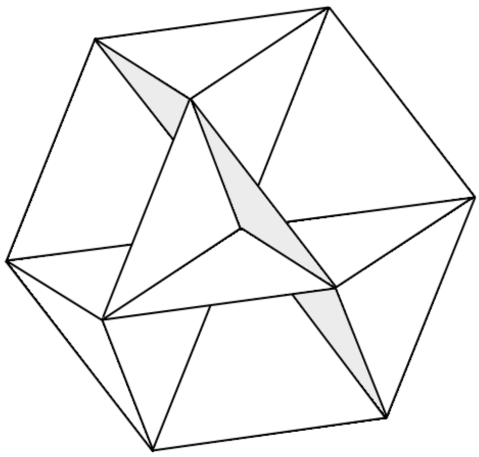
Гиперкомплексные числа в геометрии и физике

№ 2 (14), том 7, 2010

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 2003 г.



www.polynumbers.ru

hypercomplex@mail.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENTS

О V МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЕ – СЕМИНАРЕ «ОСНОВЫ ФИНСЛЕРОВОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ»

Международный фонд развития исследований по финслеровой геометрии и Научно-исследовательский институт гиперкомплексных систем в геометрии и физике при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации и при содействии Московского Государственного Технического Университета им. Н.Э. Баумана провели 1 – 7 ноября 2010 г. для старшеклассников, студентов и молодых ученых V Международную школу-семинар «Основы финслеровой геометрии и ее приложения в физике». Занятия школы проходили в Учебно-лабораторном корпусе МГТУ, а также в живописном месте Подмосковья на территории Учебного Центра г. Королев «Лесное озеро». Школа проходила параллельно и совместно с VI Международной конференцией «Финслеровы обобщения теории относительности» (FERT-2010), в которой приняли участие более 50 ученых из 10 стран.

Несколько слов о финслеровой геометрии. Финслерова геометрия — это естественное продолжение ряда: геометрия Евклида, геометрия Минковского, геометрия общей теории относительности. Основное отличие финслеровой геометрии от перечисленных выше в том, что аналоги теоремы Пифагора в ней могут связывать между собой не только квадраты гипотенуз и катетов, но и более высокие их степени, в частности, третьи или четвертые. Есть основания предполагать, что эта геометрия может оказаться фундаментом будущей единой теории поля, которая со временем станет теоретической основой создания принципиально новых прикладных устройств в области энергетики, связи и транспорта.

Существует целый ряд астрофизических наблюдений свидетельствующих, что наша Вселенная анизотропна не только до интервалов в 100 – 200 МПарсек, но и много дальше, возможно, вплоть до своих видимых границ. Подобные факты делают актуальными поиски удовлетворительного обобщения метрики Минковского на одну из финслеровых метрик. Чтобы оказаться работоспособным, такое обобщение, с одной стороны, должно не противоречить современным псевдоримановым представлениям о пространстве-времени, а с другой, — давать именно такие следствия, которые согласуются с наблюдениями анизотропии. Среди таких наблюдений, свидетельствующих о глобальной анизотропии нашей Вселенной, можно упомянуть:

– анизотропию реликтового фона, на сегодня наиболее полно исследованную в рамках программ WMAP и Plank;
– анизотропию собственных движений квазаров, выявленную в работах MacMillan;
– анизотропию распределений по небосводу параметра Хаббла, выявленную в работе McClure и Dyer вплоть до расстояний в 300 МПарсек.

Одним из наиболее перспективных кандидатов на замену псевдоримановой метрики пространства-времени является четырехмерное финслерово пространство с метрикой Бервальда-Моора. Тесное родство этих двух пространств особенно ярко проявляется в так называемом изотропном базисе, все четыре вектора которого лежат на световом конусе.

Ортогональный базис

Пространство – времени Минковского:

$$S^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{1}$$

Пространство – времени Бервальда-Моора:

$$S^4 = c^4t^4 + x^4 + y^4 + z^4 - 2c^2t^2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) + 8ctxyz \tag{2}$$

Изотропный базис

Пространство – времени Минковского:

$$S^2 = h_1h_2 + h_1h_3 + h_1h_4 + h_2h_3 + h_2h_4 + h_3h_4 \tag{3}$$

Пространство – времени Бервальда-Моора:

$$S^4 = h_1h_2h_3h_4 \tag{4}$$

Произвольный базис

Пространство – времени Минковского:

$$dS^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j \tag{5}$$

Пространство – времени Бервальда-Моора:

$$dS^4 = g_{ijkl}(x)dx^i dx^j dx^k dx^l \tag{6}$$

Среди свойств, делающих эти пространства весьма схожими можно назвать:

- пространственную однородность, из которой следуют законы сохранения энергии-импульса;
- равноправие времениподобных направлений, из которого следуют законы сохранения положения центра масс и релятивистская инвариантность;
- наличие группы симметрий SO (3), правда, ее инвариантом являются не трех- или четырехмерные интервалы, а более сложные метрические величины;
- постоянство скорости света, которая, как и в пространстве Минковского не зависит, ни от скорости наблюдателя, ни от направления;
- наличие светового конуса, делящего все четырехмерное пространство на конус прошлого, конус будущего и область абсолютно удаленных событий;
- упорядоченность событий по временной координате, что позволяет говорить о совместимости с принципом причинности.

Однако есть и существенные отличия:

- группа движений (изометрических преобразований) рассматриваемого финслерова пространства 7-параметрическая вместо 10-параметрической группы Пуанкаре;
- группа конформных преобразований – бесконечномерная, вместо 15-параметрической конформной группы пространства Минковского;
- имеются дополнительные бесконечномерные группы непрерывных симметрий, аналогов которым нет в пространстве Минковского;
- в аффинном представлении световой конус рассматриваемого пространства имеет вид двух четырехгранных пирамид, а не форму круглого конуса, как в пространстве Минковского;
- трехмерное пространство относительно одновременных событий представляет собой нелинейную гиперповерхность, вместо гиперплоскости пространства Минковского.

Сходство двух пространств особенно сильно проявляется при малых скоростях по отношению к скорости света, когда оба они приближенно могут описываться геометрией Галилея. При больших скоростях проблема соответствия пока не решена, однако и тут вполне может найтись параметр для предельного перехода. Независимо от этого уместно поставить вопрос: имеются ли какие-либо экспериментальные или наблюдательные свидетельства, которые говорили бы в пользу лучшего описания реального Мира именно с позиций финслеровой геометрии, а не псевдоримановой?

Существует версия, что если подобные поверочные явления есть, то искать их следует на космологических интервалах. Из различных вариантов соответствующей проверки особый интерес представляет ситуация с анизотропией реликтового излучения. Это явление связано с событиями, имевшими место миллиарды лет назад и удаленными от нас на расстояния в миллиарды световых лет. То есть, как раз там, где по выдвигаемым предположениям наиболее рельефно должны проявляться специфические анизотропные финслеровские эффекты. Кроме того, известны две явные аномалии связанные именно с реликтовым излучением. Важный характер первой из них отметил Роджер Пенроуз — это слишком низкая амплитуда квадруполя, которая в семь раз меньше предсказываемого стандартной моделью значения. Вторая аномалия связана с подозрительной параллельностью осей трех первых сферических гармоник: диполя, квадруполя и октуполя. Если с позиций финслеровой геометрии предложить правдоподобные объяснения этим двум аномалиям, а также суметь предсказать и провести проверку некоторых дополнительных явлений — новая финслерова геометрия получила бы веские аргументы в свою пользу.

Первые три дня Школа проходила в зале заседаний Учебно-лабораторного корпуса Московского Государственного Технического Университета (МГТУ) им. Н.Э. Баумана, остальные дни — в Учебном Центре «Лесное озеро», находящемся в ведении муниципалитета города Королева. На территории Центра, расположенного в 30 км от Москвы, Фонд развития исследований по финслеровой геометрии несколько лет назад построил комфортабельное здание, предназначенное для проведения загородных семинаров, которые регулярно проводятся там с 2002 года. В настоящее время здание является загородной базой Научно-исследовательского института «Гиперкомплексных систем в геометрии и физике» и в нем регулярно проводятся научные семинары, школы и конференции. Сказочный лес, красивое озеро, чистый воздух и тишина — создают все условия для плодотворной учебы и работы над научными задачами.

Последняя Школа явилась уже пятой из тех, что организовывались НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике. В их рамках прошли обучение более 100 слушателей (старшеклассники, студенты, аспиранты, преподаватели ВУЗов, кандидаты и доктора наук). Международным коллективом профессоров прочитано в общей сложности более тысячи часов лекций по теоретической физике, астрофизике, финслеровой геометрии, алгебре и общей теории относительности.

В работе V Международной школы-семинара «Основы Финслеровой геометрии и ее приложения в физике» в качестве слушателей приняли участие следующие старшеклассники, студенты, аспиранты и кандидаты наук (всего 56 человек): Баронин Алексей Михайлович (МГТУ им. Баумана), Бочарова Елена Игоревна (МГТУ им. Баумана), Бреховских Владимир Валерьевич (МГТУ им. Баумана), Васильев Николай Сергеевич (ЦПФ при МГУ им. Баумана), Веселов Александрович Петрович (МГТУ им. Баумана), Виноградов Константин Сергеевич («Логос» г. Ярославль), Винтайкин Иван Борисович (МГТУ им. Баумана), Вислов Александр Петрович (МГТУ им. Баумана), Гаранин Александр Алексеевич (МГТУ им. Баумана), Гладких Алексей Викторович (МГТУ им. Баумана) Гориненко Юрий Юрьевич (Лицей 1580) Данилова Анна Андреевна (МГТУ им. Баумана) Дюдина Анастасия Михайловна (Лицей 1580), Егоренко Антон Сергеевич (МГТУ им. Баумана), Ефремов Ярослав Владимирович (МГТУ им. Баумана), Журавлев Сергей Владимирович (МГТУ им. Баумана), Завидеев Артем Сергеевич (МГТУ им. Баумана), Зимин Михаил Михайлович (МПГУ им. Ленина), Иванов Виктор Александрович (г. Красноярск, Сибирский федеральный университет), Изпольков Алексей Алексадрович (МГТУ им. Баумана), Киктенко Евгений Олегович (МГТУ им. Баумана), Клещев Алексей Борисович (МПГУ им. Ленина), Козин Александр Васильевич («Логос» г. Ярославль), Комарица Оксана Валентиновна (МГТУ им. Баумана), Крылова Нина Георгиевна Беларусь (Беларусский Государственный Университет, г. Минск), Кудрявцев Максим Андреевич (МГТУ им. Баумана), Кузнецов Михаил Юрьевич (ИЯИ РАН), Куликов Илья Владимирович (МГТУ им. Баумана), Курочкин Антон Вадимович (МГТУ им. Баумана), Лапшин Александр Валерьевич (г. Первоуральск), Литвинова Анна Олеговна (МГТУ им. Баумана), Мнацаканова Алена Геннадьевна (МГТУ им. Баумана), Мурчинский Владислав Сергеевич (ГУУ), Нестеров Валерий Алексеевич (МГТУ им. Баумана), Никулин Дмитрий Юрьевич (Лицей 1580), Никулин Михаил Юрьевич (Лицей 1580), Павлов Владимир Алексеевич (МГТУ им. Баумана), Павлов Владислав Дмитриевич (МГТУ им. Баумана), Перегожин Алексей Владимирович (МГТУ им. Баумана), Поржежинская Елена Юрьевна (МГТУ им. Баумана), Расников Максим Дмитриевич (ЯрГУ им. Демидова), Ребров Степан Владимирович (РГУ, мехмат, теория функций и функционального анализа), Рожкова Любовь Михайловна (МГТУ им. Баумана), Скибин Дмитрий Александрович (Лицей 1580), Смоляков Александр Валерьевич («Логос» г. Ярославль), Смыгалина Анна Евгеньевна (МГТУ им. Баумана), Степанян Иван Викторович, Сутула Ирина Игоревна (МГТУ им. Баумана), Томчук Александр Александрович (МГТУ им. Баумана), Тонцов Петр Николаевич (МГГУ), Федотов Иван Михайлович (МГТУ им. Баумана), Фомин Игорь Владимирович (МГТУ им. Баумана), Чернакова Марина Сергеевна (Центр гравитации и фундаментальной метрологии ВНИИМС), Щегольков Алексей Александрович (МГТУ им. Баумана), Яковенко Иван Сергеевич (МГТУ им. Баумана).

В V Школе были прочитаны лекции по следующим направлениям:

1. Балан Владимир (Политехнический университет, г. Бухарест, Румыния) «Финслеровы пространства – основные геометрические объекты и приложения».
2. Гладышев Владимир Олегович (НИИ ГСГФ, директор; МГТУ им. Н. Э. Баумана, профессор) «Оптические эксперименты по поиску анизотропии пространства».
3. Бринзей Николетта (Университет Трансильвания, г. Брашов, Румыния) «Физические интерпретации функций от комплексных чисел».
4. Богословский Георгий Юрьевич (НИИ ядерной физики им. Д. В. Скобельцина МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия) «Финслеровы расширения ОТО».
5. Кокарев Сергей Сергеевич (Образовательный центр «Логос», г. Ярославль; НИИ «Гиперкомплексные системы в геометрии и физике», г. Фрязино, Россия) «Современные физико-геометрические концепции».
6. Лебедев Сергей Витальевич (МГТУ им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия) «Финслерова геометрия по П.К. Рашевскому».
7. Павлов Дмитрий Геннадиевич (НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, г. Фрязино, Россия) «Двойные числа и физические интерпретации функций от них».
8. Панчелюга Виктор Анатольевич (НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, г. Фрязино; Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, г. Пущино, Россия) «Фракталы на комплексных и двойных числах».
9. Сипаров Сергей Викторович (Государственный Университет гражданской авиации, профессор, г. Санкт-Петербург, Россия) «Современные проблемы ОТО».

10. Чернов Владимир Михайлович (Самарский аэрокосмический университет; Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара, Россия) «Алгебры».
11. Элиович Александр Александрович (Институт Системных Исследований РАН, г. Москва, Россия) «Методология и проблематика современной физики».

В качестве дополнительной программы слушателями Школы были прослушаны следующие доклады VI Международной Конференции «Финслеровы обобщения теории относительности» (FERT-2010):

1. Кокарев С.С. (НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия), Павлов Д. Г. (НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия) «Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной».
2. Павлов Д. Г. (НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия) «Гиперболический аналог электромагнитного поля.»
3. Кисиль В. (Университет Лидса, Лидс, Великобритания) «Симметрии, гиперчисла и недифференциальные геометрии».
4. Плакса С. (Институт математики НАН Украины, Киев, Украина) «Коммутативные алгебры, ассоциируемые с уравнениями математической физики».
5. Богословский Г. Ю. (НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино; Институт ядерной физики им Скобельцина МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия) «О некоторых аспектах теории локально анизотропного пространства-времени».
6. Лебедев С. В. (НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино; МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия), Гарасько Г.И. (НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино; ГУП Всероссийский электротехнический институт, Москва, Россия), Павлов Д.Г. (НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия), Панчелюга В.А. (НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино; Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, Пущино, Россия) «Лестничное (обобщенно-экспоненциальное) представление поличисел, рассмотренное на примере H3 и H4.».
7. Сипаров С. В. (НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Государственный университет гражданской авиации, кафедра физики, С.-Петербург, Россия)
8. Чернов В. М. (Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия) «Перспективы компьютера Бервальда-Моора».
9. Jose G. Vargas (Ассоциации Фазового Пространства времени, Колумбия, США) «Геометрия Финслера-Калуца-Клейна, предпочтительные системы отсчета и метрика Лоренца».
10. Левин С. Ф. (Московский институт экспертизы и испытаний, Москва, Россия) «Идентификация анизотропии красного смещения на основе точного решения уравнения Маттига».
11. Бронников К. А., Мельников В. Н. (Центр Гравитации и фундаментальной метрологии ВНИИМС, Институт гравитации и космологии, РУДН, Москва, Россия) «Вариации фундаментальных физических констант как тест возможной анизотропии пространства-времени и новая СИ»
12. Жотиков В. Г. (Московский физико-технический институт (Национальный исследова-

тельский университет), Долгопрудный, Московская область, Россия) «О сингулярных метриках Финслера любого класса сингулярности».

13. Войку Николетта (Трансильванский Университет, Брашов, Румыния) «Об уравнениях электромагнетизма в пространствах с Финслеровой геометрией».
14. Fjelstad Paul (Колледж Св. Олафа, Нортфилд, Миннесота, США) «Трекинг концепций как следствие обобщения».
15. Pandey Triyugi (Факультет математики и статистики, Университет Горакпура, Горакпур, Индия) «От Евклидовой к Финслеровой геометрии».
16. Силагадзе Зураб (Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера, Новосибирск, Россия) «О Финслеровом обобщении метрики Шварцшильда».
17. Глазунов Н. М. (Национальный авиационный университет, Киев, Украина) «О финслеровых геометриях с симметрическими метрическими функциями».
18. Neagu Mircea, Atanasiu Gheorghe (Факультет математики и информатики, Трансильванский Университет, Брашов, Румыния) «Локальная Риманово-Финслерова геометрия струй для трехмерного времени».
19. Кассандров В. В. (Институт гравитации и космологии Российского университета дружбы народов, Москва, Россия) «О связи линейной и финслеровой геометрий пространства-времени, индуцируемых структурой комплексных кватернионов».
20. Гладышев В. О. (НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино; МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия) «Проблема поиска анизотропии пространства-времени».
21. Элиович А. А. (НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, РУДН, Москва, Россия). «О полинормах, автоморфизмах и теория поля».
22. Фильченков М. Л. (Институт гравитации и космологии. Российский университет дружбы народов, Москва, Россия), Лаптев Юрий П. (МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия) «К вопросу об анизотропных римановых и финслеровых метриках»
23. Горелик В. С. (Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия) «Микроструктура квазикристаллического физического вакуума и возможность генерации скалярных бозонов»
24. Крылова Г. В., Крылова Н. Г. (Белорусский Государственный Университет, Минск, Белоруссия) «Эффекты финслеровой геометрии в физике поверхностных явлений: случай монослойных систем»
25. Лапшин А. В. (Уральский государственный университет им. А. М. Горького, Россия) «К вопросу о двойственности между алгебрами двойных и комплексных чисел»
26. Шакиров Ш. Р. (Институт Теоретической и Экспериментальной Физики, Москва, Россия) «Свойства объема, ограниченного алгебраической поверхностью»

Отчеты о Школах 2008 — 2010 годов можно найти на сайте:
http://hypercomplex.xpsweb.com/articles/452/ru/pdf/otchet.pdf
http://hypercomplex.xpsweb.com/articles/522/ru/pdf/otchet-3.pdf

Для получения общих представлений о том, что из себя представляют финслеровы пространства и связанные с ними гиперкомплексные числа, интересующимся можно рекомендовать посмотреть научно-популярные фильмы «Геометрия вселенной с различных точек зрения» и «Анизотропный мир», ссылки на которые размещены на странице:

http://www.polynumbers.ru/section.php? lang=ru&genre=75

Там же представлены видеоверсии некоторых докладов, прозвучавших во время V Школы и VI Конференции FERT-2010.

Для тех, кто хочет попробовать самостоятельно разобраться в основаниях финслеровой геометрии и некоторых гиперкомплексных алгебр, можно рекомендовать монографию Г.И. Гарасько «Начала финслеровой геометрии для физиков»:

http://hypercomplex. xpsweb. com/page. php? lang=ru&id=487

Д. Г. Павлов

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И МАТЕРИИ НА ПЛОСКОСТИ ДВОЙНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Д.Г. Павлов[1], С.С. Кокарев[1,2]

[1] *НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия*

[2] *Российский научно-образовательный центр "Логос", Ярославль, Россия*

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

На основе алгебры двойных чисел развивается алгебраическая версия теории относительности, занимающая промежуточное положение между специальной и общей теориями относительности. В области пространства-времени, свободной от материи, основной объект развиваемой теории — гиперболический потенциал F — является h-голоморфной функцией двойной переменной и описывает расщепление пространства-времени на временное и пространственные направления в конформно-деформированном плоском пространстве-времени Минковского. Показано, что эффект конформной деформации является принципиально наблюдаемым с помощью экспериментов, включающих сравнение темпа хода часов, движущихся по различным мировым линиям. Область пространства-времени, занятая веществом, определяется условием $F_{,\bar{h}} \neq 0$. Динамика гиперболического потенциала описывается действием специального вида, в котором потенциальный член является функцией гиперболического модуля неголоморфности $F_{,\bar{h}}$. Показано, что уравнения поля представляют собой сопряженные нелинейные волновые уравнение с самодействием. Особенностями полученных уравнений являются: а) безусловное наличие 1-интеграла; б) условие совместности (интегрируемости), которое определяет класс допустимых полей $\mathcal{G}(\mathcal{H}_2)$. Последнее условие, которое можно рассматривать как обобщение условия h-голоморфности, является решающим для построения согласованной и содержательной единой физической модели пространства-времени и материи в 2-мерном случае. Рассмотрен достаточно общий пример статической 2-мерной вселенной. Обсуждается соотношение развиваемого подхода с СТО и ОТО. Формулируется принцип суперэкстремума, позволяющий вычислять фундаментальные константы теории и начально-краевые условия.

Ключевые слова: гиперболическое поле, h-голоморфность, неголоморфность, конформные преобразования, суперэкстремум.

1 Введение

В работах [1]-[2] были сделаны наброски теории голоморфных функций двойной переменной. В качестве физических приложений теории были отмечены 2-мерные краевые задачи, приводящие к волновому уравнению, алгебраическая формулировка специальной теории относительности и динамическая теория некоторых фундаментальных скалярных полей.

Интересная возможность, которую предоставляют h-голоморфные функции двойной переменой и которая осталась за рамками статей [1]-[2], связана с интерпретацией конформных преобразований, определяемых h-голоморфными функциями, как переходов между неинерциальными системами отсчета в плоском двумерном пространстве-времени. Включение в рассмотрение конформных деформаций пространства-времени естественным образом расширяет рамки двумерной специальной теории относительности, в кинематике которой задействуются лишь изометрические преобразования, трактуемые как переходы между инерциальными системами отсчета. Хорошо известно, что подобная возможность в принципе отсутствует в трех- и четырехмерных псевдоевклидовых пространствах (из-за отсутствия соответствующей бесконечномерной конформной группы симметрий). Менее известно, что такая возможность имеется в двумерии, и совсем мало известно о наличии бесконечномерных конформных групп в целой серии плоских геометрий финслерова типа, — пространствах с метрикой Бервальда-Моора (частным случаем которых, кстати, является и пространство двойных чисел [5, 6]).

Подход, который мы развиваем в настоящей статье, навеян аналогией свойств двойных чисел и функций от них со свойствами комплексных чисел и функций от них. Хорошо известно, что среди приложений комплексного анализа особое место занимает теория комплексного потенциала, которая эффективно работает при решении эллиптических 2-мерных задач математической физики. Компоненты любой аналитической функции комплексной переменной являются сопряженными гармоническими функциями и решают некоторую статическую (например, в случае электростатики) или стационарную (в случае стационарных течений в гидродинамике идеальной жидкости) задачу в пространстве вне источников с соответствующими граничными условиями. Плоскость двойной переменной, в отличие от комплексной плоскости, обладает естественной псевдоевклидовой структурой и поэтому теория гиперболического потенциала решает некоторые гиперболические задачи математической физики в 2-мерном пространстве-времени. Отталкиваясь от этой аналогии, мы идем в своих построениях дальше и даем физико-геометрическую интерпретацию гиперболическому потенциалу как универсальному полю, отвечающему как за геометрические свойства пространства-времени, так и за физические свойства его материального наполнения.

Статья состоит из четырех частей и заключения. В первой части мы приводим сведения из теории двойных чисел и функций от них, необходимые для дальнейшего изложения. Во-второй части мы рассматриваем кинематические и геометрические аспекты подхода и выводим формулу для относительной конформной деформации хода часов, которую можно использовать в качестве основы для экспериментальных тестов теории или для сравнения ее предсказаний с соответствующими предсказаниями СТО и ОТО. Третья часть посвящена принципам динамической теории гиперболического потенциала. В этой части мы рассматриваем неголоморфные гиперболические потенциалы. Мы постулируем, что именно неголоморфность гиперболического потенциала отличает области пространства-времени, заполненные материей, от вакуумных областей. Важное соотношение (70), возникающее как условие интегрируемости уравнений движения, обеспечивает согласованность и содержательность физической интерпретации рассматриваемого подхода. Применяя стандартные теоретико-полевые рассуждения, мы получаем явный вид компонент тензора энергии-импульса гиперболического поля-вещества (в пустоте, где потенциал голоморфен, эти компоненты всегда обращаются в нуль или описывают энергию физического вакуума $\mathcal{U}(0)$) и выводим выражения, связывающие гиперболический потенциал с локальными плотностью энергии и давлением. Для иллюстрации подхода мы рассматриваем задачу о нахождении гиперболического потенциала, управляющего статической вселенной с источником в виде одномерного покоящегося упругого стержня.

В разделе 5 мы формулируем важную и на наш взгляд перспективную с точки зрения приложений концепцию *супервариационного принципа*, который позволяет вычислять существенные фундаментальные константы теории и даже вид ее лагранжиана, не выходя за рамки теории. Ряд рассмотренных примеров применения супервариационного принципа обнаруживает его нетривиальность и содержательность как в рамках стандартных физических теорий, так и в рамках излагаемого нами подхода. Для теории h-поля мы вычисляем суперэкстремальный потенциал с точностью до пары постоянных.

В заключении мы резюмируем основные положения развиваемого подхода.

Основные сведения по алгебре двойных чисел и теории относительности предполагаются известными. Читатель может познакомиться с ними по руководствам и статьям [1, 3, 5, 7].

2 Некоторые предварительные сведения

2.1 СТО на плоскости двойной переменной

Остановимся вкратце на некоторых ключевых положениях 2-мерной СТО, формулируя их в терминах алгебры двойных чисел. Будем отождествлять элементы $\mathcal{H}_2$ с точками-событиями 2-мерного пространства-времени Минковского $\mathcal{M}_2$. Таким образом, с каждым элементом $h \in \mathcal{H}_2$ мы ассоциируем 2-мерный радиус-вектор-событие $h = t + jx$ $(j^2 = +1)$. Вводя базис 1-форм $\{dh, d\bar{h}\}$, рассмотрим вещественную квадратичную форму:

$$\eta = \mathrm{Re}(dh \otimes d\bar{h}) = dt \otimes dt - dx \otimes dx. \tag{1}$$

Формула (1) иллюстрирует глубокую связь алгебры двойных чисел и псевдоевклидовой геометрии, а ее поличисловые версии в высших измерениях приводят к метрическим пространствам Бервальда-Моора, которых мы здесь не касаемся.

По аналогии с комплексными числами для всякого двойного числа можно определить его экспоненциальное и гиперболически-тригонометрическое представления:

$$h = \epsilon\varrho e^{j\psi} = \epsilon\varrho(\cosh\psi + j\sinh\psi),$$

где для каждого из клиньев I, II, III, IV, представленных на рис. 1, имеют место следующие определения величин:

$$\begin{array}{rlll} \mathrm{I}: & \epsilon = 1, & \varrho = \sqrt{t^2 - x^2}, & \psi = \mathrm{Arth}(x/t); \\ \mathrm{II}: & \epsilon = j, & \varrho = \sqrt{x^2 - t^2}, & \psi = \mathrm{Arth}(t/x); \\ \mathrm{III}: & \epsilon = -1, & \varrho = \sqrt{t^2 - x^2}, & \psi = \mathrm{Arth}(x/t); \\ \mathrm{IV}: & \epsilon = -j, & \varrho = \sqrt{x^2 - t^2}, & \psi = \mathrm{Arcth}(t/x). \end{array} \tag{2}$$

Величины ϱ и ψ, определенные в каждом из клиньев формулами (2), называются *модулем* и *аргументом* двойного числа h.

Отметим, что множество двойных чисел с нулевым модулем ϱ не описывается ни одной из координатных карт введенной выше гиперболической полярной системы координат. Множество двойных чисел вида

$$h_0 + h_1(1 \pm j), \tag{3}$$

$(h_0, h_1$ — произвольные двойные числа) будем называть *конусом числа* h_0 и обозначать $\mathrm{Con}(h_0)$. Физически множество $\mathrm{Con}(h_0)$ — это множество событий, связанных с h_0 световыми сигналами. Алгебраически векторы положений $h - h_0$, где $h \in \mathrm{Con}(h_0)$, являются делителями нуля в алгебре $\mathcal{H}_2$.

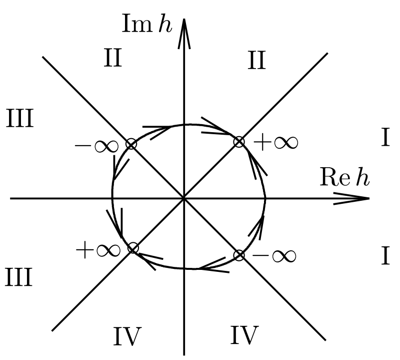


Рис. 1: Область $R \sqcup -R \sqcup R \sqcup -R$ изменения угла ψ на плоскости $\mathcal{H}$. Ориентация согласована в противоположных клиньях и противоположна в соседних. Для различения углов в различных клиньях можно нумеровать угол ψ индексом k: ψ_k, $(k = 1, 2, 3, 4)$.

Изометрии метрики (1) образуют группу Пуанкаре $\mathrm{P}(1,1)$. Ее однородная часть (1-параметрическая группа Лоренца Lor) реализуется умножениями на элементы алгебры единичного модуля вида $\epsilon e^{j\psi}$. При этом числа с $\epsilon = 1$ описывают причинные преобразования Лоренца, не меняющие ориентации времени, а остальные варианты описывают либо сверхсветовые преобразования Лоренца, либо преобразования Лоренца с обращением времени. Переходя к параметру скорости:

$$v = \tanh\psi, \tag{4}$$

приходим к формуле для активных преобразований Лоренца:

$$h' = e^{j\psi}h = \left[(1-v^2)^{-1/2} + jv(1-v^2)^{-1/2}\right](t+jx) = \frac{t+vx}{\sqrt{1-v^2}} + j\frac{x+vt}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{5}$$

Отметим, что описание пассивных преобразований Лоренца, соответствующих смене системы отсчета, реализуется элементами коалгебры $\mathcal{H}_2^*$ [2].

Изометрии метрики (1) сохраняют класс инерциальных систем отсчета, которые на плоскости $\mathcal{H}_2$ изображаются семействами параллельных прямых с направляющими векторами положительного квадрата нормы $h\bar{h}$. Произвольное движение точечной частицы описывается криволинейной мировой линией, на которой определено векторное поле 2-скорости

$$u = \frac{dh}{ds}, \tag{6}$$

где s — параметр псевдоевклидовой длины. При этом $|u| = 1$, а физическая скорость v определяется отношением:

$$v = \frac{\operatorname{Im} u}{\operatorname{Re} u}, \tag{7}$$

либо эквивалентно формулами (4)-(5). Физически вектор 4-скорости задает направление линий собственного времени пробного тела или системы отсчета (необязательно инерциальной) в пространстве-времени. При этом факт его единичности, который следует непосредственно из определения, выражает *постулат о глобальном постоянстве хода собственного времени любых часов во всех системах отсчета.* Другой формой выражения этого постулата является *совпадение собственного времени часов с длиной соответствующей части их мировой линии.* Математически эти постулаты выражаются следующими определениями собственного времени τ:

$$\tau = \int\limits_{\Gamma} |u|\, ds = \int\limits_{\Gamma} ds. \tag{8}$$

В дальнейшем мы, используя приведенные соотношения в рамках h-голоморфной конформной теории относительности, придем к более общей картине поведения часов, в которой скорость хода собственного времени становится функцией точки пространства-времени.

2.2 h-голоморфные функции двойной переменной

Произвольное гладкое отображение $f\colon R^2 \to R^2$ можно представлять парой вещественных компонент, либо парой компонент, зависящих от сопряженных двойных переменных $\{h, \bar{h}\}$:

$$(h,\bar{h}) \mapsto (h',\bar{h}') : \quad h' = F_1(h,\bar{h}); \quad \bar{h}' = F_2(h,\bar{h}). \tag{9}$$

Для интерпретации R^2 как плоскости двойной переменной $\mathcal{H}_2$ естественно ограничиться отображениями, сохраняющими гиперболическую комплексную структуру плоскости, т.

е. отображениями $\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ вида: $h \mapsto F(h)$. Дифференцируемые[1] функции $R^2 \to R^2$, удовлетворяющие условию

$$F_{,\bar{h}} = 0, \tag{10}$$

будем называть *h-голоморфными* функциями двойной переменной h. Функции, удовлетворяющие условию

$$F_{,h} = 0, \tag{11}$$

будем называть *h-антиголоморфными* функциями двойной переменной.

По аналогии с голоморфными функциями комплексной переменной голоморфные функции двойной переменной можно определять формальными степенными рядами, сходимость которых часто вытекает из сходимости соответствующих вещественных рядов.

Имеет место следующее утверждение: *всякая h-голоморфная или h-антиголоморфная функция двойной переменной отображает делители нуля в делители нуля* или, выражаясь геометрическим языком, *оставляет инвариантным конус любой точки*. Формально это свойство выражается равенством:

$$F(\mathrm{Con}(h)) = \mathrm{Con}(F(h)),$$

для всякой точки h из области голоморфности функции F (доказательство см. в [1]). При этом голоморфная функция сохраняет компоненты конуса, а антиголоморфная переводит компоненты $\lambda(1 \pm j)$ друг в друга.

С учетом покомпонентного определения операторов дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial h} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + j\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{h}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - j\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{12}$$

условие (10) в декартовых координатах для h-голоморфной функции $F = U + jV$ принимает вид:

$$F_{,\bar{h}} = (U + jV)_{,\bar{h}} = \frac{1}{2}[(U + jV)_{,t} - j(U + jV)_{,x}] = \frac{1}{2}[U_{,t} - V_{,x} + j(V_{,t} - U_{,x})] = 0,$$

откуда следуют *условия гиперболической аналитичности Коши-Римана:*

$$U_{,t} = V_{,x}; \quad U_{,x} = V_{,t}. \tag{13}$$

Легко проверить, что из условий (13) следует гиперболическая гармоничность вещественной и мнимой частей аналитической функции F, которая выражается уравнениями:

$$\Box U = \Box V = 0, \tag{14}$$

где

$$\Box \equiv 4\partial_h \partial_{\bar{h}} = \partial_t^2 - \partial_x^2 \tag{15}$$

— 2-мерный волновой оператор — даламбертиан ("гиперболический лапласиан").

При отображении

$$\mathcal{H}_2 \stackrel{F}{\to} \mathcal{H}_2, \tag{16}$$

[1]Понятие производной функции $F(h, \bar{h})$ по аргументам вводится аналогично определению вещественного анализа. Именно, мы определяем дифференцируемость функции F в точке $(h, \bar{h})$ как следующее свойство ее приращения: $\Delta F = A(h, \bar{h})\,\Delta h + B(h, \bar{h})\,\Delta \bar{h} + o(\|\Delta h\|_{\mathcal{H}})$, где $\|\Delta h\|_{\mathcal{H}} \equiv [|\Delta t^2 - \Delta x^2|]^{1/2}$ — псевдоевклидова норма приращения переменной. Переходя к различным пределам при $\|\Delta h\|_{\mathcal{H}} \to 0$, получаем определения частных производных или "производных по направлениям". Проблема при таком определении возникает только в случае производных вдоль компонент конуса: $\partial_{\mathrm{Con}} = \partial_{\lambda(1 \pm j)}$. Мы не останавливаемся подробно на этом вопросе в настоящей статье.

где F — голоморфная функция, метрика η преобразуется (в обратную сторону) по закону:

$$\eta \mapsto \eta' = |F'(h)|^2 \eta, \tag{17}$$

где $F'(h)/dh$. Формула (17) означает, что функция $F(h)$ в области своей голоморфности и в точках, где $|F'(h)|^2 \neq 0$ осуществляет конформное отображение двойной плоскости на себя, т.е. сохраняет гиперболические углы. Это обстоятельство тесно связано с установленным выше фактом инвариантности конусов Con относительно h-голоморфных отображений. Отметим, что $|F'|^2 = |\nabla U|^2 = |\nabla V|^2 = \Delta_F$, где ∇ — оператор градиента в псевдоевклидовой метрике, а Δ_F — якобиан отображения F, рассматриваемого как отображение $R^2 \to R^2$. Как это следует из условий (13) или соображений конформности, линии $U = \mathrm{const}$ и линии $V = \mathrm{const}$ для всякой голоморфной функции $F(h)$ образуют на плоскости $\mathcal{H}_2$ ортогональную (в гиперболическом смысле) криволинейную систему координат, поскольку в каждой точке выполняется равенство:

$$\eta(\nabla U, \nabla V) = U_{,t}V_{,t} - U_{,x}V_{,x} = U_{,t}U_{,x} - U_{,x}U_{,t} = 0. \tag{18}$$

По аналогии с комплексным случаем это проясняет геометрический смысл отношения *гиперболической сопряженности* пары функций U и V, которые являются вещественной и мнимой частью некоторой h-голоморфной функции $F(h)$: *сопряженные функции имеют взаимно-ортогональные линии уровня и равные нормы градиентов в каждой точке.*

Отметим, что множество конформных преобразований псевдоевклидовой метрики, как и в евклидовом случае, не исчерпывается h-голоморфными функциями. Отметим также, что в отличие от общего конформного преобразования псевдоевклидовой метрики, которое может индуцировать кривизну, h-голоморфные преобразования, рассматриваемые здесь, оставляют пространство-время плоским. Ввиду этого можно сказать, что излагаемая ниже теория представляет собой промежуточное звено между специальной и общей теориями относительности в 2-мерном случае.

3 Теория гиперболического потенциала в пустоте

3.1 Принципы конформной теории относительности

Расширим теперь группу Пуанкаре, действующую на двумерном пространстве-времени $\mathcal{M}_2$, до группы произвольных h-голоморфных преобразований, которые действуют на точки-события пространства-времени как на элементы алгебры $\mathcal{H}_2$. Ввиду нелинейности преобразования F, глобальная афинная структура $\mathcal{M}_2$ в общем случае не сохраняется и необходимо переходить к локальной версии отображения — его дифференциалу. На алгебраическом языке дифференциал отображения F осуществляет отображение касательных пространств по формуле:

$$\xi_h \mapsto \chi_{F(h)} = F'\xi_h. \tag{19}$$

где $\xi_h \in T_h\mathcal{M}_2$, $\chi_{F(h)} \in T_{F(h)}\mathcal{M}_2$, $h = t + jx$. Используя экспоненциальное представление для производной F':

$$F'(h) = \epsilon |F'|(t,x) e^{j\psi(t,x)}, \tag{20}$$

приходим к заключению о том, что локально h-голоморфные преобразования осуществляют:

1. преобразования Лоренца, зависящие от точки (поворот на гиперболический угол $\psi(t,x)$);
2. отражения осей времени и пространственной координаты (параметр ϵ);
3. растяжение длин векторов (скалярный множитель $|F'|(t,x)$).

Первые два типа преобразований, по существу, рассматриваются и в стандартной версии СТО. Разница преобразований Лоренца в конформной СТО и обычной СТО заключается в том, что первые действуют локально, т.е. параметр ψ зависит от точки, в то время как в стандартной СТО мы используем глобальные преобразования Лоренца, сохраняющие аффинную структуру пространства-времени[2].

Таким образом, в локальной версии преобразований пространства-времени единственными новыми элементами являются растяжения псевдоевклидовых длин (интервалов), описываемое модулем производной $|F'|$. В случае стандартных преобразований Лоренца $|F'| = 1$ и конформная степень свободы исчезает.

Перейдем к физической интерпретации h-голоморфных отображений. При этом в качестве эвристического руководящего принципа мы будем придерживаться *принципа аналогии с комплексной плоскостью.* Голоморфная функция на комплексной плоскости может быть как динамическим (электростатика), так и кинематическим (гидродинамика) потенциалом. Эти две точки зрения могут быть в определенном смысле эквивалентными друг другу, аналогично тому как силовой и геометрический способы описания гравитации в некоторых ситуациях эквивалентны друг другу в рамках ОТО.

Будем рассматривать функцию $F = U + jV$ как комплексный потенциал опорного векторного поля 2-скорости или *опорного поля собственного времени.* Само поле 2-скорости u будет определяться формулой:

$$u = \frac{dF}{dh} = \frac{\partial U}{\partial t} + j\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{21}$$

в которой использованы определение (12) оператора комплексного дифференцирования и гиперболические условия Коши-Римана (13). Квадрат модуля 2-скорости

$$|u|^2 = (\nabla U)^2 = (\nabla V)^2 = |F'|^2. \tag{22}$$

Первый знак равенства в формуле (8) остается в силе и определяет теперь нетривиальное "поле скоростей" собственного времени, которое на всякой интегральной кривой Γ этого поля задается соотношением:

$$\frac{d\tau}{ds} = |F'|. \tag{23}$$

Теперь в рассматриваемой нами h-голоморфной теории относительности интервалы псевдоевклидовой длины и хроноинтервалы оказываются различными и связь между ними в каждой точке управляется гиперкомплексным потенциалом F.

Составим уравнения интегральных кривых опорного поля собственного времени (линий времени или линий тока времени):

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{\partial U}{\partial t}; \quad \frac{dx}{d\lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}. \tag{24}$$

Потенциальность поля собственного времени приводит к тому, что параметр λ оказывается пропорциональным натуральному параметру s на интегральной кривой. Для доказательства этого факта вычислим смешанные производные $\partial^2 U/\partial t \partial x$ из первого и второго уравнения в (24) независимо. Имеем для первого уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{dt}{d\lambda} = \frac{d^2 t}{d\lambda^2}\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^{-1}.$$

[2]Отметим, что попытка использовать локализованные преобразования Лоренца посредством умножения на элементы вида $e^{j\psi(t,x)}$ выводит за рамки h-голоморфных преобразований.

Аналогично для второго уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{dx}{d\lambda} = \frac{d^2 x}{d\lambda^2}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^{-1}.$$

Приравнивая полученные выражения получаем после простых преобразований

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2\right) = 0, \tag{25}$$

откуда следует

$$\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 = C = \mathrm{const}, \tag{26}$$

что и требовалось доказать. В дальнейшем мы везде полагаем $C = 1$.

Интегральные кривые поля ∇V — это пространственные сечения 2-мерного пространства-времени, ортогональные в каждой точке линиям времени. Для вычисления пространственных длин вдоль пространственных сечений произвольной конформной калибровки можно воспользоваться формулой

$$\ell = \int |F'|\, ds, \tag{27}$$

где параметр s — натуральный параметр интегральной кривой поля ∇V, определяемой парой уравнений:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\partial V}{\partial t}; \quad \frac{dx}{ds} = \frac{\partial V}{\partial x}. \tag{28}$$

Таким образом, масштабный множитель "управляет" как ходом собственного времени, так и пространственными расстояниями. Это становится совсем очевидным, если обратить внимание на полное равноправие времениподобных и пространственно-подобных направлений и условность их интерпретации как таковых в рамках 2-мерной СТО.

Для произвольных движений пробных частиц промежутки времени и длины вычисляются:

$$\frac{d\tau}{ds} = \eta(\nabla U, w); \quad \frac{d\ell}{ds} = \eta(\nabla V, w), \tag{29}$$

где w — стандартный вектор 2-скорости пробной частицы ($|w| = 1$).

3.2 Конформный сдвиг частоты

Проанализируем с позиций излагаемой конформной теории относительности процедуру сравнения хода пространственно разделенных часов. Пусть Γ_1 и Γ_2 — мировые линии двух часов, которые рассматриваются в 2-мерном пространстве времени в некоторой конформной калибровке, задаваемой h-голоморфным потенциалом $F = U + jV$ (рис. 2). Рассмотрим пару близких точек на интегральной кривой Γ_2: точку $p = (t(s_2), x(s_2))$ и точку $p' = (t(s_2 + \Delta s_2), x(s_2 + \Delta s_2))$, где s_2 — натуральный параметр на кривой Γ_2. Переходя к линеаризованным выражениям, получаем:

$$t' = t(s_2 + \Delta s_2) = t(s_2) + \dot{t}\Delta s_2 + o(\Delta s_2); \tag{30}$$

$$x' = x(s_2 + \Delta s_2) = x + \dot{x}\Delta s_2 + o(\Delta s_2), \tag{31}$$

где точка означает дифферецирование по параметру s_2. С учетом того, что вектор $\dot{t}\partial_t + \dot{x}\partial_x$ 4-скорости часов 2 является единичным в метрике Минковского η, хроноинтервал, приходящийся на рассматриваемый отрезок Δs_2 мировой линии Γ_2, можно вычислить,

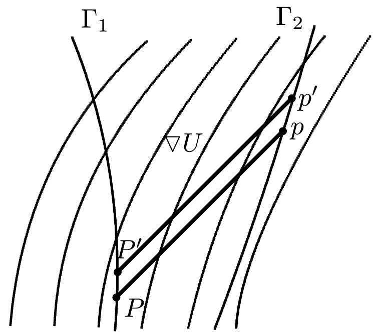


Рис. 2: К процедуре сравнения хода часов в h-голоморфной теории относительности

спроектировав его на направление ∇U в точке p ($\star$ — скалярное произведение в 2-мерной метрике Минковского η):

$$d\tau_2 = \nabla U \star (\dot{t}\partial_t + \dot{x}\partial_x)\Delta s_2 = (U_{,t}\dot{t} - U_{,x}\dot{x})\Delta s_2. \tag{32}$$

Линии конусов прошлого $\mathrm{Con}(p)$ и $\mathrm{Con}(p')$ высекают на мировой линии Γ_1 пару точек $P = (T, X)$ и $P' = (T', X')$ соответственно. Условие принадлежности пары точек $\{p, P\}$ одной компоненте конуса приводит к соотношению

$$T(s_1) - X(s_1) = t(s_2) - x(s_2), \tag{33}$$

определяющему связь параметров s_1 (натуральный параметр на мировой линии Γ_1) и s_2, при которых часы оказываются связаны световым сигналом. Для часов 1 имеем аналогично формуле (32):

$$d\tau_1 = \nabla U \star (\dot{T}\partial_t + \dot{X}\partial_x)\Delta s_1 = (U_{,t}\dot{T} - U_{,x}\dot{X})|_{\mathrm{Con}(p)}\Delta s_1. \tag{34}$$

Дифференцируя соотношение (33), приходим к связи длин отрезков мировых линий часов:

$$ds_1 = \frac{\dot{t} - \dot{x}}{(\dot{T} - \dot{X})_{\mathrm{Con}(p)}} ds_2. \tag{35}$$

Теперь из (32) и (34) с учетом (35) получаем:

$$\delta(P|p) \equiv \frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\Delta_{p'}}{\Delta_p}, \tag{36}$$

где

$$\Delta_p \equiv \frac{U_{,t}\dot{t} - U_{,x}\dot{x}}{\dot{t} - \dot{x}}; \quad \Delta_{p'} \equiv \left.\frac{U_{,t}\dot{T} - U_{,x}\dot{X}}{\dot{T} - \dot{X}}\right|_{\mathrm{Con}(p)}. \tag{37}$$

Формулы (36)-(37) описывают принципиально наблюдаемый эффект конформной деформации собственного времени, измеряемый путем обмена световыми сигналами между двумя пространственно разделенными часами. Величина $\delta(P|p)$ показывает скорость хода часов в точке P в единицах собственного времени часов в точке p, расположенной на конусе будущего точки P, в конформной калибровке $F = U + jV$.

В качестве примера рассмотрим эффект конформной деформации времени, индуцированной слабой конформной волной вида:

$$F(h) = h + \varepsilon \sin \omega h, \quad \omega\varepsilon \ll 1. \tag{38}$$

Полагая $\varepsilon = \varepsilon_1 + j\varepsilon_2$, $\omega = \omega_1 + j\omega_2$, получаем для $F(h) = U(t,x) + jV(t,x)$ в компонентах:

$$U(t,x) = t + \varepsilon_1 \sin\Phi_1 \cos\Phi_2 + \varepsilon_2 \sin\Phi_2 \cos\Phi_1; \tag{39}$$

$$V(t,x) = x + \varepsilon_1 \sin\Phi_2 \cos\Phi_1 + \varepsilon_2 \sin\Phi_1 \cos\Phi_2, \tag{40}$$

где $\Phi_1 = \omega_1 t + \omega_2 x$, $\Phi_2 = \omega_2 t + \omega_1 x$.

Рассмотрим пару покоящихся на расстоянии L друг от друга часов[3]. Такие часы описываются компонентами 4-скорости: $\dot{t} = \dot{T} = 1$, $\dot{x} = \dot{X} = 0$. Формулы (36)-(37) приводят к простому выражению эффекта конформной деформации времени (координаты (t,x) — произвольные текущие координаты опорных часов):

$$\delta((t-L, x-L)|(t,x)) = \frac{U_{,t}(t-L, x-L)}{U_{,t}(t,x)}. \tag{41}$$

Элементарные вычисления приводят к выражению:

$$U_{,t}(t,x) = 1+\varepsilon_1(\omega_1 \cos\Phi_1 \cos\Phi_2 - \omega_2 \sin\Phi_1 \sin\Phi_2) + \varepsilon_2(\omega_2 \cos\Phi_2 \cos\Phi_1 - \omega_1 \sin\Phi_2 \sin\Phi_1); \tag{42}$$

$$U_{,t}(t-L, x-L) = U_{,t}(t,x)|_{\Phi_i \to \Phi_i - \delta}, \tag{43}$$

где $\delta = (\omega_1 + \omega_2)L$. Подставляя (42)-(43) в формулу (41) и используя условие малости конформной деформации, после элементарных тригонометрических преобразований получаем следующее выражение для относительного хода часов:

$$\delta((t-L, x-L)|(t,x)) \approx 1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\omega_1 + \omega_2)\sin[(\omega_1 + \omega_2)L]\sin[(\omega_1 + \omega_2)(t + x - L)]. \tag{44}$$

Формула (44) показывает, что *в h-голоморфной теории относительности относительная скорость хода часов испытывает пространственно-временную модуляцию,* которая в принципиальном отношении доступна измерению посредством эксперимента. В реальном эксперименте удобнее измерять не скорость хода часов, а сдвиг частоты двух точечных электромагнитных излучателей. Формула для относительного сдвига частоты в этом случае:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\omega_1 + \omega_2)\sin[(\omega_1 + \omega_2)L]\sin[(\omega_1 + \omega_2)(t + x - L)] \tag{45}$$

получается очевидным образом из формулы (44).

Для организации подобного эксперимента необходимо знать, каким распределением источников порождается конформная деформация вида (38). Опираясь на принцип аналогии с комплексной плоскостью, сформулируем некоторые общие гипотетические положения (аксиомы конформной теории относительности), позволяющие ответить на этот вопрос.

1. Источником конформной деформации 2-мерного пространства-времени является *гиперболический заряд*, связанный некоторым (пока неизвестным) образом с характеристиками материи (плотностью энергии, давлением,...).

2. В вакууме (т.е. в пустом пространстве-времени вне дискретных или распределенных источников) поле конформной деформации описывается некоторой h-голоморфной функцией $F = U + jV$.

3. На границе источников (линии) $V = \mathrm{const}$ (физически это означает, что мировая линия материальной частицы границы области источника образует одну из линий тока времени).

[3]Далее мы везде отождествляем L с разностью координат x положений часов, поскольку учет конформной деформации длин с помощью формулы (27) приведет к поправкам высшего порядка малости.

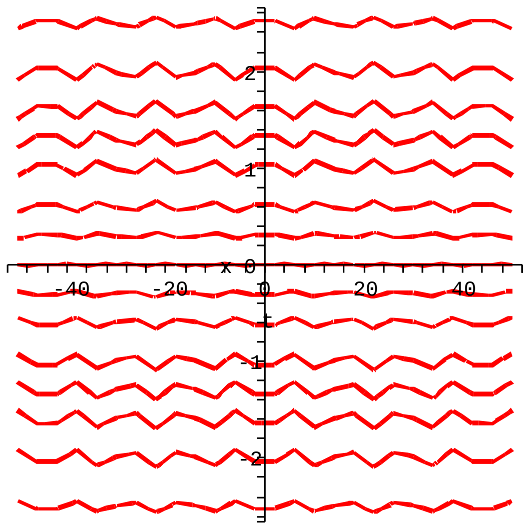


Рис. 3: Семейство линий-границ (46) потенциальных источников поля конформных деформаций (38) для $\varepsilon_2 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\varepsilon_1 = 0.1$, $\omega_1 = 1$. В области вблизи оси абсцисс (оси времени) условие малости, которое было использовано для вывода приближенного решения (47) нарушается.

Сформулированные принципы оставляют невыясненным вопрос об определении поля конформной деформации в области внутри источников — в общем случае оно не будет там h-голоморфным. Мы посвятим этому вопросу следующий раздел. Заметим здесь однако, что для большинства экспериментов с пробными излучателями и часами этот вопрос несущественен, поскольку такие эксперименты проводятся вне источников.

Определим приближенный закон движения границ источников в рассмотренном нами примере. С учетом (40) условие $V = C = \mathrm{const}$ принимает вид:

$$x + \varepsilon_1 \sin\Phi_2 \cos\Phi_1 + \varepsilon_2 \sin\Phi_1 \cos\Phi_2 = C. \tag{46}$$

— неявного уравнения, определяющего закон движения границы. Для $C \gg \varepsilon$ можно легко найти приближенное решение в явном виде:

$$x \approx C - (\varepsilon_1 \sin\Phi_2 \cos\Phi_1 + \varepsilon_2 \sin\Phi_1 \cos\Phi_2)|_{x=C}$$

или в явном виде:

$$x \approx C - \varepsilon_1 \sin(\omega_2 t + \omega_1 C)\cos(\omega_1 t + \omega_2 C) + \varepsilon_2 \sin(\omega_1 t + \omega_2 C)\cos(\omega_2 t + \omega_1 C). \tag{47}$$

Вид линий из семейства (46) при некоторых частных значениях ω_i, ε_i и C представлен на рисунке 3.

Сделаем несколько замечаний по поводу рассматриваемой ситуации и полученных результатов.

1. Рассматриваемая нами ситуация слабой волны конформной деформации в значительной степени аналогична полю слабой плоской гравитационной волны. Однако, как уже отмечалось выше, конформная деформация, описываемая посредством h-голоморфных функций, не меняет плоскостности 2-мерного пространства времени, в то время как гравитационная волна в ОТО характеризуется ненулевым тензором конформной кривизны и неустранима ни преобразованиями координат, ни общим кон-

формным преобразованием метрики. Кроме того, волна конформной деформации собственного времени эффективно описывается скаляром, в то время как гравитационная волна существенно тензорная и поперечная.

2. Тем не менее, эффект конформной деформации возможно следует рассматривать как эффект, включающий стандартные электромагнетизм, гравитацию и возможно поля новой еще неизвестной природы (5-ая сила), описываемый нами в рамках некоторого альтернативного формализма. Наиболее полно этот формализм должен реализовываться в рамках пространств $\mathcal{H}_n$ (n-мерных метрических пространств Бервальда-Моора, тесно связанных с алгеброй поличисел). Этим вопросам мы предполагаем специально посвятить несколько будущих публикаций.

3. Отметим, что наше рассмотрение по существу предполагает формальный биметризм. Одна из метрик — метрика Минковского η, которая не подвергается конформной деформации и является опорной. Другая метрика — деформированная метрика Минковского $|F'|^2\eta$, которую мы не использовали как таковую. Для сравнения развиваемого нами подхода с подходом ОТО удобнее встать на противоположную точку зрения и использовать в рассуждениях именно деформированную метрику $|F'|^2\eta$. Мы еще вернемся к этому вопросу в Заключении.

4. Расчет потенциала F подразумевает введение некоторого динамического принципа, включающего уравнения поля и законы его взаимодействия с материей. Один из простейших вариантов, в котором характеристики материи связываются с неголоморфностью самого поля F, мы обсудим в следующем разделе.

4 Динамическая теория гиперкомплексного потенциала

Целью настоящего раздела является формулировка и исследование динамического принципа, из которого бы вытекали законы (уравнения), управляющие динамикой поля F. Вне источников это поле должно становиться полем конформной деформации, описываемым некоторой h-голоморфной функцией, со всеми свойствами и физической интерпретацией, рассмотренными выше. Из общих соображений очевидно, что в области, занятой источниками, поле F, вообще говоря, уже не будет являться голоморфной функцией переменной h. Другими словами, область источников поля характеризуется неравенством $F_{,\bar{h}} \neq 0$, выражающим факт неголоморфности функции F, так что в этой области полевая функция F зависит, вообще говоря, как от переменной h, так и от переменной $\bar{h}$. Будем в дальнейшем называть величину $F_{,\bar{h}}$ *неголоморфностью гиперкомплексного потенциала* F. Если мы постулируем, что линии времени внутри источников как и прежде совпадают с интегральными кривыми векторного поля $F_{,h}$ (которое, отметим, теперь уже в общем случае не является градиентом), то поле F становится универсальной функцией, содержащей в себе всю информацию обо всем пространстве-времени вместе с его материальным наполнением: производные $F_{,h}$ отвечают за локальные кинематику источников и геометрию пространства-времени, а производные $F_{,\bar{h}}$ (неголоморфность) отвечают за внутренние локальные характеристики источников.

4.1 Вариационный принцип и уравнения поля

Перейдем к теоретико-полевым формулировкам. Постулируем действие для гиперболического потенциала в следующем виде:

$$\mathcal{S}[F,\bar{F}] = \alpha \int\limits_{\mathcal{H}_2} \{|F_{,h}|^2 - \mathcal{U}(|F_{,\bar{h}}|^2)\}\, dh \wedge d\bar{h}, \tag{48}$$

где первое слагаемое под интегралом является гиперболическим "кинетическим членом" и отвечает за динамику гиперболического потенциала в пустоте, а второе слагаемое представляет собой гиперболический "потенциальный член" и отвечает за свойства и вклад источников. В соответствии с изложенными выше соображениями, это последнее слагаемое зависит только от гиперболического модуля величины неголоморфности и в области вне источников, где неголоморфность обращается в нуль, оно определяет в действии некоторую полную дивергенцию, не дающую вклада в уравнения движения. Отметим, что действие в целом вещественно, хотя мы и записали его в двойном представлении. Константа α в нашем рассмотрении необходима лишь для соблюдения правильной размерности и ее конкретное значение не будет играть в дальнейшем никакой роли[4].

Из общих соображений можно было бы сразу исключить из рассмотрения случаи $\mathcal{U}(X) = AX + B$. Действительно, добавление к лагранжиану константы изменяет его на полную дивергенцию и не меняет уравнений поля. Слагаемое же вида $A\left|F_{,\bar{h}}\right|^2$ с точностью до полной дивергенции равно $A\left|F_{,h}\right|^2$ и его добавление по существу сводится к переопределению константы α в (48). В дальнейшем, если это не оговорено особо, мы всегда будем подразумевать, что потенциальная функция отлична от линейной и будем игнорировать линейные добавки к ней. В разделе 5 мы коснемся вопроса о возможных препятствиях игнорирования граничных членов в фундаментальных теориях.

Стандартная процедура варьирования действия (48) по полевым переменным $\bar{F}$, F приводит к уравнениям поля, которые можно привести к виду:

$$\frac{1}{4}\Box F = (\mathcal{U}' F_{,\bar{h}})_{,h} \tag{49}$$

— неоднородного волнового уравнения с источником в правой части, зависящим лишь от неголоморфности F. Штрих в (49) обозначает дифференцирование функции $\mathcal{U}$ по ее аргументу (т. е. по квадрату модуля неголоморфности). Второе уравнение получается из уравнения (49) его гиперболическим комплексным сопряжением. Как и следовало ожидать, уравнения поля получились нелинейными, поскольку поле F, как это следует из принципов развиваемой теории, описывает и свои источники за счет эффективного самодействия. В этом отношении развиваемая теория примыкает к вариантам единой теории поля Ми [8].

4.2 Первый интеграл и его следствия

Замечательной особенностью уравнений (49) является наличие у них первого интеграла, независимо от конкретного вида потенциальной функции $\mathcal{U}$. Действительно, записывая волновой оператор в комплексной форме (15), уравнение (49) можно представить в виде равенства нулю некоторой производной:

$$(F_{,\bar{h}}(1 - \mathcal{U}'))_{,h} = 0, \tag{50}$$

откуда следует

$$F_{,\bar{h}}(1 - \mathcal{U}') = \varphi(\bar{h}) \tag{51}$$

— первый интеграл уравнения (49), содержащий произвольную функцию $\varphi(\bar{h})$.

Интеграл (51) в общем случае представляет собой систему двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Рассмотрим его важное

[4]Эта константа будет играть роль лишь при исследовании взаимодействия поля F с другими полями, которые не описываются полем F. Эту задачу мы в настоящей статье не рассматриваем.

следствие, которое выполняется в общем случае независимо от вида потенциальной функции $\mathcal{U}$. Домножая обе части уравнения (51) на $\bar{F}_{,h}$ и обозначая $|F_{,\bar{h}}|^2 \equiv X \in R$, приходим к соотношению:

$$R \ni X(1 - \mathcal{U}'(X)) = \varphi(\bar{h})\bar{F}_{,h}, \tag{52}$$

откуда следует, что

$$\operatorname{Im} \varphi(\bar{h})\bar{F}_{,h} = 0. \tag{53}$$

Расписывая это соотношение в компонентах, приходим к уравнению:

$$\varphi_1(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_2(U_{,t} - V_{,x}) = 0, \tag{54}$$

связывающему $\varphi = \varphi_1 + j\varphi_2$ и $F = U + jV$ и не содержащему функции $\mathcal{U}$. Дифференцируя соотношение (54) по t и по x, приходим к паре дифференциальных следствий:

$$\varphi_{1,t}(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_1(U_{,x,t} - V_{,t,t}) + \varphi_{2,t}(U_{,t} - V_{,x}) + \varphi_2(U_{,t,t} - V_{,x,t}) = 0; \tag{55}$$

$$\varphi_{1,x}(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_1(U_{,x,x} - V_{,t,x}) + \varphi_{2,x}(U_{,t} - V_{,x}) + \varphi_2(U_{,t,x} - V_{,x,x}) = 0. \tag{56}$$

Ввиду того, что φ_1 и φ_2 являются компонентами антиголоморфной функции φ, они связаны гиперболическими условиями типа Коши-Римана:

$$\varphi_{1,t} = -\varphi_{2,x}; \quad \varphi_{1,x} = -\varphi_{2,t}. \tag{57}$$

Выражая производные $\varphi_{1,t}$ и $\varphi_{2,t}$ в уравнении (55) через (57), приходим к уравнению:

$$-\varphi_{2,x}(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_1(U_{,x,t} - V_{,t,t}) - \varphi_{1,x}(U_{,t} - V_{,x}) + \varphi_2(U_{,t,t} - V_{,x,t}) = 0. \tag{58}$$

Рассматривая теперь уравнения (56) и (58) как систему линейных уравнений относительно φ_1 и $\varphi_{1,x}$, находим:

$$\varphi_1 = A\varphi_2 + B\varphi_{2,x}, \tag{59}$$

где

$$A = -\frac{N_{1,t}N_2 + (N_1^2)_{,x}/2}{N_1 N_{2,x} + (N_2^2)_{,t}/2}; \quad B = -\frac{N_1^2 - N_2^2}{N_1 N_{2,x} + (N_2^2)_{,t}/2}, \tag{60}$$

а

$$N_1 \equiv U_{,t} - V_{,x}; \quad N_2 \equiv U_{,x} - V_{,t} \tag{61}$$

— величины, обращающиеся в нуль для h-голоморфного потенциала $F(h)$ (т.е. по существу компоненты неголоморфности F). Подставляя теперь решение (59) в (54), приходим к дифференциальному уравнению первого порядка относительно φ_2, которое можно преобразовать к виду:

$$(\ln \varphi_2)_{,x} = -\frac{A}{B} - \frac{N_1}{N_2 B}, \tag{62}$$

где A и B определяются формулами (60)-(61).

Выражая теперь аналогичным образом производные $\varphi_{1,x}$ и $\varphi_{2,x}$ в уравнении (56) через (57), приходим к уравнению:

$$-\varphi_{2,t}(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_1(U_{,x,x} - V_{,t,x}) - \varphi_{1,t}(U_{,t} - V_{,x}) + \varphi_2(U_{,t,x} - V_{,x,x}) = 0. \tag{63}$$

Снова рассматривая уравнения (55) и (63) как систему линейных уравнений относительно φ_1 и $\varphi_{1,t}$, находим:

$$\varphi_1 = \tilde{A}\varphi_2 + \tilde{B}\varphi_{2,t}, \tag{64}$$

где

$$\tilde{A} = -\frac{N_{1,x}N_2 + (N_1^2)_{,t}/2}{N_1N_{2,t} + (N_2^2)_{,x}/2}; \quad \tilde{B} = \frac{N_1^2 - N_2^2}{N_1N_{2,t} + (N_2^2)_{,x}/2}. \tag{65}$$

Подставляя решение (64) в (54), снова приходим к дифференциальному уравнению первого порядка относительно φ_2, которое можно привести к виду:

$$(\ln\varphi_2)_{,t} = -\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} - \frac{N_1}{N_2\tilde{B}}, \tag{66}$$

где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ определяются формулами (65) и (61).

Приравнивая выраженные из (62) и (66) вторые смешанные производные: $(\ln\varphi_2)_{,t,x} = (\ln\varphi_2)_{,x,t}$, приходим к условиям интегрируемости исходного уравнения (53), которые уже не содержат функций φ_1, φ_2:

$$\left(\frac{A}{B} + \frac{N_1}{N_2B}\right)_{,t} = \left(\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} + \frac{N_1}{N_2\tilde{B}}\right)_{,x} \tag{67}$$

или после некоторых преобразований и упрощений с учетом формул (60), (61), (65):

$$\left(\frac{N_2^2N_{1,t} - N_1^2N_{2,x} + N_1N_2(N_{1,x} - N_{2,t})}{N_2(N_1^2 - N_2^2)}\right)_{,t} = \left(\frac{N_2^2N_{1,x} - N_1^2N_{2,t} + N_1N_2(N_{1,t} - N_{2,x})}{N_2(N_1^2 - N_2^2)}\right)_{,x}. \tag{68}$$

Вводя новую функцию: $\mathcal{Q} \equiv N_1/N_2$ после несложных манипуляций с производными уравнение (68) приводится к очень простому виду:

$$\Box \mathrm{Arth}\mathcal{Q} = 0, \tag{69}$$

общий интеграл которого имеет вид:

$$\mathcal{Q} \equiv \frac{U_{,t} - V_{,x}}{U_{,x} - V_{,t}} = \tanh(\phi_1(t+x) + \phi_2(t-x)), \tag{70}$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — произвольные функции своих аргументов. Интеграл (70) удовлетворяется тождественно и в пустоте, где обращается в нуль неголоморфность. Таким образом, *в рассматриваемой нами теории соотношение (70) имеет вид общего универсального соотношения, которое, с одной стороны, является следствием вариационного динамического принципа (48), с другой ограничивает вид F-поля универсальным образом, независимо от его материальных источников.* С математической точки зрения соотношение (70) можно рассматривать как некоторое обобщение гиперболических условий Коши-Римана, определяющее некоторый класс $\mathcal{G}(\mathcal{H}_2)$ функций с правилом дифференцирования:

$$\frac{dF}{d\bar{h}} = \frac{1}{2}(U_{,x} - V_{,t})(\tanh(\phi_1 + \phi_2) - j). \tag{71}$$

Более детальное обсуждение математических свойств этого класса функций и его физическую интерпретацию мы оставляем для следующих публикаций. Сейчас мы остановимся лишь на одном важном наблюдении математического характера, принципиально важном для излагаемого подхода. Условие $F_{,\bar{h}} = 0$, рассматриваемое на границе области, занятой материей, дает два уравнения на две функции от переменных (t, x) : $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, которые в общем случае независимы. Это означало бы, что в нашей теории материальные распределения ограничиваются точечными источниками, за исключением, быть может, некоторых случайных вырожденных ситуаций. Соотношение (70), которое можно понимать как линейную связь компонент неголономности, выделяет в нашей теории класс физических гиперкомплексных потенциалов $\mathcal{G}(\mathcal{H}_2)$, у каждого представителя которого обнуление одной из компонент неголоморфности влечет за собой обнуление другой компоненты. Иными словами, *динамический принцип теории в форме (48) автоматически приводит к протяженным материальным распределениям, с границей, задаваемой уравнением вида* $f(t,x)=0$, *как это и должно быть в реалистичной 2-мерной теории относительности.*

4.3 Тензор энергии-импульса и характеристики источников

Поскольку лагранжиан $\mathcal{L}=|F_{,h}|^2-\mathcal{U}$ в действии (48) не зависит от координат, теорема Нетер гарантирует выполнение слабого закона сохранения:

$$\mathcal{T}^{\alpha}_{\beta,\alpha}=0, \tag{72}$$

где:

$$\mathcal{T}^{\alpha}_{\beta,\alpha}\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^a_{,\alpha}}F^a_{,\beta}-\delta^{\alpha}_{\beta}\mathcal{L} \tag{73}$$

— канонический тензор энергии-импульса поля F. Здесь $\alpha,\beta=h,\bar h$, $\{F^a\}=F,\bar F$. Непосредственное вычисление по формуле (73) приводит к следующему виду компонент тензора $\mathcal{T}$ в комплексном базисе:

$$\mathcal{T}^h_h=\mathcal{T}^{\bar h}_{\bar h}=\mathcal{U}(X)-\mathcal{U}'(X)X\equiv\mu;\quad \mathcal{T}^h_{\bar h}=\overline{\mathcal{T}^{\bar h}_h}=\bar F_{,\bar h}F_{,\bar h}(1-\mathcal{U}')\equiv\sigma. \tag{74}$$

Для пересчета этих компонент в более привычном вещественном базисе заметим, что матрицы Якоби J и J^{-1}, определяющиеся видом преобразований координат:

$$t=\frac{h+\bar h}{2};\quad x=\frac{h-\bar h}{2j};\quad h=t+jx;\quad \bar h=t-jx, \tag{75}$$

имеют вид:

$$J=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ j/2 & -j/2\end{pmatrix};\quad J^{-1}=\begin{pmatrix}1 & j\\ 1 & -j\end{pmatrix}. \tag{76}$$

С помощью известного закона преобразования тензоров посредством матриц Якоби легко находим компоненты тензора энергии-импульса в декартовых координатах (t,x):

$$\mathcal{T}^0_0=\mu+\operatorname{Re}\sigma;\quad \mathcal{T}^1_1=\mu-\operatorname{Re}\sigma;\quad \mathcal{T}^1_0=-\mathcal{T}^0_1=\operatorname{Im}\sigma \tag{77}$$

Из представления (77) очевидно, что дважды ковариантный тензор $\mathcal{T}$ полностью симметричен и имеет вид:

$$(\mathcal{T}_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}\mu+\operatorname{Re}\sigma & -\operatorname{Im}\sigma\\ -\operatorname{Im}\sigma & \operatorname{Re}\sigma-\mu\end{pmatrix}. \tag{78}$$

Для выяснения вопроса о связи потенциала F с плотностью энергии и давлением составим задачу на собственные значения относительно метрики Минковского η:

$$\mathcal{T}(\ ,u)=\lambda\eta(\ ,u). \tag{79}$$

Секулярное уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix}\mu+\operatorname{Re}\sigma-\lambda & -\operatorname{Im}\sigma\\ -\operatorname{Im}\sigma & \operatorname{Re}\sigma-\mu+\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{80}$$

или

$$(\mu-\lambda)^2-(\operatorname{Re}\sigma)^2+(\operatorname{Im}\sigma)^2=0. \tag{81}$$

Его корни:

$$\lambda_1 = \varepsilon = \mu + \sqrt{\sigma\bar{\sigma}}; \quad \lambda_2 = p = \mu - \sqrt{\sigma\bar{\sigma}}. \tag{82}$$

Приведем также выражения для ε и p в явном виде:

$$\varepsilon = \mathcal{U} - \mathcal{U}'X + (1-\mathcal{U}')\sqrt{XY}; \quad p = \mathcal{U} - \mathcal{U}'X - (1-\mathcal{U}')\sqrt{XY}, \tag{83}$$

где $Y \equiv |F_{,h}|^2$.

Из формул (83) следует, что величины ε и p в общем случае не связаны никаким уравнением состояния вида $p = f(\varepsilon)$, поскольку функциональный определитель

$$\frac{D(\varepsilon,p)}{D(X,Y)} \equiv \begin{vmatrix} \varepsilon_{,X} & \varepsilon_{,Y} \\ p_{,X} & p_{,Y} \end{vmatrix} = \frac{\mathcal{U}''(1-\mathcal{U}')X^2 + (\mathcal{U}-\mathcal{U}'X)(1-\mathcal{U}'-2\mathcal{U}''X)}{\sqrt{XY}} \tag{84}$$

в общем случае отличен от нуля.

4.4 Пример: статическое пространство-время, деформированное упругим стержнем

Рассмотрим задачу о нахождении гиперболического потенциала внутри и вне 1-мерного упругого однородного покоящегося стержня (см. рис. 4).

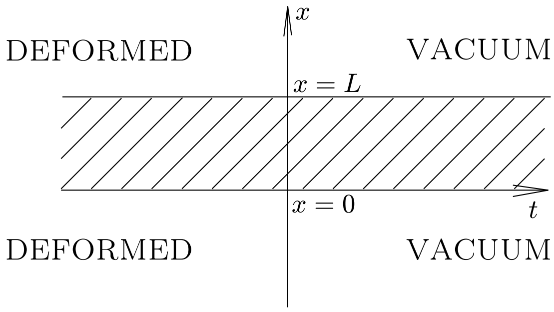


Рис. 4:

Наша цель — показать, что развиваемая теория может описывать физически правдоподобные ситуации.

Поскольку задача статическая, будем искать потенциал F внутри стержня в виде: $F = U(x) + jV(x)$. Тогда неголоморфность $F_{,\bar{h}}$ и ее модуль имеют соответственно вид

$$F_{,\bar{h}} = \frac{1}{2}U_{,x}(\tanh(\phi_1+\phi_2) - j); \quad |F_{,\bar{h}}|^2 = X = -\frac{U_{,x}^2}{4\cosh^2(\phi_1+\phi_2)}, \tag{85}$$

который получается с учетом общего уравнения (70). Поскольку U и V у нас не зависят от t, не должен зависеть от t и аргумент гиперболического тангенса $\phi_1(t+x)+\phi_2(t-x)$. Нетрудно показать, что это возможно только в случае линейных функций ϕ_1 и ϕ_2, так что в результате получим: $\phi_1+\phi_2 = Ax+B$, $A, B \in R$. Кроме того, правая часть уравнения (51) должна зависеть только от x, поэтому $\varphi(\bar{h}) = S_1 + jS_2 = \mathrm{const}_{\mathcal{H}_2}$. Подставляя (85) в (51), получим одно гиперкомплексное уравнение, сводящееся к паре вещественных уравнений на единственную функцию $U(x)$. Уравнения этой пары будут тождественно переходить в друг друга (т.е. система будет совместной), лишь при условиях:

$$A = 0, \quad S_1 = a\tanh B, \quad S_2 = -a, \quad a \in R. \tag{86}$$

При этом единственное независимое уравнение на $U(x)$ оказывается следующим:

$$\frac{1}{2}U_{,x}(1-\mathcal{U}') = a. \tag{87}$$

Рассмотрим функцию U вида:
$$U = \frac{2P}{3}x^3 - PLx^2, \tag{88}$$
где P — некоторая константа, подлежащая определению. Согласно (85)-(86), получим следующие выражения для компоненты V потенциала и квадрата модуля неголоморфности:
$$V = -\left(\frac{2P}{3}x^3 - PLx^2\right)\tanh B; \quad X = -\frac{P^2x^2(x-L)^2}{\cosh^2 B}. \tag{89}$$
Мы видим, что решение такого вида удовлетворяет основной гипотезе теории: на границе стержня ($x = 0$ и $x = L$) обе компоненты неголоморфности (и как следствие квадрат ее модуля X) обращаются в нуль, а внутри стержня они отличны от нуля.

Поскольку мы выбрали физическое решение "руками", то потенциал самодействия вместе с распределением плотности энергии и давления должен определиться теперь этим решением посредством уравнения (87). С учетом (89) это уравнение можно записать в виде:
$$\frac{x}{2}\left(1 - f(-x^2/\cosh^2 B)\right) = a, \tag{90}$$
где $x = U_{,x}$, $f(X) = \mathcal{U}'(X)$. Уравнение (90) легко разрешается относительно неизвестной функции f а затем и относительно $\mathcal{U}$. Решение с точностью до аддитивной постоянной имеет вид:
$$\mathcal{U}(X) = X + \frac{2a}{\cosh B}\sqrt{-X}. \tag{91}$$
По формулам (83) с учетом равенства $X = Y$, справедливого для статики, нетрудно проверить, что такой потенциал определяет уравнение состояния вещества стержня в виде:
$$p = \frac{\sqrt{2}a}{\cosh B}\sqrt{\varepsilon}, \tag{92}$$
а выражения для давления и плотности энергии внутри стержня можно привести к виду:
$$p = \frac{2a}{\cosh B}\sqrt{-X} = \frac{2aPx(L-x)}{\cosh^2 B}; \quad \varepsilon = -2X = \frac{2P^2x^2(x-L)^2}{\cosh^2 B}. \tag{93}$$
Как это видно из соотношений (93), безразмерный параметр B отвечает за выбор системы единиц силы[5] в 2-мерной вселенной и его можно без ограничения общности положить равным нулю. Параметр P отвечает за полную массу стержня M, которая получается интегрированием $\varepsilon(x)$ по длине стержня, а параметр a — за среднее давление $\bar{p}$ внутри стержня, возникающее за счет его самодействия. Результат вычислений определяет следующую связь:
$$P = \sqrt{\frac{15M}{L^5}}; \quad a = \frac{3\bar{p}}{PL^2}.$$
Интересно, что константа a, играющая роль константы самодействия стержня, появилась как константа интегрирования в интеграле (51). Профиль плотности энергии при некоторых значениях констант представлен на рис. 4.4.

Следующий шаг решения заключается в сшивке полученного внутреннего решения для стержня с внешним, которое описывается некоторыми h-голоморфными функциями $F_I(h) = U_I + jV_I$ (при $x < 0$) и $F_{II}(h) = U_{II} + jV_{II}$ (при $x > L$). Компоненты неголоморфности на границе стержня оказываются сшитыми автоматически, поскольку неголоморфность функции F для внутреннего решения обращается на границе в нуль по построению,

[5] Напомним, что в 2-мерном пространстве-времени размерности давления, силы и плотности энергии совпадают.

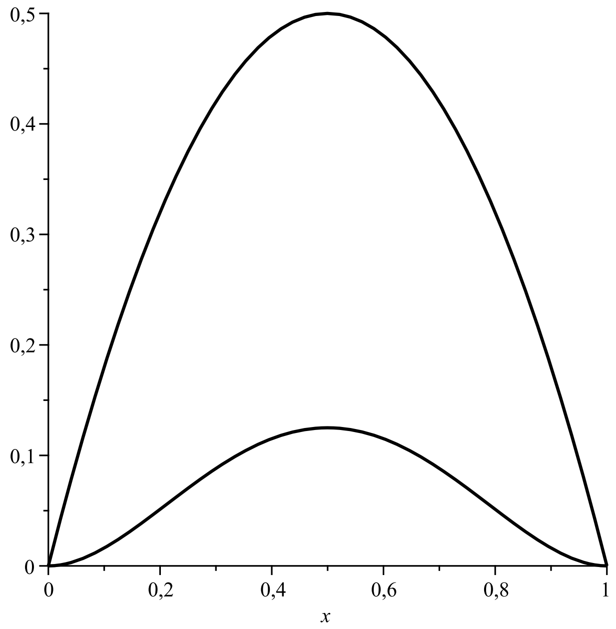


Рис. 5: Эпюры плотности энергии (нижняя кривая) и давления (верхняя кривая) в некоторых условных единицах. Длина стержня $L = 1$, $P = 1$, $a = 1$, $B = 0$.

а функций F_I и F_{II} — в силу их глобальной голоморфности. Эти условия являются модификацией стандартных условий сшивки производных (в нашем случае непрерывны не сами производные, а неголоморфности, т.е. специальные комбинации производных). Далее потребуем чтобы h-потенциал был непрерывным на границе:

$$F_I(t, 0) = F(0); \quad F_{II}(t, L) = F(L), \tag{94}$$

где компоненты функции F задаются формулами (88-89). Напишем U_I в виде общего решения волнового уравнения:

$$U_I = \Psi_+ + \Psi_-, \tag{95}$$

где первое слагаемое зависит только от комбинации $t+x$, а второе — только от комбинации $(t - x)$. Условие непрерывности на границе $x = 0$ с учетом (88) приводит к уравнению:

$$\Psi_+(t) + \Psi_-(t) = 0, \tag{96}$$

откуда

$$\Psi_-(\xi) = -\Psi_+(\xi) \equiv \Psi(\xi). \tag{97}$$

Из условий Коши-Римана находим выражение для гиперболически сопряженной функции V_I:

$$V_I = \Psi(t + x) + \Psi(t - x). \tag{98}$$

Условие непрерывности V_I на границе $x = 0$ с учетом (88) приводит к уравнению:

$$\Psi(t) = 0, \tag{99}$$

откуда заключаем, что при $x < 0$ $F_I = 0$. Аналогичным образом находим, что при $x > L$ h-потенциал описывается постоянной функцией:

$$F_{II} = U(L) + jV(L), \tag{100}$$

где

$$U(L) = -\frac{PL^3}{3}; \quad V(L) = -\frac{PL^3}{3}\tanh B.$$

Вид потенциала внутри стержня представлен на рис. 6.

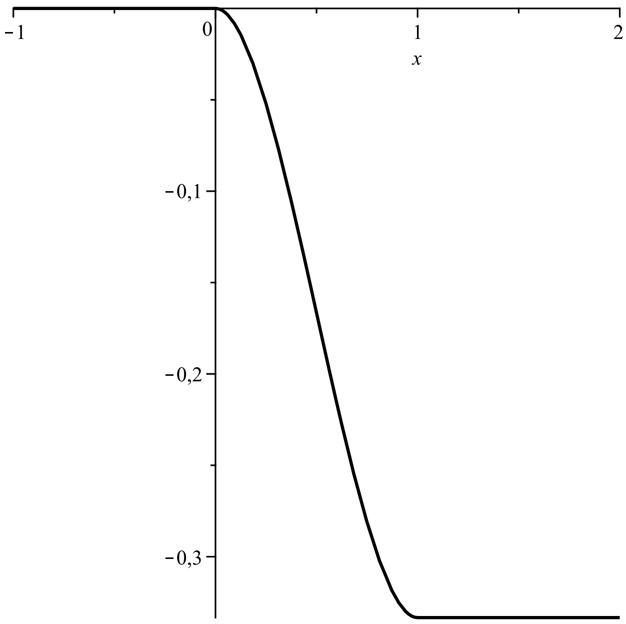


Рис. 6: Распределение компонент h-потенциала внутри стержня при $L = 1, P = 1, \tanh B = 0$. Снаружи стержня постоянные потенциалы гладко сшиваются с их внутренними значениями слева и справа.

5 Супервариационный принцип для фундаментальных теорий

Практически любая физическая теория содержит неопределяемые из самой теории параметры — эмпирические константы модели или фундаментальные физические константы. Так, классическая электродинамика содержит две фундаментальные константы: e и c, квантовая электродинамика содержит три константы: $e, \hbar, c$, а единая теория электрослабого взаимодействия — около 20 констант. Ньютоновская теория гравитации содержит одну константу G, а эйнштейновская ОТО — две константы G и c. Механика Ньютона не содержит фундаментальных констант[6]. Следует отметить, что в вычислениях константы модели могут группироваться в определенные типичные для данной теории комбинации, которые и определяют экспериментально наблюдаемые величины. Такими комбинациями, к примеру, являются постоянная тонкой структуры $\alpha \equiv e^2/\hbar c$ в квантовой электродинамике и эйнштейновская гравитационная постоянная $8\pi G/c^4$ в ОТО.

Как правило, константы модели определяются из экспериментальных данных. Такой подход, однако, свидетельствует о принципиальной неполноте рассматриваемой теории. Было бы совершенно естественно ожидать, что полная фундаментальная "теория всего" (если она вообще существует!) должна давать средства для вычисления всех своих существенных параметров, т. е. тех, которые определяют экспериментально наблюдаемые величины. Более того, фундаментальная теория природы не должна содержать произвола в выборе некоторых фундаментальных зависимостей, определяющих динамические уравнения теории, например, вид потенциальной функции или даже вид лагранжиана.

Все вышесказанное относится и к рассматриваемому нами подходу h-гиперболической теории поля. В настоящем параграфе мы обсудим один из возможных подходов к решению проблемы устранения отмеченного произвола.

[6]Что лишний раз подтверждает тезис о том, что законы механики Ньютона на самом деле являются принципами [13].

5.1 Супервариационный принцип для фундаментальных констант

Рассмотрим действие вида $\mathcal{S}_\alpha[\phi]$ для некоторой фундаментальной теории, где ϕ — коллективный символ для набора динамических переменных (относящихся к частицам, полям и т.д.), а α — коллективный символ для набора фундаментальных констант теории. Пусть $\phi_\beta(\alpha)$ — решение уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\delta_\phi \mathcal{S}_\alpha[\phi] = 0,$$

с некоторыми начально-краевыми условиями, фиксированными посредством набора параметров β. Подставляя это решение обратно в действие (и регуляризуя результат, если это необходимо), мы получаем функцию многих переменных вида:

$$\Phi(\alpha, \beta) \equiv \mathcal{S}_{\mathrm{reg}\ \alpha}[\phi_\beta(\alpha)]. \tag{101}$$

Ключевая идея излагаемого нами супервариационного принципа заключается в минимизации функции (101) по отношению к набору переменных α, для того чтобы получить выражения для набора параметров α или его части:

$$\alpha = \alpha_0(\beta), \tag{102}$$

связывающие значения фундаментальных констант с параметрами граничных условий.

Более кардинальный шаг заключается в минимизации (101) по отношению к полному набору переменных (α, β), что в принципе определяет как существенные фундаментальные постоянные, так и граничные условия "из ничего".

5.2 Пример: гармонический осциллятор

В качестве простейшего примера рассмотрим гармонический осциллятор с действием

$$\mathcal{S}[x(t)] = \int \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}\right] dt. \tag{103}$$

Общее решение уравнений движения, вытекающих из (103) хорошо известно:

$$x_0(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{k/m}, \tag{104}$$

где m — масса осциллятора, k — параметр его жесткости, A — амплитуда, φ — начальная фаза. Первые два параметра относятся к числу "фундаментальных постоянных" модели, вторые два — к числу начально-краевых условий. Подставляя (104) в (103), получаем для функции $\Phi_\beta(\alpha)$ ($\beta = \{A, \varphi, T\}$, $\alpha = \{m, k\}$) в (101):

$$\Phi_{(A,\varphi,T)}(k, m) \equiv \int\limits_0^T L(x_0(t), \dot{x}_0)\, dt = \tag{105}$$

$$\frac{kA^2}{4\omega}\left[\sin 2(\omega T + \varphi) - \sin 2\varphi\right].$$

Здесь появился еще один параметр T — "время существования" осциллятора. Очевидно, что экстремумы по k и по A тривиальны и дают нулевое действие. Условия экстремума для параметров ω и φ принимают вид системы уравнений:

$$(\chi - 2\varphi)\cos\varphi - \sin\chi + \sin 2\varphi = 0; \quad \cos\chi = \cos 2\varphi, \tag{106}$$

где $\chi \equiv 2(\omega T + \varphi)$. Общее решение второго уравнения имеет вид:

$$\chi_k = \pm 2\varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{107}$$

Ветвь с плюсом приводит к независимым спектру частот и спектру фаз:

$$\omega_k = \frac{\pi k}{T}; \quad \varphi_l = (2l+1)\frac{\pi}{4}, \quad k, l \in \mathbb{Z}. \tag{108}$$

Ветвь с минусом приводит к спектру частот и спектру фаз на двумерной целочисленной решетке:

$$\omega_{kl} = \frac{\chi_{kl} - \pi k}{T}; \quad \varphi_{kl} = \pi k - \frac{\chi_{kl}}{2}, \quad k, l \in \mathbb{Z}, \tag{109}$$

где χ_{kl} — один из корней безразмерного трансцендентного уравнения:

$$\tan \chi = \chi - \pi k. \tag{110}$$

Разумеется, для обычного осциллятора в виде грузика на нити или на пружинке у нас нет никаких оснований применять супервариационный принцип, поскольку такого рода осцилляторы искусственны и их параметры в определенном смысле случайны. Однако для "фундаментальных осцилляторов" в виде частиц или квазичастиц, рассмотренная нами супервариационная процедура дает в принципиальном (но, конечно, не количественном!) плане правдоподобные результаты: элементарные возбуждения связаны с глобальными фундаментальными характеристиками системы. Более того, спектр колебаний такого осциллятора согласно (108)-(109) оказывается квантованным, причем в формуле (108) он, как и в квантовой механике, эквидистантен, а в формуле (109) при возрастании абсолютной величины l он очень быстро становится таковым:

$$\omega_{kl} \overset{\text{as}}{\approx} \omega_0 \left(l - k - \frac{1}{2} \right), \tag{111}$$

где $\omega_0 = \pi/T$.

5.3 Супервариационная процедура для потенциала

Рассмотренные выше идеи, касающиеся фундаментальных параметров теории, нетрудно распространить также и на фундаментальные зависимости теории, типа зависимостей ее потенциала от полевых переменных.

Пусть действие некоторой полевой теории имеет вид:

$$\mathcal{S}[\phi] = \int \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)\, d\mathrm{vol}, \tag{112}$$

где лагранжиан $\mathcal{L} = (\partial\phi)^2 - U(\phi, \partial\phi)$. Пусть следствием уравнений Эйлера-Лагранжа является интеграл (или система интегралов) вида:

$$F(\phi, \partial\phi) = 0. \tag{113}$$

Если интеграл (113) это позволяет сделать, то исключим с помощью него кинетический член в лагранжиане $\mathcal{L}$. Обозначая совокупность переменных, от которых зависит потенциал U через y, а остальную совокупность через x', приведем действие (112) к виду:

$$\mathcal{S}[\phi]|_F = \int \mathcal{L}|_F\, d\mathrm{vol} = \int \mathcal{L}'(x', y, U(y), \partial U(y)) J(x', y)\, d\mathrm{vol}_y \wedge d\mathrm{vol}_{x'} \equiv \mathcal{S}'[U(y)] \tag{114}$$

— функционала относительно функции $\mathcal{U}(y)$. Новое действие (114) получается ограничением исходного действия (112) на интеграл (113) и переходом от координатных переменных (x) к новой системе "полевых координат" (x', y) (J в (114) — якобиан перехода). При этом совокупность переменных x' представляет собой совокупность параметров, по которым в последнем знаке равенства в (114) произведено усреднение (интегрирование с регуляризацией, если она требуется). Таким образом, рассматривая теперь функционал $\mathcal{S}'[U(y)]$, приходим к уравнениям экстремума:

$$\delta_U \mathcal{S}'[U(y)] = 0, \tag{115}$$

определяющим потенциал с точностью до констант.

5.4 Пример 1: одномерные задачи классической механики

Попробуем определить потенциал для одномерных консервативных систем классической механики (1-мерная теория поля), которые описываются действием вида:

$$\mathcal{S}[x(t)] = \int \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)\right] dt. \tag{116}$$

Хорошо известно, что такая система допускает интеграл энергии:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U = E = \text{const}. \tag{117}$$

Выражая из него кинетическую энергию и одномерный "якобиан перехода":

$$J = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2(E-U)/m},$$

приходим к новому функционалу:

$$\mathcal{S}[U] = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{E - 2U(x)}{\sqrt{E - U(x)}}\, dx. \tag{118}$$

Поскольку этот функционал не зависит от производных U', его экстремум может достигаться лишь на некоторой постоянной[7] $U = \text{const}$. Простой расчет дает: $U = 5E/6$. Подстановка в исходное действие (116) приводит к выражению:

$$\mathcal{S}_0 = -\frac{2}{3}ET. \tag{119}$$

В силу неравенств $E \geq 0$, $T > 0$ можно заключить, что исходное действие (116) не имеет суперэксремума!

