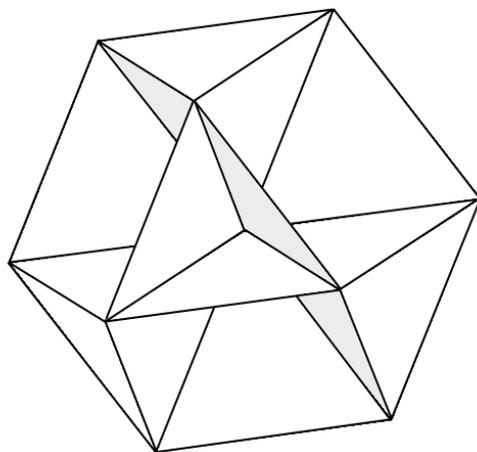


# ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

№ 2 (12), том 6 (2009)

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 2003 г.



[www.polynumbers.ru](http://www.polynumbers.ru)

[hypercomplex@mail.ru](mailto:hypercomplex@mail.ru)

# Оглавление

Д. Г. Павлов, Г. И. Гарасько, М. Л. Фильченков Специальный класс финслеровых геометрий и пространства де Ситтера .....	3
М. Л. Фильченков, Ю. П. Лаптев О соотношении между анизотропными римановыми метриками и финслеровыми метриками .....	15
А. В. Коганов Полиномиальные метрики, соответствующие им процессы и К-инглы .	21
В. Г. Жотиков Обобщенные группы Вагнера и их приложения в геометрии и физике	32
В. Д. Иващук Лагранжев подход в $(n + 1)$ -мерной космологической модели "Эйнштейна-Гаусса-Боннэ" и $n$ -мерная метрика Бервальда-Моора .....	49
С. В. Болохов Финслеровы $N$ -спиноры в рамках реляционного подхода .....	57
Ch. Atanasiu, M. Neagu On Cartan Spaces with the $m$ -th Root Metric $K(x, p) = \sqrt[m]{a^{i_1 i_2 \dots i_m}(x) p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_m}}$ .....	67
R. M. Yamaleev Dynamics in $D \geq 2$ -order Phase Space in the Basis of Multicomplex Algebra	74
О. А. Морнев Идемпотенты и нильпотенты в клиффордовой алгебре евклидова 3-пространства и их связь с физикой .....	92
Г. А. Кузнецов Октонионы и уравнения движения вероятностей .....	138
С. В. Сипаров Закон гравитации и модель источника в анизотропной геометродинамике	144
Д. Г. Павлов, М. С. Панчелюга, В. А. Панчелюга О форме аналогов множества Жюлиа на плоскости двойной переменной .....	162
В. А. Панчелюга Основы теории элементарных отношений .....	177
Информация для авторов .....	197

# СПЕЦИАЛЬНЫЙ КЛАСС ФИНСЛЕРОВЫХ ГЕОМЕТРИЙ И ПРОСТРАНСТВА ДЕ СИТТЕРА

Д. Г. Павлов<sup>1,2</sup>, Г. И. Гарасько<sup>1,3</sup>, М. Л. Фильченков<sup>4</sup>

<sup>1</sup> НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино,

<sup>2</sup> Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,

<sup>3</sup> ГУП Всероссийский электротехнический институт, Москва,

<sup>4</sup> Институт гравитации и космологии, РУДН, Москва

*geom2004@mail.ru, gri9z@mail.ru, fmichael@mail.ru*

Рассмотрены расширения общей теории относительности (ОТО). Указаны причины для обобщения ОТО, связанные как с трудностями самой теории, так и с необходимостью интерпретации новых астрономических наблюдений. Перечислены многочисленные попытки обобщения ОТО, выходящие за рамки римановой геометрии. Отмечена роль финслеровой геометрии в описании анизотропии пространства и решении проблемы темной материи во Вселенной.

Показано, что среди всех финслеровых пространств выделяется класс пространств, конформно связанных с плоскими финслеровыми пространствами, причем коэффициент растяжения-сжатия и Мировая функция, через которую он выражается, зависят только от интервала исходного плоского пространства. Тогда из принципа самодостаточности финслеровой геометрии следует, что коэффициент растяжения-сжатия – это постоянная, деленная на интервал, а Мировая функция – это произведение постоянной на логарифм от коэффициента растяжения-сжатия. Каждый элемент такого класса обладает группой изометрической симметрии, которая включает в себя группу изометрической симметрии исходного плоского финслерова пространства в качестве собственной подгруппы, и обладает конформной группой симметрии, совпадающей с конформной группой симметрии исходного плоского пространства. Если взять в качестве исходного пространства пространство Минковского, то пространство указанного выше класса есть псевдориманово пространство, в четырехмерной области, где интервал в некотором приближении можно заменить временной координатой, совпадающее в том же приближении с пространством де Ситтера.

**Ключевые слова:** обобщения ОТО, изотропные космологические модели, метрика де Ситтера, финслерова геометрия, метрика Бервальда-Моора.

## Введение

В настоящей работе мы будем рассматривать финслеровы расширения общей теории относительности (ОТО). Возникает вопрос зачем вообще нужно расширять ОТО. Существует несколько причин для этого. Во-первых, это связано с аппаратом теории и его применении к решению различных задач. Во многом классическая теория себя исчерпала. Она превратилась в область математической физики, в рамках которой найдены точные решения многих задач [1], имеющих физический смысл и, более того, дана исчерпывающая классификация римановых пространств ОТО по Петрову и по Бьянки. С другой стороны, в ОТО существуют неустраняемые трудности [2], связанные с псевдотензором гравитационного поля и сингулярностями. Правда некоторые из этих трудностей пытаются представить как ее достоинства. Достаточно привести пример теорем Хокинга–Пенроуза о неизбежности сингулярностей [4].

Другой причиной для расширения ОТО являются наблюдательные данные, полученные астрономами в XX веке и в начале XXI века [4]. Они относятся к масштабам, намного превышающим размеры Солнечной системы, где ОТО хорошо согласуется с наблюдениями. Они касаются периферии спиральных галактик, где нарушается теорема виряла

для видимой материи (звезд и межзвездного газа) и межгалактических расстояний, где играет роль т. н. темная материя и темная энергия. Многим кажется невозможным, что на видимую материю приходится не более 5% от средней плотности вещества во Вселенной. Эта ситуация напоминает неприятие системы Коперника [3], а ранее взглядов Аристарха Самосского, согласно которым Земля и планеты вращаются вокруг Солнца, в то время как наблюдается движение Солнца, Луны и планет относительно неподвижной Земли в соответствии со системой Птолемея.

Давно предпринимались попытки обобщить ОТО: достаточно назвать теории Вейля, Калуцы–Клейна и Эйнштейна–Картана [6], использующие неметричность, пятимерье и кручение соответственно. Наконец, существуют финслеровы расширения ОТО [5]. В чем состоит их мотивация? Во-первых, финслерова геометрия описывает анизотропию пространства – возможно лучше, чем риманова геометрия ОТО. Во-вторых, в одном из наиболее распространенных вариантов финслеровой геометрии метрика зависит от скорости [6], что позволяет по-новому посмотреть на проблему темной материи [9]. В то же время не стоит и переоценивать роль этого варианта финслеровой геометрии в астрономии. Действительно, риманова геометрия также рассматривает анизотропные модели. Если речь идет о космологии, то все модели, кроме фридмановской и деситтеровской, описываемые в рамках ОТО, являются анизотропными [1]. Что касается учета скоростей, то тензор энергии-импульса, стоящий в правой части уравнений Эйнштейна–Гильберта, зависит не только от масс, но и от их движений.

С другой стороны, мы не можем ограничиваться ОТО в квантовой области. Проблему квантования гравитации многие считают нерешенной. На самом деле, для слабых гравитационных полей используются пертурбативные методы, аналогичные квантовой электродинамике [6]. Возможно введение квантов гравитационного поля – частиц со спином 2, т. н. гравитонов. Для сильных полей используются непертурбативные методы, такие как квантовая геометродинамика, в которой квантуется геометрия в целом [10], и петлевая квантовая гравитация [11], в которой квантуется т. н. пространственно-временная пена, когда флуктуации метрики велики. Наконец, существует теория суперструн и М-теория [12], позволяющие, но не без трудностей, проквантовать гравитацию на уровне физики элементарных частиц.

Поскольку мы будем рассматривать пространства де Ситтера, ниже остановимся подробно на изотропных космологических моделях, одной из которых является модель де Ситтера [13]. Эта модель в последнее время связывается с ускоренным расширением Вселенной, обнаруженным с помощью наблюдения сверхновых типа Ia в далеких галактиках. Другим аргументом в пользу этой модели является т. н. парадокс Сэндиджа, состоящий в том, что расширение происходит как для однородной изотропной модели на масштабах, на два порядка меньших масштаба неоднородности Вселенной. Разрешение этого парадокса состоит в том, что расширение обусловлено не неоднородной материей галактик, а неизвестной однородной средой, т. н. темной энергией, которая описывается космологическим членом, добавляемым в правую часть уравнений Эйнштейна–Гильберта [4]. Ниже будет показано, что метрика де Ситтера может быть представлена в виде, к которому приводится специальный класс финслеровых метрик.

## 1 Изотропная космология

Хотя современная теоретическая космология основана на ОТО, некоторые результаты изотропных моделей могут быть получены в рамках ньютоновской гравитации [14]. Запишем энергию элемента единичной массы на поверхности шара в виде:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{4\pi G\epsilon a^2}{3c^2} = -\frac{kc^2}{2}, \quad (1)$$

где  $a(t)$  – зависящий от времени радиус шара, моделирующий масштабный фактор Вселенной,  $\varepsilon = \rho c^2$  – плотность энергии,  $k = 0, \pm 1$  – параметр модели. При адиабатическом процессе имеем  $dE = -pdV$ , где  $E = \varepsilon V$  и  $V = \frac{4\pi}{3}a^3$ . Отсюда получаем закон сохранения энергии

$$a\dot{\varepsilon} + 3(p + \varepsilon)\dot{a} = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) и баротропного уравнения состояния  $p = w\varepsilon$ , где  $w = const$ , мы получим следующую зависимость плотности энергии от масштабного фактора

$$\varepsilon \sim a^{-3(1+w)}. \quad (3)$$

Для плоской модели де Ситтера с  $p = -\varepsilon$  и  $k = 0$  из формул (1) и (3) легко получить экспоненциальный рост масштабного фактора

$$a(t) = a_0 e^{\frac{ct}{r_0}}, \quad (4)$$

где  $a_0 = const$ ,  $r_0$  – горизонт де Ситтера, описывающий инфляционные модели. Метрика однородного изотропного пространства-времени имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (5)$$

где  $f(\chi) = \chi$  при  $k = 0$ ,  $\chi$  – гиперсферический угол.

Метрика де Ситтера, даваемая формулами (4) и (5), записана в системе отсчета, сопутствующей пробным телам (галактикам). Заменим  $t$  и  $\chi$  в формулах (4) и (5) на  $t'$  и  $r' = a_0 \chi$  соответственно. Тогда метрика де Ситтера (5) с помощью следующего преобразования координат [12]

$$r' = \frac{r e^{-\frac{ct}{r_0}}}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r_0^2}}}, \quad t' = t + \frac{r_0}{2c} \ln \left( 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad (6)$$

может быть приведена к статическому виду:

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) c^2 dt'^2 - \frac{dr'^2}{1 - \frac{r^2}{r_0^2}} - r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (7)$$

Этот факт есть следствие того, что тензор энергии-импульса

$$T^{ik} = (p + \varepsilon)u^i u^k - p g^{ik}, \quad (8)$$

где  $u^i$  – 4-скорость, для уравнения состояния  $p = -\varepsilon$  сводится при умножении на  $\frac{8\pi G}{c^4}$  к т. н. космологическому члену  $\Lambda g^{ik}$  в уравнениях Эйнштейна–Гильберта, где космологическая постоянная  $\Lambda$  связана с горизонтом де Ситтера  $r_0$  соотношением

$$\frac{1}{r_0^2} = \frac{8\pi G \varepsilon_0}{3c^4} = \frac{\Lambda}{3} = K. \quad (9)$$

Отсюда следует, что пространство де Ситтера является пространством постоянной кривизны. Поскольку тензор энергии-импульса для среды с уравнением состояния  $p = -\varepsilon$  не зависит от 4-скорости, то такая среда называется деситтеровским вакуумом.

## 2 Специальный класс финслеровых пространств

Если  $L(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$  – метрическая функция некоторого плоского финслерова пространства  $x^1, x^2, \dots, x^n$ , то элемент длины  $ds$  в этом пространстве определяется формулой

$$ds = L(dx^1, dx^2, \dots, dx^n), \quad (10)$$

а величина

$$s = L(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (11)$$

называется интервалом между точками  $(0, 0, \dots, 0)$  и  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ . Геометрия, конформно связанная с плоской геометрией с элементом длины (10), имеет элемент длины

$$d\tilde{s} = \kappa(x) L(dx^1, dx^2, \dots, dx^n), \quad (12)$$

где  $\kappa(x) > 0$  – коэффициент растяжения-сжатия, зависящий от точки пространства. Принцип самодостаточности финслеровой геометрии [1] требует, чтобы Мировая функция, через которую выражается поле  $\kappa(x)$  удовлетворяла фундаментальному уравнению, присущему данной финслеровой геометрии. В работе [1] был рассмотрен ряд решений фундаментальных уравнений, когда Мировая функция является функцией только интервала (11). Оказалось, что все такие решения имеют формально одинаковый вид:

$$S_W = C_0 \ln \frac{s}{s_0}, \quad \kappa(x) = \frac{A_0}{s}, \quad (13)$$

где  $S_W$  – Мировая функция, а  $s_0, C_0, A_0$  – числовые константы.

Естественно выдвинуть гипотезу: *для любых пространств, конформно связанных с плоскими финслеровыми пространствами, решение фундаментальных уравнений приводит к (13), если потребовать, чтобы Мировая функция зависела только от интервала.*

В данной работе показано, что эта гипотеза верна в самом общем виде. При этом мы воспользуемся работой [2], где впервые были изложены основные идеи и формулы теории конформного потенциала.

Для исходного плоского финслерова пространства (10) компоненты обобщенного импульса определяются формулами:

$$p_i = \frac{\partial L(dx)}{\partial (dx^i)}. \quad (14)$$

Они связаны тангенциальным уравнением индикатрисы

$$\Phi(p) = 0. \quad (15)$$

Функция Финслера, как известно, определяется неоднозначно: с точностью до перехода от тангенциального уравнения (15) к эквивалентному уравнению в той же форме записи при единственном требовании, чтобы компоненты обобщенного импульса не обращались в нуль одновременно. Тангенциальному уравнению индикатрисы всегда можно придать некоторую специальную форму

$$\Phi_m(p) - 1 = 0, \quad (16)$$

где  $\Phi_m(p)$  – однородная функция  $m$ -го порядка ( $m > 0$ ) по первым  $n$  аргументам. Если функция  $S(x)$  определяет в рассматриваемом финслеровом пространстве нормальную конгруэнцию экстремалей, то она должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\Phi \left( \frac{\partial S}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x^n} \right) = 0. \quad (17)$$

Функцию  $S(x)$  в классической механике называют действием как функцией координат, а уравнение, соответствующее уравнению (17), – уравнением Гамильтона-Якоби. Если функция  $S(x)$  известна, то поле обобщенных импульсов находится как

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}, \quad (18)$$

а экстремали из нормальной конгруэнции находятся из системы уравнений

$$\dot{x}^i = \left. \frac{\partial \Phi(p)}{\partial p_i} \right|_{p_k = \frac{\partial S}{\partial x^k}} \cdot \lambda(x), \quad (19)$$

где  $\lambda(x) \neq 0$  – некоторая функция,  $\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau}$ , а  $\tau$  – параметр вдоль экстремали, параметр эволюции.

Финслерово пространство, конформно связанное с исходным, имеет метрическую функцию вида

$$\tilde{L}(\xi; x) = \kappa(x)L(\xi). \quad (20)$$

Элемент длины в таком пространстве определяется формулой (12). Обобщенные импульсы

$$\tilde{p}_i = \kappa(x) p_i \quad (21)$$

связаны соотношением

$$equati\Phi_m(\tilde{p}) - \kappa^m(x) = 0, \quad (22)$$

то есть функция Финслера конформно связанного с исходным пространства определяется следующим образом:

$$\tilde{\Phi}(\tilde{p}; x) = \Phi_m(\tilde{p}) - \kappa^m(x). \quad (23)$$

Пусть  $S_W(x)$  – произвольная скалярная функция, тогда в области, где выполняется неравенство

$$\Phi_m \left( \frac{\partial S_W}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S_W}{\partial x^n} \right) > 0, \quad (24)$$

определена финслерова геометрия, конформно связанная с исходной, и полем коэффициента растяжения-сжатия

$$\kappa(x) = \sqrt[n]{\Phi_m \left( \frac{\partial S_W}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S_W}{\partial x^n} \right)}, \quad (25)$$

причем в этой же области функция  $S_W(x)$  определяет нормальную конгруэнцию экстремалей

$$\dot{x}^i = \left. \frac{\partial \Phi_m(\tilde{p}; x)}{\partial \tilde{p}_i} \right|_{\tilde{p}_k = \frac{\partial S_W}{\partial x^k}} \cdot \tilde{\lambda}(x), \quad (26)$$

где  $\tilde{\lambda}(x) \neq 0$  – некоторая функция,  $\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau}$ , а  $\tau$  – параметр эволюции. Таким образом, функция  $S_W(x)$  является действием как функцией координат в конформно связанном пространстве.

Из принципа самодостаточности финслеровой геометрии [1] следует, что функция  $S_W(x)$  должна удовлетворять некоторому фундаментальному для данной геометрии уравнению поля, которое получается из вариационного принципа для действия с лагранжианом вида:

$$\mathcal{L} = const \cdot \kappa^n(x), \quad (27)$$

то есть

$$\mathcal{L} = const \cdot \left[ \Phi_m \left( \frac{\partial S_W}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S_W}{\partial x^n} \right) \right]^{\frac{n}{m}}. \quad (28)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа-Остроградского для такого лагранжиана запишется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left[ (\Phi_m)^{\frac{n-m}{m}} \frac{\partial \Phi_m}{\partial \left( \frac{\partial S_W}{\partial x^i} \right)} \right] = 0. \quad (29)$$

Функция  $S_W(x)$ , удовлетворяющая такому уравнению поля, называется Мировой функцией, а само уравнение поля – фундаментальным уравнением, соответствующим рассматриваемой финслеровой геометрии.

Будем искать решение фундаментального уравнения, зависящее только от от интервала (11). В этом случае

$$\frac{\partial S_W(s)}{\partial x^i} = \frac{dS_W(s)}{ds} \cdot \frac{\partial L(x)}{\partial x^i}, \quad (30)$$

поэтому

$$\Phi_m \left( \frac{\partial S_W}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S_W}{\partial x^n} \right) = \left( \frac{dS_W(s)}{ds} \right)^m, \quad (31)$$

а значит

$$\mathcal{L} = const \cdot \left( \frac{dS_W(s)}{ds} \right)^n. \quad (32)$$

Перейдем в элементе объема финслерова пространства, конформно связанного с плоским, от координат  $x^1, x^2, \dots, x^n$  к координатам  $s, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1}$ , где  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1}$  – угловые переменные. Тогда

$$dV \equiv const \cdot \mathcal{L} dx^1 \dots dx^n = const' \cdot \left( \frac{dS_W(s)}{ds} \right)^n s^{n-1} \varrho(\vartheta) ds d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{n-1}, \quad (33)$$

где  $\varrho(\vartheta)$  – некоторая функция только угловых переменных. Поэтому уравнение поля принимает вид:

$$\frac{d}{ds} \left[ s^{n-1} \left( \frac{dS_W(s)}{ds} \right)^{n-1} \right] = 0. \quad (34)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$S_W(s) = S_0 \ln \frac{s}{s_0}, \quad \Rightarrow \quad \kappa(s) = \frac{S_0}{s}. \quad (35)$$

Итак, мы доказали, что выдвинутая выше гипотеза верна. Сформулируем результат в виде теоремы.

**Теорема.**

Принцип самодостаточности финслеровой геометрии выбирает из всех пространств, конформно связанных с плоской финслеровой геометрией с метрической функцией  $L(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$ , геометрии с метрическими функциями вида:

$$\tilde{L}(dx^1, dx^2, \dots, dx^n) = const \cdot \frac{L(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)}{L(x^1, x^2, \dots, x^n)}. \quad (36)$$

Группа изометрической симметрии геометрии с метрической функцией  $\tilde{L}(dx)$  (36) включает группу линейных однородных преобразований, сохраняющих элемент длины исходного плоского пространства, в качестве собственной подгруппы; а конформные группы симметрии у этих двух финслеровых пространств совпадают.

### 3 Сведение пространства де Ситтера к специальному классу финслеровых пространств

Элемент длины в статическом пространстве де Ситтера определяется формулой (7). Свободная частица в таком пространстве испытывает действие гравитационной силы центробежного типа, а это значит, что закон инерции не выполняется для больших пространственных областей модели де Ситтера. Только в областях, где  $\frac{r^2}{r_0^2} \ll 1$  элемент длины (7) сводится к элементу длины пространства Минковского, закон инерции будет приближенно выполняться. В декартовых координатах элемент длины (5) запишется следующим образом:

$$ds = \sqrt{(cdt')^2 - e^{\frac{2ct'}{r_0}} [dx'^2 + dy'^2 + dz'^2]} . \quad (37)$$

Перейдем от системы координат  $ct', x', y', z'$  к системе координат  $ct'', x'', y'', z''$ :

$$t' = -\frac{r_0}{c} \ln \frac{ct''}{r_0}, \quad x' = x'', \quad y' = y'', \quad z' = z'' . \quad (38)$$

В этой дважды штрихованной системе координат элемент длины в пространстве де Ситтера принимает вид:

$$ds = r_0 \frac{\sqrt{(cdt'')^2 - dx''^2 - dy''^2 - dz''^2}}{|ct''|} . \quad (39)$$

Таким образом, пространство де Ситтера является конформно связанным с пространством Минковского.

Рассмотрим область пространства де Ситтера, выделяемую неравенством

$$\frac{|r''|}{ct''} \ll 1 . \quad (40)$$

Тогда в этой области имеем

$$s'' \equiv \sqrt{(ct'')^2 - x''^2 - y''^2 - z''^2} \approx |ct''| , \quad (41)$$

а значит с точностью, даваемой (40), элемент длины пространства де Ситтера принимает вид:

$$ds = r_0 \frac{\sqrt{(cdt'')^2 - dx''^2 - dy''^2 - dz''^2}}{s''} . \quad (42)$$

То есть метрическая функция пространства де Ситтера принимает вид (36):

$$ds = r_0 \frac{\sqrt{(cdt'')^2 - dx''^2 - dy''^2 - dz''^2}}{\sqrt{(ct'')^2 - x''^2 - y''^2 - z''^2}} . \quad (43)$$

### 4 Пространство Бервальда-Моора

Гиперкомплексные числа  $H_4$  [4] изоморфны алгебре действительных квадратных диагональных матриц  $4 \times 4$ . Координаты в изотропном базисе пространства  $H_4$  будем обозначать  $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ , а сам базис –  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ , то есть любое число можно представить в виде разложения

$$X = \xi^1 \psi_1 + \xi^2 \psi_2 + \xi^3 \psi_3 + \xi^4 \psi_4 , \quad (44)$$

или четверки действительных чисел  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ . Бинарная операция поличислового умножения определяется заданием правила умножения для базисных векторов:

$$\psi_i \psi_j = \begin{cases} \psi_i , & \text{если } i = j \\ 0 , & \text{если } i \neq j . \end{cases} \quad (45)$$

Таблица 1:

$\times$	1	$j$	$k$	$jk$
1	1	$j$	$k$	$jk$
$j$	$j$	1	$jk$	$k$
$k$	$k$	$jk$	1	$j$
$jk$	$jk$	$k$	$j$	1

Если  $\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4 > 0$ , то для числа  $X \in H_4$  определена норма

$$|X| = \sqrt[4]{\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4} > 0. \quad (46)$$

Пространство  $H_4$  является метрическим финслеровым пространством с метрической функцией

$$L(d\xi) = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}, \quad (47)$$

которую никакими преобразованиями координат нельзя привести к квадратному корню из дифференциальной квадратичной формы, то есть такое финслерово пространство качественно отличается от евклидова и псевдоевклидовых пространств размерности четыре. Метрику, которая определяется метрической функцией (47), называют метрикой Бервальда-Моора [5].

В пространстве  $H_4$  существует базис  $1, j, k, jk$ ,

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4, \\ j &= \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 - \psi_4, \\ k &= \psi_1 - \psi_2 + \psi_3 - \psi_4, \\ jk &= \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 + \psi_4, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

закон умножения базисных элементов которого определен Таб. 1.

Координаты  $x^0, x^1, x^2, x^3$  числа  $X$  в этом базисе связаны с координатами  $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$  того же числа в изотропном базисе формулами:

$$\left. \begin{aligned} \xi^1 &= x^0 + x^1 + x^2 + x^3, \\ \xi^2 &= x^0 + x^1 - x^2 - x^3, \\ \xi^3 &= x^0 - x^1 + x^2 - x^3, \\ \xi^4 &= x^0 - x^1 - x^2 + x^3. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Базис  $1, j, k, jk$  будем называть "ортонормированным", именно в нем в конусе  $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4 > 0$  определено экспоненциальное представление чисел  $X \in H_4$ .

Если гладкая функция  $F(x)$  одной действительной переменной  $x$  представима как полином или сходящийся ряд переменной  $x$ , то функция  $F(X)$  переменной  $X \in H_4$  также определена и является аналитической, в изотропном базисе она запишется следующим образом:

$$F(X) = F(\xi^1)\psi_1 + F(\xi^2)\psi_2 + F(\xi^3)\psi_3 + F(\xi^4)\psi_4. \quad (50)$$

В "ортонормированном" базисе  $1, j, k, jk$  та же функция имеет вид:

$$\begin{aligned}
 F(X) &= \\
 &= \frac{1}{4}[F(x^0 + x^1 + x^2 + x^3) + F(x^0 + x^1 - x^2 - x^3) + \\
 &\quad + F(x^0 - x^1 + x^2 - x^3) + F(x^0 - x^1 - x^2 + x^3)] \cdot 1 + \\
 &+ \frac{1}{4}[F(x^0 + x^1 + x^2 + x^3) + F(x^0 + x^1 - x^2 - x^3) - \\
 &\quad - F(x^0 - x^1 + x^2 - x^3) - F(x^0 - x^1 - x^2 + x^3)] \cdot j + \\
 &+ \frac{1}{4}[F(x^0 + x^1 + x^2 + x^3) - F(x^0 + x^1 - x^2 - x^3) + \\
 &\quad + F(x^0 - x^1 + x^2 - x^3) - F(x^0 - x^1 - x^2 + x^3)] \cdot k + \\
 &+ \frac{1}{4}[F(x^0 + x^1 + x^2 + x^3) - F(x^0 + x^1 - x^2 - x^3) - \\
 &\quad - F(x^0 - x^1 + x^2 - x^3) + F(x^0 - x^1 - x^2 + x^3)] \cdot jk.
 \end{aligned} \tag{51}$$

В "ортонормированных" координатах  $x^0, x^1, x^2, x^3$  метрическая функция (50) финслерова пространства  $H_4$  принимает вид

$$\begin{aligned}
 L(dx) &= [(dx^0 + dx^1 + dx^2 + dx^3)(dx^0 + dx^1 - dx^2 - dx^3) \times \\
 &\quad \times (dx^0 - dx^1 + dx^2 - dx^3)(dx^0 - dx^1 - dx^2 + dx^3)]^{1/4}.
 \end{aligned} \tag{52}$$

Разложим выражение в квадратных скобках по степеням  $dx^0$ :

$$\begin{aligned}
 L^4(dx) &= (dx^0)^4 - 2(dx^0)^2 [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2] + \\
 &+ 8 dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 + \\
 &+ (dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 - \\
 &- 2 [(dx^1)^2 (dx^2)^2 + (dx^1)^2 (dx^3)^2 + (dx^2)^2 (dx^3)^2].
 \end{aligned} \tag{53}$$

Предположим, что

$$dx^\alpha = \delta dx^0, \quad \delta \ll 1, \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{54}$$

тогда с точностью до членов  $\delta^2$  включительно по сравнению с 1 для элемента длины  $L_{H_4}(dx)$  в пространстве  $H_4$  получим следующую формулу:

$$L_{H_4}(dx) \simeq \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}. \tag{55}$$

Справа здесь стоит элемент длины в пространстве Минковского, поэтому справедливо следующее утверждение: координаты  $x^0, x^1, x^2, x^3$  в "ортонормированном" базисе пространства  $H_4$  в нерелятивистском приближении в геометрическом (метрическом) плане ведут себя также как общепринятые координаты четырехмерного пространства-времени Минковского.

Элемент длины в пространстве, конформно связанном с пространством  $H_4$ , в изотропном базисе имеет вид

$$ds = \kappa(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}. \tag{56}$$

Обобщенные импульсы находятся по формулам

$$p_i = \frac{1}{4} \kappa(\xi) \frac{\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}}{d\xi^i}, \tag{57}$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать, например, так

$$p_1 p_2 p_3 p_4 - \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4} = 0. \quad (58)$$

Выберем в качестве функции  $F(x)$  в формуле (50) функцию

$$F(x) = a \ln(x/b), \quad (59)$$

где  $a, b > 0$  – действительные параметры. Действительная часть аналитической функции  $F(X)$  (51)

$$U(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) = \frac{a}{4} \ln \left( \frac{\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4}{b^4} \right) \quad (60)$$

автоматически удовлетворяет фундаментальному уравнению пространства Бервальда-Моора, является Мировой функцией  $S_W \equiv U$  и приводит к коэффициенту растяжения-сжатия, определяемому формулой:

$$\kappa(\xi) = \frac{|a|}{\sqrt[4]{\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4}} \equiv s_{H_4}. \quad (61)$$

Таким образом, мы получили пространство, конформно связанное с пространством Бервальда-Моора, с метрической функцией типа (36), элемент длины в таком пространстве запишется следующим образом:

$$ds = |a| \frac{\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}}{\sqrt[4]{\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4}}. \quad (62)$$

Такое пространство содержит в качестве подгруппы изометрических преобразований все линейные изометрические преобразования пространства Бервальда-Моора и общее масштабное преобразование. Любое конформное преобразование пространства Бервальда-Моора является также и конформным преобразованием пространства (62).

Итак, пространствам класса (36) в невырожденных поличисловых пространствах соответствует логарифмическая аналитическая функция.

Перейдем по формулам (49) от координат  $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$  к "ортонормированным" координатам  $ct'', x'', y'', z''$ , положим  $a \equiv r_0$  и выделим область, в которой

$$s''_{H_4} \approx |ct''|. \quad (63)$$

В результате получим аналог неизотропного пространства де Ситтера

$$ds = r_0 \frac{\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}}{ct''}. \quad (64)$$

Здесь подразумевается, что все координаты  $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$  выражены через "ортонормированные" координаты  $ct'', x'', y'', z''$  согласно формулам (49). Совершим далее обратные переходы (38), (6), получим элемент длины в некотором неизотропном неплоском пространстве, аналогичном пространству де Ситтера, но при  $r_0 \rightarrow \infty$  переходящем не в пространство Минковского, а в пространство Бервальда-Моора.

## Заключение

Рассмотрены расширения общей теории относительности, в том числе на случай финслеровой геометрии. В рамках изотропных космологических моделей проанализирована метрика де Ситтера. Описан класс финслеровых пространств с метрическими функциями специального вида, к которому приводится пространство де Ситтера, конформно связанное с пространством Минковского. Получен аналог пространства де Ситтера, переходящий на больших расстояниях в пространство Бервальда-Моора.

## Литература

- [1] Д. Крамер, Х. Штефани, М. Мак-Каллум, Э. Херльт. Точные решения уравнений Эйнштейна. Под ред. Э. Шмутцера: Пер. с англ.– М.: Энергоиздат, 1982.
- [2] Д. Д. Иваненко, Г. А. Сарданашвили.– Киев, Наукова думка, 1985.
- [3] С. Хокинг, Дж. Эллис. Крупномасштабная структура пространства-времени.: Пер. с англ.– М.: Мир, 1977.
- [4] Астрономия: век XXI.: Ред.-сост. В. Г. Сурдин.– Фрязино: Век 2, 2007.
- [5] Н. Коперник. О вращениях небесных сфер.: Пер. с лат. Под ред. А. Михайлова. – СПб.: Амфора, 2009.
- [6] Альберт Эйнштейн и теория гравитации. Сборник статей.– М.: Мир, 1979.
- [7] Г. И. Гарасько. Начала финслеровой геометрии для физиков.– М.: Тетру, 2009.
- [8] Х. Рунд. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств.: Пер. с англ. –М.: Наука, 1981.
- [9] С. В. Сипаров. К вопросу об анизотропной геометродинамике. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2(10), т. 5, с. 65 (2008).
- [10] Дж. А. Уилер. Предвидение Эйнштейна. Пер. с нем.: – М.: Мир, 1970.
- [11] С. Rovelli. Quantum Gravity. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [12] М. Каку. Введение в теорию суперструн.: Пер. с англ.– М.: Мир, 1999.
- [13] А. Д. Долгов, Я. Б. Зельдович, М. В. Сажин. Космология ранней Вселенной.– М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
- [14] Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. Строение и эволюция Вселенной.– М.: Наука, 1975.
- [15] К. Мёллер: Теория относительности: Пер. с англ.– М.: Атомиздат, 1975.
- [16] Г. И. Гарасько. Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2(6), т. 3, с. 6 (2006).
- [17] Д. Г. Павлов, Г. И. Гарасько. Об аналоге решения Фридмана в финслеровом пространстве-времени с анизотропной метрикой Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(7), т. 4, с. 52 (2007).
- [18] Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов. Геометрия невырожденных поличисел. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(7), т. 4, с. 3 (2007).
- [19] Г. Ю. Богословский. 4-импульс частицы и уравнение массовой поверхности в полностью анизотропном пространстве-времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2(4), с. 27 (2005).

## A Special Class of Finsler Geometries and de Sitter Spaces

D. G. Pavlov<sup>1,2</sup>, G. I. Garas'ko<sup>1,3</sup>, M. L. Fil'chenkov<sup>4</sup>

<sup>1</sup> *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fрязино, Russia,*

<sup>2</sup> *Bauman Moscow State Technical University, Russia,*

<sup>3</sup> *Electrotechnical Institute of Russia, Moscow,*

<sup>4</sup> *Peoples' Friendship University, Moscow, Russia,  
geom2004@mail.ru, gri9z@mail.ru, fmichael@mail.ru*

Extensions of General Relativity (GR) have been considered. Reasons for generalizing GR related to difficulties of the theory itself as well as a necessity of interpreting the new astronomical observations are indicated. Numerous attempts of generalizing GR being beyond the scope of Riemannian geometry are listed. A class of spaces conformally coupled to flat Finsler spaces is shown to be singled out among all Finsler spaces. Its dilatation-contraction coefficient and the world function, in terms of which it is expressed, depend only on an interval of the initial flat space. Then from the Finsler geometry self-sufficiency principle it follows that the dilatation-contraction coefficient is a constant

divided by the interval, and the world function is a product of a constant and a logarithm of the dilatation-contraction coefficient. Each element of the class possesses an isometric symmetry group, which includes that of the initial flat Finsler space as a proper subgroup, and possesses a conformal symmetry group coinciding with that of initial flat space. If one takes Minkowski space as an initial one, then the above class space is a pseudo-Riemannian space in the four-dimensional region, where the interval in some approximation is changeable by a temporal coordinate, coinciding with de Sitter space in the same approximation.

**Key words:** GR generalizations, isotropic cosmological models, de Sitter metric, Finsler geometry, Berwald-Moor metric.

**PACS:** 02.40 Ky, 88.80-k.

*Статья поступила в редакцию 27 марта 2009 г.*

## О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ АНИЗОТРОПНЫМИ РИМАНОВЫМИ МЕТРИКАМИ И ФИНСЛЕРОВЫМИ МЕТРИКАМИ

М. Л. Фильченков<sup>1,2</sup>, Ю. П. Лаптев<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> *Институт гравитации и космологии, РУДН, Москва,*

<sup>2</sup> *Фридмановская лаборатория теоретической физики, Санкт-Петербург,*

<sup>3</sup> *Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*

*fmichael@mail.ru*

Рассмотрена возможность представления финслеровых метрик типа Бервальда-Моора в виде произведения двух анизотропных римановых метрик. Если пространственные детерминанты римановых метрик равны нулю, то факторизация происходит с уменьшением размерности пространства. Ненулевые детерминанты реализуются лишь в ограниченном интервале значений параметров анизотропии римановых метрик, соответствующих комплексным коэффициентам финслеровых метрик.

**Ключевые слова:** анизотропные космологические модели, финслерова геометрия, метрика Бервальда-Моора.

### Введение

Настоящая работа является продолжением двух предыдущих работ по анизотропным космологическим моделям. В первой из них [1] рассматривались параметры анизотропии, которые могут быть получены из наблюдений, согласующиеся с двухкомпонентной моделью с деситтеровским вакуумом и пылью. Во второй [2] рассмотрены квантовые модели для той же двухкомпонентной среды, а также метрики типа Бервальда-Моора, сводящиеся к произведению римановых метрик с нулевыми пространственными детерминантами. В настоящей работе рассмотрены финслеровы метрики типа Бервальда-Моора более общего вида, которые могут быть представлены в виде произведения двух анизотропных римановых метрик с, вообще говоря, ненулевыми пространственными детерминантами.

Анизотропные римановы метрики изучались давно. В 20-х годах прошлого века Казнером было получено анизотропное вакуумное решение [3], которое, как предполагалось, могло бы устранить космологическую сингулярность. Однако для материи с положительным давлением это оказалось невозможным в силу того, что в этом случае выполнялись условия теоремы Хокинга–Пенроуза о неизбежности сингулярности, которые были доказаны в 60-х годах прошлого века [4]. В конце 40-х годов появилась работа Гёделя [5], в которой рассматривалась метрика для нерасширяющейся модели с глобальным вращением, пылью и космологической постоянной. Решение Гёделя содержало замкнутые времениподобные мировые линии. В 50-х годах было выведено скалярное уравнение Райчаудури [6] для космологической жидкости с кинематическими инвариантами: расширением, вращением, сдвигом и дивергенцией ускорения. Изучение глобального вращения было стимулировано астрономическими наблюдениями поляризации радиогалактик [7], квазаров [8] реликтового излучения [9]. В 90-х годах прошлого века Ли-Син Ли [10] и в начале этого века М. Шидловский и др. [11] показали, что вращение спиральных галактик возможно обусловлено глобальным вращением Вселенной. Обнаруженные на рубеже миллениума большая анизотропия реликтового излучения на малых мультиполях и параметра Хаббла [12] вызвали новый всплеск интереса к анизотропным космологическим моделям.

Описание анизотропии Вселенной возможно в рамках финслеровой геометрии с использованием метрик типа Бервальда-Моора. Ниже мы покажем в чем состоит отличие в описании анизотропии с помощью финслеровых и римановых метрик.

## 1 Метрики типа Бервальда-Моора

Рассмотрим метрику типа Бервальда-Моора [2]

$$ds^4 = (cdt + Adx + Bdy + Cdz)(cdt + Ddx + Edy + Fdz) \\ (cdt + Gdx + Hdy + Idz)(cdt + Kdx + Ldy + Mdz), \quad (1)$$

где величины  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M$ , вообще говоря, являются функциями времени и пространственных координат, в отличие от постоянных, равных  $\pm 1$  для метрики Бервальда-Моора. Сравним метрику с произведением двух римановых анизотропных метрик типа

$$ds_A^2 = c^2 dt^2 - 2g_{0\alpha} cdt dx^\alpha - \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (2)$$

где  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ . Приравнивая (2) к билинейной форме

$$ds^2 = (cdt + Adx + Bdy + Cdz)(cdt + Ddx + Edy + Fdz), \quad (3)$$

получим

$$A = -g_{01} \pm \sqrt{g_{01}^2 + \gamma_{11}}, \\ B = -g_{02} \pm \sqrt{g_{02}^2 + \gamma_{22}}, \\ C = -g_{03} \pm \sqrt{g_{03}^2 + \gamma_{33}}, \quad (4)$$

$$D = -g_{01} \mp \sqrt{g_{01}^2 + \gamma_{11}}, \\ E = -g_{02} \mp \sqrt{g_{02}^2 + \gamma_{22}}, \\ F = -g_{03} \mp \sqrt{g_{03}^2 + \gamma_{33}}, \quad (5)$$

$$\gamma_{12} = \sqrt{(g_{01}^2 + \gamma_{11})(g_{02}^2 + \gamma_{22})} - g_{01}g_{02}, \quad (6)$$

$$\gamma_{13} = \sqrt{(g_{01}^2 + \gamma_{11})(g_{03}^2 + \gamma_{33})} - g_{01}g_{03}, \quad (7)$$

$$\gamma_{23} = \sqrt{(g_{02}^2 + \gamma_{22})(g_{03}^2 + \gamma_{33})} - g_{02}g_{03}. \quad (8)$$

## 2 Римановы метрики с нулевыми пространственными детерминантами

Наложим следующие условия на коэффициенты

$$G = A, \quad D = K = -A, \quad E = B, \\ H = L = -B, \quad M = C, \quad F = I = -C, \quad (9)$$

Из формул (6) – (9) получим

$$g_{01} = g_{03} = \gamma_{12} = \gamma_{23} = 0, \quad \gamma_{13} = \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{33}}, \quad \gamma_{22} = -g_{02}^2. \quad (10)$$

Тогда формулы (4), (5) примут вид

$$\begin{aligned} A &= \pm\sqrt{\gamma_{11}}, & B &= -g_{02}, & C &= \pm\sqrt{\gamma_{33}}, \\ D &= \mp\sqrt{\gamma_{11}}, & E &= -g_{02}, & F &= \mp\sqrt{\gamma_{33}}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} G &= \pm\sqrt{\gamma_{11}}, & H &= g_{02}, & I &= \mp\sqrt{\gamma_{33}}, \\ K &= \mp\sqrt{\gamma_{11}}, & L &= g_{02}, & M &= \pm\sqrt{\gamma_{33}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Анизотропная метрика (2) сводится к

$$ds_A^2 = c^2 dt^2 - 2g_{02} c dt dy - \gamma_{11} dx^2 + g_{02}^2 dy^2 - \gamma_{33} dz^2 - 2\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{33}} dx dz. \quad (13)$$

Отсюда следует, что метрика типа Бервальда-Моора может быть сведена к произведению двух римановых анизотропных метрик: одна дается формулой (13), а другая следующей формулой

$$ds_{A'}^2 = c^2 dt^2 + 2g_{02} c dt dy - \gamma_{11} dx^2 + g_{02}^2 dy^2 - \gamma_{33} dz^2 + 2\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{33}} dx dz. \quad (14)$$

Так как определитель пространственной части  $\gamma = \det \gamma_{\alpha\beta} = 0$  для метрик  $ds_A^2$  и  $ds_{A'}^2$ , то они могут сводиться к виду

$$ds_A^2 = c^2 dT^2 - dL^2, \quad ds_{A'}^2 = c^2 dT^2 - dl^2, \quad (15)$$

где

$$cdT = cdt - g_{02} dy, \quad dL = \sqrt{\gamma_{11}} dx + \sqrt{\gamma_{33}} dz, \quad dl = \sqrt{\gamma_{11}} dx - \sqrt{\gamma_{33}} dz.$$

Метрика типа Бервальда-Моора принимает вид

$$ds^4 = (c^2 dT^2 - dL^2)(c^2 dT^2 - dl^2). \quad (16)$$

Таким образом, метрика типа Бервальда-Моора представляет собой «пересечение» двух римановых метрик с нулевым определителем  $\gamma$ , имеющих одну временную и одну пространственную координату.

### 3 Римановы метрики с ненулевыми пространственными детерминантами

Детерминант пространственной метрики, имеющий вид

$$\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} + 2\gamma_{12}\gamma_{13}\gamma_{23} - \gamma_{11}\gamma_{23}^2 - \gamma_{22}\gamma_{13}^2 - \gamma_{33}\gamma_{12}^2, \quad (17)$$

заведомо не равен нулю при условии

$$\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0. \quad (18)$$

В этом случае

$$\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}. \quad (19)$$

Из формул (6) – (8) легко видеть, что

$$g_{01} = \pm\sqrt{-\frac{\gamma_{11}}{2}}, \quad g_{02} = \pm\sqrt{-\frac{\gamma_{22}}{2}}, \quad g_{03} = \pm\sqrt{-\frac{\gamma_{33}}{2}}, \quad (20)$$

если все знаки  $g_{0\alpha}$  одинаковы, где

$$\gamma_{11} < 0, \quad \gamma_{22} < 0, \quad \gamma_{33} < 0. \quad (21)$$

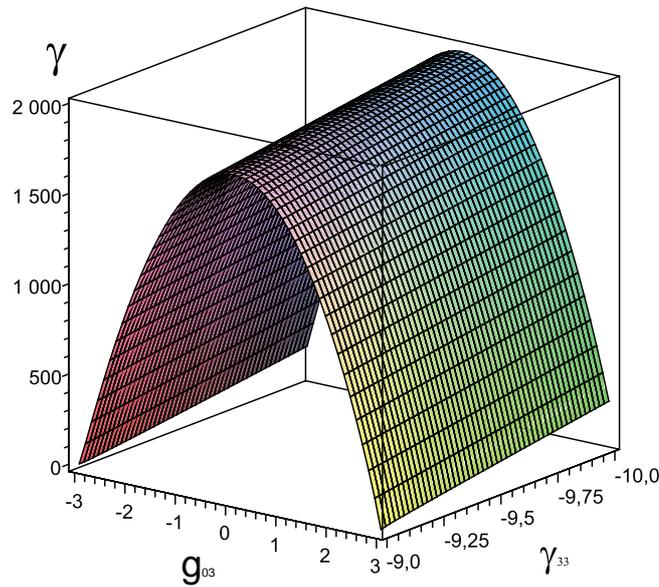


Рис. 1: Зависимость пространственного детерминанта от метрических коэффициентов.

Рассмотрим несколько примеров.

$$1) \quad g_{01} = \sqrt{-\frac{\gamma_{11}}{2}}, \quad g_{02} = \sqrt{-\frac{\gamma_{22}}{2}}, \quad g_{03} = \sqrt{-\frac{\gamma_{33}}{2}}, \quad (22)$$

$$\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} < 0. \quad (23)$$

$$2) \quad g_{01} = \sqrt{-\frac{\gamma_{11}}{2}}, \quad g_{02} = -\sqrt{-\frac{\gamma_{22}}{2}}, \quad g_{03} = \sqrt{-\frac{\gamma_{33}}{2}}, \quad (24)$$

$$\gamma_{12} = \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}}, \quad \gamma_{13} = 0, \quad \gamma_{23} = \sqrt{\gamma_{22}\gamma_{33}}, \quad \gamma = -\gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} > 0. \quad (25)$$

Если знаки в формулах (20) разные, то детерминант  $\gamma$  меняет знак, т. е. становится положительным.

$$3) \quad g_{01} = 0, \quad g_{02} = \sqrt{-\frac{\gamma_{22}}{2}}, \quad g_{03} = -\sqrt{-\frac{\gamma_{33}}{2}}, \quad (26)$$

$$\gamma_{12} = \sqrt{\frac{\gamma_{11}\gamma_{22}}{2}}, \quad \gamma_{13} = \sqrt{\frac{\gamma_{11}\gamma_{33}}{2}}, \quad \gamma_{23} = \sqrt{\gamma_{22}\gamma_{33}},$$

$$\gamma = -\gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} > 0. \quad (27)$$

$$4) \quad g_{01} = g_{02} = 0, \quad g_{03} = \sqrt{-\frac{\gamma_{33}}{2}}, \quad (28)$$

$$\gamma_{12} = \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}}, \quad \gamma_{13} = \sqrt{\frac{\gamma_{11}\gamma_{33}}{2}}, \quad \gamma_{23} = \sqrt{\frac{\gamma_{22}\gamma_{33}}{2}},$$

$$\gamma = -\gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} > 0. \quad (29)$$

Если одна формула  $g_{0\alpha} = 0$ , а две  $g_{0\alpha} \neq 0$  или две формулы  $g_{0\alpha} = 0$ , то детерминант также оказывается положительным.

