{v} \nabla V)(\mathbf{v} \dot{\mathbf{v}}_{\parallel}) + (v_{\parallel} \dot{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} \dot{\mathbf{v}}_{\perp})^2}{c^2 - 2V - \mathbf{v}^2} - \frac{1}{c^2} v^{\alpha} v^{\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} V \end{aligned} \quad (7.33)$$

Этот результат отличается от традиционного результата общей теории относительности, потому что он зависит от вторых производных $\partial_{\alpha} \partial_{\beta} V$ гравитационного потенциала. Уравнение (7.33) может быть записано в виде уравнения относительно \dot{v}_{\parallel}

$$\begin{aligned} & \dot{v}_{\parallel}^2 \left(1 + \frac{v_{\parallel}^2}{c^2 - 2V - \mathbf{v}^2} \right) - 2\dot{v}_{\parallel} \left(|\nabla V| - \frac{(\mathbf{v} \nabla V) v_{\parallel}}{c^2 - 2V - \mathbf{v}^2} \right) + \langle \dot{\mathbf{v}}_{\perp}^2 \rangle \\ & = -\frac{(\mathbf{v} \nabla V)^2 + (\mathbf{v}_{\perp} \dot{\mathbf{v}}_{\perp})^2}{c^2 - 2V - \mathbf{v}^2} - \frac{1}{c^2} v^{\alpha} v^{\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} V \end{aligned} \quad (7.34)$$

8 Подвижность границы между динамикой частиц и геометрией пространства-времени

В геометрии пространства-времени \mathcal{G} динамические уравнения (7.2), (7.4) записываются в виде

$$\left(\mathbf{P}_i^{(s)} \mathbf{P}_k^{(s)} \cdot \mathbf{P}_i^{(s+1)} \mathbf{P}_k^{(s+1)} \right) = \left| \mathbf{P}_i^{(s)} \mathbf{P}_k^{(s)} \right|^2, \quad i, k = 0, 1, \dots, n \quad (8.1)$$

$$\left| \mathbf{P}_i^{(s+1)} \mathbf{P}_k^{(s+1)} \right|^2 = \left| \mathbf{P}_i^{(s)} \mathbf{P}_k^{(s)} \right|^2, \quad i, k = 0, 1, \dots, n \quad (8.2)$$

Разность динамических уравнений (8.1), (8.2) может быть записана в виде, который близок к традиционному описанию в пространстве-времени Калуцы-Клейна [20]. Пусть σ_{K_0} есть мировая функция в пространственно-временной геометрии \mathcal{G}_{K_0} . Геометрия \mathcal{G}_{K_0} есть пятимерная псевдоевклидова геометрия индекса 1 с компактифицированной координатой x^5 .

Другими словами, геометрия пространства-времени \mathcal{G}_{K_0} есть геометрия Калуцы-Клейна с исчезающими гравитационным и электромагнитным полями. Представим мировую функцию σ геометрии реального пространства-времени \mathcal{G} в виде

$$\sigma(P, Q) = \sigma_{K_0}(P, Q) + d(P, Q) \quad (8.3)$$

где функция d описывает разность между мировой функцией σ реального пространства-времени и мировой функцией σ_{K_0} стандартной геометрии \mathcal{G}_{K_0} , в которой будет производиться описание. Тогда получаем

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)_{K_0} + d(P_0, Q_1) + d(P_1, Q_0) - d(P_0, Q_0) - d(P_1, Q_1) \quad (8.4)$$

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{K_0}^2 + 2d(P_0, P_1) \quad (8.5)$$

где индекс "K₀" означает, что соответствующие величины рассчитаны в геометрии \mathcal{G}_{K_0} с помощью мировой функции σ_{K_0} .

С помощью (8.4), (8.5) динамические уравнения (8.1), (8.2) могут быть записаны в виде

$$\left(\mathbf{P}_i^{(s)} \mathbf{P}_k^{(s)} \cdot \mathbf{P}_i^{(s+1)} \mathbf{P}_k^{(s+1)} \right)_{K_0} - \left| \mathbf{P}_i^{(s)} \mathbf{P}_k^{(s)} \right|_{K_0}^2 = w \left(P_i^{(s)}, P_k^{(s)}, P_i^{(s+1)}, P_k^{(s+1)} \right), \quad i, k = 0, 1, \dots, n \quad (8.6)$$

$$\left| \mathbf{P}_i^{(s+1)} \mathbf{P}_k^{(s+1)} \right|_{K_0}^2 - \left| \mathbf{P}_i^{(s)} \mathbf{P}_k^{(s)} \right|_{K_0}^2 = 2d \left(P_i^{(s)}, P_k^{(s)} \right) - 2d \left(P_i^{(s+1)}, P_k^{(s+1)} \right), \quad i, k = 0, 1, \dots, n \quad (8.7)$$

где

$$\begin{aligned} w \left(P_i^{(s)}, P_k^{(s)}, P_i^{(s+1)}, P_k^{(s+1)} \right) &= 2d \left(P_i^{(s)}, P_k^{(s)} \right) - d \left(P_i^{(s)}, P_k^{(s+1)} \right) \\ &\quad - d \left(P_k^{(s)}, P_i^{(s+1)} \right) + d \left(P_i^{(s)}, P_i^{(s+1)} \right) \\ &\quad + d \left(P_k^{(s)}, P_k^{(s+1)} \right) \end{aligned} \quad (8.8)$$

Уравнения (8.6), (8.7) являются уравнениями в конечных разностях, записанных в геометрии \mathcal{G}_{K_0} . Правые части равенства этих уравнений могут быть интерпретированы как некоторые геометрические силовые поля, порожденные тем обстоятельством, что геометрия пространства-времени \mathcal{G} описывается в терминах стандартной геометрии \mathcal{G}_{K_0} . Эти силовые поля описывают отклонение зернистой геометрии \mathcal{G} от геометрии Калуцы-Клейна \mathcal{G}_{K_0} . Такая возможность используется при описании гравитационного поля, которое может описываться как порожденное кривизной кривого пространства-времени, или как гравитационное поле в геометрии пространства-времени Минковского. В динамических уравнениях (8.6), (8.7) такая возможность реализуется для произвольной зернистой геометрии пространства-времени \mathcal{G} .

Наибольший интерес представляет эволюция ведущего вектора $\mathbf{P}_0^{(s)} \mathbf{P}_1^{(s)}$. Эти уравнения получаются из уравнений (8.6), (8.7) при $i = 0, k = 1$. Получаем из уравнений (8.6), (8.7)

$$\left| \mathbf{P}_0^{(s+1)} \mathbf{P}_1^{(s+1)} \right|_{K_0}^2 - \left| \mathbf{P}_0^{(s)} \mathbf{P}_1^{(s)} \right|_{K_0}^2 = 2d \left(P_0^{(s)}, P_1^{(s)} \right) - 2d \left(P_1^{(s)}, P_1^{(s+1)} \right) \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{P}_0^{(s)} \mathbf{P}_1^{(s)} \cdot \mathbf{P}_0^{(s+1)} \mathbf{P}_1^{(s+1)} \right)_{K_0} - \left| \mathbf{P}_0^{(s)} \mathbf{P}_1^{(s)} \right|_{K_0}^2 = \\ &= 3d \left(P_0^{(s)}, P_1^{(s)} \right) - d \left(P_0^{(s)}, P_1^{(s+1)} \right) + d \left(P_1^{(s)}, P_1^{(s+1)} \right) \end{aligned} \quad (8.10)$$

где используется, что $P_1^{(s)} = P_0^{(s+1)}$.

В случае, когда пространство однородно и функция

$$d(P, Q) = D(\sigma_{K_0}(P, Q)) \quad (8.11)$$

уравнения (8.9), (8.10) принимают вид

$$\left| \mathbf{P}_0^{(s+1)} \mathbf{P}_1^{(s+1)} \right|_{K_0}^2 - \left| \mathbf{P}_0^{(s)} \mathbf{P}_1^{(s)} \right|_{K_0}^2 = 0 \quad (8.12)$$

$$\left(\mathbf{P}_0^{(s)} \mathbf{P}_1^{(s)} \cdot \mathbf{P}_0^{(s+1)} \mathbf{P}_1^{(s+1)} \right)_{K_0} - \left| \mathbf{P}_0^{(s)} \mathbf{P}_1^{(s)} \right|_{K_0}^2 = 4d(P_0^{(s)}, P_1^{(s)}) - d(P_0^{(s)}, P_1^{(s+1)}) \quad (8.13)$$

В случае, когда ведущий вектор $\mathbf{P}_0^{(s)} \mathbf{P}_1^{(s)}$ является времениподобным, можно ввести угол $\phi_{01}^{(s)}$ между векторами $\mathbf{P}_0^{(s)} \mathbf{P}_1^{(s)}$ и $\mathbf{P}_0^{(s+1)} \mathbf{P}_1^{(s+1)}$ в стандартной геометрии \mathcal{G}_{K_0} . С помощью (8.12) он определяется соотношением

$$\cosh \phi_{01}^{(s)} = \frac{\left(\mathbf{P}_0^{(s)} \mathbf{P}_1^{(s)} \cdot \mathbf{P}_0^{(s+1)} \mathbf{P}_1^{(s+1)} \right)_{K_0}}{\left| \mathbf{P}_0^{(s)} \mathbf{P}_1^{(s)} \right|_{K_0}^2} \quad (8.14)$$

Тогда в однородной геометрии \mathcal{G}_{K_0} уравнение (8.13) имеет вид

$$\sinh \frac{\phi_{01}^{(s)}}{2} = \frac{\sqrt{4d(P_0^{(s)}, P_1^{(s)}) - d(P_0^{(s)}, P_1^{(s+1)})}}{\sqrt{2} \left| \mathbf{P}_0^{(s)} \mathbf{P}_1^{(s)} \right|_{K_0}} \quad (8.15)$$

Таким образом, релятивистская динамика частиц может быть обобщена на случай зернистой геометрии пространства-времени.

Применение формализма мировой функции позволяет осуществить сдвиг границы между динамикой частиц и геометрией пространства-времени. Концептуальное развитие теории кажется более эффективным в монистической концепции, содержащей только одну базовую величину (мировую функцию). Монистическая концепция более чувствительна к возможным ошибкам. Это обстоятельство позволяет находить ошибки и исправлять их. В концепции, где имеется несколько базовых величин (понятий) связь между этими понятиями может быть совершенно различной. Это обстоятельство препятствует выбору правильной связи между различными базовыми понятиями. Построение концептуальной теории, основанной на физических принципах, следует осуществлять в форме монистической концепции. Однако, это не исключает того, что немонистическая теория с простой геометрией пространства-времени может быть проще при расчетах конкретных физических явлений.

Немонистическая концепция не так чувствительна к ошибкам в теории, потому что влияние возможных ошибок компенсируется при расчете конкретных физических явлений введением новых гипотез (иногда даже изобретением новых принципов, имеющих ограниченное применение). Поскольку расчеты согласуются с экспериментальными данными, то теория рассматривается как правильная теория, подтвержденная несколькими экспериментами. Такой подход позволяет объяснить и рассчитать новые физические явления. Однако, этот подход препятствует построению последовательной физической теории, объясняющей все физические явления. Дело в том, что неисправленные ошибки остаются в теории и могут проявиться при расчете других физических явлений.

Подвижность границы между динамикой частиц и геометрией пространства-времени разрешает спор между сторонниками общей теории относительности и сторонниками релятивистской теории гравитации.

9 Рождение пар

Эффект рождения пар рассматривается в работе по геометризации физики, потому что это было первое проявление непоследовательности квантовой теории поля (КТП). Неумение КТП непротиворечиво объяснить рождение пар было тем первым шагом, который породил идею ревизии квантовых принципов.

В современной физике считается, что эффект рождения пар является специфическим квантовым эффектом, который не имеет классического аналога. Он является наиболее важным свидетельством в пользу квантовой природы микромира. Однако, это не так [15]. На самом деле, и классический, и квантовый механизм рождения пар отсутствуют в современной квантовой теории поля, если ее развивать непротиворечиво в соответствии с квантовыми принципами. К сожалению, квантовая теория поля развивалась непоследовательно. Здесь мы рассмотрим только причины этой непоследовательности, ссылаясь на оригинальные работы для уяснения деталей.

Уравнение Клейна-Гордона (3.15) описывает эволюцию свободного квантового объекта (мировой линии). В отсутствие электромагнитного поля уравнение (3.15) имеет вид

$$\hbar^2 \partial_k \partial^k \psi + m^2 c^2 \psi = 0 \quad (9.1)$$

Стационарные состояния этого квантового объекта описываются решениями

$$\psi = A \exp(-ik_0 t + i\mathbf{k}\mathbf{x}), \quad k_0 = \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2} \quad (9.2)$$

Если $k_0 > 0$, этот квантовый объект находится в состоянии "частица". Если $k_0 < 0$, этот квантовый объект находится в состоянии "античастица". Этот квантовый объект называется "эмлон". Этот термин представляет собой прочтение аббревиатуры "МЛ" от слов "мировая линия". Таким образом, частица и античастица суть два разных состояния эмлона, а не независимые объекты. Эмлон имеет два разных состояния: частица и античастица.

Рождение пары представляет собой рождение частицы и античастицы в некоторой точке пространства-времени. Частица и античастица суть два различных состояния одной динамической системы (мировой линии). Они не могут быть различными динамическими системами, потому что две разные динамические системы не могут исчезнуть при столкновении в одной точке пространства-времени. Эффект рождения пары или аннигиляции пары возникает, когда мировая линия изменяет свое временное направление.

Пусть мировая линия частицы описывается уравнениями

$$x^k = x^k(\tau), \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (9.3)$$

где τ есть некоторый эволюционный параметр вдоль мировой линии. Для частицы $dx^0/d\tau > 0$. для античастицы $dx^0/d\tau < 0$. Точка, где производная $dx^0/d\tau$ изменяет свой знак, является точкой рождения или аннигиляции пары частица-античастица.

Величина $p_0 = \hbar k_0$ является собственным значением временной составляющей $\hat{p}_0 = -i\hbar\partial_0$ оператора 4-импульса

$$\hat{p}_k = -i\hbar\partial_k \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (9.4)$$

Частица и античастица имеют различные знаки временной составляющей $p_0 = \hbar k_0$ 4-импульса. Энергия неотрицательна во всех состояниях эмлона.

$$E = \int T_0^0 d\mathbf{x} = \int (\hbar^2 (\partial_0 \psi^* \cdot \partial^0 \psi) + m^2 c^2 \psi^* \psi) d\mathbf{x} > 0 \quad (9.5)$$

Здесь T_0^0 является составляющей тензора энергии-импульса для динамической системы $\mathcal{S}_{\text{КГ}}$ Клейна-Гордона, для которой уравнение Клейна-Гордона (9.1) является динамическим уравнением. Таким образом, оператор $\hat{H} = \hat{p}_0$, вообще говоря не совпадает с оператором энергии \hat{E} , который возникает из выражения (9.5) при вторичном квантовании. Такое же различие имеет место при классическом описании релятивистской частицы [24].

В нерелятивистском приближении, когда нет рождения пар, эволюционный оператор H (гамильтониан) совпадает с энергией частицы E (или $-E$). Это совпадение переносится из нерелятивистской теории, где нет рождения частиц, в релятивистскую теорию, где имеется рождение частиц. Соотношение

$$\partial_0 \psi = \frac{1}{i\hbar} \left[\psi, \int T_0^0 dx \right]_- \quad (9.6)$$

где $[...]_-$ означает коммутатор, используется во вторично квантованной теории для определения коммутационных соотношений.

Эти коммутационные соотношения приводят к тому, что частица и античастица рассматриваются как различные динамические системы (не различные состояния одной и той же динамической системы). Формально это означает, что оператор ψ содержит и операторы рождения, и операторы уничтожения. Это необходимо для того, чтобы удовлетворить соотношению (9.6). При этом способе вторичного квантования частица и античастица рассматриваются как независимые объекты. Вакуумное состояние оказывается нестационарным. Вообще говоря, если вакуумное состояние является состоянием без частиц, то оно должно быть стационарным, потому что в этом случае пространство-время пустое. Однако, полагают, что вакуумное состояние содержит виртуальные частицы, которые могут превращаться в реальные частицы и античастицы, если имеется некоторое взаимодействие, описываемое нелинейным членом, добавленным к динамическому уравнению (9.1).

Например рождение пар появляется в случае нелинейного уравнения [25, 26, 27, 28]

$$\hbar^2 \partial_k \partial^k \psi + m^2 c^2 \psi = g \psi^* \psi \psi \quad (9.7)$$

где g есть постоянная самодействия. Соответствующие динамические уравнения пишутся в виде разложения по постоянной самодействия g . При решении этих уравнений используется теория возмущений.

Существует альтернативное представление [29] нелинейного уравнения (9.7), когда частица и античастица рассматриваются как разные состояния элона, а не как независимые объекты. В этом случае волновая функция ψ содержит только операторы уничтожения, а ψ^* содержит только операторы рождения. В этом случае оператор энергии \hat{E} имеет только неотрицательные собственные значения. Энергия E не совпадает с гамильтонианом \hat{H} , как это имеет место в классическом случае [24]. Вакуумное состояние стационарно, и нет необходимости вводить виртуальные частицы. Динамические уравнения можно решать, не пользуясь разложением по постоянной самодействия g и избежать использования теории возмущений. Однако в этом случае нет рождения пар. Отсутствие эффекта рождения пар означает только, что нелинейный член типа (9.7) не может генерировать рождение пар. Эффект рождения пар осуществляется более сложным взаимодействием, как это следует из (3.11), (3.12), или из [15], где проблема рождения пар исследована более детально. Рождение пар связано с изменением эффективной массы Km частицы, а не с виртуальными частицами. Не очень ясно, как учесть изменение эффективной массы в рамках квантовой теории, хотя уравнение Клейна-Гордона (3.15) учитывает фактор K (3.12), ответственный за изменение эффективной массы.

Проблема рождения пар пока не геометризована, хотя способ геометризации рождения пар довольно ясен.

10 Каркасная концепция элементарных частиц

После работы [4] роль геометрии пространства-времени в теории элементарных частиц увеличилась, потому что квантовые принципы были фактически заменены многовариантной геометрией пространства-времени. Стало ясно, что строя теорию элементарных частиц, следует использовать релятивистское понятие состояния частицы.

В случае, когда частица не является точечной, ее состояние описывается каркасом $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, который представляет собой множество из $(n + 1)$ пространственно-временных точек. Эти точки жестко связаны между собой. В случае точечной частицы каркас состоит из двух точек. Каркас \mathcal{P}_n является естественным обобщением каркаса точечной частицы на случай сложной частицы. Движение любой частицы описывается мировой цепью, состоящей из связанных каркасов [23]. ... $\mathcal{P}_n^{(0)}, \mathcal{P}_n^{(1)}, \dots, \mathcal{P}_n^{(s)}$...

$$\mathcal{P}_n^{(s)} = \left\{ P_0^{(s)}, P_1^{(s)}, \dots, P_n^{(s)} \right\}, \quad s = \dots, 0, 1, \dots \quad (10.1)$$

Смежные каркасы $\mathcal{P}_n^{(s)}, \mathcal{P}_n^{(s+1)}$ цепи связаны соотношениями $P_1^{(s)} = P_0^{(s+1)}$, $s = \dots, 0, 1, \dots$. Вектор $\mathbf{P}_0^{(s)} \mathbf{P}_1^{(s)} = \mathbf{P}_0^{(s)} \mathbf{P}_0^{(s+1)}$ является ведущим вектором, который определяет направление мировой цепи.

Динамика свободной элементарной частицы определяется соотношениями

$$\mathcal{P}_n^{(s)} \text{eqv} \mathcal{P}_n^{(s+1)} : \quad \mathbf{P}_i^{(s)} \mathbf{P}_k^{(s)} \text{eqv} \mathbf{P}_i^{(s+1)} \mathbf{P}_k^{(s+1)}, \quad i, k = 0, 1, \dots, n; \quad s = \dots, 0, 1, \dots \quad (10.2)$$

которые описывают эквивалентность смежных каркасов. Эквивалентность векторов определяется соотношениями (7.3).

Таким образом динамика свободных элементарных частиц описывается системой алгебраических уравнений (10.2). Специфика динамики зависит от структуры элементарных частиц (взаимного расположения точек внутри каркаса) и от геометрии пространства-времени. Длины $\left| \mathbf{P}_i^{(s)} \mathbf{P}_k^{(s)} \right|$ векторов $\mathbf{P}_i^{(s)} \mathbf{P}_k^{(s)}$ постоянны вдоль всей мировой цепи. Эти $n(n + 1)/2$ величин можно рассматривать как характеристики частицы. В случае точечной частицы длина $\left| \mathbf{P}_s \mathbf{P}_{s+1} \right|$ звена $\mathbf{P}_s \mathbf{P}_{s+1}$ является геометрической массой частицы. В случае более сложных каркасов значение параметров $\left| \mathbf{P}_i^{(s)} \mathbf{P}_k^{(s)} \right|$ нужно исследовать.

Система динамических уравнений (10.2) состоит из $n(n + 1)$ алгебраических уравнений для nD динамических переменных, где D есть размерность пространства-времени (число координат, необходимых для маркировки всех точек пространства-времени). Если $n > D + 1$, число динамических переменных меньше, чем число динамических уравнений. В этом случае возникает дискриминационный механизм, который запрещает некоторые каркасы. Этот механизм позволяет объяснить дискретные параметры элементарных частиц. Если $n \leq D$, число динамических уравнений меньше, чем число динамических переменных. В этом случае может существовать много решений, и движение частицы становится многовариантным (стохастическим). В теории элементарных частиц встречаются оба случая.

Динамические уравнения (10.2) записываются в бескоординатном виде, и этот факт является доводом в пользу динамических уравнений (10.2), поскольку он избавляет от необходимости рассматривать преобразования координат. Динамические уравнения (10.2) являются алгебраическими (а не дифференциальными) уравнениями, и этот факт тоже является доводом в пользу теории, потому что алгебраические уравнения нечувствительны к возможной дискретности геометрии пространства-времени.

Была сделана первая (нетривиальная) попытка использования релятивистского понятия состояния частицы. Была рассмотрена структура дираковской частицы (фермиона) [30]. Это был концептуальный шаг, потому что рассматривалась возможность про-

пространственноподобных мировых цепей. Пространственноподобные мировые линии отсутствуют в традиционной концепции элементарных частиц (они возможны для виртуальных частиц, но это особый вопрос). В каркасной концепции элементарных частиц такого ограничения нет.

Дираковская частица – это динамическая система \mathcal{S}_D , для которой динамическим уравнением является уравнение Дирака.

$$i\gamma^k \partial_k \psi + mc\psi = 0 \quad (10.3)$$

Оказалось, что каркас дираковской частицы состоит из n точек ($n \geq 3$). Мировая цепь представляет собой пространственноподобную спираль с времениподобной осью.

Удается описать классическую модель \mathcal{S}_{Dcl} дираковской частицы в рамках каркасной концепции элементарных частиц. Дискретная геометрия (1.3) пространства-времени заменяется полудискретной геометрией, описываемой мировой функцией σ_d

$$\sigma_d = \sigma_M + \frac{\lambda_0^2}{2} \begin{cases} \text{sgn}(\sigma_M) & \text{если } |\sigma_M| > \sigma_0 > 0 \\ f(\sigma_M) & \text{если } |\sigma_M| < \sigma_0 \end{cases} \quad \lambda_0^2 = \frac{\hbar}{bc} \quad (10.4)$$

где σ_M есть мировая функция геометрии Минковского, b есть универсальная постоянная, а σ_0 есть некоторая постоянная. Функция f является монотонной неубывающей функцией, обладающей свойством $f(-\sigma_0) = -1$, $f(\sigma_0) = 1$.

Геометрия пространства-времени, описываемая мировой функцией (10.4), является однородной и изотропной. Часть мировой функции, соответствующая $|\sigma_M| > \sigma_0$ ответственна за квантовые эффекты точечной частицы (уравнение Шредингера [4]). Часть мировой функции (10.4), соответствующая $|\sigma_M| < \sigma_0$, ответственна за структуру частицы с каркасом, состоящим не меньше, чем из трех точек. Если $|f(\sigma_M)| < |\sigma_M/\sigma_0|$, то пространственноподобная мировая цепь может иметь форму спирали с времениподобной осью.

Был исследован случай [30], когда

$$f(\sigma_M) = \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_0} \right)^3 \quad (10.5)$$

Такой выбор мировой функции не претендует на описание реального пространства-времени. Это только некая модель, которая правильно описывает квантовые эффекты, связанные с точечной частицей, и пыгается исследовать, может ли пространственноподобная мировая цепь иметь форму спирали с времениподобной осью. Согласно квазиклассической аппроксимации уравнения Дирака [31, 32, 33] мировая линия *свободной классической* дираковской частицы имеет форму спирали. Такая форма мировой линии объясняет существование спина. Было интересно, можно ли получить спин дираковской частицы в каркасной концепции элементарных частиц.

Рассмотрение в [30] подтвердило предположение о спиральном виде мировой цепи дираковской частицы (фермиона). Каркас фермиона должен содержать более двух точек. Кроме того, были получены некоторые ограничения на расположение точек каркаса. Это означает, что в каркасной концепции имеется дискриминационный механизм, ответственный за дискретные значения параметров элементарных частиц. Такой дискриминационный механизм отсутствует в традиционном подходе, основанном на квантовых принципах. Полученные результаты являются предварительными, потому что было использовано простое ограничение (10.5) на мировую функцию. Тем не менее результаты показывают, что каркасная концепция позволяет исследовать структуру элементарных частиц. Традиционный подход, основанный на квантовых принципах позволяет только приписывать элементарным частицам такие феноменологические свойства как масса, спин, цвет, аромат и

т.п. без объяснения того, как эти свойства связаны со структурой элементарных частиц. Традиционный подход позволяет только классифицировать элементарные частицы по их феноменологическим свойствам и предсказывать реакции между элементарными частицами на основе этой классификации.

Такая ситуация напоминает ситуацию с исследованием химических элементов. Периодическая система химических элементов является феноменологическим построением. Она является атрибутом химии. Устройство атомов химических элементов исследуется физикой (квантовой механикой). Периодическая система химических элементов была открыта раньше, чем началось исследование структуры атомов. Однако периодическая система не помогла создать квантовую механику и исследовать структуру атомов. Периодическая система и квантовая механика являются атрибутами разных наук. Точно так же каркасная концепция элементарных частиц и традиционный феноменологический подход являются по существу атрибутами разных наук, исследующих различные стороны элементарных частиц.

11 Заключительные замечания

Таким образом, в двадцатом веке переход от нерелятивистской физики к релятивистской производился только в динамических уравнениях, но не в понятии состояния частицы. Понятие состояния частицы как точки в фазовом пространстве неадекватно в применении к недетерминированным частицам. В нерелятивистской физике состояние частицы описывается точкой в фазовом пространстве. Существование изначально недетерминированных частиц в микромире не позволяет использовать фазовое пространство, потому что предел (1.7), определяющий импульс частицы, не существует для недетерминированных частиц. Это вынуждает описывать состояние частицы без использования пределов типа (1.7).

Релятивистское понятие состояния частицы осуществляется с помощью каркаса частицы. Каркас состоит из нескольких пространственно-временных точек. Такое понятие состояния частицы может быть применено как для детерминированных так и недетерминированных частиц. Число точек каркаса зависит от структуры элементарной частицы. Важно, что каркас описывает все характеристики частицы, включая массу, заряд, импульс и другие характеристики, если они имеются (спин, цвет и т.п.). В результате получается монистическая концепция, где все фундаментальные физические явления (включая электромагнитные и гравитационные взаимодействия) описываются в терминах точек пространства событий и мировых функций между ними.

Динамические уравнения представляют собой алгебраические уравнения, записанные в бескоординатной форме. Эти уравнения проще и универсальнее, чем уравнения, используемые в традиционной теории элементарных частиц.

Полученная каркасная концепция еще не является теорией элементарных частиц. Это только лишь концепция, которая имеет дело с физическими и геометрическими принципами. Предполагается, что каркасная концепция может быть применена для любой геометрии пространства-времени и для любых каркасов, которые совместны с этой геометрией пространства-времени. На самом деле, существует реальная геометрия пространства-времени и существуют только такие каркасы, которые допускаются этой геометрией. Каркасная концепция превращается в теорию элементарных частиц, только когда эта реальная геометрия пространства-времени будет определена. Эта реальная геометрия пространства-времени и каркасы, совместимые с ней, должны согласовываться с экспериментальными данными.

Концепция (физические принципы) \mathcal{C}_{con} традиционной теории элементарных частиц не последовательна, потому что она использует нерелятивистское понятие состояния частицы, которое не может использоваться при описании недетерминированных частиц. Всякая

непоследовательная теория обладает очень полезным свойством. *Такая теория позволяет получать любое желаемое утверждение. Нужно только придумать подходящую гипотезу.* Последовательная теория допускает получать только такие утверждения, которые следуют из базовых утверждений теории. Последовательная теория позволяет вводить только такие дополнительные гипотезы, которые совместимы с теорией.

Экспериментаторы, изучающие элементарные частицы, нуждаются в некоторых понятиях, необходимых для описания экспериментов. Они не могут описывать свои эксперименты без использования соответствующих понятий. Экспериментаторы берут эти понятия из своего опыта и существующих теорий. К сожалению, эти понятия не всегда адекватны. Система этих понятий феноменологическая. Она полезна для описания экспериментов. Однако она не всегда адекватна для описания природы элементарных частиц. Это можно видеть на примере исследования структуры атомов. Химики, которые экспериментально исследовали свойства химических элементов, ничего не знали об устройстве атомов. Структура атомов не могла быть описана феноменологическими понятиями, которые использовались химиками.

Представленная каркасная концепция представляет собой только концепцию (а не теорию) элементарных частиц. Она не может быть проверена экспериментально. Нужно определить реальную геометрию пространства-времени и исследовать возможные каркасы элементарных частиц. Тогда каркасная концепция превратится в теорию элементарных частиц. Ее уже можно будет проверить экспериментально.

Литература

- [1] Rylov Yu. A. Multivariance as a crucial property of microcosm. // *Concepts of Physics*, 6, iss.1, pp. 89-117, 2009. See also e-print: 0806.1716.
- [2] Rylov Yu.A. Geometry without topology as a new conception of geometry. // *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.*, 30, iss. 12, pp. 733-760, 2002. (see also e-print: math.MG/0103002).
- [3] Rylov Yu.A. Non-Euclidean method of the generalized geometry construction and its application to space-time geometry. *Pure and Applied Differential geometry*. pp. 238-246. Eds. Franki Dillen and Ignace Van de Woestyne. Shaker Verlag, Aachen, 2007. (see also e-print: math/0702552.)
- [4] Rylov Yu.A. Non-Riemannian model of the space-time responsible for quantum effects. // *Journ. Math. Phys*, 32(8), pp. 2092-2098, 1991.
- [5] Moyal J.E. // *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 45, 99, 1949.
- [6] Fényes I. // *Zs. f. Phys.*, 132, 81, 1952.
- [7] Rylov Yu.A. Quantum Mechanics as a theory of relativistic Brownian motion. // *Ann. Phys. (Leipzig)*, 27, pp. 1-11, 1971.
- [8] Rylov Yu.A. Quantum mechanics as relativistic statistics. I: The two-particle case. // *Int. J. Theor. Phys.*, 8, pp. 65-83, 1973.
- [9] Rylov Yu.A. Quantum mechanics as relativistic statistics. II: The case of two interacting particles. // *Int. J. Theor. Phys*, 8, pp. 123-139, 1973.
- [10] Rylov Yu.A. Extremal properties of Synge's world function and discrete geometry. // *J.Math. Phys.*, 31, pp. 2876-2890, 1990.
- [11] Menger K. Untersuchen über allgemeine Metrik. // *Mathematische Annalen*, 100, pp. 75-113, 1928.
- [12] Blumenthal L.M. *Theory and Applications of Distance Geometry*. Oxford, Clarendon Press, 1953.

- [13] Rylov Yu.A. Uniform formalism for description of dynamic, quantum and stochastic systems. e-print: physics/0603237v6.
- [14] Rylov Yu.A. Spin and wave function as attributes of ideal fluid. *Journ. Math. Phys.*, 40, pp. 256-278, 1999.
- [15] Rylov Yu.A. Classical description of pair production. e-print: physics/0301020.
- [16] Rylov Yu.A. Quantum mechanics as a dynamic construction. // *Found. Phys.*, 28, No. 2, pp. 245-271, 1998.
- [17] Madelung E. // *Z.Phys.*, 40, 322, 1926.
- [18] Bohm D. // *Phys.Rev.*, 85, 166, 1952; 180, 1952.
- [19] Rylov Yu.A. Incompatibility of the Copenhagen interpretation with quantum formalism and its reasons. // *Concepts of Physics*, 5, iss.2, pp. 323-328, 2008. ISSN1897-2357. (see also e-print: physics/0604111)
- [20] Rylov Yu.A. Generalization of relativistic particle dynamics on the case of non-Riemannian space-time geometry. // *Concepts of Physics*, 6, iss.4, 605, 2009. See also e-print: 0811.4562.
- [21] Rylov Yu.A. Necessity of the general relativity revision and free motion of particles in non-Riemannian space-time geometry. e-print: 1001.5362v1.
- [22] Rylov Yu.A. General relativity extended to non-Riemannian space-time geometry. e-print: 0910.3582v7.
- [23] Rylov Yu.A. Generalization of relativistic particle dynamics on the case of non-Riemannian space-time geometry. // *Concepts of Physics*, 6, iss.4, 605, 2009. ISSN1897-2357. (see also e-print: 0811.4562).
- [24] Рылов Ю.А. О связи между вектором энергии-импульса и каноническим импульсом в релятивистской механике // *ТМФ*, 2, pp. 333-337, 1970.
- [25] Glimm J., Jaffe A. // *Phys. Rev.*, 176, p. 1945, 1968.
- [26] Glimm J., Jaffe A. // *Ann. Math.*, 91, p. 362, 1970.
- [27] Glimm J., Jaffe A. // *Acta Math.*, 125, p. 203, 1970.
- [28] Glimm J., Jaffe A. // *J. Math. Phys.*, 13, p. 1568, 1972.
- [29] Rylov Yu.A. On quantization of non-linear relativistic field without recourse to perturbation theory. // *Int. J. Theor. Phys*, 6, pp. 181-204.
- [30] Rylov Yu.A. Geometrical dynamics: spin as a result of rotation with superluminal speed. e-print: 0801.1913.
- [31] Rylov Yu.A. Dirac equation in terms of hydrodynamic variables. // *Advances in Applied Clifford Algebras*, 5, pp. 1-40, 1995 (see also e-print: 1101.5868)
- [32] Rylov Yu.A. Is the Dirac particle composite? e-print: physics/0410045.
- [33] Rylov Yu.A. Is the Dirac particle completely relativistic? e-print: physics /0412032.

GEOMETRIZATION OF PHYSICS: DISCRETE SPACE-TIME GEOMETRY AND RELATIVITY THEORY

Yu.A. Rylov

Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

rylov@ipmnet.ru

Conventional form of the special relativity theory formulates the theory in an unaccomplished form. The dynamic equations of the particle motion are written in accordance with the relativity principles, whereas the particle state is described in the nonrelativistic form. Ignoring the nonrelativistic concept of particle state, one succeeds to construct an uniform formalism for description of deterministic and indeterministic particles, which leads to a necessity of multivariant space-time geometry. The quantum principles are founded by existence of the multivariant space-time geometry and lose the role of prime physical principles. Skeleton conception of the elementary particles realizes relativistic description of the particle state, which appears to be adequate in the case of discrete and multivariant space-time geometry. The skeleton conception accomplishes transition from nonrelativistic physics to the relativistic one and realizes complete geometrization of physics.

Key Words: discrete geometry, nonaxiomatizable geometries, multivariance of space-time geometry, stochasticity as a corollary of space-time geometry, skeleton conception of elementary particles.

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛФАВИТОВ. ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ БИОЛОГИИ

С.В. Петухов

Институт машиноведения РАН, Москва, Россия
spetoukhov@gmail.com

Представлены результаты исследования многоуровневой системы взаимосвязанных молекулярно-генетических алфавитов на основе применения матричных методов теории помехоустойчивого кодирования. Эти исследования выявили связи данной системы алфавитов с системами гиперкомплексных чисел (кватернионами Гамильтона и сплит-кватернионами Кокла и их расширениями), кронекеровскими семействами матриц, ортогональными системами функций Радемахера и Уолша, матрицами Адамара и др. Отмечаются структурные параллелизмы между системой молекулярно-генетических алфавитов и системой наследования признаков у целостных организмов, подчиняющейся законам Менделя и представляемой классическими решетками Пеннета. Система молекулярно-генетических алфавитов, общая для всех живых организмов, своими алгебраическими свойствами подсказывает новый — алгебраический — путь познания живой материи и развития алгебраической биологии, связанной с гиперкомплексными числами. Живая материя, обеспечивающая передачу наследственной информации по цепи поколений, предстает информационной сущностью, глубоко алгебраичной по своей природе.

Ключевые слова: генетические алфавиты, гиперкомплексные числа, функции Радемахера, функции Уолша, матрицы Адамара, циклические группы, решетки Пеннета, алгебраическая биология.

1 Введение

Достижения молекулярной генетики привели к новому пониманию самой жизни: «Жизнь есть партнерство между генами и математикой» [1]. Но какая именно математика является партнером генетического кода?

Пытаясь нащупать такую математику, автор обратился к изучению многоуровневой системы взаимно связанных молекулярно-генетических алфавитов. На этом пути неожиданно обнаружили связи генетической системы с известными формализмами инженерно-математической теории помехоустойчивого кодирования информации: кронекеровским произведением матриц, ортогональными системами функций Радемахера и Уолша, таблицами умножения гиперкомплексных числовых систем, матрицами Адамара и т.д. [2, 3, 4]. Настоящая статья посвящена некоторым результатам такого изучения феноменологической системы взаимно связанных генетических алфавитов.

Алфавиты играют базисную роль в технологиях коммуникации. В любой коммуникационной системе «передатчик-приемник» приемник всегда знает алфавит сигналов, который использует передатчик для сообщений. В лингвистике алфавиты обычно имеют многоуровневую структуру, поскольку содержат подмножества гласных и согласных звуков, причем подмножество гласных состоит из подмножеств долгих и кратких гласных, а подмножество согласных — из подмножеств звонких и глухих согласных и т.д. Количества членов во всех этих частях лингвистических алфавитов не связаны друг с другом какими-либо известными алгебраическими закономерностями. Нами обнаружено, что в многоуровневой системе генетических алфавитов ситуация существенно иная: многие

части этой системы тесно взаимосвязаны посредством содержательных алгебраических закономерностей и формализмов, которые широко известны в математике и технике связи.

Молекулярно-генетическая система живого вещества содержит следующие алфавиты, каждый из которых может быть рассмотрен как отдельный алфавит или как часть сложной алфавитной системы:

- 4-буквенный алфавит азотистых оснований;
- 64-буквенный алфавит триплетов;
- 2-буквенный алфавит «слабых» и «сильных корней» триплетов;
- 20-буквенный алфавит аминокислот;
- 2-буквенный алфавит пуринов и пиримидинов;
- 2-буквенный алфавит сильных и слабых водородных связей;
- 2-буквенный алфавит «кето и amino»,

и т.д. (см. расширенный список генетических алфавитов в статье [5]).

С учетом этого молекулярно-генетическая система является полиязычной. Любая последовательность азотистых оснований в молекулах наследственности ДНК и РНК может читаться как полиязычное послание, интерпретируемое в зависимости от настройки считывающего устройства на тот или иной алфавит. Можно добавить, что распространенное выражение «генетический код» означает взаимное соответствие между элементами двух из перечисленных алфавитов: алфавита триплетов и алфавита аминокислот и стоп-кодонов.

Генетическая информация, записанная на уровне микромира генетических молекул, диктует конструкции в макромире живых организмов в условиях сильных шумов и помех. Закон Менделя независимого наследования различительных признаков (например, цвета волос, кожи и глаз наследуются независимо друг от друга) свидетельствует о том, что этот диктат реализуется через различные независимые каналы передачи информации посредством неизвестных алгоритмов многоканального помехоустойчивого кодирования. Соответственно каждый организм предстает алгоритмической машиной многоканального помехоустойчивого кодирования. Для познания этой машины следует использовать теорию помехоустойчивого кодирования.

2 Матричные представления генетических алфавитов

Теория помехоустойчивого кодирования базируется на матричных методах. Например, матричные методы позволяют передавать качественные фотографии поверхности Марса на Землю через миллионы километров сильнейших помех. Для этих целей используются, в частности, кронекеровские семейства матриц Адамара (Рис. 1).

На Рис. 1 символ (n) означает кронекеровскую (или тензорную) целую степень. Кронекеровское произведение матриц является обычной операцией в технике обработки сигналов, теоретической физике и пр. Оно используется для перехода от пространств с меньшей размерностью к ассоциированным пространствам более высокой размерности. По аналогии с приемами теории связи мы представляем 4-буквенный алфавит азотистых оснований А, С, G, Т/U (аденин, цитозин, гуанин, тимин/урацил) в форме квадратной матрицы $[C\ T; A\ G]$ (Рис. 2). Этот 4-буквенный алфавит связан с 16-буквенным алфавитом генетических дуплетов и 64-буквенным алфавитом генетических триплетов посредством второй и третьей кронекеровской степени этой матрицы $[C\ T; A\ G]^{(2)}$ и $[C\ T; A\ G]^{(3)}$, которые дают $(4 * 4)$ - и $(8 * 8)$ -матрицы с упорядоченным расположением дуплетов и триплетов в них (Рис. 2).

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; H_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; H_2^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Рис. 1: Начальные матрицы Адамара из семейства $(2^n * 2^n)$ -матриц Адамара, основанного на кронекеровских степенях (n) базовой матрицы H_2 этого семейства.

$$[C\ T; A\ G] = \begin{bmatrix} C & T \\ A & G \end{bmatrix}; [C\ T; A\ G]^{(2)} = \begin{bmatrix} CC & CT & TC & TT \\ CA & CG & TA & TG \\ AC & AT & GC & GT \\ AA & AG & GA & GG \end{bmatrix}$$

$$[C\ T; A\ G]^{(3)} = \begin{bmatrix} CCC & CCT & CTC & CTT & TCC & TCT & TTC & TTT \\ CCA & CCG & CTA & CTG & TCA & TCG & TTA & TTG \\ CAC & CAT & CGC & CGT & TAC & TAG & TGC & TGT \\ CAA & CAG & CGA & CGG & TAA & TAG & TGA & TGG \\ ACC & ACT & ATC & ATT & GCC & GCT & GTC & GTT \\ ACA & ACG & ATA & ATG & GCA & GCG & GTA & GTG \\ AAC & AAT & AGC & AGT & GAC & GAT & GGC & GGT \\ AAA & AAG & AGA & AGG & GAA & GAG & GGA & GGG \end{bmatrix}$$

Рис. 2: Генетическая $(2 * 2)$ -матрица $[C\ T; A\ G]$ азотистых оснований и геноматрицы ее второй и третьей кронекеровских степеней, содержащие упорядоченные множества 16 дуплетов и 64 триплетов. Черным выделены триплеты с сильными корнями и дуплеты, соответствующие таким корням (пояснение в тексте).

Обратимся теперь к алфавиту сильных и слабых корней триплетов. Две первые позиции каждого триплета называются его «корнем». Если все 4 триплета с одинаковым корнем кодируют одну и ту же аминокислоту, то такой корень называется «сильным» (например, CGC, CGA, CGT, CGG кодируют одну аминокислоту Arg). В противном случае корень называется «слабым» [6]. Природа почему-то поделила множество 64 триплетов на два равных подмножества по 32 триплета в каждом: первое подмножество содержит 32 триплета с сильными корнями (CC, CT, CG, AC, TC, GC, GT, GG), а второе — 32 триплета со слабыми корнями (CA, AA, AT, AG, TA, TT, TG, GA) (см. Таблица 1).

Как этот 2-буквенный алфавит сильных и слабых корней сопряжен с 64-буквенным алфавитом триплетов? Существует ли, например, симметрия в расположении триплетов с сильными и слабыми корнями в матрице триплетов $[C\ T; A\ G]^{(3)}$, которая была построена совершенно формально без упоминания аминокислот и пр.? Заметим, что имеется огромное количество $64! \approx 10^{89}$ вариантов расположения 64 триплетов в $(8 * 8)$ -матрице. Для сравнения, физика оценивает все время существования Вселенной в 10^{17} секунд. Очевидно,

Таблица 1: Подмножества триплетов с сильными (слева) и слабыми корнями в «универсальном» генетическом коде и коде митохондрий человека и позвоночных. Исходные данные взяты с сайта Национального биоинформационного общества США (<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/Taxonomy/Utils/wprintgc.cgi>).