5.5 Пример 2: суперэкстремум в теории h-поля

Сейчас мы установим еще одно интересное свойство лагранжиана в (48): он обеспечивает существование вполне определенного суперэкстремума, который мы найдем с точностью

[7] Традиционная точка зрения заключается в игнорировании полных производных в лагражианах, к которым относятся и постоянные добавки к ним. В супервариационных задачах игнорирование полных производных, вообще говоря, недопустимо, поскольку они влияют на граничные условия, которые теперь также подлежат определению.

до пары фундаментальных констант. Из интеграла (51) можно вывести следующее выражение для квадрата модуля неголоморфности:

$$X = \frac{|\varphi|^2}{(1-\mathcal{U}')^2}. \tag{120}$$

Подставляя его[8] в действие (48) и переходя от переменных $(h, \bar{h})$ к новым переменным[9] (X, X'), приходим к новому действию вида:

$$\mathcal{S}'[\mathcal{U}(X)] = \int \left[\frac{|\varphi|^2}{(1-\mathcal{U}')^2} - U\right] dX \wedge dX'.$$

Варьируя его по U и исключая $|\varphi|^2$ посредством (120), мы приходим к уравнению суперэкстремума теории:

$$\frac{d}{dX}\left(\frac{X}{1-\mathcal{U}'}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Его решение имеет вид:

$$\mathcal{U}(X) = 3X + U_0 + 2U_1 \ln\left|1 - \frac{X}{U_1}\right| \tag{121}$$

где U_0, U_1 — пара "фундаментальных констант" теории. Их (отношение) можно найти применяя супервариационный принцип в форме раздела 5.1. Исследование 2-мерной вселенной с потенциалом вида (121) мы проведем отдельно в одной из будущих публикаций.

6 Заключение

Приведем краткое резюме развиваемого подхода.

1. Наш подход занимает промежуточное место между специальной и общей теориями относительности. С одной стороны, мы строим теорию поля в плоском двумерном пространстве-времени, с другой — расширяем множество изометрических преобразований, оставляющих метрику форминвариантной, до множества конформных (или даже общих координатных) преобразований, которые образуют бесконечномерную группу. При этом физико-геометрические эффекты, порождаемые гиперболическим полем, могут быть истолкованы на языке эффективной метрики пространства-времени (полученной деформацией плоской метрики Минковского в декартовых координатах). Мы, однако, становимся на активную точку зрения на координатные преобразования, согласно которой деформируется само пространство-время, в то время как псевдоевклидова метрика считается недеформируемой (отсчетной). Наглядно деформация пространства-времени в нашем подходе представлена на рис. 7. Общее обсуждение классической теории поля с позиций теории упругости многомерных сплошных сред можно найти в [9, 10].

2. В пустом пространстве-времени h-поле описывается h-голоморфной функцией двойной переменной. Условия гиперболической аналитичности (13) автоматически обеспечивают волновой характер h-поля F в этом случае, равно как и конформную инвариантность вместе со спецрелятивистской инвариантностью.

[8] При этом мы, как обычно игнорируем граничные члены, делая определенные предположения о поведении решений на бесконечности. Для самосогласованности суперэкстремума следовало бы проверить эти предположения для решений, вытекающих из модели с суперэкстремальным потенциалом. Мы проведем это рассмотрение в одной из следующих публикаций.

[9] Таким, что $\frac{D(X,X')}{D(h,\bar{h})} = \mathrm{const}$. Доказательство существования такой системы координат представляет собой полезное упражнение с 1-формами!

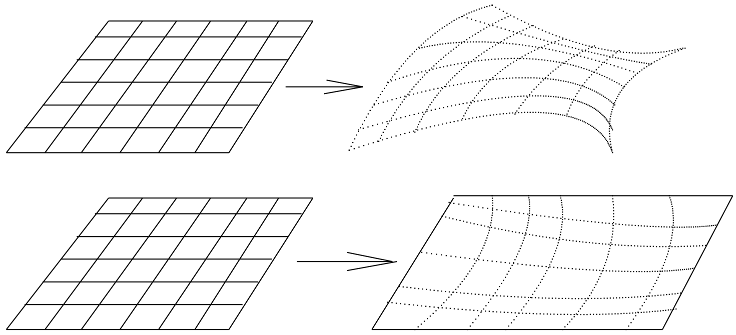


Рис. 7: Деформация пространства-времени в ОТО (сверху) и в h-аналитическом подходе (снизу). В ОТО деформации пространства-времени в общем случае связаны с изгибанием пространственно-временной мембраны, приводящими к кривизне, в то время как в h-аналитическом подходе деформация пространственно-временной мембраны сводится к растяжениям-сжатиям, оставляющим внутреннюю кривизну нулевой.

3. В пустом пространстве-времени h-поле проявляет себя в эффектах конформной деформации хроноинтервалов и пространственных длин, принципиально доступных экспериментальному наблюдению. С позиций классических специальной и общей теорий относительности эти эффекты объясняются на геометрическом языке, включающем спецрелятивистские эффекты и кривизну. В частности, формулы (36)-(37) по всей видимости представляют собой альтернативное выражение классического эффекта гравитационного красного смещения, традиционно описываемого в рамках геометрических теорий гравитации с помощью неоднородной метрики временных промежутков [7]. Вопрос о точном соотношении теории относительности с развиваемым в настоящей статье подходом мы оставляем для будущих исследований. По всей видимости предлагаемый подход является альтернативным к ОТО (в ее двумерной версии) и ни одна из теорий не является частным или предельным случаем другой.

4. Области пространства-времени, заполненные материей, характеризуются отличным от нуля квадратом модуля неголоморфности $X = |F_{\bar{h}}|^2$. При этом все основные свойства материи (плотность энергии, давление и их связь) определяются видом потенциальной функции $\mathcal{U}(X)$. Выбор действия в виде (48) автоматически обеспечивает как согласованность с предыдущим пунктом, так и возможность описания протяженных конфигураций материи (соотношение (70) и обсуждение в конце раздела 4.2). Отметим некоторую условность разделения лагранжиана в (48) на кинетическое и потенциальное слагаемые: первое (кинетическое) слагаемое, рассматриваемое под знаком интеграла в действии (48) может быть преобразовано в выражение X с помощью двукратного перекрестного применения формулы интегрирования по частям. Это обстоятельство тесно связано с ролью линейных по X членов в $\mathcal{U}$, которая обсуждалась в разделе 4.1. Таким образом, можно считать, что излагаемый нами подход не содержит кинетического члена в действии и описывает статическое пространственно-временное равновесие 2-мерной вселенной. Такая точка зрения в несколько ином аспекте высказывалась ранее в работе [11].

5. Возможна ситуация, когда величина $X = 0$, в то время как сама неголоморфность $F_{,\bar{h}} \neq 0$. Такая неголоморфность должна соответствовать "материи", которая в некотором смысле близка по своим свойствам к пустому пространству-времени. Выскажем здесь гипотезу, согласно которой неголоморфность с нулевым модулем описывает без-

массовые физические поля (гравитацию и (или) электромагнетизм). Эта гипотеза частично подкрепляется следующим наблюдением: формулы (83) при $X = 0$ дают уравнение состояния материи вида $p = \varepsilon$, которое в случае 2-мерного пространства-времени описывает газ ультрарелятивистских частиц[10].

6. Рассмотренный нами пример статической вселенной иллюстрирует физическую адекватность подхода: при некотором выборе потенциала можно построить решение, описывающее распределение давления и плотности энергии внутри источника (упругого стержня), обращающиеся в нуль на границе источника. При этом внешнее h-поле постоянно и стрела времени снаружи источника отсутствует. Внутри источника линии времени, определяемые градиентом потенциала, ориентированы вдоль стержня, что соответствует прочтению пространственно-временной диаграммы на рис. 4 не слева направо, а сверху вниз: конечный процесс, внезапно начинающийся и внезапно заканчивающийся, индуцирует локальную стрелу времени, при этом физическое время процесса пропорционально скачку потенциала $U(L) - U(0)$. Следует помнить, что рассмотренный пример (изолированный стержень в 2-мерной вселенной) является искусственным. Отметим также, что общие вопросы существования и единственности решения в моделях с действием вида (48) остаются открытыми.

7. Новые интересные и перспективные возможности излагаемого подхода открывает изложенная нами в общих чертах в разделе 5 супервариационная процедура. С одной стороны, эта процедура применима к любой фундаментальной теории поля. Она дает принципиальную возможность рассчитать как фундаментальные параметры теории, так и ее фундаментальные зависимости, не выходя за рамки самой теории. С другой стороны, как это показывает пример раздела 5.4, не для всякой теории поля супервариационный принцип дает содержательные результаты. В разделе 5.5 мы установили, что теории h-голоморфных полей с действием вида (48) имеют суперэкстремум вида (121), который и представляет собой ту единственную уникальную модель пространства-времени-материи, которая и подлежит детальному изучению в рамках данной теории.

Более реалистичные и богатые по физическому содержанию ситуации возникают при обобщении развитого подхода на случай поличисел $\mathcal{H}_n$ высших измерений. При этом основные положения и интерпретация теории, оставаясь в своих общих чертах неизменными, требуют некоторой доработки. Мы планируем посвятить таким обобщениям ряд будущих публикаций. Отметим, что некоторые более ранние формулировки поличисловой теории поля (например [12]) опирались на иные постулаты и иную интерпретацию полевых переменных, в рамках которых соотношение теории с экспериментальными наблюдениями остается в значительной степени невыясненным.

Литература

[1] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. h-голоморфные функции двойной переменной и их приложения // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(13), том 7, 2010, с. 44-77.

[2] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(13), том 7, 2010, с. 78-127.

[3] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973.

[4] Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977.

[5] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М.: Тетру, 2009.

[10] В рассматриваемом нами 2-мерном случае при этом оказывается, что $p = \varepsilon = \mathcal{U}(0) = \mathrm{const}$.

[6] Павлов Д.Г. Число, геометрия и физическая реальность. В сб. Метафизика (под ред. Ю.С. Владимирова) 2010.

[7] Кокарев С.С. Введение в общую теорию относительности. Ярославль, Изд-во ЯрГУ, 2010.

[8] Паули В., *Теория относительности*, М., Физматлит, 1991.

[9] Kokarev S.S. Space-time as multidimensional elastic plate // *Nuovo Cimento*, B113, 1998, pp. 1339-1350.

[10] Kokarev S.S. Space-time as strongly bent plate // *Nuovo Cimento*, B114, 1999, pp. 903-921

[11] Kokarev S.S. Classical solids dynamics as 4D static of elastic strings // *Nuovo Cimento*, B116, 2001, pp. 915-936.

[12] Гарасько Г.И. Теория поля и финслеровы пространства // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2(6), том 3, 2006.

[13] Кокарев С.С. Три лекции о законах Ньютона. В сб. трудов РНОЦ Логос, вып. 1, 2006, с. 45-72.

ALGEBRAIC UNIFIED THEORY OF SPACE-TIME AND MATTER ON THE DOUBLE VARIABLE PLANE

D.G. Pavlov[1], S.S. Kokarev[1,2]

[1] *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia*
[2] *RSEC Logos, Yaroslavl, Russia*

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

Using double numbers algebra we develop algebraic version of 2D relativity theory, which takes intermediate place between special and general relativity. In space-time free of matter the main object of the theory – hyperbolic potential F - is h-holomorphic function of double variable. Physically it is responsible for local splitting of space-time onto time and space directions in conformally deformed flat Minkowski space. It is shown that the effect of conformal deformation is in principle observable with the help of experiments concerning measurements with spatially separated clocks. Space-time with matter is described by relation $F_{,\bar{h}} \neq 0$. The dynamics of hyperbolic field is described by special action, depending only on hyperbolic square of non-holomorphicity. It is shown, that field equation are non-linear h-conjugated wave equations with self-action. Specific properties of these equations are: 1) presence of the first integral; 2) compatibility (integrability) condition, defining class of admissible fields $\mathcal{G}(\mathcal{H}_2)$. The latter condition can be viewed as generalization of hyperbolic Cauchy-Riemannian condition and it is crucial for construction of consistent and reliable physical theory of space-time and matter in 2D. As an example we consider static 2D universe with 1D deformed bar. Some aspects of relations of SR and GR to the approach are discussed. We formulate super-extremum principle, allowing one to calculate fundamental constants and boundary conditions of the theory.

Key Words: hyperbolic field, h-holomorphicity, non-holomorphicity, conformal transformations, super-extremum.

ОБ N-АРНЫХ ПОДГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОЙ N-АРНОЙ ГРУППЫ

А.М. Гальмак[1], Г.Н. Воробьёв[1], В.Д. Балан[2]

[1] *Могилевский государственный университет продовольствия, Могилёв, Беларусь*

[2] *Политехнический университетет, Бухарест, Румыния*

mgup@mogilev.by, vbalan@mathem.pub.ro

Для любого $n \geq 3$ на декартовой степени A^{n-1} группы A, обладающей подгруппой B такой, что факторгруппа A/B циклическая порядка, делящего $n-1$, определяется n-арная группа $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ с n-арной операцией $[\ \ ]_{n,n-1}$, аналогичной n-арной операции, которую Э. Пост определил для n-арных подстановок. Изучается строение n-арной группы $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$. В частности, показано, что она обладает полуинвариантными, но неинвариантными n-арными подгруппами.

Ключевые слова: операция, группа, n-арная группа, полуинвариантная n-арная подгруппа.

1 Введение

Если A – группоид, $k \geq 2$, $l \geq 2$, то на k-той декартовой степени A^k можно определить [1, 2] вначале бинарную операцию

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1 y_2, x_2 y_3, \ldots, x_{k-1} y_k, x_k y_1),$$

а затем l-арную операцию

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,k} = \mathbf{x}_1 \circ (\mathbf{x}_2 \circ (\ldots (\mathbf{x}_{l-2} \circ (\mathbf{x}_{l-1} \circ \mathbf{x}_l)) \ldots)).$$

Если A – полугруппа, $k = n-1$, $l = n$, то ввиду леммы 2.3.1 [3],

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n]_{n,n-1} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}),$$

где

$$y_j = x_{1j} x_{2(j+1)} \ldots x_{(n-j)(n-1)} x_{(n-j+1)1} \ldots x_{(n-1)(j-1)} x_{nj}, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Кроме того, ввиду леммы 2.3.2 и замечания 2.3.3 [3],

$$y_j = \mathbf{x}_{1j} \mathbf{x}_{2\alpha(j)} \ldots \mathbf{x}_{(n-1)\alpha^{n-2}(j)} \mathbf{x}_{nj}, \quad j = 1, \ldots, n-1,\ \alpha = (12 \ldots n-1) \in S_{n-1}.$$

Для полугруппы A универсальная алгебра $< A_{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ согласно теореме 2.3.4 [3] является n-арной полугруппой. Если же A – группа, то согласно теореме 2.9.3 [3], $< A_{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – n-арная группа.

Определние n-арной полугруппы, n-арной группы и других встречающихся в данной работе понятий есть в [3,4]. Здесь же напомним, что n-арную подгруппу $< B, [\ \ ] >$ n-арной группы $< A, [\ \ ] >$ называют инвариантной в ней, если

$$[x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [Bx \underbrace{B \ldots B}_{n-2}] = \ldots = [\underbrace{B \ldots B}_{n-2} xB] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x]$$

для любого $x \in A$. Если же

$$[x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x]$$

для любого $x \in A$, то $< B, [\ ] >$ называют полуинвариантной в $< A, [\ \ ] >$.

Далее считаем $n \geq 3$.

2 Основной результат

Понятно, что если B – подгруппа группы A, то $< B_{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A_{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$. Покажем, что декартова степень H^{n-1} подмножества H группы A, не являющегося ее подгруппой, может быть замкнутой относительно n-арной операции $[\ \ ]_{n,n-1}$ и, более того, быть n-арной подгруппой в $< A_{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$.

Теорема 1. Пусть A – группа, B – ее собственная нормальная подгруппа, факторгруппа A/B является циклической и имеет порядок, делящий $n-1$. Тогда для любого смежного класса H факторгруппы A/B декартова степень H^{n-1} замкнута относительно n-арной операции $[\ \ ]_{n,n-1}$, а универсальная алгебра $< H^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ является полуинвариантной, но неинвариантной n-арной подгруппой n-арной группы $< A_{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$.

Доказательство. Пусть факторгруппа A/B порождается смежным классом aB, то есть

$$A/B = \{B, aB, \ldots, a^{k-1}B\},$$

где k делит $n-1$. Будем для определенности считать, что $H = a^sB$ для некоторого $s = 0, 1, \ldots, k-1$.

Так как $(aB)^k = a^kB = B$, то $a^k \in B$, откуда и из условия k делит $n-1$, вытекает, что $a^{n-1} \in B$. Если теперь

$$\mathbf{h}_i = (h_i, \ldots, h_{i(n-1)}) = (a^sb_{i1}, \ldots, a^sb_{i(n-1)}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

произвольные элементы из H^{n-1}, то, ввиду нормальности B в A, будем иметь

$$[\mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_n]_{n,n-1} = (y_1, \ldots, y_{n-1}),$$

где

$$y_j = a^sb_{1j}a^sb_{2(j+1)} \ldots a^sb_{(n-j)(n-1)}a^sb_{(n-j+1)1} \ldots a^sb_{(n-1)(j-1)}a^sb_{nj} = a^{sn}b_j$$

для некоторого $b_j \in B$. Но тогда, ввиду $a^{n-1} \in B$,

$$y_j = a^{sn}b_j = a^s(a^{n-1})^sb_j = a^sb_j^{'}$$

для некоторого $b_j^{'} \in B$. Следовательно, $y_j \in H$, откуда

$$[\mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_n]_{n,n-1} \in H^{n-1},$$

что означает замкнутость множества H^{n-1} относительно n-арной операции $[\ \ ]_{n,n-1}$. Таким образом, $< H^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – n-арная полугруппа.

Рассмотрим теперь в $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ уравнение

$$[\mathbf{x}\mathbf{h}_2 \ldots \mathbf{h}_{n-1}]_{n,n-1} = \mathbf{g} \tag{1}$$

где

$$\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_{n-1}) = (a^sc_1, \ldots, a^sc_{n-1}) \in H^{n-1}, \quad (c_1, \ldots, c_{n-1}) \in B.$$

Элементы $\mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_{n-1}$ были определены выше и также принадлежат множеству H^{n-1}. Так как $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – n-арная группа, то уравнение (1) имеет решение

$$\mathbf{x} = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in A^{n-1}.$$

Приравнивая j-ые компоненты в левой и правой частях (1), получим

$$a_ja^sb_{2(j+1)} \ldots a^sb_{(n-j)(n-1)}a^sb_{(n-j+1)1} \ldots a^sb_{(n-1)(j-1)}a^sb_{nj} = a^sc_j.$$

Ввиду нормальности B в A и условия $a^{n-1} \in B$, левая часть последнего равенства принимает вид $a_j a^{(n-1)s} d = a_j b$ для некоторых $d, b \in B$, а само это равенство переписывается в виде $a_j b = a^s c_j$. Но тогда $a_j = a^s c_j b^{-1}$, где $c_j, b^{-1} \in B$. Следовательно, $a_j \in a^s B = H$,

$$\mathbf{x} = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in H^{n-1}.$$

Это означает, что уравнение (1) разрешимо в $< H^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$.

Аналогично доказывается разрешимость в $< H^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ уравнения

$$[\mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{y}] = \mathbf{g}$$

для любых $\mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_{n-1}, \mathbf{g} \in H^{n-1}$. Тогда, согласно критерию Поста [5], $< H^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – n-арная группа.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ – произвольный элемент из A^{n-1}. Используя нормальность B в A и условие $a^{n-1} \in B$, получим

$$[\mathbf{x} \underbrace{H^{n-1} \ldots H^{n-1}}_{n-1}]_{n,n-1} = \{[\mathbf{x}\mathbf{h}_2 \ldots \mathbf{h}_n]_{n,n-1} | \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n \in H^{n-1}\} =$$

$$= \{[(x_1, \ldots, x_{n-1})(a^s b_{21}, \ldots, a^s b_{2(n-1)}) \ldots (a^s b_{n1}, \ldots, a^s b_{n(n-1)})]_{n,n-1} \mid b_{ij} \in B\} =$$
$$= \{(x_1 a^s b_{22} \ldots a^s b_{(n-1)(n-1)} a^s b_{n1}, \ldots, x_{n-1} a^s b_{21} \ldots a^s b_{(n-1)(n-2)} a^s b_{n(n-1)}) \mid b_{ij} \in B\} =$$
$$= \{(x_1 b_1, \ldots, x_{n-1} b_{n-1}) \mid b_1, \ldots, b_{n-1} \in B\} = x_1 B \times \ldots \times x_{n-1} B,$$

то есть

$$[\mathbf{x} \underbrace{H^{n-1} \ldots H^{n-1}}_{n-1}]_{n,n-1} = x_1 B \times \ldots \times x_{n-1} B. \qquad (2)$$

Аналогично доказывается равенство

$$[\underbrace{H^{n-1} \ldots H^{n-1}}_{n-1} \mathbf{x}]_{n,n-1} = B x_1 \times \ldots \times B x_{n-1}. \qquad (3)$$

Из нормальности B в A вытекает равенство правых частей равенств (2) и (3), а значит и равенство левых частей этих равенств. Таким образом,

$$[\mathbf{x} \underbrace{H^{n-1} \ldots H^{n-1}}_{n-1}]_{n,n-1} = [\underbrace{H^{n-1} \ldots H^{n-1}}_{n-1} \mathbf{x}]_{n,n-1},$$

что означает полуинвариантность $< H^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ в $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$.

Так как $B \neq A$, то найдутся такие $u, v \in A$, что $uB \neq vB$. Положим

$$w = (a^{-1})^s v (a^{-1})^{(n-2)s}, \qquad (4)$$

и выберем в A^{n-1} элемент $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ так, что

$$x_1 = u, \ x_2 = w. \qquad (5)$$

Если теперь предположить инвариантность $< H^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ в $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$, то

$$[\mathbf{x} \underbrace{H^{n-1} \ldots H^{n-1}}_{n-1}]_{n,n-1} = [H^{n-1} \mathbf{x} \underbrace{H^{n-1} \ldots H^{n-1}}_{n-2}]_{n,n-1}$$

для выбранного $\mathbf{x}$. Применим (2) к левой части полученного равенства, а в правой части, используя нормальность B в A, проведем вычисления, аналогичные тем, которые были сделаны при получении (2). В результате будем иметь

$$(x_1 B, x_2 B, \ldots, x_{n-1} B) = (a^s x_2 a^{(n-2)s} B, \ldots, a^s x_{n-1} a^{(n-2)s} B, a^s x_1 a^{(n-2)s} B).$$

Следовательно, $x_1B = a^s x_2 a^{(n-2)s}B$, откуда, ввиду (4) и (5), вытекает $uB = vB$, что противоречит выбору $uB \neq vB$. Таким образом, $< H^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ не является инвариантной в $< A^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$. Теорема доказана.

Согласно теореме 1, всякий смежный класс H факторгруппы A/B из этой теоремы определяет полуинвариантную n-арную подгруппу $< H^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ n-арной группы $< A^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$. Поэтому существует n-арная факторгруппа $< A^{n-1}/H^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$. Возникает вопрос: как связаны между собой n-арные факторгруппы, определяемые различными смежными классами факторгруппы A/B?

Так как, согласно предложению 7.4 [6], всякая полуинвариантная n-арная подгруппа $< V, [\ ] >$ n-арной группы $< U, [\ ] >$ определяет на ней конгруэнцию ρ_V, классы которой совпадают со смежными классами n-арной факторгруппы $< U/V, [\ ] >$, то представляет интерес еще один вопрос: как связаны между собой конгруэнции n-арной группы $< A^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$, которые определяются полуинвариантными n-арными подгруппами, построенными с помощью различных смежных классов факторгруппы A/B из теоремы 1?

Ответы на сформулированные вопросы содержатся в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть H – произвольный смежный класс из теоремы 1. Тогда:
1) $< A^{n-1}/H^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} > = < A^{n-1}/B^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} > = < (A/B)^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$;
2) $\rho_{H^{n-1}} = \rho_{B^{n-1}}$.

Доказательство. 1) Полагая в (2) $H = B$, получим

$$[\mathbf{x}\underbrace{B^{n-1}\dots B^{n-1}}_{n-1}]_{n,n-1} = x_1B \times \dots \times x_{n-1}B, \tag{6}$$

где $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in A^{n-1}$, откуда и из (2) вытекает

$$[\mathbf{x}\underbrace{H^{n-1}\dots H^{n-1}}_{n-1}]_{n,n-1} = [\mathbf{x}\underbrace{B^{n-1}\dots B^{n-1}}_{n-1}]_{n,n-1}$$

для любого элемента $x \in A^k$. Поэтому n-арные факторгруппы $< A^{n-1}/H^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ и $< A^{n-1}/B^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ совпадают.

Совпадение n-арных факторгрупп $< A^{n-1}/B^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ и $< (A/B)^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ вытекает из (6).

2) Так как по предложению 7.4 [6]

$$< A^{n-1}/\rho_{B^{n-1}}, [\ ]_{n,n-1} >=< A^{n-1}/B^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >,$$

$$< A^{n-1}/\rho_{H^{n-1}}, [\ ]_{n,n-1} >=< A^{n-1}/H^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >,$$

то из 1) вытекает

$$< A^{n-1}/\rho_{B^{n-1}}, [\ ]_{n,n-1} >=< A^{n-1}/\rho_{H^{n-1}}, [\ ]_{n,n-1} >,$$

Это означает совпадение конгруэнций $\rho_{B^{n-1}}$ и $\rho_{H^{n-1}}$. Теорема доказана.

Теорему 2 можно сформулировать иначе, более конкретно.

Теорема 3. Пусть A – группа, B – ее собственная нормальная подгруппа, факторгруппа A/B является циклической, порождается элементом aB и имеет порядок k, делящий $n-1$: $A/B = \{B, aB, \dots, a^{k-1}B\}$. Тогда:
1) справедливы следующие равенства для n-арных групп:

$$< A^{n-1}/B^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >=< A^{n-1}/(aB)^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >= \dots$$

$$\ldots = < A^{n-1}/(a^{k-1}B)^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} > = < (A/B)^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >;$$

2) справедливы следующие равенства для конгруэнций

$$\rho_{B^{n-1}} = \rho_{(aB)^{n-1}} = \ldots = \rho_{(a^{k-1}B)^{n-1}}$$

3 Следствия и примеры

Полагая в теореме 1 $H = B$, получим

Следствие 1. Пусть A – группа, B – ее собственная нормальная подгруппа, факторгруппа A/B является циклической, порождается смежным классом aB и имеет порядок, делящий $n-1$. Тогда универсальная алгебра $< (aB)^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ является полуинвариантной, но неинвариантной n-арной подгруппой n-арной группы $< A^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$.

Напомним, что согласно Э. Посту [5] (см. также [7]), группа A называется обертывающей для n-арной группы $< H, \eta >$, если она порождается множеством H, а бинарная операция в группе A и n-арная операция η связаны условием

$$\eta(x_1 x_2 \ldots x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$$

для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$. Множество

$$B = \{a_1 \ldots a_{n-1} | a_1, \ldots, a_{n-1} \in H\}$$

является нормальной подгруппой в A, факторгруппа A/B по которой – циклическая, имеющая порядок, делящий $n-1$. Группу B называют соответствующей для n-арной группы $< H, \eta >$.

Следствие 2. Пусть $< H, \eta >$ – n-арная группа, A и B – ее обертывающая и соответствующая группы, aB – смежный класс, порождающий факторгруппу A/B, $H_s = a^s B$ $(s = 0, 1, \ldots, |A/B| - 1)$. Тогда $< H_s^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ – полуинвариантная, но неинвариантная n-арная подгрупа n-арной группы $< A^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$.

Согласно обратной теореме Поста о смежных классах [5, 7], если факторгруппа A/B группы A по ее нормальной подгруппе B является циклической с образующим элементом aB и имеет порядок, делящий $n-1$, то $< aB, \eta >$ – n-арная группа с n-арной операцией

$$\eta(a_1 a_2 \ldots a_n) = a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Обертывающей группой для $< aB, \eta >$ является A, а соответствующей группой – B.

Если распространить действие операции η на всю группу A:

$$\eta(g_1 g_2 \ldots g_n) = g_1 g_2 \ldots g_n,\ g_1, g_2, \ldots, g_n \in A,$$

то $< H, \eta >$ становится n-арной подгруппой n-арной группы $< A, \eta >$, производной от группы A. Легко проверяется справедливость следующего, более общего утверждения.

Предложение 1. Если факторгруппа A/B является циклической с образующим элементом aB и имеет порядок k, делящий $n-1$, то для любого $s = 0, 1, \ldots, k-1$ $< H_s = a^s B, \eta >$ – инвариантная n-арная подгрупа n-арной группы $< A, \eta >$.

Если $< A, \eta >$ – n-арная группа, то на декартовой степени A^{n-1} можно определить [3] n-арную операцию $\widetilde{\eta}$ аналогично n-арной операции $[\ ]_{n,n-1}$:

$$\widetilde{\eta}((a_{11}, \ldots, a_{1(n-1)})(a_{21}, \ldots, a_{2(n-1)}) \ldots (a_{n1}, \ldots, a_{n(n-1)})) =$$

$$= (\eta(a_{11} a_{22} \ldots a_{(n-1)(n-1)} a_{n1}), \eta(a_{12} \ldots a_{(n-2)(n-1)1} a_{(n-1)1} a_{n2}), \ldots, \eta(a_{1(n-1)} a_{21} \ldots a_{n(n-1)})).$$

По теореме 5.4.1 [3] $< A^{n-1}, \widetilde{\eta} >$ – n-арная группа.

Замечание 1. Понятно, что для любой группы A и ее производной n-арной группы $< A, \eta >$ n-арные операции $[\ \ ]_{n,n-1}$ и $\widetilde{\eta}$ совпадают. Это позволяет получить утверждение теоремы 1 о том, что $< H^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – n-арная группа, как следствие предложения 1 и теоремы 5.4.1 [3].

Замечание 2. n-арная группа $< A, \eta >$ из предложения 1 является объединением своих непересекающихся инвариантных n-арных подгрупп $< H_s, \eta >$, $s = 0, 1, \ldots, k-1$:

$$A = H_0 \bigcup H_1 \bigcup \ldots \bigcup H_{k-1},\ H_i \bigcap H_j = \varnothing (i \neq j).$$

В то же время, n-арная группа $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ из теоремы 1 или, что то же самое, n-арная группа $< A^{n-1}, \widetilde{\eta} >$ не является объединением своих непересекающихся n-арных подгрупп $< H_s^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$. Например, объединение

$$H_0^{n-1} \bigcup H_1^{n-1} \bigcup \ldots \bigcup H_{k-1}^{n-1}$$

не содержит элемент $(h_0, h_1, \ldots, h_{k-1}) \in A^{n-1}$, где $h_j \in H_i$ для любого $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

Пример 1. Пусть Z_{n-1} – кольцо классов вычетов по модулю $n-1$ ($n \geq 3$), $H_s = s + (n-1)Z$ – его элементы ($s = 0, 1, \ldots, n-2$). Так как Z/H_0 – аддитивная циклическая группа порядка $n-1$, порождаемая классом вычетов H_1, то по теореме 1 $< H_s^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – полуинвариантная, но неинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы $< Z^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$. В частности, этому утверждению при $s = 1$ удовлетворяет класс вычетов H_1.

Если $n = 2$, то в тернарной группе $< Z^2, [\ \ ]_{3,2} >$ имеются полуинвариантные, но неинвариантные тернарные подгруппы $< (2Z)^2, [\ \ ]_{3,2} >$ декартова квадрата четных чисел и $< (1+2Z)^2, [\ \ ]_{3,2} >$ декартова квадрата нечетных чисел.

Заметим, что если $< Z, \eta >$ – тернарная группа, производная от аддитивной группы Z целых чисел, то тернарные подгруппы $< (2Z)^2, \eta >$ и $< (1+2Z)^2, \eta >$ инвариантны в $< Z^2, \eta >$.

Полагая в теореме 1 $n = 3$, получим

Следствие 3. Если A – группа, B – ее подгруппа индекса 2, $a \notin B$, то $< B^2, [\ \ ]_{3,2} >$ и $< (B)^2, [\ \ ]_{3,2} >$ полуинвариантные, но неинвариантные тернарные подгруппы тернарной группы $< A^2, [\ \ ]_{3,2} >$.

Пример 2. Полагая в следствии 3, $A = S_n$ – симметрическая группа степени n, $B = A_n$ – знакопеременная группа, $S_n \backslash A_n$ – множество всех нечетных подстановок из S_n, видим, что в тернарной группе $< S_n^2, [\ \ ]_{3,2} >$ имеются полуинвариантные, но неинвариантные тернарные подгруппы $< A_n^2, [\ \ ]_{3,2} >$ и $< (S_n \backslash A_n)^2, [\ \ ]_{3,2} >$.

Если η – тернарная операция, производная от операции в группе S_n, то в тернарной группе $< S_n^2, \eta >$ тернарные подгруппы $< A_n^2, \eta >$ и $< (S_n \backslash A_n)^2, \eta >$ инвариантны.

Пример 3. Если $E(2)$ – множество всех движений плоскости, $E_1(2)$, $E_2(2)$ – множества всех движений плоскости первого и второго рода соответственно, то по следствию 3 в тернарной группе $< E^2(2), [\ \ ]_{3,2} >$ имеются полуинвариантные, но неинвариантные тернарные группы $< E_1^2(2), [\ \ ]_{3,2} >$ и $< E_2^2(2), [\ \ ]_{3,2} >$.

Аналогичное утверждение справедливо для группы $E(3)$ всех движений пространства.

Пример 4. Если D_n – диэдральная группа, C_n и B_n – ее подгруппы поворотов и отражений соответственно, то по следствию 3 в тернарной группе $< D_n^2, [\ \ ]_{3,2} >$ имеются полуинвариантные, но неинвариантные тернарные подгруппы $< C_n^2, [\ \ ]_{3,2} >$ и $< B_n^2, [\ \ ]_{3,2} >$.

4 m-арные матрицы

Упорядоченный набор $(A_1, A_2, \ldots, A_{m-1})$ матриц одного и того же порядка n над полем комплексных чисел C Э. Пост назвал [5] m-арной или полиадической матрицей над C. На множестве всех m-арных матриц, у которых определители всех компонент отличны от нуля, Э. Пост определил m-арную операцию

$$[A_1 \ldots A_m] = [(A_{11}, \ldots, A_{1(m-1)}) \ldots (A_{m1}, \ldots, A_{m(m-1)})] = (Y_1, \ldots, Y_{m-1}), \tag{7}$$

где

$$Y_j = A_{1j}A_{2(j+1)} \ldots A_{(n-j)(n-1)}A_{(n-j+1)1} \ldots A_{(n-1)(j-1)}A_{nj},\ j = 1, \ldots, m-1.$$

Э. Пост доказал, что указанное множество вместе с n-арной операцией (7) является m-арной группой, которую он назвал m-арной линейной группой.

Мы будем рассматривать упорядоченные наборы матриц одного и того же порядка над произвольным полем. Множество всех упорядоченных наборов $A = (A_1, \ldots, A_{m-1})$ матриц одного и того же порядка n над полем F, у которых определитель каждой компоненты A_j отличен от нуля, обозначим через $GL(n, m-1, F)$. Элементы этого множества, следуя Э. Посту, будем называть m-арными матрицами над F.

Ясно, что множество $GL(n, m-1, F)$ совпадает с $(m-1)$-ой декартовой степенью полной линейной группы $GL(n, F) : GL(n, m-1, F) = (GL(n, F))^{m-1}$, а операция (7), определенная на $GL(n, m-1, F)$, совпадает с операцией $[\ \ ]_{m,m-1}$ на $(GL(n, F))^{m-1}$. Поэтому, полагая в теореме 2.9.3 [3], $A = GL(n, F)$, получим

Предложение 2. Множество $GL(n, m-1, F)$ замкнуто относительно m-арной операции $[\ \ ]_{m,m-1}$, а универсальная алгебра $< GL(n, m-1, F), [\ \ ]_{m,m-1} >$ является m-арной группой.

Так как $GL(n, m-1, C) = (GL(n, C))^{m-1}$, а операция (7), как уже отмечалось, совпадает с операцией $[\ \ ]_{m,m-1}$, то из предложения 2 вытекает отмеченный выше результат Э. Поста.

Следствие 4. [5] Множество $GL(n, m-1, C)$ замкнуто относительно m-арной операции $[\ \ ]_{m,m-1}$, а универсальная алгебра $< GL(n, m-1, C), [\ \ ]_{m,m-1} >$ является m-арной группой.

Во множестве $GL(n, m-1, F)$ выделим подмножество $SL(n, m-1, F)$ всех m-арных матриц, у которых определитель каждой компоненты равен единице поля F. Так как $SL(n, m-1, F) = (SL(n, F))^{m-1}$, то, снова применяя теорему 2.9.3 [3], получим

Предложение 3. Множество $SL(n, m-1, F)$ замкнуто относительно m-арной операции $[\ \ ]_{m,m-1}$, а универсальная алгебра $< SL(n, m-1, F), [\ \ ]_{m,m-1} >$ является m-арной подгруппой m-арной группы $< GL(n, m-1, F), [\ \ ]_{m,m-1} >$.

m-Арную группу $< SL(n, m-1, F), [\ \ ]_{m,m-1} >$ по аналогии с бинарным случаем естественно называть m-арной специальной линейной группой.

Понятно, что при $m = 2$ m-арные матрицы – это обычные матрицы, а m-арные группы $GL(n, 1, F)$ и $SL(n, 1, F)$ совпадают соответственно с полной линейной группой $GL(n, F)$ и специальной линейной группой $SL(n, F)$.

Далее будем использовать стандартные обозначения: F_q или $GF(q)$ – поле Галуа, то есть конечное поле с числом элементов $q = p^\alpha$, p – простое; $GL(n, q)$ – полная линейная группа над полем $GF(q)$, то есть группа всех обратимых матриц порядка n над $GF(q)$; $SL(n, q)$ – специальная линейная группа степени n над полем $GF(q)$, то есть подгруппа всех матриц из $GL(n, q)$ с определителем, равным единице поля $GF(q)$.

Так как факторгруппа $GL(n,q)/SL(n,q)$ изоморфна мультипликативной группе F_q^* поля F_q, которая является циклической и имеет порядок $q-1$, то полагая в обратной теореме Поста о смежных классах и в предложении 1 $= GL(n,q)$, $B = SL(n,q)$, получим

Предложение 4. Пусть $< GL(n,q), \eta >$ – q-арная группа, производная от группы $GL(n,q)$. Тогда любой смежный класс H факторгруппы $GL(n,q)/SL(n,q)$ замкнут относительно q-арной операции η, а универсальная алгебра $< H, \eta >$ является инвариантной q-арной подгруппой в $< GL(n,q), \eta >$. Если порождает $GL(n,q)/SL(n,q)$, то обертывающей и соответствующей группами для q-арной группы $< H, \eta >$ являются соответственно группы $GL(n,q)$ и $SL(n,q)$.

Теорема 4. Пусть $n \geq 2$, $q \geq 3$. Тогда:

1) $< GL(n,q-1,F_q), [\ ]_{q,q-1} >$ и $< SL(n,q-1,F_q), [\ ]_{q,q-1} >$ – неполуабелевые q-арные группы с пустым центром, а значит и без единиц;

2) любой смежный класс H факторгруппы $GL(n,q)/SL(n,q)$ замкнут относительно q-арной операции $[\ ]_{q,q-1}$, а универсальная алгебра $< H^{q-1}, [\ ]_{q,q-1} >$ является полуинвариантной, но неинвариантной q-арной подгруппой в $< GL(n,q-1,F_q), [\ ]_{q,q-1} >$; в частности $< SL(n,q-1,F_q), [\ ]_{q,q-1} >$ полуинвариантная, но неинвариантная q-арная подгруппа в $< GL(n,q-1,F_q), [\ ]_{q,q-1} >$;

3) полуинвариантные q-арные подгруппы $< H^{q-1}, [\ ]_{q,q-1} >$ и $< SL(n,q-1,F_q), [\ ]_{q,q-1} >$ из 2) определяют на $< GL(n,q-1,F_q), [\ ]_{q,q-1} >$ одну и ту же конгруэнцию: $\rho_{H^{q-1}} = \rho_{sL(n,q-1,F_q)}$.

4) для любого смежного класса H группы $GL(n,q)/SL(n,q)$ q-арные факторгруппы $< GL(n,q-1,F_q)/H^{q-1}, [\ ]_{q,q-1} >$, $< GL(n,q-1,F_q)/SL(n,q-1,F_q), [\ ]_{q,q-1} >$ и $< (GL(n,q)/SL(n,q))^{q-1}, [\ ]_{q,q-1} >$ совпадают.

Доказательство. Для сокращения записей положим $A = GL(n,q)$, $B = SL(n,q)$.

1) По теореме 2.9.3 [3] $< A^{q-1}, [\ ]_{q,q-1} >$ и $< B^{q-1}, [\ ]_{q,q-1} >$ – q-арные группы. Их неполуабелевость следует из неабелевости групп A и B и предложения 2.8.2 [3], а отсутствие элементов в центрах указанных q-арных групп гарантирует предложение 2.9.6 [3]. Осталось заметить, что

$$GL(n,q-1,F_q) = A^{q-1},\ SL(n,q-1,F_q) = B^{q-1}.$$

2) факторгруппа A/B является циклической и имеет порядок $q-1$. Далее применяется теорема 1.

3) Используется утверждение 2) теоремы 2.

4) Используется утверждение 1) теоремы 2. Теорема доказана.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА-002) и Румынской академии наук.

Литература

[1] Гальмак А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях // *Весцi НАН Беларусi*, 2008, №3, с.28-34.

[2] Гальмак А.М. Многоместные операции на декартовых степенях // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2008, №.2, с.172-192.

[3] Гальмак А.М. Многоместные операции на декартовых степенях. Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

[4] Гальмак А.М. n-арные группы // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2007, №2(18), т.4, с.76-95.

[5] Post E.L. Polyadic groups // *Trans. Amer. Math.Soc.*, 1940, Vol. 48, №2, p.208-350.

[6] Гальмак А.М. Конгруэнции полиадических групп. Минск: Беларуская навука, 1999. – 182 с.

[7] Русаков С.А. Алгебраические n-арные системы. Мн.: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

ON N-ARY SUBGROUPS OF A SPECIAL N-ARY GROUP

A.M. Gal'mak[1], G.N. Vorob'ev[1], V.D. Balan[2]

[1] *Mogilev State University of Food Technology, Belarus*

[2] *Polytechnical University of Bucharest, Romania*

mgup@mogilev.by, vbalan@mathem.pub.ro

We consider the Cartesian power A^{n-1} $(n \geq 3)$ of the group A, which admits a subgroup B such that the factor group A/B is cyclic and with its order dividing $n-1$. On A^{n-1} we construct an $n-$ary group structure $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ with its operation similar to the one defined by E. Post for $n-$ary permutations. This structure is shown to admit semi-invariant - but generally not invariant, $n-$ary subgroups.

Key Words: operation, group, n-ary group, semiinvariant subgroup.

JET LOCAL RIEMANN-FINSLER GEOMETRY FOR THE THREE-DIMENSIONAL TIME

Gheorghe Atanasiu, Mircea Neagu

University Transilvania of Braşov[1], *Braşov, Romania*

gh_atanasiu@yahoo.com, mircea.neagu@unitbv.ro

The aim of this paper is to develop on the 1-jet space the Finsler-like geometry (in the sense of distinguished (d-) connection, d-torsions and d-curvatures) for a 1-parameter deformation of the Berwald-Moór metric of order three. Some field-like geometrical theories (gravitational-like and electromagnetic-like) produced by our 1-parameter deformation of the Berwald-Moór metric are also exposed.

Key Words: 1-parameter deformation of the Berwald-Moór metric of order three, nonlinear connection, Cartan canonical linear connection, d-torsions and d-curvatures, Einstein-like geometrical equations.

MSC(2000): 53C60, 53C80, 83C22.

1 Introduction

It is a well known fact that, in order to create the Relativity Theory, Einstein used Riemannian geometry instead of classical Euclidean geometry, the first one representing a natural mathematical model for local *isotropic* space-time. Although the use of Riemannian geometry was indeed a genial idea, there are recent studies of physicists that suggest a *non-isotropic* perspective of space-time. For example, in Pavlov's opinion [15], the concept of inertial body mass emphasizes the necessity to study the local non-isotropic spaces. Obviously, for the study of non-isotropic physical phenomena, the Finsler geometry is very useful as a mathematical framework.

The studies of Russian scholars (Asanov [1], Garas'ko [4] and Pavlov [5, 14, 15]) emphasize the importance of Finsler geometry which is characterized by the total equality in rights of all non-isotropic directions. For such a reason, Asanov, Pavlov and their co-workers underline the important role played in theory of space-time structure and gravitation (as well as in unified gauge field theories) by Berwald-Moór metric (whose certain Finsler geometrical properties are studied by Matsumoto and Shimada in the works [6, 7, 16])

$$F : TM \to \mathbb{R}, \qquad F(y) = \left(y^1 y^2 ... y^n\right)^{1/n}.$$

Because any of such directions can be related to the proper time of an inertial reference frame, Pavlov considers that it is appropriate as such spaces to be generically called *"multi-dimensional times"* [15]. In the framework of 3- and 4-dimensional linear space with Berwald-Moór metric (i.e. the three- and four-dimensional time), Pavlov and his co-workers [5, 14, 15] offer some new physical approaches and geometrical interpretations such as:

1. physical events = points in multi-dimensional time;
2. straight lines = shortest curves;
3. intervals = distances between the points along of a straight line;
4. simultaneous surfaces = the surfaces of simultaneous physical events.

According to Olver's opinion [13], we consider that the 1-jet fibre bundle is a basic object in the study of classical and quantum field theories. For such geometrical and physical reasons, this paper is devoted to the development on the 1-jet space $J^1(\mathbb{R}, M^3)$ of a Finsler-like geometry

[1]Faculty of Mathematics and Informatics Department of Algebra, Geometry and Differential Equations, B-dul Iuliu Maniu, No. 50, BV 500091, Braşov, Romania
http://www.unitbv.ro/mi/Catedre/AGED/membriaged.aspx

(together with some gravitational-like and electromagnetic-like geometrical models) for the *t-deformation of the Berwald-Moór metric* given by

$$\mathring{F} : J^1(\mathbb{R}, M^3) \to \mathbb{R}, \qquad \mathring{F}(t, y) = \sqrt{h^{11}(t)} \cdot \sqrt[3]{y_1^1 y_1^2 y_1^3},$$

where $h_{11}(t)$ is a Riemannian metric on $\mathbb{R}$ and $(t, x^1, x^2, x^3, y_1^1, y_1^2, y_1^3)$ are the coordinates of the 1-jet space $J^1(\mathbb{R}, M^3)$.

Remark 1.1. *If we take the particular local Riemannian metric*

$$h_{11}(t) = e^{-2\sigma(t)} > 0,$$

it follows that $\mathring{F}$ becomes a t-conformal deformation of the ***jet Berwald-Moór metric of order three***

$$BM_3(y) = \sqrt[3]{y_1^1 y_1^2 y_1^3}.$$

The differential geometry (in the sense of Cartan linear connections, d-torsions, d-curvatures, gravitational-like and electromagnetic-like geometrical models) produced by an arbitrary jet Lagrangian function

$$L : J^1(\mathbb{R}, M^n) \to \mathbb{R}$$

is now completely done in the second author's paper [12]. We point out that the geometrical ideas from [12] are similar (but however distinct ones) to those exposed by Miron and Anastasiei in the classical Lagrangian geometry on tangent bundle [8]. More accurately, the geometrical ideas from [12] (which we called the jet geometrical theory of *relativistic rheonomic (t-dependent) Lagrange spaces*) were initially stated by Asanov in [2] and developed further in the book [11] by the second author of this paper.

In the sequel, we apply the general geometrical results from [12] to the particular rheonomic (t-deformed) Berwald-Moór metric $\mathring{F}$, in order to obtain what we called the *jet local Riemann-Finsler geometry for three-dimensional time.*

2 Preliminary notations and formulas

Let $(\mathbb{R}, h_{11}(t))$ be a Riemannian manifold, where $\mathbb{R}$ is the set of real numbers. The Christoffel symbol of the Riemannian metric $h_{11}(t)$ is

$$\varkappa_{11}^1 = \frac{h^{11}}{2}\frac{dh_{11}}{dt}, \qquad h^{11} = \frac{1}{h_{11}} > 0.$$

Let also M^3 be a manifold of dimension three, whose local coordinates are (x^1, x^2, x^3). Let us consider the 1-jet space $J^1(\mathbb{R}, M^3)$, whose local coordinates are

$$(t, x^1, x^2, x^3, y_1^1, y_1^2, y_1^3).$$

These transform by the rules (the Einstein convention of summation is used throughout this work):

$$\widetilde{t} = \widetilde{t}(t), \quad \widetilde{x}^p = \widetilde{x}^p(x^q), \quad \widetilde{y}_1^p = \frac{\partial \widetilde{x}^p}{\partial x^q}\frac{dt}{d\widetilde{t}} \cdot y_1^q, \qquad p, q = \overline{1, 3}, \tag{2.1}$$

where $d\widetilde{t}/dt \neq 0$ and rank $(\partial \widetilde{x}^p / \partial x^q) = 3$. We consider that the manifold M^3 is endowed with a tensor of rank $(0, 3)$, given by local components $G_{pqr}(x)$. This is totally symmetric in the indices p, q and r. Suppose that the d-tensor

$$G_{ij1} = 6G_{ijp}y_1^p,$$

is non-degenerate, that is there exists the d-tensor G^{jk1} on $J^1(\mathbb{R}, M^3)$ such that $G_{ij1}G^{jk1} = \delta_i^k$.

In this geometrical context, if we use the notation $G_{111} = G_{pqr}y_1^p y_1^q y_1^r$, we can consider the *third-root Finsler-like function* [16], [3] (this is 1-positive homogenous in the variable y):

$$F(t,x,y) = \sqrt[3]{G_{pqr}(x)y_1^p y_1^q y_1^r} \cdot \sqrt{h^{11}(t)} = \sqrt[3]{G_{111}(x,y)} \cdot \sqrt{h^{11}(t)}, \tag{2.2}$$

where the Finsler function F has as domain of definition all values (t,x,y) which verify the condition $G_{111}(x,y) \neq 0$ (i.e. the domain where we can y-differentiate the function $F(t,x,y)$).

If we denote $G_{i11} = 3G_{ipq}y_1^p y_1^q$, then the 3-positive homogeneity of the "y-function" G_{111} (this is in fact a d-tensor on the 1-jet space $J^1(\mathbb{R}, M^3)$) leads to equalities:

$$G_{i11} = \frac{\partial G_{111}}{\partial y_1^i}, \quad G_{i11}y_1^i = 3G_{111}, \quad G_{ij1}y_1^j = 2G_{i11},$$

$$G_{ij1} = \frac{\partial G_{i11}}{\partial y_1^j} = \frac{\partial^2 G_{111}}{\partial y_1^i \partial y_1^j}, \quad G_{ij1}y_1^i y_1^j = 6G_{111}, \quad \frac{\partial G_{ij1}}{\partial y_1^k} = 6G_{ijk}.$$

The *fundamental metrical d-tensor* produced by F is given by formula

$$g_{ij}(t,x,y) = \frac{h_{11}(t)}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1^i \partial y_1^j}.$$

By direct computations, the fundamental metrical d-tensor takes the form

$$g_{ij}(x,y) = \frac{G_{111}^{-1/3}}{3}\left[G_{ij1} - \frac{1}{3G_{111}}G_{i11}G_{j11}\right]. \tag{2.3}$$

Moreover, taking into account that the d-tensor G_{ij1} is non-degenerate, we deduce that the matrix $g = (g_{ij})$ admits the inverse $g^{-1} = (g^{jk})$. The entries of the inverse matrix g^{-1} are given by

$$g^{jk} = 3G_{111}^{1/3}\left[G^{jk1} + \frac{G_1^j G_1^k}{3\left(G_{111} - \mathcal{G}_{111}\right)}\right], \tag{2.4}$$

where $G_1^j = G^{jp1}G_{p11}$ and $3\mathcal{G}_{111} = G^{pq1}G_{p11}G_{q11}$.

3 t-Deformation of the Berwald-Moór metric

Starting from this Section, we will focus only on the *t-deformation of the Berwald-Moór metric of order three* which is the Finsler-like metric (2.2) for particular case

$$G_{pqr} = \begin{cases} \dfrac{1}{3!}, & \{p,q,r\} \text{ - distinct indices} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Consequently, the t-deformation of the Berwald-Moór metric of order three is given by

$$\mathring{F}(t,y) = \sqrt{h^{11}(t)} \cdot \sqrt[3]{y_1^1 y_1^2 y_1^3}. \tag{3.1}$$

Moreover, using preceding notations and formulas, we obtain the following relations:

$$G_{111} = y_1^1 y_1^2 y_1^3, \quad G_{i11} = \frac{G_{111}}{y_1^i},$$

$$G_{ij1} = (1-\delta_{ij})\,\frac{G_{111}}{y_1^i y_1^j}\ \text{(no sum by } i \text{ or } j\text{)},$$

where δ_{ij} is the Kronecker symbol. Because we have

$$\det\left(G_{ij1}\right)_{i,j=\overline{1,3}} = 2G_{111} \neq 0,$$

we find

$$G^{jk1} = \frac{(1-2\delta^{jk})}{2G_{111}} y_1^j y_1^k\ \text{(no sum by } j \text{ or } k\text{)}.$$

It follows that we have $\mathcal{G}_{111} = (1/2)G_{111}$ and $G_1^j = (1/2)y_1^j$.

If we replace the preceding computed entities into formulas (2.3) and (2.4), we get

$$g_{ij} = \frac{(2-3\delta_{ij})}{9}\,\frac{G_{111}^{2/3}}{y_1^i y_1^j}\ \text{(no sum by } i \text{ or } j\text{)} \tag{3.2}$$

and

$$g^{jk} = (2-3\delta^{jk}) G_{111}^{-2/3} y_1^j y_1^k\ \text{(no sum by } j \text{ or } k\text{)}. \tag{3.3}$$

Using a general formula from paper [12], we find the following geometrical result:

Proposition 3.1. *For the t-deformed Berwald-Moór metric (3.1), the energy action functional*

$$\mathring{\mathbb{E}}(t, x(t)) = \int_a^b \mathring{F}^2(t,y)\sqrt{h_{11}}dt = \int_a^b \sqrt[3]{\{y_1^1 y_1^2 y_1^3\}^2}\cdot h^{11}\sqrt{h_{11}}dt$$

produces on the 1*-jet space* $J^1(\mathbb{R}, M^3)$ *the canonical nonlinear connection*

$$\Gamma = \left(M_{(1)1}^{(i)} = -\varkappa_{11}^1 y_1^i,\ N_{(1)j}^{(i)} = 0\right). \tag{3.4}$$

Proof. The Euler-Lagrange equations of the energy action functional $\mathring{\mathbb{E}}$ are equivalent with the equations

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2H_{(1)1}^{(i)}\left(t, x^k, y_1^k\right) + 2G_{(1)1}^{(i)}\left(t, x^k, y_1^k\right) = 0, \qquad y_1^k = \frac{dx^k}{dt}, \tag{3.5}$$

where the local geometrical components

$$H_{(1)1}^{(i)} \overset{def}{=} -\frac{1}{2}\varkappa_{11}^1(t) y_1^i$$

and

$$G_{(1)1}^{(i)} \overset{def}{=} \frac{h_{11}g^{ik}}{4}\left[\frac{\partial^2 \mathring{F}^2}{\partial x^j \partial y_1^k} y_1^j - \frac{\partial \mathring{F}^2}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 \mathring{F}^2}{\partial t \partial y_1^k} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \mathring{F}^2}{\partial y_1^k}\varkappa_{11}^1(t) + 2h^{11}\varkappa_{11}^1 g_{kl} y_1^l\right] := 0$$

represent a *semispray* on the 1-jet space $J^1(\mathbb{R}, M^3)$. This semispray produces the *canonical nonlinear connection* (for more details, see the papers [10], [12])

$$\Gamma = \left(M_{(1)1}^{(i)} = 2H_{(1)1}^{(i)} = -\varkappa_{11}^1 y_1^i,\ N_{(1)j}^{(i)} = \frac{\partial G_{(1)1}^{(i)}}{\partial y_1^j} = 0\right).$$

$\square$

Generally speaking, a nonlinear connection $\Gamma = \left(M^{(i)}_{(1)1},\ N^{(i)}_{(1)j}\right)$ on the 1-jet space $J^1(\mathbb{R}, M^3)$ is used for construction of distinguished vector fields (which have a classical tensorial behaviour)

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} - M^{(j)}_{(1)1}\frac{\partial}{\partial y^j_1}, \qquad \frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N^{(j)}_{(1)i}\frac{\partial}{\partial y^j_1}. \tag{3.6}$$

It is important to note that, in our present Finsler-like geometrization, there are a lot of geometrical local components (such as the components of Cartan linear connection, d-torsions, d-curvatures etc.) whose geometrical construction involves the M-horizontal covariant derivatives $\delta/\delta x^i$. In the case when the nonlinear connection Γ has the components $N^{(i)}_{(1)j}$ equal to zero (see (3.4), for instance), it follows that the M-horizontal covariant derivatives $\delta/\delta x^i$ reduce to the classical partial derivatives $\partial/\partial x^i$. Consequently, the above discussed geometrical local components (e.g., which are dependent only by t and y) vanish in this case. For these reasons, we will use on the 1-jet space $J^1(\mathbb{R}, M^3)$, by an "a priori" definition, the following *non-trivial* local nonlinear connection:

$$\mathring{\Gamma} = \left(M^{(i)}_{(1)1} = -\varkappa^1_{11}y^i_1,\ N^{(i)}_{(1)j} = -\frac{\varkappa^1_{11}}{2}\delta^i_j\right). \tag{3.7}$$

Beside the non-triviality of the components $N^{(i)}_{(1)j}$, we have choosen the nonlinear connection (3.7) such that its attached *harmonic curves* be straight lines (this is because the Euler-Lagrange equations (3.5) also have as solutions only pieces of straight lines). In order to be more clear, we recall that the equations of the harmonic curves of the nonlinear connection (3.7) are given by [10]

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} + M^{(j)}_{(1)1}\left(t, x^k(t), \frac{dx^k}{dt}\right) + N^{(j)}_{(1)m}\left(t, x^k(t), \frac{dx^k}{dt}\right)\frac{dx^m}{dt} = 0. \tag{3.8}$$

It follows that the equations (3.8) are equivalent to

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} = \frac{3}{4}\frac{1}{h_{11}}\frac{dh_{11}}{dt}\frac{dx^j}{dt}. \tag{3.9}$$

Obviously, the equations (3.9) have the general solution

$$x^j(t) = a^j\int_{t_0}^{t}(h_{11})^{3/4}(\sigma)d\sigma + b^j,$$

where $a^j, b^j \in \mathbb{R}$. In other words, the equations (3.9) have as solutions only pieces of the straight lines

$$\frac{x^1 - b^1}{a^1} = \frac{x^2 - b^2}{a^2} = \frac{x^3 - b^3}{a^3}.$$

Remark 3.2. *We point out that the above terminology of* ***harmonic curves (autoparallel curves*** *in Miron's terminology [8]) comes from the particular form of equations (3.8) for the particular* ***global*** *nonlinear connection*

$$\hat{\Gamma} = \left(\hat{M}^{(j)}_{(1)1} = -\varkappa^1_{11}y^j_1,\ \hat{N}^{(j)}_{(1)i} = \gamma^j_{im}y^m_1\right), \tag{3.10}$$

where $\varkappa^1_{11}(t)$ and $\gamma^i_{jk}(x)$ represent the Christoffel symbols of the Riemannian manifolds $(\mathbb{R}, h_{11}(t))$ and $(M^3, \varphi_{ij}(x))$. It is obvious that, for the particular nonlinear connection (3.10), the equations (3.8) become the ***equations of harmonic maps (curves)***

$$\begin{gathered}\frac{d^2x^i}{dt^2} - \varkappa^1_{11}(t)\frac{dx^i}{dt} + \gamma^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0 \Leftrightarrow \\ h^{11}\left[\frac{d^2x^i}{dt^2} - \varkappa^1_{11}(t)\frac{dx^i}{dt} + \gamma^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right] = 0.\end{gathered} \tag{3.11}$$

Remark 3.3. *Note that the components* $N^{(i)}_{(1)j}$ *of the nonlinear connection (3.7), which are given in the local chart* $\mathcal{U}$ *by the functions*

$$\mathring{N} = \left(N^{(i)}_{(1)j} = -\frac{\varkappa^1_{11}}{2}\delta^i_j\right),$$

have not a global character on the 1*-jet space* $J^1(\mathbb{R}, M^3)$*, but have only a local character. In conclusion, taking into account the general transformation rules (see [10])*

$$\widetilde{N}^{(k)}_{(1)l} = N^{(j)}_{(1)i}\frac{dt}{d\widetilde{t}}\frac{\partial x^i}{\partial \widetilde{x}^l}\frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial x^i}{\partial \widetilde{x}^l}\frac{\partial \widetilde{y}^k_1}{\partial x^i}, \tag{3.12}$$

it follows that $\mathring{N}$ *has in the local chart* $\widetilde{\mathcal{U}}$ *the following components:*

$$\widetilde{N}^{(k)}_{(1)l} = -\frac{\widetilde{\varkappa}^1_{11}}{2}\delta^k_l + \frac{1}{2}\frac{d\widetilde{t}}{dt}\frac{d^2t}{d\widetilde{t}^2}\delta^k_l + \frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial \widetilde{x}^l \partial \widetilde{x}^r}\widetilde{y}^r_1.$$

4 The Cartan $\mathring{\Gamma}$-linear connection. d-Torsions and d-curvatures

We use the nonlinear connection (3.7) for construction of dual *adapted bases* of d-vector fields

$$\left\{\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + \varkappa^1_{11}y^p_1\frac{\partial}{\partial y^p_1},\ \frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\varkappa^1_{11}}{2}\frac{\partial}{\partial y^i_1},\ \frac{\partial}{\partial y^i_1}\right\} \subset \mathcal{X}(E) \tag{4.1}$$

and d-covector fields

$$\left\{dt,\ dx^i,\ \delta y^i_1 = dy^i_1 - \varkappa^1_{11}y^i_1 dt - \frac{\varkappa^1_{11}}{2}dx^i\right\} \subset \mathcal{X}^*(E), \tag{4.2}$$

where $E = J^1(\mathbb{R}, M^3)$. Note that, under a change of coordinates (2.1), the elements of adapted bases (4.1) and (4.2) must transform as classical tensors. Consequently, all subsequent geometrical objects on the 1-jet space $J^1(\mathbb{R}, M^3)$ (such as the Cartan canonical $\mathring{\Gamma}$-linear connection, torsion, curvature etc.) will be described in local adapted components.

Using a general result from [12], by direct computations, we can give the following important geometrical result:

Proposition 4.1. *The Cartan canonical* $\mathring{\Gamma}$*-linear connection, produced by the* t*-deformed Berwald-Moór metric (3.1), has the following adapted components:*

$$C\mathring{\Gamma} = \left(\varkappa^1_{11},\ G^k_{j1} = 0,\ L^i_{jk} = \frac{\varkappa^1_{11}}{2}C^{i(1)}_{j(k)},\ C^{i(1)}_{j(k)}\right),$$

where, if we use the notation

$$A^i_{jk} = \frac{3\delta^i_j + 3\delta^i_k + 3\delta_{jk} - 9\delta^i_j\delta_{jk} - 2}{9}\ \textit{(no sum by } i,\ j \textit{ or } k\textit{)}$$

we have

$$C^{i(1)}_{j(k)} = A^i_{jk}\cdot\frac{y^i_1}{y^j_1 y^k_1}\ \textit{(no sum by } i,\ j \textit{ or } k\textit{)}.$$

Proof. Via the t-deformed Berwald-Moór derivative operators (4.1), we use the general formulas which give the adapted components of the Cartan canonical connection, namely [12]

$$G^k_{j1} = \frac{g^{km}}{2}\frac{\delta g_{mj}}{\delta t},\quad L^i_{jk} = \frac{g^{im}}{2}\left(\frac{\delta g_{jm}}{\delta x^k} + \frac{\delta g_{km}}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^m}\right),$$

$$C^{i(1)}_{j(k)} = \frac{g^{im}}{2}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial y^k_1} + \frac{\partial g_{km}}{\partial y^j_1} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^m_1}\right) = \frac{g^{im}}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial y^m_1}.$$

Remark 4.2. *The Cartan canonical connection $C\mathring{\Gamma}$ has the metrical properties:*

$$h_{11/1} = h^{11}{}_{/1} = 0, \quad h_{11|k} = h^{11}{}_{|k} = 0, \quad h_{11}|_{(k)}^{(1)} = h^{11}|_{(k)}^{(1)} = 0,$$
$$g_{ij/1} = g^{ij}{}_{/1} = 0, \quad g_{ij|k} = g^{ij}{}_{|k} = 0, \quad g_{ij}|_{(k)}^{(1)} = g^{ij}|_{(k)}^{(1)} = 0,$$

*where "$_{/1}$", "$_{|k}$" and "$|_{(k)}^{(1)}$" are the $\mathbb{R}$-**horizontal**, M-**horizontal** and **vertical covariant derivatives** produced by the Cartan $\mathring{\Gamma}$-linear connection $C\mathring{\Gamma}$. For more details upon the local expressions of the above covariant derivatives applied to the components of d-tensors, see paper [12]. Consequently, in our jet Finsler-like geometrization, the Cartan canonical connection plays a similar role to that of Levi-Civita connection in Riemannian spaces.*

Remark 4.3. *The below properties of the vertical d-tensor $C^{i(1)}_{j(k)}$ are true (summation by m):*

$$C^{i(1)}_{j(k)} = C^{i(1)}_{k(j)}, \quad C^{i(1)}_{j(m)} y_1^m = 0, \quad C^{m(1)}_{j(m)} = 0. \tag{4.3}$$

For similar properties, see also the papers [3], [7], [9] or [16].

Remark 4.4. *The coefficients A^l_{ij} have the following values:*

$$A^l_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{2}{9}, & i \neq j \neq l \neq i \\ \dfrac{1}{9}, & i = j \neq l \text{ or } i = l \neq j \text{ or } j = l \neq i \\ -\dfrac{2}{9}, & i = j = l. \end{cases} \tag{4.4}$$

Proposition 4.5. *The Cartan canonical connection $C\mathring{\Gamma}$ of the t-deformation of the Berwald-Moór metric (given by (3.1)) has **three** effective adapted local torsion d-tensors:*

$$P^{(k)\ (1)}_{(1)i(j)} = -\frac{\varkappa^1_{11}}{2} C^{k(1)}_{i(j)}, \quad P^{k(1)}_{i(j)} = C^{k(1)}_{i(j)},$$
$$R^{(k)}_{(1)1j} = \frac{1}{2}\left[\frac{d\varkappa^1_{11}}{dt} - \varkappa^1_{11}\varkappa^1_{11}\right]\delta^k_j.$$

Proof. A general h-normal Γ-linear connection on the 1-jet space $J^1(\mathbb{R}, M^3)$ is characterized by *eight* effective d-tensors of torsion (for more details, see [12]). For our Cartan canonical connection $C\mathring{\Gamma}$ these reduce to the following *three* (the other five cancel):

$$P^{(k)\ (1)}_{(1)i(j)} = \frac{\partial N^{(k)}_{(1)i}}{\partial y^j_1} - L^k_{ji}, \quad R^{(k)}_{(1)1j} = \frac{\delta M^{(k)}_{(1)1}}{\delta x^j} - \frac{\delta N^{(k)}_{(1)j}}{\delta t}, \quad P^{k(1)}_{i(j)} = C^{k(1)}_{i(j)}.$$

□

Proposition 4.6. *The Cartan canonical connection $C\mathring{\Gamma}$ of the t-deformation of the Berwald-Moór metric (given by (3.1)) has **three** effective adapted local curvature d-tensors:*

$$R^l_{ijk} = \frac{\varkappa^1_{11}\varkappa^1_{11}}{4} S^{l(1)(1)}_{i(j)(k)}, \quad P^{l\ (1)}_{ij(k)} = \frac{\varkappa^1_{11}}{2} S^{l(1)(1)}_{i(j)(k)},$$
$$S^{l(1)(1)}_{i(j)(k)} = \frac{\partial C^{l(1)}_{i(j)}}{\partial y^k_1} - \frac{\partial C^{l(1)}_{i(k)}}{\partial y^j_1} + C^{m(1)}_{i(j)} C^{l(1)}_{m(k)} - C^{m(1)}_{i(k)} C^{l(1)}_{m(j)}.$$

Proof. A general h-normal Γ-linear connection on the 1-jet space $J^1(\mathbb{R}, M^3)$ is characterized by *five* effective d-tensors of curvature (for more details, see [12]). For our Cartan canonical connection $C\mathring{\Gamma}$ these reduce to the following *three* (the other two cancel):

$$R^l_{ijk} = \frac{\delta L^l_{ij}}{\delta x^k} - \frac{\delta L^l_{ik}}{\delta x^j} + L^m_{ij} L^l_{mk} - L^m_{ik} L^l_{mj},$$

$$P^{l\ \ (1)}_{ij(k)} = \frac{\partial L^l_{ij}}{\partial y^k_1} - C^{l(1)}_{i(k)|j} + C^{l(1)}_{i(m)} P^{(m)\ \ (1)}_{(1)j(k)},$$

$$S^{l(1)(1)}_{i(j)(k)} = \frac{\partial C^{l(1)}_{i(j)}}{\partial y^k_1} - \frac{\partial C^{l(1)}_{i(k)}}{\partial y^j_1} + C^{m(1)}_{i(j)} C^{l(1)}_{m(k)} - C^{m(1)}_{i(k)} C^{l(1)}_{m(j)},$$

where

$$C^{l(1)}_{i(k)|j} = \frac{\delta C^{l(1)}_{i(k)}}{\delta x^j} + C^{m(1)}_{i(k)} L^l_{mj} - C^{l(1)}_{m(k)} L^m_{ij} - C^{l(1)}_{i(m)} L^m_{kj}.$$

□

Remark 4.7. *The vertical curvature d-tensor* $S^{l(1)(1)}_{i(j)(k)}$ *has the properties:*

$$S^{l(1)(1)}_{i(j)(k)} + S^{l(1)(1)}_{i(k)(j)} = 0,$$

$$S^{l(1)(1)}_{i(j)(j)} = 0 \text{ (no sum by } j\text{)}.$$

Proposition 4.8. *The expressions of the vertical curvature d-tensor* $S^{l(1)(1)}_{i(j)(k)}$ *are given by:*

1. $S^{l(1)(1)}_{i(i)(k)} = -\dfrac{1}{9}\dfrac{y^l_1}{(y^i_1)^2 y^k_1}$ *($i \neq k \neq l \neq i$ and no sum by i);*
2. $S^{l(1)(1)}_{i(j)(i)} = \dfrac{1}{9}\dfrac{y^l_1}{(y^i_1)^2 y^j_1}$ *($i \neq j \neq l \neq i$ and no sum by i);*
3. $S^{i(1)(1)}_{i(j)(k)} = 0$ *($i \neq j \neq k \neq i$ and no sum by i);*
4. $S^{l(1)(1)}_{i(l)(k)} = \dfrac{1}{9 y^i_1 y^k_1}$ *($i \neq k \neq l \neq i$ and no sum by l);*
5. $S^{l(1)(1)}_{i(j)(l)} = -\dfrac{1}{9 y^i_1 y^j_1}$ *($i \neq j \neq l \neq i$ and no sum by l);*
6. $S^{l(1)(1)}_{i(i)(l)} = \dfrac{1}{9 (y^i_1)^2}$ *($i \neq l$ and no sum by i or l);*
7. $S^{l(1)(1)}_{i(l)(i)} = -\dfrac{1}{9 (y^i_1)^2}$ *($i \neq l$ and no sum by i or l);*
8. $S^{l(1)(1)}_{l(l)(k)} = 0$ *($k \neq l$ and no sum by l);*
9. $S^{l(1)(1)}_{l(j)(l)} = 0$ *($j \neq l$ and no sum by l).*

Proof. For $j \neq k$, the expression of the vertical curvature tensor $S^{l(1)(1)}_{i(j)(k)}$ takes the form (no sum by i, j, k or l, but with sum by m)

$$\begin{aligned} S^{l(1)(1)}_{i(j)(k)} &= \left[\frac{A^l_{ij}\delta^l_k}{y^i_1 y^j_1} - \frac{A^l_{ik}\delta^l_j}{y^i_1 y^k_1}\right] + \left[\frac{A^l_{ik}\delta_{ij} y^l_1}{(y^i_1)^2 y^k_1} - \frac{A^l_{ij}\delta_{ik} y^l_1}{(y^i_1)^2 y^j_1}\right] + \\ &\quad + \left[A^m_{ij} A^l_{mk} - A^m_{ik} A^l_{mj}\right] \frac{y^l_1}{y^i_1 y^j_1 y^k_1}, \end{aligned}$$

where the coefficients A^l_{ij} are given by relations (4.4). □

5 t-Deformed field-like geometrical models constructed on 1-jet three-dimensional time

5.1 Gravitational-like geometrical model

From a geometrical point of view, on the 1-jet three-dimensional time, the t-deformed Berwald-Moór metric (3.1) produces the adapted metrical d-tensor

$$\mathbb{G} = h_{11}dt \otimes dt + g_{ij}dx^i \otimes dx^j + h^{11}g_{ij}\delta y^i_1 \otimes \delta y^j_1, \tag{5.1}$$

where g_{ij} is given by (3.2) and δy^i_1 is given by (4.2). This may be regarded as a *"non-isotropic gravitational potential"* (see Miron and Anastasiei [8]). In such a "physical" terminology, the nonlinear connection $\mathring{\Gamma}$ (used in the construction of distinguished 1-forms δy^i_1) prescribes, probably, a kind of *"interaction"* between (t)-, (x)- and (y)-fields (cf. Ikeda, Miron and Anastasiei).

We postulate that the non-isotropic gravitational potential $\mathbb{G}$ is governed by the *Einstein geometrical equations*

$$\mathrm{Ric}\left(C\mathring{\Gamma}\right) - \frac{\mathrm{Sc}\left(C\mathring{\Gamma}\right)}{2}\mathbb{G} = \mathcal{K}\mathcal{T}, \tag{5.2}$$

where $\mathrm{Ric}\left(C\mathring{\Gamma}\right)$ is the *Ricci d-tensor* associated to the Cartan canonical connection $C\mathring{\Gamma}$ (in Riemannian sense and described in adapted bases), $\mathrm{Sc}\left(C\mathring{\Gamma}\right)$ is the *scalar curvature*, $\mathcal{K}$ is the *Einstein constant* and $\mathcal{T}$ is the intrinsic *stress-energy* d-tensor of matter.

Thus, working with adapted basis of vector fields (4.1), we find the local Einstein geometrical equations for the t-deformed Berwald-Moór metric (3.1). Firstly, by direct computations, we find:

Lemma 5.1. *The Ricci d-tensor of the Cartan canonical connection $C\mathring{\Gamma}$ of the t-deformation of the Berwald-Moór metric (given by (3.1)) has the following effective adapted local Ricci d-tensors:*

$$\begin{gathered} R_{ij} = R^m_{ijm} = \frac{\overset{1}{\varkappa}_{11}\overset{1}{\varkappa}_{11}}{4}S^{(1)(1)}_{(i)(j)}, \quad P^{\ (1)}_{i(j)} = P^{(1)}_{(i)j} = P^{m\ (1)}_{ij(m)} = \frac{\overset{1}{\varkappa}_{11}}{2}S^{(1)(1)}_{(i)(j)}, \\ S^{(1)(1)}_{(i)(j)} = S^{m(1)(1)}_{i(j)(m)} = \frac{3\delta_{ij}-1}{9}\cdot\frac{1}{y^i_1y^j_1} \ \textit{(no sum by } i \textit{ or } j\textit{)}. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Remark 5.2. *The vertical Ricci d-tensor $S^{(1)(1)}_{(i)(j)}$ has the following expression:*

$$S^{(1)(1)}_{(i)(j)} = \begin{cases} -\dfrac{1}{9}\dfrac{1}{y^i_1y^j_1}, & i \neq j \\ \dfrac{2}{9}\dfrac{1}{(y^i_1)^2}, & i = j. \end{cases}$$

Remark 5.3. *Using the last equality of (5.3) and the relation (3.3), we deduce that the following equality is true (sum by r):*

$$S^{m11}_i \overset{def}{=} g^{mr}S^{(1)(1)}_{(r)(i)} = G^{-2/3}_{111}\cdot\frac{1-3\delta^m_i}{3}\cdot\frac{y^m_1}{y^i_1} \ \textit{(no sum by } i \textit{ or } m\textit{)}. \tag{5.4}$$

Moreover, by a direct calculation, we obtain the equalities

$$\sum_{m,r=1}^{3} S^{m11}_r C^{r(1)}_{i(m)} = 0, \quad \sum_{m=1}^{3}\frac{\partial S^{m11}_i}{\partial y^m_1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y^i_1}\cdot G^{-2/3}_{111}. \tag{5.5}$$

Lemma 5.4. *The scalar curvature of the Cartan canonical connection $C\mathring{\Gamma}$ of the t-deformed Berwald-Moór metric (3.1) is given by*

$$Sc\ \left(C\mathring{\Gamma}\right) = -\frac{4h_{11} + \varkappa^1_{11}\varkappa^1_{11}}{2} \cdot G_{111}^{-2/3}.$$

Proof. The general formula for the scalar curvature of a Cartan connection is (for more details, see [12])

$$\mathrm{Sc}\ \left(C\mathring{\Gamma}\right) = g^{pq}R_{pq} + h_{11}g^{pq}S^{(1)(1)}_{(p)(q)}.$$

□

Describing the global Einstein geometrical equations (5.2) in adapted basis of vector fields (4.1), we find the following important geometrical result (for more details, see [12]):

Proposition 5.5. *The adapted local* ***Einstein geometrical equations****, that govern the non-isotropic gravitational potential (5.1), are given by:*

$$\begin{cases} \xi_{11} \cdot G_{111}^{-2/3} \cdot h_{11} = \mathcal{T}_{11} \\ \dfrac{\varkappa^1_{11}\varkappa^1_{11}}{4\mathcal{K}} S^{(1)(1)}_{(i)(j)} + \xi_{11} \cdot G_{111}^{-2/3} \cdot g_{ij} = \mathcal{T}_{ij} \\ \dfrac{1}{\mathcal{K}} S^{(1)(1)}_{(i)(j)} + \xi_{11} \cdot G_{111}^{-2/3} \cdot h^{11} \cdot g_{ij} = \mathcal{T}^{(1)(1)}_{(i)(j)} \end{cases} \tag{5.6}$$

$$\begin{cases} 0 = \mathcal{T}_{1i}, \quad 0 = \mathcal{T}_{i1}, \quad 0 = \mathcal{T}^{(1)}_{(i)1}, \\ 0 = \mathcal{T}_{1\overset{(1)}{(i)}}, \quad \dfrac{\varkappa^1_{11}}{2\mathcal{K}} S^{(1)(1)}_{(i)(j)} = \mathcal{T}_{i\overset{(1)}{(j)}}, \quad \dfrac{\varkappa^1_{11}}{2\mathcal{K}} S^{(1)(1)}_{(i)(j)} = \mathcal{T}^{(1)}_{(i)j}, \end{cases} \tag{5.7}$$

where

$$\xi_{11} = \frac{4h_{11} + \varkappa^1_{11}\varkappa^1_{11}}{4\mathcal{K}}. \tag{5.8}$$

Remark 5.6. *The Einstein geometrical equations (5.6) and (5.7) impose the stress-energy d-tensor of matter $\mathcal{T}$ to be symmetric. In other words, the stress-energy d-tensor of matter $\mathcal{T}$ must verify the local symmetry conditions*

$$\mathcal{T}_{AB} = \mathcal{T}_{BA}, \quad \forall\ A, B \in \left\{1,\ i,\ \overset{(1)}{(i)}\right\}.$$

By direct computations, the adapted local Einstein geometrical equations (5.6) and (5.7) imply the following identities of the distinguished stress-energy tensor (summation by r):

$$\mathcal{T}^1_1 \overset{def}{=} h^{11}\mathcal{T}_{11} = \xi_{11} \cdot G_{111}^{-2/3}, \quad \mathcal{T}^m_1 \overset{def}{=} g^{mr}\mathcal{T}_{r1} = 0,$$

$$\mathcal{T}^{(m)}_{(1)1} \overset{def}{=} h_{11}g^{mr}\mathcal{T}^{(1)}_{(r)1} = 0, \quad \mathcal{T}^1_i \overset{def}{=} h^{11}\mathcal{T}_{1i} = 0,$$

$$\mathcal{T}^m_i \overset{def}{=} g^{mr}\mathcal{T}_{ri} = \frac{\varkappa^1_{11}\varkappa^1_{11}}{4\mathcal{K}} S^{m11}_i + \xi_{11} \cdot G_{111}^{-2/3} \cdot \delta^m_i,$$

$$\mathcal{T}^{(m)}_{(1)i} \overset{def}{=} h_{11}g^{mr}\mathcal{T}^{(1)}_{(r)i} = \frac{h_{11}\varkappa^1_{11}}{2\mathcal{K}} S^{m11}_i, \quad \mathcal{T}^{1(1)}_{\ \ (i)} \overset{def}{=} h^{11}\mathcal{T}_{1\overset{(1)}{(i)}} = 0,$$

$$\mathcal{T}^{m(1)}_{\ \ (i)} \overset{def}{=} g^{mr}\mathcal{T}_{r\overset{(1)}{(i)}} = \frac{\varkappa^1_{11}}{2\mathcal{K}} S^{m11}_i,$$

$\mathcal{T}^{(m)(1)}_{(1)(i)} \stackrel{def}{=} h_{11}g^{mr}\mathcal{T}^{(1)(1)}_{(r)(i)} = \dfrac{h_{11}}{\mathcal{K}}S^{m11}_{i} + \xi_{11}\cdot G_{111}^{-2/3}\cdot\delta^m_i$, where the distinguished tensor S^{m11}_i is given by (5.4) and ξ_{11} is given by (5.8).

Proposition 5.7. *The stress-energy d-tensor of matter $\mathcal{T}$ must verify the following* ***conservation geometrical laws*** *(summation by m):*

$$\begin{cases} \mathcal{T}^1_{1/1} + \mathcal{T}^m_{1|m} + \mathcal{T}^{(m)}_{(1)1}|^{(1)}_{(m)} = \dfrac{\left(h^{11}\right)^2}{16\mathcal{K}}\dfrac{dh_{11}}{dt}\left[2\dfrac{d^2h_{11}}{dt^2} - \dfrac{3}{h_{11}}\left(\dfrac{dh_{11}}{dt}\right)^2\right]\cdot G_{111}^{-2/3} \\ \mathcal{T}^1_{i/1} + \mathcal{T}^m_{i|m} + \mathcal{T}^{(m)}_{(1)i}|^{(1)}_{(m)} = 0 \\ \mathcal{T}^{1(1)}_{\ \ (i)/1} + \mathcal{T}^{m(1)}_{\ \ (i)|m} + \mathcal{T}^{(m)(1)}_{(1)(i)}|^{(1)}_{(m)} = 0, \end{cases}$$

where (summation by m and r)

$$\mathcal{T}^1_{1/1} \stackrel{def}{=} \frac{\delta\mathcal{T}^1_1}{\delta t} + \mathcal{T}^1_1\varkappa^1_{11} - \mathcal{T}^1_1\varkappa^1_{11} = \frac{\delta\mathcal{T}^1_1}{\delta t},$$

$$\mathcal{T}^m_{1|m} \stackrel{def}{=} \frac{\delta\mathcal{T}^m_1}{\delta x^m} + \mathcal{T}^r_1 L^m_{rm} = \frac{\delta\mathcal{T}^m_1}{\delta x^m},$$

$$\mathcal{T}^{(m)}_{(1)1}|^{(1)}_{(m)} \stackrel{def}{=} \frac{\partial\mathcal{T}^{(m)}_{(1)1}}{\partial y^m_1} + \mathcal{T}^{(r)}_{(1)1}C^{m(1)}_{r(m)} = \frac{\partial\mathcal{T}^{(m)}_{(1)1}}{\partial y^m_1},$$

$$\mathcal{T}^1_{i/1} \stackrel{def}{=} \frac{\delta\mathcal{T}^1_i}{\delta t} + \mathcal{T}^1_i\varkappa^1_{11} - \mathcal{T}^1_r G^r_{i1} = \frac{\delta\mathcal{T}^1_i}{\delta t} + \mathcal{T}^1_i\varkappa^1_{11},$$

$$\mathcal{T}^m_{i|m} \stackrel{def}{=} \frac{\delta\mathcal{T}^m_i}{\delta x^m} + \mathcal{T}^r_i L^m_{rm} - \mathcal{T}^m_r L^r_{im} = \frac{\varkappa^1_{11}}{2}\frac{\partial\mathcal{T}^m_i}{\partial y^m_1},$$

$$\mathcal{T}^{(m)}_{(1)i}|^{(1)}_{(m)} \stackrel{def}{=} \frac{\partial\mathcal{T}^{(m)}_{(1)i}}{\partial y^m_1} + \mathcal{T}^{(r)}_{(1)i}C^{m(1)}_{r(m)} - \mathcal{T}^{(m)}_{(1)r}C^{r(1)}_{i(m)} = \frac{\partial\mathcal{T}^{(m)}_{(1)i}}{\partial y^m_1},$$

$$\mathcal{T}^{1(1)}_{\ \ (i)/1} \stackrel{def}{=} \frac{\delta\mathcal{T}^{1(1)}_{\ \ (i)}}{\delta t} + 2\mathcal{T}^{1(1)}_{\ \ (i)}\varkappa^1_{11},$$

$$\mathcal{T}^{m(1)}_{\ \ (i)|m} \stackrel{def}{=} \frac{\delta\mathcal{T}^{m(1)}_{\ \ (i)}}{\delta x^m} + \mathcal{T}^{r(1)}_{\ \ (i)}L^m_{rm} - \mathcal{T}^{m(1)}_{\ \ (r)}L^r_{im} = \frac{\varkappa^1_{11}}{2}\frac{\partial\mathcal{T}^{m(1)}_{\ \ (i)}}{\partial y^m_1},$$

$$\mathcal{T}^{(m)(1)}_{(1)(i)}|^{(1)}_{(m)} \stackrel{def}{=} \frac{\partial\mathcal{T}^{(m)(1)}_{(1)(i)}}{\partial y^m_1} + \mathcal{T}^{(r)(1)}_{(1)(i)}C^{m(1)}_{r(m)} - \mathcal{T}^{(m)(1)}_{(1)(r)}C^{r(1)}_{i(m)} = \frac{\partial\mathcal{T}^{(m)(1)}_{(1)(i)}}{\partial y^m_1}.$$

Proof. The above conservation geometrical laws are provided by direct computations, using the relations (4.3) and (5.5). □

5.2 Electromagnetic-like geometrical model

In the paper [12], using only a given Lagrangian function $L(t,x,y)$ on the 1-jet space $J^1(\mathbb{R},M^n)$, an electromagnetic-like geometrical model was also created. In the background of our electromagnetic-like geometrical formalism from [12], we work with an *electromagnetic distinguished* 2*-form* (the Latin letters run from 1 to n)

$$\mathbb{F}=F^{(1)}_{(i)j}\delta y^i_1\wedge dx^j,$$

where

$$F^{(1)}_{(i)j}=\frac{h^{11}}{2}\left[g_{jm}N^{(m)}_{(1)i}-g_{im}N^{(m)}_{(1)j}+\left(g_{ir}L^r_{jm}-g_{jr}L^r_{im}\right)y^m_1\right].$$

The electromagnetic components $F^{(1)}_{(i)j}$ are characterized by the following *Maxwell geometrical equations* [12]:

$$\begin{aligned}F^{(1)}_{(i)j/1} &= \frac{1}{2}\mathcal{A}_{\{i,j\}}\Big\{\overline{D}^{(1)}_{(i)1|j}-D^{(1)}_{(i)m}G^m_{j1}+d^{(1)(1)}_{(i)(m)}R^{(m)}_{(1)1j}-\\ &\quad -\left[C^{p(1)}_{j(m)}R^{(m)}_{(1)1i}-G^p_{i1|j}\right]h^{11}g_{pq}y^q_1\Big\},\end{aligned}$$

$$\sum_{\{i,j,k\}}F^{(1)}_{(i)j|k}=-\frac{1}{4}\sum_{\{i,j,k\}}\frac{\partial^3L}{\partial y^i_1\partial y^p_1\partial y^m_1}\left[\frac{\delta N^{(m)}_{(1)j}}{\delta x^k}-\frac{\delta N^{(m)}_{(1)k}}{\delta x^j}\right]y^p_1,$$

$$\sum_{\{i,j,k\}}F^{(1)}_{(i)j}|^{(1)}_{(k)}=0,$$

where $\mathcal{A}_{\{i,j\}}$ means an alternate sum, $\sum_{\{i,j,k\}}$ means a cyclic sum and we have

$$\overline{D}^{(1)}_{(i)1}=\frac{h^{11}}{2}\frac{\delta g_{im}}{\delta t}y^m_1,\quad D^{(1)}_{(i)j}=h^{11}g_{ip}\left[-N^{(p)}_{(1)j}+L^p_{jm}y^m_1\right],$$

$$d^{(1)(1)}_{(i)(j)}=h^{11}\left[g_{ij}+g_{ip}C^{p(1)}_{m(j)}y^m_1\right],$$

$$\overline{D}^{(1)}_{(i)1|j}=\frac{\delta\overline{D}^{(1)}_{(i)1}}{\delta x^j}-\overline{D}^{(1)}_{(m)1}L^m_{ij},\quad G^k_{i1|j}=\frac{\delta G^k_{i1}}{\delta x^j}+G^m_{i1}L^k_{mj}-G^k_{m1}L^m_{ij},$$

$$F^{(1)}_{(i)j/1}=\frac{\delta F^{(1)}_{(i)j}}{\delta t}+F^{(1)}_{(i)j}\varkappa^1_{11}-F^{(1)}_{(m)j}G^m_{i1}-F^{(1)}_{(i)m}G^m_{j1},$$

$$F^{(1)}_{(i)j|k}=\frac{\delta F^{(1)}_{(i)j}}{\delta x^k}-F^{(1)}_{(m)j}L^m_{ik}-F^{(1)}_{(i)m}L^m_{jk},$$

$$F^{(1)}_{(i)j}|^{(1)}_{(k)}=\frac{\partial F^{(1)}_{(i)j}}{\partial y^k_1}-F^{(1)}_{(m)j}C^{m(1)}_{i(k)}-F^{(1)}_{(i)m}C^{m(1)}_{j(k)}.$$

Example 5.8. *The Lagrangian function that governs the movement law of a particle of mass $m\neq 0$ and electric charge e, which is displaced concomitantly into an environment endowed both with a gravitational field and an electromagnetic one, is given by*

$$L(t,x^k,y^k_1)=mch^{11}(t)\,\varphi_{ij}(x^k)\,y^i_1y^j_1+\frac{2e}{m}A^{(1)}_{(i)}(t,x^k)\,y^i_1+\mathcal{F}(t,x^k),\tag{5.9}$$

*where the semi-Riemannian metric $\varphi_{ij}(x)$ represents the **gravitational potential** of the space of events M, $A^{(1)}_{(i)}(t,x)$ are the components of a d-tensor on the* 1*-jet space $J^1(\mathbb{R},M)$ representing the **electromagnetic potential** and $\mathcal{F}(t,x)$ is a smooth **potential function** on the* *product manifold $\mathbb{R} \times M$. It is important to note that the jet Lagrangian function (5.9) is a natural extension of the Lagrangian (defined on the tangent bundle) used in electrodynamics by Miron and Anastasiei [8]. In our jet Lagrangian formalism applied to (5.9), the* ***electromagnetic components*** *are given by (see [12])*

$$F^{(1)}_{(i)j} = -\frac{e}{2m}\left(\frac{\partial A^{(1)}_{(i)}}{\partial x^j} - \frac{\partial A^{(1)}_{(j)}}{\partial x^i}\right),$$

and the second set of ***Maxwell geometrical equations*** *reduce to the classical ones [12]:*

$$\sum_{\{i,j,k\}} F^{(1)}_{(i)j|k} = 0,$$

where

$$F^{(1)}_{(i)j|k} = \frac{\partial F^{(1)}_{(i)j}}{\partial x^k} - F^{(1)}_{(m)j}\gamma^m_{ik} - F^{(1)}_{(i)m}\gamma^m_{jk}.$$

This fact suggests, in our opinion, some kind of naturalness attached to our electromagnetic-like geometrical theory.