При условии, что

$$-\sqrt{-\frac{\gamma_{\alpha\alpha}}{2}} \leq g_{0\alpha} \leq \sqrt{-\frac{\gamma_{\alpha\alpha}}{2}},$$

пространственный детерминант  $\gamma \neq 0$ . Легко видеть, что  $\gamma = 0$  вне этого интервала значений  $g_{0\alpha}$  (см. рис. 1). Коэффициенты билинейных форм при  $\gamma \neq 0$ , даваемые формулами (4) и (5), на которые теперь не наложены условия (9), оказываются комплексными. Например, в случае 2 получаем:

$$\begin{aligned} A &= \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma_{11}}, & B &= \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma_{22}}, & C &= -\frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma_{33}}, \\ D &= -\frac{-1 \mp i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma_{11}}, & E &= \frac{1 \mp i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma_{22}}, & F &= -\frac{-1 \mp i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma_{33}}, \end{aligned} \quad (30)$$

Анизотропная риманова метрика в случае 2 принимает вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - \sqrt{-2\gamma_{11}} c dt dx + \sqrt{-2\gamma_{22}} c dt dy - \sqrt{-2\gamma_{33}} c dt dz \\ &\quad - 2\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}} dx dy - 2\sqrt{\gamma_{22}\gamma_{33}} dy dz - \gamma_{11} dx^2 - \gamma_{22} dy^2 - \gamma_{33} dz^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Делая замену переменных

$$dX = \sqrt{-\gamma_{11}} dx - \sqrt{-\gamma_{22}} dy, \quad (32)$$

$$dY = \sqrt{-\gamma_{22}} dy, \quad (33)$$

$$dZ = \sqrt{-\gamma_{22}} dy - \sqrt{-\gamma_{33}} dz, \quad (34)$$

приведем метрику (31) к виду

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \sqrt{2} c dt dX - 3\sqrt{2} c dt dY + \sqrt{2} c dt dZ - dX^2 - dY^2 - dZ^2. \quad (35)$$

В отличие от случая с  $\gamma = 0$ , здесь не происходит уменьшения размерности пространства. Пример финслеровой метрики в том случае:

$$\begin{aligned} ds^4 &= \left[ c dt + \left( \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma_{11}} \right) dx + \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma_{22}} \right) dy + \left( -\frac{-1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma_{33}} \right) dz \right] \\ &\quad \left[ c dt + \left( -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma_{11}} \right) dx + \left( \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma_{22}} \right) dy + \left( -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma_{33}} \right) dz \right] \\ &\quad \left[ c dt + \left( \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma'_{11}} \right) dx + \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma'_{22}} \right) dy + \left( -\frac{-1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma'_{33}} \right) dz \right] \\ &\quad \left[ c dt + \left( -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma'_{11}} \right) dx + \left( \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma'_{22}} \right) dy + \left( -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma'_{33}} \right) dz \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

## Заключение

Для метрик типа Бервальда-Моора отличный от нуля пространственный детерминант  $\gamma$  соответствующих римановых метрик реализуется только в ограниченном интервале значений величины  $g_{0\alpha}$ . Она связана с параметром анизотропии  $1 - g^{00}$ , характеризующим отклонение от однородной и изотропной модели [1]. Метрика типа Бервальда-Моора может быть представлена в виде произведения двух римановых метрик. Если пространственные детерминанты римановых метрик равны нулю, то их пространства-времени двумерны, т.е. имеют одну временную и одну пространственную координату. В случае ненулевого пространственного детерминанта соответствующие финслеровы метрики имеют комплексные коэффициенты. Это означает, что финслеровы и римановы метрики с действительными коэффициентами не могут описывать одни и те же анизотропные пространства. Таким образом, описание анизотропии с помощью финслеровых метрик дополняет, а не заменяет описание анизотропии с помощью римановых метрик.

### Благодарности

Выражаем благодарность В. Балану, С. В. Лебедеву и С. В. Сипарову за полезное обсуждение.

### Литература

- [1] М. Л. Фильченков, Ю. П. Лаптев. *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, № 2(8), том 4, 2007, с. 71.
- [2] М. Л. Фильченков, Ю. П. Лаптев, Р. Х. Сайбаталов, В. В. Плотников. *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, № 2(10), том 5, 2008, с. 108.
- [3] E. Kasner. *Am. J. Math.*, v. 43, 1921, p. 217.
- [4] S. W. Hawking, R. Penrose. *Proc. Roy. Soc. (London)*, v. A314, 1970, p. 529.
- [5] K. Gödel. *Rev. Mod. Phys.*, v. 158, 1949, p.447.
- [6] A. Raychaudhuri. *Phys. Rev.* v. 978, 1955, p. 1123.
- [7] P. Birch. *Nature*, v. 298, 1982, p. 451.
- [8] D. Hutsemekers, H. Lamu. *Ast. & Ap.*, v. 367, 2001, p. 381.
- [9] М. В. Сажин. *УФН*, том 174, 2004, с. 197.
- [10] Li-Xin Li. *Gen. Rel. Grav.*, v. 30, 1998, p. 497.
- [11] W. Godłowski, M. Szydłowski et al. *Gen. Rel. Grav.*, v. 35, 2003, p. 907.
- [12] M. L. McClure, C. C. Dyer. *New Astron.*, v. 12, 2007, p. 533.

## On the Relationship Between Anisotropic Riemannian Metrics and Finsler Ones

M. L. Fil'chenkov<sup>1,2</sup>, Yu. P. Laptev<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> *Institute of Gravitation & Cosmology, Moscow, Russia,*

<sup>2</sup> *Friedmann Laboratory for Theoretical Physics, St. Petersburg, Russia,*

<sup>3</sup> *Bauman Moscow State Technical University, Russia*

*fmichael@mail.ru*

A possibility of representing Berwald-Moor type Finsler metrics as a product of two anisotropic Riemannian metrics has been considered. If spatial determinants of the Riemannian metrics vanish, then the factorization reduces space dimension. Nonzero determinants exist only in a limited interval of the Riemannian metric anisotropy parameters corresponding to complex coefficients of the Finsler metrics.

**Key words:** anisotropic cosmological models, Finsler geometry, Berwald-Moor metric.

**PACS:** 02.40 Ky, 88.80-k.

# ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МЕТРИКИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ ПРОЦЕССЫ И К-ИНГЛЫ<sup>1</sup>

А. В. Коганов

*НИИ системных исследований РАН, Москва*

*koganow@niisi.msk.ru*

Показано, что финслеровым метрикам полиномиального типа в линейных пространствах соответствуют процессы, заданные уравнениями в частных производных, с той же группой инвариантности преобразований пространства, что и у метрики. Вводится понятие полиномиального обобщения метрик Галилея, Евклида и Минковского на основе стандартной связи между ними. Показано, что на основе полиномиальных метрик можно вводить специальные геометрические К-арные отношения векторов (К-инглы) в пространстве любой размерности для любой арности. При этом обычные нормы и скалярные произведения векторов оказываются частными 1-арными и 2-арными случаями. Имеется естественная операция понижения арности ингла.

**Ключевые слова:** Финслерова метрика, процесс, инвариантность, полином, дифференциальная форма.

## Введение

Финслеровы метрики полиномиального вида и связанная с ними финслерова геометрия в настоящее время привлекает к себе внимание физиков теоретиков в связи с наблюдениями, которые можно интерпретировать как нарушение изотропии пространства в некоторых процессах [1]. Имеется аппарат, связывающий с такими метриками процессы на основе геометризации лагранжиана и сведения принципа наименьшего действия к поиску геодезических в финслеровом пространстве [2]. В данной работе предлагается иной способ сопоставления процессов полиномиальным метрикам, основанный на совпадении групп инвариантности полиномов и дифференциальных форм. Этот путь аналогичен тому, как возникла метрика Минковского из условия инвариантности волнового уравнения электромагнитной волны.

Рассматриваются также смежные вопросы появления новых геометрических инвариантов, связанных с метриками высоких степеней, получивших название «инглы» [3]. Предлагается регулярный способ построения серий таких инвариантов в пространстве любой размерности. Число инглов зависит только от степени полинома метрики.

В последнем разделе первой части предлагается обобщение метрики Минковского на случай метрик высших степеней на основе аналогии связи трех квадратичных метрик в современной физике: Галилея, Евклида, Минковского [4], [5]. Полученным метрикам соответствуют процессы по указанным выше принципам.

Вторая часть статьи посвящена математическому аппарату теории полиномиальных метрик и инглов. Рассматривается вопрос о функциональном базисе в пространстве инглов и понижение арности симметрических инглов с сохранением симметричности полинома. В частности указывается различие между понятиями симметрического полинома и симметрического ингла. Доказывается существование решения дифференциального уравнения процесса, соответствующего полиномиальной метрике по группе автоморфизмов. Дается общий анализ расчета линейной подгруппы инвариантности полиномиальной метрики.

<sup>1</sup> Поддержано РФФИ, проект 07-01-00101-а.

## Часть 1.

### Геометрический и физический аспекты полиномиальных метрик

#### 1 Соответствие по группе инвариантности полиномиальной метрики и процесса

Назовем *полиномиальной формой* степени  $K$  в линейном пространстве  $L$  конечной размерности  $n$  (действительном, комплексном или над произвольным полем  $\Phi$ ) выражение

$$P[a](x) = \sum_{i_1, \dots, i_K=1}^n a_{i_1, \dots, i_K} x^{i_1} \dots x^{i_K}, \quad (1)$$

где  $(x_1, \dots, x_n) \in L$ , т. е.  $x_i \in \Phi$  для всех  $i = 1, \dots, n$ .

*Линейной подгруппой инвариантности* полиномиальной формы  $P[a](x)$  назовем подгруппу  $S[a] \subseteq \cong LG(L)$ , действие которой на вектор-переменную  $x \in L$  сохраняет значение формы: если  $B \in S[a]$  и  $y = Bx$ , то

$$P[a](y) \equiv P[a](Bx) = P[a](x). \quad (2)$$

В общем случае вычисление этой линейной подгруппы требует решения полиномиальных уравнений относительно коэффициентов матрицы  $B$ , которые получаются из подстановки (2). Разумеется, единичная матрица всегда в нее входит. В данном разделе будут рассмотрены не вычислительные, а теоретические вопросы, связанные с этой подгруппой.

Далее будем считать, что поле  $\Phi$  — числовое: действительное или комплексное. Поскольку операторы частных производных  $\delta_i = \partial/\partial x_i$  от числовой функции  $f(x)$ , определенной на  $L = \Phi^n$ , или, в более общей форме, операторы дифференцирования по направлению  $\delta[v] = \sum_{i=1, \dots, n} v_i \delta_i$ ,  $v \in L$ , преобразуются той же матрицей  $B$ , что и векторы пространства  $L$ , то линейная подгруппа инвариантности полиномиальной формы будет и подгруппой инвариантности дифференциальной формы порядка  $K$  вида

$$D[a]f(x) = \sum_{i_1, \dots, i_K=1}^n a_{i_1, \dots, i_K} \delta_{i_1} \dots \delta_{i_K} f(x). \quad (3)$$

Этой форме соответствует однородное линейное дифференциальное уравнение

$$D[a]f(x) = \sum_{i_1, \dots, i_K=1}^n a_{i_1, \dots, i_K} \delta_{i_1} \dots \delta_{i_K} f(x) = 0, \quad (4)$$

для которого характеристическое уравнение определяется через полиномиальную форму (1)

$$P[a](x) = \sum_{i_1, \dots, i_K=1}^n a_{i_1, \dots, i_K} x^{i_1} \dots x^{i_K} = 0. \quad (5)$$

Если уравнение (4) имеет решение, то ему соответствует процесс на  $L$ , линейная подгруппа инвариантности которого совпадает с  $S[a]$ . Заметим, что нулевое решение имеется всегда. Однако у этого решения группа инвариантности траектории максимальна (совпадает с  $LG(L)$  в линейном случае и совпадает с множеством всех биекций пространства в общем случае). Этот пример показывает, что группа инвариантности траектории может быть много шире чем группа инвариантности формы, порождающей процесс, но меньше она не может быть.

Если форма (1) симметрическая, то ей можно сопоставить финслерову метрику (норму  $\|x\|_{[a]}$ ). Условие симметричности означает инвариантность коэффициентов формы (1) относительно произвольных перестановок индексов:

$$a_{i_1, \dots, i_K} = a_{\omega \circ (i_1, \dots, i_K)}, \quad \omega \in S_K. \quad (6)$$

$$\|x\|_{[a]} \stackrel{def}{=} \sqrt[K]{P[a](x)}, \quad (7)$$

или

$$\left(\|x\|_{[a]}\right)^K = P[a](x). \quad (7a)$$

В общем случае значение такой нормы комплексное. Обычно берется главное значение корня, если специально не оговорено другое.

Группа инвариантности этой нормы такая же, как у процесса (4). Таким образом, у каждой полиномиальной финслеровой метрики группа инвариантности совпадает с группой инвариантности дифференциальной формы, определяющей процесс на том же пространстве. Это обобщает известное свойство метрики Минковского, симметрия которой совпадает с симметрией волнового уравнения Максвелла.

## 2 Построение К-инглов на основе полиномиальных форм

С помощью полиномиальных форм можно строить в линейном пространстве  $L$  симметрические отношения на наборах из  $K$  векторов, которые функционально независимы друг от друга и от скалярного произведения. Такие отношения в теории финслеровых пространств называются К-инглами (норма вектора — сингл, угол или скалярное произведение пары векторов — бингл, и т. д.). Общий вид такого отношения

$$\begin{aligned} x^i &= (x_1^i, \dots, x_n^i) \in L, \quad i = 1, \dots, K; \\ P[a, K](x^1, \dots, x^K) &= \sum_{\omega \in S_K} \sum_{j_1, \dots, j_K=1}^n a_{\omega}^{j_1, \dots, j_K} x_{j_1}^{\omega(1)} \cdot \dots \cdot x_{j_K}^{\omega(K)}, \\ a_{\omega}^{j_1, \dots, j_K} &= a_{(1, 2, \dots, K)}^{\omega^{inv}(j_1, \dots, j_K)}, \quad \forall \omega \in S_K \end{aligned} \quad (8)$$

где  $S_K$  — симметрическая группа ранга  $K$ ,  $\omega^{inv}$  — подстановка, обратная к  $\omega$ . Для таких отношений выполняется коммутативность и полилинейность (свойство симметрических полиномов):

$$P[a, K](x^1, \dots, x^K) = P[a, K]\omega \circ (x^1, \dots, x^K), \quad \omega \in S_K; \quad (9)$$

$$P[a, K](\lambda x^1, \dots, x^K) = \lambda P[a, K](x^1, \dots, x^K), \quad \lambda \in \Phi. \quad (10)$$

Обозначим специальные векторы из  $L$ :

$$e_i = (0, \dots, 0, 1|_i, 0, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, n; \quad e_o = (1, \dots, 1). \quad (11)$$

Тогда

$$a_{1, \dots, K}^{j_1, \dots, j_K} = P[a, K](e_{j_1}, \dots, e_{j_K})/K! \quad (12)$$

Таким образом, все такие отношения строятся независимо. В частности, скалярное произведение в  $L$  не ограничивает возможных полиномиальных отношений высших арностей. Однако с отношениями арности  $K$  ассоциированы порожденные отношения меньших арностей. Понижение арности на единицу производится по формуле

$$(K!)^{-1} P[a, K](e_{j_1}, \dots, e_{j_{K-1}}, e_o) = b_{1, \dots, K-1}^{j_1, \dots, j_{K-1}} = \sum_{j=1}^n a_{1, \dots, K}^{j_1, \dots, j_{K-1}, j}. \quad (13)$$

Новое отношение имеет вид  $P[b, K - 1](x^1, \dots, x^{K-1})$ . Последовательно понижая степень, можно получить порожденное скалярное произведение. Оно не обязано совпадать с исходно заданным, если такое было. По образцу получения безразмерного косинуса из скалярного произведения, имеющего физическую размерность квадрата расстояния, можно нормировать полиномиальное отношение по набору отношений предыдущей арности с циклическим отбрасыванием векторов.

$$p[a, K](x^1, \dots, x^K) = \frac{P[a, K](x^1, \dots, x^K)}{\left(\prod_{s=1, \dots, K} P[b(s), K - 1](x^1, \dots, (s) \dots, x^K)\right)^{1/K}}; \quad (14)$$

где

$$(K!)^{-1} P[a, K](e_{j_1}, \dots, e_{j_s} | s, \dots, e_{j_K}, ) = b_{1, \dots, (s), \dots, K}^{j_1, \dots, (s) \dots, j_K}(s) = \sum_{j=1}^n a_{1, \dots, K}^{j_1, \dots, j | s, \dots, j_K}. \quad (15)$$

В этой формуле индекс в скобке  $(s)$  означает пропущенный индекс  $j_s$  в цепочке индексов, а разделитель  $|_s$  показывает позицию, куда вставлен объект слева от черты: индекс  $j$  вместо  $j_s$  или  $e_o$  вместо  $e_{j_s}$ .

Наконец, полиномиальному  $K$ -инглу соответствует финслерова метрика

$$\|x\|_{[a]} \stackrel{def}{=} \sqrt[K]{P[a, K](x, \dots, x)}. \quad (16)$$

При понижении арности будут получаться в общем случае другие метрики вида (16), вплоть до квадратичной нормы при арности 2. В этом спектре финслеровых метрик заключен геометрический смысл полиномиальных отношений высших арностей ( $K$ -инглов) на векторах.

### 3 Финслерово обобщение ГЕМ-комплекса метрик

Сокращение ГЕМ-комплекс использовано в заголовке для обозначения набора из трех метрик Галилея, Евклида и Минковского в одном линейном пространстве. В случае квадратичных метрик эта тройка удовлетворяет уравнению, которое допускает обобщение на случай любых степеней многочленных метрик. Это позволяет ввести аналог этой тройки метрик для финслеровой метрики произвольной степени.

Метрика Галилея в  $\mathbb{R}^{n+1} = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$  соответствует при  $n = 3$  абсолютному времени во всех системах отсчета с координатой времени  $x_0$ . Она задается формулой

$$d_G(x, y) = |x_0 - y_0|. \quad (17)$$

В частности, как норма,  $d_G(x, y) = \|x - y\|_G$ , где

$$\|x\|_G = d_G(x, 0) = \sqrt{(x_0)^2}. \quad (18)$$

Введем на том же пространстве норму Минковского

$$\|x\|_M = \sqrt{(x_0)^2 - \sum_{i=1, \dots, n} (x_i)^2} \quad (19)$$

и метрику Евклида

$$\|x\|_E = \sqrt{\sum_{i=0, 1, \dots, n} (x_i)^2}. \quad (20)$$

Тогда выполняется ГЕМ-равенство

$$2 \|x\|_G^2 = \|x\|_E^2 + \|x\|_M^2. \quad (21)$$

Если перейти к изотропным координатам  $\langle y_0, \dots, y_n \rangle = {}^1\mathbb{R}^n$  метрики Минковского, то (21) соответствует тождеству на симметрических полиномах.

$$\|y\|_G^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=0}^n y_i \right)^2,$$

$$\|y\|_M^2 = \sum_{i \neq j; i, j=0, \dots, n} y_i y_j,$$

$$\|y\|_E^2 = \sum_{i=0}^n (y_i)^2,$$

$$\left( \sum_{i=0}^n y_i \right)^2 = \sum_{i=0}^n (y_i)^2 + \sum_{i \neq j; i, j=0, \dots, n} y_i y_j. \quad (22)$$

Тождество (22) позволяет перейти к обобщению ГЕМ равенства на случай полиномиальных финслеровых метрик. Определим *квазиметрики* Галилея, Евклида, Минковского степени  $K$

$$\|y\|_{G,K} = \left( \sum_{i=0}^n y_i \right), \quad (23)$$

$$\|y\|_{E,K} = \left( \sum_{i=0}^n (y_i)^K \right)^{1/K}, \quad (24)$$

$$\|y\|_{M,K} = \left( \sum_{\exists s, r: i_s \neq i_r; i_0, \dots, i_K=0, \dots, n} y_{i_0} \cdot \dots \cdot y_{i_K} \right)^{1/K}. \quad (25)$$

Тогда справедливо ГЕМ тождество степени  $K$

$$\|y\|_{G,K}^K = \|y\|_{E,K}^K + \|y\|_{M,K}^K. \quad (26)$$

Квазиметрика Галилея (23) масштабирована так, чтобы тождество (26) не содержало числовых коэффициентов. В случае степени  $K = 2$  коэффициент масштабирования по отношению к канонической форме (18) равен 2.

Вероятно, процесс (4), порожденный формой (3) по метрике (25) является естественным обобщением волнового процесса для этого финслерова пространства.

## Часть вторая.

### Математический аппарат полиномиальных метрик и инглов

#### 4 Общий анализ базиса полиномиальных инглов

Несмотря на независимость построений инглов разных арностей между ними есть функциональная зависимость, связанная с размерностью пространства. Дело в том, что значения координат (компонент) вектора  $x = (x_1, \dots, x_n) \in L$  выражаются как значения специальных полиномиальных синглов:

$$x_i = P[e_i](x) = P[0, \dots, 0, 1|_i, 0, \dots, 0](x), \quad (27)$$

которые тривиально симметрические относительно действия группы «перестановок» одного вектора. В формуле (27)  $a_1^j = \delta_i^j$  (символ Кронекера). Поэтому, если заданы коэффициенты  $a = (a_{j_1 \dots j_K}^{i_1 \dots i_K})$  К-ингла  $P[a](x^1, \dots, x^K)$ , то его значения выражаются через значения этих координатных синглов:

$$P[a](x^1, \dots, x^K) = P[a](P[e_1](x^1), \dots, P[e_n](x^1), \dots, P[e_n](x^K)). \quad (28)$$

Исследуем вопрос о числе функционально независимых инглов в заданном пространстве  $L$ . Ответ зависит от требований, которые будут наложены на функциональный базис в системе инглов. Поскольку полная система инглов должна функционально выражать через свои значения все полиномы, то это относится и к полиномам (27), а значит и к координатам векторов из  $L$ . Если требовать только непрерывность отображения значений полной системы в значения координат, то достаточно одного сингла для полной системы. Правда, этот сингл не будет полиномиальным. Это функция обратная к кривой Пеано, которая непрерывно отображает отрезок  $[0; 1]$  на куб  $[0; 1]^n \subset L$  (декартова степень) [6]. Простейший способ задать такой сингл определен через двоичную запись координатных чисел

$$x = (x_1 \dots x_n) \in L; \quad x_i = 0, x_i(1)x_i(2) \dots |_2$$

— двоичная запись координаты.

$$f(x) = 0, x_1(1)x_2(1) \dots x_n(1)x_1(2)x_2(2) \dots |_2 \quad (29)$$

— двоичная запись значения сингла.

Через его значение однозначно восстанавливаются значения всех координат вектора — аргумента:

$$f(x) = 0, b_1 b_2 \dots |_2 \Rightarrow x_i = 0, b_i b_{i+n} b_{i+2n} \dots |_2 \quad (30)$$

При этом отображение (30) непрерывно, но обратное отображение (29) имеет разрывы. В силу (30) любая функция от нескольких векторов выражается через значения (29) от этих векторов, т. е. эта функция является функциональным базисом на К-инглах любого типа.

Полиномы задают локально непрерывные в обе стороны функции (за исключением окрестностей некоторых особых точек). Если имеется полиномиальный функциональный базис, состоящий из  $M$  инглов, то область из  $L = \mathbb{R}^n$  непрерывно в обе стороны отображается в область из  $\mathbb{R}^M$ . Такие отображения задают топологические отображения (гомеоморфизмы) множества значений координат вектора в множество значений базисных инглов [7]. Известно, что для линейных пространств топологические отображения существуют только при совпадении размерностей. Поэтому базис состоит из  $M = n$  полиномов, независимо от их арности. В этом смысле базис (27) минимален как по числу полиномов, так и по их арностям (по числу векторных аргументов).

## 5 Симметрические полиномы от векторов

Понятие симметрического многочлена от векторных аргументов несколько отличается от определения симметрического многочлена числовых переменных. Например, полиномы (27) не являются симметрическими от координат вектора аргумента, но тривиально симметрические как полиномы от векторов. Дело в том, что симметричность требует инвариантности значений полинома относительно произвольной перестановки аргументов (векторов), но не относительно перестановок компонент векторов как внутри одного вектора, так и между векторами.

В разделе 2 рассмотрен случай симметрического полинома, который относится к однородным полиномам (формам) степень которых совпадает с арностью. Рассмотрим более общее определение симметрического полинома от векторов и связанные с ним возможности понижения арности. Общий вид полинома от  $K$  векторов

$$P[a](x_1, \dots, x_K) = \sum_{j_1, \dots, j_K \in J} \sum_{i_1(1), \dots, i_K(j_K)=1}^n a[(i_1(1), \dots, i_1(j_1)) \dots (i_K(1), \dots, i_K(j_K))] \cdot x_1^{i_1(1)} \cdot \dots \cdot x_K^{i_K(j_K)} \quad (31)$$

где  $a[\dots]$  — коэффициенты, а координаты векторов  $x_s^i$ ,  $s = 1, \dots, K$ , в одночлене имеют те индексы  $i$ , которые указаны в круглых скобках для каждого вектора внутри квадратных скобок. Множество наборов  $(j_1, \dots, j_K)$ , входящих в полином, обозначено  $J$ . Формула (31) различается в случае коммутативных и некоммутирующих чисел, используемых в построении векторного пространства  $L$ . Если числа коммутативны, например при  $L = \mathbb{R}^n$  или  $L = \mathbb{C}^n$ , то все кортежи  $(i_s(1), \dots, i_s(j_s))$  в квадратных скобках следует считать упорядоченными по возрастанию (нестрогую). Если числа некоммутирующие, например, кватернионы, то кортежи, различающиеся только порядком следования индексов, различны, и им соответствуют разные коэффициенты  $a[\dots]$  и одночлены. Заметим, что в коммутативном случае также можно использовать не монотонные кортежи в определении полинома, но тогда после приведения подобных членов получится уменьшение числа одночленов. Симметричность полинома требуется только по перестановкам векторов аргументов, а не по перестановкам координат векторов.

Условие симметрии

$$a[(i_1(1), \dots, i_1(j_1)) \dots (i_K(1), \dots, i_K(j_K))] = a[(i_{\omega(1)}(1), \dots, i_{\omega(1)}(j_{\omega(1)})) \dots (i_{\omega(K)}(1), \dots, i_{\omega(K)}(j_{\omega(K)}))] \quad (32)$$

где  $\omega \in S_K : (1, \dots, K)$  — перестановка векторов. Это условие накладывает ограничение на множество  $J$ : оно должно допускать все перестановки в каждом своем элементе.

Важные типы симметрических полиномов.

*Однородный полином степени  $m$*  определен условием: если  $(j_1, \dots, j_K) \in J$ , то  $j_1 + \dots + j_K = m$ . Для таких полиномов при любом числовом коэффициенте  $\lambda$  справедливо равенство

$$P[a](\lambda x_1, \dots, \lambda x_K) = \lambda^m P[a](x_1, \dots, x_K). \quad (33)$$

*Степенная сумма степени  $m$*  определена условием  $j_1 = \dots = j_K = m$  (единственный элемент  $J$ ). Для таких полиномов при любом числовом коэффициенте  $\lambda$  для любого вектора аргумента справедливо равенство

$$P[a](x_1, \dots, \lambda x_s, \dots, x_K) = \lambda^m P[a](x_1, \dots, x_K). \quad (34)$$

Формулы (33) и (34) соответствуют квазиметрикам Минковского и Галилея. Названия типов полиномов заимствованы из аналогичных определений для полиномов с числовыми

аргументами. Однако фактически эти определения не переносятся на числовой случай, если координаты векторов рассмотреть как числовые аргументы. Совпадение определений имеется только при размерности векторов 1.

Для любого симметрического полинома возможно понижение арности с сохранением симметрии по формуле (13), которая соответствует

$$P[b](x_1, \dots, x_{K-1}) = P[a](x_1, \dots, x_{K-1}, e_o). \quad (35)$$

В общем случае (31) новые коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} & b[(i_1(1), \dots, i_1(j_1)) \dots (i_{K-1}(1), \dots, i_{K-1}(j_{K-1}))] = \\ & = \sum_{j: (j_1, \dots, j_{K-1}, j) \in J} a[(i_1(1), \dots, i_1(j_1)) \dots (i_{K-1}(1), \dots, i_{K-1}(j_{K-1})) (i_K(1), \dots, i_K(j))]. \end{aligned} \quad (36)$$

Этот способ назовем *центральной проекцией*. Он сохраняет однородность и сумму степеней с понижением степени на 1.

Но имеется еще один способ понижения арности, *циклическая свертка*, при котором сохраняется только симметрия.

$$P[c](x_1, \dots, x_{K-1}) = \sum_{s=1}^{K-1} P[a](x_1, \dots, x_{K-1}, x_s) \quad (37)$$

Тогда новые коэффициенты  $c[\dots]$  рассчитываются по формуле

$$\begin{aligned} & c[(i_1(1), \dots, i_1(j_1)) \dots (i_{K-1}(1), \dots, i_{K-1}(j_{K-1}))] = \\ & = \sum_{\substack{s; j, j'; \\ i_K(1), \dots, i_K(j); \\ i_s(1)', \dots, i_s(j)'; \\ (j_1, \dots, j'_s | s, \dots, j_{K-1}, j) \in J \\ j + j' = j_s \\ (i_s(1)', \dots, i_s(j)'; i_K(1), \dots, i_K(j)) \sim \\ \sim (i_s(1), \dots, i_s(j_s))}} a[(i_1(1), \dots, i_1(j_1)) \dots (i_s(1)', \dots, i_s(j)') \dots \\ & \dots (i_{K-1}(1), \dots, i_{K-1}(j_{K-1})) (i_K(1), \dots, i_K(j))] \end{aligned} \quad (38)$$

В этой формуле знак тильды в условии под суммой означает в коммутативном случае совпадение кортежей с точностью до порядка следования, т.е. совпадение после упорядочения по возрастанию. В некоммутативном случае тильда означает точное равенство кортежей.

Те коэффициенты  $c[\dots]$ , для которых условие под суммой не выполнимо, равны нулю. Тот же результат получится, если непосредственно приводить подобные члены в (37).

Оба способа понижения арности в физике используются. Циклическая свертка обобщает способ получения квадрата нормы одного вектора из скалярного произведения пары векторов. Центральная проекция соответствует получению временной координаты у вектора, заданного в изотропных координатах, методом скалярного произведения с бисектрисой главного квадранта.

## 6 Существование решения уравнения соответственного процесса

Для полиномиальной метрики, заданной формой (1) или (31), соответственный процесс задается формулой (4). Это уравнение имеет ту же группу инвариантности преобразований координат, что и метрика. Однако, процесс ему соответствует только тогда,

когда у него имеется решение задачи Коши. Для анализа ситуации используем теорему Коши-Ковалевской [8].

**Теорема К-К.** Дифференциальное уравнение вида

$$f(t, x, u, \frac{\partial}{\partial x}u) - \frac{\partial}{\partial t}u = 0 \tag{39}$$

имеет единственное решение в окрестности точки  $(t_0, x_0)$  при заданном значении  $u(t_0, x_0)$ , если  $f$  в окрестности этой точки непрерывна по  $t$  и аналитическая по остальным переменным. Решение  $u(t, x)$  непрерывно дифференцировано по  $t$  и аналитическое по  $x$ .  $\square$

Заметим, что в (39)  $f(\dots)$  подразумевается в общем случае вектор-функцией, а все уравнение надо трактовать как систему уравнений. Покажем, что уравнение (4) сводится к системе вида (39). Для этого достаточно преобразовать к этому виду каждый одночлен. Параметр  $t$  в (4) отсутствует. Поэтому (39) принимает вид

$$f(x, u, \frac{\partial}{\partial x}u) = 0. \tag{40}$$

Пусть в уравнении (4) содержится одночлен  $\delta_{i_1} \dots \delta_{i_m} u$ , где  $\delta_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Введем новые переменные

$$y_{i_m} = \delta_{i_m} u; \quad y_{i_{m-1}i_m} = \delta_{i_{m-1}} y_{i_m}; \quad \dots; \quad y_{i_1 \dots i_m} = \delta_{i_1} y_{i_2 \dots i_m};$$

Тогда верны уравнения

$$y_{i_m} - \delta_{i_m} u = 0; \quad y_{i_{m-1}i_m} - \delta_{i_{m-1}} y_{i_m} = 0; \dots; \quad y_{i_1 \dots i_m} - \delta_{i_1} y_{i_2 \dots i_m} = 0; \tag{41}$$

Проделав это для всех одночленов, и отождествляя совпадающие по определению переменные, сведем уравнение (4) к алгебраическому

$$D[a]u = \sum_{i_1, \dots, i_K=1}^n a_{i_1, \dots, i_K} y_{i_1 \dots i_K} = 0. \tag{42}$$

Система (41)(42) имеет вид (40) и удовлетворяет теореме К-К. Таким образом, существует процесс, соответствующий по группе инвариантности полиномиальной метрике.

### 7 Вычисление группы инвариантности метрики

Общая идея вычисления линейной подгруппы инвариантности полиномиальной метрики сводится к подстановке в полином общей формулы линейного преобразования координат и приравнивания нового полученного полинома исходному полиному. После этого приравниваются коэффициенты соответственных одночленов. Получается система уравнений относительно неизвестных элементов матрицы линейного преобразования. Это в общем случае нелинейная (полиномиальная) система. Она всегда разрешима, поскольку ей удовлетворяет единичная матрица.

Рассмотрим эту задачу для случая полинома (1). Пусть линейное преобразование координат задается матрицей  $B = (b_i^j)$ . Замена переменных имеет вид

$$y^i = \sum_{j=1}^n b_j^i x^j, \tag{43}$$

$$P[a](y) = \sum_{i_1, \dots, i_K=1}^n a_{i_1, \dots, i_K} \left( \sum_{j=1}^n b_j^{i_1} x^j \right) \cdots \left( \sum_{j=1}^n b_j^{i_K} x^j \right). \quad (44)$$

Условие инвариантности  $P[a](y) = P[a](x)$ . Из (1) и (44) получаем систему уравнений относительно матрицы  $B$  (индекс уравнения  $j_1 \dots j_K$ )

$$a_{j_1 \dots j_K} = \sum_{i_1, \dots, i_K=1}^n a_{i_1 \dots i_K} b_{j_1}^{i_1} \cdots b_{j_K}^{i_K}. \quad (45)$$

Для единичной матрицы эта система обращается в тождество. Возможен случай, когда других решений нет. Число неизвестных элементов матрицы равно  $n^2$ . Оценим число уравнений  $M(K, n)$  в (45) с учетом симметрии многочлена. Тогда индекс уравнения  $(j_1, \dots, j_K)$  можно считать нестрого монотонно упорядоченным:  $(j_1 \leq \dots \leq j_K)$ . Тогда

$$M(1, n) = n; \quad M(2, n) = n(n+1)/2;$$

$$M(K+1, n) = M(K, n) + M(K, n-1) + \dots + M(K, 1). \quad (46)$$

В этой формуле слагаемое  $M(K, n-s)$  возникает при  $j_1 = s+1$ ,  $s = 0, \dots, n-1$ .

Если  $M(K, n) < n^2$ , то у системы (45) возможны нетривиальные решения. В частных случаях нетривиальная группа может возникнуть и при нарушении этого неравенства. Например, если часть уравнений тождественно обнуляется. Точное исследование вопроса о наличии решений  $B$  системы (45), не совпадающих с единичной матрицей, равносильно решению вопроса о наличии нетривиальной группы автоморфизмов у метрики (1) и процесса (4), соответствующих коэффициентам  $a$ .

## Литература

- [1] Г. И. Гарасько. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., ТЕТРУ, 2009, 267 с.
- [2] Г. И. Гарасько. Принцип самодостаточности финслеровой геометрии. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, №1, т. 6 (2009), с. 19–42.
- [3] Д. Г. Павлов, Г. И. Гарасько. О возможности реализации трингла в трехмерном пространстве со скалярным произведением. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, №1, т. 6 (2009), с. 3–11.
- [4] Д. Э. Либшер. Теория относительности с циркулем и линейкой. М., «Мир», 1980, пер. В. Е. Маркевич, ред. Н. В. Мицкевич, 150 с.
- [5] Дж. Бим, П. Эрлих. Глобальная лоренцева геометрия. М., «Мир», 1985, пер. Е. В. Шикин, 400 с.
- [6] «Кривая Пеано». Математический энциклопедический словарь, М. «Советская энциклопедия», 1988, с. 452.
- [7] «Топологическое отображение». Математический энциклопедический словарь, М. «Советская энциклопедия», 1988, с. 582.
- [8] Коши-Ковалевской теорема». Математический энциклопедический словарь, М. «Советская энциклопедия», 1988, с. 299.

## Polynomial metrics, match processes and K-ingles

A. V. Koganov

*Institute of system researches of RAS, Moscow, Russia*

*koganow@niisi.msk.ru*

It showed that any Finsler metric of polynomial type in linear spaces correspond the process which defined by particle derivates and had match group of invariance. It inputted the notion of polynomial generalization for metrics of Galileo, Euclid and Minkovsky types on base of standard connection. It showed that the special geometrical K-placed relations (K-ingle) may be inputting on base of polynomial metrics in space of any dimension and any number K. The standard norms and scalar products are particle cases for 1- and 2-ingle. It had the natural operation of decreasing number of places in ingle.

**Key-words:** Finsler metric, process, invariant, polynomial, differential form.

# ОБОБЩЕННЫЕ ГРУППЫ ВАГНЕРА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

В. Г. Жотиков

*Московский физико-технический институт,  
Томский государственный педагогический университет  
Zhotikov@yandex.ru*

Рассматриваются свойства важного для приложений в геометрии и физике класса полугрупп: так называемых обобщенных групп Вагнера. Последние известны в зарубежной литературе еще как инверсные полугруппы. Обсуждаются вопросы приложений теории обобщенных групп и обобщенных групп в физике. Введение этих алгебраических структур приводит к новым законам сохранения и, соответственно, к предсказаниям новых физических явлений.

**Ключевые слова:** обобщенные группы и обобщенные группы, инверсные полугруппы, кристаллографические группы, бинарные и тернарные операции, частичные отображения.

## 1 Введение

Общеизвестна роль, которую играет теория групп преобразований в геометрии и в физике. Вместе с тем, уже давно было замечено, что для современной дифференциальной геометрии, как и современной физике, применение аппарата теории классической групп оказывается явно недостаточным. Одним из первых, кто обратил внимание на это обстоятельство, был выдающийся математик XX столетия В. Вагнер (1908 – 1981). Этому вопросу Виктор Владимирович Вагнер специально посвятил пленарный доклад на IV Математическом съезде СССР (г. Ленинград, июль 1961).

Свой доклад, «Основания дифференциальной геометрии и современная алгебра», В. Вагнер начал следующим словами [1]: «После того, как Ф. Клейн в своей Эрлангенской программе дал классификацию различных геометрий по характеризующим их группам преобразований, казалось, можно было думать, что теория групп будет той частью алгебры, на которой будет основано все дальнейшее развитие геометрии. Однако это оказалось не так. Для современной дифференциальной геометрии понятие группы является совершенно недостаточным при рассмотрении, с алгебраической точки зрения, основных понятий соответствующих геометрических теорий. Мало того, алгебраические проблемы, возникающие в исследованиях по основаниям современной дифференциальной геометрии, приводят к необходимости изучения специальных алгебраических систем, которые до последнего времени по существу не изучались. Эти алгебраические системы возникают в результате аксиоматизации теории частичных отображений множеств».

Сказанное может быть в полном объеме перенесено на ситуацию, сложившуюся в современной физике в связи применением в ней абстрактной теории групп. Ниже мы постараемся обосновать справедливость этого утверждения.

В начале 50-х годов прошлого столетия исследования по основаниям дифференциальной геометрии привели В. Вагнера к необходимости создания нового алгебраического аппарата. К тому времени теория групп как абстрактное учение о суперпозиции обратимых преобразований (отображений множества на себя), была практически единственной частью алгебры, на которой основывалось развитие геометрии. Однако в современной дифференциальной геометрии (как и в других разделах математики и соответственно в

физике) часто приходится иметь дело с взаимно однозначными частичными преобразованиями множества в себя или в другое множество, т. е. с взаимно однозначными отображениями подмножеств этих множеств.

Уже давно было замечено, что часто называют группами преобразований множества частичных преобразований, не являющиеся, на самом деле, группами с точки зрения всех известных определений операции умножения частичных преобразований. Так, группы преобразований Ли арифметического пространства в большинстве случаев состоят из частичных преобразований, определенных на различных открытых подмножествах арифметического пространства и поэтому заведомо не могут быть группами. Простейшим примером может служить множество всех проективных преобразований арифметического пространства. Так называемые, бесконечные группы преобразований Ли арифметического пространства все, без исключения, являются множествами частичных преобразований, не являющимися группами.

В связи с этим были введены различные определения псевдогруппы преобразований. Однако оказалось, что механическое перенесение на частичные преобразования операции умножения (суперпозиции) преобразований привело к тому, что с алгебраической точки зрения псевдогруппа являлась системой с не всюду определенной операцией. Это затрудняло изучение псевдогрупп алгебраическими методами. Недостатки псевдогрупп были отмечены В. Вагнером [1–3], который предложил рассматривать для частичных преобразований естественную операцию умножения, являющуюся частным случаем операции умножения бинарных отношений.

В. Вагнер ввел понятие обобщенной группы взаимно однозначных частичных преобразований. Обобщенная группа взаимно однозначных частичных преобразований множества  $A$  — это множество взаимно однозначных частичных преобразований множества  $A$ , замкнутое относительно операции умножения и вместе с каждым частичным преобразованием содержащее обратное частичное преобразование.

Псевдогруппы вполне заменяются обобщенными группами. Последние обладают всеми важными свойствами псевдогрупп. С абстрактно-алгебраической точки зрения обобщенные группы являются полугруппами специального вида и весьма напоминают группы, Этим и объясняется название «обобщенная группа». Таким образом, теория обобщенных групп является удобным аппаратом, который с успехом может быть применен как в современной дифференциальной геометрии, так и в физике.

В связи с этим появилась необходимость в абстрактной теории обобщенных групп, систематическое изучение которой было начато В. Вагнером [1–3] и его учениками; ему же принадлежит само понятие обобщенной группы. Естественность этого понятия подчеркивается тем, что в 1954 году обобщенные группы были введены австралийским математиком Г. Престоном (G. Preston [4]), который, по-видимому, не был знаком с работами В. Вагнера, опубликованными в предыдущие годы. В частности, им была передоказана основная теорема теории обобщенных групп [2], утверждающая, что всякая абстрактная обобщенная группа изоморфна некоторой обобщенной группе взаимно однозначных частичных преобразований. Отметим, также, что Г. Престон назвал обобщенные группы инверсными полугруппами. Последний термин, и укоренился в настоящее время в зарубежной математической литературе (см., например, [5]).

Естественно, что, как и в теории групп, в теории обобщенных групп возникает вопрос о нахождении всех представлений данной обобщенной группы. Эта задача была решена Б. Шайном [6]. Заметим, что известная теория представлений групп при помощи преобразований (см., например, [7]) получается как частный случай [6], поскольку всякая группа является обобщенной группой.

Таким образом, появление абстрактной теории обобщенных групп и обобщенных групп как теории, обобщающей абстрактную теорию классических групп, вовсе не является

случайным, а представляет собой необходимый этап развития общей теории симметрии Природы.

## 2 Обобщенные группы и обобщенные груды

Важнейшей особенностью теории обобщенных групп и обобщенных груд, построенной В. Вагнером [1–3] и его научной школой, является широкое привлечение аппарата теории бинарных отношений и символики математической логики. В данной работе мы будем также их широко использовать. При необходимости, перечень обозначений и их определения кроме указанных выше работ можно найти в монографии[8].

### 2.1 Необходимые определения и соображения

*Бинарным отношением между элементами множеств  $A$  и  $B$*  называется произвольное подмножество  $\rho$  декартова произведения этих множеств  $A \times B$ . Для бинарных отношений определены все теоретико-множественные операции. Если  $\rho \subseteq A \times B$  — бинарное отношение, то отношение  $\rho^{-1} \subseteq B \times A$ , определяемое формулой

$$(b, a) \in \rho^{-1} \leftrightarrow (a, b) \in \rho, \quad (2.1)$$

называется *обратным* для отношения  $\rho \subseteq A \times B$ .

Обозначим через  $\mathfrak{E}(X)$  множество всех подмножеств множества  $X$ . Если  $\rho \in \mathfrak{E}(A \times B)$  и  $\sigma \in \mathfrak{E}(B \times C)$  — два бинарных отношения, то их произведением называется следующее бинарное отношение  $(\sigma \circ \rho) \in \mathfrak{E}(A \times C)$ :

$$(a, c) \in (\sigma \circ \rho) \leftrightarrow \exists_{b \in B} (a, b) \in \rho \wedge (b, c) \in \sigma. \quad (2.2)$$

Заметим, что сомножители в произведении бинарных отношений записываются справа налево.

Срезом бинарного отношения  $\rho \in \mathfrak{E}(A \times B)$  через элемент  $a \in A$  называется подмножество  $\rho\langle a \rangle$  всех элементов  $b \in B$  таких, что  $(a, b) \in \rho$ . Обозначим теперь  $\rho(X) = \bigcup_{a \in X} \rho\langle a \rangle$ ,  $pr_1\rho = \rho^{-1}(B)$ ,  $pr_2\rho = \rho(A)$ . Каждое бинарное отношение  $\rho \in A \times B$  можно трактовать как отображение (вообще говоря, многозначное) множества  $pr_1\rho$  на множество  $pr_2\rho$ . Выращения  $pr_1\rho$  и  $pr_2\rho$  называются *первой* и соответственно *второй* проекциями бинарного отношения  $\rho \subseteq A \times B$ , причем имеет место отношение:  $pr_2\rho = pr_1\rho^{-1}$ . Тогда операция (2.2) определяет умножение бинарных отношений как суперпозицию отображений.

Бинарное отношение  $\rho \subseteq A \times B$  удобно представлять себе как многозначную функцию, которая некоторым элементам из  $A$  ставит в соответствие элементы из  $B$ . Отсюда  $\rho^{-1}$  является обратной функцией,  $pr_1\rho$  — область задания, а  $pr_2\rho$  — область значений функции  $\rho$ . Соответственно  $\rho\langle a \rangle$  есть множество образов элемента  $a$ , а  $\rho^{-1}\langle b \rangle$  — множество прообразов элемента  $b$ .

Множество  $\mathfrak{E}(A \times A)$  всех бинарных отношений между элементами одного множества  $A$  является полугруппой относительно операции (2.2), а операция (2.1) обращения бинарных отношений — инволютивным автоморфизмом этой полугруппы.