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ (СТАНДАРТНЫЙ) ГЕНЕТИЧЕСКИЙ КОД	
8 подсемейств триплетов с сильными корнями и аминокислоты, кодируемые ими	8 подсемейств триплетов со слабыми корнями и кодируемые аминокислоты
<u>CCC</u> , <u>CCT</u> , <u>CCA</u> , <u>CCG</u> → Pro	<u>CAC</u> , <u>CAT</u> , <u>CAA</u> , <u>CAG</u> → His, His, Gln, Gln
<u>CTC</u> , <u>CTT</u> , <u>CTA</u> , <u>CTG</u> → Leu	<u>AAC</u> , <u>AAT</u> , <u>AAA</u> , <u>AAG</u> → Asn, Asn, Lys, Lys
<u>CGC</u> , <u>CGT</u> , <u>CGA</u> , <u>CGG</u> → Arg	<u>ATC</u> , <u>ATT</u> , <u>ATA</u> , <u>ATG</u> → Ile, Ile, Ile, Met
<u>ACC</u> , <u>ACT</u> , <u>ACA</u> , <u>ACG</u> → Thr	<u>AGC</u> , <u>AGT</u> , <u>AGA</u> , <u>AGG</u> → Ser, Ser, Arg, Arg
<u>TCC</u> , <u>TCT</u> , <u>TCA</u> , <u>TCG</u> → Ser	<u>TAC</u> , <u>TAT</u> , <u>TAA</u> , <u>TAG</u> → Tyr, Tyr, Stop, Stop
<u>GCC</u> , <u>GCT</u> , <u>GCA</u> , <u>GCG</u> → Ala	<u>TTC</u> , <u>TTT</u> , <u>TTA</u> , <u>TTG</u> → Phe, Phe, Leu, Leu
<u>GTC</u> , <u>GTT</u> , <u>GTA</u> , <u>GTG</u> → Val	<u>TGC</u> , <u>TGT</u> , <u>TGA</u> , <u>TGG</u> → Cys, Cys, Stop, Trp
<u>GGC</u> , <u>GGT</u> , <u>GGA</u> , <u>GGG</u> → Gly	<u>GAC</u> , <u>GAT</u> , <u>GAA</u> , <u>GAG</u> → Asp, Asp, Glu, Glu
ГЕНЕТИЧЕСКИЙ КОД МИТОХОНДРИЙ ПОЗВОНОЧНЫХ	
<u>CCC</u> , <u>CCT</u> , <u>CCA</u> , <u>CCG</u> → Pro	<u>CAC</u> , <u>CAT</u> , <u>CAA</u> , <u>CAG</u> → His, His, Gln, Gln
<u>CTC</u> , <u>CTT</u> , <u>CTA</u> , <u>CTG</u> → Leu	<u>AAC</u> , <u>AAT</u> , <u>AAA</u> , <u>AAG</u> → Asn, Asn, Lys, Lys
<u>CGC</u> , <u>CGT</u> , <u>CGA</u> , <u>CGG</u> → Arg	<u>ATC</u> , <u>ATT</u> , <u>ATA</u> , <u>ATG</u> → Ile, Ile, Met, Met
<u>ACC</u> , <u>ACT</u> , <u>ACA</u> , <u>ACG</u> → Thr	<u>AGC</u> , <u>AGT</u> , <u>AGA</u> , <u>AGG</u> → Ser, Ser, Stop, Stop
<u>TCC</u> , <u>TCT</u> , <u>TCA</u> , <u>TCG</u> → Ser	<u>TAC</u> , <u>TAT</u> , <u>TAA</u> , <u>TAG</u> → Tyr, Tyr, Stop, Stop
<u>GCC</u> , <u>GCT</u> , <u>GCA</u> , <u>GCG</u> → Ala	<u>TTC</u> , <u>TTT</u> , <u>TTA</u> , <u>TTG</u> → Phe, Phe, Leu, Leu
<u>GTC</u> , <u>GTT</u> , <u>GTA</u> , <u>GTG</u> → Val	<u>TGC</u> , <u>TGT</u> , <u>TGA</u> , <u>TGG</u> → Cys, Cys, Trp, Trp
<u>GGC</u> , <u>GGT</u> , <u>GGA</u> , <u>GGG</u> → Gly	<u>GAC</u> , <u>GAT</u> , <u>GAA</u> , <u>GAG</u> → Asp, Asp, Glu, Glu

что случайное расположение 20 аминокислот и соответствующих триплетов в (8×8) -матрице почти никогда не даст симметрии в ее половинах, квадрантах и строках. Но неожиданно феноменологическое расположение 32 триплетов с сильными корнями и 32 триплетов со слабыми корнями имеет в этой матрице симметрический характер, как и расположение соответствующих сильных и слабых дуплетов в $(4 * 4)$ -геноматрице $[C T; A G]^{(2)}$ (Рис. 2):

1. Оба квадранта вдоль каждой диагонали тождественны по мозаике.
2. Верхняя и нижняя половины в каждой матрице зеркально-антисимметричны друг другу по цвету (генетически наследуемое тело каждого человека состоит из двух зеркально-антисимметричных половин, но, как оказывается, подобная зеркальная антисимметрия половин имеет место уже на уровне системы молекулярно-генетических алфавитов).

Какие математические секреты генетической системы отражены в этих мозаичных генетических матрицах взаимно сопряженных генетических алфавитов? Наиболее важным фактом оказывается то, что мозаичный характер каждого столбца в каждой из этих двух геноматриц соответствует нечетной меандровой функции. Такие нечетные меандровые функции хорошо известны в теории обработки сигналов под именем «функций Радемахера». Функции Радемахера содержат только элементы «+1» и «-1». Каждый из столбцов в этих геноматрицах представляет одну из функций Радемахера, если каждый черный (белый) дуплет и триплет в них интерпретировать как элемент +1 (-1).

При этом получают соответствующие радемахеровские представления R_4 матрицы дуплетов $[C\ T; A\ G]^{(2)}$ и R_8 матрицы триплетов $[C\ T; A\ G]^{(3)}$. Рис. 3 показывает эти представления, а также их диадо-сдвиговые декомпозиции на четыре (c_0, c_1, c_2, c_3) и восемь ($r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7$) разреженных матриц соответственно. Матрицы c_0 и r_0 являются единичными.

Автором обнаружено, что каждый из этих наборов из 4 и 8 разреженных матриц замкнут относительно умножения (произведение любых двух матриц из набора дает матрицу из того же набора с точностью до знака) и определяет свою собственную таблицу умножения (Рис. 4).

Таблица умножения на Рис. 4 слева совпадает с таблицей умножения 4-мерной алгебры сплит-кватернионов Дж. Кокла (J. Cockle), открытой им в 1849 году и имеющей ряд приложений в физике [http://en.wikipedia.org/wiki/Split_quaternion]. Например, она используется в дисковой модели Пуанкаре геометрии Лобачевского. Таким образом, геноматрица дуплетов $[C\ T; A\ G]^{(2)}$ в ее радемахеровской форме R_4 (Рис. 3) представляет собой сплит-кватернион Кокла с единичными координатами. Радемахеровская форма R_8 связана с радемахеровской формой R_4 через кронекеровское умножение последней на матричную форму представления двойного числа (числа Лоренца) с единичными координатами (\otimes — символ кронекеровского умножения):

$$R_4 \otimes [1\ 1; 1\ 1] = R_8 \quad (1)$$

Соответственно 8-мерная алгебра с таблицей умножения на Рис. 4 справа может называться алгеброй бисплит-кватернионов Кокла, а геноматрица триплетов $[C\ T; A\ G]^{(3)}$ в ее радемахеровском представлении R_8 (Рис. 3) оказывается бисплит-кватернионом Кокла с единичными координатами. Представленные на Рис. 3 декомпозиции радемахеровских геноматриц R_4 и R_8 сопряжены с понятиями диадических сдвигов, диадических групп и матриц диадических сдвигов, играющих важную роль в компьютерных технологиях [7], [8, §1.2.6]. Эти декомпозиции, производимые по образцу матриц диадических сдвигов, мы называем диадо-сдвиговыми, а соответствующие матричные алгебры, обнаруживаемые при такой декомпозиции, — диадо-сдвиговыми алгебрами или ДС-алгебрами. Сплит-кватернионы и бисплит-кватернионы имеют много интересных математических свойств, ряд из которых может использоваться для математических моделей в биологии [3].

Описанная диадо-сдвиговая декомпозиция имеет прямое отношение к эволюции диалектов генетического кода (подробности см. в работе [3]). Речь идет о том, что современной науке известно целое множество природных вариантов соответствия между алфавитом 64 триплетов и алфавитом аминокислот и стоп-кодонах. Эти не сильно отличающиеся друг от друга варианты обусловлены эволюционным изменением кодового значения у некоторых из триплетов («эволюционирующих триплетов»). Существование данных вариантов (или диалектов) кода означает, что, начиная с уровня этого соответствия между этими генетическими алфавитами, наблюдается определенная эволюция генетического кода. Анализируя эволюционирующие триплеты с позиций их принадлежности или соответствия тем или иным базисным матрицам r_0, r_1, \dots, r_7 генетических бисплит-кватернионов

$$\mathbf{R}_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline + & + & + & - \\ \hline - & + & - & - \\ \hline + & - & + & + \\ \hline - & - & - & + \\ \hline \end{array} ; \quad \mathbf{R}_8 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline + & + & + & + & + & + & - & - \\ \hline + & + & + & + & + & + & - & - \\ \hline - & - & + & + & - & - & - & - \\ \hline - & - & + & + & - & - & - & - \\ \hline + & + & - & - & + & + & + & + \\ \hline + & + & - & - & + & + & + & + \\ \hline - & - & - & - & - & - & + & + \\ \hline - & - & - & - & - & - & + & + \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{R}_4 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{R}_8 = r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \\
 &+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \\
 &+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 3: Вверху: радемахеровские представления R_4 и R_8 геноматриц дуплетов и триплетов $[C T; A G]^{(2)}$ и $[C T; A G]^{(3)}$ (Рис. 2). Знаки «+» и «-» обозначают элементы «+1» и «-1». Внизу: диадо-сдвиговая декомпозиция каждого из этих радемахеровских представлений R_4 и R_8 в виде сумм из 4 и 8 разреженных матриц соответственно.

	1	c₁	c₂	c₃
1	1	c₁	c₂	c₃
c₁	c₁	-1	c₃	-c₂
c₂	c₂	-c₃	1	-c₁
c₃	c₃	c₂	c₁	1

;

	1	r₁	r₂	r₃	r₄	r₅	r₆	r₇
1	1	r₁	r₂	r₃	r₄	r₅	r₆	r₇
r₁	r₁	1	r₃	r₂	r₅	r₄	r₇	r₆
r₂	r₂	r₃	-1	-r₁	r₆	r₇	-r₄	-r₅
r₃	r₃	r₂	-r₁	-1	r₇	r₆	-r₅	-r₄
r₄	r₄	r₅	-r₆	-r₇	1	r₁	-r₂	-r₃
r₅	r₅	r₄	-r₇	-r₆	r₁	1	-r₃	-r₂
r₆	r₆	r₇	r₄	r₅	r₂	r₃	1	r₁
r₇	r₇	r₆	r₅	r₄	r₃	r₂	r₁	1

Рис. 4: Таблицы умножения для набора разреженных матриц из декомпозиций на Рис. 3. Слева: для радемахеровского представления R_4 геноматрицы дуплетов $[C T; A G]^{(2)}$. Справа: для радемахеровского представления R_8 геноматрицы триплетов $[C T; A G]^{(3)}$.

(или рассматриваемых ниже бикватернионов Гамильтона) (см. Рис. 3-6), автор обнаружил существование следующих феноменологических правил эволюции диалектов генетического кода:

Правило №1 Абсолютным правилом для множества всех двуполых организмов (размножающихся половым путем) является то, что у него эволюционные изменения в кодовом соответствии триплетов аминокислотам и стоп-кодонам реализуются только у тех триплетов, которые сопряжены с базисными матрицами r_4, r_5, r_6, r_7 генетических бисплит-кватернионов.

Это Правило №1 может быть переформулировано в виде Принципа запрета, обладающего предсказательной силой: "у двуполых организмов запрещены эволюционные изменения тех триплетов, которые сопряжены с названными базисными матрицами 8-мерных гиперкомплексных чисел".

Правило №2 Во всех диалектах генетического кода только триплеты, сопряженные с базисными матрицами r_2, r_6, r_7 генетических бисплит-кватернионов, могут быть старто-кодонами. (Отметим, что оба этих правила, включая указанный принцип запрета, с равным основанием могут формулироваться применительно к рассматриваемым ниже базисным матрицам бикватернионов Гамильтона).

3 Генетические матрицы Адамара

Теперь покажем, что свойства генетических алфавитов связывают генетическую систему со специальным подсемейством матриц Адамара, которые являются одним из наиболее известных инструментов в технике обработки сигналов.

4-буквенный алфавит азотистых оснований А, С, G, Т/У имеет следующие две особенности, связанные с уникальным статусом тимина Т (или урацила U):

- каждое из трех оснований А, С, G имеет функционально важную аминогруппу NH_2 , а четвертое основание Т/У не имеет ее;
- буква Т — единственное основание в ДНК, которое заменяется при переходе к РНК на другое основание U.

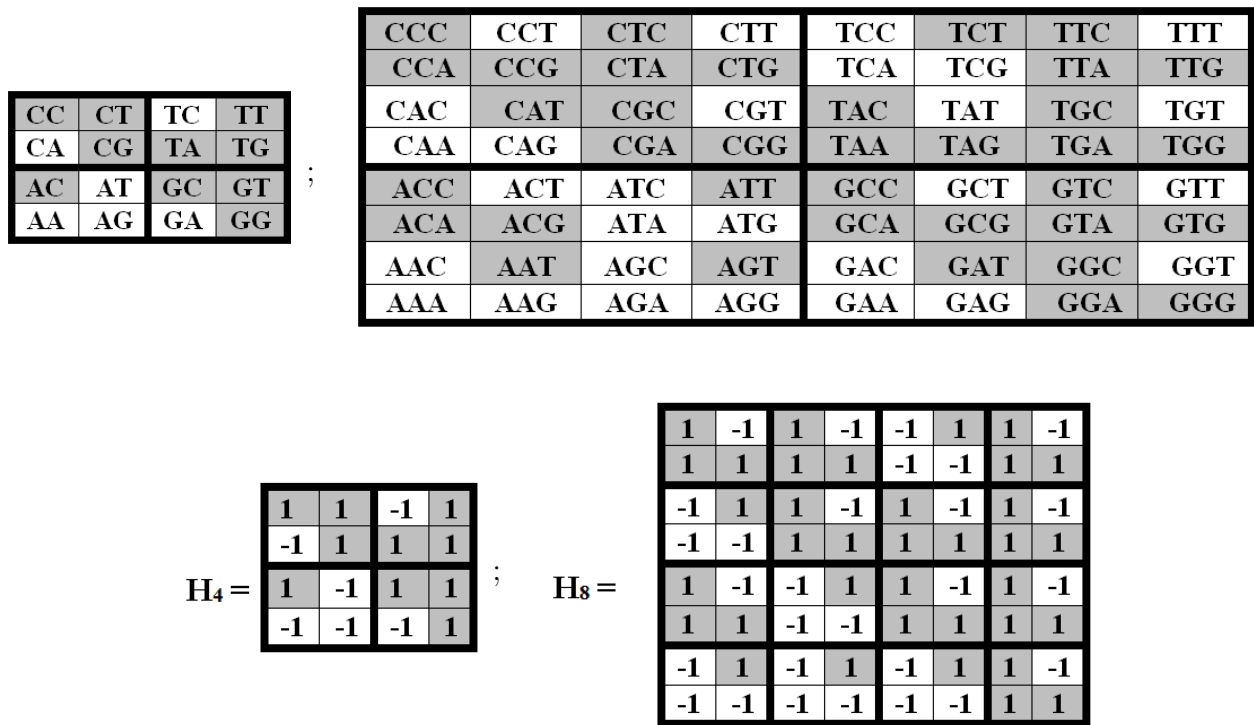


Рис. 5: Вверху: символьные мозаичные матрицы дуплетов и триплетов $[C\ T; A\ G]^{(2)}$ и $[C\ T; A\ G]^{(3)}$, мозаика которых получена с помощью первого шага T/U-алгоритма из мозаики этих матриц на Рис. 2. Внизу: адамаровы представления H_4 и H_8 этих геноматриц дуплетов и триплетов $[C\ T; A\ G]^{(2)}$ и $[C\ T; A\ G]^{(3)}$, получаемые с помощью второго шага T/U-алгоритма (пояснение в тексте).

С учетом этого уникального статуса буквы T/U нами выявлен следующий «T/U-алгоритм», который может использоваться в компьютерах организмов и который трансформирует символьные (4×4) - и (8×8) -матрицы дуплетов и триплетов $[C\ T; A\ G]^{(2)}$ и $[C\ T; A\ G]^{(3)}$ в (4×4) - и (8×8) -матрицы Адамара H_4 и H_8 (Рис. 5). Данный T/U-алгоритм состоит из двух шагов:

1. каждый из мультиплетов в черно-белых (4×4) - и (8×8) -геноматрицах на Рис. 2 изменяет свой цвет всякий раз, когда буква T стоит на нечетной позиции (например, стоит в триплете на первой или третьей позиции);
2. затем черные и белые дуплеты и триплеты в каждой из так полученных мозаичных матриц $[C\ T; A\ G]^{(2)}$ и $[C\ T; A\ G]^{(3)}$ интерпретируются как элементы «+1» и «-1» соответственно.

По определению матрицей Адамара порядка «n» называется $(n \times n)$ -матрица $H(n)$ с элементами «+1» и «-1», которая удовлетворяет условию $H(n) \cdot H(n)^T = n \cdot I_n$, где $H(n)^T$ — транспонированная матрица, а I_n — единичная матрица. Строки или столбцы матриц Адамара образуют полную ортогональную систему функций Уолша. Приложениям матриц Адамара в технике обработки сигналов посвящены десятки тысяч публикаций: помехоустойчивое кодирование, сжатие информации, и т.д. [9]. Например, помехоустойчивые коды на основе матриц Адамара использовались на космических кораблях «Маринер» и «Вояджер», что позволило получить качественные фотографии Марса, Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна, несмотря на искаженность и ослабленность приходящих сигналов. Матрицы Адамара используются для создания квантовых компьютеров, которые базируются на «гейтах Адамара». В качестве унитарных операторов они применяются в квантовой механике.

Осуществим диадо-сдвиговые декомпозиции генетических матриц Адамара H_4 и H_8 по аналогии с декомпозициями радемахеровских матриц R_4 и R_8 . В результате возникают два новых набора из четырех (q_0, q_1, q_2, q_3) и восьми разреженных матриц ($h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7$), показанные на Рис. 6.

$$H_4 = q_0 + q_1 + q_2 + q_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$H_8 = h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 + h_7 =$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Рис. 6: Диадо-сдвиговые декомпозиции геноматриц Адамара H_4 и H_8 из Рис. 5.

Каждый из этих двух наборов из 4 и 8 разреженных матриц неожиданно также оказывается замкнутым относительно умножения и определяет свою таблицу умножения, показанную на Рис. 7.

Левая из этих таблиц совпадает с таблицей умножения кватернионов Гамильтона, а правая — с таблицей умножения 8-мерной алгебры бикватернионов Гамильтона, которые в математике обычно определяются как кватернионы Гамильтона над полем комплексных чисел. В этой связи геноматрица Адамара H_4 оказывается кватернионом Гамильтона

	1	q₁	q₂	q₃
1	1	q₁	q₂	q₃
q₁	q₁	-1	q₃	-q₂
q₂	q₂	-q₃	-1	q₁
q₃	q₃	q₂	-q₁	-1

;

	1	h₁	h₂	h₃	h₄	h₅	h₆	h₇
1	1	h₁	h₂	h₃	h₄	h₅	h₆	h₇
h₁	h₁	-1	h₃	-h₂	h₅	-h₄	h₇	-h₆
h₂	h₂	h₃	-1	-h₁	-h₆	-h₇	h₄	h₅
h₃	h₃	-h₂	-h₁	1	-h₇	h₆	h₅	-h₄
h₄	h₄	h₅	h₆	h₇	-1	-h₁	-h₂	-h₃
h₅	h₅	-h₄	h₇	-h₆	-h₁	1	-h₃	h₂
h₆	h₆	h₇	-h₄	-h₅	h₂	h₃	-1	-h₁
h₇	h₇	-h₆	-h₅	h₄	h₃	-h₂	-h₁	1

Рис. 7: Таблицы умножения для наборов из 4 и 8 разреженных матриц на Рис. 6 (матрицы q₀ и h₀ — единичные) для геноматриц Адамара H₄ и H₈.

с единичными координатами, а геноматрица Адамара H₈ — бикватернионом Гамильтона с единичными координатами. Между этими двумя геноматрицами Адамара H₄ и H₈ имеется алгебраическая связь через кронекеровское умножение матрицы H₄ на матричное представление комплексного числа с единичными координатами:

$$H_4 \otimes [1 \quad -1; 1 \quad 1] = H_8 \tag{2}$$

Наше трехмерное физическое пространство почему-то устроено так, что соответствует по своим геометрическим особенностям кватернионам Гамильтона. А теперь оказывается, что и система генетического кодирования почему-то устроена в соответствии с кватернионами и бикватернионами Гамильтона. Кватернионы Гамильтона тесно связаны с матрицами Паули, теорией электромагнитного поля (Максвелл написал свои уравнения именно на языке кватернионов Гамильтона), специальной теорией относительности, теорией спинов, квантовомеханической теорией химической валентности и пр. Кватернионам в физике только в XX веке посвящены тысячи работ [<http://arxiv.org/abs/math-ph/0511092>]. Матричная генетика привела к открытию важного моста между физикой, биологией и информатикой для их взаимного обогащения.

В наших исследованиях получен новый пример непостижимой эффективности математики: абстрактные математические структуры, выведенные математиками на кончике пера 160 лет назад, оказываются воплощенными в информационной основе живой материи — системе генетических алфавитов. И то, что математики открывают путем мучительных раздумий (подобно Гамильтону, потратившему 10 лет непрерывных раздумий для открытия его кватернионов), оказывается уже представленным в системе генетического кодирования. Наша генетическая система соответствует нашему физическому пространству, поскольку — как и оно — соответствует кватернионам Гамильтона. Это, в частности, затрагивает давно дискутируемый в науке вопрос о врожденности представлений животных организмов о пространстве [10, с. 77-80].

Кватернионы Гамильтона и сплит-кватернионы Кокла объединены тем, что весь набор алгебр Клиффорда для двумерного случая Cl_{1,1}(R), Cl_{2,0}(R), Cl_{0,2}(R) изоморфен именно этим двум 4-мерным алгебрам гиперкомплексных чисел (http://www.mi.ras.ru/noc/11_12/cllifalg04.12.11.pdf). Это интересно для международного сообщества «клиффордистов», стремящихся трактовать алгебры Клиффорда как универсальный язык геометрии и физики.

Кватернионы Гамильтона известны как инструмент математики и физики. Нами обращается внимание на то, что кватернион Гамильтона с единичными координатами через

a	b	c	d
-b	a	-d	c
-c	d	a	-b
-d	-c	b	a

;

a	b	-c	d
-b	a	d	c
c	-d	a	b
-d	-c	-b	a

;

a	-b	c	d
b	a	-d	c
-c	d	a	b
-d	-c	-b	a

Рис. 8: Примеры матричных представлений кватернионов Гамильтона $a * 1 + b * i + c * j + d * k$. При единичных значениях координат ($a = b = c = d = 1$) все эти матрицы являются матрицами Адамара. Расположение координат a, b, c, d в каждой матрице соответствует принципу строения матриц диадических сдвигов, описанных, например, в [7].

его матричные представления (a существует не одно такое представление) оказывается глубоко связанным с информатикой в силу двух причин:

1. его $(4 * 4)$ -матричные представления являются матрицами Адамара;
2. размещение кватернионных координат четырех видов в любых его $(4 * 4)$ -матричных представлениях всегда соответствует упомянутому принципу диадических сдвигов, основанному на одной из основных операций компьютерных технологий — сложении бинарных чисел по модулю 2.

Рис. 8 демонстрирует эти свойства на конкретных примерах $(4 * 4)$ -матричных представлений кватернионов Гамильтона.

Почему кватернионы и бикватернионы Гамильтона оказываются связанными с системой генетического кодирования? Вероятно, глубокий ответ на этот вопрос будет получен при учете не только геометрических свойств кватернионов и бикватернионов Гамильтона (например, их соответствия поворотам нашего физического 3D-пространства), но и их информационной сущности и пригодности для эффективной обработки информации в качестве особого вида матриц Адамара со специальными системами функций Уолша в них и пр.

Укажем возможные причины того, почему молекулярно-генетическая система алфавитов оказывается связанной с ассоциативными алгебрами в отличие от систем теоретической физики неживой материи, где большое внимание уделяется неассоциативным алгебрам октонионов Кэли и сплит-октонионов. Предполагаемая причина заключается в том, что ассоциативность является важным условием в информатике помехоустойчивого кодирования, где широко используются многие виды кодов (например, циклические коды), которые базируются на концепции алгебраических групп и полей Галуа. При этом сами определения понятий группы и полей Галуа содержат в себе условия ассоциативности их элементов. Тем самым, в области помехоустойчивого кодирования ассоциативные матричные алгебры гиперкомплексных чисел обладают фундаментальным преимуществом по сравнению с неассоциативными алгебрами октонионов Кэли и сплит-октонионов.

Названные кватернион и бикватернион Гамильтона с единичными координатами, будучи нормированы на единичный детерминант, образуют при возведении в степени циклические группы с периодами 6 и 24 соответственно:

$$(2^{-1} * H_4)^n = (2^{-1} * H_4)^{n+6}; \quad (2^{-1.5} * H_8)^n = (2^{-1.5} * H_8)^{n+24} \quad (3)$$

Свойства этих циклических групп таковы, что позволяют использовать их для моделирования генетически наследуемых свойств живых организмов. Например, покажем совпадение свойств генетически наследуемого цветовосприятия с 6-членной циклической группой

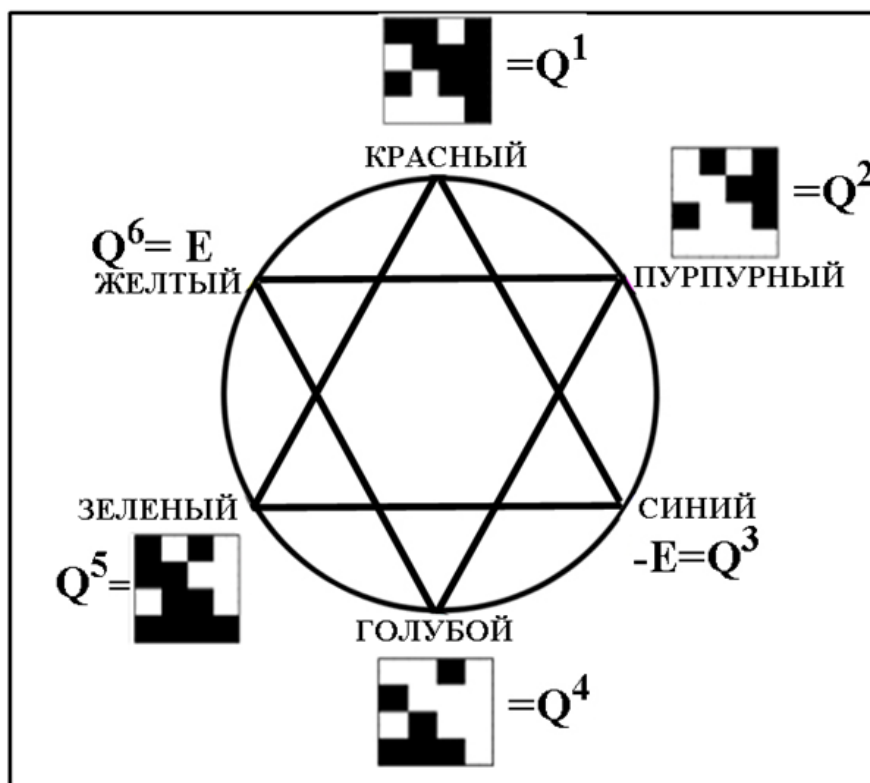


Рис. 9: Цветовой круг Ньютона из психофизики цветовосприятия и соответствие ему членов циклической группы нормированного кватерниона Гамильтона с единичными координатами $Q^n = (0.5 * H_4)^n$, период которой равен 6.

кватерниона Гамильтона $(2^{-1} * H_4)^n$. Изобразим все члены этой циклической группы на круговом циферблате (черные ячейки матриц содержат числа «+0, 5», белые — «-0, 5»; E — единичная матрица) (Рис. 9). Эта 6-членная группа кватернионов Гамильтона имеет следующие свойства:

1. Противоположащие на круге кватернионы противоположны по знаку и при сложении дают ноль, а потому являются взаимно дополнительными;
2. Каждый кватернион на круге представляет собой сумму двух соседних кватернионов;
3. Сумма кватернионов в вершинах каждого из двух треугольников «звезды Давида» равна нулю.

Эти свойства циклической группы реперного кватерниона Гамильтона тождественны феноменологическим свойствам наследуемого цветовосприятия. Последнее основано на трех базовых цветах (красный, синий, зеленый) и трех дополнительных к ним (голубой, желтый, пурпурный), лежащих в вершинах двух треугольников «звезды Давида» на цветовом круге Ньютона:

1. противоположащие на круге цвета взаимно дополнительные и при наложении гасят друг друга;
2. каждый цвет на круге представляет собой сумму двух соседних цветов;
3. три базовые цвета, как и три дополнительные цвета, при наложении гасят друг друга.

Задачу о смешении цветов теперь формально можно решать на языке циклической группы кватерниона Гамильтона, если закрепить за каждым цветом член этой группы в соответствии с Рис. 9. Например, какой цвет получится, если смешать 3 доли красного



Рис. 10: 24-часовой циферблат суток с их делением на дневную и ночную 12-часовые половины.

цвета, 2 доли желтого и 5 долей синего? Ответ получается сложением соответствующих кватернионов: $3Q^1 + 2Q^6 + 5Q^3 = 3Q^2$, т.е. 3 доли пурпурного (здесь использовано обозначение $Q = 0.5 * H_4$).

В психофизике известно, что цвет — это не физическое свойство объекта, а наследуемая реакция человека на поступающее от объекта световое воздействие с учетом общего светового окружения. Почему же наше цветовое восприятие устроено именно в соответствии с цветовым кругом и циклической группой кватернионов Гамильтона? Возможный ответ: потому что организм обрабатывает световую информацию на основе наследуемых единых алгоритмов обработки генетической и физической информации с участием генетически наследуемой циклической группы кватернионов Гамильтона, с которой связана сама система генетических алфавитов.

Свойства указанной выше (3) циклической группы бикватерниона Гамильтона с периодом 24 позволяют использовать ее для математического моделирования в области проблематики 24-часовых биоритмов суток, тем более, что бикватернионы в физике используются для моделирования пространственно-временных отношений. Как известно, наш организм представляет собой огромный хор генетически наследуемых ритмических процессов. Даже белки циклически распадаются на аминокислоты и собираются вновь. Фазы активности и пассивности физиологических систем согласованы между собой и по представлениям древней и современной медицины обуславливают деление человеком суток на 24 часа. Биоритмическая организация наследуемых процессов распределена по всему телу организмов самых различных видов, в том числе не обладающих нервной системой. Биоритмология важна для медицины, эргономики и пр. (см., например, [11]).

Рис. 10 показывает 24-часовой циферблат, в котором числа соответствуют показателям степени этого нормированного бикватерниона ($B = 2^{-1.5} * H_8$) с единичными координатами. Бикватернионы в степенях, противоположащих на циферблате, отличаются только противоположным знаком ($B^n = -B^{n+12}$) по аналогии с противоположностью дневных и ночных часов (например, в обычной жизни вместо «14 часов» зачастую говорят «2 часа дня», называя противоположащее на этом циферблате число). Эта циклическая группа бикватернионов имеет также другие интересные свойства, например: $B^n = B^{n-4} + B^{n+4}$; $B^n = -(B^{n-8} + B^{n+8})$; $B^n = 2^{-0.5} * (B^{n-3} + B^{n+3})$.

Теория обработки сигналов уделяет особое внимание перестановкам информационных элементов. В матричной генетике нами изучены все 6 возможных вариантов одновременной перестановки позиций в триплетах: 1 – 2 – 3, 2 – 3 – 1, 3 – 1 – 2, 3 – 2 – 1, 2 – 1 – 3, 1 – 3 – 2. Такие перестановки трансформируют большинство триплетов в ячейках исходной

матрицы триплетов $[C T; A G]^{(3)}$. Например, в случае циклической трансформации порядка позиций $1 - 2 - 3$ в порядок $2 - 3 - 1$, триплет CAG со слабым корнем CA трансформируется в триплет AGC с сильным корнем AG . В результате возникают новые мозаичные матрицы триплетов. При таких перестановках исходная радемахеровская геноматрица R трансформируется в 5 новых радемахеровских матриц, а исходная геноматрица Адамара H трансформируется в 5 новых геноматриц Адамара [3].

Соответствующая диадо-сдвиговая декомпозиция каждой из пяти новых радемахеровских матриц приводит к новому набору из 8 разреженных матриц, который также оказывается замкнутым относительно умножения и соответствует той же самой таблице умножения бисплит-кватернионов Кокла (Рис. 4). Это же справедливо для диадо-сдвиговой декомпозиции каждой из пяти новых геноматриц Адамара, которая приводит к новому набору из 8 разреженных матриц, замкнутому относительно умножения и соответствующему той же самой таблице умножения бикватернионов Гамильтона на Рис. 7. Аналогичная алгебраическая инвариантность имеет место для $(4 * 4)$ -геноматриц дуплетов $[C T; A G]^{(2)}$ при перестановке позиций в дуплетах: перейдя от порядка позиций $1 - 2$ к порядку $2 - 1$, мы получаем новую по мозаике $(4 * 4)$ -геноматрицу, радемахерово и адамарово представления которой являются новыми матричными представлениями тех же сплит-кватерниона Кокла и кватерниона Гамильтона с единичными координатами [3].

Вопрос об инвариантности матричных алгебр при разных перестановках элементов в геноматрицах интересен еще и в связи с метаморфозами организмов. Например, в метаморфозе бабочки, включающим четыре стадии (яйцо – гусеница – куколка – бабочка), куколка ничем не питается и имеет фиксированный атомарный состав, но за счет генетически детерминированной перестановки элементов куколка чудесным образом превращается в новый организм — бабочку.

Подчеркнем, что речь в статье идет только о подмножествах кватернионов и сплит-кватернионов с единичными координатами, а также об их целых степенях, но не об их полных алгебрах над всем полем вещественных или комплексных чисел, к которым привыкли физики. Автор полагает, что в полном виде эти алгебры над полем вещественных или комплексных чисел в биологии не реализуются. По ряду данных можно думать о том, что для биоматематики данные алгебры и их матричные расширения пригодны при их определении над полем алгебраических чисел.

На основе выявленных связей системы генетических алфавитов с описанными в статье гиперкомплексными числами автором устанавливаются новые количественные и симметрические правила организации длинных ДНК секвенций нуклеотидов (в дополнение к известному «второму правилу Чаргафа»). Одновременно полученные результаты выводят на новые средства анализа генетически наследуемых физиологических процессов. Речь идет об использовании названных геноматриц Адамара в связи с плодотворной секвентной теорией Х. Хармута обработки сигналов [8, 12-14]. Она эффективно используется в телекоммуникациях, радарной технике и пр. Генетические матрицы Адамара определяют специальные варианты секвентного спектрального анализа, пространственной и временной фильтрации физиологических процессов и их корреляционного анализа. Данные развиваемой «матричной генетики» позволяют полагать, что этот «генетический» секвентный анализ может послужить ключом к важным аспектам биоинформатики.

Широкое использование матриц Адамара и их систем функций Уолша в цифровой информатике определяется их особыми свойствами. Во-первых, ступенчатые функции Уолша реализуются в электронных устройствах много проще, чем тригонометрические и многие другие функции. Во-вторых, использование функций Уолша позволяет осуществлять обработку цифровых сигналов посредством одних только операций сложения и вычитания без использования умножения и деления (см., например, [7, 15]). Поскольку в этом случае операций деления не требуется, то в цифровой информатике могут использоваться

алгебры без деления, к числу которых относятся расширения алгебр кватернионов и сплит-кватернионов на случаи более высоких 2^n -мерных алгебр. Это дополнительно отличает компьютерную информатику от теоретической физики, где операции умножения и деления существенны и где в этой связи внимание физиков обращено на алгебры с делением, прежде всего, на алгебры октонионов Кэли. Для рассматриваемой нами области молекулярной генетики существенно, что в ней операции сложения и вычитания могут быть организованы посредством простого соединения или разъединения молекулярных элементов, что, очевидно, много проще организации операций умножения и деления на молекулах. Следует отметить существование некоторых работ по приложению функций Уолша с их полезными свойствами для спектрального анализа генетических секвенций и создания новых генетических алгоритмов [16-22].

Известно, что в области многоканальной цифровой связи многомерные числовые системы используются для обеспечения функциональных преимуществ. Например, 2-мерные комплексные числа используются для цифровой обработки 2-мерных сигналов [23, гл. 8]; в этом случае вещественная часть комплексных чисел соответствует сигналу первого канала, а мнимая часть комплексных чисел — сигналу второго канала. Но биологические организмы представляют собой многоканальные информационные системы. Например, сетчатка глаза обладает врожденным набором рецепторов, который осуществляет многоканальную передачу в нервную систему информации о проецируемых на сетчатку образов. Но для эффективной работы информационных систем с большим числом параллельных каналов передачи потоков независимых исходных сигналов требуется кооперативный принцип учета этих потоков. Это принцип может быть реализован в форме алгебраической системы гиперкомплексных чисел. Мы полагаем, что описанные генетические гиперкомплексные числа используются в наследуемых многоканальных биоинформационных системах для подобных целей.

Молекулярная генетика располагает примерами особой феноменологической роли числа 8. Например, в клетках эукариотов нити ДНК навиты вокруг нуклеосом, каждая из которых представляет собой октамерный стержень, состоящий из гистоновых белков четырех типов: H2A, H2B, H3 and H4. Точнее, одиночная нуклеосома является ансамблем из 8 гистонов, в котором присутствует пара гистонов каждого из этих четырех видов (между этими гистонами имеются отношения комплементарности, напоминающие отношения комплементарности между парами азотистых оснований в ДНК). Молекула ДНК навита на этот октамерный стержень. Октамерная структура нуклеосом играет центральную роль в упаковке ДНК на всех уровнях. В молекулярной генетике существует широко известная концепция гистонового кода [24]. Возможно, что математические формализмы описанных генетических гиперкомплексных чисел окажутся полезными для моделирования феноменологических фактов этой фундаментальной концепции и для ее развития.

Можно добавить, что в области молекулярной генетики для обеспечения тех или иных физиологических процессов должны согласованно работать целые семейства белков (отдельный, изолированный белок не является живой системой). При этом данные семейства должны содержать определенные количества белков разных видов. Генетическая система успешно решает эту числовую задачу генетической детерминации количеств белков каждого типа внутри отдельных семейств для разных биологических процессов. Описанные в статье генетические гиперкомплексные числа могут быть дополнительно использованы для математического моделирования подобных генетических феноменов. Обобщенно говоря, можно думать, что в области молекулярной генетики и наследуемых физиологических структур эти генетические гиперкомплексные системы могут служить естественным генетическим базисом для обеспечения числовых закономерностей в наследуемых множествах информационных элементов.

4 Решетки Пеннета, кронекеровские произведения и ДС-декомпозиции

Структурные особенности различных уровней генетической системы должны быть взаимно скоординированы для обеспечения единства организма и наследуемой передачи физиологических подсистем по цепи поколений. В этой связи методы матричной генетики могут быть полезны при их приложении к анализу и моделированию различных уровней генетической организации в живом.

До сих пор мы говорили об алфавитах генетических мультиплетов и их субалфавитах. Этот параграф посвящен новому классу объектов матричной генетики, относящихся к более высокому биологическому уровню, где новые термины фигурируют в качестве центральных: «аллели», «гаметы», «генотип», «зигота», и пр. Мы будем анализировать классические для генетики квадратные решетки Пеннета. Они представляют алфавиты генотипов или, точнее, алфавиты гибридов в возможных комбинациях мужских и женских гамет (половых клеток) при скрещивании организмов в соответствии с законами Менделя. Мы покажем возможность интерпретации решеток Пеннета для полигибридного скрещивания не как таблиц, а как квадратных матриц (будем называть их «матрицами Пеннета»), получаемых в результате кронекеровского умножения $(2 * 2)$ –матриц Пеннета для моногибридного скрещивания. Основываясь на кронекеровском умножении матриц, использованном нами на микроуровне молекулярно-генетических алфавитов, этот матричный подход оказывается пригодным для феноменологии биообъектов значительно более высокого уровня: он дает простой алгебраический способ конструирования решеток Пеннета для мультигибридного скрещивания организмов. Дополнительно мы покажем, что диадо-сдвиговые декомпозиции (ДС-декомпозиции) этих «матриц Пеннета» ведут в некоторых важных случаях к методу классификации различных подмножеств комбинации аллелей от женских и мужских гамет. Некоторые из этих результатов матричной генетики на уровне генотипов формально идентичны результатам, описанным выше для более низкого уровня генетических мультиплетов. Эти результаты демонстрируют алгебраическую общность генетической организации на различных уровнях.

Решетки Пеннета являются широко известным инструментом в генетике. Они были введены английским генетиком Пеннетом (R. C. Punnett) в 1905 году для предсказания генетического наследования признаков в потомках. Этот метод Пеннета излагается во множестве учебников по генетике и на сайтах Интернета.

Наследование заключается в передаче признаков от родителей к потомкам. Передаваемые признаки контролируются генами. Различные формы или состояния гена для того или иного определенного признака называются аллелями. Для каждого признака обычно имеется два аллеля (или два состояния гена). Аллели могут быть доминантными или рецессивными. Каждая клетка в организме содержит два аллеля для каждого из признаков. Один аллель наследуется от материнского организма, а второй – от отцовского. Решетка Пеннета дает простой метод предсказания комбинаций этих аллелей при скрещивании организмов. Решетка Пеннета представляет все возможные комбинации материнских аллелей с отцовскими аллелями при полигибридном скрещивании. В решетках Пеннета доминантные и рецессивные аллели принято обозначать буквами: заглавные буквы обозначают доминантные аллели (мы будем использовать для доминантных аллелей буквы H, B, C, ...), а строчные буквы обозначают рецессивные аллели (соответственно h, b, c, ...). Организм называется гомозиготным по данному признаку (или признакам), если он имеет одинаковые аллели для этого признака, например, HH или hh. Организм называется гетерозиготным, если он имеет не одинаковые аллели для данного признака, например, Hh. Для каждого наследуемого признака существует три возможных комбинации аллелей: гомозиготная доминантная (HH), гетерозиготная (Hh) и гомозиготная рецессивная (hh). При

		материнские гаметы							
		HbC	Hbc	HbC	Hbc	hbC	hbc	hbC	hbc
отцовские гаметы	HBC	<u>HHBbCC</u>	<u>HNBbCe</u>	<u>HNBbCC</u>	<u>HNBbCe</u>	<u>HhBbCC</u>	<u>HhBbCe</u>	<u>HhBbCC</u>	<u>HhBbCe</u>
	HBe	<u>HNBbCe</u>	<u>HNBbcc</u>	<u>HNBbCe</u>	<u>HNBbcc</u>	<u>HhBbCe</u>	<u>HhBbcc</u>	<u>HhBbCe</u>	<u>HhBbcc</u>
	HbC	<u>HHbbCC</u>	<u>HHbbCe</u>	<u>HHbbCC</u>	<u>HHbbCe</u>	<u>HhbbCC</u>	<u>HhbbCe</u>	<u>HhbbCC</u>	<u>HhbbCe</u>
	Hbe	<u>HHbbCe</u>	<u>HHbbcc</u>	<u>HHbbCe</u>	<u>HHbbcc</u>	<u>HhbbCe</u>	<u>Hhbbcc</u>	<u>HhbbCe</u>	<u>Hhbbcc</u>
	hBC	<u>HhBbCC</u>	<u>HhBbCe</u>	<u>HhBbCC</u>	<u>HhBbCe</u>	<u>hhBbCC</u>	<u>hhBbCe</u>	<u>hhBbCC</u>	<u>hhBbCe</u>
	hBe	<u>HhBbCe</u>	<u>HhBbcc</u>	<u>HhBbCe</u>	<u>HhBbcc</u>	<u>hhBbCe</u>	<u>hhBbcc</u>	<u>hhBbCe</u>	<u>hhBbcc</u>
	hbC	<u>HhbbCC</u>	<u>HhbbCe</u>	<u>HhbbCC</u>	<u>HhbbCe</u>	<u>hhbbCC</u>	<u>hhbbCe</u>	<u>hhbbCC</u>	<u>hhbbCe</u>
	hbe	<u>HhbbCe</u>	<u>Hhbbcc</u>	<u>HhbbCe</u>	<u>Hhbbcc</u>	<u>hhbbCe</u>	<u>hhbbcc</u>	<u>hhbbCe</u>	<u>hhbbcc</u>

Рис. 11: Пример решетки Пеннета для тригибридного скрещивания при материнском генотипе HhbbCc и отцовском генотипе HhBbCc (из <http://www.changbioscience.com/genetics/punnett.html>).

классическом конструировании квадратной решетки Пеннета на одной ее стороне (обычно верхней) выписывают аллели материнских гамет, а на другой стороне (левой) выписывают аллели отцовских гамет; варианты генотипов возможного потомства записываются в ячейки решетки посредством взятия одного аллеля сверху (он является символом столбца этой ячейки) и одного аллеля слева (он является символом строки). По традиции заглавные буквы доминантного аллеля ставятся перед строчными буквами рецессивного аллеля (например, Hh, но не hH).

Если при скрещивании рассматривается только один наследуемый признак, то оно называется моногибридным скрещиванием. Если же рассматриваются два или три наследуемых признака, то скрещивание называется соответственно дигибридным или тригибридным. Рисунок 11 показывает пример решетки Пеннета для одного из случаев тригибридного скрещивания родителей с материнским генотипом HhbbCc и отцовским генотипом HhBbCc (этот частный пример взят с сайта о решетках Пеннета <http://www.changbioscience.com/genetics/punnett.html>). В данном примере каждый набор родительских гамет включает 8 гамет, при этом набор материнских гамет отличается от набора отцовских гамет. Следует отметить, что конструирование решетки Пеннета для мультигибридного скрещивания организмов названным традиционным путем является достаточно трудоемкой задачей, быстро усложняющейся при возрастании числа учитываемых признаков в мультигибридном скрещивании.

Нами обращается внимание на то, что эта (8×8) -матрица Пеннета (заключена в жирную рамку на рисунке 11) идентична результату кронекеровского произведения трех (2×2) -матриц Пеннета для моногибридного скрещивания по каждому из этих трех признаков в отдельности. Рисунок 12 показывает три решетки Пеннета для моногибридного скрещивания в рассматриваемом случае материнского генотипа HhbbCc и отцовского генотипа HhBbCc.

Случаи мультигибридного скрещивания при одинаковых материнском и отцовском генотипах описываются решетками Пеннета, которые в некоторых отношениях связаны с диадо-сдвиговыми декомпозициями [3]. Например, в случае тригибридного скрещивания материнского генотипа HhBbCc и отцовского генотипа HhBbCc (8×8) -матрица Пеннета с помощью ДС-декомпозиции представляется суммой восьми разреженных (8×8) -матриц $P_0, P_1, P_2, \dots, P_7$, каждая из которых имеет по 8 не нулевых ячеек. Тогда первая из этих

материнские гаметы		
Н	h	
Н	НН	<u>Нh</u>
h	<u>Нh</u>	<u>hh</u>

материнские гаметы		
b	b	
B	Bb	Bb
b	bb	bb

материнские гаметы		
C	c	
C	CC	Cc
c	Cc	cc

Рис. 12: Три решетки Пеннета моногибридного скрещивания для построения решетки Пеннета тригибридного скрещивания (рисунок 11) с помощью их кронекеровского произведения.

восьми матриц p_0 имеет 8 не нулевых ячеек, которые содержат все 8 гомозиготных комбинаций аллелей ННВСС, ННВсс, ННЬЬСС, ННЬЬсс, hhВСС, hhВсс, hhbbСС, hhbbсс. Вторая из этих матриц p_1 содержит только все комбинации аллелей, в которых только третий наследуемый признак гетерозиготен: ННВССс, ННВССс, ННЬЬСс, ННЬЬСс, hhВССс, hhВССс, hhbbСс, hhbbСс, и т.д. Другими словами, посредством ДС-декомпозиций мы получаем метод классификации различных подмножеств гомозиготных и гетерозиготных потомков при таком мультигибридном скрещивании.