On our particular 1-jet space $J^1(\mathbb{R}, M^3)$, the t-deformed Berwald-Moór metric (3.1) and the nonlinear connection (3.7) produce the electromagnetic 2-form

$$\mathbb{F} := \mathring{\mathbb{F}} = 0.$$

In conclusion, our t-deformed Berwald-Moór electromagnetic-like geometrical model on the 1-jet three-dimensional time is trivial. In other words, in our jet geometrical approach, the t-deformed Berwald-Moór electromagnetism (produced by (3.1) and (3.7)) leads us to null electromagnetic geometrical components and to tautological Maxwell-like equations. In our opinion, this fact suggests that the t-deformed Berwald-Moór geometrical structure of the 1-jet three-dimensional time contains rather gravitational connotations than electromagnetic ones. In such a perspective, it seems that we need to consider a similar geometrical study for x-dependent conformal deformations of the Berwald-Moór structure, agreeing thus with the recent geometric-physical ideas proposed by Garas'ko in [4].

Acknowledgements.

The authors of this paper express their gratefulness to the referee of Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics for his valuable comments and many useful suggestions.

References

[1] Asanov G.S. Finslerian Extension of General Relativity. Reidel, Dordrecht, 1984.

[2] Asanov G.S. Jet extension of Finslerian gauge approach // *Fortschritte der Physik*, 38, №8, 1990, pp. 571–610.

[3] Atanasiu Gh., Neagu M. On Cartan spaces with the *m-th root metric* $K(x,p) = \sqrt[m]{a^{i_1 i_2 \ldots i_m}(x) p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_m}}$ // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, №2 (12), Vol. 6, 2009, pp. 67–73.

[4] Garas'ko G.I. Foundations of Finsler Geometry for Physicists. Tetru Eds, Moscow, 2009 (in Russian).

[5] Garas'ko G.I., Pavlov D.G. The notions of distance and velocity modulus in the linear Finsler spaces, "Space-Time Structure. Algebra and Geometry" (D. G. Pavlov, Gh. Atanasiu, V. Balan Eds.), pp. 104-117; Russian Hypercomplex Society, Lilia Print, Moscow, 2007.

[6] Matsumoto M. On Finsler spaces with curvature tensors of some special forms // *Tensor N. S.*, 22, 1971, pp. 201–204.

[7] Matsumoto M., Shimada H. On Finsler spaces with 1-form metric. II. Berwald-Moór's metric $L = (y^1y^2...y^n)^{1/n}$ // *Tensor N. S*, 32, 1978, pp. 275–278.

[8] Miron R., Anastasiei M. The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers, 1994.

[9] Neagu M. A relativistic approach on 1-jet spaces of the rheonomic Berwald-Moór metric. http://arXiv.org/math.DG/1002.0241v1 (2010).

[10] Neagu M. Jet geometrical objects depending on a relativistic time // *An. Şt. Univ. "Al.I. Cuza" Iaşi (S.N.). Mat., Tomul **LVI***, f.2, 2010, pp. 407–428.

[11] Neagu M. Riemann-Lagrange Geometry on 1-Jet Spaces. Matrix Rom, Bucharest, 2005.

[12] Neagu M. The geometry of relativistic rheonomic Lagrange spaces // *BSG Proceedings*, 5, Geometry Balkan Press, Bucharest, 2001, pp. 142–168.

[13] Olver P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer-Verlag, 1986.

[14] Pavlov D.G. Chronometry of three-dimensional time // Hypercomplex N*umbers in Geometry and Physics*, №1(1), Vol. 1, 2004, pp. 19–30.

[15] Pavlov D.G. Four-dimensional time // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, №1(1), Vol. 1, 2004, pp. 31–39.

[16] Shimada H. On Finsler spaces with the metric $L(x, y) = \sqrt[m]{a_{i_1 i_2 ... i_m}(x) y^{i_1} y^{i_2} ... y^{i_m}}$ // *Tensor N. S.*, 33, 1979, pp. 365–372.

ЛОКАЛЬНАЯ РИМАНОВО-ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ СТРУЙ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ВРЕМЕНИ

Г. Атанасиу, М. Неагу

Университет "Трансильвания", Брасов, Румыния
gh_atanasiu@yahoo.com, mircea.neagu@unitbv.ro

Целью настоящей работы является развитие 1-стуйного пространства финслероподобной геометрии (в смысле отмеченной (d-) связности, d-кручения и d-кривизны) для реономной метрики Бервальда-Моора третьего порядка (т.е. времени-зависимых конформных деформаций обычных струй Бервальда-Моора или метрики третьего порядка). Также приведены некоторые естественные геометрические теории поля (гравитация и элетромагнетизм) следующие из этой реономной метрики Бервальда-Моора.

Ключевые слова: реономная метрика Бервальда-Моора третьего порядка, каноническая нелинейная связность, каноническая связность Картана, d-кручение и d-кривизна, геометрические уравнения Эйнштейна.
MSC(2000): 53C60, 53C80, 83C22.

EQUATIONS OF ELECTROMAGNETISM IN SOME SPECIAL ANISOTROPIC SPACES. PART 2

Nicoleta Voicu

Transilvania University, Brasov, Romania

nico.brinzei@unitbv.ro

By using variational calculus and exterior derivative formalism, we proposed in [1] a new geometric approach to electromagnetism in spaces with metrics obtained as small deformations of flat Finsler metrics. The ideas were extended to general Finsler spaces in [11].

In the present paper, we provide more details regarding generalized currents, the domain of integration and gauge invariance. Also, for flat Finsler spaces, we define the generalized energy-momentum tensor as the symmetrized Noether current corresponding to the invariance of the field Lagrangian with respect to spacetime translations.

Key Words: Finsler space, tangent bundle, electromagnetic tensor, electromagnetic potential, stress-energy-momentum tensor.

MSC(2010): 53B40, 53C60, 78A25, 78M30.

1 Introduction

In Finsler spaces, the metric tensor depends on the directional variables. Since Maxwell equations involve the metric tensor, their solutions basically also depend on these. Hence, the electromagnetic tensor (and the corresponding 4-potential) depend both on positional and on directional variables, meaning that they are no longer defined on the spacetime manifold M, but on its tangent bundle TM. The dependence of the 4-potential on the directional variables leads to new terms in the equations of motion of charged particles and in the expression of currents. In the picture on the whole TM, together with the usual Maxwell equations there appear new equations and a vertical counterpart of the usual 4-current (which provides the horizontal part of a vector field J on TM). By applying the classical procedure based on Noether's theorem, we also obtain a generalization of the notion of stress-energy tensor of the electromagnetic field. The obtained tensor consists of two blocks, one of which is similar to the usual energy-momentum tensor.

Our approach is based on variational calculus and classical methods in theoretical physics (adapted to the tangent bundle). Also, we used the language of differential forms, which is naturally related to variational calculus and offers the possibility of a concise and elegant writing of equations.

2 A brief overview of the Riemannian case

Let us consider as spacetime manifold, a pseudo-Riemannian manifold (M, g) of dimension 4 and denote local coordinates on M by $x = (x^i)_{i=\overline{0,3}}$. The first coordinate is regarded as the time coordinate and $(x^\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}$, as spatial coordinates. The metric $g = g(x)$ is supposed to have Lorentz signature $(-,+,+,+)$. Here are some other notations and conventions we will use in the following:

- Latin indices $i, j, k, ...$ take values from 0 to 3; Greek indices $\alpha, \beta, \gamma, ...$ take values from 1 to 3;

- $_{,k}$ – partial derivative with respect to $\dfrac{\partial}{\partial x^k}$;

- $_{|k}$ – Levi-Civita covariant derivative with respect to $\dfrac{\partial}{\partial x^k}$; $\gamma^i{}_{jk} = \gamma^i{}_{jk}(x)$ - Christoffel symbols of g;

- $g = \det(g_{ij})$; usually, it will be clear from the context whether we refer to g as the metric tensor or to the determinant of the corresponding matrix;
- $\flat : TM \to T^*M$, $\sharp : T^*M \to TM$ – musical isomorphisms (lowering indices of vector fields/raising indices of 1-forms);
- d - exterior derivative of differential forms;
- $d^4x = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, $\quad d^3x = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$;
- $d\Omega = \sqrt{|g|}d^4x$, $dV = \dfrac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{g_{00}}}d^3x$ – the invariant Riemannian volume element on spacetime and on the spatial manifold respectively.

2.1 Distances, volumes, divergence, codifferential

The (squared) arclength element $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ on the spacetime manifold M gives rise to a spatial arclength element, [3], defined as

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \qquad \gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}, \qquad \alpha, \beta = \overline{1,3}.$$

The determinant of the spacetime metric g is

$$g = -g_{00}\gamma;$$

we only consider reference frames for which $\gamma := \det(\gamma_{ij}) > 0$ and $g_{00} > 0$.

The divergence $div(V) = \dfrac{1}{\sqrt{|g|}}\left(V^i\sqrt{|g|}\right)_{,i}$ of a vector field is written in terms of covariant derivatives as

$$div(V) = V^i_{\ |i}.$$

The generalization of divergence, for differential forms, is the notion of codifferential.

The codifferential of a p-form $\xi = \dfrac{1}{p!}\xi_{i_1 i_2 \ldots i_p}dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ is the $(p-1)$–form given by $\langle \eta, \delta\xi \rangle = \langle d\eta, \xi \rangle$, where $\langle \ , \ \rangle$ denotes the inner product of p-forms[1]. For a 2-form, we have

$$(\delta\xi)^i = \xi^{ij}_{\ \ |j}.$$

2.2 4-potential and electromagnetic tensor

The 4-potential is described in classical general relativity as a 1-form on M :

$$A = A_i(x)dx^i. \tag{1}$$

The electromagnetic tensor (or *Faraday 2-form*) is described as the 2-form

$$F = dA. \tag{2}$$

In local coordinates, this is

$$F = \frac{1}{2}F_{jk}dx^j \wedge dx^k, \tag{3}$$

where

$$F_{jk} = A_{k|j} - A_{j|k}. \tag{4}$$

[1] The inner product of two p-forms $\theta = \frac{1}{p!}\theta_{i_1 \ldots i_p}e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$ and $\psi = \frac{1}{p!}\psi_{j_1 \ldots j_p}e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_p}$ is given by $< \theta, \psi >= \frac{1}{p!}\int g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_p j_p}\theta_{i_1 \ldots i_p}\psi_{j_1 \ldots j_p}d\Omega$, where the integral is taken on the whole manifold (assuming that the integrands have compact support).

In terms of differential forms, the *homogeneous Maxwell equations*

$$F_{ij|k} + F_{ki|j} + F_{jk|i} = 0. \tag{5}$$

become

$$dF = 0. \tag{6}$$

If we consider as a fundamental object the electromagnetic tensor F, then the homogeneous Maxwell equation $dF = 0$, implies (on a topologically "nice enough" manifold) the existence of a 1-form A, such that $F = dA$. Conversely, if one considers the potential 1-form A as a priori given and *define* F as its exterior differential, then homogeneous Maxwell equation is obtained as an identity. Actually, for a Lagrangian theory of electromagnetism, it is essential to have both a 1-form A and a 2-form F, related by (6).

An important property of the electromagnetic field is *gauge invariance*. Namely, the field strength tensor F is invariant to transformations

$$A \mapsto A + d\psi,$$

where $\psi : M \to \mathbb{R}$ is a differentiable function.

2.3 Lagrangian, equations of motion and inhomogeneous Maxwell equations

The total action attached to the field and to a system of particles is

$$S = \underbrace{-\sum mc \int ds}_{S_p} - \underbrace{\sum \frac{q}{c} \int A_k(x) dx^k}_{S_{int}} - \underbrace{\frac{1}{16\pi c} \int F_{ij} F^{ij} d\Omega}_{S_f}, \tag{7}$$

where m denotes the mass of a particle, q, its charge, c, the speed of light in vacuum and the sums are taken over the particles in the system. The volume integral is taken over a bounded interval of time and over the whole spatial manifold, under the assumption that far away from sources, the field vanishes. Thus, we can actually think the integral as taken over a "large enough" compact domain in M.

Inhomogeneous Maxwell equations are obtained by varying the electromagnetic potential A in the action S (actually, in $S_{int} + S_f$, since S_p does not depend on A). To this aim, one writes $S_{int} + S_f$ as a single volume integral, by means of the notion of charge density ρ.

The integral of ρ over a certain spatial volume provides the total charge situated inside that region:

$$q = \int \rho dV, \tag{8}$$

By using relation (8), S_{int} is written as

$$S_{int} = -\frac{1}{c} \int A_i J^i d\Omega,$$

where

$$J^i := \frac{\rho c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^i}{dx^0} \tag{9}$$

define the *4-current* vector field J. Thus, the sum $S_1 := S_{int} + S_f$ becomes

$$S_1 = -\int \left(\frac{1}{c} A_i J^i + \frac{1}{16\pi c} F_{ij} F^{ij} \right) \sqrt{|g|} d^4 x.$$

The *inhomogeneous Maxwell equations* are obtained as

$$F^{ij}{}_{|j} = -\frac{4\pi}{c} J^i, \tag{10}$$

which is, actually,

$$(\delta F)^\sharp = -\frac{4\pi}{c} J. \tag{11}$$

The 4-current J identically satisfies the *continuity equation:*

$$div(J) = 0. \tag{12}$$

From a physical point of view, the continuity equation is equivalent to the charge conservation law.

The trajectory of a particle subject to a (fixed) electromagnetic field is determined by varying the action S with respect to the trajectory. That is, we actually have to vary the action $S_2 := S_p + S_{int}$ (written for a single particle). Since the integral S_2 does not depend on the choice of the parameter on the path of integration, we can choose this parameter according to our wish. Choosing the arclength s as a parameter, we have

$$S_2 = -\int \left(mc\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} + A_i\dot{x}^i \right) ds. \tag{13}$$

The Euler-Lagrange equations for the above Lagrangian are

$$\frac{D\dot{x}^i}{ds} = \frac{q}{c} F^i{}_j \dot{x}^j, \qquad\qquad i = \overline{0,3}, \tag{14}$$

where $\dfrac{D\dot{x}^i}{ds} = \dfrac{d\dot{x}^i}{ds} + \gamma^i{}_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k$. The right hand sides of the above equations provide the expression of the Lorentz force.

2.4 Energy-momentum tensor

In the Minkowski space $(\mathbb{R}^4, \eta)$ $\big(\eta = diag(-1, +1, +1, +1)\big)$ of special relativity, it makes sense to speak about spacetime translations

$$x \mapsto x + a \qquad (a \text{ - constant 4-vector}).$$

Lagrangians in (7) are all invariant with respect to these translations. According to Noether's theorem, the invariance of an action

$$S = \frac{1}{c}\int \Lambda\left(q_{(l)}, \frac{\partial q_{(l)}}{\partial x^i} \right) d\Omega,$$

(for a closed system) to translations implies that the quantities $\tilde{T}^k_i = q_{(l),i}\dfrac{\partial \Lambda}{\partial q_{(l),k}} - \delta^k_i \Lambda$ are conserved ($div\tilde{T} = 0$). They define a tensor of rank two (the *Noether current* attached to the Lagrangian). The Noether current is generally not symmetric. It can be symmetrized by adding a certain divergence term[2].

The *energy-momentum tensor of the electromagnetic field* in flat space is defined, [3], as the symmetrized Noether current T given by the invariance of the action S_f to spacetime translations.

[2]We assume, as usually, that on the boundary of the integration domain, the involved functions vanish, hence adding divergence terms does not affect the action

For electromagnetism, we have $q_{(k)} = A_{(k)}$ and $\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{ij}F^{ij}$. One gets the energy-momentum tensor:

$$T^l{}_i = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{lk}F_{ik} + \frac{1}{4}\delta^l_i F_{jk}F^{jk}\right). \tag{15}$$

In vacuum (where $J = 0$), the divergence of T vanishes. In the presence of charged matter, by using Maxwell equations, it is proven that the energy-momentum tensor satisfies the identities:

$$T^j{}_{i,j} = -\frac{1}{c} F_{ij}J^j, \tag{16}$$

i.e.:

$$div(T) = -\frac{1}{c} i_J F. \tag{17}$$

The quantity $\frac{1}{c} i_J F$ is called the *density of Lorentz force* and the above relation expresses the conservation of the total energy and momentum of the system.

Conclusion. In a geometric language, the above fundamental equations of electromagnetic field theory can be written briefly as:

- $F = dA$.
- $dF = 0$, $(\delta F)^\sharp = -\frac{4\pi}{c} J$ – Maxwell equations;
- $div(J) = 0$ – continuity equation;
- $div(T) = -\frac{1}{c} i_J F$ – energy-momentum conservation.

3 Finsler spaces with weak metrics

Let, now, $M = \mathbb{R}^4$ be regarded as spacetime manifold. We denote by $(x^i, y^i)_{i=\overline{0,3}}$ the coordinates in a local chart on the tangent bundle TM; the base coordinates x^i play the role of positional variables and the fiber ones y^i, the role of directional variables. We preserve the notations in the previous section, with the only difference that instead of Levi-Civita covariant derivatives, we will use another covariant derivation law. Also, we denote partial derivation with respect to y^i by a dot: $_{\cdot i}$.

Let us suppose that on M we have a Finslerian fundamental function[3] $\mathcal{F} : TM \to \mathbb{R}$ and the corresponding metric tensor:

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}^2}{\partial y^i \partial y^j}.$$

In the following, we suppose that:

- the metric tensor g_{ij} has $(-, +, +, +)$ signature. Actually, it would be rigorous to call the space in this case, a pseudo-Finslerian one. Still, since a lot of authors already use the term "Finsler" for spaces whose metric is not necessarily positive definite, we will adopt this simpler terminology.

- the metric tensor is obtained by a small perturbation of a locally Minkowski metric $\eta_{ij} = \eta_{ij}(y)$:

$$g_{ij} = \eta_{ij}(y) + \varepsilon_{ij}(x, y),$$

(where quadratic terms in ε_{ij} and its derivatives vanish);

[3]We use the notation $\mathcal{F}$ in calligraphic fonts in order to avoid confusion with the electromagnetic 2-form F.

- coordinate changes $(x^i) \longmapsto (x^{i'})$ are such that in any of the considered coordinate systems, η_{ij} do not depend on x (for instance, if $\eta_{ij} = diag(-1,1,1,1)$ is the Minkowski metric of classical special relativity, Lorentz transformations have this property). Thus, in the traditional Finsler-Lagrange geometry approach, we can choose as nonlinear connection the trivial one $N^i{}_j = 0$.

The element of arc length along a curve $t \mapsto x(t)$ is $ds = \mathcal{F}\left(x, \dfrac{dx}{dt}\right)dt$. The spatial metric tensor is defined similarly to the pseudo-Riemannian case: $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \dfrac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}$, $\alpha, \beta \in \{1,2,3\}$ and its determinant is $\det(\gamma_{\alpha\beta}) = \dfrac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{g_{00}}}$.

The natural basis on TM is $\left(\partial_i := \dfrac{\partial}{\partial x^i}, \quad \partial_{\bar{\imath}} := \dfrac{\partial}{\partial y^{\bar{\imath}}}\right)$ and its dual basis is $(dx^i, dy^{\bar{\imath}})$. In the following, whenever needed to make a clear distinction, we will denote by $i, j, k, ...$ indices corresponding to base coordinates x^i and by $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}, ...$ indices corresponding to fiber ones $y^{\bar{\imath}}$[4]. By capital letters $A, B, C, ...$ we denote indices which run over all values: $A, B, C, ... \in \{i, j, k, ..., \bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}, ...\}$

In order to speak about volumes, divergence and codifferential for objects defined on TM, we need a metric structure on the total space of TM. Hence, we complete g up to metric (an *hv-metric,* [4]) on TM :

$$G_{AB}(x,y) = g_{ij}(x,y)dx^i \otimes dx^j + v_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}dy^{\bar{\imath}} \otimes dy^{\bar{\jmath}}. \tag{18}$$

where v is the Euclidean metric[5]. Thus, (TM, G) becomes a pseudo-Riemannian space and we can speak about the Riemannian (invariant) volume element on TM :

$$d\Omega = \sqrt{|G|}d^4x \wedge d^4y.$$

where $G = \det(G_{AB})$. We have, obviously: $G = g \cdot v$, where $g = \det(g_{ij})$, $\quad v = \det(v_{\bar{\imath}\bar{\jmath}})$.

The volume element $d\Omega$ defines a volume element $d\Omega_M$ on M by:

$$d\Omega_M = \sigma(x)d^4x, \qquad \sigma(x) = \int\limits_{D_x} \sqrt{|G|}d^4x \wedge d^4y,$$

where $D_x = \{y \in T_xM \mid v_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}y^{\bar{\imath}}y^{\bar{\jmath}} \leq r^2\}$ and $r = \sqrt[4]{2/\pi^2}$ is chosen such that the 3-sphere of radius r in the 4-dimensional Euclidean space has the volume equal to 1, [13]. This volume element generalizes the idea of Holmes-Thompson volume in [9][6]. Integration over y intuitively means "scanning" all the directions which fill a certain neighborhood (a Euclidean sphere) around a point x of spacetime. For a function $f = f(x)$ on M, its integral on a domain $\Delta \subset M$ is

$$\int\limits_{\Delta} f(x)d\Omega_M = \int\limits_{\Delta} f(x)\left(\int\limits_{D_x} \sqrt{|G|}d^4y\right)d^4x = \int f(x)d\Omega.$$

We assume that far away from sources, the field is negligible and the considered time interval is a bounded one; thus, we can consider integrals of a "large enough" compact domain in TM.

[4]Still, since vectors $y \in T_xM$ can be regarded both as tangent vectors $y \sim dx$ to the base manifold and as elements of the fiber, depending on the context, we will use both notations y^i and $y^{\bar{\imath}}$ for their coordinates.

[5]For instance, the manifold topology of Minkowski spacetime is the Euclidean one, hence, in this case, the metric v describes the topological properties of spacetime.

[6]The classical idea of Holmes-Thompson volume involves integration with respect to y on the indicatrix $I_x = \{y \in T_xM \mid g_{ij}y^iy^j = 1\}$. If the Finsler metric g is not positive definite, as in our case, the indicatrix I_x is generally non-compact, hence this classical idea cannot be applied as such. Choosing as vertical part v a positive definite one and integrating on balls given by the metric v solves this problem.

It is convenient to express the results in terms of the following covariant derivation law D:

$$D_{\partial_k}\partial_j = \gamma^i{}_{jk}\partial_i,\quad D_{\partial_k}\partial_{\bar{j}} = 0,\quad D_{\partial_{\bar{k}}}\partial_j = 0,\quad D_{\partial_{\bar{k}}}\partial_{\bar{j}} = 0. \tag{19}$$

where $\gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}g^{ih}(g_{hj,k} + g_{hk,j} - g_{jk,h})$ are the Christoffel symbols of $g = g(x,y)$. For the components of a vector field $X = X^i\partial_i + X^{\bar{\imath}}\partial_{\bar{\imath}}$ on TM, we will have:

$$X^j{}_{|i} = X^j{}_{,i} + \gamma^j{}_{hi}X^h,\quad X^j{}_{\cdot\bar{\imath}} = \frac{\partial X^j}{\partial y^{\bar{\imath}}},\quad X^{\bar{j}}{}_{|i} = X^{\bar{j}}{}_{,i},\quad X^{\bar{j}}{}_{\cdot\bar{\imath}} = \frac{\partial X^{\bar{j}}}{\partial y^{\bar{\imath}}}$$

(where ${}_{|i}$ denotes covariant derivation by ∂_i and ${}_{\cdot i}$ means covariant derivation by $\partial_{\bar{\imath}}$). This linear connection is h-metrical, i.e., $g_{ij|k} = 0$, $v_{\bar{\imath}\bar{j}|k} = 0$. Another important notion for a Finsler space is the *Cartan tensor* C given by

$$C^i{}_{j\bar{k}} = \frac{1}{2}g^{ih}g_{hj\cdot\bar{k}}.$$

There hold the relations: $\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\ln\sqrt{|g|}\right) = \gamma^i{}_{ji}$ and $\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\ln\sqrt{|g|}\right) = C^i{}_{ji}$, hence the divergence of a vector field $V = V^i\partial_i + V^{\bar{\imath}}\partial_{\bar{\imath}}$ on TM can be written as:

$$div(V) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left[\left(V^i\sqrt{|g|}\right)_{,i} + \left(V^{\bar{\imath}}\sqrt{|g|}\right)_{\cdot\bar{\imath}}\right] = V^i{}_{|i} + V^{\bar{\imath}}{}_{\cdot\bar{\imath}} + V^{\bar{\imath}}C^h{}_{h\bar{\imath}}. \tag{20}$$

The codifferential $\delta\xi$ of a 2-form $\delta\xi = \omega_i dx^i + \omega_{\bar{\imath}}dy^{\bar{\imath}}$ is locally given by

$$(\delta\xi)^i = \xi^{ij}{}_{|j} + \xi^{i\bar{j}}{}_{\cdot\bar{j}} + \xi^{i\bar{j}}C^l{}_{l\bar{j}},\qquad (\delta\xi)^{\bar{\imath}} = \xi^{\bar{\imath}j}{}_{|j} + \xi^{\bar{\imath}\bar{j}}{}_{\cdot\bar{j}} + \xi^{\bar{\imath}\bar{j}}C^l{}_{l\bar{j}}.$$

4 Faraday 2-form, homogeneous Maxwell equations

As shown in [1], since the inhomogeneous Maxwell equations involve the metric tensor g, in the case when $g_{ij} = g_{ij}(x,y)$, their solutions would generally depend on y. Thus, we will consider the following 1-form on TM :

$$A = A_i(x,y)dx^i. \tag{21}$$

The only restriction we will impose to A is that

$$A_i(x,\lambda y) = A_i(x,y),$$

i.e., we will allow A to depend on the direction of y, but not on its magnitude[7].

In [1], we defined the generalized Faraday 2-form (the electromagnetic tensor) as:

$$F = dA; \tag{22}$$

in local coordinates, this is

$$F := \frac{1}{2}F_{ij}dx^i \wedge dx^j + F_{i\bar{j}}dx^i \wedge dy^{\bar{j}}, \tag{23}$$

where

$$F_{ij} = A_{j|i} - A_{i|j},\quad F_{i\bar{j}} = -A_{i\cdot\bar{j}}. \tag{24}$$

[7] In [1] and [11], we imposed a supplementary restriction, namely, that $A_{i\cdot k}y^i = 0$. Here, this condition will be treated as a "gauge" and not as a part of the definition.

In particular, if $A = A(x)$ does not depend on the directional variables, we get $F = \frac{1}{2}(A_{j|i} - A_{i|j})dx^i \wedge dx^j$.

The electromagnetic tensor F remains invariant under transformations

$$A(x,y) \mapsto A(x,y) + d\lambda(x), \tag{25}$$

where $\lambda : M \to \mathbb{R}$ is a scalar function, since $d(A + d\lambda) = dA + d(d\lambda) = dA$.

If F is defined as above, then $dF = ddA = 0$. In other words, we get as an identity the generalized *homogeneous Maxwell equation*:

$$dF = 0. \tag{26}$$

In local coordinates, equation (26) is read as:

$$F_{ij|k} + F_{ki|j} + F_{jk|i} = 0; \quad F_{\bar{\imath}j|k} + F_{k\bar{\imath}|j} + F_{jk\cdot\bar{\imath}} = 0, \quad F_{k\bar{\imath}\cdot\bar{j}} + F_{\bar{j}k\cdot\bar{\imath}} = 0.$$

The first set in the above is the analogue of the usual homogeneous Maxwell equations. The two other sets appear due to the y-dependence of A.

In the above, we have started from A as an *a priori* given object and defined F as its exterior derivative. Conversely, if we suppose that F is a 2-form as in (23), satisfying $dF = 0$, then there exists, [11], a horizontal form $A = A_i(x,y)dx^i$ such that $F = dA$.

5 Inhomogeneous Maxwell equations

The second term of the total action becomes

$$S_{int} = -\sum \frac{q}{c} \int A_i(x,\dot{x})dx^i.$$

Since A_i are functions on TM, it is natural to transform this integral into an integral on a domain in TM. This can be achieved by writing total charge as an integral:

$$q = \int \frac{\rho(x)}{\sqrt{g_{00}}} \sqrt{G} d^3x \wedge d^4y.$$

With the notation

$$J^i = \frac{\rho c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^i}{dx^0}, \tag{27}$$

the integral $\int A_k dx^k$ is written as a volume integral, in a similar way to the Riemannian case (just, here, the integral is on a domain in TM):

$$-\frac{q}{c} \int A_k dx^k = -\frac{1}{c} \int A_i J^i d\Omega. \tag{28}$$

By varying with respect to the potential A the action

$$S_1 = -\frac{1}{c} \int \Big(A_i J^i + \frac{1}{16\pi} F_{AB} F^{AB} \Big) d\Omega. \tag{29}$$

we obtained, [1, 11]:

$$F^{ij}{}_{|j} + F^{i\bar{j}}{}_{\cdot\bar{j}} + F^{i\bar{j}} C^h{}_{h\bar{j}} = -\frac{4\pi}{c} J^i. \tag{30}$$

Notes: 1) In the integral above, in order to make sure that the expression has physical sense, we might need to adjust measurement units so as to have $[F_{ij}] = [F_{i\bar{j}}]$. This can be done by considering the fiber coordinates $y^{\bar{\imath}}$ as having the same measurement units as the base ones (eventually, by multiplying them by a constant, [11]).

2) We notice a certain resemblance between the term $F^{i\bar{j}}{}_{\cdot\bar{j}} + F^{i\bar{j}}C^{h}{}_{h\bar{j}} = \left(F^{i\bar{j}}\sqrt{|g|}\right)_{\cdot\bar{j}}$ and the idea of bound current in a material medium.

Equations (30) gave the idea to formally generalize the *inhomogeneous Maxwell equation* as

$$(\delta F)^{\sharp} = -\frac{4\pi}{c}J. \tag{31}$$

In local coordinates, this is:

$$\begin{aligned} F^{ij}{}_{|j} + F^{i\bar{j}}{}_{\cdot\bar{j}} + F^{i\bar{j}}C^{l}{}_{l\bar{j}} &= -\frac{4\pi}{c}J^{i}, \\ F^{\bar{\imath}j}{}_{|j} &= -\frac{4\pi}{c}J^{\bar{\imath}}, \end{aligned} \tag{32}$$

We notice, in comparison to the equations in [1], the appearance of an extra set of equations and of the quantities $J^{\bar{\imath}}$ which are "coupled" on TM to the usual components of the 4-current J^{i}. Thus, we obtained a vector field

$$J = J^{i}\partial_{i} + J^{\bar{\imath}}\partial_{\bar{\imath}}$$

on TM, whose horizontal component $J^{i}\partial_{i}$ is the usual 4-current (plus the correction due to anisotropy). In the following, we will see that the new component $J^{\bar{\imath}}\partial_{\bar{\imath}}$ plays an important role in the continuity equation and in the Finslerian analogue of energy-momentum conservation law.

Remark. In particular, if $A_i = A_i(x)$, then $J^{\bar{\imath}} = 0$.

6 Continuity equation and gauge invariance

Above, we have seen that

$$-\frac{4\pi}{c}J_{\flat} = \delta F. \tag{33}$$

It immediately follows: $-\frac{4\pi}{c}\delta J_{\flat} = \delta\delta F = 0$[8], which is, $div(J) = 0$. In other words:

Proposition 1. *There identically holds the generalized continuity equation:*

$$div(J) = 0. \tag{34}$$

The invariance of the electromagnetic tensor F to transformations $A(x,y) \mapsto \tilde{A}(x,y) := A(x,y) + d\lambda(x)$ of the 4-potential implies the invariance of the first term S_p and the third one S_f in the general action (7). The continuity equation (34) insures that $\tilde{S}_{int} = -\int \tilde{A}_i J^i d\Omega$ equals S_{int} plus a boundary term. Hence, these transformations do not affect the action (7).

7 Equations of motion of charged particles

Equations of motion of charged particles are obtained by varying the trajectory $x = x(t)$ in the first two terms of (7):

$$S_2 = -\int \left(mc\sqrt{g_{ij}(x,\dot{x})\dot{x}^i\dot{x}^j} + \frac{q}{c}A_k(x,\dot{x})\dot{x}^k\right)dt. \tag{35}$$

[8]We have used the identity $\delta\delta\omega = 0$.

The condition $A(x, \lambda y) = A(x, y)$ insures that the action S_2 is invariant under eventual changes of parameter $t \mapsto t'$ of the curve, hence we are free to choose this parameter.

A further restriction can be imposed on the y-dependence of A in order to make the approach more elegant and provide a simple expression for the equations of motion of charged particles[9].

In *isotropic* (pseudo-Riemannian) spaces, if we assume that $A = A(x)$, then there exists only one potential providing a given interaction Lagrangian $L_{int} = A_i(x)y^i$. But in anisotropic spaces, where $A_i = A_i(x, y)$, a given Lagrangian $L_{int} = A_i(x, y)y^i$ can be given by infinitely many functions $A_i = A_i(x, y)$. Thus, to a Lagrangian L_{int}, it corresponds a whole equivalence class of potentials A. It appears as convenient to choose from each class the representative for which

$$A_{k \cdot i} y^k = 0. \tag{36}$$

We will call this condition upon A, the *gradient gauge.* The gradient gauge is equivalent to the condition: $A_i = \dfrac{\partial (A_k y^k)}{\partial y^i}$.

Under the above assumption, the Euler-Lagrange equations attached to S_2 (interpreted as equations of motion of charged particles in Finsler spaces) are:

$$mc\frac{Dy^i}{ds} = \frac{q}{c}F^i{}_j y^j + \frac{q}{c}F^i{}_{\bar{j}}\frac{dy^{\bar{j}}}{ds}, \quad y^i = \frac{dx^i}{ds}, \tag{37}$$

where $\dfrac{Dy^i}{ds} = \dfrac{dy^i}{ds} + \gamma^i{}_{jk} y^j y^k$.

The first term in the right hand side of (37) is similar to the usual one in pseudo-Riemannian spaces, while the second one $\tilde{F}^i = \dfrac{q}{c}F^i{}_{\bar{j}}\dfrac{dy^{\bar{j}}}{ds}$ appears due to the dependence of A (and actually, of the tensor g_{ij}) on the variable y. Both the "traditional" Lorentz force term and the correction $\tilde{F}^i\partial_i$ are orthogonal to the velocity 4-vector $y = \dot{x}$:

$$g_{ij}F^i y^j = 0, \quad g_{ij}\tilde{F}^i y^j = 0. \tag{38}$$

8 Generalized stress-energy-momentum tensor

Let us suppose that $g_{ij} = \eta_{ij}(y)$. Spacetime translations $\bar{x}^i = x^i + \varepsilon^i$, $i = \overline{0, 3}$ induce the following transformation on TM :

$$\bar{x}^i = x^i + \varepsilon^i, \quad \bar{y}^i = y^i. \tag{39}$$

We will call *generalized energy-momentum tensor on* TM, the symmetrized Noether current given by the invariance to transformations (39) of the action S_F.

By Noether's theorem, we get a tensor consisting of two blocks:

$$T = T_{ij} dx^i \otimes dx^j + T_{i\bar{j}} dx^i \otimes dx^{\bar{j}}$$

where:

$$T^l{}_i = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{lB}F_{iB} + \frac{1}{4}\delta^l_i F_{BC}F^{BC}\right); \tag{40}$$

$$T^{\bar{l}}{}_i = -\frac{1}{4\pi}F^{\bar{l}k}F_{ik}. \tag{41}$$

The horizontal component $T_{ij}dx^i \otimes dx^j$ is the the usual energy-momentum tensor (plus some correction due to anisotropy), while the mixed one $T_{i\bar{j}}dx^i \otimes dy^{\bar{j}}$ is new.

[9] In [1], this restriction was taken as part of the definition of the potential.

By using Maxwell equations, we get:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\Big(T^j{}_i\sqrt{|g|}\Big)+\frac{\partial}{\partial y^{\bar{j}}}\Big(T^{\bar{j}}{}_i\sqrt{|g|}\Big)\right]=-\frac{1}{c}\Big(F_{ij}J^j+F_{i\bar{j}}J^{\bar{j}}\Big). \tag{42}$$

9 Conclusion

For 4-dimensional pseudo-Finsler spaces $(M,\mathcal{F})$ with metrics obtained as small deformations of locally Minkowskian metrics, we have extended several usual notions of electromagnetic field theory.

The 4-potential is defined as a horizontal 1-form $A = A_i(x,y)dx^i$ on the tangent bundle TM, having its components A_i homogeneous of degree 0 in y. The generalized electromagnetic tensor is the 2-form $F = dA$. Maxwell equations on TM are then written as:

$$dF = 0, \quad (\delta F)^\sharp = -\frac{4\pi}{c}J.$$

The TM-current $J = J^i\partial_i + J^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}}$ is a vector field on TM, satisfying identically $div\ J = 0$. Its horizontal component $J^i\partial_i$ provides the usual 4-current (plus a correction term due to the y-dependence of A), while the vertical one $J^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}}$ is new.

Further, the generalized energy-momentum tensor in flat Finsler spaces is defined as the symmetrized Noether current corresponding to invariance to spacetime translations of the field Lagrangian. We obtained

$$T = T_{ij}dx^i\otimes dx^j + T_{i\bar{j}}dx^i\otimes dy^{\bar{j}}, \tag{43}$$

$$T_{\ iA} = \frac{1}{4\pi}\Big(-F_A{}^BF_{iB}+\frac{1}{4}\delta^l_AF_{BC}F^{BC}\Big), \tag{44}$$

(where δ^l_j is the Kronecker delta and $\delta^l_{\bar{j}} = 0$). This tensor satisfies the identities:

$$div(T) = -\frac{1}{c}\Big(F_{ij}J^j + F_{i\bar{j}}J^{\bar{j}}\Big).$$

This approach offers an alternative to the existing one by R. Miron and collaborators, [5, 6, 4].

Acknowledgment

The work was supported by the Sectorial Operational Program Human Resources Development (SOP HRD), financed from the European Social Fund and by Romanian Government, Project number POSDRU/89/1.5/S/59323.

The author wishes to express her gratitude to professors S. Siparov, G. Munteanu and M. Neagu for useful talks.

References

[1] Brinzei (Voicu) N., Siparov S. Equations of electromagnetism in some special anisotropic spaces // *arXiv*:0812.1513v1 [gr-qc], 08 Dec. 2008.

[2] Bao D., Chern S.S., Shen Z. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry. (Graduate Texts in Mathematics; 200), Springer Verlag, 2000.

[3] Landau L.D., Lifschiz E.M. Field Theory. 8th ed., Fizmatlit, Moscow, 2006.

[4] Miron R., Anastasiei M. The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and Applications. Kluwer Acad. Publ. FTPH no. 59, 1994.

[5] Miron R., Rosca R., Anastasiei M., Buchner K. New aspects in Lagrangian relativity // *Found. of Phys. Lett.*, 2, 5, 1992, pp.141-171.

[6] Miron R., Radivoiovici-Tatoiu M. A Lagrangian theory of electromagnetism // Seminarul de Mecanica, Timisoara, 1988, pp. 1-55.

[7] Miron R. The geometry of Ingarden spaces // *Rep. on Math. Phys.*, 54(2), 2004, pp. 131-147.

[8] Siparov S. On the interpretation of the classical GRT tests and cosmological constant in anisotropic geometrodynamics // *arXiv*: 0910.3408, 2009.

[9] Shen Z. Lectures on Finsler Geometry. World Scientific, 2001.

[10] Udriste C., Balan V. Differential operators and convexity on vector bundles, endowed with (h; v)-metrics // *An. st. Univ. "AL.I. Cuza"*, Sect I, Vol.43, no.1, 1997, pp. 37-50.

[11] Voicu N., Siparov S. A new approach to electromagnetism in anisotropic spaces // *BSG Proc.*, 17, 2010, pp. 250-260.

[12] Voicu N., On the fundamental equations of electromagnetism in Finslerian spacetimes. to appear.

[13] Voicu N. A generalization of Holmes-Thompson volume for pseudo-Finsler spaces. Preprint.

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА В НЕКОТОРЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. ЧАСТЬ 2

Николета Войку

Трансильванский университет, Брашов, Румыния
nico.brinzei@unitbv.ro

Используя формализм вариационного исчисления и внешней производной, мы предложили в [1] новый геометрический подход к электромагнетизму в пространствах с метрикой, полученной в результате малых деформаций плоской финслеровой метрики. Эти идеи были распространены на финслеровы пространства общего вида в [11].

В настоящей работе мы рассматриваем более детально вопросы связанные с обобщенными токами, областью интегрирования и калибровочной инвариантностью. Также для плоских финслеровых пространств мы определяем обобщенный тензор энергии-импульса как симметризованный ток соответствующий инвариантности лагранжиана поля по отношению к трансляциям пространства-времени.

Ключевые слова: Финслерово пространство, касательное расслоение, электромагнитный тензор, электромагнитный потенциал, тензор энергии-импульса.

ГАЛИЛЕЕВО НИЛЬПОТЕНТНОЕ ПРОСТРАНСТВО РАЗМЕРНОСТИ 3 С 2-МЕРНЫМ ВРЕМЕНЕМ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА.

А.И. Долгарев, И.А. Долгарев

Пензенский Государственный Университет, Пенза, Россия

delivar@yandex.ru

Исследованы кривые и поверхности. Определена кривизна кривой, кручением кривые не обладают. Доказана определяемость кривой функцией ее кривизны. Рассмотрены временные и пространственно-временные поверхности, определены их первая и вторая квадратичные формы, полная кривизна. Доказана определяемость поверхности коэффициентами их квадратичных форм.

Ключевые слова: нильпотентное галилеево пространство, 2-мерное время, кривизна кривой, определяемость кривой, временная поверхность, пространственно-временная поверхность, квадратичные формы поверхности, полная кривизна поверхности, определяемость поверхности.

Код УДК: 514.

Галилеево нильпотентное пространство размерности 3 с 2-мерным временем определено в [1], где обсуждены некоторые принципиальные вопросы. Настоящая работа является непосредственным продолжением [1], рассматривает геометрию этого пространства, которая является некоммутативной.

Свойства галилеева пространства-времени можно изучать в схеме Г. Вейля. Во многом эти свойства зависят от свойств алгебраической структуры, положенной в основу пространства. Рассматривается отображение пар точек пространства в галилеево векторное пространство, а также в более общую структуру – одуль Ли, [2, 3]. Выделяется пространство-время Галилея с 1-мерным временем, рассматриваемое как прямая сумма оси времени и евклидова пространства, [4, с.11-14]; все остальные пространства с галилеевым расстоянием между точками называются галилеевыми. Сюда относятся и пространства с некоммутативной геометрией, вызывающие все больший интерес. Значение галилеевой геометрии состоит в том, что она изучает локальные свойства окружающего нас пространства, неразрывно связанного со временем. Время многомерно, но еще не ясны подходы к изучению пространств с многомерным временем. Некоторые возможности дают некоммутативные структуры, в которых взаимосвязаны временные и пространственные компоненты. В [5,6] изучается некоммутативная галилеева геометрия 3-мерного пространства-времени с растраном, в котором время 2-мерно. Ниже рассмотрены геометрические свойства галилеева нильпотентного пространства размерности 3 с 2-мерным временем, определенного в [1]: введена кривизна линий, доказана основная теорема теории кривых. Изучаются временные и пространственно-временные поверхности, определены их квадратичные формы, полная кривизна поверхности, доказана основная теорема теории поверхностей.

Пространство с многомерным временем и 1-мерной пространственной компонентой есть пространство туннелей во времени.

1 Галилеево пространство с сибсоном с 2-мерным временем

1.1 Сибсон

Сибсон размерности 3 определен в [3] на многообразии $\mathbf{R}^3$ троек действительных чисел следующими операциями:

$$(x, y, z) + (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c + ay); \tag{1}$$

$$t(x, y, z) = \left(xt, yt, zt + xy\frac{(t-1)t}{2}\right), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Операция сложения некоммутативна, нулевой является тройка $\vartheta = (0, 0, 0)$, противоположной для тройки $\sigma = (x, y, z)$ является тройка $-\sigma = -(x, y, z) = (-x, -y, -z + xy)$. Множество $(\mathbf{R}^3, +)$ с операцией сложения (1) является группой Ли, группа нильпотентна ступени 2. Операция (2) умножения $\omega_R(+)$ элементов группы $(\mathbf{R}^3, +)$ на действительные числа связана с операцией сложения свойствами

$$(t + s)\sigma = t\sigma + s\sigma, \quad s(t\sigma) = (st)\sigma, \quad 0\sigma = \vartheta, \quad 1\sigma = \sigma,$$

$$(-1)\sigma = -\sigma, \quad t(-\rho + \sigma + \rho) = -\rho + t\sigma + \rho.$$

Структура $\Sigma^3 = (\mathbf{R}^3, +, \omega_R(+))$ с операциями (1) и (2) является действительным одулем Ли – одулем Ли над полем $\mathbf{R}$. Нильпотентный одуль называется сибсоном, элементы сибсона называются сибсами. Одули над кольцом $\mathbf{K}$ на произвольной алгебраической структуре с внутренней бинарной операцией определены Л.В. Сабининым в [7], одули Ли рассмотрены в [3].

В Σ^3 обозначим: $\alpha = (1, 0, 0)$, $\beta = (0, 1, 0)$, $\gamma = (0, 0, 1)$. Для произвольного сибса справедливо однозначное разложение

$$\sigma = (x, y, z) = x\alpha + y\beta + z\gamma. \tag{3}$$

поэтому множество $\mathbf{Б} = (\alpha, \beta, \gamma)$ есть базис сибсона Σ^3 и сибсон Σ^3 является 3-мерным. Имеем коммутатор: $[\beta, \alpha] = -\beta - \alpha + \beta + \alpha = \gamma$. У сибсона Σ^3 два порождающих элемента α и β. Выполняется равенство:

$$(x, y, 0) + (a, b, 0) = (x + a, y + b, ay), \tag{4}$$

третья компонента сибсов порождается первыми двумя, сибсы α и β порождают подсибсон $< \alpha, \beta >$, совпадающий со всем сибсоном Σ^3.

1.2 Галилеева норма на сибсоне

Для сибсов в [3, с. 119-121] определено галилеево скалярное произведение и галилеева норма сибсов, в [1] указано два вида норм сибсов. Приведем здесь норму сибсов, согласно которой получается сибсон Σ^3_2 с 2-мерным временем; по [1] квадрат $\|\sigma\|^2_2$ нормы сибса $\sigma = (x, y, z)$ равен

$\|\sigma\|^2_2 = xy$, если $x \neq 0$ или $y \neq 0$; $\quad \|\sigma\|^2_2 = z^2$, если $x = y = 0$.

Первые две компоненты сибсов считаются временными, третья компонента считается пространственной. Сибсы вида $(x, y, z), xy \neq 0$, называются галилеевыми, сибсы вида $(0, 0, z)$ называются евклидовыми. Всякий галилеев сибс перпендикулярен всякому евклидову сибсу. Евклидовы сибсы составляют 1-мерное евклидово пространство $\mathbf{V}^1$; галилеевы сибсы составляют временное многообразие $\mathbf{T}^2$, оно не замкнуто относительно операций на сибсоне Σ^3_2, т.е. не является алгебраической структурой, см. (4). Как отмечено в [1], 3-мерный сибсон Σ^3_2 с 2-мерным временем является неразделимой алгебраической структурой времени и пространства, причем временные компоненты порождают пространственную компоненту, (4).

Норма сибса σ есть корень квадратный из квадрата нормы:

$$\|\sigma\| = \sqrt{xy}, x \neq 0 \vee y \neq 0; \quad \|\sigma\| = |z|, x = y = 0. \tag{5}$$

Это финслерова норма на сибсоне.

Всякий сибс является суммой двух составляющих – временной и пространственной. Если для $\sigma = (x, y, z)$ обозначить, согласно (3):

$$x\alpha + y\beta = \tau, z\gamma = \vec{r},$$

то имеется однозначное разложение

$$\sigma = \tau + \vec{r}, \tau \in \mathbf{T}^2, \vec{r} \in \mathbf{V}^1, \tag{6}$$

здесь $\vec{r} = (0, 0, z)$ есть 1-мерный евклидов вектор; применение векторной символики оправдано.

1.3 Дифференцирование сибсонных функций

Отображение интервала $\mathbf{I}$, принадлежащего $\mathbf{R}$, в сибсон Σ^3 называется сибсонной функцией; обозначение сибсонных функций:

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in \mathbf{I}.$$

Покомпонентные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, являющиеся действительными функциями действительного аргумента, считаем их дифференцируемыми. В [3, с. 123 - 125] найдена производная сибсонной функции одного параметра. В вычислениях использовано следующее положение: предел сибсонной функции в точке есть кортеж пределов в этой точке компонент функции. Использованы операции (1) и (2) над сибсами. Норма сибсов не фиксируется. Следовательно, формулы дифференцирования и правила дифференцирования сибсонных функций сохраняют свой вид при различных нормах на сибсоне. Формула дифференцирования функции $\sigma(t)$ согласно [3, с. 124] такова:

$$\sigma'(t) = \left(x'(t), y'(t), z'(t)\left(\frac{1}{2}y'(t) - y(t)\right)\right). \tag{7}$$

В частности, если функции $x(t), y(t)$ постоянны, то

$$(C, y(t), z(t))' = (0, y'(t), z'(t)); (x(t), C, z(t))' = (x'(t), 0, z'(t) - Cx'(t)). \tag{8}$$

В (7) первая и вторая компоненты являются производными соответствующих компонент дифференцируемой функции $\sigma(t)$; третья компонента зависит от производных всех трех компонент исходной функции $\sigma(t)$. Как результат дифференцирования сибсонной функции в третьей компоненте, который обозначается ${}^{d}z$, имеем равенство:

$${}^{d}z = z'(t)\left(\frac{1}{2}y'(t) - y(t)\right). \tag{9}$$

Векторная (пространственная) составляющая сибса производной $\sigma'(t)$, в соответствии с (6), зависит от временных составляющих и, согласно (9), такова:

$${}^{d}\vec{r} = (0, 0, {}^{d}z) = \left(0, 0, z'(t)\left(\frac{1}{2}y'(t) - y(t)\right)\right). \tag{10}$$

Отображение области $\mathbf{D}$, содержащейся в $\mathbf{R}^2$, в сибсон Σ^3, есть сибсонная функция двух параметров

$$\sigma(t, v) = (x(t, v), y(t, v), z(t, v)), (t, v) \in \mathbf{D}.$$

Покомпонентные функции $x(t, v), y(t, v), z(t, v)$ считаем дифференцируемыми. Частные производные сибсонной функции $\sigma(t, v)$ отыскиваются по правилу (7). Смешанные производные второго порядка зависят от порядка дифференцирования: $\sigma_{tv} \neq \sigma_{vt}$.

1.4 Зависимость между компонентами сибса

В 3-мерном сибсоне Σ^3 имеется три независимых направления, которые определяются сибсами α, β, γ, п. 1.1. Всякий сибс σ однозначно разлагается по этим напрвлениям, см. (3); в разложении определяется компонента сибса в каждом направлении. Как показывает (4), между компонентами разложения есть зависимость, но направления α, β, γ независимы. Сравним разложение сибсов с разложением векторов из евклидова пространства $\mathbf{V}^3$ по базису $\mathbf{Б} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) : \vec{v} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Направления, определяемые векторами базиса, независимы, а компоненты x, y, z вектора $\vec{v}$ могут быть связаны некоторыми соотношениями. Например, возможно: $\vec{v} = (x, 0, x^2) = x\vec{i} + 0\vec{j} + x^2\vec{k}$. Приведенное разложение указывает на то, что вектор $\vec{v}$ не имеет компоненты в направлении вектора $\vec{j}$, а первая и третья компоненты вектора связаны соотношением $z = x^2$. Точно также и в сибсоне Σ^3_2 зависимости между временными направлениями α и β не существует, но между временными компонентами t^1, t^2 в разложении $\sigma = t^1\alpha + t^2\beta + x\gamma$ зависимость может быть, например, $t^2 = f(t^1)$, а может и не быть. Для события $(t^1, 1, x)$ в направлении β время зафиксировано значением 1, а в направлении α время течет равномерно. Сибс (kt^1, mt^2, x) при постоянных $k \neq m$ указывает, что скорости течения времени в направлениях α и β различны и постоянны. Скорости изменения времени могут быть изменяющимися, например, в событии $\sigma(t^1, t^2) = (u(t^1, t^2), v(t^1, t^2), x(t^1, t^2))$ и пространственная компонента зависит от временных параметров. В задании события $(t^1, t^2, x(t^1, t^2))$ указывается, что время в каждой из временных компонент течет равномерно и одинаково, а пространственная компонента функционально зависит от обеих временных компонент.

Согласно (5), длительность события $(0, 2, x)$ равна нулю, длительность событий $(1, 1, x), (\frac{1}{2}, 2, x)$ равна единице, длительность события (t^1, t^2, x) равна $\sqrt{t^1t^2}$ и возрастает с изменением времени, а время течет вперед – в будущее; событие (0,0,2) длительности не имеет, протяженность его равна 2.

1.5 Пространства с сибсоном

Пусть $\mathbf{W}$ непустое множество, его элементы называются точками и обозначаются $A, B, \ldots$. Задав отображение $\mathbf{W} \times \mathbf{W} \longrightarrow \Sigma^3$, в котором каждой паре (A, B) соответствует единственный сибс σ, что записывается в виде $\sigma = AB$, и удовлетворяются аксиомы Г. Вейля, [2]:

1^o для всякой точки A и всякого сибса σ существует единственная точка B, что $AB = \sigma$;

2^o для любых трех точек A, B, C, если $AB = \sigma, BC = \tau$, то $AC = \sigma + \tau$;

получаем одулярное пространство с сибсоном, называемое ЛС-пространством, [3]. Для трех точек A, B, C имеем: $AB + BC + AC, BA = -AB, AA = \vartheta$.

Пространство с сибсоном является нильпотентным, его геометрия некоммутативна, [3]. Размерность сибсона есть размерность ЛС-пространства. Если $\mathbf{B} = (O, \alpha, \beta, \gamma)$ репер ЛС-пространства, $O \in \mathbf{W}$ – начало отсчета, и $\sigma = (x, y, z)$ в базисе $\mathbf{Б} = (\alpha, \beta, \gamma)$ сибсона, то координаты сибса $OM = \sigma$ в базисе $\mathbf{Б}$ называются координатами точки M в репере $\mathbf{B}$.

Вводя в сибсоне Σ^3 галилееву норму сибсов, получаем нильпотентное одулярное галилеево пространство-время с некоммутативной геометрией. Если норма сибсов есть (5), т.е. $\Sigma^3 = \Sigma^3_2$, то ЛС-пространство превращается в ФС-пространство, [1], далее обозначаем его $\mathbf{S}^3$. Точки пространства-времени $\mathbf{S}^3$ называются еще событиями, т.е. $\mathbf{S}^3$ есть пространство событий с 2-мерным временем.

Прямой линией в ЛС-пространстве, см. [3], определяемой точкой A и ненулевым сибсом σ, называется множество точек

$$< A, \sigma >= \{M | AM = v\sigma, v \in \mathbf{R}\}.$$

Плоскостью в ЛС-пространстве, определяемой точкой точкой A и независимыми сибсами σ, τ, называется множество точек

$$< A, \sigma, \tau >= \{M | AM = v\sigma + u\tau, (v, u) \in \mathbf{R}^2\},$$

при этом требуется $< \sigma, \tau > \neq \Sigma^3$; сибсы σ и τ независимы, если $\tau \notin < \sigma >$. Не всякие два независимых сибса определяют в ЛС-пространстве плоскость, например, сибсы α и β репера $\mathbf{B}$ плоскости не определяют, т.к. $< \alpha, \beta >= \Sigma^3$. Если $\sigma = AB, \tau = AC$, то плоскость $< A, \sigma, \tau >$ определяется тремя неколлинеарными точками: $< A, \sigma, \tau >= (A, B, C)$. Не через всякие три неколлинеарные точки в ЛС-пространстве проходит плоскость. Прямые и плоскости ЛС-пространства являются соответственно прямыми и плоскостями ФС-пространства.

Координатные оси $< O, \alpha >$ и $< O, \beta >$ являются временными, это изотропные прямые; координатная ось $< O, \gamma >$ – пространственная. Через всякую точку A ФС-пространства проходит единственная пространственная прямая, т.е. прямая с евклидовыми расстояниями между точками, см. (5). Всякая временная прямая $< A, \sigma >$, $\sigma = v\alpha + u\beta + w\gamma, v \neq 0, u \neq 0$, неизотропна, т.к. $\| \sigma \|= \sqrt{vu} \neq 0$.

Не существует координатной плоскости с сибсами α, β. Координатные плоскости $< O, \alpha, \gamma >$ и $< O, \beta, \gamma >$ обладают пространственными неизотропными прямыми, остальные прямые изотропны. ФС-пространство не содержит евклидовых плоскостей, т.к. сибсон Σ^3_2 содержит только 1-мерное евклидово подпространство $\mathbf{V}^1 =< \gamma >$, п, 1.2. Существуют плоскости $< A, \sigma, \gamma >$, где $\sigma = (v, v, w), v \neq 0$. Действительно, всякий сибс из оболочки $< \sigma, \gamma >$ имеет вид $s\sigma + g\gamma = \left(vs, vs, ws + v^2\dfrac{(s-1)s}{2} + g\right)$, сибсы этого вида не исчерпывают сибсон, их первые две компоненты одинаковы. Плоскости $< A, \sigma, \gamma >$ галилеевы и $\sigma + \gamma = \gamma + \sigma$. Норма сибса σ равна $\| \sigma \|= |v|$. В репере (A, σ, γ) плоскости точка M плоскости имеет координаты $M = \left(s, ws + v^2\dfrac{(s-1)s}{2} + g\right)$. При $s \neq 0 :\| OM \|= |sv|$, при $s = 0 :\| OM \|= |g|$. Расстояние от начала отсчета вычисляется так же, как в классической плоскости Галилея. Существуют и другие галилеевы плоскости ФС-пространства.

Для произвольных точек $A(a^1, a^2, a)$ и $B(b^1, b^2, b)$ имеем сибс

$$AB = (b^1 - a^1, b^2 - a^2, b - a - (b^1 - a^1)a^2),$$

см. [1] и [3]; компоненты сибса AB вычисляются по (1) с использованием противоположного сибса, п. 1.1; $AB = -OA + OB$. Если $b^1 \neq a^1$ $b^2 \neq a^2$, то, по (4), длительность $\| AB \|$ события AB равна

$$d =\| AB \|= \sqrt{(b^1 - a^1)(b^2 - a^2)}$$

и существует, т.е. действительная, или не существует, т.е. мнимая, в зависимости от знака произведения $(b^1 - a^1)(b^2 - a^2)$; расстояние между событиями A и B, или протяженность события AB, равна

$$d =\| AB \|= |b - a|,$$

она существует при $b^1 = a^1$ и $b^2 = a^2$, это расстояние между событиями, одновременными в каждой временной компоненте.

Если $A(a^1, a^2, a), \sigma = (r^1, r^2, r)$, то прямая $< A, \sigma >$ описывается сибсонной функцией

$$\sigma(v) = \left(r^1 v + a^1, r^2 v + a^2, tv + r^1 r^2\frac{(v-1)v}{2} + r^1 a^2 v + a\right), v \in \mathbf{R};$$

плоскость $< A, \sigma, \gamma >$ описывается сибсонной функцией

$$\sigma(v,u) = \left(r^1 v + a^1, r^2 v + a^2, tv + r^1 r^2 \frac{(v-1)v}{2} + r^1 a^2 v + u + a\right), \quad (v,u) \in \mathbf{R}^2;$$

см. [3, с. 166, 167]. При $r^1 r^2 \neq 0$ прямая $< A, \sigma >$ описывается степенной функцией 2-го порядка. Это галилеев цикл. Функция 1-го порядка описывает изотропную прямую ФС-пространства.

2 Кривые ФС-пространства

2.1 Естественная параметризация кривой

Кривую ФС-пространства $\mathbf{S}^3$ определяем как отображение $\mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{S}^3, \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$; описывается кривая сибсонной функцией

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \ t \in \mathbf{I}.$$

Считаем, что функции $x(t), y(t), z(t)$ не менее двух раз дифференцируемы, т.е. существуют производные $\sigma'(t), \sigma''(t)$, таким образом, $\sigma(t)$ есть функция класса C^2. Считаем еще, что $\sigma'(t) \neq \vartheta$ и сибс не изотропный.

Кривая $\sigma(t)$ является регулярной класса C^2 все ее точки обыкновенные.

Для кривых пространства с сибсоном Σ^3_1 с 1-мерным временем в [3, с. 123] установлено, что положение касательной к кривой не зависит от ее параметризации. Производная сибсонной функции не зависит от нормы сибсов, как отмечено выше, в п. 1.3, поэтому и положение касательной к кривой ФС-пространства не зависит от ее параметризации.

Кривые принято изучать в естественной параметризации; это такая параметризация, в которой одуляр (в частности вектор) касательной имеет единичную, т.е. постоянную норму, а его производная ему перпендикулярна. Кривизна кривой определяется как норма одуляра главной нормали кривой, полученной в результате дифференцирования одуляра касательной. Для кривых галилеевых пространств важно, чтобы одуляр главной нормали был евклидовым, так как кривизна кривой является пространственным а не временным понятием. В соответствии с указанными соображениями, кривую в ФС-пространстве рассматриваем в параметризации, удовлетворяющей следующим условиям.

1^o. Сибс $\sigma(t)$, описывающий кривую, дифференцируем не менее двух раз.

2^o. Сибс производной первого порядка $\sigma'(t)$ обладает постоянной нормой и ненулевой.

3^o. Сибс производной второго порядка $\sigma''(t)$ является евклидовым и поэтому перпендикулярен сибсу производной первого порядка.

Перечисленным условиям удовлетворяют кривые в параметризации

$$\sigma(t) = (pt + a, \ qt + b, x(t)), \quad t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}; \ pq \neq 0, \ p, \ q, \ a, \ b = const. \tag{11}$$

Такая параметризация кривой называется естественной. Производные обозначаем: $\dot{\sigma}, \dot{x}, \ddot{\sigma}, \ddot{x}$.

2.2 Кривизна кривой

Согласно формуле (7) дифференцирования сибсонных функций, имеем сибс касательной к кривой (11):

$$\dot{\sigma}(t) = \left(p, q, \dot{x}(t) + pq\left(\frac{1}{2} - t\right)\right). \tag{12}$$

Сибс $\dot{\sigma}$ определяет направление касательной к кривой, через всякую точку во всяком направлении в ФС-пространстве проходит кривая в естественной параметризации. Норма сибса первой производной постоянна и отлична от нуля:

$$\|\dot{\sigma}\| = \sqrt{pq}.$$

Норма является действительной или мнимой. Сибс $\dot{\sigma}$ определен в каждой точке регулярной кривой (11), тем самым вдоль кривой осуществляется касательное отображение в сибсон Σ_2^3.

Дифференцируем (12) по формуле (7). Сибс второй производной является евклидовым:

$$\ddot{\sigma}(t) = (0, 0, \ddot{x} - pq). \tag{13}$$

Согласно п. 1.2, евклидов сибс перпендикулярен всякому галиллеву сибсу, т.е.

$$\ddot{\sigma}(t) \perp \dot{\sigma}(t)$$

и сибс $\ddot{\sigma}(t)$ евклидов, т.е. это вектор нормали кривой (11); других нормалей кривая не имеет. Единичным вектором нормали кривой (11) является

$$\vec{n} = \gamma = (0, 0, 1). \tag{14}$$

По (9), (13) и (12) имеем пространственные составляющие сибсов производных

$$^{d}x = \dot{x}(t) + pq\left(\frac{1}{2} - t\right) - pb, \quad ^{dd}x = \ddot{x}(t) - pq. \tag{15}$$

А если функция (11) представлена в виде разложения (6) – т.е. в виде суммы временной и пространственной составляющих:

$$\sigma(t) = \tau(t) + \vec{r}(t), \tag{16}$$

то имеем векторы

$$^{d}\vec{r} = \left(0, 0, \dot{x}(t) + pq\left(\frac{1}{2} - t\right) - pb\right), \quad ^{dd}\vec{r} = (0, 0, \ddot{x} - pq). \tag{17}$$

В результате норма сибса второй производной записывается в виде модуля скалярного произведения векторов

$$\|\ddot{\sigma}\| = |\ddot{\sigma}\vec{n}| = |\ddot{x} - pq|. \tag{18}$$

Величина

$$\|\ddot{\sigma}\| = |\ddot{x} - pq| > 0 \tag{19}$$

называется *кривизной* кривой (11). Вектор $\ddot{\sigma}(t)$ есть *вектор кривизны* кривой (11). Установлена

Лемма. *Кривизна кривой (11) равна модулю скалярного произведения вектора кривизны кривой и единичного вектора ее нормали.* #

Функция

$$^{dd}x = \ddot{x} - pq = k(t) \tag{20}$$

называется *функцией кривизны* кривой (11). И сибсонная функция (13) тоже называется функцией кривизны кривой (11). Согласно (14),

$$\ddot{\sigma}(t) = (\ddot{x} - pq)\vec{n} = (\ddot{x} - pq)\gamma = k(t)\gamma. \tag{21}$$

Выполняется следующее

Свойство. *Модуль вектора кривизны $\ddot{\sigma}(t)$ является разностью функции второй производной пространственной составляющей кривой (11) и квадрата нормы сибса $\dot{\sigma}(t)$ касательной кривой (11) в естественной параметризации.*

См. (18).#

Пространственные составляющие сибсов производных (15) и вторая производная (17) векторной составляющей кривой (11) позволяют использовать скалярное произведение (21) евклидовых векторов из сибсона Σ_2^3. Этим мы воспользуемся ниже при изучении поверхностей.

Кручение кривой в галилеевых пространствах, см. [3], вводится при дифференцировании вектора кривизны, в результате дифференцирования получается вектор бинормали, перпендикулярный вектору главной нормали. В сибсоне ФС-пространства Σ_2^3 векторная составляющая 1-мерна, п. 1.2, поэтому кривые ФС-пространства *не обладают кручением.*

Для примера найдем кривизну прямой ФС-пространства. Параметрическое задание прямой указано в п. 1.5. Это задание линии в естественной параметризации, пространственная составляющая такова:

$$x(v) = tv + r^1 r^2 \frac{(v-1)v}{2} + r^1 a^2 v + a,$$

здесь $p = r^1, q = r^2$, параметр обозначен через v. Имеем согласно (9):

$$^d x = r + r^1 r^2 v - \frac{1}{2} r^1 r^2 + r^1 a^2 + t^1 \left(\frac{1}{2} r^2 - r^2 v - a^2 \right) = r,$$

таким образом,

$$\dot{\sigma}(v) = (r^1, r^2, r), \ddot{\sigma} = (0,0,0) = \vartheta, \|\ddot{\sigma}\| = k = 0.$$

и кривизна прямой линии равна нулю.

2.3 Натуральное уравнение кривой

По функции (16) кривизны кривой (11) может быть получена сибсонная функция (11), описывающая кривую. Функция $x(t)$ пространственной составляющей сибсонной функции (11) является решением обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x} = k(t) + pq,$$

полученного по (20) при условии, что функция кривизны $k(t)$ задана и задано направление $(p\alpha, q\beta, 0)$ временной составляющей линии (11).

Рассмотрим случай, когда $k(t) = 0$, числа p и q заданы. Здесь $\ddot{x} = pq; \dot{x} = pqt + C_1$, $x = \frac{1}{2} pqt^2 + C_1 t + C_2$. Линия, определяемая рассматриваемыми условиями, описывается в естественной параметризации функцией вида

$$\sigma(t) = (t^1(t), t^2(t), x(t)) = \left(pt + a, qt + b,\ \frac{1}{2} pqt^2 + C_1 t + C_2 \right).$$

Следующие начальные условия

$$t_0 = 0, t_0^1 = pt_0 + a, t_0^2 = qt_0 + b, x_0 = c, \dot{t}_0^1 = a, \dot{t}_0^2 = b, \dot{x}_0 = r$$

во множестве функций $\sigma(t, C_1, C_2)$ выделяют функцию со значениями $C_2 = c, C_1 = r$:

$$\sigma(t) = \left(pt + a, qt + b, rt + pq\frac{(t-1)t}{2} + pbt + c\right).$$

Действительно, по формуле производной (7) и по пространственной составляющей первой производной (9) имеем $\dot{t}^1 = p, \dot{t}^2 = q, \dot{x} = r$. Сибс касательной к линии $\sigma(t)$ есть $\dot{\sigma}(t_0) = (p, q, r)$. Рассматриваемая линия является прямой $< P, \dot{\sigma}(t_0) >$, где $P = P(t_0) = (a, b, c)$.

Мы получили, что всякая линия ФС-пространства, кривизна которой равна нулю, есть прямая линия.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Заданные ненулевые числа p, q и функция кривизны $k = k(t)$ однозначно определяют в ФС-пространстве кривую*

$$\sigma(t) = (pt + a, qt + b, x(t)),$$

пространственная составляющая которой $x(t)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\ddot{x} = k(t) + pq, \tag{22}$$

начальные условия

$$t_0 = 0, t_0^1 = pt_0 + a, t_0^2 = qt_0 + b, x_0 = s, \dot{t}_0^1 = a, \dot{t}_0^2 = b, \dot{x}_0 = r$$

выделяют единственную кривую, проходящую через точку $\sigma(t_0) = (pt_0 + a, qt_0 + b, s)$ в направлении сибса касательной $\dot{\sigma}(t_0) = (p, q, r)$.

\# Как уже отмечено в начале настоящего п. 2.3, обыкновенное дифференциальное уравнение (22) получено по функции кривизны (20), его решение есть функция $x(t)$ – пространственная составляющая кривой $\sigma(t)$. Временные составляющие сибсов $\sigma(t)$ и $\dot{\sigma}(t)$ заданы начальными условиями. Функция $x(t)$ отыскивается в результате двукратного интегрирования выражения $k(t) + pq$. Его значение при $t = t_0$ есть заданная величина s. Кривая $\sigma(t)$ проходит через заданную точку. Находя значение выражения $k(t) + pq$ после его однократного дифференцирования при $t = t_0$ имеем значение r и определяется сибс касательной. #

По доказанной теореме, функция кривизны $k = k(t)$ однозначно определяет кривую ФС-пространства с точностью до положения в ФС-пространстве. Поэтому $k = k(t)$ является *натуральным уравнением* кривой ФС-пространства. Теорема об определяемости кривой ее функцией кривизны является основной теоремой теории кривых.

3 Поверхности ФС-пространства $\mathbf{S}^3$

3.1 Виды поверхностей

Поверхность описывается сибсонной функцией двух параметров. В ФС-пространстве имеется две возможности: (а) оба параметра функции временные, (б) один из параметров временной, другой пространственный. Поверхность первого вида называем *временной*, поверхность второго вида называем *пространственно-временной*.

Случай (а). *Временные поверхности*. Временные параметры обозначаем t, v. Поверхность задается функцией

$$\sigma(t, v) = (t, v, x(t, v)), (t, v) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^2. \tag{23}$$

Координатную сеть на поверхности образуют t-линии и v-линии:

$$\sigma(t, v_0) = (t, v_0, x(t, v_0)),\ \ \sigma(t_0, v) = (t_0, v, x(t_0, v)).$$

Одна из временных компонент может быть функцией другой, обе эти возможности принципиально не различаются. Пусть $v = v(t)$. Имеется линия на поверхности

$$\sigma(t) = \sigma(t, v(t)) = (t, v(t), x(t, v(t))).$$

Пространственную компоненту $x(t, v)$ считаем не менее двух раз дифференцируемой. Мы рассматриваем линии в естественной параметризации, поэтому $v(t) = qt + b$, см. (11) в п. 2.1. Таким образом, через всякую точку поверхности (23) во всяком направлении $q = \frac{dv}{dt}$ на поверхности проходит линия

$$\sigma(t) = \sigma(t, v(t)) = (t, v(t), x(t, v(t))), v(t) = qt + b. \tag{24}$$

Вдоль рассматриваемых линий на поверхности (23) осуществляется касательное отображение, определяющее сибсы производных:

$$\sigma_t = (1, 0, x_t(t, v) - v),\ \ \sigma_v = (0, 1, x_v(t, v)), \tag{25}$$

см. (8). Сибсы частных производных σ_t, σ_v не коллинеарны. Поверхность (23) регулярна, всякая ее точка является обыкновенной. Оболочка $< \sigma_t, \sigma_v >$ содержит все базисные сибсы α, β, γ сибсона Σ_2^3 и совпадает с Σ_2^3. Это означает, что во всякой своей обыкновенной точке регулярная поверхность не обладает касательной плоскостью.

Вдоль линии (24) поверхности (23) сибс касательной, вычисляемый согласно (7), таков:

$$\dot\sigma(t) = \left(1, \frac{dv}{dt}, x_t + x_v\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dv}{dt} - v(t)\right). \tag{26}$$

Случай (б). *Пространственно-временные поверхности.* Временной параметр обозначаем t, пространственный – u. Имеем поверхность

$$\sigma(t, u) = (t, v(t), x(t, u)), (t, u) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^2. \tag{27}$$

Выше, в п. 1.1, отмечено, что пространственная составляющая сибсов зависит от времени, см. (4); время от пространственной составляющей не зависит. Поэтому в (27) вторая компонента есть только функция времени.

По соображениям, рассмотренным выше в настоящем п. 3.1, в (27):

$$v(t) = qt + b.$$

На поверхности имеется сеть t-линий и u-линий:

$$\sigma(t, u_0) = (t, v(t), x(t, u_0)),\ \ \sigma(t_0, u) = (t_0, v(t_0), x(t_0, u)).$$

В направлении $\bar q = \dfrac{du}{dt}$ на поверхности проходит линия

$$\sigma(t) = \sigma(t, u(t)) = (t, qt + b, x(t, u)). \tag{28}$$

Сибсы частных производных, согласно (7) и (8), таковы:

$$\sigma_t = \left(1, q, x_t + q\left(\frac{1}{2} - t\right) - b\right),\ \ \sigma_u = (0, 0, x_u) = x_u\gamma. \tag{29}$$

Они независимы. В каждой точке поверхности существует касательная плоскость $< \sigma_t, \gamma >$. Сибс касательной к (28) есть

$$\dot\sigma(t) = \left(1, \frac{dv}{dt}, x_u\frac{du}{dt} + q\left(\frac{1}{2} - t\right)\right) = \left(1, q, x_u\bar q + q\left(\frac{1}{2} - t\right)\right). \tag{30}$$

3.2 Первая квадратичная форма поверхности

Эта квадратичная форма определяет норму сибсов касательных к линиям поверхности.

Временные поверхности. Временные компоненты изменяются, поэтому вдоль всех линий на поверхности касательные сибсы являются галилеевыми и первая квадратичная форма поверхности есть

$$ {}^{t}ds^2 = qdt^2. \tag{31}$$

Верхний левый индекс t означает, что равенство относится к временным поверхностям.

Пространственно-временные поверхности. Сибс σ_u евклидов, (29), т.е. вектор; судя по (29) и (30), это единственный вектор, т.е. евклидов сибс касательной к линиям на поверхности в каждой ее точке; остальные сибсы касательных галилеевы. Первая квадратичная форма поверхности есть

$$ {}^{u}ds^2 = qdt^2 \vee^{u} ds^2 = x_u^2 du^2. \tag{32}$$

Первое равенство применяется в случае, если время изменяется, второе – в случае постоянного времени. Верхний левый индекс u означает, что равенство относится к пространственно-временным поверхностям. По аналогии с коэффициентом первой квадратичной формы поверхности пространства-времени Галилея Γ^3, [3, с. 73], обозначаем

$$ x_u^2 = E. \tag{33}$$

3.3 Вторая квадратичная форма поверхности. Кривизна поверхности

Кривизну поверхности, как принято, находим на основе кривизны линий на поверхности. Кривизна линий является и нормальной кривизной линий на поверхности, так как нормалью поверхностей (23) и (28) является пространственная прямая ФС-пространства, единичный вектор нормали есть $\vec{n} = \gamma$. Используем методы галилеевой геометрии [3].

На поверхности фиксируем точку $P(t_0, v_0)$ или $P(t_0, u_0)$ и рассматриваем линии (24), соответственно (28), проходящие на поверхности во всевозможных направлениях q, соответственно $\bar{q}$.

Временная поверхность. Вычислим кривизну линии (24) поверхности (23), основываясь на п. 2.2. Находим вторую производную $\ddot{\sigma}$, используя первую производную (26):

$$\ddot{\sigma} = \left(0, 0, x_{tt} + x_{tv}\frac{dv}{dt} + x_{tv}\frac{dv}{dt} + x_{vv}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + x_v\frac{d^2v}{dt^2} - q\right);$$

или в другой форме записи, учитывая, что $q = \dfrac{dv}{dt}$:

$$\ddot{\sigma} = \left(0, 0, x_{tt} + 2\left(x_{tv} - \frac{1}{2}\right)\frac{dv}{dt} + x_{vv}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + x_v\frac{d^2v}{dt^2}\right).$$

По лемме, п. 2.2, кривизну линии можно получить, вычислив скалярное произведение векторов $\ddot{\sigma}$ и $\vec{n} = \gamma$:

$$\ddot{\sigma}\vec{n} = x_{tt} + 2\left(x_{tv} - \frac{1}{2}\right)\frac{dv}{dt} + x_{vv}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + x_v\frac{d^2v}{dt^2}. \tag{34}$$

В полученном выражении выделим составляющую, позволяющую получить квадратичную форму. В фиксированной точке поверхности, через которую проходят всевозможные линии (24), коэффициенты скалярного произведения векторов $\ddot{\sigma}\vec{n}$ постоянны, изменяется направление $q = \dfrac{dv}{dt}$ линии. Нормальную кривизну линий на поверхности считаем равной

$$^{t}k_n = x_{tt} + 2\left(x_{tv} - \frac{1}{2}\right)\frac{dv}{dt} + x_{vv}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2,$$

вводим обозначения коэффициентов (по аналогии с обозначениями в [3]):

$$x_{vv} = A, x_{tv} - \frac{1}{2} = B, x_{tt} = C; \tag{35}$$

(здесь пространственная компонента вектора $\gamma = \vec{n}$ равна 1 и поэтому $A = x_{vv} \cdot 1 = x_{vv}$ и т.д.) во введенных обозначениях нормальная кривизна линий на поверхности (23) равна

$$^{t}k_n = Aq^2 + 2Bq + C, \quad q = \frac{dv}{dt}, \tag{36}$$

как в галилеевых пространствах, см. формулу (12.12) в [3, с. 74] и далее. Левая часть равенства для кривизны может быть записана в виде

$$\frac{Adv^2 + 2Bdvdt + Cdt^2}{dt^2},$$

числитель этой дроби принимаем за *вторую квадратичную форму* временной поверхности (23):

$$^{t}II = Adv^2 + 2Bdvdt + Cdt^2 \tag{37}$$

с коэффициентами (35).

Для поверхности пространства-времени Галилея в [3, с. 81] получено, что ее полная кривизна равна определителю второй квадратичной формы. По аналогии с этим считаем, что в ФС-пространстве полная кривизна поверхности (23) равна

$$^{t}K = AC - B^2. \tag{38}$$

Для пространственно-временной поверхности (28) имеем $v(t) = qt$ и

$$\sigma_t = \left(1, q, x_t + x_u\frac{du}{dt} + \frac{1}{2}q - qt\right), \quad \sigma_u = (0, 0, x_u) = x_u\gamma.$$

В направлении $\bar{q} = \dfrac{du}{dt}$ проходит линия

$$\sigma(t) = \sigma(t, u(t)) = (t, qt, x(t, u(t)).$$

Сибс касательной к этой линии есть

$$\dot{\sigma} = \left(1, q, x_t + x_u\frac{du}{dt} + q\left(\frac{1}{2} - t\right)\right).$$

Тогда

$$\ddot{\sigma} = \left(0, 0, x_{tt} + x_{tu}\frac{du}{dt} + x_{ut}\frac{du}{dt} + x_{uu}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + x_u\frac{d^2u}{dt^2} - q\right),$$

$$\ddot{\sigma}\vec{n} = x_{tt} - q + 2x_{tu}\frac{du}{dt} + x_{uu}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + x_u\frac{d^2u}{dt^2}. \tag{39}$$

Вводим нормальную кривизну:

$$^u k_n = x_{tt} - q + 2x_{tu}\frac{du}{dt} + x_{uu}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + x_u\frac{d^2u}{dt^2}. \tag{40}$$

Обозначим коэффициенты:

$$x_{uu} = A, x_{tu} = B, x_{tt} - q = C; \tag{41}$$

в этих обозначениях нормальная кривизна такова:

$$^t k_n = A\bar{q}2 + 2B\bar{q} + C.$$

Вторая квадратичная форма поверхности (28) есть

$$^t II = Adu^2 + 2Bdudt + Cdt^2$$

с коэффициентами (41). Полная кривизна поверхности (28) равна

$$^u K = AC - B^2. \tag{42}$$

Плоскость $< A, \sigma, \gamma >$ из п. 1.5 является пространственно-временной поверхностью. Находим: $A = 0, B = 0, C = r^2(r^1 - 1);^u K = 0$. Полная кривизна поверхности ФС-пространства равна нулю.

3.4 Основные теоремы теории поверхностей

Венцом теории поверхностей евклидова пространства является теорема Петерсона-Бонне об определяемости поверхности коэффициентами первой и второй квадратичных форм, доказательство которой сложно и драматично, [8, 9]. Основная теорема теории поверхностей пространства-времени Галилея Γ^3 доказана в [10], для нильпотентного галилеева пространства-времени – в [11]. Ниже мы установим основные теоремы для поверхностей ФС-пространства. Сначала рассмотрим временные поверхности.

Первая квадратичная форма временной поверхности (23) $\sigma(t,v) = (t, v, x(t,v))$ есть (31), ее коэффициент есть q – постоянная величина: вторая квадратичная форма поверхности есть (36) с коэффициентами (35). Считаем, что коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности (23) заданы:

$$q, \quad A(t,v), \quad B(t,v), \quad C(t,v). \tag{43}$$

По формулам (34) составляем систему дифференциальных уравнений с частными производными

$$\begin{cases} x_{vv} = A(t,v), \\ x_{vt} = B(t,v), \\ x_{tt} = C(t,v), \end{cases} \tag{44}$$

Частные производные второго порядка функции $x(t,v)$ подчиняются следующим условиям. Производные $(x_v)_t$ и $(x_v)_v$ вместе с соответствующими дифференциалами аргументов составляют полный дифференциал функции $x_v(t,v)$, поэтому функция $x_v(t,v)$ является решением дифференциального уравнения с полным дифференциалом

$$A(t,u)dv + B(t,v)dt = 0. \tag{45}$$

Также функция $x_t(t,v)$ является решением дифференциального уравнения с полным дифференциалом

$$B(t,v)dv + C(t,v)dt = 0. \tag{46}$$

Поэтому выполняются равенства:

$$A_t(t,u) = B_v(t,v), \quad B_t(t,v) = C_v(t,v). \tag{47}$$

Решение системы дифференциальных уравнений (44) есть семейство функций $x(t,v,C_i)$, зависящее также и от постоянных интегрирования C_i. Выбрать единственное решение можно задав начальные условия, определяющие поверхность, проходящую через заданную точку $P(t_0,v_0)$, и имеющую заданные независимые касательные сибсы (25) в точке P.

Теорема 2. *Решение системы дифференциальных уравнений с частными производными (44), удовлетворяющее начальным условиям*

$$t = t_0, v_0 = qt_0, x_0 = x(t_0,v_0), x_{t0} = x_t(t_0,v_0), x_{v0} = x_v(t_0,v_0). \tag{48}$$

определяет в ФС-пространстве единственную временную поверхность $\sigma(t,v) = (t,v,x(t,v))$*, проходящую через точку* $P(t_0,v_0)$ *и обладающую, согласно (25), касательными сибсами в точке* P:

$$\sigma_{t0} = (1,0,x_{t0} - v_0), \ \ \sigma_{v0} = (0,1,x_{v0})$$

\# Система уравнений (44) сводится к двум уравнениям (45) и (46), решения $(x_v)_t$ и $(x_v)_v$ которых позволяют получить уравнение с полным дифференциалом

$$x_t dt + x_v dv = 0,$$

а его решение дает семейство поверхностей, имеющих квадратичные формы с заданными коэффициентами (41). Начальные условия (48) выделяют единственную временную поверхность ФС-пространства, проходящую через данную точку $P(t_0,v_0)$ и имеющую заданные независимые касательные сибсы. #

Пространственно-временная поверхность (27) $\sigma(t,u) = (t,v(t),x(t,u))$ имеет квадратичные формы (32) и (36), их коэффициенты

$$q, E(t,u), A(t,u), B(t,u), C(t,u). \tag{49}$$

Пространственная составляющая $x(t,u)$ является решением системы дифференциальных уравнений с частными производными

$$\begin{cases} x_u^2 = E(t,u), \\ x_{uu} = A(t,u), \\ x_{ut} = B(t,u), \\ x_{tt} = C(t,u), \end{cases} \tag{50}$$

составленной по формулам (33) и (41). Коэффициенты второй квадратичной формы удовлетворяют условиям (47), несмотря на различие формул для коэффициентов $C(t,v)$ и $C(t,u)$, и добавляется условие

$$A = \frac{E_u}{2\sqrt{E}}, \tag{51}$$

см. (33) и (41). Выполняется

Теорема 3. *Решение системы дифференциальных уравнений с частными производными (50), удовлетворяющее начальным условиям*

$$t = t_0,\ u_0 = \bar{q}t_0,\ x_0 = x(t_0, u_0),\ x_{t0} = x_t(t_0, u_0),\ x_{u0} = x_u(t_0, u_0). \tag{52}$$

определяет в ФС-пространстве единственную пространственно-временную поверхность $\sigma(t, u) = (t, v(t), x(t, u))$, *проходящую через точку* $P(t_0, u_0)$ *и обладающую в точке* P, *согласно (29), касательными сибсами*

$$\sigma_{t0} = \left(1, q, x_{t0} + q\left(\frac{1}{2} - t_0\right)\right),\ \ \sigma_{u0} = x_{u0}\gamma.$$

\# Функция x_u определяется по формуле $x_u^2 = E$, отсюда получаем (51) - значение коэффициента A; функция x_t является решением уравнения

$$B(t, u)du + (C(t, u) - q)dt = 0,$$

затем получаем $x(t, u)$ как решение уравнения с полным дифференциалом

$$x_u du + x_t dt = 0.$$

Начальные условия (52) выделяют единственную пространственно-временную поверхность (27) с заданными коэффициентами (49). #

4 Заключение

Рассмотренные выше методы окажутся полезными в исследовании свойств нильпотентного одулярного галилеева пространства с многомерным временем и многомерной пространственной составляющей, при условии, что в пространстве задана норма сибсов, аналогичная рассмотренной выше. Но нет уверенности, что использованных методов будет достаточно в исследовании всех геометрических свойств пространства-времени. Наличие только двух временных измерений в ФС-пространстве позволило традиционно воспользоваться квадратичными формами поверхностей. Но и в случае 3-мерного времени при соответствующей норме сибсов возможно использование квадратичных форм.

Литература

[1] Долгарев А.И., Долгарев И.А. 3-мерное галилеево одулярное нильпотентное пространство с 2-мерным временем // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(9), том 5, М.: МГТУ им Н.Э. Баумана, 2008, с. 140–152.

[2] Вейль Г. Пространство. Время. Материя. Лекции по общей теории относительности. М.: Едиториал УРСС, 2004, 456с.

[3] Долгарев А.И. Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств. Монография. Пенза: ИИЦ ПГУ, 2005, 306с.

[4] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989, 472с.

[5] Долгарев А.И., Зелева Е.В. Растран с 2-мерным временем // *Известия высших ученых заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки.* 3(7), Пенза: ИИЦ ПГУ, 2008, с. 20–29.

[6] Долгарев А.И., Зелева Е.В. Кривые 3-мерного галилеева пространства с растраном с 2-мерным временем // *Известия высших ученых заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки.* 1(9), Пенза: ИИЦ ПГУ, 2009, с. 55–68.

[7] Сабинин Л.В. Одули как новый подход к геометрии со связностью // *ДАН СССР*, 1977, N 5, с. 800–803.

[8] Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия. М.-Л., 1949, 512с.

[9] Фиников С.П. Курс дифференциальной геометрии. М.: КомКнига, 2006, 344с.

[10] Долгарев И.А. Системы дифференциальных уравнений в частных производных для поверхностей пространства Галилея. Дис. канд. физ.-мат. наук. Пенза: ПГУ, 2007, 119с.

[11] Долгарев И.А. Система дифференциальных уравнений с частными производными для поверхностей в некоммутативном галилеевом пространстве с сибсоном. Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского, том 36. Лобачевске чтения - 2007. Материалы международной молодежной научной школы-конференции (Казань, 16 - 19 дек. 2007г) - Казань: КМО - КГУ, 2007. с. 66–68.

GALILEAN NILPOTENT SPACES OF DIMENSION 3 WITH 2-DIMENSIONAL TIME. GEOMETRIC PROPERTIES

A.I. Dolgarew, I.A. Dolgarew

Penza State University, Penza, Russia

delivar@yandex.ru

Studied the curves and surfaces. Determined curvature, torsion curves do not possess. Proved definability of the curve function of its curvature. Considered time and space-time surface, defined by their first and second quadratic forms, the total curvature. Proved definability surface coefficients of their quadratic forms.

Key Words: nilpotent Galilean space, 2-dimensional time, curvature, definability of the curve, surface of time, surface of the space-time, quadratic forms of surface, total curvature, definability surface.

AXIALLY SYMMETRIC GENERALIZATION OF THE CAUCHY-RIEMANN SYSTEM AND MODIFIED CLIFFORD ANALYSIS

D.A. Bryukhov

Fryazino, Russia

bryukhov@mail.ru

The main goal of this paper is to describe the most adequate generalization of the Cauchy-Riemann system fixing properties of classical functions in the octonionic case. An octonionic generalization of the Laplace transform is introduced. Octonionic generalizations of the inversion transformation, of the Euler gamma function and of the Riemann zeta-function are given.

Key Words: generalizations of the Cauchy-Riemann system, functions of the octonionic variable, octonionic Laplace transform.
MSC 2010: 30G35.

1 Introduction

The theory of holomorphic functions $f(z) = u + iv$ of a complex variable $z = x + iy$ has been developed on the basis of the classical Laplace equation in the plane $\mathbf{R}^2 = \{(x, y)\}$

$$\Delta h = \text{div grad } h = \frac{\partial h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial h^2}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

where solutions $h = h(x, y)$ have been called harmonic potential functions.

The Cauchy-Riemann system is the following first order system of equations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{2}$$

where $u(x, y) = \dfrac{\partial h}{\partial x}$, $v(x, y) = -\dfrac{\partial h}{\partial y}$ (see, e.g. [1]). The main goal of Clifford analysis [2] and of the related hypercomplex methods is an in-depth research of the multidimensional Laplace equation and multidimensional harmonic functions. In the physical formulation, problems for isotropic media in the case of constant density in space are considered, in particular.

Leutwiler [3] in 1992 started an in-depth research of a remarkable hyperbolic version of the Laplace equation in $\mathbf{R}^{n+1} = \{(x_0, x_1, ..., x_n)\}$

$$x_n \Delta h - (n-1)\frac{\partial h}{\partial x_n} = 0 \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial {x_0}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2}\right), \tag{3}$$

where C^3-solutions $h = h(x_0, x_1, ..., x_n)$ were called hyperbolically harmonic functions.