Разумеется, что наибольший интерес представляют такие бинарные отношения  $\rho \subseteq A \times B$ , для которых срез  $\rho\langle a \rangle$  содержит не более одного элемента при любом  $a \in A$ . Они называются *частичными отображениями* множества  $A$  в  $B$ . Обозначим через  $\mathfrak{F}(A \times B)$  множество всех частичных отображений множества  $A$  в  $B$ , через  $\mathfrak{R}(A \times B)$  и  $\mathfrak{F}_1(A \times B)$  — множество всех таких  $\rho \in \mathfrak{F}(A \times B)$  для которых  $\rho^{-1} \in \mathfrak{F}(A \times B)$  и соответственно

$pr_1\rho = A$ . Бинарные отношения из  $\mathfrak{E}(A \times A)$  называются однородными, частичные отображения из  $\mathfrak{F}(A \times B)$  и  $\mathfrak{F}_1(A \times B)$  — соответственно *преобразованиями* и *частичными преобразованиями* множества  $A$ , соответственно из  $\mathfrak{R}(A \times B)$  — *обратимыми* частичными отображениями. Пустое бинарное отношение содержится в  $\mathfrak{R}(A \times B)$  и обозначается как  $\emptyset$ .

Это можно сформулировать и другими словами. Частичное взаимно однозначное преобразование  $f$  множества  $A$  — это взаимно однозначное отображение подмножества  $a_1 \subset A$  на равномошное подмножество  $a_2 \subset A$ . Подмножества  $a_1$  и  $a_2$  называются соответственно первой и второй проекциями преобразования  $f$  и обозначаются соответственно через  $pr_1f$  и  $pr_2f$ . Эти преобразования удобно рассматривать как бинарные отношения между элементами множества  $A$ , а именно, как взаимно однозначные бинарные отношения. При этом удобно также отождествлять бинарные отношения между элементами множества  $A$  с соответствующими подмножествами множества  $A \times A$  [3]. Операции объединения, пересечения и умножения бинарных отношений [3], примененные к взаимно однозначным бинарным отношениям, приводят снова к взаимно однозначным бинарным отношениям. При этом операция умножения совпадает с обычным произведением взаимно однозначных частичных преобразований и является заданной алгебраической операцией в обобщенной группе  $G_A$ . В дальнейшем всюду элементы  $G_A$  будем называть просто *преобразованиями*. Очевидно, что пустое преобразование  $\emptyset$  является нулевым элементом  $G_A$ , а тождественное отображение  $\Delta_A$  множества  $A$  на себя является единичным элементом  $G_A$ .

Пусть теперь имеется множество элементов  $K$  с заданной в нем всюду однозначной и ассоциативной бинарной алгебраической операцией. Такую конструкцию называют *полугруппой* (или *ассоциативным группоидом*).

Согласно В. В. Вагнеру ([1–3]) *обобщенная группа* определяется, как полугруппа, в которой:

- (I) все идемпотентные элементы коммутируют между собой,
- (II) для каждого элемента  $g$  существует *обобщенно обратный* элемент  $g^{-1}$ , такой, что  $gg^{-1}g = g$ ,  $g^{-1}gg^{-1} = g^{-1}$ .

Очевидно, что исходный элемент  $g$  является обобщенно обратным для  $g^{-1}$ .

Сформулируем теперь без доказательства *теорему Вагнера*.

*Каждая обобщенная группа  $G$  может быть представлена как обобщенная группа взаимно однозначных частичных преобразований.*

Доказательство этой *теоремы* можно найти, в [2] и в [3].

## 2.2 Вопросы аксиоматики

Прежде чем перейти к обсуждению систем аксиом определяющих класс обобщенных групп, целесообразно, по-видимому, напомнить систему аксиом теории обычных групп. Разные авторы приводят несколько отличные системы аксиом (постулатов), понятие группы. Мы приводим ниже одну из таких систем аксиом, которая наиболее часто фигурирует в физической литературе.

Множество элементов  $G$  называют *группой*, если:

- (1) на этом множестве определен закон композиции (в дальнейшем называемый *групповым умножением*), по которому любой паре элементов этого множества  $g_i$  и  $g_k$ , взятых в определенном порядке, однозначно ставится в соответствие один из элементов этого множества:

$$g_i g_k = g_j;$$

- (2) групповое умножение ассоциативно, т. е.

$$(g_j g_k) g_l = g_j (g_k g_l);$$

(3) среди элементов множества имеется *единичный элемент*  $E$ , обладающий свойством

$$Eg = gE = g, \quad g \in G;$$

(4) для всякого элемента  $g$  множества  $G$  существует *обратный элемент*  $g^{-1}$ , такой, что

$$gg^{-1} = g^{-1}g = E.$$

Единичный элемент в группе — единственный, и каждый элемент группы имеет единственный ему обратный.

Если множество  $G$  содержит конечное число  $n_G$  различных элементов, то группу называют конечной, а число элементов  $n_G$  её порядком. Группу называют бесконечной, если бесконечное множество элементов  $G$  счётно, и непрерывной, если это множество несчётно.

Группа представляет собой множество замкнутое относительно закона группового умножения. Если  $g_i g_k = g_k g_i$ , то говорят, что элементы  $g_i$  и  $g_k$  коммутируют между собой. Группа, в которой все элементы попарно коммутируют между собой, называется коммутативной или абелевой.

Часто бывает удобным задавать группу посредством таблицы умножения, в которой строки и столбцы обозначены символами групповых элементов, а результат  $g_j$  группового умножения  $g_i g_k$  находится на пересечении строки  $g_i$  со столбцом  $g_k$ .

Из определения группы следует, также, что каждый элемент группы должен встретиться в каждой строке и в каждом столбце один и только один раз.

Пусть теперь  $K$  — некоторая полугруппа (ассоциативная система, т. е. выполняются (1) и (2)). Как известно, элемент  $g$  полугруппы  $K$  называется *идемпотентом*, если  $g^2 = g$ . Элемент  $g$  называется *обратимым*, если существует такой элемент  $\bar{g}$ , что  $g\bar{g} = g$  и  $\bar{g}g = \bar{g}$  (достаточно потребовать одного лишь первого равенства).

В. В. Вагнер [1,2] определил обобщенные группы как такие полугруппы, в которых дополнительно выполняются указанные во введении аксиомы (I) и (II). Из этих аксиом вытекает, в частности, единственность обобщенно обратимого (обратного) элемента [1].

А. Либер показал [5], что обобщенная группа может быть определена и другим (эквивалентным) определением:

*Обобщенной группой называется такая полугруппа, в которой для каждого элемента существует единственный обобщенно обратный элемент.*

Обобщенная группа с одним идемпотентным элементом является группой. Отсюда следует, что группа может быть определена как такая *полугруппа, в которой для всякого элемента  $g$  уравнение  $gxg = g$  имеет единственное решение.* Это определение эквивалентно перечисленной выше системе аксиом группы.

### 2.3 Обобщенные груды

В. Вагнер [1,3] показал, что если  $k_1, k_2, k_3$  — взаимно однозначные частичные отображения некоторого множества  $A$  в другое множество  $B$ , то  $k_1 k_2^{-1} k_3$  — тоже такое отображение. Тем самым на множестве всех частичных отображений  $A$  в  $B$  определяется тернарная алгебраическая операция. В. Вагнер указал необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять алгебраическая система с тернарной операцией, чтобы она допускала изоморфное представление частичными преобразованиями относительно этой операции. Такие системы были названы В. Вагнером [3] обобщенными грудями.

Всякая обобщенная группа является обобщенной грудой относительно операции  $[g_1, g_2, g_3] = g_1 g_2^{-1} g_3$ . Обратно, любая обобщенная груда может быть вложена в обобщенную груду, получаемую таким способом из некоторой обобщенной группы.

Между теориями обобщенных групп и обобщенных груд имеется глубокая связь. Так, если  $K$  есть обобщенная груда (не обязательно приводимая к обобщенной группе), то

множества  $L(K)$  и  $M(K)$  всех её левых и соответственно правых сдвигов являются обобщенными группами. Со многими другими свойствами обобщенных групп и обобщенных групп можно ознакомиться в [4].

До последнего времени в математике и соответственно в теоретической физике не встречалось естественно возникающих алгебраических систем с операциями, отличными от бинарных. Ниже мы покажем, что тернарные алгебраические операции играют важную роль в современных физических теориях.

### 3 Некоторые свойства обобщенных групп и обобщенных групп

В дальнейшем мы будем называть обобщенные группы Вагнера просто обобщенными группами. Далее будем обозначать через  $I$  множество всех идемпотентных элементов обобщенной группы  $G$ , а через  $g^{-1}$  обобщенно обратный элемент для элемента  $g \in G$ . Очевидно, что элементы  $gg^{-1}$  и  $g^{-1}g$  являются идемпотентными, однако в общем случае  $gg^{-1} \neq g^{-1}g$ . Поэтому условие

$$\text{для любого } g \in G \text{ имеет место } gg^{-1} = g^{-1}g \quad (3.1)$$

выделяет особый класс обобщенных групп, которые называют простейшими обобщенными группами. Их называют еще обобщенными группами Клиффорда (см. например, [5, 10]). Заметим, также что условие (3.1) может быть заменено требованием

$$\text{для любых } g \in G \text{ и } i \in I \text{ имеет место } gi = ig. \quad (3.2)$$

Сформулируем без доказательства еще одну теорему для обобщенных групп Клиффорда. Теорема 3.1. *Для обобщенной группы условие (3.1) эквивалентно одному из условий*

$$\text{а) } g^{-1}gg = g, \quad \text{б) } ggg^{-1} = g.$$

Множество  $I$  идемпотентных элементов обобщенной группы  $G$  является полугруппой относительно операции в  $G$  и даже обобщенной группой. Пусть  $i_0$  является нулевым элементом полугруппы  $I$ , т. е.

$$\text{для любого } i \in I \text{ имеет место } ii_0 = i_0i = i_0. \quad (3.3)$$

Обозначим через  $G_0$  множество таких элементов  $g \in G$ , для которых выполняется равенство  $g^{-1}g = i_0$ .

Перечислим без доказательства важные свойства нулевого элемента.

Теорема 3.2. *Множество  $G_0$  образует группу, единицей которой служит  $i_0$ .*

Теорема 3.3. *Для любого элемента  $g \in G$  элементы  $gi_0$  и  $i_0g$  принадлежат группе  $G_0$ .*

Следствиями этих утверждений являются следующие:

Группа  $G_0$  является идеалом обобщенной группы  $G$ . Нулевой элемент полугруппы  $I$  идемпотентов обобщенной группы  $G$  коммутирует со всеми элементами из  $G$ .

Заметим, что нулевой элемент полугруппы  $I$  всегда существует, если  $I$  состоит только из конечного числа элементов.

Вторым особым элементом полугруппы идемпотентов  $I$  является единица этой полугруппы, т. е. такой идемпотентный элемент  $e$ , который удовлетворяет условию

$$\text{для любого } i \in I \text{ имеет место } ie = ei = i. \quad (3.4)$$

Перечислим без доказательств важные свойства единицы  $e$  полугруппы  $I$ .

Теорема 3.4. *Единица множества идемпотентных элементов обобщенной группы  $G$  является единицей этой обобщенной группы.*

Рассмотрим множество  $G_e$ , состоящее из таких элементов  $g \in G$ , которые удовлетворяют условию  $g^{-1}g = e$ .

Теорема 3.5. *Множество  $G_e$  образует полугруппу.*

В общем случае полугруппа  $G_e$  не будет являться группой, так как из  $g^{-1}g = e$ , вообще говоря, не следует  $gg^{-1} = e$ , и поэтому, из  $g \in G_e$  не следует также что  $g^{-1} \in G_e$ .

Из перечисленных выше предложений вытекают также следующие две теоремы:

Теорема 3.6. *Обобщенная группа с двумя идемпотентными элементами всегда является простейшей.*

Теорема 3.7. *Если обобщенная группа  $G$  с тремя идемпотентными элементами обладает единицей, то она является простейшей.*

Заметим, что существуют обобщенные группы с тремя идемпотентными элементами не являющиеся простейшими.

Пусть  $G$  — обобщенная группа. Подмножество  $\tilde{G} \subset G$ , являющееся относительно операции в  $G$  обобщенной группой, называется обобщенной подгруппой  $G$ . Подмножество  $\bar{G} \subset G$ , являющееся группой относительно операции в  $G$ , называется подгруппой  $G$ .

Подгруппа  $\bar{G} \subset G$  называется максимальной, если она не содержится ни в какой другой подгруппе  $G$ , отличной от  $\bar{G}$ .

Рассмотрим множество  $I$  всех идемпотентов обобщенной группы  $G$ . Очевидно, что  $I$  является также обобщенной группой, причем обобщенно обратным для  $i \in I$  будет сам  $i$ .

В  $I$  вводится отношение порядка  $\omega$ :

$$(i_1, i_2) \in \omega \leftrightarrow i_1 i_2 = i_1.$$

Будем говорить, что  $i_2$  покрывает  $i_1$ , если

$$(i_1, i_2) \in \omega \wedge \left( \neg \bigvee_{i_0 \neq i_1, i_0 \neq i_2} (i_1, i_0) \in \omega \wedge (i_1, i_2) \in \omega \right).$$

Множество идемпотентов  $i_1, i_2, \dots, i_n$  образует цепь, если каждый  $i_k$ , где  $k = 2, 3, \dots, n$  покрывает  $i_{k-1}$ .

Назовем рангом идемпотента  $i \in I$  его высоту  $h[i]$  в смысле высоты элемента упорядоченного множества:

$$1) h[0] = 0;$$

$$2) h[i] = n \leftrightarrow \left( \left( \bigvee_{i_1 \neq i} (i_1, i) \in \omega \wedge h[i_1] = n - 1 \right) \wedge \left( \bigvee_{i_2 \neq i} (i_2, i) \in \omega \wedge h[i_2] > n - 1 \right) \right).$$

Обобщенная группа имеет ранг  $n$ , если  $n$  есть наибольший из рангов её идемпотентов.

Изучим некоторые свойства обобщенных групп конечного ранга.

Пусть  $G$  — обобщенная группа. Все элементы  $G$  можно разбить на три сорта: идемпотенты; элементы максимальных подгрупп, не являющиеся идемпотентами; прочие элементы.

Рассмотрим

$$G_{(i, i_2)} = \bigcup_{g \in G} gg^{-1} = i_1 \wedge g^{-1}g = i_2$$

Очевидно, что  $G_{(i, i)}$  будет группой с единицей  $i$ . Будем говорить, что  $G_{(i, i)}$  есть группа на идемпотенте  $i$ . Оказывается [Л.1], что все максимальные подгруппы  $G$  исчерпываются подгруппами вида  $G_{(i, i)}$ .

Назовем два идемпотента  $i_1, i_2 \in I$  сопряженными, если  $G_{(i,i)} \neq \emptyset$ . Легко показать, что 1) отношение сопряженности есть отношение эквивалентности; 2) сопряженные идемпотенты имеют равные ранги; 3) если  $i_1, i_2$  сопряжены, то  $G_{(i_1,i_1)}$  и  $G_{(i_2,i_2)}$  изоморфны.

Далее зафиксируем  $g_0 \in G_{(i_1,i_2)}$ . Тогда всякий другой элемент  $g \in G_{(i_1,i_2)}$  является произведением некоторого элемента  $G_{(i_1,i_1)}$  на  $g_0$ . В самом деле,

$$g = (gg_0^{-1})g_0, \quad \text{где } (gg_0^{-1}) \in G_{(i_1,i_1)}.$$

Пусть  $G_{(i,i)} \in \omega$  группа на идемпотенте  $i$ . Назовем проекцией  $G_{(i,i)}$  в  $G_{(i_0,i_0)}$ ,  $i_0 < i$ , множество  $\{i_0\}G_{(i,i)}$ . Проекция является гомоморфизмом  $G_{(i,i)}$  в  $G_{(i_0,i_0)}$ .

### 3.1 Отношение порядка в обобщенной группе Вагнера

Говорят, что элементы  $g_1$  и  $g_2$  обобщенной группы  $G$  находятся в отношении порядка, если имеет место отношение:

$$\omega = \{(g_1, g_2) : g_1 = g_1g_1^{-1}g_2 = g_1\} = \{(g_1, g_2) : g_1 = g_2g_1^{-1}g_1 = g_1\}. \quad (3.5)$$

В. В. Вагнер назвал это каноническим отношением порядка [3]. Отношение порядка есть отношение включения частичных преобразований. Это означает, что преобразование, которое соответствует элементу  $g_1$  оказывается включенным в преобразование, которое соответствует элементу  $g_2$  обобщенной группы и записывается так:

$$g_1 \prec g_2 \leftrightarrow \varphi(g_1) \subset \psi(g_2), \quad (3.6)$$

где  $\varphi(g_1)$  — преобразования соответствующие элементу  $g_1$ , а  $\psi(g_2)$  — преобразования соответствующие элементу  $g_2$ .

В обычной группе отношение порядка сводится к тождественному отношению. Т.е. в случае обычной группы все её преобразования (за исключением единичного) являются равнозначными.

Рассмотрим теперь полезный пример обобщенной группы Вагнера. Пусть имеется обобщенная группа  $G$ , которая задана следующей таблицей умножения.

$\times$	$i$	$j$	$a$	$b$	0	1	2	3	4	$e$
$i$	$j$	0	$a$	3	0	1	2	3	4	$i$
$j$	0	$j$	2	$b$	0	1	2	3	4	$j$
$a$	2	$a$	4	$i$	2	3	4	0	1	$a$
$b$	$b$	3	$j$	1	3	4	0	1	2	$b$
0	0	0	2	3	0	1	2	3	4	0
1	1	1	3	4	1	2	3	4	0	1
2	2	2	4	0	0	2	3	4	0	1
3	3	3	0	1	3	4	0	1	2	3
4	4	4	1	2	4	0	1	2	3	4
$e$	$i$	$j$	$a$	$b$	0	1	2	3	4	$e$

Идемпотентными элементами этой обобщенной группы являются  $i, j, 0, e$ . Здесь 0 выполняет здесь роль «нулевого элемента», а элемент  $e$  — единицы обобщенной группы. Множество этих идемпотентов является минорантной полурешеткой<sup>1</sup>. Кроме того, имеем  $ab \neq ba, ai \neq ia, bj \neq jb$ .

<sup>1</sup> Упорядоченное множество называется минорантной (мажорантной) полурешеткой, если любые два его элемента имеют наибольшую нижнюю (наименьшую верхнюю) грань.

Канонический порядок в  $G$  задается следующим образом:

$$\omega = \Delta_G \cup \{(2, a), (0, i), (0, e), (0, j), (i, e), (j, e), (3, b)\}, \quad (3.7)$$

где символ  $\Delta_G$  обозначает тождественное отображение  $G$  на себя, или диагональ  $G \times G$  [3].

### 3.2 О собственных представлениях обобщенных групп матрицами

В данном разделе мы опишем общий метод построения собственных матричных представлений обобщенных групп с конечным числом идемпотентов [10].

Пусть теперь мы имеем обобщённую группу  $G$  с конечным числом идемпотентов. Найдем её минимальное собственное представление матрицами над некоторым допустимым полем.

1. Пусть  $n_1$  — число идемпотентов ранга 1,  $n_k$  — число идемпотентов ранга  $k$  таких, что или  $G_{(i,i)} \not\cong \{i\}$ , но  $\{i_0\}G_{(i,i)}$  не изоморфна группе  $G_{(i,i)}$  ни для какого  $i_0$ ; или таких, что  $i$  покрывает ровно один идемпотент. Положим

$$n_0 = n_1 + n_2 + \dots + n_s,$$

где  $s$  — ранг  $G$ .

2. Берем некоторый набор минимальных собственных матричных представлений  $\Gamma_{G_{(i,i)}}$  группы  $G_{(i,i)}$  над указанным полем для всех  $i \in I$ . Для сопряженных идемпотентов берем  $\Gamma_{G_{(i_1,i_1)}} = \Gamma_{G_{(i_2,i_2)}}$ . Пусть  $m_k$  — число так выбранных представлений порядка  $k + 1$ . Определяем

$$n = n_0 + m_1 + 2m_2 + \dots + tm_t,$$

где  $t + 1$  — наибольший порядок.

3. Находим представление обобщенной подгруппы ранга 1.

3.1. Идемпотенту  $i$  ставится в соответствие частично тождественная матрица порядка  $n$  ранга, равного порядку представления  $\Gamma_{G_{(i,i)}}$ . Произведение матриц, соответствующих различным идемпотентам должно равняться нулю.

3.2. Для элемента  $g \in G_{(i,i)}$  соответствующая матрица ищется так: если  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  — ненулевые строки  $\Gamma_n(i)$ , то

$$M_g = \Gamma_n(g) \leftrightarrow (M_{\alpha_1}^{\alpha_m} = \Gamma_{G_{(i,i)}}(g) \wedge \bar{M}_{\alpha_1}^{\alpha_m} = 0),$$

где  $\bar{M}_{\alpha_1}^{\alpha_m}$  — матрица, получающаяся из  $M_g$  заменой строк  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  нулевыми, а матрица  $M_{\alpha_1}^{\alpha_m}$  — матрица, получающаяся из  $M_g$  вычеркиванием нулевых строк и столбцов.

3.3. Пусть  $G_{(i,i)} \neq \emptyset$ , и  $M_{i_1} = \Gamma_n(i_1)$ ,  $M_{i_2} = \Gamma_n(i_2)$ . Если ненулевыми строками в  $M_{i_1}$  являются  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , а в  $M_{i_2}$  соответственно  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ , то элементам  $g \in G_{(i_1,i_2)}$  ставятся в соответствие матрицы вида

$$M_g = \bar{M}_g M_{\beta}^{\alpha},$$

где  $\bar{g} \in G_{((i_1,i_1))}$ , а  $M_{\beta}^{\alpha}$  — матрица, у которой элементы  $(\alpha_i, \beta_i)$  равны единице ( $i = 1, \dots, m$ ), а остальные равны нулю.

3.4. Пусть  $i_0$  — идемпотент ранга  $k$ .

Если  $i_0$  покрывает несколько идемпотентов, а  $G_{(i_0,i_0)} = \{i_0\}$  или  $G_{(i_0,i_0)}$  изоморфна  $\{i\}G_{(i_0,i_0)}$ , где  $i$  — идемпотент, покрываемый  $i_0$ , то получаем для  $g \in G_{(i_0,i_0)}$

$$M_g = \bigcup_i M_{ig},$$

где  $i$  — идемпотенты, покрываемые  $i_0$ , а объединение матриц есть матрица, элементы которой являются объединениями элементов исходных матриц, причем  $\{a\} \cup \{a\} = \{a\}$ ,  $\{a\} \cup \{0\} = \{a\}$ .

Если  $i_0$  не обладает указанным свойством, то будем полагать

$$M_{i_0} = M_0 \bigcup_i M_i,$$

где  $M_0$  — частично тождественная матрица порядка  $n$  ранга равного порядку  $\Gamma_{G(i_0, i_0)}$ , такая, что  $M_0 M_j = 0$  для всех  $j \in \langle i_0 \rangle$ , а  $M_i$  — матрицы, соответствующие идемпотентам, покрываемым  $i_0$ .

Далее, для элементов  $g \in G(i_0, i_0)$  находятся  $M_g = \Gamma_n(g)$  так: если  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  — ненулевые строки  $M_0$ , то

$$M_g = \Gamma_n(g) \leftrightarrow (M_{\alpha_1}^{\alpha_m} = \Gamma_{G(i_0, i_0)}(g) \wedge \bar{M}_{\alpha_1}^{\alpha_m} = \bigcup_i M_{ig}),$$

где  $i$  — идемпотенты, покрываемые  $i_0$ ,  $M_{\alpha_1}^{\alpha_m}$  — матрица, получающаяся из  $M_0$  вычёркиванием нулевых строк и столбцов, а  $\bar{M}_{\alpha_1}^{\alpha_m}$  — матрица, получающаяся из  $M_g$  заменой строк  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  нулевыми.

Что касается элементов множества  $G(i_1, i_2)$ , где  $i_1, i_2$  — сопряженные идемпотенты ранга  $k$ , то они представляются, как и в 3.3.

Построенное соответствие, как легко проверить, является минимальным собственным представлением  $G$ , определяемым данным набором представлений максимальных подгрупп. Назовем эти представления главными.

Пусть  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — два главных представления. Так как порядок главного представления определяется однозначно, то различие между главными представлениями, соответствующими данному набору представлений  $\Gamma_{G(i, i)}$ ,  $i \in I$ , основывается на произвольности выбора строк в матрице  $n$  — порядка, которые будут ненулевыми в  $M_i$ , где  $i \in I$ . Тогда, чтобы получить  $\Gamma_n$  из  $\bar{\Gamma}_n$ , нужно, очевидно, одновременно переставить одноименные строки и столбцы матриц из  $\bar{\Gamma}_n$  на соответствующие представлению  $\Gamma_n$  места. Для этого достаточно осуществить преобразование подобия  $T^{-1} \bar{\Gamma}_n T$ , где  $T$  — матрица, состоящая из нулей и единиц, которая строится так: если нужно строку  $\alpha_j$  перевести на место строки  $\alpha_k$ , то элемент  $t_{jk} = 1$ .

Пусть теперь  $\Gamma$  — минимальное собственное представление с данным набором  $\Gamma_{G(i, i)}$ ,  $i \in I$ . Тогда его порядок совпадает с порядком главного представления. Как известно, коммутирующие матрицы простой структуры можно одновременным преобразованием подобия привести к диагональному виду. Очевидно, что всякая идемпотентная матрица является матрицей простой структуры, Таким образом, существует неособенная матрица  $T$  такая, что  $T^{-1} \bar{\Gamma}_n T$  будет минимальным собственным представлением  $G$ , при котором идемпотентам соответствуют частично тождественные матрицы. Следовательно, представление идемпотентной обобщенной подгруппы  $\Gamma(G)$  при  $T^{-1} \bar{\Gamma}_n T$  совпадает с таковым при главном представлении. Отсюда следует совпадение самих представлений.

Указанный метод применим к решению различных задач о матричных представлениях обобщенных групп.

#### 4 О приложениях обобщенных групп и обобщенных групп в физике

В современной физике понятие симметрии играет ключевую роль во всех теоретических представлениях. Если уравнения, которые описывают физические законы, можно изменить так, что это не отражается на следствиях, вытекающих из этих уравнений, то можно говорить об инвариантности (симметричности) законов природы.

Фундаментальная взаимосвязь «симметрия — законы сохранения» физической системы определяется в виде двух знаменитых теорем Э. Нетер [11], установленных ею в 1918 году. Согласно этим теоремам (называемых прямой и обратной теоремами Э. Нетер), каждый закон сохранения оказывается тесно связанным с инвариантностью интеграла действия рассматриваемой физической системы относительно некоторого преобразования координат или полевых функций.

Инвариантность действия относительно сдвига начала отсчета времени (однородность времени), можно записать в виде следующей простой схемы:  $t \rightarrow t' + a \Rightarrow L = L' \Rightarrow \mathcal{S} = \mathcal{S}'$ . Здесь  $a$  — величина сдвига показаний часов,  $L$  и  $L'$  — лагранжианы, а  $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$  — это значение действия рассматриваемой системы соответственно до и после преобразования. Указанная последовательность вычислений приводит к закону сохранения механической энергии.

Аналогичным образом, инвариантность действия относительно сдвига пространственных координат (однородность пространства), а именно,

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' + \mathbf{b} \Rightarrow L \rightarrow L' \Rightarrow \mathcal{S} = \mathcal{S}'$$

где  $\mathbf{b}$  — 3-вектор пространственных трансляций, имеет своим следствием закон сохранения импульса.

Аналогичные соображения применимы и к другому классу симметрий — к так называемым внутренним симметриям. Последние не связаны с преобразованиями пространственно-временных степеней свободы. Некоторые авторы называют их ещё геометрическими и динамическими симметриями. Такое их деление они основывают на следующих соображениях.

Имеется в виду, что геометрическая симметрия отражает свойства пространства-времени. Соответственно она имеет отношение к законам сохранения энергии, импульса и момента импульса. В свою очередь, динамическая симметрия имеет отношение к законам сохранения физических величин, связанных с внутренним пространством. Поэтому обычно считается, что эти величины имеют негеометрический характер.

Заметим, что термин «преобразование» используется в физике в значительно более широком смысле, чем преобразование какого либо множества в себя. Поэтому, теорема о том, что отображения всякого множества на себя образует группу, вообще говоря, не применима ко всем рассматриваемым в физике преобразованиям. Это говорит о необходимости каждому конкретному преобразованию в физике тщательно подбирать соответствующую ему адекватную алгебраическую структуру.

Кроме того, преобразования, используемые в физике необходимо рассматривать с двух различных точек зрения, а именно, активной и пассивной [12]. Другими словами, преобразования, применяемые в физике, могут рассматриваться как, так называемые, *активные*, или *пассивные* преобразования.

Активное преобразование какой либо физической системы, есть её *движение*, т.е. изменение её характеристик под влиянием некоторых внутренних или внешних воздействий. Соответственно к пассивным преобразованиям относятся всевозможные *изменения способов описания* физических систем.

Свойства обобщенных групп и обобщенных групп, о которых шла речь, свидетельствуют о том, что указанные алгебраические структуры играют важную роль во многих разделах современной физики. Оказывается, что первые из них (обобщенные группы) применяются к описаниям активных преобразований, тогда как вторые (обобщенные группы), применяются для описаний пассивных преобразований.

Из сказанного вытекает, что мы имеем дело с новым классом симметрий, а именно, с симметриями алгебраических структур, являющихся обобщенными группами и обобщенными группами.

Так описанная выше тернарная операция, действующая между элементами двух обобщенных подгрупп обобщенной группы (или её подгрупп) сводится к отношению порядка между этими элементами обобщенной группы. Отсюда следует, что преобразования, принадлежащие разным подгруппам, входящим в состав обобщенной группы, оказываются связанными друг с другом отношениями подчинения (отношением порядка). Иными словами, точные симметрии каждой из отдельно взятых подгрупп обобщенной группы "искажаются" (т. е. оказываются нарушенными). Это дает возможность придать новый смысл понятию спонтанного нарушения симметрии (СНС), с которым часто приходится иметь в физике и её приложениях. Оказывается, что СНС есть проявление отношения порядка в обобщенной группе. К обсуждению этого вопроса мы еще вернемся.

Далее мы рассмотрим некоторые приложения теории обобщенных групп и обобщенных групп в таких разделах современной физической науке как физика фундаментальных взаимодействий и физика твердого тела. Разумеется, что эти приложения вовсе не являются единственными.

Заметим что, с точки зрения теории обобщенных групп и обобщенных групп, известная в физике группа Лоренца, строго говоря, группой не является, а должна рассматриваться как обобщенная группа. В частности, отношение порядка устанавливает в ней порядок следования элементарных событий. Так, если  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  обозначают элементарные события, то в данном случае запись  $\mathcal{A} < \mathcal{B}$  означает, что событие  $\mathcal{A}$  произошло раньше события  $\mathcal{B}$ . Таким образом, отношение порядка для пространственно-временных симметрий есть ничто иное, как математическое оформление принципа причинности в физике.

#### 4.1 Проблема объединения фундаментальных взаимодействий

Современное состояние в физике высоких энергий и элементарных частиц изложено в недавнем обзоре К. Степаньянца [13], опубликованном в настоящем журнале. Более подробную информацию по этой проблеме можно получить в монографии [14]. Кратко дело сводится к следующему.

В современной Стандартной модели – теории описывающей сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия наиболее популярной является калибровочная группа Теории Великого Объединения (ТВО), которая записывается так:  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Приведенная запись означает, что за сильные взаимодействия отвечает группа внутренних симметрий  $SU(3)$ , за слабые взаимодействия отвечает группа внутренних симметрий  $SU(2)$ , и соответственно, за электромагнитные взаимодействия отвечает группа внутренних симметрий  $U(1)$ . Разумеется, что в данной калибровочной группе нет реального объединения взаимодействий. Математически это выражается введением понятия прямого произведения групп. Преобразования, входящие в каждый из сомножителей прямого произведения групп, осуществляются независимо, они связаны с разными степенями свободы исследуемой физической структуры. Эта же ситуация имеет место в модели Вайнберга-Салама-Глэйшоу [14]. В ней электромагнитное и слабое взаимодействия не объединяются в одно, а просто «смешиваются» при сохранении двух разных констант связи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , что соответствует прямому произведению групп  $SU(2) \times U(1)$ .

С рассматриваемой нами здесь точки зрения, калибровочные группы, соответствующие известным фундаментальным взаимодействиям, а именно, электромагнитному с группой симметрии  $U(1)$ , слабому с группой симметрии  $SU(2)$  и сильному с группой симметрии  $SU(3)$ , являются подгруппами обобщенной группы. Они образуют полурешетку групп (т. е. обобщенную группу Клиффорда). Эта обобщенная группа обладает нетривиальными свойствами. Вмещение указанных групп в обобщенную группу позволяет решить проблему унификации фундаментальных взаимодействий, а применение к указанной обобщенной группе теоремы Э. Нётер позволяет получить новые, более общие законы сохранения.

Объединение электрослабых и сильных взаимодействий уже в течение многих лет привлекает внимание многих физиков. Еще более впечатляющей целью является объединение всех известных фундаментальных взаимодействий, включая гравитационное. Надежда на возможность такого объединения связывается с тем, что существует возможность рассматривать гравитационное взаимодействие как калибровочное, т. е. подобно трём другим взаимодействиям. Вместе с тем, имеется и существенная трудность. Группа преобразований, с которой связывают гравитационное взаимодействие, является (как мы уже отмечали), так называемой «геометрической», или группой внешних симметрий, тогда как симметрии всех остальных взаимодействий являются внутренними.

В начале 70-х годов прошлого столетия С. Коулменом и Дж. Мандулой [15] была доказана, так называемая, «по го» теорема о симметрии  $S$ -матрицы. В литературе по физике высоких энергий, элементарных частиц и квантовой теории поля, приводятся различные формулировки этой теоремы. Общим у всех них является утверждение о *невозможности* нетривиального объединения внешних и внутренних симметрий в рамках теории классических групп.

Другими словами, теорема Коулмена–Мандулы утверждает, что *любая группа симметрии, которая содержит группу Пуанкаре  $P$  (группа пространственно-временных симметрий) и группу внутренних симметрий  $G$  в качестве своих подгрупп должна быть прямым произведением этих своих подгрупп  $G \times P$ .*

Последующее вскоре за этим введение в физику идеи суперсимметрии преследовало цель преодолеть препятствия, выдвинутые указанной теоремой, путем расширения самого понятия симметрии. Однако и этот подход по существу не продвинул решение проблемы объединения фундаментальных взаимодействий. Более того, за прошедшие с того времени несколько десятилетий не было достигнуто прогресса и в решении гораздо более скромной задачи: выяснение природы разности масс частиц в мультиплете.

Вместе с тем, как это следует из предыдущих разделов данной работы, обобщенные группы представляют собой наиболее реальную альтернативу применения суперсимметрии. Более того, введение их в физику высоких энергий и элементарных частиц, делает теперь теорему Коулмена–Мандулы неактуальной в классе рассмотренных выше обобщенных групп и описываемых ими симметрий. Иными словами, силу в классе обобщенных групп, эта теорема теряет свой смысл.

Этим, преимущества от введения обобщенных групп в физику, вовсе не ограничиваются. Так, одно из наиболее важных на сегодня понятий современной физики, а именно, понятие спонтанного нарушения симметрии, приобретает в терминах обобщенных групп совершенно новый смысл.

Напомним, что термин «спонтанное нарушение симметрии» (СНС), появился в физическом лексиконе 60 лет назад (см., по этому поводу, [16] и ссылки приведенные там). Он объясняется, обычно, следующим образом.

Имеется система, описываемая некоторыми выражениями (например: лагранжиан, гамильтониан, уравнения движения), обладающими некоторой симметрией, тогда как реальное физическое состояние системы, отвечающее частному уравнению движения, этой симметрией не обладает.

С точки зрения теории обобщенных групп, «спонтанное нарушение симметрии» есть ни что иное, как одно из свойств симметрии системы, а вовсе не физический принцип. Предметом указанной теории и является изучение расширенных (иными словами, «нарушенных») групп симметрий физической системы. В этой связи вспомним, еще раз, о тернарной алгебраической операции симметрии

$$g_1, g_2, g_3 \in G \rightarrow g = g_1 g_2^{-1} g_3, \quad g \in G, \quad (4.1)$$

инвариантности исследуемой физической системы. Очевидно, что, мы имеем дело здесь с

ещё одной из фундаментальных симметрий. Может иметь место, например, такая комбинация:  $g_1 \in U(1)$ ,  $g_2 \in SU(2)$ ,  $g_3 \in SU(3)$ .

Другим важным примером этой симметрии является хорошо известная в физике *CPT* — симметрия фундаментальных взаимодействий, где: *C* — операция замены частицы на античастицу:  $q \rightarrow -q$ ; *P* — операция пространственной инверсии; *T* — операция обращения времени:  $t \rightarrow -t$ .

Как мы уже обращали внимание в [8], обобщенные группы и обобщенные группы с необходимостью появились в дифференциальной геометрии в середине прошлого века в результате создания теории расслоенных пространств (теории составного многообразия по ранней терминологии В. Вагнера). В настоящее время теория расслоенных пространств широко используется в современных калибровочных теориях объединения фундаментальных взаимодействий. При этом теория связностей, построенная В. Вагнером, продолжает оставаться наиболее общей теорией связностей в расслоенных пространствах.

Таким образом, подводя итоги, можно утверждать, что если теория расслоенных пространств является геометрическим фундаментом для построения теории объединения всех известных фундаментальных взаимодействий, то теория обобщенных групп и обобщенных групп является их алгебраическим основанием [17].

#### 4.2 Обобщенные группы и обобщенные группы в физике твердого тела

Симметрии кристаллов играют важную роль в геометрической теории кристаллических структур. Отсюда, очевидной становится роль теории симметрий во всей физике твердого тела.

Полная классификация групп симметрий кристаллов на основе теории классических групп была завершена в конце 30-х годов прошлого века. Согласно представлениям «классической кристаллографии» всего должно наблюдаться 32 кристаллографических класса в 7 сингониях. Однако следует обратить особое внимание, что в эту классификацию не попадают, например, группа икосаэдра и группа пятиугольника.

Вместе с тем, еще в 1984 году, в статье опубликованной в авторитетном журнале «Phys. Rev. Lett.» [18] было предъявлено экспериментальное существование металлического сплава  $Al_{0.86}Mn_{0.14}$  с исключительными свойствами. При исследованиях методами электронной дифракции, полученная дифракционная картина содержала типичные для кристаллов резкие (брэгговские) пики. Однако при этом она имела точечную симметрию икосаэдра, то есть, в частности обладала симметрией пятого порядка, невозможной в трехмерной решетке из соображений классической теории групп.

Новые металлические сплавы, обладающие некристаллографической симметрией, были названы *квазикристаллами*. Т.о. квазикристалл — есть одна из форм организации структуры твердых тел, наряду с кристаллами и аморфными телами (стеклами), характеризующаяся осью симметрии, запрещенной в классической кристаллографии и наличием дальнего порядка.

Как это часто бывает, позднее выяснилось, что с квазикристаллами физики сталкивались еще задолго до их официального открытия, а именно, в 1940 годах. Однако в то время квазикристаллы с икосаэдрической структурой были ошибочно идентифицированы как кубические кристаллы с большой постоянной решетки.

В настоящее время известны сотни видов квазикристаллов, имеющих точечную симметрию икосаэдра, а также восьми-, десяти-, и двенадцатиугольника, что, как уже обращалось внимание, в обычной кристаллографии является невозможным. Более того, многие из них оказываются термодинамически устойчивыми.

Квазикристаллы имеют необычную зависимость сопротивления от температуры: у обычных металлов с падением температуры сопротивление падает, а у квазикристаллов

оно растет. Уникальные свойства квазикристаллов, в первую очередь, сочетание повышенной твердости и низкого коэффициента трения с термической стабильностью (вплоть до  $800^{\circ}\text{C}$ ), делают их чрезвычайно перспективными функциональными материалами. Наиболее перспективно применение квазикристаллов в нанотехнологиях, а именно: в качестве износостойких покрытий, ультрадисперсных наполнителей при создании композиционных материалов и ультрадисперсных модификаторов, при модификации существующих материалов. Все это вскоре сможет существенно изменить мир материалов и сопутствующих технологий.

Оказалось, что структура квазикристаллов прекрасным образом описывается посредством теории обобщенных групп (инверсных полугрупп) [19]. При этом роль теории обобщенных групп и обобщенных групп в физике твердого тела этим не ограничивается. Так, важную роль в строгом математическом объяснении явлений возникновения в твердом теле дальнего порядка, или, так называемой сверхструктуры (сверхрешетки) играет тернарная операция симметрии (3.1). В этой связи, напомним, что согласно общепринятому определению, *сверхструктура (сверхрешетка)* – это кристаллическая структура упорядоченного твердого раствора, состоящая из двух и более кристаллических подрешеток, каждая из которых заполнена преимущественно атомами одного сорта.

Пусть мы имеем дело с кристаллическими структурами, состоящими из подрешеток, а каждое из преобразований  $g_1, g_2, g_3 \in G$  описывают, например, операции трансляций каждой отдельной подрешетки. Тогда операция  $g : \rightarrow g = g_1 g_2^{-1} g_3$ ,  $g \in G$ , описывает возникновение в данной кристаллической структуре сверхрешетки.

Подобные сверхрешетки возникают в кристаллах с изменением температуры и прикладываемого к ним внешнего давления. Для бинарных кристаллов и сплавов (структур, состоящих из двух, вложенных друг в друга подрешеток) тернарная операция сводится к определенной выше операции канонического порядка между элементами обобщенной группы. С точки же зрения классической теории групп многочисленные явления возникновения сверхструктур при фазовых переходах в кристаллах своего объяснения не находят.

Таким образом, имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные и теория указывают на существование нового класса упорядоченных структур в твердом теле, не являющихся ни стеклами, ни кристаллами и обладающих уникальными свойствами.

Еще одним перспективным направлением приложения теории обобщенных групп в физике твердого тела является создание фундаментальных основ для разработки технологий создания высокотемпературных сверхпроводников нового поколения. Речь идет о получении сверхпроводников, способных функционировать при температурах близких к «комнатным», т. е. температурах вблизи  $300^{\circ}\text{K}$ .

Напомним, в этой связи, что лауреат Нобелевской премии по физике (2003) В. Л. Гинзбург поставил в своем знаменитом «Списке наиболее важных и интересных проблем физики начала XXI века» ([20]) решение проблемы высокотемпературной и комнатной сверхпроводимости (ВТСП и КТСП) под номером два. Под номером один в указанном «Списке...» значится проблема управляемого термоядерного синтеза.

Совершенно ясно, что обсуждение проблемы ВТСП и КТСП, с привлечением методов теории обобщенных групп и обобщенных групп, требует отдельного и серьезного рассмотрения. Поэтому мы ограничимся здесь лишь краткими комментариями.

В течение сравнительно длительного времени, в исследованиях по природе сверхпроводимости одно из господствующих положений занимала микроскопическая теория сверхпроводимости Бардина-Купера-Шриффера (теория БКШ [21]). За это достижение указанные авторы были отмечены нобелевской премией за 1972 г. Теория БКШ нацелена, в основном, на объяснение сверхпроводящих свойств материалов и основана на представлениях о сверхтекучих свойствах «бозе-конденсата», образуемого электронными парами.

В используемой в ней модели предполагается, что "спаривание" электронов, находящихся вблизи поверхности Ферми происходит в результате электрон-фононного взаимодействия (т.е. взаимодействия электронов с кристаллической решеткой). Однако теория БКШ оказалась малопродуктивной при попытках объяснить резкое увеличение температуры сверхпроводящего перехода в сплавах и соединениях переходных металлов, структур типа A12, A15, а также сверхпроводящих керамиках и ВТСП-купратов.

Более того, экспериментальные результаты, полученные в последнее время (см., например, [22], [23]), не могут быть пока объяснены в рамках теории БКШ. Для их объяснения начинают формироваться новые представления о механизмах спаривания электронов в сверхпроводниках. Таким образом, в данной области физики твердого тела сложились объективные условия по пересмотру базовых принципов микроскопической теории сверхпроводимости с использованием новых фундаментальных физических и математических принципов симметрии.

Одним из наиболее перспективных механизмов возникновения сверхпроводимости нам представляется механизм, основанный на возникновении сверхрешетки. Отсюда следует, что теория обобщенных групп, описывающая возникновения в кристаллических структурах *супер-* (*сверх-*) *решеток*, становится и в этом случае руководящим принципом конструирования новых перспективных ВТСП и КТСП структур.

Все вышесказанное приводит к необходимости пересмотра ряда положений квантовой, и классической физики твердого тела.

### Заключительные замечания

В представленной работе мы постарались показать новые возможности, которые открываются во многих разделах современной физической науки при введении в неё аппарата теории обобщенных групп и обобщенных групп. Гораздо большее число примеров реализации обобщенных групп и обобщенных групп показывает нам живая Природа, однако этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

В заключении мы выражаем признательность Д. Г. Павлову и сотрудникам НИИ ГКС-ГФ за интерес к работе. И. Э. Булыженкову, А. И. Морозову и З. К. Силагадзе мы благодарны за полезные дискуссии, а М. Г. Иванова за неоценимую помощь. Отдельно автор благодарит А. Ю. Кирия, который ознакомил его с результатами своих исследований по теории сверхпроводимости.

### Литература

- [1] В. В. Вагнер. *Основания дифференциальной геометрии современная алгебра*. Труды четвертого Всесоюзного математического съезда. Том 1, Ленинград (1963). С. 17.
- [2] В. В. Вагнер. *Обобщенные группы*. Доклады АН СССР. Том 84 (1952). С. 1119; УМН. Том 7. Вып. 2 (48), (1951). С. 146.
- [3] В. В. Вагнер. *Теория обобщенных групп и обобщенных групп*. Матем. сборник. Том 32 (74) (1952). С. 545.
- [4] G. V. Preston. *Inverse semigroups*. J. London Math. Soc. Vol. 29 (1954). P. 396–399; G. V. Preston. *The structure of normal inverse semigroups*. Proc. Glasgow Math. Assoc. Vol. 3 (1956). P. 1 – 9.
- [5] А. Клиффорд, Г. Престон (Clifford A. and Preston G.). *Алгебраическая теория полугрупп*. Перевод с англ. Том I, М.: Мир (1972), 285 с; Том II, М.: Мир (1972), 422 с.
- [6] Б. М. Шайн. *Представления обобщенных групп*. Известия ВУЗов, Математика № 3 (28), 1962. С. 164 – 176.
- [7] Н. Бурбаки. *Алгебра. Алгебраические структуры*. Пер. с франц. Гос. изд-во физ-мат литературы. М.: 1962. 516 с.

- [8] В. Г. Жотиков. *Геометрия вариационного исчисления и её приложение к теоретической физике*. Изд-во научно-технической литературы. - Томск (2002). 416 С.
- [9] А. Е. Либер. *К теории обобщенных групп*. Доклады АН СССР. Том 87 (1954). С. 25;
- [10] В. Н. Салий. *О собственных представлениях обобщенных групп матрицами* // Труды молодых ученых Саратовского университета. Вып. матем. Изд-во Саратовского ун-та, Саратов 1964. С. 88–92.
- [11] E. Noether. *Invariante variation problemes* // «Nachrichten von der Kön. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen», Math-Phys. Kl., V. 2, 1918. P. 235; русский перевод: Э. Нетер. *Инвариантные вариационные задачи* // Вариационные принципы механики. Пер. с немецкого. Под ред. Л. С. Полака. М.: Физматгиз, 1959. С. 611.
- [12] Н. П. Клепиков. *Типы преобразований, используемых в физике, и «обмен» частицами*. УФН, Том 152, вып. 3 (1987). С. 521.
- [13] К. В. Степаньянц. *Современная физика высоких энергий*. ГЧГФ. 1 (9), том 5 (2008). С. 84 – 111.
- [14] В. М. Емельянов. *Стандартная модель и её расширения*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 584 с.
- [15] S. Coleman and J. Mandula. Phys. Rev. 159 (1967). P. 1251.
- [16] Д. В. Ширков. *60 лет нарушенным симметриям в квантовой теории*. УФН. Том 179, вып. 6 (2009). С. 581.
- [17] В. Г. Жотиков. *О математическом аппарате теории Великого Объединения и гравитации* // Тезисы докладов 8 Российской гравитационной конференции. М.: (1993). С. 256.
- [18] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, J.W. Cahn. Phys. Rev. Lett., 1984, Vol. 53. P. 1951.
- [19] В. А. Артамонов. *Квазикристаллы и их симметрии*. ФПМ. Том 10, № 3 (2004). С. 3.
- [20] В. Л. Гинзбург «*Физический минимум*» — *какие проблемы физики и астрофизики представляются особенно важными и интересными в начале XXI века*. УФН. Том 177, вып. 4 (2007). С. 346.
- [21] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer. Phys. Rev., Vol. 106 (1957), P. 162; Vol. 108 (1957). P. 1175.
- [22] Y. Takabayshi, A. Ganin *at al.* Science. Vol. 323. 20 March 2009. P. 1585 – 1590.
- [23] Г. С. Бурханов, С. А. Лаченков, Е. П. Хлыбов. ДАН. Том 426. № 5 (2009). С. 613–616.