Описанные аналогии между матрицами генетических алфавитов и матрицами Пеннета для наследуемых признаков позволяют автору выдвигать рабочую гипотезу «алфавитно-молекулярного менделизма». Согласно этой гипотезе надхромосомные феномены наследования признаков у целостных живых организмов, которые были выявлены Менделем и подчиняются сформулированным им законам, возникли не на пустом месте, но являются продолжением молекулярных феноменов, которые определены более глубокими законами молекулярно-алфавитного уровня. Эти более глубокие законы имеют существенные аналогии с законами Менделя. Множество наследуемых признаков в биологических организмах может рассматриваться как особая алфавитная система высокого уровня, а сам организм — как некоторый текст, набранный в этой алфавитной системе. С этой точки зрения, биологическая эволюция предстает в определенной степени как эволюция многоуровневой системы взаимно связанных биологических алфавитов, начиная, по крайней мере, с молекулярно-генетического уровня. Автор предполагает существование универсальных био-алгоритмов эволюционного продуцирования взаимно связанных алфавитов все более и более высокого уровня биологической организации. Кронекеровские произведения генетических матриц, матричные формы представления генетических гиперкомплексных систем, алгоритмы диадических сдвигов и другие алгоритмы, выявляемые в наших работах по матричной генетике, могут использоваться для моделирования этих эволюционных процессов усложнения многоуровневой системы биологических алфавитов. При этом вновь образуемые алфавиты также имеют сопряжение с диадическими сдвигами, что условно может быть выражено кратким тезисом, выдвигаемым автором: «живые организмы являются диадо-сдвиговыми сущностями».

Дополнительными свидетельствами в пользу этого тезиса являются следующие факты. Матрицы диадических сдвигов крестообразны по своему строению и фракталоподобны: квадранты вдоль каждой из двух матричных диагоналей тождественны по своему числовому содержанию (то же самое относится к строению отдельных квадрантов, субквадрантов и т.д., что говорит о фракталоподобной структуре этих матриц). Но генетически наследуемое устройство наших информационных систем также крестообразно. Так, левое полушарие головного мозга обслуживает правую половину тела, а правое полушарие — левую половину. Крестообразны также зрительные нервные пути из двух глаз: эти пути передают информацию о правой половине поля зрения в левое полушарие мозга, а информацию о левой половине поля зрения — в правое полушарие. Это же верно для слуховой системы.

Настоящая статья свидетельствует, что гиперкомплексные числа оказываются важными не только для геометрии и физики, но и для биологии. Дополнительно отметим, что система генетических алфавитов сопряжена с символьной системой алфавитов древнекитайской «Книги Перемен», написанной несколько тысяч лет назад. Например, в этой древнекитайской системе базовое значение имеют четыре диграммы, именуемые Старый Ян, Старая Инь, Молодой Ян и Молодая Инь. По аналогии с генетическим алфавитом из этих диграмм можно сконструировать квадратную матрицу, третья кронекеровская степень которой порождает знаменитую таблицу 64 гексаграмм порядка Фу-си их этой древнекитайской книги [2-4]. Существует много других аналогий между генетической системой и системой «Книги Перемен». Древние китайцы утверждали, что их система является всеобщим природным архетипом и универсальной классификационной схемой. Они ничего не знали о генетическом коде, но генетический код оказывается сконструированным во многом в соответствии с этой древней системой. При этом благодаря разработкам в области матричной генетики сама система «Книги перемен» предстает как алгебраически содержательная многоуровневая система взаимно связанных алфавитов.

Заключение

Многомерные векторные пространства и соответствующие им гиперкомплексные числовые системы интересны не только для теоретической физики неживой материи, но также для живой материи, глубоко связанной с информатикой, которая давно использует гиперкомплексные числа в цифровой технике.

Как подчеркивается в статье «Проблема происхождения жизни и мышления с точки зрения современной физики» Д.С. Чернавского («Успехи физических наук», 2000 г., № 2): *«В физике неживой природы эти понятия /информации и ценной информации/ практически не используются, поскольку они там не нужны. В биологии, напротив, понятие «информация» и особенно «ценная информация» являются основными, и без них ни понять, ни описать явления в живой природе невозможно. В этом собственно и заключается специфика «живого»».*

Именно на пути разработки информационных подходов к живой материи с использованием алгебр гиперкомплексных систем можно ожидать прорыва в ее понимании, включая возможное появление новых законов, о которых писал Э. Шредингер [25, заключительная глава]: *«Для организма следует ожидать новых законов. . . все известное нам о структуре живой материи заставляет ожидать, что деятельность живого организма нельзя свести к появлению обычных законов физики. И не потому, что имеется какая-нибудь «новая сила» или что-либо еще, управляющее поведением отдельных атомов внутри живого организма, а потому, что его структура отличается от всего изученного нами до сих пор в физической лаборатории. . . Развертывание событий в жизненном цикле организма обнаруживает удивительную регулярность и упорядоченность, не имеющих себе равных среди всего, с чем мы встречаемся в неодушевленных предметах. . . Короче говоря, мы видим, что существующая /в организме/ упорядоченность проявляет способность поддерживать саму себя и производить упорядоченные явления. . . Мы вправе предполагать, что живая материя подчиняется новому типу физического закона».*

Полученные в матричной генетике результаты заставляют автора не соглашаться с известным утверждением: *«Энциклопедия Жизни написана 4 буквами».* Это утверждение скрывает ключевую роль многоуровневой системы сопряженных генетических алфавитов. Много более верным выглядит следующее утверждение: *«Энциклопедия Жизни написана сплетением многих взаимосвязанных алфавитов, имеющим алгебраическую основу».*

Биоинформатика в широком смысле призвана решить множество научных проблем о

наследуемых свойствах организмов, включая следующие:

- помехоустойчивости генетического кодирования;
- управления и синхронизации огромного множества наследуемых циклических процессов, зачастую дихотомического типа;
- сжатия наследуемой биологической информации;
- системной организации согласованной сборки и разборки белков с их особенностями пространственного строения;
- наследования морфогенетических конструкций и процессов, и пр.

Можно полагать, что изложенные биоматематические результаты будут полезны при решении многих из этих сложных вопросов.

В начале статьи было отмечено, что живой организм является алгоритмической машиной многоканального помехоустойчивого кодирования, которая реализует законы Менделя независимого наследования признаков и пр. Представляется, что нами открыты некоторые важные алгебраические основы этой алгоритмической генетической машины, которые свидетельствуют о глубокой алгебраической природе генетической системы. Данные результаты ведут к развитию алгебраической биологии. Система генетических алфавитов своими алгебраическими особенностями подсказывает новый — алгебраический — путь к познанию живой материи.

Благодарности

Автор выражает благодарность дирекции Института машиноведения РАН (директор — академик Р.Ф. Ганиев) за поддержку данного направления исследований, а также молодым сотрудникам лаборатории и студентам МФТИ, участвующим в его разработке: И.В. Степаняну, В.И. Свирину, Д.Ш. Катанову, А.В. Буракову, В.И. Демо.

Литература

- [1] Stewart I. Life's other secret: The new mathematics of the living world, New-York, Penguin, 1999.
- [2] Петухов С.В. Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость. М., РХД, 2008, 316 с.
- [3] Petoukhov S.V. The genetic code, 8-dimensional hypercomplex numbers and dyadic shifts. pp. 1-31, 2011. from <http://arxiv.org/abs/1102.3596>.
- [4] Petoukhov S.V., He M. Symmetrical Analysis Techniques for Genetic Systems and Bioinformatics: Advanced Patterns and Applications. Hershey, USA, IGI Global. 271 p, 2010
- [5] Karlin S., Ost F., Blaisdell B.E. Patterns in DNA and amino acid sequences and their statistical significance, in: Mathematical methods for DNA sequences, M.S. Waterman, Ed., Florida: CRC Press, 1999.
- [6] Конопельченко Б.Г., Румер Ю.Б. Классификация кодонов в генетическом коде. ДАН СССР, т. 223, № 2, с. 471-474, 1975.
- [7] Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М., 1980.
- [8] Хармут Х. Теория секвентного анализа. М., Мир, 1980
- [9] Seberry J., Wysocki B.J., Wysocki T.A. On some applications of Hadamard matrices // *Metrica*, vol. 62, pp. 221-239, 2005.

- [10] Петухов С.В. Биомеханика, бионика и симметрия. М., Наука, 1981.
- [11] Райт К. Время нашей жизни. // *В мире науки*, № 1, с. 45–51, 2003.
- [12] Хармут Х. Передача информации ортогональными функциями. М., Связь, 1975.
- [13] Хармут Х. Несинусоидальные волны в радиолокации и радиосвязи. М., Радио и связь, 1985.
- [14] Хармут Х. Применение методов теории информации в физике. М., Мир, 1989.
- [15] Трахтман А.М. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М., Советское радио, 1972.
- [16] Forrest S., Mitchell M. The performance of genetic algorithms on Walsh polynomials: Some anomalous results and their explanation. – In R.K.Belew and L.B.Booker, editors, *Proceedings of the Fourth International Conference on Genetic Algorithms*, pp. 182-189. Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1991.
- [17] Geadah Y.A., Corinthios M.J. Natural, dyadic and sequency order algorithms and processors for the Walsh-Hadamard transform. // *IEEE Trans. Comput.* Vol. C-26, pp. 435-442, 1977.
- [18] Goldberg D.E. Genetic algorithms and Walsh functions. // *Complex systems*. 3(2), pp. 129-171, 1989.
- [19] Lee M.H., Kaveh M. Fast Hadamard transform based on a simple matrix factorization. // *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*. (Vol. ASSSP-34, 6, pp. 1666-1667, 1986.
- [20] Shiozaki A. A model of distributed type associated memory with quantized Hadamard transform // *Biol.Cybern.* 38, 1, pp. 19-22, 1980.
- [21] Vose M., Wright A. The simple genetic algorithm and the Walsh transform // *Journal of evolutionary computation*, 6(3), pp. 253-274, 1998.
- [22] Уотермен М.С., редактор. Математические методы для анализа последовательностей ДНК. М., Мир, 1999.
- [23] Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. М., Бином, 2006.
- [24] Jenuwein Th., Allis C.D. Translating the Histone Code. *Science*. Vol. 293, pp. 1074-1080, 2001.
- [25] Шредингер Э. Что такое жизнь? С точки зрения физики. М., Наука, 1972.

HYPERCOMPLEX NUMBERS AND THE ALGEBRAIC SYSTEM OF GENETIC ALPHABETS. ELEMENTS OF ALGEBRAIC BIOLOGY

S.V. Petoukhov

Mechanical Engineering Institute, RAS, Moscow, Russia

spetoukhov@gmail.com

This article presents some results of investigation of the multi-level system of molecular-genetic alphabets by means of matrix methods from theory of noise-immunity coding. These studies have revealed links of the system of alphabets with some systems of hypercomplex numbers (Hamilton quaternions and Cockle split-quaternions and their extensions), Kronecker families of matrices, orthogonal systems of Rademacher functions and Walsh functions, Hadamard matrices etc. Structural parallels are shown between molecular-genetic alphabets and a system of inheritance of traits in holistic organisms, which obeys the Mendel laws and which is reflected in genetic Punnett squares. The system of molecular-genetic alphabets, common to all living organisms, possesses algebraic properties which lead to a new — algebraic — way of cognition of living matter. This cognition is related with development of algebraic biology associated with hypercomplex numbers. Living matter, providing the transmission of hereditary information in the chain of generations, is presented as information entity deeply algebraic in its nature.

Key Words: genetic alphabets, hypercomplex numbers, Rademacher functions, Walsh functions, Hadamard matrices, cyclic groups, Punnett squares, algebraic biology.

LINE INTEGRATION AND SECOND ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OVER CAYLEY-DICKSON ALGEBRAS

S.V. Ludkovsky

Moscow State Technical University MIREA, Moscow, Russia
sludkowski@mail.ru

Line integration of generalized functions is studied. Second order partial differential equations with piecewise continuous and generalized variable coefficients over Cayley-Dickson algebras are investigated. Formulas for integrations of such equations are deduced. For this purpose a non-commutative line integration is used. Examples of solutions of partial differential equations are given.

Key Words: Cayley-Dickson algebra, partial differential equation, line integration, generalized function.

1 Introduction

It is well-known, that differential equations have many-sided applications in different sciences including physics, mechanics, other natural sciences, techniques, economics, etc. The differential equations also are very important for mathematics [7, 13, 34, 15, 29, 37]. Predominantly differential equations are considered over fields such as real, complex, or with non-archimedean norms. Recently they are also begun to be studied over Clifford algebras [9, 10, 11].

Such algebras have a long history, because quaternions were first introduced by W.R. Hamilton in 1843. He had planned to use them for problems of mechanics and mathematics [12, 33]. Their generalization known as the octonion algebra was introduced by J.T. Graves and A. Cayley in 1843-45. Then Dickson had investigated more general algebras known now as the Cayley-Dickson algebras [1, 2, 14].

The Cayley-Dickson algebras, particularly, octonions and quaternions are widely used in physics, but mainly algebraically. Already Maxwell had utilized quaternions to derive his equations of electrodynamics, but then he had rewritten them in real coordinates.

In the 50-th of the 20-th century Yang and Mills had used them in quantum field theory, but theory of functions over octonions and quaternions in their times was not sufficiently developed to satisfy their needs. Discussing that situation they have formulated the problem of developing analysis over octonions and quaternions [8]. This is natural, because quantum fields are frequently non-abelian [35]. Dirac had used complexified quaternions to solve the Klein-Gordon hyperbolic differential equation with constant coefficients.

This work continues previous articles of the author. In those articles (super)-differentiable functions of Cayley-Dickson variables and their non-commutative line integrals were investigated [22, 23, 21, 25, 26]. In the papers [24, 20] differential equations and their systems over octonions and quaternions were studied.

The Cayley-Dickson algebras \mathcal{A}_r have the even generator $i_0 = 1$ and the purely imaginary odd generators i_1, \dots, i_{2^r-1} , $2 \leq r$, $i_k^2 = -1$ and $i_0 i_k = i_k$ and $i_k i_l = -i_l i_k$ for each $1 \leq k \neq l$. For $3 \leq r$ the multiplication of these generators is generally non-associative, so they form not a group, but a non-commutative quasi-group with the property of alternativity $i_k(i_k i_l) = (i_k^2) i_l$ and $(i_l i_k) i_k = i_l(i_k^2)$ instead of associativity. Ordinary super-analysis operates with graded algebras over Abelian groups. Therefore, super-analysis over the Cayley-Dickson algebras is in some respect more complicated than usual super-analysis, for example, over the Grassman algebras.

The aim of this paper is in developing of Dirac's approach on partial differential equations with variable piecewise continuous or generalized coefficients.

The technique presented there is developed here below for solutions of partial differential equations of the second order of arbitrary signatures and with variable coefficients which may also be piecewise continuous or generalized functions. Moreover, signatures may change piecewise in a domain. Formulas for integrations of such equations are deduced. For this purpose a non-commutative line integration of generalized functions is developed. Examples of partial differential equations are given. Moreover the approach of §§2-25 over the Cayley-Dickson algebras \mathcal{A}_v gives the fundamental solution of any first and second order linear partial differential equation with variable z -differentiable \mathcal{A}_v -valued coefficients, $z \in U \subset \mathcal{A}_v$, where U is a domain in \mathcal{A}_v satisfying some mild convexity conditions described below. These results can be used for solutions of concrete partial differential equations or their systems of different orders with piecewise continuous or generalized coefficients, for example, of Helmholtz' or Klein-Gordon's types, which are important in optics of composite materials or quantum field theory. Finally solutions of some types of non-linear partial differential equations over Cayley-Dickson algebras are studied.

Main results of this paper are obtained for the first time.

2 Partial differential equations of the second order.

1. Remarks and notations. For a subset U in either the quaternion skew field $\mathbf{H} = \mathcal{A}_2$ or in the octonion algebra $\mathbf{O} = \mathcal{A}_3$ or the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_r , $r \geq 4$, we put $\pi_{\mathbf{s},\mathbf{p},\mathbf{t}}(U) := \{\mathbf{u} : z \in U, z = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{b}} w_{\mathbf{v}}\mathbf{v}, \mathbf{u} = w_{\mathbf{s}}\mathbf{s} + w_{\mathbf{p}}\mathbf{p}\}$ for each $\mathbf{s} \neq \mathbf{p} \in \mathbf{b}$, where $\mathbf{t} := \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{b} \setminus \{\mathbf{s},\mathbf{p}\}} w_{\mathbf{v}}\mathbf{v} \in \mathcal{A}_{r,\mathbf{s},\mathbf{p}} := \{z \in \mathcal{A}_r : z = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{b}} w_{\mathbf{v}}\mathbf{v}, w_{\mathbf{s}} = w_{\mathbf{p}} = 0, w_{\mathbf{v}} \in \mathbf{R} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{b}\}$, where $\mathbf{b} := \{i_0, i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$ is the family of standard generators of the algebra \mathcal{A}_r so that $i_j^2 = -1$, for each $j \geq 1$, $i_j i_k = -i_k i_j$ for each $j \neq k \geq 1$, $i_0 = 1$. Geometrically the domain $\pi_{\mathbf{s},\mathbf{p},\mathbf{t}}(U)$ means the projection on the complex plane $\mathbf{C}_{\mathbf{s},\mathbf{p}}$ of the intersection U with the plane $\tilde{\pi}_{\mathbf{s},\mathbf{p},\mathbf{t}} \ni \mathbf{t}$, $\mathbf{C}_{\mathbf{s},\mathbf{p}} := \{a\mathbf{s} + b\mathbf{p} : a, b \in \mathbf{R}\}$, since $\mathbf{s}\mathbf{p}^* \in \hat{\mathbf{b}} := \mathbf{b} \setminus \{1\}$. Recall that in §§2.5-7 [22] for each continuous function $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ it was defined the operator \hat{f} by each variable $z \in \mathcal{A}_r$. If a function f is z -differentiable by the Cayley-Dickson variable $z \in U \subset \mathcal{A}_r$, $2 \leq r$, then $\hat{f}(z) = dg(z)/dz$, where $(dg(z)/dz).1 = f(z)$.

A Hausdorff topological space X is said to be n -connected for $n \geq 0$ if each continuous map $f : S^k \rightarrow X$ from the k -dimensional real unit sphere into X has a continuous extension over \mathbf{R}^{k+1} for each $k \leq n$ (see also [36]). A 1-connected space is also said to be simply connected.

It is supposed further, that a domain U in \mathcal{A}_r^m has the property that

(D1) each projection $\mathbf{p}_j(U) =: U_j$ is $(2^r - 1)$ -connected;

(D2) $\pi_{\mathbf{s},\mathbf{p},\mathbf{t}}(U_j)$ is simply connected in \mathbf{C} for each $k = 0, 1, \dots, 2^r - 1$, $\mathbf{s} = i_{2k}$, $\mathbf{p} = i_{2k+1}$, $\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{r,\mathbf{s},\mathbf{p}}$ and $u \in \mathbf{C}_{\mathbf{s},\mathbf{p}}$, for which there exists $z = \mathbf{u} + \mathbf{t} \in U_j$,

where $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{A}_r^m$ is the vector with 1 on the j -th place, $\mathbf{p}_j(z) = {}^jz$ for each $z \in \mathcal{A}_r^m$, $z = \sum_{j=1}^m {}^jz e_j$, ${}^jz \in \mathcal{A}_r$ for each $j = 1, \dots, m$, $m \in \mathbf{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$. Frequently we take $m = 1$. Henceforward, we consider a domain U satisfying Conditions (D1, D2) if any other is not outlined.

The family of all \mathcal{A}_r locally analytic functions $f(x)$ on U with values in \mathcal{A}_r is denoted by $\mathcal{H}(U, \mathcal{A}_r)$. It is supposed that a locally analytic function $f(x)$ is written in the x -representation $\nu(x)$, also denoted by $\nu = \nu^f$. The latter is equivalent to the super-differentiability of f (see [23, 22, 24]). Each such f is supposed to be specified by its phrase ν .

For each super-differentiable function $f(x)$ its non-commutative line integral $\int_{\gamma} f(x)dx$ in U is defined along a rectifiable path γ in U . It is the integral of a differential form $\hat{f}(x).dx$, where

(I1) $\hat{f}(x) = dg(x)/dx$,

(I2) $[dg(x)/dx].1 = f(x)$ for each $x \in U$.

A branch of the non-commutative line integral can be specified with the help of either the left or right algorithm (see [23, 22, 24]). We take further for definiteness the left algorithm if something another will not be described. For $f \in \mathcal{H}(U, \mathcal{A}_r)$ and a rectifiable path $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{A}_r$, the integral $\int_\gamma f(x)dx$ depends only on an initial $\alpha = \gamma(a)$ and final $\beta = \gamma(b)$ points due to the non-commutative analog of the homotopy theorem in U , where $a < b \in \mathbf{R}$. When initial and final points or a path are not marked we denote the operation of the non-commutative line integration in the domain U simply by $\int f(x)dx$ analogously to the indefinite integral.

To rewrite a function from real variables z_j in the z -representation the following identities are used:

(1) $z_j = (-zi_j + i_j(2^r - 2)^{-1}\{-z + \sum_{k=1}^{2^r-1} i_k(z i_k^*)\})/2$
 for each $j = 1, 2, \dots, 2^r - 1$,

$$(2) \quad z_0 = (z + (2^r - 2)^{-1}\{-z + \sum_{k=1}^{2^r-1} i_k(z i_k^*)\})/2,$$

where $2 \leq r \in \mathbf{N}$, z is a Cayley-Dickson number decomposed as

(3) $z = z_0 i_0 + \dots + z_{2^r-1} i_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$, $z_j \in \mathbf{R}$ for each j , $i_k^* = \tilde{i}_k = -i_k$ for each $k > 0$, $i_0 = 1$, since $i_k(i_0 i_k^*) = i_0 = 1$, $i_k(i_j i_k^*) = -i_k(i_k^* i_j) = -(i_k i_k^*) i_j = -i_j$ for each $k \geq 1$ and $j \geq 1$ with $k \neq j$ (shortly $k \neq j \geq 1$), $i_k(i_k i_k^*) = i_k$ for each $k \geq 0$.

As usually $C^0(U, \mathcal{A}_v)$ denotes the \mathbf{R} -linear space of all continuous \mathcal{A}_v -valued functions $f : U \rightarrow \mathcal{A}_v$. More generally $C^n(U, \mathcal{A}_v)$ denotes the \mathbf{R} -linear space of all n times continuously differentiable by real variables z_0, \dots, z_{2^v-1} functions $f : U \rightarrow \mathcal{A}_v$, where $n \in \mathbf{N}$. Certainly, $C^n(U, \mathcal{A}_v)$ can be supplied with the structure of left- and right-module over the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v using point-wise multiplication of functions $f(z)$ on Cayley-Dickson numbers from the left and the right.

2. Factorization and integration of equations.

We consider the second order partial differential equation:

(1) $Af = g$, where

$$A = \sum_{l,m=1}^k \mathbf{a}_{l,m} \partial^2 / \partial \tau_l \partial \tau_m + \sum_{l=1}^k \alpha_l \partial / \partial \tau_l$$

is a partial differential operator of the second order. Let us suppose that the quadratic form

$$a(\tau) := \sum_{l,m} \mathbf{a}_{l,m} \tau_l \tau_m$$

is non-degenerate and is not always negative, because otherwise we can consider $-A$. Moreover, let a matrix of coefficients be real and symmetric $\mathbf{a}_{l,m}(\tau) = \mathbf{a}_{m,l}(\tau) \in \mathbf{R}$, $\alpha_l, \tau_l \in \mathbf{R}$ for each $l, m = 1, \dots, k$. Then we reduce this form $a(\tau)$ by an invertible \mathbf{R} linear operator $C = C(\tau)$ to the sum of squares. This means, that

$$(2) \quad A = \sum_{l=1}^k \mathbf{b}_l \partial^2 / \partial s_l^2 + \sum_{l=1}^k \beta_l \partial / \partial s_l,$$

where $\partial s_j / \partial \tau_l = C_{l,j}(\tau)$, $C = (C_{l,j})$, with real-valued functions \mathbf{b}_l and β_l for each l . Here

$$\mathbf{b}_l \delta_{j,l} = \sum_{p,m} \mathbf{a}_{p,m} C_{p,j} C_{m,l} \text{ and}$$

$$\beta_j = \sum \mathbf{a}_{p,m} (\partial C_{p,j} / \partial \tau_m) + \sum_{v=1}^k \alpha_v C_{v,j}$$

for all $j, l = 1, \dots, k$. In the case when coefficients of A are constant, using a multiplier of the type $\exp(\sum_l \epsilon_l s_l)$ it is possible to reduce this equation to the case so that if $\mathbf{b}_l \neq 0$, then $\beta_l = 0$ (see §3, Chapter 4 in [34]). Therefore, one can as usually simplify the operator with the help of such change of coordinates and consider that only β_1 may be non-zero if $\mathbf{b}_1 = 0$.

Thus one can choose an invertible real matrix $(c_{h,m})_{h,m=1,\dots,k}$ corresponding to $C = C(\tau)$ so that $\mathbf{b}_l \leq 0$ for $p + 1 \leq l \leq k$ and $\mathbf{b}_l \geq 0$ for $0 < l \leq p$, where $0 < p \leq k$, $q := k - p$. When $q = 0$ and $\beta_l = 0$ for each l the operator is elliptic, for $q = 0$ and $\beta_1 \neq 0$ the operator is parabolic, for $0 < p < k$ and $\beta_l = 0$ for each l the operator is hyperbolic. Sometimes the matrix C can be chosen constant on a domain, where the signature (p, q) of the quadratic form $a(\tau)$ is constant. We suppose that the sums $\sum_{l=1}^p \mathbf{b}_l^2(x) > 0$ and $\sum_{l=p+1}^k \mathbf{b}_l^2(x) > 0$ are positive λ -almost everywhere on a domain U , where λ is the measure induced by the Lebesgue measure on the real shadow of the Cayley-Dickson algebra. Generally the natural number $k - p = q(x)$ may either be constant or change while crossing the surface $\{x \in U : \sum_{l=1}^k \mathbf{b}_l^2(x) = 0\}$, when the domain U satisfies Conditions 1(D1, D2).

We consider elliptic and hyperbolic partial differential operators reduced to the sum of squares

$$(3) \quad A = [\sum_{l=0}^k \mathbf{b}_l(x) \partial^2 / \partial x_l^2],$$

where $\mathbf{b}_l(x) \in \mathbf{R}$ for all $x = x_0 i_0 + \dots + x_{2^r-1} i_{2^r-1}$ in the open domain $U \subset \mathcal{A}_r$ satisfying Conditions 1(D1, D2) in the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_r , $1 \leq k \leq 2^r - 1$, $2 \leq r \leq 3$. Practically the coefficient \mathbf{b}_l can depend only on x_0, \dots, x_k remaining z -differentiable in definite z -representations due to Formulas 1(1 - 3) for each l .

More generally we can consider partial differential operators of the form

$$(4) \quad A = c_1 B_1 + \dots + c_m B_m, \text{ where } c_j B_j f = c_j (B_j f), \text{ while each}$$

$$(4') \quad B_j = \sum_{k=m_1+\dots+m_{j-1}+1}^{m_1+\dots+m_j} \mathbf{b}_k(x) \partial^2 / \partial x_k^2$$

is an elliptic partial differential operator of the second order by variables $x_{m_1+\dots+m_{j-1}+1}, \dots, x_{m_1+\dots+m_j}$; $c_j \in \mathcal{A}_r$ with $Re(c_j) \geq 0$ for each $1 \leq j \leq l$, $Re(c_j) < 0$ for every $j > l$, with $|c_j| = 1$ for each $j = 1, \dots, m$, where $1 \leq r$, $1 \leq l < m$, $m_0 = 0$.

We remind, that Dirac had used complexified bi-quaternions to solve Klein-Gordon's hyperbolic partial differential equation with constant coefficients appearing in spin problems. That is, he had decomposed d'Alembert's operator $\partial^2 / \partial t^2 - \nabla^2$ as the product $\mathbf{i}^* \sigma \mathbf{i} \sigma$ over the complexified bi-quaternion algebra $\mathbf{H}_{\mathbf{C}}$ with the first order differential operator σ .

If follow this approach one takes the complexified Cayley-Dickson algebra

$$(5) \quad (\mathcal{A}_r)_{\mathbf{C}} = \mathcal{A}_r \oplus \mathcal{A}_r \mathbf{i},$$

where \mathbf{i} is taken to be commuting with i_j for each $j = 0, \dots, 2^r - 1$. Now the algebra $(\mathcal{A}_r)_{\mathbf{C}}$ is already not the division algebra even for $2 \leq r \leq 3$, that is two non zero elements with zero product occur in it. Then each element $z = (z_1, 0)$ in $(\mathcal{A}_r)_{\mathbf{C}}$ can be written in the 2×2 matrix form $\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_1 \end{pmatrix}$ and $z = (0, z_2)$ can be written in the form $\begin{pmatrix} 0 & z_2 \\ -z_2 & 0 \end{pmatrix}$, where entries $z_1, z_2 \in \mathcal{A}_r$ are Cayley-Dickson numbers, $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Let each coefficient c_j be written in the polar form

$$(6) \quad c_j = \exp(i_{\kappa(j)} \gamma_j)$$

with $0 \leq |\gamma_j| \leq \pi$, $j = 1, \dots, m$, $1 \leq r$, $1 \leq \kappa(j) \leq \kappa(j + 1)$ for each j . Put $p = p_1 + \dots + p_m$, where $p_j = 0$ for either $\gamma_j = 0$ or $\kappa(j) = \kappa(j - 1)$, while $p_j = 1$ for $\gamma_j \neq 0$ and $\kappa(j) \neq \kappa(j - 1)$. Up to an isomorphism we take the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v with $v \geq r$ satisfying inequalities $2^{v-1} < 2^p (m + 1) \leq 2^v$. Further we make the complexification $(\mathcal{A}_v)_{\mathbf{C}}$ of the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v .

Take two non-negative integer numbers $0 \leq r$ and v with $r \leq v \in \mathbf{Z}$. We consider the quotient algebra over the real field $\mathcal{A}_v/\mathcal{A}_r =: \mathcal{A}_{r,v}$. For $r = v$ this algebra is isomorphic with the real field \mathbf{R} . For $r < v$ the algebra $\mathcal{A}_{r,v}$ is isomorphic with $\bigoplus_{k=0}^{2^{v-r}-1} \mathbf{R}i_{2^rk}$. The latter algebra is produced by generators $\{i_{2^r\beta} : \beta = 2^\gamma - 1; \gamma = 0, 1, \dots, v - r\}$ and their finite ordered products, that gives the generators set $\{i_{2^rk} : k = 0, \dots, 2^{v-r} - 1\}$, where generators satisfying the numbering rule $i_j i_{2^s} = i_{j+2^s}$ for each $1 \leq s, j = 0, 1, \dots, 2^s - 1$ can be taken up to an isomorphism of the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_{s+1} . Therefore, the algebra $\mathcal{A}_{r,v}$ is isomorphic with the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_{v-r} , since the doubling procedure can be started from another suitable purely imaginary Cayley-Dickson numbers such as generators [1, 14]. But we consider in $\mathcal{A}_{r,v}$ its specific generators basis $\{i_{2^rk} : k = 0, \dots, 2^{v-r} - 1\}$.

For each Cayley-Dickson numbers $x, y \in \mathcal{A}_r$ we define the real-valued scalar product

$$(RS) \quad (x, y) = (x, y)_r := Re(x\tilde{y}),$$

where $\tilde{z} = z^*$ denotes the conjugated number, while $Re(y) := (y + y^*)/2$ denotes the real part of y .

The real scalar product $(\cdot, \cdot)_r$ in \mathcal{A}_r we extend on the algebra $\mathcal{A}_{r,v}$ as

$$(SP) \quad \langle x, y \rangle_{r,v} = x\tilde{y} = \sum_{j,k=0}^{2^{v-r}-1} x_{2^rj} y_{2^rk} i_{2^rj} i_{2^rk}^*$$

for each $x, y \in \mathcal{A}_{r,v}$, $x = \sum_{j=0}^{2^{v-r}-1} x_{2^rj} i_{2^rj}$, $x_{2^rj} \in \mathbf{R}$ for each $j = 0, \dots, 2^{v-r} - 1$. Particularly, one gets $\langle x, y \rangle_{0,v} = \langle x, y \rangle_v$. In the case of the complexified algebra $(\mathcal{A}_{r,v})_{\mathbf{C}}$ the scalar product is:

$$(SPC) \quad \langle (a, b), (c, d) \rangle_{r,v} = \langle (a, b), (c, d) \rangle = (\langle a, c \rangle - \langle b, d \rangle, \langle a, d \rangle + \langle b, c \rangle),$$

for all (a, b) and $(c, d) \in (\mathcal{A}_{r,v})_{\mathbf{C}}$.

We recall the doubling procedure for the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_{r+1} from \mathcal{A}_r . Each Cayley-Dickson number $z \in \mathcal{A}_{r+1}$ is written in the form $z = \xi + \eta\mathbf{l}$, where $\mathbf{l}^2 = -1$, $\mathbf{l} \notin \mathcal{A}_r$, $\xi, \eta \in \mathcal{A}_r$. The addition of such numbers is componentwise. The conjugate of any Cayley-Dickson number z is given by the formula:

$$(M1) \quad z^* := \xi^* - \eta\mathbf{l}.$$

The multiplication in \mathcal{A}_{r+1} is defined by the following equation:

$$(M2) \quad (\xi + \eta\mathbf{l})(\gamma + \delta\mathbf{l}) = (\xi\gamma - \tilde{\delta}\eta) + (\delta\xi + \eta\tilde{\gamma})\mathbf{l}$$

for each $\xi, \eta, \gamma, \delta \in \mathcal{A}_r$, $z := \xi + \eta\mathbf{l} \in \mathcal{A}_{r+1}$, $\zeta := \gamma + \delta\mathbf{l} \in \mathcal{A}_{r+1}$.

Using Formula (M2) we get: $(bi_{2^rk})(i_{2^rk}b)^* = (bi_{2^rk})(b^*i_{2^rk}^*) = b^2 = (b^2i_{2^rk})i_{2^rk}^* = i_{2^rk}(i_{2^rk}b^2)^*$ for each $k \geq 1$ and $b \in \mathcal{A}_r$, since $i_j^* = -i_j$ for each $j \geq 1$. Another useful identity is the following: $(i_s i_{2^rj})i_{2^rk}^* = -(i_s i_{2^rk})i_{2^rj}^*$ for each $0 \leq s \leq 2^r - 1$ and $k \neq j$ with $k \geq 1$ and $j \geq 1$, since $(i_s i_{2^rj})i_{2^rk} = (i_s i_{2^rk})i_{2^rj}$. Certainly also the equality $(i_s i_0)i_j^* + (i_s i_j)i_0^* = 0$ holds for each $j \geq 1$ and $1 \leq s \leq 2^r - 1$, since $i_0 = 1$. Therefore, Formulas (SP) and (4') together with the latter identities imply:

$$(6) \quad \langle cBy, y \rangle_v = \sum_{j=0}^{2^{v-r}-1} c \langle By_{2^rj}, y_{2^rj} \rangle_{r,v}$$

for each $c \in \mathcal{A}_r$ and a twice differentiable function y with values in $\mathcal{A}_{r,v}$.

Relative to the complex scalar product given by Equality (SPC) we decompose the operator A (see (4, 4') above) in the form

$$(7) \quad A = (i\sigma)(i\sigma_1) + Q = -\sigma\sigma_1 + Q,$$

where σ, σ_1 and Q are partial differential operators of the first order, each complex number

$\alpha \in \mathbf{C}$ is presented as a real 2×2 matrix. Particularly, $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{i}^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Each subalgebra $\mathfrak{g}_{j,k}$ constructed from two generators $i_j \neq i_k$ is associative, consequently, $(wi_k)(w^*i_k^*) = w^2$ and $w((wi_k)i_k) = -w^2$ for each $w = w_0 + w_j i_j$ with $w_0, w_j \in \mathbf{R}$. Therefore, we can take

$$(8) \quad \sigma f(z) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=m_1+\dots+m_{j-1}+1}^{m_1+\dots+m_j} \mathbf{a}_k(z) (\partial f / \partial z_{2^r k}) [w_j^* i_{2^r k}^*] \text{ and}$$

$$(9) \quad \sigma_1 f(z) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=m_1+\dots+m_{j-1}+1}^{m_1+\dots+m_j} \mathbf{a}_k(z) (\partial f / \partial z_{2^r k}) [w_j i_{2^r k}^*]$$

on the space of \mathcal{A}_r -valued (super-)differentiable functions f for $r \leq 2$ or real-valued functions f for $3 \leq r$ of the $\mathcal{A}_{r,v}$ variable, since $(i_k)^2 = i_k^2 = (-1)^2 = 1$ for each $k \geq 1$, where $w_j^2 = c_j$ for all j and $\mathbf{a}_k^2(x) = \mathbf{b}_k(x)$ for each k and x , $w_j \in \mathcal{A}_r$, $\mathbf{a}_k(x) \in \mathbf{R}$ for all k and x , $i_{2^r k} \in \mathcal{A}_{r,v}$, $z_{2^r k} = x_k$, $z = \sum_k z_{2^r k} i_{2^r k} \in \mathcal{A}_{r,v}$, $\partial f(z) / \partial z_{2^r k} = (df(z) / dz) \cdot i_{2^r k}$. For $b = \partial^2 f / \partial z_{2^r k}^2$ and $\mathbf{1} = i_{2^r k}$ and $w \in \mathcal{A}_r$ one has the identities: $(b(w\mathbf{1}))(w^*\mathbf{1}) = ((wb)\mathbf{1})(w^*\mathbf{1}) = -w(wb) = -w^2 b$ and $((b\mathbf{1})w^*)\mathbf{1}w = ((bw)\mathbf{1})\mathbf{1}w = -(bw)w = -bw^2$ in the considered here cases. The operator Q is given by the equality:

$$(10) \quad Qf(z) = \sum_{j_1, j_2=1}^m \sum_{k_1=m_1+\dots+m_{j_1-1}+1}^{m_1+\dots+m_{j_1}} \sum_{k_2=m_1+\dots+m_{j_2-1}+1}^{m_1+\dots+m_{j_2}} \mathbf{a}_{k_1}(z) \{ (\partial \mathbf{a}_{k_2}(z) / \partial z_{2^r k_1}) (\partial f / \partial z_{2^r k_2}) [w_{j_2}^* i_{2^r k_2}^*] \} [w_{j_1}^* i_{2^r k_1}^*],$$

since $i_k = i_k \mathbf{i}$ in the complexified Cayley-Dickson algebra $(\mathcal{A}_v)_{\mathbf{C}}$ for each k . The latter equality (10) shows, that the differential operator Q is non-zero, when $\mathbf{a}_k(z)$ are non-constant coefficients.

If use $i_0 = 1$ and $\partial / \partial z_0$ also one can write out d'Alembert's operator in our notation

$$(11) \quad \partial^2 / \partial z_0^2 - \sum_{j=1}^3 \partial^2 / \partial z_j^2 = (\mathbf{i}^* \partial / \partial z_0 + i_1 \partial / \partial z_1 + i_2 \partial / \partial z_2 + i_3 \partial / \partial z_3) (\mathbf{i} \partial / \partial z_0 + i_1 \partial / \partial z_1 + i_2 \partial / \partial z_2 + i_3 \partial / \partial z_3).$$

We recall, that the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_r is power associative, that is $z^k z^l = z^{k+l}$ for all natural numbers k and l . But the complexified Cayley-Dickson algebra $(\mathcal{A}_r)_{\mathbf{C}}$ is not power associative for $r \geq 3$, since the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_r is not associative for $r \geq 3$. Therefore, we do not widely use the complexified Cayley-Dickson algebras, but we utilize the Cayley-Dickson algebras \mathcal{A}_v over the real field \mathbf{R} , when something other will not be specified.

With these decomposition of operators given by Equations (7–9, 11) the differential equation (1) can be integrated with the help of the non-commutative line integration. We consider at first the partial differential equation

$$(12) \quad \Upsilon f = g$$

on an open domain U in \mathcal{A}_v , where

$$(13) \quad \Upsilon f = \sum_{j=0}^{2^v-1} (\partial f / \partial z_j) [i_j^* \psi_j(z)],$$

f and g and $\psi_j(z)$ are \mathcal{A}_v -valued functions on the domain U satisfying Conditions 1(D1, D2), where $g, \psi_j \in C^0(U, \mathcal{A}_v)$ for each j , particularly they may be \mathcal{A}_v (super-)differentiable functions.

3. Line integration over Cayley-Dickson algebras. Take any phrase

$$(1) \quad \mu(z) = \sum_m \{c_m, z^m\}_{q(m)}$$

corresponding to the function f , where

$$\{c_m, z^m\}_{q(m)} = \{c_{1,m_1} z^{m_1} \dots c_{k,m_k} z^{m_k}\}_{q(m)},$$

$q(m)$ is a vector indicating on an order of multiplications in the curled brackets, $c_{j,m_j} \in \mathcal{A}_v$ for each j , $m = (m_1, \dots, m_k)$, $k \in \mathbf{N}$, $0 \leq m_j \in \mathbf{Z}$ for each j , $z^k = (\dots((zz)z)\dots)z$. We put for convenience $z^0 = 1$ in the considered phrases. Though the symbol z^0 can be retained

when necessary to specify a branch of the line integral over the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_r (see [22, 23, 24]). Using the shift $z \mapsto (z - o_z)$ we can consider such series with the center at a point o_z instead of zero. Then the derivative of the phrase is:

$$(2) \quad d\mu(z)/dz = \sum_{m,j} \{c_{1,m_1} z^{m_1} \dots c_{j-1,m_{j-1}} z^{m_{j-1}} c_{j,m_j} ((z^{m_j-l-1} I) z^l) c_{j+1,m_{j+1}} z^{m_{j+1}} \dots c_{k,m_k} z^{m_k}\}_{q(m)},$$

where I denotes the unit operator, so that $d\mu/dz$ is the operator valued derivative function, $0 \leq l \leq m_j - 1$, $j = 1, \dots, k$. From Equality (2) it follows that

$$(3) \quad (d\mu(i_p x)/dx).1 = (d\mu(z)/dz).i_p = \partial\mu(z)/\partial z_p \text{ for } z = i_p x.$$

If $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{A}_r$ is a function, then

$$V_a^b \gamma := \sup_P |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)|$$

is called the variation of γ on the segment $[a, b] \subset \mathbf{R}$, where the supremum is taken by all finite partitions P of the segment $[a, b]$, $P = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$, $n \in \mathbf{N}$. A continuous function $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{A}_r$ with the finite variation $V_a^b \gamma < \infty$ is called a rectifiable path. It is convenient to take the unit segment $[a, b] = [0, 1]$ using a suitable reparametrization.

We say that a function ν on U is absolutely continuous on U if for each rectifiable path $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}_v$ for each $\epsilon > 0$ and each $\tau \in [0, 1]$ a positive number $\delta > 0$ exists so that $V_\tau^{\min(1, \tau + \delta)} \nu(\gamma) < \epsilon$ and $V_{\max(0, \tau - \delta)}^\tau \nu(\gamma) < \epsilon$.

We call a function ν of bounded variation on U if for each rectifiable path $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ the variation $V_a^b \nu(\gamma) < \infty$ is finite. The family of all functions $\nu : U \rightarrow \mathcal{A}_v$ of bounded variation will be denoted by $\mathcal{V}(U, \mathcal{A}_v)$.

The non-commutative line integral $\int_\gamma f(z) d\nu(z)$ along a rectifiable path $\gamma : [0, 1] \rightarrow U \subset \mathcal{A}_v$ for a phrase μ and a given function ν of bounded variation is the limit by partitions $P = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = 1\}$ with their diameter $\delta(P) = \sup_j |\tau_{j+1} - \tau_j|$ tending to zero of integral sums

$$\int_\gamma f(z) d\nu(z) := \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_j (d\kappa(z)/dz)|_{z=\gamma(\tau_j)} \cdot [\nu(\gamma(\tau_{j+1})) - \nu(\gamma(\tau_j))],$$

where $(d\kappa(z)/dz).1 = \mu(z)$ for all $z \in U$. The notation

$$\hat{f}(z) = dg(z)/dz \text{ and } \hat{\mu}(z) = d\kappa(z)/dz$$

is also used, where $g(z)$ is a super-differentiable function to which the phrase κ corresponds.

If f is a continuous function we fix for it a sequence $f^n(z)$ of super-differentiable functions and their phrases $\mu^n(z)$ such that $f^n(z)$ converges to $f(z)$ on each compact subset of the domain U , where $n \in \mathbf{N}$. The non-commutative line integral has a continuous extension on the \mathbf{R} -linear space, left and right \mathcal{A}_v module, of continuous functions $C^0(U, \mathcal{A}_v)$ for a marked function $\nu(z)$ of bounded variation and a given rectifiable path γ :

$$\int_\gamma f(z) d\nu(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\gamma f^n(z) d\nu(z).$$

This means that the \mathbf{R} homogeneous \mathcal{A}_v additive operator $\hat{f}(z)$ is defined for the continuous function f in the sense of distributions:

$$(\hat{f}; \nu, \gamma) := \int_\gamma f(z) d\nu(z)$$

for each rectifiable path γ in U and every function $\nu(z)$ of bounded variation. Particularly, $\nu(z) = id(z) = z$ on U can also be taken.

If ν and f are super-differentiable functions such that the derivative $d\nu(z)/dz$ of ν is the invertible \mathbf{R} homogeneous \mathcal{A}_v additive operator for each $z \in U$, then a super-differentiable solution of the differential equation

$$(dg(z)/dz).(d\nu(z)/dz) = dq((\nu(z))/dz)$$

on U exists, since $dz/d\nu = (d\nu/dz)^{-1}$. That is, $(dg(z)/dz).d\nu(z) = (dq(\nu(z))/dz).dz$. Therefore,

$$\int_\gamma f(z) d\nu(z) = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_j (dq(\nu)/d\nu)|_{\nu=\nu(\gamma(\tau_j))} \cdot [\nu(\gamma(\tau_{j+1})) - \nu(\gamma(\tau_j))] = \int_{\nu(\gamma)} p(y) dy,$$

where $p(\nu) = (dq(\nu)/d\nu).1$ (see also Theorems 2.11 and 2.13 in [27]).

A function $\nu : U \rightarrow \mathcal{A}_v$ is called piecewise continuous or differentiable or super-differentiable on a domain U in the Cayley-Dickson algebra U , if a family of open or canonical closed subsets U_j of U exists so that each restriction $\nu|_{U_j}$ is continuous or differentiable or super-differentiable

respectively, where $U = \bigcup_j U_j$ and $U_j \cap U_k = \partial U_j \cap \partial U_k$ for each $j \neq k$, $\partial U_j := cl(U_j) \setminus Int(U_j)$, $cl(U_j)$ denotes the closure of U_j in \mathcal{A}_v and $Int(U_j)$ denotes the interior of U_j in \mathcal{A}_v .