Remark 1.1. *As is easily seen, if* $x_n \neq 0$, *then*

$$x_n \Delta h - (n-1)\frac{\partial h}{\partial x_n} = x_n^n \text{div } (x_n^{1-n} \text{grad } h) = 0.$$

The first advances in modified Clifford analysis [3] were connected with the transition from the multidimensional Laplace equation for the multidimensional Laplace-Beltrami equations. These equations describe physical problems in isotropic media in the case of variable density in space, in particular. There have been established entirely new properties of many functions of the quaternionic variable. Leutwiler [3, 4] has constructed an important class of functions of the quaternionic variable associated with classical holomorphic functions.

The system of (n+1) real twice continuously differentiable (C^2–) functions

$$u_0 = u_0(x_0, x_1, \dots, x_n),\ u_1 = u_1(x_0, x_1, ..., x_n), \dots, u_n = u_n(x_0, x_1, ..., x_n),$$

where $u_0 = \dfrac{\partial h}{\partial x_0},\ u_1 = -\dfrac{\partial h}{\partial x_1}, \dots,\ u_n = -\dfrac{\partial h}{\partial x_n}$, in this case satisfies the following asymmetric system of equations (H_{n+1})

$$\begin{cases} x_n\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x_0} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} - \dots - \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n}\right) + (n-1)u_n = 0 \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial x_m} = -\dfrac{\partial u_m}{\partial x_0} \qquad (m = 1, ..., n) \\ \dfrac{\partial u_l}{\partial x_m} = \dfrac{\partial u_m}{\partial x_l} \qquad (l, m = 1, ..., n) \end{cases} \tag{4}$$

Leutwiler investigated various classes of solutions (4) connected with the (universal) Clifford algebra $\mathbf{Cl_n}$, especially connected with the associative quaternionic algebra $\mathbf{H} = \mathbf{Cl_2}$.

Remark 1.2. *The associative Clifford algebra* $\mathbf{Cl_3}$ *(without division) and the alternative octonionic algebra* $\mathbf{O}$ *(with division) are not equivalent.*

Leutwiler focused his attention in $\mathbf{R}^3$ [4, 5, 6, 7] and introduced new terms, the reduced quaternionic variables $f = u + iv + jw$ and $z = x + iy + jt$. The Laplace-Beltrami equation in $\mathbf{R}^3 = \{(x, y, t)\}$

$$t\Delta h - \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \tag{5}$$

has been applied as a basis to investigate solutions in the reduced quaternionic form of an asymmetric system of equations (H)

$$\begin{cases} t\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial t}\right) + w = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x},\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial y}, \end{cases} \tag{6}$$

where $u = \dfrac{\partial h}{\partial x},\quad v = -\dfrac{\partial h}{\partial y},\quad w = -\dfrac{\partial h}{\partial t}.$

Then the Laplace-Beltrami equation in $\mathbf{R}^4 = \{(x, y, t, s)\}$

$$s\Delta h - 2\frac{\partial h}{\partial t} = 0 \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) \tag{7}$$

has been applied [8] to investigate solutions of an asymmetric system of equations (H_4)

$$\begin{cases} s\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial t} - \dfrac{\partial r}{\partial s}\right) + 2r = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}, \ \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial w}{\partial x}, \ \dfrac{\partial u}{\partial s} = -\dfrac{\partial r}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial y}, \ \dfrac{\partial v}{\partial s} = \dfrac{\partial r}{\partial y}, \ \dfrac{\partial w}{\partial s} = \dfrac{\partial r}{\partial t} \end{cases} \tag{8}$$

in the form, in particular, of nontrivial quaternionic polynomials with quaternionic coefficients, where the quaternionic variables have been denoted $f = u+iv+jw+kr$ and $z = x+iy+jt+ks$ (see also [9]).

Interesting papers on octonion analysis [11, 10] and on functions of the octonionic variable [12] have appeared. However generalizations of the Cauchy-Riemann system having solutions in the form of functions of the octonionic variable have not been obtained there.

The question naturally arises — can we apply the methods of modified Clifford analysis, to move to the octonionic variable? Clifford algebras do not imply such development of theory.

It is well known that axially symmetric models are widely used for solving spatial problems, in particular in the framework of function theory of a complex variable [1]. But it is unexpectedly that an axially symmetric generalization of the 2-dimensional Laplace equation in $\mathbf{R}^8$ can be a good basis to construct the octonionic generalizations of many classical holomorphic functions.

The physical meaning of functions of the octonionic variable is unclear. Research of the physical meaning and properties of the octonionic Laplace transform is interesting for real-valued originals in the first place. The Laplace transform in this case automatically entails the determination of classical special functions in various octonionic areas. Refinements of the properties of the Euler gamma function and of the Riemann zeta-function may naturally lead to reform of methods of analytic number theory (see, e.g. [1, 13]).

The first electronic version of this paper was presented in 2003 [14].

2 On axial symmetry and on solutions associated with holomorphic functions in $\mathbf{R}^{n+1}$

Leutwiler [3, 4] has introduced an important class of solutions of the system (H_{n+1}) associated with classical holomorphic functions (in particular x^k, where $k \in \mathbf{N}$, e^x, $\ln x$) and has given the special axially symmetric conditions

$$x_l u_m = x_m u_l \qquad (l, m = 1, ..., n), \tag{9}$$

characterizing this class, at least locally.

Let us consider a second order elliptic equation in $\mathbf{R}^{n+1} = \{(x_0, x_1, ..., x_n)\}$

$$(x_1^2 + ... + x_n^2)\Delta h - (n-1)\left(x_1\frac{\partial h}{\partial x_1} + ... + x_n\frac{\partial h}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{10}$$

Definition 2.1. *C^3-solutions $h = h(x_0, x_1, ..., x_n)$ of the equation (10) are called ϕ-harmonic functions in $\mathbf{R}^{n+1}$.*

Remark 2.2. *If $(x_1^2 + ... + x_n^2) \neq 0$, then*

$$(x_1^2+...+x_n^2)\Delta h-(n-1)\left(x_1\frac{\partial h}{\partial x_1}+...+x_n\frac{\partial h}{\partial x_n}\right) = (x_1^2+...+x_n^2)^{\frac{n+1}{2}} \operatorname{div}\left[(x_1^2+...+x_n^2)^{\frac{1-n}{2}} \operatorname{grad} h\right] = 0.$$

The system of (n+1) real twice continuously differentiable (C^2–) functions

$$u_0 = u_0(x_0, x_1, \ldots, x_n),\ u_1 = u_1(x_0, x_1, \ldots, x_n), \ldots,\ u_n = u_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

where $u_0 = \dfrac{\partial h}{\partial x_0}$, $u_1 = -\dfrac{\partial h}{\partial x_1}, \ldots,$ $u_n = -\dfrac{\partial h}{\partial x_n}$, in this case satisfies the following axially symmetric system of equations (A_{n+1})

$$\begin{cases} (x_1^2 + ... + x_n^2)\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x_0} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} - ... - \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n}\right) + (n-1)(x_1 u_1 + ... + x_n u_n) = 0 \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial x_m} = -\dfrac{\partial u_m}{\partial x_0} \qquad (m = 1, ..., n) \\ \dfrac{\partial u_l}{\partial x_m} = \dfrac{\partial u_m}{\partial x_l} \qquad (l, m = 1, ..., n) \end{cases} \tag{11}$$

Singular hyperplanes play an essential role in modified Clifford analysis [3].

Definition 2.3. *The subspace* $\mathbf{R}^n = \{(x_0, x_1, ..., x_{n-1})\}$ *of the Euclidean space* $\mathbf{R}^{n+1} = \{(x_0, x_1, ..., x_n)\}$ *is called a singular hyperplane* ($[\mathbf{x_n = 0}]$).

Theorem 2.4. *(On solutions associated with classical holomorphic functions in* $\mathbf{R}^{n+1}$*). In any point in* $\mathbf{R}^{n+1} \setminus [\mathbf{x_n = 0}]$ *every system of (n+1)* C^2*-functions* $(u_0, u_1, ..., u_n)$ *with conditions (9) is a solution of the system of equations* (H_{n+1}) *if and only if the system of functions* $(u_0, u_1, ..., u_n)$ *is a solution of the system of equations* (A_{n+1}).

Proof. Let $x_n \neq 0$.
If a solution $(u_0, u_1, ..., u_n)$ of the system of equations (4) satisfies conditions (9), then

$$x_n\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - ... - \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right) + (n-1)u_n =$$

$$\left(\sum_{m=1}^{n} x_m^2\right) x_n\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - ... - \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right) + (n-1)u_n\left(\sum_{m=1}^{n} x_m^2\right) =$$

$$\left(\sum_{m=1}^{n} x_m^2\right) x_n\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - ... - \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right) + (n-1)x_n\left(\sum_{m=1}^{n} x_m u_m\right) = 0$$

and we obtain the first equation of the system (11).

If a solution $(u_0, u_1, ..., u_n)$ of the system of equations (11) satisfies conditions (9), then

$$(x_1^2 + \ldots + x_n^2)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - ... - \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right) + (n-1)(x_1 u_1 + ... + x_n u_n) =$$

$$x_n(x_1^2 + ... + x_n^2)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - ... - \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right) + (n-1)(x_1 u_1 + ... + x_n u_n)x_n =$$

$$x_n(x_1^2 + ... + x_n^2)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - ... - \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right) + (n-1)u_n(x_1^2 + ... + x_n^2) = 0$$

and we obtain the first equation of the system (4). $\square$

Corollary 2.5. *All solutions associated with classical holomorphic functions in singular hyperplane* $[\mathbf{x_n}=\mathbf{0}]$ *have the special axially symmetric condition*

$$(x_1^2+...+x_{n-1}^2)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0}-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-...-\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)+(n-2)(x_1u_1+...+x_{n-1}u_{n-1})=0, \tag{12}$$

except lower singular hyperplane $[\mathbf{x_{n-1}}]\equiv\mathbf{R}^{n-1}$.

Proof. In according with the previous theorem solutions associated with classical holomorphic functions on $[\mathbf{x_n}=\mathbf{0}]\equiv\mathbf{R}^n$ (except the subspace $\mathbf{R}^{n-1}=\{(x_0,x_1,...,x_{n-2})\}$) satisfy the system (A_n). Then the first equation of the system (A_n) coincides with (12). □

Remark 2.6. *All solutions associated with classical holomorphic functions in the singular hyperplane* $[\mathbf{x_n}=\mathbf{0}]$ *have* $u_n=0$.

Remark 2.7. *All solutions associated with classical holomorphic functions for every plane* $\mathbf{R}^2=\{(x_0,x_m)\}$ $(m=1,...,n)$ *in* $\mathbf{R}^2\setminus\mathbf{R}$ *have the special condition*

$$x_m\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0}-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-...-\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right)+(n-1)u_m=0 \tag{13}$$

Remark 2.8. *The second order elliptic equation (10) (see, e.g. [15]) and as a consequence the first order system of equations* (A_{n+1}) *in this case are linear.*

We see that the system of equations (A_{n+1}) can be interpreted as a natural axially symmetric generalization of the Cauchy-Riemann system having class of solutions associated with classical holomorphic functions in $\mathbf{R}^{n+1}\setminus\mathbf{R}$.

3 On Real-Valued Originals and on the Octonionic Generalization of the Laplace Transform

Recall the octonionic algebra $\mathbf{O}$ is alternative, non-associative normed division algebra over $\mathbf{R}$ with $e_0=1$; the imaginary units of octonions are e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 $(e_1^2=\ldots=e_7^2=-1)$, where $e_ie_j=-e_je_i$, $i,j=1,...,7$ $(i\neq j)$ and $e_3=e_1e_2$, $e_5=e_1e_4$, $e_6=e_2e_4$, $e_7=e_3e_4$ (see, e.g. [16]). Thus

$$x=x_0+\sum_{m=1}^{7}x_me_m=x_0+x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+(x_4+x_5e_1+x_6e_2+x_7e_3)e_4.$$

If $x\notin\mathbf{R}$ then we can use the polar form

$$x=x_0+\sum_{m=1}^{7}x_me_m=|x|(\cos\varphi+I(x)\sin\varphi)=|x|e^{I(x)\varphi}, \tag{14}$$

where $$I(x)=\frac{x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4+x_5e_5+x_6e_6+x_7e_7}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2}}\qquad (I(x)^2=-1),$$

$$\varphi=\arccos\frac{x_0}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2}}\qquad (0<\varphi<\pi).$$

For any $x\notin\mathbf{R}$

$$\ln x=\ln|x|+I(x)\varphi\quad (\textit{principal value}) \tag{15}$$

and for any $n \in \mathbf{N}$

$$x^n = |x|^n(\cos n\varphi + I(x)\sin n\varphi). \tag{16}$$

Similarly [3], formula

$$e^{I(x)\rho} = \cos\rho + I(x)\sin\rho,$$

where $\rho \in \mathbf{R}$,

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2}$$

and

$$I(x)\rho = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7,$$

has as a consequence the beautiful formula

$$e^x = e^{x_0}e^{I(x)\rho} = e^{x_0}(\cos\rho + I(x)\sin\rho). \tag{17}$$

The octonionic inversion is described by the simple relation

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2} = \frac{x_0 - \sum\limits_{m=1}^{7} x_m e_m}{|x|^2} = |x|(\cos\varphi - I(x)\sin\varphi) = |x|e^{-I(x)\varphi}. \tag{18}$$

Then

$$x^{-n} = |x|^{-n}(\cos n\varphi - I(x)\sin n\varphi) = |x|^{-n}e^{-I(x)n\varphi}. \tag{19}$$

Remark 3.1. *As is easily seen, for example, elementary functions x^n, $\ln x$, e^x, x^{-n} of the octonionic variable x satisfy the special conditions $u_l x_m = u_m x_l$ $(l, m = 1, \ldots, 7)$, and for every $m = 1, \ldots, 7$ the condition $x_m = 0$ implies $u_m = 0$.*

It is not difficult to verify that functions x^n, $\ln x$, e^x, x^{-n} generate solutions of the system (A_8). In addition the system (A_8) is linear, therefore, all linear combinations with real coefficients of these elementary functions generate solutions as well.

Definition 3.2. *A real-valued function $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tau)$ with a real argument τ is called an real-valued original, if*

1. *$\tilde{\eta}(\tau)$ complies with the Hölder's condition for every τ except some points $\tau = \tau_{\tilde{\eta}}^1, \tau_{\tilde{\eta}}^2, \ldots$ (there exists a finite quantity or zero of such points for every finite interval), where the function $\tilde{\eta}(\tau)$ has gaps of the first kind,*
2. *$\tilde{\eta}(\tau) = 0$ for all $\tau < 0$,*
3. *there exist constants $B_{\tilde{\eta}} > 0, \alpha_{\tilde{\eta}} \geq 0 :$ for all τ $|\tilde{\eta}(\tau)| < B_{\tilde{\eta}}e^{\alpha_{\tilde{\eta}}\tau}$.*

The Hölder's condition for the function $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tau)$ has the form: for every τ, there exist constants $A_{\tilde{\eta}} > 0$, $0 < \lambda_{\tilde{\eta}} \leq 1$, $\delta_{\tilde{\eta}} > 0$ so that $|\tilde{\eta}(\tau+\delta) - \tilde{\eta}(\tau)| \leq A_{\tilde{\eta}}|\delta|^{\lambda_{\tilde{\eta}}}$ for every δ, $|\delta| \leq \delta_{\tilde{\eta}}$.

Remark 3.3. *It is important that the Laplace transform exists in complex areas for every original $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tau)$, if Re $z = x > \alpha_{\tilde{\eta}}$ (see, e.g. [1, 17]). It is not difficult to verify that similar property is important in octonionic areas as well.*

Definition 3.4. *For every real-valued original $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tau)$ a function of the octonionic variable*

$$\mathcal{L}[\tilde{\eta}](x) = \int_0^\infty e^{-x\tau}\tilde{\eta}(\tau)d\tau \tag{20}$$

is called the octonionic generalization of the Laplace transform (the octonionic image or the octonionic Laplace transform for $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tau)$).

Remark 3.5. *It is clear that* $\mathcal{L}[\tilde{\eta}](x) = \int\limits_0^\infty e^{-x\tau}\tilde{\eta}(\tau)d\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\tau}\tilde{\eta}(\tau)d\tau.$

Proposition 3.6. *The octonionic Laplace transform* $\mathcal{L}[\tilde{\eta}](x)$ *for every real-valued original* $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tau)$ *defines a solution associated with a classical holomorphic function.*

Proof. Let $\mathcal{L}[\tilde{\eta}](x) = u_0 + \sum\limits_{m=1}^{7} u_m e_m.$
The octonionic exponential function defines a solution $(u_0, u_1, ..., u_7)$ of the system (A_8) associated with the classical exponential function.

Besides,

$$\frac{\partial}{\partial x_m}\int\limits_0^\infty e^{-x\tau}\tilde{\eta}(\tau)d\tau = \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_m} e^{-x\tau}\tilde{\eta}(\tau)d\tau \qquad (m = 0, 1, ..., 7).$$

Thus we obtain (A_8)

$$\begin{cases} (x_1^2 + ... + x_7^2)\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x_0} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} - ... - \dfrac{\partial u_7}{\partial x_7}\right) + 6(x_1 u_1 + ... + x_7 u_7) = 0 \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial x_m} = -\dfrac{\partial u_m}{\partial x_0} \qquad (m = 1, ..., 7) \\ \dfrac{\partial u_l}{\partial x_m} = \dfrac{\partial u_m}{\partial x_l} \quad (l, m = 1, ..., 7). \end{cases} \tag{21}$$

□

Example 1. *The real-valued original* $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tau) = \begin{cases} 1, \ \tau \geq 0 \\ 0, \ \tau < 0 \end{cases}$
implies the octonionic image $\mathcal{L}[\tilde{\eta}](x) = x^{-1}$.

Example 2. *The real-valued original* $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tau) = \begin{cases} \cos\omega\tau, \tau \geq 0 \\ 0, \ \tau < 0 \end{cases}$
implies the octonionic image $\mathcal{L}[\tilde{\eta}](x) = x(x^2 + \omega^2)^{-1}$.

Example 3. *The real-valued original* $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tau) = \begin{cases} \tau^a, \tau \geq 0 \\ 0, \ \tau < 0 \end{cases}$
for every $a > 0$ *implies the octonionic image* $\mathcal{L}[\tilde{\eta}](x) = \Gamma(a+1)x^{-a-1}$,
where $\Gamma(a+1)$ *denotes the Euler gamma function with a real argument [1].*

Remark 3.7. *Examples are not correct in terms of the associative Clifford algebra* $\mathbf{Cl_3}$ *, where imaginary units* $e_1, ..., e_7$ $(e_1^2 = ... = e_7^2 = -1)$ *satisfy to conditions* $e_i e_j = -e_j e_i, \ i, j = 1, ..., 7 \ (i \neq j)$ *[3, 9].*

However we can consider the octonionic generalization of the two-sided (or bilateral) Laplace transform, if a real-valued original $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tau)$ not identically equal to 0 for $\tau < 0$ (see, e.g. [18]).

Definition 3.8. *For every real-valued original* $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tau)$ *a function of the octonionic variable*

$$\mathcal{L}_{-\infty}^{+\infty}[\tilde{\eta}](x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\tau}\tilde{\eta}(\tau)d\tau = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x\tau}\tilde{\eta}(\tau)d\tau + \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x\tau}\tilde{\eta}(\tau)d\tau \tag{22}$$

is called the octonionic generalization of the two-sided Laplace transform (the octonionic image or the octonionic two-sided Laplace transform for $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tau)$ *).*

Natural octonionic generalizations of many classical functions (see, e.g. [1, 13, 19, 20]) can be characterized in this way.

Example 4. *The octonionic generalization of the Euler gamma function.*

Let $x = x_0 + \sum_{m=1}^{7} x_m e_m, \quad x_0 > 0.$

The original $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tau) = e^{-e^{\tau}}$ *implies the octonionic image*

$$\mathcal{L}_{-\infty}^{+\infty}[\tilde{\eta}](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\tau} e^{-e^{\tau}} d\tau = \int_{0}^{\infty} {\tau_1}^{-x-1} e^{-\tau_1} d\tau_1, \ \textit{where}\ \tau_1 = e^{\tau},\ d\tau_1 = e^{\tau} d\tau.$$

We can introduce the appropriate definition

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{\infty} {\tau_1}^{x-1} e^{-\tau_1} d\tau_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x\tau} e^{-e^{\tau}} d\tau = \mathcal{L}_{-\infty}^{+\infty}[\tilde{\eta}](-x). \tag{23}$$

Example 5. *The octonionic generalization of the Riemann zeta-function.*

Let $x = x_0 + \sum_{m=1}^{7} x_m e_m, \quad x_0 > 1.$

The original $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tau) = (e^{e^{\tau}} - 1)^{-1}$ *implies the octonionic image*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{-\infty}^{+\infty}[\tilde{\eta}](x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\tau} (e^{e^{\tau}} - 1)^{-1} d\tau = \int_{0}^{\infty} {\tau_1}^{-x-1} (e^{\tau_1} - 1)^{-1} d\tau_1 \\
&= \int_{0}^{\infty} {\tau_1}^{-x-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\tau_1} \right) d\tau_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{\infty} {\tau_1}^{-x-1} e^{-n\tau_1} d\tau_1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^x \int_{0}^{\infty} {\tau_2}^{-x-1} e^{-\tau_2} \right) d\tau_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^x \right) \int_{0}^{\infty} {\tau_2}^{-x-1} e^{-\tau_2} d\tau_2 \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^x \right) \Gamma(-x),
\end{aligned}$$

where $\tau_1 = e^{\tau},\ d\tau_1 = e^{\tau} d\tau; \quad \tau_2 = n\tau_1.$

We can introduce the appropriate definition

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} = \mathcal{L}_{-\infty}^{+\infty}[\tilde{\eta}](-x)\ \Gamma^{-1}(x). \tag{24}$$

4 On Boundary Value Problems and on Functions of the Octonionic Variable

Second order elliptic equations in divergence form have various interesting applications in mathematical physics (see, e.g. [15]). For a stationary temperature field h the function $\overline{f} = \mathrm{grad}\ h$ can be interpreted, in particular, as the temperature gradient in $\mathbf{R}^{n+1}$. If χ is the coefficient of thermal conductivity, then the heat equation has the form $\mathrm{div}(\chi\ \mathrm{grad}\ h) = 0$.

The equation in the case of axially symmetric distribution of the coefficient $\chi(x) = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1-n}{2}}$

$$\mathrm{div}\Big[(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1-n}{2}} \mathrm{grad}\ h\Big] = 0 \tag{25}$$

is equivalent to the system (A_{n+1}), at least in simply connected domains $\Lambda \subset \Omega$ ($\Lambda \subset \mathbf{R}^{n+1}$, $x_1^2 + ... + x_n^2 \neq 0$).

Example 6. *The function of the octonionic variable, conjugated to the octonionic inversion* $\overline{f(x)} = \overline{x^{-1}} = \text{grad } h$, $x \neq 0$, *describes the inversion transformation in* $\mathbf{R}^8$ *(see, e.g. [21]). We can interprete it, in particular, as the axially symmetric generalization of the plane potential field of single source in the case of variable coefficient of thermal conductivity* χ.

Remark 4.1. *This example of application in mathematical physics is not realized in modified Clifford analysis using* $\mathbf{Cl_3}$ *[3, 9].*

Theorem 4.2 (On the uniqueness of solutions of the Dirichlet problem for the system (A_{n+1}))**.** *Assume that a simply connected domain* $\Lambda \subset \mathbf{R}^{n+1}$ $(\Lambda \cap \mathbf{R} = \emptyset)$ *has a* C^2*-smooth boundary* $\partial\Lambda$. *Let* $P = (P_0, P_1, ..., P_n)$, $|P| = 1$, *is outer unit normal to* $\partial\Lambda$. *Assume that there exist two functions* $\hat{f} = \hat{f}(x) = \hat{u}_0 + e_1\hat{u}_1 + ... + e_n\hat{u}_n$ *and* $\check{f} = \check{f}(x) = \check{u}_0 + e_1\check{u}_1 + ... + e_n\check{u}_n$ *determining* C^2*-solutions in* Λ *of the first boundary value problem for the system* (A_{n+1})

$$u_0|_{\partial\Lambda} = \psi_0,\ u_1|_{\partial\Lambda} = -\psi_1,\ ...,\ u_n|_{\partial\Lambda} = -\psi_n, \quad \psi = (\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n) \in C^0(\partial\Lambda).$$

If there does not exist a point $x^0 \in \partial\Lambda$, *where* $(P,\ \psi) = \sum\limits_{m=0}^{n} P_m\psi_m = 0$, *then* $\hat{f} = \check{f}$.

Proof. The first boundary value problem

$$u_0|_{\partial\Lambda} = \psi_0,\ u_1|_{\partial\Lambda} = -\psi_1,\ ...,\ u_n|_{\partial\Lambda} = -\psi_n$$

for the system (11) is equivalent to the third boundary value problem

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x_0}\right|_{\partial\Lambda} = \psi_0,\ \left.\frac{\partial h}{\partial x_1}\right|_{\partial\Lambda} = \psi_1,\ ...,\ \left.\frac{\partial h}{\partial x_n}\right|_{\partial\Lambda} = \psi_n$$

for the equation (25). Let us have

$$\hat{u}_0 = \frac{\partial\hat{h}}{\partial x_0}, \quad \hat{u}_1 = -\frac{\partial\hat{h}}{\partial x_1},\ ..., \quad \hat{u}_n = -\frac{\partial\hat{h}}{\partial x_n},$$
$$\check{u}_0 = \frac{\partial\check{h}}{\partial x_0}, \quad \check{u}_1 = -\frac{\partial\check{h}}{\partial x_1},\ ..., \quad \check{u}_n = -\frac{\partial\check{h}}{\partial x_n}.$$

Then for the function $h = \hat{h} - \check{h}$ we obtain

$$\hat{u}_0 - \check{u}_0 = \frac{\partial h}{\partial x_0},\ \hat{u}_1 - \check{u}_1 = -\frac{\partial h}{\partial x_1},\ \dots,\ \hat{u}_n - \check{u}_n = -\frac{\partial h}{\partial x_n}$$

and

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x_0}\right|_{\partial\Lambda} = 0,\ \left.\frac{\partial h}{\partial x_1}\right|_{\partial\Lambda} = 0,\ \dots,\ \left.\frac{\partial h}{\partial x_n}\right|_{\partial\Lambda} = 0.$$

If there does not exist a point $x^0 \in \partial\Lambda$, where $(P,\ \psi) = 0$, then the homogeneous boundary value problem

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x_0}\right|_{\partial\Lambda} = 0, \quad \left.\frac{\partial h}{\partial x_1}\right|_{\partial\Lambda} = 0,\ ..., \quad \left.\frac{\partial h}{\partial x_n}\right|_{\partial\Lambda} = 0$$

for the equation (25) can only have a constant solution (see, e.g. [22]). Hence $h = const$ and $\hat{u}_0 - \check{u}_0 = 0,\ \hat{u}_1 - \check{u}_1 = 0,\ ...,\ \hat{u}_n - \check{u}_n = 0.$ □

Remark 4.3. *We can see that functions of the octonionic variable associated with classical holomorphic functions can define (under suitable conditions in simply connected domains* $\Lambda \subset \mathbf{R}^8$ $(\Lambda \cap \mathbf{R} = \emptyset)$ *with a* C^2*-smooth boundary* $\partial\Lambda$*) solutions* $h = h(x_0, x_1, ..., x_7)$ *of the third boundary value problem for the following elliptic equation in divergence form*

$$\operatorname{div}\Big[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2)^{-3} \operatorname{grad}\ h\Big] = 0 \tag{26}$$

to within arbitrary constant.

We can consider ϕ-harmonic functions $h = h(x_0, x_1, ..., x_n)$ as new potential functions in $\mathbf{R}^{n+1}$.

5 Conclusions

It is shown how effectively the application of second order elliptic equations as the basis for multidimensional generalizations of the Cauchy-Riemann system.

The axially symmetric system (A_{n+1}) takes up an intermediate place between the Stein-Weiss conjugate harmonic system in Clifford analysis [2] and the Leutwiler asymmetric system (H_{n+1}) in modified Clifford analysis [3] .

The results, obtained in this paper, demonstrate the following specifics

- the axially symmetric generalization of the Cauchy-Riemann system closely connected with an important class of the octonionic generalization of classical holomorphic functions,
- there exist transitions between lower and higher spatial dimensions for the octonionic generalization of classical holomorphic functions,
- the generalization of the Laplace transform is not realized in modified Clifford analysis using $\mathbf{Cl_3}$, at least for every real-valued original, but generates generalizations of classical holomorphic functions in various octonionic areas,
- the octonionic generalizations of classical objects of analytic number theory, such as the Euler gamma function and the Riemann zeta-function, are easily built in the framework of the octonionic generalization of the Laplace transform
- the first physical applications are naturally constructed, the classical boundary problems in some inhomogeneous isotropic media are correct for the related spatial potential fields. The axially symmetric potential fields in $\mathbf{R}^3$ are of particular interest, since they are not described by the well-known hypercomplex methods.

How many various generalizations of the Cauchy-Riemann system in $\mathbf{R}^8$ having solutions in the form of functions of the octonionic variable exist? This is an open question (see also the remarkable paper [23]).

Acknowledgement

The author would like to thank Dr. V.V. Kisil for useful discussions.

References

[1] Lavrentiev M.A., Shabat B.V. Methods of the theory of functions of a complex variable, 5th Edition, Nauka, Moscow, 1987 (in Russian).

[2] Brackx F., Delange R., Sommen F. Clifford Analysis // *Research Notes in Math.*, 76, Pitman, Boston-London-Melbourne, 1982.

[3] Leutwiler H. Modified Clifford analysis // *Complex Variables Theory Appl.*, 17, 1992, pp. 153–171.

[4] Leutwiler H. Modified quaternionic analysis in $\mathbf{R}^3$ // *Complex Variables Theory Appl.*, 20, 1992, pp. 19–51.

[5] Leutwiler H. More on modified quaternionic analysis in $\mathbf{R}^3$ // *Forum Math.*, 7, 1995, pp. 279–305.

[6] Leutwiler H. Rudiments of function theory in $\mathbf{R}^3$ // *Expositiones Math.*, 14, 1996, pp. 97–123.

[7] Leutwiler H. Quaternionic analysis in $\mathbf{R}^3$ versus its hyperbolic modification. "Proc. of Clifford Algebras and Its Applications (Prague, 2000)" // *NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry*, vol.25, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001, pp. 193–211.

[8] Hempfling Th., Leutwiler H. Modified quaternionic analysis in $\mathbf{R}^4$. "Proc. of Clifford Algebras and Their Appl. in Math. Physics (Aachen, 1996)" // *Fundamental Theories of Physics*, vol.94, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998, pp. 227–237.

[9] Leutwiler H., Zeilinger P. On quaternionic analysis and its modifications // *Computational Methods and Function Theory*, vol.4, 2004, No.1, pp. 159–183.

[10] Xingmin Li, Lizhohg Peng Taylor series and orthogonality of the octonion analytic functions // *Acta of Math. Scientia*, 21: Ser. B, 2001, pp. 323–330.

[11] Xingmin Li, Zhao Kai, Lizhohg Peng The Laurent series on the octonions, "Int. Conf. on Clifford Analysis, Its Appl. and Related Topics. Beijing, August 1-6, 2000" // *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 11(S2), 2001, pp. 205–217.

[12] Scheiher K., Tichy R.F., Tomantschger K.W. Elementary inequalities in hypercomplex numbers // *Anz. Osterreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl.*, 134, 1997, pp. 3–10.

[13] Karatsuba A.A. Principles of analytic number theory, 2nd Edition, Nauka, Moscow, 2004 (in Russian).

[14] Bryukhov D. Axially symmetric generalization of the Cauchy-Riemann system and modified Clifford analysis // *arXiv:math/0302186v1 [math.CV]*, 2003.

[15] Landis E. M. Second order equations of elliptic and parabolic type // *American Mathematical Society*, vol.171, Hardcover, Providence, R.I., 1998. (Russian Original: Nauka, Moscow, 1971).

[16] Baez J.C. The Octonions // *Bull. Amer. Math. Soc.*, 39, 2002, pp. 145–205.

[17] Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Integral transforms and operational calculus, 1st ed., Pergamon Press, Oxford, 1965. (Russian Original: Fizmatgiz, Moscow, 1961).

[18] Van der Pol B., Bremmer H. Operational Calculus based on the Two-Sided Laplace Integral. 2nd Edition, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1955.

[19] Titchmarsh E.C. The Theory of the Riemann Zeta-Function. 2nd Edition, Oxford Univ. Press, Oxford, 1986.

[20] Whittaker E.T., Watson G.N. A Course of Modern Analysis. 4th Edition, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[21] Gilbarg D., Trudinger N.S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. 2nd Edition, Springer Verlag, Berlin, 1983.

[22] Bitsadze A.V. Boundary Value Problems for Second Order Elliptic Equations. North-Holland, Amsterdam, 1968 (Russian Original: Nauka, Moscow, 1966).

[23] Kisil V.V. How Many Essentially Different Function Theories Exist? "Proc. of Clifford Algebras and Their Appl. in Math. Physics (Aachen, 1996)" // *Fundamental Theories of*

Physics, vol.94, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998, pp. 175–184.

АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ ОБОБЩЕНИЕ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА И МОДИФИЦИРОВАННЫЙ КЛИФФОРДОВ АНАЛИЗ

Д.А. Брюхов

Фрязино, Россия

bryukhov@mail.ru

Главной целью статьи является описание наиболее адекватного обобщения системы Коши-Римана, фиксирующего свойства классических функций в октонионном случае. Вводится октонионное обобщение преобразования Лапласа. Даются октонионные обобщения преобразования инверсии, гамма-функции Эйлера и дзета-функции Римана.

Ключевые слова: обобщения системы Коши-Римана, функции октонионной переменной, октонионное преобразование Лапласа.
MSC 2010: 30G35.

К ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ В СОБСТВЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ГЕОМЕТРИИ СОБЫТИЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Р.Г. Зарипов

Учреждение Российской академии наук Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, Казань, Россия

zaripov@mail.knc.ru

Рассматривается модель физического векторного поля с плотностями скалярного и векторного источников в собственном трехмерном пространстве для геометрии событий Бервальда-Моора. Определены плотность энергии и её поток, которые зависят от вторых производных компонент вектора напряженности. Выводится выражение для силы, действующей на источник поля и представлены уравнения движения заряженной частицы. Обсуждается вопрос волн поля «деформаций» в вакууме.

Ключевые слова: пространство-время Бервальда-Моора, физическое векторное поле, энергия, сила, уравнения движения, плоские волны.

1 Введение

В работе [1] представлена модель физического векторного поля с плотностями скалярного и векторного источников в собственном трехмерном пространстве для геометрии событий Бервальда-Моора. Метрическая функция локального четырехмерного пространства-времени Бервальда-Моора в скалярно-векторной форме имеет следующий вид [2]

$$F = ds = \left(g_{ijkl}dx^i dx^j dx^k dx^l\right)^{1/4} = \left[\prod_m^4 \left(cdt + \varepsilon^m d\mathbf{x}\right)\right]^{1/4} = \left(c^4 dT^4 - d\rho^4\right)^{1/4}. \qquad (1.1)$$

Здесь элемент пространственного расстояния

$$d\rho = \left[\prod_m^4 \left(\varepsilon^m d\mathbf{x}\right)\right]^{1/4} = \left[\{d\mathbf{x}d\mathbf{x}\}^2 - (d\mathbf{x}d\mathbf{x})^2\right]^{1/4} \qquad (1.2)$$

определяется как множество одновременных событий по элементу физического времени

$$dT = \left[dt^4 - 2dt^2 d\mathbf{x}^2/c^2 + 4dt\left(d\mathbf{x}\{d\mathbf{x}d\mathbf{x}\}\right)/3c^3\right]^{1/4} \qquad (1.3)$$

с $dT = 0$. Известные значения компонентов векторов $\varepsilon^1 = (1, 1, 1)$, $\varepsilon^2 = (-1, 1, -1)$, $\varepsilon^3 = (1, -1, -1)$, $\varepsilon^4 = (-1, -1, 1)$ выделенных направлений в трехмерном пространстве удовлетворяют равенствам [3]

$$\begin{gathered}\sum_m^4 \varepsilon^m_\alpha = 0, \quad \tfrac{1}{4}\sum_m^4 \varepsilon^m_\alpha \varepsilon^m_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad \tfrac{1}{4}\sum_m^4 \varepsilon^m_\alpha \varepsilon^m_\beta \varepsilon^m_\gamma = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}, \\ 1 + (\varepsilon^m)^2 = 4, \quad 1 + (\varepsilon^m \varepsilon^r) = 0 \quad (m \neq r),\end{gathered} \qquad (1.4)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера, $(d\mathbf{x}d\mathbf{x}) = d\mathbf{x}^2 = \delta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ – скалярное произведение для $d\mathbf{x} = \{dx, dy, dz\}$, $\{d\mathbf{x}d\mathbf{x}\}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}dx^\beta dx^\gamma$ являются компонентами нового векторного произведения [3] и $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ есть трехмерный абсолютно симметричный символ со свойством $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}=1$ при $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, а остальные значения являются нулевыми, m – номер вектора, а α, β и γ пробегают значения 1, 2, 3.

Метрическая функция (1.1) в известном виде запишется так

$$F = ds = \Big[c^4dt^4 + dx^4 + dy^4 + dz^4 -$$
$$-2\left(c^2dt^2dx^2 + c^2dt^2dy^2 + c^2dt^2dz^2 + dx^2dy^2 + dy^2dz^2 + dz^2dx^2\right) + 8\,c\,dt\,dx\,dy\,dz\Big]^{1/4} =$$
$$= \Big[(cdt + dx + dy + dz)\,(cdt - dx + dy - dz)\,(cdt + dx - dy - dz)\,(cdt - dx - dy + dz)\Big]^{1/4} =$$
$$= \left(\varepsilon_{1234}H^1_iH^2_jH^3_kH^4_l dx^i dx^j dx^k dx^l\right)^{1/4} = \left(\frac{1}{4!}\varepsilon_{abcd}\,H^a_iH^b_jH^c_kH^d_l dx^i dx^j dx^k dx^l\right)^{1/4}, \tag{1.5}$$

где символ ε_{abcd} есть абсолютно симметричный символ со свойством $\varepsilon_{abcd} = 1$ если $a \neq b \neq c \neq d$, остальные значения нулевые, $dx^i = (cdt, d\mathbf{x})$, H^a_i есть нормализованная матрица Адамара порядка четыре

$$\mathbf{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & -\mathbf{H}_2 \end{pmatrix},\ \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & -\mathbf{H}_1 \end{pmatrix},\ \mathbf{H}_1 = 1,\ \mathbf{H}\mathbf{H}^T = 4\mathbf{I}, \tag{1.6}$$

со свойством $H^a_iH^j_a = 4\delta^j_i$ и четырехмерным символом Кронекера δ^j_i, $\mathbf{I}$ – единичная четырехмерная матрица. Интервал ds интерпретируется как полунорма четырехмерного вектора dx^i.

В итоге из (1.5) вытекает выражение для метрического тензора

$$g_{ijkl} = \frac{1}{4!}\varepsilon_{abcd}H^a_iH^b_jH^c_kH^d_l. \tag{1.7}$$

В рассматриваемой модели физического векторного поля имеет место система уравнений третьего порядка [1]

$$-\Box\left(\nabla\mathbf{R}\right) + \frac{\partial}{c\partial t}\left(\{\nabla\nabla\}\,\mathbf{R}\right) - \left(\{\nabla\,\{\nabla\nabla\}\}\,\mathbf{R}\right) = \nu\rho, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial}{c\partial t}\Box\mathbf{R} + \frac{1}{3}\left(\nabla\,\{\nabla\nabla\}\right)\mathbf{R} - \Box\,\{\nabla\mathbf{R}\} + \frac{\partial}{c\partial t}\left\{\{\nabla\nabla\}\,\mathbf{R}\right\} - \left\{\{\nabla\,\{\nabla\nabla\}\}\,\mathbf{R}\right\} = \frac{\nu}{c}\mathbf{J}, \tag{1.9}$$

записанная в операторном виде с плотностью источника ρ и вектором плотности тока источника $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$. В уравнениях имеем $\Box = \left(\partial^2/c^2\partial t^2 - \Delta\right)$ – оператор Гамильтона, ν – постоянный коэффициент, $\mathbf{v}$ – скорость источника, $\nabla = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z)$ – градиент.

Физическое поле описывается вектором $\mathbf{R}$, который является суммой векторов напряженностей двух полей

$$\mathbf{R} = \mathbf{G} + \mathbf{Q},\quad \mathbf{G} = \frac{\partial\mathbf{A}}{c\partial t} + \nabla\varphi,\ \ \mathbf{Q} = \{\nabla\mathbf{A}\} \tag{1.10}$$

Вектор $\mathbf{G}$ содержит градиент скалярного потенциала φ, а компоненты вектора $\mathbf{Q}$ выражаются через компоненты тензора “деформаций” $e_{\beta\gamma}$ для векторного потенциала $\mathbf{A}$

$$\{\nabla\mathbf{A}\} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z},\ \frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial x},\ \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\right),$$
$$\{\nabla\mathbf{A}\}_\alpha = 2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}e_{\beta\gamma},\ e_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial A_\gamma}{\partial x^\beta}\right). \tag{1.11}$$

В развитие предложенной модели физического векторного поля представляется необходимым рассмотреть вопрос о работе и силе, а также о плотности и потоке энергии поля и другие приложения.

2 Работа и сила

В работе [1] уравнения физического векторного поля выводятся последовательно. Во-первых, рассматривается композиция гиперкомплексного дифференциального оператора с квадрачислом потенциалов в скалярно-векторной форме

$$\left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla\right) \circ (\varphi, \mathbf{A}) = (0, \mathbf{R}), \tag{2.1}$$

что в итоге при выполнении калибровки для потенциалов

$$\frac{\partial \varphi}{c\partial t} + (\nabla \mathbf{A}) = 0 \tag{2.2}$$

с $(\nabla \mathbf{A}) = div\mathbf{A}$, являющейся скалярной компонентой в (2.1), приводит к выражению вектора напряженности (1.10).

В-вторых используется сопряженный к исходному гиперкомплексный оператор

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_1\right) \circ \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_2\right) \circ \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_3\right) = \\ = \left(\frac{\partial}{c\partial t}\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \Delta\right) + \frac{1}{3}\left(\nabla\left\{\nabla\nabla\right\}\right), -\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \Delta\right)\nabla + \frac{\partial}{c\partial t}\left\{\nabla\nabla\right\} - \left\{\nabla\left\{\nabla\nabla\right\}\right\}\right)\end{gathered} \tag{2.3}$$

с векторными операторами

$$\begin{aligned}\nabla_1 &= \left(-\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right), \\ \nabla_2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right), \\ \nabla_3 &= \left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{2.4}$$

и приравнивается его композиция с квадрачислом напряженности (2.1)

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{c\partial t}\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \Delta\right) + \frac{1}{3}\left(\nabla\{\nabla\nabla\}\right), -\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \Delta\right)\nabla + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{c\partial t}\{\nabla\nabla\} - \{\nabla\{\nabla\nabla\}\}\right) \circ (0, \mathbf{R}) = \nu\left(\rho, \mathbf{J}/\mathbf{c}\right),\end{gathered} \tag{2.5}$$

квадрачислу плотности источников поля. Результат в итоге дает систему уравнений (1.8) и (1.9).

Композиция гиперкомплексного оператора с его сопряженным оператором является скалярным оператором

$$\begin{gathered}\Box_4 = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla\right) \circ \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_1\right) \circ \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_2\right) \circ \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_3\right) = \\ = \frac{\partial^4}{c^4\partial t^4} - 2\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\Delta + \frac{4}{3}\frac{\partial}{c\partial t}\left(\nabla\left\{\nabla\nabla\right\}\right) + \Delta\Delta - \left(\left\{\nabla\nabla\right\}\left\{\nabla\nabla\right\}\right) = \\ = \frac{\partial^4}{c^4\partial t^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} - 2\left(\frac{\partial^4}{c^2\partial t^2\partial x^2} + \frac{\partial^4}{c^2\partial t^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{c^2\partial t^2\partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^2\partial x^2}\right) + 8\frac{\partial^4}{c\,\partial t\partial x\partial y\partial z} = \prod_{m}^{4}\left[\frac{\partial}{c\partial t} + (\varepsilon^m\nabla)\right],\end{gathered} \tag{2.6}$$

где $\Delta = (\nabla\nabla)$ есть оператор Лапласа. Поэтому при подстановке композиции (2.1) в композицию (2.5) получим следующее волновые уравнения четвертого порядка для потенциалов

$$\begin{aligned} \Box_4 \varphi &= \nu\rho, \\ \Box_4 \mathbf{A} &= \tfrac{\nu}{c}\mathbf{J}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Из уравнений (1.8) и (1.9) или из (2.7) вытекает уравнение непрерывности для плотности источника

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\nabla\mathbf{J}) = 0. \tag{2.8}$$

Далее рассмотрим композицию

$$(0, \mathbf{R}) \circ (\rho, \mathbf{J}/c) = ((\mathbf{JR})/c,\ \rho\mathbf{R} + \{\mathbf{JR}\}/c)\,. \tag{2.9}$$

Скалярная часть в (2.9) представляет собой работу физического поля над источником

$$A = (\mathbf{JR})/c, \tag{2.10}$$

а векторная часть есть сила

$$\mathbf{F} = \rho\mathbf{R} + \{\mathbf{JR}\}/c, \tag{2.11}$$

действующая на источник поля

Тогда с учетом выражения импульса [3]

$$\mathbf{p} = m_0 c N\left(\mathbf{v}/c\right)\left[\frac{1}{4}\sum_m^4 \varepsilon^m \frac{\varepsilon^m\left(\mathbf{v}/c\right)}{1 + (\varepsilon^m\mathbf{v})/c}\right] = -\frac{m_0\mathbf{v}^{-1}}{N\left(\mathbf{v}^{-1}/c\right)}, \tag{2.12}$$

где функции

$$N\left(\mathbf{v}/c\right) = \left\{\prod_m^4 \left[1 + (\varepsilon^m\mathbf{v})/c\right]\right\}^{1/4}, \quad N\left(\mathbf{v}^{-1}/c\right) = \left\{\prod_m^4 \left[1 + \left(\varepsilon^m\mathbf{v}^{-1}\right)/c\right]\right\}^{1/4}, \tag{2.13}$$

справедливо уравнение движения частицы с зарядом в физическом векторном поле

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int \left(\rho\mathbf{R} + \{\mathbf{JR}\}/c\right) dV. \tag{2.14}$$

Здесь $\mathbf{v}^{-1}$ есть обратный элемент к скорости $\mathbf{v}$ в группе трёхмерных координатных скоростей и имеет следующее значение в разных формах [3, 4]

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{-1} &= \left[\frac{1}{4}\sum_m^4 \frac{\varepsilon^m c}{1 + (\varepsilon^m\mathbf{v})/c}\right]\left[\frac{1}{4}\sum_m^4 \frac{1}{1 + (\varepsilon^m\mathbf{v})/c}\right]^{-1} = \\ &= \left[-\frac{1}{4}\sum_m^4 \frac{\varepsilon^m\left(\varepsilon^m\mathbf{v}\right)}{1 + (\varepsilon^m\mathbf{v})/c}\right]\left[\frac{1}{4}\sum_m^4 \frac{1}{1 + (\varepsilon^m\mathbf{v})/c}\right]^{-1} = \\ &= -\frac{\mathbf{v}\left[1 - (\mathbf{vv})/c^2\right] - \{\mathbf{vv}\}/c^2 + \{\mathbf{v}\left\{\mathbf{vv}\right\}\}/c^3}{1 - (\mathbf{vv})/c^2 - (\mathbf{v}\left\{\mathbf{vv}\right\})/3c^3}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Для точечного заряда с дельта-функцией для плотности сила в (2.14) имеет вид (2.11), где вместо плотности используется дискретное значение заряда источника.

3 Плотность энергии и её поток

Возвратимся к исходной композиции

$$\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_1\right)\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_2\right)\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_3\right)\circ(0,\mathbf{R})=\nu\left(\rho,\mathbf{J}/c\right), \tag{3.1}$$

компоненты которой дают систему уравнений поля. Учитывая (2.9)-(2.11), получим

$$(0,\mathbf{R})\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_1\right)\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_2\right)\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_3\right)\circ(0,\mathbf{R})=\nu\left(A,\mathbf{F}\right). \tag{3.2}$$

Используем вспомогательное соотношение для композиций

$$\begin{gathered}(0,\mathbf{R})\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_1\right)\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_2\right)\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_3\right)\circ(0,\mathbf{R})=\\=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_1\right)\circ\left[(0,\mathbf{R})\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_2\right)\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_3\right)\circ(0,\mathbf{R})\right]-\\-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_2\right)\circ\left[\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_3\right)\circ(0,\mathbf{R})\right]\circ\left[\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_1\right)\circ(0,\mathbf{R})\right]+\\+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_3\right)\circ\left[(0,\mathbf{R})\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_2\right)\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_1\right)\circ(0,\mathbf{R})\right],\end{gathered} \tag{3.3}$$

где квадратными скобками ограничено действие гиперкомплексных дифференциальных операторов. Тогда (3.2) запишется так

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\nu}\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_1\right)\circ\left[(0,\mathbf{R})\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_2\right)\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_3\right)\circ(0,\mathbf{R})\right]-\\-\frac{1}{2\nu}\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_2\right)\circ\left[\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_3\right)\circ(0,\mathbf{R})\right]\circ\left[\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_1\right)\circ(0,\mathbf{R})\right]+\\+\frac{1}{2\nu}\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_3\right)\circ\left[(0,\mathbf{R})\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_2\right)\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_1\right)\circ(0,\mathbf{R})\right]=(A,\mathbf{F}).\end{gathered} \tag{3.4}$$

Для нахождения работы и, соответственно, плотности энергии с ее потоком необходимо вычислить скалярную часть композиций (3.4). Другим подходом является использование уравнения (1.9) при умножении его скалярно на вектор напряженности $\mathbf{R}$, что приводит к равенству

$$\begin{gathered}\left[\left(\mathbf{R}\frac{\partial^3}{c^3\partial t^3}\mathbf{R}\right)-\left(\mathbf{R}\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\left\{\nabla\mathbf{R}\right\}\right)-\left(\mathbf{R}\frac{\partial}{c\partial t}\Delta\mathbf{R}\right)+\left(\mathbf{R}\frac{\partial}{c\partial t}\left\{\left\{\nabla\nabla\right\}\mathbf{R}\right\}\right)\right]+\\+\left[\frac{1}{3}\left(\mathbf{R}\left(\nabla\left\{\nabla\nabla\right\}\right)\mathbf{R}\right)+\left(\mathbf{R}\Delta\left\{\nabla\mathbf{R}\right\}\right)-\left(\mathbf{R}\left\{\left\{\nabla\left\{\nabla\nabla\right\}\right\}\mathbf{R}\right\}\right)\right]=\frac{\nu}{c}\left(\mathbf{J}\mathbf{R}\right).\end{gathered} \tag{3.5}$$

Здесь квадратными скобками выделены слагаемые с производными по времени и производными по координатам. В рассматриваемом случае используется следующее вспомогательное соотношение для производных третьего порядка

$$\mathbf{R}\frac{\partial^3\mathbf{R}}{\partial a\partial b\partial c}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\mathbf{R}\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial b\partial c}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\mathbf{R}\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial c\partial a}\right)-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial c}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial a}\right)\right]. \tag{3.6}$$

Из равенства (3.5) следует соотношение

$$\frac{\partial W}{\partial t}+(\nabla\mathbf{S})=(\mathbf{J}\mathbf{R}) \tag{3.7}$$

для плотности энергии физического векторного поля

$$W=\frac{1}{2\nu}\left[2\left(\mathbf{R}\frac{\partial^2\mathbf{R}}{c^2\partial t^2}\right)-\left(\frac{\partial\mathbf{R}}{c\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathbf{R}}{c\partial t}\left\{\nabla\mathbf{R}\right\}\right)-\left(\mathbf{R}\left\{\nabla\frac{\partial\mathbf{R}}{c\partial t}\right\}\right)-(\mathbf{R}\Delta\mathbf{R})+(\mathbf{R}\left\{\left\{\nabla\nabla\right\}\mathbf{R}\right\})\right] \tag{3.8}$$

и плотности потока энергии в виде вектора с компонентами

$$\begin{gathered}S_x=\frac{c}{2\nu}\left[-\left\{\mathbf{R}\frac{\partial^2\mathbf{R}}{c^2\partial t^2}\right\}_x+\frac{\partial R_\alpha}{c\partial t}\frac{\partial R_\alpha}{\partial x}-R_\alpha\frac{\partial^2R_\alpha}{c\partial t\partial x}-\frac{\partial R_x}{c\partial t}\left(\frac{\partial R_y}{\partial y}+\frac{\partial R_z}{\partial z}\right)+\right.\\
+R_x\left(\frac{\partial^2R_y}{c\partial t\partial y}+\frac{\partial^2R_z}{c\partial t\partial z}\right)+2R_\alpha\frac{\partial^2R_\alpha}{\partial y\partial z}-\left\{\mathbf{R\Delta R}\right\}_x-\frac{\partial R_\alpha}{\partial x}\left\{\nabla\mathbf{R}\right\}_\alpha+R_\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left\{\nabla\mathbf{R}\right\}_\alpha+\\
+2R_y\left(\frac{\partial^2R_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2R_z}{\partial z^2}\right)-2R_z\left(\frac{\partial^2R_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2R_y}{\partial z^2}\right)+2\left(\frac{\partial R_z}{\partial x}\frac{\partial R_x}{\partial y}+\frac{\partial R_y}{\partial x}\frac{\partial R_x}{\partial z}\right)+\\
\left.+2\left(\frac{\partial R_x}{\partial x}\frac{\partial R_y}{\partial z}+\frac{\partial R_x}{\partial x}\frac{\partial R_z}{\partial y}\right)-2\left(R_z\frac{\partial^2R_x}{\partial x\partial y}+R_y\frac{\partial^2R_x}{\partial x\partial z}\right)-2\left(R_x\frac{\partial^2R_y}{\partial x\partial z}+R_y\frac{\partial^2R_z}{\partial x\partial y}\right)\right],\end{gathered} \tag{3.9}$$

$$\begin{gathered}S_y=\frac{c}{2\nu}\left[-\left\{\mathbf{R}\frac{\partial^2\mathbf{R}}{c^2\partial t^2}\right\}_y+\frac{\partial R_\alpha}{c\partial t}\frac{\partial R_\alpha}{\partial y}-R_\alpha\frac{\partial^2R_\alpha}{c\partial t\partial y}-\frac{\partial R_y}{c\partial t}\left(\frac{\partial R_x}{\partial x}+\frac{\partial R_z}{\partial z}\right)+\right.\\
+R_y\left(\frac{\partial^2R_x}{c\partial t\partial x}+\frac{\partial^2R_z}{c\partial t\partial z}\right)+2R_\alpha\frac{\partial^2R_\alpha}{\partial z\partial x}-\left\{\mathbf{R\Delta R}\right\}_y-\frac{\partial R_\alpha}{\partial y}\left\{\nabla\mathbf{R}\right\}_\alpha+R_\alpha\frac{\partial}{\partial y}\left\{\nabla\mathbf{R}\right\}_\alpha+\\
+2R_x\left(\frac{\partial^2R_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2R_z}{\partial z^2}\right)-2R_z\left(\frac{\partial^2R_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2R_x}{\partial z^2}\right)+2\left(\frac{\partial R_z}{\partial y}\frac{\partial R_y}{\partial x}+\frac{\partial R_x}{\partial y}\frac{\partial R_y}{\partial z}\right)+\\
\left.+2\left(\frac{\partial R_y}{\partial y}\tfrac{\partial R_x}{\partial z}+\frac{\partial R_y}{\partial y}\frac{\partial R_z}{\partial x}\right)-2\left(R_x\frac{\partial^2R_y}{\partial z\partial y}+R_z\frac{\partial^2R_y}{\partial y\partial x}\right)-2\left(R_y\frac{\partial^2R_z}{\partial x\partial y}+R_z\frac{\partial^2R_x}{\partial y\partial z}\right)\right],\end{gathered} \tag{3.10}$$

$$\begin{gathered}S_z=\frac{c}{2\nu}\left[-\left\{\mathbf{R}\frac{\partial^2\mathbf{R}}{c^2\partial t^2}\right\}_z+\frac{\partial R_\alpha}{c\partial t}\frac{\partial R_\alpha}{\partial z}-R_\alpha\frac{\partial^2R_\alpha}{c\partial t\partial z}-\frac{\partial R_z}{c\partial t}\left(\frac{\partial R_x}{\partial x}+\frac{\partial R_y}{\partial y}\right)+\right.\\
+R_z\left(\frac{\partial^2R_y}{c\partial t\partial y}+\frac{\partial^2R_x}{c\partial t\partial x}\right)+2R_\alpha\frac{\partial^2R_\alpha}{\partial x\partial y}-\left\{\mathbf{R\Delta R}\right\}_z-\frac{\partial R_\alpha}{\partial z}\left\{\nabla\mathbf{R}\right\}_\alpha+R_\alpha\frac{\partial}{\partial z}\left\{\nabla\mathbf{R}\right\}_\alpha+\\
+2R_y\left(\frac{\partial^2R_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2R_x}{\partial y^2}\right)-2R_x\left(\frac{\partial^2R_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2R_y}{\partial y^2}\right)+2\left(\frac{\partial R_y}{\partial z}\frac{\partial R_z}{\partial x}+\frac{\partial R_x}{\partial z}\frac{\partial R_z}{\partial y}\right)+\\
\left.+2\left(\frac{\partial R_z}{\partial z}\frac{\partial R_x}{\partial y}+\frac{\partial R_z}{\partial z}\frac{\partial R_y}{\partial x}\right)-2\left(R_y\frac{\partial^2R_z}{\partial x\partial z}+R_x\frac{\partial^2R_z}{\partial y\partial z}\right)-2\left(R_z\frac{\partial^2R_x}{\partial y\partial x}+R_x\frac{\partial^2R_y}{\partial z\partial y}\right)\right],\end{gathered} \tag{3.11}$$

где по α производится суммирование.

Плотность энергии и её поток зависят от вторых производных и их смешанных значений по времени и координатам от значений компонент вектора напряженности. При интегрировании соотношения (3.7) по всему пространству остается слева член с производной по времени от энергии физического векторного поля и, следовательно, имеем равенство для работы

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int WdV\right)=A. \tag{3.12}$$

4 Волны физического поля “деформаций”

Рассмотрим уравнение поля без источников с $\rho=0$ и $\mathbf{J}=0$. Тогда, согласно (2.3) и (2.5), имеем композиции гиперкомплексных операторов

$$\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_1\right)\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_2\right)\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\nabla_3\right)\circ(0,\mathbf{R})=0. \tag{4.1}$$

Композиции (4.1) с исходным гиперкомплексным оператором

$$\left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla\right) \circ \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_1\right) \circ \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_2\right) \circ \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_3\right) \circ (0, \mathbf{R}) = 0 \tag{4.2}$$

есть скалярный оператор (2.6), что приводит к уравнениям поля

$$\Box_4 \mathbf{R} = 0. \tag{4.3}$$

Запишем их в виде

$$\prod_m^4 \left[\frac{\partial}{c\partial t} + (\varepsilon^m \nabla)\right] \mathbf{R} = 0. \tag{4.4}$$

Решение волнового уравнения (4.3) или (4.4) имеет вид

$$f = f_1\left[t + \left(\nabla^1 \varepsilon^1\right)/c\right] + f_2\left[t + \left(\nabla^2 \varepsilon^2\right)/c\right] + f_3\left[t + \left(\nabla^3 \varepsilon^3\right)/c\right] + f_4\left[t + \left(\nabla^4 \varepsilon^4\right)/c\right] \tag{4.5}$$

с произвольными функциями f_1, f_2, f_3 и f_4 и представляет собой прямую и три обратных плоских волн. Это следовало ожидать из определенности одновременности разноместных событий в пространстве-времени Бервальда-Моора [3]. Конкретные физические задачи для волн "деформаций" представляют отдельный интерес.

Заключение

Теория физического векторного поля, рассматриваемая в предыдущей [1] и настоящей работе, носит принципиально иной характер, чем известные поля, поскольку основывается на симметричном тензоре «деформаций» для векторного потенциала. Например, в теории Максвелла вводится антисимметричный тензор векторного потенциала. Такое различие теорий следует из различия используемых алгебр. В рассматриваемом случае используется алгебра квадрачисел, а в теории Максвелла — алгебра бикватернионов. В работе принята запись уравнений и выражений для потока энергии в скалярно-векторной форме для решения конкретных задач, результаты которых и будут сопоставляться с наблюдениями. Это представляет отдельный интерес для дальнейшей разработки теории. В ковариантном виде компоненты введенного вектора напряженности являются компонентами 4-х индексового тензора напряженности, а значение энергии и ее потока являются компонентами 4-х индексового тензора энергии-импульса. В следующих работах все вычисления будут представлены в ковариантном виде с этими тензорами. Различные теории поля в пространстве Бервальда-Моора рассматриваются, например, в работах [5-7], в которых вводятся антисимметричные тензоры векторных полей, то есть вводятся аналоги соответствующих тензоров теории Максвелла. Тем самым имеют место подходы, отличные от рассматриваемого. Для используемой модели найдены плотности поля и её поток, зависящие от вторых производных и их смешанных значений от времени и координат компонент вектора напряженности. Случай силы, действующей на источник и зависящей только от производных вектора напряженности, не исследовался. Однако его легко реализовать по используемой методике. Даются уравнения движения заряженной частицы, находящейся в физическом векторном поле. Показано, что волны физического поля состоят из прямой и трех обратных плоских волн.

Литература

[1] Зарипов Р.Г. Модель физического поля в собственном трехмерном пространстве для геометрии событий Бервальда-Моора // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (10), т.5., 2008., с.124-130.

[2] Зарипов Р.Г. Физическое время и расстояние в пространстве-времени Бервальда-Моора // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2 (8), т.4, 2007, с.24-40.

[3] Зарипов Р.Г. Отношение одновременности в финслеровом пространстве-времени // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (5), т.3, 2006, с.27-46.

[4] Зарипов Р.Г. К релятивистской теории в гиперкомплексных системах // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (7), т.4, 2007, с.63-81.

[5] Гарасько Г.И. Теория поля и финслеровы пространства // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2006, 2 (6). т.3. с.6-20.

[6] Гарасько Г.И. Слабые поля // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2007, 2 (8), т.4. с.3-12.

[7] Сипаров С.В. В вопросу об анизотропной геометродинамике. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2008, 2 (10), т.5, с.64-74.

TO THE THEORY OF A PHYSICAL VECTOR FIELD IN NATURAL THREE-DIMENSIONAL SPACE FOR GEOMETRY OF EVENTS BERWALD-MOOR

R.G. Zaripov

Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences, Kazan, Russia

zaripov@mail.knc.ru

The model of a physical vector field with density of scalar and vector sources in natural three-dimensional space for geometry of events Berwald-Moor are is considered. The density of an energy and its stream which depend on second derivative of components of a vector of strength are defined. Expression for the force working on a source of a field is deduced and the equations of motion of the charged particle are submitted. The question of waves of a field of "deformations"in vacuum is discussed.

Key Words: space-time Berwald-Moor, a physical vector field, energy, force, equations of motion, flat waves.

BIANCHI TYPE IDENTITIES IN GENERALIZED FINSLER SPACE[1]

Milan Lj. Zlatanović, Svetislav M. Minčić
University of Niš, Faculty of Science and Mathematics, Niš, Serbia
zlatmilan@yahoo.com, svetislavmincic@yahoo.com

In the work [4, 14] we have studied a generalized Finsler space ($\mathbb{GF}_N$) (with non-symmetric basic tensor) and have obtained four curvature tensors by using four kinds derivatives in the sense of Rund's δ-differentiation.

In the present work we study Bianchi type identities, related to mentioned curvature tensors in $\mathbb{GF}_N$, generalizing the known Bianchi identity from the usual Finsler space.

Key Words: generalized Finsler spaces, non-symmetric connection, Bianchi type identities.
AMS Subj. Class.: 53A45, 53B05, 53B40.

1 Introduction

The Finsler space and it's generalizations were investigated by many authors, for example: I. Čomić [1], L. Xin and C. Zhe [3], A. Moór [5, 6], S. I. Vacaru [9], M. I. Wanas [10], I. Yoshihoro, L. Il-Yong, and P. Hong-Suh [12] N. L. Youssef and Amr M. Sid- Ahmed [13] and many others. Some of them found very appropriate applications of this theory in physics. A lot of investigations are concerned with spaces which are not torsion free.

The *generalized Finsler space* ($\mathbb{GF}_N$) is a differentiable manifold with non-symmetric basic tensor

$$g_{ij}(x^1,\dots,x^N,\dot{x}^1,\dots,\dot{x}^N)\equiv g_{ij}(x,\dot{x}),$$

where

$$g_{ij}(x,\dot{x})\neq g_{ji}(x,\dot{x}),\quad (g=det(g_{ij})\neq 0,\ \dot{x}=dx/dt). \tag{1.1}$$

Based on (1.1), one can defined the symmetric and anti-symmetric part of g_{ij}

$$g_{\underline{ij}}=\frac{1}{2}(g_{ij}+g_{ji}),\qquad g_{\underset{\vee}{ij}}=\frac{1}{2}(g_{ij}-g_{ji}), \tag{1.2}$$

where are

$$a)\ g_{\underline{ij}}(x,\dot{x})=\frac{1}{2}\frac{\partial^2F^2(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^j},\qquad b)\ \frac{\partial g_{\underset{\vee}{ij}}(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^k}=0. \tag{1.3}$$

The function $F(x,\dot{x})$ is a metric function in $\mathbb{GF}_N$, having the properties known from the theory of usual Finsler space ($\mathbb{F}_N$) (see e.g. [8]), the following conditions are valid:

1. $F(x,\dot{x})$ is continuously differentiable at least four times in its $2N$ arguments.

2. $F(x,\dot{x})>0$ providing all dx^i are not 0.

3. $F(x,x)$ is positively homogeneous of the 1^{st} degree in $\dot{x}$, i.e. $F(x,k\dot{x})=kF(x,\dot{x}),\quad k>0.$

[1] The authors gratefully acknowledge for support from the research projects 144032 of the Serbian Ministry of Science.

4. $\dfrac{\partial^2 F^2(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\xi^i\xi^j > 0$ for any given $\dot{x}$, and $\sum\limits_i (\xi^i)^2 > 0,\ \xi^i \in \mathbb{R}$.

The lowering and the raising of indices one defines by the tensors $g_{\underline{ij}}$ and h^{ij} respectively, where h^{ij} is defined as following

$$g_{\underline{ij}}\, h^{jk} = \delta^k_i, \quad (\underline{g} = det(g_{\underline{ij}}) \neq 0). \tag{1.4}$$

We can define *generalized Cristoffel symbols* of the 1^{st} and the 2^{nd} kind:

$$\gamma_{i.jk} = \frac{1}{2}(g_{ji,k} - g_{jk,i} + g_{ik,j}) \neq \gamma_{i.kj}, \tag{1.5}$$

$$\gamma^i_{jk} = h^{ip}\gamma_{p.jk} = \frac{1}{2}h^{ip}(g_{jp,k} - g_{jk,p} + g_{pk,j}) \neq \gamma^i_{kj}, \tag{1.6}$$

where, e.g., $g_{ji,k} = \partial g_{ji}/\partial x^k$.

Then we have

$$\gamma^p_{jk} g_{\underline{ip}} = \gamma_{s.jk} h^{ps} g_{\underline{ip}} = \gamma_{s.jk}\delta^{*s}_i = \gamma_{i.jk}. \tag{1.7}$$

Introducing a tensor C_{ijk} as in $\mathbb{F}_N$, we have

$$C_{ijk}(x,\dot{x}) \overset{def}{=} \frac{1}{2} g_{ij,\dot{x}^k} \underset{(1.3b)}{=} \frac{1}{2} g_{\underline{ij},\dot{x}^k} = \frac{1}{4}F^2_{\dot{x}^i\dot{x}^j\dot{x}^k}, \tag{1.8}$$

where " $\underset{(1.3b)}{=}$ " signifies "equal based on (1.3b)". We see that C_{ijk} is symmetric in relation to each pair of indices. Also, we have

$$C^i_{jk} \overset{def}{=} h^{ip}C_{pjk} \underset{(1.8)}{=} h^{ip}C_{jpk} = h^{ip}C_{jkp}. \tag{1.9}$$

With help of coefficients

$$P^i_{jk} = \gamma^i_{jk} - C^i_{jp}\gamma^p_{sk}\dot{x}^{*s} \neq P^i_{kj} \tag{1.10}$$

one obtains coefficients of non-symmetric affine connections in the Rund's sense (see [8]):

$$P^{*i}_{jk} = \gamma^i_{jk} - h^{iq}(C_{jqp}P^p_{ks} + C_{kqp}P^p_{js} - C_{jkp}P^p_{qs})\dot{x}^{*s} \underset{(1.6)}{\neq} P^{*i}_{kj}, \tag{1.11}$$

$$P^*_{i.jk} = P^{*r}_{jk} g_{\underline{ir}} = \gamma_{i.jk} - (C_{ijp}P^p_{ks} + C_{ikp}P^p_{js} - C_{jkp}P^p_{is})\dot{x}^{*s} \neq P^*_{i.kj}. \tag{1.12}$$

In $\mathbb{GF}_N$ we denote anti-symmetric and symmetric part for connection P^* respectively:

$$a)\ T^{*i}_{jk}(x,\dot{x}) = P^{*i}_{\underset{\vee}{jk}} = \frac{1}{2}(P^{*i}_{jk} - P^{*i}_{kj}) = \frac{1}{2}(\gamma^i_{jk} - \gamma^i_{kj}), \quad b)\ P^{*i}_{\underline{jk}} = \frac{1}{2}(P^{*i}_{jk} + P^{*i}_{kj}), \tag{1.13}$$

where T^{*i}_{jk} is the double *torsion tensor.*

It is possible to define four kinds of covariant derivative of a tensor in the space $\mathbb{GF}_N$. For example, for a tensor $a^i_j(x,\dot{x})$ we have

$$a^i_{j\underset{1}{|}m}(x,\dot{x}) = \delta_m a^i_j + P^{*i}_{pm}a^p_j - P^{*p}_{jm}a^i_p, \quad a^i_{j\underset{2}{|}m}(x,\dot{x}) = \delta_m a^i_j + P^{*i}_{mp}a^p_j - P^{*p}_{mj}a^i_p, \tag{1.14}$$

$$a^i_{j\underset{3}{|}m}(x,\dot{x}) = \delta_m a^i_j + P^{*i}_{pm}a^p_j - P^{*p}_{mj}a^i_p, \quad a^i_{j\underset{4}{|}m}(x,\dot{x}) = \delta_m a^i_j + P^{*i}_{mp}a^p_j - P^{*p}_{jm}a^i_p, \tag{1.15}$$

where

$$\delta_m = \frac{\partial}{\partial x^m} + \frac{\partial \dot{x}^p}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^p}. \tag{1.15$'$}$$

Remark 1.1 Let $\mathbb{GF}_N$ be an N-dimensional differentiable manifold, with non-symmetric connection P^{*i}_{jk} given by (1.11). Because of the non-symmetry of the connection P^{*i}_{jk}, another connection can be defined by $\widetilde{P}^{*i}_{jk} = P^{*i}_{kj}$.

In the work [4] we obtained 10 Ricci type identities in general case for a tensor $a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v}(x,\dot{x})$ and got fourth curvature tensors in $\mathbb{GF}_N$:

$$\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn} = \delta_n P^{*i}_{jm} - \delta_m P^{*i}_{jn} + P^{*p}_{jm} P^{*i}_{pn} - P^{*p}_{jn} P^{*i}_{pm}, \tag{1.16}$$

$$\underset{2}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn} = \delta_n P^{*i}_{mj} - \delta_m P^{*i}_{nj} + P^{*p}_{mj} P^{*i}_{np} - P^{*p}_{nj} P^{*i}_{mp}, \tag{1.17}$$

$$\underset{3}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn} = \delta_n P^{*i}_{jm} - \delta_m P^{*i}_{nj} + P^{*p}_{jm} P^{*i}_{np} - P^{*p}_{nj} P^{*i}_{pm} + P^{*p}_{nm} P^{*i}_{[pj]}, \tag{1.18}$$

$$\underset{4}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn} = \delta_n P^{*i}_{jm} - \delta_m P^{*i}_{nj} + P^{*p}_{jm} P^{*i}_{np} - P^{*p}_{nj} P^{*i}_{pm} + P^{*p}_{mn} P^{*i}_{[pj]}. \tag{1.19}$$

The magnitudes $\underset{t}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn}$, $t = 1,2,3,4$ are tensors and we call them curvature tensors of the first, the second, the third kind and the fourth kind, respectively. Some properties for the mentioned tensors (the antisymmetry with respect of two indices, the cyclic symmetry, the symmetry with respect of pairs of indices) are given in the work [14].

Applying four kinds of covariant derivatives (1.14, 1.15) we get

$$\begin{aligned} a^i_{\underset{\frac{1}{2}}{j|m}}(x,\xi) &= \delta_m a^i_j + P^{*i}_{\underset{mp}{pm}} a^p_j - P^{*p}_{\underset{mj}{jm}} a^i_p \\ &= \delta_m a^i_j + (P^{*i}_{\underset{\underline{mp}}{\underline{pm}}} + T^{*i}_{\underset{mp}{pm}}) a^p_j - (P^{*p}_{\underset{\underline{mj}}{\underline{jm}}} + T^{*p}_{\underset{mj}{jm}}) a^i_p \\ &= a^i_{j;m} + T^{*i}_{\underset{mp}{pm}} a^p_j - T^{*p}_{\underset{mj}{jm}} a^i_p, \quad \text{i.e.} \end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned} a^i_{\underset{\theta}{j|m}}(x,\dot{x}) &= a^i_{j;m} + (-1)^{\theta-1}(T^{*i}_{pm} a^p_j - T^{*p}_{jm} a^i_p), \quad \theta = 1,2, \quad \text{and also} \\ a^i_{\underset{\theta}{j|m}}(x,\dot{x}) &= a^i_{j;m} + (-1)^{\theta-1}(T^{*i}_{pm} a^p_j - T^{*p}_{mj} a^i_p), \quad \theta = 3,4. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Remark 1.2 By (;) we denoted covariant derivative with respect to the symmetric connection $P^{*i}_{\underline{jm}} = \frac{1}{2}(P^{*i}_{jk} + P^{*i}_{kj})$.

Here we demonstrated how the tensor $\underset{1}{\widetilde{K}}$, given by equation (1.16) can be presented:

$$\begin{aligned} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn} &= \delta_n P^{*i}_{\underline{jm}} + \delta_n P^{*i}_{\underset{\vee}{jm}} - \delta_m P^{*i}_{\underline{jn},m} - \delta_m P^{*i}_{\underset{\vee}{jn}} \\ &+ P^{*p}_{\underline{jm}} P^{*i}_{\underline{pn}} + P^{*p}_{\underset{\vee}{jm}} P^{*i}_{\underline{pn}} + P^{*p}_{\underline{jm}} P^{*i}_{\underset{\vee}{pn}} + P^{*p}_{\underset{\vee}{jm}} P^{*i}_{\underset{\vee}{pn}} \\ &- P^{*p}_{\underline{jn}} P^{*i}_{\underline{pm}} - P^{*p}_{\underset{\vee}{jn}} P^{*i}_{\underline{pm}} - P^{*p}_{\underline{jn}} P^{*i}_{\underset{\vee}{pm}} - P^{*p}_{\underset{\vee}{jn}} P^{*i}_{\underset{\vee}{pm}} \\ &= \widetilde{K}^i_{jmn} + T^{*i}_{jm;n} - T^{*i}_{jn;m} + T^{*p}_{jm} T^{*i}_{pn} - T^{*p}_{jn} T^{*i}_{pm}, \end{aligned} \tag{1.22}$$

where $\widetilde{K}^i_{jmn}$ is curvature tensor given by

$$\widetilde{K}^i{}_{jmn} = \delta_n P^{*i}_{\underline{jm}} - \delta_m P^{*i}_{\underline{jn}} + P^{*p}_{\underline{jm}} P^{*i}_{\underline{pn}} - P^{*p}_{\underline{jn}} P^{*i}_{\underline{pm}}. \tag{1.23}$$

In this way, following this procedure, we obtain:

$$\underset{2}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn} = \widetilde{K}^i_{jmn} + T^{*i}_{mj;n} - T^{*i}_{nj;m} + T^{*p}_{mj}T^{*i}_{np} - T^{*p}_{nj}T^{i}_{mp}, \tag{1.24}$$

$$\underset{3}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn} = \widetilde{K}^i_{jmn} + T^{*i}_{jm;n} - T^{*i}_{nj;m} + T^{*p}_{jm}T^{*i}_{np} - T^{*p}_{nj}T^{i}_{pm} + T^{*p}_{mn}T^{*i}_{jp}, \tag{1.25}$$

$$\underset{4}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn} = \widetilde{K}^i_{jmn} + T^{*i}_{jm;n} - T^{*i}_{nj;m} + T^{*p}_{jm}T^{*i}_{np} - T^{*p}_{nj}T^{*i}_{pm} - T^{*p}_{mn}T^{*i}_{jp}. \tag{1.26}$$

2 Bianchi identities in $\mathbb{GF}_N$

In [13] the authors consider some Bianchi type for different kinds of covariant derivatives. We are extending these results and continuing investigations from [4, 14].

In the space $\mathbb{F}_N$ of symmetric connection (and in $\mathbb{R}_N$) the following Bianchi identity [8]

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}} \widetilde{K}^i{}_{jmn;v} = \widetilde{K}^i{}_{jmn;v} + \widetilde{K}^i{}_{jnv;m} + \widetilde{K}^i{}_{jvm;n} = 0 \tag{2.1}$$

is valid, where $\underset{mnv}{\mathfrak{S}}$ denotes a cyclic permutation of the indices m, n, v. In the $\mathbb{GF}_N$ one can consider 16 cases for

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}} \underset{\theta}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn\underset{\omega}{|}v}, \quad \theta \in \{1, \dots, 4\}, \quad \omega \in \{1, \dots, 4\}. \tag{2.2}$$

Here we obtained 16 new Bianchi type identities in $\mathbb{GF}_N$, so we can state the following

Theorem 2.1. *In a space $\mathbb{GF}_N$ of non-symmetric connection P^{*i}_{jk}, and torsion tensor T^{*i}_{jk} for the curvature tensor $\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn}$ are valid next identities*

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn\underset{1}{|}v} = 2 \underset{mnv}{\mathfrak{S}} T^{*p}_{mn} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpv}, \tag{2.3}$$

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn\underset{2}{|}v} = 2 \underset{mnv}{\mathfrak{S}} (T^{*p}_{jm} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pnv} + T^{*p}_{mn} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jvp} + T^{*i}_{mp} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jnv}), \tag{2.4}$$

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn\underset{3}{|}v} = 2 \underset{mnv}{\mathfrak{S}} (T^{*p}_{jm} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pnv} + T^{*p}_{mn} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jvp}), \tag{2.5}$$

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn\underset{4}{|}v} = 2 \underset{mnv}{\mathfrak{S}} (T^{*i}_{mp} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jnv} + T^{*p}_{mn} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpv}). \tag{2.6}$$

Proof. By applying (1.21), (1.22) and using cyclic permutation of indices m, n, v we get

$$\begin{aligned}
\underset{mnv}{\mathfrak{S}} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn\underset{1}{|}v} &= \underset{mnv}{\mathfrak{S}} (\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn;v} + T^{*i}_{pv} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jmn} - T^{*p}_{jv} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pmn} - T^{*p}_{mv} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpn} - T^{*p}_{nv} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmp}) \\
&= \underset{mnv}{\mathfrak{S}} (\widetilde{K}^i{}_{jmn;v} + T^{*i}_{jm;nv} - T^{*i}_{jn;mv} + T^{*p}_{jm;v} T^{*i}_{pn} + T^{*p}_{jm} T^{*i}_{pn;v} - T^{*p}_{jn;v} T^{*i}_{pm} \\
&\quad - T^{*p}_{jn} T^{*i}_{pm;v} + T^{*i}_{pv} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jmn} - T^{*p}_{jv} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pmn} - T^{*p}_{mv} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpn} - T^{*p}_{nv} \underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmp}).
\end{aligned}$$

Let us consider the following difference

$$T^{*i}_{jm;nv} - T^{*i}_{jm;vn} = \widetilde{K}^i{}_{pnv} T^{*p}_{jm} - \widetilde{K}^p{}_{jnv} T^{*i}_{pm} - \widetilde{K}^p{}_{mnv} T^{*i}_{jp}.$$

Using the non-symmetry of the tensors T^{*i}_{mn}, $\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn}$ with respect to indices m, n, symmetry properties for $\widetilde{K}^i{}_{jmn}$ and appropriate Ricci identities we obtain

$$\begin{aligned}
\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn|\underset{1}{v}} =&\widetilde{K}^i{}_{pnv}T^{*p}_{jm}-\widetilde{K}^p{}_{jnv}T^{*i}_{pm}-\widetilde{K}^p{}_{mnv}T^{*i}_{jp}+\widetilde{K}^i{}_{pvm}T^{*p}_{jn}-\widetilde{K}^p{}_{jvm}T^{*i}_{pn}-\widetilde{K}^p{}_{nvm}T^{*i}_{jp}\\
&+\widetilde{K}^i{}_{pmn}T^{*p}_{jv}-\widetilde{K}^p{}_{jmn}T^{*i}_{pv}-\widetilde{K}^p{}_{vmn}T^{*i}_{jp}+T^{*i}_{pn}(\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jvm}+T^{*p}_{jm;v}-T^{*p}_{jv;m})\\
&+T^{*p}_{jm}(\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pvn}+T^{*i}_{pn;v}-T^{*i}_{pv;n})+T^{*i}_{pm}(\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jnv}+T^{*p}_{jv;n}-T^{*p}_{jn;v})\\
&+T^{*p}_{jn}(\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pmv}+T^{*i}_{pv;m}-T^{*i}_{pm;v})+T^{*i}_{pv}(\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jmn}+T^{*p}_{jn;m}-T^{*p}_{jm;n})\\
&+T^{*p}_{jv}(\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pnm}+T^{*i}_{pm;n}-T^{*i}_{pn;m})+2(T^{*p}_{vm}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpn}+T^{*p}_{nv}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpm}+T^{*p}_{mn}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpv})
\end{aligned}$$

Using (2.1) and(1.22) we get

$$\begin{aligned}
\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn|\underset{1}{v}} =&\widetilde{K}^i{}_{pnv}T^{*p}_{jm}-\widetilde{K}^p{}_{jnv}T^{*i}_{pm}+\widetilde{K}^i{}_{pvm}T^{*p}_{jn}-\widetilde{K}^p{}_{jvm}T^{*i}_{pn}+\widetilde{K}^i{}_{pmn}T^{*p}_{jv}-\widetilde{K}^p{}_{jmn}T^{*i}_{pv}\\
&+T^{*i}_{pn}(\widetilde{K}^p{}_{jvm}+T^{*s}_{jv}T^{*p}_{sm}-T^{*s}_{jm}T^{*p}_{sv})+T^{*p}_{jm}(\widetilde{K}^i{}_{pvn}+T^{*s}_{pv}T^{*i}_{sn}-T^{*s}_{pn}T^{*i}_{sv})\\
&+T^{*i}_{pm}(\widetilde{K}^p{}_{jnv}+T^{*s}_{jn}T^{*p}_{sv}-T^{*s}_{jv}T^{*p}_{sn})+T^{*p}_{jn}(\widetilde{K}^i{}_{pmv}+T^{*s}_{pm}T^{*i}_{sv}-T^{*s}_{pv}T^{*i}_{sm})\\
&+T^{*i}_{pv}(\widetilde{K}^p{}_{jmn}+T^{*s}_{jm}T^{*p}_{sn}-T^{*s}_{jn}T^{*p}_{sm})+T^{*p}_{jv}(\widetilde{K}^i{}_{pnm}+T^{*s}_{pn}T^{*i}_{sm}-T^{*s}_{pm}T^{*i}_{sn})\\
&+2(T^{*p}_{vm}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpn}+T^{*p}_{nv}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpm}+T^{*p}_{mn}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpv})\\
=&2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}T^{*p}_{mn}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpv}\Rightarrow (2.3).
\end{aligned}$$

Using (1.21) for second kind of covariant derivative and (1.22), we obtain

$$\begin{aligned}
\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn|\underset{2}{v}} =&\underset{mnv}{\mathfrak{S}}(\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn;v}+T^{*i}_{vp}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jmn}-T^{*p}_{vj}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pmn}-T^{*p}_{vm}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpn}-T^{*p}_{vn}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmp})\\
=&\underset{mnv}{\mathfrak{S}}(\widetilde{K}^i{}_{jmn;v}+T^{*i}_{jm;nv}-T^{*i}_{jn;mv}+T^{*p}_{jm;v}T^{*i}_{pn}+T^{*p}_{jm}T^{*i}_{pn;v}-T^{*p}_{jn;v}T^{*i}_{pm}\\
&-T^{*p}_{jn}T^{*i}_{pm;v}+T^{*i}_{vp}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jmn}-T^{*p}_{vj}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pmn}-T^{*p}_{vm}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpn}-T^{*p}_{vn}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmp}).
\end{aligned}$$

By help of (1.22) and Ricci identity in symmetric case and the non-symmetry of the tensors T^{*i}_{mn}, $\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn}$ with respect to indices m,n we get

$$\begin{aligned}
\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn|\underset{2}{v}} =&\widetilde{K}^i{}_{pnv}T^{*p}_{jm}-\widetilde{K}^p{}_{jvn}T^{*i}_{mp}+\widetilde{K}^i{}_{pvm}T^{*p}_{jn}-\widetilde{K}^p{}_{jmv}T^{*i}_{np}+\widetilde{K}^i{}_{pmn}T^{*p}_{jv}-\widetilde{K}^p{}_{jnm}T^{*i}_{vp}\\
&+T^{*i}_{pn}(\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jmv}+T^{*p}_{jm;v}-T^{*p}_{jv;m})+T^{*p}_{jm}(\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pnv}+T^{*i}_{pn;v}-T^{*i}_{pv;n})\\
&+T^{*i}_{pm}(\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jvn}+T^{*p}_{jv;n}-T^{*p}_{jn;v})+T^{*p}_{jn}(\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pvm}+T^{*i}_{pv;m}-T^{*i}_{pm;v})\\
&+T^{*i}_{pv}(\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jnm}+T^{*p}_{jn;m}-T^{*p}_{jm;n})+T^{*p}_{jv}(\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pnm}+T^{*i}_{pm;n}-T^{*i}_{pn;m})\\
&+2(T^{*p}_{mv}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpn}+T^{*p}_{nv}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmp}+T^{*p}_{mn}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jvp})
\end{aligned}$$

It is easy to prove that

$$\widetilde{K}^i{}_{pnv}+T^{*i}_{pn;v}-T^{*i}_{pv;n}=\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pnv}-T^{*s}_{pn}T^{*i}_{sv}+T^{*s}_{pv}T^{*i}_{sn} \tag{2.7}$$

and the previous equation becomes

$$\begin{aligned}\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn\underset{2}{|}v} =& 2(T^{*p}_{jm}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pnv}+T^{*p}_{jn}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pvm}+T^{*p}_{jv}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pmn})\\ &+2(T^{*i}_{mp}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jnv}+T^{*i}_{np}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jvm}+T^{*i}_{vp}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jmn})\\ &+2(T^{*p}_{mn}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jvp}+T^{*p}_{nv}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmp}+T^{*p}_{vm}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jnp})\\ =& 2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}(T^{*p}_{jm}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pnv}+T^{*p}_{mn}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jvp}+T^{*i}_{mp}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jnv}) \Rightarrow (2.4).\end{aligned}$$

Applying to $\underset{1}{\widetilde{K}}$ the 3^{rd} kind of covariant derivative, we get

$$\begin{aligned}\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn\underset{3}{|}v} =& \underset{mnv}{\mathfrak{S}}(\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn;v}+T^{*i}_{pv}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jmn}-T^{*p}_{vj}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pmn}-T^{*p}_{vm}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpn}-T^{*p}_{vn}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmp})\\ =& \underset{mnv}{\mathfrak{S}}(\widetilde{K}^i{}_{jmn;v}+T^{*i}_{jm;nv}-T^{*i}_{jn;mv}+T^{*p}_{jm;v}T^{*i}_{pn}+T^{*p}_{jm}T^{*i}_{pn;v}-T^{*p}_{jn;v}T^{*i}_{pm}\\ &-T^{*p}_{jn}T^{*i}_{pm;v}+T^{*i}_{pv}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jmn}-T^{*p}_{vj}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pmn}-T^{*p}_{vm}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpn}-T^{*p}_{vn}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmp}).\end{aligned}$$

Using the non-symmetry of the tensors T^{*i}_{mn}, $\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn}$ with respect to indices m,n, symmetry properties for $\widetilde{K}^i{}_{jmn}$ and appropriate Ricci identities we obtain

$$\begin{aligned}\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn\underset{3}{|}v} =& T^{*i}_{pn}(\widetilde{K}^p{}_{jmv}+\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jvm}+T^{*p}_{jm;v}-T^{*p}_{jv;m})+T^{*p}_{jm}(\widetilde{K}^i{}_{pnv}+\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pnv}+T^{*i}_{pn;v}-T^{*i}_{pv;n})\\ &+T^{*i}_{pm}(\widetilde{K}^p{}_{jvn}+\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jnv}+T^{*p}_{jv;n}-T^{*p}_{jn;v})+T^{*p}_{jn}(\widetilde{K}^i{}_{pvm}+\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pvm}+T^{*i}_{pv;m}-T^{*i}_{pm;v})\\ &+T^{*i}_{pv}(\widetilde{K}^p{}_{jnm}+\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jmn}+T^{*p}_{jn;m}-T^{*p}_{jm;n})+T^{*p}_{jv}(\widetilde{K}^i{}_{pmn}+\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pmn}+T^{*i}_{pm;n}-T^{*i}_{pn;m})\\ &+2(T^{*p}_{mv}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpn}+T^{*p}_{vn}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpm}+T^{*p}_{mn}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpv}).\end{aligned}$$

According to (2.7) the previous equation becomes

$$\begin{aligned}\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn\underset{3}{|}v} =& 2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}T^{*p}_{mn}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jvp}+T^{*i}_{pn}(\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jvm}+\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jmv}-T^{*s}_{jm}T^{*p}_{sv}+T^{*s}_{jv}T^{*p}_{sm})\\ &+T^{*p}_{jm}(2\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pnv}-T^{*s}_{pn}T^{*i}_{sv}+T^{*s}_{pv}T^{*i}_{sn})+T^{*i}_{pm}(\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jnv}+\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jvn}-T^{*s}_{jv}T^{*p}_{sn}+T^{*s}_{jn}T^{*p}_{sv})\\ &+T^{*p}_{jn}(2\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pvm}-T^{*s}_{pv}T^{*i}_{sm}+T^{*s}_{pm}T^{*i}_{sv})+T^{*i}_{pv}(\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jmn}+\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jnm}-T^{*s}_{jn}T^{*p}_{sm}+T^{*s}_{jm}T^{*p}_{sn})\\ &+T^{*p}_{jv}(2\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pmn}-T^{*s}_{pm}T^{*i}_{sn}+T^{*s}_{pn}T^{*i}_{sm})\\ =& 2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}(T^{*p}_{jm}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{pnv}+T^{*p}_{mn}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jvp}) \Rightarrow (2.5).\end{aligned}$$

Analogously to previous case, by applying (1.22) and fourth kind of covariant derivative, we have

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn\underset{4}{|}v} = 2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}(T^{*i}_{mp}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^p{}_{jnv}+T^{*p}_{mn}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jpv}) \Rightarrow (2.6).$$

□

Theorem 2.2. *For the curvature tensor $\underset{2}{\widetilde{K}}{}^i{}_{jmn}$ given by (1.17) and (1.24) the next four Bianchi* *type identities:*

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{2}{\widetilde{K}}{}^i_{jmn\underset{1}{|}v}=2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}(T^{*p}_{mj}\underset{2}{\widetilde{K}}{}^i_{pnv}+T^{*p}_{mn}\underset{2}{\widetilde{K}}{}^i_{jpv}+T^{*i}_{pm}\underset{2}{\widetilde{K}}{}^p_{jnv}),\tag{2.8}$$

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{2}{\widetilde{K}}{}^i_{jmn\underset{2}{|}v}=2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}T^{*p}_{mn}\underset{2}{\widetilde{K}}{}^i_{jvp},\tag{2.9}$$

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{2}{\widetilde{K}}{}^i_{jmn\underset{3}{|}v}=2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}(T^{*i}_{pm}\underset{2}{\widetilde{K}}{}^p_{jnv}+T^{*p}_{mn}\underset{2}{\widetilde{K}}{}^i_{jvp}),\tag{2.10}$$

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{2}{\widetilde{K}}{}^i_{jmn\underset{4}{|}v}=2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}(T^{*p}_{mj}\underset{2}{\widetilde{K}}{}^i_{pnv}+T^{*p}_{mn}\underset{2}{\widetilde{K}}{}^i_{jpv})\tag{2.11}$$

are valid.