## Wagner's Generalized Groups and their Applications in Geometry and Physics

V. G. Zhotikov

*Moscow Institute for Physics and Technology, Russia*

*Tomsk State Pedagogical University, Russia*

*Zhotikov@yandex.ru*

Properties important for applications in geometry and physics of a special class of the semigroups are described: Wagner's so-called the generalized groups. The last are known in the foreign literature still as the inverse semigroups. Questions of introduction the theory of the generalized groups and generalized groups in the physics, resulting to the new, more general the laws of preservation and the predictions of the new physical phenomena are discussed.

**Key-words:** inverse semigroups, generalized groups, generalized groups, crystallographic groups, binary and ternary operations, partial mapping.

# ЛАГРАНЖЕВ ПОДХОД В $(N + 1)$ -МЕРНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ "ЭЙНШТЕЙНА-ГАУССА-БОННЕ" И $N$ -МЕРНАЯ МЕТРИКА БЕРВАЛЬДА-МООРА

В. Д. Иващук

*Центр гравитации и фундаментальной метрологии, ВНИИМС, Москва,  
Институт гравитации и космологии, РУДН, Москва  
ivashchuk@mail.ru*

Рассмотрена  $(n + 1)$ -мерная модель "Эйнштейна-Гаусса-Бонне" (ЭГБ). В случае диагональных космологических метрик уравнения движения записаны в виде системы уравнений Лагранжа с лагранжианом, содержащим две "минисуперметрики" на  $\mathbb{R}^n$ : 2-метрику псевдоевклидовой сигнатуры и финслерову 4-метрику, пропорциональную  $n$ -мерной 4-метрике Бервальда-Моора. В случае синхронной временной переменной уравнения движения сводятся к автономной системе дифференциальных уравнений первого порядка. В случае "чистой" модели Гаусса-Бонне выписаны точные решения со степенным и экспоненциальным поведением масштабных факторов (по отношению к синхронной временной переменной). В случае ЭГБ космологии показано, что для всякого нетривиального решения с экспоненциальным поведением масштабных факторов  $a_i(\tau) = A_i \exp(v^i \tau)$  имеет место не более трёх различных чисел среди  $v^1, \dots, v^n$ .

**Ключевые слова:** космологические метрики, модель "Эйнштейна-Гаусса-Бонне", метрика Бервальда-Моора.

## 1 Введение

В настоящей работе рассматривается так называемая  $D$ -мерная гравитационная модель "Эйнштейна-Гаусса-Бонне" (ЭГБ). Действие имеет вид

$$S = \int_M d^D z \sqrt{|g|} \{ \alpha_1 R[g] + \alpha_2 \mathcal{L}_2[g] \}, \quad (1.1)$$

где метрика  $g = g_{MN} dz^M \otimes dz^N$  определена на многообразии  $M$ ,  $\dim M = D$ ,  $|g| = |\det(g_{MN})|$  и

$$\mathcal{L}_2 = R_{MNPQ} R^{MNPQ} - 4R_{MN} R^{MN} + R^2 \quad (1.2)$$

– скаляр Гаусса-Бонне. Здесь  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  суть константы. Появление скаляра Гаусса-Бонне в многомерной гравитации мотивируется теорией струн [1, 2].

В настоящее время модель ЭГБ и её обобщения широко используются в космологии, см. [3, 4] (для  $D = 4$ ), [5]– [12] и ссылки там, в т. ч. для объяснения ускоренного расширения Вселенной в согласии с наблюдательными данными по сверхновым (типа Ia) [13]. В ряде работ [5]– [12] были получены точные космологические решения в модели ЭГБ.

В данной работе рассматриваются космологические решения с диагональными метриками, которые управляются масштабными факторами, зависящими от временной переменной.

При  $\alpha_2 = 0$  получим решение казнеровского типа с метрикой

$$g = -d\tau \otimes d\tau + \sum_{i=1}^n A_i^2 \tau^{2p^i} dy^i \otimes dy^i, \quad (1.3)$$

где  $A_i > 0$  – произвольные константы интегрирования,  $D = n + 1$  и параметры  $p^i$  удовлетворяют соотношениям  $\sum_{i=1}^n p^i = \sum_{i=1}^n (p^i)^2 = 1$  и, следовательно,  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} p^i p^j = 0$ . Для  $D = 4$  это известное решение Казнера [14].

В работе Н. Дерюэль [6] рассматривалась модель ЭГБ. В случае "чистой" модели Гаусса-Бонне с  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_2 \neq 0$  в [6] было получено космологическое решение с метрикой (1.3) для  $n = 4, 5$  и параметрами, удовлетворяющими соотношениям

$$\sum_{i=1}^n p^i = 3, \quad \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} p^i p^j p^k p^l = 0. \quad (1.4)$$

В работе С. Павлюченко [15] это решение было проверено для всех  $n > 3$  (при  $n = 6, 7$  оно было проверено ранее А. Топоренским и П. Третьяковым [9]).

В настоящей работе рассматриваются космологические решения со степенным и экспоненциальным поведением масштабных факторов для произвольных  $n$ . Отметим, что численный анализ космологических решений в ЭГБ-гравитации для  $D = 5, 6$  [11] показал, что сингулярные решения типа (1.3), (1.4) могут возникать как асимптотические решения при определённых начальных условиях по аналогии с тем, как это имеет место для решений казнеровского типа.

## 2 Космологическая модель и её эффективный лагранжиан

### 2.1 Модель

Рассмотрим многообразие

$$M = \mathbb{R}_* \times M_1 \times \dots \times M_n, \quad (2.1)$$

с метрикой

$$g = -e^{2\gamma(t)} dt \otimes dt + \sum_{i=1}^n e^{2\beta^i(t)} dy^i \otimes dy^i, \quad (2.2)$$

где  $M_i$  – 1-мерное многообразие с метрикой  $g^i = dy^i \otimes dy^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Здесь и ниже  $\mathbb{R}_* = (t_-, t_+)$  – открытое подмножество в  $\mathbb{R}$ . (Функции  $\gamma(t)$  и  $\beta^i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , суть гладкие функции на  $\mathbb{R}_*$ .)

Подынтегральное выражение (1.1) при подстановке в него метрики (2.2) запишется следующим образом [6, 16]

$$\sqrt{|g|} \{ \alpha_1 R[g] + \alpha_2 \mathcal{L}_2[g] \} = L + \frac{df}{dt}, \quad (2.3)$$

где

$$L = \alpha_1 e^{-\gamma + \gamma_0} G_{ij} \dot{\beta}^i \dot{\beta}^j - \frac{1}{3} \alpha_2 e^{-3\gamma + \gamma_0} G_{ijkl} \dot{\beta}^i \dot{\beta}^j \dot{\beta}^k \dot{\beta}^l, \quad (2.4)$$

$$\gamma_0 = \sum_{i=1}^n \beta^i \quad \text{и}$$

$$G_{ij} = \delta_{ij} - 1, \quad (2.5)$$

$$G_{ijkl} = (\delta_{ij} - 1)(\delta_{ik} - 1)(\delta_{il} - 1)(\delta_{jk} - 1)(\delta_{jl} - 1)(\delta_{kl} - 1) \quad (2.6)$$

суть, соответственно, компоненты двух "минисуперметрик" на  $\mathbb{R}^n$ . Первая метрика – это известная 2-метрика псевдоевклидовой сигнатуры:  $\langle v_1, v_2 \rangle = G_{ij} v_1^i v_2^j$ , а вторая – это

финслерова 4-метрика:  $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = G_{ijkl} v_1^i v_2^j v_3^k v_4^l$ ,  $v_s = (v_s^i) \in \mathbb{R}^n$ , где  $\langle \dots \rangle$  и  $\langle \dots, \dots \rangle$  суть, соответственно, 2- и 4-линейные симметричные формы на  $\mathbb{R}^n$ . (Здесь и ниже обозначено  $\dot{A} = dA/dt$  и т. д.)

Явный вид функции  $f = f(\gamma, \beta, \dot{\beta})$  в (2.3) приведен в [16].

Вывод (2.4) основан на следующих тождествах [16]:

$$G_{ij} v^i v^j = \sum_{i=1}^n (v^i)^2 - \left( \sum_{i=1}^n v^i \right)^2, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} G_{ijkl} v^i v^j v^k v^l &= \left( \sum_{i=1}^n v^i \right)^4 - 6 \left( \sum_{i=1}^n v^i \right)^2 \sum_{j=1}^n (v^j)^2 \\ &+ 3 \left( \sum_{i=1}^n (v^i)^2 \right)^2 + 8 \left( \sum_{i=1}^n v^i \right) \sum_{j=1}^n (v^j)^3 - 6 \sum_{i=1}^n (v^i)^4. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из определений (2.5) и (2.6) следует, что

$$G_{ij} v^i v^j = -2 \sum_{i < j} v^i v^j, \quad (2.9)$$

$$G_{ijkl} v^i v^j v^k v^l = 24 \sum_{i < j < k < l} v^i v^j v^k v^l. \quad (2.10)$$

В силу (2.10)  $G_{ijkl} v^i v^j v^k v^l = 0$  для  $n = 1, 2, 3$  ( $D = 2, 3, 4$ ). При  $n = 4$  ( $D = 5$ )  $G_{ijkl} v^i v^j v^k v^l = 24 v^1 v^2 v^3 v^4$  и 4-метрика пропорциональна известной 4-метрике Бервальда-Моора [17, 18] (см. также [19, 20] и ссылки там). Напомним, что 4-мерная метрика Бервальда-Моора удовлетворяет соотношениям:  $\langle v, v, v, v \rangle_{BM} = v^1 v^2 v^3 v^4$ . Финслерова 4-метрика с компонентами (2.6) совпадает с точностью до множителя с  $n$ -мерным аналогом 4-метрики Бервальда-Моора.

## 2.2 Уравнения движения

Уравнения движения, отвечающие действию (1.1) имеют следующий вид

$$\mathcal{E}_{MN} = \alpha_1 \mathcal{E}_{MN}^{(1)} + \alpha_2 \mathcal{E}_{MN}^{(2)} = 0, \quad (2.11)$$

где

$$\mathcal{E}_{MN}^{(1)} = R_{MN} - \frac{1}{2} R g_{MN}, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{MN}^{(2)} &= 2(R_{MPQS} R_N^{PQS} - 2R_{MP} R_N^P \\ &- 2R_{MPNQ} R^{PQ} + R R_{MN}) - \frac{1}{2} \mathcal{L}_2 g_{MN}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Уравнения поля (2.11) для метрики (2.2) эквивалентны уравнениям Лагранжа, отвечающим лагранжиану  $L$  из (2.4) [16]:

$$\alpha_1 G_{ij} \dot{\beta}^i \dot{\beta}^j - \alpha_2 e^{-2\gamma} G_{ijkl} \dot{\beta}^i \dot{\beta}^j \dot{\beta}^k \dot{\beta}^l = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ 2\alpha_1 G_{ij} e^{-\gamma+\gamma_0} \dot{\beta}^j - \frac{4}{3} \alpha_2 e^{-3\gamma+\gamma_0} G_{ijkl} \dot{\beta}^j \dot{\beta}^k \dot{\beta}^l \right] - L = 0, \quad (2.15)$$

$i = 1, \dots, n$ . В силу (2.14)

$$L = \frac{2}{3} e^{-\gamma+\gamma_0} \alpha_1 G_{ij} \dot{\beta}^i \dot{\beta}^j. \quad (2.16)$$

### 3 Точные решения в модели Гаусса-Боннэ

Здесь мы полагаем  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_2 \neq 0$ , т. е. мы рассматриваем космологическую модель с действием

$$S_2 = \alpha_2 \int_M d^D z \sqrt{|g|} \mathcal{L}_2[g]. \quad (3.1)$$

Уравнения движения (2.14), (2.15) в этом случае имеют следующий вид

$$G_{ijkl} \dot{\beta}^i \dot{\beta}^j \dot{\beta}^k \dot{\beta}^l = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ e^{-3\gamma + \gamma_0} G_{ijkl} \dot{\beta}^j \dot{\beta}^k \dot{\beta}^l \right] = 0, \quad (3.3)$$

$i = 1, \dots, n$ . Здесь  $L = 0$  в силу (3.2).

Положим  $\ddot{\beta}^i = 0$  для всех  $i$ , что равносильно,

$$\beta^i = c^i t + c_0^i, \quad (3.4)$$

где  $c^i$  и  $c_0^i$  суть константы,  $i = 1, \dots, n$ . Положим также

$$3\gamma = \gamma_0 = \sum_{i=1}^n \beta^i, \quad (3.5)$$

т. е. мы используем "модифицированную гармоническую" временную переменную. Напомним, что в случае  $\alpha_1 \neq 0$  и  $\alpha_2 = 0$  выбор  $\gamma = \gamma_0$  отвечает гармонической временной переменной  $t$  [23].

Уравнения (3.3) при этом удовлетворяются тождественно, а уравнение (3.2) приводит к следующему уравнению связи

$$G_{ijkl} c^i c^j c^k c^l = 24 \sum_{i < j < k < l} c^i c^j c^k c^l = 0. \quad (3.6)$$

#### 3.1 Решение со степенным поведением масштабных факторов

Рассмотрим решение с  $\sum_{i=1}^n c^i \neq 0$ .

Вводя синхронную временную переменную  $\tau = \frac{1}{c} \exp(ct + c_0)$ , где  $c = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n c^i$ ,  $c_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n c_0^i$ , и определяя новые параметры  $p^i = c^i/c$ ,  $A_i = \exp[c_0^i + p^i(\ln c - c_0)]$ , получим "степенное" решение с метрикой

$$g = -d\tau \otimes d\tau + \sum_{i=1}^n A_i^2 \tau^{2p^i} dy^i \otimes dy^i, \quad (3.7)$$

где  $A_i > 0$  – произвольные постоянные, а параметры  $p^i$  удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^n p^i = 3, \quad (3.8)$$

$$G_{ijkl} p^i p^j p^k p^l = 24 \sum_{i < j < k < l} p^i p^j p^k p^l = 0. \quad (3.9)$$

Это решение сингулярно для любого набора параметров [16]. Для  $n = 4, 5$  оно было получено ранее Н. Дерюэль [6] и проверено А. Топоренским и П. Третьяковым [9] ( $n = 6, 7$ ) и С. Павлюченко [15] (для всех  $n > 3$ ).

При  $D > 4$  метрика (3.7) является решением уравнений движения (2.11) тогда и только тогда, когда набор параметров  $p = (p^1, \dots, p^n)$  либо удовлетворяет соотношениям (3.8) и (3.9), либо  $p = (a, b, 0, \dots, 0), (a, 0, b, 0, \dots, 0), \dots$ , где  $a, b$  – произвольные вещественные числа [16].

Для  $D = 2, 3, 4$  метрика (3.7) удовлетворяет уравнениям движения (2.11) для любого набора параметров  $p^i$ .

### 3.2 Решения с экспоненциальным поведением масштабных факторов

Рассмотрим решения с  $\sum_{i=1}^n c^i = 0$ . Вводя синхронную временную переменную  $\tau = t \exp(c_0)$ , где  $c_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n c_0^i$  и определяя параметры  $v^i = c^i \exp(-c_0)$ ,  $B_i = \exp(c_0^i)$ , получим несингулярное космологическое решение с метрикой

$$g = -d\tau \otimes d\tau + \sum_{i=1}^n B_i^2 e^{2v^i \tau} dy^i \otimes dy^i, \tag{3.10}$$

где  $B_i > 0$  – произвольные постоянные и параметры  $v^i$  удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^n v^i = 0, \tag{3.11}$$

$$G_{ijkl} v^i v^j v^k v^l = 24 \sum_{i < j < k < l} v^i v^j v^k v^l = 0. \tag{3.12}$$

**Замечание.** Для  $D = 4$  ( $n = 3$ ) уравнения движения (3.2), (3.3) удовлетворяются тождественно для произвольных (гладких) функций  $\beta^i(t)$  и  $\gamma(t)$ . Это находится в согласии с тем фактом, что в размерности  $D = 4$  действие (3.1) является топологическим инвариантом и его вариация тождественно равна нулю.

## 4 Сведение к автономной системе дифференциальных уравнений первого порядка

Положим теперь  $\gamma = 0$ , т.е. мы рассмотрим "синхронную" временную калибровку. Обозначим  $t = \tau$ . Вводя "хаббловские" переменные  $h^i = \dot{\beta}^i$ , запишем уравнения (2.14) и (2.15) в следующем виде

$$\alpha_1 G_{ij} h^i h^j - \alpha_2 G_{ijkl} h^i h^j h^k h^l = 0, \tag{4.1}$$

$$\left[ 2\alpha_1 G_{ij} h^j - \frac{4}{3} \alpha_2 G_{ijkl} h^j h^k h^l \right] \sum_{s=1}^n h^s + \frac{d}{d\tau} \left[ 2\alpha_1 G_{ij} h^j - \frac{4}{3} \alpha_2 G_{ijkl} h^j h^k h^l \right] - L = 0, \tag{4.2}$$

$i = 1, \dots, n$ , где

$$L = \alpha_1 G_{ij} h^i h^j - \frac{1}{3} \alpha_2 G_{ijkl} h^i h^j h^k h^l. \tag{4.3}$$

В силу (4.1)  $L = \frac{2}{3} \alpha_1 G_{ij} h^i h^j$ . Таким образом, мы приходим к автономной системе дифференциальных уравнений первого порядка на  $h^1(\tau), \dots, h^n(\tau)$ .

При изучении данной системы уравнений наряду с формулами (2.7), (2.8) могут быть использованы следующие полезные соотношения для слагаемых в (4.2) (с  $v^i = h^i$ ) [16]

$$G_{ij} v^j = v^i - S_1, \tag{4.4}$$

$$G_{ijkl} v^j v^k v^l = S_1^3 + 2S_3 - 3S_1 S_2 + 3(S_2 - S_1^2) v^i + 6S_1 (v^i)^2 - 6(v^i)^3, \tag{4.5}$$

$i = 1, \dots, n$ , где  $S_k = S_k(v) = \sum_{i=1}^n (v^i)^k$ .

Рассмотрим неподвижную точку системы уравнений (4.1), (4.2):  $h^i(\tau) = v^i$ , где вектор  $v = (v^i)$  отвечает решению

$$\beta^i = v^i \tau + \beta_0^i, \quad (4.6)$$

и  $\beta_0^i$  суть постоянные,  $i = 1, \dots, n$ . В этом случае мы получим метрику (3.10) с экспоненциальным поведением масштабных факторов.

Положим  $\alpha_1 \neq 0$  и  $\alpha_2 \neq 0$ . Для неподвижной точки  $v = (v^i)$  получим систему полиномиальных уравнений

$$G_{ij}v^i v^j - \alpha G_{ijkl}v^i v^j v^k v^l = 0, \quad (4.7)$$

$$\left[ 2G_{ij}v^j - \frac{4}{3}\alpha G_{ijkl}v^j v^k v^l \right] \sum_{s=1}^n v^s - \frac{2}{3}G_{ij}v^i v^j = 0, \quad (4.8)$$

$i = 1, \dots, n$ , где  $\alpha = \alpha_2/\alpha_1$ .

При  $n > 3$  возникает система полиномиальных уравнений четвёртого порядка.

Тривиальное решение  $v = (v^i) = (0, \dots, 0)$  отвечает плоской метрике  $g$ .

Для любого нетривиального решения  $v$  получим  $\sum_{i=1}^n v^i \neq 0$  (в противном случае из (4.8) следует  $G_{ij}v^i v^j = \sum_{i=1}^n (v^i)^2 - (\sum_{i=1}^n v^i)^2 = 0$ , откуда получим  $v = (0, \dots, 0)$ ).

Рассмотрим изотропный случай  $v^1 = \dots = v^n = a$ . Тогда система уравнений (4.7), (4.8) сводится к уравнению

$$n(n-1)a^2 + \alpha n(n-1)(n-2)(n-3)a^4 = 0. \quad (4.9)$$

Для  $n = 1$  параметр  $a$  произволен и  $a = 0$  для  $n = 2, 3$ . При  $n > 3$  ненулевое решение уравнения (4.9) существует лишь при  $\alpha < 0$  и в этом случае

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{|\alpha|(n-2)(n-3)}}. \quad (4.10)$$

Здесь возникает проблема классификации всех решений уравнений (4.7), (4.8) при заданном  $n$ . В литературе рассматривались (для ряда размерностей) некоторые частные решения вида  $(a, \dots, a, b, \dots, b)$ , в контексте космологии с двумя фактор-пространствами, см. например, [5, 7, 8, 12].

Ниже мы выделим три свойства решений системы полиномиальных уравнений (4.7), (4.8):

**i)** для всякого решения  $v = (v^1, \dots, v^n)$  вектор  $(-v) = (-v^1, \dots, -v^n)$  также является решением;

**ii)** для всякого решения  $v = (v^1, \dots, v^n)$  и всякой перестановки  $\sigma$  набора индексов  $\{1, \dots, n\}$  вектор  $v = (v^{\sigma(1)}, \dots, v^{\sigma(n)})$  также является решением;

**iii)** для всякого нетривиального решения  $v = (v^1, \dots, v^n) \neq (0, \dots, 0)$  имеется не более трёх различных чисел среди  $v^1, \dots, v^n$ .

Первое утверждение тривиально. Второе следует из соотношений (2.7), (2.8), (4.4), (4.5).

Докажем утверждение **iii)**. Предположим, что существует нетривиальное решение  $v = (v^1, \dots, v^n)$  с более чем тремя различными числами среди  $v^1, \dots, v^n$ . В силу (4.5), (4.8) и  $\sum_{i=1}^n v^i \neq 0$  каждое число  $v^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) удовлетворяет кубическому уравнению  $C_0 + C_1 v^i +$

$C_2(v^i)^2 + C_3(v^i)^3 = 0$  с  $C_3 \neq 0$ , и, следовательно, не более трёх чисел среди  $v^i$  могут быть различными. Таким образом, мы приходим к противоречию. Утверждение **iii**) доказано.

Это означает, что в будущих исследованиях решений уравнений (4.7), (4.8) для произвольных  $n$  лишь следующие нетривиальные случаи должны быть рассмотрены: 1)  $v = (a, \dots, a)$  (см. (4.10)); 2)  $v = (a, \dots, a, b, \dots, b)$  ( $a \neq b$ ); 3)  $v = (a, \dots, a, b, \dots, b, c, \dots, c)$  ( $a \neq b$ ,  $b \neq c$ ,  $a \neq c$ ). В силу **i**) можно также положить  $a > 0$ .

### Заключение

В настоящей работе рассматривалась  $(n + 1)$ -мерная модель "Эйнштейна-Гаусса-Бонне". Для диагональных космологических метрик уравнения движения были записаны в виде уравнений Лагранжа с лагранжианом, управляемым двумя "минисуперметриками" на  $\mathbb{R}^n$ : i) псевдоевклидовой 2-метрикой и ii) финслеровой 4-метрикой. Финслерова 4-метрика пропорциональна  $n$ -мерной метрике Бервальда-Моора. Таким образом, найдено достаточно естественное применение  $n$ -мерной метрики Бервальда-Моора ( $n = 4, 5, \dots$ ) в  $(n + 1)$ -мерной гравитации с членом Гаусса-Бонне.

В случае "чистой" модели Гаусса-Бонне нами выведены два точных решения: со степенным и экспоненциальным поведением масштабных факторов (по отношению к синхронной временной переменной). Как уже ранее отмечалось, "степенное" решение было получено впервые в [6] для  $n = 4, 5$  и проверено в [15] для произвольных  $n$ .

В случае синхронной временной калибровки уравнения движения, как было показано, сводятся к автономной системе дифференциальных уравнений первого порядка. Для  $\alpha_1 \neq 0$  и  $\alpha_2 \neq 0$  также показано, что для всякого нетривиального решения с экспоненциальным поведением масштабных факторов  $a_i(\tau) = A_i \exp(v^i \tau)$  имеет место не более трёх различных чисел среди  $v^1, \dots, v^n$ . Это означает, что решения такого типа имеют "ограниченную" анизотропию. Эти и более общие решения могут быть использованы для построения космологических решений, описывающих ускоренное расширение нашего 3-мерного фактор-пространства и (возможно) достаточно малую вариацию эффективной гравитационной постоянной, см. [21, 22] и ссылки там.

### Благодарности

Настоящая работа была частично поддержана РФФИ, грант №. 09-02-00677-а. Автор также признателен А. В. Топоренскому и Д. Г. Павлову за стимулирующие доклады на семинаре РУДН-ВНИИМС, а также участникам V-ой Международной конференции "Финслеровы обобщения теории относительности" (27 сентября – 3 октября 2009 г., Москва-Фрязино), где были доложены результаты данной работы, за многочисленные полезные обсуждения.

### Литература

- [1] B. Zwiebach, *Phys. Lett.* **B 156**, 315 (1985).
- [2] D. Gross and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B 277**, 1 (1986).  
D. J. Gross and J. H. Sloan, *Nucl. Phys.* **B 291**, 41 (1987);  
R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, *Phys. Lett.* **B 191**, 354 (1987);  
R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys.* **B 293**, 385 (1987).
- [3] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **4**, 115-146 (2007); hep-th/0601213.
- [4] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov and S. Zerbini, One-loop effective action for non-local modified Gauss-Bonnet gravity in de Sitter space, arXiv: 0905.0543.
- [5] H. Ishihara, *Phys. Lett.* **B 179**, 217 (1986).
- [6] N. Deruelle, *Nucl. Phys.* **B 327**, 253 (1989).

- [7] E. Elizalde, A.N. Makarenko, V.V. Obukhov, K.E. Osetrin and A.E. Filippov, *Phys. Lett.* **B 644**, 1–6 (2007); hep-th/061121.
- [8] K. Bamba, Z.-K. Guo and N. Ohta, *Prog. Theor. Phys.*, **118**, 879–892 (2007), arXiv: 0707.4334.
- [9] A. Toporensky and P. Tretyakov, *Grav. Cosmol.* **13**, 207–210 (2007); arXiv: 0705.1346.
- [10] I. V. Kirnos, A. N. Makarenko, S. A. Pavluchenko and A. V. Toporensky, The nature of singularity in multimerных anisotropic Gauss-Bonnet cosmology with a perfect fluid, arXiv: 0906.0140.
- [11] S. A. Pavluchenko and A. V. Toporensky, *Mod. Phys. Lett.* **A 24**, 513–521 (2009).
- [12] I. V. Kirnos and A. N. Makarenko, Accelerating cosmologies in Lovelock gravity with dilaton, arXiv: 0903.0083.
- [13] M. Kowalski, D. Rubin et al., Improved Cosmological Constraints from New, Old and Combined Supernova Datasets, arXiv: 0804.4142.
- [14] E. Kasner, *Amer. J. Math.*, **3**, 217 (1921).
- [15] S. A. Pavluchenko, On the general features of Bianchi-I cosmological models in Lovelock gravity, *Phys. Rev.* **D 80** (2009), 107501; arXiv: 0906.0141.
- [16] V. D. Ivashchuk, On cosmological type solutions in multidimensional model with Gauss-Bonnet term, to be published in IJGMMP.
- [17] L. Berwald, *Ann. Math.* **48**, 755–781, (1947).
- [18] A. Moór, Ergänzung, *Acta Math.* **91**, 187–188 (1954).
- [19] G. Bogoslovsky, *SIGMA* **4**, 045, 21 pages, (2008); arXiv: 0712.1718.
- [20] G. I. Garas'ko and D. G. Pavlov, Construction of the pseudo Riemannian geometry on the base of the Berwald-Moor geometry; math-ph/0609009.
- [21] V. Baukh and A. Zhuk, *Phys Rev.* **D 73**, 104016 (2006).
- [22] V. D. Ivashchuk, S. A. Kononogov and V. N. Melnikov, *Grav. Cosmol.* **14**, No. 3, 235–240 (2008); arXiv: 0901.0025.
- [23] V. D. Ivashchuk, V. N. Melnikov and A. I. Zhuk, *Nuovo Cimento* **B 104**, No 5, 575–581 (1989).
- [24] D. Lowelock, *J. Math. Phys.* **12**, No. 3, 498–501 (1971).

## Lagrange approach in $(n + 1)$ -dimensional "Einstein-Gauss-Bonnet" model and $n$ -dimensional Berwald-Moor metric

**V. D. Ivashchuk**

*Center for Gravitation and Fundamental Metrology, VNIIMS, Moscow, Russia,  
Institute of Gravitation and Cosmology, Peoples Friendship University, Moscow, Russia  
ivashchuk@mail.ru*

A  $(n+1)$ -dimensional Einstein-Gauss-Bonnet (EGB) model is considered. For diagonal cosmological metrics the equations of motion are written as a set of Lagrange equations with the Lagrangian containing two "minisuperspace" metrics on  $\mathbb{R}^n$ : a 2-metric of pseudo-Euclidean signature and Finslerian 4-metric that is proportional to  $n$ -dimensional Berwald-Moor 4-metric. For the case of synchronous time variable the equations of motion reduce to an autonomous system of first order differential equations. For the case of the "pure" Gauss-Bonnet model exact solutions with power-law and exponential dependence of scale factors (w.r.t. synchronous time variable) are presented. In the case of EGB cosmology, it is shown that for any non-trivial solution with exponential dependence of scale factors  $a_i(\tau) = A_i \exp(v^i \tau)$  there are no more than three different numbers among  $v^1, \dots, v^n$ .

**Key-words:** cosmological metrics, "Einstein-Gauss-Bonnet" model, Berwald-Moor metric.

# ФИНСЛЕРОВЫ $N$ -СПИНОРЫ В РАМКАХ РЕЛЯЦИОННОГО ПОДХОДА

С. В. Болохов

*Российский университет дружбы народов, Москва*

*bol-rqs@yandex.ru*

Показана связь математических объектов, называемых финслеровыми спинорами, с аппаратом реляционной модели пространства-времени. Указан ряд физических приложений формализма финслеровых спиноров в контексте реляционного подхода.

**Ключевые слова:** финслерова геометрия, спиноры, реляционный подход.

## 1 Введение

Данная работа посвящена рассмотрению математических объектов, называемых финслеровыми  $N$ -спинорами, в контексте их связи с аппаратом реляционной теории пространства-времени и рядом физических приложений.

Исторически идея финслеровых спиноров возникла в русле реляционной модели как специфический способ обобщения картановских 2-спиноров на случай высших размерностей (наряду со стандартным способом, основанным на идеологии алгебр Клиффорда). Мы начнем с краткого обзора принципов реляционной теории (а в более широком смысле – реляционного подхода как особой методологии при построении физической теории).

Реляционный подход к физике наиболее полно и последовательно представлен в работах Владимирова и его группы [1–7]. Одной из мотиваций для развития данного подхода стал поиск наиболее адекватного представления о природе классического пространства-времени и физических взаимодействий, который бы мог разрешить ряд концептуальных трудностей традиционной квантовополевой парадигмы. Сегодня распространено убеждение, что современные квантовополевые модели не решают проблем, связанных с описанием физических процессов на планковских масштабах длин и энергий, поскольку на этих масштабах традиционное представление о пространстве-времени как о гладком многообразии, по-видимому, теряет смысл. На сцену выходит проблема корректного совмещения принципов теории относительности с квантовой теорией, которая формулируется как проблема квантования гравитации. Многолетние безуспешные попытки её решения заставляют предположить, что искомая теория, возможно, должна быть сформулирована на совершенно иных концептуальных предпосылках, значительно корректирующих наши представления о природе пространства-времени, материи и фундаментальных взаимодействий.

Ключевой особенностью реляционного подхода является отказ от традиционного представления о пространстве-времени как об априорно заданном гладком многообразии, на фоне которого разворачивается динамика физической системы. Реляционная парадигма предполагает вторичный и существенно макроскопический характер пространства-времени, природа которого связывается с результатом статистического наложения большой совокупности микроскопических процессов, дающих в усредненном пределе классическую геометрию как некоторый эффективный фон. Можно сказать, что пространство-время рассматривается как особая система отношений (relations) между микрообъектами – это и есть ключевая идея реляционного подхода [7].

## 2 Математический аппарат реляционной теории

Отказ от пространства-времени как самостоятельной категории влечет за собой необходимость найти адекватную математическую модель, которая бы на микромасштабах соответствовала реляционному характеру пространства-времени, а на макромасштабах приводила бы к эффективной римановой геометрии ОТО и привычным соотношениям теории поля. Как оказалось, достаточно перспективным для этих целей представляется математический аппарат теории систем отношений над различными полями и алгебрами, истоки которого возникли в работах новосибирских математиков 60-х гг. [8,9] Данный аппарат в применении к физике микромира получил развитие в работах Ю. С. Владимирова [7].

### 2.1 Множества элементов

В соответствии с принципами реляционной теории пространство состояний частиц и динамика многочастичной системы описывается в терминах *бинарной геометрии*, заданной на двух абстрактных множествах элементов  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  (представляющих собой математический прообраз "начального" и "конечного" квантового состояний системы в духе теории S-матрицы.) Элементы первого множества обозначаются латинскими буквами ( $i, k, j, \dots$ ), а второго – греческими ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ).

Задается отображение  $U : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathbf{C}$ , которое каждой паре элементов  $\{i \in \mathcal{M}, \alpha \in \mathcal{N}\}$  из разных множеств ставит в соответствие комплексное число  $u_{i\alpha} \in \mathbf{C}$ , называемое парным отношением.

Бинарная геометрия определяется выделением такого подкласса указанных отображений, которые удовлетворяют так называемому принципу фундаментальной симметрии (см. ниже). Здесь надо отметить, что наша привычная геометрия носит *унарный* характер, поскольку строится лишь на одном множестве точек. При этом бинарная геометрия оказывается в известном смысле первичной по отношению к унарной, поскольку допускает процедуру перехода к последней путем специальной процедуры склейки элементов из множеств  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  [7].

### 2.2 Фундаментальная симметрия

Принцип фундаментальной симметрии означает, что существует универсальный алгебраический закон, связывающий всевозможные парные отношения между элементами произвольно выбранных подмножеств фиксированной размерности.

Именно, существуют пара целых положительных чисел  $r, s$  ("ранг") и не равная тождественно нулю алгебраическая функция  $\Phi_{(r,s)}(\bullet, \bullet, \dots, \bullet)$  от  $r \times s$  аргументов, которая обращается в нуль при подстановке в нее набора всевозможных  $r \times s$  парных отношений между любыми  $r$  элементами первого и  $s$  элементами второго множества:

$$\begin{aligned} \exists r, s \in \mathbb{Z}_+, \quad \Phi_{(r,s)}(\underbrace{\bullet, \bullet, \dots, \bullet}_{r \times s}) \neq 0 : \\ \forall \underbrace{(i, j, \dots, m)}_r \subset \mathcal{M}, \quad \underbrace{(\alpha, \beta, \dots, \epsilon)}_s \subset \mathcal{N} : \quad \Phi_{(r,s)}(u_{i\alpha}, \dots, u_{m\epsilon}) \Big|_{\substack{(i, j, \dots, m) \subset \mathcal{M} \\ (\alpha, \beta, \dots, \epsilon) \subset \mathcal{N}}} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

**Определение.** Совокупность, состоящая из пары множеств  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ , отображения  $U$  и функции  $\Phi_{(r,s)}$ , удовлетворяющей свойству фундаментальной симметрии, называется *бинарной системой комплексных отношений (БСКО) ранга  $(r,s)$* :

$$\text{БСКО}(r, s) \equiv (\mathcal{M}, \mathcal{N}; \quad U : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathbf{C}; \quad \Phi_{(r,s)}(\bullet, \bullet, \dots, \bullet)) \quad (2)$$

Для случая так называемой невырожденной БСКО симметричного ранга  $(r, r)$  (именно такие системы рассматриваются в дальнейшем) функциональное уравнение (1) среди всех классов своих решений для функции  $\Phi_{(r,s)}$  допускает простое решение, имеющее вид антисимметричной формы (определителя) от набора всевозможных парных отношений между двумя подмножествами порядка  $r$ :

$$\Phi_{(r,r)}(u_{i\alpha}, u_{i\beta}, \dots, u_{j\gamma}) = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & \dots & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & \dots & u_{k\gamma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & \dots & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

где сами бинарные отношения могут быть параметризованы в виде

$$u_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-1} i^l \alpha^l. \quad (4)$$

Набор комплексных величин  $i^1, \dots, i^{r-1}$  называются *параметрами* элемента  $i$  (соответственно,  $\alpha^1, \dots, \alpha^{r-1}$  суть параметры элемента  $\alpha$ ).

### 2.3 Элементарный базис

Параметры элементов, возникшие в (4), являются аналогом понятия координат точки в обычной геометрии. Прийти к параметрам можно следующим образом. Выделим в законе (1) по  $r - 1$  элементов в каждом из множеств  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  и назовем их *эталонными*. (Здесь и далее рассматриваются только БСКО симметричного ранга.) Тогда отношение  $u_{i\alpha}$  между двумя произвольными (неэталонными) элементами  $i, \alpha$  полностью определяется остальными отношениями, фигурирующими в (1). Их число, равное, очевидно,  $r^2 - 1$ , распадается на  $(r - 1)^2$  отношений между эталонными элементами (их можно считать раз и навсегда заданными, т. е. фиксированными) и на  $2(r - 1)$  отношений (назовем их *параметрами*) элементов  $i, \alpha$  к эталонным. Таким образом, в теории БСКО ранга  $(r, r)$  парное отношение  $u_{i\alpha}$  в соответствии с (4) характеризуется  $r - 1$  параметрами элемента  $i$  и аналогичными  $r - 1$  параметрами элемента  $\alpha$ .

Система эталонных элементов называется *элементарным базисом* БСКО. Базис – это своеобразный аналог тела системы отсчета, в которой каждый элемент задается своими координатами (параметрами) по отношению к базисным элементам.

Выбор системы эталонных элементов достаточно произволен. В общем случае переход между двумя элементарными базисами задается фундаментальным представлением группы  $GL(r - 1, \mathbb{C})$  в пространстве параметров элементов:

$$i'^m = C_n^m i^n, \quad \alpha'^m = K_n^m \alpha^n. \quad (5)$$

Коэффициенты  $C_n^m$  и  $K_n^m$  определяют класс используемых бинарных систем отношений. В ряде случаев можно считать их взаимно комплексно сопряженными.

### 2.4 Фундаментальные отношения и 2-компонентные спиноры

В теории БСКО ранга  $(r, r)$  важную роль играют так называемые *фундаментальные*  $(r-1) \times (r-1)$  отношения – отличные от нуля миноры максимального ранга в (3). Легко показать, используя (4), что фундаментальные отношения раскладываются в произведения детерминантов, составленных из параметров элементов одного сорта (т. е. относящихся либо к множеству  $\mathcal{M}$ , либо к множеству  $\mathcal{N}$ ):

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \dots \\ i & k & \dots \end{bmatrix} \equiv \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & \dots \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & \dots \\ i^2 & k^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \dots \\ \alpha^2 & \beta^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (6)$$

В теории БСКО минимального невырожденного ранга (3,3) естественным образом возникает понятие двухкомпонентных спиноров. В самом деле, в такой теории элементы множеств характеризуются набором из двух комплексных параметров  $i \rightarrow (i^1, i^2), \alpha \rightarrow (\alpha^1, \alpha^2)$ , т.е. являются векторами двумерного комплексного пространства  $\mathbf{C}^2$ , в котором действует группа  $GL(2, C)$ , задаваемая линейными преобразованиями (5). Ограничимся такими преобразованиями, которые оставляют инвариантными  $2 \times 2$ -определители справа в (6), каждый из которых представляет собой антисимметричную форму вида  $[i, k] = i^1 k^2 - i^2 k^1, [\alpha, \beta] = \alpha^1 \beta^2 - \alpha^2 \beta^1$ . Пространство двухкомпонентных комплексных столбцов оснащенное указанной инвариантной антисимметричной формой  $[\bullet, \bullet]$ , является пространством обычных картановских 2-спиноров. При этом общая группа  $GL(2, C)$  сужается до 6-параметрической группы преобразований  $SL(2, C)$  (отвечающей за спинорное представление группы Лоренца), которая фиксирует привилегированный класс элементарных базисов (систем эталонных элементов), аналогичных инерциальным системам отсчета в СТО.

Заметим, что указанные антисимметричные формы задают метрику  $\epsilon_{\alpha\beta}$  на множествах  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$ , что позволяет ввести ко- и контравариантные компоненты спиноров и развить обычную спинорную алгебру.

Если далее потребовать, чтобы преобразования (5) оставляли инвариантным парное отношение  $u_{i\alpha}$ , то они будут соответствовать 3-параметрической группе  $SU(2)$ , изоморфной (с точн. до фактора  $Z_2$ ) группе вращений  $SO(3)$  в трехмерном пространстве. Можно сказать, что БСКО ранга (3, 3) обуславливает 4-мерность и сигнатуру классического пространства-времени, а также позволяет выявить его спинорную структуру. Отметим, что последняя не закладывается в теорию изначально в качестве постулата (как это делается, скажем, в твисторной программе Пенроуза), а возникает достаточно естественным путем из свойств бинарной геометрии.

### 3 Финслеровы N-спиноры

Реляционная теория допускает БСКО различных рангов. Из изложенного в предыдущем пункте следует, что в общем случае элементы БСКО ранга  $(r, r)$  описываются  $(r-1)$ -мерными комплексными векторами вида  $i = (i^1 \dots i^{r-1}) \in \mathbf{C}^{r-1}$ , закон преобразования которых можно свести к группам  $SL(r-1, C)$  или  $SU(r-1)$  требованием инвариантности соответствующих антисимметричных форм в (6) и парных отношений (4). При этом на смену стандартному 2-компонентному спинору приходит обобщенное понятие *финслерова спинора*. Данные объекты можно рассматривать как один из вариантов обобщения картановских 2-спиноров наряду с обычным подходом, где спиноры в пространствах высшей размерности конструируются на базе представлений алгебр Клиффорда над полем действительных чисел.

Дадим более формальное определение пространства финслеровых N-спиноров.

#### 3.1 Пространство финслеровых спиноров

Рассмотрим N-мерное комплексное векторное пространство  $\mathbf{C}^N$ . На любых N векторах данного пространства зададим антисимметричную комплекснозначную N-форму  $[\bullet, \bullet, \dots, \bullet]$  ("полисимплектическое скалярное произведение"), инвариантную относительно действия фундаментального представления группы  $SL(N, C)$  в пространстве  $\mathbf{C}^N$ :

$$\forall \underbrace{\xi, \eta, \dots, \chi}_{N \text{ vectors}} \in \mathbf{C}^N \exists [\xi, \eta, \dots, \chi] = \varepsilon_{abc\dots} \xi^a \eta^b \chi^c \dots = \text{inv}[SL(N, C)]; \quad (1)$$

При этом действие группы  $SL(N, C)$  задается обычной комплексной матрицей  $D$  с единичным детерминантом:

$$\xi' = D\xi, \quad \det D = 1; \quad D \in SL(N, C) \quad (2)$$

**Определение.**  $N$ -мерное комплексное векторное пространство  $\mathbf{C}^N$ , оснащенное полисимплектическим скалярным  $N$ -произведением (1), называется пространством финслеровых  $N$ -спиноров  $FS^N$  [4]:

$$FS^N = \left( \mathbf{C}^N, \underbrace{[\bullet, \bullet, \dots, \bullet]}_{N \text{ arguments}} = \text{inv}[SL(N, C)] \right) \quad (3)$$

Исходя из данного определения, можно заключить, что произвольный элемент БСКО ранга  $(r, r)$  представляет собой финслеров  $(r - 1)$ -спинор с ассоциированной группой преобразования  $SL(r - 1, C)$ .

### 3.2 Финслерова геометрия и групповая структура

Чтобы прояснить смысл термина “финслеров спинор”, рассмотрим конструкцию, которая позволит естественным образом ассоциировать данный тип математических объектов с некоторой финслеровой геометрией подобно тому, как обычные 2-спиноры связаны с геометрией Минковского. Покажем, каким образом симплектическая геометрия в комплексном пространстве  $FS^N$  индуцирует финслерову геометрию в вещественном векторном пространстве размерности  $N^2$ .

Рассмотрим наряду с пространством  $FS^N$  дуально сопряженное ему пространство  $FS^{*N}$ . Образовав их тензорное произведение, можно рассматривать спинтензоры второго ранга  $X^{ab} \in FS^N \otimes FS^{*N}$ . Выделим среди них пространство эрмитовых спинтензоров, изоморфное пространству эрмитовых  $N \times N$ -матриц  $\text{Herm}(N) = \{X : X^+ = X\}$ .

По отношению к некоторому базису  $\tau_A$  в этом пространстве всякая эрмитова матрица  $X$  может быть представлена набором вещественных компонент  $X^A$  ( $A = 0, \dots, N^2 - 1$ ) и интерпретирована как вектор-столбец в некотором вещественном  $N^2$ -мерном пространстве  $\mathcal{R}^{N^2}$ :

$$\exists \tau_A \in \text{Herm}(N) : X = X^A \tau_A, \quad A = 0, \dots, N^2 - 1, \quad \{X^A\} \in \mathcal{R}^{N^2} \quad (4)$$

Выбрав естественную нормировку базиса, можно легко выразить компоненты  $X^A$ :

$$X^A = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tau^A X); \quad \text{Tr}(\tau^A \tau_B) = 2\delta_B^A; \quad (5)$$

Определим длину вектора  $X^A$  как корень  $N$ -й степени из детерминанта матрицы  $X$ . (Естественность такого определения станет очевидна далее.) При этом в силу того, что детерминант матрицы  $N \times N$  есть  $N$ -форма по компонентам  $X^A$ , мы будем иметь

$$|X|^N = \det(X) = G_{A_1 A_2 \dots A_N} X^{A_1} X^{A_2} \dots X^{A_N}. \quad (6)$$

Объект  $G_{A_1 A_2 \dots A_N}$  задает в общем случае неквадратичную (финслерову) метрику в пространстве  $\mathcal{R}^{N^2}$ , инвариантную относительно некоторого представления группы  $SL(N, C)$  на векторах этого пространства. Явный вид этого представления задается следующим образом. Каждой матрице  $D \in SL(N, C)$ , действующей в пространстве финслеровых  $N$ -спиноров  $FS^N$  по правилу  $\xi' = D\xi$ , отвечает некоторая матрица  $L(D)$  порядка  $N^2 \times N^2$ ,

действующая в пространстве  $\mathcal{R}^{N^2}$  на вектора  $X^A$  по правилу  $X^{A'} = L(D)_B^A X^B$ . Матрица  $L(D)$  определяется выражением [4]

$$L(D)_B^A = \frac{1}{2} \text{Tr} (\tau^A D \tau_B D^+). \quad (7)$$

Отображение  $SL(N, C) \rightarrow L(D)$  является прямым обобщением известного 2-1-эпиморфизма  $SL(2, C) \rightarrow O_+^\uparrow(1, 3)$  группы  $SL(2, C)$  в собственную ортохронную группу Лоренца. Наличие данного эпиморфизма, как известно, является связующим звеном между комплексным пространством 2-спиноров и вещественным пространством Минковского  $M_4$  с римановой геометрией. Предложенное обобщение аналогичным образом ассоциирует с пространством финслеровых спиноров  $FS^N$  некоторое вещественное  $N^2$ -мерное пространство  $\mathcal{R}^{N^2}$  с метрическим тензором  $N$ -го ранга, который при  $N > 2$  задает финслерову геометрию. Группа  $L(D)$  является аналогом группы Лоренца, действующей в этом пространстве и оставляющей инвариантной метрическую форму (6), поскольку детерминант от спинтензора  $\det(X)$  инвариантен относительно  $SL(N, C)$ .