If f is a continuous function and ν is a function of bounded variation for which the limits $\lim_n f^n = f$ and $\nu = \lim_n \nu^n$ uniformly converge on each compact subset of U and phrases μ^n of f^n and ϵ^n of ν^n are specified, where f^n are super-differentiable functions and ν^n are piecewise super-differentiable functions on U so that $\lim_n V_0^1(\nu^n(\gamma) - \nu(\gamma)) = 0$ for each rectifiable path γ in U , then

$$\int_\gamma f(z)d\nu(z) = \lim_n \int_\gamma f^n(z)d\nu^n(z) = \lim_n \int_{\nu^n(\gamma)} p^n(y)dy = \int_{\nu(\gamma)} p(y)dy,$$

where $p(y) = \lim_n p^n(y)$. This means that under rather general conditions the line integral of the type $\int_\gamma f(z)d\nu(z)$ relative to the function ν of bounded variation reduces to the usual non-commutative line integral $\int_\eta p(y)dy$, where $\eta = \nu(\gamma)$.

Take the branch of the non-commutative line integral prescribed by the left algorithm (see §2 in [23, 22]). The real algebra $\mathfrak{g}_{k,l,s}$ formed from the generators i_j, i_k and i_s is alternative. Each rectifiable path can be presented as the limit of rectifiable paths consisting of joined segments parallel to the straight lines $i_j \mathbf{R}$ with respective j . We certainly have $(i_q i_p) i_p = -i_q$ for each $p \geq 1$ and $(i_q i_0) i_0 = i_q$ for each $q \geq 0$.

For each $j = 0, \dots, 2^r - 1$ the \mathbf{R} -linear projection operator $\pi_j : \mathcal{A}_r \rightarrow \mathbf{R}i_j$ exists due to Formulas 1(1-3) so that $\pi_j(z) = i_j z_j = z_j i_j$:

$$(P1) \quad \pi_j(z) = (-i_j(z i_j) - (2^r - 2)^{-1} \{-z + \sum_{k=1}^{2^r-1} i_k(z i_k^*)\})/2$$

for each $j = 1, 2, \dots, 2^r - 1$,

$$(P2) \quad \pi_0(z) = (z + (2^r - 2)^{-1} \{-z + \sum_{k=1}^{2^r-1} i_k(z i_k^*)\})/2,$$

where $2 \leq r \in \mathbf{N}$.

4. Line anti-derivatives over Cayley-Dickson algebras.

Theorem. Let a first order partial differential operator Υ be given by Equation 2(13) with real-valued continuous functions $\psi_j(z) \in C^0(U, \mathcal{A}_v)$ for each j such that $\psi_j(z) \neq 0$ for each $z \in U$ and each $j = 0, \dots, n$, where a domain U satisfies Conditions 1(D1, D2), ${}_0z$ is a marked point in U , $1 < n < 2^v$, $2 \leq v$. Then a line integral $\mathcal{I}_\Upsilon : C^0(U, \mathcal{A}_v) \rightarrow C^1(U, \mathcal{A}_v)$, $\mathcal{I}_\Upsilon f(z) := \Upsilon \int_{{}_0z}^z f(y)dy$ on $C^0(U, \mathcal{A}_v)$ exists so that

$$(1) \quad \Upsilon \mathcal{I}_\Upsilon f(z) = f(z)$$

for each $z \in U$; this anti-derivative is \mathbf{R} -linear (or \mathbf{H} -left-linear when $v = 2$):

$$(2) \quad \mathcal{I}_\Upsilon [af(z) + bg(z)] = a\mathcal{I}_\Upsilon f(z) + b\mathcal{I}_\Upsilon g(z)$$

for any real constants $a, b \in \mathbf{R}$ (or $a, b \in \mathbf{H}$ for $v = 2$) and continuous functions $f, g \in C^0(U, \mathcal{A}_v)$. If there is a second anti-derivative $\mathcal{I}_{\Upsilon,2} f(z)$, then $\mathcal{I}_\Upsilon f(z) - \mathcal{I}_{\Upsilon,2} f(z)$ belongs to the kernel $\ker(\Upsilon)$ of the operator Υ .

Proof. Using the multiplication on the marked doubling generator i_{2^v} from the right we have

$$(3) \quad \left[\sum_{j=0}^{k-1} i_j (\partial g(z) / \partial z_j) \right] i_{2^v} \psi_j(z) = \sum_{j=0}^{k-1} (\partial g(z) / \partial z_j) i_{j+2^v} \psi_j(z),$$

where $i_j i_{2^v} =: i_{j+2^v}$ for each $0 \leq j \leq 2^v - 1$, $2 \leq v$. On the other hand, $\sum_{j=0}^{k-1} i_j (\partial g(z) / \partial z_j) \psi_j(z) = [\sum_{j=0}^{k-1} (\partial g(z) / \partial z_j)^* i_j^* \psi_j(z)]^*$, since $\psi_j(z)$ is real for each j and z . Therefore, it is sufficient to consider the first-order partial differential operator of the form:

$$(4) \quad \Upsilon g(z) = \sum_{j=1}^n (\partial g / \partial z_j) i_j^* \psi_j(z)$$

on the \mathbf{R} -linear space $C^1(U, \mathcal{A}_v)$ of all continuously differentiable functions $g : U \rightarrow \mathcal{A}_v$ by real variables z_0, \dots, z_{2^v-1} , where $0 < n \leq 2^v - 1$. The space of super-differentiable functions is everywhere dense in $C^0(U, \mathcal{A}_v)$ and the line integral has the continuous extension on $C^0(U, \mathcal{A}_v)$

along any continuous rectifiable path in U . Therefore, we take the space of super-differentiable functions and then take the continuous extension of \mathcal{I}_Υ on $C^0(U, \mathcal{A}_v)$ such that

$$\lim_l \mathcal{I}_\Upsilon f^l = \mathcal{I}_\Upsilon \lim_l f^l = \mathcal{I}_\Upsilon f$$

for a sequence f^l of super-differentiable functions uniformly converging to f on compact sub-domains V in U , where $\mathcal{I}_\Upsilon f^l$ is described below. Each function $\psi_j(z)$ is continuous and each function $\nu_j(z)$ is continuously differentiable on U (see also below), consequently, the integral $\int_\gamma f^l(y) d\nu_j(y)$ is continuously differentiable by $z = \gamma(1)$ (i.e. by each real variable z_k) and their sequence by l uniformly converges on each compact sub-domain V in U . Therefore, from $\Upsilon \mathcal{I}_\Upsilon f^l = f^l$ for each natural number $l \in \mathbf{N}$ we get

$$\Upsilon \mathcal{I}_\Upsilon f = \Upsilon \mathcal{I}_\Upsilon \lim_l f^l = \lim_l \Upsilon \mathcal{I}_\Upsilon f^l = \lim_l f^l = f,$$

since the sequence $\{\mathcal{I}_\Upsilon f^l(z)|_V : l\}$ is fundamental in $C^1(V, \mathcal{A}_v)$ for each compact sub-domain V in U and $\mathcal{I}_\Upsilon f(z) \in C^1(U, \mathcal{A}_v)$.

Consider the left algorithm of a calculation of the line integral over the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v (see §3 and references therein). We shall seek an anti-derivative in the form:

$$(5) \quad \Upsilon \int_{0z}^z f(y) dy := n^{-1} \sum_{j=1}^n \left(\int_{0z}^z f(y) d\nu_j(y) \right) i_j$$

and use the homotopy theorem in the domain U satisfying conditions 1(D1, D2) so that γ is a continuous rectifiable path joining points $0z = \gamma(0)$ and $z = \gamma(1)$ (see [22, 23, 20]). Moreover, a branch of the anti-derivative operator $\mathcal{I}_\Upsilon f(z)$ can be chosen such that it can be expressed with the help of a non-commutative line integral.

In view of Theorem 2.11 [27] and §3 we get

$$(6) \quad (\partial(\int_{0z}^z f(y) d\nu_j(y)) / \partial z_k) = (\hat{f}(z) \cdot [d\nu_j(z) / dz_k])$$

(see also the chain rule over the Cayley-Dickson algebra in [22, 23, 20]).

Next we need some identities in the Cayley-Dickson algebra. Each Cayley-Dickson number has the decomposition: $z = z_0 i_0 + \dots + z_{2^v-1} i_{2^v-1}$, where $z_0, \dots, z_{2^v-1} \in \mathbf{R}$, $z \in \mathcal{A}_v$. To establish the identity

$$(7) \quad (ay)z^* + (az)y^* = a2Re(yz^*)$$

for any $a, y, z \in \mathcal{A}_v$ it is sufficient to prove it for any three basic generators of the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v , since the real field \mathbf{R} is its center, while the multiplication in \mathcal{A}_v is distributive $(a + y)z = az + yz$ and $((\alpha a)(\beta y))(\gamma z^*) = (\alpha\beta\gamma)((ay)z^*)$ for all $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ and $a, y, z \in \mathcal{A}_v$. If $a = i_0$, then (7) is evident, since $yz^* + zy^* = yz^* + (yz^*)^* = 2Re(yz^*)$. If either $y = i_0$, then $(ay)z^* + (az)y^* = az^* + az = a$

$2 \operatorname{Re}(z) = a 2 \operatorname{Re}(yz^*)$. Analogously for $z = i_0$. For three purely imaginary generators i_p, i_s, i_k consider the minimal Cayley-Dickson algebra $\Phi = \operatorname{alg}_{\mathbf{R}}(i_p, i_s, i_k)$ over the real field generated by them. If it is associative, then it is isomorphic with either the complex field \mathbf{C} or the quaternion skew field \mathbf{H} , so that $(ay)z^* + (az)y^* = a(yz^* + zy^*) = a2Re(yz^*)$. If the algebra Φ is isomorphic with the octonion algebra, then we use Formulas 2(M1, M2) for either $a, y \in \mathbf{H}$ and $z = \mathbf{1}$ or $a, z \in \mathbf{H}$ and $y = \mathbf{1}$. This gives (7) in all cases, since the algebra $\operatorname{alg}_{\mathbf{R}}(i_p, i_s)$ with two basic generators i_p and i_s is always associative. Particularly, if $y = i_s \neq z = i_k$, then the result is zero.

Using (7) we get more generally, that

$$(8) \quad ((ay)z^*)b^* + ((az)y^*)b^* = (a2Re(yz^*))b^* = (ab^*)2Re(yz^*),$$

consequently,

$$(9) \quad ((ay)z^*)b^* + ((az)y^*)b^* + ((by)z^*)a^* + ((bz)y^*)a^* = 4Re(ab^*)Re(yz^*)$$

for any Cayley-Dickson numbers $a, b, y, z \in \mathcal{A}_v$.

We shall take unknown functions $\nu_j(z) \in \mathcal{A}_v$ as solutions of the system of linear partial differential equations by real variables z_k :

$$(10) \quad \partial \nu_j(z) / \partial z_j = 1 / \psi_j(z) \text{ for all } 1 \leq j \leq n \text{ and } z \in U;$$

(11) $\psi_k(z)\partial\nu_j(z)/\partial z_k = \psi_j(z)\partial\nu_k(z)/\partial z_j$ for all $1 \leq j < k \leq n$ and $z \in U$. Each function $\nu_j(z)$ can be written as $\nu_j(z) = \sum_{l=0}^{2^v-1} \nu_{j,l}(z)i_l$ with real-valued components $\nu_{j,l}(z)$. Practically, it is sufficient to consider non-zero $\nu_{j,l}(z)$ for $l = 1, \dots, n$. Thus using the generators i_0, \dots, i_{2^v-1} the system can be written in the real form. This system has a non-trivial C^1 solution $\nu_j(z)$ for each j (see §12.2 [29], particularly, in the class of super-differentiable functions for super-differentiable $\psi_j(z)$ see also [?, 20]). In System (10, 11) functions ψ_j are real and coordinates are real, consequently, a solution $\{\nu_j(z) : j\}$ may be chosen real-valued.

From Identities 3(2, 3) and (6, 9 – 11) we infer that

$$(12) \quad \sum_{j \neq k \geq 1} [(\partial(\int_{0z}^z f(y)d\nu_j(y))/\partial z_k)i_j]i_k^*\psi_k(z) =$$

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} \{[(\hat{f}(z).(\partial\nu_j(z)/\partial z_k))i_j]i_k^*\psi_k(z) + [(\hat{f}(z).(\partial\nu_k(z)/\partial z_j))i_k]i_j^*\psi_j(z)\} = 0 \text{ and}$$

$$(13) \quad \sum_{j=1}^n [(\partial(\int_{0z}^z f(y)d\nu_j(y))/\partial z_j)i_j]i_j^*\psi_j(z) = nf(z),$$

since $\sum_{j=1}^n i_j i_j^* = n$ and n is some fixed natural number for the domain U , $\hat{f}(z).x = f(z)x$ for each real number x , $(zi_j)i_j^* = z$ for each $z \in \mathcal{A}_v$, where \hat{f} is the operator corresponding to $d\kappa(z)/dz$, when f is in the z -representation μ (see the notation in §3). Using Formulas (4, 5, 12, 13) we get Formula (1).

From the identity $\int_\gamma a\mu dz = a \int_\gamma \mu dz$ for a suitable branch of the line integral given by the left algorithm and for each non-trivial phrase μ and constants $a, b \in \mathbf{R}$ for $v \geq 3$ or $a, b \in \mathbf{H}$ for $v = 2$ (see the rules in [22, 23, ?, 24]) we get Formula (2).

Since $\Upsilon(\mathcal{I}_\Upsilon f(z) - \mathcal{I}_{\Upsilon,2} f(z)) = 0$, the difference $(\mathcal{I}_\Upsilon f(z) - \mathcal{I}_{\Upsilon,2} f(z))$ belongs to the kernel $\ker(\Upsilon) = \Upsilon^{-1}(0)$, where $\Upsilon : C^1(U, \mathcal{A}_v) \rightarrow C^0(U, \mathcal{A}_v)$.

4.1. Example. If ψ_j depends only on z_j for each j , there exists a C^1 differentiable change of variables $\zeta = \zeta(z)$ so that $\partial g(\zeta)/\partial \zeta_j = (\partial g(z)/\partial z_j)\psi_j(z)$ for each differentiable function $g : U \rightarrow \mathcal{A}_v$ by real variables z_0, \dots, z_{2^v-1} on U , where

$$(1) \quad (\partial z_k / \partial \zeta_j) = \delta_{j,k} \psi_k(z)$$

for all j and k , $\delta_{j,j} = 1$, while $\delta_{j,k} = 0$ for each $j \neq k$. We take new functions ${}_j g$ satisfying the equation:

$$(2) \quad {}_j g(i_j^* z) = g(z) \text{ for each } z \in U \text{ and all } j. \text{ We also put}$$

$$(3) \quad \eta_j(z) = i_j^* z.$$

The multiplication of generators implies that $i_j^*(i_j z) = z$ for all $j = 0, \dots, 2^v - 1$ and $z \in \mathcal{A}_v$. Therefore, from Equations (1, 2) we deduce that

$$(4) \quad (dg(z)/dz).i_j = (d{}_j g(\eta_j)/d\eta_j).[(d\eta_j/dz).i_j] = (d{}_j g(\eta_j)/d\eta_j).1 = (d_k g(\eta_k)/d\eta_k).[i_k^* i_j],$$

since $(d\eta_j/dz).i_j = i_j^* i_j = 1$ for each j . Then we take the integral

$$(5) \quad \Upsilon \int_{0z}^z g(y)dy := n^{-1} \sum_{j=1}^n \int_{0z}^z {}_j g(\eta_j(y))i_j d\eta_j(y),$$

since $\int_{0z}^z {}_j g(\eta_j(y))i_j d\eta_j(y) = (\int_{0z}^z {}_j g(\eta_j(y))d\eta_j(y))i_j$.

Mention that generally $\Upsilon(f(z)b)$ may be not equal to $(\Upsilon f(z))b$ for a constant $b \in \mathcal{A}_v \setminus \mathbf{R}$ and a function $f \in C^1(U, \mathcal{A}_v)$ with $v \geq 2$, since the Cayley-Dickson algebra is non-commutative.

This theorem can be generalized in the following manner encompassing wider class of partial differential operators of the first order over Cayley-Dickson algebras.

5. Theorem. Suppose that the first order partial differential operator Υ is given by the formula

$$(1) \quad \Upsilon f = \sum_{j=0}^n (\partial f / \partial z_j) \phi_j^*(z),$$

where $\phi_j(z) \neq \{0\}$ for each $z \in U$ and $\phi_j(z) \in C^0(U, \mathcal{A}_v)$ for each $j = 0, \dots, n$ such that $Re(\phi_j(z)\phi_k^*(z)) = 0$ for each $z \in U$ and each $0 \leq j \neq k \leq n$, where a domain U satisfies Conditions 1(D1, D2), 0_z is a marked point in U , $1 < n < 2^v$, $2 \leq v$. Suppose also that the system $\{\phi_0(z), \dots, \phi_n(z)\}$ is for $n = 2^v - 1$, or can be completed by Cayley-Dickson numbers $\phi_{n+1}(z), \dots, \phi_{2^v-1}(z)$, such that (α) $alg_{\mathbf{R}}\{\phi_j(z), \phi_k(z), \phi_l(z)\}$ is alternative for all $0 \leq j, k, l \leq 2^v - 1$ and (β) $alg_{\mathbf{R}}\{\phi_0(z), \dots, \phi_{2^v-1}(z)\} = \mathcal{A}_v$ for each $z \in U$. Then a line integral $\mathcal{I}_{\Upsilon} : C^0(U, \mathcal{A}_v) \rightarrow C^1(U, \mathcal{A}_v)$, $\mathcal{I}_{\Upsilon} f(z) := \int_{0_z}^z f(y) dy$ on $C^0(U, \mathcal{A}_v)$ exists so that

$$(2) \quad \Upsilon \mathcal{I}_{\Upsilon} f(z) = f(z)$$

for each $z \in U$; this anti-derivative is \mathbf{R} -linear (or \mathbf{H} -left-linear when $v = 2$). If there is a second anti-derivative $\mathcal{I}_{\Upsilon,2} f(z)$, then $\mathcal{I}_{\Upsilon} f(z) - \mathcal{I}_{\Upsilon,2} f(z)$ belongs to the kernel $ker(\Upsilon)$ of the operator Υ .

Proof. We shall demonstrate that a branch of the anti-derivative operator $\mathcal{I}_{\Upsilon} f(z)$ can be chosen such that it can be expressed with the help of a non-commutative line integral from §3. Using the technique of §4 we can consider the case of purely imaginary $\phi_j(z)$ for all $z \in U$ and $j = 0, \dots, n$. We seek an anti-derivative operator in the form:

$$(3) \quad \int_{0_z}^z f(z) dz = (n + 1)^{-1} \sum_{j=0}^n \int_{0_z}^z q(z) d\nu_j(z).$$

For finding unknown functions q and ν_j , $j = 0, \dots, n$ we impose the following conditions:

- (4) $(\hat{q}(z) \cdot [\partial \nu_j(z) / \partial z_j]) \phi_j^*(z) = f(z)$ for each $j = 0, \dots, n$ and
- (5) $(\hat{q}(z) \cdot [\partial \nu_j(z) / \partial z_k]) \phi_k^*(z) + (\hat{q}(z) \cdot [\partial \nu_k(z) / \partial z_j]) \phi_j^*(z) = 0$ for all $0 \leq j < k \leq n$.

As in §4 it is sufficient to consider the case of a locally analytic (super-differentiable) function f using the limit transition. The function f is given on U and it defines the operator \hat{f} on U , i.e. its phrase $\hat{\mu}$ is prescribed by the left algorithm for a given phrase μ of f (see [22, 23, ?, 24]). The operator \hat{q} means that a function g and a phrase κ of g exist such that

$$\hat{q}(z) = dg(z)/dz, \quad \hat{q}(z) \cdot 1 = q(z) \text{ for each } z \in U.$$

In accordance with the conditions of this theorem the algebra $alg_{\mathbf{R}}(\phi_j(z), \phi_k(z))$ is alternative for all $0 \leq j \leq k \leq n$ and $z \in U$. Therefore, due to Condition (β) Equations (4, 5) take the form:

- (6) $(dg(z)/dz) \cdot [\partial \nu_j(z) / \partial z_j] = f(z)(1/\phi_j^*(z))$ for each $j = 0, \dots, n$ and
- (7) $((dg(z)/dz) \cdot [\partial \nu_j(z) / \partial z_k]) \phi_k^*(z) + ((dg(z)/dz) \cdot [\partial \nu_k(z) / \partial z_j]) \phi_j^*(z) = 0$ for all $0 \leq j < k \leq n$.

Solutions of this system exist (see [?, 20]). To be more concrete we impose additional relations:

$$(8) \quad \partial \nu_j(z) / \partial z_j = \phi_j(z) \text{ for all } j = 0, \dots, n \text{ and } z \in U,$$

consequently, the system of partial differential equations (6) becomes:

$$(9) \quad (dg(z)/dz) \cdot \phi_j(z) = f(z)(1/\phi_j^*(z)) \text{ for each } j = 0, \dots, n,$$

since $alg_{\mathbf{R}}\{\phi_j(z), \phi_k(z), \phi_l(z)\}$ is alternative for all $0 \leq j, k, l \leq 2^v - 1$ and $alg_{\mathbf{R}}\{\phi_0(z), \dots, \phi_{2^v-1}(z)\} = \mathcal{A}_v$ for each $z \in U$ so that each Cayley-Dickson number $\xi \in \mathcal{A}_v$ has the decomposition $\xi = \xi_0 \phi_0(z) + \dots + \xi_{2^v-1} \phi_{2^v-1}(z)$ with real coefficients $\xi_0, \dots, \xi_{2^v-1} \in \mathbf{R}$.

Solving the latter system (9) one gets the function $g(z)$ on U . Substituting the known function g in System (6, 7) one gets a C^1 solution $\nu_0(z), \dots, \nu_n(z)$ on U ; or a super-differentiable solution, when $\phi_j(z)$ for each j and $f(z)$ are super-differentiable on U . Mention that the function g depends \mathbf{R} -linearly on f , since the system of equations which was considered above is linear by f and g . Thus the operator \hat{q} depends \mathbf{R} -linearly on f .

Using Formulas (4, 5) and 4(6, 9) we deduce that

$$(10) \quad \sum_{j \neq k \geq 0} [\partial(\int_{0z}^z q(y)dv_j(y))/\partial z_k] \phi_k^*(z) =$$

$$\sum_{0 \leq j < k \leq n} \{[\hat{q}(z) \cdot (\partial v_j(z)/\partial z_k)] \phi_k^*(z) + [\hat{q}(z) \cdot (\partial v_k(z)/\partial z_j)] \phi_j^*(z)\} = 0 \text{ and}$$

$$(11) \quad \sum_{j=0}^n [\partial(\int_{0z}^z q(y)dv_j(y))/\partial z_j] \phi_j^*(z) = \sum_{j=0}^n [\hat{q}(z) \cdot (\partial v_j(z)/\partial z_j)] \phi_j^*(z) = (n + 1)f(z),$$

since $Re(\phi_j(z)\phi_k^*(z)) = 0$ for each $z \in U$ and each $0 \leq j \neq k \leq n$.

The rest of the proof is analogous to that of Theorem 4.

6. Corollary. *Let suppositions of Theorem 5 be satisfied so that $\phi_j(z) = \omega(z; i_j)\psi_j(z)$ for each $z \in U$, where ω is an \mathbf{R} -linear automorphism $\omega : \mathcal{A}_v \rightarrow \mathcal{A}_v$ mapping the standard base of generators $\{i_j\}$ into a base of generators $\{\omega(z; i_j) : j = 0, \dots, 2^v - 1\}$, $|\omega(z; i_j)| = 1$, where $\psi_j(z)$ satisfies conditions of theorem 4 for each $j = 0, \dots, n$. Then the first order differential operator 5(1) has an anti-derivative \mathcal{I}_Υ on $C^0(U, \mathcal{A}_v)$. Two anti-derivatives of Theorems 4 and 5 under these suppositions are related with the help of the automorphism ω .*

Proof. This follows immediately from Theorem 5. It remains to find a relation between two anti-derivatives for two different partial differential operators:

$$(1) \quad \Upsilon_\omega f = \sum_{j=0}^n (\partial f / \partial z_j) \phi_j^*(z)$$

and Υ given by equation 2(13).

For each Cayley-Dickson number $z = z_0i_0 + \dots + z_{2^v-1}i_{2^v-1} \in \mathcal{A}_v$ its image is $\omega(y; z) = z_0N_0 + z_1N_1 + \dots + z_{2^v-1}N_{2^v-1}$, consequently, $\omega(y; z^*) = [\omega(y; z)]^*$, where $z_j \in \mathbf{R}$, $N_j = N_j(y) := \omega(y; i_j)$ for each j . Particularly, $N_0 = i_0$, since $i_0i_j = i_j$ and $\omega(y; i_j) = \omega(y; i_0i_j) = \omega(y; i_0)\omega(y; i_j)$ for each j and y . Therefore, $\omega(y; x) = x$ for each real number $x \in \mathbf{R}$, since $\omega(y; 1) = 1$ and the mapping $\omega(y; *)$ is \mathbf{R} -linear by the second argument, $1 = i_0$. Therefore, applying the automorphism ω we deduce that

$$(2) \quad \Upsilon_\omega f(z) = \omega(z; \Upsilon s(z)),$$

where $\omega(z; s(z)) = f(z)$ for each $z \in U$, that is $s(z) = \omega_2^{-1}(z; f(z))$, $\omega_2^{-1}(z; *)$ denotes the inverse automorphism by the second argument for $z \in U$. Let us take the function $f(z) = \Upsilon_\omega \int_{0z}^z g(y)dy$, where $g(z)$ is a continuous function. Then $\Upsilon_\omega f(z) = g(z)$ for each $z \in U$ and from (2) and 5(1, 2) one gets

$$(3) \quad \omega_2^{-1}(z; g(z)) = \Upsilon \omega_2^{-1}(z; \Upsilon_\omega \int_{0z}^z g(y)dy) = \Upsilon \int_{0z}^z \omega_2^{-1}(y; g(y))dy, \text{ consequently, applying } \Upsilon \int \text{ and } \omega(z; *) \text{ one also gets}$$

$$(4) \quad \Upsilon_\omega \int_{0z}^z g(y)dy = \omega(z; \Upsilon \int_{0z}^z \omega_2^{-1}(y; g(y))dy$$

for each continuous function g on U .

6.1. Remark. If in Theorem 5 drop Conditions (α, β) , then partial differential equations 5(4, 5) will be hard to resolve.

To specify the anti-derivative operator \mathcal{I}_Υ in Theorems 4 and 5 more concretely it is possible to choose a family of rectifiable continuous paths (or C^1 paths) $\{\gamma^z : z \in U\}$ such that $\gamma^z(0) = 0z$ and $\gamma^z(1) = z$ and $\lim_{z \rightarrow y} \sup_{\tau \in [0,1]} |\gamma^z(\tau) - \gamma^y(\tau)| = 0$.

Another more rigorous procedure is in providing a foliation of a domain U by locally rectifiable paths $\{\gamma^\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, where Λ is a set. We take for definiteness a canonical closed domain U in \mathcal{A}_v satisfying Conditions 1($D1, D2$).

A path $\gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow U$ is called locally rectifiable, if it is rectifiable on each compact segment $[c, e] \subset \langle a, b \rangle$, where $\langle a, b \rangle = [a, b] := \{t \in \mathbf{R} : a \leq t \leq b\}$ or $\langle a, b \rangle = [a, b) := \{t \in \mathbf{R} : a \leq t < b\}$ or $\langle a, b \rangle = (a, b] := \{t \in \mathbf{R} : a < t \leq b\}$ or $\langle a, b \rangle = (a, b) := \{t \in \mathbf{R} : a < t < b\}$.

A domain U is called foliated by rectifiable paths $\{\gamma^\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ if $\gamma : \langle a_\alpha, b_\alpha \rangle \rightarrow U$ for each α and it satisfies the following three conditions:

- (F1) $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \gamma^\alpha(\langle a_\alpha, b_\alpha \rangle) = U$ and
- (F2) $\gamma^\alpha(\langle a_\alpha, b_\alpha \rangle) \cap \gamma^\beta(\langle a_\beta, b_\beta \rangle) = \emptyset$ for each $\alpha \neq \beta \in \Lambda$.

Moreover, if the boundary $\partial U = cl(U) \setminus Int(U)$ of the domain U is non-void then

- (F3) $\partial U = (\bigcup_{\alpha \in \Lambda_1} \gamma^\alpha(a_\alpha)) \cup (\bigcup_{\beta \in \Lambda_2} \gamma^\beta(b_\beta))$,

where $\Lambda_1 = \{\alpha \in \Lambda : \langle a_\alpha, b_\beta \rangle = [a_\alpha, b_\beta \rangle\}$, $\Lambda_2 = \{\alpha \in \Lambda : \langle a_\alpha, b_\beta \rangle = \langle a_\alpha, b_\beta]\}$. For the canonical closed subset U we have $cl(U) = U = cl(Int(U))$, where $cl(U)$ denotes the closure of U in \mathcal{A}_v and $Int(U)$ denotes the interior of U in \mathcal{A}_v . For convenience one can choose C^1 foliation, i.e. each γ^α is of class C^1 . When U is with non-void boundary we choose a foliation family such that $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \gamma^\alpha(a_\alpha) = \partial U_1$, where a set ∂U_1 is open in the boundary ∂U and so that $w|_{\partial U_1}$ would be a sufficient initial condition to characterize a unique branch of an anti-derivative $w = \mathcal{I}_\gamma f$.

When $\partial U \neq \emptyset$ a marked point ${}_0z$ can be chosen on the boundary ∂U and each point on the boundary can be joined by a rectifiable path in U with ${}_0z$. This foliation is justified by the formula:

$$\int_\gamma f(z) d\nu(z) = \int_{\gamma^1} f(z) d\nu(z) + \int_{\gamma^2} f(z) d\nu(z)$$

for each continuous function f on U and each function ν of bounded variation on U , for any rectifiable paths $\gamma^1 : [a_1, b_1] \rightarrow U$ and $\gamma^2 : [a_2, b_2] \rightarrow U$ so that $a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = b$ while $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ is given piecewise as $\gamma(t) = \gamma^1(t)$ for each $t \in [a_1, b_1]$ and $\gamma(t) = \gamma^2(t)$ for each $t \in [a_2, b_2]$. Thus instead of $\int_{{}_0z}^z f(z) d\nu(z)$, i.e. $\int_\gamma f(z) d\nu(z)$ with $\gamma(a) = {}_0z$ and $\gamma(b) = z$, we take $\int_{\gamma^\alpha|_{[c,e]}} f(z) d\nu(z)$ for any $[c, e] \subset \langle a_\alpha, b_\alpha \rangle$. If $\lim_{c \rightarrow a_\alpha, e \rightarrow b_\alpha} \int_{\gamma^\alpha|_{[c,e]}} f(z) d\nu(z)$ converges we denote it by $\int_{\gamma^\alpha} f(z) d\nu(z)$ and take instead of the family $\{\int_{\gamma^\alpha|_{[c,e]}} f(z) d\nu(z) : [c, e] \subset \langle a_\alpha, b_\beta \rangle\}$. Therefore, a branch of the anti-derivation operator prescribed by the family $\{(\int_{\gamma^\alpha} \sum_j q(y) d\nu_j(y)) : \alpha \in \Lambda\}$ or $\{(\int_{\gamma^\alpha|_{[c,e]}} \sum_j q(y) d\nu_j(y)) : \alpha \in \Lambda; [c, e] \subset \langle a_\alpha, b_\beta \rangle\}$ is defined up to a function defined on the boundary ∂U when it is non-void or by convergence to a definite limit at infinity along paths, when U is unbounded in certain directions $\mathbf{R}\eta$ in the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v , $\eta \in \mathcal{A}_v$.

Clearly, boundary conditions are necessary for specifying a concrete solution or a branch of an anti-derivative, since in the definition of the line integral $\int_\gamma f(z) d\nu(z)$ the operator \hat{f} is restricted to the condition $\hat{f}(z).1 = f(z)$ for each $z \in U$ so it is defined up to a function of $2^v - 1$ independent real variables (see also §3). In accordance with the formulas of §§4 and 5 the anti-derivation operators are defined up to functions of $2^v - 1$ real variables after a suitable change of variables. For example, $\sum_{j=0}^n (\partial g(z) / \partial z_j) i_j^* = 0$ for $g(z) = nz_0 + z_1 i_1^* + \dots + z_n i_n^*$, or $\sum_{j=0}^n (\partial q(z) / \partial z_j) i_j^* = 0$ on the plane $z_0 - z_1 - \dots - z_n = 0$ for $q(z) = z_0^2 + z_1^2 i_1^* + \dots + z_n^2 i_n^*$. These functions can be written in the z -representation due to Formulas 1(1 - 3).

For concrete domains some concrete boundary conditions can be chosen (see also below). Mention, that a minimal necessary correct boundary conditions may be not on the entire boundary, but on its part. Otherwise, they may be on some hyper-surface S in U of real dimension $2^v - 1$ depending on the domain, for example, for an infinite cylinder \mathbf{C} in both directions along its axis with S being the intersection of \mathbf{C} with a hyper-plane perpendicular to its axis.

Mention that the homotopy theorem for domains satisfying Conditions 1(D1, D2) is accomplished for super-differentiable functions on U (see [23, 22]), but for a continuous function f on U it may certainly be not true. This is caused by several reasons. If a family of locally analytic functions f^n converges to f uniformly on a compact sub-domain V in U a radius r_x^n of local convergence of a power series of f^n in a neighborhood of a point $x \in V$ may tend to zero with n tending to the infinity. Phrases μ^n in the z -representation corresponding to f^n

may be inconsistent on the intersection $V_x \cap V_y$ of open neighborhoods V_x and V_y of different points $x, y \in V$, when $V_x \cap V_y \neq \emptyset$. Functions f^n or their phrases μ^n may be with branching points in the domain U . That is functions f^n accomplishing the approximation of f may have several branches on U and a slit of U by a $2^v - 1$ dimensional sub-manifold S^n over \mathbf{R} may be necessary to specify branches of f^n . But the family S^n with different n may be inconsistent and S^n may depend of n .

For super-differentiable functions f^n operator valued functions \hat{f}^n are also super-differentiable. If f is only continuous non super-differentiable function on the domain U , then the operator valued function \hat{f} is defined only in the sense of distributions $[\hat{f}, \gamma; \nu) = \int_{\gamma} f(z) d\nu(z)$ for any rectifiable path γ in U and each function ν of bounded variation on U . Moreover, the homotopy theorem may be non true for generalized functions (see below).

7. Particular case. We consider a phrase ν which can be presented as

(P3) $\nu = \rho(\mu)$ with a right \mathcal{A}_v -linear (super)-differentiable phrase μ and a projection operator ρ being an \mathbf{R} -linear combination of the projection operators π_j . Particularly, ρ may be the identity operator or one of the π_j .

For any z -differentiable phrase ψ and constants $a, b \in \mathcal{A}_v$ we have $\int_{\gamma} a(\psi(z)b)dz = a((\int_{\gamma} \psi(z)dz)b)$ and $\int_{\gamma} (a\psi(z))bdz = (a(\int_{\gamma} \psi(z)dz))b$. Then in view of the homotopy theorem [23, 22] Equation 3(2) implies for any such $\nu = \rho(\mu)$ that

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_{\gamma} \Upsilon(\nu(z))dz &= \rho\left(\int_{\gamma} [d\mu(z)/dz] \cdot \left\{ \sum_j [(dz/dz) \cdot i_j] (i_j^* \psi_j(z) dz) \right\}\right) = \\ &= \rho\left(\int_{\gamma} [d\mu(z)/dz] \cdot \sum_j \{i_j (i_j^* \psi_j(z)) dz\}\right) = \rho\left(\int_{\gamma} [d\mu(z)/dz] \cdot [a(z) dz]\right) \\ &= \rho(\mu(z_a(\beta))) - \rho(\mu(z_a(\alpha))) = \nu(z_a(\beta)) - \nu(z_a(\alpha)), \end{aligned}$$

since each $\psi_j(z)$ is the \mathcal{A}_v -valued function, where

$$(2) \quad z_a(x) = \int_{\alpha}^x a(t)dt + \phi_a(x', \alpha'),$$

(3) $a(z) := \sum_{j=0}^{2^v-1} \psi_j(z)$, $\gamma(0) = \alpha$, $\gamma(1) = \beta$. In particular, if each function ψ_j is identically constant, then

$$(4) \quad \int_{\gamma} \sum_j [(dz/dz) \cdot i_j] [i_j^* \psi_j(z) dz] = t\beta - t\alpha - t\phi_1(\beta', \alpha'),$$

where $t = \sum_j \psi_j$.

For non right \mathcal{A}_v -linear z -differentiable phrase μ Formulas (1–3) may already be not valid. Certainly common line integrals of z -differentiable phrases (functions) can be calculated by the general algorithms (see [23, 22, 24, 27]). A result of the line integration along a rectifiable path γ in the domain U we denote as the composition of two functions

$$\begin{aligned} (5) \quad \sum_j \int_{\gamma} [(d\mu(z)/dz) \cdot i_j] [i_j^* \psi_j(z)] dz_0 &= \int_{\gamma} (d\nu(\xi)/d\xi) \cdot d\xi \\ &= \lambda(\xi(\beta)) - \lambda(\xi(\alpha)), \end{aligned}$$

where λ and ξ are two z -differentiable functions on their domains, $\gamma(0) = \alpha$, $\gamma(1) = \beta$. Frequently one can use a Cayley-Dickson subalgebra \mathcal{G} isomorphic with either the quaternion skew field \mathbf{H} or the octonion algebra \mathbf{O} so that $\gamma(1) - \gamma(0) \in \mathcal{G}$ and use the homotopy theorem. On the other hand, each rectifiable continuous path γ in the domain U in the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v can be presented as a uniform limit of rectifiable continuous paths γ^n in U composed of segments parallel to axes $\mathbf{R}i_k$, $k = 0, \dots, 2^v - 1$. Therefore,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma^n} f(z)dz$$

for any continuous function on U (see [23, 22]). The functions λ and ξ depend on ψ so in more details we denote them by $\lambda = \lambda_\psi$ and $\xi = \xi_\psi$.

Thus the general integral of Equation 2(12) is:

$$(6) \quad \lambda_\psi(\xi_\psi(x)) = -\phi_{\lambda'}(Im \xi_\psi(x)) + \int_\alpha^x g_1(z)dz + \phi_{g_1}(x'),$$

where $Im(z) := z - Re(z)$, $Re(z) := (z + z^*)/2$. The term $\phi_{\lambda'}(Im(\xi))$ takes into account the non-commutativity for $2 \leq v$ and non-associativity for $3 \leq v$ of the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v , since its center is the real field $\mathbf{R} = Z(\mathcal{A}_v)$ for any $v \geq 2$. There is the bijective correspondence between $\lambda_\psi(\xi_\psi)$ and f which will be specified below.

8. Transformation of the first order partial differential operator over the Cayley-Dickson algebras.

To simplify the operator Υ and its particular variant σ one can use a change of variables. We consider this operator in the form:

$$(1) \quad \Upsilon f = \sum_{j=0}^{2^v-1} (\partial f / \partial z_j) \eta_j(z),$$

with either $\eta_j(z) = i_j^* \psi_j(z)$ or $\eta_j(z) = \phi_j^*(z) \in \mathcal{A}_v$ for each j (see Theorems 4 and 5 above). For it we seek the change of variables $x = x(z)$ so that

$$(2) \quad \sum_{j=0}^{2^v-1} (\partial x_l / \partial z_j) \omega_j(z) = t_l,$$

where $t_l \in \mathcal{A}_v$ is a constant for each l , for η_j not being identically zero, while ω_j is chosen arbitrarily also z -differentiable so that the resulting matrix Ω will not be degenerate, i.e. its rows are real-independent as vectors (see below). Certainly $(\partial x_l / \partial z_j) \in \mathbf{R}$ are real partial derivatives, since x_l and z_j are real coordinates. We suppose that the functions $\eta_j(z)$ are linearly independent over the real field for each z in the domain U . Using the standard basis of generators $\{i_j : j = 0, \dots, 2^v - 1\}$ of the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v and the decompositions $\omega_j = \sum_k \omega_{j,k} i_k$ and $t_j = \sum_k t_{j,k} i_k$ with real elements $\omega_{j,k}$ and $t_{j,k}$ for all j and k we rewrite System (2) in the matrix form:

$$(3) \quad (\partial x_l / \partial z_j)_{l,j=0,\dots,2^v-1} \Omega = T,$$

where $\Omega = (\omega_{j,k})_{j,k=0,\dots,2^v-1}$, $T = (t_{j,k})_{j,k=0,\dots,2^v-1}$. Suppose that the functions $\omega_j(z)$ are arranged into the family $\{\omega_j : j = 0, \dots, 2^v - 1\}$ as above and are such that the matrix $\Omega(z)$ is non-degenerate for all z in the domain U . For example, this is always the case, when $|\omega_j(z)| > 0$ and $Re[\omega_j(z)\omega_k(z)^*] = 0$ for each $j \neq k$ for each $z \in U$. Here particularly $\omega_j(z) = \eta_j(z)$ can also be taken for all $j = 0, \dots, 2^v - 1$ and $z \in U$. Therefore, Equality (3) becomes equivalent to

$$(4) \quad (\partial x_l / \partial z_j)_{l,j=0,\dots,2^v-1} = T \Omega^{-1}.$$

We take the real matrix T of the same rank as the real matrix $(\omega_{j,k})_{j,k=0,\dots,2^v-1}$. Thus (4) is the linear system of partial differential equations of the first order over the real field. It can be solved by the standard methods [29].

We remind how each linear partial differential equation (3) or (4) can be resolved. Write it in the form:

$$(5) \quad X_1(x_1, \dots, x_n, u) \partial u / \partial x_1 + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n, u) \partial u / \partial x_n = R(x_1, \dots, x_n, u)$$

with u and x_1, \dots, x_n here instead of x_l and z_0, \dots, z_{2^v-1} in (3) seeking simultaneously suitable R corresponding to $t_{l,k}$. A function $u = u(x_1, \dots, x_n)$ defined and continuous with its partial derivatives $\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_n$ in some domain V of variables x_1, \dots, x_n in \mathbf{R}^n making (5) the identity is called a solution of this linear equation. If $R = 0$ identically, then the equation is called homogeneous. A solution $u = const$ of the homogeneous equation

$$(6) \quad X_1(x_1, \dots, x_n, u) \partial u / \partial x_1 + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n, u) \partial u / \partial x_n = 0$$

is called trivial. Then one composes the equations:

$$(7) \quad dx_1 / X_1(x) = dx_2 / X_2(x) = \dots = dx_n / X_n(x),$$

where $x = (x_1, \dots, x_n)$. This system is called the system of ordinary differential equations in the symmetric form corresponding to the homogeneous linear equation in partial derivatives.

It is supposed that the coefficients X_1, \dots, X_n are defined and continuous together with their first order partial derivatives by x_1, \dots, x_n and that X_1, \dots, X_n are not simultaneously zero in a neighborhood of some point x^0 . Such point x^0 is called non singular. For example when the function X_n is non-zero System (7) can be written as:

$$(8) \quad dx_1/dx_n = X_1/X_n, \dots, dx_{n-1}/dx_n = X_{n-1}/X_n.$$

This system satisfies conditions of the theorem about an existence of integrals of the normal system. A system of n differential equations

$$(9) \quad dy_k/dx = f_k(x, y_1, \dots, y_n), \quad k = 1, \dots, n,$$

is called normal of the n -th order. It is called linear if all functions f_k depend linearly on y_1, \dots, y_n . Any family of functions y_1, \dots, y_n satisfying (9) in some interval (a, b) is called its solution. A function $g(x, y_1, \dots, y_n)$ different from a constant identically and differentiable in a domain D and such that its partial derivatives $\partial g/\partial y_1, \dots, \partial g/\partial y_n$ are not simultaneously zero in D is called an integral of System (9) in D if the complete differential $dg = (\partial g/\partial x)dx + (\partial g/\partial y_1)dy_1 + \dots + (\partial g/\partial y_n)dy_n$ becomes identically zero, when the differentials dy_k are substituted on their values from (9), that is $(\partial g(x, y)/\partial x) + (\partial g/\partial y_1)f_1(x, y) + \dots + (\partial g(x, y)/\partial y_n)f_n(x, y) = 0$ for each $(x, y) \in D$, where $y = (y_1, \dots, y_n)$. The equality $g(x, y) = \text{const}$ is called the first integral of System (9).

It is supposed that each function $f_k(x, y)$ is continuous on D and satisfies the Lipschitz conditions by variables y_1, \dots, y_n :

$$(L) \quad |f_k(x, y) - f_k(x, z)| \leq C_k|y - z|$$

for all (x, y) and $(x, z) \in D$, where C_k are constants. Then System (9) has exactly n independent integrals in some neighborhood D^0 of a marked point (x^0, y^0) in D , when the Jacobian $\partial(g_1, \dots, g_n)/\partial(y_1, \dots, y_n)$ is not zero on D^0 (see Section 5.3.3 [29]).

In accordance with Theorem 12.1,2 [29] each integral of System (7) is a non-trivial solution of Equation (6) and vice versa each non-trivial solution of Equation (6) is an integral of (7). If $g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$ are independent integrals of (7), then the function

$$(10) \quad u = \Phi(g_1, \dots, g_{n-1}),$$

where Φ is an arbitrary function continuously differentiable by g_1, \dots, g_{n-1} , is the solution of (6). Formula (10) is called the general solution of Equation (6).

To the non-homogeneous Equation (5) the system

$$(11) \quad dx_1/X_1 = \dots = dx_n/X_n = du/R$$

is posed. System (11) gives n independent integrals g_1, \dots, g_n and the general solution

$$(12) \quad \Phi(g_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n, u)) = 0$$

of (5), where Φ is any continuously differentiable function by g_1, \dots, g_n . If the latter equation is possible to resolve relative to u this gives the solution of (5) in the explicit form $u = u(x_1, \dots, x_n)$ which generally depends on Φ and g_1, \dots, g_n . Therefore, Formula (12) for different R and u and X_j corresponding to $t_{l,k}$ and x_l and $\omega_{j,k}$ respectively can be satisfied in (3) or (4), the variables x_j are used in (12) instead of z_j in (3, 4), where $k = 0, \dots, 2^v - 1$.

Thus after the change of the variables the operator Υ takes the form:

$$(13) \quad \Upsilon f = \sum_{j=0}^{2^v-1} (\partial f/\partial x_j)t_j$$

with constants $t_j \in \mathcal{A}_v$. Undoubtedly, also the operator Υ with $j = 0, \dots, n$, $2^{v-1} \leq n \leq 2^v - 1$ instead of $2^v - 1$ can also be reduced to the form $\Upsilon f = \sum_{j=0}^n (\partial f/\partial x_j)t_j$, when the rank is $\text{rank}(\omega_{j,k}) = n + 1$ in a basis of generators N_0, \dots, N_n , where N_0, \dots, N_{2^v-1} is a generator basis of the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v . Particularly, if the rank is $\text{rank}(\omega_{j,k}) = m \leq 2^v$ and T has the unit upper left $m \times m$ block and zeros outside it, then $t_j = N_j$ for each $j = 0, \dots, m - 1$ can be chosen.