Proof. The proof is analogous to previous one. □

Theorem 2.3. *For the curvature tensor $\underset{3}{\widetilde{K}}{}^i_{jmn}$ given by (1.18) and (1.25) the next Bianchi type identities:*

$$\begin{aligned}\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{3}{\widetilde{K}}{}^i_{jmn\underset{1}{|}v}=2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}[&T^{*i}_{jm;nv}+T^i_{jp}T^{*p}_{mn;v}+T^{*i}_{pm}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^p_{jnv}+T^{*p}_{vj;n})+T^{*p}_{mj}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^i_{pnv}+T^{*i}_{vp;n})\\&+T^{*p}_{mn}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^i_{jpv}-T^{*i}_{jv;p}-T^{*s}_{jp}T^{*i}_{sv}+T^{*s}_{jv}T^{*i}_{sp})],\end{aligned}\tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{3}{\widetilde{K}}{}^i_{jmn\underset{2}{|}v}=2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}[&T^{*i}_{jm;nv}+T^i_{jp}T^{*p}_{mn;v}+T^{*i}_{mp}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^p_{jnv}-\widetilde{K}^p_{jnv}-T^{*p}_{jv;n})\\&+T^{*p}_{jm}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^i_{pnv}-\widetilde{K}^i_{pnv}-T^{*i}_{pn;v})+T^{*p}_{mn}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^i_{jvp}-T^{*i}_{jv;p}-T^{*s}_{jp}T^{*i}_{sv}+T^{*s}_{jv}T^{*i}_{sp})],\end{aligned}\tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{3}{\widetilde{K}}{}^i_{jmn\underset{3}{|}v}=2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}[&T^{*i}_{jm;nv}+T^i_{jp}T^{*p}_{mn;v}+T^{*i}_{mp}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^p_{jnv}+T^{*p}_{jn;v})\\&+T^{*p}_{jm}(\widetilde{K}^i_{pnv}-\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i_{pnv}-T^{*i}_{pn;v})+T^{*p}_{mn}(2\widetilde{K}^i_{jvp}-\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i_{jvp}-T^{*i}_{jv;p}+T^s_{jp}T^{*i}_{sv}+T^s_{jv}T^{*i}_{sp})],\end{aligned}\tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{3}{\widetilde{K}}{}^i_{jmn\underset{4}{|}v}=2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}[&T^{*i}_{jm;nv}+T^i_{jp}T^{*p}_{mn;v}+T^{*i}_{pm}(\widetilde{K}^p_{jnv}+T^{*p}_{jn;v})+T^{*p}_{mj}(\widetilde{K}^i_{pnv}+T^{*i}_{pn;v})\\&+T^{*p}_{mn}(2\widetilde{K}^i_{jvp}-\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i_{jpv}-T^{*i}_{jv;p}-T^s_{jp}T^{*i}_{sv}-T^s_{jv}T^{*i}_{sp})]\end{aligned}\tag{2.15}$$

are valid.

Proof. Firstly, we verify identities

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}}T^{*i}_{mp}T^{*p}_{sj}T^{*s}_{nv}=\underset{mnv}{\mathfrak{S}}T^{*i}_{vp}T^{*p}_{sj}T^{*s}_{mn}=\underset{mnv}{\mathfrak{S}}T^{*p}_{mn}T^{*s}_{pj}T^{*i}_{vs},\tag{2.16}$$

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}}T^{*p}_{jm}T^{*i}_{sp}T^{*s}_{nv}=\underset{mnv}{\mathfrak{S}}T^{*p}_{jv}T^{*i}_{sp}T^{*s}_{mn}=\underset{mnv}{\mathfrak{S}}T^{*p}_{mn}T^{*i}_{ps}T^{*s}_{jv}\tag{2.17}$$

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}}T^{*i}_{pj}T^{*p}_{ns}T^{*s}_{mv}=\underset{mnv}{\mathfrak{S}}T^{*i}_{pj}T^{*p}_{ms}T^{*s}_{vn}=\underset{mnv}{\mathfrak{S}}T^{*i}_{pj}T^{*p}_{sv}T^{*s}_{mn}=\underset{mnv}{\mathfrak{S}}T^{*i}_{sj}T^{*p}_{mn}T^{*s}_{pv}.\tag{2.18}$$

By virtue of equations (1.21, 1.25) we get

$$\underset{3}{\widetilde{K}}{}^i_{jmn}=2\widetilde{K}^i_{jmn}-\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i_{jmn}+2T^{*i}_{jm;n}-2T^{*i}_{pj}T^{*p}_{mn}\tag{2.19}$$

and based on the third kind of covariant derivative and (2.1), (2.3), (2.18) we have

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{3}{\widetilde{K}}{}^i_{jmn\underset{1}{|}v}=2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}(\widetilde{K}^i_{jmn}+T^{*i}_{jm;n}-T^{*i}_{pj}T^{*p}_{mn})_{\underset{1}{|}v}-\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^i_{jmn\underset{1}{|}v}\Rightarrow(2.12).$$

To prove (2.13), we have

$$\begin{aligned}\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{3}{\widetilde{K}}{}^i_{jmn\underset{2}{|}v}=2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}[&T^{*i}_{jm;nv}+T^i_{jp}T^{*p}_{mn;v}+T^{*i}_{mp}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^p_{jnv}-\widetilde{K}^p_{jnv}-T^{*p}_{jn;v})\\&+T^{*p}_{jm}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^i_{pnv}-\widetilde{K}^i_{pnv}-T^{*i}_{pn;v})+T^{*p}_{mn}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^i_{jvp}-T^{*i}_{jv;p})+T^s_{jp}T^{*i}_{sv}-T^s_{jv}T^{*i}_{sp}],\end{aligned}$$

and using (2.16), (2.17), the previous equation becomes

$$\begin{aligned}\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{3}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{jmn\underset{2}{|}v} = 2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}[&T^{*i}_{jm;nv}+T^{i}_{jp}T^{*p}_{mn;v}+T^{*i}_{mp}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^{p}{}_{jnv}-\widetilde{K}^{p}_{jnv}-T^{*p}_{jv;n}) \\ &+T^{*p}_{jm}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{pnv}-\widetilde{K}^{i}_{pnv}-T^{*i}_{pn;v})+T^{*p}_{mn}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{jvp}-T^{*i}_{jv;p}-T^{*s}_{jp}T^{*i}_{sv}+T^{*s}_{jv}T^{*i}_{sp})], \Rightarrow (2.13).\end{aligned} \tag{2.20}$$

By virtue of (2.19) and based on (2.1), (2.5), (2.18) we have

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{3}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{jmn\underset{3}{|}v} = 2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}(\widetilde{K}^{*i}_{jmn}+T^{*i}_{jm;n}-T^{*i}_{pj}T^{*p}_{mn})_{\underset{1}{|}v}-\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{1}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{jmn\underset{3}{|}v},$$

i.e. equation (2.14) is valid.

In the same manner we have (2.15). □

Taking into account (1.25, 1.26) we get

$$\underset{4}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{jmn} = \underset{3}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{jmn}+4T^{*i}_{pj}T^{*p}_{mn}$$

based on which we shall investigate

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{4}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{jmn\underset{\theta}{|}v}, \quad \theta\in\{1,\dots,4\}.$$

Following procedure in the previous case for $\underset{3}{\widetilde{K}}$, we can formulate the next theorem:

Theorem 2.4. *For the curvature tensor $\underset{4}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{jmn}$, given by (1.19) and (1.26), the next Bianchi type identities are valid:*

$$\begin{aligned}\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{4}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{jmn\underset{1}{|}v} = 2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}[&T^{*i}_{jm;nv}+T^{i}_{pj}T^{*p}_{mn;v}+3T^{p}_{mn}T^{s}_{pj}T^{*i}_{sv}+3T^{p}_{mn}T^{s}_{jv}T^{*i}_{sp}+T^{*i}_{pm}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^{p}{}_{jnv}+T^{*p}_{vj;n}) \\ &+T^{*p}_{mj}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{pnv}+T^{*i}_{vp;n})+T^{*p}_{mn}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{jvp}+T^{*i}_{vj;p})+2(T^{p}_{mn}T^{*i}_{pj;v}+T^{i}_{pj}T^{p}_{ns}T^{*s}_{mv}+T^{i}_{pj}T^{p}_{ms}T^{*s}_{vn})],\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{4}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{jmn\underset{2}{|}v} = 2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}[&T^{*i}_{jm;nv}+T^{i}_{pj}T^{*p}_{mn;v}+T^{*i}_{mp}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^{p}{}_{jnv}-\widetilde{K}^{*p}_{jnv}-T^{*p}_{jn;v})+T^{*p}_{jm}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{pnv}-\widetilde{K}^{*i}_{pnv}-T^{*i}_{pn;v}) \\ &+T^{*p}_{mn}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{jvp}-T^{*i}_{jv;p}-2T^{*i}_{jp;v}+3T^{s}_{jp}T^{*i}_{sv}-3T^{s}_{jv}T^{*i}_{sp}+4T^{i}_{sj}T^{*s}_{vp})],\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{4}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{jmn\underset{3}{|}v} = 2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}[&T^{*i}_{jm;nv}+T^{i}_{pj}T^{*p}_{mn;v}+T^{*i}_{pm}(\widetilde{K}^{*p}_{jnv}+T^{*p}_{jn;v})+T^{*p}_{jm}(\widetilde{K}^{*i}_{pnv}-\underset{1}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{pnv}+T^{*i}_{pn;v}) \\ &+T^{*p}_{mn}(2\widetilde{K}^{*i}_{jvp}-\underset{1}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{jvp}+T^{*i}_{jv;p}-2T^{*i}_{jp;v}-T^{s}_{jv}T^{*i}_{sp}-T^{s}_{jp}T^{*i}_{sv})],\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{4}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{jmn\underset{4}{|}v} = 2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}[&T^{*i}_{jm;nv}+T^{i}_{pj}T^{*p}_{mn;v}+T^{*i}_{mp}(\widetilde{K}^{*p}_{jnv}-\underset{1}{\widetilde{K}}{}^{p}{}_{jnv}+T^{*p}_{jn;v})+T^{*p}_{mj}(\widetilde{K}^{*i}_{pnv}+T^{*i}_{pn;v}) \\ &+T^{*p}_{mn}(2\widetilde{K}^{*i}_{jvp}-\underset{1}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{jvp}-T^{*i}_{jv;p}+T^{s}_{jv}T^{*i}_{sp}+T^{s}_{jp}T^{*i}_{sv})].\end{aligned} \tag{2.24}$$

Proof. Knowing that

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}}T^{*i}_{pj}T^{*p}_{ns}T^{*s}_{mv} = \underset{mnv}{\mathfrak{S}}T^{*i}_{pj}T^{*p}_{ms}T^{*s}_{vn} = \underset{mnv}{\mathfrak{S}}T^{*i}_{pj}T^{*p}_{sv}T^{*s}_{mn} = \underset{mnv}{\mathfrak{S}}T^{*i}_{sj}T^{*p}_{mn}T^{*s}_{pv},$$

equation (2.18) becomes

$$\begin{aligned}\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{4}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{jmn\underset{1}{|}v} = 2\underset{mnv}{\mathfrak{S}}[&T^{*i}_{jm;nv}+T^{i}_{pj}T^{*p}_{mn;v}+T^{*i}_{pm}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^{p}{}_{jnv}-T^{*p}_{jv;n})+T^{*p}_{mj}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{pnv}-T^{*i}_{pv;n}) \\ &+T^{*p}_{mn}(\underset{3}{\widetilde{K}}{}^{i}{}_{jvp}-2T^{*i}_{jp;v}-T^{*i}_{jv;p}-3T^{s}_{jp}T^{*i}_{sv}+3T^{s}_{jv}T^{*i}_{sp}+4T^{s}_{pv}T^{*i}_{sj})].\end{aligned} \tag{2.25}$$

□

3 Concluding remarks

1. For $g_{ij}(x,\dot{x}) = g_{ji}(x,\dot{x})$ we obtain usual Finsler space $\mathbb{F}_N$. All Bianchi type identities given in this work reduce to one in the symmetric case

$$\widetilde{K}^i_{jmn;v} + \widetilde{K}^j_{ivm;n} + \widetilde{K}^i_{jnv;m} = 0.$$

2. If $g_{ij}(x) \neq g_{ji}(x)$ one obtains a generalized Riemannian space $\mathbb{GR}_N$ (see [2]). For $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$ $\mathbb{GR}_N$ reduces to the Riemannian space $\mathbb{R}_N$.

In this paper we proved some Bianchi type identities for the tensors $\underset{\theta}{\widetilde{K}}$, $\theta = \overline{1,4}$. In the future work we will employ some properties for the tensors $\underset{\theta}{\widetilde{K}}$, $\theta = \overline{1,4}$ (the antisymmetry with respect of two indices, the cyclic symmetry, the symmetry with respect of pairs of indices) given in the work [14] and also proved Bianchi type identities.

In this way, we complement the properties of the four curvature tensors in $\mathbb{GF}_N$. All these tensors are interesting in constructions of new mathematical and physical structures.

Acknowledgement:

The authors gratefully acknowledge the support from research projects 144032 and 174012 of the Serbian Ministry of Science. Also authors wish to thank to anonymous referee for valuable comments improving the quality of the paper.

References

[1] Čomić I. Recurrent curvature tensors in Finsler spaces with generalised connection // *Publ. Math., Debrecen*, T. 35, 1988, pp. 83–91.

[2] Eisenhart L.P. Generalized Riemannian Spaces // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 37, 1951, pp. 311-315.

[3] Li Xin, Chang Zhe. Toward a Gravitation Theory in Berwald-Finsler Space // *arXiv*:0711.1934v1 [gr-qc] 13 Nov 2007.

[4] Minčić S.M., Zlatanović M.Lj. New Commutation formulas for δ-differentation in Generalized Finsler Space // *Differential Geometry-Dynamical Systems*, Vol.12, 2010, pp. 145-157.

[5] Moór, A. *Über* die *Veränderung* der *Krümmung* Bei Einer Torsion der *Übertragung* // *Acta Math. Adem. Sci. Hungarica*, T. 26(1-2), 1975, pp.97-111.

[6] Moór A. *Über* Allgemeine Übertragungstheorien in Metrischen Linienelementräumen // *Acta Math. Adem. Sci. Hungarica*, T. 28(3-4), 1976, pp. 321-334.

[7] Pande H.D., Gupta K.K. Bianchi's identites in a Finsler space with non-symmetric connection // *Bulletin T. LXIV de l'Academie serbe des Science et des Arts* No 10, 1970, pp. 41-46.

[8] Rund H. The Differential Geometry of Finsler Spaces. Moscow, 1981, (in Russian).

[9] Vacaru, S. I. Einstein Gravity, Langrange-Finsler Geometry, and Nonsymmetric metrics on Nonholonomic Manifolds. SIGMA 4, 2008, 071, 29 pages.

[10] Wanas M.I. An AP-structure with Finslerian Flavor:I // *Modern Physics Letters A*, vol 24, no. 22, 2009, pp. 1749-1762.

[11] Weatherburn C. E. Riemannian Geometry and Tensor Calculus. Cambridge U. P., 1950.

[12] Yoshihoro I., Il-Yong L., Hong-Suh P. On Generalized Finsler Space Structure with a Vanishing *hv*-Torsion // *J. Korean Math. Soc.*, 41, 2004, No. 2, pp. 369–378.

[13] Youssef N.L., Sid- Ahmed Amr M. Linear Connections and Curvature Tensors in the Geometry of Parallelizable Manifolds // *Reports on Mathematical Physics*, vol 60, 2007, no. 1., pp. 39-53.

[14] Zlatanović M. Lj., Minčić S. M. Identities for curvature tensors in generalized Finsler space // *Filomat*, 23:2, 2009, pp. 34-42.

ТОЖДЕСТВА ТИПА БЬЯНКИ В ОБОБЩЕННОМ ФИНСЛЕРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М.Л. Златанович, С.М. Минцич

Университет Ниша, Ниш, Сербия

zlatmilan@yahoo.com, svetislavmincic@yahoo.com

В работах [4,14] мы исследовали обобщенное финслерово пространство (с несимметричным базисным тензором) и, используя четыре типа производных в смысле дельта-дифференцирования Рунда, получили четыре тензора кривизны. В настоящей работе, обобщая известные тождества Бьянки обычного финслерова пространства, мы исследуем тождества типа Бьянки связанные с упомянутыми тензорами кривизны в обобщенном финслеровом пространстве.

Ключевые слова: обобщенные финслеровы пространства, несимметричная связность, тождества типа Бьянки.
AMS: 53A45, 53B05, 53B40.

MULTIDIMENSIONAL LAPLACE TRANSFORMS OVER CAYLEY-DICKSON ALGEBRAS AND THEIR APPLICATIONS

S.V. Ludkovsky

Moscow State Technical University MIREA, Moscow, Russia

sludkowski@mail.ru

Multidimensional noncommutative Laplace transforms over octonions are studied. Theorems about direct and inverse transforms and other properties of the Laplace transforms over the Cayley-Dickson algebras are proved. Applications to partial differential equations including that of elliptic, parabolic and hyperbolic type are investigated. Moreover, partial differential equations of higher order with real and complex coefficients and with variable coefficients with or without boundary conditions are considered.

Key Words: multidimensional noncommutative Laplace transform, Cayley-Dickson algebras, partial differential equations, boundary conditions

1 Introduction.

The Laplace transform over the complex field is already classical and plays very important role in mathematics including complex analysis and differential equations [29, 12, 23]. The classical Laplace transform is used frequently for ordinary differential equations and also for partial differential equations sufficiently simple to be resolved, for example, of two variables. But it meets substantial difficulties or does not work for general partial differential equations even with constant coefficients especially for that of hyperbolic type.

To overcome these drawbacks of the classical Laplace transform in the present paper more general noncommutative multiparameter transforms over Cayley-Dickson algebras are investigated. In the preceding paper a noncommutative analog of the classical Laplace transform over the Cayley-Dickson algebras was defined and investigated [18]. This paper is devoted to its generalizations for several real parameters and also variables in the Cayley-Dickson algebras. For this the preceding results of the author on holomorphic, that is (super)differentiable functions, and meromorphic functions of the Cayley-Dickson numbers are used [17, 16]. The super-differentiability of functions of Cayley-Dickson variables is stronger than the Fréchet's differentiability. In those works also a noncommutative line integration was investigated.

We remind that quaternions and operations over them had been first defined and investigated by W.R. Hamilton in 1843 [8]. Several years later on Cayley and Dickson had introduced generalizations of quaternions known now as the Cayley-Dickson algebras [2, 9, 11, 25]. These algebras, especially quaternions and octonions, have found applications in physics. They were used by Maxwell, Yang and Mills while derivation of their equations, which they then have rewritten in the real form because of the insufficient development of mathematical analysis over such algebras in their time [4, 7, 13]. This is important, because noncommutative gauge fields are widely used in theoretical physics [27].

Each Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$ over the real field $\mathbf{R}$ has 2^r generators $\{i_0, i_1, ..., i_{2^r-1}\}$ such that $i_0 = 1$, $i_j^2 = -1$ for each $j = 1, 2, ..., 2^r-1$, $i_j i_k = -i_k i_j$ for every $1 \le k \ne j \le 2^r-1$, where $r \ge 1$. The algebra $\mathcal{A}_{r+1}$ is formed from the preceding algebra $\mathcal{A}_r$ with the help of the so-called doubling procedure by generator i_{2^r}. In particular, $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}$ coincides with the field of complex numbers, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$ is the skew field of quaternions, $\mathcal{A}_3$ is the algebra of octonions, $\mathcal{A}_4$ is the algebra of sedenions. This means that a sequence of embeddings $... \hookrightarrow \mathcal{A}_r \hookrightarrow \mathcal{A}_{r+1} \hookrightarrow ...$ exists.

Generators of the Cayley-Dickson algebras have a natural physical meaning as generating operators of fermions. The skew field of quaternions is associative, and the algebra of octonions is alternative. The Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$ is power associative, that is, $z^{n+m} = z^n z^m$

for each $n, m \in \mathbf{N}$ and $z \in \mathcal{A}_r$. It is non-associative and non-alternative for each $r \geq 4$. A conjugation $z^* = \tilde{z}$ of Cayley-Dickson numbers $z \in \mathcal{A}_r$ is associated with the norm $|z|^2 = zz^* = z^*z$. The octonion algebra has the multiplicative norm and is the division algebra. Cayley-Dickson algebras $\mathcal{A}_r$ with $r \geq 4$ are not division algebras and have not multiplicative norms. The conjugate of any Cayley-Dickson number z is given by the formula:

$(M1)$ $z^* := \xi^* - \eta\mathbf{l}$.

The multiplication in $\mathcal{A}_{r+1}$ is defined by the following equation:

$(M2)$ $(\xi + \eta\mathbf{l})(\gamma + \delta\mathbf{l}) = (\xi\gamma - \tilde{\delta}\eta) + (\delta\xi + \eta\tilde{\gamma})\mathbf{l}$

for each ξ, η, γ, $\delta \in \mathcal{A}_r$, $z := \xi + \eta\mathbf{l} \in \mathcal{A}_{r+1}$, $\zeta := \gamma + \delta\mathbf{l} \in \mathcal{A}_{r+1}$.

At the beginning of this article a multiparameter noncommutative transform is defined. Then new types of the direct and inverse noncommutative multiparameter transforms over the general Cayley-Dickson algebras are investigated, particularly, also over the quaternion skew field and the algebra of octonions. The transforms are considered in $\mathcal{A}_r$ spherical and $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates. At the same time specific features of the noncommutative multiparameter transforms are elucidated, for example, related with the fact that in the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$ there are $2^r - 1$ imaginary generators $\{i_1, ..., i_{2^r-1}\}$ apart from one in the field of complex numbers such that the imaginary space in $\mathcal{A}_r$ has the dimension $2^r - 1$. Theorems about properties of images and originals in conjunction with the operations of linear combinations, differentiation, integration, shift and homothety are proved. An extension of the noncommutative multiparameter transforms for generalized functions is given. Formulas for noncommutative transforms of products and convolutions of functions are deduced.

Thus this solves the problem of non-commutative mathematical analysis to develop the multiparameter Laplace transform over the Cayley-Dickson algebras. Moreover, an application of the noncommutative integral transforms for solutions of partial differential equations is described. It can serve as an effective means (tool) to solve partial differential equations with real or complex coefficients with or without boundary conditions and their systems of different types. An algorithm is described which permits to write fundamental solutions and functions of Green's type. A moving boundary problem and partial differential equations with discontinuous coefficients are also studied with the use of the noncommutative transform.

Moreover, a decomposition theorem of linear partial differential operators over the Cayley-Dickson algebras is proved. A relation between fundamental solutions of an initial and component operators is demonstrated. In conjunction with a line integration over the Cayley-Dickson algebras and the decomposition theorem of partial differential operators it permits to solve partial differential equations linear with constant and variable coefficients and non-linear as well as boundary problems (see also [19]). Certainly, this approach effectively encompasses systems of partial differential equations, because each function f with values in the Cayley-Dickson algebra is the sum of functions $f_j i_j$, where each function f_j is real-valued.

All results of this paper are obtained for the first time.

2 Multidimensional noncommutative integral transforms.

1. Definitions. Transforms in $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates.
Denote by $\mathcal{A}_r$ the Cayley-Dickson algebra, $0 \leq r$, which may be, in particular, $\mathbf{H} = \mathcal{A}_2$ the quaternion skew field or $\mathbf{O} = \mathcal{A}_3$ the octonion algebra. For unification of the notation we put $\mathcal{A}_0 = \mathbf{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}$. A function $f : \mathbf{R}^n \to \mathcal{A}_r$ we call a function-original, where $2 \leq r$, $n \in \mathbf{N}$, if it fulfills the following conditions $(1-5)$.

(1). The function $f(t)$ is almost everywhere continuous on $\mathbf{R}^n$ relative to the Lebesgue measure λ_n on $\mathbf{R}^n$.

(2). On each finite interval in $\mathbf{R}$ each function $g_j(t_j) = f(t_1, ..., t_n)$ by t_j with marked all other variables may have only a finite number of points of discontinuity of the first kind, where $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbf{R}^n$, $t_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, ..., n$. Recall that a point $u_0 \in \mathbf{R}$ is called a point of discontinuity of the first type, if there exist finite left and right limits $\lim_{u \to u_0, u < u_0} g(u) =: g(u_0 - 0) \in \mathcal{A}_r$ and $\lim_{u \to u_0, u > u_0} g(u) =: g(u_0 + 0) \in \mathcal{A}_r$.

(3). Every partial function $g_j(t_j)=f(t_1, ..., t_n)$ satisfies the Hölder condition: $|g_j(t_j + h_j) - g_j(t_j)| \le A_j |h_j|^{\alpha_j}$ for each $|h_j| < \delta$, where $0 < \alpha_j \le 1$, $A_j = const > 0$, $\delta_j > 0$ are constants for a given $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbf{R}^n$, $j = 1, ..., n$, everywhere on $\mathbf{R}^n$ may be besides points of discontinuity of the first type.

(4). The function $f(t)$ increases not faster, than the exponential function, that is there exist constants $C_v = const > 0$, $v = (v_1, ..., v_n)$, $a_{-1}, a_1 \in \mathbf{R}$, where $v_j \in \{-1, 1\}$ for every $j = 1, ..., n$, such that

$|f(t)| < C_v \exp((q_v, t))$ for each $t \in \mathbf{R}^n$ with $t_j v_j \ge 0$ for each $j = 1, ..., n$, $q_v = (v_1 a_{v_1}, ..., v_n a_{v_n})$; where

(5) $(x, y) := \sum_{j=1}^n x_j y_j$ denotes the standard scalar product in $\mathbf{R}^n$.

Certainly for a bounded original f it is possible to take $a_{-1} = a_1 = 0$.

Each Cayley-Dickson number $p \in \mathcal{A}_r$ we write in the form

(6) $p = \sum_{j=0}^{2^r-1} p_j i_j$, where $\{i_0, i_1, ..., i_{2^r-1}\}$ is the standard basis of generators of $\mathcal{A}_r$ so that $i_0 = 1$, $i_j^2 = -1$ and $i_0 i_j = i_j = i_j i_0$ for each $j > 0$, $i_j i_k = -i_k i_j$ for each $j > 0$ and $k > 0$ with $k \ne j$, $p_j \in \mathbf{R}$ for each j.

If there exists an integral

(7) $F^n(p) := F^n(p; \zeta) := \int_{\mathbf{R}^n} f(t) e^{-<p,t) - \zeta} dt$,

then $F^n(p)$ is called the noncommutative multiparameter (Laplace) transform at a point $p \in \mathcal{A}_r$ of the function-original $f(t)$, where $\zeta - \zeta_0 = \zeta_1 i_1 + ... + \zeta_{2^r-1} i_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$ is the parameter of an initial phase, $\zeta_j \in \mathbf{R}$ for each $j = 0, 1, ..., 2^r - 1$, $\zeta \in \mathcal{A}_r$, $n = 2^r - 1$, $dt = \lambda_n(dt)$,

(8) $< p, t) = p_0(t_1 + ... + t_{2^r-1}) + \sum_{j=1}^{2^r-1} p_j t_j i_j$, we also put

(8.1) $u(p, t; \zeta) =< p, t) + \zeta$.

For vectors $v, w \in \mathbf{R}^n$ we shall consider a partial ordering

(9) $v \prec w$ if and only if $v_j \le w_j$ for each $j = 1, ..., n$ and a k exists so that $v_k < w_k$, $1 \le k \le n$.

2. Transforms in $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates.

Now we consider also the non-linear function $u = u(p, t; \zeta)$ taking into account non commutativity of the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$. Put

(1) $u(p, t) := u(p, t; \zeta) := p_0 s_1 + M(p, t) + \zeta_0$, where

(2) $M(p, t) = M(p, t; \zeta) = (p_1 s_1 + \zeta_1) \big[i_1 \cos(p_2 s_2 + \zeta_2) + i_2 \sin(p_2 s_2 + \zeta_2) \cos(p_3 s_3 + \zeta_3) + ... + i_{2^r-2} \sin(p_2 s_2 + \zeta_2) ... \sin(p_{2^r-2} s_{2^r-2} + \zeta_{2^r-2}) \cos(p_{2^r-1} s_{2^r-1} + \zeta_{2^r-1}) + i_{2^r-1} \sin(p_2 s_2 + \zeta_2) ... \sin(p_{2^r-2} s_{2^r-2} + \zeta_{2^r-2}) \sin(p_{2^r-1} s_{2^r-1} + \zeta_{2^r-1}) \big]$

for the general Cayley-Dickson algebra with $2 \le r < \infty$,

(2.1) $s_j := s_j(n; t) := t_j + ... + t_n$ for each $j = 1, ..., n$, $n = 2^r - 1$, so that $s_1 = t_1 + ... + t_n$, $s_n = t_n$. More generally, let

(3) $u(p, t) = u(p, t; \zeta) = p_0 s_1 + w(p, t) + \zeta_0$, where $w(p, t)$ is a locally analytic function, $Re(w(p, t))=0$ for each $p \in \mathcal{A}_r$ and $t \in \mathbf{R}^{2^r-1}$, $Re(z) := (z + \tilde{z})/2$, $\tilde{z} = z^*$ denotes the conjugated number for $z \in \mathcal{A}_r$. Then the more general non-commutative multiparameter transform over

$\mathcal{A}_r$ is defined by the formula:

(4) $F^n_u(p;\zeta) := \int_{\mathbf{R}^n} f(t)\exp(-u(p,t;\zeta))dt$
for each Cayley-Dickson numbers $p \in \mathcal{A}_r$ whenever this integral exists as the principal value of either Riemann or Lebesgue integral, $n = 2^r - 1$. This non-commutative multiparameter transform is in $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates, when $u(p,t;\zeta)$ is given by Formulas $(1,2)$.

At the same time the components p_j of the number p and ζ_j for ζ in $u(p,t;\zeta)$ we write in the p- and ζ-representations respectively such that

(5) $h_j = \left(-hi_j + i_j(2^r-2)^{-1}\left\{-h + \sum_{k=1}^{2^r-1} i_k(hi_k^*)\right\}\right)/2$ for each $j = 1,2,...,2^r-1$,

(6) $h_0 = \left(h + (2^r-2)^{-1}\left\{-h + \sum_{k=1}^{2^r-1} i_k(hi_k^*)\right\}\right)/2$,

where $2 \le r \in \mathbf{N}$, $h = h_0i_0 + ... + h_{2^r-1}i_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$, $h_j \in \mathbf{R}$ for each j, $i_k^* = \tilde{i}_k = -i_k$ for each $k > 0$, $i_0 = 1$, $h \in \mathcal{A}_r$. Denote $F^n_u(p;\zeta)$ in more details by $\mathcal{F}^n(f,u;p;\zeta)$.

Henceforth, the functions $u(p,t;\zeta)$ given by $1(8, 8.1)$ or $(1,2,2.1)$ are used, if another form (3) is not specified. If for $u(p,t;\zeta)$ concrete formulas are not mentioned, it will be undermined, that the function $u(p,t;\zeta)$ is given in $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates by Expressions $(1,2,2.1)$. If in Formulas 1(7) or (4) the integral is not by all, but only by $t_{j(1)},...,t_{j(k)}$ variables, where $1 \le k < n$, $1 \le j(1) < ... < j(k) \le n$, then we denote a noncommutative transform by $F_u^{k;t_{j(1)},...,t_{j(k)}}(p;\zeta)$ or $\mathcal{F}^{k;t_{j(1)},...,t_{j(k)}}(f,u;p;\zeta)$. If $j(1) = 1$,...,$j(k) = k$, then we denote it shortly by $F^k_u(p;\zeta)$ or $\mathcal{F}^k(f,u;p;\zeta)$. Henceforth, we take $\zeta_m = 0$ and $t_m = 0$ and $p_m = 0$ for each $1 \le m \notin \{j(1),...,j(k)\}$ if something other is not specified.

3. Remark. The spherical $\mathcal{A}_r$ coordinates appear naturally from the following consideration of iterated exponents:

$$(1)\ \exp(i_1(p_1s_1+\zeta_1)\exp\big(-i_3(p_2s_2+\zeta_2)\exp(-i_1(p_3s_3+\zeta_3))\big))$$
$$= \exp\big(i_1(p_1s_1+\zeta_1)\exp\big(-(p_2s_2+\zeta_2)(i_3\cos(p_3s_3+\zeta_3) - i_2\sin(p_3s_3+\zeta_3))\big)\big)$$
$$= \exp\big(i_1(p_1s_1+\zeta_1)(\cos(p_2s_2+\zeta_2) - \sin(p_2s_2+\zeta_2)(i_3\cos(p_3s_3+\zeta_3) - i_2\sin(p_3s_3+\zeta_3)))\big)$$
$$= \exp\big((p_1s_1+\zeta_1)(i_1\cos(p_2s_2+\zeta_2) + i_2\sin(p_2s_2+\zeta_2)\cos(p_3s_3+\zeta_3) + i_3\sin(p_2s_2+\zeta_2)\sin(p_3s_3+\zeta_3))\big).$$

Consider i_{2^r} the generator of the doubling procedure of the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_{r+1}$ from the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$, such that $i_ji_{2^r} = i_{2^r+j}$ for each $j = 0,...,2^r-1$. We denote now the function $M(p,t;\zeta)$ from Definition 2 over $\mathcal{A}_r$ in more details by ${}_rM$.

Then by induction we write:

$$(2)\quad \exp\big({}_{r+1}M(p,t;\zeta)\big) = \exp\big\{{}_rM\big((i_1p_1 + ... + i_{2^r-1}p_{2^r-1}), (t_1,...,t_{2^r-2}, (t_{2^r-1} + s_{2^r}));$$
$$(i_1\zeta_1 + ... + i_{2^r-1}\zeta_{2^r-1})\exp(-i_{2^r+1}(p_{2^r}s_{2^r} + \zeta_{2^r})\exp(-{}_rM((i_1p_{2^r+1} + ... + i_{2^r-1}p_{2^{r+1}-1}),$$
$$(t_{2^r+1},...,t_{2^{r+1}-1}); (i_1\zeta_{2^r+1} + ... + i_{2^r-1}\zeta_{2^{r+1}-1}))))\big\},$$

where $t = (t_1,...,t_n)$, $n = n(r+1) = 2^{r+1}-1$, $s_j = s_j(n(r+1);t)$ for each $j = 1,...,n(r+1)$, since $s_m(n(r+1);t) = t_m + ... + t_{n(r+1)} = s_m(n(r);t) + s_{2^r}(n(r+1);t)$ for each $m = 1,...,2^r-1$.

An image function can be written in the form

(3) $F^n_u(p;\zeta) := \sum_{j=0}^{2^r-1} i_jF^n_{u,j}(p;\zeta)$,
where a function f is decomposed in the form

(3.1) $f(t) = \sum_{j=0}^{2^r-1} i_jf_j(t)$, $f_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ for each $j = 0,1,...,2^r-1$, $F^n_{u,j}(p;\zeta)$ denotes the image of the function-original f_j.

If an automorphism of the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$ is taken and instead of the standard generators $\{i_0,...,i_{2^r-1}\}$ new generators $\{N_0,...,N_{2^r-1}\}$ are used, this provides also $M(p,t;\zeta) =$

$M_N(p,t;\zeta)$ relative to new basic generators, where $2 \le r \in \mathbf{N}$. In this more general case we denote by ${}_NF^n_u(p;\zeta)$ an image for an original $f(t)$, or in more details we denote it by ${}_N\mathcal{F}^n(f,u;p;\zeta)$.

Formulas 1(7) and 2(4) define the right multiparameter transform. Symmetrically is defined a left multiparameter transform. They are related by conjugation and up to a sign of basic generators. For real valued originals they certainly coincide. Henceforward, only the right multiparameter transform is investigated.

Particularly, if $p = (p_0, p_1, 0, ..., 0)$ and $t = (t_1, 0, ..., 0)$, then the multiparameter non-commutative Laplace transforms 1(7) and 2(4) reduce to the complex case, with parameters a_1, a_{-1}. Thus, the given above definitions over quaternions, octonions and general Cayley-Dickson algebras are justified.

4. Theorem. *If an original $f(t)$ satisfies Conditions 1$(1-4)$ and $a_1{<}a_{-1}$, then its image $\mathcal{F}^n(f,u;p;\zeta)$ is $\mathcal{A}_r$-holomorphic (that is locally analytic) by p in the domain $\{z \in \mathcal{A}_r : a_1 < Re(z) < a_{-1}\}$, as well as by $\zeta \in \mathcal{A}_r$, where $1{\le}r{\in}\mathbf{N}$, $2^{r-1}{\le}n{\le}2^r-1$, the function $u(p,t;\zeta)$ is given by 1(8,8.1) or 2(1,2, 2.1).*

Proof. At first consider the characteristic functions $\chi_{U_v}(t)$, where $\chi_U(t) = 1$ for each $t \in U$, while $\chi_U(t) = 0$ for every $t \in \mathbf{R}^n \setminus U$, $U_v := \{t \in \mathbf{R}^n : v_jt_j \ge 0\ \forall j = 1, ..., n\}$ is the domain in the Euclidean space $\mathbf{R}^n$ for any v from §1. Therefore,

(1) $F^n_u(p;\zeta) := \sum_{[v=(v_1,...,v_n):v_1,...,v_n\in\{-1,1\}]} \int_{U_v} f(t)\exp(-u(p,t;\zeta))dt$,

since $\lambda_n(U_v \cap U_w) = 0$ for each $v \ne w$. Each integral $\int_{U_v} f(t)\exp(-u(p,t;\zeta))dt$ is absolutely convergent for each $p \in \mathcal{A}_r$ with the real part $a_1 < Re(p) < a_{-1}$, since it is majorized by the converging integral

(2) $\left|\int_{U_v} f(t)\exp(-u(p,t;\zeta))dt\right| \le \int_0^\infty ... \int_0^\infty C_v \exp\{-v_1(w-a_{v_1})y_1 - ... - v_n(w-a_{v_n})y_n - \zeta_0\}$ $dy_1...dy_n = C_ve^{-\zeta_0}\prod_{j=1}^n v_j(w-a_{v_j})^{-1}$,

where $w = Re(p)$, since $|e^z| = \exp(Re(z))$ for each $z \in \mathcal{A}_r$ in view of Corollary 3.3 [16]. While an integral, produced from the integral (1) differentiating by p converges also uniformly:

(3) $\left|\int_{U_v} f(t)\left[\partial\exp(-u(p,t;\zeta))/\partial p\right].hdt\right|$
$\le \int_0^\infty ... \int_0^\infty C_v\big|(h_0(v_1y_1 + ... + v_ny_n), h_1(v_1y_1 + ... + v_ny_n), ..., h_{n-1}(v_{n-1}y_{n-1} + v_ny_n), h_nv_ny_n)\big|$
$\exp\{-v_1(w-a_{v_1})y_1 - ... - v_n(w-a_{v_n})y_n - \zeta_0\}dy_1...dy_n$
$\le |h|C_ve^{-\zeta_0}\prod_{j=1}^n(w-a_{v_j})^{-2}$

for each $h \in \mathcal{A}_r$, since each $z \in \mathcal{A}_r$ can be written in the form $z = |z|\exp(M)$, where $|z|^2 = z\tilde{z} \in [0,\infty) \subset \mathbf{R}$, $M \in \mathcal{A}_r$, $Re(M) := (M + \tilde{M})/2 = 0$ in accordance with Proposition 3.2 [16]. In view of Equations 2(5, 6):

(4) $\partial\left(\int_{\mathbf{R}^n} f(t)\exp(-u(p,t;\zeta))dt\right)/\partial\tilde{p} = 0$ and

(5) $\partial\left(\int_{\mathbf{R}^n} f(t)\exp(-u(p,t;\zeta))dt\right)/\partial\tilde{\zeta} = 0$, while

(6) $\left|\int_{U_v} f(t)\left[\partial\exp(-u(p,t;\zeta))/\partial\zeta\right].hdt\right| \le |h|\int_0^\infty ... \int_0^\infty C_v\exp\big\{-v_1(w-a_{v_1})y_1 - ... - v_n(w-$ $a_{v_n})y_n - \zeta_0\big\}dy_1...dy_n = |h|C_ve^{-\zeta_0}\prod_{j=1}^n v_j(w-a_{v_j})^{-1}$

for each $h \in \mathcal{A}_r$. In view of convergence of integrals given above $(1-6)$ the multiparameter non-commutative transform $F^n_u(p;\zeta)$ is (super)differentiable by p and ζ, moreover, $\partial F^n_u(p;\zeta)/\partial\tilde{p} = 0$ and $\partial F^n_u(p;\zeta)/\partial\tilde{\zeta} = 0$ in the considered (p,ζ)-representation. In accordance with [17, 16] a function $g(p)$ is locally analytic by p in an open domain U in the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$, $2 \le r$, if and only if it is (super)differentiable by p, in another words $\mathcal{A}_r$-holomorphic. Thus, $F^n_u(p;\zeta)$ is $\mathcal{A}_r$-holomorphic by $p \in \mathcal{A}_r$ with $a_1 < Re(p) < a_{-1}$ and $\zeta \in \mathcal{A}_r$ due to Theorem 2.6 [18].

4.1. Corollary. *Let suppositions of Theorem 4 be satisfied. Then the image $\mathcal{F}^n(f,u;p;\zeta)$*

with $u = u(p,t;\zeta)$ given by 2(1, 2) has the following periodicity properties:

(1) $\mathcal{F}^n(f,u;p;\zeta+\beta i_j) = \mathcal{F}^n(f,u;p;\zeta)$ *for each* $j = 1,...,n$ *and* $\beta \in 2\pi\mathbf{Z}$;

(2) $\mathcal{F}^n(f,u;p^1;\zeta^1) = (-1)^\kappa \mathcal{F}^n(f,u;p^2;\zeta^2)$ *for each* $j = 1,...,n-1$ *so that* $\zeta^1_0 = \zeta^2_0$ *and* $\zeta^1_j = -\zeta^2_j$, $\zeta^1_{j+1} = \pi + \zeta^2_{j+1}$, $\zeta^1_s = \zeta^2_s$ *for each* $s \ne j$ *and* $s \ne j+1$, *while either* $p^1_j = -p^2_j$ *and* $p^1_l = p^2_l$ *for each* $l \ne j$ *with* $\kappa = 2$ *or* $p^1 = p^2$ *and* $f(t)$ *is an even function with* $\kappa = 2$ *by the* $s_j = (t_j + ... + t_n)$ *variable or an odd function by* $s_j = (t_j + ... + t_n)$ *with* $\kappa = 1$;

(3) $\mathcal{F}^n(f,u;p;\zeta+\pi i_1) = -\mathcal{F}^n(f,u;p;\zeta)$.

Proof. In accordance with Theorem 4 the image $\mathcal{F}^n(f,u;p;\zeta)$ exists for each $p \in W_f := \{z \in \mathcal{A}_r : a_1 < Re(z) < a_{-1}\}$ and $\zeta \in \mathcal{A}_r$, where $1 \le r$. Then from the 2π periodicity of sine and cosine functions the first statement follows. From $\sin(-\phi) = -\sin(\phi)$, $\cos(\phi) = \cos(-\phi)$, $\sin(\pi+\phi) = -\sin(\phi)$, $\cos(\phi+\pi) = -\cos(\phi)$ we get that $\cos(p_js_j + \zeta^1_j) = \cos(-p_js_j + \zeta^2_j)$, $\sin(p_js_j+\zeta^1_j)\cos(p_{j+1}s_{j+1}+\zeta^1_{j+1}) = (-\sin(-p_js_j+\zeta^2_j))(-\cos(p_{j+1}s_{j+1}+\zeta^2_{j+1}))$ and $\sin(p_js_j + \zeta^1_j)\sin(p_{j+1}s_{j+1}+\zeta^1_{j+1}) = (-\sin(-p_js_j+\zeta^2_j))(-\sin(p_{j+1}s_{j+1}+\zeta^2_{j+1}))$ for each $t \in \mathbf{R}^n$. On the other hand, either $p^1_j = -p^2_j$ and $p^1_l = p^2_l$ for each $l \ne j \ge 1$ with $\kappa = 2$ or $p^1 = p^2$ and $f(t_1,...,s_{j-1}+s_j,-s_j-s_{j+1},t_{j+1},...,t_n) = (-1)^\kappa f(t_1,...,s_{j-1}-s_j,s_j-s_{j+1},t_{j+1},...,t_n)$ is an even with $\kappa = 2$ or odd with $\kappa = 1$ function by the $s_j = (t_j + ... + t_n)$ variable for each $t = (t_1,...,t_n) \in \mathbf{R}^n$, where $t_j = s_j - s_{j+1}$ for $j = 1,...,n$, $s_{n+1} = s_{n+1}(n;t) = 0$. From this and Formulas 2(1, 2, 4) the second and the third statements of this corollary follow.

5. Remark. For a subset U in $\mathcal{A}_r$ we put $\pi_{\mathsf{s},\mathsf{p},\mathsf{t}}(U) := \{\mathsf{u} : z \in U, z = \sum_{\mathsf{v}\in\mathbf{b}} w_\mathsf{v}\mathsf{v},\ \mathsf{u} = w_\mathsf{s}\mathsf{s}+w_\mathsf{p}\mathsf{p}\}$ for each $\mathsf{s} \ne \mathsf{p} \in \mathbf{b}$, where $\mathsf{t} := \sum_{\mathsf{v}\in\mathbf{b}\setminus\{\mathsf{s},\mathsf{p}\}} w_\mathsf{v}\mathsf{v} \in \mathcal{A}_{r,\mathsf{s},\mathsf{p}} := \{z \in \mathcal{A}_r : z = \sum_{\mathsf{v}\in\mathbf{b}} w_\mathsf{v}\mathsf{v},\ w_\mathsf{s} = w_\mathsf{p} = 0,\ w_\mathsf{v} \in \mathbf{R}\ \forall \mathsf{v} \in \mathbf{b}\}$, where $\mathbf{b} := \{i_0, i_1, ..., i_{2^r-1}\}$ is the family of standard generators of the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$. That is, geometrically $\pi_{\mathsf{s},\mathsf{p},\mathsf{t}}(U)$ means the projection on the complex plane $\mathbf{C}_{\mathsf{s},\mathsf{p}}$ of the intersection U with the plane $\tilde{\pi}_{\mathsf{s},\mathsf{p},\mathsf{t}} \ni \mathsf{t}$, $\mathbf{C}_{\mathsf{s},\mathsf{p}} := \{a\mathsf{s} + b\mathsf{p} : a, b \in \mathbf{R}\}$, since $\mathsf{s}\mathsf{p}^* \in \hat{b} := \mathbf{b} \setminus \{1\}$. Recall that in §§2.5-7 [16] for each continuous function $f : U \to \mathcal{A}_r$ it was defined the operator $\hat{f}$ by each variable $z \in \mathcal{A}_r$. For the non-commutative integral transformations consider, for example, the left algorithm of calculations of integrals.

A Hausdorff topological space X is said to be n-connected for $n \ge 0$ if each continuous map $f : S^k \to X$ from the k-dimensional real unit sphere into X has a continuous extension over $\mathbf{R^{k+1}}$ for each $k \le n$ (see also [28]). A 1-connected space is also said to be simply connected.

It is supposed further, that a domain U in $\mathcal{A}_r$ has the property that U is (2^r-1)-connected; $\pi_{\mathsf{s},\mathsf{p},\mathsf{t}}(U)$ is simply connected in $\mathbf{C}$ for each $k = 0, 1, ..., 2^{r-1}$, $\mathsf{s} = i_{2k}$, $\mathsf{p} = i_{2k+1}$, $\mathsf{t} \in \mathcal{A}_{r,\mathsf{s},\mathsf{p}}$ and $\mathsf{u} \in \mathbf{C}_{\mathsf{s},\mathsf{p}}$, for which there exists $z = \mathsf{u} + \mathsf{t} \in U$.

6. Theorem. *If a function* $f(t)$ *is an original (see Definition 1), such that* ${}_N F^n_u(p;\zeta)$ *is its image multiparameter non-commutative transform, where the functions* f *and* F^n_u *are written in the forms given by 3(3, 3.1),* $f(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{A}_r$ *over the Cayley-Dickson algebra* $\mathcal{A}_r$, *where* $1 \le r \in \mathbf{N}$, $2^{r-1} \le n \le 2^r - 1$.

Then at each point t, *where* $f(t)$ *satisfies the Hölder condition the equality is accomplished:*

$$(1)\qquad f(t) = \left\{\left[(2\pi N_n)^{-1}\int_{-N_n\infty}^{N_n\infty}\right]\left(...\left(\left[(2\pi N_1)^{-1}\int_{-N_1\infty}^{N_1\infty}\right] {}_N F^n_u(a+p;\zeta)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\exp\{u(a+p,t;\zeta)\}\right)...\right)dp\right\} =: (\mathcal{F}^n)^{-1}({}_N F^n_u(a+p;\zeta), u, t;\zeta),$$

where either $u(p,t;\zeta) = <p,t) + \zeta$ *or* $u(p,t;\zeta) = p_0s_1 + M_N(p,t;\zeta) + \zeta_0$ *(see §§1 and 2), the integrals are taken along the straight lines* $p(\tau_j) = N_j\tau_j \in \mathcal{A}_r$, $\tau_j \in \mathbf{R}$ *for each* $j = 1,...,n$; $a_1 < Re(p) = a < a_{-1}$ *and this integral is understood in the sense of the principal value,* $t = (t_1,...,t_n) \in \mathbf{R}^n$, $dp = (...((d[p_1N_1])d[p_2N_2])...)d[p_nN_n]$.

Proof. In Integral (1) an integrand $\eta(p)dp$ certainly corresponds to the iterated integral as $(...(\eta(p)d[p_1N_1])...)d[p_nN_n]$, where $p = p_1N_1 + ... + p_nN_n$, $p_1, ..., p_n \in \mathbf{R}$. Using Decomposition 3(3.1) of a function f it is sufficient to consider the inverse transformation of the real valued function f_j, which we denote for simplicity by f. We put

$$ {}_NF^n_{u,j}(p;\zeta) := \int_{\mathbf{R}^n} f_j(t)\exp(-u(p,t;\zeta))dt. $$

If η is a holomorphic function of the Cayley-Dickson variable, then locally in a simply connected domain U in each ball $B(\mathcal{A}_r, z_0, R)$ with the center at z_0 of radius $R > 0$ contained in the interior $Int(U)$ of the domain U there is accomplished the equality

$\left(\partial\left[\int_{z_0}^{z}\eta(a+\zeta)d\zeta\right]\Big/\partial z\right).1 = \eta(a+z),$

where the integral depends only on an initial z_0 and a final z points of a rectifiable path in $B(\mathcal{A}_r, z_0, R)$, $a \in \mathbf{R}$ (see also Theorem 2.14 [18]). Therefore, along the straight line $N_j\mathbf{R}$ the restriction of the antiderivative has the form $\int_{\theta_0}^{\theta}\eta(a + N_j\tau_j)d\tau_j$, since

(2) $\int_{z_0=N_j\theta_0}^{z=N_j\theta}\eta(a+\zeta)d\zeta = \int_{\theta_0}^{\theta}\hat{\eta}(a+N_j\tau_j).N_jd\tau_j,$

where $\partial\eta(a+z)/\partial\theta = (\partial\eta(a+z)/\partial z).N_j$ for the (super)differentiable by $z \in U$ function $\eta(z)$, when $z{=}\theta N_j$, $\theta \in \mathbf{R}$. For the chosen branch of the line integral specified by the left algorithm this antiderivative is unique up to a constant from $\mathcal{A}_r$ with the given z-representation ν of the function η [16, 17, 18]. On the other hand, for analytic functions with real expansion coefficients in their power series non-commutative integrals specified by left or right algorithms along straight lines coincide with usual Riemann integrals by the corresponding variables. The functions $\sin(z)$, $\cos(z)$ and e^z participating in the multiparameter non-commutative transform are analytic with real expansion coefficients in their series by powers of $z \in \mathcal{A}_r$.

Using Formula 4(1) we reduce the consideration to $\chi_{U_v}(t)f(t)$ instead of $f(t)$. By symmetry properties of such domains and integrals and utilizing change of variables it is sufficient to consider U_v with $v = (1, ..., 1)$. In this case $\int_{\mathbf{R}^n}$ for the direct multiparameter non-commutative transform 1(7) and 2(4) reduces to $\int_0^\infty ... \int_0^\infty$. Therefore, we consider in this proof below the domain $U_{1,...,1}$ only. Using Formulas $3(3, 3.1)$ and $2(1, 2, 2.1)$ we mention that any real algebra with generators $N_0 = 1$, N_k and N_j with $1 \le k \ne j$ is isomorphic with the quaternion skew field $\mathbf{H}$, since $Re(N_jN_k) = 0$ and $|N_j| = 1$, $|N_k| = 1$ and $|N_jN_k| = 1$. Then $\exp(\alpha + M\beta)\exp(\gamma + M\omega) = \exp((\alpha+\gamma) + M(\beta+\omega))$ for each real numbers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ and a purely imaginary Cayley-Dickson number M.

The octonion algebra $\mathbf{O}$ is alternative, while the real field $\mathbf{R}$ is the center of the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$. We consider the integral

(3) $g_b(t) := \left[(2\pi N_n)^{-1}\int_{-N_nb}^{N_nb}\right]\left(...\left(\left[(2\pi N_1)^{-1}\int_{-N_1b}^{N_1b}\right]\ {}_NF^n_{u,j}(a{+}p;\zeta)\exp\{u(a{+}p,t;\zeta)\}\right)...\right)dp$

for each positive value of the parameter $0 < b < \infty$. With the help of generators of the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$ and the Fubini Theorem for real valued components of the function the integral can be written in the form:

$$ (4) \qquad g_b(t) = \left[(2\pi N_n)^{-1}\int_0^\infty d\tau_n\int_{-N_nb}^{N_nb}\right]\left(...\left(\left[(2\pi N_1)^{-1}\int_0^\infty d\tau_1\int_{-N_1b}^{N_1b}\right]\right.\right. $$
$$ \left.\left. f(\tau)\exp\{-u_N(a+p,t;\zeta)\}\exp\{u_N(a+p,\tau;\zeta)\}\right)...\right)dp, $$

since the integral $\int_{U_{1,...,1}} f(\tau)\exp\{-u_N(a+p,\tau;\zeta)\}d\tau$ for any marked $0 < \delta < (a_{-1} - a_1)/3$ is uniformly converging relative to p in the domain $a_1 + \delta \le Re(p) \le a_{-1} - \delta$ in $\mathcal{A}_r$ (see also Proposition 2.18 [18]).

If take marked t_k for each $k \ne j$ and $S = N_j$ for some $j \ge 1$ in Lemma 2.17 [18] considering the variable t_j, then with a suitable ($\mathbf{R}$-linear) automorphism $\mathbf{v}$ of the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$ an expression for $\mathbf{v}(M(p,t;\zeta))$ simplifies like in the complex case with $\mathbf{C}_K := \mathbf{R}\oplus\mathbf{R}K$ for a purely imaginary Cayley-Dickson number K, $|K| = 1$, instead of $\mathbf{C} := \mathbf{R}\oplus\mathbf{R}i_1$, where $\mathbf{v}(x) = x$ for each real number $x \in \mathbf{R}$. But each equality $\alpha = \beta$ in $\mathcal{A}_r$ is equivalent to $\mathbf{v}(\alpha) = \mathbf{v}(\beta)$. Then

(5) $Re\,[(N_jN_q)(N_jN_l)^*] = Re(N_qN_l^*) = \delta_{q,l}$ for each q, l.

If $S^j = \sum_{0\le l\le n;l\ne j} \alpha_l N_l$, $N^j = \sum_{0\le l\le n;l\ne j} \beta_l N_l$ with $j \ge 1$ and real numbers $\alpha_l, \beta_l \in \mathbf{R}$ for each l, then

(6) $Re\,[(N_jS^j)(N_jN^j)^*] = Re\,[S^j(N^j)^*] = \sum_l \alpha_l\beta_l$.

The latter identity can be applied to either $S^k = M_{k+1}(p_{k+1}N_{k+1} + ... + p_nN_n, (t_{k+1}, ..., t_n); \zeta_{k+1}N_{k+1} + ... + \zeta_nN_n)$ and $N^k = M_{k+1}(p_{k+1}N_{k+1} + ... + p_nN_n, (\tau_{k+1}, ..., \tau_n); \zeta_{k+1}N_{k+1} + ... + \zeta_nN_n)$, or $S^k = (p_{k+1}t_{k+1} + \zeta_{k+1})N_{k+1} + ... + (p_nt_n + \zeta_n)N_n$ and $N^k = (p_{k+1}\tau_{k+1} + \zeta_{k+1})N_{k+1} + ... + (p_n\tau_n + \zeta_n)N_n$, where

(7) $M_{k+1}(p_{k+1}N_{k+1} + ... + p_nN_n, (t_{k+1}, ..., t_n); \zeta_{k+1}N_{k+1} + ... + \zeta_nN_n) = (p_{k+1}s_{1,k+1} + \zeta_{k+1})[N_{k+1}\cos(p_{k+2}s_{2,k+1} + \zeta_{k+2}) + ... + N_n \sin(p_{k+2}s_{2,k+1} + \zeta_{k+2}) ... \sin(p_ns_{n-k,k+1} + \zeta_n)]$,

(8) $s_{j,k+1} = s_{j,k+1}(n;t) = t_{k+j} + ... + t_n = s_{k+j}(n;t)$ for each $j = 1, ..., n-1$; $s_{n-k,k+1} = s_{n-k,k+1}(n;t) = t_n$.

We take the limit of $g_b(t)$ when b tends to the infinity. Evidently, $s_k(n;\tau) - s_j(n;\tau) = s_k(j-1;\tau) = \tau_k + ... + \tau_{j-1}$ for each $1 \le k < j \le n$. By our convention $s_k(n;\tau) = s_1(n;\tau)$ for $k < 1$, while $s_k(n;\tau) = 0$ for $k > n$. Put

(9) $u_{n,j}(p_0 + p_jN_j + ... + p_nN_n, (\tau_j, ..., \tau_n); \zeta_0 + \zeta_jN_j + ... + \zeta_nN_n) = \zeta_0 + p_0s_{1,j} + M_j(p_jN_j + ... + p_nN_n, (\tau_j, ..., \tau_n); \zeta_0 + \zeta_jN_j + ... + \zeta_nN_n)$
for u_N given by $2(1,2,2.1)$, where M_j is prescribed by (7), $s_{k,j} = s_{k,j}(n;\tau)$;

(10) $u_{n,j}(p_0 + p_jN_j + ... + p_nN_n, (\tau_j, ..., \tau_n); \zeta_0 + \zeta_jN_j + ... + \zeta_nN_n) = \zeta_0 + p_0s_{1,j} + \sum_{k=j}^n (p_k\tau_k + \zeta_k)N_k$
for $u = u_N$ given by $1(8, 8.1)$. For $j > 1$ the parameter ζ_0 for $u = u_N$ given by $1(8, 8.1)$ or $2(1, 2, 2.1)$ can be taken equal to zero.

When $t_1, ..., t_{j-1}, t_{j+1}, ..., t_n$ and $p_1, ..., p_{j-1}, p_{j+1}, ..., p_n$ variables are marked, we take the parameter

$\zeta^j := \zeta^j(p_jN_j + ... + p_nN_n, (\tau_j, ..., \tau_n); \zeta_0 + \zeta_jN_j + ... + \zeta_nN_n) := (\zeta_0 + \zeta_jN_j + ... + \zeta_nN_n) + (a + p_0)s_{j+1} + p_{j+1}s_{j+1}N_{j+1} + ... + p_ns_nN_n$ for $u(p,\tau;\zeta)$ given by Formulas $2(1,2,2.1)$ or

$\zeta^j := \zeta^j(p_jN_j + ... + p_nN_n), (\tau_j, ..., \tau_n); \zeta_0 + \zeta_jN_j + ... + \zeta_nN_n) := (\zeta_0 + \zeta_jN_j + ... + \zeta_nN_n) + (a + p_0)s_{j+1} + p_{j+1}\tau_{j+1}N_{j+1} + ... + p_n\tau_nN_n$ for $u(p,\tau;\zeta)$ described in $1(8, 8.1)$. Then the integral operator
$\lim_{b\to\infty}[(2\pi N_j)^{-1}\int_0^\infty d\tau_j \int_{-N_jb}^{N_jb}]...(dp_jN_j)$ (see also Formula (4) above) applied to the function $f(t_1, ..., t_{j-1}, \tau_j, ..., \tau_n)\exp\{-u_{N,j}(a + p_0 + p_jN_j + ... + p_nN_n, (t_j, ..., t_n); \zeta_0 + \zeta_jN_j + ... + \zeta_nN_n)\}\exp\{u_{N,j}(a + p_0 + p_jN_j + ... + p_nN_n, (\tau_j, ..., \tau_n); \zeta_0 + \zeta_jN_j + ... + \zeta_nN_n)\}$ with the parameter ζ^j instead of ζ treated by Theorems 2.19 and 3.15 [18] gives the inversion formula corresponding to the real variable t_j for $f(t)$ and to the Cayley-Dickson variable $p_0N_0 + p_jN_j$ restricted on the complex plane $\mathbf{C}_{N_j} = \mathbf{R}\oplus\mathbf{R}N_j$, since $d(\tau_j + c) = d\tau_j$ for each (real) constant c. After integrations with $j = 1, ..., k$ with the help of Formulas $(6-10)$ and $3(1,2)$ we get the following:

$$(11)\quad \lim_{b\to\infty} g_b(t) = Re\left[(2\pi N_n)^{-1}\int_0^\infty d\tau_n \int_{-N_n\infty}^{N_n\infty}\right]\Bigg(...\Bigg(\left[(2\pi N_{k+1})^{-1}\int_0^\infty d\tau_{k+1}\int_{-N_{k+1}\infty}^{N_{k+1}\infty}\right]$$

$$f(t_1, ..., t_k, \tau_{k+1}, ..., \tau_n)\exp\big\{-u_{N,k+1}((a + p_0 + p_{k+1}N_{k+1} + ... + p_nN_n), (t_{k+1}, ..., t_n);$$

$$(\zeta_0+\zeta_{k+1}N_{k+1}+...+\zeta_nN_n))\}\exp\{u_{N,k+1}((a+p_0+p_{k+1}N_{k+1}+...+p_nN_n),$$

$$(\tau_{k+1},...,\tau_n);(\zeta_0+\zeta_{k+1}N_{k+1}+...+\zeta_nN_n))\}\Big)...\Big)dp.$$

Moreover, $Re(f_q)=f_q$ for each q and in (11) the function $f=f_q$ stands for some marked q in accordance with Decompositions $3(3,3.1)$ and the beginning of this proof.

Mention, that the algebra $alg_{\mathbf{R}}(N_j,N_k,N_l)$ over the real field with three generators N_j, N_k and N_l is alternative. The product N_kN_l of two generators is also the corresponding generator $(-1)^{\xi(k,l)}N_m$ with the definite number $m=m(k,l)$ and the sign multiplier $(-1)^{\xi(k,l)}$, where $\xi(k,l)\in\{0,1\}$. On the other hand, $N_{k_1}[\tilde{N}_j(N_j(N_{k_2}N_l))]=N_{k_1}(N_{k_2}N_l)$. We use decompositions $(7-10)$ and take $k_2=l$ due to Formula (11), where Re stands on the right side of the equality, since $Re(N_kN_l)=0$ and $Re[\tilde{N}_j(N_j(N_kN_l))]=0$ for each $k\ne l$. Thus the repeated application of this procedure by $j=1,2,...,n$ leads to Formula (1) of this theorem.

6.1. Corollary. *If the conditions of Theorem 6 are satisfied, then*

$$(1)\qquad f(t)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}F^n_u(a+p;\zeta)\exp\{u(a+p,t;\zeta)\}dp_1...dp_n$$

$$=(\mathcal{F}^n)^{-1}\big({}_NF^n_u(a+p;\zeta),u,t;\zeta\big).$$

Proof. Each algebra $alg_{\mathbf{R}}(N_j,N_k,N_l)$ is alternative. Therefore, in accordance with §6 and Formulas $1(8,8.1)$ and $2(1-4)$ for each non-commutative integral given by the left algorithm we get

$$(2)\qquad N_j^{-1}\int_{-N_jb}^{N_jb}\big[f(\tau)\exp\{-u_N(a+p,t;\zeta)\}\big]\exp\{u_N(a+p,\tau;\zeta)\}d(p_jN_j)$$

$$\sum_{l=0}^{2^r-1}\tilde{N}_j\left[N_j\left(\int_{-N_jb}^{N_jb}\big[N_lf_l(\tau)\exp\{-u_N(a+p,t;\zeta)\}\big]\exp\{u_N(a+p,\tau;\zeta)\}dp_j\right)\right]$$

$$=\int_{-b}^{b}\big[f(\tau)\exp\{-u_N(a+p,t;\zeta)\}\big]\exp\{u_N(a+p,\tau;\zeta)\}dp_j$$

for each $j=1,...,n$, since the real field is the center of the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$, while the functions sin and cos are analytic with real expansion coefficients. Thus

(3) $g_b(t)=(2\pi)^{-n}\Big[\int_0^\infty d\tau_n\int_{-b}^{b}\Big]\Big(...\Big(\Big[\int_0^\infty d\tau_1\int_{-b}^{b}\Big]f(\tau)\exp\{-u_N(a+p,t;\zeta)\}$
$\exp\{u_N(a+p,\tau;\zeta)\}\Big)...\Big)dp_1...dp_n$,

hence taking the limit with b tending to the infinity implies, that the non-commutative iterated (multiple) integral in Formula 6(1) reduces to the principal value of the usual integral by real variables $(\tau_1,...,\tau_n)$ and $(p_1,...,p_n)$ 6.1(1).

7. Theorem. *An original $f(t)$ with $f(\mathbf{R}^n)\subset\mathcal{A}_r$ over the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$ with $1\le r\in\mathbf{N}$ is completely defined by its image ${}_NF^n_u(p;\zeta)$ up to values at points of discontinuity, where the function $u(p,t;\zeta)$ is given by 1(8,8.1) or 2(1,2, 2.1).*

Proof. Due to Corollary 6.1 the value $f(t)$ at each point t of continuity of $f(t)$ has the expression throughout ${}_NF^n_u(p;\zeta)$ prescribed by Formula 6.1(1). Moreover, values of the original at points of discontinuity do not influence on the image ${}_NF^n_u(p;\zeta)$, since on each bounded interval in $\mathbf{R}$ by each variable t_j a number of points of discontinuity is finite and by our supposition above the original function $f(t)$ is λ_n-almost everywhere on $\mathbf{R}^n$ continuous.

8. Theorem. *Suppose that a function ${}_NF^n_u(p;\zeta)$ is analytic by the variable $p\in\mathcal{A}_r$ in a domain*

$W := \{p \in \mathcal{A}_r : a_1 < Re(p) < a_{-1}\}$, where $2 \le r \in \mathbf{N}$, $2^{r-1} \le n \le 2^r - 1$, $f(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{A}_r$, either $u(p,t;\zeta) =< p,t) + \zeta$ or $u(p,t;\zeta) := p_0 s_1 + M(p,t;\zeta) + \zeta_0$ (see §§1 and 2). Let ${}_NF^n_u(p;\zeta)$ be written in the form ${}_NF^n_u(p;\zeta) = {}_NF^{n,0}_u(p;\zeta) + {}_NF^{n,1}_u(p;\zeta)$, where ${}_NF^{n,0}_u(p;\zeta)$ is holomorphic by p in the domain $a_1 < Re(p)$. Let also ${}_NF^{n,1}_u(p;\zeta)$ be holomorphic by p in the domain $Re(p) < a_{-1}$. Moreover, for each $a > a_1$ and $b < a_{-1}$ there exist constants $C_a > 0$, $C_b > 0$ and $\epsilon_a > 0$ and $\epsilon_b > 0$ such that

(1) $\left| {}_NF^{n,0}_u(p;\zeta)\right| \le C_a \exp(-\epsilon_a |p|)$ *for each $p \in \mathcal{A}_r$ with $Re(p) \ge a$,*

(2) $\left| {}_NF^{n,1}_u(p;\zeta)\right| \le C_b \exp(-\epsilon_b |p|)$ *for each $p \in \mathcal{A}_r$ with $Re(p) \le b$, the integral*

(3) $\int_{-N_n\infty}^{N_n\infty} ... \int_{-N_1\infty}^{N_1\infty} {}_NF^{n,k}_u(w+p;\zeta)dp$ *converges absolutely for $k = 0$ and $k = 1$ and each $a_1 < w < a_{-1}$.*

Then ${}_NF^n_u(w+p;\zeta)$ is the image of the function

(4)
$$f(t) = \left[(2\pi)^{-1}\tilde{N}_n \int_{-N_n\infty}^{N_n\infty}\right]\left(... \left(\left[(2\pi)^{-1}\tilde{N}_1 \int_{-N_1\infty}^{N_1\infty}\right] {}_NF^n_u(w+p;\zeta)\exp\{u(w+p,t;\zeta)\}\right)...\right)dp$$
$$= (\mathcal{F}^n)^{-1}({}_NF^n_u(w+p;\zeta), u, t; \zeta).$$

Proof. For the function ${}_NF^{n,1}_u(p;\zeta)$ we consider the substitution of the variable $p = -g$, $-a_{-1} < Re(g)$. Thus the proof reduces to the consideration of ${}_NF^{n,0}_u(w+p;\zeta)$.

An integration by dp in the iterated integral (4) is treated as in §6. Take marked values of variables $p_1, ..., p_{j-1}, p_{j+1}, ..., p_n$ and $t_1, ..., t_{j-1}, t_{j+1}, ..., t_n$, where $s_k = s_k(n;\tau)$ for each $k = 1, ..., n$ (see §6 also). For a given parameter $\zeta^j := (\zeta_0 + \zeta_j N_j + ... + \zeta_n N_n) + (w + p_0)s_{j+1} + p_{j+1}s_{j+1}N_{j+1} + ... + p_n s_n N_n$ for $u(p,\tau;\zeta)$ prescribed by Formulas 2(1, 2, 2.1) or $\zeta^j := (\zeta_0 + \zeta_j N_j + ... + \zeta_n N_n) + (w + p_0)s_{j+1} + p_{j+1}\tau_{j+1}N_{j+1} + ... + p_n\tau_n N_n$ for $u(p,t;\zeta)$ given by 1(8, 8.1) instead of ζ and any non-zero Cayley-Dickson number $\beta \in \mathcal{A}_r$ we have $\lim_{\tau_j\to\infty}[\beta\tau_j + \zeta^j]/[\beta\tau_j + \zeta] = 1$.

For any locally z-analytic function $g(z)$ in a domain U satisfying conditions of §5 the homotopy theorem for a non-commutative line integral over $\mathcal{A}_r$, $2 \le r$, is satisfied (see [17, 16]). In particular if U contains the straight line $w + \mathbf{R}N_j$ and the path $\gamma_j(t_j) := \zeta^j + t_j N_j$, then $\int_{-N_j\infty}^{N_j\infty} g(z)dz = \int_{\gamma_j} g(w+z)dz$, when $\hat{g}(z) \to 0$ while $|z|$ tends to the infinity, since $|\zeta^j|$ is a finite number (see Lemma 2.23 in [18]). We apply this to the integrand in Formula (4), since ${}_NF^n_u(w+p;\zeta)$ is locally analytic by p in accordance with Theorem 4 and Conditions (1, 2) are satisfied.

Then the integral operator $\left[(2\pi N_j)^{-1}\int_{-N_j\infty}^{N_j\infty}\right]$ on the j-th step with the help of Theorems 2.22 and 3.16 [18] gives the inversion formula corresponding to the real parameter t_j for $f(t)$ and to the Cayley-Dickson variable $p_0N_0 + p_jN_j$ which is restricted on the complex plane $\mathbf{C}_{N_j} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}N_j$ (see also Formulas 6(4, 11) above). Therefore, an application of this procedure by $j = 1, 2, ..., n$ as in §6 implies Formula (4) of this theorem.

Thus there exist originals f^0 and f^1 for functions ${}_NF^{n,0}_u(p;\zeta)$ and ${}_NF^{n,1}_u(p;\zeta)$ with a choice of $w \in \mathbf{R}$ in the common domain $a_1 < Re(p) < a_{-1}$. Then $f = f^0 + f^1$ is the original for ${}_NF^n_u(p;\zeta)$ due to the distributivity of the multiplication in the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$ leading to the additivity of the considered integral operator in Formula (4).

8.1. Corollary. *Let the conditions of Theorem 8 be satisfied, then*

(1)
$$f(t) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} {}_NF^n_u(w+p;\zeta)\exp\{u(w+p,t;\zeta)\}dp_1...dp_n$$
$$= (\mathcal{F}^n)^{-1}({}_NF^n_u(w+p;\zeta), u, t; \zeta).$$

Proof. In accordance with §§6 and 6.1 each non-commutative integral given by the left algorithm reduces to the principal value of the usual integral by the corresponding real variable:

$$(2)\qquad (2\pi)^{-1}\tilde{N}_j\int_{-N_j\infty}^{N_j\infty} {}_NF^n_u(w+p;\zeta)\exp\{u(w+p,t;\zeta)\}d(p_jN_j)$$

$$=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} {}_NF^n_u(w+p;\zeta)\exp\{u(w+p,t;\zeta)\}dp_j$$

for each $j=1,...,n$. Thus Formula 8(4) with the non-commutative iterated (multiple) integral reduces to Formula 8.1(1) with the principal value of the usual integral by real variables $(p_1,...,p_n)$.

9. Note. In Theorem 8 Conditions $(1,2)$ can be replaced on

(1) $\lim_{n\to\infty}\sup_{p\in C_{R(n)}}\|\hat{F}(p)\|=0$,

where $C_{R(n)}:=\{z\in\mathcal{A}_r:\ |z|=R(n), a_1<Re(z)<a_{-1}\}$ is a sequence of intersections of spheres with a domain W, where $R(n)<R(n+1)$ for each n, $\lim_{n\to\infty}R(n)=\infty$. Indeed, this condition leads to the accomplishment of the $\mathcal{A}_r$ analog of the Jordan Lemma for each $r\ge 2$ (see also Lemma 2.23 and Remark 2.24 [18]).

Subsequent properties of quaternion, octonion and general $\mathcal{A}_r$ multiparameter non-commutative analogs of the Laplace transform are considered below. We denote by

(2) $W_f=\{p\in\mathcal{A}_r:\ a_1(f)<Re(p)<a_{-1}(f)\}$ a domain of ${}_NF^n_u(p;\zeta)$ by the p variable, where $a_1=a_1(f)$ and $a_{-1}=a_{-1}(f)$ are as in §1. For an original

(3) $f(t)\chi_{U_{1,...,1}}(t)$ we put $W_f=\{p\in\mathcal{A}_r:\ a_1(f)<Re(p)\}$,

that is $a_{-1}=\infty$. Cases may be, when either the left hyperplane $Re(p)=a_1$ or the right hyperplane $Re(p)=a_{-1}$ is (or both are) included in W_f. It may also happen that a domain reduces to the hyperplane $W_f=\{p:\ Re(p)=a_1=a_{-1}\}$.

10. Proposition. *If images ${}_NF^n_u(p;\zeta)$ and ${}_NG^n_u(p;\zeta)$ of functions-originals $f(t)$ and $g(t)$ exist in domains W_f and W_g with values in $\mathcal{A}_r$, where the function $u(p,t;\zeta)$ is given by 1$(8,8.1)$ or 2$(1,2,2.1)$, then for each $\alpha,\beta\in\mathcal{A}_r$ in the case $\mathcal{A}_2=\mathbf{H}$; as well as f and g with values in $\mathbf{R}$ and each $\alpha,\beta\in\mathcal{A}_r$ or f and g with values in $\mathcal{A}_r$ and each $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ in the case of $\mathcal{A}_r$ with $r\ge 3$; the function $\alpha\ {}_NF_u(p;\zeta)+\beta\ {}_NG_u(p;\zeta)$ is the image of the function $\alpha f(t)+\beta g(t)$ in a domain $W_f\cap W_g$.*

Proof. Since the transforms ${}_NF^n_u(p;\zeta)$ and ${}_NG^n_u(p;\zeta)$ exist, then the integral

$$\int_{\mathbf{R}^n}(\alpha f(t)+\beta g(t))\exp(-u(p,t;\zeta))dt=\int_{\mathbf{R}^n}\alpha f(t)\exp(-u(p,t;\zeta))dt$$

$$+\int_{\mathbf{R}^n}\beta g(t)\exp(-u(p,t;\zeta))dt$$

converges in the domain

$W_f\cap W_g=\{p\in\mathcal{A}_r:\ \max(a_1(f),a_1(g))<Re(p)<\min(a_{-1}(f),a_{-1}(g))\}$.

We have $t\in\mathbf{R}^n$, $2^{r-1}\le n\le 2^r-1$, while $\mathbf{R}$ is the center of the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$. The quaternion skew field $\mathbf{H}$ is associative. Thus, under the imposed conditions the constants α,β can be carried out outside integrals.

11. Theorem. *Let $\alpha=const>0$, let also $F^n(p;\zeta)$ be an image of an original function $f(t)$ with either $u=<p,t)+\zeta$ or u given by Formulas 2$(1,2)$ over the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$ with $2\le r<\infty$, $2^{r-1}\le n\le 2^r-1$. Then an image $F^n(p/\alpha;\zeta)/\alpha^n$ of the function $f(\alpha t)$ exists.*

Proof. Since $p_js_j+\zeta_j = p_j(s'_j/\alpha)+\zeta_j = (p_j/\alpha)s'_j+\zeta_j$ for each $j=1,...,n$, where $s_j\alpha = s'_j$, $s_j = s_j(n;t)$, $s'_j = s_j(n;\tau)$, $\tau_j = \alpha t_j$ for each $j=1,...,n$. Then changing of these variables implies:

$\int_{\mathbf{R}^n} f(\alpha t)e^{-u(p,t;\zeta)}dt = \int_{\mathbf{R}^n} f(\tau)e^{-u(p,\tau/\alpha;\zeta)}d\tau/\alpha^n = F^n(p/\alpha;\zeta)/\alpha^n$

due to the fact that the real filed $\mathbf{R}$ is the center $Z(\mathcal{A}_r)$ of the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$.

12. Theorem. *Let $f(t)$ be a function-original on the domain $U_{1,...,1}$ such that $\partial f(t)/\partial t_k$ also for $k=j-1$ and $k=j$ satisfies Conditions 1(1 − 4). Suppose that $u(p,t;\zeta)$ is given by 2(1, 2, 2.1) or 1(8, 8.1) over the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$ with $2\le r<\infty$, $2^{r-1}\le n\le 2^r-1$. Then*

$$(1)\qquad \mathcal{F}^n\Big((\partial f(t)/\partial t_j)\chi_{U_{1,...,1}}(t),u;p;\zeta\Big) = -\mathcal{F}^{n-1;t^j}\Big(f(t)\chi_{U_{1,...,1}}(t^j),u(p,t^j;\zeta);p;\zeta\Big)$$

$$+\left[p_0+\sum_{k=1}^{j}p_k\mathsf{S}_{e_k}\right]\mathcal{F}^n\Big(f(t)\chi_{U_{1,...,1}}(t),u;p;\zeta\Big)$$

in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates or

$$(1.1)\qquad \mathcal{F}^n\Big((\partial f(t)/\partial t_j)\chi_{U_{1,...,1}}(t),u;p;\zeta\Big) = -\mathcal{F}^{n-1;t^j}\Big(f(t)\chi_{U_{1,...,1}}(t^j),u(p,t^j;\zeta);p;\zeta\Big)$$

$$+\big[p_0+p_j\mathsf{S}_{e_j}\big]\mathcal{F}^n\Big(f(t)\chi_{U_{1,...,1}}(t),u;p;\zeta\Big)$$

in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates in a domain $W=\{p\in\mathcal{A}_r:\ \max(a_1(f),a_1(\partial f/\partial t_j))<Re(p)\}$, where $t^j := (t_1,...,t_j,...,t_n:\ t_j=0)$, $\mathsf{S}_{e_k} = -\partial/\partial\zeta_k$ for each $k\ge 1$.

Proof. Certainly,

(2) $\partial f\big(t(s)\big)/\partial s_1 = \partial f(t)/\partial t_1$ and

(2.1) $\partial f(t)/\partial t_j = \sum_{k=1}^n\big(\partial f(t(s))/\partial s_k\big)(\partial s_k/\partial t_j) = \sum_{k=1}^j \partial f(t(s))/\partial s_k$

for each $j=2,...,n$, since $t_j = s_j - s_{j+1}$, $t_1 = s_1-s_2$, where $s_j = s_j(n;t)$, $s_{n+l}=0$ for each $l\ge 1$. From Formulas 30(6, 7) [18] we have the equality in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates:

(3) $\partial\exp(-u(p,t;\zeta))/\partial s_j = -p_0\delta_{1,j}\exp(-u(p,t;\zeta)) - p_j\mathsf{S}_{e_j}\exp(-u(p,t;\zeta))$,

since

$\exp(-u(p,t;\zeta)) = \exp\{-p_0s_1-\zeta_0\}\exp(-M(p,t;\zeta))$,

$\partial\exp(-p_0s_1-\zeta_0)/\partial s_j = -p_0\delta_{1,j}\exp(-p_0s_1-\zeta_0)$,

$\partial[\cos(p_js_j+\zeta_j)-\sin(p_js_j+\zeta_j)i_j]/\partial s_j = \partial\exp(-(p_js_j+\zeta_j)i_j)/\partial s_j = -p_ji_j\exp(-(p_js_j+\zeta_j)i_j)$

$= -p_j\exp(-(p_js_j+\zeta_j-\pi/2)i_j) = -p_j[\cos(p_js_j+\zeta_j-\pi/2)-\sin(p_js_j+\zeta_j-\pi/2)i_j]$

$= -p_j\mathsf{S}_{e_j}[\cos(p_js_j+\zeta_j)-\sin(p_js_j+\zeta_j)i_j]$,

since s_j and s_k are real independent variables for each $k\ne j$, where $\delta_{j,k}=0$ for $j\ne k$, while $\delta_{j,j}=1$,

(3.1) $\mathsf{S}_{e_j}[\cos(p_js_j+\zeta_j)-\sin(p_js_j+\zeta_j)i_j] =$

$-\partial[\cos(p_js_j+\zeta_j)-\sin(p_js_j+\zeta_j)i_j]/\partial\zeta_j$

$= [\cos(p_js_j+\zeta_j-\pi/2)-\sin(p_js_j+\zeta_j-\pi/2)i_j]$.

In the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates we take t_j instead of s_j in (3.1). If $\phi(z)$ is a differentiable function by z_j for each j, $\phi:\mathcal{A}_r\to\mathcal{A}_r$, $z_j = p_jt_j+\zeta_j$, then

(3.2) $\partial\exp(-\phi(z))/\partial(qt_j) = -q[d\exp(\xi)/d\xi]|_{\xi=-\phi}.(\partial\phi(z)/\partial z_j)p_j$

$= -qp_j[\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^{n-1}((\xi(z))^k(\partial\phi(z)/\partial z_j))(\xi(z))^{n-1-k}/n!]|_{\xi=-\phi}$

$= -qp_j(-\partial\exp(-\phi(z))/\partial\zeta_j) = -\,p_j\mathsf{S}_{qe_j}\exp(-\phi(z))$,

where either $q=1$ or $q=-1$, since $\partial z_j/\partial\zeta_j=1$.

That is

(3.3) $\mathsf{S}^x_{e_j} \exp(-i_k(\phi_k + \zeta_k)) = 0$ for each $j \ne k \ge 1$ and any positive number $x > 0$,

(3.4) $\mathsf{S}^x_{e_j} \exp(-i_j(\phi_j + \zeta_j)) = \exp(-i_j(\phi_j + \zeta_j - x\pi/2))$ and
$\mathsf{S}^x_{-e_j} \exp(-i_j(\phi_j + \zeta_j)) = \exp(-i_j(\phi_j + \zeta_j + x\pi/2))$

for each non-negative real number $x \ge 0$, ϕ_k and $\zeta_k \in \mathbf{R}$, where $\mathsf{S}_{e_j} = \mathsf{S}_{e_j}(\zeta_j)$, the zero power $\mathsf{S}^0_{e_j} = I$ is the unit operator;

(3.5) $\mathsf{S}_{qe_j} e^{-u(p,t;\zeta)} = e^{-p_0 s_1 - \zeta_0}$
$T^q_j \Big[i_0 \delta_{j,1} \cos(p_1 s_1 + \zeta_1) + (1 - \delta_{j,1}) i_{j-1} \sin(p_1 s_1 + \zeta_1) ... \cos(p_j s_j + \zeta_j) + \Big\{ \sum_{k=j}^{2^r-2} i_k \sin(p_1 s_1 + \zeta_1) ... \cos(p_{k+1} s_{k+1} + \zeta_{k+1}) \Big\} + i_{2^r-1} \sin(p_1 s_1 + \zeta_1) ... \sin(p_{2^r-1} s_{2^r-1} + \zeta_{2^r-1}) \Big]$

in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates, where either $q = 1$ or $q = -1$ and

(3.6) $T^x_j \xi(\zeta_j) := \xi(\zeta_j - x\pi/2)$

for any function $\xi(\zeta_j)$ and any real number $x \in \mathbf{R}$, where $j \ge 1$. Then in accordance with Formula (3.2) we have:

(3.7) $\mathsf{S}_{qe_j} \exp(-u(p,t;\zeta)) =$
$= \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \big((\xi(z))^k q i_j \big) (\xi(z))^{n-1-k} / n! \Big] \Big|_{\xi = -u(p,t;\zeta)}$

for $u(p,t;\zeta)$ given by Formulas $1(8, 8.1)$ in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates, where either $q = 1$ or $q = -1$.

The integration by parts theorem (Theorem 2 in §II.2.6 on p. 228 [10]) states: if $a < b$ and two functions f and g are Riemann integrable on the segment $[a,b]$, $F(x) = A + \int_a^x f(t)dt$ and $G(x) = B + \int_a^x g(t)dt$, where A and B are two real constants, then $\int_a^b F(x)g(x)dx = F(x)G(x)\big|_a^b - \int_a^b f(x)G(x)dx$.

Therefore, the integration by parts gives

$$(4) \qquad \int_0^\infty (\partial f(t)/\partial t_j) \exp(-u(p,t;\zeta)) dt_j = f(t) \exp(-u(p,t;\zeta)) \Big|_{t_j=0}^{t_j=\infty}$$
$$- \int_0^\infty \big[f(t) (\partial \exp(-u(p,t;\zeta))/\partial t_j) \big] dt_j.$$

Using the change of variables $t \mapsto s$ with the unit Jacobian $\partial(t_1, ..., t_n)/\partial(s_1, ..., s_n)$ and applying the Fubini's theorem componentwise to $f_j i_j$ we infer:

$$(5) \qquad \int_{U_{1,...,1}} (\partial f(t)/\partial t_j) \exp(-u(p,t;\zeta)) dt = \int_{s_1 \ge s_2 \ge ... \ge s_n \ge 0} (\partial f(t)/\partial t_j) \exp(-u(p,t;\zeta)) ds$$
$$= \int_0^\infty ... \int_0^\infty \left[\int_{s_{j+1}}^\infty (\partial f(t)/\partial t_j) \exp(-u(p,t;\zeta)) ds_j \right] dt^j$$
$$= - \left[\int_0^\infty ... \int_0^\infty f(t^j) \exp(-u(p,t^j;\zeta)) dt^j \right]$$
$$+ \left[p_0 + \sum_{k=1}^{j} p_k \mathsf{S}_{e_k} \right] \int_0^\infty ... \int_0^\infty f(t) \exp(-u(p,t;\zeta)) dt$$

in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates, or

$$(5.1) \qquad \int_{U_{1,...,1}} (\partial f(t)/\partial t_j) \exp(-u(p,t;\zeta)) dt$$

$$= -\left[\int_0^\infty ... \int_0^\infty f(t^j)\exp(-u(p,t^j;\zeta))dt^j\right]$$
$$+\left[p_0 + p_j \mathsf{S}_{e_j}\right]\int_0^\infty ... \int_0^\infty f(t)\exp(-u(p,t;\zeta))dt$$

in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates, since $\partial \exp(-(p_0 s_1 + \zeta_0))/\partial t_j = -p_0 \exp(-(p_0 s_1 + \zeta_0))$ for each $1 \le j \le n$. This gives Formula (1), where

$$(6) \qquad \mathcal{F}^{n-1;t^j}\left(f(t^j)\chi_{U_{1,\dots,1}}, u(p,t^j;\zeta); p; \zeta\right) = \int_0^\infty ... \int_0^\infty f(t^j)\exp(-u(p,t^j;\zeta))dt^j$$
$$= \int_0^\infty dt_1 ... \int_0^\infty dt_{j-1}\int_0^\infty dt_{j+1}...\int_0^\infty (dt_n) f(t^j)\exp(-u(p,t^j;\zeta))$$

is the non-commutative transform by $t^j = (t_1, ..., t_{j-1}, 0, t_{j+1}, ..., t_n)$.

12.1. Remark. Shift operators of the form $\xi(x+\phi) = \exp(\phi d/dx)\xi(x)$ in real variables are also frequently used in the class of infinite differentiable functions with converging Taylor series expansion in the corresponding domain.

It is possible to use also the following convention. One can put $\cos(\phi_1 + \zeta_1) = \cos(\phi_1 + \zeta_1)\cos(\psi_2)...\cos(\psi_{2^r-1})$,...,$\sin(\phi_1 + \zeta_1)...\cos(\phi_k + \zeta_k) = \sin(\phi_1 + \zeta_1)...\cos(\phi_k + \zeta_k)\cos(\psi_{k+1})...\cos(\psi_{2^r-1})$, where $\psi_j = 0$ for each $j \ge 1$, $2 \le k < 2^r - 1$, so that $T_j^l \cos(\phi_1 + \zeta_1) = 0$ for each $j > 1$ and $l \ge 1$, $T_j^l \sin(\phi_1 + \zeta_1)...\cos(\phi_k + \zeta_k) = 0$ for each $j > k$ and $l \ge 1$, where $T_j^l \xi = T_j^{l-1}(T_j \xi)$ is the iterated composition for $l > 1$, $l \in \mathbf{N}$. Then $T_j^l e^{-u(p,t;\zeta)}$ gives with such convention the same result as $\mathsf{S}_{e_j}^l e^{-u(p,t;\zeta)}$, so one can use the symbolic notation $T_j^l e^{-u(p,t;\zeta)} = e^{-u(p,t;\zeta - i_j \pi l/2)}$. But to avoid misunderstanding we shall use S_{e_j} and T_j in the sense of Formulas 12(3.1 − 3.7).

It is worth to mention that instead of 12(3.7) also the formulas

(1) $\exp(p_1 i_1 + ... + p_n i_n) = \cos(\phi) + M\sin(\phi)$ with $\phi := \phi(p) := \left[p_1^2 + ... + p_n^2\right]^{1/2}$ and $M = (p_1 i_1 + ... + p_n i_n)/\phi$ for $\phi \ne 0$, $e^0 = 1$;

(2) $\partial \exp(p_1 i_1 + .. + p_n i_n)/\partial p_j = \left[-\sin(\phi) + M\cos(\phi)\right]p_j/\phi + (\phi i_j - M p_j)\phi^{-2}\sin(\phi)$ and $\partial(p_j t_j + \zeta_j)/\partial \zeta_j = 1$ can be used.