### 3.3 Частные случаи и физические приложения

Рассмотрим некоторые частные случаи изложенной схемы.

#### 1. БСКО ранга (3,3).

Данный случай соответствует  $N = 2$  и отвечает обычным картановским спинорам.

Элементы БСКО(3,3):  $i^s, k^s \in FS^2$ ;  $\alpha^{\dot{r}}, \beta^{\dot{r}} \in FS^{*2}$ .

Спинтензор:  $X^{s\dot{r}} = i^s \alpha^{\dot{r}} \pm k^s \beta^{\dot{r}} = x^0 \delta^{s\dot{r}} + \sum_{l=1}^3 x^l \sigma_l^{s\dot{r}} \equiv x^\mu \tau_\mu \in FS^2 \otimes FS^{*2}$

Отображение пространств:  $FS^2 \otimes FS^{*2} \rightarrow \mathcal{R}^4$ .

Базис:  $\tau_\mu \equiv \sigma_\mu = (I, \sigma_i)$ , где  $\sigma_i$  – матрицы Паули.

Группа:  $D \in SL(2, C) \rightarrow L(D)_\nu^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr} (\sigma^\mu D \sigma_\nu D^+) \in O(1, 3)$

Метрика в пространстве  $\mathcal{R}^4$ :  $g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \text{inv}[O(1, 3)]$ ,  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .

Таким образом, пространство  $\mathcal{R}^4$  есть пространство Минковского. В реляционной теории пространства-времени возможность описать геометрию Минковского на основе БСКО(3,3) имеет ключевое значение, поскольку позволяет сформулировать единообразный подход к описанию как пространственно-временных характеристик взаимодействующих частиц, так и пространства их внутренних состояний (которое можно ассоциировать с БСКО высших рангов).

#### 2. БСКО ранга (4,4).

Данный случай соответствует  $N = 3$  и отвечает финслеровым 3-спинорам.

Элементы БСКО(4,4):  $i^s, k^s, j^s \in FS^3$ ;  $\alpha^{\dot{r}}, \beta^{\dot{r}}, \gamma^{\dot{r}} \in FS^{*3}$ .

Спинтензор:  $X^{s\dot{r}} = i^s \alpha^{\dot{r}} \pm k^s \beta^{\dot{r}} \pm j^s \gamma^{\dot{r}} \equiv X^A (\tau^{s\dot{r}})_A \in FS^3 \otimes FS^{*3}$

Отображение пространств:  $FS^3 \otimes FS^{*3} \rightarrow \mathcal{R}^9$ .

Группа:  $D \in SL(3, C) \rightarrow L(D)_B^A = \frac{1}{2} \text{Tr} (\tau^A D \tau_B D^+)$

Финслерова (кубичная) метрика в пространстве  $\mathcal{R}^9$ :

$$\begin{aligned} G_{ABC} X^A X^B X^C &= X^8 [(X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2] + \\ &+ 2X^1 (X^4 X^6 + X^5 X^7) - X^0 [(X^4)^2 + (X^5)^2 + (X^6)^2 + (X^7)^2] + \\ &+ 2X^2 (X^5 X^6 - X^4 X^7) + X^3 [(X^4)^2 + (X^5)^2 - (X^6)^2 - (X^7)^2] \end{aligned} \quad (8)$$

БСКО ранга (4,4) в реляционной модели используется при описании пространства внутренних степеней свободы частицы и ее свойств по отношению к взаимодействиям, отвечающим калибровочным группам  $SU(2) \times U(1)$  и  $SU(3)$  [3, 6, 7].

### 3. БСКО ранга (5,5).

Данному случаю отвечают финслеровы 4-спиноры и 16-мерное вещественное финслерово пространство  $\mathcal{R}^{16}$ , конструируемое отображением  $FS^4 \otimes FS^{*4} \rightarrow \mathcal{R}^{16}$  по правилам, аналогичным вышеизложенным. Оно оснащено финслеровой метрикой 4-го порядка  $G_{ABCD}X^AX^BX^CX^D = inv[L(D)]$ , инвариантной относительно соответствующего представления группы  $SL(4, C)$ , задаваемого матрицей  $L(D)$  по правилу (7). Метрика имеет достаточно громоздкий вид и будет выписана ниже в специальных обозначениях.

На примере финслеровых 4-спиноров мы укажем два весьма простых, но примечательных свойства рассматриваемого формализма, которые могут сделать его полезным в теории твисторов и суперсимметрии.

#### 4-мерная редукция.

Рассмотрим сужение группы  $SL(4, C)$  до ее подгруппы  $SL(2, C)$ , что фактически отвечает переходу к группе преобразований 4-мерного пространства-времени. При этом группа изометрий  $L(D)$  формы  $G_{ABCD}X^AX^BX^CX^D$  сузится до некоторой подгруппы  $L(D_2)$ , где матрица  $D_2 \in SL(2, C) \subset SL(4, C)$ . Матрицы  $L(D_2)_B^A$  фактически реализуют некоторое представление 6-параметрической группы Лоренца  $O(1, 3)$  в пространстве  $\mathcal{R}^{16}$ ; эта группа действует по очевидному правилу

$$X^{A'} = L(D_2)_B^A X^B, \quad A, B = 0, \dots, 15. \quad (9)$$

Анализ данного преобразования показывает, что по отношению к усеченной группе преобразований  $L(D_2)$  компоненты вектора  $X^A$  ведут себя по-разному, и их можно сгруппировать в несколько блоков, имеющих различный физический смысл [5].

Именно, 16 компонент вектора  $X^A$  разбиваются на лоренцев 4-вектор  $x^\mu = (X^0 \dots X^3)$ , пару 4-мерных майорановских спиноров  $\Theta_1 = (X^4 \dots X^7)$ ,  $\Theta_2 = (X^9 \dots X^{12})$  и четверку скаляров  $X^8, X^{13}, X^{14}, X^{15}$ :

$$X^A = \underbrace{(X^0, \dots, X^3)}_{x^\mu}; \quad \underbrace{(X^4, \dots, X^7)}_{\Theta_1}; \quad \underbrace{(X^9, \dots, X^{12})}_{\Theta_2}; \quad \underbrace{(X^8, X^{13}, X^{14}, X^{15})}_{\text{scalars}} \quad (10)$$

Расписывая преобразование (9) в соответствии с разбиением (10), можно найти, что каждый отдельный блок в (10) преобразуется по характерному для него представлению группы Лоренца. Все эти представления содержатся в матрице  $L(D_2)_B^A$ , которая, таким образом, также допускает разбиение на характерные отличные от нуля матричные блоки:

$$L(D_2)_B^A \Rightarrow (L(D_2)_\beta^\alpha, \quad L(D_2)_{3+j}^{3+i} = L(D_2)_{8+j}^{8+i}, \quad 1_b^a). \quad (11)$$

Матрица  $L(D_2)_\beta^\alpha$  реализует представление группы Лоренца для 4-вектора:  $x^{\alpha'} = L(D_2)_\beta^\alpha x^\beta$ .

Матрица  $\Lambda_j^i = L(D_2)_{3+j}^{3+i}$  реализует представление группы Лоренца для майорановского спинора:  $\Theta' = \Lambda \Theta$ .

Матрица  $1_b^a$  обозначает тривиальное представление группы Лоренца для скаляров.

Форминвариантная метрика финслерова пространства в данном случае может быть записана в следующем виде:

$$G_{ABCD}X^AX^BX^CX^D = x_{15} [x_8 \eta^{\mu\nu} x_\mu x_\nu - \eta^{\mu\nu} x_\mu (\bar{\Theta}_1 \gamma_\nu \Theta_1)] -$$

$$\begin{aligned}
& -(x_{13}^2 + x_{14}^2)\eta^{\mu\nu}x_\mu x_\nu - x_8\eta^{\mu\nu}x_\mu(\bar{\Theta}_2\gamma_\nu\Theta_2) + 2x_{13}\eta^{\mu\nu}x_\mu(\bar{\Theta}_1\gamma_\nu\Theta_2) + \\
& + 2x_{14}\eta^{\mu\nu}x_\mu(\bar{\Theta}_1\gamma_5\gamma_\nu\Theta_2) + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\bar{\Theta}_1\gamma_\mu\Theta_1)(\bar{\Theta}_2\gamma_\nu\Theta_2), \quad (12)
\end{aligned}$$

где введены стандартные обозначения для матриц Дирака и 4-мерной метрики Минковского.

Если проводить параллели с теоретико-полевым подходом, то рассмотренное поведение векторов  $X_A$  по отношению к 4-мерной группе Лоренца позволяет интерпретировать их как своеобразные мультиплеты, единообразно вмещающие в себя объекты с целыми и полуцелыми спинами. Если не ограничиваться усеченной группой  $L(D_2)_B^A$ , а вновь вернуться к более общим преобразованиям из группы  $L(D)$ , то при данных преобразованиях, очевидно, будет наблюдаться перемешивание объектов с разными спинами, что может интерпретироваться как модельный аналог суперсимметрии. Можно показать, что в подходящих обозначениях указанные “перемешивающие” преобразования формально соответствуют известным суперсимметричным преобразованиям в суперпространстве [5] за исключением того факта, что в данном случае все переменные являются классическими; однако обобщение на грассманов случай, на наш взгляд, не выглядит принципиально невозможным.

Отметим также, что данное характерное свойство 4-мерной редукции наблюдается и в случае финслеровых спиноров других размерностей, являясь характерной чертой формализма.

*Финслеровы 4-спиноры и твисторы.*

Укажем на связь теории финслеровых  $N$ -спиноров с твисторной программой Пенроуза [5]. Эта связь наиболее четко просматривается в случае 4-спиноров.

В соответствии с общим формализмом, группа  $SL(4, C)$ , действующая в пространстве  $FS^4$ , сохраняет симплектическое скалярное 4-произведение:

$$\xi' = D\xi; \quad D \in SL(4, C); \quad [\bullet, \bullet, \bullet, \bullet] = inv[SL(4, C)].$$

Наделим пространство  $FS^4$  дополнительной структурой – *псевдоунитарным скалярными 2-произведением*  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  следующего вида:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^1\bar{\eta}^1 + \xi^2\bar{\eta}^2 - \xi^3\bar{\eta}^3 - \xi^4\bar{\eta}^4; \quad \xi, \eta \in FS^4 \quad (13)$$

При требовании инвариантности данной формы (в дополнение к инвариантности симплектического 4-произведения) группа допустимых преобразований редуцируется с  $SL(4, C)$  до ее подгруппы  $SU(2, 2)$ :

$$\xi' = \tilde{D}\xi; \quad \tilde{D} \in SU(2, 2); \quad [\bullet, \bullet, \bullet, \bullet], \langle \bullet, \bullet \rangle = inv[SU(2, 2)].$$

Но пространство  $(FS^4 \langle \bullet, \bullet \rangle)$ , оснащенное инвариантным псевдоунитарным 2-произведением, является пространством *твисторов*, а группа  $SU(2, 2)$  – твисторной группой, допускающей по общим правилам отображение  $SU(2, 2) \rightarrow O(2, 4)$  в группу, изоморфную конформной группе плоского пространства Минковского. Отсюда можно заключить, что твисторы являются частным случаем финслеровых 4-спиноров, отвечающим определенному подклассу групповых преобразований в пространстве  $FS^4$ .

#### 4. БСКО ранга (6,6).

Кратко остановимся на данном случае, отвечающем финслеровым 5-спинорам. БСКО ранга (6,6) представляет важность при модельном описании сильных и электрослабых взаимодействий в рамках реляционного подхода [6, 7]. Анализ показывает, что для получения

феноменологического соответствия с закономерностями стандартной модели достаточно постулировать, что кванты материальных (фермионных) полей описываются в общем случае тройкой элементов БСКО(6,6), т. е. фактически мультиплетом трех финслеровых 5-спиноров. Прообразом амплитуды вероятности перехода между начальным и конечным состояниями многочастичной системы является так называемое базовое  $6 \times 6$ -отношение – специальная антисимметричная форма на парных отношениях между различными элементами, описывающими комплекс взаимодействующих частиц [6, 7].

В теории имеет место процедура редукции, которая сводится к расщеплению БСКО(6,6) на две подсистемы: БСКО(4,4) и БСКО(3,3). На математическом языке это означает разложение пространства  $\mathbf{FS}^5$  в сумму подпространств  $\mathbf{FS}^2 \oplus \mathbf{FS}^3$  и переход от общей группы преобразований  $SL(5, C)$ , действующей на пространстве 5-спиноров, к произведению ее подгрупп  $SL(2, C) \times SL(3, C)$ , действующих в соответствующих пространствах 2- и 3-спиноров. Первое из этих пространств позволяет строить 4-мерные токи и импульсы частиц, второе – описывать геометрию внутренних состояний частиц по отношению к калибровочным группам взаимодействий [6, 7]. Тем самым делается попытка единообразного описания пространственно-временных и внутренних степеней свободы частиц в рамках реляционного подхода. Поскольку в своих исходных предпосылках он не является калибровочным, на него не распространяется ряд особенностей, присущих теоретико-групповым попыткам достичь упомянутого единообразного описания (в качестве одной из таких особенностей упомянем теорему Колемана-Мандулы).

## Заключение

В данной статье был рассмотрен формализм финслеровых  $N$ -спиноров в их связи с реляционной теорией пространства-времени, а также указан ряд физических интерпретаций и возможных приложений данного формализма. Следует отметить, что объекты, похожие по своей структуре на финслеровы спиноры, рассматривались независимо и другими авторами (в частности, Финкельштейном под названием “гиперспиноры”). Однако, пожалуй, именно в рамках реляционного подхода финслеровы спиноры наряду с чисто математическим характером приобретают определенное физическое звучание, позволяя по-новому взглянуть на возможную природу пространства-времени, расширить рамки наших геометрических представлений на область специальных классов финслеровых пространств, вскрыть ряд любопытных параллелей с известными теоретическими конструкциями (в частности, суперсимметрией и твисторами) и, возможно, дать ключ к осмыслению природы процессов, происходящих в микромире, с концептуально новых позиций.

Ввиду обзорного характера статьи за ее рамками остались многие детали и ряд достаточно специфических приложений, с которыми читатель может ознакомиться по ссылкам.

## Благодарности

Автор хотел бы выразить глубокую признательность проф. Ю. С. Владимирову и А. В. Соловьеву за ценные замечания и многолетнее плодотворное обсуждение затронутых вопросов.

## Литература

- [1] *Vladimirov Yu. S.* Binary geometrophysics: Space-time, gravitation // *Grav. and Cosmol.* – 1995. – V. 1, N. 3. – p. 184–190.
- [2] *Владимиров Ю. С.* Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений. – М.: Изд-во Моск. ун-та., 1996.

- [3] *Владимиров Ю. С.* Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 2. Теория физических взаимодействий. – М.: Изд-во Моск. ун-та., 1998.
- [4] *A. V. Solov'yov, Yu.S. Vladimirov.* Finslerian N-Spinors: Algebra // *Int. J. Theor. Phys.* – 2001. – V. 40 (8). – p. 1511–1523.
- [5] *A. V. Solov'yov.* Finslerian 4-spinors as a generalization of twistors // "Space-Time Structure". Collected papers, ed. D. G. Pavlov. – Moscow, TETRU, 2006. – p. 249-256.
- [6] *Bolokhov S. V., Vladimirov Yu. S.* An algebraic approach to the description of electroweak and strong interactions // *Grav. and Cosmol.* – 2003. – V. 9, N1–2 (33–34). – p. 113–118.
- [7] *Владимиров Ю.С.* Основания физики. – М.: БИНОМ, 2008.
- [8] *Кулаков Ю.И.* Элементы теории физических структур. – Новосибирск, Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1968.
- [9] *Михайличенко Г. Г.* Математический аппарат теории физических структур. – Изд-во Горно-алтайского гос. ун-та, 1997.

## Finslerian N-Spinors in the Relational Approach

**S. V. Bolokhov**

*Peoples' Friendship University, Moscow, Russia*  
*bol-rgs@yandex.ru*

A close connection is established between the special class of mathematical objects called Finslerian N-spinors and the apparatus of the relational model of space-time. Some physical applications of the Finslerian spinors formalism are shown in the context of the relational approach in physics.

**Key-words:** Finslerian geometry, spinors, relational approach.

**MSC2000:** 53B40 Finsler spaces and generalizations (areal metrics), 53B50 Applications to physics.

**PACS:** 02.20.-a Group theory, 03.30.+p Special relativity, 12.10.-g Unified field theories and models.

ON CARTAN SPACES WITH THE  $M$ -TH ROOT METRIC

$$K(x, p) = \sqrt[m]{a^{i_1 i_2 \dots i_m}(x) p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_m}}$$

Gheorghe Atanasiu, Mircea Neagu

Faculty of Mathematics and Informatics, University "Transilvania" of Braşov, Romania

gh\_atanasiu@yahoo.com, mircea.neagu@unitbv.ro

The aim of this paper is to expose some geometrical properties of the locally Minkowski-Cartan space with the Berwald-Moór metric of momenta  $L(p) = \sqrt[p_1 p_2 \dots p_n]$ . This space is regarded as a particular case of the  $m$ -th root Cartan space. Thus, Section 2 studies the  $v$ -covariant derivation components of the  $m$ -th root Cartan space. Section 3 computes the  $v$ -curvature d-tensor  $S^{hijk}$  of the  $m$ -th root Cartan space and studies conditions for  $S3$ -likeness. Section 4 computes the  $T$ -tensor  $T^{hijk}$  of the  $m$ -th root Cartan space. Section 5 particularizes the preceding geometrical results for the Berwald-Moór metric of momenta.

**Key-words:**  $m$ -th root Cartan space,  $S3$ -likeness,  $T$ -tensor, Berwald-Moór metric of momenta.

**MSC2000:** 53B40, 53C60, 53C07.

## 1 Introduction

Owing to the studies of E. Cartan, R. Miron [6], [7], Gh. Atanasiu [2] and many others, the geometry of Cartan spaces is today an important chapter of differential geometry, regarded as a particular case of the Hamilton geometry. By the Legendre duality of the Cartan spaces with the Finsler spaces studied by R. Miron, D. Hrimiuc, H. Shimada and S. V. Sabău [8], it was shown that the theory of Cartan spaces has the same symmetry like the Finsler geometry, giving in this way a geometrical framework for the Hamiltonian theory of Mechanics or Physical fields. In a such geometrical context we recall that a *Cartan space* is a pair  $\mathcal{C}^n = (M^n, K(x, p))$  such that the following axioms hold good:

1.  $K$  is a real positive function on the cotangent bundle  $T^*M$ , differentiable on  $T^*M \setminus \{0\}$  and continuous on the null section of the canonical projection  $\pi^* : T^*M \rightarrow M$ ;
2.  $K$  is positively 1-homogenous with respect to the momenta  $p_i$ ;
3. The Hessian of  $K^2$ , with the elements

$$g^{ij}(x, p) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K^2}{\partial p_i \partial p_j},$$

is positive-defined on  $T^*M \setminus \{0\}$ .

On the other hand, in the last two decades, physical studies due to G. S. Asanov [1], D. G. Pavlov [9], [10] and their co-workers emphasize the important role played by the Berwald-Moór metric  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$L(y) = (y^1 y^2 \dots y^n)^{\frac{1}{n}},$$

in the theory of space-time structure and gravitation as well as in unified gauge field theories.

For such geometrical-physics reasons, following the geometrical ideas exposed by M. Matsumoto and H. Shimada in [4], [5] and [11] or by ourselves in [3], in this paper we investigate some geometrical properties of the  $m$ -th root *Cartan space* which is a natural generalization of the locally Minkowski-Cartan space with the Berwald-Moór metric of momenta.

## 2 The $m$ -th root metric and $v$ -derivation components

Let  $\mathcal{C}^n = (M^n, K(x, p))$ ,  $n \geq 4$ , be an  $n$ -dimensional Cartan space with the metric

$$K(x, p) = \sqrt[m]{a^{i_1 i_2 \dots i_m}(x) p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_m}}, \quad (2.1)$$

where  $a^{i_1 i_2 \dots i_m}(x)$ , depending on the position alone, is symmetric in all the indices  $i_1, i_2, \dots, i_m$  and  $m \geq 3$ .

**Definition 1** *The Cartan space with the metric (2.1) is called the  $m$ -th root Cartan space.*

Let us consider the following notations:

$$\begin{aligned} a^i &= [a^{i i_2 i_3 \dots i_m}(x) p_{i_2} p_{i_3} \dots p_{i_m}] / K^{m-1}, \\ a^{ij} &= [a^{i j i_3 i_4 \dots i_m}(x) p_{i_3} p_{i_4} \dots p_{i_m}] / K^{m-2}, \\ a^{ijk} &= [a^{i j k i_4 i_5 \dots i_m}(x) p_{i_4} p_{i_5} \dots p_{i_m}] / K^{m-3}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

The normalized supporting element  $l^i (= \dot{\partial}^i K, \dot{\partial}^i = \partial / \partial p_i)$ , the fundamental metrical d-tensor  $g^{ij} (= (1/2) \dot{\partial}^i \dot{\partial}^j K^2)$  and the angular metrical d-tensor  $h^{ij} (= K \dot{\partial}^i \dot{\partial}^j K)$  are given by

$$\begin{aligned} l^i &= a^i, \\ g^{ij} &= (m-1)a^{ij} - (m-2)a^i a^j, \\ h^{ij} &= (m-1)(a^{ij} - a^i a^j). \end{aligned} \quad (2.3)$$

**Remark 1** *From the positively 1-homogeneity of the  $m$ -th root Cartan metrical function (2.1) it follows that we have*

$$K^2(x, p) = g^{ij}(x, p) p_i p_j = a^{ij}(x, p) p_i p_j.$$

Let us suppose now that the d-tensor  $a^{ij}$  is regular, that is there exists the inverse matrix  $(a^{ij})^{-1} = (a_{ij})$ . Obviously, we have  $a_i \cdot a^i = 1$ , where

$$a_i = a_{is} a^s = \frac{p_i}{K}.$$

Under these assumptions, we obtain the inverse components  $g_{ij}(x, p)$  of the fundamental metrical d-tensor  $g^{ij}(x, p)$ , which are given by

$$g_{ij} = \frac{1}{m-1} a_{ij} + \frac{m-2}{m-1} a_i a_j. \quad (2.4)$$

The relations (2.2) and (2.3) imply that the components of the  $v$ -torsion d-tensor  $C^{ijk} (= -(1/2) \dot{\partial}^k g^{ij})$  are given in the form

$$C^{ijk} = -\frac{(m-1)(m-2)}{2K} (a^{ijk} - a^{ij} a^k - a^{jk} a^i - a^{ki} a^j + 2a^i a^j a^k). \quad (2.5)$$

Consequently, using the relations (2.4) and (2.5), together with the formula

$$a_s a^{sjk} = a^{jk},$$

we find the components of the  $v$ -derivation  $C_i^{jk} (= g_{is} C^{sjk})$  in the following form:

$$C_i^{jk} = -\frac{(m-2)}{2K} \left[ a_i^{jk} - (\delta_i^j a^k + \delta_i^k a^j) + a_i (2a^j a^k - a^{jk}) \right], \quad (2.6)$$

where  $a_i^{jk} = a_{is} a^{sjk}$ . From (2.6) we easily find the following geometrical result:

**Proposition 1** The torsion covector  $C^i (= C_r^{ir})$  is given by the formula

$$C^i = -\frac{(m-2)}{2K} (a_r^{ir} - na^i),$$

where  $n = \dim M$ .

### 3 The $v$ -curvature d-tensor $S^{hijk}$

Taking into account the relations (2.5) and (2.6), by calculation, we obtain

**Theorem 3.1** The  $v$ -curvature d-tensor  $S^{hijk} (= C_r^{ij} C^{rhk} - C_r^{ik} C^{rhj})$  can be written in the form

$$S^{hijk} = \frac{(m-1)(m-2)^2}{4K^2} \mathcal{A}_{\{j,k\}} \{a_r^{ij} a^{rhk} - a^{ij} (a^{hk} - a^h a^k) + a^i a^j a^{hk}\},$$

where  $\mathcal{A}_{\{j,k\}}$  means an alternate sum.

**Remark 2** Using the relations (2.3), we underline that the  $v$ -curvature d-tensor  $S^{hijk}$  can be written as

$$K^2 S^{hijk} = \frac{(m-2)^2}{4} [(h^{hj} h^{ik} - h^{hk} h^{ij}) / (m-1) + (m-1) U^{hijk}], \tag{3.1}$$

where

$$U^{hijk} = a_r^{ij} a^{rhk} - a_r^{ik} a^{rhj}. \tag{3.2}$$

In the sequel, let us recall the following important geometrical concept [4]:

**Definition 2** A Cartan space  $\mathcal{C}^n = (M^n, K(x, p))$ ,  $n \geq 4$ , is called **S3-like** if there exists a positively 0-homogenous scalar function  $S = S(x, p)$  such that the  $v$ -curvature d-tensor  $S^{hijk}$  to have the form

$$K^2 S^{hijk} = S \{h^{hj} h^{ik} - h^{hk} h^{ij}\}. \tag{3.3}$$

Let  $\mathcal{C}^n = (M^n, K(x, p))$ ,  $n \geq 4$ , be the  $m$ -th root Cartan space. As an immediate consequence of the above definition we have the following important result:

**Theorem 3.2** The  $m$ -th root Cartan space  $\mathcal{C}^n$  is an S3-like Cartan space if and only if the d-tensor  $U^{hijk}$  is of the form

$$U^{hijk} = \lambda \{h^{hj} h^{ik} - h^{hk} h^{ij}\}, \tag{3.4}$$

where  $\lambda = \lambda(x, p)$  is a positively 0-homogenous scalar function.

**Proof.** Taking into account the formula (3.1) and the condition (3.4), we find the scalar function (see (3.3))

$$S = \frac{(m-2)^2}{4} \left[ (m-1)\lambda + \frac{1}{m-1} \right]. \tag{3.5}$$

■

#### 4 The $T$ -tensor $T^{hijk}$

Let  $N = (N_{ij})$  be the canonical nonlinear connection of the  $m$ -th root Cartan space with the metric (2.1), whose local coefficients are given by [8]

$$N_{ij} = -\gamma_{ij}^0 + \frac{1}{2}\gamma_{h0}^0 \dot{\partial}^h g_{ij},$$

where

$$\begin{aligned} \gamma_{jk}^i &= \frac{g^{ir}}{2}(\partial_k g_{rj} + \partial_j g_{rk} - \partial_r g_{jk}), \quad \partial_k = \partial/\partial x^k, \\ \gamma_{ij}^0 &= \gamma_{ij}^s p_s, \quad \gamma_{h0}^l = \gamma_{hr}^l g^{rs} p_l p_s. \end{aligned}$$

Let  $CT(N) = (H_{jk}^i, C_i^{jk})$  be the Cartan canonical connection of the  $m$ -th root Cartan space with the metric (2.1). The local components of the Cartan canonical connection  $CT(N)$  have the expressions [8]

$$\begin{aligned} H_{jk}^i &= \frac{g^{ir}}{2}(\delta_k g_{rj} + \delta_j g_{rk} - \delta_r g_{jk}), \\ C_i^{jk} &= g_{is} C^{sjk} = -\frac{g_{is}}{2} \dot{\partial}^k g^{js}, \end{aligned}$$

where

$$\delta_j = \partial_j + N_{js} \dot{\partial}^s.$$

In the sequel, let us compute the  $T$ -tensor  $T^{hijk}$  of the  $m$ -th root Cartan space, which is defined as [11]

$$T^{hijk} \stackrel{def}{=} K C^{hij|k} + l^h C^{ijk} + l^i C^{jkh} + l^j C^{khi} + l^k C^{hij},$$

where " $|^k$ " denotes the local  $v$ -covariant derivation with respect to  $CT(N)$ , that is we have

$$C^{hij|k} = \dot{\partial}^k C^{hij} + C^{rij} C_r^{hk} + C^{hrj} C_r^{ik} + C^{hir} C_r^{jk}.$$

Using the definition of the local  $v$ -covariant derivation [8], together with the relations (2.6) and (2.3), by direct computations, we find the relations:

$$\begin{aligned} K|k &= a^k = l^k, \\ a^i|k &= \frac{(m-1)}{K}(a^{ik} - a^i a^k) = \frac{h^{ik}}{K}, \\ a^{ij}|k &= \frac{(m-2)}{K}(a^{ik} a^j + a^{jk} a^i - 2a^i a^j a^k) = \frac{(m-2)}{(m-1)K}(h^{ik} l^j + h^{jk} l^i). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Suppose that we have  $m \geq 4$ . Then, the notation

$$a^{hijk} = [a^{hijk i_5 i_6 \dots i_m}(x) p_{i_5} p_{i_6} \dots p_{i_m}] / K^{m-4}$$

is very useful. In this context, we can give the next geometrical results:

**Lemma 1** *The  $v$ -covariant derivation of the tensor  $a^{hij}$  is given by the following formula:*

$$\begin{aligned} a^{hij}|k &= \frac{(m-3)}{K} a^{hijk} + \frac{m}{2K} a^{hij} a^k - \frac{(m-2)}{2K} \cdot \{ a_r^{hk} a^{rij} + a_r^{ik} a^{rhj} + \\ &+ a_r^{jk} a^{rhi} - a^{kij} a^h - a^{hkj} a^i - a^{hik} a^j - a^{ij} a^{hk} - a^{hj} a^{ik} - \\ &- a^{hi} a^{jk} + 2(a^{ij} a^h a^k + a^{hj} a^i a^k + a^{hi} a^j a^k) \}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

**Proof.** Note that, by a direct computation, we obtain the relation

$$\frac{\partial a^{hij}}{\partial p_k} = \frac{(m-3)}{K} (a^{hijk} - a^{hij} a^k). \tag{4.3}$$

Finally, using the definition of the local  $v$ -covariant derivation, together with the formulas (4.3) and (2.6), we find the equality (4.2). ■

**Theorem 4.1** *The  $T$ -tensor  $T^{hijk}$  of the  $m$ -th root Cartan space is given by the expression*

$$\begin{aligned} T^{hijk} = & -\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2K} a^{hijk} + \frac{(m-1)(m-2)^2}{4K} \\ & \cdot (a_r^{hk} a^{rij} + a_r^{ik} a^{rhj} + a_r^{jk} a^{rhi}) - \frac{m(m-1)(m-2)}{4K} \\ & \cdot (a^{hij} a^k + a^{hjk} a^i + a^{ijk} a^h + a^{hik} a^j - a^{ij} a^{hk} - a^{hj} a^{ik} - a^{ih} a^{jk}). \end{aligned} \tag{4.4}$$

**Proof.** It is obvious that we have the equality

$$\begin{aligned} T^{hijk} &= (KC^{hij})|{}^k + l^h C^{ijk} + l^i C^{jkh} + l^j C^{khi} = \\ &= (KC^{hij})|{}^k + a^h C^{ijk} + a^i C^{jkh} + a^j C^{khi}. \end{aligned}$$

Consequently, differentiating  $v$ -covariantly the relation (2.5) multiplied by  $K$  and using the formulas (4.1), together with the Lemma 1, by laborious computations, it follows the required result. ■

### 5 The particular case of Berwald-Moór metric of momenta

Let us consider now the particular case when  $m = n \geq 4$  and

$$a^{i_1 i_2 \dots i_n}(x) = \begin{cases} 1/n!, & i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In this special case, the  $m$ -th root metric (2.1) becomes the **Berwald-Moór metric of momenta** [8]

$$K(p) = \sqrt[n]{p_1 p_2 \dots p_n}. \tag{5.1}$$

By direct computations, we deduce that the  $n$ -dimensional locally Minkowski-Cartan space  $\mathcal{C}^n = (M^n, K(p))$  endowed with the Berwald-Moór metric of momenta (5.1) is characterized by the following geometrical entities and relations (E-R):

$$\begin{aligned} a^i &= \frac{K}{n} \cdot \frac{1}{p_i}, \quad a_i = \frac{p_i}{K}, \quad a_i \cdot a^i = \frac{1}{n} \quad (\text{no sum by } i), \\ a^{ij} &= \begin{cases} \frac{n}{n-1} \cdot a^i a^j, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}, \quad a_{ij} = \begin{cases} n \cdot a_i a_j, & i \neq j \\ -n(n-2) \cdot (a_i)^2, & i = j, \end{cases} \\ a^{ijk} &= \begin{cases} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} \cdot a^i a^j a^k, & i \neq j \neq k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

and

$$a^{hijk} = \begin{cases} \frac{n^3}{(n-1)(n-2)(n-3)} \cdot a^h a^i a^j a^k, & h \neq i \neq j \neq k \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Moreover, the equalities (E-R) imply that the components  $a_i^{jk}$  are given by the formulas:

$$\begin{aligned} a_i^{jk} &= -\frac{n^2}{(n-1)(n-2)} \cdot a_i a^j a^k, & i \neq j \neq k \\ a_i^{ik} &= a_i^{ki} = \frac{n}{n-1} \cdot a^k, & i \neq k \quad (\text{no sum by } i) \\ a_i^{kk} &= 0, & \forall i = \overline{1, n}, \quad (\text{no sum by } k). \end{aligned} \quad (5.2)$$

In this context, we obtain the following important geometrical result:

**Theorem 5.1** *The locally Minkowski-Cartan space  $C^n = (M^n, K(p))$ ,  $n \geq 4$ , endowed with the Berwald-Moór metric of momenta (5.1) is characterized by the following geometrical properties:*

1. *The torsion covector  $C^i$  vanish;*
2. *S3-likeness with the scalar function  $S = -1$ ;*
3. *The T-tensor  $T^{hijk}$  vanish.*

**Proof.** 1. It is easy to see that we have

$$\sum_r a_r^{ir} = \sum_{r,s} a_{rs} a^{sir} = n \sum_{r,s} a_r a_s a^{sir} = n \sum_r a_r a^{ir} = n a^i.$$

2. It is obvious that we have

$$h^{ij} = \begin{cases} a^i a^j, & i \neq j \\ -(n-1) \cdot (a_i)^2, & i = j. \end{cases}$$

Consequently, by computations, we obtain

$$U^{hijk} = -\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)^2} \{h^{hj} h^{ik} - h^{hk} h^{ij}\},$$

where  $U^{hijk}$  is given by the relation (3.2). It follows what we were looking for (see the equalities (3.4) and (3.5)).

3. Using the relation (4.4) and the formulas (E-R) and (5.2), by laborious computations, we deduce that  $T^{hijk} = 0$ . ■

## References

- [1] Asanov G. S., Finslerian extension of general relativity, Reidel, Dordrecht, 1984.
- [2] Atanasiu Gh., The invariant expression of Hamilton geometry, *Tensor N. S.* **47, 3** (1988), 225–234.
- [3] Atanasiu Gh., Balan V., Neagu M., The Pavlov's 4-polyform of momenta  $K(p) = \sqrt[4]{p_1 p_2 p_3 p_4}$  and its applications in Hamilton geometry, *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics* **2, 4** (2005), 134–139.
- [4] Matsumoto M., On Finsler spaces with curvature tensors of some special forms, *Tensor N. S.* **22** (1971), 201–204.

- [5] Matsumoto M., Shimada H., On Finsler spaces with 1-form metric. II. Berwald-Moór's metric  $L = (y^1 y^2 \dots y^n)^{1/n}$ , *Tensor N. S.* **32** (1978), 275–278.
- [6] Miron R., Hamilton geometry, *An. Șt. "Al. I. Cuza" Univ. Iași* **35** (1989), 33–67.
- [7] Miron R., The geometry of Cartan spaces, *Prog. in Math.* **22** (1988), 1–38.
- [8] Miron R., Hrimiuc D., Shimada H., Sabău S. V., The geometry of Hamilton and Lagrange spaces, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [9] Pavlov D. G., Four-dimensional time, *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics* **1, 1** (2004), 31–39.
- [10] Pavlov D. G., Generalization of scalar product axioms, *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics* **1, 1** (2004), 5–18.
- [11] Shimada H., On Finsler spaces with the metric  $L(x, y) = \sqrt[m]{a_{i_1 i_2 \dots i_m}(x) y^{i_1} y^{i_2} \dots y^{i_m}}$ , *Tensor N. S.* **33** (1979), 365–372.

## О ПРОСТРАНСТВАХ КАРТАНА С МЕТРИКОЙ $M$ -КОРНЯ

$$K(x, p) = \sqrt[m]{a^{i_1 i_2 \dots i_m}(x) p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_m}}$$

Г. Атанасиу, М. Неагу

Университет "Трансильвания", Брашов, Румыния  
gh\_atanasiu@yahoo.com, mircea.neagu@unitbv.ro

Цель статьи состоит в том, чтобы выявить некоторые геометрические свойства локальных пространств Минковского-Картана с метрикой импульсов Бервальда-Моора  $L(p) = \sqrt[p]{p_1 p_2 \dots p_n}$ . Это пространство рассматривается как частный случай  $m$ -корневых пространств Картана. Раздел 2 изучает  $v$ -ковариантные дифференциальные компоненты  $m$ -корневого пространства Картана. Секция 3 вычисляет  $d$ -тензор  $v$ -кривизны  $S^{hijk}$   $m$ -корневых пространств Картана и исследует условия  $S3$ -подобия. Секция 4 вычисляет  $T$ -тензор  $T^{hijk}$   $m$ -корневого пространства Картана. Секция 5 конкретизирует предыдущие геометрические результаты для метрики моментов Бервальда-Моора.

**Ключевые слова:**  $m$ -корневые пространства Картана,  $S3$ -подобие,  $T$ -тензор, метрика импульса Бервальда-Моора.

**MSC2000:** 53B40, 53C60, 53C07

# DYNAMICS IN $D \geq 2$ -ORDER PHASE SPACE IN THE BASIS OF MULTICOMPLEX ALGEBRA

**Robert M. Yamaleev**

*Universidad Nacional Autonoma de Mexico, México,  
Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia*

*iamaleev@servidor.unam.mx*

We use commutative *algebra of multicomplex numbers*, to construct oscillator model for Hamilton-Nambu dynamics. We propose a new dynamical principle from which it follows two kind of Hamilton-Nambu equations in  $D \geq 2$ -dimensional phase space. The first one is formulated with  $(D-1)$ -evolution parameter and a single Hamiltonian. The Hamiltonian of the oscillator model in a such dynamics is given by  $D$ -degree homogeneous form. In the second formulation, vice versa, the evolution of the system along a single evolution parameter is generated by  $(D-1)$  Hamiltonian. The latter is given by Nambu equations in  $D \geq 3$ -dimensional phase.

**Key-words:** complex numbers, generalized trigonometry, differential equations, classical mechanics, Hamiltonian, phase space.

**PACS:** 03.65.sg, 02.10.ud, 02.10Xm

## 1 Introduction

The algebras widely using in the mathematical physics, such as classical Clifford algebras, have their definitions from *quadratic or bilinear* relations. This is a consequence, rather, the bilinear aspects of fundamental objects such as quadratic metrics, canonical pair of the phase space variables, commutation relations etc. A real Clifford algebra is generated by the set of basis vectors  $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$  and defining relations  $e_i e_j + e_j e_i = 2g_{ij}$  where  $g_{ij} \in R$  are the coefficients of a non degenerate symmetric bilinear form. If the set is orthonormal the defining relations reduce to

$$e_i e_j = -e_j e_i, \quad e_i^2 = \pm 1. \quad (1.1)$$

The classical Clifford algebra admits a  $Z_2$ -graded structure. Wide investigations of the classical Clifford algebras have been initiated by success of the Dirac equation. However, besides Clifford algebras one may build an algebraic extension, the Generalized Clifford Algebras. New algebra equipped with a metric defined by a homogeneous polynomial form of degree  $n$  naturally leads to an underlying  $Z_n$ -graded structures [1], [2]. These algebras, just as Clifford algebras, emerge from various contexts. About the problem on usefulness of the hypercomplex numbers in physics have been dedicated several papers (see, for instance, A. A. Eliovich [4] and references therein). Properties of the hypercomplex algebra of fourth order have been successfully applied to explore Berwald-Moor metric in Finslerian geometry [3]. Specially, the efforts in the developments of the multicomplex algebras are motivated by the new ideas which occur in quantum mechanics based on homogeneous metrics of degree higher than two [5]. However, besides the quantum mechanics it is also great interest to construct the classical mechanics based on high degree metrics. Generalization of Hamiltonian mechanics based on the extension of *binary* operation on classical observable to the phase space with *multiple* operation of higher order ( $D \geq 3$ ), has received much attention in the recent literature since Nambu's contribution [6]. Y. Nambu proposed the generalization of Hamiltonian dynamics by introduce a triplet of dynamical variables which spans a tree-dimensional phase space, instead of a canonical pair. As a result, the state of a system is represented by a point in the three-dimensional phase space, and this point moves

with time along a curve in the three-dimensional phase space. Since the publication of Nambu's paper, different aspects of this problem have been studied by several group of authors [7].

In the present paper we propose a dynamical principle from which it follows two kind of Hamilton-Nambu equations in  $D \geq 2$ -dimensional phase space. The first one is formulated with  $(D-1)$  Hamiltonian and single parameter of evolution, the Nambu equations. In Ref. [8], we have proposed an extension of the Newtonian mechanics in  $D \geq 3$  dimensional phase space within the Nambu's formalism. As a consequence, three-dimensional phase space oscillator model within Jacobi elliptic functions for the extended Newtonian mechanics has been constructed. The second kind of dynamics is formulated with  $(D-1)$ -evolution parameter and a single Hamiltonian. The Hamiltonian of the oscillator model of the latter is given by  $D$ -degree homogeneous form. This dynamics in some sense is the inverse one to the Nambu dynamics.

In Sec.2 we recall the basic notions of the multicomplex algebra and the theory of the polytrigonometric functions.

In Sec.3 we show that there exist two kind of the Hamiltonian equations, namely, *direct* Hamiltonian equations can be coupled by their *inverse* formulation.

In Sec.4 we show that the Nambu-Hamilton equations admit its inverse formulation.

In Sec.5 we derive the dynamical equations in  $D$ - dimensional phase space with  $(D-1)$ -evolution parameters and single Hamiltonian in terms of the co- and contra-variant coordinates defined in the space with polylinear metric form. We construct the polylinear oscillator model. The underlying algebraic structure of the polylinear oscillator model is the multicomplex algebra.

## 2 Commutative Part of Generalized Clifford Algebras. Polygonometric functions

The Generalized Clifford algebras (GCA)  $Cl_p^{(n)}$  is generated by a set of  $p$  canonical generators  $e_1, \dots, e_p$  fulfilling:

$$e_i e_j = \omega^{sg(j-i)} e_j e_i, \quad e_i^n = \pm 1, \quad i, j = 1, \dots, p \tag{2.1}$$

where  $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$  is a  $n$ -th primitive root of unity and  $sg(x)$  the usual sign function.

In this paper we shall use the commutative part of the GCA. A commutative part of the classical Clifford algebra is generated by unique generator  $\mathbf{e}$ , with  $e^2 = \pm 1$ . When the generator  $e$  is given by  $e^2 = -1$  then one has well known algebra of *Complex Numbers* . Similarly, a commutative part of GCA is the algebra of unique generator  $\mathbf{e}$ , satisfying to the conditions  $e^n = \pm 1$ . This is  $n$ -dimensional commutative algebra. A detail description of this algebra for  $e^n = 1$  a reader may find in [9]. In this paper we shall consider the algebra with the unique generator defined by  $e^n = -1$ , we shall denominate *Algebra of Multicomplex Numbers* ( $MC_n$ ). It is worth to underline that most of the results of the usual complex number analysis remain true for  $MC_n$ -number analysis. Let us sketch briefly the basic and useful properties of multicomplex algebra and its elliptic mappings which are direct extension of the cosine&sine functions. More detail description of this algebra reader may find in [10].

Any  $z \in MC_n$  is defined by finite series expansion

$$z = \sum_{i=1}^n e^{i-1} q_i, \quad e^0 = 1. \tag{2.2}$$

Among the unitary equivalent matrix representations of the operator  $\mathbf{e}$  we shall use one given by anticirculant matrix

$$(E)_m^l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

This matrix satisfies the following condition

$$E^n = -I \quad (2.4)$$

and gives arise to convenient matrix representation of  $z \in MC_n$ :

$$Z_m^l = \sum_{i=1}^n q_i (E^{i-1})_m^l. \quad (2.5)$$

By using the matrix  $E$  a product of two  $MC_n$ -numbers one may represent in the following convenient way

$$\left\{ \sum_{i=1}^n e^{i-1} a_i \right\} \left\{ \sum_{i=1}^n e^{i-1} b_i \right\} = \sum_{i=1}^n e^{i-1} c_i,$$

with

$$c_k = \sum_{l=1}^n (E^{l-1} b_l)_k^m a_m = \sum_{l=1}^n (E^{l-1} a_l)_k^m b_m. \quad (2.6)$$

The inverse  $MC_n$ -number  $z^{-1}$  we shall define via the notion of inverse matrix  $Z^{-1}$ . In search of  $Z^{-1}$  we find  $n$ -order of pseudo-norm of  $Z$  as the determinant:

$$|Z|^n = \det\{Z_m^l\}. \quad (2.7)$$

**Definition:**  $|z|^n = |Z|^n$ .

Thus  $|z|^n$ , as well  $|Z|^n$ , is an homogeneous form of  $n$  degree relatively  $q_i$ :

$$|z|^n = \eta^{i_1 \dots i_n} q_{i_1} \dots q_{i_n}, \quad (2.8)$$

where the summation convention is adopted. Obviously,

$$|z_1 z_2|^n = |z_1|^n |z_2|^n \quad (2.9)$$

Any  $MC_n$ -number is coupled by its *conjugation*. The conjugation of  $z$  is given by the following

**Definition:**

$\bar{z} \in MC_n$  is conjugation of  $z \in MC_n$  if  $\bar{z}z = |z|^n$ .

Let us represent  $\bar{z}$  by the series

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^n q^i e^{-(i-1)}.$$

The coordinates  $q_i$ ,  $q^j$  we call as *covariant and contra-variant coordinates*, correspondingly. These are the components of the vector in  $n$ -dimensional space, while  $|z|^n$  can be interpreted as a square of the length of a such vector. These coordinates satisfy the following bilinear relations

$$q^i q_i = |z|^n, \quad (E^k)_l^i q^l q_i = 0, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (2.10)$$

from which one may form  $n$ - dimensional orthogonal basis defining

$$h^i_j = \sum_{k=1}^n (E^{k-1})^i_j q_k, \quad h_i^j = \sum_{k=1}^n (E^{-(k-1)})^j_i q^k. \tag{2.11}$$

These vectors are mutually orthogonal because

$$h^i_p h_j^p = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (E^{k-1})^i_p q_k (E^{-(l-1)})^p_j q^l = |z|^n \delta_j^i, \tag{2.12}$$

where we used (2.6) and (2.10).