One can mention that direct algorithms of Theorems 4 and 5 may be simpler for finding the anti-derivative operator \mathcal{I}_Υ , than this preliminary transformation of the partial differential operator Υ to the standard form (13).

9. Definitions.

Let X and Y be two \mathbf{R} linear normed spaces which are also left and right \mathcal{A}_r modules, where $1 \leq r$. Let Y be complete relative to its norm. We put $X^{\otimes k} := X \otimes_{\mathbf{R}} \dots \otimes_{\mathbf{R}} X$ is the k times ordered tensor product over \mathbf{R} of X . By $L_{q,k}(X^{\otimes k}, Y)$ we denote a family of all continuous k times \mathbf{R} poly-linear and \mathcal{A}_r additive operators from $X^{\otimes k}$ into Y . Then $L_{q,k}(X^{\otimes k}, Y)$ is also a normed \mathbf{R} linear and left and right \mathcal{A}_r module complete relative to its norm. In particular, $L_{q,1}(X, Y)$ is denoted also by $L_q(X, Y)$.

We present X as the direct sum $X = X_0 i_0 \oplus \dots \oplus X_{2^r-1} i_{2^r-1}$, where X_0, \dots, X_{2^r-1} are pairwise isomorphic real normed spaces. If $A \in L_q(X, Y)$ and $A(xb) = (Ax)b$ or $A(bx) = b(Ax)$ for each $x \in X_0$ and $b \in \mathcal{A}_r$, then an operator A we call right or left \mathcal{A}_r -linear respectively.

An \mathbf{R} linear space of left (or right) k times \mathcal{A}_r poly-linear operators is denoted by $L_{l,k}(X^{\otimes k}, Y)$ (or $L_{r,k}(X^{\otimes k}, Y)$ respectively).

As usually a support of a function $g : S \rightarrow \mathcal{A}_r$ on a topological space S is by the definition $supp(g) = cl\{t \in S : g(t) \neq 0\}$, where the closure is taken in S .

We consider a space of test function $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbf{R}^n, Y)$ consisting of all infinite differentiable functions $f : \mathbf{R}^n \rightarrow Y$ on \mathbf{R}^n with compact supports. A sequence of functions $f_n \in \mathcal{D}$ tends to zero, if all f_n are zero outside some compact subset K in the Euclidean space \mathbf{R}^n , while on it for each $k = 0, 1, 2, \dots$ the sequence $\{f_n^{(k)} : n \in \mathbf{N}\}$ converges to zero uniformly. Here as usually $f^{(k)}(t)$ denotes the k -th derivative of f , which is a k times \mathbf{R} poly-linear symmetric operator from $(\mathbf{R}^n)^{\otimes k}$ to Y , that is $f^{(k)}(t).(h_1, \dots, h_k) = f^{(k)}(t).(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(k)}) \in Y$ for each $h_1, \dots, h_k \in \mathbf{R}^n$ and every transposition $\sigma : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$, σ is an element of the symmetric group S_k , $t \in \mathbf{R}^n$. For convenience one puts $f^{(0)} = f$. In particular, $f^{(k)}(t).(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \partial^k f(t) / \partial t_{j_1} \dots \partial t_{j_k}$ for all $1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n$, where $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$ with 1 on the j -th place.

Such convergence in \mathcal{D} defines closed subsets in this space \mathcal{D} , their complements by the definition are open, that gives the topology on \mathcal{D} . The space \mathcal{D} is \mathbf{R} linear and right and left \mathcal{A}_r module.

By a generalized function of class $\mathcal{D}' := [\mathcal{D}(\mathbf{R}^n, Y)]'$ is called a continuous \mathbf{R} -linear \mathcal{A}_r -additive function $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}_r$. The set of all such functionals is denoted by \mathcal{D}' . That is, g is continuous, if for each sequence $f_n \in \mathcal{D}$, converging to zero, a sequence of numbers $g(f_n) =: [g, f_n] \in \mathcal{A}_r$ converges to zero for n tending to the infinity.

A generalized function g is zero on an open subset V in \mathbf{R}^n , if $[g, f] = 0$ for each $f \in \mathcal{D}$ equal to zero outside V . By a support of a generalized function g is called the family, denoted by $supp(g)$, of all points $t \in \mathbf{R}^n$ such that in each neighborhood of each point $t \in supp(g)$ the functional g is different from zero. The addition of generalized functions g, h is given by the formula:

$$(1) [g + h, f] := [g, f] + [h, f].$$

The multiplication $g \in \mathcal{D}'$ on an infinite differentiable function w is given by the equality:

$$(2) [gw, f] = [g, wf] \text{ either for } w : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{A}_r \text{ and each test function } f \in \mathcal{D} \text{ with a real image } f(\mathbf{R}^n) \subset \mathbf{R}, \text{ where } \mathbf{R} \text{ is embedded into } Y; \text{ or } w : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \text{ and } f : \mathbf{R}^n \rightarrow Y.$$

A generalized function g' prescribed by the equation:

$$(3) [g', f] := -[g, f'] \text{ is called a derivative } g' \text{ of a generalized function } g, \text{ where } f' \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n, L_q(\mathbf{R}^n, Y)), g' \in [\mathcal{D}(\mathbf{R}^n, L_q(\mathbf{R}^n, Y))]'.$$

Another space $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbf{R}^n, Y)$ of test functions consists of all infinite differentiable functions $f : \mathbf{R}^n \rightarrow Y$ such that the limit $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} |t|^m f^{(j)}(t) = 0$ exists for each $m = 0, 1, 2, \dots$, $j = 0, 1, 2, \dots$. A sequence $f_n \in \mathcal{B}$ is called converging to zero, if the sequence $|t|^m f_n^{(j)}(t)$ converges to zero uniformly on $\mathbf{R}^n \setminus B(\mathbf{R}^n, 0, R)$ for each $m, j = 0, 1, 2, \dots$ and each $0 < R < +\infty$, where $B(Z, z, R) := \{y \in Z : \rho(y, z) \leq R\}$ denotes a ball with center at z of radius R in a metric space Z with a metric ρ . The family of all \mathbf{R} -linear and \mathcal{A}_r -additive functionals on \mathcal{B} is

denoted by \mathcal{B}' .

In particular we can take $X = \mathcal{A}_r^\alpha, Y = \mathcal{A}_r^\beta$ with $1 \leq \alpha, \beta \in \mathbf{Z}$. Analogously spaces $\mathcal{D}(U, Y), [\mathcal{D}(U, Y)]', \mathcal{B}(U, Y)$ and $[\mathcal{B}(U, Y)]'$ are defined for domains U in \mathbf{R}^n . For definiteness we write $\mathcal{B}(U, Y) = \{f|_U : f \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n, Y)\}$ and $\mathcal{D}(U, Y) = \{f|_U : f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n, Y)\}$.

A function $g : U \rightarrow \mathcal{A}_v$ is called locally integrable, if it is absolutely integrable on each bounded λ measurable sub-domain V in U , i.e.

$$\int_V |g(z)|\lambda(dz) < \infty, \text{ where } \lambda \text{ denotes the Lebesgue measure on } U.$$

A generalized function f is called regular if locally integrable functions ${}_j,{}_k f^1, {}_l f^2 : U \rightarrow \mathcal{A}_v$ exist such that

$$[f, \omega] = \int_U \{ \sum_{j,k,l} {}_j,{}_k f^1(z) {}_l \omega(z) f^2(z) \}_{q(3)} \lambda(dz),$$

for each test function $\omega \in \mathcal{B}(U, Y)$ or $\omega \in \mathcal{D}(U, Y)$ correspondingly, where $\omega = ({}_1\omega, \dots, {}_\beta\omega), {}_k\omega(z) \in \mathcal{A}_v$ for each $z \in U$ and all $k, q(3)$ is a vector indicating on an order of the multiplication in the curled brackets and it may depend on the indices $j, l = 1, \dots, \alpha, k = 1, \dots, \beta$.

We supply the space $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n, Y)$ with the countable family of semi-norms

$$(4) \ p_{\alpha,k}(f) := \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |(1 + |x|)^k \partial^\alpha f(x)|$$

inducing its topology, where $k = 0, 1, 2, \dots; \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), 0 \leq \alpha_j \in \mathbf{Z}$. On this space we take the space $\mathcal{B}'(\mathbf{R}^n, Y)_l$ of all Y valued continuous generalized functions (functionals) of the form

(5) $f = f_0 i_0 + \dots + f_{2^v-1} i_{2^v-1}$ and $g = g_0 i_0 + \dots + g_{2^v-1} i_{2^v-1}$, where f_j and $g_j \in \mathcal{B}'(\mathbf{R}^n, Y)$, with restrictions on $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ being real- or $\mathbf{C}_i = \mathbf{R} \oplus i\mathbf{R}$ - valued generalized functions $f_0, \dots, f_{2^v-1}, g_0, \dots, g_{2^v-1}$ respectively. Let $\phi = \phi_0 i_0 + \dots + \phi_{2^v-1} i_{2^v-1}$ with $\phi_0, \dots, \phi_{2^v-1} \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, then

(6) $[f, \phi] = \sum_{k,j=0}^{2^v-1} [f_j, \phi_k] i_k i_j$. Let their convolution be defined in accordance with the formula:

$$(7) \ [f * g, \phi] = \sum_{j,k=0}^{2^v-1} ([f_j * g_k, \phi] i_j) i_k$$

for each $\phi \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n, Y)$. Particularly,

$$(8) \ (f * g)(x) = f(x - y) * g(y) = f(y) * g(x - y)$$

for all $x, y \in \mathbf{R}^n$ due to (7), since the latter equality is satisfied for each pair f_j and g_k .

10. The decomposition theorem of partial differential operators over the Cayley-Dickson algebras.

We consider a partial differential operator of order u :

$$(1) \ Af(x) = \sum_{|\alpha| \leq u} \mathbf{a}_\alpha(x) \partial^\alpha f(x),$$

where $\partial^\alpha f = \partial^{|\alpha|} f(x) / \partial x_0^{\alpha_0} \dots \partial x_n^{\alpha_n}, x = x_0 i_0 + \dots x_n i_n, x_j \in \mathbf{R}$ for each $j, 1 \leq n = 2^r - 1, \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n), |\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n, 0 \leq \alpha_j \in \mathbf{Z}$. By the definition this means that the principal symbol

$$(2) \ A_0 := \sum_{|\alpha|=u} \mathbf{a}_\alpha(x) \partial^\alpha$$

has α so that $|\alpha| = u$ and $\mathbf{a}_\alpha(x) \in \mathcal{A}_r$ is not identically zero on a domain U in \mathcal{A}_r . As usually $C^k(U, \mathcal{A}_r)$ denotes the space of k times continuously differentiable functions by all real variables x_0, \dots, x_n on U with values in \mathcal{A}_r , while the x -differentiability corresponds to the super-differentiability by the Cayley-Dickson variable x .

Speaking about locally constant or locally differentiable coefficients we shall undermine that a domain U is the union of sub-domains U^j satisfying conditions 15(D1, $i - vii$) and $U^j \cap U^k = \partial U^j \cap \partial U^k$ for each $j \neq k$. All coefficients \mathbf{a}_α are either constant or differentiable of the same class on each $Int(U^j)$ with the continuous extensions on U^j . More generally it is up to a C^u or x -differentiable diffeomorphism of U respectively.

If an operator A is of the odd order $u = 2s - 1$, then an operator E of the even order $u + 1 = 2s$ by variables (t, x) exists so that

(3) $Eg(t, x)|_{t=0} = Ag(0, x)$ for any $g \in C^{u+1}([c, d] \times U, \mathcal{A}_r)$, where $t \in [c, d] \subset \mathbf{R}$, $c \leq 0 < d$, for example, $Eg(t, x) = \partial(tAg(t, x))/\partial t$.

Therefore, it remains the case of the operator A of the even order $u = 2s$. Take $z = z_0i_0 + \dots + z_{2^v-1}i_{2^v-1} \in \mathcal{A}_v$, $z_j \in \mathbf{R}$. Operators depending on a less set z_{l_1}, \dots, z_{l_n} of variables can be considered as restrictions of operators by all variables on spaces of functions constant by variables z_s with $s \notin \{l_1, \dots, l_n\}$.

Theorem. Let $A = A_u$ be a partial differential operator of an even order $u = 2s$ with locally constant or variable (locally) $C^{s'}$ or x -differentiable on U coefficients $\mathbf{a}_\alpha(x) \in \mathcal{A}_r$ such that it has the form

(4) $Af = c_{u,1}(B_{u,1}f) + \dots + c_{u,k}(B_{u,k}f)$, where each

(5) $B_{u,p} = B_{u,p,0} + Q_{u-1,p}$

is a partial differential operator by variables $x_{m_{u,1}+\dots+m_{u,p-1}+1}, \dots, x_{m_{u,1}+\dots+m_{u,p}}$ and of the order u , $m_{u,0} = 0$, $c_{u,k}(x) \in \mathcal{A}_r$ for each k , its principal part

(6) $B_{u,p,0} = \sum_{|\alpha|=s} \mathbf{a}_{p,2\alpha}(x) \partial^{2\alpha}$

is elliptic with real coefficients $\mathbf{a}_{p,2\alpha}(x) \geq 0$, either $0 \leq r \leq 3$ and $f \in C^u(U, \mathcal{A}_r)$, or $r \geq 4$ and $f \in C^u(U, \mathbf{R})$. Then three partial differential operators Υ^s and Υ_1^s and Q of orders s and p with $p \leq u-1$ with locally constant or variable (locally) $C^{s'}$ or x -differentiable correspondingly on U coefficients with values in \mathcal{A}_v exist and coefficients of the third operator Q may be generalized functions, when coefficients of A are discontinuous locally constant or $C^{s'}$ discontinuous on the entire U or when $s' < s$, $r \leq v$, such that

(7) $Af = \Upsilon^s(\Upsilon_1^s f) + Qf$.

Proof. Certainly we have $ord Q_{u-1,p} \leq u-1$, $ord(A - A_0) \leq u-1$. We choose the following operators:

$$(8) \quad \Upsilon^s f(x) = \sum_{p=1}^k \sum_{|\alpha| \leq s, \alpha_q=0 \forall q < (m_{u,1}+\dots+m_{u,p-1}+1) \text{ and } q > (m_{u,1}+\dots+m_{u,p})} (\partial^\alpha f(x))[w_p^* \psi_{p,\alpha}] \text{ and}$$

$$(9) \quad \Upsilon_1^s f(x) = \sum_{p=1}^k \sum_{|\alpha| \leq s, \alpha_q=0 \forall q < (m_{u,1}+\dots+m_{u,p-1}+1) \text{ and } q > (m_{u,1}+\dots+m_{u,p})} (\partial^\alpha f(x))[w_p \psi_{p,\alpha}^*],$$

where $w_p^2 = c_{u,p}$ for all p and $\psi_{p,\alpha}^2(x) = -\mathbf{a}_{p,2\alpha}(x)$ for each p and x , $w_p \in \mathcal{A}_r$, $\psi_{p,\alpha}(x) \in \mathcal{A}_{r,v}$ and $\psi_{p,\alpha}(x)$ is purely imaginary for $\mathbf{a}_{p,2\alpha}(x) > 0$ for all α and x , $Re(w_p Im(\psi_{p,\alpha})) = 0$ for all p and α , $Im(x) = (x - x^*)/2$, $v > r$. Here $\mathcal{A}_{r,v} = \mathcal{A}_v/\mathcal{A}_r$ is the real quotient algebra. The algebra $\mathcal{A}_{r,v}$ has the generators i_{j2^r} , $j = 0, \dots, 2^{v-r} - 1$. A natural number v so that $2^{v-r} - 1 \geq \sum_{p=1}^k \sum_{q=0}^u \binom{m_p+q-1}{q}$ is sufficient, where $\binom{m}{q} = m!/(q!(m-q)!)$ denotes the binomial coefficient, $\binom{m+q-1}{q}$ is the number of different solutions of the equation $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = q$ in non-negative integers α_j . We have either $\partial^{\alpha+\beta} f \in \mathcal{A}_r$ for $0 \leq r \leq 3$ or $\partial^{\alpha+\beta} f \in \mathbf{R}$ for $r \geq 4$. Therefore, we can take $\psi_{p,\alpha}(x) \in i_{2^r q} \mathbf{R}$, where $q = q(p, \alpha) \geq 1$, $q(p^1, \alpha^1) \neq q(p, \alpha)$ when $(p, \alpha) \neq (p^1, \alpha^1)$.

Thus Decomposition (7) is valid due to the following. For $b = \partial^{\alpha+\beta} f(z)$ and $\mathbf{1} = i_{2^r p}$ and $w \in \mathcal{A}_r$ one has the identities:

(10) $(b(w\mathbf{1}))(w^*\mathbf{1}) = ((wb)\mathbf{1})(w^*\mathbf{1}) = -w(wb) = -w^2b$ and

(11) $((b\mathbf{1})w^*)\mathbf{1}w = (((bw)\mathbf{1})\mathbf{1})w = -(bw)w = -bw^2$ in the considered here cases, since \mathcal{A}_r is alternative for $r \leq 3$ while \mathbf{R} is the center of the Cayley-Dickson algebra (see Formulas 2(M1, M2)).

This decomposition of the operator A_{2s} is generally up to a partial differential operator of order not greater, than $(2s - 1)$:

(12) $Qf(x) = \sum_{p=1}^k c_{u,p} Q_{u-1,p} +$

$$\sum_{|\alpha| \leq s, |\beta| \leq s; \gamma \leq \alpha, \epsilon \leq \beta, |\gamma + \epsilon| > 0} [\prod_{j=0}^{2^v-1} \binom{\alpha_j}{\gamma_j} \binom{\beta_j}{\epsilon_j}] (\partial^{\alpha+\beta-\gamma-\epsilon} f(x))$$

$$[(\partial^\gamma \eta_\alpha(x)) ((\partial^\epsilon \eta_\beta^1(x))],$$

where operators Υ^s and Υ_1^s are already written in accordance with the general form

$$(13) \quad \Upsilon^s f(x) = \sum_{|\alpha| \leq s} (\partial^\alpha f(x)) \eta_\alpha(x);$$

$$(14) \quad \Upsilon_1^s f(x) = \sum_{|\beta| \leq s} (\partial^\beta f(x)) \eta_\beta^1(x).$$

The coefficients of Q may be generalized functions, since they are calculated with the participation of partial derivatives of the coefficients of the operator Υ_1^s , but the coefficients of the operators Υ^s and Υ_1^s may be discontinuous locally constant or $C^{s'}$ discontinuous on the entire U or $s' < s$ when for the initial operator A they are such.

When A in (3) is with constant coefficients, then the coefficients w_p and $\psi_{p,\alpha}$ for Υ^m and Υ_1^m can also be chosen constant and $Q - \sum_{p=1}^k c_{u,p} Q_{u-1,p} = 0$.

11. Corollary. *Let suppositions of Theorem 10 be satisfied. Then a change of variables locally affine or variable C^1 or x -differentiable on U correspondingly on U exists so that the principal part $A_{2,0}$ of A_2 becomes with constant coefficients, when $\mathbf{a}_{p,2\alpha} > 0$ for each p, α and x .*

12. Corollary. *If two operators $E = A_{2s}$ and $A = A_{2s-1}$ are related by Equation 10(3), and A_{2s} is presented in accordance with Formulas 10(4, 5), then three operators $\Upsilon^s, \Upsilon^{s-1}$ and Q of orders $s, s-1$ and $2s-2$ exist so that*

$$(1) \quad A_{2s-1} = \Upsilon^s \Upsilon^{s-1} + Q.$$

Proof. It remains to verify that $ord(Q) \leq 2s-2$ in the case of A_{2s-1} , where $Q = \{\partial(tA_{2s-1})/\partial t - \Upsilon^s \Upsilon_1^s\}|_{t=0}$. Indeed, the form $\lambda(E)$ corresponding to E is of degree $2s-1$ by x and each addendum of degree $2s$ in it is of degree not less than 1 by t , consequently, the product of forms $\lambda(\Upsilon_s)\lambda(\Upsilon_1^s)$ corresponding to Υ^s and Υ_1^s is also of degree $2s-1$ by x and each addendum of degree $2s$ in it is of degree not less than 1 by t . But the principal parts of $\lambda(E)$ and $\lambda(\Upsilon_s)\lambda(\Upsilon_1^s)$ coincide identically by variables (t, x) , hence $ord(\{E - \Upsilon^s \Upsilon_1^s\}|_{t=0}) \leq 2s-2$. Let $a(t, x)$ and $h(t, x)$ be coefficients from Υ_1^s and Υ^s . Using the identities

$$a(t, x) \partial_t \partial^\gamma t g(x) = a(t, x) \partial^\gamma g(x) \text{ and}$$

$$h(t, x) \partial^\beta \partial_t [a(t, x) \partial^\gamma g(x)] = h(t, x) \partial^\beta [(\partial_t a(t, x)) \partial^\gamma g(x)]$$

for any functions $g(x) \in C^{2s-1}$ and $a(t, x) \in C^s$,

$$ord[(h(t, x) \partial^\beta), (a(t, x) \partial^\gamma)]|_{t=0} \leq 2s-2,$$

where $\partial_t = \partial/\partial t, |\beta| \leq s-1, |\gamma| \leq s, [A, B] := AB - BA$ denotes the commutator of two operators, we reduce $(\Upsilon^s \Upsilon_1^s + Q_1)|_{t=0}$ from Formula 10(7) to the form prescribes by equation (1).

13. We consider operators of the form:

$$(1) \quad (\Upsilon^k + \beta I_r) f(z) := \{\sum_{0 < |\alpha| \leq k} (\partial^\alpha f(z)) \eta_\alpha(z)\} + f(z) \beta(z),$$

with $\eta_\alpha(z) \in \mathcal{A}_v, \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{2^r-1}), 0 \leq \alpha_j \in \mathbf{N}$ for each $j, |\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_{2^r-1}, \beta I_r f(z) := f(z) \beta,$

$$\partial^\alpha f(z) := \partial^{|\alpha|} f(z) / \partial z_0^{\alpha_0} \dots \partial z_{2^r-1}^{\alpha_{2^r-1}}, 2 \leq r \leq v < \infty, \beta(z) \in \mathcal{A}_v, z_0, \dots, z_{2^r-1} \in \mathbf{R}, z = z_0 i_0 + \dots + z_{2^r-1} i_{2^r-1}.$$

Proposition. *The operator $(\Upsilon^k + \beta)^*(\Upsilon^k + \beta)$ is elliptic on the space $C^{2k}(\mathbf{R}^{2^r}, \mathcal{A}_v)$, where $(\Upsilon^k + \beta)^*$ denotes the adjoint operator (i.e. with adjoint coefficients).*

Proof. In view of Formulas (1) and 4(8) the form corresponding to the principal symbol of the operator $(\Upsilon^k + \beta)^*(\Upsilon^k + \beta)$ is with real coefficients, of degree $2k$ and non-negative definite, consequently, the operator $(\Upsilon^k + \beta)^*(\Upsilon^k + \beta)$ is elliptic.

14. Example. Let Υ^* be the adjoint operator defined on differentiable \mathcal{A}_v valued functions f given by the formula:

$$(1) \quad (\Upsilon + \beta)^* f = [\sum_{j=0}^n (\partial f(z) / \partial z_j) \phi_j(z)] + f(z) \beta(z)^*.$$

Thus we can consider the operator

$$(2) \quad \Xi_\beta := (\Upsilon + \beta)(\Upsilon + \beta)^*.$$

From Proposition (13) we have that the operator Ξ_β is elliptic as classified by its principal symbol with real coefficients. Put $\Xi = \Xi_0$. In the x coordinates from §8 it has the simpler form:

$$(3) \quad (\Upsilon + \beta)(\Upsilon + \beta)^* f = \sum_{j=0}^n (\partial^2 f / \partial x_j^2) |t_j|^2$$

$$+ 2 \sum_{0 \leq j < k \leq n} (\partial^2 f / \partial x_j \partial x_k) \operatorname{Re}(t_j t_k^*) + 2 \sum_{j=0}^n (\partial f / \partial x_j) \operatorname{Re}(t_j^* \beta) + \{f|\beta|^2 + \sum_{j=0}^n [f(\partial \beta^* / \partial x_j)] t_j\},$$

because the coefficients t_j are already constant. After a change of variables reducing the corresponding quadratic form to the sum of squares $\sum_j \epsilon_j s_j^2$ we get the formula:

$$(4) \quad \Upsilon \Upsilon^* f = \sum_{j=1}^m (\partial^2 f / \partial s_j^2) \epsilon_j,$$

where $s_j \in \mathbf{R}$, $\epsilon_j = 1$ for $1 \leq j \leq p$ and $\epsilon_j = -1$ for each $p < j \leq m$, $m \leq 2^v$, $1 \leq p \leq m$ depending on the signature $(p, m - p)$.

Generally (see Formula 5(1)) we have

$$(5) \quad A = (\Upsilon + \beta)(\Upsilon_1 + \beta^1) f(z) = B_0 f(z) + Q f(z), \text{ where}$$

$$(6) \quad B_0 f(z) = \sum_{j,k} [(\partial^2 f(z) / \partial z_j \partial z_k) \phi_j^1(z)^*] \phi_k^*(z) + [f(z) \beta^1(z)] \beta(z) \text{ and}$$

$$(7) \quad Q f(z) = \sum_{j,k} [(\partial f(z) / \partial z_j) (\partial \phi_j^1(z)^* / \partial z_k)] \phi_k^*(z) + \sum_j [(\partial f(z) / \partial z_j) \phi_j^1(z)^*] \beta(z) + \sum_k [f(z) (\partial \beta^1(z) / \partial z_k)] \phi_k^*(z),$$

$$(8) \quad (\Upsilon_1 + \beta^1) f(z) = [\sum_j (\partial f(z) / \partial z_j) \phi_j^1(z)^*] + f(z) \beta^1(z).$$

The latter equations show that coefficients of the operator Q may be generalized functions, when $\phi_j^1(z)$ for some j or $\beta^1(z)$ are locally C^0 or C^0 or locally C^1 functions, while $\phi_k(z)$ for each k and $\beta(z)$ are locally C^0 or C^0 functions on U . We consider this in more details in the next section.

15. Partial differential operators with generalized coefficients.

Let an operator Q be given by Formula 14(7) on a domain U . Initially it is considered as a domain in the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v . But in the case when Q and f depend on smaller number of real coordinates z_0, \dots, z_{n-1} we can take the real shadow of U and its sub-domain V of variables (z_0, \dots, z_{n-1}) , where z_k are marked for example being zero for all $n \leq k \leq 2^v - 1$. Thus we take a domain V which is a canonical closed subset in the Euclidean space \mathbf{R}^n , $2^{v-1} \leq n \leq 2^v - 1$, $v \geq 2$.

A canonical closed subset P of the Euclidean space $X = \mathbf{R}^n$ is called a quadrant if it can be given by the condition $P := \{x \in X : q_j(x) \geq 0\}$, where $(q_j : j \in \Lambda_P)$ are linearly independent elements of the topologically adjoint space X^* . Here $\Lambda_P \subset \mathbf{N}$ (with $\operatorname{card}(\Lambda_P) = k \leq n$) and k is called the index of P . If $x \in P$ and exactly j of the q_i 's satisfy $q_i(x) = 0$ then x is called a corner of index j .

That is P is affine diffeomorphic with $P^n = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$, where $-\infty \leq a_j < b_j \leq \infty$, $[a_j, b_j] := \{x \in \mathbf{R} : a_j \leq x \leq b_j\}$ denotes the segment in \mathbf{R} . This means that there exists a vector $p \in \mathbf{R}^n$ and a linear invertible mapping C on \mathbf{R}^n so that $C(P) - p = P^n$. We put $t^{j,1} := (t_1, \dots, t_j, \dots, t_n : t_j = a_j)$, $t^{j,2} := (t_1, \dots, t_j, \dots, t_n : t_j = b_j)$. Consider $t = (t_1, \dots, t_n) \in P^n$.

This permits to define a manifold M with corners. It is a metric separable space modelled on $X = \mathbf{R}^n$ and is supposed to be of class C^s , $1 \leq s$. Charts on M are denoted (U_l, u_l, P_l) , that is, $u_l : U_l \rightarrow u_l(U_l) \subset P_l$ is a C^s -diffeomorphism for each l , U_l is open in M , $u_l \circ u_j^{-1}$ is of C^s class of smoothness from the domain $u_j(U_l \cap U_j) \neq \emptyset$ onto $u_l(U_l \cap U_j)$, that is, $u_j \circ u_l^{-1}$ and $u_l \circ u_j^{-1}$ are bijective, $\bigcup_j U_j = M$.

A point $x \in M$ is called a corner of index j if there exists a chart (U, u, P) of M with $x \in U$ and $u(x)$ is of index $\operatorname{ind}_M(x) = j$ in $u(U) \subset P$. A set of all corners of index $j \geq 1$ is called a

border ∂M of M , x is called an inner point of M if $ind_M(x) = 0$, so $\partial M = \bigcup_{j \geq 1} \partial^j M$, where $\partial^j M := \{x \in M : ind_M(x) = j\}$ (see also [30]). We consider that

(D1) V is a canonical closed subset in the Euclidean space \mathbf{R}^n , that is $V = cl(Int(V))$, where $Int(V)$ denotes the interior of V and $cl(V)$ denotes the closure of V .

Particularly, the entire space \mathbf{R}^n may also be taken.

Let a manifold W be satisfying the following conditions ($i - v$).

(i). The manifold W is continuous and piecewise C^α , where C^l denotes the family of l times continuously differentiable functions. This means by the definition that W as the manifold is of class $C^0 \cap C_{loc}^\alpha$. That is W is of class C^α on open subsets $W_{0,j}$ in W and $W \setminus (\bigcup_j W_{0,j})$ has a codimension not less than one in W .

(ii). $W = \bigcup_{j=0}^m W_j$, where $W_0 = \bigcup_k W_{0,k}$, $W_j \cap W_k = \emptyset$ for each $k \neq j$, $m = dim_{\mathbf{R}} W$, $dim_{\mathbf{R}} W_j = m - j$, $W_{j+1} \subset \partial W_j$.

(iii). Each W_j with $j = 0, \dots, m - 1$ is an oriented C^α -manifold, W_j is open in $\bigcup_{k=j}^m W_k$. An orientation of W_{j+1} is consistent with that of ∂W_j for each $j = 0, 1, \dots, m - 2$. For $j > 0$ the set W_j is allowed to be void or non-void.

(iv). A sequence W^k of C^α orientable manifolds embedded into \mathbf{R}^n , $\alpha \geq 1$, exists such that W^k uniformly converges to W on each compact subset in \mathbf{R}^n relative to the metric $dist$.

For two subsets B and E in a metric space X with a metric ρ we put

$$(1) \quad dist(B, E) := \max\{\sup_{b \in B} dist(\{b\}, E), \sup_{e \in E} dist(B, \{e\})\},$$

$$dist(\{b\}, E) := \inf_{e \in E} \rho(b, e), \quad dist(B, \{e\}) := \inf_{b \in B} \rho(b, e), \quad b \in B, e \in E.$$

Generally, $dim_{\mathbf{R}} W = m \leq n$. Let $(e_1^k(x), \dots, e_m^k(x))$ be a basis in the tangent space $T_x W^k$ at $x \in W^k$ consistent with the orientation of W^k , $k \in \mathbf{N}$.

We suppose that the sequence of orientation frames $(e_1^k(x_k), \dots, e_m^k(x_k))$ of W^k at x_k converges to $(e_1(x), \dots, e_m(x))$ for each $x \in W_0$, where $\lim_k x_k = x \in W_0$, while $e_1(x), \dots, e_m(x)$ are linearly independent vectors in \mathbf{R}^n .

(v). Let a sequence of Riemann volume elements λ_k on W^k (see §XIII.2 [38]) induce a limit volume element λ on W , that is, $\lambda(B \cap W) = \lim_{k \rightarrow \infty} (B \cap W^k)$ for each compact canonical closed subset B in \mathbf{R}^n , consequently, $\lambda(W \setminus W_0) = 0$. We shall consider surface integrals of the second kind, i.e. by the oriented surface W (see (iv)), where each W_j , $j = 0, \dots, m - 1$ is oriented (see also §XIII.2.5 [38]).

Suppose that a boundary ∂U of U satisfies Conditions ($i - v$) and

(vii) let the orientations of ∂U^k and U^k be consistent for each $k \in \mathbf{N}$ (see Proposition 2 and Definition 3 [38]).

Particularly, the Riemann volume element λ_k on ∂U^k is consistent with the Lebesgue measure on U^k induced from \mathbf{R}^n for each k . This induces the measure λ on ∂U as in (v). This consideration certainly encompasses the case of a domain U with a C^α boundary ∂U as well.

Suppose that U_1, \dots, U_l are domains in \mathbf{R}^n satisfying conditions (D1, $i - vii$) and such that $U_j \cap U_k = \partial U_j \cap \partial U_k$ for each $j \neq k$, $U = \bigcup_{j=1}^l U_j$. Consider a function $g : U \rightarrow \mathcal{A}_v$ such that each its restriction $g|_{U_j}$ is of class C^s , but g on the entire domain U may be discontinuous or not C^k , where $0 \leq k \leq s$, $1 \leq s$. If $x \in \partial U_j \cap \partial U_k$ for some $j \neq k$, $x \in Int(U)$, such that x is of index $m \geq 1$ in U_j (and in U_k also). Then there exists canonical C^α local coordinates (y_1, \dots, y_n) in a neighborhood V_x of x in U such that $S := V_x \cap \partial^m U_j = \{y : y \in V_x; y_1 = 0, \dots, y_m = 0\}$. Using locally finite coverings of the locally compact topological space $\partial U_j \cap \partial U_k$ without loss of generality we suppose that C^α functions $P_1(z), \dots, P_m(z)$ on \mathbf{R}^n exist with $S = \{z : z \in \mathbf{R}^n; P_1(z) = 0, \dots, P_m(z) = 0\}$. Therefore, on the surface S the delta-function $\delta(P_1, \dots, P_m)$ exists, for $m = 1$ denoting them $P = P_1$ and $\delta(P)$ respectively (see §III.1 [6]). It is possible to choose $y_j = P_j$ for $j = 1, \dots, m$. Using generalized functions with definite supports, for example compact supports, it is possible without loss of generality consider that $y_1, \dots, y_n \in \mathbf{R}$ are real variables. Let $\theta(P_j)$ be the characteristic function of the domain

$\mathcal{P}_j := \{z : P_j(z) \geq 0\}$, $\theta(P_j) := 1$ for $P_j \geq 0$ and $\theta(P_j) = 0$ for $P_j < 0$. Then the generalized function $\theta(P_1, \dots, P_m) := \theta(P_1)\dots\theta(P_m)$ can be considered as the direct product of generalized functions $\theta(y_1), \dots, \theta(y_m), 1(y_{m+1}, \dots, y_n) \equiv 1$, since variables y_1, \dots, y_n are independent. Then in the class of generalized functions the following formulas are valid:

- (2) $\partial\theta(P_j)/\partial z_k = \delta(P_j)(\partial P_j/\partial z_k)$ for each $k = 1, \dots, n$, consequently,
- (3) $grad[\theta(P_1, \dots, P_m)] = \sum_{j=1}^m [\theta(P_1)\dots\theta(P_{j-1})\delta(P_j)(grad(P_j))\theta(P_{j+1})\dots\theta(P_m)]$,

where $grad g(z) := (\partial g(z)/\partial z_1, \dots, \partial g(z)/\partial z_n)$ (see Formulas III.1.3(1, 7, 7', 9) and III.1.9(6) [6]).

Let for the domain U in the Euclidean space \mathbf{R}^n the set of internal surfaces $cl_U[Int_{\mathbf{R}^n}(U) \cap \bigcup_{j \neq k} (\partial U_j \cap \partial U_k)]$ in U on which a function $g : U \rightarrow \mathcal{A}_v$ or its derivatives may be discontinuous is presented as the disjoint union of surfaces Γ_j , where each surface Γ^j is the boundary of the sub-domain

(4) $\mathcal{P}^j := \{P_{j,1}(z) \geq 0, \dots, P_{j,m_j}(z) \geq 0\}$, $\Gamma^j = \partial \mathcal{P}^j = \bigcup_{k=1}^{m_j} \partial^k \mathcal{P}^j$,

$m_j \in \mathbf{N}$ for each j , $cl_X(V)$ denotes the closure of a subset V in a topological space X , $Int_X(V)$ denotes the interior of V in X . By its construction $\{\mathcal{P}^j : j\}$ is the covering of U which is the refinement of the covering $\{U_k : k\}$, i.e. for each \mathcal{P}^j a number k exists so that $\mathcal{P}^j \subset U_k$ and $\partial \mathcal{P}^j \subset \partial U_k$ and $\bigcup_j \mathcal{P}^j = \bigcup_k U_k = U$. We put

(5) $h_j(z(x)) = h(x)|_{x \in \Gamma^j} := \lim_{y_{j,1} \downarrow 0, \dots, y_{j,n} \downarrow 0} g(z(x+y)) - \lim_{y_{j,1} \downarrow 0, \dots, y_{j,n} \downarrow 0} g(z(x-y))$

in accordance with the supposition made above that g can have only discontinuities of the first kind, i.e. the latter two limits exist on each Γ^j , where x and y are written in coordinates in \mathcal{P}^j , $z = z(x)$ denotes the same point in the global coordinates z of the Euclidean space \mathbf{R}^n . We take new continuous function

(6) $g^1(z) = g(z) - \sum_j h_j(z)\theta(P_{j,1}(z), \dots, P_{j,m_j}(z))$.

Let the partial derivatives and the gradient of the function g^1 be calculated piecewise on each U_k . Since g^1 is the continuous function, it is the regular generalized function by the definition, consequently, its partial derivatives exist as the generalized functions. If $g^1|_{U_j} \in C^1(U_j, \mathcal{A}_v)$, then $\partial g^1(z)/\partial z_k$ is the continuous function on U_j , i.e. in this case $\partial g^1(z)\chi_{U_j}(z)/\partial z_k$ is the regular generalized function on U_j for each k , where $\chi_G(z)$ denotes the characteristic function of a subset G in \mathcal{A}_v , $\chi_G(z) = 1$ for each $z \in G$, while $\chi(z) = 0$ for $z \in \mathcal{A}_v \setminus G$. Therefore, $g^1(z) = \sum_j g^1(z)\chi_{U_j \cup_{k < j} U_k}(z)$, where $U_0 = \emptyset$, $j, k \in \mathbf{N}$.

On the other hand, the function $g(z)$ is locally continuous on U , consequently, it defines the regular generalized function on the space $\mathcal{D}(U, \mathcal{A}_v)$ of test functions as

$[g, \omega] := \int_U g(z)\omega(z)\lambda(dz)$,

where λ is the Lebesgue measure on U induced by the Lebesgue measure on the real shadow \mathbf{R}^{2^v} of the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v , $\omega \in \mathcal{D}(U, \mathcal{A}_v)$. Thus partial derivatives of g exist as generalized functions.

In accordance with Formulas (2, 3, 6) we infer that the gradient of the function $g(z)$ on the domain U is the following:

(7) $grad g(z) = grad g^1(z) + \sum_j h_j(z)grad \theta(P_{j,1}, \dots, P_{j,m_j})$.

Thus Formulas (3, 7) permit calculations of coefficients of the partial differential operator Q given by Formula 14(7).

16. Line generalized functions.

Let U be a domain satisfying Conditions 1(D1, D2) and 15(D1, i - vii). We embed the Euclidean space \mathbf{R}^n into the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v , $2^{v-1} \leq n \leq 2^v - 1$, as the \mathbf{R} affine sub-space putting $\mathbf{R}^n \ni x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 i_{j_1} + \dots + x_n i_{j_n} + x^0 \in \mathcal{A}_v$, where $j_k \neq j_l$ for each $k \neq l$, x^0 is a marked Cayley-Dickson number, for example, $j_k = k$ for each k , $x^0 = 0$. Moreover, each z_j can be written in the z -representation in accordance with Formulas 1(1 - 3).

We denote by $\mathbf{P} = \mathbf{P}(U)$ the family of all rectifiable paths $\gamma : [a_\gamma, b_\gamma] \rightarrow U$ supplied with

the metric

$$(1) \rho(\gamma, \omega) := |\gamma(a) - \omega(a_\omega)| + \inf_\phi V_a^b(\gamma(t)) - \omega(\phi(t))$$

where the infimum is taken by all diffeomorphisms $\phi : [a_\gamma, b_\gamma] \rightarrow [a_\omega, b_\omega]$ so that $\phi(a_\gamma) = a_\omega$, $a = a_\gamma < b_\gamma = b$ (see §3).

Let us introduce a continuous mapping $g : \mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v) \times \mathbf{P}(U) \times \mathcal{V}(U, \mathcal{A}_v) \rightarrow Y$ such that its values are denoted by $[g; \omega, \gamma; \nu]$, where Y is a module over the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v , $\omega \in \mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v)$, $\gamma \in \mathbf{P}(U)$, $\mathcal{V}(U, \mathcal{A}_v)$ denotes the family of all functions on U with values in the Cayley-Dickson algebra of bounded variation (see §3), $\nu \in \mathcal{V}(U, \mathcal{A}_v)$. For the identity mapping $\nu(z) = id(z) = z$ values of this functional will be denoted shortly by $[g; \omega, \gamma]$. Suppose that this mapping g satisfies the following properties (G1 – G5):

(G1) $[g; \omega, \gamma; \nu]$ is bi- \mathbf{R} homogeneous and \mathcal{A}_v additive by a test function ω and by a function of bounded variation ν ;

(G2) $[g; \omega, \gamma; \nu] = [g; \omega, \gamma^1; \nu] + [g; \omega, \gamma^2; \nu]$ for each γ, γ^1 and $\gamma^2 \in \mathbf{P}(U)$ such that $\gamma(t) = \gamma^1(t)$ for all $t \in [a_{\gamma^1}, b_{\gamma^1}]$ and $\gamma(t) = \gamma^2(t)$ for any $t \in [a_{\gamma^2}, b_{\gamma^2}]$ and $a_{\gamma^1} = a_\gamma$ and $a_{\gamma^2} = b_{\gamma^1}$ and $b_\gamma = b_{\gamma^2}$.

(G3) If a rectifiable curve γ does not intersect a support of a test function ω or a function of bounded variation ν , $\gamma([a, b] \cap (supp(\omega) \cap supp(\nu))) = \emptyset$, then $[g; \omega, \gamma; \nu] = 0$, where $supp(\omega) := cl\{z \in U : \omega(z) \neq 0\}$.

Further we put

$$(G4) [\partial^{|m|}g(z)/\partial z_0^{m_0} \dots \partial z_{2^v-1}^{m_{2^v-1}}; \omega, \gamma] := (-1)^{|m|} [g; \partial^{|m|}\omega(z)/\partial z_0^{m_0} \dots \partial z_{2^v-1}^{m_{2^v-1}}, \gamma]$$

for each $m = (m_0, \dots, m_{2^v-1})$, m_j is a non-negative integer $0 \leq m_j \in \mathbf{Z}$ for each j , $|m| := m_0 + \dots + m_{2^v-1}$. In the case of a super-differentiable function ω and a generalized function g we also put

$$(G5) [(d^k g(z)/dz^k) \cdot (h_1, \dots, h_k); \omega, \gamma] := (-1)^k [g; (d^k \omega(z)/dz^k) \cdot (h_1, \dots, h_k), \gamma]$$

for any natural number $k \in \mathbf{N}$ and Cayley-Dickson numbers $h_1, \dots, h_k \in \mathcal{A}_v$.

Then g is called the Y valued line generalized function on $\mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v) \times \mathbf{P}(U) \times \mathcal{V}(U, \mathcal{A}_v)$. Analogously it can be defined on $\mathcal{D}(U, \mathcal{A}_v) \times \mathbf{P}(U) \times \mathcal{V}(U, \mathcal{A}_v)$ (see also §9). If $Y = \mathcal{A}_v$ we call it simply the line generalized function, while for $Y = L_q(\mathcal{A}_v^k, \mathcal{A}_v^l)$ we call it the line generalized operator valued function, $k, l \geq 1$, omitting "on $\mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v) \times \mathbf{P}(U) \times \mathcal{V}(U, \mathcal{A}_v)$ " or "line" for short, when it is specified. Their spaces we denote by $L_q(\mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v) \times \mathbf{P}(U) \times \mathcal{V}(U, \mathcal{A}_v); Y)$. Thus if g is a generalized function, then Formula (G5) defines the operator valued generalized function $d^k g(z)/dz^k$ with $k \in \mathbf{N}$ and $l = 1$.

If g is a continuous function on U (see §3), then the formula

$$(G6) [g; \omega, \gamma; \nu] = \int_\gamma g(y)\omega(y)d\nu(y)$$

defines the generalized function. If $\hat{f}(z)$ is a continuous $L_q(\mathcal{A}_v, \mathcal{A}_v)$ valued function on U , then it defines the generalized operator valued function with $Y = L_q(\mathcal{A}_v, \mathcal{A}_v)$ such that

$$(G7) [\hat{f}; \omega, \gamma; \nu] = \int_\gamma \{\hat{f}(z) \cdot \omega(z)\} d\nu(z).$$

Particularly, for $\nu = id$ we certainly have $d\nu(z) = dz$.

We consider on $L_q(\mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v) \times \mathbf{P}(U) \times \mathcal{V}(U, \mathcal{A}_v); Y)$ the strong topology:

(G8) $\lim_l f^l = f$ means that for each marked test function $\omega \in \mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v)$ and rectifiable path $\gamma \in \mathbf{P}(U)$ and function of bounded variation $\nu \in \mathcal{V}(U, \mathcal{A}_v)$ the limit relative to the norm in Y exists

$$\lim_l [f^l; \omega, \gamma; \nu] = [f; \omega, \gamma; \nu].$$

17. Line integration of generalized functions.

Let $C_{ab}^m(V, \mathcal{A}_v)$ denote the \mathbf{R} linear space and right \mathcal{A}_v module of all functions $\gamma : V \rightarrow \mathcal{A}_v$ such that $\gamma(z)$ and each its derivative $\partial^{|k|}g(z)/\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_n^{m_n}$ for $1 \leq |k| \leq m$ is absolutely continuous on V (see §§3 and 16). This definition means that $C^{m+1}(V, \mathcal{A}_v) \subset C_{ab}^m(V, \mathcal{A}_v)$, where $C^m(V, \mathcal{A}_v)$ denotes the family of all m times continuously differentiable functions on a domain V either open or canonical closed in \mathbf{R}^n , which may be a real shadow

of U as well.