13. Theorem. *Let $f(t)$ be a function-original. Suppose that $u(p,t;\zeta)$ is given by 2(1, 2, 2.1) or 1(8, 8.1) over the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$ with $2 \le r < \infty$. Then a (super)derivative of an image is given by the following formula:*

(1) $\left(\partial \mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta)/\partial p\right).h = -\mathcal{F}^n\left(f(t)s_1, u; p; \zeta\right)h_0$
$-\mathsf{S}_{e_1}\mathcal{F}^n\left(f(t)s_1, u; p; \zeta\right)h_1 - ... - \mathsf{S}_{e_n}\mathcal{F}^n\left(f(t)s_n, u; p; \zeta\right)h_n$

in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates, or

(1.1) $\left(\partial \mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta)/\partial p\right).h = -\mathcal{F}^n\left(f(t)s_1, u; p; \zeta\right)h_0$
$-\mathsf{S}_{e_1}\mathcal{F}^n\left(f(t)t_1, u; p; \zeta\right)h_1 - ... - \mathsf{S}_{e_n}\mathcal{F}^n\left(f(t)t_n, u; p; \zeta\right)h_n$

in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates for each $h = h_0 i_0 + ... + h_n i_n \in \mathcal{A}_r$, where $h_0, ..., h_n \in \mathbf{R}$, $2^{r-1} \le n \le 2^r - 1$, $p \in W_f$.

Proof. The inequalities $a_1(f) < Re(p) < a_{-1}(f)$ are equivalent to the inequalities $a_1(f(t)|t|) < Re(p) < a_{-1}(f(t)|t|)$, since $\lim_{|t|\to+\infty}\exp(-b|t|)|t| = 0$ for each $b > 0$. An image $\mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta)$ is a holomorphic function by p for $a_1(f) < Re(p) < a_{-1}(f)$ by Theorem 4, also $|\int_0^\infty e^{-ct}t^n dt| < \infty$ for each $c > 0$ and $n = 0, 1, 2, ...$ Thus it is possible to differentiate under the sign of the integral:

$$(2) \qquad \left(\partial\left(\int_{\mathbf{R}^n} f(t)\exp(-u(p,t;\zeta))dt\right)/\partial p\right).h =$$

$$\sum_{v\in\{-1,1\}^n} \left(\partial \left(\int_{U_v} f(t)\exp(-u(p,t;\zeta))\chi_{U_v} dt\right) / \partial p\right).h =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} f(t)(\partial \exp(-u(p,t;\zeta))/\partial p).hdt.$$

Due to Formulas 12(3, 3.2) we get:

(3) $(\partial \exp(-u(p,t;\zeta))/\partial p).h = -\exp(-u(p,t;\zeta))s_1h_0 - \mathsf{S}_{e_1}\exp(-u(p,t;\zeta))s_1h_1 - ... - \mathsf{S}_{e_n}\exp(-u(p,t;\zeta))s_nh_n$
in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates, or

(4) $(\partial \exp(-u(p,t;\zeta))/\partial p).h = -\exp(-u(p,t;\zeta))s_1h_0 - \mathsf{S}_{e_1}\exp(-u(p,t;\zeta))t_1h_1 - ... - \mathsf{S}_{e_n}\exp(-u(p,t;\zeta))t_nh_n$

in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates.
Thus from Formulas (2, 3) we deduce Formula (1).

14. Theorem. *If $f(t)$ is a function-original, then*

(1) $\mathcal{F}^n(f(t-\tau),u;p;\zeta) = \mathcal{F}^n(f(t),u;p;\zeta+ < p,\tau])$ *for either*

(*i*) $u(p,t;\zeta) = p_0s_1 + M(p,t;\zeta) + \zeta_0$ *or*

(*ii*) $u(p,t;\zeta) =< p,t) + \zeta$ *over $\mathcal{A}_r$ with $2 \le r < \infty$ in a domain $p \in W_f$, where $\tau \in \mathbf{R}^n$, $2^{r-1} \le n \le 2^r - 1$,*

(2) $< p,\tau] = p_0s_1 + p_1s_1i_1 + ... + p_ns_ni_n$ *with $s_j = s_j(n;\tau)$ for each j in the first* (*i*) *and* $< p,\tau] =< p,\tau)$ *in the second* (*ii*) *case (see also Formulas 1*(8), *2*(1, 2, 2.1)*).*

Proof. For p in the domain $Re(p) > a_1$ the identities are satisfied:

$$(3) \qquad \mathcal{F}^n\big((f\chi_{U_{1,...,1}})(t-\tau),u;p;\zeta\big) = \int_{\tau_1}^{\infty} ... \int_{\tau_n}^{\infty} f(t-\tau)e^{-u(p,t;\zeta)}dt$$

$$= \int_{U_{1,...,1}} f(t)e^{-u(p,\xi;\zeta+<p,\tau])}d\xi = \mathcal{F}^n\big((f\chi_{U_{1,...,1}})(t),u;p;\zeta+ < p,\tau]\big),$$

due to Formulas 1(7, 8) and 2(1, 2, 2.1, 4), since $p_0s_1(n;t) + \zeta_0 = p_0s_1(n;\xi) + \zeta_0 + p_0s_1(n;\tau)$ and $p_jt_j + \zeta_j = p_j\xi_j + (\zeta_j + p_j\tau_j)$ and $p_js_j(n;t) + \zeta_j = p_js_j(n;\xi) + (\zeta_j + p_js_j(n;\tau))$ for each $j = 1,...,2^r-1$, where $t = \xi + \tau$. Symmetrically we get (2) for U_v instead of $U_{1,...,1}$. Naturally, that the multiparameter non-commutative Laplace integral for an original f can be considered as the sum of 2^n integrals by the sub-domains U_v:

$$(4) \qquad \int_{\mathbf{R}^n} f(t)\exp\big(-u(p,t;\zeta)\big)dt = \sum_{v\in\{-1,1\}^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(t)\exp\big(-u(p,t;\zeta)\big)\chi_{U_v}(t)dt.$$

The summation by all possible $v \in \{-1,1\}^n$ gives Formula (1).

15. Note. In view of the definition of the non-commutative transform $\mathcal{F}^n$ and $u(p,t;\zeta)$ and Theorem 14 the term $\zeta_1i_1 + ... + \zeta_{2^r-1}i_{2^r-1}$ has the natural interpretation as the initial phase of a retardation.

16. Theorem. *If $f(t)$ is a function-original with values in $\mathcal{A}_r$ for $2 \le r < \infty$, $2^{r-1} \le n \le 2^r - 1$, $b \in \mathbf{R}$, then*

$$(1) \qquad \mathcal{F}^n\big(e^{b(t_1+...+t_n)}f(t),u;p;\zeta\big) = \mathcal{F}^n\big(f(t),u;p-b;\zeta\big)$$

for each $a_{-1} + b > Re(p) > a_1 + b$, where u is given by 1(8, 8.1) *or 2*(1, 2).

Proof. In accordance with Expressions 1(8, 8.1) and 2(1, 2, 2.1) one has $u(p,t;\zeta) - b(t_1 + ... + t_n) = u(p-b,t;\zeta)$. If $a_{-1} + b > Re(p) > a_1 + b$, then the integral

$$(2)\qquad \mathcal{F}^n\left(e^{b(t_1+...+t_n)}f(t)\chi_{U_v}(t),u;p;\zeta\right)= \int_{U_v} f(t)e^{b(t_1+...+t_n)}\exp(-u(p,t;\zeta))dt$$

$$= \int_{U_v} f(t)\exp(-u(p-b,t;\zeta))dt = \mathcal{F}^n(f(t)\chi_{U_v}(t),u;p-b;\zeta)$$

converges. Applying Decomposition 14(4) we deduce Formula (1).

17. Theorem. *Let a function $f(t)$ be a real valued original, $F(p;\zeta) = \mathcal{F}^n(f(t);u;p;\zeta)$, where the function $u(p,t;\zeta)$ is given by 1(8, 8.1) or 2(1, 2, 2.1). Let also $G(p;\zeta)$ and $q(p)$ be locally analytic functions such that*

(1) $\mathcal{F}^n(g(t,\tau);u;p;\zeta) = G(p;\zeta)\exp(-u(q(p),\tau;\zeta))$
for $u =< p,t) + \zeta$ or $u = p_0(t_1 + ... + t_n) + M(p,t;\zeta) + \zeta_0$, then

(2) $\mathcal{F}^n(\int_{\mathbf{R}^n} g(t,\tau)f(\tau)d\tau;u;p;\zeta) = G(p;\zeta)F(q(p);\zeta)$
for each $p \in W_g$ and $q(p) \in W_f$, where $2 \le r < \infty$, $2^{r-1} \le n \le 2^r - 1$.

Proof. If $p \in W_g$ and $q(p) \in W_f$, then in view of the Fubini's theorem and the theorem conditions a change of an integration order gives the equalities:

$$\int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^n} g(t,\tau)f(\tau)d\tau\right)\exp(-u(p,t;\zeta))dt$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^n} g(t,\tau)\exp(-u(p,t;\zeta))dt\right)f(\tau)d\tau$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} G(p;\zeta)\exp(-u(q(p),\tau;\zeta))f(\tau)d\tau$$

$$= G(p;\zeta)\int_{\mathbf{R}^n} f(\tau)\exp(-u(q(p),\tau;\zeta))d\tau = G(p;\zeta)F(q(p);\zeta),$$

since $t,\tau \in \mathbf{R}^n$ and the center of the algebra $\mathcal{A}_r$ is $\mathbf{R}$.

18. Theorem. *If a function $f(t)\chi_{U_{1,...,1}}$ is original together with its derivative $\partial^n f(t)\chi_{U_{1,...,1}}(t)/\partial s_1...\partial s_n$ or $\partial^n f(t)\chi_{U_{1,...,1}}(t)/\partial t_1...\partial t_n$, where $F^n_u(p;\zeta)$ is an image function of $f(t)\chi_{U_{1,...,1}}$ over the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$ with $2 \le r \in \mathbf{N}$, $2^{r-1} \le n \le 2^r - 1$, for $u = p_0s_1 + M(p,t;\zeta) + \zeta_0$ given by 2(1, 2, 2.1), then*

$$(1)\qquad \lim_{p\to\infty}\Big\{[p_0 + p_1\mathsf{S}_{e_1}]p_2\mathsf{S}_{e_2}...p_n\mathsf{S}_{e_n}F^n_u(p;\zeta) + \sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m$$

$$\sum_{1\le j_1<...<j_{n-m}\le n;\ 1\le l_1<...<l_m\le n;\ l_\alpha\ne j_\beta\ \forall\alpha,\beta} [p_0\delta_{1,j_1} + p_{j_1}\mathsf{S}_{e_{j_1}}]p_{j_2}\mathsf{S}_{e_{j_2}}...p_{j_{n-m}}\mathsf{S}_{e_{j_{n-m}}}$$

$$F^{n-m}_u(p^{(l)};\zeta)\Big\}= (-1)^{n+1}f(0)e^{-u(0,0;\zeta)},$$

or

$$(1.1)\qquad \lim_{p\to\infty}\Big\{[p_0 + p_1\mathsf{S}_{e_1}][p_0 + p_2\mathsf{S}_{e_2}]...[p_0 + p_n\mathsf{S}_{e_n}]F^n_u(p;\zeta) + \sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m$$

$$\sum_{1\le j_1<...<j_{n-m}\le n;\ 1\le l_1<...<l_m\le n;\ l_\alpha\ne j_\beta\ \forall \alpha,\beta} [p_0+p_{j_1}\mathsf{S}_{e_{j_1}}][p_0+p_{j_2}\mathsf{S}_{e_{j_2}}]...[p_0+p_{j_{n-m}}\mathsf{S}_{e_{j_{n-m}}}]$$

$$F^{n-m}_u(p^{(l)};\zeta)\Big\}= (-1)^{n+1}f(0)e^{-u(0,0;\zeta)}$$

for $u(p,t;\zeta)$ given by 1(8, 8.1), where $f(0)=\lim_{t\in U_{1,...,1};t\to 0} f(t)$, p tends to the infinity inside the angle $|Arg(p)|<\pi/2-\delta$ for some $0<\delta<\pi/2$, $1\le j\le 2^r-1$, $p^{(l)}=\sum_{j=0,j\notin(l)}^n p_j i_j$, $(l)=(l_1,...,l_m)$. If the restriction

$f(t)|_{t_{j_1}=0,...,t_{j_m}=0;t_k=\infty \forall k\notin\{j_1,...,j_m\}}=\lim_{t\in U_{1,...,1};t_{j_1}\to 0,...,t_{j_m}\to 0;t_k\to\infty\ \forall k\notin\{j_1,...,j_m\}} f(t)$ exists for all $1\le j_1<...<j_m\le n$, then

$$(2)\qquad \lim_{p\to 0}\Big\{[p_0+p_1\mathsf{S}_{e_1}]p_2\mathsf{S}_{e_2}...p_n\mathsf{S}_{e_n}F^n_u(p;\zeta)+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m$$

$$\sum_{1\le j_1<...<j_{n-m}\le n;\ 1\le l_1<...<l_m\le n;\ l_\alpha\ne j_\beta\ \forall \alpha,\beta} [p_0\delta_{1,j_1}+p_{j_1}\mathsf{S}_{e_{j_1}}]p_{j_2}\mathsf{S}_{e_{j_2}}...p_{j_{n-m}}\mathsf{S}_{e_{j_{n-m}}}$$

$$F^{n-m}_u(p^{(l)};\zeta)\Big\}$$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\sum_{1\le j_1<...<j_m\le n} f(t)\big|_{t_{j_1}=0,...,t_{j_m}=0;t_k=\infty\forall k\notin\{j_1,...,j_m\}}e^{-u(0,0,\zeta)}$$

in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates or

$$(2.1)\qquad \lim_{p\to 0}\Big\{[p_0+p_1\mathsf{S}_{e_1}][p_0+p_2\mathsf{S}_{e_2}]...[p_0+p_n\mathsf{S}_{e_n}]F^n_u(p;\zeta)+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m$$

$$\sum_{1\le j_1<...<j_{n-m}\le n;\ 1\le l_1<...<l_m\le n;\ l_\alpha\ne j_\beta\ \forall \alpha,\beta} [p_0+p_{j_1}\mathsf{S}_{e_{j_1}}][p_0+p_{j_2}\mathsf{S}_{e_{j_2}}]...[p_0+p_{j_{n-m}}\mathsf{S}_{e_{j_{n-m}}}]$$

$$F^{n-m}_u(p^{(l)};\zeta)\Big\}$$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\sum_{1\le j_1<...<j_m\le n} f(t)\big|_{t_{j_1}=0,...,t_{j_m}=0;t_k=\infty\forall k\notin\{j_1,...,j_m\}}e^{-u(0,0,\zeta)}$$

in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates, where $p\to 0$ inside the same angle.

Proof. In accordance with Theorem 12 the equality follows:

$$(3)\qquad \mathcal{F}^n((\partial f(t)/\partial s_j)\chi_{U_{1,...,1}}(t),u;p;\zeta)=[p_0\delta_{1,j}+p_j\mathsf{S}_{e_j}]\mathcal{F}^n(f(t)\chi_{U_{1,...,1}}(t),u(p,t;\zeta),p;\zeta)$$

$$-\mathcal{F}^{n-1;t^j}(f(t^j)\chi_{U_{1,...,1}},u(p,t^j;\zeta);p;\zeta)$$

for $u=u(p,t;\zeta)=p_0s_1+M(p,t;\zeta)+\zeta_0$ in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates, or

$$(3.1)\qquad \mathcal{F}^n((\partial f(t)/\partial t_j)\chi_{U_{1,...,1}}(t),u;p;\zeta)=[p_0+p_j\mathsf{S}_{e_j}]\mathcal{F}^n(f(t)\chi_{U_{1,...,1}}(t),u(p,t;\zeta),p;\zeta)$$

$$-\mathcal{F}^{n-1;t^j}(f(t^j)\chi_{U_{1,...,1}},u(p,t^j;\zeta);p;\zeta)$$

in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates, since

(3.2) $\partial f(t(s))/\partial s_j=-\partial f(t)/\partial t_{j-1}+\partial f(t)/\partial t_j$ for each $j\ge 2$, $\partial f(t(s))/\partial s_1=\partial f(t)/\partial t_1$, where $p=p_0+p_1i_1+...+p_{2^r-1}i_{2^r-1}\in\mathcal{A}_r$, $p_0,...,p_{2^r-1}\in\mathbf{R}$, $\{i_0,...,i_{2^r-1}\}$ are the generators of the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$, $s_{n+l}=0$ for each $l\ge 1$, the zero power $\mathsf{S}^0_{e_j}=I$ is the unit operator. For short we write f instead of $f\chi_{U_{1,\dots,1}}$. Thus the limit exists:

$$\mathcal{F}^{n-1;t^j}(f(t^j),u(p,t^j;\zeta);p;\zeta)= \tag{4}$$

$$\lim_{t_j\to+0}\int_0^\infty dt_1...\int_0^\infty dt_{j-1}\int_0^\infty dt_{j+1}...\int_0^\infty (dt_n)f(t)\exp(-u(p,t;\zeta)).$$

Mention, that $(...((t^1)^2)...)^j=(0,...,0,t_j,...,t_n:t_j=0)$ for every $1\le j\le n$, since $t_k=s_k-s_{k+1}$ for each $1\le k\le n$. We apply these Formulas (3, 4) by induction $j=1,...,n$, $2^{r-1}\le n\le 2^r-1$, to $\partial^n f(t)/\partial s_1...\partial s_n$,...,$\partial^{n-j+1}f(t)/\partial s_j...\partial s_n$, ...,$\partial f(t)/\partial s_n$ instead of $\partial f(t)/\partial s_j$.

From Note 8 [18] it follows, that in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates

$$\lim_{p\to\infty,|Arg(p)|<\pi/2-\delta}\mathcal{F}^n((\partial^n f(t)/\partial s_1...\partial s_n)\chi_{U_{1,..,1}},u;p;\zeta)=0,$$

also in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates

$$\lim_{p\to\infty,|Arg(p)|<\pi/2-\delta}\mathcal{F}^n((\partial^n f(t)/\partial t_1...\partial t_n)\chi_{U_{1,..,1}},u;p;\zeta)=0,$$

which gives the first statement of this theorem, since $u(p,0,\zeta)=u(0,t;\zeta)=u(0,0,\zeta)$ and $F^0_u(p^{(1,\dots,1)};\zeta)=f(0)e^{-u(0,0,\zeta)}$, while $F^n_u(p;\zeta)$ is defined for each $Re(p)>0$.

If the limit $f(t^{<j>})$ exists, where $t^{<j>}:=(t_1,...,t_j,...,t_n:\ t_j=\infty)$, then

$$\lim_{t_j\to\infty}\int_0^\infty dt_1...\int_0^\infty dt_{j-1}\int_0^\infty dt_{j+1}...\int_0^\infty (dt_n)f(t)\exp(-u(p,t;\zeta)) \tag{5}$$

$$=:\mathcal{F}^{n-1;<t^j>}(f(t^{<j>}),u(p,t^{<j>};\zeta);p;\zeta).$$

Certainly, $(...((t^{<1>})^{<2>})...)^{<j>}=(t_1,...,t_n:t_1=\infty,...,t_j=\infty)$ for each $1\le j\le n$. Therefore, the limit exists:

$$\lim_{p\to 0,|Arg(p)|<\pi/2-\delta}\int_{U_{1,\dots,1}}(\partial^n f(t)/\partial s_1...\partial s_n)\exp(-p_0s_1-\zeta_0-M(p,t;\zeta))$$

$$=\int_{U_{1,\dots,1}}(\partial^n f(t)/\partial s_1...\partial s_n)e^{-u(0,0;\zeta)}dt$$

$$=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\sum_{1\le j_1<...<j_m\le n}f(t)|_{t_{j_1}=0,\dots,t_{j_m}=0;t_k=\infty\ \forall k\notin\{j_1,\dots,j_m\}}$$

$$=\lim_{p\to 0,|Arg(p)|<\pi/2-\delta}\Big\{[p_0+p_1\mathsf{S}_{e_1}]p_2\mathsf{S}_{e_2}...p_n\mathsf{S}_{e_n}F^n_u(p;\zeta)$$

$$+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m$$

$$\sum_{1\le j_1<...<j_{n-m}\le n;\ 1\le l_1<...<l_m\le n;\ l_\alpha\ne j_\beta\ \forall\alpha,\beta}[p_0\delta_{1,j_1}+p_{j_1}\mathsf{S}_{e_{j_1}}]p_{j_2}\mathsf{S}_{e_{j_2}}...p_{j_{n-m}}\mathsf{S}_{e_{j_{n-m}}}$$

$$F^{n-m}_u(p^{(l)};\zeta)+(-1)^nf(0)e^{-u(0,0,\zeta)}\Big\},$$

from which the second statement of this theorem follows in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates and analogously in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates using Formula (3.1).

19. Definitions. Let X and Y be two $\mathbf{R}$ linear normed spaces which are also left and right $\mathcal{A}_r$

modules, where $1 \le r$. Let Y be complete relative to its norm. We put $X^{\otimes k} := X \otimes_{\mathbf{R}} ... \otimes_{\mathbf{R}} X$ is the k times ordered tensor product over $\mathbf{R}$ of X. By $L_{q,k}(X^{\otimes k}, Y)$ we denote a family of all continuous k times $\mathbf{R}$ poly-linear and $\mathcal{A}_r$ additive operators from $X^{\otimes k}$ into Y. Then $L_{q,k}(X^{\otimes k}, Y)$ is also a normed $\mathbf{R}$ linear and left and right $\mathcal{A}_r$ module complete relative to its norm. In particular, $L_{q,1}(X, Y)$ is denoted also by $L_q(X, Y)$.

We present X as the direct sum $X = X_0 i_0 \oplus ... \oplus X_{2^r-1} i_{2^r-1}$, where X_0,...,X_{2^r-1} are pairwise isomorphic real normed spaces. If $A \in L_q(X, Y)$ and $A(xb) = (Ax)b$ or $A(bx) = b(Ax)$ for each $x \in X_0$ and $b \in \mathcal{A}_r$, then an operator A we call right or left $\mathcal{A}_r$-linear respectively.

An $\mathbf{R}$ linear space of left (or right) k times $\mathcal{A}_r$ poly-linear operators is denoted by $L_{l,k}(X^{\otimes k}, Y)$ (or $L_{r,k}(X^{\otimes k}, Y)$ respectively).

We consider a space of test function $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbf{R}^n, Y)$ consisting of all infinite differentiable functions $f : \mathbf{R}^n \to Y$ on $\mathbf{R}^n$ with compact supports. A sequence of functions $f_n \in \mathcal{D}$ tends to zero, if all f_n are zero outside some compact subset K in the Euclidean space $\mathbf{R}^n$, while on it for each $k = 0, 1, 2, ...$ the sequence $\{f_n^{(k)} : n \in \mathbf{N}\}$ converges to zero uniformly. Here as usually $f^{(k)}(t)$ denotes the k-th derivative of f, which is a k times $\mathbf{R}$ poly-linear symmetric operator from $(\mathbf{R}^n)^{\otimes k}$ to Y, that is $f^{(k)}(t).(h_1, ..., h_k) = f^{(k)}(t).(h_{\sigma(1)}, ..., h_{\sigma(k)}) \in Y$ for each $h_1, ..., h_k \in \mathbf{R}^n$ and every transposition $\sigma : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., k\}$, σ is an element of the symmetric group S_k, $t \in \mathbf{R}^n$. For convenience one puts $f^{(0)} = f$. In particular, $f^{(k)}(t).(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = \partial^k f(t)/\partial t_{j_1} ... \partial t_{j_k}$ for all $1 \le j_1, ..., j_k \le n$, where $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbf{R}^n$ with 1 on the j-th place.

Such convergence in $\mathcal{D}$ defines closed subsets in this space $\mathcal{D}$, their complements by the definition are open, that gives the topology on $\mathcal{D}$. The space $\mathcal{D}$ is $\mathbf{R}$ linear and right and left $\mathcal{A}_r$ module.

By a generalized function of class $\mathcal{D}' := [\mathcal{D}(\mathbf{R}^n, Y)]'$ is called a continuous $\mathbf{R}$-linear $\mathcal{A}_r$-additive function $g : \mathcal{D} \to \mathcal{A}_r$. The set of all such functionals is denoted by $\mathcal{D}'$. That is, g is continuous, if for each sequence $f_n \in \mathcal{D}$, converging to zero, a sequence of numbers $g(f_n) =: [g, f_n) \in \mathcal{A}_r$ converges to zero for n tending to the infinity.

A generalized function g is zero on an open subset V in $\mathbf{R}^n$, if $[g, f) = 0$ for each $f \in \mathcal{D}$ equal to zero outside V. By a support of a generalized function g is called the family, denoted by $supp(g)$, of all points $t \in \mathbf{R}^n$ such that in each neighborhood of each point $t \in supp(g)$ the functional g is different from zero. The addition of generalized functions g, h is given by the formula:

(1) $[g + h, f) := [g, f) + [h, f)$.

The multiplication $g \in \mathcal{D}'$ on an infinite differentiable function w is given by the equality:

(2) $[gw, f) = [g, wf)$ either for $w : \mathbf{R}^n \to \mathcal{A}_r$ and each test function $f \in \mathcal{D}$ with a real image $f(\mathbf{R}^n) \subset \mathbf{R}$, where $\mathbf{R}$ is embedded into Y; or $w : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ and $f : \mathbf{R}^n \to Y$.

A generalized function g' prescribed by the equation:

(3) $[g', f) := -[g, f')$ is called a derivative g' of a generalized function g, where $f' \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n, L_q(\mathbf{R}^n, Y))$, $g' \in [\mathcal{D}(\mathbf{R}^n, L_q(\mathbf{R}^n, Y))]'$.

Another space $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbf{R}^n, Y)$ of test functions consists of all infinite differentiable functions $f : \mathbf{R}^n \to Y$ such that the limit $\lim_{|t| \to +\infty} |t|^m f^{(j)}(t) = 0$ exists for each $m = 0, 1, 2, ...$, $j = 0, 1, 2, ...$ A sequence $f_n \in \mathcal{B}$ is called converging to zero, if the sequence $|t|^m f_n^{(j)}(t)$ converges to zero uniformly on $\mathbf{R}^n \setminus B(\mathbf{R}^n, 0, R)$ for each $m, j = 0, 1, 2, ...$ and each $0 < R < +\infty$, where $B(Z, z, R) := \{y \in Z : \rho(y, z) \le R\}$ denotes a ball with center at z of radius R in a metric space Z with a metric ρ. The family of all $\mathbf{R}$-linear and $\mathcal{A}_r$-additive functionals on $\mathcal{B}$ is denoted by $\mathcal{B}'$.

In particular we can take $X = \mathcal{A}_r^\alpha$, $Y = \mathcal{A}_r^\beta$ with $1 \le \alpha, \beta \in \mathbf{Z}$. Analogously spaces $\mathcal{D}(U, Y)$, $[\mathcal{D}(U, Y)]'$, $\mathcal{B}(U, Y)$ and $[\mathcal{B}(U, Y)]'$ are defined for domains U in $\mathbf{R}^n$, for example, $U = U_v$ (see also §1).

A generalized function $f \in \mathcal{B}'$ we call a generalized original, if there exist real numbers $a_1 < a_{-1}$ such that for each $a_1 < w_{-1}, w_1, ..., w_{-n}, w_n < a_{-1}$ the generalized function

(4) $f(t)\exp(-(q_v,t))\chi_{U_v}$ is in $[\mathcal{B}(U_v,Y)]'$ for all $v = (v_1,...,v_n)$, $v_j \in \{-1,1\}$ for every $j = 1,...,n$ for each $t \in \mathbf{R}^n$ with $t_jv_j \ge 0$ for each $j = 1,...,n$, where $q_v = (v_1w_{v_1 1},...,v_nw_{v_n n})$.

By an image of such original we call a function

(5) $\mathcal{F}^n(f,u;p;\zeta) := [f, \exp(-u(p,t;\zeta)))$ of the variable $p \in \mathcal{A}_r$ with the parameter $\zeta \in \mathcal{A}_r$, defined in the domain $W_f = \{p \in \mathcal{A}_r :\ a_1 < Re(p) < a_{-1}\}$ by the following rule. For a given $p \in W_f$ choose $a_1 < w_1,...,w_n < Re(p) < w_{-1},...,w_{-n} < a_{-1}$, then

(6) $[f, \exp(-u(p,t;\zeta)) := \sum_v [f\exp(-(q_v,t)), \exp\{-[u(p,t;\zeta)-(q_v,t)]\}\chi_{U_v})$,
since $\exp\{-[u(p,t;\zeta)-(q_v,t)]\} \in \mathcal{B}(U_v,Y)$, where in each term
$[f\exp(-(q_v,t)), \exp\{-[u(p,t;\zeta)-(q_v,t)]\}\chi_{U_v})$ the generalized function belongs to $[\mathcal{B}(U_v,Y)]'$ by Condition (4), while the sum in (6) is by all admissible vectors $v \in \{-1,1\}^n$.

20. Note and Examples. Evidently the transform $\mathcal{F}^n(f,u;p;\zeta)$ does not depend on a choice of $\{w_{-1}, w_1, ..., w_{-n}, w_n\}$, since

$[f\exp(-(q_v,t), \exp(-[u(p,t;\zeta)-(q_v,t)])\chi_{U_v}) =$
$[f\exp(-(q_v,t)-(b_v,t)), \exp(-[u(p,t;\zeta)-(q_v,t)-(b_v,t)])\chi_{U_v})$

for each $b \in \mathbf{R}^n$ such that $a_1 < w_j + b_j < Re(p) < w_{-j} + b_{-j} < a_{-1}$ for each $j = 1,...,n$, because $\exp(-(b_v,t)) \in \mathbf{R}$. At the same time the real field $\mathbf{R}$ is the center of the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$, where $2 \le r \in \mathbf{N}$.

Let δ be the Dirac delta function, defined by the equation

(DF) $[\delta(t), \phi(t)) := \phi(0)$ for each $\phi \in \mathcal{B}$. Then

(1) $\mathcal{F}^n(\delta^{(j)}(t-\tau),u;p;\zeta) = \sum_{v\in\{-1,1\}^n}[\delta^{(j)}(t-\tau)\exp(-(q_v,t)), \exp(-[u(p,t;\zeta)-(q_v,t)])\chi_{U_v})$
$= (-1)^j\partial_t^j \exp(-[u(p,t;\zeta)])|_{t=\tau}$,

since it is possible to take $-\infty < a_1 < 0 < a_{-1} < \infty$ and $w_k = 0$ for each $k \in \{-1,1,-2,2,...,-n,n\}$, where $\tau \in \mathbf{R}^n$ is the parameter, $\partial_t^j := \partial^{|j|}/\partial t_1^{j_1}...\partial t_1^{j_1}$. In particular, for $j = 0$ we have

(2) $\mathcal{F}^n(\delta(t-\tau),u;p;\zeta) = \exp(-u(p,\tau;\zeta))$.

In the general case:

(3) $\mathcal{F}^n(\partial^{|j|}\delta(t)/\partial s_1^{j_1}...\partial s_n^{j_n},u;p;\zeta) =$
$\sum_{0\le k_1\le j_1}\binom{j_1}{k_1}p_0^{j_1-k_1}(p_1\mathsf{S}_{e_1})^{k_1}(p_2\mathsf{S}_{e_2})^{j_2}...(p_n\mathsf{S}_{e_n})^{j_n}\exp(-\zeta_0 - M(p,0;\zeta))$

in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates, or

(3.1) $\mathcal{F}^n(\partial^{|j|}\delta(t)/\partial t_1^{j_1}...\partial t_n^{j_n},u;p;\zeta) =$
$(p_0+p_1\mathsf{S}_{e_1})^{j_1}(p_0+p_2\mathsf{S}_{e_2})^{j_2}...(p_0+p_n\mathsf{S}_{e_n})^{j_n}\exp(-u(p,0;\zeta))$

in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates, where $j_1+...+j_n = |j|$, $k_1, j_1, ..., j_n$ are nonnegative integers, $2^{r-1} \le n \le 2^r - 1$, $\binom{l}{m} := l!/[m!(l-m)!]$ denotes the binomial coefficient, $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$; $l! = 1\cdot 2\cdot ...\cdot l$ for each $l \ge 3$, $s_j = s_j(n;t)$.

The transform $\mathcal{F}^n(f)$ of any generalized function f is the holomorphic function by $p \in W_f$ and by $\zeta \in \mathcal{A}_r$, since the right side of Equation 19(5) is holomorphic by p in W_f and by ζ in view of Theorem 4. Equation 19(5) implies, that Theorems 11 - 13 are accomplished also for generalized functions.

For $a_1 = a_{-1}$ the region of convergence reduces to the vertical hyperplane in $\mathcal{A}_r$ over $\mathbf{R}$. For $a_{-1} < a_1$ there is no any common domain of convergence and $f(t)$ can not be transformed.

21. Theorem. *If $f(t)$ is an original function on $\mathbf{R}^n$, $F^n(p;\zeta)$ is its image, $\partial^{|j|}f(t)/\partial s_1^{j_1}...\partial s_n^{j_n}$*

or $\partial^{|j|} f(t)/\partial t_1^{j_1}...\partial t_n^{j_n}$ *is an original,* $|j| = j_1 + ... + j_n$, $0 \le j_1, ..., j_n \in \mathbf{Z}$, $2^{r-1} \le n \le 2^r - 1$; *then*

$$\text{(1)} \quad \mathcal{F}^n\left(\partial^{|j|} f(t)/\partial s_1^{j_1}...\partial s_n^{j_n}, u; p; \zeta\right)$$

$$= \sum_{0 \le k_1 \le j_1} \binom{j_1}{k_1} p_0^{j_1-k_1} (p_1 \mathsf{S}_{e_1})^{k_1} (p_2 \mathsf{S}_{e_2})^{j_2} ... (p_n \mathsf{S}_{e_n})^{j_n} \mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta)$$

for $u(p,t;\zeta) := p_0 s_1 + M(p,t;\zeta) + \zeta_0$ *given by 2*$(1, 2, 2.1)$, *or*

$$\text{(1.1)} \quad \mathcal{F}^n\left(\partial^{|j|} f(t)/\partial t_1^{j_1}...\partial t_n^{j_n}, u; p; \zeta\right) =$$

$$(p_0 + p_1 \mathsf{S}_{e_1})^{j_1} (p_0 + p_2 \mathsf{S}_{e_2})^{j_2} ... (p_0 + p_n \mathsf{S}_{e_n})^{j_n} \mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta)$$

for $u(p,t;\zeta)$ *given by 1*$(8, 8.1)$ *over the Cayley-Dickson algebra* $\mathcal{A}_r$ *with* $2 \le r < \infty$. *Domains, where Formulas* $(1, 1.1)$ *are true may be different from a domain of the multiparameter noncommutative transform for* f, *but they are satisfied in the domain* $a_1 < Re(p) < a_{-1}$, *where*

$a_{-1} = \min(a_{-1}(f), a_{-1}(\partial^{|m|} f(t)/\partial \phi_1^{m_1}...\partial \phi_n^{m_n}) : |m| \le |j|, 0 \le m_l \le j_l \forall l)$;

$a_1 = \max(a_1(f), a_1(\partial^{|m|} f(t)/\partial \phi_1^{m_1}...\partial \phi_n^{m_n}) : |m| \le |k|, 0 \le m_l \le j_l \forall l)$, *if* $a_1 < a_{-1}$, *where* $\phi_j = s_j$ *or* $\phi_j = t_j$ *for each* j *correspondingly.*

Proof. To each domain U_v the domain U_{-v} symmetrically corresponds. The number of different vectors $v \in \{-1, 1\}^n$ is even 2^n. Therefore, for $u = p_0 t + \zeta_0 + M(p,t;\zeta)$ due to Theorem 12 the equality

$$\text{(2)} \quad \int_{\mathbf{R}^n} (\partial f(t)/\partial s_j) e^{-u(p,t;\zeta)} ds = \int_{\mathbf{R}^n} (\partial f(t)/\partial s_j) e^{-u(p,t;\zeta)} dt =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} (dt^j) \left[f(t) e^{-u(p,t;\zeta)}\right]\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbf{R}^{n-1}} (dt^j) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\partial e^{-u(p,t;\zeta)}/\partial s_j] ds_j\right)$$

is satisfied in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates, since the absolute value of the Jacobian $\partial t/\partial(t^j, s_j)$ is unit. Since for $a_1 < Re(p) < a_{-1}$ the first additive is zero, while the second integral converts with the help of Formulas 12(2, 2.1), Formula (1) follows for $k = 1$:

(3) $\mathcal{F}^n(\partial f(t)/\partial s_j, u; p; \zeta) = p_0 \delta_{1,j} \mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta) + p_j \mathsf{S}_{e_j} \mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta)$.

To accomplish the derivation we use Theorem 14 so that

$$\lim_{\tau \to 0} \left[\mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta) - \mathcal{F}^n(f(t - \tau e_j), u; p; \zeta)\right]/\tau$$

$$= \lim_{\tau \to 0} \left[\mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta) - \mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta + \tau(p_0 + p_1 i_1 + ... + p_j i_j))\right]/\tau$$

$$= \lim_{\tau \to 0} \int_{\mathbf{R}^n} f(t) \left[e^{-u(p,t;\zeta)} - e^{-u(p,t;\zeta + \tau(p_0 + p_1 i_1 + ... + p_j i_j))}\right] \tau^{-1} dt,$$

where $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, .., 0) \in \mathbf{R}^n$ with 1 on the j-th place. If the original $\partial^{|j|} f(t)/\partial s_1^{j_1}...\partial s_n^{j_n}$ exists, then $\partial^{|m|} f(t)/\partial s_1^{m_1}...\partial s_n^{m_n}$ is continuous for $0 \le |m| \le |j| - 1$ with $0 \le m_l \le j_l$ for each $l = 1, ..., n$, where $f^0 := f$. The interchanging of $\lim_{\tau \to 0}$ and $\int_{\mathbf{R}^n}$ may change a domain of convergence, but in the indicated in the theorem domain $a_1 < Re(p) < a_{-1}$, when it is non void, Formula (3) is valid. Applying Formula (3) in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates by induction to $(\partial^{|m|} f(t)/\partial s_1^{m_1}...\partial s_n^{m_n}) : |m| \le |j|, 0 \le m_l \le j_l \forall l)$ with the corresponding order subordinated to $\partial^{|j|} f(t)/\partial s_1^{j_1}...\partial s_n^{j_n}$, or in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates using Formula 12(1.1) for the partial derivatives $(\partial^{|m|} f(t)/\partial t_1^{m_1}...\partial t_n^{m_n}) : |m| \le |j|, 0 \le m_l \le j_l \forall l)$ with the corresponding order subordinated to $\partial^{|j|} f(t)/\partial t_1^{j_1}...\partial t_n^{j_n}$ we deduce Expressions (1) and (1.1) with the help of Statement 6 from §XVII.2.3 [30] about the differentiation of an improper integral by a parameter and §2.

22. Remarks. For the entire Euclidean space $\mathbf{R}^n$ Theorem 21 for $\partial f(t)/\partial s_j$ gives only one or two additives on the right side of 21(1) in accordance with 21(3).

Evidently Theorems 4, 11 and Proposition 10 are accomplished for $\mathcal{F}^{k;t_{j(1)},...,t_{j(k)}}(f,u;p;\zeta)$ also.

Theorem 12 is satisfied for $\mathcal{F}^{k;t_{j(1)},...,t_{j(k)}}$ and any $j \in \{j(1),...,j(k)\}$, so that $s_l = s_l(k;t) = t_{j(l)} + ... + t_{j(k)}$ for each $1 \le l \le k$, $p_m = 0$ and $\zeta_m = 0$ for each $1 \le m \notin \{j(1),...,j(k)\}$ (the same convention is in 13, 14, 17, 21, see also below). For $\mathcal{F}^{k;t_{j(1)},...,t_{j(k)}}$ in Theorem 13 in Formula 13(1) it is natural to put $t_m = 0$ and $h_m = 0$ for each $1 \le m \notin \{j(1),...,j(k)\}$, so that only $(k+1)$ additives with h_0, $h_{j(1)}$,...,$h_{j(k)}$ on the right side generally may remain. Theorems 14 and 17 and 21 modify for $\mathcal{F}^{k;t_{j(1)},...,t_{j(k)}}$ putting in 14(1) and 17(1,2) and 21(1) $t_j = 0$ and $\tau_j = 0$ respectively for each $j \notin \{j(1),...,j(k)\}$.

To take into account boundary conditions for domains different from U_v, for example, for bounded domains V in $\mathbf{R}^n$ we consider a bounded noncommutative multiparameter transform

(1) $\mathcal{F}^n(f(t)\chi_V, u;p;\zeta) =: \mathcal{F}^n_V(f(t),u;p;\zeta)$.

For it evidently Theorems 4, 6-8, 11, 13, 14, 16, 17, Proposition 10 and Corollary 4.1 are satisfied as well taking specific originals f with supports in V.

At first take domains W which are quadrants, that is canonical closed subsets affine diffeomorphic with $Q^n = \prod_{j=1}^n [\mathsf{a}_j, b_j]$, where $-\infty \le \mathsf{a}_j < b_j \le \infty$, $[\mathsf{a}_j,b_j] := \{x \in \mathbf{R} : \ \mathsf{a}_j \le x \le b_j\}$ denotes the segment in $\mathbf{R}$. This means that there exists a vector $w \in \mathbf{R}^n$ and a linear invertible mapping C on $\mathbf{R}^n$ so that $C(W) - w = Q$. We put $t^{j,1} := (t_1,...,t_j,...,t_n : \ t_j = \mathsf{a}_j)$, $t^{j,2} := (t_1,...,t_j,...,t_n : \ t_j = b_j)$. Consider $t = (t_1,...,t_n) \in Q^n$.

23. Theorem. *Let $f(t)$ be a function-original with a support by t variables in Q^n and zero outside Q^n such that $\partial f(t)/\partial t_j$ also satisfies Conditions 1$(1-4)$. Suppose that $u(p,t;\zeta)$ is given by 2$(1,2,2.1)$ or 1$(8,8.1)$ over $\mathcal{A}_r$ with $2 \le r < \infty$, $2^{r-1} \le n \le 2^r - 1$. Then*

$$(1) \qquad \mathcal{F}^n\big((\partial f(t)/\partial t_j)\chi_{Q^n}(t),u;p;\zeta\big) =$$
$$\mathcal{F}^{n-1;t^{j,2}}\big(f(t^{j,2})\chi_{Q^n}(t^{j,2}),u;p;\zeta\big) - \mathcal{F}^{n-1;t^{j,1}}\big(f(t^{j,1})\chi_{Q^n}(t^{j,1}),u;p;\zeta\big)$$
$$+\Big[p_0 + \sum_{k=1}^{j} p_k \mathsf{S}_{e_k}\Big]\mathcal{F}^n\big(f(t)\chi_{Q^n}(t),u;p;\zeta\big)$$

in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates, or

$$(1.1) \qquad \mathcal{F}^n\big((\partial f(t)/\partial t_j)\chi_{Q^n}(t),u;p;\zeta\big) =$$
$$\mathcal{F}^{n-1;t^{j,2}}\big(f(t^{j,2})\chi_{Q^n}(t^{j,2}),u;p;\zeta\big) - \mathcal{F}^{n-1;t^{j,1}}\big(f(t^{j,1})\chi_{Q^n}(t^{j,1}),u;p;\zeta\big)$$
$$+\big[p_0 + p_j \mathsf{S}_{e_j}\big]\mathcal{F}^n\big(f(t)\chi_{Q^n}(t),u;p;\zeta\big)$$

in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates in a domain $W \subset \mathcal{A}_r$; if $\mathsf{a}_j = -\infty$ or $b_j = +\infty$, then the addendum with $t^{j,1}$ or $t^{j,2}$ correspondingly is zero.

Proof. Here the domain Q^n is bounded and f is almost everywhere continuous and satisfies Conditions $1(1-4)$, hence $f(t)\exp(-u(p,t;\zeta)) \in L^1(\mathbf{R}^n, \lambda_n, \mathcal{A}_r)$ for each $p \in \mathcal{A}_r$, since $\exp(-u(p,t;\zeta))$ is continuous and $supp(f(t)) \subset Q^n$.

Analogously to §12 the integration by parts gives

$$(2) \qquad \int_{\mathsf{a}_j}^{b_j} (\partial f(t)/\partial t_j)\exp(-u(p,t;\zeta))dt_j = f(t)\exp(-u(p,t;\zeta))\Big|_{t_j=\mathsf{a}_j}^{t_j=b_j}$$

$$-\int_{\mathsf{a}_j}^{b_j}\left[f(t)(\partial\exp(-u(p,t;\zeta))/\partial t_j)\right]dt_j,$$

where $t=(t_1,...,t_n)$. Then the Fubini's theorem implies:

$$(3)\qquad \int_{Q^n}(\partial f(t)/\partial t_j)\exp(-u(p,t;\zeta))dt=$$

$$\int_{\mathsf{a}_1}^{b_1}...\int_{\mathsf{a}_{j-1}}^{b_{j-1}}\int_{\mathsf{a}_{j+1}}^{b_{j+1}}\int_{\mathsf{a}_n}^{b_n}\left[\int_{\mathsf{a}_j}^{b_j}(\partial f(t)/\partial t_j)\exp(-u(p,t;\zeta))dt_j\right]dt^j$$

$$=\left[\int_{t\in Q^n,\ t_j=b_j}f(t^{j,2})\exp(-u(p,t^{j,2};\zeta))dt^j\right]-\left[\int_{t\in Q^n,\ t_j=\mathsf{a}_j}f(t^{j,1})\exp(-u(p,t^{j,1};\zeta))dt^j\right]$$

$$+\left[p_0+\sum_{k=1}^{j}p_k\mathsf{S}_{e_k}\right]\int_{\mathsf{a}_1}^{b_1}...\int_{\mathsf{a}_n}^{b_n}f(t)\exp(-u(p,t;\zeta))dt$$

in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates or

$$(3.1)\qquad \int_{Q^n}(\partial f(t)/\partial t_j)\exp(-u(p,t;\zeta))dt$$

$$=\left[\int_{t\in Q^n,\ t_j=b_j}f(t^{j,2})\exp(-u(p,t^{j,2};\zeta))dt^j\right]-\left[\int_{t\in Q^n,\ t_j=\mathsf{a}_j}f(t^{j,1})\exp(-u(p,t^{j,1};\zeta))dt^j\right]$$

$$+[p_0+p_j\mathsf{S}_{e_j}]\int_{\mathsf{a}_1}^{b_1}...\int_{\mathsf{a}_n}^{b_n}f(t)\exp(-u(p,t;\zeta))dt$$

in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates, where as usually $t^j=(t_1,...,t_{j-1},0,t_{j+1},...,t_n)$, $dt^j=dt_1...dt_{j-1}dt_{j+1}...dt_n$. This gives Formulas $(1,1.1)$, where

$$(4)\qquad \mathcal{F}^{n-1;t^{j,k}}(f(t^{j,k})\chi_{Q^n}(t^{j,k}),u(p,t^{j,k};\zeta);p;\zeta)=$$

$$\int_{\mathsf{a}_1}^{b_1}...\int_{\mathsf{a}_{j-1}}^{b_{j-1}}\int_{\mathsf{a}_{j+1}}^{b_{j+1}}\int_{\mathsf{a}_n}^{b_n}f(t^{j,k})\exp(-u(p,t^{j,k};\zeta))dt^{j,k}$$

is the non-commutative transform by $t^{j,k}$, $2^{r-1}\le n\le 2^r-1$, $dt^{j,k}$ is the Lebesgue volume element on $\mathbf{R}^{n-1}$.

24. Theorem. *If a function $f(t)\chi_{Q^n}(t)$ is original together with its derivative $\partial^n f(t)\chi_{Q^n}(t)/\partial s_1...\partial s_n$ or $\partial^n f(t)\chi_{Q^n}(t)/\partial t_1...\partial t_n$, where $F^n_u(p;\zeta)$ is an image function of $f(t)\chi_{Q^n}(t)$ over the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$ with $2\le r\in\mathbf{N}$, $2^{r-1}\le n\le 2^r-1$, for the function $u(p,t;\zeta)$ given by 2$(1,2,2.1)$ or 1$(8,8.1)$, $Q^n=\prod_{j=1}^n[0,b_j]$, $b_j>0$ for each j, then*

$$(1)\qquad \lim_{p\to\infty}\left\{[p_0+p_1\mathsf{S}_{e_1}]p_2\mathsf{S}_{e_2}...p_n\mathsf{S}_{e_n}F^n_u(p;\zeta)+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\right.$$

$$\sum_{1\le j_1<...<j_{n-m}\le n;\ 1\le l_1<...<l_m\le n;\ l_\alpha\ne j_\beta\ \forall\alpha,\beta}[p_0\delta_{1,j_1}+p_{j_1}\mathsf{S}_{e_{j_1}}]p_{j_2}\mathsf{S}_{e_{j_2}}...p_{j_{n-m}}\mathsf{S}_{e_{j_{n-m}}}$$

$$\left.F^{n-m}_u(p^{(l)};\zeta)\right\}=(-1)^{n+1}f(0)e^{-u(0,0;\zeta)}$$

in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates, or

$$(1.1)\quad \lim_{p\to\infty}\Big\{[p_0+p_1\mathsf{S}_{e_1}][p_0+p_2\mathsf{S}_{e_2}]...[p_0+p_n\mathsf{S}_{e_n}]F^n_u(p;\zeta)+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m$$

$$\sum_{1\le j_1<...<j_{n-m}\le n;\ 1\le l_1<...<l_m\le n;\ l_\alpha\ne j_\beta\ \forall \alpha,\beta}[p_0+p_{j_1}\mathsf{S}_{e_{j_1}}][p_0+p_{j_2}\mathsf{S}_{e_{j_2}}]...[p_0+p_{j_{n-m}}\mathsf{S}_{e_{j_{n-m}}}]$$

$$F^{n-m}_u(p^{(l)};\zeta)\Big\}=(-1)^{n+1}f(0)e^{-u(0,0;\zeta)}$$

in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates, where $f(0)=\lim_{t\in Q^n,\ t\to 0}f(t)$, p tends to the infinity inside the angle $|Arg(p)|<\pi/2-\delta$ for some $0<\delta<\pi/2$.

Proof. In accordance with Theorem 23 we have Equalities 23(1, 1.1). Therefore we infer that

$$(2)\quad \mathcal{F}^{n-1;t^{j,k}}\big(f(t^{j,k})\chi_{Q^n}(t^{j,k}),u(p,t^{j,k};\zeta);p;\zeta\big)=$$

$$\lim_{t_j\to\beta_{j,k}+0}\int_{\mathsf{a}_1}^{b_1}dt_1...\int_{\mathsf{a}_{j-1}}^{b_{j-1}}dt_{j-1}\int_{\mathsf{a}_{j+1}}^{b_{j+1}}dt_{j+1}...\int_{\mathsf{a}_n}^{b_n}(dt_n)f(t)\exp(-u(p,t;\zeta)),$$

where $\beta_{j,1}=\mathsf{a}_j=0$, $\beta_{j,2}=b_j>0$, $k=1,2$. Mention, that $(...((t^{1,l_1})^{2,l_2})...)^{j,l_j}=(t:\ t_1=\beta_{1,l_1},...,t_j=\beta_{j,l_j})$ for every $1\le j\le n$. Analogously to §12 we apply Formula (2) by induction $j=1,...,n$, $2^{r-1}\le n\le 2^r-1$, to

$\partial^n f(t(s))/\partial s_1...\partial s_n,...,\partial^{n-j+1}f(t(s))/\partial s_j...\partial s_n,...,\partial f(t(s))/\partial s_n$

instead of $\partial f(t(s))/\partial s_j$, $s_j=s_j(n;t)$ as in §2, or applying to the partial derivatives

$\partial^n f(t)/\partial t_1...\partial t_n,...,\partial^{n-j+1}f(t)/\partial t_j...\partial t_n,...,\partial f(t)/\partial t_n$

instead of $\partial f(t)/\partial t_j$ correspondingly. If $s_j>0$ for some $j\ge 1$, then $s_1>0$ for Q^n and $\lim_{p\to\infty}e^{-u(p,t^{(l)};\zeta)}=0$ for such $t^{(l)}$, where $t=(t_1,...,t_n)$, $(l)=(l_1,...,l_n)$, $|l|=l_1+...+l_n$, $t^{(l)}=(t^{(l)}_1,...,t^{(l)}_n)$, $t^{(l)}_j=\mathsf{a}_j$ for $l_j=1$ and $t^{(l)}_j=b_j$ for $l_j=2$, $1\le j\le 2^r-1$. Therefore,

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{l_j\in\{1,2\};\ j=1,...,n}(-1)^{|l|}f(t^{(l)})e^{-u(p,t^{(l)};\zeta)}=(-1)^n f(0)e^{-u(0,0;\zeta)},$$

since $u(p,0;\zeta)=u(0,0;\zeta)$, where $f(^{(l)})=\lim_{t\in Q^n;t\to t^{(l)}}f(t)$.

In accordance with Note 8 [18]

$$\lim_{p\to\infty,|Arg(p)|<\pi/2-\delta}\mathcal{F}^n((\partial^n f(t)/\partial s_1...\partial s_n)\chi_{Q^n}(t),u(p,t;\zeta);p;\zeta)=0$$

in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates and

$$\lim_{p\to\infty,|Arg(p)|<\pi/2-\delta}\mathcal{F}^n((\partial^n f(t)/\partial t_1...\partial t_n)\chi_{Q^n}(t),u(p,t;\zeta);p;\zeta)=0$$

in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates, which gives the statement of this theorem.

25. Suppose that $f(t)\chi_{Q^n}(t)$ is an original function, $F^n(p;\zeta)$ is its image, $\partial^{|j|}f(t)\chi_{Q^n}(t)/\partial t_1^{j_1}...\partial t_n^{j_n}$ is an original, $|j|=j_1+...+j_n$, $0\le j_1,...,j_n\in\mathbf{Z}$, $2^{r-1}\le n\le 2^r-1$, $-\infty\le\mathsf{a}_k<b_k\le\infty$ for each $k=1,...,n$, $(l)=(l_1,...,l_n)$, $l_k\in\{0,1,2\}$, $W=\mathcal{A}_r$ for bounded Q^n. Let $W=\{p\in\mathcal{A}_r:\ a_1<Re(p)\}$ for $b_k=\infty$ for some k and finite a_k for each k; $W=\{p\in\mathcal{A}_r:\ Re(p)<a_{-1}\}$ for $\mathsf{a}_k=-\infty$ for some k and finite b_k for each k; $W=\{p\in\mathcal{A}_r:\ a_1<Re(p)<a_{-1}\}$ when $\mathsf{a}_k=-\infty$ and $b_l=+\infty$ for some k and l; $t^{(l)}=(t^{(l)}_1,...,t^{(l)}_n)$.

We put $t_k^{(l)} = t_k$ and $q_k = 0$ for $l_k = 0$, $t_k^{(l)} = \mathsf{a}_k$ for $l_k = 1$, $t_k^{(l)} = b_k$ for $l_k = 2$, $(q) = (q_1, ..., q_n)$, $\quad |q| = q_1 + ... + q_n$,

$a_1 = \max(a_1(f), a_1(\partial^{|m|} f(t)/\partial t_1^{m_1} ... \partial t_n^{m_n}) : \ |m| \le |j|, 0 \le m_k \le j_k \forall k)$,

$a_{-1} = \min(a_{-1}(f), a_{-1}(\partial^{|m|} f(t)/\partial t_1^{m_1} ... \partial t_n^{m_n}) : \ |m| \le |j|, 0 \le m_k \le j_k \ \forall k)$ if $a_1 < a_{-1}$.

If $\mathsf{a}_k = -\infty$ and $b_k = +\infty$ for Q^n with a given k, then $l_k = 0$. If either $\mathsf{a}_k > -\infty$ or $b_k < +\infty$ for a marked k, then $l_k \in \{0, 1, 2\}$. We also put $h_k = h_k(l) = sign(l_k)$ for each k, where $sign(x) = -1$ for $x < 0$, $sign(0) = 0$, $sign(x) = 1$ for $x > 0$, $h = h(l)$, $|h| = |h_1| + ... + |h_n|$,

$(lj) := (l_1 sign(j_1), ..., l_n sign(j_n))$.

Let the vector (l) enumerate faces $\partial Q^n_{(l)}$ in ∂Q^n_{k-1} for $|h(l)| = k \ge 1$, so that $\partial Q^n_{k-1} = \bigcup_{|h(l)|=k} Q^n_{(l)}$, $\partial Q^n_{(l)} \cap \partial Q^n_{(m)} = \emptyset$ for each $(l) \ne (m)$ (see also more detailed notations in §28).

Let the shift operator be defined:

$T_{(m)} F(p; \zeta) := F(p; \zeta - (i_1 m_1 + ... + i_n m_n)\pi/2)$, also the operator

(SO) $\mathsf{S}_{(m)} F(p; \zeta) := \mathsf{S}_{e_1}^{m_1} ... \mathsf{S}_{e_n}^{m_n} F(p; \zeta)$,

where $(m) = (m_1, ..., m_n) \in [0, \infty)^n \subset \mathbf{R}^n$, $\mathsf{S}^k_{(m)} = \mathsf{S}_{k(m)}$ for each positive number $0 < k \in \mathbf{R}$, $\mathsf{S}_0 = I$ is the unit operator for $(m) = 0$ (see also Formulas 12(3.1 $-$ 3.7)). As usually let $e_1 = (1, 0, ..., 0)$,...,$e_n = (0, ..., 0, 1)$ be the standard orthonormal basis in $\mathbf{R}^n$ so that $(m) = m_1 e_1 + ... + m_n e_n$.

Theorem. *Then*

$$(1) \qquad \mathcal{F}^n \Big(\partial^{|j|} f(t) \chi_{Q^n}(t) / \partial t_1^{j_1} ... \partial t_n^{j_n}, u(p, t; \zeta); p; \zeta \Big) = \mathsf{R}_{e_1}^{j_1} \mathsf{R}_{e_2}^{j_2} ... \mathsf{R}_{e_n}^{j_n} \mathcal{F}^n(f(t) \chi_{Q^n}(t), u; p; \zeta)$$
$$+ \sum_{1 \le |(lj)|; \ m_k + q_k + h_k = j_k; 0 \le m_k; \ 0 \le q_k; \ h_k = sign(l_k j_k); \ q_k = 0 \ for \ l_k j_k = 0, \ for \ each \ k = 1, ..., n; \ (l) \in \{0,1,2\}^n} (-1)^{|(lj)|} \mathsf{R}_{e_1}^{m_1} \mathsf{R}_{e_2}^{m_2} ... \mathsf{R}_{e_n}^{m_n} \mathcal{F}^{n - |h(lj)|} (\partial^{|q|} f(t^{(lj)}) \chi_{\partial Q^n_{(lj)}}(t^{(lj)}) / \partial t_1^{q_1} ... \partial t_n^{q_n}, u; p; \zeta)$$

for $u(p, t; \zeta)$ in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates or the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates over the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$ with $2 \le r < \infty$, where

(1.1) $\mathsf{R}_{e_1} := p_0 + p_1 \mathsf{S}_{e_1}$, $\mathsf{R}_{e_2} := p_0 + p_1 \mathsf{S}_{e_1} + p_2 \mathsf{S}_{e_2}$,..., $\mathsf{R}_{e_n} := p_0 + p_1 \mathsf{S}_{e_1} + p_2 \mathsf{S}_{e_2} + ... + p_n \mathsf{S}_{e_n}$ *in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates, while*

(1.2) $\mathsf{R}_{e_1} := p_0 + p_1 \mathsf{S}_{e_1}$, $\mathsf{R}_{e_2} := p_0 + p_2 \mathsf{S}_{e_2}$,..., $\mathsf{R}_{e_n} := p_0 + p_n \mathsf{S}_{e_n}$ *in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates, i.e. $\mathsf{R}_{e_j} = \mathsf{R}_{e_j}(p)$ are operators depending on the parameter p. If $t_j^{(l)} = \infty$ for some $1 \le j \le n$, then the corresponding addendum on the right of* (1) *is zero.*

Proof. In view of Theorem 23 we get the equality

$$(2) \qquad \int_{Q^n} \Big[(\partial^{|m|+1} f(t) / \partial t_1^{m_1} ... \partial t_{k-1}^{m_{k-1}} \partial t_k^{m_k+1} \partial t_{k+1}^{m_{k+1}} ... \partial t_n^{m_n}) e^{-u(p,t;\zeta)} \Big] dt =$$
$$\int_{\mathbf{R}^{n-1} \cap Q^n} (dt^k) \Big[(\partial^{|m|} f(t) / \partial t_1^{m_1} ... \partial t_n^{m_n}) e^{-u(p,t;\zeta)} \Big] \Big|_{\mathsf{a}_k}^{b_k}$$
$$- \int_{\mathbf{R}^{n-1} \cap Q^n} (dt^k) \bigg(\int_{\mathsf{a}_k}^{b_k} \Big(\partial^{|m|} f(t) / \partial t_1^{m_1} ... \partial t_n^{m_n} \Big) \Big[\partial e^{-u(p,t;\zeta)} / \partial t_k \Big] dt_k \bigg)$$

is satisfied for $0 \le m_k \le j_k$ for each $k = 1, ..., n$ with $|m| < |j|$. On the other hand, for $p \in W$ additives on the right of (2) convert with the help of Formula 23(1). Each term of the form

$$\int_{\mathbf{R}^{n - |h(l)|} \cap Q^n} (dt^{(l)}) \Big[(\partial^{|q|} f(t^{(l)}) \chi_{\partial Q^n_{(l)}}(t^{(l)}) / \partial t_1^{q_1} ... \partial t_n^{q_n} e^{-u(p,t;\zeta)} \Big]$$

can be further transformed with the help of (2) by the considered variable t_k only in the case $l_k = 0$. Applying Formula (2) by induction to partial derivatives $\partial^{|j|}f/\partial t_1^{j_1}...\partial t_n^{j_n}$, $\partial^{|j|-j_1}f/\partial t_2^{j_2}...\partial t_n^{j_n}$,...,$\partial^{j_n}f/\partial t_n^{j_n}$,...,$\partial f/\partial t_n$ as in §21 and using Theorem 14 and Remarks 22 we deduce (1).

26. Theorem. *Let $f(t)\chi_{U_{1,...,1}}(t)$ be a function-original with values in $\mathcal{A}_r$ with $2 \le r < \infty$, $2^{r-1} \le n \le 2^r - 1$, u is given by 2$(1, 2, 2.1)$ or 1$(8, 8.1)$,*

$$(1) \qquad g(t) := \int_0^{t_1} ... \int_0^{t_n} f(x)dx, \ \textit{then}$$

$$(2) \qquad \mathcal{F}^n(f\chi_{U_{1,...,1}}(t), u; p; \zeta) = \mathsf{R}_{e_1}\mathsf{R}_{e_2}...\mathsf{R}_{e_n}\mathcal{F}^n(g(t)\chi_{U_{1,...,1}}(t), u; p; \zeta)$$

in the domain $Re(p) > \max(a_1, 0)$, where the operators R_{e_j} are given by Formulas 25$(1.1, 1.2)$.

Proof. In view of Theorem 25 the equation

$$(3) \qquad \mathcal{F}^n(f\chi_{U_{1,...,1}}(t), u; p; \zeta) =$$

$$\mathsf{R}_{e_1}\mathsf{R}_{e_2}...\mathsf{R}_{e_n}\mathcal{F}^n(g(t), u; p; \zeta)$$

$$+ \sum_{1\le|l|;\ 0\le m_k\le 1;\ m_k+h_k=1;\ h_k=sign(l_k);\ \text{for each } k=1,...,n;\ q_1=0,...,q_n=0}$$

$$(-1)^{|(l)|}\mathsf{R}_{e_1}^{m_1}\mathsf{R}_{e_2}^{m_2}...\mathsf{R}_{e_n}^{m_n}\mathcal{F}^{n-|h(l)|}(g(t^{(l)}), u; p; \zeta),$$

is satisfied, since $\partial^n g(t)/\partial t_1...\partial t_n = (f\chi_{U_{1,...,1}})(t)$, where $j_1 = 1,...,j_n = 1$, $l_j = 1$ for each $j = 1, ..., n$. Equation (3) is accomplished in the same domain $Re(p) > \max(a_1, 0)$, since $g(0) = 0$ and $g(t)$ also fulfills conditions of Definition 1, while $a_1(g) < \max(a_1(f), 0) + b$ for each $b > 0$, where $a_1 \in \mathbf{R}$. On the other hand, $g(t)$ is equal to zero on $\partial U_{1,...,1}$ and outside $U_{1,...,1}$ in accordance with formula (1), hence all terms on the right side of Equation (3) with $|l| > 0$ disappear and $supp(g(t)) \subset U_{1,...,1}$. Thus we get Equation (2).

27. Theorem. *Suppose that $F^k(p;\zeta)$ is an image $\mathcal{F}^{k;t_1,...,t_k}(f(t)\chi_{U_{1,...,1}}(t), u; p; \zeta)$ of an original function $f(t)$ for u given by 2$(1, 2, 2.1)$ in the half space $W := \{p \in \mathcal{A}_r : Re(p) > a_1\}$ with $2 \le r < \infty$, $p_1 = 0$,...,$p_{j-1} = 0$; $\zeta_1 = \pi/2$,...,$\zeta_{j-1} = \pi/2$ for each $j \ge 2$ in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates or $\zeta_1 = 0$,...,$\zeta_{j-1} = 0$ for each $j \ge 2$ in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates;*

(1) *the integral $\int_{p_j i_j}^{\infty i_j} F^k(p_0 + z; \zeta)dz$ converges, where $p = p_0 + p_1 i_1 + ... + p_k i_k \in \mathcal{A}_r$, $p_j \in \mathbf{R}$ for each $j = 0, ..., 2^r - 1$, $2^{r-1} \le k \le 2^r - 1$, $U_{1,...,1} := \{(t_1, ..., t_k) \in \mathbf{R}^k : \ t_1 \ge 0, ..., t_k \ge 0\}$. Let also*

(2) *the function $F^k(p;\zeta)$ be continuous by the variable $p \in \mathcal{A}_r$ on the open domain W, moreover, for each $w > a_1$ there exist constants $C_w{}' > 0$ and $\epsilon_w > 0$ such that*

(3) *$|F^k(p;\zeta)| \le C_w{}' \exp(-\epsilon_w|p|)$ for each $p \in S_{R(n)}$, $S_R := \{z \in \mathcal{A}_r : \ Re(z) \ge w\}$, $0 < R(n) < R(n+1)$ for each $n \in \mathbf{N}$, $\lim_{n\to\infty} R(n) = \infty$, where a_1 is fixed, $\zeta = \zeta_0 i_0 + ... + \zeta_k i_k \in \mathcal{A}_r$ is marked, $\zeta_j \in \mathbf{R}$ for each $j = 0, ..., k$. Then*

$$(4) \qquad \int_{p_j i_j}^{\infty i_j} F^k(p_0 + z; \zeta)dz = \mathcal{S}_{-e_j}\mathcal{F}^{k;t_1,...,t_k}(f(t)\chi_{U_{1,...,1}}(t)/\xi_j, u; p; \zeta),$$

where $p_1 = 0$,...,$p_{j-1} = 0$ for each $j \ge 2$; $\zeta_1 = \pi/2$,...,$\zeta_{j-1} = \pi/2$ and $\xi_j = s_j(k; t)$ in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates, while $\zeta_1 = 0$,...,$\zeta_{j-1} = 0$ and $\xi_j = t_j$ in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates correspondingly for each $j \ge 1$.

Proof. Take a path of an integration belonging to the half space $Re(p) \ge w$ for some constant $w > a_1$. Then

$$\left|\int_{U_{1,...,1}} f(t)\exp(-u(p,t;\zeta))dt\right| \le C\int_{U_{1,...,1}} \exp(-(p_0-a_1)(t_1+...+t_k))dt < \infty$$

converges, where $C = const > 0$, $p_0 \ge w$. For $t_j > 0$ for each $j = 1,...,k$ conditions of Lemma 2.23 [18] (that is of the noncommutative analog over $\mathcal{A}_r$ of Jordan's lemma) are satisfied. If $t_j \to \infty$, then $s_j \to \infty$, since all t_1,...,t_k are non-negative. Up to a set $\partial U_{1,...,1}$ of λ_k Lebesgue measure zero we can consider that $t_1 > 0$,...,$t_k > 0$. If $s_j \to \infty$, then also $s_1 \to \infty$. The converging integral can be written as the following limit:

$$(5)\qquad \int_{p_j i_j}^{\infty i_j} F^k(p_0+z;\zeta)dz = \lim_{0<\kappa\to 0}\int_{p_j i_j}^{\infty i_j} F^k(p_0+z;\zeta)\exp(-\kappa|z|)dz$$

for $1 \le j \le k$, since the integral $\int_{-S\infty}^{S\infty}[F^k(w+z;\zeta)]dz$ is absolutely converging and the limit $\lim_{\kappa\to 0}\exp(-\kappa|z|) = 1$ uniformly by z on each compact subset in $\mathcal{A}_r$, where S is a purely imaginary marked Cayley-Dickson number with $|S| = 1$. Therefore, in the integral

$$(6)\qquad \int_{p_j i_j}^{\infty i_j} F^k(p_0+z;\zeta)dz = \int_{p_j i_j}^{\infty i_j}\left(\int_{U_{1,...,1}} f(t)\Big[\exp(-u(p_0+z,t;\zeta))\Big]dt\right)dz$$

the order of the integration can be changed in accordance with the Fubini's theorem applied componentwise to an integrand $g = g_0 i_0 + ... + g_n i_n$ with $g_l \in \mathbf{R}$ for each $l = 0,...,n$:

$$(7)\qquad \int_{p_j i_j}^{\infty i_j} F^k(p_0+z;\zeta)dz = \int_{U_{1,...,1}} dt\left(\int_{p_j i_j}^{\infty i_j} f(t)\exp(-u(p_0+z,t;\zeta))dz\right)$$

$$= \int_{U_{1,...,1}} f(t)\left\{\int_{p_j i_j}^{\infty i_j}\Big[e^{-u(p_0+z,t;\zeta)}\Big]dz\right\}dt.$$

Generally, the condition $p_1 = 0$,...,$p_{j-1} = 0$ and $\zeta_1 = \pi/2$,...,$\zeta_{j-1} = \pi/2$ in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates or $\zeta_1 = 0$,...,$\zeta_{j-1} = 0$ in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates for each $j \ge 2$ is essential for the convergence of such integral. We certainly have

$$(8)\quad \int_{p_j i_j}^{b_j i_j}\cos(i_j^* z\xi_j+\zeta_j)dz = \Big[\sin(\theta_j\xi_j+\zeta_j)/\xi_j\Big]\Big|_{\theta_j=p_j}^{\theta_j=b_j} = \Big[-\cos(\theta_j\xi_j+\zeta_j+\pi/2)/\xi_j\Big]\Big|_{\theta_j=p_j}^{\theta_j=b_j}$$

and

$$(9)\quad \int_{p_j i_j}^{b_j i_j}\sin(i_j^* z\xi_j+\zeta_j)dz_j = \Big[-\cos(\theta_j\xi_j+\zeta_j)/\xi_j\Big]\Big|_{\theta_j=p_j}^{\theta_j=b_j} = \Big[-\sin(\theta_j\xi_j+\zeta_j+\pi/2)/\xi_j\Big]\Big|_{\theta_j=p_j}^{\theta_j=b_j}$$

for each $\xi_j > 0$ and $-\infty < p_j < b_j < \infty$ and $j = 1,...,k$. Applying Formulas $(5-9)$ and $2(1,2,2.1)$ or $1(8,8.1)$ and $12(3.1-3.7)$ we deduce that:

$$\int_{p_j i_j}^{\infty i_j}\Big[F^k(p_0+z;\zeta)\Big]dz = \mathsf{S}_{-e_j}\int_{U_{1,...,1}}[f(t)/\xi_j]\exp\{-u(p,t;\zeta)\}dt$$

$$= \mathsf{S}_{-e_j}\mathcal{F}^{k;t_1,...,t_k}(f(t)\chi_{U_{1,...,1}}(t)/\xi_j,u;p;\zeta),$$

where $t=(t_1,...,t_k)$, $s_j=t_j+...+t_k$ for each $1\le j<k$, $s_k=t_k$, $\xi_j=s_j$ in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates or $\xi_j=t_j$ in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates.

28. Application of the noncommutative multiparameter transform to partial differential equations.

Consider a partial differential equation of the form:

(1) $A[f](t)=g(t)$, where

(2) $A[f](t):=\sum_{|j|\le\alpha}\mathbf{a}_j(t)(\partial^{|j|}f(t)/\partial t_1^{j_1}...\partial t_n^{j_n})$,

$\mathbf{a}_j(t)\in\mathcal{A}_\kappa$ are continuous functions, where $0\le\kappa\in\mathbf{Z}$, $j=(j_1,...,j_n)$, $|j|:=j_1+...+j_n$, $0\le j_k\in\mathbf{Z}$, α is a natural order of a differential operator A, $2\le r$, $2^{r-1}\le n\le 2^r-1$. Since $s_k=s_k(n;t)=t_k+...+t_n$ for each $k=1,...,n$, the operator A can be rewritten in s coordinates as

(2.1) $A[f](t(s)):=\sum_{|j|\le\alpha}\mathbf{b}_j(t)(\partial^{|j|}f(t(s))/\partial s_1^{j_1}...\partial s_n^{j_n})$.

That is, there exists $\mathbf{b}_j\ne 0$ for some j with $|j|=\alpha$ and $\mathbf{b}_j=0$ for $|j|>\alpha$, while a function $\sum_{j,|j|=\alpha}\mathbf{b}_j(t(s))s_1^{j_1}...s_n^{j_n}$ is not zero identically on the corresponding domain V. We consider that

($D1$) U is a canonical closed subset in the Euclidean space $\mathbf{R}^n$, that is $U=cl(Int(U))$, where $Int(U)$ denotes the interior of U and $cl(U)$ denotes the closure of U.

Particularly, the entire space $\mathbf{R}^n$ may also be taken. Under the linear mapping $(t_1,...,t_n)\mapsto(s_1,...,s_n)$ the domain U transforms onto V.

We consider a manifold W satisfying the following conditions $(i-v)$.

(i). The manifold W is continuous and piecewise C^α, where C^l denotes the family of l times continuously differentiable functions. This means by the definition that W as the manifold is of class $C^0\cap C^\alpha_{loc}$. That is W is of class C^α on open subsets $W_{0,j}$ in W and $W\setminus(\bigcup_j W_{0,j})$ has a codimension not less than one in W.

(ii). $W=\bigcup_{j=0}^m W_j$, where $W_0=\bigcup_k W_{0,k}$, $W_j\cap W_k=\emptyset$ for each $k\ne j$, $m=dim_{\mathbf{R}}W$, $dim_{\mathbf{R}}W_j=m-j$, $W_{j+1}\subset\partial W_j$.

(iii). Each W_j with $j=0,...,m-1$ is an oriented C^α-manifold, W_j is open in $\bigcup_{k=j}^m W_k$. An orientation of W_{j+1} is consistent with that of ∂W_j for each $j=0,1,...,m-2$. For $j>0$ the set W_j is allowed to be void or non-void.

(iv). A sequence W^k of C^α orientable manifolds embedded into $\mathbf{R}^n$, $\alpha\ge 1$, exists such that W^k uniformly converges to W on each compact subset in $\mathbf{R}^n$ relative to the metric $dist$.

For two subsets B and E in a metric space X with a metric ρ we put

(3) $dist(B,E):=\max\{\sup_{b\in B}dist(\{b\},E),\sup_{e\in E}dist(B,\{e\})\}$, where
$dist(\{b\},E):=\inf_{e\in E}\rho(b,e)$, $dist(B,\{e\}):=\inf_{b\in B}\rho(b,e)$, $b\in B$, $e\in E$.

Generally, $dim_{\mathbf{R}}W=m\le n$. Let $(e_1^k(x),...,e_m^k(x))$ be a basis in the tangent space T_xW^k at $x\in W^k$ consistent with the orientation of W^k, $k\in\mathbf{N}$.

We suppose that the sequence of orientation frames $(e_1^k(x_k),...,e_m^k(x_k))$ of W^k at x_k converges to $(e_1(x),...,e_m(x))$ for each $x\in W_0$, where $\lim_k x_k=x\in W_0$, while $e_1(x)$,...,$e_m(x)$ are linearly independent vectors in $\mathbf{R}^n$.

(v). Let a sequence of Riemann volume elements λ_k on W^k (see §XIII.2 [30]) induce a limit volume element λ on W, that is, $\lambda(B\cap W)=\lim_{k\to\infty}(B\cap W^k)$ for each compact canonical closed subset B in $\mathbf{R}^n$, consequently, $\lambda(W\setminus W_0)=0$. We shall consider surface integrals of the second kind, i.e. by the oriented surface W (see (iv)), where each W_j, $j=0,...,m-1$ is oriented (see also §XIII.2.5 [30]).

Recall, that a subset V in $\mathbf{R}^n$ is called convex, if from $a,b\in V$ it follows that $\epsilon a+(1-\epsilon)b\in V$

for each $\epsilon \in [0,1]$.

(vi). Let a vector $w \in Int(U)$ exist so that $U - w$ is convex in $\mathbf{R}^n$ and let ∂U be connected. Suppose that a boundary ∂U of U satisfies Conditions $(i - v)$ and

(vii) let the orientations of ∂U^k and U^k be consistent for each $k \in \mathbf{N}$ (see Proposition 2 and Definition 3 [30]).

Particularly, the Riemann volume element λ_k on ∂U^k is consistent with the Lebesgue measure on U^k induced from $\mathbf{R}^n$ for each k. This induces the measure λ on ∂U as in (v).

Also the boundary conditions are imposed:

(4) $f(t)|_{\partial U} = f_0(t')$, $(\partial^{|q|} f(t)/\partial s_1^{q_1}...\partial s_n^{q_n})|_{\partial U} = f_{(q)}(t')$ for $|q| \le \alpha - 1$, where $s = (s_1, ..., s_n) \in \mathbf{R}^n$, $(q) = (q_1, ..., q_n)$, $|q| = q_1 + ... + q_n$, $0 \le q_k \in \mathbf{Z}$ for each k, $t \in \partial U$ is denoted by t', f_0, $f_{(q)}$ are given functions. Generally these conditions may be excessive, so one uses some of them or their linear combinations (see (5.1) below). Frequently, the boundary conditions

(5) $f(t)|_{\partial U} = f_0(t')$, $(\partial^l f(t)/\partial \nu^l)|_{\partial U} = f_l(t')$ for $1 \le l \le \alpha - 1$ are also used, where ν denotes a real variable along a unit external normal to the boundary ∂U at a point $t' \in \partial U_0$. Using partial differentiation in local coordinates on ∂U and (5) one can calculate in principle all other boundary conditions in (4) almost everywhere on ∂U.

Suppose that a domain U_1 and its boundary ∂U_1 satisfy Conditions $(D1, i - vii)$ and $g_1 = g\chi_{U_1}$ is an original on $\mathbf{R}^n$ with its support in U_1. Then any original g on $\mathbf{R}^n$ gives the original $g\chi_{U_2} =: g_2$ on $\mathbf{R}^n$, where $U_2 = \mathbf{R}^n \setminus U_1$. Therefore, $g_1 + g_2$ is the original on $\mathbf{R}^n$, when g_1 and g_2 are two originals with their supports contained in U_1 and U_2 correspondingly. Take now new domain U satisfying Conditions $(D1, i - vii)$ and $(D2 - D5)$:

$(D2)$ $U \supset U_1$ and $\partial U \subset \partial U_1$;

$(D3)$ if a straight line ξ containing a point w_1 (see (vi)) intersects ∂U_1 at two points y_1 and y_2, then only one point either y_1 or y_2 belongs to ∂U, where $w_1 \in U_1$, $U - w_1$ and $U_1 - w_1$ are convex; if ξ intersects ∂U_1 only at one point, then it intersects ∂U at the same point. That is,

$(D4)$ any straight line ξ through the point w_1 either does not intersect ∂U or intersects the boundary ∂U only at one point.

Take now g with $supp(g) \subset U$, then $supp(g\chi_{U_1}) \subset U_1$. Therefore, any problem (1) on U_1 can be considered as the restriction of the problem (1) defined on U, satisfying $(D1 - D4, i - vii)$. Any solution f of (1) on U with the boundary conditions on ∂U gives the solution as the restriction $f|_{U_1}$ on U_1 with the boundary conditions on ∂U.

Henceforward, we suppose that the domain U satisfies Conditions $(D1, D4, i - vii)$, which are rather mild and natural. In particular, for Q^n this means that either $a_k = -\infty$ or $b_k = +\infty$ for each k. Another example is: U_1 is a ball in $\mathbf{R}^n$ with the center at zero, $U = U_1 \cup (\mathbf{R}^n \setminus U_{1,...,1})$, $w_1 = 0$; or $U = U_1 \cup \{t \in \mathbf{R}^n : \ t_n \ge -\epsilon\}$ with a marked number $0 < \epsilon < 1/2$. But subsets $\partial U_{(l)}$ in ∂U can also be specified, if the boundary conditions demand it.

The complex field has the natural realization by 2×2 real matrices so that $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{i}^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. The quaternion skew field, as it is well-known, can be realized with the help of 2×2 complex matrices with the generators $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$, or equivalently by 4×4 real matrices. Considering matrices with entries in the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_v$ one gets the complexified or quaternionified Cayley-Dickson algebras $(\mathcal{A}_v)_{\mathbf{C}}$ or $(\mathcal{A}_v)_{\mathbf{H}}$ with elements $z = aI + b\mathbf{i}$ or $z = aI + bJ + cK + eL$, where $a, b, c, e \in \mathcal{A}_v$, such that each $a \in \mathcal{A}_v$ commutes with the generators $\mathbf{i}$, I, J, K and L.

When $r = 2$, f and g have values in $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$ and $2 \le n \le 4$ and coefficients of differential operators belong to $\mathcal{A}_2$, then the multiparameter noncommutative transform operates with the associative case so that

$\mathcal{F}^n(af) = a\mathcal{F}^n(f)$

for each $a \in \mathbf{H}$. The left linearity property $\mathcal{F}^n(af) = a\mathcal{F}^n(f)$ for any $a \in \mathbf{H}_{J,K,L}$ is also accomplished for either operators with coefficients in $\mathbf{R}$ or $\mathbf{C_i} = I\mathbf{R} \oplus \mathbf{iR}$ or $\mathbf{H}_{J,K,L} = I\mathbf{R} \oplus J\mathbf{R} \oplus K\mathbf{R} \oplus L\mathbf{R}$ and f with values in $\mathcal{A}_v$ with $1 \le n \le 2^v - 1$; or vice versa f with values in $\mathbf{C_i}$ or $\mathbf{H}_{J,K,L}$ and coefficients a in $\mathcal{A}_v$ but with $1 \le n \le 4$. Thus all such variants of operator coefficients $\mathbf{a}_j$ and values of functions f can be treated by the noncommutative transform. Henceforward, we suppose that these variants take place.

We suppose that $g(t)$ is an original function, that is satisfying Conditions $1(1-4)$. Consider at first the case of constant coefficients $\mathbf{a}_j$ on a quadrant domain Q^n. Let Q^n be oriented so that $\mathsf{a}_k = -\infty$ and $b_k = +\infty$ for each $k \le n - \kappa$; either $\mathsf{a}_k = -\infty$ or $b_k = +\infty$ for each $k > n - \kappa$, where $0 \le \kappa \le n$ is a marked integer number. If conditions of Theorem 25 are satisfied, then

$$(6) \quad \mathcal{F}^n(A[f](t), u; p; \zeta) = \sum_{|j| \le \alpha} \mathbf{a}_j \Big\{ [\mathsf{R}_{e_1}(p)]^{j_1} [\mathsf{R}_{e_2}(p)]^{j_2} ... [\mathsf{R}_{e_n}(p)]^{j_n} \mathcal{F}^n(f(t)\chi_{Q^n}(t), u; p; \zeta)$$

$$+ \sum_{1 \le |(lj)|;\ m_k + q_k + h_k = j_k;\ 0 \le m_k;\ 0 \le q_k;\ h_k = sign(l_k j_k);\ q_k = 0 \text{ for } l_k j_k = 0, \text{ for each } k = 1, ..., n;\ (l) \in \{0,1,2\}^n}$$

$$(-1)^{|(lj)|} [\mathsf{R}_{e_1}(p)]^{m_1} [\mathsf{R}_{e_2}(p)]^{m_2} ... [\mathsf{R}_{e_n}(p)]^{m_n} \mathcal{F}^{n - |h(lj)|} \Big(\partial^{|q|} f(t^{(lj)}) \chi_{\partial Q^n_{(lj)}}(t^{(lj)}) / \partial t_1^{q_1} ... \partial t_n^{q_n}, u; p; \zeta \Big) \Big\}$$

$$= \mathcal{F}^n(g(t)\chi_{Q^n}(t), u; p; \zeta)$$

for $u(p, t; \zeta)$ in the $\mathcal{A}_r$ spherical or $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates, where the operators $\mathsf{R}_{e_j}(p)$ are given by Formulas 25(1.1) or 25(1.2). Here (l) enumerates faces $\partial Q^n_{(l)}$ in ∂Q^n_{k-1} for $|h(l)| = k \ge 1$, so that $\partial Q^n_{k-1} = \bigcup_{|h(l)|=k} Q^n_{(l)}$, $\partial Q^n_{(l)} \cap \partial Q^n_{(m)} = \emptyset$ for each $(l) \ne (m)$ in accordance with §25 and the notation of this section.

Therefore, Equation (6) shows that the boundary conditions are necessary:

$(\partial^{|q|} f(t^{(l)}) / \partial t_1^{q_1} ... \partial t_n^{q_n})|_{\partial Q^n_{(l)}}$ for $|j| \le \alpha$, $|(lj)| \ge 1$, $\mathbf{a}_j \ne 0$, $q_k = 0$ for $l_k j_k = 0$, $m_k + q_k + h_k = j_k$, $h_k = sign(l_k j_k)$, $k = 1, ..., n$, $t^{(l)} \in \partial Q^n_{(l)}$. But $dim_{\mathbf{R}} \partial Q^n = n - 1$ for $\partial Q^n \ne \emptyset$, consequently, $(\partial^{|q|} f(t^{(l)}) / \partial t_1^{q_1} ... \partial t_n^{q_n})|_{\partial Q^n_{(l)}}$ can be calculated if know $(\partial^{|\beta|} f(t^{(l)}) / \partial t_{\gamma(1)}^{\beta_1} ... \partial t_{\gamma(m)}^{\beta_m})|_{\partial Q^n_{(l)}}$ for $|\beta| = |q|$, where $\beta = (\beta_1, ..., \beta_m)$, $m = |h(l)|$, a number $\gamma(k)$ corresponds to $l_{\gamma(k)} > 0$, since $q_k = 0$ for $l_k = 0$ and $q_k > 0$ only for $l_k j_k > 0$ and $k > n - \kappa$. That is, $t_{\gamma(1)}, ..., t_{\gamma(m)}$ are coordinates in $\mathbf{R}^n$ along unit vectors orthogonal to $\partial Q^n_{(l)}$.

Take a sequence U^k of sub-domains $U^k \subset U^{k+1} \subset U$ for each $k \in \mathbf{N}$ so that each $U^k = \bigcup_{l=1}^{m(k)} Q^n_{k,l}$ is the finite union of quadrants $Q^n_{k,l}$, $m(k) \in \mathbf{N}$. We choose them so that each two different quadrants may intersect only by their borders, each U^k satisfies the same conditions as U and

$$(7) \quad \lim_{k \to \infty} dist(U, U^k) = 0.$$

Therefore, Equation (6) can be written for more general domain U also.

For U instead of Q^n we get a face $\partial U_{(l)}$ instead of $\partial Q^n_{(l)}$ and local coordinates $\tau_{\gamma(1)}, ..., \tau_{\gamma(m)}$ orthogonal to $\partial U_{(l)}$ instead of $t_{\gamma(1)}, ..., t_{\gamma(m)}$ (see Conditions $(i - iii)$ above).

Thus the sufficient boundary conditions are:

$$(5.1) \quad \Big(\partial^{|\beta|} f(t^{(lj)}) / \partial \tau_{\gamma(1)}^{\beta_1} ... \partial \tau_{\gamma(m)}^{\beta_m} \Big) \Big|_{\partial U_{(lj)}} = \phi_{\beta,(lj)}(t^{(lj)})$$

for $|\beta| = |q|$, where $m = |h(lj)|$, $|j| \le \alpha$, $|(lj)| \ge 1$, $\mathbf{a}_j \ne 0$, $q_k = 0$ for $l_k j_k = 0$, $m_k + q_k + h_k = j_k$,

$h_k = sign(l_k j_k)$, $0 \le q_k \le j_k - 1$ for $k > n - \kappa$; $\phi_{\beta,(l)}(t^{(l)})$ are known functions on $\partial U_{(l)}$, $t^{(l)} \in \partial U_{(l)}$. In the half-space $t_n \ge 0$ only

(5.2) $\partial^\beta f(t)/\partial t_n^\beta|_{t_n=0}$

are necessary for $\beta = |q| < \alpha$ and q as above.

Depending on coefficients of the operator A and the domain U some boundary conditions may be dropped, when the corresponding terms vanish in Formula (6). For example, if $A = \partial^2/\partial t_1 \partial t_2$, $U = U_{1,1}$, $n = 2$, then $\partial f/\partial \nu|_{\partial U_0}$ is not necessary, only the boundary condition $f|_{\partial U}$ is sufficient.

If $U = \mathbf{R}^n$, then no any boundary condition appears. Mention that

(5.3) $\mathcal{F}^0(f(a); u; p; \zeta) = f(a) e^{-u(p,a;\zeta)}$,
which happens in (6), when $a = t^{(l)}$ and $|h(l)| = n$.

Conditions in (5.1) are given on disjoint for different (l) submanifolds $\partial U_{(l)}$ in ∂U and partial derivatives are along orthogonal to them coordinates in $\mathbf{R}^n$, so they are correctly posed.

In $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates due to Corollary 4.1 Equation (6) with different values of the parameter ζ gives a system of linear equations relative to unknown functions $\mathsf{S}_{(m)}\mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta)$, from which $\mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta)$ can be expressed through a family

$$\left\{ \mathsf{S}_{(m)}\mathcal{F}^n(g(t), u; p; \zeta);\ \mathsf{S}_{(m)}\mathcal{F}^{n-|h(l)|}\left(\partial^{|q|} f(t^{(l)}) \chi_{\partial Q^n_{(l)}}(t^{(l)})/\partial t_1^{q_1} \dots \partial t_n^{q_n}, u; p; \zeta\right) \colon (m) \in \mathbf{Z}^n \right\}$$

and polynomials of p, where $\mathbf{Z}$ denotes the ring of integer numbers, where the corresponding term $\mathcal{F}^{n-|h(l)|}$ is zero when $t_j^{(l)} = \pm\infty$ for some j. In the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates there are not so well periodicity properties generally, so the family may be infinite. This means that $\mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta)$ can be expressed in the form:

$$\text{(8)} \qquad \mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta) = \sum_{(m)} \mathsf{P}_{(m)}(p) \mathsf{S}_{(m)} \mathcal{F}^n(g(t), u; p; \zeta)$$

$$+ \sum_{j,(q),(l),|(l)|\ge 1,(m)} \mathsf{P}_{j,(q),(l),(m)}(p) \mathsf{S}_{(m)} \mathcal{F}^{n-|h(lj)|}\left(\partial^{|q|} f(t^{(lj)}) \chi_{\partial U_{(lj)}}(t^{(lj)})/\partial t_1^{q_1} \dots \partial t_n^{q_n}, u; p; \zeta\right),$$

where $\mathsf{P}_{(m)}(p)$ and $\mathsf{P}_{j,(q),(l),(m)}(p)$ are quotients of polynomials of real variables $p_0, p_1, \dots, p_n$. The sum in (8) is finite in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates and may be infinite in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates. To the obtained Equation (8) we apply the theorem about the inversion of the noncommutative multiparameter transform. Thus this gives an expression of f through g as a particular solution of the problem given by $(1, 2, 5.1)$ and it is prescribed by Formulas 6.1(1) and 8.1(1).