By using (2.8) and (2.10) one finds explicit relationships between  $q^i$  and  $q_i$ :

$$q^i = \eta^{ii_1 \dots i_{n-1}} q_{i_1} \dots q_{i_{n-1}}. \tag{2.13}$$

Any  $MC_n$ -number defined by the condition  $|z|^n = 1$  can be given in the exponential representation:

$$z = \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i e^i\right). \tag{2.14}$$

Then, an expansion straightforward gives arise to the analogue of Euler formula:

$$z = \sum_{i=1}^n mus_i(\varphi) e^{i-1}, \quad \varphi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\}. \tag{2.15}$$

These "mus"-functions one may consider as extension of the usual set of cosine&sine functions. For  $n = 2$  one recovers the *tri*-gonometric functions:

$$mus_1(\varphi) = \cos(\varphi), \quad mus_2(\varphi) = \sin(\varphi),$$

correspondingly, the condition  $|z|^n = \det(Z_m^l) = 1$  is reduced to well known identity:  $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$ . We suggest to denominate the set of functions  $mus_i(\varphi)$ ,  $i = 1, \dots, n$  as *polygonometric functions*.

In the polar coordinates the  $MC_n$ -number is defined by

$$z = \rho \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i e^i\right), \tag{2.16}$$

where  $\rho = |z|$ .

Further, it has sense to introduce the notion of the *partially conjugated  $MC_n$ -numbers*. By using

$$\sum_{i=1}^n \omega^i = 0, \quad \omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right),$$

we write

$$z^{(0)} z^{(1)} z^{(2)} \dots z^{(n-1)} = \rho^n, \tag{2.17}$$

where

$$z^{(k)} = \rho \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} \omega^{ki} e^i \varphi_i\right).$$

$MC_n$ -numbers  $z^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n - 1$  we shall call partially conjugated of  $z$ . Form (2.17) it follows

$$\bar{z} = z^{(1)} z^{(2)} \dots z^{(n-1)}.$$

It is useful to keep in mind also:

$$|\bar{z}|^n = |z^{(1)}|^n |z^{(2)}|^n \dots |z^{(n-1)}|^n = \rho^{n(n-1)}, \quad (2.18)$$

because

$$|z^{(k)}| = \rho, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

The following representations for  $\bar{z}$  hold

$$\bar{z} = \prod_{l=1}^{n-1} \sum_{i=1}^n q_i \omega^{l(i-1)} e^{i-1}, \quad \bar{z} = \rho^{n-1} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i e^i\right). \quad (2.19)$$

We can also define conjugation of  $\bar{z}$ , so that,

$$\bar{\bar{z}} = \rho^{n(n-1)}. \quad (2.20)$$

By taking into account that for any  $z$  we have unique  $\bar{z}$  we come to the conclusion that

$$\bar{\bar{z}} = \lambda z$$

where  $\lambda = \rho^{n(n-2)}$ .

To derive the derivatives of the poly-gonometric functions it is enough to use the series expansions (2.14), (2.15). Setting equal the expressions at any  $\mathbf{e}^i$  in

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_j} \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i e^i\right) = e^j \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i e^i\right)$$

one gets

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_k} \text{mus}_l(\varphi) = (E^k)^m {}_l \text{mus}_m(\varphi), \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (2.21, a)$$

For the coordinates, correspondingly, we get

$$\frac{\partial q_i}{\partial \varphi_k} = (E^k)^l {}_i q_l, \quad \frac{\partial q^i}{\partial \varphi_k} = -(E^k)^i {}_l q^l. \quad (2.21, b)$$

For convenience of a reader let us repeat the above formulae for the case  $z \in MC_3$ .

**Definition:**

$$z = q_1 + e q_2 + e^2 q_3, \quad e^3 = 1.$$

Conjugation:

$$\bar{z} = q^1 + e^{-1} q^2 + e^{-2} q^3.$$

Pseudo-norm:

$$|z|^3 = q_1 q^1 + q_2 q^2 + q_3 q^3.$$

Partial conjugations:

$$z^{(1)} = q_1 + \omega e q_2 + \omega^2 e^2 q_3, \quad z^{(2)} = q_1 + \omega^2 e q_2 + \omega e^2 q_3.$$

Relationships between covariant and contra-variant coordinates:

$$q^1 = (q_1)^2 + q_2 q_3, \quad q^2 = -(q_2)^2 + q_1 q_3, \quad q^3 = (q_3)^2 + q_2 q_1.$$

**Formulae of differentiation.**

For the covariant vectors:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_3 & q_1 & q_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_2 & -q_3 & q_1 \end{pmatrix}$$

For the contra-variant vectors:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q^2 \\ -q^3 \\ q^1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q^3 \\ q^1 \\ q^2 \end{pmatrix}.$$

In conclusion of this section, let us give one useful representation for the pseudo-norm of  $z$ . To give a main idea, let us begin from the case  $n = 3$ . According to the definition:

$$|z|^3 = \det(Z) = \det \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_3 & q_1 & q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_1 \end{pmatrix}.$$

Now let us recall the definition of the determinant of the matrix:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \epsilon^{ijk} a_i b_j c_k,$$

$\epsilon^{ijk}$  is the Levi-Civita tensor. By equating the matrix  $A$  with the matrix  $Z$  we find

$$a_l = (E^0)_l^i q_i, \quad b_l = (E^1)_l^i q_i, \quad c_l = (E^2)_l^i q_i.$$

Therefore,

$$|z|^3 = \det(Z) = \epsilon^{ijk} (E^0)_i^p (E^1)_j^l (E^2)_k^m q_p q_l q_m.$$

In the general case we get

$$|z|^n = \epsilon^{l_1 l_2 \dots l_n} (E^0)_{l_1}^{i_1} (E^1)_{l_2}^{i_2} \dots (E^{n-1})_{l_n}^{i_n} q_{i_1} \dots q_{i_n}. \quad (2.22)$$

**3 Direct and Inverse Hamiltonian Equations**

Let us recall the basic elements of Hamiltonian dynamics. One has two dimensional phase space on which the Poisson bracket structure obeying the Jacobi identity is defined. Further, one has the Hamiltonian form for the equations of motion where the evolution in time of a dynamical system is generated by a single function, the Hamiltonian. The basic canonical structure of the phase space of Hamiltonian mechanics is carried by the canonical pairs of the Cartesian coordinates.

Consider now isolated, macroscopic system consisting of  $N$  identical particles, each of which has three translational degrees of freedom. The dynamical state of the system at a given time completely specified by the  $3N$  coordinates and  $3N$  momenta of the particles. The values of these variables define a *phase point* in a  $2n = 6N$ - dimensional *phase space*. The classical phase space for Hamiltonian mechanics consists of the pair of coordinates  $\{x^i, p_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  and Poisson bracket:

$$\{f_1, f_2\} = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, p)} = \frac{\partial f_1}{\partial x^i} \frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial x^i}, \quad (3.1)$$

where  $f$  is a classical observable, smooth function on the phase space and the summation convention adopted.

A standard textbook presentation of the classical mechanics start from the first principles of the classical mechanics, such as, the principle of *least action*, according to which the world trajectories under the Hamilton phase flow are extremals of the action. Another principle is invariance of the Poincaré integral

$$P_2 = \int \int dx^i \wedge dp_i$$

over canonical mapping  $(x^i(t), p_i(t)) \rightarrow (x^i(t + \delta t), p_i(t + \delta t))$  [11].

One may generalize the latter to the case of Poincaré–Cartan integral

$$PC_2 = \int \int dx^i \wedge dp_i - \int \int dh \wedge dt.$$

Instead of this we shall use the principle of the form-invariance of the integral equality

$$\int \int dx^i \wedge dp_i = \mu \int \int dh \wedge dt \quad (3.3)$$

over the mappings

$$(x^i, p_i) \rightarrow (h, t), \quad (h, t) \rightarrow (x^i, p_i). \quad (3.4)$$

Here,  $h$  is the Hamiltonian or, equal is the total energy of the system. (We suppose that an interactions explicitly no dependent of time.) The constant of motion  $\mu$  can be expressed of  $P_2$  and  $PC_2$ :

$$\mu = \frac{P_2}{P_2 - PC_2}$$

As far as our further results do not depend of  $\mu$ , we shall take  $\mu = 1$ .

Let us start from the case of one dimensional motion  $D = 2$ . In that case we have two integrals of motion in the capacity of which one may choose: (1) the initial time  $t_0$ , (2) the total energy  $h$  [12]. We a priori suppose that description of a motion of the system is given by the set of two functions

$$x = X(t - t_0, h - h_0), \quad p = P(t - t_0, h - h_0),$$

where  $x$  and  $p$  to be the coordinates of trajectory and momentum, correspondingly. We also suppose that this system is invertible, namely,

$$h = H(x, p), \quad t = T(x, p).$$

### Theorem 1 (§3)

**Direct and Inverse Hamiltonian equations of motion are consequence of the principle of form-invariance of the integral equation (3.3) over the mapping (3.4).**

**Proof.**

We are looking for conditions for the mappings  $(h, t) \rightleftharpoons (x, p)$  over of which

$$\int \int dh \wedge dt \rightleftharpoons \int \int dx \wedge dp.$$

This condition is satisfied if the Jacobian of the mapping  $(h, t) \rightarrow (x, p)$  is equal 1:

$$\det J\{(h, t) \rightarrow (x, p)\} = \frac{\partial x}{\partial h} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial h} = 1,$$

where the Jacobian matrix is defined by

$$J\{(h, t) \rightarrow (x, p)\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial h} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial h} & \frac{\partial p}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

As far as the determinant of the matrix for  $J\{(h, t) \rightarrow (x, p)\}$  is equal to one then inverse matrix is equal to adjoint matrix:

$$J^{-1}\{(h, t) \rightarrow (x, p)\} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial h} & -\frac{\partial x}{\partial h} \end{pmatrix}.$$

According to the well known property of Jacobian inverse Jacobian matrix coincides with Jacobian matrix of inverse mapping. It gives

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial h} & -\frac{\partial x}{\partial h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial T}{\partial p} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

By equating the elements of these matrices we get two kind of Hamiltonian equations:

$$(a) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (3.6, a)$$

$$(b) \quad \frac{\partial p}{\partial h} = \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial x}{\partial h} = -\frac{\partial T}{\partial p} \quad (3.6, b)$$

Of course, these two Hamiltonian systems are equivalent. From (3.6,a,b) it is easily seen, that the functions  $h = H(x, p)$  and  $t = T(x, p)$  are mutually exchanged. The solutions of both system are given by the same set of functions:  $p = p(h, t)$ ,  $x = x(h, t)$ .

Consider now the case of  $2n$ -dimensional phase space. The solution of the dynamical equations in that case are given by by the following set of functions

$$x^i = x^i(t - t_0, h, c_3, \dots, c_{2n}), \quad p_i = p_i(t - t_0, h, c_3, \dots, c_{2n}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.7)$$

where  $c_3, \dots, c_{2n}$  are the other constants of motion.

We assume that the system (3.7) is invertible, so that

$$t = T(x_1, p_1, \dots, x_n, p_n), \quad h = H(x_1, p_1, \dots, x_n, p_n), \quad c_l = C_l(x_1, p_1, \dots, x_n, p_n), \quad l = 3, \dots, 2n. \quad (3.8)$$

The condition of the Theorem 1 (§3) is satisfied if

$$\det J\{(h, t) \rightarrow (x, p)\} = \frac{\partial x^i}{\partial h} \frac{\partial p_i}{\partial t} - \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial p_i}{\partial h} = 1. \quad (3.9)$$

Now any element of the Jacobian matrix is  $n$ -dimensional vector:

$$J\{(h, t) \rightarrow (x, p)\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial h} & \frac{\partial x^i}{\partial t} \\ \frac{\partial p_i}{\partial h} & \frac{\partial p_i}{\partial t} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Taking into account (3.9) we get

$$J^{-1}\{(h, t) \rightarrow (x, p)\} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p_i}{\partial t} & \frac{\partial x^i}{\partial t} \\ \frac{\partial p_i}{\partial h} & -\frac{\partial x^i}{\partial h} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

By equating this matrix with the Jacobian matrix of the inverse mapping

$$J\{(p, x) \rightarrow (h, t)\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x^i} & \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{\partial T}{\partial x^i} & \frac{\partial T}{\partial p_i} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

we get two kind of Hamiltonian equations in  $2n$ -dimensional phase space

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (3.13, a)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial h} = \frac{\partial T}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial h} = -\frac{\partial T}{\partial p_i} \quad (3.13, b)$$

◇

The validity of the above consideration can be easily demonstrated on the oscillator model. Consider direct mapping

$$x(h, t) = \sqrt{2h} \sin(t), \quad p(h, t) = \sqrt{2h} \cos(t)$$

and its inverse one

$$h(x, p) = \frac{1}{2}(x^2 + p^2), \quad \tan(t(x, p)) = \frac{x}{p}.$$

These mappings satisfy all conditions of the Theorem 1 (§3) and gives arise oscillator equations of motion.

#### 4 Liouville theorem. Evolution equations in $D = 2n$ phase space. Nambu dynamical equations

As it has been noted above, the solutions of two equivalent Hamilton systems (3.13,a,b) are represented by the functions

$$x^i = x^i(H, T, C_3, C_4, \dots, C_{2n}), \quad p_i = P_i(H, T, C_3, C_4, \dots, C_{2n}) \quad (4.1)$$

This set of functions one may consider as direct mapping. In previous section we have considered inverse mapping only with respect to the pair  $\{H, T\}$ . Consequently, the Hamiltonian systems of equations gave arise. Now let us put on the top the Liouville theorem, according to which the  $2n$ -th Poincaré integral by

$$P_{2n} = \int \dots \int dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dp_1 \dots \wedge dp_n \quad (4.2)$$

is invariant of the motion. Define the following integral equation

$$\int \dots \int dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dp_1 \dots \wedge dp_n = \int \dots \int dH \wedge dT \wedge dC_3 \wedge dC_4 \dots \wedge dC_{2n} \quad (4.3)$$

For sake of convenience let us introduce the notations

$$\{q_i\} = \{x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n\}, \quad \{Q_i\} = \{H, T, C_3, \dots, C_{2n}\}, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (4.4)$$

and consider the complete direct-inverse mapping given by

$$\{q \rightleftharpoons Q\} \quad (4.5)$$

**Theorem 2 (§4)**

**Direct and Inverse Hamilton-Nambu equations of motion are consequence of the principle of form-invariance of the integral equation (4.3) over the mapping (4.5).**

**Proof.**

The mapping  $\{q \rightarrow Q\}$  is mapping of  $2n$  phase space coordinates onto  $2n$  of constants of motion. Jacobian matrix of this mapping is defined by

$$J\{Q \rightarrow q\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial Q_{2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial q_{2n}}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial q_{2n}}{\partial Q_{2n}} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

The principle of form-invariance of (4.3) yields the condition

$$Det J\{Q \rightarrow q\} = \epsilon_{i_1 \dots i_{2n}} \frac{\partial q_1}{\partial Q_{i_1}} \cdots \frac{\partial q_{2n}}{\partial Q_{i_{2n}}} = 1, \quad (4.7)$$

where we used the definition of determinant of  $(2n \times 2n)$  matrix. Further, as it has been done above, we shall equate any element of adjoint Jacobian matrix  $J\{Q \rightarrow q\}$  with the corresponding element of Jacobian matrix of inverse mapping  $J\{q \rightarrow Q\}$ . As the result we get the following set of evolutionary equations

$$\frac{\partial Q_{i_k}}{\partial q_k} = \epsilon_{i_1 \dots i_{2n}} \frac{\partial q_1}{\partial Q_{i_1}} \cdots \frac{\partial q_{k-1}}{\partial Q_{i_{k-1}}} \frac{\partial q_{k+1}}{\partial Q_{i_{k+1}}} \cdots \frac{\partial q_{2n}}{\partial Q_{i_{2n}}} \quad (4.8)$$

Now, *vice versa*, let us take the Jacobian of mapping  $\{q \rightarrow Q\}$  and compare its adjoint matrix with the corresponding Jacobian matrix of inverse mapping  $\{Q \rightarrow q\}$ . In that case the principle of form invariance of (4.3) yields the condition

$$Det J\{q \rightarrow Q\} = \epsilon_{i_1 \dots i_{2n}} \frac{\partial Q_1}{\partial q_{i_1}} \cdots \frac{\partial Q_{2n}}{\partial q_{i_{2n}}} = 1, \quad (4.9)$$

As the result one obtains the evolutionary equations inverse to (4.8):

$$\frac{\partial q_{i_k}}{\partial Q_k} = \epsilon_{i_1 \dots i_{2n}} \frac{\partial Q_1}{\partial q_{i_1}} \cdots \frac{\partial Q_{k-1}}{\partial q_{i_{k-1}}} \frac{\partial Q_{k+1}}{\partial q_{i_{k+1}}} \cdots \frac{\partial Q_{2n}}{\partial q_{i_{2n}}}. \quad (4.10)$$

◇

The system of equations (4.10) coincides with the Hamilton-Nambu equations in the phase space with even set of coordinates while the equations (4.8) we can consider as *inverse Hamilton-Nambu equations*. The relationships (4.7) and (4.9) we may consider as the generalization of the Lagrange and the Poisson brackets, correspondingly.

### Nambu dynamical equations in $D = 3$ -dimensional phase space

Now let us use Theorem 2 (§4) to obtain equations of motion in  $D = 3$ -dimensional phase space. Suppose that the phase space is given by the triplet of the set of variables  $\{x, p, q\}$ . It means, the motion of the dynamical system is described by the functions

$$x = x(t, h_1, h_2), \quad p = p(t, h_1, h_2), \quad q = q(t, h_1, h_2).$$

The variables  $t, h_1, h_2$  in various formulations can play different role. Denote the set of functions

$$\{t = T(x, p, q), h_1 = H_1(x, p, q), h_2 = H_2(x, p, q)\}$$

by  $\{Q\}$  and the set of variables  $\{x, p, q\}$  by  $\{q\}$ .

Consider the mapping  $\{q \rightarrow Q\}$  with Jacobian matrix

$$J(\{q \rightarrow Q\}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_1}{\partial p} & \frac{\partial H_1}{\partial q} \\ \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial T}{\partial p} & \frac{\partial T}{\partial q} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial p} & \frac{\partial H_2}{\partial q} \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

with  $\det J(\{q \rightarrow Q\}) = 1$ . The Jacobian of the inverse mapping is

$$J(\{Q \rightarrow q\}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial h_1} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial h_2} \\ \frac{\partial p}{\partial h_1} & \frac{\partial p}{\partial t} & \frac{\partial p}{\partial h_2} \\ \frac{\partial q}{\partial h_1} & \frac{\partial q}{\partial t} & \frac{\partial q}{\partial h_2} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Adjoint matrix for  $J(\{q \rightarrow Q\})$  is

$$J^{-1}(\{q \rightarrow Q\}) = \begin{pmatrix} -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial p} & \frac{\partial T}{\partial q} \\ \frac{\partial H_2}{\partial p} & \frac{\partial H_2}{\partial q} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial p} & \frac{\partial H_1}{\partial q} \\ \frac{\partial H_2}{\partial p} & \frac{\partial H_2}{\partial q} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial p} & \frac{\partial H_1}{\partial q} \\ \frac{\partial T}{\partial p} & \frac{\partial T}{\partial q} \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial q} & \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial H_2}{\partial q} & \frac{\partial H_2}{\partial x} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial q} & \frac{\partial H_1}{\partial x} \\ \frac{\partial H_2}{\partial q} & \frac{\partial H_2}{\partial x} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial q} & \frac{\partial H_1}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial q} & \frac{\partial T}{\partial x} \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial T}{\partial p} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial p} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_1}{\partial p} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial p} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_1}{\partial p} \\ \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial T}{\partial p} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

By equating the matrices (4.12) and (4.13) we get

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial p} & \frac{\partial H_1}{\partial q} \\ \frac{\partial H_2}{\partial p} & \frac{\partial H_2}{\partial q} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial q} & \frac{\partial H_1}{\partial x} \\ \frac{\partial H_2}{\partial q} & \frac{\partial H_2}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_1}{\partial p} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial p} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Thus, we obtained the *Nambu's equations of motion* [6].

With the same way one can define:

$$J^{-1}(\{Q \rightarrow q\}) = \begin{pmatrix} -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial t} & \frac{\partial p}{\partial h_2} \\ \frac{\partial q}{\partial t} & \frac{\partial q}{\partial h_2} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial h_2} \\ \frac{\partial q}{\partial t} & \frac{\partial q}{\partial h_2} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial h_2} \\ \frac{\partial p}{\partial t} & \frac{\partial p}{\partial h_2} \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial h_1} & \frac{\partial p}{\partial h_2} \\ \frac{\partial q}{\partial h_1} & \frac{\partial q}{\partial h_2} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial h_1} & \frac{\partial x}{\partial h_2} \\ \frac{\partial q}{\partial h_1} & \frac{\partial q}{\partial h_2} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial h_1} & \frac{\partial x}{\partial h_2} \\ \frac{\partial p}{\partial h_1} & \frac{\partial p}{\partial h_2} \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial h_1} & \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial q}{\partial h_1} & \frac{\partial q}{\partial t} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial h_1} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial q}{\partial h_1} & \frac{\partial q}{\partial t} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial h_1} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial h_1} & \frac{\partial p}{\partial t} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

and equate this matrix with the Jacobian matrix  $J(\{q \rightarrow Q\})$ . As the result one finds

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial h_2} \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial q}{\partial h_2} &= \frac{\partial H_1}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial h_2} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial h_2} &= \frac{\partial H_1}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial h_2} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial h_2} &= \frac{\partial H_1}{\partial q} \end{aligned} \tag{4.15}$$

These equations we can consider as *inverse Nambu's equations*.

### 5 Polylinear Oscillator Model in the Basis of Multicomplex Algebra

Oscillator model is one of the oldest models of the classical mechanics. The solutions of this model are given by cosine&sine functions. The equations of motion of one dimensional oscillator may be written in two equivalent forms:

(a) In the matrix form

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

with the solution

$$x = \sqrt{2h} \sin(t), \quad p = \sqrt{2h} \cos(t).$$

(b) In the basis of complex algebra

$$-i \frac{d}{dt} z = z, \quad z = p + ix, \tag{5.2}$$

with the solution

$$z = \sqrt{2h} \exp(it),$$

where the constant of motion  $h$ , energy, is defined by

$$h = \frac{1}{2}(x^2 + p^2) = \frac{1}{2}z\bar{z}.$$

In the Hamiltonian formalism this function plays a role of the Hamiltonian of the system:  $h = H(x, p)$ . Hamiltonian form of the Eqs. (5.1) and Eqs. (5.2), correspondingly, are given by

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial p} \end{pmatrix} H(x, p), \tag{5.3, a}$$

$$-i \frac{d}{dt} (p + ix) = \left( \frac{\partial}{\partial p} + i \frac{\partial}{\partial x} \right) H(x, p). \quad (5.3, b)$$

In the connection of complex form of equations of motion note F.Strocchi [13] gave the formulation of Schrodinger equation as Hamiltonian equations in complex coordinates where Hamiltonian function is the mean value of the corresponding quantum operator.

In this section we build one example of dynamical equations of motion in  $D \geq 3$ - dimensional phase space, we denominate *polylinear oscillator model*. This model is direct extension of the ordinary oscillator model in two-dimensional phase space. The solutions of the latter are given by the *tri*-gonometric functions or by the complex algebra. Correspondingly, the solutions of the polylinear oscillator model are given by the multicomplex algebra or by *poly*-gonometric functions. We show, the polylinear oscillator model is oscillator model for the Nambu's formulation of generalized Hamiltonian dynamics.

Thus, we are looking for equations for a new oscillator model the solutions of which are given by the polygonometric functions:

$$q_i = (nh)^{\frac{1}{n}} \text{mus}_i(\varphi), \quad q^i = (nh)^{\frac{n-1}{n}} \text{mus}_i(-\varphi), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.4)$$

where  $h = \frac{1}{n}|z|^n$  is the "energy" of the polylinear oscillator model. The polygonometric functions depend of  $(n-1)$ -angle. Complement this set of variables with the variable  $\varphi_n = h$  to get the set of  $n$  variables:  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ . Differentiating  $q_i, q^i$  with respect to  $h$  we obtain

$$\frac{dq^l}{d\varphi_n} = \frac{n-1}{nh} q^l, \quad \frac{dq_l}{d\varphi_n} = \frac{1}{nh} q_l. \quad (5.5)$$

Let us consider two set of independent coordinates:  $\{q^1, q^2, \dots, q^n\}$  and  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n\}$ . The Jacobian of the mapping

$$\{q^1, q^2, \dots, q^n\} \rightarrow \{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n\}$$

is equal to one:

$$\det \left( \frac{\partial q_l}{\partial \varphi_k} \right) = \frac{1}{nh} \det \left( \sum_l (E^j)_i^l q_l \right) = 1. \quad (5.6)$$

Let us evaluate the following derivatives:  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l}, \frac{\partial \varphi_k}{\partial q^l}$ . One may find these values by using the formulae (2.21,a,b) (5.6) and (5.7). By differentiating the set of functions  $\varphi_k = \varphi_k(q^1, q^2, \dots, q^n)$ , ( $k = 1, \dots, n$ ) with respect to the variables  $\varphi_l$ , ( $l = 1, \dots, n$ ) one obtains the linear system of the algebraic equations:

$$\delta_{ki} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial q^l} (E^i)_r^l q^r, \quad \delta_{ki} = -\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l} (E^i)_l^r q_r, \quad k, i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (5.7, a)$$

$$\delta_{kn} = \frac{n-1}{nh} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q^l} q^l, \quad \delta_{kn} = \frac{1}{nh} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l} q_l, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.7, b)$$

The solutions of Eqs.(5.7,a,b) with respect to  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l}, \frac{\partial \varphi_k}{\partial q^l}$  are given by

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial q^l} = \frac{1}{nh} (E^{-k})_l^p q_p, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l} = -\frac{1}{nh} (E^{-k})_p^l q^p. \quad (5.8, a)$$

$$q_l = (n-1) \frac{\partial \varphi_n}{\partial q^l}, \quad q^l = \frac{\partial \varphi_n}{\partial q_l}. \quad (5.8, b)$$

Equations (5.8,a,b) one may consider as the extension of the oscillator equations of motion with the first integral of motion given by

$$H = \frac{1}{n}|z|^n. \quad (5.9)$$

The function  $h = H(z)$  we choose as Hamiltonian of the system. By substituting (5.8,b) into right side of (2.21,b) we obtain next evolution equations for the coordinates  $q_i$  and  $q^i$  with respect to the evolution parameters  $\varphi_k, k = 1, \dots, n - 1$ :

$$\frac{\partial q_i}{\partial \varphi_k} = (n - 1)(E^k)_i^l \frac{\partial H}{\partial q^l}, \quad (5.10, a)$$

$$\frac{\partial q^i}{\partial \varphi_k} = -(E^k)_i^l \frac{\partial H}{\partial q_l}. \quad (5.10, b)$$

Obviously, for  $n = 2$  this system of equations is reduced to the Hamiltonian equations (5.4,a). As far as we consider  $H$  as the Hamiltonian of the conservative system, in general, the following conditions should be satisfied

$$\frac{dH}{d\varphi_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n - 1. \quad (5.11)$$

By using Eqs.(2.21,b), (5.8,b) we get

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\varphi_k} &= \frac{\partial q_l}{\partial \varphi_k} \frac{\partial H}{\partial q_l} + \frac{\partial q^l}{\partial \varphi_k} \frac{\partial H}{\partial q^l} = (n - 1)(E^k)_i^l \frac{\partial H}{\partial q^l} \frac{\partial H}{\partial q_i} - (E^k)_i^l \frac{\partial H}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial q^i} = \\ &= (n - 2)(E^k)_i^l \frac{\partial H}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial q^i} = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Thus the condition (5.12) is satisfied automatically for  $n = 2$  case. This is the case of ordinary oscillator model. For  $n \geq 3$  the condition (5.8) will be satisfied if the derivatives

$$D_m = \frac{\partial H}{\partial q^m}, \quad D^m = \frac{\partial H}{\partial q_m}$$

are related similar co- and contra- variant coordinates  $q_i, q^i$  according to our definition of the polylinear metrics given in Sec.2. It easily seen, in the case of polylinear oscillator model this condition is fulfilled because (5.8,b). In the general case the following relations between  $D^m$  and  $D_m$  hold

$$D^i = \lambda \eta^{ii_1 \dots i_{n-1}} D_{i_1} \dots D_{i_{n-1}}, \quad (5.13)$$

where  $\lambda$  for the polylinear oscillator is given by

$$\lambda = (n - 1)^{(n-1)}.$$

By substituting (5.13) into Eqs.(5.10,b) we obtain

$$\frac{\partial q^i}{\partial \varphi_k} = -\lambda (E^k)_i^l \eta^{li_1 \dots i_{n-1}} \frac{\partial H}{\partial q^{i_1}} \dots \frac{\partial H}{\partial q^{i_{n-1}}}. \quad (5.14)$$

These equations are given in the terms of the contra-variant coordinates.

### Theorem 3 (§5)

If the dynamical variables  $q_i$  of the system are coordinates of multi-oscillator model then they satisfy to the following system of equations:

$$\epsilon^{ii_1 \dots i_{n-1}} \frac{\partial q_{i_1}}{\partial \varphi_1} \frac{\partial q_{i_2}}{\partial \varphi_2} \frac{\partial q_{i_{n-1}}}{\partial \varphi_{n-1}} = \frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (5.15)$$

To prove it is sufficient to transform (5.10,a) into (5.15). From Eqs.(5.10,a) we obtain the following system of equations

$$\frac{\partial H}{\partial q^k} = \frac{1}{n-1} (E^{-k})_{l_k}^i \frac{\partial q_i}{\partial \varphi_k}, \quad k = 1, \dots, n-1; \quad l_k = 1, \dots, n. \quad (5.16)$$

By substitute these relations into the right side of (5.13) and taking into account the formulas (2.22) we get

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \eta^{ii_1 \dots i_{n-1}} (E^{-1})_{i_1}^{l_1} \frac{\partial q_{l_1}}{\partial \varphi_1} \dots (E^{-(n-1)})_{i_{n-1}}^{l_{n-1}} \frac{\partial q_{l_{n-1}}}{\partial \varphi_{n-1}} = \epsilon^{ii_1 \dots i_{n-1}} \frac{\partial q_{i_1}}{\partial \varphi_1} \frac{\partial q_{i_2}}{\partial \varphi_2} \frac{\partial q_{i_{n-1}}}{\partial \varphi_{n-1}}.$$

◇

Thus we obtained *Inverse Nambu's Equations*.

Similar the case of two-dimensional oscillator model we can elaborate inverse polylinear oscillator equations. Combining (5.8,a) with (5.5) we can write

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} = \frac{1}{n-1} (E^{-k})_l^i \frac{dq^l}{d\varphi_n}, \quad (5.17, a)$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial q^i} = -(E^{-k})_i^l \frac{dq_l}{d\varphi_n}. \quad (5.17, b)$$

Now let us rewrite the set of equations (5.17,a,b) in the following form

$$\frac{dq^l}{dt} = -(n-1) (E^k)_i^l \frac{\partial H_k}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_l}{dt} = (E^k)_l^i \frac{\partial H_k}{\partial q^i}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (5.18)$$

where we denoted  $H_k = \varphi_k$ ,  $t = \varphi_n$ . The condition  $\frac{dH_k}{dt} = 0$  is fulfilled if

$$\frac{1}{n-1} (E^k)_i^j \frac{dq_j}{dt} \frac{dq^i}{dt} = 0,$$

from which we obtain

$$\frac{dq_l}{dt} = \frac{1}{\lambda} \eta^{li_1 \dots i_{n-1}} \frac{dq^{i_1}}{dt} \dots \frac{dq^{i_{n-1}}}{dt}. \quad (5.19)$$

The equations (5.18) one may consider as inversion of the system (5.10,a,b). This formulation consists of  $(n-1)$ - Hamiltonian  $H_1 = \varphi_1, H_2 = \varphi_2, \dots, H_n = \varphi_{n-1}$  and only one time-like parameter,  $t = \varphi_n$ .

The relation of obtained system equations with Nambu equations is given by following

#### Theorem 4 (§5)

The solutions of the equations (5.18)–(5.19) satisfy to the following system of Nambu's equations

$$\epsilon_{li_1 \dots i_{n-1}} \frac{\partial H_1}{\partial q_{i_1}} \frac{\partial H_2}{\partial q_{i_2}} \dots \frac{\partial H_{n-1}}{\partial q_{i_{n-1}}} = \frac{dq_l}{dt}. \quad (5.20)$$

#### Proof

Let us form the following expression

$$Det_l(H_1, \dots, H_{n-1}) = \epsilon_{li_1 \dots i_{n-1}} \frac{\partial H_1}{\partial q_{i_1}} \frac{\partial H_2}{\partial q_{i_2}} \dots \frac{\partial H_{n-1}}{\partial q_{i_{n-1}}}. \quad (5.21)$$

By using Eqs.(5.18) we get

$$Det_l(H_1, \dots, H_{n-1}) = \frac{1}{(n-1)^{n-1}} \epsilon_{l_{i_1} \dots l_{i_{n-1}}} (E^1)_{l_1}^{i_1} \dots (E^{n-1})_{l_{n-1}}^{i_{n-1}} \frac{dq^{l_1}}{dt} \dots \frac{dq^{l_{n-1}}}{dt}. \quad (5.22)$$

Now taking into account the formula (2.22) we can transform (5.22) as

$$Det_l(H_1, \dots, H_{n-1}) = \eta_{l_{i_1} \dots i_{n-1}} \frac{dq^{i_1}}{dt} \dots \frac{dq^{i_{n-1}}}{dt}.$$

The latter just equal to  $\frac{dq_l}{dt}$  because (5.19). Thus we obtain (5.20) which coincides with the well known Nambu's system of equations.  $\diamond$

## Conclusion

Summarizing we come to the following conclusions.

The many particle system is described by  $2n$ -dimensional phase space coordinates. The solutions of the equations of motion are defined by  $2n$  constants of integration or equal, constants of motion. The other form of the constants of motion one may represent via  $2n$  Poincaré integrals. Let us consider even set of Poincaré integrals:  $P_2, P_4, \dots, P_{2n}$ . We have two possibilities.

1. The particles of the system obey to form-invariance principle of  $P_2$  (Theorem 1(§3)). Then the motion of the particles is described by Hamiltonian equations.
2. The particles of the system obey to form-invariance principle of  $P_{2n}$  (Theorem 2(§4)). Then the motion of the particles is described by Hamilton-Nambu equations.

Let us note,  $P_2$  is the square in two-dimensional phase space while  $P_{2n}$  is the volume in  $D = 2n$ -dimensional phase space. This fact prompts us an idea to use the algebras based on the polylinear forms. The pseudo-norm of the multicomplex algebra exactly is defined by  $D$ -dimensional volume (see, (2.22)). Thus, it occur, the multicomplex algebra is related with Hamilton-Nambu equations similar the complex algebra is related with Hamilton equations. On the other hand, we can use multicomplex algebra as "key thread" to generalize Hamiltonian equations of motion. In this way, we have constructed the oscillator model for the Hamilton-Nambu dynamical equations. We have found the dynamical equations in  $D \geq 2$ - dimensional phase space with  $(D - 1)$ -evolution parameters and single Hamiltonian. The oscillator model in a such dynamics is generated by the Hamiltonian defined by  $D$ -degree homogeneous form. The solutions are represented by the set of polygonometric functions depending of  $(D - 1)$  angle. We have shown, these equations can be inverted. As the result we have obtained the dynamical equations in  $D$ - dimensional phase space with an single evolution parameter and  $(D - 1)$  Hamiltonian.

## References

- [1] R. M. Yamaleev, *Analogues of Clifford Algebras of  $n$ -th order*, Communications of Joint Institute for Nuclear Research, P5-87-766, Dubna, Russia, 1987.  
N. Fleury, M. Rausch de Traubenberg and R. M. Yamaleev, *Generalized Clifford Algebra and Hiperspin Manifold*, Int. J. of Theor. Phys. Vol.32, No.4, 1993.  
Preprint CRN/PHTH 92-12, Strasbourg, 1992.
- [2] A. K. Kwasniewski *On the Onsager Problem for Potts Models*, J. Phys. A: Math. Gen., **19** 1469-1476, (1986)

- [3] D. G. Pavlov, *Generalization of Scalar Product Axioms*, HyperComplex Numbers in Geometry and Physics, 1 (1), Vol. 1 (2004) 5–18.  
 D. G. Pavlov, Four-dimensional time, HyperComplex Numbers in Geometry and Physics, 1 (1), Vol. 1 (2004) 31–39.  
 D. G. Pavlov and S. S. Kokarev, *Conformal gauge of the Berwald-Moor geometry and its induced non-linear symmetry*, HyperComplex Numbers in Geometry and Physics, 2 (10), Vol. 5 (2008) 3–24.
- [4] A. A. Eliovich, *On polynorms on non-associative algebras and its possible applications in physics*, HyperComplex Numbers in Geometry and Physics, 2 (10), Vol. 5 (2004) 131–159.
- [5] R. M. Yamaleev *Elements of Cubic Quantum Mechanics*, Communications of Joint Institute for Nuclear Research, P2-88-147, Dubna, Russia, 1988;  
 R. M. Yamaleev *Model of Polylinear Oscillator in the Space of Fractional Quantum Numbers*, Communications of Joint Institute for Nuclear Research, P2-88-871, Dubna, 1988;  
 R. M. Yamaleev *Cubic Forms and Quantum Mechanics* Rapid Communications of Joint Institute for Nuclear Research, No. 1 34–89, Dubna, 1989;  
 R. M. Yamaleev *On Geometrical Form in Three-Dimensional Space with Cubic Metric* Communications of Joint Institute for Nuclear Research, P5-89-269, Dubna, 1989;  
 R. M. Yamaleev *On Construction of Quantum Mechanics on Cubic Forms* Communications of Joint Institute for Nuclear Research, E2-89-326, Dubna, 1989;  
 R. M. Yamaleev, *New Dynamical Equations for Many Particle System on the Basis of Multicomplex Algebra*. In book: Clifford Algebras and Their Application in Math. Phys., (eds. V. Dietrich et al.) (1998), p. 433–441
- [6] Y. Nambu, *Generalized Hamiltonian Dynamics*, Phys. Rev. D7, **7**, No. 8 (1973) 2405.
- [7] F. B. Estabrook *Phys.Rev.* **D8** (1973) 2740  
 F. Bayen and M. Flato *Phys.Rev.* **D11** (1975) 3049  
 N. Mukunda, E. Sudarshan, *Phys.Rev.* **D13**, (1976) 530–532  
 M. Hirayama, *Phys.Rev.* **D16**, (1977) 530–532  
 M. Flato, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *J.Math.Phys.*, **17**, (1976) 1754  
 L. Takhtajan, *Commun. Math. Phys.* **160**, (1994) 295–315  
 R. Chatterjee, *Lett. Math. Phys.* **36**, (1996) 117–126
- [8] R. M. Yamaleev *Generalized Newtonian Equations of Motion*, Annals of Physics, **277** (1999) 1–18.
- [9] R. M. Yamaleev *Introduction into Theory of N-unitary Group*, Communications of Joint Institute for Nuclear Research, P2-90-129, Dubna, Russia, 1990.
- [10] N. Fleury, M. Rausch de Traubenberg and R. M. Yamaleev, *Commutative Extended Complex Numbers and Connected Trigonometry*, Journal of Math. Analysis and Appl. **180** No. 2 (1993);  
 Preprint CRN/PHTH 91-07, Strasbourg (1991)  
 N. Fleury, M. Rausch de Traubenberg and R. M. Yamaleev, *Extended Complex Number Analysis and Conformal-like Transformations*  
 Journal of Math. Analysis and Applications, **191** (1995) 118–136.  
 R. M. Yamaleev, *Equation of Motion of Four Degree for Tetranions*, Communications of Joint Institute for Nuclear research, P2-91-460, Dubna, Russia, 1991.
- [11] A. S. Bakai, Yu. P. Stepanovski. *Adiabatic invariants* Kiev, Naukova Dumka (1981)
- [12] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. *Mechanics* 3-d. Ed., Oxford, London, NY: Pergamon Press (1976)
- [13] F. Strocchi *Rev. Mod. Phys.* **38** (1) (1966) 36.

## ДИНАМИКА В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПОРЯДКА $D \geq 2$ В БАЗИСЕ АЛГЕБРЫ МУЛЬТИКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Р. М. Ямалеев

*Национальный Автономный университет Мексики, Мехико, Мексика,  
Объединенный университет ядерных исследований, Дубна  
iamaleev@servidor.unam.mx*

Мы используем коммутативную *алгебру мультикомплексных чисел*, чтобы построить модель осциллятора для динамики Гамильтона-Намбу. Мы предлагаем новый динамический принцип, из которого вытекают два вида уравнений Гамильтона-Намбу в  $D \geq 2$ - мерном фазовом пространстве. Первый формулируется с  $(D - 1)$ -параметром эволюции и единственным гамильтонианом. Гамильтониан модели осциллятора в такой динамике задается однородной формой степени  $D$ . Во второй формулировке, наоборот, эволюция системы вдоль единственного параметра эволюции генерируется  $(D - 1)$ - гамильтонианом. Последний задается уравнениями Нambu в  $D \geq 3$ -мерном фазовом пространстве.

**Ключевые слова:** Комплексные числа, обобщенная тригонометрия, дифференциальные уравнения, классическая механика, гамильтониан, фазовое пространство.

**PACS:** 03.65.sg (semiclassical theory and applications), 02.10.ud (linear algebra), 02.10Xm (multilinear algebra)

# ИДЕМПОТЕНТЫ И НИЛЬПОТЕНТЫ В КЛИФФОРДОВОЙ АЛГЕБРЕ ЕВКЛИДОВА 3-ПРОСТРАНСТВА И ИХ СВЯЗЬ С ФИЗИКОЙ

О. А. Морнев

*Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, г. Пущино  
mornev@mail.ru*

Исследована структура идемпотентов и нильпотентов индекса 2 пространственной алгебры – клиффордовой алгебры  $Cl_3$ , порождённой линейным трёхмерным евклидовым пространством  $E_3$  над полем действительных чисел. Найден общий вид указанных элементов и выявлены их алгебраические свойства и геометрическая интерпретация. Обнаружена эквивалентность действия групп фазовых преобразований ( $U_1$ ) и вращений ( $SO_3$ ) на нильпотенты индекса 2: фазовые преобразования нильпотента, реализуемые его умножением на комплексные экспоненты, приводят к пространственным поворотам нильпотента в  $E_3$  (обратное также верно). Показано, что нильпотенты индекса 2 – единственные элементы алгебры  $Cl_3$ , для которых указанная эквивалентность действия групп  $U_1$  и  $SO_3$  имеет место; таким образом, это свойство нильпотентов является характеристическим. Полученные результаты применены к анализу геометрии вакуумных решений уравнений Максвелла без источников, описывающих плоские гармонические электромагнитные волны – фотоны с двумя типами спиральности. На основе предпринятого анализа выдвинута неформальная гипотеза о том, что реальное физическое пространство имеет не менее шести измерений: в минимальном случае его базис состоит из шести линейно независимых элементов – трёх векторов и трёх бивекторов, порождённых этими векторами.

**Ключевые слова:** клиффордова алгебра, геометрическая алгебра, пространственная алгебра, идемпотенты, нильпотенты, группа фазовых преобразований  $U_1$ , группа вращений  $SO_3$ , комплексные числа, кватернионы, электромагнитные волны, фотоны, размерность пространства.

Полвека назад Марсель Рисс (Marcel Riesz) своими лекциями, прочитанными в Мерилендском университете (США) между октябрём 1957 – январём 1958, фактически объявил, что в основе унифицированного алгебро-геометрического описания физической реальности – не только её квантовых аспектов – с неизбежностью должны лежать адекватно интерпретированные алгебры Клиффорда. Кончина Рисса оборвала намеченный путь, и в книге [1], изданной по его лекциям, недостаёт двух глав (лишь сравнительно недавно одна из них была найдена и опубликована во втором издании его лекций [2]). Однако точка зрения Рисса была осознана, подхвачена и затем чрезвычайно эффективно (и эффектно) развита и внедрена в сознание научного сообщества Дэвидом Хестенесом (David Hestenes) [3–5], который был удостоен за свои усилия медали Эрстеда [6]. Ныне предвидение Рисса подтверждается всё большим числом публикаций, включая монографии как фундаментальной [7–9], так и прикладной направленности [9–11].

Вышедшие на физическую арену из недр квантовой теории, алгебры Клиффорда<sup>1</sup> позволяют по-новому взглянуть также и на геометрию макроскопического мира. При этом роль классического фундамента, над которым надстраиваются последующие – "релятивистский" и "квантовый" – этажи возводимого здания, отводят *геометрической алгебре*

<sup>1</sup> Эти алгебры ассоциативны, но некоммутативны и входят в класс унитарных алгебр, т. е. алгебр с единицей. Положение алгебр Клиффорда в математике можно уяснить по руководствам [12–15].

*физического пространства*<sup>2</sup> – клиффордовой алгебре  $Cl_3$ , порождённой линейным трёхмерным евклидовым пространством  $E_3$  над полем действительных чисел [3, 5, 7, 9].

Эффективность пространственной алгебры как инструмента, отвечающего нуждам физики, обусловлена тремя обстоятельствами.

Во-первых, её носитель (т. е. линейное пространство, несущее структуру алгебры) образован прямой суммой линейных пространств скаляров, векторов, бивекторов и тривекторов – объектов, имеющих непосредственный геометрический смысл.

Во-вторых, мультипликативная операция этой алгебры, вбирая в себя свойства привычных скалярного, векторного, смешанного и внешнего произведений, позволяет не только компоновать из объектов одних подпространств носителя объекты других его подпространств, но и измерять эти объекты в числах.

В третьих,  $Cl_3$  содержит подалгебры, изоморфные двум замечательным алгебрам – алгебрам комплексных чисел и кватернионов; поэтому вся мощь последних может быть сразу же задействована в  $Cl_3$ .

В силу известной теоремы Фробениуса невозможно определить операцию деления на всей пространственной алгебре; иными словами,  $Cl_3$  содержит делители нуля. Общеалгебраическими примерами делителей нуля являются *взаимно ортогональные идемпотенты* (ненулевые элементы  $E_+$  и  $E_-$  алгебры, такие, что  $E_+^2 = E_+$ ,  $E_-^2 = E_-$ ,  $E_+E_- = E_-E_+ = 0$ ), а также *нильпотенты индекса 2* (ненулевые элементы  $N$ , удовлетворяющие условию  $N^2 = 0$ ). Алгебра  $Cl_3$  содержит и те, и другие. Известно (это будет видно также и из дальнейшего), что помимо тривиального идемпотента – единицы  $\mathbf{1}$ , идемпотентами этой унитарной алгебры являются все *паравекторы*<sup>3</sup> вида  $E_{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \sigma)$ , где  $\sigma$  – произвольный единичный пространственный вектор; при этом эти идемпотентные паравекторы удовлетворяют равенству  $\mathbf{1} = E_+ + E_-$  и ортогональны друг другу. Примерами же нильпотентов в  $Cl_3$  являются суммы вида  $U + V$ , где  $U$  и  $V$  – произвольные пространственные вектор и бивектор с равными нормами.

Исчерпываются ли элементами указанного вида все идемпотенты и нильпотенты в  $Cl_3$ ? Если же нет, то каков их общий вид? Постановка этих вопросов диктуется не только интересом чисто математического характера, но также и физической подоплёкой.