17.1. Lemma. *Let $\gamma \in C_{ab}^m([a, b], \mathcal{A}_v) \cap \mathbf{P}(U)$ and $\omega \in \mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v)$ and $\nu \in C_{ab}^0(U, \mathcal{A}_v)$ for $m = 0$ or $\nu = id$ for $m \geq 1$, where $0 \leq m \in \mathbf{Z}$, then a line generalized function $[g; \omega, \gamma|_{[a,x]}; \nu]$ is continuous for $m = 0$ or of class C^m by the parameter $x \in [a, b]$ for $m \geq 1$.*

Proof. For absolutely continuous functions $\gamma(t)$ and ν (i.e. when $m = 0$) the continuity by the parameter x follows from the definition of the line generalized function, since $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \rho(\gamma|_{[a,x]}, \gamma|_{[a,x+\Delta x]}) = 0$ and

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \rho(\nu \circ \gamma|_{[a,x]}, \nu \circ \gamma|_{[a,x+\Delta x]}) = 0.$$

Consider now the case $m \geq 1$ and $\nu = id$. In view of properties 16(G1, G2) for any $\Delta x \neq 0$ so that $x \in (a, b] := \{t \in \mathbf{R} : a < t \leq b\}$ and $x + \Delta x \in (a, b) := \{t \in \mathbf{R} : a < t < b\}$ the difference quotient satisfies the equalities:

$$(1) \{[g; \omega, \gamma|_{[a,x+\Delta x]}] - [g; \omega, \gamma|_{[a,x]}]\} / \Delta x = [g; \omega / \Delta x, \gamma \circ \phi|_{[a,x]}] - [g; \omega / \Delta x, \gamma|_{[a,x]}],$$

where $\phi : [a, x] \rightarrow [a, x + \Delta x]$ is a diffeomorphism of $[a, x]$ onto $[a, x + \Delta x]$ with $\phi(a) = a$. Therefore, $\Delta \omega := \omega(z + \Delta z) - \omega(z)$ for $z = \gamma(t)$ and $z + \Delta z = \gamma(\phi(t))$, $t \in [a, x]$ in the considered case. Using Conditions (G1, G3) one can mention that if $\omega = \omega^1$ on an open neighborhood V of γ in U , then

$$(2) [g; \omega, \gamma] = [g; \omega^1, \gamma],$$

since $\omega - \omega^1 = 0$ on V and $\gamma \cap \text{supp}(\omega - \omega^1) = \emptyset$.

From Conditions 16(G1, G4) and Formula (2) we deduce that

$$(3) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{[g; \omega, \gamma|_{[a,x+\Delta x]}] - [g; \omega, \gamma|_{[a,x]}]\} / \Delta x = \sum_{j=0}^{2^v-1} [g; (\partial \omega(z) / \partial z_j), (d\gamma_j(t) / dt) \gamma|_{[a,x]}],$$

where $z_j' = d\gamma_j(t) / dt$ for $z = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$, since each partial derivative of the test function ω is again the test function. From the first part of the proof we get that $[g; \omega, \gamma|_{[a,x]}]$ is of class C^1 by the parameter x , since the product $(d\gamma_j(t) / dt) \gamma(t)$ of absolutely continuous functions $(d\gamma_j(t) / dt)$ and $\gamma(t)$ is absolutely continuous for each j . Repeating this proof by induction for $k = 1, \dots, m$ one gets the statement of this lemma for $\gamma \in C_{ab}^m([a, b], \mathcal{A}_v) \cap \mathbf{P}(U)$.

17.2. Lemma. *If γ is a rectifiable path, then a line generalized function $[g; \omega, \gamma|_{[a,x]}]$ is of bounded variation by the parameter $x \in [a, b]$.*

Proof. Let $\gamma \in \mathbf{P}(U)$ be a rectifiable path in U , $\gamma : [a, b] \rightarrow U$. We can present γ in the form

$$(1) \gamma(t) = \sum_{j=0}^{2^v-1} \gamma_j(t) i_j,$$

where each function $\gamma_j(t)$ is real-valued. Therefore, $\gamma_j(t)$ is continuous and of bounded variation for each j , since γ is such. Thus the function $\omega(\gamma(t))$ is of bounded variation $V_a^b \omega(\gamma) < \infty$, since ω is infinite differentiable and $\gamma([a, b])$ is compact.

On the other hand, each function $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ of bounded variation can be written as the difference $f = f^1 - f^2$ of two monotone non-decreasing functions f^1 and f^2 of bounded variations: $f^1(t) := V_a^t f$ and $f^2(t) = f^1(t) - f(t)$ for each $t \in [a, b]$ (see [5, 16]). This means that $f^k = g^k + h^k$, where a function g^k is continuous monotone and of bounded variation, while h^k is a monotone step function, where $k = 1, 2$. When the function f is continuous one gets $f = g^1 - g^2$. For a monotone non-decreasing function p one has $V_a^t p = p(t) - p(a)$.

In view of Property 17(G1) we infer that

$$(2) [g; \omega, \gamma|_{[a,x]}] = \sum_{j=0}^{2^v-1} [g_j; \omega, \gamma|_{[a,x]}] i_j,$$

where the function $[g_j; \omega, \gamma|_{[a,x]}]$ by x is real-valued for any $\omega \in \mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v)$ and $\gamma \in \mathbf{P}(U)$ for all $j = 0, \dots, 2^v - 1$.

The metric space $\mathbf{P}(\bar{U})$ is complete, where $\bar{U} = cl(U)$. Indeed, let g^n be a sequence of rectifiable paths in \bar{U} fundamental relative to the metric ρ given by Formula 16(1). Using diffeomorphism preserving orientations of segments we can consider without loss of generality that each path g^n is defined on the unit segment $[0, 1]$, $a = 0$, $b = 1$. It is lightly to mention that

$$(3) |g(a) - f(a)| + V_a^b(g - f) \geq \sup_{t \in [a,b]} |g(t) - f(t)|$$

for any two functions of bounded variation, $f, g : [a, b] \rightarrow \bar{U}$. For each $\epsilon > 0$ a natural number $n_0 = n_0(\epsilon)$ exists so that $\rho(g^n, g^m) < \epsilon/2$ for all $n, m \geq n_0$. That is $\phi^n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ diffeomorphisms exist such that

$|g^n(a) - g^m(a)| + V_a^b(g^n \circ \phi^n - g^m \circ \phi^m) < \epsilon$ for all $n, m \geq n_0$, since $\phi^m \circ (\phi^n)^{-1}$ is also the diffeomorphism preserving the orientation of the segment. Using induction by $\epsilon = 1/l$ with $l \in \mathbf{N}$ one chooses a sequence of diffeomorphisms ϕ^n such that for each $l \in \mathbf{N}$ a natural number $n_0 = n_0(l)$ exists such that

$$|g^n(a) - g^m(a)| + V_a^b(g^n \circ \phi^n - g^m \circ \phi^m) < 1/l \text{ for all } n, m \geq n_0(l), \text{ consequently,}$$

$$\sup_{t \in [a,b]} |g^n(\phi^n(t)) - g^m(\phi^m(t))| < 1/l \text{ for all } n, m \geq n_0(l).$$

Thus the sequence $g^n \circ \phi^n$ is fundamental in $C^0([a, b], \bar{U})$. The latter metric space is complete relative to the metric

$$d(f, g) := \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|,$$

since from the completeness of the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v considered as the normed space over the real field the completeness of the closed subset \bar{U} follows (see also Chapter 8 in [3]). Therefore, the sequence $g^n \circ \phi^n$ converges to a continuous function $f : [a, b] \rightarrow \bar{U}$. On the other hand, $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(g^n \circ \phi^n, g^m \circ \phi^m) = \rho(g^n \circ \phi^n, f) \leq 1/l$ for each $n > n_0(l)$, $l \in \mathbf{N}$. The function $g^n \circ \phi^n$ is of bounded variation, consequently, the function f is also of bounded variation. That is $f \in \mathbf{P}(\bar{U})$. Thus $\mathbf{P}(\bar{U})$ is complete.

Take any sequence γ^n of $C_{ab}^2([a, b], \mathcal{A}_v)$ paths in U converging to γ relative to the metric ρ on $\mathbf{P}(\bar{U})$ and the latter metric space is complete as it was demonstrated above. In view of Formula 17.1(3) and Property 16(G3) the sequence $[g; \omega, \gamma^n|_{[a,x]}$] is fundamental in $\mathbf{P}(\bar{U})$. On the other hand, the generalized function g is continuous on $\mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v) \times \mathbf{P}(\bar{U})$, consequently, the sequence $[g; \omega, \gamma^n|_{[a,x]}$] converges in $\mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v) \times \mathbf{P}(\bar{U})$ to $[g; \omega, \gamma|_{[a,x]}$] for each $a < x \leq b$, hence $[g; \omega, \gamma|_{[a,x]}] = \lim_n [g; \omega, \gamma^n|_{[a,x]}$] in $\mathbf{P}(\bar{U})$. By the conditions of this lemma $[g; \omega, \gamma|_{[a,x]}] \in \mathbf{P}(U)$, since $\gamma([a, b]) \subset U$. Thus the function $[g; \omega, \gamma|_{[a,x]}$] by $x \in [a, b]$ is of bounded variation:

$$V_a^b[g; \omega, \gamma|_{[a,x]}] < \infty.$$

18. Definition. Let f and η be two line generalized functions on $\mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v) \times \mathbf{P}(U) \times \mathcal{V}(U, \mathcal{A}_v)$. We define a line functional with values denoted by

$$[\int_\gamma f d\eta, \omega^1 \otimes \omega] := [\hat{f}; \omega^1, \gamma; [\eta; \omega, \kappa]]|_{\kappa=\gamma} = [\hat{f}; \omega^1, *; [\eta; \omega, *]](\gamma),$$

where $\gamma \in \mathbf{P}(U)$ is a rectifiable path in U , $\omega, \omega^1 \in \mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v)$ are any test functions. The functional $\int_\gamma f d\eta$ is called the non-commutative line integral over the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v of line generalized functions f by η . Quite analogously such integral is defined for line generalized functions f and η on $\mathcal{D}(U, \mathcal{A}_v) \times \mathbf{P}(U) \times \mathcal{V}(U, \mathcal{A}_v)$.

19. Theorem. Let F and Ξ be two generalized functions on U , $F, \Xi \in \mathcal{B}'(U, \mathcal{A}_v)$ or $F, \Xi \in \mathcal{D}'(U, \mathcal{A}_v)$, then the non-commutative line integral over the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v of line generalized functions f by ξ exists, where f is induced by F and ξ by Ξ .

Proof. At first it easy to mention that Definition 18 is justified by Definition 16 and Lemma 17.2, since the function $[\eta; \omega, \kappa|_{[a,x]}$] is of bounded variation by the variable x for each rectifiable path $\kappa \in \mathbf{P}(U)$ and any test function ω (see Properties 16(G1 – G3)), while the operator \hat{f} always exists in the class of generalized line operators, $\hat{f} = dg/dz, (dg(z)/dz).1 = f(z)$ (see Property 16(G5)).

Each generalized function $f \in \mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v)$ can be written in the form:

$$(1) [f, \omega] = \sum_{j,k=0}^{2^v-1} [f_{j,k}, \omega_k] i_j,$$

where each $f_{j,k}$ is a real valued generalized function, $f_{j,k} \in \mathcal{B}'(U, \mathbf{R})$, $\omega = \sum_k \omega_k i_k$, $\omega_k \in \mathcal{B}(U, \mathbf{R})$ is a real valued test function, $[f_{j,k}, \omega_k] = [f_j, \omega_k i_k]$, $[f, \omega] = \sum_j [f_j, \omega] i_j$, $[f_j, \omega] \in \mathbf{R}$ for each $j = 0, \dots, 2^v - 1$ and $\omega \in \mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v)$, i_0, \dots, i_{2^v-1} is the standard base of generators of the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v . It is well-known that in the space $\mathcal{B}'(U, \mathbf{R})$ of generalized functions the space $\mathcal{B}(U, \mathbf{R})$ of test functions is everywhere dense (see [6] and §9 above). In view of the

decomposition given by Formula (1) we get that $\mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v)$ is everywhere dense in $\mathcal{B}'(U, \mathcal{A}_v)$. Thus sequences of test functions F^l and Ξ^l exist converging to F and Ξ correspondingly.

Without loss of generality we can embed U into \mathcal{A}_v taking its ϵ -enlargement (open neighborhood) in case of necessity. So it is sufficient to treat the case of a domain U in \mathcal{A}_v . In view of the analog of the Stone-Weierstrass theorem (see [22, 23]) in $C^0(Q, \mathcal{A}_v)$ for each compact canonical closed subset in \mathcal{A}_v the family of all super-differentiable on Q functions is dense, consequently, the space $\mathcal{H}(U, \mathcal{A}_v)$ of all super-differentiable functions on U is everywhere dense in $\mathcal{D}(U, \mathcal{A}_v)$. For each rectifiable path γ in the domain U a compact canonical closed domain Q exists $Q \subset U$ so that $\gamma([a, b]) \subset Q$. Therefore, it is sufficient to consider test functions with compact supports in Q . Thus we take super-differentiable functions F^n and Ξ^n .

Let γ^l be a sequence of rectifiable paths continuously differentiable, $\gamma^l \in C^1([a, b], \mathcal{A}_v)$, converging to γ in $\mathbf{P}(U)$ relative to the metric ρ .

Then for any super-differentiable functions p and q we have

$$(2) \int_{\gamma^l} p(z) dq(z) = \int_a^b (d\zeta(z)/dz) \cdot [(dq(z)/dz) \cdot d\gamma^l(t)]|_{z=\gamma^l(t)} \\ = \int_a^b \sum_{k=0}^{2^v-1} (\partial\zeta(z)/\partial z_k) [\sum_{j=0}^{2^v-1} (\partial q_k(z)/\partial z_j) d\gamma_j^l(t)],$$

since each super-differentiable function is Fréchet differentiable, $d\gamma_j^l(t) = \gamma_j^{l'}(t)dt$, where $(d\zeta(z)/dz) \cdot 1 = p(z)$ and for the corresponding phrases of them for each $z \in U$. On the other hand, the functional

(3) $\int_a^b \sum_{k=0}^{2^v-1} (\partial\zeta(z)/\partial z_k) [\sum_{j=0}^{2^v-1} (\partial q_k(z)/\partial z_j) d\gamma_j^l(t)]$ is continuous on $\mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v)^2 \times \mathbf{P}(U)$, i.e. for $\zeta, p \in \mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v)$ and $\gamma \in \mathbf{P}(U)$ as well.

For a rectifiable path γ in U it is possible to take a sequence of open ϵ neighborhoods $\Gamma^\epsilon := \bigcup_{z \in \gamma([a, b])} \check{B}(\mathcal{A}_v, z, \epsilon)$, $\epsilon = \epsilon(l) = 1/l$, where $\check{B}(\mathcal{A}_v, z, \epsilon) := \{y : y \in \mathcal{A}_v; |y - z| < \epsilon\}$. Therefore, for each function ν of bounded variation on U and each rectifiable path γ in U a sequence of test functions θ^l with supports contained in $\Gamma^{1/l}$ exists such that

$$\lim_l \int_U [(d\zeta(z)/dz) \cdot \theta^l(z)] \lambda(dz) = \int_\gamma p(z) d\nu(z)$$

for each super-differentiable test functions $p, \zeta \in \mathcal{H}(U, \mathcal{A}_v)$ with $(d\zeta(z)/dz) \cdot 1 = p(z)$ on U , where λ denotes the Lebesgue measure on U induced by the Lebesgue measure on the real shadow \mathbf{R}^{2^v} of the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v , where $\mathcal{H}(U, \mathcal{A}_v)$ denotes the family of all super-differentiable functions on the domain U with values in the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v .

Using the latter property and in accordance with Formulas (1 – 3) and 16(G6, G7) we put:

$$(4) [\xi; \omega, \gamma] := \lim_l [\Xi^l; \omega, \gamma] = \lim_l \int_\gamma \Xi^l(y) \omega(y) dy \text{ and}$$

$$(5) [\hat{f}; \omega^1, \gamma; \nu] = \lim_l [dG^l/dz; \omega^1, \gamma; \nu] = \lim_l \int_\gamma \{(dG^l(z)/dz) \cdot \omega^1(z)\} d\nu(z)$$

for any $\nu \in \mathcal{V}(U, \mathcal{A}_v)$, where $(dG^l/dz) \cdot 1 = F^l(z)$ on U .

Therefore Ξ^l converges to ξ and dG^l/dz converges to \hat{f} , where $[\xi; \omega, *](\kappa|_{[a, x]}) = [\xi; \omega, \kappa|_{[a, x]})$ for each $\kappa \in \mathbf{P}(U)$, $a < x \leq b$ (see Lemma 17.2). Therefore, from Formulas (2 – 5) and Lemmas 17.1 and 17.2 we infer that

$$(6) [\int_\gamma f d\eta, \omega^1 \otimes \omega] = \lim_l [dG^l/dz; \omega^1, *; [\Xi^l; \omega, *]](\gamma^l) \\ = \lim_l \int_{\gamma^l} [dG^l/dz; \omega^1, *; d[\Xi^l; \omega, *](z)],$$

where $z = \gamma^l(t)$, $a \leq t \leq b$.

19.1. Corollary. *If $F : U \rightarrow \mathcal{A}_v$ is a continuous function on U and Ξ is a generalized function on U , then the non-commutative line integral over the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v of line generalized functions f by ξ*

$$(1) [\int_\gamma f d\xi, \omega^1 \otimes \omega]$$

exists, where f is induced by F and ξ by Ξ .

Proof. This follows from Theorem 19 and the fact that each continuous function F on U gives the corresponding regular line operator valued generalized function on the space of test functions ω^1 in $\mathcal{B}(U, \mathcal{A}_v)$ or $\mathcal{D}(U, \mathcal{A}_v)$:

$$[\hat{F}; \omega^1, \gamma] = \int_\gamma (\hat{F}(z) \cdot \omega^1(z)) dz.$$

In this case one can take the marked function $\omega^1 = \chi_V$, where V is a compact canonical closed sub-domain in U , since $\gamma([a, b])$ is compact for each rectifiable path γ in U so that $\gamma([a, b]) \subset V$ for the corresponding compact sub-domain V . This gives $\hat{F}.\chi_V(z) = F(z)$ for each $z \in V$ and $\hat{F}.\chi_V(z) = 0$ for each $z \in U \setminus V$.

19.2. Corollary. *If $F \in \mathcal{B}'(U, \mathcal{A}_v)$ or $F \in \mathcal{D}'(U, \mathcal{A}_v)$ is a generalized function on U and Ξ is a function of bounded variation on U , then the non-commutative line integral over the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v of line generalized functions f by ξ*

$$(1) \left[\int_{\gamma} f d\xi, \omega^1 \otimes \omega \right]$$

exists, where f is induced by F and ξ by Ξ .

Proof. In this case we put

$$[\xi; \omega, \kappa] := \int_{\kappa} \omega(z) d\Xi(z)$$

for each test function ω and each rectifiable path κ in U . It is sufficient to take marked test function $\omega(z) = 1$ for each $z \in U$ that gives $d[\xi; 1, *] = d\Xi$. Thus this corollary follows from Theorem 19.

19.3. Corollary. *If F is a continuous function on U and Ξ is a function of bounded variation on U , then the non-commutative line integral over the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v of line generalized functions f by ξ*

$$(1) \left[\int_{\gamma} f d\xi, \omega^1 \otimes \omega \right]$$

exists, where f is induced by F and ξ by Ξ . Moreover, this integral coincides with the non-commutative line integral from §3 for the unit test functions $\omega(z) = \omega^1(z) = 1$ for each $z \in U$:

$$(2) \left[\int_{\gamma} f d\xi, 1 \otimes 1 \right] = \int_{\gamma} f d\xi.$$

Proof. This follows from the combination of two preceding corollaries, since for a rectifiable path γ its image in U is contained in a compact sub-domain V in U , i.e. $\gamma([a, b]) \subset V$.

19.4. Convolution formula for solutions of partial differential equations.

Using convolutions of generalized functions a solution of the equation

$$(C1) (\Upsilon^s + \beta)f = g \text{ in } \mathcal{B}(\mathbf{R}^n, Y) \text{ or in the space } \mathcal{B}'(\mathbf{R}^n, Y)_l \text{ is:}$$

$$(C2) f = \mathcal{E}_{\Upsilon^s + \beta} * g,$$

where $\mathcal{E}_{\Upsilon^s + \beta}$ denotes a fundamental solution of the equation

$$(C3) (\Upsilon^s + \beta)\mathcal{E}_{\Upsilon^s + \beta} = \delta,$$

$(\delta, \phi) = \phi(0)$ (see §9). The fundamental solution of the equation

$$(C4) A_0 \mathcal{V} = \delta \text{ with } A_0 = (\Upsilon^s + \beta)(\Upsilon_1^{s_1} + \beta_1)$$

can be written as the convolution

$$(C5) \mathcal{V} =: \mathcal{V}_{A_0} = \mathcal{E}_{\Upsilon^s + \beta} * \mathcal{E}_{\Upsilon_1^{s_1} + \beta_1}.$$

In view of Formulas 4(7–9) each generalized function $\mathcal{E}_{\Upsilon^s + \beta}$ can also be found from the elliptic partial differential equation

$$(C6) \Xi_{\beta} \Psi_{\Upsilon^s + \beta} = \delta \text{ by the formula:}$$

$$(C7) \mathcal{E}_{\Upsilon^s + \beta} = [(\Upsilon^s + \beta)^*] \Psi_{\Upsilon^s + \beta}, \text{ where}$$

$$(C8) \Xi_{\beta} := (\Upsilon^s + \beta)(\Upsilon^s + \beta)^*$$

(see §33 [28]).

20. Poly-functionals. Let $\mathbf{a}_k : \mathcal{B}(U, \mathcal{A}_r)^k \rightarrow \mathcal{A}_r$ or $\mathbf{a}_k : \mathcal{D}(U, \mathcal{A}_r)^k \rightarrow \mathcal{A}_r$ be a continuous mapping satisfying the following three conditions:

$$(P1) [\mathbf{a}_k, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k] \text{ is } \mathbf{R} \text{ homogeneous}$$

$$[\mathbf{a}_k, \omega^1 \otimes \dots \otimes (\omega^l t) \otimes \dots \otimes \omega^k] = [\mathbf{a}_k, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^l \otimes \dots \otimes \omega^k] t = [\mathbf{a}_k t, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k]$$

for each $t \in \mathbf{R}$ and \mathcal{A}_r additive

$$[\mathbf{a}_k, \omega^1 \otimes \dots \otimes (\omega^l + \kappa^l) \otimes \dots \otimes \omega^k] = [\mathbf{a}_k, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^l \otimes \dots \otimes \omega^k] + [\mathbf{a}_k, \omega^1 \otimes \dots \otimes \kappa^l \otimes \dots \otimes \omega^k]$$

by any \mathcal{A}_r valued test functions ω^l and κ^l , when other are marked, $l = 1, \dots, k$, i.e. it is k \mathbf{R} linear and k \mathcal{A}_r additive, where $[\mathbf{a}_k, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k]$ denotes a value of \mathbf{a}_k on given test \mathcal{A}_r valued functions $\omega^1, \dots, \omega^k$;

(P2) $[\mathbf{a}_k \alpha, \omega^1 \otimes \dots \otimes (\omega^l \beta) \otimes \dots \otimes \omega^k] = ([\mathbf{a}_k, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^l \otimes \dots \otimes \omega^k] \alpha) \beta = [(\mathbf{a}_k \alpha) \beta, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^l \otimes \dots \otimes \omega^k]$ for all real-valued test functions and $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_r$;

(P3) $[\mathbf{a}_k, \omega^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \omega^{\sigma(k)}] = [\mathbf{a}_k, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k]$ for all real-valued test functions and each transposition σ , i.e. bijective surjective mapping $\sigma : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$.

Then \mathbf{a}_k will be called the symmetric k \mathbf{R} linear k \mathcal{A}_r additive continuous functional, $1 \leq k \in \mathbf{Z}$. The family of all such symmetric functionals is denoted by $\mathcal{B}'_{k,s}(U, \mathcal{A}_v)$ or $\mathcal{D}'_{k,s}(U, \mathcal{A}_r)$ correspondingly. A functional satisfying Conditions (P1, P2) is called a continuous k -functional over \mathcal{A}_r and their family is denoted by $\mathcal{B}'_k(U, \mathcal{A}_r)$ or $\mathcal{D}'_k(U, \mathcal{A}_r)$. When a situation is outlined we may omit for short "continuous" or " k \mathbf{R} linear k \mathcal{A}_v additive".

The sum of two k -functionals over the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_r is prescribed by the equality:

$$(P4) [\mathbf{a}_k + \mathbf{b}_k, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k] = [\mathbf{a}_k, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k] + [\mathbf{b}_k, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k]$$

for each test functions. Using Formula (P4) each k -functional can be written as

$$(1) [\mathbf{a}_k, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k] = [\mathbf{a}_{k,0} i_0, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k] + \dots + [\mathbf{a}_{k,2^r-1} i_{2^r-1}, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k],$$

where $[\mathbf{a}_{k,j}, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k] \in \mathbf{R}$ is real for all real-valued test functions $\omega^1, \dots, \omega^k$ and each j ; i_0, \dots, i_{2^r-1} denote the standard generators of the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_r .

The direct product $\mathbf{a}_k \otimes \mathbf{b}_p$ of two functionals \mathbf{a}_k and \mathbf{b}_p for the same space of test functions is a $k + p$ -functional over \mathcal{A}_r given by the following three conditions:

$$(P5) [\mathbf{a}_k \otimes \mathbf{b}_p, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^{k+p}] = [\mathbf{a}_k, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k] [\mathbf{b}_p, \omega^{k+1} \otimes \dots \otimes \omega^{k+p}]$$

for any real-valued test functions $\omega^1, \dots, \omega^{k+p}$;

$$(P6) \text{ if } [\mathbf{b}_p, \omega^{k+1} \otimes \dots \otimes \omega^{k+p}] \in \mathbf{R} \text{ is real for any real-valued test functions, then}$$

$$[(\mathbf{a}_k N_1) \otimes (\mathbf{b}_p N_2), \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^{k+p}] = ([\mathbf{a}_k \otimes \mathbf{b}_p, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^{k+p}] N_1) N_2$$

for any real-valued test functions $\omega^1, \dots, \omega^{k+p}$ and Cayley-Dickson numbers $N_1, N_2 \in \mathcal{A}_r$;

$$(P7) \text{ if } [\mathbf{a}_k, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k] \in \mathbf{R} \text{ and } [\mathbf{b}_p, \omega^{k+1} \otimes \dots \otimes \omega^{k+p}] \in \mathbf{R} \text{ are real for any real-valued test functions, then}$$

$$[\mathbf{a}_k \otimes \mathbf{b}_p, \omega^1 \otimes \dots \otimes (\omega^l N_1) \otimes \dots \otimes \omega^{k+p}] = [\mathbf{a}_k \otimes \mathbf{b}_p, \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^{k+p}] N_1$$

for any real-valued test functions $\omega^1, \dots, \omega^{k+p}$ and each Cayley-Dickson number $N_1 \in \mathcal{A}_r$ for each $l = 1, \dots, k + p$.

Therefore, we can now consider a partial differential operator of order u acting on a generalized function $f \in \mathcal{B}'(U, \mathcal{A}_r)$ or $f \in \mathcal{D}'(U, \mathcal{A}_r)$ and with generalized coefficients either $\mathbf{a}_\alpha \in \mathcal{B}'_{|\alpha|}(U, \mathcal{A}_r)$ or all $\mathbf{a}_\alpha \in \mathcal{D}'_{|\alpha|}(U, \mathcal{A}_r)$ correspondingly:

$$(1) Af(x) = \sum_{|\alpha| \leq u} (\partial^\alpha f(x)) \otimes [(\mathbf{a}_\alpha(x)) \otimes 1^{\otimes(u-|\alpha|)}],$$

where $\partial^\alpha f = \partial^{|\alpha|} f(x) / \partial x_0^{\alpha_0} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, $x = x_0 i_0 + \dots + x_n i_n$, $x_j \in \mathbf{R}$ for each j , $1 \leq n = 2^r - 1$, $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n$, $0 \leq \alpha_j \in \mathbf{Z}$, $[1, \omega] := \int_U \omega(y) \lambda(dy)$, λ denotes the Lebesgue measure on U , for convenience $1^{\otimes 0}$ means the multiplication on the unit $1 \in \mathbf{R}$. The partial differential equation

$$(2) Af = g \text{ in terms of generalized functions has a solution } f \text{ means by the definition that}$$

$$(3) [Af, \omega^{\otimes(u+1)}] = [g, \omega^{\otimes(u+1)}]$$

for each real-valued test function ω on U , where $\omega^{\otimes k} = \omega \otimes \dots \otimes \omega$ denotes the k times direct product of a test functions ω .

21. Theorem. Let $A = A_u$ be a partial differential operator with generalized over the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_r coefficients of an even order $u = 2s$ on U such that each \mathbf{a}_α is symmetric for $|\alpha| = u$ and A has the form

$$(4) Af = (B_{u,1} f) c_{u,1} + \dots + (B_{u,k} f) c_{u,k}, \text{ where each}$$

$$(5) B_{u,p} = B_{u,p,0} + Q_{u-1,p}$$

is a partial differential operator by variables $x_{m_{u,1}+\dots+m_{u,p-1}+1}, \dots, x_{m_{u,1}+\dots+m_{u,p}}$ and of the order u , $m_{u,0} = 0$, $c_{u,k}(x) \in \mathcal{A}_r$ for each k , its principal part

(6) $B_{u,p,0}f = \sum_{|\alpha|=s} (\partial^{2\alpha} f) \otimes \mathbf{a}_{p,2\alpha}(x)$
 is elliptic, i.e. $\sum_{|\alpha|=s} y^{2\alpha} [\mathbf{a}_{p,2\alpha}, \omega^{\otimes 2s}] \geq 0$ for all $y_{k(1)}, \dots, y_{k(m_{u,p})}$ in \mathbf{R} with $k(1) = m_{u,1} + \dots + m_{u,p-1} + 1, \dots, k(m_{u,p}) = m_{u,1} + \dots + m_{u,p}$, $y^\beta := y_{k(1)}^{\beta_{k_1}} \dots y_{k(m_{u,p})}^{\beta_{k(m_{u,p})}}$ and $[\mathbf{a}_{p,2\alpha}, \omega^{\otimes 2s}] \geq 0$ for each real test function ω , either $0 \leq r \leq 3$ and f is with values in \mathcal{A}_r , or $r \geq 4$ and f is real-valued on real-valued test functions. Then three partial differential operators Υ^s and Υ_1^s and Q of orders s and p with $p \leq u - 1$ with generalized on U coefficients with values in \mathcal{A}_v exist such that

(7) $[Af, \omega^{\otimes(u+1)}] = [\Upsilon^s(\Upsilon_1^s f) + Qf, \omega^{\otimes(u+1)}]$ for each real-valued test function ω on U .

Proof. If a_{2s} is a symmetric functional and $[\mathbf{c}_s, \omega^{\otimes s}] = [\mathbf{a}_{2s}, \omega^{\otimes 2s}]^{1/2}$ for each real-valued test function ω , then by Formulas 20(P1, P2) this functional \mathbf{c}_s has an extension up to a continuous s -functional over the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_r . This is sufficient for Formula (7), where only real-valued test functions ω are taken.

Consider a continuous p -functional \mathbf{c}_p over \mathcal{A}_v , $p \in \mathbf{N}$. Supply the domain U with the metric induced from the corresponding Euclidean space or the Cayley-Dickson algebra in which U is embedded. It is possible to take a sequence of non-negative test functions $\iota\omega$ on U with a support $supp(\iota\omega)$ contained in the ball $B(U, z, 1/l)$ with center z and radius $1/l$ and $\iota\omega$ positive on some open neighborhood of a marked point z in U so that $\int_U \iota\omega(z) \lambda(dz) = 1$ for each $l \in \mathbf{N}$. If the p -functional \mathbf{c}_p is regular and realized by a continuous \mathcal{A}_v valued function g on U^p , then $\lim_l [\mathbf{c}_p, \omega^{\otimes p}] = g(z, \dots, z)$. Thus the partial differential equation 20(2) for regular functionals and their derivatives implies the classical partial differential equation 2(1).

Therefore, the statement of this theorem follows from Theorem 10, and §§14, 15 and 20, since the spaces of test functions are dense in the spaces of generalized functions (see §19).

22. Corollary. If $Af = \sum_{j,k} (\partial^2 f(z) / \partial z_k \partial z_j) \otimes a_{j,k}(z) + \sum_j (\partial f(z) / \partial z_j) \otimes b_j(z) \otimes 1 + f(z) \otimes \eta(z) \otimes 1$ is a second order partial differential operator with generalized coefficients in $\mathcal{B}'(U, \mathcal{A}_r)$ or $\mathcal{D}'(U, \mathcal{A}_r)$, where each $a_{j,k}$ is symmetric, f and \mathcal{A}_r are as in §20, then three partial differential operators $\Upsilon + \beta$, $\Upsilon_1 + \beta_1$ and Q of the first order with generalized coefficients with values in \mathcal{A}_v for suitable $v \geq r$ of the same class exist such that

(1) $[Af, \omega^{\otimes 3}] = [(\Upsilon + \beta)((\Upsilon_1 + \beta_1)f + Qf), \omega^{\otimes 3}]$ for each real-valued test function ω on U .

Proof. This follows from Theorem 21 and Corollary 12 and §§2 and 8.

23. Anti-derivatives of first order partial differential operators with generalized coefficients.

Theorem. Let Υ be a first order partial differential operator given by the formula

(1) $\Upsilon f = \sum_{j=0}^n (\partial f / \partial z_j) \otimes [i_j^* \psi_j(z)]$ or

(2) $\Upsilon f = \sum_{j=0}^n (\partial f / \partial z_j) \otimes \phi_j^*(z),$

where $supp(\psi_j(z)) = U$ or $supp(\phi_j(z)) = U$ for each j respectively, f and $\psi_j(z)$ or $\phi_j(z)$ are \mathcal{A}_v -valued generalized functions in $\mathcal{B}'(U, \mathcal{A}_r)$ or $\mathcal{D}'(U, \mathcal{A}_r)$ on the domain U satisfying Conditions 1(D1, D2), $alg_{\mathbf{R}}\{[\phi_j, \omega], [\phi_k, \omega], [\phi_l, \omega]\}$ is alternative for all $0 \leq j, k, l \leq 2^v - 1$ and $alg_{\mathbf{R}}\{[\phi_0, \omega], \dots, [\phi_{2^v-1}, \omega]\} \subset \mathcal{A}_v$ for each real-valued test function ω on U . Then its anti-derivative operator \mathcal{I}_Υ exists such that $\Upsilon \mathcal{I}_\Upsilon f = f$ for each continuous generalized function $f : U \rightarrow \mathcal{A}_v$ and it has an expression through line integrals of generalized functions.

Proof. When an operator with generalized coefficients is given by Formula (1), we shall take unknown generalized functions $\nu_j(z) \in \mathcal{A}_v$ as solutions of the system of partial differential equations by real variables z_k :

(3) $[(\partial \nu_j(z) / \partial z_j) \otimes \psi_j(z), \omega^{\otimes 2}] = [1, \omega^{\otimes 2}]$ for all $1 \leq j \leq n$;

(4) $[\psi_k(z) \otimes (\partial \nu_j(z) / \partial z_k), \omega^{\otimes 2}] = [\psi_j(z) \otimes (\partial \nu_k(z) / \partial z_j), \omega^{\otimes 2}]$ for all $1 \leq j < k \leq n$ and real-valued test functions ω on U .

If the operator is given by Formula (2) we consider the system of partial differential equations:

(5) $[(dg(z)/dz) \cdot [\partial\nu_j(z)/\partial z_k]] \otimes \phi_k^*(z) + ((dg(z)/dz) \cdot [\partial\nu_k(z)/\partial z_j]) \otimes \phi_j^*(z), \omega^{\otimes 2} = 0$ for all $0 \leq j < k \leq n$;

(6) $\partial\nu_j(z)/\partial z_j = \phi_j(z)$ for all $j = 0, \dots, n$;

(7) $[(dg(z)/dz) \cdot \phi_j(z)] \otimes \phi_j^*(z), \omega^{\otimes 2} = [f(z) \otimes 1, \omega^{\otimes 2}]$ for each $j = 0, \dots, n$ and every real-valued test function ω .

Certainly the system of differential equations given by Formulas (3, 4) or (5 – 7) have solutions in the spaces of test functions $\mathcal{B}(U, \mathcal{A}_r)$ or $\mathcal{D}(U, \mathcal{A}_r)$, when all functions ψ_j or ϕ_j are in the same space respectively. Applying §§4 or 5 we find generalized functions ν_j resolving these system of partial differential equations correspondingly, when all functions ψ_j or ϕ_j are generalized functions, since the spaces of test functions are dense in the spaces of generalized functions (see §19). Substituting line integrals $\int_\gamma q(y) d\nu_j(y)$ from §§4 and 5 on line integrals $[\int_\gamma q(y) d\nu_j(y), \omega^1 \otimes \omega]$ from §19 one gets the statement of this theorem, since test functions ω^1 and ω in the line integrals of generalized functions can also be taken real-valued and the real field is the center of the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v . Therefore, we infer that

$$(8) \partial[\int_{\gamma^\alpha|_{<a_\alpha, t_z]} f(y) d\nu_j(y), \omega \otimes \omega] / \partial z_k = [\hat{f}(z) \cdot [d\nu_j(z)/dz_k], \omega \otimes \omega]$$

for each real-valued test function ω and $z \in U$, where $\gamma^\alpha(t_z) = z, t_z \in \langle a_\alpha, b_\alpha \rangle, \alpha \in \Lambda$. Equality (8), Theorem 19 and Corollaries 19.1-19.3 and Conditions 20(P1–P7) give the formula for an anti-derivative operator:

$$(9) [\mathcal{I}_\Upsilon f, \omega \otimes \omega] = [\Upsilon \int f(z) dz, \omega \otimes \omega] = (n + 1)^{-1} \sum_{j=0}^n \{ [\int_{\gamma^\alpha|_{[a_\alpha, t]}} q(y) d\nu_j(y), \omega \otimes \omega] \}$$

for each real-valued test-function ω , where $\alpha \in \Lambda, a_\alpha \leq t \leq b_\alpha, t = t_z, z = \gamma(t)$, consequently,

$$(10) [\Upsilon \int f(y) dy, \omega^{\otimes 3}] = [f \otimes 1 \otimes 1, \omega^{\otimes 3}].$$

23.1. Note. Certainly, the case of the partial differential operator

$$(1) \Upsilon f = \sum_{j=0}^n (\partial f / \partial z_{k(j)}) \otimes \phi_{k(j)}^*(z),$$

where $0 \leq k(0) < k(1) < \dots < k(n) \leq 2^v - 1$ reduces to the considered in §23 case by a suitable change of variables $z \mapsto y$ so that $z_{k(j)} = y_j$.

24. Example. We consider a consequence of Formulas 15(2 – 6). If $q(t)$ is a differentiable function on the real field \mathbf{R} having simple zeros $q(t_j) = 0$ (i.e. zeros of the first order), then

$$(1) \delta(q(t)) = \sum_j \frac{1}{q'(t_j)} \delta(t - t_j),$$

where the sum is accomplished by all zeros t_j of the equation $q(t) = 0$ (see Formula II.2.6(IV) [6]). Therefore, if $\gamma(\tau)$ is a C^1 path in U intersecting the surface $\partial U_s \cap \partial U_p$ at the marked point x of index $l = l_{s,p}(x), \gamma(\tau_0) = x, 0 < \tau_0 < 1$, such that $\gamma(\tau) \in U_s$ for each $\tau < \tau_0$ and $\gamma(\tau) \in U_p$ for each $\tau > \tau_0$ then

$$(2) dg(\gamma(\tau))/d\tau = dg^1(\gamma(\tau))/d\tau + h \sum_{j=1}^l \delta(P_j) dP_j(\gamma(\tau))/d\tau,$$

where $\theta(t) = 0$ for $t < 0$ and $\theta(t) = 1$ for $t \geq 0, g^1(\gamma(\tau)) = g(\gamma(\tau)) - h\theta(\tau - \tau_0)$,

$$(2.1) h = \lim_{\tau \downarrow \tau_0} g(\gamma(\tau)) - \lim_{\tau \uparrow \tau_0} g(\gamma(\tau)),$$

(2.2) $dP_j(\gamma(\tau))/d\tau = \sum_{k=1}^n (\partial P_j(z)/\partial z_k) (\partial \gamma_k(\tau)/d\tau)|_{z=\gamma(\tau)}$ (see Example I.2.2.2 [6]). Particularly, if a point x is of index 1, then Formula (2) simplifies:

(3) $dg(\gamma(\tau))/d\tau = dg^1(\gamma(\tau))/d\tau + h\delta(P)[dP(\gamma(\tau))/d\tau]$. Particularly, these formulas can be applied to $d\nu_j$.

Let a partial differential differential operator Q be given by Formula 14(7) and functions ν_k are found (see Theorems 5 and 21 above). We put in accordance with Formula 15(6)

$$(4) \nu_k^1(z) = \nu_k(z) - \sum_{s,p} h_{k;s,p}(z) \theta(P_{s,p;1}(z), \dots, P_{s,p;m_j}(z)),$$

where

$$(5) h_{k;s,p}(z(x)) = h_k(x)|_{x \in \Gamma^{s,p}} :=$$

$$\lim_{y_{1;s,p} \downarrow 0, \dots, y_{n;s,p} \downarrow 0} \nu_k(z(x+y)) - \lim_{y_{1;s,p} \downarrow 0, \dots, y_{n;s,p} \downarrow 0} \nu_k(z(x-y)),$$

where the sum is by s and p with $\partial U_s \cap \partial U_p \neq \emptyset$.

Let a domain W be a canonical closed compact set in the Euclidean space \mathbf{R}^{n+1} embedded into \mathcal{A}_v and contained in a canonical closed compact domain U so that $W = \{z \in U : z_j = 0 \forall n < j \leq 2^v - 1\}$. Thus Υ from test and generalized functions on W is extended on test and generalized functions on U . We can put $\nu_j = 0$ for $n < j \leq 2^v - 1$, when $n < 2^v - 1$. Then for the rectifiable path γ (see above) we get

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & (n + 1)^{-1} \sum_{k=0}^n \left[\int_{\gamma|_{[a,t]}} q(y) d\nu_k(y), \omega^1 \times \omega \right] \\
 & = (n + 1)^{-1} \sum_{k=0}^n \left\{ \left[\int_{\gamma} q(y) d\nu_k^1(y), \omega^1 \times \omega \right] \right. \\
 & \left. + [\hat{q}; \omega^1, *; \left[\sum_{s,p} h_{k;s,p}(z) \sum_{j=1}^l \delta(P_j) \sum_{m=1}^n (\partial P_j(z)/\partial z_m) (\partial \gamma_m(\tau)/d\tau) |_{z=\gamma(\tau)}; \omega, * \right]](\gamma) \right\},
 \end{aligned}$$

where $\gamma \in \{\gamma^\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ is taken from the foliation C^1 family of paths (see §6.1 above and also Theorem 2.13 [27]), $z = \gamma(t_z)$, $t_z \in [a_\alpha, b_\alpha]$, $[a, t] = [a_\alpha, t_z]$, $l = l_{s,p}(z)$ denotes an index of a point z in the intersection of boundaries $\Gamma^{s,p} := \partial U_s \cap \partial U_p \neq \emptyset$, ω^1 and ω are real-valued test functions. Since ω^1 is real-valued, we get $\hat{f}(z) \cdot \omega^1 = f(z) \omega^1(z)$ and

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & [\hat{q}; \omega^1, *; \left[\sum_{s,p} h_{k;s,p}(z) \sum_{j=1}^l \delta(P_j) \sum_{m=1}^n (\partial P_j(z)/\partial z_m) (\partial \gamma_m(\tau)/d\tau) |_{z=\gamma(\tau)}; \omega, * \right]](\gamma) \\
 & = \sum_{s,p} [q(z) \omega^1(z); [\theta(\tau - \tau_{s,p}) h_{k;s,p}(z), \omega)] |_{z=\gamma(\tau)},
 \end{aligned}$$

where $\tau_{s,p}$ corresponds to the intersection point $\gamma(\tau_{s,p})$ of γ with $\Gamma^{s,p} \neq \emptyset$. Here the expression $[q, \omega]_{z=\gamma(\tau)} := \lim_j [q \circ \kappa^j, \omega \circ \kappa^j]$ denotes the restriction of the generalized function from U onto $\gamma([a, b])$, $\kappa^j \in \mathcal{D}(U, \mathcal{A}_v)$ is a sequence of test functions and $\kappa^j(\phi([a, b])) \subset U$ for each $j \in \mathbf{N}$, $\phi \in \mathcal{D}([a, b], \mathcal{A}_v)$, $\bigcap_{j=1}^\infty \text{supp}(\kappa^j) = \phi([a, b])$, $\lim_j \kappa^j \circ \phi = \gamma$ in $\mathbf{P}(U)$. Therefore, the derivative of the operator $[(n + 1)^{-1} \sum_{k=0}^n \int_{\gamma|_{[a,t]}} q(y) d\nu_k(y), \omega^1 \times \omega]$ by the parameter $\tau \in [a, b]$ for the real test functions ω^1 and ω is the following:

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \partial(n + 1)^{-1} \sum_{k=0}^n \left[\int_{\gamma|_{[a,t]}} q(y) d\nu_k(y), \omega^1 \times \omega \right] / \partial \tau = \\
 & [(n + 1)^{-1} \sum_{k=0}^n \{ 1 \otimes \hat{q}^1(z) \cdot (d\nu_k^1(\gamma(\tau))/d\tau) + \sum_{s,p} (h_{s,p}^{g'}(z) \cdot h_{k;s,p}(z) + \hat{q}^1(z) \cdot h_{k;s,p}(z) + \\
 & h_{s,p}^{g'}(z) \cdot (d\nu_k^1(\gamma(\tau))/d\tau)) |_{z=\gamma(\tau)} \otimes \delta(\tau - \tau_{s,p}), \omega^1 \otimes \omega \},
 \end{aligned}$$

where $dg(z)/dz = \hat{q}(z)$ on U in the class of generalized operator $L_q(\mathcal{A}_v, \mathcal{A}_v)$ valued functions, $(dg(z)/dz) \cdot 1 = q(z)$ on U , $h_{s,p}^{g'}(z) = h(z)$ is given by Formula (2.1) for the derivative operator $dg(z)/dz = g'$ instead of g on each $\Gamma^{s,p} \neq \emptyset$, \hat{q}^1 is given by Formula 15(6) for the function $\hat{q}(z)$ with values in $L_q(\mathcal{A}_v, \mathcal{A}_v)$ instead of $g(z)$. The terms like $\hat{q}^1(z) \cdot (d\nu_k^1(\gamma(\tau))/d\tau)$ correspond to the action of the operator valued generalized function $\hat{q}^1(z)$ on the generalized function $(d\nu_k^1(\gamma(\tau))/d\tau)$ which gives a generalized function.