For $\mathcal{F}^n(f; u; p; \zeta)$ Conditions 8(1, 2) are satisfied, since $\mathsf{P}_{(m)}(p)$ and $\mathsf{P}_{j,(q),(l),(m)}(p)$ are quotients of polynomials with real, complex or quaternion coefficients and real variables, also G^n and $\mathcal{F}^{n-|h(l)|}$ terms on the right of (6) satisfy them. Thus we have demonstrated the theorem.

28.1. Theorem. *Suppose that $\mathcal{F}^n(f; u; p; \zeta)$ given by the right side of* (8) *satisfies Conditions 8*(3). *Then Problem* $(1, 2, 5.1)$ *has a solution in the class of original functions, when g and $\phi_{\beta,(l)}$ are originals, or in the class of generalized functions, when g and $\phi_{\beta,(l)}$ are generalized functions.*

Mention, that a general solution of $(1, 2)$ is the sum of its particular solution and a general solution of the homogeneous problem $Af = 0$. If $\phi_{\beta,(l)} = \phi^1_{\beta,(l)} + \phi^2_{\beta,(l)}$, $g = g_1 + g_2$, $f = f_1 + f_2$, $Af_j = g_j$ and f_j on ∂U_j satisfies (5.1) with $\phi^j_{\beta,(l)}$, $j = 1, 2$, then $Af = g$ and f on ∂U satisfies Conditions (5.1) with $\phi_{\beta,(l)}$.

28.2. Example. We take the partial differential operator of the second order

$$A = \sum_{h,m=1}^n \mathbf{a}_{h,m} \partial^2/\partial \tau_h \partial \tau_m + \sum_{h=1}^n \alpha_h \partial/\partial \tau_h + \omega,$$

where the quadratic form $a(\tau) := \sum_{h,m} \mathbf{a}_{h,m}\tau_h\tau_m$ is non-degenerate and is not always negative, because otherwise we can consider $-A$. Suppose that $\mathbf{a}_{h,m} = \mathbf{a}_{m,h} \in \mathbf{R}$, $\alpha_h, \tau_h \in \mathbf{R}$ for each $h, m = 1, ..., n$, $\omega \in \mathcal{A}_3$. Then we reduce this form $a(\tau)$ by an invertible $\mathbf{R}$ linear operator C to the sum of squares. Thus

$$(9) \qquad A = \sum_{h=1}^{n} \mathbf{a}_h \partial^2/\partial t_h^2 + \sum_{h=1}^{n} \beta_h \partial/\partial t_h + \omega,$$

where $(t_1, ..., t_n) = (\tau_1, ..., \tau_n)C$ with real $\mathbf{a}_h$ and β_h for each h. If coefficients of A are constant, using a multiplier of the type $\exp(\sum_h \epsilon_h s_h)$ it is possible to reduce this equation to the case so that if $\mathbf{a}_h \ne 0$, then $\beta_h = 0$ (see §3, Chapter 4 in [26]). Then we can simplify the operator with the help of a linear transformation of coordinates and consider that only β_n may be non-zero if $\mathbf{a}_n = 0$. For A with constant coefficients as it is well-known from algebra one can choose a constant invertible real matrix $(c_{h,m})_{h,m=1,...,k}$ corresponding to C so that $\mathbf{a}_h = 1$ for $h \le k_+$ and $\mathbf{a}_h = -1$ for $h > k_+$, where $0 < k_+ \le n$. For $k_+ = n$ and $\beta = 0$ the operator is elliptic, for $k_+ = n - 1$ with $\mathbf{a}_n = 0$ and $\beta_n \ne 0$ the operator is parabolic, for $0 < k_+ < n$ and $\beta = 0$ the operator is hyperbolic. Then Equation (6) simplifies:

$$(10) \qquad \mathcal{F}^n(A[f](t), u; p; \zeta) = \sum_{h=1}^{n} \mathbf{a}_h \Big\{ [\mathsf{R}_{e_h}(p)]^2 \mathcal{F}^n(f(t)\chi_{Q^n}(t), u; p; \zeta)$$

$$+ \sum_{l_h \in \{1,2\}; (l) = l_h e_h} (-1)^{l_h} \Big[\mathcal{F}^{n-1}\big(\partial f(t^{(l)})\chi_{\partial Q^n_{(l)}}(t^{(l)})/\partial t_h, u; p; \zeta\big)$$

$$+ [\mathsf{R}_{e_h}(p)] \mathcal{F}^{n-1}(f(t^{(l)})\chi_{\partial Q^n_{(l)}}(t^{(l)}), u; p; \zeta) \Big] \Big\}$$

$$+ \beta_n \Big\{ \mathcal{F}^{n-1;t^{n,2}}\big(f(t^{n,2})\chi_{\partial Q^n_{2e_n}}(t^{n,2}), u; p; \zeta\big) - \mathcal{F}^{n-1;t^{n,1}}\big(f(t^{n,1})\chi_{\partial Q^n_{e_n}}(t^{n,1}), u; p; \zeta\big)$$

$$+ [\mathsf{R}_{e_n}(p)] \mathcal{F}^n\big(f(t)\chi_{Q^n}(t), u; p; \zeta\big) \Big\} + \omega \mathcal{F}^n\big(f(t)\chi_{Q^n}(t), u; p; \zeta\big) = \mathcal{F}^n(g(t), u; p; \zeta)$$

in the $\mathcal{A}_r$ spherical or $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates, where $e_h = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbf{R}^n$ with 1 on the h-th place, $\mathsf{S}_0 = I$ is the unit operator, the operators $\mathsf{R}_{e_h}(p)$ are given by Formulas 25(1.1) or 25(1.2) respectively.

We denote by $\delta_S(x)$ the delta function of a continuous piecewise differentiable manifold S in $\mathbf{R}^n$ satisfying conditions $(i - vi)$ so that

$$(\Delta) \qquad \int_{\mathbf{R}^n} \eta(x)\delta_S(x)dx = \int_S \eta(y)\lambda_m(dy)$$

for a continuous integrable function $\eta(x)$ on $\mathbf{R}^n$, where $dim(S) = m < n$, $\lambda_m(dy)$ denotes a volume element on the m dimensional surface S (see Condition (v) above). Thus we can consider a non-commutative multiparameter transform on ∂U for an original f on U given by the formula:

$$(11) \ \mathcal{F}^{n-1;t'}_{\partial U}(f(t')\chi_{\partial U}(t'), u; p; \zeta) = \mathcal{F}^{n;t}(f(t)\delta_{\partial U}(t), u; p; \zeta).$$

Therefore, terms like $\mathcal{F}^{n-1}$ in (10) correspond to the boundary ∂Q^n. They can be simplified:

$$(12) \qquad \beta_n \Big\{ \mathcal{F}^{n-1;t^{n,2}}\big(f(t^{n,2})\chi_{\partial Q^n_{2e_n}}(t), u; p; \zeta\big) - \mathcal{F}^{n-1;t^{n,1}}\big(f(t^{n,1})\chi_{\partial Q^n_{e_n}}(t), u; p; \zeta\big) \Big\}$$

$$= \mathcal{F}^{n-1;t'}_{\partial Q^n}(\beta(t')f(t')\chi_{\partial Q^n}(t'), u; p; \zeta),$$

where $\beta(t')$ is a piecewise constant function on ∂Q^n equal to β_n on the corresponding faces of Q^n orthogonal to e_n given by condition: either $t_n = \mathsf{a}_n$ or $t_n = b_n$; $\beta(t') = 0$ is zero otherwise.

If $\mathsf{a}_k = -\infty$ or $b_k = +\infty$, then the corresponding term disappears. If $\mathbf{R}^n$ embed into $\mathcal{A}_r$ with $2^{r-1} \le n \le 2^r - 1$ as $\mathbf{R}i_1 \oplus ... \oplus \mathbf{R}i_n$, then this induces the corresponding embedding Θ of Q^n or U into $\mathcal{A}_r$. This permits to make further simplification:

$$(12.1) \quad \sum_{h=1}^n \mathbf{a}_h \Big\{ \sum_{l_h \in \{1,2\}; (l) = l_h e_h} (-1)^{l_h} \Big[[\mathsf{R}_{e_h}(p)] \mathcal{F}^{n-1}(f(t^{(l)}) \chi_{\partial Q^n_{(l)}}(t^{(l)}), u; p; \zeta)$$

$$+ \mathcal{F}^{n-1}\Big(\partial f(t^{(l)}) \chi_{\partial Q^n_{(l)}}(t^{(l)}) / \partial t_h, u; p; \zeta\Big)\Big]\Big\}$$

$$= \mathcal{F}^{n-1}_{\partial Q^n}\Big(a(t')\big(\partial f(t') \chi_{\partial Q^n_0}(t')/\partial \nu\big), u(p, t'; \zeta); p; \zeta\Big)$$

$$+ \mathcal{F}^{n-1}_{\partial Q^n}\Big(\mathsf{P}(t') f(t') \chi_{\partial Q^n_0}(t'), u; p; \zeta\Big),$$

where $\nu = \nu(t')$ denotes a real coordinate along an external unit normal $M(t')$ to $\Theta(\partial U)$ at $\Theta(t')$, so that $M(t')$ is a purely imaginary Cayley-Dickson number, $a(t')$ is a piecewise constant function equal to $\mathbf{a}_h$ for the corresponding t' in the face $\partial Q^n_{l_h e_h}$ with $l_h > 0$; $\mathsf{P}(t', p) := \mathsf{P}(t') := \mathsf{R}_{e_h}(p)$ for $t' \in \partial Q^n_{l_h e_h}$, $h = 1, ..., n$, since $\sin(\psi + \pi) = -\sin(\psi)$ and $\cos(\psi + \pi) = -\cos(\psi)$ for each $\psi \in \mathbf{R}$. Certainly the operator-valued function $\mathsf{P}(t')$ has a piecewise continuous extension $\mathsf{P}(t)$ on Q^n. That is

$$(13) \quad \mathcal{F}^{n-1}_{\partial U}\big(\xi(t') f(t') \chi_{\partial U}(t'), u(p, t'; \zeta); p; \zeta\big)$$

$$:= \int_{\mathbf{R}^n} \xi(t) f(t) \delta_{\partial U}(t) \exp\{-u(p, t; \zeta)\} dt$$

for an integrable operator-valued function $\xi(t)$ so that $[\xi(t) f(t)]$ is an original on U whenever this integral exists. For example, when ξ is a linear combination of shift operators $\mathsf{S}_{(m)}$ with coefficients $\epsilon_{(m)}(t, p)$ such that each $\epsilon_{(m)}(t, p)$ as a function by $t \in U$ for each $p \in W$ and $f(t)$ are originals or f and g are generalized functions. For two quadrants $Q_{m,l}$ and $Q_{m,k}$ intersecting by a common face Υ external normals to it for these quadrants have opposite directions. Thus the corresponding integrals in $\mathcal{F}^{n-1}_{\partial Q_{m,l}}$ and $\mathcal{F}^{n-1}_{\partial Q_{m,k}}$ restricted on Υ summands cancel in $\mathcal{F}^{n-1}_{\partial(Q_{m,l} \cup Q_{m,k})}$.

Using Conditions $(iv - vii)$ and the sequence U^m and quadrants $Q^n_{m,l}$ outlined above we get for a boundary problem on U instead of Q^n the following equation:

$$(14) \quad \mathcal{F}^n(A[f](t), u; p; \zeta) = \Big\{ \sum_{h=1}^n \mathbf{a}_h [\mathsf{R}_{e_h}(p)]^2 \mathcal{F}^n(f(t) \chi_U(t), u; p; \zeta) \Big\} +$$

$$\Big\{ \mathcal{F}^{n-1}_{\partial U}\big([\beta(t') + \mathsf{P}(t', p)] f(t') \chi_{\partial U_0}(t'), u; p; \zeta\big) + \mathcal{F}^{n-1}_{\partial U}(\mathsf{a}(t')(\partial f(t') \chi_{\partial U_0}(t')/\partial \nu), u; p; \zeta) \Big\}$$

$$\mathcal{F}^n\big(\beta_n [\mathsf{R}_n(p)] f(t) \chi_U(t), u; p; \zeta\big) + \omega \mathcal{F}^n\big(f(t) \chi_U(t), u; p; \zeta\big) = \mathcal{F}^n(g(t), u; p; \zeta),$$

where $\mathsf{P}(t', p) := \mathsf{P}(t') := \sum_{h=1}^n \mathbf{a}_h [\mathsf{R}_h(p)](\partial \nu / \partial t_h)$ for each $t' \in \partial U_0$ (see also Stokes' formula in §XIII.3.4 [30] and Formulas (14.2, 14.3) below). Particularly, for the quadrant domain Q^n we have $a(t) = \mathbf{a}_h$ for $t \in \partial Q^n_{l_h e_h}$ with $l_h > 0$, $\beta(t) = \beta_n$ for $t \in \partial Q^n_{l_n e_n}$ with $l_n > 0$ and zero otherwise.

The boundary conditions are:

(14.1) $f(t)|_{\partial U_0} = \phi(t)|_{\partial U_0}$, $\quad (\partial f(t)/\partial \nu)|_{\partial U_0} = \phi_1(t)|_{\partial U_0}$.

The functions $\mathsf{a}(t)$ and $\beta(t)$ can be calculated from $\{\mathbf{a}_h : h\}$ and β_n almost everywhere on ∂U with the help of change of variables from $(t_1, ..., t_n)$ to $(y_1, ..., y_{n-1}, y_n)$, where $(y_1, ..., y_n)$ are local coordinates in ∂U_0 in a neighborhood of a point $t' \in \partial U_0$, $y_n = \nu$, since ∂U_0 is of class C^1. Consider the differential form $\sum_{h=1}^n (-1)^{n-h} \mathbf{a}_h dt_1 \wedge ... \wedge \widehat{dt_h} \wedge ... \wedge dt_n = a dy_1 \wedge ... \wedge dy_{n-1}$ and its external product with $d\nu = \sum_{h=1}^n (\partial \nu / \partial t_h) dt_h$, then

(14.2) $\mathsf{a}(t)|_{\partial U_0} = \sum_{h=1}^n \mathbf{a}_h (\partial \nu / \partial t_h)|_{\partial U_0}$ and

(14.3) $\beta(t)|_{\partial U_0} = \beta_n \chi_{U_{e_n} \cup U_{2e_n}} (\partial \nu / \partial t_n)|_{\partial U_0}$.

This is sufficient for the calculation of $\mathcal{F}^{n-1}_{\partial U}$.

28.3. Inversion procedure in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates.

When boundary conditions 28(5.1) are specified, this equation 28(6) can be resolved relative to $\mathcal{F}^n(f(t)\chi_U(t), u(p,t;\zeta); p; \zeta)$, particularly, for Equations 28.2(14, 14.1) also. The operators S_{e_j} and T_j of §12 have the periodicity properties: $\mathsf{S}_{e_j}^{4+k} F(p;\zeta) = \mathsf{S}_{e_j}^k F(p;\zeta)$ and $T_j^{4+k} F(p;\zeta) = T_j^k F(p;\zeta)$, $\mathsf{S}_{e_1}^{2+k} F(p;\zeta) = -\mathsf{S}_{e_1}^k F(p;\zeta)$ and $T_1^{2+k} F(p;\zeta) = -T_1^k F(p;\zeta)$ for each positive integer number k and $1 \le j \le 2^r - 1$. We put

(6.1) $\mathbf{F}_j(p;\zeta) := (\mathsf{S}_{e_j}^4 - \mathsf{S}_{e_{j+1}}^4) F(p;\zeta)$ for any $1 \le j \le 2^r - 2$,

(6.2) $\mathbf{F}_{2^r-1}(p;\zeta) := \mathsf{S}_{e_{2^r-1}}^4 F(p;\zeta)$. Then from Formula 28(6) we get the following equations:

$$(6.3) \quad \sum_{|j| \le \alpha} \mathbf{a}_j \Big\{ [p_0 + p_1 T_1]^{j_1} [p_0 + p_1 T_1 + p_2 T_2]^{j_2}$$

$$...[p_0 + p_1 T_1 + ... + p_n T_n]^{j_n} \Big\}\Big|_{p_b = 0 \ \forall b > w} \mathbf{F}_w(p;\zeta) = \Big\{ - \sum_{|j| \le \alpha} \mathbf{a}_j$$

$$\sum_{1 \le |(lj)|;\ m_k + q_k + h_k = j_k;\ 0 \le m_k;\ 0 \le q_k;\ h_k = sign(l_k j_k);\ q_k = 0 \text{ for } l_k j_k = 0, \text{ for each } k = 1,...,n;\ (l) \in \{0,1,2\}^n}$$

$$(-1)^{|(lj)|} \big\{ [p_0 + p_1 T_1]^{m_1} [p_0 + p_1 T_1 + p_2 T_2]^{m_2} ... [p_0 + p_1 T_1 + ... + p_n T_n]^{m_n} \big\}\big|_{p_b = 0 \ \forall b > w}$$

$$\mathcal{F}_w^{n - |h(lj)|} \big(\partial^{|q|} f(t^{(lj)}) \chi_{\partial Q^n_{(lj)}} (t^{(lj)}) / \partial t_1^{q_1} ... \partial t_n^{q_n}, u; p; \zeta \big) \Big\} + \mathbf{G}_w(p;\zeta)$$

for each $w = 1, ..., n$, where $F(p;\zeta) = \mathcal{F}^n(f(t)\chi_{Q^n}(t), u; p; \zeta)$ and $G(p;\zeta) = \mathcal{F}^n(g(t)\chi_{Q^n}(t), u; p; \zeta)$. These equations are resolved for each $w = 1, ..., n$ as it is indicated below. Taking the sum one gets the result

(6.4) $F(p;\zeta) = \mathbf{F}_1(p;\zeta) + ... + \mathbf{F}_n(p;\zeta)$,

since $\Big\{ \big[\sum_{j=1}^{2^r-2} (\mathsf{S}_{e_j}^4 - \mathsf{S}_{e_{j+1}}^4) \big] + \mathsf{S}_{e_{2^r-1}}^4 \Big\} e^{-u(p,t;\zeta)} = \mathsf{S}_{e_1}^4 e^{-u(p,t;\zeta)} = e^{-u(p,t;\zeta)}$.

The analogous procedure is for Equation (14) with the domain U instead of Q^n.

From Equation (6.3) or (14) we get the linear equation:

$$(15) \quad \sum_{(l)} \psi_{(l)} x_{(l)} = \phi,$$

where ϕ is the known function and depends on the parameter ζ, $\psi_{(l)}$ are known coefficients depending on p, $x_{(l)}$ are indeterminates and may depend on ζ, $l_1 = 0, 1$ for $h = 1$, so that $x_{(l)+2e_1} = -x_{(l)}$; $l_h = 0, 1, 2, 3$ for $h > 1$, where $x_{(l)+4e_h} = x_{(l)}$ for each $h > 1$ in accordance with Corollary 4.1, $(l) = (l_1, ..., l_n)$.

Acting on both sides of (6.3) or (14) with the shift operators $T_{(m)}$ (see Formula 25(SO)), where $m_1 = 0, 1$, $m_h = 0, 1, 2, 3$ for each $h > 1$, we get from (15) a system of $2^{1+2(k-1)}$ linear equations with the known functions $\phi_{(m)} := T_{(m)} \phi$ instead of ϕ, $\phi_{(0)} = \phi$:

(15.1) $\sum_{(l)} \psi_{(l)} T_{(m)} x_{(l)} = \phi_{(m)}$ for each (m).

Each such shift of ζ left coefficients $\psi_{(l)}$ intact and $x_{(l)+(m)} = (-1)^\eta x_{(l')}$ with $l'_1 = l_1 + m_1$ (mod 2), $l'_h = l_h + m_h$ (mod 4) for each $h > 1$, where $\eta = 1$ for $l_1 + m_1 - l'_1 = 2$,

$\eta = 2$ otherwise. This system can be reduced, when a minimal additive group $\mathcal{G} := \{(l) : l_1 \ (mod\ 2),\ l_j \ (mod\ 4)\ \forall 2 \le j \le k;$ generated by all (l) with non-zero coefficients in Equation (15)$\}$ is a proper subgroup of $\mathsf{g}_2 \times \mathsf{g}_4^{k-1}$, where $\mathsf{g}_h := \mathbf{Z}/(h\mathbf{Z})$ denotes the finite additive group for $0 < h \in \mathbf{Z}$. Generally the obtained system is non-degenerate for λ_{n+1} almost all $p = (p_0, ..., p_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ or in W, where λ_{n+1} denotes the Lebesgue measure on the real space $\mathbf{R}^{n+1}$.

We consider the non-degenerate operator A with real, complex $\mathbf{C_i}$ or quaternion $\mathbf{H}_{J,K,L}$ coefficients. Certainly in the real and complex cases at each point p, where its determinate $\Delta = \Delta(p)$ is non-zero, a solution can be found by the Cramer's rule.

Generally, the system can be solved by the following algorithm. We can group variables by l_1, l_2,...,l_k. For a given $l_2, ..., l_h$ and $l_1 = 0, 1$ subtracting all other terms from both sides of (15) after an action of $T_{(m)}$ with $m_1 = 0, 1$ and marked m_h for each $h > 1$ we get the system of the form

(16) $\alpha x_1 + \beta x_2 = \mathbf{b}_1,$
$-\beta x_1 + \alpha x_2 = \mathbf{b}_2,$

which generally has a unique solution for λ_{n+1} almost all p:

(17) $x_1 = (\alpha(\alpha^2+\beta^2)^{-1})\mathsf{b}_1 - (\beta(\alpha^2+\beta^2)^{-1})\mathsf{b}_2)$; $x_2 = (\alpha(\alpha^2+\beta^2)^{-1})\mathsf{b}_2 + (\beta(\alpha^2+\beta^2)^{-1})\mathsf{b}_1,$

where $\mathsf{b}_1, \mathsf{b}_2 \in \mathcal{A}_r$, for a given set $(m_2, ...m_n)$.

When l_h are specified for each $1 \le h \le k$ with $h \ne h_0$, where $1 < h_0 \le k$, then the system is of the type:

(18) $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = \mathsf{b}_1,$
$dx_1 + ax_2 + bx_3 + cx_4 = \mathsf{b}_2,$
$cx_1 + dx_2 + ax_3 + bx_4 = \mathsf{b}_3,$
$bx_1 + cx_2 + dx_3 + ax_4 = \mathsf{b}_4,$

where $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ or $\mathbf{C_i}$ or $\mathbf{H}_{J,K,L}$, while $\mathsf{b}_1, \mathsf{b}_2, \mathsf{b}_3, \mathsf{b}_4 \in \mathcal{A}_r$. In the latter case of $\mathbf{H}_{J,K,L}$ it can be solved by the Gauss' exclusion algorithm. In the first two cases of $\mathbf{R}$ or $\mathbf{C_i}$ the solution is:

(19) $x_j = \Delta_j/\Delta$, where
$\Delta = a\xi_1 - d\xi_2 + c\xi_3 - b\xi_4,$
$\Delta_1 = \mathsf{b}_1\xi_1 - \mathsf{b}_2\xi_2 + \mathsf{b}_3\xi_3 - \mathsf{b}_4\xi_4,$
$\Delta_2 = -\mathsf{b}_1\xi_4 + \mathsf{b}_2\xi_1 - \mathsf{b}_3\xi_2 + \mathsf{b}_4\xi_3,$
$\Delta_3 = \mathsf{b}_1\xi_3 - \mathsf{b}_2\xi_4 + \mathsf{b}_3\xi_1 - \mathsf{b}_4\xi_2,$
$\Delta_4 = -\mathsf{b}_1\xi_2 + \mathsf{b}_2\xi_3 - \mathsf{b}_3\xi_4 + \mathsf{b}_4\xi_1,$
$\xi_1 = a^3 + b^2c + cd^2 - ac^2 - 2abd,$
$\xi_2 = a^2b + bc^2 + d^3 - b^2d - 2acd,$
$\xi_3 = ab^2 + c^3 + ad^2 - a^2c - 2bcd,$
$\xi_4 = a^2d + b^3 + c^2d - bd^2 - 2abc.$

Thus on each step either two or four indeterminates are calculated and substituted into the initial linear algebraic system that gives new linear algebraic system with a number of indeterminates less on two or four respectively. May be pairwise resolution on each step is simpler, because the denominator of the type $(\alpha^2 + \beta^2)$ should be λ_{2^r} almost everywhere by $p \in \mathcal{A}_r$ positive (see (6), (14) above). This algorithm acts analogously to the Gauss' algorithm. Finally the last two or four indeterminates remain and they are found with the help of Formulas either (17) or (19) respectively. When for a marked h in (6) or (14) all $l_h = 0$ $(mod\ 2)$ (remains only x_1 for $h = 1$, or remain x_1 and x_3 for $h > 1$) or for some $h > 1$ all $l_h = 0$ $(mod\ 4)$ (remains only x_1) a system of linear equations as in $(15, 15.1)$ simplifies.

Thus a solution of the type prescribed by (8) generally λ_{n+1} almost everywhere by $p \in W$ exists, where W is a domain $W = \{p \in \mathcal{A}_r : a_1 < Re(p) < a_{-1},\ p_j = 0\ \forall j > n\}$ of convergence of the noncommutative multiparameter transform, when it is non-void, $2^{r-1} \le n \le 2^r - 1$, $Re(p) = p_0$, $p = p_0 i_0 + ... + p_n i_n$.

This domain W is caused by properties of g and initial conditions on ∂U and by the domain U also. Generally U is worthwhile to choose with its interior $Int(U)$ non-intersecting with a characteristic surface $\phi(x_1, ..., x_n) = 0$, i.e. at each point x of it the condition is satisfied

(CS) $\sum_{|j|=\alpha} \mathbf{a}_j(t(x))(\partial\phi/\partial x_1)^{j_1} ... (\partial\phi/\partial x_n)^{j_n} = 0$
and at least one of the partial derivatives $(\partial\phi/\partial x_k) \ne 0$ is non-zero.

In particular, the boundary problem may be with the right side $g = \varsigma f$ in $(2, 2.1, 14)$, where ς is a real or complex $\mathbf{C_i}$ or quaternion $\mathbf{H}_{J,K,L}$ multiplier, when boundary conditions are non-trivial. In the space either $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}_r)$ or $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}_r)$ (see §19) a partial differential problem simplifies, because all boundary terms disappear. If $f \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}_r)$, then $\{p \in \mathcal{A}_r : Re(p) \ge 0\} \subset W_f$. For $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}_r)$ certainly $W_f = \mathcal{A}_r$ (see also §9).

28.4. Examples. Take partial differential equations of the fourth order. In this subsection the noncommutative multiparameter transforms in $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates are considered. For

(20) $A = \partial^3/\partial s_1^3 + \sum_{j=2}^n \gamma_j \partial^4/\partial s_j^4$
with constants $\gamma_j \in \mathbf{H}_{J,K,L} \setminus \{0\}$ on the space either $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}_r)$ or $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}_r)$, where $n \ge 2$, Equation (6) takes the form:

$$(21) \qquad \mathcal{F}^n(A[f](t), u; p; \zeta) =$$

$$\Big\{p_0(p_0^2 + 3(p_1 \mathsf{S}_{e_1})^2) + \sum_{j=2}^n \gamma_j (p_j \mathsf{S}_{e_j})^4\Big\} \mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta) + p_1(3p_0^2 + (p_1 \mathsf{S}_{e_1})^2)\mathsf{S}_{e_1} \mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta)$$

$$= \mathcal{F}^n(g(t), u; p; \zeta)$$

due to Corollary 4.1. In accordance with $(16, 17)$ we get:

(22) $\mathbf{F}_w(p; \zeta) = (\alpha(\alpha^2 + \beta^2)^{-1})\mathbf{G}_w(p; \zeta) - (\beta(\alpha^2 + \beta^2)^{-1})T_1 \mathbf{G}_w(p; \zeta))$ for each $w = 1, ..., n$, where $\alpha_w = \alpha = [p_0(p_0^2 - 3p_1^2) + \sum_{j=2}^n \gamma_j p_j^4]\Big|_{p_b=0 \ \forall b>w}$, $\beta_w = \beta = p_1(3p_0^2 - p_1^2)\Big|_{p_b=0 \ \forall b>w}$. From Theorem 6, Corollary 6.1 and Remarks 24 we infer that:

$$(23) \qquad f(t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} F(a + p; \zeta) \exp\{u(p, t; \zeta)\} dp_1 ... dp_n$$

supposing that the conditions of Theorem 6 and Corollary 6.1 are satisfied, where $F(p; \zeta) = \mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta)$.

If on the space either $\mathcal{D}(\mathbf{R}^k, \mathcal{A}_r)$ or $\mathcal{B}(\mathbf{R}^k, \mathcal{A}_r)$ an operator is as follows:

(24) $A = \partial^4/\partial s_1^2 \partial s_2^2 + \sum_{j=3}^n \gamma_j \partial^4/\partial s_j^4$, where $\gamma_j \in \mathbf{H}_{J,K,L} \setminus \{0\}$, where $n \ge 3$, then (6) reads as:

(25) $\mathcal{F}^n(Af(t), u; p; \zeta) = p_2^2(p_0^2 + (p_1 \mathsf{S}_{e_1})^2)\mathsf{S}_{e_2}^2 \mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta)$
$+2p_0 p_1 p_2^2 \mathsf{S}_{e_1} \mathsf{S}_{e_2}^2 \mathcal{F}^n(f(t)), u; p; \zeta) + \sum_{j=3}^n \gamma_j (p_j \mathsf{S}_{e_j})^4 \mathcal{F}^n(f(t)), u; p; \zeta)$
$= \mathcal{F}^n(g(t), u; p; \zeta)$.

If on the same spaces an operator is:

(26) $A = \partial^3/\partial s_1 \partial s_2^2 + \sum_{j=3}^n \gamma_j \partial^4/\partial s_j^4$, where $n \ge 3$, then (6) takes the form:

(27) $\mathcal{F}^n(Af(t), u; p; \zeta) = p_0 p_2^2 \mathsf{S}_{e_2}^2 \mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta) + p_1 p_2^2 \mathsf{S}_{e_1} \mathsf{S}_{e_2}^2 \mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta) + \sum_{j=3}^n \gamma_j (p_j \mathsf{S}_{e_j})^4 \mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta) = \mathcal{F}^n(g(t), u; p; \zeta)$.

To find $\mathcal{F}^n(f(t), u; p; \zeta)$ in (25) or (27) after an action of suitable shift operators $T_{(0,2,0,...,0)}$, $T_{(1,0,...,0)}$ and $T_{(1,2,0,...,0)}$ we get the system of linear algebraic equations:

(28) $ax_1 + bx_3 + cx_4 = \mathsf{b}_1$,
$bx_1 + cx_2 + ax_3 = \mathsf{b}_2$,
$ax_2 - cx_3 + bx_4 = \mathsf{b}_3$,
$-cx_1 + bx_2 + ax_4 = \mathsf{b}_4$

with coefficients a, b and c, and Cayley-Dickson numbers on the right side $\mathsf{b}_1, ..., \mathsf{b}_4 \in \mathcal{A}_r$, where $x_1 = \mathbf{F}_w(p;\zeta)$, $x_2 = T_1\mathbf{F}_w(p;\zeta)$, $x_3 = T_2^2\mathbf{F}_w(p;\zeta)$, $x_4 = T_1T_2^2\mathbf{F}_w(p;\zeta)$, $\mathsf{b}_1 = \mathbf{G}_w(p;\zeta) = (\mathcal{F}^n(g(t),u;p;\zeta))_w$, $\mathsf{b}_2 = T_2^2\mathbf{G}_w(p;\zeta)$, $\mathsf{b}_3 = T_1\mathbf{G}_w(p;\zeta)$, $\mathsf{b}_4 = T_1T_2^2\mathbf{G}_w(p;\zeta)$. Coefficients are: $a_w = a = [\sum_{j=3}^n \gamma_j p_j^4]|_{p_b=0\ \forall b>w} \in \mathbf{H}_{J,K,L}$, $b_w = b = p_2^2(p_0^2 - p_1^2) \in \mathbf{R}$, $c_w = c = 2p_0p_1p_2^2|_{p_b=0\ \forall b>w} \in \mathbf{R}$ for A given by (24); $a_w = a = \left[\sum_{j=3}^n \gamma_j p_j^4\right]\Big|_{p_b=0\ \forall b>w} \in \mathbf{H}_{J,K,L}$, $b_w = b = p_0p_2^2\big|_{p_b=0\ \forall b>w} \in \mathbf{R}$, $c_w = c = p_1p_2^2\big|_{p_b=0\ \forall b>w} \in \mathbf{R}$ for A given by (26), $w = 1, ..., n$. If $a = 0$ the system reduces to two systems with two indeterminates (x_1, x_2) and (x_3, x_4) of the type described by (16) with solutions given by Formulas (17). It is seen that these coefficients are non-zero λ_{n+1} almost everywhere on $\mathbf{R}^{n+1}$. Solving this system for $a \neq 0$ we get:

(29) $\mathbf{F}_w(p;\zeta) = a^{-1}\mathsf{b}_1 - [(a^2 - b^2 + c^2)^2 + 4b^2c^2]^{-1}a^{-1}[(a^2 - b^2 + c^2)((c^2 - b^2)\mathsf{b}_1 + ab\mathsf{b}_2 - 2bc\mathsf{b}_3 + ac\mathsf{b}_4) - 2bc(2bc\mathsf{b}_1 - ac\mathsf{b}_2 + (c^2 - b^2)\mathsf{b}_3 + ab\mathsf{b}_4)]$.

Finally Formula (23) provides the expression for f on the corresponding domain W for suitable known function g for which integrals converge. If $\gamma_j > 0$ for each j, then $a > 0$ for each $p_3^2 + ... + p_w^2 > 0$.

For $(21, 24)$ on a bounded domain with given boundary conditions equations will be of an analogous type with a term on the right $\mathcal{F}^n(g(t),u;p;\zeta)$ minus boundary terms appearing in (6) in these particular cases.

For a partial differential equation

$$(30) \qquad \mathbf{a}(t_{n+1})Af(t_1, ..., t_{n+1}) + \partial f(t_1, ..., t_{n+1})/\partial t_{n+1} = g(t_1, ..., t_{n+1})$$

with octonion valued functions f, g, where A is a partial differential operator by variables $t_1, ..., t_n$ of the type given by $(2, 2.1)$ with coefficients independent of $t_1, ..., t_n$, it may be simpler the following procedure. If a domain V is not the entire Euclidean space $\mathbf{R}^{n+1}$ we impose boundary conditions as above in (5.1). Make the noncommutative transform $\mathcal{F}^{n;t_1,...,t_n}$ of both sides of Equation (30), so it takes the form:

$$(31) \qquad \mathbf{a}(t_{n+1})\mathcal{F}^{n;t_1,...,t_n}(Af(t_1, ..., t_{n+1}), u; p; \zeta) + \partial\mathcal{F}^{n;t_1,...,t_n}(f(t_1, ..., t_{n+1}), u; p; \zeta)/\partial t_{n+1}$$
$$= \mathcal{F}^{n;t_1,...,t_n}(g(t_1, ..., t_{n+1}), u; p; \zeta).$$

In the particular case, when
$\mathbf{a}(t_{n+1})\sum_{|j|\le\alpha} \mathbf{a}_j(t_{n+1}) \sum_{0\le k_1\le j_1} \binom{j_1}{k_1} S_{(k_1,j_2,...,j_k)} e^{-u(p,t;\zeta)} = e^{-u(p,t;\zeta)}$
for each t_{n+1}, p, t and ζ, with the help of $(6, 8)$ one can deduce an expression of $F^n(p;\zeta;t_{n+1}) := \mathcal{F}^{n;t_1,...,t_n}(f(t_1, ..., t_{n+1}), u; p; \zeta)$ through $G^n(p;\zeta;t_{n+1}) := \mathcal{F}^{n;t_1,...,t_n}(g(t_1, ..., t_{n+1}), u; p; \zeta)$ and boundary terms in the following form:

$$(32) \qquad \mathbf{b}(p_0, ..., p_n; t_{n+1})F^n(p;\zeta;t_{n+1}) + \partial F^n(p;\zeta;t_{n+1})/\partial t_{n+1} = Q(p_0, ..., p_n; t_{n+1}),$$

where $\mathbf{b}(p_0, ..., p_n; t_{n+1})$ is a real mapping and $Q(p_0, ..., p_n; t_{n+1})$ is an octonion valued function. The latter differential equation by t_{n+1} has a solution analogously to the real case, since t_{n+1} is the real variable, while $\mathbf{R}$ is the center of the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$. Thus we infer:

$$(33) \qquad F^n(p;\zeta;t_{n+1}) = \exp\left\{-\int_{\tau_0}^{t_{n+1}} \mathbf{b}(p_0, ..., p_n; \xi)d\xi\right\}$$

$$\left\{C_0 + \left[\int_{\tau_0}^{t_{n+1}} Q(p_0,...,p_n;\tau) \exp\left\{\int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{b}(p_0,...,p_n;\xi)d\xi\right\}d\tau\right]\right\},$$

since the octonion algebra is alternative and each equation $\mathbf{b}x = \mathbf{c}$ with non-zero $\mathbf{b}$ has the unique solution $x = \mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}$, where C_0 is an octonion constant which can be specified by an initial condition. More general partial differential equations as (30), but with $\partial^l f/\partial t^l_{n+1}$, $l \ge 2$, instead of $\partial f/\partial t_{n+1}$ can be considered. Making the inverse transform $(\mathcal{F}^{n;t_1,...,t_n})^{-1}$ of the right side of (33) one gets the particular solution f.

28.5. Integral kernel. We rewrite Equation 28(6) in the form:

(34) $$\mathbf{A}_{\mathcal{S}}\mathcal{F}^n(f\chi_{Q^n}, u; p; \zeta) = \mathcal{F}^n(g\chi_{Q^n}, u; p; \zeta) -$$

$$\sum_{|j|\le\alpha} \mathbf{a}_j \sum_{1\le|(lj)|,\ 0\le m_k,\ 0\le q_k,\ h_k=sign(l_kj_k),\ m_k+q_k+h_k=j_k;\ q_k=0 \text{ for } l_kj_k=0;\ \forall k=1,...,n;\ (l)\in\{0,1,2\}^n}$$

$$(-1)^{|(lj)|}\mathcal{S}^m\mathcal{F}^{n-|h(lj)|}\big(\partial^{|q|}f(t^{(lj)})/\partial t_1^{q_1}...\partial t_n^{q_n}\big)\chi_{\partial Q^n_{(lj)}}(t^{(lj)}), u; p; \zeta), \text{ where}$$

(34.1) $\mathcal{S}_k(p) := \mathcal{S}_k := \mathsf{R}_{e_k}(p)$

in the $\mathcal{A}_r$ spherical or $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates respectively (see also Formulas 25(1.1, 1.2)), for each $k = 1, ..., n$,

(34.2) $\mathcal{S}^m(p) := \mathcal{S}^m := \mathcal{S}_1^{m_1}...\mathcal{S}_n^{m_n}$,

(35) $\mathbf{A}_{\mathcal{S}} := \sum_{|j|\le\alpha} \mathbf{a}_j\mathcal{S}^j(p)$.

Then we have the integral formula:

(36) $\mathbf{A}_{\mathcal{S}}\mathcal{F}^n(f\chi_{Q^n}, u; p; \zeta) = \int_{Q^n} f(t)[\mathbf{A}_{\mathcal{S}} \exp(-u(p, t; \zeta))]dt$

in accordance with 1(7) and 2(4). Due to §28.3 the operator $\mathbf{A}_{\mathcal{S}}$ has the inverse operator for λ_{n+1} almost all $(p_0, ..., p_n)$ in $\mathbf{R}^{n+1}$. Practically, its calculation may be cumbersome, but finding for an integral inversion formula its kernel is sufficient. In view of the inversion Theorem 6 or Corollary 6.1 and §§19 and 20 we have

(37) $(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} \exp(-u(a + p, t; \zeta)) \exp(u(a + p, \tau; \zeta))dp_1...dp_n = \delta(t; \tau)$, where

(38) $[\delta, f)(\tau) = \int_{\mathbf{R}^n} f(t)\delta(t; \tau)dt_1...dt_n = f(\tau)$

at each point $\tau \in \mathbf{R}^n$, where the original $f(\tau)$ satisfies Hölder's condition. That is, the functional $\delta(t; \tau)$ is $\mathcal{A}_r$ linear. Thus the inversion of Equation (36) is:

(39) $$\int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^n} f(t)\chi_{Q^n}(t)\Big\{\big[\mathbf{A}_{\mathcal{S}} \exp(-u(p + a, t; \zeta))\big]\xi(p + a, t, \tau; \zeta)\Big\}dt\right)dp_1...dp_n = f(\tau),$$

so that

(40) $\big[\mathbf{A}_{\mathcal{S}} \exp(-u(p+a, t; \zeta))\big]\xi(p+a, t, \tau; \zeta) = (2\pi)^{-n} \exp(-u(p+a, t; \zeta)) \exp(-u(p+a, \tau; \zeta)),$

where the coefficients of $\mathbf{A}_{\mathcal{S}}$ commute with generators i_j of the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$ for each j. Consider at first the alternative case, i.e. over the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_r$ with $r \le 3$.

Let by our definition the adjoint operator $\mathbf{A}^*_{\mathcal{S}}$ be defined by the formula

(41) $\mathbf{A}^*_{\mathcal{S}}\eta(p, t; \zeta) = \sum_{|j|\le\alpha} \mathbf{a}^*_j\mathcal{S}^j\eta^*(p, t; \zeta)$ for any function $\eta : \mathcal{A}_r \times \mathbf{R}^n \times \mathcal{A}_r \to \mathcal{A}_r$, where $t \in \mathbf{R}^n$, p and $\zeta \in \mathcal{A}_r$, $\mathcal{S}^j\eta^*(p, t; \zeta) := \big[\mathcal{S}^j\eta(p, t; \zeta)\big]^*$. Any Cayley-Dickson number $z \in \mathcal{A}_v$ can be written with the help of the iterated exponent (see §3) in $\mathcal{A}_v$ spherical coordinates as

(42) $z = |z| \exp(-u(0, 0; \psi))$,

where $v \ge r$, $\psi \in \mathcal{A}_v$, $u \in \mathcal{A}_v$, $Re(\psi) = 0$. Certainly the phase shift operator is isometrical:

(43) $|T_1^{k_1}...T_n^{k_n}z| = |z|$

for any $k_1,...,k_n \in \mathbf{R}$, since $|\exp(-u(0,0;Im(\psi))| = 1$ for each $\psi \in \mathcal{A}_v$, while $T_1^{k_1}...T_n^{k_n}e^{-u(0,0;Im(\psi))} = \exp\{-u(0,0;Im(\psi) - (k_1i_1 + ... + k_ni_n)\pi/2)\}$ (see §12).

In the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates each Cayley-Dickson number can be presented as:

(42.1) $z = |z|\exp(\phi M)$, where $\phi \in \mathbf{R}$ is a real parameter, M is a purely imaginary Cayley-Dickson number (see also §3 in [17, 16]). Therefore, we deduce that

(44) $|\mathbf{A}_{\mathcal{S}}\exp(-u(p+a,t;\zeta))| = \exp(-(p_0+a)s_1 - \zeta_0)|\mathbf{A}_{\mathcal{S}}\exp(-u(Im(p),t;Im(\zeta)))|$, since $\mathbf{R}$ is the center of the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_v$ and $p_0,\ a,\ \zeta_0,\ s_1 \in \mathbf{R},\ \ s_1 = s_1(t)$, where particularly $\mathbf{A}_{\mathcal{S}}1 := \mathbf{A}_{\mathcal{S}}e^{-u(0,0;\zeta)}|_{\zeta=0}$ (see also Formulas 12(3.1 − 3.7)).

Then expressing ξ from (40) and using Formulas (41, 42, 42.1, 44) we infer, that

(45) $\xi(p,t,\tau;\zeta) = (2\pi)^{-n}[\mathbf{A}^*_{\mathcal{S}}\exp(-u(Im(p),t;Im(\zeta))]$
$[\exp(-u(Im(p),t;Im(\zeta))\exp(u(p,\tau;\zeta))]|\mathbf{A}_{\mathcal{S}}\exp(-u(Im(p),t;Im(\zeta))|^{-2}$,
since $z^{-1} = z^*/|z|^2$ for each non-zero Cayley-Dickson number $z \in \mathcal{A}_v$, $v \ge 1$, where $Im(p) = p_1i_1 + ... + p_ni_n$, $p = p_0i_0 + ... + p_ni_n$, $p_0 = Re(p)$.

Generally, for $r \ge 4$, Formula (45) gives the integral kernel $\xi(p,t,\tau;\zeta)$ for any restriction of ξ on the octonion subalgebra $alg_{\mathbf{R}}(N_1,N_2,N_4)$ embedded into $\mathcal{A}_r$. In view of §28.3 ξ is unique and is defined by (45) on each subalgebra $alg_{\mathbf{R}}(N_1,N_2,N_4)$, consequently, Formula (45) expresses ξ by all variables $p,\xi \in \mathcal{A}_r$ and $t,\ \tau \in \mathbf{R}^n$. Applying Formulas (39, 45) and 28.2(Δ) to Equation (34), when Condition 8(3) is satisfied, we deduce, that

$$(46)\quad (f\chi_{Q^n})(\tau) = \int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^n} g(t)\chi_{Q^n}(t)[\exp(-u(p+a,t;\zeta))\xi(p+a,t,\tau;\zeta)]dt\right)dp_1...dp_n -$$

$$\sum_{|j|\le\alpha}\mathbf{a}_j \sum_{1\le|(lj)|,\ 0\le m_k,\ 0\le q_k,\ h_k=sign(l_kj_k);\ m_k+q_k+h_k=j_k;\ q_k=0 \text{ for } l_kj_k=0,\ \forall\ k=1,...,n;\ (l)\in\{0,1,2\}^n} (-1)^{|(lj)|}$$

$$\int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\partial Q^n_{(lj)}}\left[\partial^{|q|}f(t^{(lj)}/\partial t_1^{q_1}...\partial t_n^{q_n}\right]\left[\{\mathcal{S}^m(p)\exp(-u(p+a,t^{(lj)};\zeta))\}\right.\right.$$

$$\left.\left.\xi(p+a,t^{(lj)},\tau;\zeta)\right]dt^{(lj)}\right)dp_1...dp_n,$$

where $dim_{\mathbf{R}}\partial Q^n_{(lj)} = n - |h(lj)|$, $t^{(lj)} \in \partial Q^n_{(lj)}$ in accordance with §28.1, $\mathcal{S}^m(p)$ is given by Formulas (34.1, 34.2) above.

For simplicity the zero phase parameter $\zeta = 0$ in (46) can be taken. In the particular case $Q^n = \mathbf{R}^n$ all terms with $\int_{\partial Q^n_{(lj)}}$ vanish.

Terms of the form $\int_{\mathbf{R}^n}\left[\{\mathcal{S}^m(p)\exp(-u(p+a,t;\zeta))\}\xi(p+a,t,\tau;\zeta)\right]dp_1...dp_n$ in Formula (46) can be interpreted as left $\mathcal{A}_r$ linear functionals due to Fubini's theorem and §§19 and 20, where $\mathcal{S}^0 = I$.

For the second order operator from (14) one gets:

(47) $\mathbf{A}_{\mathcal{S}} = (\sum_{h=1}^n \mathbf{a}_h[\mathcal{S}_h(p)]^2) + \beta_n\mathcal{S}_n(p) + \omega$ and

$$(48)\qquad (f\chi_U)(t) = \int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^n} g(t)\chi_U(t)\Big[\exp(-u(p+a,t;\zeta))\xi(p,t,\tau;\zeta)\Big]dt\right)dp_1...dp_n -$$

$$\int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\partial U_0} f(t')\Big[\{(\beta(t') + \mathsf{P}(t',p))\exp(-u(p+a,t;\zeta))\}\xi(p,t',\tau;\zeta)\Big]dt'\right)dp_1...dp_n -$$

$$\int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\partial U_0} a(t')(\partial f(t')/\partial\nu)\Big[\exp(-u(p+a,t;\zeta))\xi(p,t',\tau;\zeta)\Big]dt'\right)dp_1...dp_n.$$

For a calculation of the appearing integrals the generalized Jordan lemma (see §§23 and 24 in [18]) and residues of functions at poles corresponding to zeros $|\mathbf{A}_{\mathcal{S}}\exp(-u(Im(p),t;Im(\zeta)))|=0$ by variables $p_1,...,p_n$ can be used.

Take $g(t)=\delta(y;t)$, where $y\in\mathbf{R}^n$ is a parameter, then

$$(49)\quad \int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^n}\delta(y;t)\Big[\exp(-u(p+a,t;\zeta))\xi(p+a,t,\tau;\zeta)\Big]dt\right)dp_1...dp_n$$

$$=\int_{\mathbf{R}^n}\Big[\exp(-u(p+a,y;\zeta))\xi(p+a,y,\tau;\zeta)\Big]dp_1...dp_n =: \mathcal{E}(y;\tau)$$

is the fundamental solution in the class of generalized functions, where

(50) $A_t\mathcal{E}(y;t)=\delta(y;t)$,

(51) $\int_{\mathbf{R}^n}\delta(y;t)f(t)dt=f(y)$

for each continuous function $f(t)$ from the space $L^2(\mathbf{R}^n,\mathcal{A}_r)$; A_t is the partial differential operator as above acting by the variables $t=(t_1,...,t_n)$ (see also §§19, 20 and 33-35).

29. The decomposition theorem of partial differential operators over the Cayley-Dickson algebras.

We consider a partial differential operator of order u:

$$(1)\quad Af(x)=\sum_{|\alpha|\le u}\mathbf{a}_\alpha(x)\partial^\alpha f(x),$$

where $\partial^\alpha f=\partial^{|\alpha|}f(x)/\partial x_0^{\alpha_0}...\partial x_n^{\alpha_n}$, $x=x_0i_0+...x_ni_n$, $x_j\in\mathbf{R}$ for each j, $1\le n=2^r-1$, $\alpha=(\alpha_0,...,\alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_0+...+\alpha_n$, $0\le\alpha_j\in\mathbf{Z}$. By the definition this means that the principal symbol

$$(2)\quad A_0:=\sum_{|\alpha|=u}\mathbf{a}_\alpha(x)\partial^\alpha$$

has α so that $|\alpha|=u$ and $\mathbf{a}_\alpha(x)\in\mathcal{A}_r$ is not identically zero on a domain U in $\mathcal{A}_r$. As usually $C^k(U,\mathcal{A}_r)$ denotes the space of k times continuously differentiable functions by all real variables $x_0,...,x_n$ on U with values in $\mathcal{A}_r$, while the x-differentiability corresponds to the super-differentiability by the Cayley-Dickson variable x.

Speaking about locally constant or locally differentiable coefficients we shall undermine that a domain U is the union of subdomains U^j satisfying conditions $28(D1,i-vii)$ and $U^j\cap U^k=\partial U^j\cap\partial U^k$ for each $j\ne k$. All coefficients $\mathbf{a}_\alpha$ are either constant or differentiable of the same class on each $Int(U^j)$ with the continuous extensions on U^j. More generally it is up to a C^u or x-differentiable diffeomorphism of U respectively.

If an operator A is of the odd order $u=2s-1$, then an operator E of the even order $u+1=2s$ by variables (t,x) exists so that

(3) $Eg(t,x)|_{t=0}=Ag(0,x)$ for any $g\in C^{u+1}([c,d]\times U,\mathcal{A}_r)$, where $t\in[c,d]\subset\mathbf{R}$, $c\le 0<d$, for example, $Eg(t,x)=\partial(tAg(t,x))/\partial t$.

Therefore, it remains the case of the operator A of the even order $u=2s$. Take $z=z_0i_0+...+z_{2^v-1}i_{2^v-1}\in\mathcal{A}_v$, $z_j\in\mathbf{R}$. Operators depending on a less set $z_{l_1},...,z_{l_n}$ of variables can be considered as restrictions of operators by all variables on spaces of functions constant by variables z_s with $s\notin\{l_1,...,l_n\}$.

Theorem. *Let $A = A_u$ be a partial differential operator of an even order $u = 2s$ with locally constant or variable C^s or x-differentiable on U coefficients $\mathbf{a}_\alpha(x) \in \mathcal{A}_r$ such that it has the form*

(4) $Af = c_{u,1}(B_{u,1}f) + ... + c_{u,k}(B_{u,k}f)$, *where each*

(5) $B_{u,p} = B_{u,p,0} + Q_{u-1,p}$
is a partial differential operator by variables $x_{m_{u,1}+...+m_{u,p-1}+1},...,x_{m_{u,1}+...+m_{u,p}}$ and of the order u, $m_{u,0} = 0$, $c_{u,k}(x) \in \mathcal{A}_r$ for each k, its principal part

(6) $B_{u,p,0} = \sum_{|\alpha|=s} \mathbf{a}_{p,2\alpha}(x)\partial^{2\alpha}$
is elliptic with real coefficients $\mathbf{a}_{p,2\alpha}(x) \ge 0$, either $0 \le r \le 3$ and $f \in C^u(U, \mathcal{A}_r)$, or $r \ge 4$ and $f \in C^u(U, \mathbf{R})$. Then three partial differential operators Υ^s and Υ^s_1 and Q of orders s and p with $p \le u - 1$ with locally constant or variable C^s or x-differentiable correspondingly on U coefficients with values in $\mathcal{A}_v$ exist, $r \le v$, such that

(7) $Af = \Upsilon^s(\Upsilon^s_1 f) + Qf$.

Proof. Certainly we have $ordQ_{u-1,p} \le u-1$, $ord(A-A_0) \le u-1$. We choose the following operators:

$$(8) \quad \Upsilon^s f(x) = \sum_{p=1}^{k} \sum_{|\alpha|\le s,\ \alpha_q=0 \forall q<(m_{u,1}+...+m_{u,p-1}+1) \text{ and } q>(m_{u,1}+...+m_{u,p})} (\partial^\alpha f(x))[w_p^*\psi_{p,\alpha}] \text{ and}$$

$$(9) \quad \Upsilon^s_1 f(x) = \sum_{p=1}^{k} \sum_{|\alpha|\le s,\ \alpha_q=0 \forall q<(m_{u,1}+...+m_{u,p-1}+1) \text{ and } q>(m_{u,1}+...+m_{u,p})} (\partial^\alpha f(x))[w_p\psi_{p,\alpha}^*],$$

where $w_p^2 = c_{u,p}$ for all p and $\psi_{p,\alpha}^2(x) = -\mathbf{a}_{p,2\alpha}(x)$ for each p and x, $w_p \in \mathcal{A}_r$, $\psi_{p,\alpha}(x) \in \mathcal{A}_{r,v}$ and $\psi_{p,\alpha}(x)$ is purely imaginary for $\mathbf{a}_{p,2\alpha}(x) > 0$ for all α and x, $Re(w_pIm(\psi_{p,\alpha})) = 0$ for all p and α, $Im(x) = (x - x^*)/2$, $v > r$. Here $\mathcal{A}_{r,v} = \mathcal{A}_v/\mathcal{A}_r$ is the real quotient algebra. The algebra $\mathcal{A}_{r,v}$ has the generators i_{j2^r}, $j = 0, ..., 2^{v-r} - 1$. A natural number v so that $2^{v-r} - 1 \ge \sum_{p=1}^k \sum_{q=0}^u \binom{m_p+q-1}{q}$ is sufficient, where $\binom{m}{q} = m!/(q!(m-q)!)$ denotes the binomial coefficient, $\binom{m+q-1}{q}$ is the number of different solutions of the equation $\alpha_1 + ... + \alpha_m = q$ in non-negative integers α_j. We have either $\partial^{\alpha+\beta} f \in \mathcal{A}_r$ for $0 \le r \le 3$ or $\partial^{\alpha+\beta} f \in \mathbf{R}$ for $r \ge 4$. Therefore, we can take $\psi_{p,\alpha}(x) \in i_{2^r q}\mathbf{R}$, where $q = q(p,\alpha) \ge 1$, $q(p^1, \alpha^1) \ne q(p, \alpha)$ when $(p, \alpha) \ne (p^1, \alpha^1)$.

Thus Decomposition (7) is valid due to the following. For $b = \partial^{\alpha+\beta} f(z)$ and $\mathbf{l} = i_{2^r p}$ and $w \in \mathcal{A}_r$ one has the identities:

(10) $(b(w\mathbf{l}))(w^*\mathbf{l}) = ((wb)\mathbf{l})(w^*\mathbf{l}) = -w(wb) = -w^2 b$ and

(11) $(((b\mathbf{l})w^*)\mathbf{l})w = (((bw)\mathbf{l})\mathbf{l})w = -(bw)w = -bw^2$ in the considered here cases, since $\mathcal{A}_r$ is alternative for $r \le 3$ while $\mathbf{R}$ is the center of the Cayley-Dickson algebra (see Formulas $(M1, M2)$ in the introduction).

This decomposition of the operator A_{2s} is generally up to a partial differential operator of order not greater, than $(2s - 1)$:

(12) $Qf(x) = \sum_{p=1}^k c_{u,p}Q_{u-1,p} +$
$\sum_{|\alpha|\le s, |\beta|\le s; \gamma\le\alpha, \epsilon\le\beta, |\gamma+\epsilon|>0} \left[\prod_{j=0}^{2^v-1} \binom{\alpha_j}{\gamma_j}\binom{\beta_j}{\epsilon_j}\right] \left(\partial^{\alpha+\beta-\gamma-\epsilon} f(x)\right) \left[(\partial^\gamma \eta_\alpha(x))\partial^\epsilon \eta^1_\beta(x)\right],$

where operators Υ^s and Υ_1^s are already written in accordance with the general form

(13) $\Upsilon^s f(x) = \sum_{|\alpha|\le s} (\partial^\alpha f(x))\eta_\alpha(x)$;

(14) $\Upsilon_1^s f(x) = \sum_{|\beta|\le s} (\partial^\beta f(x))\eta_\beta^1(x)$.

When A in (3) is with constant coefficients, then the coefficients w_p and $\psi_{p,\alpha}$ for Υ^m and Υ_1^m can also be chosen constant and $Q - \sum_{p=1}^k c_{u,p}Q_{u-1,p} = 0$.

30. Corollary. *Let suppositions of Theorem 29 be satisfied. Then a change of variables locally affine or variable C^1 or x-differentiable on U correspondingly exists so that the principal part $A_{2,0}$ of A_2 becomes with constant coefficients, when $\mathbf{a}_{p,2\alpha} > 0$ for each p, α and x.*

31. Corollary. *If two operators $E = A_{2s}$ and $A = A_{2s-1}$ are related by Equation 29(3), and A_{2s} is presented in accordance with Formulas 29(4,5), then three operators Υ^s, Υ^{s-1} and Q of orders s, $s-1$ and $2s-2$ exist so that*

(1) $A_{2s-1} = \Upsilon^s\Upsilon^{s-1} + Q$.

Proof. It remains to verify that $ord(Q) \le 2s-2$ in the case of A_{2s-1}, where $Q = \{\partial(tA_{2s-1})/\partial t - \Upsilon^s\Upsilon_1^s\}|_{t=0}$. Indeed, the form $\lambda(E)$ corresponding to E is of degree $2s-1$ by x and each addendum of degree $2s$ in it is of degree not less than 1 by t, consequently, the product of forms $\lambda(\Upsilon_s)\lambda(\Upsilon_1^s)$ corresponding to Υ^s and Υ_1^s is also of degree $2s-1$ by x and each addendum of degree $2s$ in it is of degree not less than 1 by t. But the principal parts of $\lambda(E)$ and $\lambda(\Upsilon_s)\lambda(\Upsilon_1^s)$ coincide identically by variables (t,x), hence $ord(\{E - \Upsilon^s\Upsilon_1^s\}|_{t=0}) \le 2s-2$. Let $a(t,x)$ and $h(t,x)$ be coefficients from Υ_1^s and Υ^s. Using the identities

$a(t,x)\partial_t\partial^\gamma tg(x) = a(t,x)\partial^\gamma g(x)$ and

$h(t,x)\partial^\beta\partial_t[a(t,x)\partial^\gamma g(x)] = h(t,x)\partial^\beta[(\partial_t a(t,x))\partial^\gamma g(x)]$

for any functions $g(x) \in C^{2s-1}$ and $a(t,x) \in C^s$, $ord[(h(t,x)\partial^\beta),(a(t,x)\partial^\gamma)]|_{t=0} \le 2s-2$, where $\partial_t = \partial/\partial t$, $|\beta| \le s-1$, $|\gamma| \le s$, $[A,B] := AB - BA$ denotes the commutator of two operators, we reduce $(\Upsilon^s\Upsilon_1^s + Q_1)|_{t=0}$ from Formula 29(7) to the form prescribes by equation (1).

32. We consider operators of the form:

(1) $(\Upsilon^k + \beta I_r)f(z) := \{\sum_{0<|\alpha|\le k}(\partial^\alpha f(z)\eta_\alpha(z)\} + f(z)\beta(z)$,
with $\eta_\alpha(z) \in \mathcal{A}_v$, $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_{2^r-1})$, $0 \le \alpha_j \in \mathbf{N}$
for each j, $|\alpha| = \alpha_0 + ... + \alpha_{2^r-1}$, $\beta I_r f(z) := f(z)\beta$,
$\partial^\alpha f(z) := \partial^{|\alpha|}f(z)/\partial z_0^{\alpha_0}...\partial z_{2^r-1}^{\alpha_{2^r-1}}$, $2 \le r \le v < \infty$, $\beta(z) \in \mathcal{A}_v$, $z_0, ..., z_{2^r-1} \in \mathbf{R}$, $z = z_0 i_0 + ... + z_{2^r-1}i_{2^r-1}$.

Proposition. *The operator $(\Upsilon^k + \beta)^*(\Upsilon^k + \beta)$ is elliptic on the space $C^{2k}(\mathbf{R}^{2^r}, \mathcal{A}_v)$, where $(\Upsilon^k + \beta)^*$ denotes the adjoint operator (i.e. with adjoint coefficients).*

Proof. We establish the identity

(2) $(ay)z^* + (az)y^* = a2Re(yz^*)$

for any $a, y, z \in \mathcal{A}_v$. It is sufficient to prove Equality (2) for any three basic generators of the Cayley-Dickson algebra $\mathcal{A}_v$, since the real field $\mathbf{R}$ is its center, while the multiplication in $\mathcal{A}_v$ is distributive $(a+y)z = az + yz$ and $((\alpha a)(\beta y))(\gamma z^*) = (\alpha\beta\gamma)((ay)z^*)$ for all $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ and $a, y, z \in \mathcal{A}_v$. If $a = i_0$, then (2) is evident, since $yz^* + zy^* = yz^* + (yz^*)^* = 2Re(yz^*)$. If $y = i_0$, then $(ay)z^* + (az)y^* = az^* + az = a2Re(z) = a2Re(yz^*)$. Analogously for $z = i_0$.

For three purely imaginary generators i_p, i_s, i_k consider the minimal Cayley-Dickson algebra $\Phi = alg_{\mathbf{R}}(i_p, i_s, i_k)$ over the real field generated by them. If it is associative, then it is isomorphic with either the complex field $\mathbf{C}$ or the quaternion skew field $\mathbf{H}$, so that $(ay)z^* + (az)y^* = a(yz^* + zy*) = a2Re(yz^*)$.

If the algebra Φ is isomorphic with the octonion algebra, then we use Formulas $(M1, M2)$ from the introduction for either $a, y \in \mathbf{H}$ and $z = \mathbf{l}$ or $a, z \in \mathbf{H}$ and $y = \mathbf{l}$. This gives (2) in all cases, since the algebra $alg_{\mathbf{R}}(i_p, i_s)$ with two basic generators i_p and i_s is always associative. Particularly, if $y = i_s \ne z = i_k$, $s,\ k \ge 1$, then the result in (2) is zero.

Using (2) we get more generally, that

(3) $((ay)z^*)b^* + ((az)y^*)b^* = (a2Re(yz^*))b^* = (ab^*)2Re(yz^*)$,

consequently,

(4) $((ay)z^*)b^* + ((az)y^*)b^* + ((by)z^*)a^* + ((bz)y^*)a^* = 4Re(ab^*)Re(yz^*)$

for any Cayley-Dickson numbers $a, b, y, z \in \mathcal{A}_v$. In view of Formulas $(1, 4)$ the form corresponding to the principal symbol of the operator $(\Upsilon^k + \beta)^*(\Upsilon^k + \beta)$ is with real coefficients, of degree $2k$ and non-negative definite, consequently, the operator $(\Upsilon^k + \beta)^*(\Upsilon^k + \beta)$ is elliptic.

33. Fundamental solutions. Let either Y be a real $Y = \mathcal{A}_v$ or complexified $Y = (\mathcal{A}_v)_{\mathbf{C}}$ or quaternionified $Y = (\mathcal{A}_v)_{\mathbf{H}}$ Cayley-Dickson algebra (see §28). Consider the space $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n, Y)$ (see §19) supplied with a topology in it is given by the countable family of semi-norms

(1) $p_{\alpha,k}(f) := \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |(1 + |x|)^k \partial^\alpha f(x)|$,

where $k = 0, 1, 2, ...$; $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $0 \le \alpha_j \in \mathbf{Z}$. On this space we take the space $\mathcal{B}'(\mathbf{R}^n, Y)_l$ of all Y valued continuous generalized functions (functionals) of the form

(2) $f = f_0 i_0 + ... + f_{2^v-1} i_{2^v-1}$ and $g = g_0 i_0 + ... + g_{2^v-1} i_{2^v-1}$, where f_j and $g_j \in \mathcal{B}'(\mathbf{R}^n, Y)$, with restrictions on $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ being real or $\mathbf{C_i}$ or $\mathbf{H}_{J,K,L}$ -valued generalized functions $f_0, ..., f_{2^v-1}, g_0, ..., g_{2^v-1}$ respectively. Let $\phi = \phi_0 i_0 + ... + \phi_{2^v-1} i_{2^v-1}$ with $\phi_0, ..., \phi_{2^v-1} \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, then

(3) $[f, \phi) = \sum_{k,j=0}^{2^v-1} [f_j, \phi_k) i_k i_j$. We define their convolution as

(4) $[f * g, \phi) = \sum_{j,k=0}^{2^v-1} ([f_j * g_k, \phi) i_j) i_k$ for each $\phi \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n, Y)$. As usually

(5) $(f * g)(x) = f(x - y) * g(y) = f(y) * g(x - y)$

for all $x, y \in \mathbf{R}^n$ due to (4), since the latter equality (5) is satisfied for each pair f_j and g_k. Thus a solution of the equation

(6) $(\Upsilon^s + \beta) f = g$ in $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n, Y)$ or in the space $\mathcal{B}'(\mathbf{R}^n, Y)_l$ is:

(7) $f = \mathcal{E}_{\Upsilon^s+\beta} * g$, where $\mathcal{E}_{\Upsilon^s+\beta}$ denotes a fundamental solution of the equation

(8) $(\Upsilon^s + \beta)\mathcal{E}_{\Upsilon+\beta} = \delta$, $(\delta, \phi) = \phi(0)$. The fundamental solution of the equation

(9) $A_0 \mathcal{V} = \delta$ with $A_0 = (\Upsilon^s + \beta)(\Upsilon_1^{s_1} + \beta_1)$

using Equalities $32(2-4)$ can be written as the convolution

$$(10) \qquad \mathcal{V} =: \mathcal{V}_{A_0} = \mathcal{E}_{\Upsilon^s+\beta} * \mathcal{E}_{\Upsilon_1^{s_1}+\beta_1}.$$

More generally we can consider the equation

(11) $Af = g$ with $A = A_0 + (\Upsilon_2 + \beta_2)$,

where $A_0 = (\Upsilon + \beta)(\Upsilon_1 + \beta_1)$, Υ, Υ_1, Υ_2 are operators of orders s, s_1 and s_2 respectively given by 32(1) with z-differentiable coefficients. For $\Upsilon_2 + \beta_2 = 0$ this equation was solved above. Suppose now, that the operator $\Upsilon_2 + \beta_2$ is non-zero.

To solve Equation (11) on a domain U one can write it as the system:

(12) $(\Upsilon_1 + \beta_1) f = g_1$, $(\Upsilon + \beta) g_1 = g - (\Upsilon_2 + \beta_2) f$.

Find at first a fundamental solution $\mathcal{V}_A$ of Equation (11) for $g = \delta$. We have:

(13) $f = \mathcal{E}_{\Upsilon_1+\beta_1} * g_1 = \mathcal{E}_{\Upsilon_2+\beta_2} * (g - (\Upsilon + \beta) g_1)$, consequently,

(13.1) $\mathcal{E}_{\Upsilon_1+\beta_1} * g_1 + \mathcal{E}_{\Upsilon_2+\beta_2} * ((\Upsilon + \beta) g_1) = \mathcal{E}_{\Upsilon_2+\beta_2} * g$.

In accordance with $(3-5)$ and 32(1) the identity is satisfied: $[\mathcal{E}_{\Upsilon_2+\beta_2} * ((\Upsilon + \beta) g_1), \phi_0) = [(\Upsilon + \beta)(\mathcal{E}_{\Upsilon_2+\beta_2} * g_1), \phi_0)$. Thus (13) is equivalent to

(14) $\mathcal{E}_{\Upsilon_1+\beta_1} * g_1 + (\Upsilon + \beta)(\mathcal{E}_{\Upsilon_2+\beta_2} * g_1) = \mathcal{E}_{\Upsilon_2+\beta_2}$

for $g = \delta$, since $\mathcal{E}_{\Upsilon_2+\beta_2} * \delta = \mathcal{E}_{\Upsilon_2+\beta_2}$.

We consider the Fourier transform F by real variables with the generator $\mathbf{i}$ commuting with i_j for each $j = 0, ..., 2^v - 1$ such that

$(F1)$ $(Fg)(y) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\mathbf{i}(y,x)} g(x) dx_1...dx_n$
for any $g \in L^1(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}_v)$, i.e. $\int_{\mathbf{R}^n} |g(x)| dx_1...dx_n < \infty$, where $g : \mathbf{R}^n \to Y$ is an integrable function, $(y, x) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$, $x_j \in \mathbf{R}$ for every j. The inverse Fourier transform is:

$(F2)$ $(F^{-1}g)(y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{\mathbf{i}(y,x)} g(x) dx_1...dx_n$.

For a generalized function f from the space $\mathcal{B}'(\mathbf{R}^n, Y)_l$ its Fourier transform is defined by the formula

$(F3)$ $(Ff, \phi) = (f, F\phi)$, $\quad (F^{-1}f, \phi) = (f, F^{-1}\phi)$.

In view of $(2 - 5)$ the Fourier transform of (14) gives:

(15) $[F(\mathcal{E}_{\Upsilon_1+\beta_1})][F(g_1)] + \sum_{j=0}^{2^v-1} [F((\Upsilon + \beta)_j \mathcal{E}_{\Upsilon_2+\beta_2})][F(g_1)] i_j = F(\mathcal{E}_{\Upsilon_2+\beta_2})$
for $g = \delta$. With generators $i_0, ..., i_{2^v-1}, i_0\mathbf{i}, ..., i_{2^v-1}\mathbf{i}$ the latter equation gives the linear system of 2^{v+1} equations over the real field, or 2^{v+2} equations when $Y = (\mathcal{A}_v)_{\mathbf{H}}$. From it $F(g_1)$ and using the inverse transform F^{-1} a generalized function g_1 can be found, since $F(g) = F(g_0)i_0 + ... + F(g_{2^v-1})i_{2^v-1}$ and $F^{-1}(g) = F^{-1}(g_0)i_0 + ... + F^{-1}(g_{2^v-1})i_{2^v-1}$ (see also the Fourier transform of real and complex generalized functions in [5, 29]). Then

(16) $\mathcal{V}_A = \mathcal{E}_{\Upsilon_1+\beta_1} * g_1$ and $f = \mathcal{V}_A * g$ gives the solution of (11), where g_1 was calculated from (15).
Let $\pi^v_r : (\mathcal{A}_v)_{\mathbf{H}} \to (\mathcal{A}_r)_{\mathbf{H}}$ be the $\mathbf{R}$-linear projection operator defined as the sum of projection operators $\pi_0 + ... + \pi_{2^r-1}$, where $\pi_j : (\mathcal{A}_v)_{\mathbf{H}} \to \mathbf{H}i_j$,

(17) $\pi_j(h) = h_ji_j$, $\ h = \sum_{j=0}^{2^v-1} h_ji_j$, $h_j \in \mathbf{H}_{J,K,L}$, that gives the corresponding restrictions when $h_j \in \mathbf{C_i}$ or $h_j \in \mathbf{R}$ for $j = 0, ..., 2^r - 1$. Indeed, Formulas $2(5, 6)$ have the natural extension on $(\mathcal{A}_v)_{\mathbf{H}}$, since the generators J, K and L commute with i_j for each j.

Finally, the restriction from the domain in $\mathcal{A}_v$ onto the initial domain of real variables in the real shadow and the extraction of $\pi^v_r \circ f \in \mathcal{A}_r$ with the help of Formulas $2(5, 6)$ gives the reduction of a solution from $\mathcal{A}_v$ to $\mathcal{A}_r$.

Theorems 29, Proposition 32 and Corollaries 30, 31 together with formulas of this section provide the algorithm for subsequent resolution of partial differential equations for $s, s-1, ..., 2$, because principal parts of operators A_2 on the final step are with constant coefficients. A residue term Q of the first order can be integrated along a path using a non-commutative line integration over the Cayley-Dickson algebra [17, 16].

34. Multiparameter transforms of generalized functions.

If $\phi \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n, Y)$ and $g \in \mathcal{B}'(\mathbf{R}^n, Y)_l$ (see §§19 and 33) we put

(1) $\sum_{j=0}^{2^v-1} [\mathcal{F}^n(g_j; u; p; \zeta), \phi) i_j := \sum_{j=0}^{2^v-1} [g_j, \mathcal{F}^n(\phi; u; p; \zeta)) i_j$ or shortly

(2) $\sum_{j=0}^{2^v-1} [g_j e^{-u(p;t;\zeta)}, \phi) i_j = \sum_{j=0}^{2^v-1} [g_j, \phi e^{-u(p;t;\zeta)}) i_j$.

If the support $supp(g)$ of g is contained in a domain U, then it is sufficient to take a base function ϕ with the restriction $\phi|_U \in \mathcal{B}(U, Y)$ and any $\phi|_{\mathbf{R}^n \setminus U} \in C^\infty$.

34.1. Remark. It is possible to use Theorem 29, Corollaries 30 and 31, Proposition 32 and §33 for solutions of definite differential equations with variable coefficients. For this purpose one can present an operator A as the composition $A = \Upsilon\Upsilon_1 + Q$, where $ord(A) = ord(\Upsilon) + ord(\Upsilon_1)$, $ord(Q) \le ord(A) - 1$, Υ and Υ_1 are operators with variable coefficients, $\Upsilon^*\Upsilon$ and $\Upsilon_1^*\Upsilon_1$ are elliptic operators with constant coefficients of their principal symbols at least. Then use Formulas $33(1 - 16)$ to find fundamental solutions $\mathcal{E}_\Upsilon$, $\mathcal{E}_{\Upsilon_1}$ and $\mathcal{E}_A$ or iterate this procedure (see also §35). A generalization of Feynman's formula over the Cayley-Dickson algebras for the second order partial differential operators with the first order addendum Q with variable coefficients from [20] also can be used.

35. Examples.
Let

(1) $Af(t) = \sum_{j=1}^n (\partial^2 f(t)/\partial t_j^2) c_j$

be the operator with constant coefficients $c_j \in \mathcal{A}_r$, $|c_j| = 1$, by the variables $t_1, ..., t_n$, $n \ge 2$. We suppose that c_j are such that the minimal subalgebra $alg_{\mathbf{R}}(c_j, c_k)$ containing c_j and c_k is alternative for each j and k and $|(...(c_1^{1/2} c_2^{1/2})...)c_n^{1/2}| = 1$. Since

(2) $\partial f(t)/\partial t_j = \sum_{k=1}^n (\partial f(t(s))/\partial s_k)(\partial s_k/\partial t_j) = \sum_{k=1}^j \partial f(t(s))/\partial s_k$, the operator A takes the form

(3) $Af = \sum_{j=1}^n (\sum_{1 \le k,b \le j} (\partial^2 f(t(s))/\partial s_k \partial s_b)) c_j$,

where $s_j = t_j + ... + t_n$ for each j. Therefore, by Theorem 12 and Formulas 25(SO) and 28(6) we get:

(4) $\mathcal{F}^n(Af; u; p; \zeta) = \sum_{j=1}^n \{[\mathsf{R}_{e_j}(p)]^2 F^n_u(p; \zeta)\} c_j$ for $u(p, t; \zeta)$ either in $\mathcal{A}_r$ spherical or $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates with the corresponding operators $\mathsf{R}_{e_j}(p)$ (see also Formulas 25(1.1, 1.2)). On the other hand,

(5) $\mathcal{F}^n(\delta; u; p; \zeta) = e^{-u(p,0;\zeta)} = e^{-u(0,0;\zeta)}$ in accordance with Formula 20(2). The delta function $\delta(t)$ is invariant relative to any invertible linear operator $C: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ with the determinant $|\det(C)| = 1$, since

$$\int_{\mathbf{R}^n} \delta(Cx)\phi(x)dx = \int_{\mathbf{R}^n} \delta(y)\phi(C^{-1}y)|\det(C)|dy = \phi(C^{-1}0) = \phi(0).$$

Thus

(5) $\mathcal{F}^n(C(Af); u; p; \zeta) = \mathcal{F}^n(Af; u; p; \zeta)$

for any Fundamental solution f, where $Cg(t) := g(Ct)$, $Af = \delta$. If $C: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ is an invertible linear operator and $\xi = Ct$, $q = Cp$, $\zeta' = C\zeta$, then $t = C^{-1}\xi$, $p = C^{-1}q$ and $\zeta = C^{-1}\zeta'$. In the multiparameter noncommutative transform $\mathcal{F}^n$ there are the corresponding variables (t_j, p_j, ζ_j). This is accomplished in particular for the operator $C(t_1, ..., t_n) = (s_1, ..., s_n)$. The operator C^{-1} transforms the right side of Formula (4), when it is written in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates, into $\sum_{j=1}^n \{(p_0 + q_j \mathsf{S}_{e_j})^2 F^n_u(q; \zeta)\} c_j$. The Cayley-Dickson number $q = q_0 + q_1 i_1 + ... + q_n i_n$ can be written as $q = q_0 + q_M M$, where $|M| = 1$, M is a purely imaginary Cayley-Dickson number, $q_M \in \mathbf{R}$, $q_M M = q_1 i_1 + ... + q_n i_n$, since $q_0 = Re(q)$. After a suitable automorphism $\theta: \mathcal{A}_r \to \mathcal{A}_r$ we can take $\theta(q) = q_0 + q_M i_1$, so that $\theta(x) = x$ for any real number. The functions $[\sum_{j=1}^n q_j^2 \mathsf{S}^2_{e_j} c_j]$ and $[\sum_{j=1}^n p_j^2 \mathsf{S}^2_{e_j} c_j]$ are even by each variable q_j and p_j respectively. Therefore, we deduce in accordance with (5) and 2(3, 4) and Corollary 6.1 with parameters $p_0 = 0$ and $\zeta = 0$ and $c_j \in \{-1, 1\}$ for each j that

(6) $(\mathcal{F}^n)^{-1}\left(1/\left[\sum_{j=1}^n \left\{\sum_{1 \le k,b \le j} p_k \mathsf{S}_{e_k} p_b \mathsf{S}_{e_b}\right\} c_j\right]; u; y; \zeta\right) = -\left[g, e^{N([y],[q])}\right)$

in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates, where $g = 1\Big/\left[\sum_{j=1}^n q_j^2 c_j\right]$, or

(6.1) $(\mathcal{F}^n)^{-1}(1/[\sum_{j=1}^n \{p_j^2 \mathsf{S}^2_{e_j}\} c_j]; u; y; \zeta) = -[g, e^{N([y],[p])})$

in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates, where $g = 1/[\sum_{j=1}^n p_j^2 c_j]$, $N = y/|y|$ for $y \ne 0$, $N = i_1$ for $y = 0$, $y = y_1 i_1 + ... + y_n i_n \in \mathcal{A}_r$, $[y] = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n$, $([y], [q]) = \sum_{j=1}^n y_j q_j$, since $\mathsf{S}^2_{e_k} \cos(\phi + \zeta_k) = \cos(\phi + \zeta_k + \pi) = -\cos(\phi + \zeta_k)$ and $\mathsf{S}^2_{e_k} \sin(\phi + \zeta_k) = \sin(\phi + \zeta_k + \pi) = -\sin(\phi + \zeta_k)$

for each k.

Particularly, we take $c_j = 1$ for each $j = 1, ..., k_+$ and $c_j = -1$ for any $j = k_+ + 1, ..., n$, where $1 \le k_+ \le n$. Thus the inverse Laplace transform for $q_0 = 0$ and $\zeta = 0$ in accordance with Formulas 2(1 − 4) reduces to

(7) $(\mathcal{F}^n)^{-1}\Big(1\Big/\Big[\sum_{j=1}^n\Big\{\sum_{1\le k,b\le j} p_k \mathsf{S}_{e_k} p_b \mathsf{S}_{e_b}\Big\}c_j\Big]; u; y; \zeta\Big) =$
$(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\exp(\mathbf{i}(q_1y_1 + ... + q_ny_n))\Big(1\Big/\Big[\sum_{j=1}^{k_+} q_j^2 - \sum_{j=k_++1}^n q_j^2\Big]\Big)dq_1...dq_n$
in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates and

(7.1) $(\mathcal{F}^n)^{-1}\Big(1\Big/\Big[\sum_{j=1}^n p_j^2 \mathsf{S}_{e_j}^2 c_j\Big]; u; y; \zeta\Big) =$
$(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\exp(\mathbf{i}(p_1y_1 + ... + p_ny_n))\Big(1\Big/\Big[\sum_{j=1}^{k_+} p_j^2 - \sum_{j=k_++1}^n p_j^2\Big]\Big)dp_1...dp_n$
in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates,
since for any even function its cosine Fourier transform coincides with the Fourier transform.

The inverse Fourier transform $(F^{-1}g)(x) = (2\pi)^{-n}(Fg)(-x) =: \Psi_n$ of the functions $g = 1/(\sum_{j=1}^n z_j^2)$ for $n \ge 3$ and $\mathcal{P}(1/(\sum_{j=1}^2 z_j^2))$ for $n = 2$ in the class of the generalized functions is known (see [5] and §§9.7 and 11.8 [29]) and gives

(8) $\Psi_n(z_1, ..., z_n) = C_n(\sum_{j=1}^n z_j^2)^{1-n/2}$ for $3 \le n$, where $C_n = -1/[(n-2)\sigma_n]$, $\sigma_n = 4\pi^{n/2}/\Gamma((n/2)-1)$ denotes the surface of the unit sphere in $\mathbf{R}^n$, $\Gamma(x)$ denotes Euler's gamma-function, while

(9) $\Psi_2(z_1, z_2) = C_2\ln(\sum_{j=1}^2 z_j^2)$ for $n = 2$, where $C_2 = 1/(4\pi)$.
Thus the technique of §2 over the Cayley-Dickson algebra has permitted to get the solution of the Laplace operator.

For the function
(10) $P(x) = \sum_{j=1}^{k_+} x_j^2 - \sum_{j=k_++1}^n x_j^2$ with $1 \le k_+ < n$ the generalized functions $(P(x) + \mathbf{i}0)^\lambda$ and $(P(x) - \mathbf{i}0)^\lambda$ are defined for any $\lambda \in \mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{i}\mathbf{R}$ (see Chapter 3 in [5]). The function P^λ has the cone surface $P(z_1, ..., z_n) = 0$ of zeros, so that for the correct definition of generalized functions corresponding to P^λ the generalized functions

(11) $(P(x) + c\mathbf{i}0)^\lambda = \lim_{0<c\epsilon, \epsilon\to 0}(P(x)^2 + \epsilon^2)^{\lambda/2}\exp(\mathbf{i}\lambda arg(P(x) + \mathbf{i}c\epsilon))$
with either $c = -1$ or $c = 1$ were introduced. Therefore, the identity

(12) $F(\Psi_{k_+,n-k_+})(x) = -\Big(\sum_{j=1}^{k_+} x_j^2 - \sum_{j=k_++1}^n x_j^2\Big)\Big[F(\Psi_{k_+,n-k_+})(x)\Big]^2$ or

(13) $F(\Psi) = -1/(P(x) + c\mathbf{i}0)$ follows, where $c = -1$ or $c = 1$.

The inverse Fourier transform in the class of the generalized functions is:

(14) $F^{-1}((P(x)+c\mathbf{i}0)^\lambda)(z_1, ..., z_n) = \exp(-\pi c(n-k_+)\mathbf{i}/2)2^{2\lambda+n}\pi^{n/2}\Gamma(\lambda+n/2)(Q(z_1, ..., z_n) - c\mathbf{i}0)^{-\lambda-n/2)}/[\Gamma(-\lambda)|D|^{1/2}]$
for each $\lambda \in \mathbf{C}$ and $n \ge 3$ (see §IV.2.6 [5]), where $D = \det(g_{j,k})$ denotes a discriminant of the quadratic form $P(x) = \sum_{j,k=1}^n g_{j,k}x_jx_k$, while $Q(y) = \sum_{j,k=1}^n g^{j,k}x_jx_k$ is the dual quadratic form so that $\sum_{k=1}^n g^{j,k}g_{k,l} = \delta_l^j$ for all j, l; $\delta_l^j = 1$ for $j = l$ and $\delta_l^j = 0$ for $j \ne l$. In the particular case of $n = 2$ the inverse Fourier transform is given by the formula:

(15) $F^{-1}((P(x) + c\mathbf{i}0)^{-1})(z_1, z_2) = -4^{-1}|D|^{-1/2}\exp(-\pi c(n-k_+)\mathbf{i}/2)\ln(Q(z_1, ..., z_n) - c\mathbf{i}0)$.
Making the inverse Fourier transform F^{-1} of the function $-1/(P(x) + \mathbf{i}0)$ in this particular case of $\lambda = -1$ we get two complex conjugated fundamental solutions

(16) $\Psi_{k_+,n-k_+}(z_1, ..., z_n) = -\exp(\pi c(n-k_+)\mathbf{i}/2)\Gamma((n/2)-1)(Q(z_1, ..., z_n) + c\mathbf{i}0)^{1-(n/2)}/(4\pi^{n/2})$ for $3 \le n$ and $1 \le k_+ < n$, while

(17) $\Psi_{1,1}(z_1, z_2) = 4^{-1}\exp(\pi c(n-k_+)\mathbf{i}/2)\ln(Q(z_1, z_2) + c\mathbf{i}0)$ for $n = 2$,

where either $c=1$ or $c=-1$.

Generally for the operator A given by Formula (1) we get $P(x)=P_0(x)+P_i(x)$, where $P_0(x)=\sum_{j=1}^n x_j^2 Re(c_j)$ and $P_i(x)=\sum_{j=1}^n x_j^2 Im(c_j)$ are the real and imaginary parts of P, $Im(z)=z-Re(z)$ for any Cayley-Dickson number z. Take $\mathbf{l}=i_{2^r}$ and consider the form $P(x)+\epsilon c\mathbf{l}$ with $\epsilon\ne 0$ and either $c=1$ or $c=-1$, then $P(x)+\epsilon c\mathbf{l}\ne 0$ for each $x\in\mathbf{R}^n$. We put

(18) $(P(x)+c\mathbf{l}0)^\lambda=\lim_{0<c\epsilon,\epsilon\to 0}(P(x)^2+\epsilon^2)^{\lambda/2}\exp(\mathbf{i}\lambda Arg(P(x)+\mathbf{l}c\epsilon))$. Consider $\lambda\in\mathbf{R}$, the generalized function $(P(x)^2+\epsilon^2)^{\lambda/2}\exp(\mathbf{i}\lambda Arg(P(x)+\mathbf{l}c\epsilon))$ is non-degenerate and for it the Fourier transform is defined. The limit $\lim_{0<c\epsilon,\epsilon\to 0}$ gives by our definition the Fourier transform of $(P(x)+c\mathbf{l}0)^\lambda$. Since

(19) $c_j(\beta_j+\sum_{1\le k\le n,k\ne j}c_j^{-1}c_k\beta_k)=\sum_{j=1}^n c_j\beta_j$
for all $\beta_j\in\mathbf{R}$ and any $1\le j\le n$ in accordance with the conditions imposed on c_j at the beginning of this section and $\mathbf{i}N_j=N_j\mathbf{i}$ for each j, the Fourier transform with the generator $\mathbf{i}$ can be accomplished subsequently by each variable using Identity (19). The transform $x_j\mapsto(c_j)^{1/2}x_j$ is diagonal and $|(...((c_1^{1/2}c_2^{1/2})...)c_n^{1/2}|=1$, so we can put $|D|=1$.

Each Cayley-Dickson number can be presented in the polar form $z=|z|e^{\phi M}$, $\phi\in\mathbf{R}$, $|\phi|\le\pi$, M is a purely imaginary Cayley-Dickson number $|M|=1$, $Arg(z)=(\phi+2\pi k)M$ has the countable number of values, $k\in\mathbf{Z}$ (see §3 in [17, 16]). Therefore, we choose the branch $z^{1/2}=|z|^{1/2}\exp((Argz)/2)$, $|z|^{1/2}>0$ for $z\ne 0$, with $|Arg(z)|\le\pi$, $Arg(M)=M\pi/2$ for each purely imaginary M with $|M|=1$.

We treat the iterated integral as in §6, i.e. with the same order of brackets. Taking initially $c_j\in\mathbf{R}$ and considering the complex analytic extension of formulas given above in each complex plane $\mathbf{R}\oplus N_j\mathbf{R}$ by c_j for each j by induction from 1 to n, when c_j is not real in the operator A, $Im(c_j)\in\mathbf{R}N_j$, we get the fundamental solutions for A with the form $(P(x)+c\mathbf{l}0)^\lambda$ instead of $(P(x)+c\mathbf{i}0)^\lambda$ with multipliers $(...(c_1^{c/2}c_2^{c/2})...)c_n^{c/2}$ instead of $\exp(\pi c(n-k_+)\mathbf{i}/2)$ as above and putting $|D|=1$. Thus

(20) $\Psi(z_1,...,z_n)=-\Gamma((n/2)-1)(P^*(z_1,...,z_n)-c\mathbf{l}0)^{1-(n/2)}[(...(c_1^{c/2}c_2^{c/2})...)c_n^{c/2}]^*/(4\pi^{n/2})$ for $3\le n$, while

(21) $\Psi(z_1,z_2)=4^{-1}[c_1^{c/2}c_2^{c/2}]^*Ln(P^*(z_1,z_2)-c\mathbf{l}0)$ for $n=2$,
since $c_j^*=c_j^{-1}$ for $|c_j|=1$, $y_jq_j=y_j(c_j^{c/2})^*q_jc_j^{1/2}$, while
$(...(dc_1^{c/2}q_1dc_2^{c/2}q_2)...)dc_n^{c/2}q_n]=dq_1...dq_n[(...(c_1^{c/2}c_2^{c/2})...)c_n^{c/2}]$ and
$|(...(c_1^{c/2}c_2^{c/2})...)c_n^{c/2}|=1$.

36. Partial differential equations with polynomial real coefficients.
Let

(1) $A=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(q)\partial_q^\alpha$, $a_\alpha(q)=\sum_\beta a_{\alpha,\beta}q^\beta$, $q^\beta:=q_1^{\beta_1}...q_n^{\beta_n}$, $a_{\alpha,\beta}$ and f have values as in §28, and Af be an original. Using the transform in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates we take $q_j=t_j$ for each j, while using the transform in $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates we choose $q_j=s_j(t)$ for each j. Then

(2) $\mathcal{F}^n(Af;u;p;\zeta)=\sum_\beta(-1)^{|\beta|}\mathsf{S}_\beta(p)\partial_p^\beta$
$[\sum_\beta a_{\alpha,\beta}([p_0+p_1\mathsf{S}_{e_1}]^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\mathsf{S}_{e_2}^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}\mathsf{S}_{e_n}^{\alpha_n})]F^n(p;\zeta)=G^n(p;\zeta)$
in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates and

(2.1) $\mathcal{F}^n(Af;u;p;\zeta)=\sum_\beta(-1)^{|\beta|}\mathsf{S}_\beta(p)\partial_p^\beta$
$(\sum_\beta a_{\alpha,\beta}[p_0+p_1\mathsf{S}_{e_1}]^{\alpha_1}[p_0+p_2\mathsf{S}_{e_2}]^{\alpha_2}...[p_0+p_n\mathsf{S}_{e_n}]^{\alpha_n})F^n(p;\zeta)=G^n(p;\zeta)$
in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates (see Theorems 12 and 13 above). It may happen that the

second differential equation is simpler than the initial one:

(3) $Af = g$.