В случае идемпотентов мотивировка такова. Напомним (см., например, [16–18]), что если  $\mathcal{A}$  – унитарная алгебра над полем с характеристикой, не равной 2, то разложение её единицы в сумму двух взаимно ортогональных идемпотентов несёт информацию о свойствах этой алгебры в целом: из равенства  $\mathbf{1} = E_+ + E_-$  следует, что  $\mathcal{A}$  разлагается в прямую сумму двух односторонних идеалов (левых идеалов  $\mathcal{A}E_+$ ,  $\mathcal{A}E_-$ , или правых идеалов  $E_+\mathcal{A}$ ,  $E_-\mathcal{A}$ ):

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}E_+ \oplus \mathcal{A}E_- = E_+\mathcal{A} \oplus E_-\mathcal{A}.$$

Здесь – выход физикам: в случае алгебры  $Cl_3$  элементы левых/правых идеалов, порождённых идемпотентными паравекторами  $E_{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \sigma)$  (эти идеалы являются минимальными), интерпретируются как двухкомпонентные спиноры Паули (см., например, [3, 7]), а последние тесно связаны с квантовомеханическим формализмом. Кроме того, указанные идемпотентные паравекторы недавно стали использоваться как отправные элементы при построении новых способов представления и обработки классической и квантовой информации [19–22].

В свете сказанного представляется вполне естественной задача нахождения общего вида идемпотентов алгебры  $Cl_3$ . В настоящей работе дано полное решение этой задачи:

<sup>2</sup> (Geometric) Space Algebra [3, 5, 7], Algebra of Physical Space [9]. Ниже для обозначения этой алгебры будет использоваться словосочетание пространственная алгебра.

<sup>3</sup> Термином "паравектор" обозначают аддитивные комбинации скаляров и векторов.

показано, что каждый идемпотент этой алгебры является суммой скаляра, вектора и бивектора, при этом вектор лежит в плоскости бивектора, а квадраты норм вектора и бивектора разнятся на единицу. Идемпотенты, включающие ненулевые бивекторы, оказываются *составными*: они разлагаются в суммы идемпотентных паравекторов и нильпотентов индекса 2; как следствие, идеалы, порождаемые в  $Cl_3$  такими идемпотентами, не являются минимальными. Однако поскольку нильпотенты, входящие в составные идемпотенты в качестве слагаемых, имеют нетривиальный физический смысл (см. ниже), составные идемпотенты и порождаемые ими идеалы требуют дальнейшего продумывания.

Изучение нильпотентов алгебры  $Cl_3$  является второй задачей настоящей работы. В физике эти алгебраические элементы играют существенную роль хотя бы потому, что именно они определяют в формализме  $Cl_3$  структуру свободных электромагнитных волн – фотонов с двумя типами спиральности [3, 6, 23]. Кроме того, нильпотенты стали восприниматься как ключевой ингредиент при построении модернизированных версий квантовой теории и описании фермионных состояний [24–27].

В настоящей работе поставлена и решена задача нахождения общего вида нильпотентов индекса 2 алгебры  $Cl_3$ . Показано, что в  $Cl_3$  каждый нильпотент представляет собой прямую сумму пространственных вектора и бивектора, при этом вектор лежит в плоскости бивектора и имеет равную с ним норму. Из этого следует, что все нильпотенты в  $Cl_3$  исчерпываются элементами  $\mathbf{U} + \mathbf{B}$ , упомянутыми выше.

Если последний факт рассматривать изолированно, то он представляется локальным, а потому не очень интересным. Однако этот факт играет ключевую роль при исследовании третьей задачи, результат решения которой заставляет вновь задуматься о физической природе вращений – феномена, несомненная удивительность которого, как правило, ускользает от сознания. Суть дела такова.

Как уже отмечалось выше,  $Cl_3$  содержит две подалгебры, изоморфные алгебрам комплексных чисел и кватернионов. Поэтому в  $Cl_3$  естественным образом представлены несколько классических групп: группа  $U_1$  фазовых преобразований<sup>4</sup>, группа  $SU_2$ , накрывающая группу вращений  $SO_3$ , и, тем самым, сама группа  $SO_3$ . Группа  $U_1$  действует в  $Cl_3$  умножениями элементов этой алгебры на комплексные экспоненты  $\exp(\pm i\varphi)$ ; в общем случае это приводит к "перемешиванию" скаляров (действительных чисел) с тривекторами, а векторов – с бивекторами. Что же касается группы вращений  $SO_3$ , то она действует на элементы  $Cl_3$  унимодулярными кватернионами по обычным правилам кватернионной алгебры – в соответствии с известной формулой Гамильтона-Кэли; при этом скаляры и тривекторы оказываются инвариантными по отношению к действию  $SO_3$ , а векторы и бивекторы, вообще говоря, поворачиваются.

Возникает вопрос о наличии в  $Cl_3$  таких элементов, на которые оба типа преобразований действуют одинаково, заставляя эти элементы вращаться. В данной работе показано, что такие элементы существуют: ими являются нильпотенты индекса 2, и только они.

Сказанное содержательно означает, что в алгебре  $Cl_3$ , порождённой трёхмерным евклидовым пространством, имеются объекты, имеющие ясную с точки зрения трёхмерия геометрическую интерпретацию, изменение "фазы" которых, индуцируемое умножениями на комплексные экспоненты  $\exp(\pm i\varphi)$ , выглядит как пространственное вращение.

Этот факт, очевидный для евклидовой плоскости (её вращения реализуются именно комплексными экспонентами), при выходе в трёхмерное пространство представляется неожиданным и, устанавливая наглядную связь между обоими типами преобразований, обогащает физическую интуицию.

Указанная связь (вне формализма  $Cl_3$  её, по-видимому, вряд ли возможно уловить) имеет прямой выход в физику: она позволяет по-новому осмыслить процессы, связанные

<sup>4</sup> Преобразования этой группы иногда именуется дуальными вращениями.

с распространением электромагнитных волн, а также поднимает некоторые вопросы общезначимого характера. Кое-что об этом будет сказано в конце статьи.

### *Структура статьи.*

В разделе 1 представлен очерк основ пространственной алгебры (вынужденно не полный – релятивистские аспекты опущены), поскольку без использования её языка ни формулировка, ни решение поставленных задач не представляются возможными. Построение этой алгебры, намеченное в настоящей работе, в некоторых пунктах отличается как от общих построений [12–15] математиков, так и от того, как оно излагается в монографиях [3, 5, 7] физиков. Сразу же вводится таблица умножения  $Cl_3$ , апеллирующая к ортонормированному базису порождающего пространства  $E_3$ . Это позволяет с самого начала подключить физико-геометрическую интуицию и осознать естественность возникающей конструкции, которая интегрирует и обобщает понятия скалярного, векторного и внешнего произведения векторов, повсеместно используемых в точном естествознании. Операция внешнего произведения векторов в  $Cl_3$  определяется в п. 1.4 через операцию векторного произведения – ход, опирающийся на существование метрики, но противоположный принятому в [3, 5, 7]. Кроме того, в п.п. 1.8.1, 1.8.3 автор счёл необходимым явно сформулировать и доказать два простых, но принципиальных утверждения, решающим образом упрощающих технику вычислений в  $Cl_3$ . Эти утверждения неоднократно используются в последующих разделах работы.

Разделы 2, 3 отведены полному исследованию структуры идемпотентов и нильпотентов индекса 2 алгебры  $Cl_3$ .

В разделе 4 решается задача нахождения таких элементов  $Cl_3$ , которые под действием оператора вращения, реализованного унимодулярными кватернионами, умножаются на комплексные числа. Показано, что в нетривиальном случае искомыми элементами являются нильпотенты индекса 2, умножающиеся при поворотах на экспоненты  $\exp(i\varphi)$ , и только они. Тем самым устанавливается эквивалентность действия групп фазовых преобразований и вращений на такие нильпотенты.

Эти результаты применяются в разделе 5 к анализу геометрии вакуумных решений уравнений Максвелла без источников, описывающих плоские гармонические электромагнитные волны – фотоны с двумя типами спиральности. На языке клиффордовой алгебры эти решения были описаны Риссом [1, 2], а затем исследованы Хестенесом [3, 23], выявившим, что в  $Cl_3$  их структура описывается нильпотентом  $\mathbf{E} + i\mathbf{B}$ , где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  – электрический и магнитный векторы поля волны.

Из полученных в предыдущих разделах результатов следует, что бегущая электромагнитная волна может интерпретироваться как вращение электромагнитных нильпотентов  $\mathbf{E} + i\mathbf{B}$ , расфазированных (повёрнутых друг относительно друга) вдоль оси волнового вектора по гармоническому закону; нильпотенты, сохраняя сдвиг фаз, крутятся вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью, равной циклической частоте волны, при этом направление их вращения определяет ту или иную круговую поляризацию волны и, соответственно, спиральность фотона. Анализ указанных решений подводит к неформальной гипотезе о том, что реальное физическое пространство не трёхмерно, а, по меньшей мере, шестимерно: в минимальном случае его базис включает шесть линейно независимых элементов и состоит из трёх векторов и трёх бивекторов, порождённых этими векторами.

Разделы статьи разбиты на подразделы. Номера формул включают два числа: первое является номером раздела, в котором формула появляется в первый раз, второе указывает на её порядковый номер в разделе.

В статье принято стандартное соглашение о суммировании: по повторяющимся нижним латинским индексам ведётся суммирование от 1 до 3, при этом символ суммирования опускается (в некоторых случаях суммы расписываются с указанием всех их членов).

Используются стандартные обозначения:  $\mathbb{R}$  есть алгебра (и получаемое расширением этой алгебры поле) действительных чисел,  $\mathbb{C}$  есть алгебра (и получаемое расширением этой алгебры поле) комплексных чисел,  $\mathbb{H}$  есть алгебра (и получаемое расширением этой алгебры тело) кватернионов.

Изредка будут упоминаться определения и факты, касающиеся алгебр *вообще*; в таких случаях алгебры предполагаются ассоциативными и определёнными над полями с характеристикой, не равной 2. (Пусть ворчуны судят, когда такие предположения излишни.)

## 1 ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АЛГЕБРЫ [3, 5, 7]

### 1.1. БАЗИС, ЭЛЕМЕНТЫ, ОПЕРАЦИИ

Геометрическая алгебра пространства есть клиффордова алгебра  $Cl_3$  над полем  $\mathbb{R}$ , порождённая линейным трёхмерным евклидовым пространством  $E_3$  с ортонормированным базисом  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Это определение уже подразумевает, что  $Cl_3$  является ассоциативной унитарной (т. е. имеющей единицу) алгеброй ранга 8. Напомним, что ранг алгебры есть размерность её носителя.

Носитель алгебры  $Cl_3$  представляет собой восьмимерное линейное пространство над полем  $\mathbb{R}$ , базис которого наследует элементы базиса пространства  $E_3$  и имеет вид

$\underbrace{1}_{\text{ ;}}$	$\underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}_{\text{ ;}}$	$\underbrace{\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}}_{\text{ ;}}$	$\underbrace{\sigma_{123}}_{\text{ .}}$
единица алгебры (скалярный элемент)	базисные векторы (ориентированные линейные элементы)	базисные бивекторы (ориентированные плоскостные элементы)	базисный тривектор (ориентированный объемный элемент)

Базисные векторы, бивекторы и тривектор составляют пространственную часть этого базиса (рис. 1).

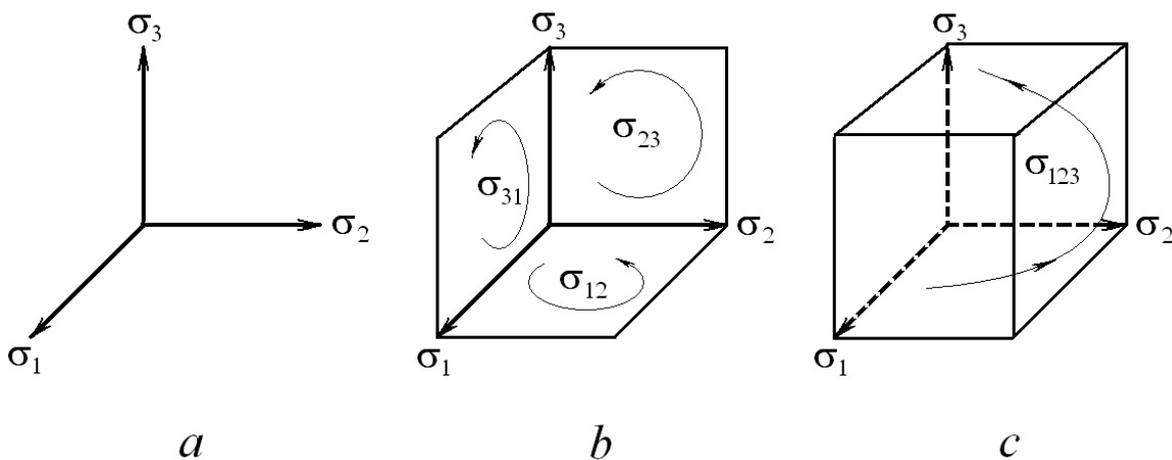


Рис. 1: Геометрическая структура пространственной части базиса алгебры  $Cl_3$ . *a* – базисные векторы, *b* – базисные бивекторы, *c* – базисный тривектор. Ориентации бивекторов и тривектора указаны стрелками. Единица  $1$  не принадлежит пространственной части базиса алгебры.

Характерная черта пространственной алгебры, определяющая её эффективность, состоит в том, что бивекторы и тривектор, входящие в её базис, строятся из ортов евклидова пространства  $E_3$  с помощью операции клиффордова умножения, которая определяется естественным с точки зрения алгебры и геометрии способом. Список свойств этой операции включает следующие правила.

1<sup>0</sup>. Произведения действительных чисел на элементы базиса  $Cl_3$  подчиняются обычным законам ассоциативности и коммутативности.

2<sup>0</sup>. Элемент  $\mathbf{1}$ , являясь единицей алгебры  $Cl_3$ , коммутирует со всеми элементами её базиса; результат умножения единицы  $\mathbf{1}$  на любой базисный элемент алгебры (в том числе на саму себя) есть сам этот элемент. Поэтому  $Cl_3$  содержит подалгебру вида  $\{\lambda\mathbf{1}\}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ), изоморфную алгебре действительных чисел. Поскольку указанный изоморфизм ставит в соответствие единице  $\mathbf{1}$  обычную действительную единицу:  $\mathbf{1} \leftrightarrow 1$ , обе единицы можно отождествлять друг с другом. Имея в виду такое отождествление, элементы  $Cl_3$  вида  $\lambda\mathbf{1}$  называют скалярами и при их записи значок  $\mathbf{1}$  часто опускают (мы, как правило, не будем этого делать).

3<sup>0</sup>. Значения произведений базисных элементов друг на друга находят, используя соотношения, которые фактически определяют таблицу умножения алгебры  $Cl_3$ :

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 \equiv \sigma_1\sigma_1 = \sigma_2\sigma_2 = \sigma_3\sigma_3 = \mathbf{1} \leftrightarrow 1; \quad (1.1)$$

$$\sigma_k\sigma_l = -\sigma_l\sigma_k \quad \text{при } k \neq l; \quad (1.2)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_2\sigma_3; \quad \sigma_{31} = \sigma_3\sigma_1; \quad \sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2; \quad (1.3)$$

$$\sigma_{123} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \quad (1.4)$$

Соотношения (1.1), (1.2) показывают, что квадраты пространственных ортов равны единице алгебры, а попарные произведения различных ортов антисимметричны. Что же касается соотношений (1.3) и (1.4), то они определяют способ порождения базисных бивекторов и тривектора алгебры  $Cl_3$  из пространственных ортов  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

4<sup>0</sup>. Общий элемент алгебры  $Cl_3$  – гиперкомплексное  $p$ -число<sup>5</sup> – порождается линейной комбинацией элементов базиса; умножение  $p$ -чисел подчинено требованиям ассоциативности и дистрибутивности и осуществляется с применением правил, указанных в п.п. 1<sup>0</sup> – 3<sup>0</sup>.

Рассмотрим детальнее строение  $p$ -чисел. Пусть  $\mathbf{A} \in Cl_3$  – такое число. Будучи линейной комбинацией элементов базиса, оно может быть представлено суммой

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_S + \mathbf{A}_V + \mathbf{A}_B + \mathbf{A}_T = \\ &= \lambda_0\mathbf{1} + (\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \lambda_3\sigma_3) + (\lambda_{23}\sigma_{23} + \lambda_{31}\sigma_{31} + \lambda_{12}\sigma_{12}) + \lambda_{123}\sigma_{123} = \\ &= \lambda_0\mathbf{1} + (\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \lambda_3\sigma_3) + (\lambda_{23}\sigma_2\sigma_3 + \lambda_{31}\sigma_3\sigma_1 + \lambda_{12}\sigma_1\sigma_2) + \lambda_{123}\sigma_1\sigma_2\sigma_3, \end{aligned} \quad (1.5)$$

в которую входят следующие слагаемые:

1. скаляр  $\mathbf{A}_S \equiv \lambda_0\mathbf{1} = \mathbf{1}\lambda_0 \leftrightarrow \lambda_0$ ;
2. вектор  $\mathbf{A}_V \equiv \lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \lambda_3\sigma_3$ ;
3. бивектор  $\mathbf{A}_B \equiv \lambda_{23}\sigma_{23} + \lambda_{31}\sigma_{31} + \lambda_{12}\sigma_{12} = \lambda_{23}\sigma_2\sigma_3 + \lambda_{31}\sigma_3\sigma_1 + \lambda_{12}\sigma_1\sigma_2$ ;
4. тривектор  $\mathbf{A}_T \equiv \lambda_{123}\sigma_{123} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$

(в специальных случаях некоторые из этих слагаемых могут быть нулевыми).

Подпространства носителя алгебры, содержащие  $\mathbf{A}_S, \mathbf{A}_V, \mathbf{A}_B$  и  $\mathbf{A}_T$ , называются соответственно пространством  $\{S\}$  скаляров (оно одномерно), пространством  $\{V\}$  векторов (оно трёхмерно), пространством  $\{B\}$  бивекторов (оно также трёхмерно) и пространством  $\{T\}$  тривекторов (оно одномерно).

Носитель алгебры  $Cl_3$  (для него принимается обозначение  $\text{Supp } Cl_3$ ) является прямой суммой всех указанных пространств:

$$\text{Supp } Cl_3 = \{S\} \oplus \{V\} \oplus \{B\} \oplus \{T\}.$$

<sup>5</sup> Термин введён Хестенесом [3] в честь Вольфганга Паули и поясняется в п. 1.8.1.

При этом пространство  $\{V\}$  отождествляется с  $E_3$ :  $\{V\} \cong E_3$ . Чтобы подчеркнуть последнее обстоятельство, векторы этого пространства часто именуют *пространственными векторами*; их можно отождествлять с векторами физического пространства, с которым наблюдатель ежедневно имеет дело, и которое, как подсказывает ему наивная интуиция, в малом является трёхмерным и евклидовым.

Отметим, что ввиду антисимметрии произведений базисных ортов, указанной в (1.2), перестановка множителей в (1.3) определяет бивекторы  $\sigma_{32}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{21}$  с противоположной ориентацией:

$$\sigma_{23} = -\sigma_3\sigma_2 \equiv -\sigma_{32}, \quad \sigma_{31} = -\sigma_1\sigma_3 \equiv -\sigma_{13}, \quad \sigma_{21} = \sigma_{12} = -\sigma_2\sigma_1 \equiv -\sigma_{21}.$$

Что же касается перестановки множителей в (1.4), то при чётной перестановке получаются тривекторы с той же ориентацией, что и у тривектора  $\sigma_{123}$  (все эти тривекторы можно отождествить), а при нечётной перестановке – тривекторы с противоположной ориентацией; например,

$$\sigma_{312} = \sigma_3\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma_{123}, \quad \text{но} \quad \sigma_{321} = \sigma_3\sigma_2\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_{123}.$$

Базисный тривектор  $\sigma_{123}$  обладает двумя важными свойствами.

Одно из них состоит в том, что  $\sigma_{123}$  коммутирует с базисными векторами  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  (это легко проверяется с помощью соотношений (1.1)–(1.4)). Поэтому  $\sigma_{123}$  коммутирует со всеми линейными комбинациями этих векторов и их произведениями. Тем самым *базисный тривектор  $\sigma_{123}$  и вместе с ним все тривекторы коммутируют со всеми  $p$ -числами*:

$$\sigma_{123}A = A\sigma_{123} \quad (A \in Cl_3).$$

При вычислениях в  $Cl_3$  это свойство вносит принципиальные упрощения и будет впредь постоянно использоваться – часто без особых оговорок.

Другое свойство элемента  $\sigma_{123}$  состоит в том, что *при возведении в квадрат базисный тривектор ведёт себя как мнимая единица алгебры комплексных чисел*: из (1.1)–(1.4) вытекает, что

$$\sigma_{123}^2 = \sigma_{123}\sigma_{123} = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)(\sigma_1\sigma_2\sigma_3) = -\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2 = -1, \quad (1.6)$$

и поэтому  $\sigma_{123}$  обычно обозначают буквой  $i$ . Чтобы подчеркнуть существенно тривекторную природу клиффордовой "мнимой единицы", для её обозначения будет использоваться полужирный шрифт:

$$\sigma_{123} \equiv i.$$

Равенство (1.6) является чрезвычайно важным: оно обуславливает существование в  $Cl_3$  подалгебры, изоморфной алгебре комплексных чисел, элементы которой коммутируют со всеми  $p$ -числами – со всеми вытекающими отсюда следствиями (см. п.п. 1.6, 1.7).

## 1.2. ИНВОЛЮЦИИ И ГРАДУИРОВКА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АЛГЕБРЫ

Напомним, что инволюция – это такая определённая на элементах алгебры операция, повторное применение которой есть тождественное преобразование; другими словами, повторное применение инволютивной операции к некоторому (любому) элементу алгебры не изменяет его.

Обращаясь к общему выражению (1.5), представляющему произвольный элемент алгебры  $Cl_3$ , нетрудно обнаружить в этой алгебре две естественные инволюции: одна из них заключается в обращении порядка всех множителей в произведениях базисных векторов

(1.5), а другая – в обращении направлений всех пространственных ортов  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  на противоположные.

**1.2.1. Обращение порядка множителей.** Из (1.5) следует, что обращение порядка всех множителей в произведениях базисных векторов преобразует  $p$ -число

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_S + \mathbf{A}_V + \mathbf{A}_B + \mathbf{A}_T$$

в  $p$ -число вида

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}_S + \mathbf{A}_V - \mathbf{A}_B - \mathbf{A}_T;$$

при этом  $\mathbf{A}^{\dagger\dagger} = \mathbf{A}$  ( $\mathbf{A}^\dagger$  есть инволюция).

**1.2.2. Обращение направлений пространственных ортов.** Эта операция реализуется заменами

$$\sigma_1 \rightarrow -\sigma_1, \quad \sigma_2 \rightarrow -\sigma_2, \quad \sigma_3 \rightarrow -\sigma_3.$$

Из (1.5) следует, что эти замены преобразуют  $p$ -число

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_S + \mathbf{A}_V + \mathbf{A}_B + \mathbf{A}_T$$

в  $p$ -число вида

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_S - \mathbf{A}_V + \mathbf{A}_B - \mathbf{A}_T;$$

при этом  $\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$  ( $\bar{\mathbf{A}}$  есть инволюция).

Так как обращение направлений пространственных ортов не меняет знака бивекторов, последние ведут себя как *псевдовекторы*; имея это в виду, пространство бивекторов часто называют пространством псевдовекторов, удерживая термин "псевдовектор" и для обозначения самих элементов этого пространства.

Что же касается базисного тривектора  $\mathbf{i} = \sigma_{123}$ , то он при обращении направлений пространственных ортов меняет знак:  $\bar{\mathbf{i}} = -\mathbf{i}$ . Тем самым клиффордова тривекторная мнимая единица  $\mathbf{i}$  и вместе с ней все тривекторы ведут себя как *псевдоскаляры*; по этой причине тривекторы называют также псевдоскалярами, а о пространстве тривекторов говорят как о пространстве псевдоскаляров.

С помощью инволюций, указанных в этом и предыдущем пунктах, и их произведений нетрудно сконструировать проекционные операторы, отображающих носитель  $\text{Supp } Cl_3$  на его подпространства и их прямые суммы. Здесь эти вопросы не будут затрагиваться.

**1.2.3. Градуировка. Чётные и нечётные  $p$ -числа.** Алгебра  $Cl_3$  является *градуированной (по модулю 2)* в том смысле, что в ней естественным образом выделяются *чётные* и *нечётные* элементы. Определение чётности/нечётности вводится с помощью операции изменения направлений пространственных ортов.

$p$ -число  $\mathbf{A}$  называется *чётным (нечётным)*, когда  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$  ( $\bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}$ ).

Чётными  $p$ -числами являются все линейные комбинации скаляров и бивекторов – элементы подпространства  $\{S\} \oplus \{B\} \subset \text{Supp } Cl_3$ . С помощью (1.1)–(1.4) проверяется, что произведения таких комбинаций остаются в  $\{S\} \oplus \{B\}$ , и поэтому совокупность чётных  $p$ -чисел является подалгеброй пространственной алгебры. Эта подалгебра называется *чётной подалгеброй* алгебры  $Cl_3$  и обозначается через  $Cl_3^+$ . В п. 1.6.4 будет показано, что элементы чётной подалгебры можно отождествлять с кватернионами.

Нечётными  $p$ -числами являются линейные комбинации векторов и тривекторов, но не все их произведения. Нечётные  $p$ -числа принадлежат подпространству  $\{V\} \oplus \{T\} \subset \text{Supp } Cl_3$ , но не являются подалгеброй в  $Cl_3$ .

### 1.3. ДУАЛЬНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АЛГЕБРЕ

В алгебре  $Cl_3$  важную роль играет операция перехода от  $p$ -числа  $\mathbf{A}$  к дуальному  $p$ -числу, которое получается умножением  $\mathbf{A}$  на тривектор  $\mathbf{i} = \sigma_{123}$  и имеет вид  $\mathbf{iA} = \mathbf{Ai}$ .

Очевидно, что скалярам дуальны тривекторы, а тривекторам – скаляры: действительно, элемент, дуальный единице  $\mathbf{1}$ , есть базисный тривектор  $\mathbf{i1} = \mathbf{i}$ , а последнему дуальна единица со знаком "минус":  $\mathbf{ii} = -\mathbf{1}$ .

Что же касается векторов, то им дуальны бивекторы, а бивекторам – векторы. В этом нетрудно убедиться, если, используя правила умножения (1.1)–(1.4), написать равенства

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{i}\sigma_1 = \sigma_1\mathbf{i} = \sigma_2\sigma_3 = \sigma_{23} \\ \mathbf{i}\sigma_2 = \sigma_2\mathbf{i} = \sigma_3\sigma_1 = \sigma_{31} \\ \mathbf{i}\sigma_3 = \sigma_3\mathbf{i} = \sigma_1\sigma_2 = \sigma_{12} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{i}\sigma_{23} = \mathbf{ii}\sigma_1 = -\sigma_1 \\ \mathbf{i}\sigma_{31} = \mathbf{ii}\sigma_2 = -\sigma_2 \\ \mathbf{i}\sigma_{12} = \mathbf{ii}\sigma_3 = -\sigma_3 \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Поэтому если, например,  $\mathbf{V}$  есть вектор, то элемент  $\mathbf{B} = \mathbf{iV} = \mathbf{Vi}$  является дуальным ему бивектором; при этом сам вектор  $\mathbf{V}$  выражается через дуальный ему бивектор формулой  $\mathbf{V} = -\mathbf{iB} = -\mathbf{Bi}$ .

**Замечание.** Операция перехода от некоторого  $p$ -числа  $\mathbf{A}$  к дуальному  $p$ -числу  $\mathbf{iA} = \mathbf{Ai}$  НЕ является инволюцией, поскольку в цепочке отображений  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{iA} \rightarrow -\mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{iA} \rightarrow \mathbf{A}$ , порождаемой пошаговым умножением элементов на  $\mathbf{i}$ , исходное  $p$ -число  $\mathbf{A}$  возникает только через четыре шага<sup>6</sup> (через два шага появляется  $-\mathbf{A}$ , а не  $\mathbf{A}$ ).

### 1.4. СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И ВНЕШНЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Пусть  $\mathbf{U} = U_k\sigma_k$  и  $\mathbf{V} = V_k\sigma_k$  – два пространственных вектора. Используя правила (1.1)–(1.4) и соотношения (1.7), нетрудно установить, что клиффордово произведение этих векторов может быть представлено формулой

$$\mathbf{UV} = \mathbf{1}(U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3) + \mathbf{i} [(U_2V_3 - U_3V_2)\sigma_1 + (U_3V_1 - U_1V_3)\sigma_2 + (U_1V_2 - U_2V_1)\sigma_3]$$

В правой части этого выражения сумма в круглых скобках при множителе  $\mathbf{1}$  определяет обычное евклидово скалярное произведение векторов  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  в ортонормированном базисе, тогда как слагаемые внутри квадратных скобок определяют векторное произведение этих векторов в том же базисе. Введём стандартные обозначения

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3,$$

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = (U_2V_3 - U_3V_2)\sigma_1 + (U_3V_1 - U_1V_3)\sigma_2 + (U_1V_2 - U_2V_1)\sigma_3.$$

Тогда выражение для произведения  $\mathbf{UV}$  можно переписать в следующей элегантной форме (символ единицы  $\mathbf{1}$  опущен):

$$\mathbf{UV} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{i}(\mathbf{U} \times \mathbf{V}). \quad (1.8)$$

Член  $\mathbf{i}(\mathbf{U} \times \mathbf{V})$  в правой части (1.8) является бивектором, дуальным вектору  $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ . Этот бивектор называется *внешним произведением* векторов  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  и обозначается посредством  $\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}$  (его плоскость определяется плоскостью, в которой расположена пара  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ , и ортогональна вектору  $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ ). Таким образом,

$$\mathbf{U} \wedge \mathbf{V} = \mathbf{i}(\mathbf{U} \times \mathbf{V}), \quad \mathbf{U} \times \mathbf{V} = -\mathbf{i}(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}). \quad (1.9)$$

<sup>6</sup> Поэтому, в частности, можно говорить о взаимной дуальности пространств векторов и бивекторов, однако фраза "элемент  $\mathbf{X}$  дуален элементу  $\mathbf{Y}$ " не может быть заменена фразами "элементы  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  взаимно дуальны" или "элементы  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  являются дуальными друг другу".

В силу антисимметрии векторного произведения относительно перестановки векторов  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  их внешнее произведение также антисимметрично относительно такой перестановки:

$$\mathbf{U} \wedge \mathbf{V} = -\mathbf{V} \wedge \mathbf{U}.$$

Отсюда следует, что если векторы  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  коллинеарны, то их внешнее произведение равно нулю.

Используя (1.9), формулу (1.8) для клиффордова произведения двух пространственных векторов можно представить в эквивалентной – не менее элегантной – форме

$$\mathbf{UV} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{U} \wedge \mathbf{V}. \quad (1.10)$$

Из (1.10) следует, что в общем случае клиффордово произведение двух векторов является суммой двух объектов: скаляра и бивектора. В нижеперечисленных важных частных случаях один из этих объектов обнуляется.

1. Если векторы  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  ортогональны друг другу ( $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0$ ), то их клиффордово произведение порождает бивектор (ориентированный в порядке следования сомножителей):

$$\mathbf{UV} = \mathbf{U} \wedge \mathbf{V} = i(\mathbf{U} \times \mathbf{V}); \quad (1.11)$$

отсюда следует также, что *внешнее произведение двух взаимно ортогональных векторов равно их клиффордову произведению*.

2. Если векторы  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  коллинеарны ( $\mathbf{U} \wedge \mathbf{V} = 0$ ), то их клиффордово произведение является скалярной величиной:

$$\mathbf{UV} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}.$$

3. Клиффордов квадрат вектора  $\mathbf{U}$  равен квадрату евклидова модуля этого вектора:

$$\mathbf{U}^2 \equiv \mathbf{UU} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = |\mathbf{U}|^2. \quad (1.12a)$$

Равенство (1.12a) позволяет ввести в алгебре  $Cl_3$  понятие *нормы*  $\|\mathbf{U}\|$  вектора  $\mathbf{U}$ , которая определяется естественным способом – с помощью последнего из написанных соотношений:

$$\|\mathbf{U}\| = \sqrt{\mathbf{U}^2} = \sqrt{|\mathbf{U}|^2} = |\mathbf{U}|. \quad (1.12b)$$

Подчеркнём, что скалярное, векторное и внешнее произведения пространственных векторов  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  не являются в алгебре  $Cl_3$  независимыми операциями, вводимыми в дополнение к клиффордову произведению векторов, а могут быть выражены через последнее. Для этого нужно переставить множители в (1.8), (1.10) и, учитывая симметрию скалярного и антисимметрию векторного и внешнего произведений, написать

$$\mathbf{VU} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} - i(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{U} \wedge \mathbf{V}. \quad (1.13)$$

После этого, используя (1.8), (1.10) и (1.13), нетрудно получить

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{2}(\mathbf{UV} + \mathbf{VU}) \equiv \frac{1}{2}\{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = -\frac{i}{2}(\mathbf{UV} - \mathbf{VU}) \equiv -\frac{i}{2}[\mathbf{U}, \mathbf{V}], \quad (1.15)$$

$$\mathbf{U} \wedge \mathbf{V} = \frac{1}{2}(\mathbf{UV} - \mathbf{VU}) \equiv \frac{1}{2}[\mathbf{U}, \mathbf{V}] \quad (1.16)$$

(фигурными и квадратными скобками в правых частях (1.14)–(1.16) обозначены антикоммутатор и, соответственно, коммутатор пары элементов – в данном случае векторов).

В заключение этого пункта укажем выражение, позволяющее определить угол  $\theta$  между векторами  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  по их клиффордову произведению. Напомним, что  $\theta$  можно найти, используя стандартную формулу векторного исчисления  $\cos \theta = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) / \sqrt{(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U})(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})}$ . Привлекая (1.14), эту формулу можно представить в виде выражения

$$\cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{U^2 V^2}} (\mathbf{U}\mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{U}) \equiv \frac{1}{2\sqrt{U^2 V^2}} \{\mathbf{U}, \mathbf{V}\},$$

которое и определяет величину  $\theta$ .

### 1.5. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ БИВЕКТОРОВ. НОРМА БИВЕКТОРА

Пусть  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  – бивекторы, а  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  – векторы, которым  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  дуальны: это означает, что  $\mathbf{B} = i\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{C} = i\mathbf{V}$ . Рассмотрим клиффордово произведение бивекторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ . Ввиду перестановочности  $i$  со всеми  $p$ -числами это произведение выражается через произведение векторов  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{BC} = (i\mathbf{U})(i\mathbf{V}) = (ii)(\mathbf{UV}) = -\mathbf{UV}; \quad (1.17)$$

в частности,

$$\mathbf{B}^2 = -\mathbf{U}^2 = -|\mathbf{U}|^2. \quad (1.18)$$

Если применить в правой части (1.17) формулы (1.8), (1.10) предыдущего пункта, то клиффордово произведение бивекторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  можно выразить через скалярное, векторное и внешнее произведения векторов  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{BC} = -\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} - i(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = -\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{U} \wedge \mathbf{V}. \quad (1.19)$$

Равенство (1.19) показывает, что в общем случае произведение  $\mathbf{BC}$  содержит скалярную и бивекторную части; обозначив эти части символами  $(\mathbf{BC})_S$  и  $(\mathbf{BC})_B$  соответственно, можно написать

$$\mathbf{BC} = (\mathbf{BC})_S + (\mathbf{BC})_B,$$

где

$$(\mathbf{BC})_S = -\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}, \quad (\mathbf{BC})_B = -i(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}).$$

*Скалярное произведение бивекторов есть, по определению, скалярная часть их клиффордова произведения, взятая с противоположным знаком; по-другому, скалярное произведение бивекторов равно скалярному произведению векторов, которым эти бивекторы дуальны:*

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = -(\mathbf{BC})_S = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}.$$

Теперь можно ввести понятие нормы  $\|\mathbf{B}\|$  бивектора  $\mathbf{B}$ , определив её формулой

$$\|\mathbf{B}\| = \sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}} = \sqrt{-(\mathbf{BB})_S} = \sqrt{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}} = \|\mathbf{U}\| = |\mathbf{U}|. \quad (1.20)$$

Соотношение (1.20) показывает, что норма бивектора равна модулю вектора, которому этот бивектор дуален. Из него следует также, что норма внешнего произведения  $\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}$  векторов  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах. (Действительно, в силу (1.20) и (1.9),  $\|\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}\| = |\mathbf{U} \times \mathbf{V}|$ , а модуль этого векторного произведения равен площади указанного параллелограмма.)

Угол между бивекторами  $\mathbf{B} = i\mathbf{U}$  и  $\mathbf{C} = i\mathbf{V}$  определяется как угол между векторами  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ , которым эти бивекторы дуальны; косинус этого угла находится по формуле, указанной в конце предыдущего пункта.

Не останавливаясь здесь на более общих конструкциях, относящихся к произведениям элементов  $Cl_3$ , отсылаем читателя за справками к литературе [3, 4, 7, 20].

## 1.6. ДВЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АЛГЕБРЫ

Вот нетривиальный факт, относящийся к алгебре  $Cl_3$ : будучи определена над полем действительных чисел, эта алгебра содержит в качестве своих подалгебр алгебры, изоморфные алгебрам комплексных чисел и кватернионов. Тем самым в  $Cl_3$  уже "упакованы" два экстраординарных математических орудия, которые возникли в математике порознь и, будучи привнесёнными в физику, давно используются в ней – однако, вне какой-либо связи друг с другом.

**1.6.1. Подалгебра алгебры  $Cl_3$ , изоморфная алгебре комплексных чисел.** В конце п. 1.1 отмечалось, что при возведении в квадрат базисный тривектор  $\sigma_{123} \equiv \mathbf{i}$  ведёт себя как "мнимая единица":

$$\sigma_{123}^2 \equiv \mathbf{i}^2 = -1.$$

Учитывая это равенство и таблицу умножения (1.1) – (1.4), нетрудно усмотреть, что линейное подпространство  $\{S\} \oplus \{T\}$   $p$ -чисел вида

$$\lambda_0 \mathbf{1} + \lambda_{123} \sigma_{123} \equiv \lambda_0 \mathbf{1} + \lambda_{123} \mathbf{i} \equiv \mathbf{A}_S + \mathbf{A}_T,$$

с определённой на нём операцией клиффордова произведения является подалгеброй, которая изоморфна алгебре  $\mathbb{C}$  комплексных чисел вида  $\lambda_0 + \lambda_{123} \mathbf{i}$ .

Поскольку алгебра  $\mathbb{C}$  расширяется до *поля* (в математическом смысле), то и подалгебра пространственной алгебры, изоморфная  $\mathbb{C}$ , также может рассматриваться как поле. Элементы этого последнего поля – *комплексные  $p$ -числа* – имеют вид  $z = \alpha \mathbf{1} + \beta \mathbf{i}$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ), и с ними можно оперировать как с обычными комплексными числами: складывать, вычитать, умножать и даже делить одно комплексное  $p$ -число на другое, ненулевое, предварительно сопоставив числу  $z = \alpha \mathbf{1} + \beta \mathbf{i}$  сопряжённое ему число  $z^\dagger = \alpha \mathbf{1} - \beta \mathbf{i}$  (операция сопряжения определяется с помощью инволюции, описанной в п. 1.2.1)

*Важное свойство комплексных  $p$ -чисел состоит в том, что они коммутируют с любым элементом пространственной алгебры* – просто в силу того, что тривектор  $\mathbf{i}$  обладает этим свойством.

Наряду с описанной подалгеброй алгебра  $Cl_3$  содержит много других подалгебр, изоморфных  $\mathbb{C}$ . Они порождаются в  $Cl_3$  следующим способом. Произвольно зафиксируем в  $Cl_3$  бивектор  $\mathbf{B} = \mathbf{iU}$  (здесь  $\mathbf{U}$  – вектор, которому дуален  $\mathbf{B}$ ) и, используя (1.20), построим по нему нормированный бивектор

$$\mathbf{b} = \mathbf{B} / \|\mathbf{B}\| = \mathbf{iU} / |\mathbf{U}|. \quad (1.21)$$

Отсюда (а также из (1.12а)) следует, что  $\mathbf{b}^2 = -1$ . Теперь легко убедиться, что множество  $p$ -чисел  $\{\alpha \mathbf{1} + \beta \mathbf{b}\}$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) является подалгеброй алгебры  $Cl_3$ , изоморфной  $\mathbb{C}$ . Однако эта подалгебра является "плохой" в том смысле, что её элементы не коммутируют со всеми  $p$ -числами, так как они не коммутируют с бивекторами, не пропорциональными  $\mathbf{b}$ .

В этом состоит коренное отличие подалгебр  $\{\alpha \mathbf{1} + \beta \mathbf{b}\}$  от вышеописанной подалгебр  $\{\alpha \mathbf{1} + \beta \mathbf{i}\}$ . Таким образом, последняя выделена в  $Cl_3$ , тогда как первые следует интерпретировать как подалгебры алгебры кватернионов, представленной в  $Cl_3$  чётными  $p$ -числами. Это явление будет разъяснено в п. 1.6.5.

**1.6.2. Подалгебра алгебры  $Cl_3$ , изоморфная алгебре кватернионов.** Напомним (см., например, [28, 29]), что алгебра  $\mathbb{H}$  кватернионов есть алгебра гиперкомплексных чисел вида

$$Q_H = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i}' + \mu_2 \mathbf{j}' + \mu_3 \mathbf{k}', \quad (1.22)$$

где  $\mu_0, \mu_k \in \mathbb{R}$  – действительные числа,  $i', j', k' \in \mathbb{H}$  – "кватернионные единицы", подчинённые соотношениям

$$i'^2 = j'^2 = k'^2 = i' * j' * k' = -1$$

(звёздочкой обозначена операция умножения в  $\mathbb{H}$ ,  $i'^2 \equiv i' * i'$ ,  $j'^2 \equiv j' * j'$ ,  $k'^2 \equiv k' * k'$ ).

Алгебра  $\mathbb{H}$  вкладывается в  $Cl_3$  так. Рассмотрим чётную подалгебру  $Cl_3^+$  алгебры  $Cl_3$ , представленную  $p$ -числами вида

$$Q = \lambda_0 \mathbf{1} + \lambda_{12} \sigma_{12} + \lambda_{23} \sigma_{23} + \lambda_{31} \sigma_{31} \equiv \mathbf{A}_S + \mathbf{A}_B. \quad (1.23)$$

Алгебраическое поведение этих чисел совпадает с поведением кватернионов. Действительно, рассмотрим бивекторы

$$I \equiv -\sigma_{23} = -\sigma_2 \sigma_3, \quad J \equiv -\sigma_{31} = -\sigma_3 \sigma_1, \quad K \equiv -\sigma_{12} = -\sigma_1 \sigma_2.$$

Используя правила (1)–(4), нетрудно убедиться, что  $I, J, K$  перемножаются как кватернионные единицы:

$$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$$

(здесь  $I^2 \equiv II$ ,  $J^2 \equiv JJ$ ,  $K^2 \equiv KK$ ). Поэтому между кватернионными единицами и бивекторами  $I, J, K$  имеется взаимно однозначное соответствие:

$$\begin{cases} i' \in \mathbb{H} & \leftrightarrow & I \equiv -\sigma_{23} = -\sigma_2 \sigma_3 \in Cl_3 \\ j' \in \mathbb{H} & \leftrightarrow & J \equiv -\sigma_{31} = -\sigma_3 \sigma_1 \in Cl_3 \\ k' \in \mathbb{H} & \leftrightarrow & K \equiv -\sigma_{12} = -\sigma_1 \sigma_2 \in Cl_3 \end{cases} \quad (1.24)$$

Это соответствие сопоставляет обычному кватерниону (1.22) чётное  $p$ -число (1.23), которое, используя  $I, J, K$ , можно представить в виде

$$Q = \lambda_0 \mathbf{1} - \lambda_{23} I - \lambda_{31} J - \lambda_{12} K = \mu_0 \mathbf{1} + \mu_1 I + \mu_2 J + \mu_3 K, \quad (1.25)$$

где  $\mu_0 = \lambda_0$ ,  $\mu_1 = -\lambda_{23}$ ,  $\mu_2 = -\lambda_{31}$ ,  $\mu_3 = -\lambda_{12}$ . Соответствие между обычными кватернионами  $Q_H$  и чётными  $p$ -числами  $Q$  является взаимно однозначным; кроме того, можно убедиться, что аддитивные и мультипликативные операции в алгебрах  $\mathbb{H}$  и  $Cl_3$  сохраняют это соответствие.

Следовательно, чётная подалгебра  $Cl_3^+$  алгебры  $Cl_3$  изоморфно представляет в  $Cl_3$  алгебру  $\mathbb{H}$  кватернионов.

Далее чётная подалгебра  $Cl_3^+ \subset Cl_3$  будет называться алгеброй  $p$ -кватернионов; элементы этой подалгебры – чётные  $p$ -числа – будут называться  $p$ -кватернионами.

Поскольку алгебра  $\mathbb{H}$  обычных кватернионов расширяется до тела (в математическом смысле), постольку алгебра  $p$ -кватернионов также может рассматриваться как тело. С  $p$ -кватернионами можно оперировать также, как с элементами  $\mathbb{H}$ : их можно складывать, вычитать, умножать, а также выполнять левое и правое деления одного  $p$ -кватерниона на другой, ненулевой, предварительно сопоставив каждому  $p$ -кватерниону  $Q = \mu_0 \mathbf{1} + \mu_1 I + \mu_2 J + \mu_3 K$  сопряжённый ему кватернион  $Q^\dagger = \mu_0 \mathbf{1} - \mu_1 I - \mu_2 J - \mu_3 K$  (операция сопряжения определяется с помощью инволюции, описанной в п. 1.2.1).

**1.6.3. Каноническое представление и норма  $p$ -кватернионов.** В силу соотношений дуальности (1.7) бивекторы  $I \equiv -\sigma_{23}$ ,  $J \equiv -\sigma_{31}$ ,  $K \equiv -\sigma_{12}$ , играющие в  $Cl_3$  роль кватернионных единиц, удовлетворяют равенствам

$$I \equiv -i\sigma_1, \quad J \equiv -i\sigma_2, \quad K \equiv -i\sigma_3. \quad (1.26)$$

Поэтому выражение (1.25), описывающее  $p$ -кватернион, всегда можно представить в виде

$$Q = \mu_0 \mathbf{1} + \mu_k i \sigma_k = \mu_0 \mathbf{1} + iV,$$

где  $V = \mu_k \sigma_k$  есть пространственный вектор с нормой  $\|V\| = \sqrt{\mu_k \mu_k}$ . В свою очередь, этот вектор удовлетворяет очевидному равенству  $V = \mu \sigma$ , где

$$\sigma = V / \|V\| = V / \sqrt{\mu_k \mu_k} \quad (\|\sigma\| = 1)$$

есть единичный вектор, сонаправленный с вектором  $V$ ,  $\mu = \sqrt{\mu_k \mu_k} \geq 0$  – неотрицательное действительное число.

Из этих замечаний следует, что любой  $p$ -кватернион алгебры  $Cl_3$  может быть представлен в следующей канонической форме:

$$Q = \mu_0 \mathbf{1} + \mu i \sigma \quad (\|\sigma\| = 1; \mu_0, \mu \in \mathbb{R}), \quad (1.27)$$

или, эквивалентно,

$$Q = \mu_0 \mathbf{1} + \mu \mathbf{b} \quad (\|\mathbf{b}\| = 1; \mu_0, \mu \in \mathbb{R}), \quad (1.28)$$

где  $\mathbf{b} = i \sigma$  – бивектор, дуальный вектору  $\sigma$ . Условие  $\mu \geq 0$  здесь уже не предъявляется: при  $\mu < 0$  элемент  $\mu i \sigma$  в (1.27) всегда можно интерпретировать как элемент  $|\mu| i \sigma' = -|\mu| i \sigma$ , в котором числовой коэффициент положителен, а вектор  $\sigma' = -\sigma$  направлен противоположно вектору  $\sigma$ .