Using Formulas (6 – 8) for n constant on U and $\psi_j(z)$ or $\phi_j(z)$ respectively non-zero for each $z \in U$ and all $j = 0, \dots, n$ we infer that for a continuous or generalized function f

$$(9) \quad \Upsilon \mathcal{I}_\Upsilon f(z) = f(z), \text{ where}$$

$$(10) \quad \Upsilon \int f(z) dz := \{(n + 1)^{-1} \sum_{j=0}^n \int_{\gamma^\alpha|_{[a_\alpha,t]}} q(z) d\nu_j^1(z), \quad \alpha \in \Lambda, a_\alpha \leq t \leq b_\alpha\},$$

where $q = (dg/dz) \cdot 1$ and g is given by the Equation 5(9), since $f^1 = f$ and $h_{s,p}^{g'} = 0$ in the class of generalized functions f and in the class of continuous functions f , also $h_{k;s,p} = 0$ for $\nu_k = \nu_k^1$ on U .

Formulas (9, 10) show what sort of boundary conditions is sufficient to specify a unique solution for a given domain U with sub-domains U_s . If U is C^1 diffeomorphic to the half-space

$H_p := \{z \in \mathcal{A}_v : z_0 p_0 + \dots + z_{2^v-1} p_{2^v-1} \geq 0\}$, where $p = p_0 i_0 + \dots + p_{2^v-1} i_{2^v-1}$ is a marked Cayley-Dickson number, $p_0, \dots, p_{2^v-1} \in \mathbf{R}$, and sub-domains U_s are not prescribed, then it is sufficient to give the boundary condition $F|_{\partial U} = G$ when a solution is in the class of continuous or generalized functions with the corresponding f and ψ_j or ϕ_j . Indeed, if the functions ν_k along γ^α are defined up to constants μ_k , the differentials are the same $d(\nu_k + \mu_k)(z)|_{z=\gamma^\alpha(\tau)} = d\nu_k|_{z=\gamma^\alpha(\tau)}$ in the anti-derivative operator, when $d\mu_k|_{z=\gamma^\alpha(\tau)} = 0$ for each $\alpha \in \Lambda$ and $\tau \in [a_\alpha, b_\alpha]$.

The operator \mathcal{I}_Υ may be applied also piecewise on each U_s . If a solution F is locally continuous on U and continuous on each sub-domain U_s , then boundary conditions $F|_{\partial U_s} = G^s$ for all $s = 1, \dots, m$ may be necessary to specify a solution F . Without boundary conditions the anti-derivative operator applied to f gives the general solution $\mathcal{I}_\Upsilon f$ of the differential equation $\Upsilon F = f$.

If each ν_k is continuously differentiable, which is possible, when each function ψ_k or ϕ_k is continuous, and f is continuous on U , then a solution $F = \{\Upsilon \int_{\gamma^\alpha|_{[a_\alpha, \tau]}} f(y) dy : \alpha \in \Lambda, a_\alpha \leq \tau \leq b_\alpha\}$ is continuously differentiable by each $z_k, z \in U, z = \gamma^\alpha(t_z)$.

One can also mention that the sequence ${}_m\omega(z_0, \dots, z_n) = (2\pi m)^{-(n+1)/2} \exp\{-(z_0^2 + \dots + z_n^2)/(2m)\}$ converges to the delta-function on \mathbf{R}^{n+1} embedded into $\mathcal{A}_v, m \in \mathbf{N}$. Then the sequence ${}_m\theta(z_0) = \int_{-m}^{z_0} (2\pi m)^{-1/2} \exp\{-t^2/(2m)\} dt$ converges to the θ function, while each function ${}_m\theta(z_0)$ is analytic by z_0 , since $m \in \mathbf{N}, \exp\{-t^2/(2m)\}$ is the analytic function with the infinite radius of convergence of its power series, while $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{-m} (2\pi m)^{-1/2} \exp\{-t^2/(2m)\} dt = 0$. Then each ${}_m\omega(z_0, \dots, z_n)$ and $\prod_{j=0}^n {}_m\theta(z_j)$ can be written in the z -representation over \mathcal{A}_v as the analytic function with the help of Formulas 1(1-3), where $n \leq 2^v - 1, z_j \in \mathbf{R}$ for each $j, z = z_0 i_0 + \dots + z_{2^v-1} i_{2^v-1}$. Thus $\lim_{m \rightarrow \infty} {}_m\omega(z_0, \dots, z_n) = \delta(z_0, \dots, z_n)$ and $\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^n {}_m\theta(z_j) = \prod_{j=0}^n \theta(z_j), d\theta(z_0)/dz_0 = \delta(z_0)$.

25. Boundary conditions.

If U is a domain as in §15, we put $\mathcal{B}(\partial U, Y) = \{f|_{\partial U} : f \in \mathcal{B}(U, Y)\}$ and $\mathcal{D}(\partial U, Y) = \{f|_{\partial U} : f \in \mathcal{D}(U, Y)\}$ when a boundary ∂U is non-void so that the topologically adjoint linear over \mathbf{R} spaces, left and right \mathcal{A}_r modules, of generalized functions are $\mathcal{B}'(\partial U, Y)$ and $\mathcal{D}'(\partial U, Y)$.

Let us consider a generalized function $f \in \mathcal{B}'(\partial U, Y)$ or $\mathcal{D}'(\partial U, Y)$ and a test function $h \in \mathcal{B}(\partial U, Y)$ or $\mathcal{D}(\partial U, Y)$ respectively. One can take $g \in \mathcal{B}(U, Y)$ or $\mathcal{D}(U, Y)$ and a sequence $q^m \in \mathcal{B}(U, Y)$ or $\mathcal{D}(U, Y)$ with supports non intersecting with the boundary $\text{supp}(q^m) \cap \partial U = \emptyset$ such that $(g - q^m)$ tends to zero in $\mathcal{B}(V, Y)$ or $\mathcal{D}(V, Y)$ for each compact subset V in the interior $\text{Int}(U)$, when m tends to the infinity, while $\lim_m (g - q^m) = h$ in $\mathcal{B}(\partial U, Y)$ or $\mathcal{D}(\partial U, Y)$ respectively. Here as usually the interior $\text{Int}(U)$ is taken in the corresponding topological space \mathbf{R}^n or \mathcal{A}_r . Each generalized function is a limit of test functions, consequently, a generalized function $\xi \in \mathcal{B}'(U, Y)$ or $\mathcal{D}'(U, Y)$ exists so that

$$(B1) \lim_m [\xi, (g - q^m)] = [f, h].$$

Vise versa if $\xi \in \mathcal{B}'(U, Y)$ or $\mathcal{D}'(U, Y)$ is a generalized function on U , then Formula (B1) defines a generalized function $f \in \mathcal{B}'(\partial U, Y)$ or $\mathcal{D}'(\partial U, Y)$, which we consider as the restriction of ξ on $\mathcal{B}(\partial U, Y)$ or $\mathcal{D}(\partial U, Y)$ correspondingly. In view of the definition of convergence of test and generalized functions Formula (B1) defines the unique restriction f for the given generalized function ξ .

A subsequent use of decomposition of operators into compositions of first order partial differential operators and their anti-derivation operators permits to integrate partial differential equations with locally continuous or generalized coefficients.

The results and definitions of previous sections show that for the differential equation

$$(1) Af = g,$$

where a partial differential operator is written in accordance with Formulas 10(1,2). When ∂U is a C^1 -manifold without corner points of index greater than one, the following boundary

conditions may be used:

(2) $f(t)|_{\partial U} = f_0(t')$, $(\partial^{|q|} f(t)/\partial s_1^{q_1} \dots \partial s_n^{q_n})|_{\partial U} = f_{(q)}(t')$ for $|q| \leq \alpha - 1$, where $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbf{R}^n$, $(q) = (q_1, \dots, q_n)$, $|q| = q_1 + \dots + q_n$, $0 \leq q_k \in \mathbf{Z}$ for each k , $t \in \partial U$ is denoted by t' , f_0 , $f_{(q)}$ are given functions. Generally these conditions may be excessive, so one uses some of them or their linear combinations (see (4) below). Frequently, the boundary conditions

(3) $f(t)|_{\partial U} = f_0(t')$, $(\partial^l f(t)/\partial \nu^l)|_{\partial U} = f_l(t')$ for $1 \leq l \leq \alpha - 1$ are also used, where ν denotes a real variable along a unit external normal to the boundary ∂U at a point $t' \in \partial U_0$. Using partial differentiation in local coordinates on ∂U and (3) one can calculate in principle all other boundary conditions in (2) almost everywhere on ∂U .

It is possible to describe as an example a particular class of domains and boundary conditions. Suppose that a domain U_1 and its boundary ∂U_1 satisfy Conditions (D1, i - vii) and $g_1 = g\chi_{U_1}$ is a regular or generalized function on \mathbf{R}^n with its support in U_1 . Then any function g on \mathbf{R}^n gives the function $g\chi_{U_2} =: g_2$ on \mathbf{R}^n , where $U_2 = \mathbf{R}^n \setminus U_1$. Take now new domain U satisfying Conditions (D1, i - vii) and (D2 - D5):

(D2) $U \supset U_1$ and $\partial U \subset \partial U_1$;

(D3) if a straight line ξ containing a point w_1 (see 15(vi)) intersects ∂U_1 at two points y_1 and y_2 , then only one point either y_1 or y_2 belongs to ∂U , where $w_1 \in U_1$, $U - w_1$ and $U_1 - w_1$ are convex; if ξ intersects ∂U_1 only at one point, then it intersects ∂U at the same point;

(D4) any straight line ξ through the point w_1 either does not intersect ∂U or intersects the boundary ∂U only at one point.

Take now g with $\text{supp}(g) \subset U$, then $\text{supp}(g\chi_{U_1}) \subset U_1$. Therefore, any problem (1) on U_1 can be considered as the restriction of the problem (1) defined on U , satisfying (D1 - D4, i - vii). Any solution f of (1) on U with the boundary conditions on ∂U gives the solution as the restriction $f|_{U_1}$ on U_1 with the boundary conditions on ∂U .

Henceforward, we suppose that the domain U satisfies Conditions (D1, D4, i - vii), which are rather mild and natural.

Thus the sufficient boundary conditions are:

$$(4) (\partial^{|\beta|} f(t^{(lj)})/\partial \tau_{\gamma(1)}^{\beta_1} \dots \partial \tau_{\gamma(m)}^{\beta_m})|_{\partial U_{(lj)}} = \phi_{\beta, (lj)}(t^{(lj)})$$

for $|\beta| = |q|$, where $m = |h(lj)|$, $|j| \leq \alpha$, $|(lj)| \geq 1$, $\mathbf{a}_j \neq 0$, $q_k = 0$ for $l_k j_k = 0$, $m_k + q_k + h_k = j_k$, $h_k = \text{sign}(l_k j_k)$, $0 \leq q_k \leq j_k - 1$ for $k > n - \kappa$; $\phi_{\beta, (l)}(t^{(l)})$ are known functions on $\partial U_{(l)}$, $t^{(l)} \in \partial U_{(l)}$. In the half-space $t_n \geq 0$ only the partial derivatives by t_n

$$(5) \partial^\beta f(t)/\partial t_n^\beta|_{t_n=0}$$

are necessary for $\beta = |q| < \alpha$ and q as above.

Depending on coefficients of the operator A and the domain U some boundary conditions may be dropped, when the corresponding terms vanish.

Conditions in (5) are given on disjoint for different (l) sub-manifolds $\partial U_{(l)}$ in ∂U and partial derivatives are along orthogonal to them coordinates in \mathbf{R}^n , so they are correctly posed.

We recall, that a characteristic surface of a partial differential operator given by Formula 10(1) is a surface defined as a zero of C^u differentiable function $\phi(x_1, \dots, x_n) = 0$ in the Euclidean space or in the Cayley-Dickson algebra such that at each point x of it the condition is satisfied

$$(CS) \sum_{|j|=u} \mathbf{a}_j(t(x)) (\partial\phi/\partial x_1)^{j_1} \dots (\partial\phi/\partial x_n)^{j_n} = 0$$

and at least one of the partial derivatives $(\partial\phi/\partial x_k) \neq 0$ is non-zero. Generally a domain U is worthwhile to choose with its interior $\text{Int}(U)$ non-intersecting with a characteristic surface $\phi(x_1, \dots, x_n) = 0$ (see also [32, 37]).

26. Solutions of second order partial differential equations with the help of the line integration over the Cayley-Dickson algebras.

Mention that the operator $(\Upsilon + \beta)(z_0, \dots, z_n)$ acting on a function depending on variables z_0, \dots, z_n only can be written as

$$(1) \Psi(z_0, \dots, z_{n+1})(f(z)z_{n+1})|_{z_{n+1}=1} = \Upsilon(z_0, \dots, z_n)f(z) + f(z)\beta(z)$$

$$= [\sum_{j=0}^{n+1} (\partial(f(z)z_{n+1})/\partial z_j)\phi_j^*(z)]|_{z_{n+1}=1},$$

where $\phi_{n+1}^*(z) = \beta(z)$, each function $\phi_j(z)$ and $f(z)$ may depend on z_0, \dots, z_n only, omitting for short the direct product \otimes in the case of generalized coefficients in Formula (1) and henceforth. The operator $\Psi(z_0, \dots, z_{n+1})(f(z)z_{n+1})$ may be reduced to the form satisfying conditions of Theorems 5 or 23 using a suitable change of variables. This procedure gives an anti-derivative operator

$$(1.1) \mathcal{I}_{\Upsilon+\beta} = \mathcal{I}_{\Psi}|_{z_{n+1}=1} \text{ such that}$$

$$(1.2) (\Upsilon + \beta)\mathcal{I}_{\Upsilon+\beta}f = f$$

for a continuous function or a generalized function f . Therefore, we shall consider operators of the form Υ and their compositions and sums.

We take the partial differential equation with piecewise continuous or generalized coefficients

$$(2) A = \Upsilon_1 f(z) + \Upsilon_2 f(z) = g,$$

where

$$(3) \Upsilon_k f(z) = [\sum_{j=0}^n (\partial f(z)/\partial z_j)\phi_j^k(z)^*]$$

for $k = 1, 2$ or without this index k , $\phi_j^k(z) = i_j \psi_j^k(z)$ (see §§4, 5 and 23). For solving it we write the system:

$$(4) \Upsilon_1 f = g_1, \Upsilon g_1 = g - \Upsilon_2 f.$$

In accordance with Equation (2) we have:

$$(5) \Upsilon g_1 + \Upsilon_2(\Upsilon_1^{-1}g_1) = g,$$

where the inverse operator Υ_1^{-1} is the anti-derivation operator \mathcal{I}_{Υ_1} described above in Theorems 4, 5 and 23. If $\Upsilon_2 \neq 0$ we suppose that either (i) g_1 or $[g_1, \omega]$ is real-valued or the algebra $alg_{\mathbf{R}}\{g_1(z), \phi_j^1(z), \phi_k^2(z)\}$ or $alg_{\mathbf{R}}\{[g_1, \omega], [\phi_j^1, \omega], [\phi_k^2, \omega]\}$ for all $j, k = 0, \dots, n$ is associative for each $z \in U$ in the case of functions or for every real-valued test function ω in the case of generalized functions correspondingly. Calculating the expression

$$(6) \Upsilon g_1 + \Upsilon_2(\mathcal{I}_{\Upsilon_1}g_1) = (\Upsilon + \beta^3)g_1 = g$$

we get a new operator $(\Upsilon + \beta^3) = \Psi$ in accordance with Formulas 4(5, 6), 5(6 – 8) and 23(3 – 7) omitting \otimes and $\otimes\omega$ and $[\ast, \omega^{\otimes 3}]$ for short in the case of generalized coefficients, where

$$\beta^3 = \sum_{j,k=0}^n (\partial \nu_j^1 / \partial z_k)(\phi_k^2)^*,$$

when a solution $\{\nu_j(z) : j\}$ is chosen real, i.e. each function ν_j is real-valued or a real-valued generalized function on real-valued test functions (see System 4(10, 11) and §23).

Generally without supposition (i) we deduce that

$$(6.1) \Upsilon g_{1,l} + \Upsilon_2(\mathcal{I}_{\Upsilon_1}g_{1,l}) = (\Upsilon + \beta_l^3)g_{1,l} = i_l^* g^l$$

for each $l = 0, \dots, n$, where $\beta_l^3 = i_l^* [\sum_{j,k=0}^n (i_j (\partial \nu_j^1 / \partial z_k))(\phi_k^2)^*]$,

$$(6.2) \sum_{l=0}^n g^l = g,$$

$$(6.3) \sum_{l=0}^n g_{1,l} i_l = g_1,$$

each $g_{1,l}(z)$ or $[g_{1,l}, \omega]$ is real-valued for each $z \in U$ or every real-valued test function ω respectively. Solving the system (6.1 – 3) with the help of known anti-derivative operators \mathcal{I}_{Ψ_l} one finds g_1 , where $\Psi_l = \Upsilon + \beta_l^3$. Thus an anti-derivative operator $\mathcal{J} := \mathcal{J}_{\Upsilon+\Upsilon_2\mathcal{I}_{\Upsilon_1}}$ exists so that

$$(6.4) (\Upsilon + \Upsilon_2\mathcal{I}_{\Upsilon_1})\mathcal{J}_{\Upsilon+\Upsilon_2\mathcal{I}_{\Upsilon_1}}g = g.$$

In the particular case (i) the equality $\mathcal{J}_{\Upsilon+\Upsilon_2\mathcal{I}_{\Upsilon_1}} = \mathcal{I}_{\Psi}$ is satisfied.

Therefore, in the case of either continuous coefficients of operators and g or generalized coefficients and g the general solution is:

$$(7) f = \mathcal{I}_{\Upsilon_1}g_1 = \mathcal{I}_{\Upsilon_1}\mathcal{J}g, \text{ where}$$

$$(8) g_1 = \mathcal{J}g.$$

If $\Upsilon_2 = 0$ the formula simplifies to

$$(9) f = \mathcal{I}_{\Upsilon_1}\mathcal{I}_{\Upsilon}g.$$

Examples of boundary conditions and domains permitting to specify a unique solution are given in §25 above.

27. Example. Let us consider a function and its phrase satisfying Condition 7(P3). Therefore, we get

$$(1) \quad \Upsilon_1^{-1}(g_1)(z_{a^1}(x)) = -\phi_{f'}(Im(z_{a^1}(x))) + \int_{\alpha}^x g_1(z)dz + \phi_{g_1}(x')$$

in accordance with Formula 7(6), where x' and $Im(z_{a^1}(x))$ are written in the x and z -representations respectively using Identities 1(1 – 3). In particular, for $\Upsilon^1 = \sigma_1$ we have the coefficients $\psi_l^1(z) = i_l(\mathbf{a}_k(z)w_j i_{2^r k}^*)$ for each $l = 2^r k$ with $k \in \{m_1 + \dots + m_{j-1} + 1, \dots, m_1 + \dots + m_j\}$, while $\psi_l^1(z) = 0$ for all others l for each z . A function a^1 is given by Formula 7(3) for ψ^1 instead of ψ . Let the first order operator Q be written in its standard form:

$$(2) \quad Qf = \sum_{j=1}^m \sum_{k=m_1+\dots+m_{j_1-1}+1}^{m_1+\dots+m_{j_1}} \mathbf{s}_k(z)(\partial f/\partial z_{2^r k})(u_j i_{2^r k}),$$

since $i_{2^r k} w_j = w_j^* i_{2^r k}$ for each $w_j \in \mathcal{A}_r$ and $k \geq 1$, when $r \geq 1$, where $w_j \in \mathcal{A}_r$ and $u_j = u_j(z) \in \mathcal{A}_v$ for each j , $\mathbf{s}_k(z)$ is the real-valued (super-)differentiable function for each k . If $\xi = z_a(y)$, then $(d\xi/dy) \cdot [(dy/d\xi) \cdot h] = h$ for each Cayley-Dickson number $h \in \mathcal{A}_v$. This implies that these two \mathbf{R} -linear \mathcal{A}_v -additive operators are related by the equality $(dy/d\xi) \cdot h = (d\xi/dy)^{-1} \cdot h$. On the other hand, $(dz_a(y)/dy) \cdot 1 = a(y) \in \mathcal{A}_v$ and $y \in U \subset \mathcal{A}_v$ in the considered case. The function $z_a(y)$ is defined up to the addendum $z_a(\alpha)$, where $\alpha \in H_{\alpha_0} \cap U$, $H_{\alpha_0} := \{z \in \mathcal{A}_v : Re(z) = Re(\alpha_0)\}$. We can choose $\phi_a(y')$ so that $(dx/dy) \cdot (1/a) = 1$ for each y for which $a = a(y) \neq 0$ and inevitably we get $(dy/dx) \cdot 1 = 1/a(y)$.

In the particular case of σ, σ_1 and Q accomplishing the differentiation with the help of the latter identities we infer that:

$$(3) \quad Q(\sigma_1^{-1}g_1)(x) = - \sum_{j=1}^m \sum_{k=m_1+\dots+m_{j_1-1}+1}^{m_1+\dots+m_{j_1}} [(d\phi_{f'}(x')/dx) \cdot i_{2^r k} + \{\hat{g}_1(y) + (d\phi_{g_1}(y')/dy)\} \cdot (dz_{a^1}(y)/dy)^{-1} \cdot i_{2^r k}] (\mathbf{s}_k(y)u_j(y)i_{2^r k}),$$

where $\hat{g}_1 = d\zeta_1(y)/dy$ for a (super-)differentiable function ζ_1 such that $(d\zeta_1(y)/dy) \cdot 1 = g_1(y')$, $\psi_l^1(z) = i_l(\mathbf{a}_k(z)w_j i_{2^r k}^*)$ for each $l = 2^r k$ with $k \in \{m_1 + \dots + m_{j-1} + 1, \dots, m_1 + \dots + m_j\}$, while $\psi_l^1(z) = 0$ for all others l for each z . Also $\psi_l(z) = i_l(\mathbf{a}_k(z)w_j^* i_{2^r k}^*)$ for each $l = 2^r k$ with $k \in \{m_1 + \dots + m_{j-1} + 1, \dots, m_1 + \dots + m_j\}$, while $\psi_l(z) = 0$ for all others l and for each z . We introduce the notation:

$$(4) \quad \theta_l(y) = i_l[(dz_a(y)/dy)^{-1} \cdot i_{2^r k}] (\mathbf{s}_k(y)u_j(y)i_{2^r k}) \text{ for } l = 2^r k \text{ and } k \in \{m_1 + \dots + m_{j_1-1} + 1, \dots, m_1 + \dots + m_{j_1}\}, \theta_l(y) = 0 \text{ for all others } l \text{ and for each } y;$$

$$(5) \quad a(x) = - \sum_{j=1}^m w_j \sum_{k=m_1+\dots+m_{j_1-1}+1}^{m_1+\dots+m_j} \mathbf{a}_k(x) = \sigma(x) \text{ and}$$

$$(6) \quad \kappa_l(x) = i_l[s_k(x)u_j(x)i_{2^r k}] \text{ for } l = 2^r k \text{ with } k \in \{m_1 + \dots + m_{j_1-1} + 1, \dots, m_1 + \dots + m_{j_1}\}, \kappa_l(x) = 0 \text{ for every other } l \text{ and for each } x.$$

In the general case

$$(7) \quad \Upsilon_2(\Upsilon_1^{-1}g_1)(x) = - \sum_{j=0}^{2^v-1} [(d\phi_{f'}(x')/dx) \cdot i_j + \{\hat{g}_1(y) + (d\phi_{g_1}(y')/dy)\} \cdot (dz_{a^1}(y)/dy)^{-1} \cdot i_j] (i_j^* \psi_j(x)),$$

where $\hat{g}_1 = d\zeta_1(y)/dy$ for a (super-)differentiable function ζ_1 such that $(d\zeta_1(y)/dy) \cdot 1 = g_1(y')$. We shall use the notation:

(8) $\theta_j(y) = i_j[(dz_a(y)/dy)^{-1} \cdot i_j](i_j^* \psi_j(y))$ and for each y and each j ;

(9) $a(x) = \Upsilon(x)$ and

(10) $\kappa_j(x) = i_j[i_j^* \psi_j(x)]$ for each x and j . Substituting (7) into 26(5) we deduce that:

(11) $g_1(z_a(x)) + g_1(z_\theta(x)) = \zeta(x)$, where

(12) $\zeta(x) = -\phi_{g_1}(Im(z_a(x))) - \phi_{g_1}(Im(z_\theta(x))) + \phi_{f'}(Im(z_\kappa(x))) + \int_\alpha^x g(z)dz$.

For $x = \alpha$ we certainly have $z_a(\alpha) = z_\theta(\alpha)$. Suppose that $a(x) \neq \theta(x)$ identically. The dimension of the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v over the real field is not less, than four. Therefore, we can choose a path γ so that γ is orthogonal to θ and κ at each point on γ , that is $\gamma'(t) \perp \theta'(\gamma(t))$ and $\gamma'(t) \perp \kappa'(\gamma(t))$ relative to the real-valued scalar product (RS) for each $t \in [0, 1]$, where $\gamma'(t) := d\gamma(t)/dt$. Then $g_1(z_\theta(x)) = g_1(\alpha)$ and $\phi_{f'}(Im(z_\kappa(x))) = \phi_{f'}(\alpha')$ for each $x = \gamma(t)$. Therefore, along such path γ one has

(13) $g_1(z_a(x)) + g_1(\alpha) = \zeta(x) = -\phi_{g_1}(Im(z_a(x)) - \phi_{g_1}(\alpha') + \phi_{f'}(\alpha') + \int_\alpha^x g(z)dz$

for each $x = \gamma(t)$. Expressing $g_1(z)$ from Equation (11), substituting into 26(4) and integrating one gets:

(14) $f(z_{a^1}(x)) = -\phi_f(Im(z_{a^1}(x))) + \int_\alpha^x g_1(z)dz$.

Particularly, if the operator A is with constant coefficients, then $s_k(x) = 0$ identically for each k , consequently, $\theta = 0$ and $\kappa = 0$ identically and $g_1(z_a(x)) = g_1(\alpha) = \phi_{g_1}(Im(z_a(x)))$ for each x , when f has a right linear derivative by z . Arbitrary integration terms in (11, 14) can be specified from the boundary conditions.

Finally, the restriction from the domain in \mathcal{A}_v onto the initial domain of real variables in the real shadow and the extraction of $\pi_r^v \circ f \in \mathcal{A}_r$ with the help of Formulas 1(1 – 3) gives the reduction of a solution from \mathcal{A}_v to \mathcal{A}_r , where $\pi_r^v : \mathcal{A}_v \rightarrow \mathcal{A}_r$ is the \mathbf{R} -linear projection operator defined as the sum of projection operators $\pi_0 + \dots + \pi_{2^r-1}$ given by Formulas 3($P1, P2$) on $\mathbf{R}i_j$ for $j = 0, \dots, 2^r - 1$.

28. Laplace’s operator. When

(1) $A_0 = \Delta_n = \sum_{j=1}^n \partial^2 / \partial z_j^2$,

is Laplace’s operator, then

(2) $\Upsilon f(z) = \sum_{j=1}^n (\partial f(z) / \partial z_j) i_j^*$, so that

(3) $\Delta_n = \Upsilon \Upsilon^* = -\Upsilon \Upsilon$, $\Upsilon^1 = -\Upsilon$,

where $2 \leq n \leq 2^r - 1$, $z_1, \dots, z_n \in \mathbf{R}$, in accordance with §2. Consider the fundamental solution Ψ of the following equation

(4) $\Xi \Psi(z_1, \dots, z_n) = \delta(z_1, \dots, z_n)$ with $\Xi = \Delta_n$ satisfies the identity:

(5) $\Psi = -(\Upsilon \Psi) * (\Upsilon \Psi)$ (see the convolution of generalized functions and this formula in §§9, 19.4).

We seek the real fundamental solution $\Psi = \Psi_n$, since the Laplace operator is real. The Fourier transform with the generator \mathbf{i} (see §33 [28]) by real variables z_1, \dots, z_n gives

(6) $F(\Psi_n)(x) = -[F(\Upsilon \Psi_n)(x)]^2 = -[\mathbf{-i}(\sum_{j=1}^n x_j i_j^*) F(\Psi_n)(x)]^2$, since

$F(\Upsilon \Psi_n)(x) = \sum_{j=1}^n F(\partial \Psi_n / \partial z_j) i_j^* = \mathbf{-i}(\sum_{j=1}^n x_j i_j^*) F(\Psi_n)(x)$,

where $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ (see also §2). Thus we get the identity

(7) $F(\Psi_n)(x) = -(\sum_{j=1}^n x_j^2) [F(\Psi_n)(x)]^2$ or

(8) $F(\Psi_n)(x) = -(1 / (\sum_{j=1}^n x_j^2))$ for $n \geq 3$ is the regular generalized function (functional), while

(9) $F(\Psi_2)(x) = -\mathcal{P}(1/(\sum_{j=1}^2 x_j^2))$ for $n = 2$.

We recall that the generalized function $\mathcal{P}(1/(\sum_{j=1}^2 x_j^2))$ on $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ is defined as the regularization:

$$(\mathcal{P}(1/(\sum_{j=1}^2 x_j^2)), \phi) = \int_{|x|<1} [\phi(x) - \phi(0)]|x|^{-2}dx + \int_{|x|>1} \phi(x)|x|^{-2}dx,$$

where $x = (x_1, x_2)$, $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$.

The inverse Fourier transform $(F^{-1}g)(x) = (2\pi)^{-n}(Fg)(-x)$ of the functions $1/(\sum_{j=1}^n z_j^2)$ for $n \geq 3$ and $\mathcal{P}(1/(\sum_{j=1}^2 z_j^2))$ for $n = 2$ in the class of the generalized functions is known (see [6] and §§9.7 and 11.8 [37]) and gives

(10) $\Psi_n(z_1, \dots, z_n) = C_n(\sum_{j=1}^n z_j^2)^{1-n/2}$ for $3 \leq n$, where $C_n = -1/[(n - 2)\sigma_n]$, $\sigma_n = 4\pi^{n/2}/\Gamma((n/2) - 1)$ denotes the surface of the unit sphere in \mathbf{R}^n , $\Gamma(x)$ denotes Euler's gamma-function, while

(11) $\Psi_2(z_1, z_2) = C_2 \ln(\sum_{j=1}^2 z_j^2)$ for $n = 2$, where $C_2 = 1/(4\pi)$.

Thus the technique of convolutions over the Cayley-Dickson algebra has permitted to get the solution of the Laplace operator.

Another method is with the line integration over the Cayley-Dickson algebras. In accordance with Formula 26(9) we get

$$\Psi_n(z_1, \dots, z_n) = -\mathcal{I}_\Gamma \mathcal{I}_\Gamma \delta.$$

Laplace's operator and the delta-function are invariant under any orthogonal transform $T \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ of \mathbf{R}^n . Therefore, a fundamental solution Ψ_n also is invariant relative to the orthogonal group $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$. That is Ψ_n depends on $|z|$ and is independent of spherical angles in spherical system of coordinates. Thus we choose the corresponding branches of the anti-derivative $\mathcal{I}_\Gamma \mathcal{I}_\Gamma \delta$. The volume element in the Euclidean space \mathbf{R}^n can be written as $\lambda(dz) = x^{n-1} dx ds$, where $x = |z|$ and ds is the surface element (measure) on the unit sphere S^{n-1} . For each orthogonal transform its Jacobian is unit.

One can take the family of test functions $\eta_\epsilon = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\epsilon^n} \exp\{-(z_1^2 + \dots + z_n^2)/(2\epsilon^2)\}$ tending to the delta-function, when $\epsilon > 0$ tends to zero. These functions can be written in the z -representation due to Formulas 1(1 - 3). On the other hand, for each z -analytic function η with real expansion coefficients into a power series each line integral over the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v restricted on any complex plane $\mathbf{R} \oplus M\mathbf{R}$ coincides with the usual complex integral, where M is a purely imaginary Cayley-Dickson number. Therefore,

$$\int_a^t [\int_a^y \eta(z) dz] y^k dy = \frac{1}{k+1} \int_a^t (t^{k+1} - z^{k+1}) \eta(z) dz \text{ for } k \neq -1 \text{ and}$$

$$\int_a^t [\int_a^y \eta(z) dz] \frac{1}{y} dy = \int_a^t (\ln(t) - \ln(z)) \eta(z) dz.$$

For the characteristic function $\chi_{B(\mathbf{R}^n, 0, x)}$ of the ball $B(\mathbf{R}^n, 0, x)$ of radius $x > 0$ with the center at zero in the Euclidean space \mathbf{R}^n embedded into the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v one can take a sequence of test functions $\iota\omega^l$ converging to the regular generalized function $\chi_{B(\mathbf{R}^n, 0, x)}$, when l tends to the infinity, consequently, $\lim_l \int_{\mathbf{R}^n} \iota\omega^l(z) \lambda(dz) = \sigma_n x^n$. Integrating twice with the anti-derivative operator these test functions η_ϵ in accordance with Example 4.1 and Theorems 19 and 23 and taking the limit with ϵ tending to zero from the right one gets Formulas (10, 11).

This can also be deduced with the help of the Fourier transform with the generator \mathbf{i} :

(12) $F(\Psi_n)(x) = F(-\mathcal{I}_\Gamma \mathcal{I}_\Gamma \delta) = (\sum_{j=1}^n x_j^2)^{-1} F(\delta) = (\sum_{j=1}^n x_j^2)^{-1}$.

Applying the inverse Fourier transform to both sides of Equation (12) we again get Formulas (10, 11).

29. The hyperbolic operators with constant coefficients.

Consider now the hyperbolic operator

(1) $A_0 = L_{p,q} = \sum_{j=1}^p \partial^2 / \partial z_j^2 - \sum_{j=p+1}^n \partial^2 / \partial z_j^2,$

where $p + q = n, 1 \leq p$ and $1 \leq q, (p, q)$ is the signature of this operator, $z_1, \dots, z_n \in \mathbf{R}$. Take two operators Υ and Υ_1 with constant \mathcal{A}_v coefficients so that

(2) $\Upsilon f(z) = \sum_{j=1}^p (\partial f(z) / \partial z_j) i_{2j}^* + \sum_{j=p+1}^n (\partial f(z) / \partial z_j) [i_1^* i_{2j}^*]$ and

(3) $\Upsilon_1 f(z) = \sum_{j=1}^p (\partial f(z) / \partial z_j) i_{2j}^* + \sum_{j=p+1}^n (\partial f(z) / \partial z_j) [i_1 i_{2j}^*],$ so that

(4) $L_{p,q} = \Upsilon \Upsilon_1,$

where $2 \leq n \leq 2^{v-r} - 1, r = 1 < v,$ in accordance with Formulas 2(7–9). Then the fundamental solution Ψ of the partial differential equation

$\Xi \Psi(z_1, \dots, z_n) = \delta(z_1, \dots, z_n)$ with $\Xi = L_{p,q}$ satisfies the identity:

(5) $\Psi = (\Upsilon^* \Psi) * (\Upsilon_1^* \Psi).$

We seek the real fundamental solution $\Psi = \Psi_{p,q}$, since the hyperbolic operator $L_{p,q}$ is real. Using the Fourier transform with the generator \mathbf{i} by real variables z_1, \dots, z_n we infer that

(6) $F(\Psi_{p,q})(x) = [F(\Upsilon^* \Psi_{p,q})(x)][F(\Upsilon_1^* \Psi_{p,q})(x)]$

$= [-\mathbf{i}(\sum_{j=1}^p x_j i_{2j} + \sum_{j=p+1}^n x_j i_{2j} i_1) F(\Psi_{p,q})(x)][-\mathbf{i}(\sum_{j=1}^p x_j i_{2j} + \sum_{j=p+1}^n x_j i_{2j} i_1^*) F(\Psi_{p,q})(x)],$ since

$F(\Upsilon^* \Psi_{p,q})(x) = \sum_{j=1}^p F(\partial \Psi_{p,q} / \partial z_j) i_{2j} + \sum_{j=p+1}^n F(\partial \Psi_{p,q} / \partial z_j) i_{2j} i_1$

$= -\mathbf{i}(\sum_{j=1}^p x_j i_{2j} + \sum_{j=p+1}^n x_j i_{2j} i_1) F(\Psi_{p,q})(x)$

and analogously for Υ_1^* , where $x = (x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ (see also §2). For the function

(7) $P(x) = \sum_{j=1}^p x_j^2 - \sum_{j=p+1}^n x_j^2$ with $p \geq 1$ and $q \geq 1$ the generalized functions $(P(x) + \mathbf{i}0)^\lambda$

and $(P(x) - \mathbf{i}0)^\lambda$ are defined for any complex number $\lambda \in \mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{i}\mathbf{R}$ (see Chapter 3 in [6]).

The function P^λ has the cone surface $P(z_1, \dots, z_n) = 0$ of zeros, so that for the correct definition of generalized functions corresponding to P^λ the generalized functions

(8) $(P(x) + \mathbf{c}\mathbf{i}0)^\lambda = \lim_{0 < \epsilon \rightarrow 0} (P(x)^2 + \epsilon^2)^{\lambda/2} \exp(\mathbf{i}\lambda \arg(P(x) + \mathbf{c}\mathbf{i}\epsilon))$

with either $c = -1$ or $c = 1$ were introduced. Therefore, the identity

(9) $F(\Psi_{p,q})(x) = -(\sum_{j=1}^p x_j^2 - \sum_{j=p+1}^n x_j^2) [F(\Psi_{p,q})(x)]^2$ or

(10) $F(\Psi) = -1 / (P(x) + \mathbf{c}\mathbf{i}0)$ follows, where $c = -1$ or $c = 1$.

The inverse Fourier transform in the class of the generalized functions is:

(11) $F^{-1}((P(x) + \mathbf{c}\mathbf{i}0)^\lambda)(z_1, \dots, z_n) = \exp(-\pi c q \mathbf{i} / 2) 2^{2\lambda+n} 2^{2\lambda+n} \pi^{n/2} \Gamma(\lambda + n/2) (Q(z_1, \dots, z_n) - \mathbf{c}\mathbf{i}0)^{-\lambda-n/2} / [\Gamma(-\lambda) |D|^{1/2}]$

for each $\lambda \in \mathbf{C}$ and $n \geq 3$ (see §IV.2.6 [6]), where $D = \det(g_{j,k})$ denotes a discriminant of the quadratic form $P(x) = \sum_{j,k=1}^n g_{j,k} x_j x_k$, while $Q(y) = \sum_{j,k=1}^n g^{j,k} x_j x_k$ is the dual quadratic form so that $\sum_{k=1}^n g^{j,k} g_{k,l} = \delta_l^j$ for all $j, l; \delta_l^j = 1$ for $j = l$ and $\delta_l^j = 0$ for $j \neq l$. In the particular case of $n = 2$ the inverse Fourier transform is given by the formula:

(12) $F^{-1}((P(x) + \mathbf{c}\mathbf{i}0)^{-1})(z_1, z_2) = -4^{-1} |D|^{-1/2} \exp(-\pi c q \mathbf{i} / 2) \ln(Q(z_1, \dots, z_n) - \mathbf{c}\mathbf{i}0).$

Making the inverse Fourier transform F^{-1} of the function $-1 / (P(x) + \mathbf{i}0)$ in this particular case of $\lambda = -1$ we get two complex conjugated fundamental solutions

(13) $\Psi_{p,q}(z_1, \dots, z_n) = -\exp(\pi c q \mathbf{i} / 2) \Gamma((n/2) - 1) (P(z_1, \dots, z_n) + \mathbf{c}\mathbf{i}0)^{1-(n/2)} / (4\pi^{n/2})$ for $3 \leq n$

and $1 \leq p$ and $1 \leq q$ with $n = p + q$, while

(14) $\Psi_{1,1}(z_1, z_2) = 4^{-1} \exp(\pi c q \mathbf{i} / 2) \ln(P(z_1, z_2) + \mathbf{c}\mathbf{i}0)$ for $n = 2$, where either $c = 1$ or $c = -1$.

Another approach consists in using the anti-derivative operators. The hyperbolic operator $L_{p,q}$ and the delta-function are invariant under the Lie group $\mathbf{O}_{p,q}(\mathbf{R})$ or all linear transforms of the Euclidean space $\mathbf{R}^n, n = p + q$, preserving the scalar product $(x, y)_{p,q} = \sum_{j=1}^p x_j y_j - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j y_j$ invariant. Thus $\Psi_{p,q}$ can be written as a composition $\xi(P(x))$ of some function $\xi(y)$ and of $P(x)$ given by Formula (7). Therefore, we take the corresponding branch of the anti-derivative in the form $\mathcal{I}_\Upsilon \mathcal{I}_{\Upsilon_1} \delta = \xi(P(x))$. Applying the Fourier transform with the generator \mathbf{i} we infer that

(15) $F(\Psi_{p,q})(x) = F(\mathcal{I}_\Upsilon \mathcal{I}_{\Upsilon_1} \delta) = (P(x) + \mathbf{c}\mathbf{i}0)^{-1} F(\delta) = (P(x) + \mathbf{c}\mathbf{i}0)^{-1}.$

Applying the inverse Fourier transform to both sides of Equation (15) one gets Formulas (13, 14).

Thus the results of §§2-25 over the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v lead to the fundamental solution of the hyperbolic operator $L_{p,q}$. This means that the approach of §§2-25 over the Cayley-Dickson algebras leads to the effective solution of any hyperbolic partial differential equation with constant coefficients. Thus Formulas of §§2, 8 with the known function $\Psi = \Psi_n$ from Formulas 28(10, 11) and (13, 14) of this section give the fundamental solution of any first and second order linear partial differential equation with variable z -differentiable \mathcal{A}_v -valued coefficients, $z \in U \subset \mathcal{A}_v$.

30. Example. The heat kernel. Each function of the type $f(z) = P_n(z) \exp(-t|z|^2)$ with a marked positive parameter can be written in the z -representation due to Formulas 1(1-3), where $P_n(z)$ denotes the polynomial by z of degree n . Therefore, $f(z)$ in the z -representation is z -differentiable, consequently, infinite z -differentiable (see [23, 22]) and

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f^{(m)}(z) \cdot (h_1, \dots, h_m)(1 + |z|^k) = 0$$

for each $0 \leq m, k \in \mathbf{Z}$ and Cayley-Dickson numbers $h_1, \dots, h_m \in \mathcal{A}_v$. Therefore, the space \mathbf{E} of infinite z -differentiable tending to zero at infinity functions together with their derivatives multiplied on the weight factor $(1 + |z|^k)$ is infinite-dimensional. Thus it is worthwhile to consider the topologically adjoint space \mathbf{E}'_q of \mathbf{R} -linear \mathcal{A}_v -additive continuous \mathcal{A}_v -valued functionals on \mathbf{E} . Elements of \mathbf{E}'_q are also called the generalized functions. A function or a generalized function is called finite if its support is a bounded set.

The heat partial differential equation reads as

$$(1) \quad \partial v(z)/\partial z_0 = a^2 \Delta v(z) + f(z),$$

where $z = z_0 i_0 + \dots + z_m i_m$, $z_0, \dots, z_m \in \mathbf{R}$, $1 \leq m \leq 2^v - 1$, $2 \leq v$, where $a > 0$, $f(z)$ is a real-valued generalized finite function so that $f(z)$ is zero for $z_0 < 0$ (see §16 [37]). We shall seek the generalized solution \mathcal{E} of this equation using the technique given above. The generalized function $v = \mathcal{E} * f$ is the solution of (1), where

$$(2) \quad \partial \mathcal{E}(z)/\partial z_0 - a^2 \Delta \mathcal{E}(z) = \delta(z),$$

$$(3) \quad (\mathcal{E} * f)(x) = \int_0^{x_0} \int_{\mathbf{R}^m} \mathcal{E}(x - z) f(z) dz_0 \dots dz_m.$$

As usually δ denotes the δ generalized function so that

$$(4) \quad (\delta * f)(x) = \int_0^{x_0} \int_{\mathbf{R}^m} \delta(x - z) f(z) dz_0 \dots dz_m = f(x)$$

for each continuous bounded function f . If f is (super-)differentiable and bounded in each domain $\{z : 0 \leq z_0 \leq T\}$ for $0 < T < \infty$, $f(z) = 0$ for $z_0 < 0$, then the solution v is also (super-)differentiable in the domain $z_0 > 0$ as it will be seen from the formulas given below. Let us seek the generalized solution \mathcal{E} in the form $\mathcal{E}(z) = w(z_0) e^{u(z)}$, where w and u are unknown real-valued functions to be determined. Calculating derivatives of \mathcal{E} and substituting into Equation (2) one gets:

$$(5) \quad e^{u(z)} \{w'(z_0) + w(z_0) \partial u(z)/\partial z_0\} - a^2 e^{u(z)} w(z_0) \sum_{j=1}^m [(\partial u(z)/\partial z_j)^2 + \partial^2 u(z)/\partial z_j^2] = \delta(z),$$

consequently,

$$(6) \quad (1/w(z_0))w'(z_0) = -\partial u(z)/\partial z_0 + a^2 \sum_{j=1}^m [(\partial u(z)/\partial z_j)^2 + \partial^2 u(z)/\partial z_j^2] + e^{-u(z)}(1/w(z_0))\delta(z).$$

Take now any sequence of continuous non-negative functions η_n with compact supports U_n such that $U_{n+1} \subset U_n$ for each n , with $\bigcap_n U_n = \{0\}$,

$$(7) \quad \int_{\mathbf{R}^{m+1}} \eta_n(z) dz_0 \dots dz_m = 1$$

for all n , tending to δ on the space of continuous functions $p(z)$ on $\mathbf{R}i_0 \oplus \dots \oplus \mathbf{R}i_m$ with the converging integral $\int_{\mathbf{R}^{m+1}} |p(z)|^2 dz_0 \dots dz_m < \infty$:

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^{m+1}} p(z) \eta_n(z) dz_0 \dots dz_m = p(0).$$

Therefore, we get that on $\mathbf{R}i_0 \oplus \dots \oplus \mathbf{R}i_m \setminus \{0\}$ for $z_0 > 0$ the following equation

$$(9) (1/w(z_0))w'(z_0) = -\partial u(z)/\partial z_0 + a^2 \sum_{j=1}^m [(\partial u(z)/\partial z_j)^2 + \partial^2 u(z)/\partial z_j^2]$$

need to be satisfied. The left side of (9) is independent of $z - z_0$, hence the right side is also independent of $z - z_0$. The partial differential operator

$\{\partial u(z)/\partial z_0 + a^2 \sum_{j=1}^m [(\partial u/\partial z_j)^2 + \partial^2 u(z)/\partial z_j^2]\}$ acting on u is of the second order. For each Cayley-Dickson number $z \in \mathcal{A}_r$ the identity $z^2 = 2z \operatorname{Re}(z) - |z|^2$ is satisfied, particularly, $M^2 = -|M|^2$ for each purely imaginary number $M \in \mathcal{A}_r$. Therefore, a function u may be only a polynomial by real variables z_1, \dots, z_m of degree not higher than two. On the other hand, the Laplace operator Δ and the δ function are invariant relative to all elements C of the orthogonal group $\mathbf{O}_m(\mathbf{R})$ acting on variables z_1, \dots, z_m . Each $\mathbf{O}_m(\mathbf{R})$ invariant real polynomial P of the second order has the form $\alpha(z_1^2 + \dots + z_m^2) + \beta$, where α and β are two constants independent of z_1, \dots, z_m . Thus u as the polynomial of z_1, \dots, z_m may depend on $|z - z_0|^2 = z_1^2 + \dots + z_m^2$ only. The latter sum of squares can be written in the z -representation with the help of Formulas 1(1 – 3). This means that \mathcal{E} has the form:

$$(10) \mathcal{E}(z) = w(z_0) \exp\{\alpha(z_0)(z_1^2 + \dots + z_m^2) + \beta(z_0)\}$$
 and Equation (9) simplifies:

$$(11) (1/w(z_0))w'(z_0) = -[d\alpha(z_0)/dz_0](z_1^2 + \dots + z_m^2) - [d\beta(z_0)/dz_0]$$

$$+ a^2 \alpha(z_0) \{2m + \alpha(z_0) \sum_{j=1}^m 4z_j^2\}.$$

We can denote $w(z_0)e^{\beta(z_0)}$ by $w(z_0)$ again and take without loss of generality that $\beta = 0$. The left side of (11) is independent of z_1, \dots, z_m , hence terms with $|z - z_0|^2$ in (11) are canceling: $\alpha^{-2}(z_0)[d\alpha(z_0)/dz_0] = 4a^2$. The latter differential equation gives $\alpha(z_0) = -1/(c_0 + 4a^2 z_0)$, where c_0 is the real constant. Substituting this α into (11) one gets:

$$(12) (1/w(z_0))w'(z_0) = a^2 \alpha(z_0) 2m.$$

Together with Condition (2) this gives $C_0 = 0$ and the heat kernel \mathcal{E} :

$$(13) \mathcal{E}(z) = \theta(z_0) [2a(\pi z_0)^{1/2}]^{-m} \exp\{-|z - z_0|^2/[4a^2 z_0]\}$$

and the solution

$$(14) v = \mathcal{E} * f,$$

where $\theta(z_0) = 1$ for $z_0 \geq 0$ and $\theta(z_0) = 0$ for $z_0 < 0$.