For example, when coefficients depend only on one variable t_n, then the second differential equation is ordinary and linear.

37. Noncommutative transforms of products and convolutions of functions in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates.

For any Cayley-Dickson number $z = z_0 i_0 + ... + z_{2^r-1} i_{2^r-1}$ we consider projections

(1) $\theta_j(z) = z_j$, $z_j \in \mathbf{R}$ or $\mathbf{C_i}$ or $\mathbf{H}_{J,K,L}$, $j = 0, ..., 2^r - 1$, $\theta_j(z) = \pi_j(z) i_j^*$,
given by Formulas 2(5,6) and 33(17). We define the following operators

(2) $\mathcal{R}_{\alpha,j}(F^n(p;\zeta)) := F^n(p_0, (-1)^{\alpha_1} p_1, ..., (-1)^{\alpha_{j+1-\delta_{j,n}}} p_{j+1-\delta_{j,n}}, p_{j+2-\delta_{j,n}},$
$..., p_n; \zeta_0, (-1)^{\alpha_1}\zeta_1 + \pi\alpha_1/2, ..., (-1)^{\alpha_{j+1-\delta_{j,n}}} \zeta_{j+1-\delta_{j,n}} + \pi\alpha_{j+1-\delta_{j,n}}/2, \zeta_{j+2-\delta_{j,n}}, ..., \zeta_n)$
on images F^n, $2^{r-1} \le n \le 2^r - 1$, $j = 0, ..., n$. For α_j and $\beta_j \in \{0,1\}$ their sum $\alpha_j + \beta_j$ is considered by $(mod\ 2)$, i.e. in the ring $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})$, for two vectors α and $\beta \in \{0,1\}^{2^r-1}$ their sum is considered componentwise in $\mathbf{Z}_2$. Let

$$(3) \qquad \mathcal{F}^n(f;u;p;\zeta) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{2^r-1} \theta_j(\mathcal{F}^n(\theta_k(f);u;p;\zeta)) i_k i_j,$$

also $F_j^n(p;\zeta) := \sum_{k=0}^{2^r-1} \theta_j(\mathcal{F}^n(\theta_k(f);u;p;\zeta)) i_k$ for an original f, where $u(p,t;\zeta)$ is given by Formulas 2(1,2,2.1). If f is real or $\mathbf{C_i}$ or $\mathbf{H}_{J,K,L}$ -valued, then $F_j^n = \theta_j(F^n)$.

Theorem. *If f and g are two originals, then*

(4) $\mathcal{F}^n(fg;u;p;\zeta) = \sum_{j=0}^n \sum_{\alpha,\beta\in\{0,1\}^n} (-1)^{\alpha_{j+1}(1-\delta_{j+1,n})} (\mathcal{R}_{\alpha,j}(F_j^n(p-q_0;\zeta-\eta)) * (\mathcal{R}_{\beta,j}(G_j^n(p+q_0-p_0;\eta)) i_j$,

(4.1) $\mathcal{F}^n(f * g;u;p;\zeta) = \sum_{j=0}^n \sum_{\alpha,\beta\in\{0,1\}^n} (-1)^{\alpha_{j+1}(1-\delta_{j+1,n})} (\mathcal{R}_{\alpha,j}(F_j^n(p;\zeta - \eta))(\mathcal{R}_{\beta,j}(G_j^n(p;\eta)) i_j$,

whenever $\mathcal{F}^n(fg)$, $\mathcal{F}^n(f)$, $\mathcal{F}^n(g)$ exist, where $1 \le n \le 2^r - 1$, $2 \le r$; $\alpha_k + \beta_k = 1$ $(mod\ 2)$ for $k \le j$ or $k = j+1 = n$, $\alpha_k + \beta_k = 0$ $(mod\ 2)$ for $k = j+1 < n$ and $\alpha_k = \beta_k = 0$ for $k > j+1$ in the j-th addendum on the right of Formulas $(4, 4.1)$; the convolution is by $(p_1, ..., p_n)$ in (4), at the same time $q_0 \in \mathbf{R}$ and $\eta \in \mathcal{A}_r$ are fixed.

Proof. The product of two originals can be written in the form:

(5) $f(t)g(t) = \sum_{j=0}^{2^r-1} \sum_{k,l:\ i_k i_l = i_j} \theta_k(f(t))\theta_l(g(t)) i_j$.

The functions $\theta_k(f)$ and $\theta_l(g)$ are real or $\mathbf{C_i}$ or $\mathbf{H}_{J,K,L}$ valued respectively. The noncommutative transform of fg is:

$$(6) \qquad \mathcal{F}^n(fg)(p;\zeta) = \int_{\mathbf{R}^n} f(t)g(t) \exp(-u(p,t;\zeta)) dt =$$

$$\left\{ \int_{\mathbf{R}^n} (f(t)g(t)) e^{-p_0 s_1} \cos(p_1 s_1 + \zeta_1) i_0 dt \right\} +$$

$$\left\{ \sum_{j=2}^{n-1} \int_{\mathbf{R}^n} (f(t)g(t)) e^{-p_0 s_1} \sin(p_1 s_1 + \zeta_1) ... \sin(p_{j-1} s_{j-1} + \zeta_{j-1}) \cos(p_j s_j + \zeta_j) i_{j-1} dt \right\} +$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} (f(t)g(t)) e^{-p_0 s_1} \sin(p_1 s_1 + \zeta_1) ... \sin(p_n s_n + \zeta_n) i_n dt.$$

On the other hand,

$$(7) \qquad \int_{\mathbf{R}^n} f(t)g(t) e^{-p_0 s_1 + \mathbf{i} \sum_{j=1}^k (p_j s_j + \zeta_j)\gamma_j} dt =$$

$$\int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^n} f(t)e^{-(p_0-q_0)s_1+\mathbf{i}\sum_{j=1}^k((p_j-q_j)s_j+\zeta_j-\eta_j)\gamma_j}dt\right)\left(\int_{\mathbf{R}^n} g(t)e^{-q_0s_1+\mathbf{i}\sum_{j=1}^k(q_js_j+\eta_j)\gamma_j}dt\right)dq,$$

where $k=1,2,...,n$, $\gamma_j\in\{-1,1\}$. Therefore, using Euler's formula $e^{\mathbf{i}\phi}=\cos(\phi)+\mathbf{i}\sin(\phi)$ and the trigonometric formulas $\cos(\phi+\psi)=\cos(\phi)\cos(\psi)-\sin(\phi)\sin(\psi)$, $\sin(\phi+\psi)=\sin(\phi)\cos(\psi)+\cos(\phi)\sin(\psi)$ for all $\phi,\ \psi\in\mathbf{R}$, and Formulas $(6,7)$, we deduce expressions for $\theta_j(\mathcal{F}^n(fg))$. We get the integration by $q_1,...,q_n$, which gives convolutions by the $p_1,...,p_n$ variables. Here $q_0\in\mathbf{R}$ and $\eta\in\mathcal{A}_r$ are any marked numbers. Thus from Formulas $(5-7)$ and $2(1,2,2.1,4)$ we deduce Formula (4).

Moreover, one certainly has

$$(8)\qquad \int_{\mathbf{R}^n}(f*g)(t)e^{-p_0s_1+\mathbf{i}\sum_{j=1}^k(p_js_j+\zeta_j)\gamma_j}dt=$$

$$\left(\int_{\mathbf{R}^n} f(t)e^{-p_0s_1+\mathbf{i}\sum_{j=1}^k(p_js_j+\zeta_j-\eta_j)\gamma_j}dt\right)\left(\int_{\mathbf{R}^n} g(t)e^{-p_0s_1+\mathbf{i}\sum_{j=1}^k(p_js_j+\eta_j)\gamma_j}dt\right)$$

for each $1\le k\le n$, $\gamma_j\in\{-1,1\}$, since $s_j(t)=s_j(t-\tau)+s_j(\tau)$ for all $j=1,...,n$ and $t,\ \tau\in\mathbf{R}^n$. Thus from Relations $(6,8)$ and $2(1,2,2.1,4)$ and Euler's formula one deduces expressions for $\theta_j(\mathcal{F}^n(f*g))$ and Formula (4.1).

38. Moving boundary problem.

Let us consider a boundary problem

(1) $Af=g$ in the half-space $t_n\ge\phi(t_n)$, where $\phi(0)=0$ and $\phi(t_n)<t_n$ for each $0\le t_n\in\mathbf{R}$. Suppose that the function $t_n-\phi(t_n)=:\psi(t_n)$ is differentiable and bijective. For example, if $0<v<1$ and $\phi(t_n)=vt_n$, then the boundary is moving with the speed v. Make the change of variables $y_n=\psi(t_n)$, $y_1=t_1$,...,$y_{n-1}=t_{n-1}$, then $t_n=\psi^{-1}(y_n)$ and $dt_n=ds_n=(dt_n/dy_n)dy_n$ and due to Theorem 25 we infer that

$$(2)\qquad \mathcal{F}^n\left(\sum_{|\alpha|\le m}\mathbf{b}_\alpha\partial_s^\alpha\chi_{y_n\ge 0}f(t);p;\zeta\right)=\sum_{|\alpha|\le m,0\le q_n\le\alpha_n-1}\mathbf{b}_\alpha(\delta_{0,\alpha_n}-1)$$

$$(p_0+\mathsf{S}_{e_1}p_1)^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_{n-1}^{\alpha_{n-1}}p_n^{\alpha_n-q_n-1}\mathsf{S}_{\alpha-\alpha_1e_1-(q_n+1)e_n}\mathcal{F}^{n-1,y^n}(\partial_{t_n}^{q_n}w(y),u(p,(y^n);\zeta);p;\zeta)$$

$$+\sum_{|\alpha|\le m}\mathbf{b}_\alpha(p_0+\mathsf{S}_{e_1}p_1)^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}\mathsf{S}_{\alpha-\alpha_1e_1}\mathcal{F}^n(\chi_{y_n\ge0}(y)w(y);p;\zeta)=G^n(p;\zeta)$$

in the $\mathcal{A}_r$ spherical coordinates and

$$(2.1)\qquad \mathcal{F}^n\left(\sum_{|\alpha|\le m}\mathbf{a}_\alpha\partial_t^\alpha\chi_{y_n\ge 0}f(t);p;\zeta\right)=\sum_{|\alpha|\le m,0\le q_n\le\alpha_n-1}\mathbf{a}_\alpha(\delta_{0,\alpha_n}-1)$$

$$(p_0+\mathsf{S}_{e_1}p_1)^{\alpha_1}(p_0+p_2\mathsf{S}_{e_2})^{\alpha_2}...(p_0+p_{n-1}\mathsf{S}_{e_{n-1}})^{\alpha_{n-1}}(p_0+p_n\mathsf{S}_{e_n})^{\alpha_n-q_n-1}$$
$$\mathcal{F}^{n-1,y^n}(\partial_{t_n}^{q_n}w(y),u(p,(y^n);\zeta);p;\zeta)$$

$$+\sum_{|\alpha|\le m}\mathbf{a}_\alpha(p_0+\mathsf{S}_{e_1}p_1)^{\alpha_1}(p_0+p_2\mathsf{S}_{e_2})^{\alpha_2}...(p_0+p_n\mathsf{S}_{e_n})^{\alpha_n}\mathcal{F}^n(\chi_{y_n\ge0}(y)w(y);p;\zeta)=G^n(p;\zeta)$$

in the $\mathcal{A}_r$ Cartesian coordinates, where $w(y):=f(t(y))(dt_n/dy_n)$.

Expressing $\mathcal{F}^n(\chi_{y_n\ge0}(y)w(y);p;\zeta)$ through $G^n(p;\zeta)$ and the boundary terms $\mathcal{F}^{n-1,y^n}(\partial_{t_n}^{q_n}w(y),u(p,(y^n);\zeta);p;\zeta)$ as in §28.3 and making the inverse transform 8(4) or 8.1(1), or using the integral kernel ξ as in §28.5, one gets a solution $w(y)$ or $f(t)=w(y(t))(dy_n(t_n)/dt_n)$.

39. Partial differential equations with discontinuous coefficients. Consider a domain U and its subdomains $U \supset U_1 \supset ... \supset U_k$ satisfying Conditions $28(D1, D4, i-vii)$ so that coefficients of an operator A (see 28(2)) are constant on $Int(U_k)$ and on $V_1 = U \setminus Int(U_1)$, $V_2 = U_1 \setminus Int(U_2)$,...,$V_k = U_{k-1} \setminus Int(U_k)$ and are allowed to be discontinuous at the common borders $\partial V_j \cap \partial U_j$ for each $j = 1, ..., k$. Each function $f\chi_{U_j}$ is an original on U or a generalized function with the support $supp(f\chi_{U_j}) \subset U_j$ if f is an original or a generalized function on U. Choose operators A^j with constant coefficients on U^j and $A^j|_{Int(V_j)} = 0$, where $U^0 = U$, so that $A|_{U_k} = A^k$,..., $A|_{U_j} = A^j + ... + A^k$,..., $A|_U = A^0 + ... + A^k$. Therefore, in the class of originals or generalized functions on U the problem (see $28(1, 2)$) can be written as

(1) $Af = g$, or

(2) $A^0 f\chi_{V_1} = g\chi_{V_1}$,...,$A^{k-1} f\chi_{V_k} = g\chi_{V_k}$, $A^k f\chi_{U_k} = g\chi_{U_k}$,

since $\chi_{V_1} + ... + \chi_{V_k} + \chi_{U_k} = \chi_U$. Thus the equivalent problem is:

(3) $A^0 f^0 = g^0$, $A^1 f^1 = g^1$,...,$A^k f^k = g^k$

with $f^k = f\chi_{U_k}$, $g^k = g\chi_{U_k}$, also $f^j = f\chi_{V_{j+1}}$, $g^j = g\chi_{V_{j+1}}$ for each $j = 0, ..., k-1$. On ∂U take the boundary condition in accordance with 28(5.1). With any boundary conditions in the class of originals or generalized functions on additional borders $\partial U_j \setminus \partial U$ given in accordance with 28(5.1) a solution f^j on U^j exists, when the corresponding condition 8(3) is satisfied (see Theorems 8 and 28.1).

Each problem $A^j f^j = g^j$ can be considered on U_j, since $supp(g^j) \subset U_j$. Extend f^j by zero on $U \setminus V_j$ for each $0 \le j \le k-1$. When the right side of 28(6) is non-trivial, then f^j is non-trivial. If f^{j-1} is calculated, then the boundary conditions on $\partial U^j \setminus \partial U$ can be chosen in accordance with values of f^{j-1} and its corresponding derivatives $(\partial^\beta f^{j-1}/\partial \nu^\beta)|_{(\partial U^j \setminus \partial U)}$ for some $\beta < ord(A^j)$ in accordance with the operator A^j and the boundary conditions 28(5.1) on the boundary $\partial U^j \setminus \partial U$. Having found f^j for each $j = 0, ..., k$ one gets the solution $f = f^0 + ... + f^k$ on U of Problem (1) with the boundary conditions 28(5.1) on ∂U.

40. Remark. The multiparameter noncommutative transform over the Cayley-Dickson algebras presented above is the natural generalization of the usual complex one-parameter Laplace transform. It opens new opportunities for solving partial differential equations of different types.

It may happen that Theorem 13 is simpler to use, than Theorem 21 for partial differential equations with real variables. Theorem 13 has an advantage that it can be simpler used for partial differential equations of complex and hyper-complex variables, because each pair $(p_l + p_j i_l^* i_j)$ for $l \ne j$ is the complex variable. In these variants boundary conditions may be for $F^k(p;\zeta)$ on a hyperplane $Re(p) = a$ in $\mathcal{A}_r$.

As it was seen above the appearing integrals are by multidimensional domains. For their calculations the Fubini's theorem, residues, Jordan Lemma and tables of known integrals also can be used. Generally in computational mathematics integrals are easier to calculate, than to solve partial differential equations numerically. As a rule iterations of algorithms for integrals converge faster, than iterations of numerical methods for partial differential equations.

Functions with octonion values may be used to resolve systems of partial differential equations. Using conjugations of Cayley-Dickson numbers one gets the transition between operators with coefficients either on the left or on the right of partial derivatives: $[(\partial^\alpha f(x))c_\alpha]^* = c_\alpha^*(\partial^\alpha f(x))^*$, particularly, $(\partial^\alpha f(x))^* = \partial^\alpha f^*(x)$ for $x \in \mathbf{R}^n$, $\partial^\alpha = \partial^\alpha_x$.

Using of Formulas $2(5, 6)$ gives variables $t_j = z_j$ for $z \in \mathcal{A}_r$. So one can consider a class of super-differentiable originals $f(z)$, $z \in V \subset \mathcal{A}_r$. In the class of piecewise on open subsets super-differentiable originals $f(z)$, $z \in V \subset \mathcal{A}_r$, with $t_j = z_j$ for each $j = 1, ..., n$, $n = 2^r - 1$, in the fixed z-representations we get the noncommutative transform for $f(z)\chi_V(z)$ relative to the Cayley-Dickson variable $z \in \mathcal{A}_r$. Therefore, the results given above transfer on this variant also.

Theorem 17 also opens new opportunities to investigate and solve certain types of nonlinear partial differential equations using previous results on spectral theory of functions of operators [21, 22]. For example, analytic functions $q(z)$ in Theorem 17 permit to consider nonlinear operators $q(\sigma)$, where $\sigma f(z) := \sum_{j=0}^{2^r-1}(\partial f(z)/\partial z_j)i_j$. It is planned to study in the next paper.

Partial differential equations with periodic g and f with vector period corresponding to Q^n may be considered also. Certainly others classes of smoothness, for example, Sobolev's or generalized functions can also be considered. It is planned in a next paper to consider this and also problems with boundary conditions as well as with non-constant coefficients in more details.

The technique described above permits to consider partial differential equations of different types and write their solutions in integral forms. If appearing integrals can be calculated in elementary or special of generalized functions, then this gives the explicit formulas in terms of known functions. In conjunction with the line integration over the Cayley-Dickson algebras it permits to solve some types of non linear partial differential equations. The multiparameter Laplace transform over the Cayley-Dickson algebras takes into account the boundary conditions. It naturally means the treatment of systems of partial differential equations due to the multidimensionality of the Cayley-Dickson algebras.

References

[1] Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., Neubrander F. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Birkhäuser, Basel, 2001.

[2] Baez J.C. The octonions // *Bull. Amer. Mathem. Soc.*, 39: 2, 2002, pp.145-205.

[3] Berg L. Einfürung in die Operatorenrechnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1965.

[4] Emch G. Méchanique quantique quaternionienne et Relativitè restreinte // *Helv. Phys. Acta*, 36, 1963, pp.739-788.

[5] Gelfand I.M., Shilov G.E. Generalized functions and operations with them. Fiz.-Mat. Lit., Moscow, 1958.

[6] Graf U. Applied Laplace transform for scientists and engineers. Birkh äuser, Basel, 2004.

[7] Gürsey F., Tze C.-H. On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics. World Scientific Publ. Co., Singapore, 1996.

[8] Hamilton W.R. Selected works. Optics. Dynamics. Quaternions. Nauka, Moscow, 1994.

[9] Kantor I.L., Solodovnikov A.S. Hypercomplex numbers. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[10] Kamynin L.I. Course of mathematical analysis. Moscow State Univ. Press, Moscow, 1993.

[11] Kurosh A.G. Lectures on general algebra. Nauka, Moscow, 1973.

[12] Lavretjev M.A., Shabat B.V. Methods of functions of the complex variable. Nauka, Moscow, 1987.

[13] Lawson H.B. Michelson M.-L. Spin geometry. Princ. Univ. Press, Princeton, 1989.

[14] Leray J. Un prologement de la transformation de Laplace qui transforme la solution unitaire d'un opérateur hyperbolique en sa solution élèmentaire // *Bull. de la Société mathém. de France*, 90, 1962, pp.39-156.

[15] Ludkovsky S.V. Functions of several Cayley-Dickson variables and manifolds over them // *J. Mathem. Sci.*, 141: 3, 2007, pp.1299-1330 (Sovrem. Mathem. i ee Pril., 28, 2005; previous variant: Los Alamos Nat. Lab. math.CV/0302011).

[16] Ludkovsky S.V. Differentiable functions of Cayley-Dickson numbers and line integration // *J. Mathem. Sciences*, 141: 3, pp.1231-1298 (2007) (Sovrem. Mathem. i ee Pril., 28, 2005; previous version: Los Alam. Nat. Lab. math.NT/0406048; math.CV/0406306; math.CV/0405471).

[17] Lüdkovsky S.V., F. van Oystaeyen. Differentiable functions of quaternion variables // *Bull. Sci. Math.*, 127, 2003, pp. 755-796.

[18] Ludkovsky S.V. The two-sided Laplace transformation over the Cayley-Dickson algebras and its applications // *J. of Mathem. Sciences*, 151:5, 2008, pp.3372-3430 (earlier version: Los Alamos Nat. Lab. math.CV/0612755).

[19] Ludkovsky S.V. Differential equations over octonions. Los Alamos Nat. Lab. math/1003.2620, 50 pages.

[20] Ludkovsky S.V. Feynman integration over octonions with application to quantum mechanics // *Mathematical Methods in the Appl. Sciences*, 33: 9, 2010, pp.1148-1173.

[21] Ludkovsky S.V., Sproessig W. Ordered representations of normal and super-differential operators in quaternion and octonion Hilbert spaces // *Adv. Appl. Clifford Alg.*, 20: 2, 2010, pp.321-342.

[22] Ludkovsky S.V. Algebras of operators in Banach spaces over the quaternion skew field and the octonion algebra // *J. Mathem. Sci.*, 144: 4, 2008, pp.4301-4366.

[23] B. van der Pol, Bremmer H. Operational calculus based on the two-sided Laplace integral. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1964.

[24] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and series. Nauka, Moscow, 1981.

[25] Rothe H. Systeme Geometrischer Analyse. In: Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Band 3. Geometrie, 1277-1423. Teubner, Leipzig, 1914-1931.

[26] Rubinstein I., Rubinstein L. Partial differential equations in classical mathematical Physics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[27] Solovjev M.A. A structure of a space of non-abelian gauge fields // *Proceed. Lebedev Phys. Inst.*, 210, 1993, pp.112-155.

[28] Spanier E.H. Algebraic topology. New York, Academic Press, 1966.

[29] Vladimirov V.S. Equations of Mathematical Physics. Nauka, Moscow, 1971.

[30] Zorich V.A. Mathematical Analysis. V. 2. Nauka, Moscow, 1984.

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА НАД АЛГЕБРАМИ КЭЛИ-ДИКСОНА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

С.В. Людковский

Московский государственный технический университет МИРЭА, Москва, Россия
sludkowski@mail.ru

Изучаются многомерные некоммутативные преобразования Лапласа над алгебрами Кэли-Диксона. Доказываются теоремы о прямом и обратном преобразованиях Лапласа над алгебрами Кэли-Диксона. Исследуются применения к дифференциальным уравнениям с частными производными, включая эллиптические, параболические и гиперболические. Более того, рассматриваются дифференциальные уравнения с частными производными более высоких порядков с вещественными и комплексными коэффициентами, которые могут быть переменными, с граничными условиями или без них.

Ключевые слова: многомерное некоммутативное преобразование Лапласа, алгебры Кэли-Диксона, дифференциальные уравнения с частными производными, граничные условия

Бенуа Мандельброт. Фото с личной страницы Мандельброта, размещенной на сайте Йельского университета (http://users.math.yale.edu/mandelbrot/).

БЕНУА МАНДЕЛЬБРОТ: ПУТЬ К ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПРИРОДЫ

В.А. Панчелюга

НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия
Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, Пущино, Россия

panvic333@yahoo.com

14 октября 2010 г. в Кембридже, штат Массачусетс, в возрасте восьмидесяти пяти лет ушел из жизни создатель фрактальной геометрии — Бенуа Мандельброт. Нижеследующая статья — дань памяти выдающемуся ученому.

Ключевые слова: фрактал, фрактальная геометрия, фрактальная размерность, Бенуа Мандельброт.

Введение

Если составить краткий список основных научных достижений прошедшего двадцатого века, то в этом списке обязательно встретятся слова «фрактал», «фрактальная геометрия», «фрактальная размерность». Фракталы, как способ устройства природных систем, реализующий принцип подобия части и целого, существовали всегда. Но предметом научной рефлексии они стали только во второй половине прошедшего века, благодаря деятельности Бенуа Мандельброта, который и ввел этот термин в научный оборот.

Дерево, облако, береговая линия — привычные объекты ежедневного опыта на протяжении всей человеческой истории, между которыми, казалось бы, существует мало общего. Но после Мандельброта можно сказать, что все это — примеры фракталов и что все они «сконструированы» по одному принципу: подобия части и целого.

Сам этот принцип известен с древнейших времен. Он встречается уже в религиозно-философских учениях древности. Яркий пример — «Аватамсака-сутра»: «В небесах Индры есть, говорят, нить жемчуга, подобранная так, что если глянешь в одну жемчужину, то увидишь все остальные, отраженные в ней. И точно так же каждая вещь в мире не есть просто она сама, а заключает в себе все другие вещи и на самом деле есть все остальное». Не обходят его своим вниманием и более поздние философские системы. Так, Готфрид Вильгельм фон Лейбниц в своей «Монадологии» полагает, что все знание о целокупной Вселенной можно вывести из информации, относящейся к одной-единственной монаде [1]. Краеугольным камнем современной голографической парадигмы, созданной трудами Дэвида Бома и Карла Прибрама [2-4] также является принцип подобия части и целого. Свое название голографическая парадигма получила из известного свойства голограммы: любая ее часть содержит информацию об изображении, которое записано на голографической пластинке в целом.

Мандельброт, вспоминая прослушанную им в Принстоне лекцию Германа Вейля (которая в дальнейшем легла в основу его знаменитой книги «Симметрия» [5]) отмечает, что древние, до-классические греки использовали идею симметрии намного более богатую, чем современное узкое понятие зеркального отражения. Греки, в действительности считали, что симметрия выражает некий вид связи или гармонию между частью и целым [6].

Подобие части и целого или самоподобие (в случае если речь идет более чем об одном масштабном факторе — самоафинность) связано с инвариантностью относительно изменений масштаба и является одной из фундаментальных симметрий. В отличие привычных трансляционной, поворотной и зеркальной симметрий, связанных с инвариантностью при

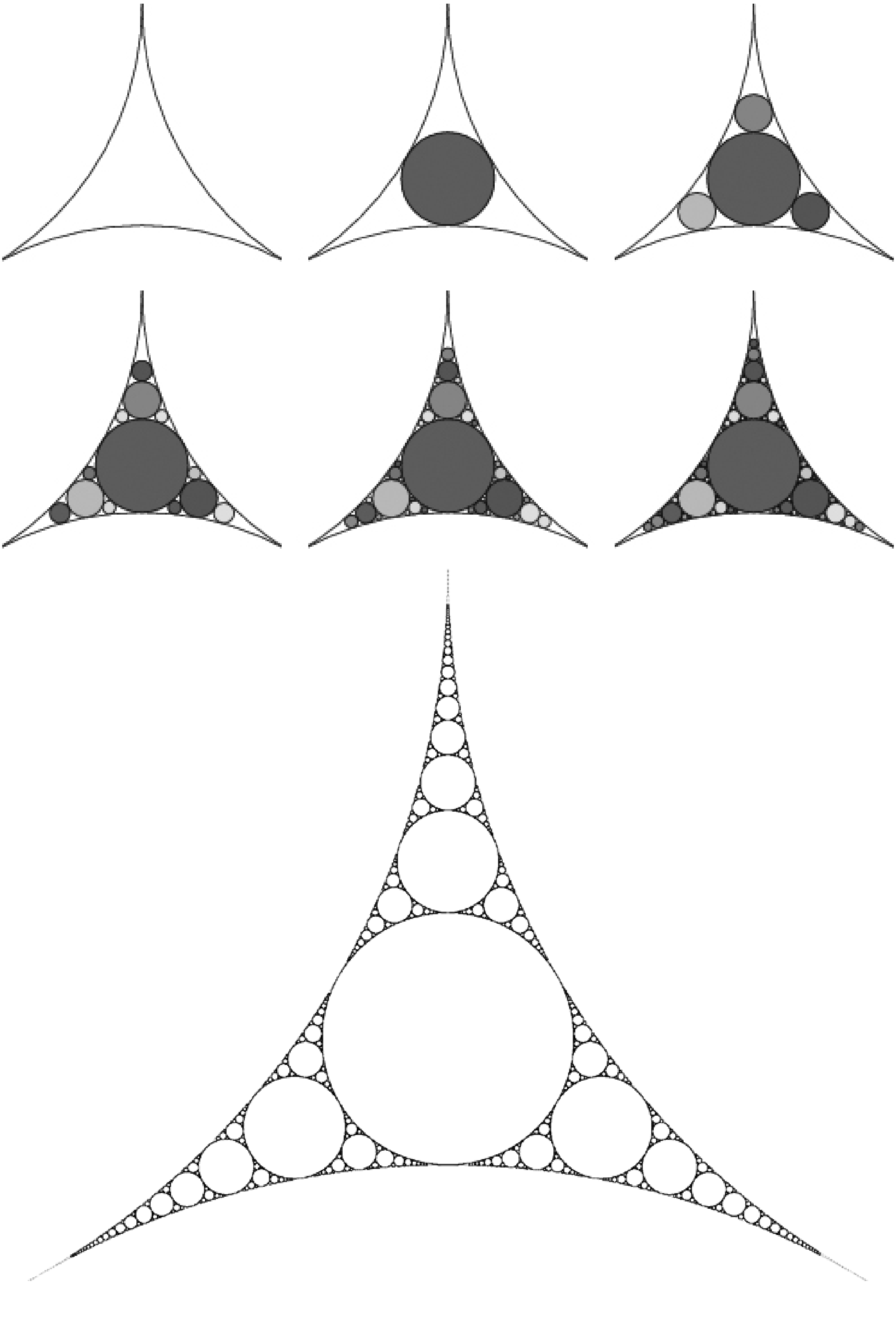


Рис. 1: Ковер Аполлония Пергского

аддитивных сдвигах самоподобие связано с инвариантностью при мультипликативных изменениях масштаба. Данный тип симметрии необычайно широко распространен в природе — от распределения атомов в веществе — до распределения галактик во Вселенной. Самоподобие — единственная из всех симметрий, порождающая хаос — состояние полного беспорядка и отсутствия какой-либо симметрии [7].

Изображения построенные с использованием принципа подобия части и целого также известны с древнейших времен. Как пример можно вспомнить геометрическое построение, известное, как ковер Аполлония Пергского, рис. 1, которое относят к 300 г. до н.э., произведения Альбрехта Дюрера (1520 г.), рис. 2, некоторые картины Эшера. Многократно повторяющийся самоподобный мотив в этих и многих других случаях был лишь способом построения эстетически привлекательного изображения. Сейчас мы бы назвали подобные изображения фракталами. Но до Мандельброта никто, глядя на эти изображения не мог предположить, что за ними скрывается интересная математическая задача или что они могут рассматриваться, как модели реальности.

Подобие части и целого приводит к тому, что некоторый мотив повторяется снова и снова на разных масштабах. В качестве примера можно привести кривую, рис. 3, названную по имени ее создателя Хельге фон Коха (Helge von Koch) кривой Коха и состоящую из треугольников на сторонах которых построены треугольники, на сторонах которых, в свою очередь, построены меньшие треугольники и т.д. до бесконечности. На рис. 3 показаны первые несколько шагов итерационной процедуры, используемой для построения кривой. Легко видеть, что с каждым последующим шагом она становится все более и более изломанной на все меньших и меньших масштабах. В пределе мы получим парадоксальный с точки зрения обычной геометрии объект — бесконечно изломанную кривую: всюду непрерывную, но ни в одной точке не дифференцируемую, которая к тому же обладает бесконечной длиной [8].

В начале XX-го века подобные объекты начали привлекать внимание математиков: множество Кантора, кривые Пеано, функции Вейерштрасса. Но, как это часто бывает, их появление в математической литературе было встречено с неприязнью. Шарль Эрмит назвал их «патологическими монстрами», выражая общее мнение, что они представляют интерес только для исследователей, злоупотребляющих математическими причудами, а не для настоящих ученых [8]. С подобными объектами связан кризис в математике 1875-1925 г.г., выход из которого наметился после введения понятия дробной размерности Хаусдорфом в 1919 году [9].

Свойство изломанности фрактальных кривых послужило основой для создания родового имени подобных объектов. Термин родился в 1975 г., когда Мандельброт готовил первое издание Les objects fractals [10]. Как отмечается в книге Глейка [11][1], созвучие латинского прилагательного fractus, производного от глагола frangere — «ломать», с однокоренными английскими словами fracture и fraction показались Мандельброту подходящими кандидатами на роль искомого термина. Так появилось слово «фрактал».

Первое определение фрактала основывалось на дробной размерности Хаусдорфа. Фракталом называлось множество размерность Хаусдорфа которого строго больше его топологической размерности и, как правило, выражается нецелым числом [14]. Так, например, фрактальные кривые, вроде приведенной на рис. 1 кривой Коха, могут рассматриваться как нечто среднее между традиционной кривой и плоскостью. Топологическая размерность кривой — 1, плоскости — 2. Размерность фрактальной кривой на плоскости лежит между 1 и 2. Так, размерность кривой Коха равна 1.2618, а размерность береговой

[1] Существует также русский перевод книги Глейка [12]. К сожалению, он выполнен крайне непрофессионально и содержит множество ошибок. Анализ некоторых из этих ошибок см. в [13]. Поэтому, пользоваться русским переводом [12] лучше с оглядкой на оригинальный текст [11].

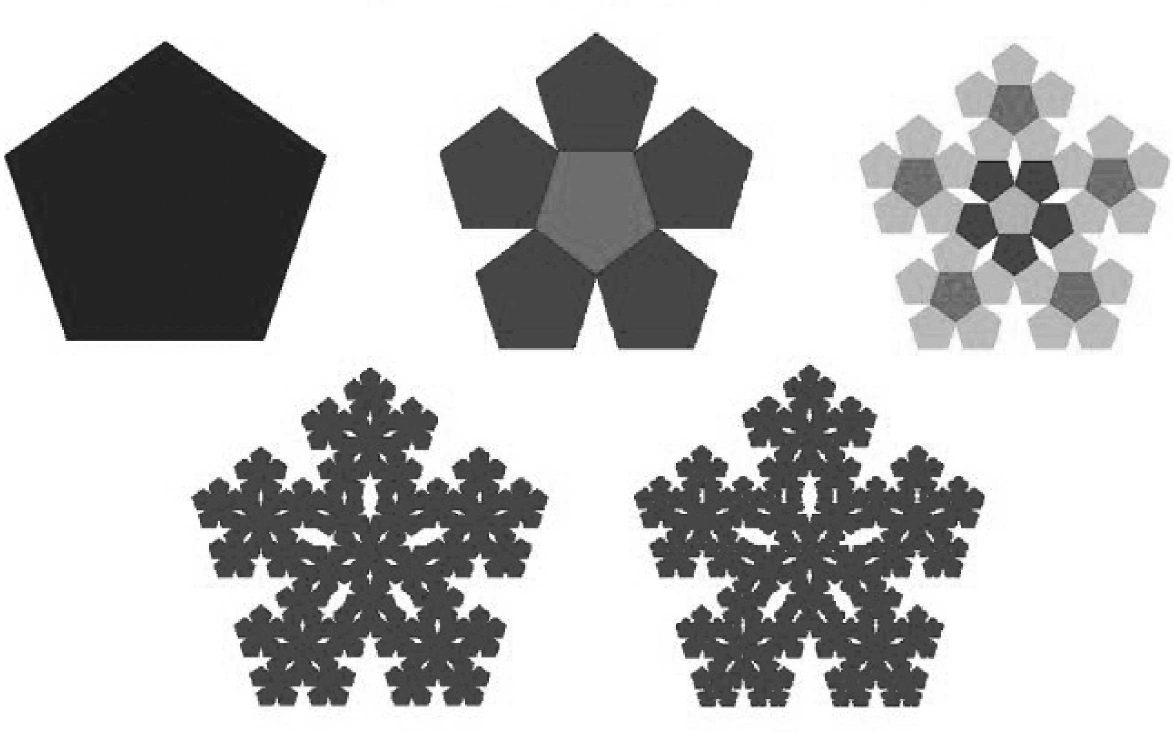


Рис. 2: Пентагон Альбрехта Дюрера.

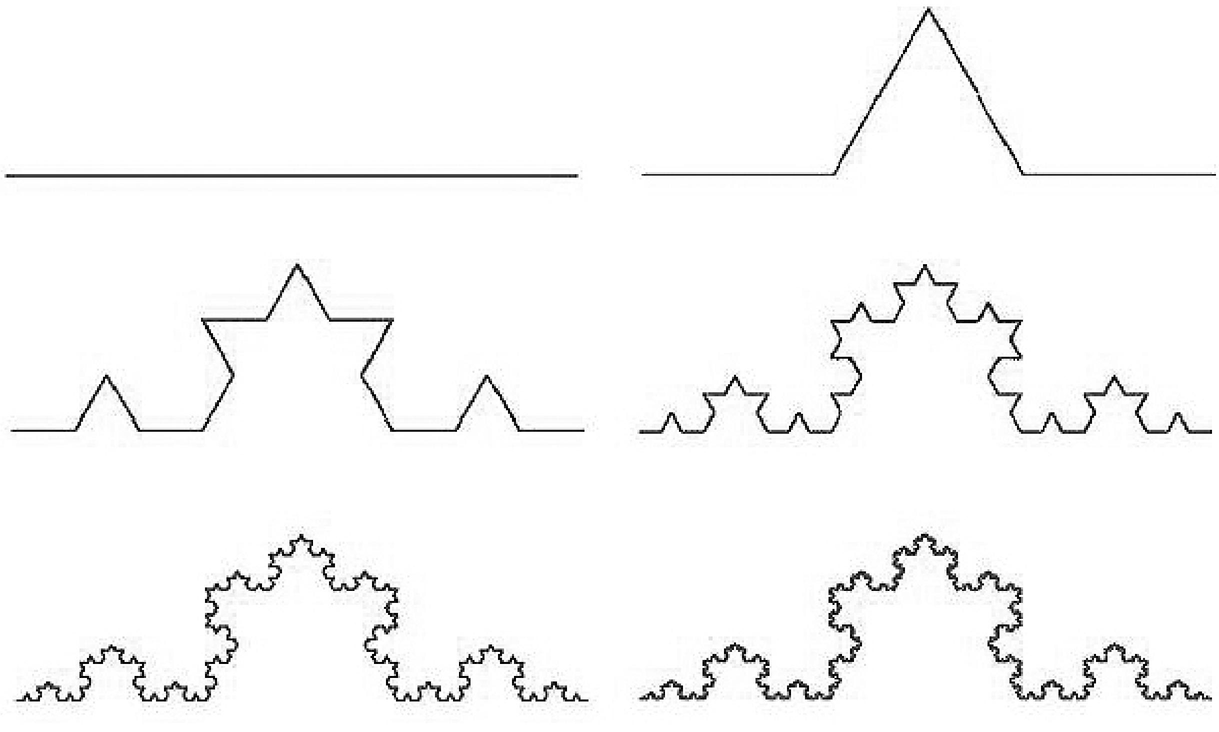


Рис. 3: Кривая Коха. Первые пять итераций.

линии может быть 1.213. В дальнейшем, с осознанием того, что размерность фрактала может выражаться также целым числом и что принятое определение не учитывает некоторые важные свойства фракталов, Мандельброт от него отказался. Размерность по Хаусдорфу позволяла различать категории «гладкий» и «хаотичный», но при этом оказывалась нечувствительной, не позволяла разделять категории «нерегулярный, но самоподобный» — хаос поддающийся изучению в рамках фрактальной геометрии и «геометрически хаотичный» — т.е. хаос полностью беспорядочный [15, 33]. Согласно более расширенному определению, фракталом называется такой объект, для которого существует свойство масштабной инвариантности — подобия части и целого [15, 16]. При этом имеется в виду именно подобие, а не точное соответствие части и целого. Такое определение фрактала значительно расширяет область его применимости, особенно для физических систем, которые, в отличие от математических построений, практически никогда не дают точного соответствия целого и его частей. Необходимо отметить, что самоподобие и дробная размерность связаны. Эта связь состоит в том, что с помощью самоподобия можно сконструировать множество дробной размерности самым простым способом [8].

Сказанное объясняет, почему было необходимо разрабатывать новую геометрию природы. До Мандельброта все кривые и поверхности от тех, которые демонстрировали детям в школе до тех, что использовали ученые в своих моделях, были гладкими. Если часть такой кривой или поверхности постепенно увеличивать, то она становится все более и более похожей на прямую линию. Такого рода кривые и основанная на них геометрия бесполезны, если стоит задача описать какой-либо природный объект, который, как правило, существует на различных масштабах. Если мы будем последовательно увеличивать часть такого объекта, то никогда не придем к прямой линии. Мы увидим изломанные линии, состоящие, в свою очередь, из изломанных линий, которые состоят из изломанных линий и т.д. вплоть до молекулярного уровня. Т.е. традиционные гладкие кривые и поверхности не могут дать адекватное описание таких природных объектов.

Только начиная с 1975 г. или около того, было признано, что фрактальные кривые могут рассматриваться, как вполне естественные и удобные модели природных процессов. И это признание пришло благодаря Б. Мандельброту, который к этому времени объединил подобного рода объекты под единым термином — фрактал. До этого времени фракталы – еще даже не названные им так — были его личной манией. Сегодня они являются стандартным инструментом во множестве областей науки. Как «отец фракталов» Мандельброт продемонстрировал их релевантность реальному миру, в то время как другие видели в них или бесполезную игрушку или патологических монстров.

Сейчас, наверное, проще сказать, где фракталы не используются, чем перечислить области их применения. Вот только некоторые из таких областей: распределение галактик во Вселенной, паттерны ошибок в линиях связи, поведение жидких кристаллов, рассеяние радиолокационного пучка горной грядой [6]. Фрактальные модели применяют в медицине, в геологии и почвоведении, в материаловедении при изучении процессов разрушения изделий, в ядерной физике для изучения элементарных частиц, процессов на Солнце, для анализа колебаний рыночных цен в экономике, сердечного ритма в кардиологии, погоды в метеорологии, в химии, искусствоведении…— перечень можно продолжать бесконечно [15]. Сегодня можно с уверенностью утверждать, что фрактальная геометрия вошла в серьезную инженерную фазу. Коммерческие приложения возникли в областях сжатия изображений и видео, для улучшения трафика в сети Интернет, в компьютерной графике и образовании [17] и даже для проектирования кораблей более устойчивых к опрокидыванию [18].

Величайшая заслуга Мандельброта состоит в объединении этого разрозненного многообразия качественно различных задач в единый подход, концентрированный в терминах «фрактал», «фрактальная размерность», «фрактальная геометрия».

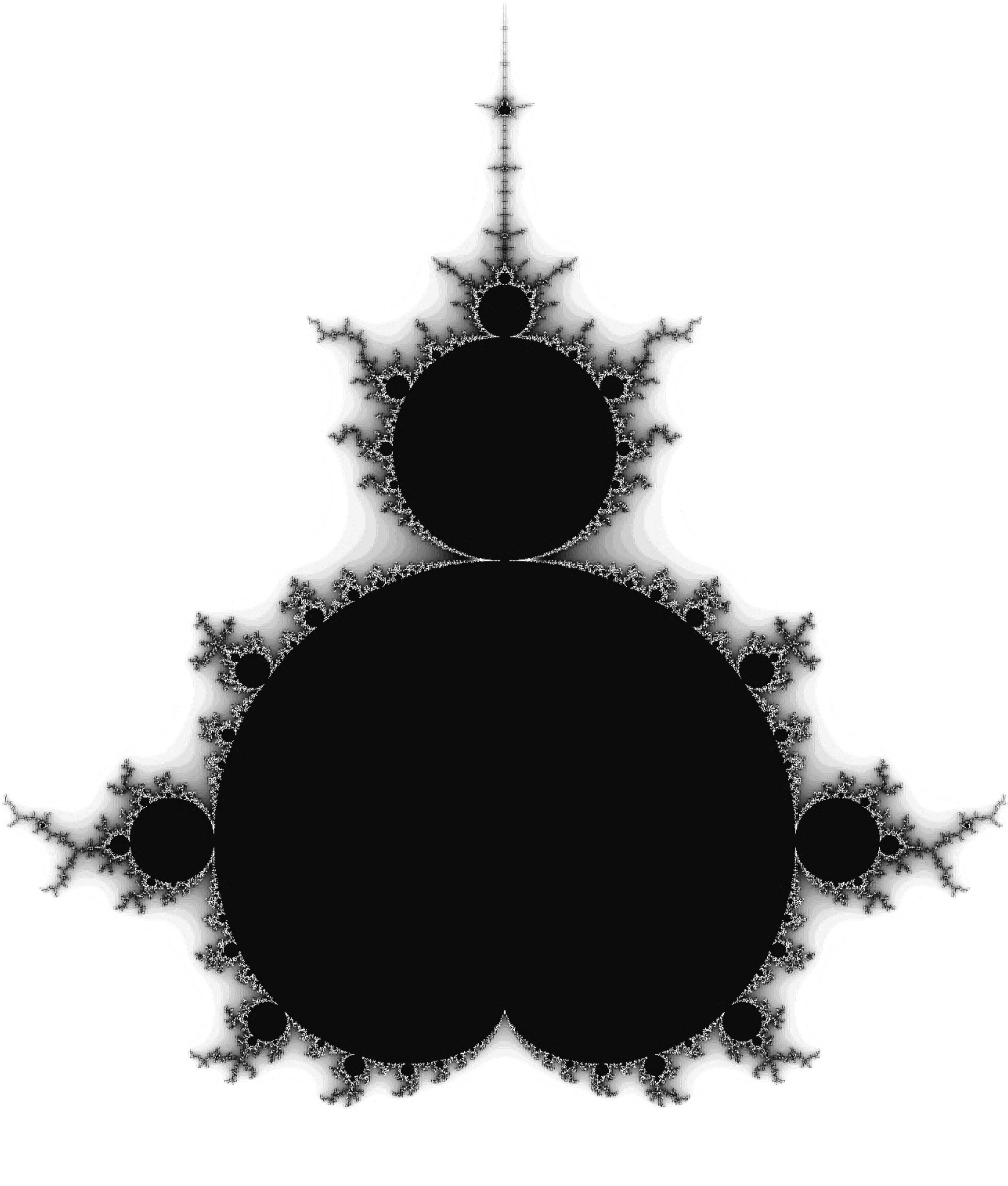


Рис. 4: Множество Мандельброта.

Биография

Бенуа Мандельброт родился 20 ноября 1924 г. в Варшаве. Его отец — Карл Мандельброт был галантерейщиком, родом из варшавских евреев, мать — Белла Лурие была врачом, родом из Литвы [19, 20]. Они поженились до первой мировой войны.

После того, как брат Мандельброта умер во время эпидемии, родители, опасаясь за здоровье и жизнь Мандельброта, не разрешили ему ходить в школу.

Дядя, который, по словам Мандельброта [20], был очень образованный человек, стал его домашним наставником. Учил он его очень своеобразно — никогда не заставлял запоминать ни таблицу умножения, ни алфавит. Мандельброт показал раннюю любовь к геометрии и большие успехи в шахматах. Позже он рассказывал, что воспринимал эту игру не логически, а скорее геометрически, как пространственную взаимосвязь участков. Географические карты были второй страстью Мандельброта. Его отец любил их коллекционировать, и дом был всегда ими наполнен [18]. Как отмечается в [6] его раннее математическое образование было нерегулярным и во многом основанным на старомодной классике девятнадцатого и начала двадцатого столетий.

Экономический кризис в Польше и ухудшение отношения к евреям привели к тому, что в 1936 году вся семья эмигрировала в Францию и поселилась в Париже. Здесь Мандельброт попал под влияние своего дяди Шолема Мандельбройта, эмигрировавшего в Францию в возрасте двадцати лет по причинам интеллектуального характера [21]. Дядя к тому времени был известным парижским математиком, профессором математики и механики в Коллеж де Франс, а также членом группы математиков, известной под общим псевдонимом «Николя Бурбаки» [19].

Рост нацизма в Германии в 1939 г. принудил семью Мандельброта оставить Париж и переехать в г. Тюль — бедную центральную часть Франции. [15] Здесь он пошел в школу и здесь же проявилось его великолепное пространственное воображение, позволявшее даже алгебраические задачи решать геометрическим путем [18].

В конце второй мировой войны он вернулся в Париж, где в лицее Людовика Великого готовился к вступительным экзаменам в университет [15]. Экзамены он сдал блестяще, поступив в Ecole Normale откуда затем перешел Ecole Polytechnique. Послее ее окончания он поступил в Калифорнийский технологический институт в Пасадене. Изучал аэронавтику, заинтересовался проблемой турбулентности. Там же получил степень магистра в аэронавтике [18].

Докторскую диссертацию, в которой выводились законы статистической структуры языка, Мандельброт защитил в Парижском университете в 1952 г. В основе докторской работы лежал закон Ципфа [22], утверждающий, что в любом достаточно объемном содержательном тексте частоты употребления слов описываются степенным законом. Мандельброт дал математическое обоснование того, что закон Ципфа может быть получен из принципа наименьших усилий (когда в процессе коммуникации обе стороны затрачивают минимальные усилия для передачи речевой информации, минимизируя таким образом среднюю стоимость слова) и сформулировал обобщенный закон Ципфа-Мандельброта. Улучшенный вариант формулы Ципфа позволял количественно оценить и ранжировать богатство словарного запаса как отдельного человека так и различных языков [16]. Но, возможно, самым главным результатом докторской работы Мандельброта было осознание важности степенных законов.

После получения степени доктора, он по приглашению Джона фон Неймана, вернулся в США в Институт высших исследований в Принстоне (Institute for Advanced Study in Princeton), штат Нью Джерси. Здесь он размышляет над идеей размерности Хаусдорфа-Безиковича и над явлениями, размерность которых лежит вне одномерного пространства, но, в то же время, она меньше чем два измерения. В Принстоне Мандельброт проработал

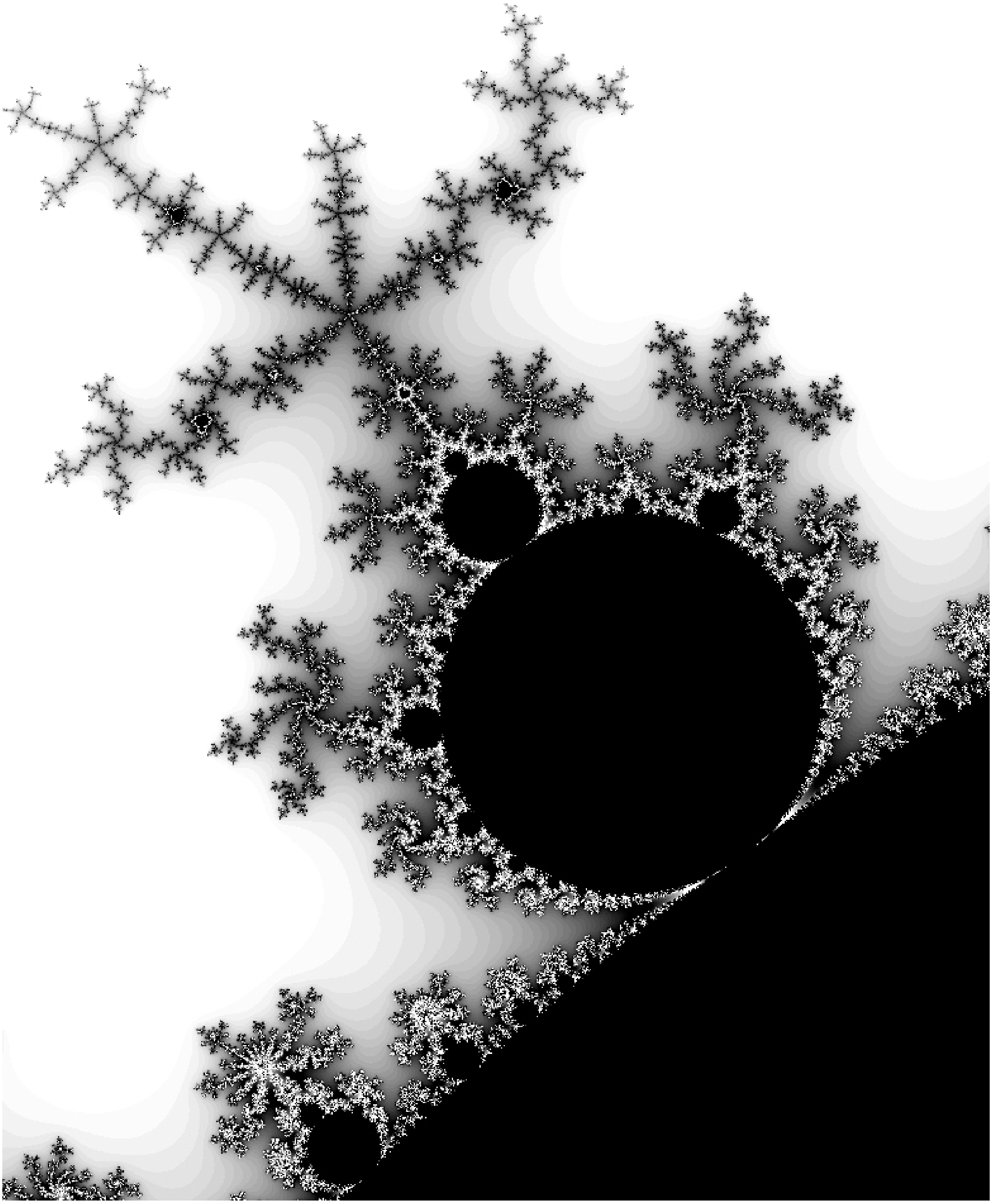


Рис. 5: Множество Мандельброта. Фрагмент границы.

два года.

В 1955 году он вернулся во Францию, женился на Альетт Каган (Aliette Kagan) и переехал в Женеву [19]. После этого некоторое время работал профессором в Университете Лилля, а затем в Национальном центре научных исследований (Centre National de la Recherche Scientifique) в Париже.

Несмотря на то, что его академическое будущее выглядело безоблачным, он чувствовал себя некомфортно в научной атмосфере тогдашней Франции и, поэтому, в 1958 г. он принял приглашение корпорации IBM поработать в Исследовательском центре в Йорктаун-Хейтс, штат Нью-Йорк. Этот шаг привел его к окончательному переезду в США.

В IBM Мандельброт работал над исключением случайных ошибок возникающих в телефонных линиях связи, используемых для передачи компьютерной информации. Такие линии характерны тем, что информация в них передается в форме импульсов (битов) фиксированной амплитуды. Если фоновые флуктуации остаются ниже определенной величины они не возмущают передаваемое сообщение. Если же они превышают этот порог, некоторые биты могут быть изменены с 0 на 1 или с 1 на 0. Возникает ошибка. Эти ошибки, в то время, воспринимались как совершенно случайные, вызванные внешними, неконтролируемыми условиями. Обычно говорилось о «парнях с отвертками» работающих где-то на линии и создающих тем самым неконтролируемые помехи, служащие причиной возникновения ошибок в передаваемых сообщениях. Но, как показал Мандельброт, помехи, в действительности, не были полностью случайными — они группировались в самоподобные кластеры [23]. Причем, степень кластеризации оставалась постоянной, если ее изобразить графически в масштабе месяца, недели или дня [18]. Т.е. ошибки можно было рассматривать как случайное явление с определенным типом внутреннего самоподобия. Их можно было представить, как канторову пыль элементы которой (ошибочные биты) перемешаны. Мандельброт исследовал математические процессы, которые позволяют создать случайную канторову пыль, которая прекрасно моделировала фрактальную структуру ошибок, возникающих в компьютерных линиях связи.

Ошибки, в результате, оказались неустранимыми, т.к. были присущи внутренней природе процесса. Понимание этого позволило отказаться от тактики увеличения отношения сигнал/шум путем увеличения мощности передаваемого в линию сигнала и заняться алгоритмами кодирования, повышающими надежность передачи информации. Рассмотренный выше пример позволяет нам отметить важную черту научного метода Мандельброта. Создание математической модели правильно отражающей особенности, структуру изучаемых объектов или явлений природных или искусственных тождественно определенной степени понимания этих явлений. Также необходимо отметить, что почти все модели, которые он использовал, имели вероятностную природу. Мандельброт не применял понятие «фрактал» к детерминированным объектам вплоть до 1979-1980 г.г.

Работая в IBM, Мандельброт ушел далеко в сторону от чисто прикладных проблем компании. Он работал в области лингвистики, теории игр, экономики, аэронавтики, географии, физиологии, астрономии, физики. Ему нравилось переключаться с одной темы на другую, изучать различные направления. Этому способствовала академическая свобода, предоставленная IBM сотрудникам лаборатории в которой работал Мандельброт. Вот как он описывает свою работу в IBM: «Шел 1961 год. Я уже несколько лет работал в главной лаборатории IBM, расположенной недалеко от Манхэттена, если двигаться вверх по течению Гудзона. Это было удивительное место для ученого. Компания как раз занималась техническим перевооружением, чтобы сменить свой статус производителя механических табулирующих счетных машин на пионера электронно-вычислительных машин, или компьютеров. Для решения этой задачи создали большую лабораторию и набрали штат сотрудников; некоторые из них были блестящими чудаками-интеллектуалами, и им позволили заниматься любыми, самыми невероятными, темами на собственное усмотрение.

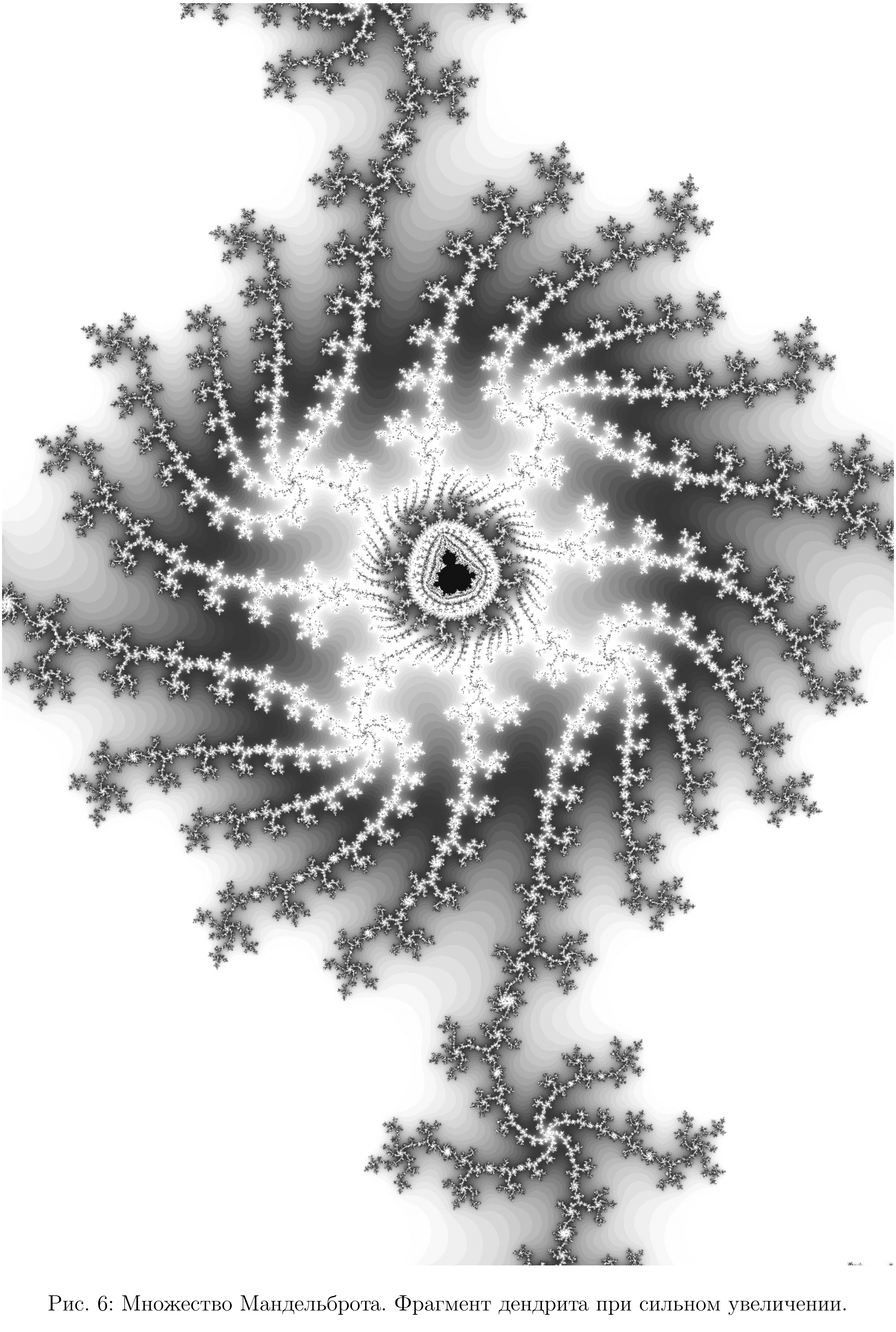


Рис. 6: Множество Мандельброта. Фрагмент дендрита при сильном увеличении.

Отдельные темы были явно связаны с компьютерами, но многие — нет» [16, с. 186]. Такой стиль работы вполне себя оправдал. Из промышленной исследовательской лаборатории IBM Research, в которой работал Мандельброт, пять человек стали Нобелевскими лауреатами. Говоря о работе в IBM Research, Мандельброт отмечает, что особого упоминания достоин Ральф Э. Гомори — руководитель Мандельброта на протяжении большей части его карьеры в IBM. [16]

Кроме задачи исследования структуры ошибок в компьютерных линиях связи, в составе IBM Research Мандельброт занимался также прикладным компьютерным анализом. Одна из его первых исследовательских задач в этой области — применение компьютеров в экономике.

«Экспериментальной основой» этих исследований был ряд ежедневных цен на хлопок за более чем столетний период. Этот ряд начал формировать «предшественник» Мандельброта по исследованию цен на хлопок профессор Хендрик Хаутеккер из Гарварда. Хаутеккер, используя стандартные инструменты статистического анализа и современные ему эконометрические методы, пытался найти хоть какой-то порядок, закономерности в ходе изменения хлопковых цен. Вот его высказывание, подытоживающее эту работу, которое приводит Мандельброт в [16]: «С меня хватит ... Я сделал все возможное, чтобы найти смысл в этих хлопковых ценах. Пытаюсь измерить неустойчивость, а она все время меняется. Все меняется. Нет ничего постоянного. Страшная путаница». [16, с. 189] В действительности цены изменялись не непрерывно, наблюдались большие скачки цен, чем следовало из стандартной экономической модели, вследствие чего их распределение имело «толстые хвосты» и не подчинялось распределению Гаусса, как того требовала модель. Также Мандельбротом отмечалось самоподобие графиков цен: изображения, построенные для различных масштабов времени выглядят подобными.

Мандельброт «выпросил для себя в компьютерном центре IBM программиста» [16, с. 189] и проанализировал данный ряд так же, как он анализировал до этого данные о личных доходах: подсчитывая число ценовых скачков различной величины. Результаты данной работы были представлены в статье 1963 года «Колебания определенных спекулятивных цен» [24], которая на то время стала одной из самых цитируемых в экономической литературе.

Чтобы прийти к адекватному пониманию полученного ряда хлопковых цен потребовалось свести воедино три направления: степенные (экспоненциальные) законы, закон распределения личных доходов и математику устойчивых распределений. Данные направления явились ключом, позволившим построить модель, адекватно описывающую поведение реальных финансовых временных рядов.

Как уже упоминалось впервые степенные законы (закон Ципфа) появились в докторской работе Мандельброта.

Закон распределения личных доходов был впервые получен Вильфредо Парето (1848-1923) когда он разбил людей на группы по величине личного дохода и подсчитал численность каждой группы. Оказалось, что полученная зависимость линейна в двойном логарифмическом масштабе с наклоном равным (по мнению Парето) $3/2$. Как выяснилось в дальнейшем, величина наклона может отличаться от $3/2$ и зависит от того, какой конкретный случай рассматривается. Необходимо отметить, что закон Парето также относится к степенным законам.

Понятие устойчивых распределений впервые появились в работах Поля Леви, когда вскоре после Первой мировой войны его попросили прочесть курс лекций о точности прицельной артиллерийской стрельбы. Это подтолкнуло его к выполнению самобытной работы по исследованию «устойчивых» вероятностных распределений, т.е. таких распределений, форма которых остается неизменной независимо от того, какие действия мы выполняем над объектом описания. Леви показал, что существует семейство устойчивых

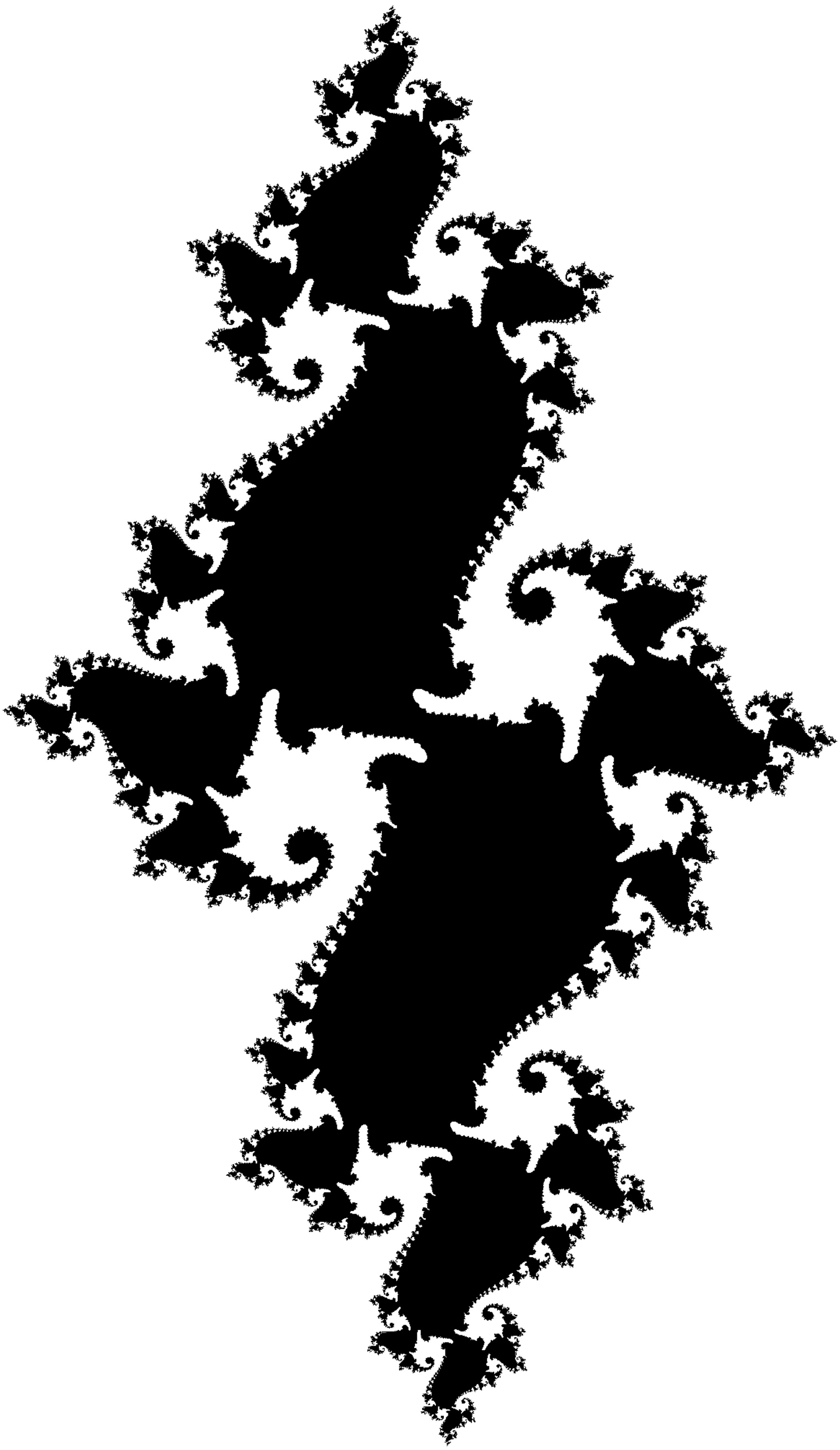


Рис. 7: Множество Жюлиа для значения комплексного параметра $c = -0.7454 + 0.1130i$.

распределений, члены которого отличаются друг от друга относительной важностью наибольших отдельных измерений. Такие распределения Мандельброт назвал L-устойчивыми в честь Поля Леви. [16]

Эти распределения были использованы Мандельбротом в 1963 году когда пришло понимание того, что цены не изменяются непрерывно и что для описания их динамики лучше подходит не модель Гаусса, а более общее понятие L-устойчивых распределений, обладающих бесконечной дисперсией, вследствие чего скачки цен, подобно ошибкам при передаче данных, склонны группироваться в кластеры. Также было показано существование степенной зависимости между размером скачков и частотой их появления, а также, что в формировании цены существенную роль играет предыстория. [15] Вот образное описание внутренней динамики ценового ряда, данное Мандельбротом: «Крупные изменения часто следуют быстро одно за другим, подобно артиллерийским залпам; затем наступает очередь длинных периодов мелких изменений, вроде треска игрушечных пистолетов. Но и здесь есть самоповторение в масштабе: если рассмотреть в деталях любую группу крупных изменений, то можно увидеть, что она состоит из меньших групп. При переходе к еще более мелким деталям мы обнаружим новые, еще меньшие группы. А это уже фрактальная структура». [16, с. 245]

В дальнейшем развитии экономического подхода Мандельброта можно отметить модель ценовых пузырей (1966 г.), концепцию дополнительного торгового времени (1967 г.) и, наконец, мультифрактальную модель (1972 г.), включившую и обобщивную предыдущие концепции и названную Мандельбротом «Мультифрактальной моделью доходности активов». [16]

Построение масштабных моделей рынков было тем горнилом, в котором ковались многие базовые понятия фрактальной геометрии. Через сорок лет после начала своей экономической эпопеи Мандельброт скажет: «На пути к моей основной работе, разработке фрактальной геометрии, экономические исследования и финансовые модели стали ключевыми вехами. ... Но я еще не закончил свое дело; и я до сих пор не верю, что нам когда-нибудь удастся полностью понять такую сложную систему, как глобальная денежная машина. ... Но я верю, что с каждой попыткой мы все больше приближаемся к правильному пониманию принципов работы рынков». [16, с. 244]

Около 1968 года Мандельброт взялся за проблему Нила. И хотя этой проблемой он начал заниматься после того как вышли первые публикации по экономическим моделям, результаты данной работы в дальнейшем тоже нашли применение в экономических изысканиях Мандельброта.

Проблема Нила состояла в том, что периоды засух и наводнений, связанные с разливами Нила, чередовались крайне неравномерно и имели разную длительность. [15] Ключевой фигурой сформулировавшей эту проблему был англичанин Гарольд Эдвин Херст, который в 1906 году прибыл в Каир, предполагая пробыть там недолго, но в результате задержался на 62 года. И все эти годы были преимущественно посвящены изучению разливов Нила. От уровня воды во время разливов зависело будет год урожайным или нет. А от этого, в свою очередь, на протяжении тысячелетий зависела жизнь Египта.

С колонизацией Египта англичанами возникла идея строительства «хранилища столетия» — резервуара, в котором можно было бы накапливать воду на случай засухи. Встала задача, которую поручили Херсту, расчета необходимого объема такого хранилища. Для этого необходимо было научиться описывать уровень воды в Ниле во время разливов.

Херст проанализировал записи о поведении реки, накопленные за несколько тысяч лет, и пришел к выводу, о невозможности спрогнозировать не только момент начала или конца засухи, но даже средний уровень воды в Ниле. Уровень реки выглядел как случайный шум, наложенный на фон, также полный шума. [15]

Мандельброт разработал статистическую модель, основанную на самоподобии времен-

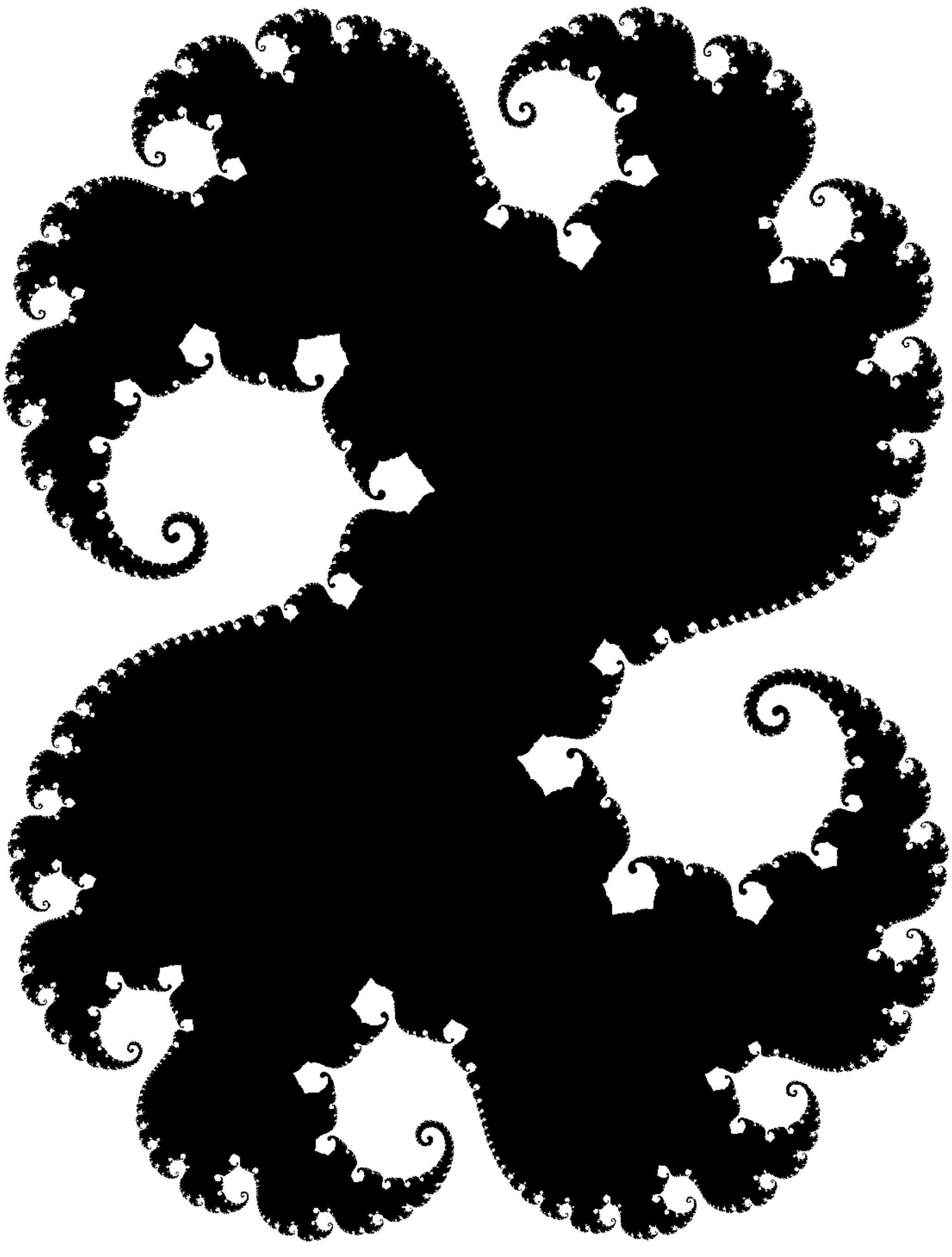


Рис. 8: Множество Жюлиа для значения комплексного параметра $c = 0.27334 - 0.00742i$.

ных рядов и включающую базовые свойства Нила и других рек. С помощью этой модели были получены графики колебаний уровня воды. Когда эти графики, вперемешку с реальными временными рядами, а также графиками, полученными на основе стандартных гидрологических моделей, были предъявлены профессиональному гидрологу Уолтеру Лэнгбейну он не смог отличить графики Мандельброта от графиков, на которые были нанесены реальные данные. [16]

Также нельзя не отметить уже ставшую классикой статью [23] «Какова длина побережья Британии?» Статья являлась продолжением исследований английского ученого Льюиса Ричарсона и демонстрировала фрактальную природу береговой линии и, как следствие, неприменимость понятия длины к такого рода объектам, а также вводила основанный на дробной размерности параметр, характеризующий степень изрезанности береговой линии. Позднее этот параметр стал рассматриваться, как фрактальная размерность.

Наверное, в большинстве случаев, когда человек слышит слово «фрактал» в его сознании возникают образы множества Мандельброта, множеств Жюлиа. Непостижимая эстетическая привлекательность этих, казалось бы, чисто математических объектов, притягивает к ним внимание как профессионалов так и людей далеких от математики.

Термин «множество Мандельброта **M**» предложил Адриен Дуади, «потому что первым изображения этого множества получил с помощью компьютера Бенуа Мандельброт, и он же первым описал некоторые его свойства». [21, с. 30] Путь, приведший Мандельброта к открытию этого множества начался с интереса к фракталам инвариантным относительно нелинейных преобразований. Первым было предельное множество группы Клейна, остающееся неизменным при всех инверсиях относительно любой из нескольких заданных на плоскости окружностей, затем Мандельброта заинтересовали работы Гастона Жюлиа и Пьера Фату [25-26], выполненные еще в 1918-1919 годы, по теории итераций рациональных отображений комплексной плоскости. [15] Впервые с этими работами Мандельброт познакомился в 1945 году получив авторские препринты от своего дяди Шолема Мандельбройта. Тогда они не произвели на него должного впечатления. Вернувшись к этим работам через 35 лет он расширил рассматриваемые преобразования с вещественной прямой на комплексную плоскость и применил компьютер для построения получаемых множеств. Так было получено множество Мандельброта. [15]

Данное множество — один из сложнейших объектов современной математики. Так, известно, что оно связно и его фрактальная размерность равна 2, но до сих пор не выяснено, является ли оно локально связным и имеет ли положительную площадь. Проблема описания множества Мандельброта остается открытой, и множество исследователей по всему миру продолжают работают над ней.

Говоря о множествах Мандельброта и Жюлиа, Мандельброт подчеркивает, что для него наиболее впечатляющим в данной работе было то, что очень простые формулы приводят к необычайно сложному результату. Он проводит сравнение с законом Ньютона, который тоже выражается очень простой формулой — всего несколько символов, — но после упорной работы позволяет объяснить движение планет вокруг Солнца и многое, многое другое. То же и с этими множествами – они могут служить архетипами для многих природных структур, когда простой и, как следствие надежный, принцип их образования приводит к необычайно сложному конечному результату. [6]

В заключение хотелось бы упомянуть классическую книгу Мандельброта «Фрактальная геометрия природы», первое издание которой вышло в 1977 году. Русский перевод этой книги запоздал на четверть века — он вышел в 2002 году. За время прошедшее с момента ее написания книга совсем не устарела и остается лучшим и основным введением в теорию фракталов и фрактальную геометрию.

Книга написана в жанре научного эссе и содержит все идеи, о которых рассказывалось выше. Выход этой книги разделил историю фрактальной геометрии на два периода. В

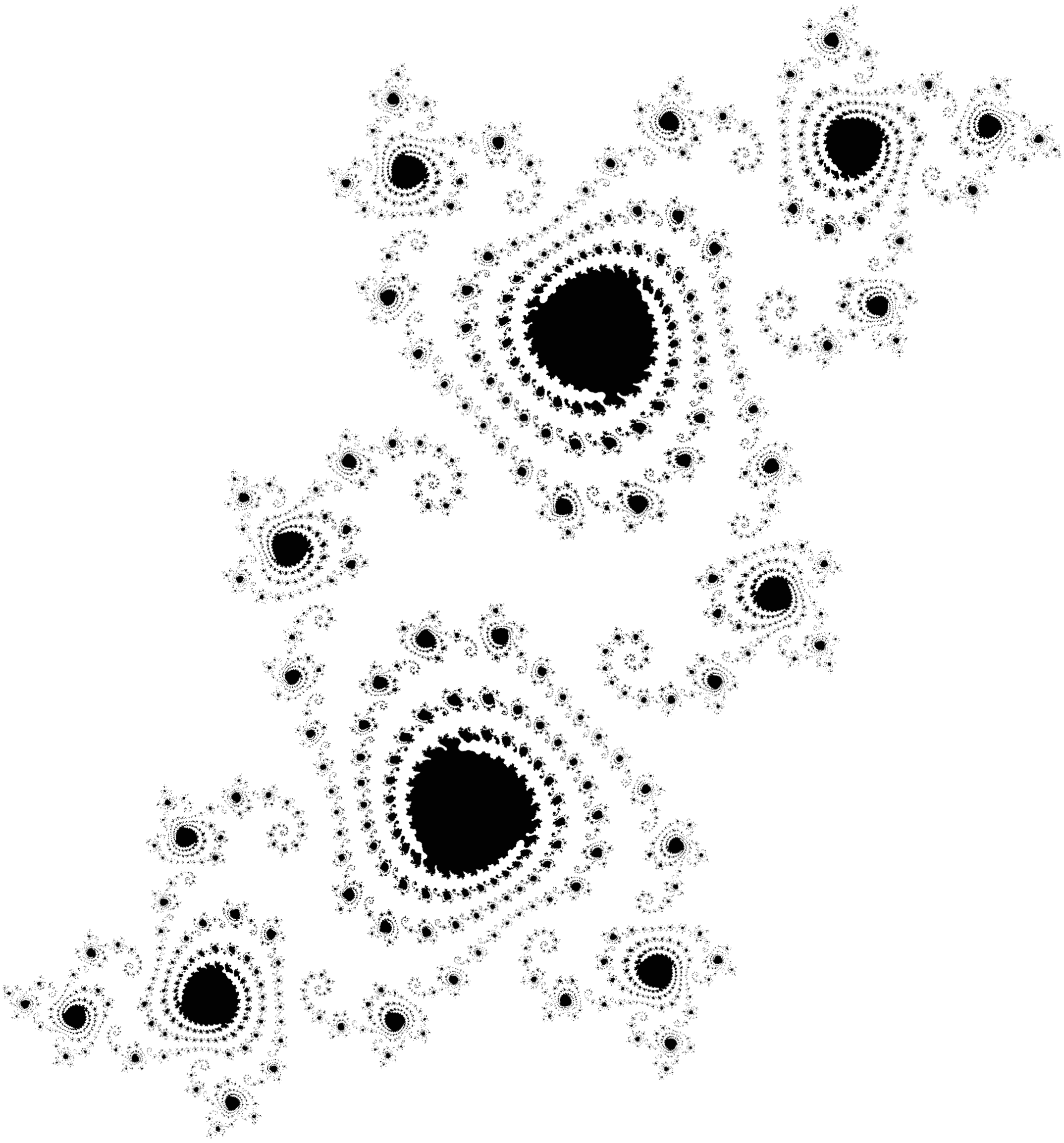


Рис. 9: Множество Фату для значения комплексного параметра $c = -0.194 + 0.6557i$

первом, до выхода книги, существование и развитие фрактальной геометрии было неразрывно связано с личностью ее создателя — с его усилиями по развитию и популяризации своих идей. Второй период знаменуется лавинообразным увеличением числа сторонников фрактальной геометрии, числом научных публикаций, содержащих в названии слово «фрактал», проникновением методов фрактальной геометрии практически во все разделы не только естественных наук, но и гуманитарных и даже искусства.

Но голос Бенуа Мандельброта не потерялся в этом тысячеголосом хоре. Он до последних дней продолжал активно и плодотворно работать. В работе [16], подводящей промежуточный итог его работ в экономике он пишет: «Несмотря на 40 лет исследований, работа продолжается. Она не только не закончена — она едва началась». [16, с. 157]

Ставшие классикой работы Мандельброта особенно важны, когда возникает задача, исследовать новые типы фракталов, связанные с той или иной гиперкомплексной числовой системой [27]. Как пример можно привести работы по фракталам на поличислах [28-31]. В ходе работ над этими и подобными задачами постоянно возникают проблемы, требующие для своего решения обращения к истокам — оригинальным работам отца фрактальной геометрии Бенуа Б. Мандельброта.

Мандельброт прожил всю свою жизнь с Aliette и имел двух сынов Laurent и Didier. Он умер 14 октября 2010 года в Кембридже (Массачусетс, США), в возрасте 85 лет, по сообщению жены, от рака поджелудочной железы. [32]

Литература

[1] Лейбниц Г.В. Сочинения в четырех томах. Том 1. М., Мысль, 1982, с. 413-429.

[2] David Bohm Wholeness and the implicate order. London and N.-Y., Routledge Classics, 2002 — 284 p.

[3] Прибрам К. Языки мозга. Экспериментальные парадоксы и принципы нейропсихологии. М., «Прогресс», 1975 — 464 с.

[4] Талбот Майкл Голографическая Вселенная. М., Изд. дом «София», 2004 – 368 с.

[5] Герман Вейль Симметрия. М., Наука, 1968 — 192 с.

[6] Monte Davis Profile of Benoit B. Mandelbrot. // Omni Magazine, February 1984.

[7] Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001 — 528 с.

[8] Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. М., Техносфера, 2006 — 488 с.

[9] Felix Hausdorff Dimension und Ausseres Mass. // Mathematische Annalen, Vol. 79, 1919 — pp. 157-179.

[10] Mandelbrot B.B. Les objects fractals: forme, hasard et dimension. Paris, Flammarion, 1975 — 192 p.

[11] Gleick J. Chaos: Making a New Science. N.-Y., Viking Penguin, 1987, 352 p.

[12] Дж. Глейк Хаос: Создание новой науки. СПб, Амфора, 2001 — 398с.

[13] Шлык В. А. В защиту «Хаоса», фрактальной геометрии, Бенуа Мандельброта и Анри Пуанкаре. // Педагогические и информационные технологии в образовании. 2002, Вып. 5. http://scholar.urc.ru:8002/ped_journal

[14] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М., Институт компьютерных исследований, 2002 — 656 с.

[15] Шлык В.А. Он оставил царапину на поверхности всего: к 80-летию Бенуа Мандельброта. // Известия Челябинского научного центра, вып. 3 (29), 2005, с. 107-124.

[16] Мандельброт Б., Хадсон Р.Л. (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах. М., Издательский дом «Вильямс», 2006 — 400 с.

[17] Barnsley M.F. Fractals everywhere. Morgan Kaufmann, 2000 - 534p.

[18] Nigel Lesmoir-Gordon Benoit Mandelbrot obituary. Mathematician whose fractal geometry helps us find patterns in the irregularities of the natural world. // guardian.co.uk, Sunday 17 October 2010.

[19] Бенуа Мандельброт http://ru.wikipedia.org/wiki/

[20] Benoit Mandelbrot Family background and early education. // Web of Stories (http://www.webofstories.com/play/9596?o=MS)

[21] Мандельброт Б.Б. Фракталы и Хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. М.-Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009 — 392 с.

[22] Alexander Saichev, Yannick Malevergne, Didier Sornette Theory of Zipf's Law and Beyond. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010 — 171p.

[23] Benoit Mandelbrot How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. // Science, 1967, 156, pp. 636-638.

[24] Benoit Mandelbrot The variation of certain speculative prices. // The Journal of Business of the University of Chicago: 36, 1963, pp. 394-419.

[25] Gaston Julia Mémoire sur l'Itération des Fonctions Rationnelles. // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 4 (83), 1918 — pp. 47-245.

[26] Pierre Fatou Sur les Equations Fonctionnelles // Bulletin Societé. Math. France, Vol. 47, 1919 — pp. 161-271.

[27] Павлов Д.Г. Обобщение аксиом скалярного произведения. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (1), 2004 — с. 5-19.

[28] Павлов Д.Г., Просандеева М.С., Панчелюга В.А. О построении аналога множества Мандельброта на плоскости двойных чисел. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. №1, (7), том 4, 2007, с. 93-97.

[29] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Малыхин А.В., Панчелюга В.А. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2009, 1(11), том. 6, — с. 135-145.

[30] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналога множества Жюлиа при нулевом значении параметра на плоскости двойной переменной. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2009, 1(11), том. 6, — с. 146-151.

[31] Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Панчелюга В.А. О форме аналогов множества Жюлиа на плоскости двойной переменной. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2009, 2(12), том. 6 — с. 161-175.

[32] Jascha Hoffman Benoȋt Mandelbrot, Novel Mathematician, Dies at 85 // The New York Times, October 17, 2010, p. A28. (http://www.nytimes.com/2010/10/17/us/17mandelbrot.html?_r=1)

[33] Бенуа Б. Мандельброт Фракталы и возрождение теории итераций. // Пайтген Х.-О., Рихтер П. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М., Мир, 1993, с. 131-140.

BENOIT MANDELBROT: THE WAY TO FRACTAL GEOMETRY OF NATURE

V.A. Panchelyuga

Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia
Institute of Theoretical and Experimental Biophysics of the RAS, Pushchino, Russia

panvic333@yahoo.com

October 14, 2010 in Cambridge, Massachusetts died founder of fractal geometry Benoît Mandelbrot at the age of 85. Following paper is writing in memory of prominent scientist.

Key Words: fractal, fractal geometry, fractal dimension, Benoît Mandelbrot.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных алгебр в физике, е) Экспериментальные исследования возможной анизотропии пространства-времени и иных проявлений финслеровой геометрии.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.
2. Объем статьи не должен превышать 1 печ. листа (24 усл. маш. стр.)
3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате LaTeX (версия LaTeX2$_\varepsilon$, для набора формул используется $\mathcal{AMS}$-LaTeX) и файл статьи в формате PostScript или PDF.
4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).
5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок), ключевые слова. Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.
6. Название статьи, аннотация, ключевые слова, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.
7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.
8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи.
9. Публикация бесплатна для всех авторов.

INFORMATION FOR AUTHORS

In the journal published are the original articles and revues of the Russian and foreign authors on the following topics: a) Hypercomplex numbers; b) Geometries connected with hypercomplex numbers; c) Finsler spaces; d) Fractals based on hypercomplex numbers; e) Application of the hypercomplex algebras in physics; f) Experimental investigation of the possible space-time anisotropy and other manifestations of Finsler geometry.

Editorial staff informs authors of the articles about the journal rules:

1. Articles are published either in Russian or in English.

2. The size of the article should not exceed that of a printed sheet (24 conventional typewritten pages)

3. Author makes his article file available for the editorial board in LaTeX format (LaTeX2$_\varepsilon$ version, $\mathcal{AMS}$-LaTeXis used for formulas) as well as in either PostScript or PDF format.

4. Accepted picture formats are as follows: TIFF, GIF, PNG for bit images (encapsulation in EPS should be possible); EPS, PDF, TEX for vector images. Each image should be represented as a separate file. Colour scheme may be either black and white or grey (8 bit).

5. Article should contain an abstract (no lengthy formulas or references) and keywords.

6. Title of the article, abstract, keywords, names and affiliation of the authors should be available both in Russian and in English.

7. Author should give his or her e-mail and telephone number to make operative communication possible. If the article is sent back to the author for him or her to improve it, it doesn't mean that the article is accepted. 8. Any deviation from the given rules makes the chance of the publication lower.

9. Publication is free for all authors.

Гиперкомплексные числа
в геометрии и физике

Научный журнал. Основан в 2003 г.

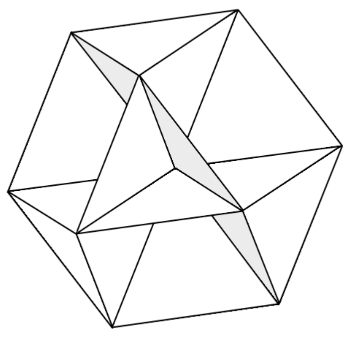
№ 2 (14), том 7, 2010

**Главный редактор Павлов Д. Г.
Зам. главного редактора Панчелюга В. А.
Технический секретарь Панчелюга М.С.**

**www.polynumbers.ru
hypercomplex@mail.ru**

**Свидетельство о регистрации
ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.**

ISSN 1814-3946



Типографские данные