If use anti-derivation operators the solution has the form 26(6 – 8) supposing that a solution \mathcal{E} is real-valued on real-valued test functions ω , $[\mathcal{E}, \omega] \in \mathbf{R}$, where $\Upsilon_1 = \Upsilon$, $\Upsilon\Upsilon = -a^2 \Delta_m$ (see §) and $\Upsilon_2 = \partial/\partial z_0$. Therefore,

$$(14) a^2 \mathcal{E} = -\mathcal{I}_\Upsilon \mathcal{I}_\Upsilon (\partial \mathcal{E} / \partial z_0 - \delta).$$

Making the Fourier transform $F = F_{z_1, \dots, z_m}$ by the variables z_1, \dots, z_m with the generator \mathbf{i} of both sides of Equation (14) one gets for suitable branches of the anti-derivatives

$$(15) a^2 F(\mathcal{E})(z_0, x_1, \dots, x_m) = [a^2 \sum_{j=1}^m x_j^2]^{-1} (\partial F(\mathcal{E}) / \partial z_0 - \delta(z_0)).$$

Solving the latter ordinary differential equation one finds $F(\mathcal{E})(z_0, x_1, \dots, x_m)$ and making the inverse Fourier transform by the variables $x_1, \dots, x_m \in \mathbf{R}$ one gets Formula (13).

31. Example. Wave operator. In this section the fundamental solution $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n$ of the wave operator is considered:

$$(1) \overline{\overline{\mathcal{E}}}(t, x) = \delta(t, x), \text{ where}$$

(2) $\overline{\square}f = \partial^2 f / \partial t^2 - \Delta f$ denotes the wave (d’Alambert) operator with

$$(3) \quad \Delta f = \sum_{j=1}^n \partial^2 f / \partial x_j^2,$$

where $t \geq 0, x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$. We make the change of variables putting $t = z_2, x_j = z_{2j+2}$ for each $j = 1, \dots, n, z = z_0 i_0 + z_2 i_2 + \dots + z_{2v-2} i_{2v-2} \in \mathcal{A}_{1,v}, z_0, \dots, z_{2v-1} \in \mathbf{R}, r = 1$. We consider the case $n = 3$ and $v = 4$ so that $\mathcal{A}_{1,4}$ is isomorphic with the octonion algebra $\mathcal{A}_3 = \mathbf{O}$. Let us seek \mathcal{E} in the class of the generalized functions in the form $\mathcal{E}(z) = \theta(z_2)f(z)$, where θ and f are some generalized functions to be calculated, f may depend only on $z_2, z_4, \dots, z_{2n+2}$. D’Alambert’s operator $\overline{\square}$ is invariant relative to any \mathbf{R} -linear transformations A from the Lie group $\mathbf{O}_{1,n}(\mathbf{R})$. Elements of the group $\mathbf{O}_{1,n}(\mathbf{R})$ are characterized by the condition $A^t G A = G$, where G denotes the square $(n + 1) \times (n + 1)$ diagonal matrix $G = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$, the transposed matrix A is denoted by A^t . This means that the wave operator $\overline{\square}$ is invariant under change of variables $\xi = (z_2, z_4, \dots, z_{2n+2})A$ for any $A \in \mathbf{O}_{1,n}(\mathbf{R})$. Making the differentiation of \mathcal{E} one gets the differential equation:

$$(4) \quad \overline{\square}\mathcal{E} = (\partial^2 \theta / \partial z_2^2) f + 2(\partial \theta / \partial z_2)(\partial f / \partial z_2) + \theta \overline{\square}f = \delta(z).$$

The δ -function $\delta(z)$ is also invariant relative to all transformations of the Lie group $\mathbf{O}_{1,n}(\mathbf{R})$, since $\delta g = g(0)$ for each continuous function g with $\int_{\mathbf{R}^{n+1}} |g(z)|^2 dz_2 \dots dz_{2n+2} < \infty$. On the other hand, Equation (4) implies that

$$(5) \quad \partial^2 \theta / \partial z_2^2 = -[2(\partial \theta / \partial z_2)(\partial f / \partial z_2) + \theta \overline{\square}f - \delta(z)] / f(z)$$

for each $z \in \mathcal{A}_{r,v}$, when $f(z) \neq 0$. The left side of Equation (5) may depend only on z_2 , consequently, the right side of (5) is independent of z_4, \dots, z_{2n+2} . In view of Formulas 29(2, 3) with $p = 1$ and $q = n$ we get the operators $\sigma = \Upsilon$ and $\sigma_1 = \Upsilon_1$ with $Q = 0$ up to the enumeration of the variables. Therefore, one gets the functions $\Psi_{1,n}$ (see Formulas 29(13, 14)) over the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_v . But due to the $\mathbf{O}_{1,n}(\mathbf{R})$ invariance of the generalized function \mathcal{E} we infer that it is necessary to take the $\mathbf{O}_{1,n}(\mathbf{R})$ invariant polynomial $P(y) = (y_2^2 - \sum_{j=1}^n y_{2j+2}^2)$. Thus we put $\mathcal{E} = \theta(z_2)f(z)$ with $f(z) = u(z_2^2 - \sum_{j=1}^n z_{2j+2}^2)$, where u is some generalized function. Substituting u instead of f into (5) one gets the simplified differential equation. If suppose that $\partial \theta / \partial z_2 = 0$ for $z_2 > 0$, then $\partial^2 \theta / \partial z_2^2 = 0$ and Equation (5) leads to the differential equation

$$(7) \quad 4u^{(2)}.(1, 1)(\eta)\eta - 4u'.1(\eta) = \delta(z)/c,$$

where $\eta = \eta(z) = z_2^2 - z_4^2 - z_6^2 - z_8^2, \theta(z_2) = c = \text{const}$ for $z_2 > 0$. Choose any sequence of z -differentiable functions $g_n(z)$ with compact supports converging to the δ -function as in §§24 and 30, when n tends to the infinity. Each function $g_n(z)/\eta(z)$ has poles of the first order at points $z_2 = [z_4^2 + z_6^2 + z_8^2]^{1/2}$ and $z_2 = -[z_4^2 + z_6^2 + z_8^2]^{1/2}$. Making the substitution $p = u'.1$ in (7) and Formula 3(10) [20] with the right side $Q(z) = g_n(z)/\eta(z)$ and $b(z) = -1/\eta(z)$ we obtain the integral expression for the solution p_n of the differential equation

$$(8) \quad p'_n.1(\eta) - p_n(\eta)/\eta = g_n(z)/(4c\eta).$$

To evaluate the appearing integrals it is possible to use Jordan’s Lemma (see §2 in [24]) over the octonion algebra isomorphic with $\mathcal{A}_{1,4}$. The evaluation of the integrals (see §3 also) with the given functions can be reduced to the complex case, when α and x belong to the same complex plane \mathbf{C}_M . Applying Jordan’s lemma one deduces the expression for p_n and the limit function $p(\eta) = \delta'(\eta)/(2\pi c) + K$, where K is a constant, since $\eta \in \mathbf{R}$. Therefore, $u(\eta) = \int p(\eta)d\eta$. Thus one infers the fundamental solution

$$(9) \quad \mathcal{E}_3(z) = \theta(t)\delta(t^2 - |x|^2)/(2\pi)$$

and the generalized solution $\mathcal{E}_3 * s$ of the wave equation

$\overline{\square}f = s$, where $s = s(z)$ is a generalized function or particularly a z -differentiable function. The delta generalized function $\delta(P)$ of the quadratic form $P(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$ is described in details in §IV.2 [6].

32. Helmholtz' operator.

When $\beta \neq 0$ with $Re(t_j^* \beta) = 0$ for each j (see §8), for example, $\beta = \beta_0 + i_k \beta_1$ with real β_0 and β_1 and $k > n$, then

(1) $A_0 = \Delta_n + |\beta|^2$ is Helmholtz' operator. The corresponding operator Υ is given by Formula 28(2).

For an arbitrary real non-degenerate quadratic form $P(x)$ generalized functions $(c^2 + P + \mathbf{bi0})^\lambda$ with $c > 0$, $b = 1$ or $b = -1$, $\lambda \in \mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{Ri}$, are defined as:

(2) $(c^2 + P + \mathbf{bi0})^\lambda = \lim_{0 < \epsilon \rightarrow 0} (c^2 + P + \mathbf{b\epsilon i} P_1)^\lambda$,

where P_1 is a positive definite quadratic form.

Some special functions are useful for such equations. Bessel's functions are solutions of the differential equation

(S1) $z^2 d^2 u / dz^2 + z du / dz + (z^2 - \lambda^2) u = 0$,

where λ and z are complex. Bessel's function of the first kind is given by the series:

$$(S2) \quad J_\lambda(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (z/2)^{2m+\lambda} / [m! \Gamma(\lambda + m + 1)],$$

where z and $\lambda \in \mathbf{C}_i$. Then

(S3) $I_\lambda(z) = \exp(-\pi \lambda \mathbf{i} / 2) J_\lambda(\mathbf{i} z)$

is called Bessel's function of the imaginary argument. Other needed functions for non-integer λ are:

(S4) $N_\lambda(z) = [J_\lambda(z) \cos(\pi \lambda) - J_{-\lambda}(z)] / \sin(\pi z)$,

(S5) $H^{(1)}(z) = J_\lambda(z) + \mathbf{i} N_\lambda(z)$,

(S6) $H^{(2)}(z) = J_\lambda(z) - \mathbf{i} N_\lambda(z)$,

(S7) $K_\lambda(z) = \pi [I_{-\lambda}(z) - I_\lambda(z)] / [2 \sin(\pi \lambda)] = \pi \exp(\mathbf{i} \pi (\lambda + 1) / 2) H_\lambda^{(1)}(\mathbf{i} z) / 2$

with the complex variable z and non-integer complex parameter λ . For integer λ values of these functions (S4 – 7) are defined as limits by $\lambda \in \mathbf{C}_i \setminus \mathbf{Z}$. The functions $H^{(1)}$ and $H^{(2)}$ are also solutions of Bessel's differential equation (S1) and they are called Hankel's functions of the first and the second kind respectively, $K_\lambda(z)$ is known as McDonald's function. The functions $I_\lambda(z)$ and $K_\lambda(z)$ are linearly independent solutions of the differential equation:

(S8) $z^2 d^2 u / dz^2 + z du / dz - (z^2 + \lambda^2) u = 0$

(see about special functions in [18, 31]).

Analogously to §28 using Formulas 19.4(C4 – C7) and 14(3, 4) or Theorem 23 for a fundamental solution Ψ_n of the equation

(3) $A_0 \Psi_n = \delta$,

where A_0 is Helmholtz' operator, we get the identity

(4) $F(\Psi_n)(x) = [c^2 - (\sum_{j=1}^n x_j^2)] [F(\Psi_n)(x)]^2$ or

(5) $F(\Psi_n)(x) = 1 / [c^2 - (\sum_{j=1}^n x_j^2) + \mathbf{bi0}]$,

where $c > 0$, $c = |\beta|$. The Fourier transform of the generalized function $(c^2 + P(x) + \mathbf{bi0})^\lambda$ by the real variables $x = (x_1, \dots, x_n)$ with the generator \mathbf{i} is:

(6) $F[(c^2 + P(x) + \mathbf{bi0})^\lambda](y) = 2^{\lambda+1} (2\pi)^{n/2} c^{\lambda+(n/2)} K_{\lambda+(n/2)} [c(Q(y) - \mathbf{bi0})] / [\Gamma(-\lambda) D^{1/2} (Q(y) - \mathbf{bi0})^{(\lambda/2+n/4)}]$,

where $D = \det(g_{j,k})$ denotes a discriminant of the quadratic form $P(x) = \sum_{j,k=1}^n g_{j,k} x_j x_k$, $Q(y) = \sum_{j,k=1}^n g^{j,k} x_j x_k$ is the dual quadratic form so that $\sum_{k=1}^n g^{j,k} g_{k,l} = \delta_l^j$, $\delta_l^j = 1$ for $j = l$ and $\delta_l^j = 0$ for $j \neq l$ (see §IV.8.2 [6]). Mention that $D^{1/2} = |D|^{1/2} \exp(-q\pi \mathbf{i} / 2)$ if the canonical representation of the quadratic form P has q negative terms.

Another formula is:

$$(7) F[(c^2 + P(x) + \mathbf{bi0})^\lambda](y) = 2^{\lambda+1}(2\pi)^{n/2} \exp(-bq\pi\mathbf{i}/2)c^{\lambda+(n/2)} \{K_{\lambda+(n/2)}[c(Q_+(y))]^{1/2}/[\Gamma(-\lambda)|D|^{1/2}(Q_+(y))^{\lambda/2+n/4}] + (b\pi\mathbf{i}/2)H_{-\lambda-(n/2)}^{(j(b))}[c(Q_-(y))^{\lambda/2+n/4}]/[\Gamma(-\lambda)|D|^{1/2}(Q_-(y))^{\lambda/2+n/4}]\},$$

where $j(1) = 1, j(-1) = 2,$

$$(P_+^\lambda, \phi) = \int_{P>0} P^\lambda \phi dx_1 \dots dx_n,$$

$$(P_-^\lambda, \phi) = \int_{P<0} P^\lambda \phi dx_1 \dots dx_n.$$

The functions $(P + \mathbf{bi0})^\lambda$ and P_+^λ and P_-^λ by the complex variable λ are regularized as it is described in [6] with the help of their Laurent series in neighborhoods of singular isolated points λ such that after the regularization only the regular part of the Laurent series remains. The functions $(P + \mathbf{bi0})^\lambda$ with $b = 1$ or $b = -1$ have only simple poles at the points $\lambda = -n/2, -(n/2)-1, \dots, -(n/2) - k, \dots,$ where $k = 1, 2, \dots$ is a natural number. Using formula (6) with $\lambda = -1$ and $P(x) = -(x_1^2 + \dots + x_n^2)$ one gets the fundamental solution Ψ_n , where $(F^{-1}g)(x) = (2\pi)^{-n}(Fg)(-x)$. Particularly, $\Psi_3(x) = -\exp(b\mathbf{ci}|x|)/(4\pi|x|), \Psi_2(x) = -\mathbf{i}H_0^{(1)}(c|x|)/4$ or its complex conjugate $\mathbf{i}H_0^{(2)}(c|x|)/4,$ where $H_0^{(j)}$ denotes Hankel's function, $j = 1, 2.$

33. Klein-Gordon's operator.

Consider β and t_j as in §8 with $Re(t_j^*\beta) = 0$ for each $j, c = |\beta| > 0.$ Take the operator

$$(1) A_0 = L_{p,q} + c^2,$$

where $L_{p,q}$ is the hyperbolic operator as in §29. For $p = 1$ and $q = 3$ the operator A_0 is called Klein-Gordon's operator. From Formulas 32(C4 - C7) and 14(3, 4) or Theorem 23 we infer that

$$(2) F(\Psi_n)(x) = [c^2 - (\sum_{j=1}^p x_j^2 - \sum_{j=p+1}^n x_j^2)][F(\Psi_n)(x)]^2 \text{ or}$$

$$(3) F(\Psi_n)(x) = 1/[c^2 - (\sum_{j=1}^p x_j^2 - \sum_{j=p+1}^n x_j^2) + \mathbf{bi0}].$$

Then Formulas 19.4(6) or 32(7) with $\lambda = -1$ and $P(x) = -x_1^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2,$ $n = p + q,$ give the fundamental solution $\Psi_{p,q}$ of the equation

$$(4) (L_{p,q} + c^2)\Psi_{p,q} = \delta,$$

where $(F^{-1}g)(x) = (2\pi)^{-n}(Fg)(-x).$ There are two \mathbf{R} -linearly independent fundamental solutions, so their \mathbf{R} -linear combination with real coefficients α_1 and α_2 such that $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ is also a fundamental solution.

34. Remark. Certainly, more general partial differential equations as 30(1), but with $\partial^l v / \partial z_0^l, l \geq 2,$ instead of $\partial v / \partial z_0$ can be considered. It is worth to mention, that alternative deductions using Formulas 7(1) and 27(11, 14) can be used instead of 8(1) and 19.4(C1 - C7) in §§30 and 31 providing also $u(z) = \alpha(z_1^2 + \dots + z_m^2) + \beta$ and $f(z) = u(z_2^2 - \sum_{j=1}^n z_{2j+2}^2)$ with the help of the symmetry Lie groups $\mathbf{O}_m(\mathbf{R})$ and $\mathbf{O}_{1,n}(\mathbf{R}).$ Indeed, Functions $P(x)^\lambda$ satisfy Condition 7(P3) for any real $\lambda,$ where $P(z) = z_1^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_n^2, 1 \leq p \leq n \leq 2^{v-1} - 1, 1 \leq v,$ since $(dP(z)^\lambda/dz).h = P(z)^{\lambda-1}\lambda 2Re(\eta(z)h),$ where $z \in \mathcal{A}_v, \eta(z) = z_1 i_1 + \dots + z_n i_n$ for $p = n,$ while $\eta(z) = z_1 i_2 + \dots + z_p i_{2p} + z_{p+1} i_1^* i_{2(p+1)} + \dots + z_n i_1^* i_{2n}$ for $p < n.$ The function $\eta(z)$ can be written in the z -representation due to Formulas 1(1 - 3).

Formally the case of the hyperbolic operators $L_{p,q} + c^2$ and their fundamental solutions is obtained from the elliptic operators $\Delta_n + c^2$ with $c \geq 0$ by the change of variables $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_p, x_{p+1}\mathbf{i}, \dots, x_{p+q}\mathbf{i}),$ where $n = p + q, x_j \in \mathbf{R}$ and $x_j\mathbf{i} \in \mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{Ri}$ for each $j,$ since the quadratic forms P may be with complex coefficients and their Fourier transforms can be considered as in [6]. At the same operators σ or Υ for these particular operators $L_{p,q} + c^2$ and $\Delta_n + c^2$ can be written over the complexified algebra $(\mathcal{A}_r)_{\mathbf{C}}$ instead of the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_v, 2 \leq r < v$ (see §2 above). For this we take in Formula 2(8) \mathbf{i} instead of w_j^* so that

$$(1) \sigma f(z) = \sum_{j=1}^p (\partial f(z) / \partial z_j) i_j^* + \sum_{j=p+1}^n (\partial f(z) / \partial z_j) \mathbf{i} i_j^*,$$
 consequently,

$$(2) (c + \sigma)(c - \sigma)f = (L_{p,q} + c^2)f \text{ and}$$

$$(3) (c + \sigma)(c + \sigma)^* f = (c + \sigma)^*(c + \sigma)f = (\Delta_n + c^2)f.$$

Let

(4) $\Xi_{c,p,q} = L_{p,q} + c^2$, where $c \in \mathbf{R}$, $L_{n,0} = \Delta_n$, $1 \leq p \leq n$, $q = n - p$, and let $\Psi_{c,p,q}$ be a fundamental solution of the equation

(5) $\Xi_{c,p,q} \Psi_{c,p,q} = \delta$.

Then due to Identities (2, 3) a fundamental solution $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\beta+\sigma}$ of the equation

(6) $(\sigma + \beta)\mathcal{E} = \delta$ can be written in the form:

(7) $\mathcal{E}_{\beta+\sigma} = (\sigma + \beta)^* \Psi_{c,n,0}$, where $\beta \in \mathcal{A}_r$, $|\beta| = c$, $Re(t_j^* \beta) = 0$ for each j , $t_j = i_j^*$ for $1 \leq j \leq p$, $t_j = \mathbf{i}i_j^*$ for $p < j \leq n$. Moreover,

(8) $\mathcal{E}_{c+\sigma} = (c - \sigma) \Psi_{c,p,q}$.

Therefore, we infer a solution of the equation

(9) $(\sigma + \beta)f = g$ in $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m, \mathcal{A}_r)$ or in the space $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m, \mathcal{A}_r)_i^*$:

(10) $f = \mathcal{E}_{\beta+\sigma} * g$. From (2, 3) we deduce a fundamental solution \mathcal{V} of the equation

(10) $A_0 \mathcal{V} = (\sigma + \beta)(\sigma_1 + \beta_1) \mathcal{V} = \delta$ in the convolution form:

(11) $\mathcal{V} = \mathcal{E}_{\sigma+\beta} * \mathcal{E}_{\sigma_1+\beta_1}$,

since

(12) $A_0 \mathcal{V} = (\sigma + \beta)(\sigma_1 + \beta_1)((\sigma + \beta)^* \Psi_{c,n,0}) * ((\sigma_1 + \beta_1)^* \Psi_{c,n,0})$

$= (((\sigma + \beta)(\sigma + \beta_1)^* \Psi_{c,n,0}) * (((\sigma_1 + \beta_1)(\sigma_1 + \beta_1)^* \Psi_{c,n,0})) = \delta * \delta = \delta$. Particularly,

$\Psi_{c,p,q} = -\mathcal{E}_{c+\sigma} * \mathcal{E}_{-c+\sigma} = ((c - \sigma) \Psi_{c,n,0}) * ((c + \sigma) \Psi_{c,n,0})$, that can be lightly verified after the Fourier transform by real variables with the generator \mathbf{i} , since by Formulas (1, 2) the operator σ and its anti-derivative operator \mathcal{I}_σ correspond to the signature (p, q) and $F(\sigma\sigma^*g) = -|z|^2 F(g)$ for any $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}_v)_i^*$.

Knowing a fundamental solution it is possible to consider then a boundary problem (see also [13, 37]).

35. Partial differential equations of order higher than two.

The fundamental solution $\Psi_{\Upsilon^m+\beta}$ of the equation

(1) $\Xi_{2m,\beta} \Psi_{\Upsilon^m+\beta} = \delta$,

where

(2) $\Xi_{2m,\beta} = (\Upsilon^m + \beta)(\Upsilon^m + \beta)^*$

can be obtained using decompositions with the help of operators of the first order $\Upsilon_k + \beta_k$ by induction, if such decomposition exists (see §§10-14 above). Suppose that this decomposition is constructed

(3) $(\Upsilon^m + \beta)f(z) = (\Upsilon_m + \beta_m)[\dots[(\Upsilon_2 + \beta_2)[(\Upsilon_m + \beta_m)f(z)]]\dots]$, then the fundamental solution can be written as the iterated convolution

(4) $\Psi_{\Upsilon^m+\beta} = [\dots[(\Upsilon_m + \beta_m)^* \mathcal{E}_m] * [(\Upsilon_{m-1} + \beta_{m-1})^* \mathcal{E}_{m-1}] * \dots] * [(\Upsilon_1 + \beta_1)^* \mathcal{E}_1]$,

where \mathcal{E}_j denotes the fundamental solution of the elliptic second order partial differential equation

(5) $A_j \mathcal{E}_j = \delta$, with

(6) $A_j = (\Upsilon_j + \beta_j)(\Upsilon_j + \beta_j)^*$.

The fundamental solutions \mathcal{E}_j were written above in §§2 and 28. Indeed, using Equalities 4(7 - 9) by induction we have

(7) $\sum_s (\dots(a_{m,k_m}^* a_{m-1,k_{m-1}}^* a_{m-2,k_{m-2}}^* \dots) a_{1,k_1}^* a_{1,l_1} a_{2,l_2} \dots) a_{m,l_m}$
 $= Re(a_{m,k_m}^* a_{m,l_m}) \dots Re(a_{1,k_1}^* a_{1,l_1})$,

where \sum_s denotes the sum by all pairwise transpositions $(k_1, l_1), \dots, (k_m, l_m)$, $a_{j,k} \in \mathcal{A}_v$. Therefore,

(8) $\Xi_{2m,\beta} \Psi_{\Upsilon^m+\beta} =$
 $[\dots[(\Upsilon_m + \beta_m)(\Upsilon_m + \beta_m)^* \mathcal{E}_m] * [(\Upsilon_{m-1} + \beta_{m-1})(\Upsilon_{m-1} + \beta_{m-1})^* \mathcal{E}_{m-1}] * \dots] * [(\Upsilon_1 + \beta_1)(\Upsilon_1 + \beta_1)^* \mathcal{E}_1]$
 $= [\dots[\delta * \delta] * \dots] * \delta = \delta$.

Vice versa if the fundamental solution $\Psi_{\Upsilon^m+\beta}$ is known, then we get the fundamental solution \mathcal{E}_β^m of the equation

(9) $(\Upsilon^m + \beta)\mathcal{E}_\beta^m = \delta$ as

(10) $\mathcal{E}_\beta^m = (\Upsilon^m + \beta)^* \Psi_{\Upsilon^m + \beta}$ in accordance with (2, 7). Moreover, the equation

(11) $A_{m+k}f = g$ with $A_{m+k} = (\Upsilon_1^m + \beta_1)(\Upsilon_2^k + \beta_2)$

in $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}_v)$ or in the space $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}_v)_l^*$, where n is a number of real variables, $2 \leq n \leq 2^v$, has the fundamental solution \mathcal{V}_{m+k} :

(12) $\mathcal{V}_{m+k} = \mathcal{E}_{\Upsilon_1^m + \beta_1} * \mathcal{E}_{\Upsilon_2^k + \beta_2}$, where

(13) $\mathcal{E}_{\Upsilon_1^m + \beta_1} = (\Upsilon_1^m + \beta_1)^* \Psi_{\Upsilon_1^m + \beta_1}$

denotes the fundamental solution of the equation

(14) $(\Upsilon_1^m + \beta_1)\mathcal{E}_{\Upsilon_1^m + \beta_1} = \delta$, consequently,

(15) $f = \mathcal{V}_{m+k} * g$ is the solution of Equation (11).

For example, the fourth order partial differential operator

$$A_4 f(z) = \sum_{j=1}^p \partial^4 f(z) / \partial z_j^4 - \sum_{j=p+1}^n \partial^4 f(z) / \partial z_j^4$$

can be decomposed as the composition of two operators of the second order Υ^2 and Υ_1^2 formally as σ and σ_1 in 2(8, 9) with the substitution of $\partial f / \partial z_{2r_j}$ on $\partial^2 f / \partial z_{2r_j}^2$ so that in accordance with Theorem 10 this operator A_4 can be presented in the form given by Formulas (2, 3, 11).

On the other hand, fundamental solutions of Δ_n^k and $L_{p,q}^k$ and A_k^2 for certain other second order partial differential operators are known. So combining them with operators of the form $\Upsilon_1^{m_1} \dots \Upsilon_k^{m_k}$ permits to consider fundamental solutions of many partial differential operators of order higher than two as well.

Thus knowing fundamental solutions of the corresponding first or second order operators permits to write fundamental solutions of higher order partial differential operators considered above with the help of the iterated convolutions in a definite order prescribed by the induction process.

36. Non-linear partial differential equations.

We consider the differential equation

(1) $(\Upsilon^m + \beta + \hat{f}(y)\Upsilon)y = g$,

where $\Upsilon^m + \beta$ is a partial differential operator as in Formula 10(13) of order m , $f(y)$ is a \mathcal{A}_v differentiable function, $y = y(z)$ is an unknown function, $\hat{f}(y)\Upsilon y := \sum_{j=0}^n [\hat{f}(y) \cdot (\partial y(z) / \partial z_j)] \phi_j^*(z)$. Suppose that a fundamental solution $\mathcal{E}_{\Upsilon^m + \beta}$ of Equation 35(9) for the operator $(\Upsilon^m + \beta)$ is known. Find at first a fundamental solution $y = \mathcal{V}$ of (1) with $g = \delta$. Then

(2) $(\Upsilon^m + \beta)\mathcal{V} = \delta - \mu$,

where $\mu(z) = \hat{f}(y(z))\Upsilon y(z)$. The anti-derivative gives

(3) $w(y(z)) = \Upsilon \int (\hat{f}(y)\Upsilon y) dz = \int f(y(x)) dy(x) = \int f(y) dy = \Upsilon \int \mu(z) dz$,

then

(4) $y = w^{-1}(\Upsilon \int_{\gamma^\alpha|_{[a,tz]}} \mu(x) dx)$,

where w^{-1} denotes the inverse function. On the other hand,

(5) $y = \mathcal{E}_{\Upsilon^m + \beta} * (\delta - \mu) = \mathcal{I}_{\Upsilon^m + \beta}(\delta - \mu)$, when Υ^m is either of the first order for $m = 1$ or is expressed as a composition of operators of the first order,

(5.1) $\Upsilon^m + \beta = (\Upsilon_1 + \beta^1) \dots (\Upsilon_m + \beta^m)$ so that

(5.2) $\mathcal{I}_{\Upsilon^m + \beta} = \mathcal{I}_{\Upsilon_m + \beta^m} \dots \mathcal{I}_{\Upsilon_1 + \beta^1}$,

consequently, (4, 5) imply the equation:

(6) $\mathcal{E}_{\Upsilon^m + \beta} * (\delta - \mu) = \mathcal{I}_{\Upsilon^m + \beta}(\delta - \mu) = w^{-1}(\Upsilon \int_{\gamma^\alpha|_{[a,tz]}} \mu(x) dx)$ or

(7) $w(\mathcal{E}_{\Upsilon^m + \beta} * (\delta - \mu)) = \Upsilon \int_{\gamma^\alpha|_{[a,tz]}} \mu(x) dx$.

We have the identity

$$(\partial(\mathcal{E} * \Psi) / \partial z_p), \phi = -((\mathcal{E} * \Psi), \partial \phi / \partial z_p) = ((\mathcal{E} * (\partial \Psi / \partial z_p)), \phi)$$

with a generalized function Ψ .

Therefore, differentiating (6) by z_0, \dots, z_n , we infer that:

(8) $\{\sum_{j=0}^n [\mathcal{E}_{\Upsilon^m + \beta} * (\partial \mu(z) / \partial z_j)] \phi_j^*(z)\} +$

$(n + 1)^{-1} \sum_{j,k=0}^n [(dw^{-1}(\xi) / d\xi) \cdot (\hat{\theta}(z) \cdot (\partial v_j(z) / \partial z_k))] \phi_k^*(z) = \Upsilon \mathcal{E}_{\Upsilon^m + \beta}$ or

$$(9) \Upsilon(\mathcal{I}_{\Upsilon^{m+\beta}\mu}) + (n+1)^{-1} \sum_{j,k=0}^n [(dw^{-1}(\xi)/d\xi) \cdot (\hat{\theta}(z) \cdot (\partial\nu_j(z)/\partial z_k))] \phi_k^*(z) = \Upsilon(\mathcal{I}_{\Upsilon^{m+\beta}\delta}),$$

where

$$(9.1) [((dg(z)/dz) \cdot \phi_j(z)) \otimes \phi_j^*(z), \omega^{\otimes 2}) = [\mu(z) \otimes 1, \omega^{\otimes 2}]$$

for each real-valued test function ω and each j , $\hat{\theta}(z) = dg(z)/dz$, $\xi = \Upsilon \int_{\gamma^\alpha|_{[a,tz]}} \mu(x) dx$ (see also §§4, 5, 17, 23 and 26). If Υ and β are independent of z_j , i.e. $\phi_j(z) = 0$ is zero identically on U , then $\partial(\mathcal{I}_{\Upsilon^{m+\beta}\mu})/\partial z_j = \mathcal{I}_{\Upsilon^{m+\beta}}(\partial\mu/\partial z_j)$ (see also Note 23.1). Otherwise the derivative $\partial(\mathcal{I}_{\Upsilon^{m+\beta}\mu})/\partial z_j$ is given by Formulas 4(6) and 23(8) and 26(1). The function w is known from (3) after the line integration by the variable y , so Equation (8) is linear by $(\partial\mu(z)/\partial z_j)$, $j = 0, \dots, n$. It can be solved as in [20]. Calculating μ from (8) or (9) we get the fundamental solution:

$$(10) \mathcal{V} = \mathcal{E}_{\Upsilon^{m+\beta}} * (\delta - \mu)$$

and the (particular) solution of (1) is:

$$(11) y = \mathcal{V} * g.$$

When $[\mathcal{E}_{\Upsilon^{m+\beta}}, \omega]$ is real for each real-valued test function ω or $\Upsilon f = (\partial f/\partial z_0)\phi_0(z)$ with a real-valued function $\phi_0(z)$ and the inverse relative to the convolution generalized function is known $\mathcal{E}_{\Upsilon^{m+\beta}}^{-1}$ such that

$$(12) \mathcal{E}_{\Upsilon^{m+\beta}}^{-1} * \mathcal{E}_{\Upsilon^{m+\beta}} = \delta,$$

then Equation (8) simplifies:

$$(13) \Upsilon\mu(z) + (n+1)^{-1} \sum_{j,k=0}^n \mathcal{E}_{\Upsilon^{m+\beta}}^{-1} * [((dw^{-1}(\xi)/d\xi) \cdot (\hat{\theta}(z) \cdot (\partial\nu_j(z)/\partial z_k))] \phi_k^*(z) = \sum_{j=0}^n [\mathcal{E}_{\Upsilon^{m+\beta}}^{-1} * (\partial\mathcal{E}_{\Upsilon^{m+\beta}}/\partial z_j)] \phi_j^*(z),$$
 consequently,

$$(14) \Upsilon\mu(z) + \nu(\mu) = b(z),$$

where $\nu(\mu) := (n+1)^{-1} \sum_{j,k=0}^n \mathcal{E}_{\Upsilon^{m+\beta}}^{-1} * [((dw^{-1}(\xi)/d\xi) \cdot (\hat{\theta}(z) \cdot (\partial\nu_j(z)/\partial z_k))] \phi_k^*(z)$ and $b(z) = \mathcal{E}_{\Upsilon^{m+\beta}}^{-1} * (\Upsilon\mathcal{E}_{\Upsilon^{m+\beta}})$.

If equation (1) is solved, then it provides a solution of more general equation:

$$(15) (\Upsilon^m + \beta + \hat{f}((\Upsilon)^{k-1}\xi)(\Upsilon)^k)\xi = g$$

finding ξ from the equation $(\Upsilon)^{k-1}\xi = y$, where $(\Upsilon)^k$ denotes the k -th power of the operator Υ .

If $\phi_j(z) = i_j\psi_j(z)$ for each j , then functions $\{\nu_j(z) : j\}$ can be chosen real-valued or real-valued generalized functions on real valued test functions (see System 4(10, 11) and §23). In such case the equality

$$\sum_{j,k=0}^n [((dw^{-1}(\xi)/d\xi) \cdot (\hat{\theta}(z) \cdot (\partial\nu_j(z)/\partial z_k))] \phi_k^*(z) = \sum_{j,k=0}^n [((dw^{-1}(\xi)/d\xi) \cdot (\mu(z)(\partial\nu_j(z)/\partial z_k)i_j)] i_k^*\psi_k(z)$$

is satisfied. For $\Upsilon f = (\partial f/\partial z_0)\phi_0(z)$ with a real-valued function $\phi_0(z)$ these equations simplify, since $\hat{\theta} \cdot h = \mu(z)h$ for each $h \in \mathbf{R}$ and $z \in U$ and $(n+1)^{-1} \sum_{j,k=0}^n \mathcal{E}_{\Upsilon^{m+\beta}}^{-1} * [((dw^{-1}(\xi)/d\xi) \cdot (\hat{\theta}(z) \cdot (\partial\nu_j(z)/\partial z_k))] \phi_k^*(z) = \mathcal{E}_{\Upsilon^{m+\beta}}^{-1} * [(dw^{-1}(\xi)/d\xi) \cdot \mu(z)]$.

Thus the results of this paper over the Cayley-Dickson algebras enrich the technique of integration of partial differential equations in comparison with the complex field.

It is planned to present in the next paper solutions of some types of non-linear partial differential equations with the help of non-linear mappings and non-commutative line integration over the Cayley-Dickson algebras.

References

[1] Baez J.C. The octonions // *Bull. Amer. Mathem. Soc.* 39, 2, pp. 145-205, 2002.
 [2] Dickson L.E. The collected mathematical papers. Volumes 1-5, Chelsea Publishing Co., New York, 1975.
 [3] Engelking R. General topology, Mir, Moscow, 1986.

- [4] Emch G. Méchanique quantique quaternionienne et Relativité restreinte. // *Helv. Phys. Acta* 36, pp. 739-788, 1963.
- [5] Fih tengolz G.M. Course of differential and integral calculus. V. 1-3, Nauka, Moscow, 1966.
- [6] Gelfand I.M., Shilov G.E. Generalized functions and operations with them. Fiz.-Mat. Lit., Moscow, 1958.
- [7] Grubb G. Functional calculus of pseudodifferential boundary problems, Birkhäuser, Boston, 1996.
- [8] Gürsey F., Tze C.-H. On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics. World Scientific Publ. Co., Singapore, 1996.
- [9] Gürlebeck K., Habetha K., Sprössig W. Holomorphic functions in the plane and the n -dimensional space. Birkhäuser, Basel, 2008.
- [10] Gürlebeck K., Sprössig W. Quaternionic and Clifford calculus for physicists and engineers. John Wiley and Sons, Inc., Chichester, 1997.
- [11] Gürlebeck K., Sprössig W. Quaternionic analysis and elliptic boundary value problem. Birkhäuser, Basel, 1990.
- [12] Hamilton W.R. Selected works. Optics. Dynamics. Quaternions. Nauka, Moscow, 1994.
- [13] Hörmander L. The analysis of linear partial differential operators. V. 1-4. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [14] Kantor I.L., Solodovnikov A.S. Hypercomplex numbers. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [15] Kneschke A. Differentialgleichungen und Randwertprobleme. Bande 1-3. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1965.
- [16] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of theory of functions and functional analysis. Nauka, Moscow, 1989.
- [17] Kurosh A.G. Lectures on general algebra. Nauka, Moscow, 1973.
- [18] Lavrentjev M.A., Shabat B.V. Methods of functions of the complex variable. Nauka, Moscow, 1987.
- [19] Lawson H.B., Michelson M.-L. Spin geometry. Princ. Univ. Press, Princeton, 1989.
- [20] Ludkovsky S.V. Differential equations over octonions. // *Adv. Appl. Clifford Alg. AACA*, in press 2010 (previous variant, Los Alam. Nat. Lab. math/1003.2620).
- [21] Ludkovsky S.V. Functions of several Cayley-Dickson variables and manifolds over them. // *J. Mathem. Sci.* 141, 3, pp. 1299-1330, 2007 (*Sovrem. Mathem. i ee Pril.* 28 (2005); previous variant, Los Alamos Nat. Lab. math.CV/0302011).
- [22] Ludkovsky S.V. Differentiable functions of Cayley-Dickson numbers and line integration. // *J. Mathem. Sciences* 141, 3, pp. 1231-1298, 2007 (*Sovrem. Mathem. i ee Pril.* 28, 2005; previous version, Los Alam. Nat. Lab. math.NT/0406048; math.CV/0406306; math.CV/0405471).
- [23] Ludkovsky S.V., F. van Oystaeyen. Differentiable functions of quaternion variables. // *Bull. Sci. Math.* 127, pp. 755-796, 2003.
- [24] Ludkovsky S.V. The two-sided Laplace transformation over the Cayley-Dickson algebras and its applications. // *J. of Mathem. Sciences* 151, 5, pp. 3372-3430, 2008 (earlier version, Los Alamos Nat. Lab. math.CV/0612755).
- [25] Ludkovsky S.V. Normal families of functions and groups of pseudoconformal diffeomorphisms of quaternion and octonion variables. // *J. Mathem. Sci.* 150, 4, pp. 2224-2287, 2008 [transl. from, *Sovrem. Mathem. Fundam. Napravl.V.* 18, pp. 101-164, 2006.] (previous variant, Los Alam. Nat. Lab. math.DG/0603006).

- [26] Ludkovsky S.V. Quasi-conformal functions of quaternion and octonion variables, their integral transformations. // *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)* 28, 1, pp. 37-88, 2008.
- [27] Ludkovsky S.V. Residues of functions of octonion variables // *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, bf 39, 1, pp. 65-104, 2010 (previous version, Los Alam. Nat. Lab. math.CV/0902.2495 42 pages).
- [28] Ludkovsky S.V. Multidimensional Laplace transforms over Cayley-Dickson algebras and partial differential equations. // *Los Alam. Nat. Lab. math/1004.4355*, 2010.
- [29] Matveev N.M. Methods of integration of ordinary differential equations. Lan, St. Petersburg, 2003.
- [30] Michor P.W. Manifolds of differentiable mappings. Boston, Shiva, 1980.
- [31] Nikiforov A.F., Uvarov V.B. Special functions of mathematical physics. Nauka, Moscow, 1978.
- [32] Petrovsky I.G. Lectures on partial differential equations. Gos. Izd. Techn. and Theoret. Liter., Moscow, 1953.
- [33] Rothe H. Systeme Geometrischer Analyse. In Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Band 3. Geometrie, 1277-1423. Teubner, Leipzig, 1914-1931.
- [34] Rubinstein I., Rubinstein L. Partial differential equations in classical mathematical Physics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [35] Solovjev M.A. A structure of a space of non-abelian gauge fields // *Proceed. Lebedev Phys. Inst.* 210, pp. 112-155, 1993.
- [36] Spanier E.H. Algebraic topology. New York, Academic Press, 1966.
- [37] Vladimirov V.S. Equations of Mathematical Physics. Nauka, Moscow, 1971.
- [38] Zorich. Mathematical Analysis. V. 2. Nauka, Moscow, 1984.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВДОЛЬ ПУТЕЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА НАД АЛГЕБРАМИ КЭЛИ-ДИКСОНА

С.В. Людковский

Московский государственный технический университет МИРЭА, Москва, Россия
sludkowski@mail.ru

Изучается интегрирование вдоль путей обобщенных функций. Исследуются дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка с кусочно непрерывными и обобщенными переменными коэффициентами над алгебрами Кэли-Диксона. Выведены формулы для их интегрирования. Для этой цели используется некоммутативное интегрирование вдоль путей. Даются примеры решений дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: алгебра Кэли-Диксона, дифференциальное уравнение в частных производных, интегрирование вдоль пути, обобщенная функция.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных алгебр в физике, е) Экспериментальные исследования возможной анизотропии пространства-времени и иных проявлений финслеровой геометрии.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.
2. Объем статьи не должен превышать 1 печ. листа (24 усл. маш. стр.)
3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате \LaTeX (версия $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$, для набора формул используется $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$) и файл статьи в формате PostScript или PDF.
4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).
5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок), ключевые слова. Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.
6. Название статьи, аннотация, ключевые слова, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.
7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.
8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи.
9. Публикация бесплатна для всех авторов.

INFORMATION FOR AUTHORS

In the journal published are the original articles and reviews of the Russian and foreign authors on the following topics: a) Hypercomplex numbers; b) Geometries connected with hypercomplex numbers; c) Finsler spaces; d) Fractals based on hypercomplex numbers; e) Application of the hypercomplex algebras in physics; f) Experimental investigation of the possible space-time anisotropy and other manifestations of Finsler geometry.

Editorial staff informs authors of the articles about the journal rules:

1. Articles are published either in Russian or in English.
2. The size of the article should not exceed that of a printed sheet (24 conventional typewritten pages)
3. Author makes his article file available for the editorial board in \LaTeX format ($\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ version, \AMS-L\TeX is used for formulas) as well as in either PostScript or PDF format.
4. Accepted picture formats are as follows: TIFF, GIF, PNG for bit images (encapsulation in EPS should be possible); EPS, PDF, TEX for vector images. Each image should be represented as a separate file. Colour scheme may be either black and white or grey (8 bit).
5. Article should contain an abstract (no lengthy formulas or references) and keywords.
6. Title of the article, abstract, keywords, names and affiliation of the authors should be available both in Russian and in English.
7. Author should give his or her e-mail and telephone number to make operative communication possible. If the article is sent back to the author for him or her to improve it, it doesn't mean that the article is accepted. 8. Any deviation from the given rules makes the chance of the publication lower.
9. Publication is free for all authors.

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА
В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

Научный журнал. Основан в 2003 г.

№ 2 (16), том 8, 2011

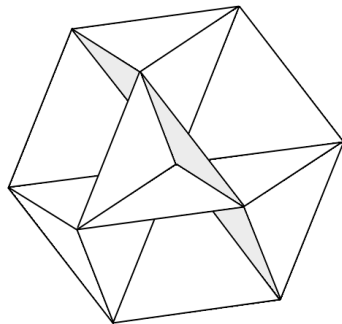
Главный редактор Павлов Д. Г.
Зам. главного редактора Панчелюга В. А.
Технический секретарь Панчелюга М. С.

www.polynumbers.ru
hypercomplex@mail.ru

Свидетельство о регистрации
ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.

ISSN 1814-3946

© НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике,
Российское гиперкомплексное общество, ОАО "МОЗЭТ"



Типографские данные