Норма  $p$ -кватерниона вводится так: с помощью инволюции, описанной в п. 1.2.1,  $p$ -кватерниону  $Q$  ставится в соответствие сопряжённый  $p$ -кватернион

$$Q^\dagger = \mu_0 \mathbf{1} - \mu i \sigma,$$

после чего норма  $\|Q\|$   $p$ -кватерниона  $Q$  определяется выражением

$$\|Q\| = QQ^\dagger = \sqrt{\mu_0^2 + \mu^2}. \quad (1.29)$$

Так как  $(Q^\dagger)^\dagger = Q^{\dagger\dagger} = Q$  и  $QQ^\dagger = Q^\dagger Q$ , то  $\|Q^\dagger\| = Q^\dagger(Q^\dagger)^\dagger = Q^\dagger Q = \|Q\|$ , т. е.  $p$ -кватернион и сопряжённый ему имеют равные нормы.

**1.6.4. Подалгебры алгебры  $p$ -кватернионов, изоморфные алгебре комплексных чисел.** Теперь можно прояснить причину существования в  $Cl_3$  "плохих" подалгебр, рассмотренных в конце пункта 1.6.1, которые изоморфны алгебре  $\mathbb{C}$  комплексных чисел, но не коммутируют со всеми  $p$ -числами. Напомним, что каждая такая подалгебра образована множеством элементов вида  $\{\alpha \mathbf{1} + \beta \mathbf{b}\}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , где  $\mathbf{b}$  ( $\mathbf{b}^2 = -1$ ,  $\|\mathbf{b}\|^2 = 1$ ) есть произвольно фиксированный единичный бивектор. Но это же множество элементов возникает, если в представлении (1.28)  $p$ -кватерниона зафиксировать  $\mathbf{b}$  и разрешить входящим в (1.28) числам  $\mu_0, \mu$  пробегать  $\mathbb{R}$ . Поэтому подалгебры  $\{\alpha \mathbf{1} + \beta \mathbf{b}\} \subset Cl_3$  на самом деле являются подалгебрами алгебры  $p$ -кватернионов (носитель каждой такой подалгебры есть двумерное подпространство пространства  $\{S\} \oplus \{B\}$  чётных  $p$ -чисел, натянутое на базис  $\mathbf{1}, \mathbf{b}$ ). А так как  $p$ -кватернионы с различными  $\mathbf{b}$ , вообще говоря, не коммутируют друг с другом, то это свойство наследуется и указанными подалгебрами.

**1.6.5. Унимодулярные  $p$ -кватернионы и их экспоненциальное представление.**  $P$ -кватернионы, имеющие единичную норму, называются унимодулярными (они будут обозначаться строчными латинскими буквами). Из (1.29) следует, что в случае унимодулярного  $p$ -кватерниона выполнено  $\mu_0^2 + \mu^2 = 1$ ; поэтому  $\mu_0$  и  $\mu$  можно параметризовать

тригонометрическими функциями:  $\mu_0 = \cos \varphi$ ,  $\mu = \sin \varphi$ . Это позволяет представлять унимодулярные  $p$ -кватернионы  $p$ -числами вида

$$\mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) = \mathbf{1} \cos \varphi + \mathbf{i}\boldsymbol{\sigma} \sin \varphi \equiv \exp(\mathbf{i}\boldsymbol{\sigma}\varphi) \quad (\|\boldsymbol{\sigma}\| = 1). \quad (1.30)$$

$P$ -кватернион

$$\mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi) = \mathbf{1} \cos \varphi - \mathbf{i}\boldsymbol{\sigma} \sin \varphi \equiv \exp(-\mathbf{i}\boldsymbol{\sigma}\varphi) \quad (\|\boldsymbol{\sigma}\| = 1), \quad (1.31)$$

сопряжённый  $p$ -кватерниону  $\mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)$ , также является унимодулярным. Кроме того,

$$\mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)\mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi) = \mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi)\mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) = \mathbf{1};$$

поэтому  $\mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)$  и  $\mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi)$  являются взаимно обратными элементами:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) &= \mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi) = \cos \varphi - \mathbf{i}\boldsymbol{\sigma} \sin \varphi = \exp(-\mathbf{i}\boldsymbol{\sigma}\varphi); \\ \mathbf{q}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi) &= \mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) = \cos \varphi + \mathbf{i}\boldsymbol{\sigma} \sin \varphi = \exp(\mathbf{i}\boldsymbol{\sigma}\varphi). \end{aligned}$$

Другая – эквивалентная запись написанных соотношений получается заменой  $\mathbf{i}\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \mathbf{b}$ ; после этой замены выражения (1.30) и (1.31) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(\mathbf{b}, \varphi) &= \cos \varphi + \mathbf{b} \sin \varphi \equiv \exp(\mathbf{b}\varphi) \quad (\|\mathbf{b}\| = 1), \\ \mathbf{q}(\mathbf{b}, -\varphi) &= \cos \varphi - \mathbf{b} \sin \varphi \equiv \exp(-\mathbf{b}\varphi) \quad (\|\mathbf{b}\| = 1). \end{aligned}$$

По отношению к умножению унимодулярные  $p$ -кватернионы (как и их прообразы – унимодулярные кватернионы алгебры  $\mathbb{H}$ ) образуют некоммутативную группу, являющуюся изоморфным представлением группы  $SU_2$ . А поскольку  $SU_2$  накрывает группу вращений  $SO_3$ , постольку унимодулярные  $p$ -кватернионы тесно связаны с преобразованиями последней группы: они порождают повороты элементов алгебры  $Cl_3$ . В п. 1.7.2 это обстоятельство будет рассмотрено более детально.

**1.6.6. Отличия комплексных  $p$ -чисел и  $p$ -кватернионов от обычных.** При обычных применениях комплексных чисел и кватернионов в физике первые часто интерпретируются как скаляры, а вторые – как линейные комбинации действительных чисел и векторов пространственного базиса, отождествляемых с кватернионными единицами.

Клиффордова интерпретация комплексных чисел и кватернионов демонстрирует неадекватность такого подхода: в алгебре  $Cl_3$  мнимая единица  $\mathbf{i}$  при преобразованиях пространственной системы координат в  $E_3$  ведёт себя как тривектор ( $\equiv$  псевдоскаляр), а кватернионные единицы  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{K}$  – как бивекторы ( $\equiv$  псевдовекторы). На это обстоятельство указывал ещё Рисс [1, 2].

Более того, как будет продемонстрировано в п. 1.7.1, в алгебре  $Cl_3$  даже действительные числа, заполняющие непространственную ось вдоль единичного элемента  $\mathbf{1}$ , приобретают статус неких вырожденных геометрических объектов, так как затрагиваются естественными для  $Cl_3$  фазовыми преобразованиями, перемешиваясь с тривекторами – и даже превращаясь в последние.

## 1.7. ФАЗОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ВРАЩЕНИЯ В $Cl_3$

Так как алгебра  $Cl_3$  содержит подалгебры, изоморфные алгебрам комплексных чисел и кватернионов, в  $Cl_3$  выполняются все соотношения, присущие этим последним алгебрам, – в частности, формула Эйлера, связывающая в алгебре комплексных чисел показательную и тригонометрические функции и порождающая фазовые преобразования, а также формула Гамильтона-Кэли, описывающая в алгебре кватернионов пространственные повороты. Сейчас эти факты и вытекающие из них следствия будут рассмотрены более подробно.

**1.7.1. Действие группы  $U_1$  в  $Cl_3$ . Фазовые преобразования.** Рассмотрим в алгебре  $Cl_3$   $p$ -числа вида

$$\exp(i\varphi) \equiv \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (1.32)$$

где  $\varphi \in \mathbb{R}$  – действительный параметр ("фазовый угол"). Каждое такое число является значением заданной на  $\mathbb{R}$  функции – *комплексной  $p$ -экспоненты*, отображающей  $\mathbb{R}$  в  $Cl_3$ ; в общем случае это число представляет собой сумму скаляра и тривектора.

По отношению к клиффордовому умножению множество  $p$ -чисел вида (1.32) является аддитивной группой; в частности,

$$\exp(i\varphi) \exp(i\chi) = \exp[i(\varphi + \chi)], \quad [\exp(i\varphi)]^{-1} = \exp(-i\varphi),$$

а единичный элемент этой группы совпадает с единицей  $\mathbf{1}$  алгебры  $Cl_3$ .

Эта группа изоморфно представляет в  $Cl_3$  коммутативную группу  $U_1$ ; она будет называться *группой фазовых преобразований* и отождествляться с  $U_1$ .

Действие группы  $U_1$  на  $p$ -число  $\mathbf{A}$  определяется соотношением

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \exp(i\varphi) \mathbf{A} = \mathbf{A} \exp(i\varphi) \quad (1.33)$$

(комплексная  $p$ -экспонента  $\exp(i\varphi)$ , определённая правой частью (1.32), может переставляться со всеми элементами  $Cl_3$ , поскольку  $i$  коммутирует с ними всеми).

Под действием группы  $U_1$  прямая сумма  $\{S\} \oplus \{T\}$  пространств скаляров и тривекторов, а также прямая сумма  $\{V\} \oplus \{B\}$  пространств векторов и бивекторов преобразуются в себя.

Сказанное, в частности, означает, что под действием фазовых преобразований скаляры переходят в линейные комбинации скаляров и тривекторов, а векторы – в линейные комбинации векторов и бивекторов. Однако скаляры и тривекторы никогда не переходят ни в векторы, ни в бивекторы (и наоборот).

При специальных значениях  $\varphi$  картина становится более простой.

Именно, если  $\varphi = \pi m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), то под действием фазовых преобразований, соответствующих этим значениям  $\varphi$ , каждое из пространств  $\{S\}$ ,  $\{V\}$ ,  $\{B\}$  и  $\{T\}$  переходит в себя; при этом  $p$ -числа каждый раз меняют свои знаки на противоположные.

При  $\varphi = \pi/2 + \pi m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) фазовые преобразования, действуя на  $p$ -числа, переводят скаляры в тривекторы (и наоборот), а векторы – в бивекторы (и наоборот).

Всё вышесказанное содержательно означает, что с геометрической точки зрения комплексные  $p$ -экспоненты действуют в  $Cl_3$  совсем не так, как обычные комплексные экспоненты на евклидовой плоскости: вторые всего лишь поворачивают эту плоскость, тогда как первые гладко преобразуют друг в друга объекты, которым наивная интуиция приписывает, так сказать, различный "топологический статус". В частности, скаляры, которые представляются точками непространственной оси  $\mathbf{1}$  и отождествляются с действительными числами, могут под действием фазовых преобразований "раздуться" в тривекторы, интерпретируемые как трёхмерные геометрические объекты, а тривекторы могут коллапсировать в точки оси  $\mathbf{1}$ .

**1.7.2. Действие группы  $SO_3$  в  $Cl_3$ . Пространственные повороты.** В конце п. 1.6.5 уже упоминалось, что по отношению к умножению, определённому в кватернионной алгебре  $\mathbb{H}$ , множество принадлежащих  $\mathbb{H}$  унимодулярных кватернионов является изоморфным представлением группы  $SU_2$ . Поэтому множество унимодулярных  $p$ -кватернионов – элементов чётной подалгебры алгебры  $Cl_3$  – изоморфно представляет в  $Cl_3$  эту же группу  $SU_2$ . Но последняя дважды покрывает группу вращений  $SO_3$ ; поэтому действие  $SO_3$  представлено в обеих алгебрах  $\mathbb{H}$  и  $Cl_3$ . В алгебре  $\mathbb{H}$  группа  $SO_3$  действует унимодулярными кватернионами в соответствии с известной формулой Гамильтона-Кэли.

Перенеся последнюю в алгебру  $Cl_3$ , можно реализовать действие  $SO_3$  в этой алгебре посредством унимодулярных  $p$ -кватернионов. Процедура переноса осуществляется так.

Сначала рассмотрим формулу Гамильтона-Кэли, описывающую в  $\mathbb{H}$  поворот пространственного вектора  $\mathbf{U}_0$  вокруг оси, определяемой единичным вектором  $\boldsymbol{\sigma}$ , на угол  $\varphi$  в новое положение  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)$ . Эта формула имеет вид [28, 29] (звёздочкой обозначена мультипликативная операция в  $\mathbb{H}$ )

$$\mathbf{U}_0 \rightarrow \mathbf{U}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) = q(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) * \mathbf{U}_0 * q^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi),$$

где

$$q(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{\sigma} \sin \frac{\varphi}{2} \in \mathbb{H},$$

$$q^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) = q(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} - \boldsymbol{\sigma} \sin \frac{\varphi}{2} \in \mathbb{H}$$

суть унимодулярные кватернионы, а вектор  $\boldsymbol{\sigma}$  задан разложением

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu_1 \mathbf{i}' + \mu_2 \mathbf{j}' + \mu_3 \mathbf{k}' \quad (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = 1).$$

В этом разложении кватернионные единицы  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  отождествляются с базисными ортами трёхмерного евклидова пространства; при этом предполагается, что исходный и повернутый векторы  $\mathbf{U}_0$  и  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)$  разложены по этому же базису:

$$\mathbf{U}_0 = U_{01} \mathbf{i}' + U_{02} \mathbf{j}' + U_{03} \mathbf{k}', \quad \mathbf{U} = U_1 \mathbf{i}' + U_2 \mathbf{j}' + U_3 \mathbf{k}'.$$

Теперь перенесём формулу Гамильтона-Кэли из  $\mathbb{H}$  в  $Cl_3$ . С этой целью, используя соответствия (1.24) и формулы (1.26), заменим в формуле Гамильтона-Кэли и сопутствующих ей соотношениях кватернионные единицы  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}' \in \mathbb{H}$  бивекторами  $\mathbf{I} = -i\boldsymbol{\sigma}_1, \mathbf{J} = -i\boldsymbol{\sigma}_2, \mathbf{K} = -i\boldsymbol{\sigma}_3 \in Cl_3$ :

$$\mathbf{i}' \rightarrow -i\boldsymbol{\sigma}_1, \quad \mathbf{j}' \rightarrow -i\boldsymbol{\sigma}_2, \quad \mathbf{k}' \rightarrow -i\boldsymbol{\sigma}_3.$$

При таких заменах

1) векторы  $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{U}_0, \mathbf{U}$  переходят в бивекторы  $-i\boldsymbol{\sigma}, -i\mathbf{U}_0, -i\mathbf{U}$ ; действительно,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu_1 \mathbf{i}' + \mu_2 \mathbf{j}' + \mu_3 \mathbf{k}' \rightarrow -i(\mu_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + \mu_2 \boldsymbol{\sigma}_2 + \mu_3 \boldsymbol{\sigma}_3) = -i\boldsymbol{\sigma},$$

$$\mathbf{U}_0 = U_{01} \mathbf{i}' + U_{02} \mathbf{j}' + U_{03} \mathbf{k}' \rightarrow -i(U_{01} \boldsymbol{\sigma}_1 + U_{02} \boldsymbol{\sigma}_2 + U_{03} \boldsymbol{\sigma}_3) = -i\mathbf{U}_0,$$

$$\mathbf{U} = U_1 \mathbf{i}' + U_2 \mathbf{j}' + U_3 \mathbf{k}' \rightarrow -i(U_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + U_2 \boldsymbol{\sigma}_2 + U_3 \boldsymbol{\sigma}_3) = -i\mathbf{U};$$

2) унимодулярные кватернионы  $q(\boldsymbol{\sigma}, \varphi), q(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi) \in \mathbb{H}$  переходят в унимодулярные  $p$ -кватернионы  $\mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi), \mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) \in Cl_3$ ; действительно,

$$q(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{\sigma} \sin \frac{\varphi}{2} \rightarrow \mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} - i\boldsymbol{\sigma} \sin \frac{\varphi}{2} \equiv \exp\left(-i\boldsymbol{\sigma} \frac{\varphi}{2}\right);$$

$$q(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} - \boldsymbol{\sigma} \sin \frac{\varphi}{2} \rightarrow \mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} + i\boldsymbol{\sigma} \sin \frac{\varphi}{2} \equiv \exp\left(i\boldsymbol{\sigma} \frac{\varphi}{2}\right).$$

После этого формула Гамильтона-Кэли принимает вид

$$i\mathbf{U}_0 \rightarrow i\mathbf{U}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) = \exp\left(-i\boldsymbol{\sigma} \frac{\varphi}{2}\right) i\mathbf{U}_0 \exp\left(i\boldsymbol{\sigma} \frac{\varphi}{2}\right).$$

Этот вариант формулы Гамильтона-Кэли описывает в алгебре  $Cl_3$  пространственный поворот бивектора  $i\mathbf{U}_0$  вокруг оси, определяемой единичным вектором  $\boldsymbol{\sigma}$ , на угол  $\varphi$ .

Теперь, учитывая, что элемент  $i$  коммутирует со всеми  $p$ -числами, вынесем его в последней формуле за знак комплексной  $p$ -экспоненты влево и после этого умножим обе части полученного равенства на  $-i$ . В результате возникает ещё одна разновидность формулы Гамильтона-Кэли

$$U_0 \rightarrow U(\sigma, \varphi) = \exp\left(-i\sigma \frac{\varphi}{2}\right) U_0 \exp\left(i\sigma \frac{\varphi}{2}\right);$$

эта формула описывает в алгебре  $Cl_3$  пространственный поворот вектора  $U_0$  вокруг оси, определяемой единичным вектором  $\sigma$ , на угол  $\varphi$ .

Преобразования, описываемые обоими вариантами формулы Гамильтона-Кэли, являются именно поворотами, ибо они сохраняют скалярные произведения как векторов, так и бивекторов: в этом нетрудно убедиться, используя последнюю из написанных формул, а также равенство (1.14), связывающее скалярное произведение векторов с их клиффордовыми произведениями<sup>7</sup>.

Указанные преобразования определяют действие группы вращений  $SO_3$  на векторы и бивекторы алгебры  $Cl_3$ . Это действие распространяется на любые  $p$ -числа  $A_0 \in Cl_3$  формулами

$$\begin{aligned} A_0 \rightarrow A(\sigma, \varphi) &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} - i\sigma \sin \frac{\varphi}{2}\right) A_0 \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i\sigma \sin \frac{\varphi}{2}\right) \equiv \\ &\equiv \exp\left(-i\sigma \frac{\varphi}{2}\right) A_0 \exp\left(i\sigma \frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.34)$$

или, в другой записи,

$$\begin{aligned} A_0 \rightarrow A(b, \varphi) &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} - b \sin \frac{\varphi}{2}\right) A_0 \left(\cos \frac{\varphi}{2} + b \sin \frac{\varphi}{2}\right) \equiv \\ &\equiv \exp\left(-b \frac{\varphi}{2}\right) A_0 \exp\left(b \frac{\varphi}{2}\right); \end{aligned} \quad (1.35)$$

здесь  $\sigma$  ( $\|\sigma\| = 1$ ) – единичный вектор оси вращения,  $\varphi$  – угол поворота,  $b = i\sigma$  ( $\|b\| = 1$ ) – единичный бивектор плоскости вращения, дуальный вектору  $\sigma$ . Бивектор  $b$  определяет как плоскость вращения, так и направление вращения в этой плоскости, поскольку он (этот бивектор) навязывает указанной плоскости свою ориентацию.

Рассмотрим, как группа вращений действует на  $p$ -числа  $A_0$  того или иного вида.

Случаи, когда  $A_0$  является либо вектором, либо бивектором, фактически уже были рассмотрены выше: под действием преобразований (1.34), (1.35) эти объекты, вообще говоря, поворачиваются. При этом возникает задача о сложении двух последовательных поворотов; она решается в алгебре  $Cl_3$  тем же способом, что и в алгебре  $\mathbb{H}$  [7, 28].

Если же  $A_0$  есть либо скаляр, либо тривектор, то такие объекты инвариантны относительно вышеуказанных преобразований. В самом деле, как элемент  $\mathbf{1}$ , так и элемент  $i$ , подставленные в (1.34), (1.35) вместо  $A_0$ , можно вынести за любую из комплексных  $p$ -экспонент, после чего произведение обеих  $p$ -экспонент даст единицу. (Действительные же коэффициенты, которые могут стоять при  $\mathbf{1}$  и  $i$  в качестве множителей, выносятся за  $p$ -экспоненты автоматически.)

Теперь можно рассмотреть, как преобразования (1.34), (1.35) действуют на произвольное  $p$ -число  $A_0 = A_{S_0} + A_{V_0} + A_{B_0} + A_{T_0}$ , содержащее скалярную ( $A_{S_0}$ ), векторную ( $A_{V_0}$ ), бивекторную ( $A_{B_0}$ ) и тривекторную ( $A_{T_0}$ ) части. Используя, например, (1.34), получаем

$$A(\sigma, \varphi) = \exp\left(-i\sigma \frac{\varphi}{2}\right) (A_{S_0} + A_{V_0} + A_{B_0} + A_{T_0}) \exp\left(i\sigma \frac{\varphi}{2}\right) =$$

<sup>7</sup> Из сохранения скалярных произведений векторов уже следует сохранение скалярных произведений бивекторов, поскольку последние произведения определяются через скалярные произведения векторов, которым эти бивекторы дуальны (см. п. 1.5).

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{A}_{S_0} + \exp\left(-i\sigma\frac{\varphi}{2}\right) \mathbf{A}_{V_0} \exp\left(i\sigma\frac{\varphi}{2}\right) + \exp\left(-i\sigma\frac{\varphi}{2}\right) \mathbf{A}_{B_0} \exp\left(i\sigma\frac{\varphi}{2}\right) + \mathbf{A}_{T_0} = \\
&= \mathbf{A}_{S_0} + \mathbf{A}_V(\sigma, \varphi) + \mathbf{A}_B(\sigma, \varphi) + \mathbf{A}_{T_0};
\end{aligned}$$

это означает, что действие группы вращений на произвольное  $p$ -число приводит к поворотам его векторной и бивекторной частей, сохраняя скалярную и тривекторную части неизменными.

В заключение отметим, что ввиду наличия коэффициента  $1/2$  в аргументах тригонометрических функций и  $p$ -экспонент, входящих в (1.34), (1.35), поворот векторов и бивекторов на один и тот же угол  $\varphi$  индуцируется не одной парой унимодулярных  $p$ -кватернионов  $\exp(-i\sigma\varphi/2)$ ,  $\exp(i\sigma\varphi/2)$ , а двумя парами: вторая пара, индуцирующая такой же поворот, имеет вид

$$\exp[-i\sigma(\varphi/2 + \pi)], \quad \exp[i\sigma(\varphi/2 + \pi)].$$

Как и в случае обычных кватернионов, указанное явление объясняется тем, что группа унимодулярных  $p$ -кватернионов является изоморфным представлением группы  $SU_2$  и поэтому дважды накрывает группу  $SO_3$ .

## 1.8. ПАРАВЕКТОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АЛГЕБРЫ И ЕЁ ЦЕНТР

**1.8.1. Паравекторное представление алгебры  $Cl_3$ .** Алгебра  $Cl_3$  как алгебра Паули. Лемма о базисе. Вначале чисто формально рассмотрим унитарную алгебру над полем  $\mathbb{C}$  комплексных чисел, порождённую четырьмя линейно независимыми элементами: единицей  $\check{\mathbf{1}}$  и тремя векторами  $\check{\sigma}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), снабжёнными таблицей умножения

$$\begin{aligned}
\check{\sigma}_1^2 = \check{\sigma}_2^2 = \check{\sigma}_3^2 = \check{\mathbf{1}}, \\
\check{\sigma}_2 \circ \check{\sigma}_3 = -\check{\sigma}_3 \circ \check{\sigma}_2 = i\check{\sigma}_1, \quad \check{\sigma}_3 \circ \check{\sigma}_1 = -\check{\sigma}_1 \circ \check{\sigma}_3 = i\check{\sigma}_2, \quad \check{\sigma}_1 \circ \check{\sigma}_2 = -\check{\sigma}_2 \circ \check{\sigma}_1 = i\check{\sigma}_3,
\end{aligned}$$

где  $i$  ( $i^2 = -1$ ) – мнимая единица поля  $\mathbb{C}$ , кружком обозначена операция умножения,  $\check{\sigma}_1^2 \equiv \check{\sigma}_1 \circ \check{\sigma}_1$ ,  $\check{\sigma}_2^2 \equiv \check{\sigma}_2 \circ \check{\sigma}_2$ ,  $\check{\sigma}_3^2 \equiv \check{\sigma}_3 \circ \check{\sigma}_3$ . Элементами этой алгебры являются линейные комбинации  $z_0\check{\mathbf{1}} + z_k\check{\sigma}_k$  с комплексными числами  $z_0, z_k \in \mathbb{C}$  в качестве коэффициентов. Каждая такая комбинация есть сумма скалярного элемента  $z_0\check{\mathbf{1}}$ , который можно отождествить с числом  $z_0$ , и вектора  $z_k\check{\sigma}_k$ . Суммы скаляров и векторов принято называть *паравекторами*; поэтому о так определённой алгебре можно говорить как об *алгебре паравекторов над полем комплексных чисел*.

Изоморфным представлением рассмотренной алгебры паравекторов является известная алгебра комплексных матриц  $2 \times 2$  – алгебра Паули, повседневно используемая в квантовой механике: базисом этой алгебры служат матрицы Паули

$$\hat{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

таблица матричного умножения которых имеет тот же вид, что и в случае алгебры паравекторов.

Другим изоморфным представлением алгебры паравекторов, как выяснится чуть ниже, является пространственная алгебра  $Cl_3$ .

Из этих замечаний следует, что все три упомянутые алгебры в некотором смысле одинаковы. В частности, алгебра  $Cl_3$ , определённая над полем  $\mathbb{R}$ , изоморфна алгебре Паули, определённой над полем  $\mathbb{C}$ ; этот изоморфизм ставит в соответствие пространственным

ортам  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in Cl_3$  комплексные матрицы Паули  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$ , а элементу  $\mathbf{1} \in Cl_3$  – единичную матрицу  $\hat{\mathbf{1}}$ .

Термин "*p*-число", введённый Дэвидом Хестенесом [3] в честь Вольфганга Паули для именования элементов  $Cl_3$ , подчеркивает, что пространственная алгебра вмещает в себя всё, что содержит алгебра его знаменитого предшественника: физикам, имеющим дело с квантовой механикой, нет нужды обращаться к комплексным матрицам, хитроумные детали строения которых практически полностью затеняют простые и ясные геометрические истоки.

Связь алгебры  $Cl_3$  с алгеброй паравекторов выявляется, если обратиться к разложению (1.5) произвольного *p*-числа  $\mathbf{A}$  по базису  $Cl_3$  и, используя соотношения дуальности (1.7), переписать это разложение в виде

$$\mathbf{A} = \alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_k \sigma_k + \beta_k i \sigma_k + i \beta_0 = (\alpha_0 \mathbf{1} + \beta_0 i) \mathbf{1} + (\alpha_k \mathbf{1} + \beta_k i) \sigma_k = z_0 \mathbf{1} + z_k \sigma_k; \quad (1.36)$$

здесь  $\alpha_0, \beta_0, \alpha_k, \beta_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – действительные числа, а  $z_0$  и  $z_k$  являются комплексными *p*-числами, определёнными равенствами

$$z_0 = \alpha_0 \mathbf{1} + \beta_0 i, \quad z_k = \alpha_k \mathbf{1} + \beta_k i \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1.37)$$

Представление (1.36) показывает, что *любой элемент алгебры  $Cl_3$  может интерпретироваться как паравектор  $z_0 \mathbf{1} + z_k \sigma_k$  над полем комплексных *p*-чисел*. Перемножая такие паравекторы, удобно вместо таблицы исходной умножения (1.1)–(1.4) алгебры  $Cl_3$  использовать равносильную таблицу

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathbf{1}, \quad i^2 = -\mathbf{1},$$

$$\sigma_2 \sigma_3 = -\sigma_3 \sigma_2 = i \sigma_1, \quad \sigma_3 \sigma_1 = -\sigma_1 \sigma_3 = i \sigma_2, \quad \sigma_1 \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_1 = i \sigma_3.$$

Сравнение этой таблицы умножения с таблицей умножения, написанной в начале настоящего пункта, подводит к заключению, что *алгебра  $Cl_3$  над полем  $\mathbb{R}$  изоморфна вышерассмотренной алгебре паравекторов над полем  $\mathbb{C}$* .

Изоморфизм почти очевиден. Нужно доказать лишь, что базисные элементы  $\mathbf{1}$  и  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), входящие в (1.36), линейно независимы над полем комплексных *p*-чисел. (Только в этом случае множество элементов  $\{z_0 \mathbf{1} + z_k \sigma_k\}$  с уже существующими на нём операциями сложения и умножения можно рассматривать как алгебру с базисом  $\mathbf{1}, \sigma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ )). Вот доказательство.

*Лемма о базисе.* В алгебре  $Cl_3$  равенство

$$z_0 \mathbf{1} + z_k \sigma_k = 0 \quad (1.38)$$

выполняется тогда и только тогда, когда  $z_0 = 0, z_k = 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

Доказательство. В силу (1.36) имеет место эквивалентность

$$\alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_k \sigma_k + \beta_k i \sigma_k + i \beta_0 = 0 \Leftrightarrow z_0 \mathbf{1} + z_k \sigma_k = 0. \quad (1.39)$$

Здесь левое равенство выполняется в том и только том случае, когда выполняются равенства

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0, \quad \alpha_k = \beta_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad (1.40)$$

ибо базисные элементы  $\mathbf{1}, \sigma_k, i \sigma_k, i$  линейно независимы над  $\mathbb{R}$ . А так как правое равенство в (1.39) эквивалентно левому, то оно также выполняется тогда и только тогда, когда выполняются равенства (1.40). Но эти равенства равносильны равенствам  $z_0 = 0, z_k = 0$

( $k = 1, 2, 3$ ), ибо элементы  $\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{i}$ , входящие в  $z_0 = \alpha_0 \mathbf{1} + \beta_0 \mathbf{i}$  и  $z_k = \alpha_k \mathbf{1} + \beta_k \mathbf{i}$ , линейно независимы над  $\mathbb{R}$ . Лемма доказана.

**Замечание.** Представление  $Cl_3$  в виде алгебры паравекторов оказывается весьма удобным в вычислениях и будет в дальнейшем неоднократно использоваться. При этом лемма о базисе оказывается крайне полезным инструментом: если в ходе вычислений возникает "комплексное" уравнение вида

$$\tilde{z}_0(p_1, \dots, p_n) \mathbf{1} + \tilde{z}_k(p_1, \dots, p_n) \sigma_k = 0$$

относительно некоторых параметров  $p_1, \dots, p_n$ , то его можно не преобразовывать к форме разложения по базису алгебры  $Cl_3$  (что бывает громоздким делом), а, применив лемму о базисе, сразу же заменить системой уравнений  $\tilde{z}_0(p_1, \dots, p_n) = 0$ ,  $\tilde{z}_k(p_1, \dots, p_n) = 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и работать уже с ней. Эту простую, но принципиальную лемму автор в доступной ему литературе не обнаружил.

**1.8.2. Центр пространственной алгебры.** Напомним, что центром алгебры называется множество её элементов, коммутирующих со всеми элементами алгебры. Центр любой алгебры является её подалгеброй.

Центр  $Cl_3$  наверняка содержит все линейные комбинации скаляров и тривекторов – ведь они коммутируют со всеми  $p$ -числами. С другой стороны, в нём наверняка не содержатся ни векторы, ни бивекторы, ни их линейные комбинации, ибо в  $Cl_3$  для каждого такого элемента всегда найдётся элемент, не коммутирующий с ним.

Поэтому *центром пространственной алгебры является алгебра комплексных  $p$ -чисел – подалгебра алгебры  $Cl_3$ , порождённая образующими  $\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{i}$  и изоморфная  $\mathbb{C}$ .*

**1.8.3. Лемма о сокращении и её следствие.** Лемма о базисе, доказанная в п. 1.8.1, сейчас будет дополнена ещё одним утверждением, которое позволяет некоторые уравнения, заданные в алгебре  $Cl_3$ , сокращать на ненулевые  $p$ -числа. Законность такой операции необходимо обосновать, так как  $Cl_3$  содержит делители нуля.

**Лемма о сокращении.** Пусть  $\mathbf{A} \neq 0$  – ненулевой элемент алгебры  $Cl_3$ ,  $z \in \mathbb{C}$  – элемент её центра. Тогда равенство  $z\mathbf{A} = 0$  эквивалентно равенству  $z = 0$ . (Другими словами, если  $\mathbf{A} \neq 0$ , то равенство  $z\mathbf{A} = 0$  можно сократить на  $\mathbf{A}$ ; это утверждение относится и к равенству  $\mathbf{A}z = 0$ ).

**Доказательство.** Напишем для элемента  $\mathbf{A}$  разложение  $\mathbf{A} = z_0 \mathbf{1} + z_k \sigma_k$  и представим равенство  $z\mathbf{A} = 0$  в виде  $zz_0 \mathbf{1} + zz_k \sigma_k = 0$ . Последнее по лемме о базисе эквивалентно четырём равенствам

$$zz_0 = 0, \quad zz_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1.41)$$

Но, по условию,  $\mathbf{A} = z_0 \mathbf{1} + z_k \sigma_k \neq 0$ . Поэтому в силу леммы о базисе хотя бы одно из комплексных  $p$ -чисел  $z_0, z_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), входящих в (1.41), не равно нулю. Тогда, поделив на это ненулевое  $p$ -число именно то из равенств (1.41), в которое это  $p$ -число входит, получаем  $z = 0$ . В обратном направлении эквивалентность очевидна:  $z = 0 \Rightarrow z\mathbf{A} = 0$ .

**Следствие.** Пусть  $\mathbf{A} \in Cl_3$ ,  $\mathbf{A} \neq 0$ ,  $z, \zeta \in \mathbb{C}$ . Тогда равенство  $z\mathbf{A} = \zeta\mathbf{A}$  эквивалентно равенству  $z = \zeta$  (равенство  $z\mathbf{A} = \zeta\mathbf{A}$  в этом утверждении можно заменить любым из равенств  $z\mathbf{A} = \mathbf{A}\zeta$ ,  $\mathbf{A}z = \zeta\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}z = \mathbf{A}\zeta$ ).

**Доказательство.**  $z\mathbf{A} = \zeta\mathbf{A}$  эквивалентно  $(z - \zeta)\mathbf{A} = 0$ ; отсюда  $z - \zeta = 0$  по лемме о сокращении, и поэтому  $z = \zeta$ . Обращение рассуждений:  $z = \zeta \Rightarrow z - \zeta = 0 \Rightarrow (z - \zeta)\mathbf{A} = 0 \Rightarrow z\mathbf{A} = \zeta\mathbf{A}$ .

\* \* \*

Завершая на этом очерк основ пространственной алгебры, перейдём к изложению конкретных результатов.

## 2 ИДЕМПОТЕНТЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АЛГЕБРЫ

Идемпотент – это элемент алгебры, который обладает свойством обычной числовой единицы не меняться при умножении на саму себя. Напомним несколько определений.

*Стандартные общеалгебраические определения.*

1. Элемент  $\mathbf{E} \neq 0$  алгебры  $\mathcal{A}$ , удовлетворяющий соотношению  $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$ , называется *идемпотентом*. (Поскольку  $0 \cdot 0 = 0$ , постольку нуль любой алгебры является идемпотентом; о нём говорят как о *тривиальном*, или *нулевом*, идемпотенте. Все другие идемпотенты, если они существуют в  $\mathcal{A}$ , называются *ненулевыми*).

2. Два идемпотента  $\mathbf{E}_+$  и  $\mathbf{E}_-$  ( $\mathbf{E}_+ \neq \mathbf{E}_-$ ) алгебры  $\mathcal{A}$ , удовлетворяющие равенствам  $\mathbf{E}_+\mathbf{E}_- = \mathbf{E}_-\mathbf{E}_+ = 0$ , называются (*взаимно*) *ортогональными*.

3. Идемпотент  $\mathbf{E}$  алгебры  $\mathcal{A}$ , разлагающийся в сумму  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$  двух ненулевых взаимно ортогональных идемпотентов  $\mathbf{E}_+ \in \mathcal{A}$  и  $\mathbf{E}_- \in \mathcal{A}$  ( $\mathbf{E}_+\mathbf{E}_- = \mathbf{E}_-\mathbf{E}_+ = 0$ ), называется *непримитивным*. (Нетрудно показать, что любой непримитивный идемпотент является ненулевым).

Из определения 1 следует, что если  $\mathcal{A}$  является унитарной алгеброй, то её единица  $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$  является идемпотентом – это тривиально и неинтересно. Принципиальный же интерес представляет нетривиальный случай, когда  $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$  является непримитивным идемпотентом и разлагается в сумму ненулевых ортогональных идемпотентов

$$\mathbf{1}_{\mathcal{A}} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-, \quad \mathbf{E}_+\mathbf{E}_- = \mathbf{E}_-\mathbf{E}_+ = 0.$$

Если такое разложение существует, то вследствие известных теорем (см., например, [17–19]) унитарная алгебра  $\mathcal{A}$  разлагается в прямые суммы двух односторонних идеалов – как левых идеалов  $\mathcal{A}\mathbf{E}_+$  и  $\mathcal{A}\mathbf{E}_-$ , так и правых идеалов  $\mathbf{E}_-\mathcal{A}$  и  $\mathbf{E}_+\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathbf{E}_+ \oplus \mathcal{A}\mathbf{E}_- = \mathbf{E}_+\mathcal{A} \oplus \mathbf{E}_-\mathcal{A}.$$

Определяющее свойство идемпотентов – равенство  $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$  – показывает, что эти элементы алгебр играют роль проекционных операторов (проекторов), причём взаимно ортогональные идемпотенты можно рассматривать как взаимно ортогональные проекторы. Такие взаимно ортогональные проекторы отображают всю алгебру на порождённые ими идеалы, которые не имеют общих элементов, кроме нуля алгебры.

Напомним, что для существования написанного разложения алгебры  $\mathcal{A}$  в сумму двух идеалов достаточно, чтобы  $\mathcal{A}$  содержала хотя бы один нетривиальный идемпотент, отличный от  $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$  (далее такие идемпотенты будут именоваться *неединичными*). Если неединичный идемпотент (скажем,  $\mathbf{E}_+$ ) найден, то второй идемпотент  $\mathbf{E}_-$ , ортогональный первому, определяется выражением [16–18]

$$\mathbf{E}_- = \mathbf{1}_{\mathcal{A}} - \mathbf{E}_+.$$

Действительно,  $\mathbf{E}_-$  является идемпотентом, ибо

$$\mathbf{E}_-^2 = \mathbf{E}_-\mathbf{E}_- = (\mathbf{1}_{\mathcal{A}} - \mathbf{E}_+)(\mathbf{1}_{\mathcal{A}} - \mathbf{E}_+) = \mathbf{1}_{\mathcal{A}} - 2\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_+^2 = \mathbf{1}_{\mathcal{A}} - \mathbf{E}_+ = \mathbf{E}_-,$$

а выкладки

$$\mathbf{E}_+\mathbf{E}_- = \mathbf{E}_+(\mathbf{1}_{\mathcal{A}} - \mathbf{E}_+) = \mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_+^2 = \mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_+ = 0,$$

$$\mathbf{E}_-\mathbf{E}_+ = (\mathbf{1}_{\mathcal{A}} - \mathbf{E}_+)\mathbf{E}_+ = \mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_+^2 = \mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_+ = 0$$

показывают, что  $\mathbf{E}_+$  и  $\mathbf{E}_-$  ортогональны друг другу.

В пространственной алгебре  $Cl_3$  имеются неединичные идемпотенты. В частности, таковым является паравектор  $\frac{1}{2}(\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma})$ , где  $\boldsymbol{\sigma}$  ( $\boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{1}$ ) – произвольный вектор единичной длины [3, 5, 7]. В этом легко убедиться:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}) \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{4}(\mathbf{1} + 2\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^2) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}).$$

Второй неединичный идемпотент, ортогональный первому, получается по вышеуказанной рецепту и имеет вид  $\mathbf{1} - \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \boldsymbol{\sigma})$ . Поэтому  $Cl_3$  разлагается в прямую сумму двух односторонних идеалов. Символически это разложение можно представить в виде

$$Cl_3 = \left[ Cl_3 \frac{\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}}{2} \right] \oplus \left[ Cl_3 \frac{\mathbf{1} - \boldsymbol{\sigma}}{2} \right] = \left[ \frac{\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}}{2} Cl_3 \right] \oplus \left[ \frac{\mathbf{1} - \boldsymbol{\sigma}}{2} Cl_3 \right].$$

Идеалы, входящие в это разложение, являются минимальными (каждый из них не содержит других идеалов кроме самого себя и нулевого идеала) [3]; элементы этих идеалов отождествляют [3, 7] с двухкомпонентными спинорами Паули, используемыми в квантовой механике частиц со спином. Кроме того, вышеуказанные идемпотентные паравекторы и порождаемые ими идеалы недавно стали использоваться как отправные элементы при построении новых способов представления и обработки классической и квантовой информации [19–22].

Возникает задача описания вообще всех идемпотентов пространственной алгебры. Она решена в следующем пункте. Затем будет рассмотрен вопрос о разложимости идемпотентов в суммы, в которые в качестве слагаемых входят идемпотенты простой структуры – идемпотентные паравекторы и некоторые другие элементы  $Cl_3$ .

**2.1. Идемпотенты пространственной алгебры.** Идемпотентами алгебры  $Cl_3$  являются её нуль, единица  $\mathbf{1}$  и неединичные идемпотенты. Структура последних описывается следующим утверждением.

*Теорема о структуре неединичных идемпотентов алгебры  $Cl_3$ .* Элемент  $\mathbf{E} \in Cl_3$  является неединичным идемпотентом тогда и только тогда, когда он имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{U} + i\mathbf{V}), \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in Cl_3$  – пространственные векторы, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{U}^2 - \mathbf{V}^2 = \mathbf{1}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{UV} + \mathbf{VU}) = 0. \quad (2.3)$$

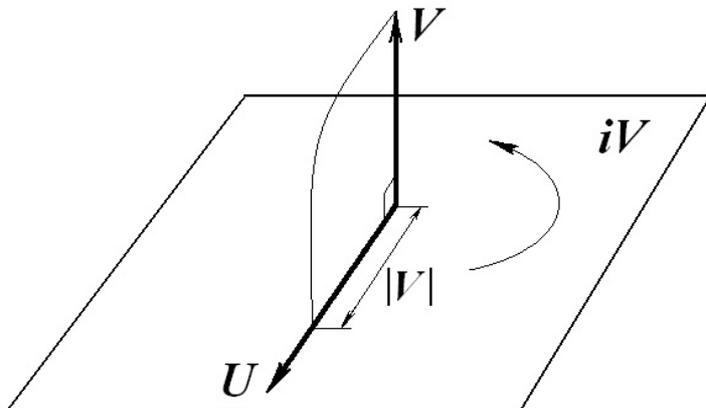


Рис. 2: Пространственная часть идемпотента  $\mathbf{E}$ . Вектор  $\mathbf{U}$  ( $|\mathbf{U}| > |\mathbf{V}|$ ), ортогональный вектору  $\mathbf{V}$ , лежит в плоскости бивектора  $i\mathbf{V}$ . Ориентация бивектора  $i\mathbf{V}$  указана стрелкой.

*Комментарий.* Выражение (2.1) показывает, что неединичный идемпотент алгебры  $Cl_3$  пропорционален сумме единичного элемента, вектора  $\mathbf{U}$  и бивектора  $i\mathbf{V}$  (пространственная часть идемпотента  $\mathbf{E}$ , образованная указанными вектором и бивектором, схематически изображена на рис. 2). Вектор  $\mathbf{U}$  здесь никогда не равен нулю: из (2.2) следует неравенство  $|\mathbf{U}| \geq 1$ . Равенство  $|\mathbf{U}| = 1$  достигается лишь при  $\mathbf{V} = 0$ , и тогда бивекторная часть в (2.1) нулевая. В этом последнем случае  $\mathbf{E}$  имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{U}) \quad (|\mathbf{U}| = 1),$$

т.е. является идемпотентным паравектором. Если же  $\mathbf{V} \neq 0$ , то бивектор  $i\mathbf{V}$  отличен от нуля; тогда вектор  $\mathbf{U}$ , будучи ортогонален вектору  $\mathbf{V}$  (условие (2.3)), всегда лежит в плоскости бивектора  $i\mathbf{V}$  (рис. 2).

*Доказательство теоремы. Достаточность.* Тот факт, что элемент (2.1) при условиях (2.2), (2.3) является идемпотентом, проверяется прямой выкладкой

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{U} + i\mathbf{V}) \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{U} + i\mathbf{V}) = \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{1} + \mathbf{U} + i\mathbf{V} + \mathbf{U} + \mathbf{U}^2 + i\mathbf{U}\mathbf{V} + i\mathbf{V} + i\mathbf{V}\mathbf{U} - \mathbf{V}^2) = \\ &= \frac{1}{4}\left(\mathbf{1} + 2\mathbf{U} + 2i\mathbf{V} + \mathbf{U}^2 - \mathbf{V}^2 + 2i\frac{\mathbf{U}\mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{U}}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}[\mathbf{1} + \mathbf{U} + i\mathbf{V} + i(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V})] = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{U} + i\mathbf{V}). \end{aligned}$$

*Необходимость.* Покажем, что в  $Cl_3$  любой неединичный идемпотент  $\mathbf{E} \neq \mathbf{1}$  имеет вид (2.1) и удовлетворяет условиям (2.2), (2.3).

С этой целью напишем выражение для  $\mathbf{E}$  в паравекторном представлении (1.36):

$$\mathbf{E} = z_0\mathbf{1} + z_k\sigma_k, \tag{2.4}$$

где  $z_0, z_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – комплексные  $p$ -числа.

Так как  $\mathbf{E}$  является, по условию, идемпотентом, для него выполнено

$$(z_0 + z_k\sigma_k)(z_0 + z_l\sigma_l) = z_0 + z_k\sigma_k. \tag{2.5}$$

Раскроем левую часть (2.5):

$$(z_0 + z_k\sigma_k)(z_0 + z_l\sigma_l) = z_0^2 + 2z_0z_k\sigma_k + z_kz_l\sigma_k\sigma_l \tag{2.6}$$

Обратимся к последнему члену в правой части (2.6) и представим его в виде

$$z_kz_l\sigma_k\sigma_l = \sum_{k=1}^3 z_k^2\sigma_k^2 + (z_kz_l\sigma_k\sigma_l)_{k \neq l}. \tag{2.7}$$

Здесь  $\sigma_k^2 = 1$  при  $k = 1, 2, 3$  и  $\sigma_k\sigma_l = -\sigma_l\sigma_k$  при  $k \neq l$  в силу таблицы умножения базиса  $Cl_3$ . Поэтому в правой части (2.7)

$$\sum_{k=1}^3 z_k^2\sigma_k^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \equiv z_kz_k \quad \text{и} \quad (z_kz_l\sigma_k\sigma_l)_{k \neq l} = 0,$$

ибо член  $(z_k z_l \sigma_k \sigma_l)_{k \neq l}$  является свёрткой симметричного объекта  $z_k z_l = z_l z_k$  с антисимметричным объектом  $\sigma_k \sigma_l = -\sigma_l \sigma_k$ . Отсюда для (2.7) получаем  $z_k z_l \sigma_k \sigma_l = z_k z_k$ , и поэтому (2.6) редуцируется к равенству

$$(z_0 + z_k \sigma_k)(z_0 + z_l \sigma_l) = z_0^2 + z_k z_k + 2z_0 z_k \sigma_k. \quad (2.8)$$

Подставляя правую часть (2.8) в левую часть (2.5), получаем равенство

$$z_0^2 + z_k z_k + 2z_0 z_k \sigma_k = z_0 + z_k \sigma_k,$$

которое по лемме о базисе (п. 1.8.1) равносильно паре равенств

$$z_0^2 + z_k z_k = z_0, \quad (2.9)$$

$$2z_0 z_k = z_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.10)$$

Равенства (2.9), (2.10) получены для идемпотента  $\mathbf{E} \neq 0$  – ненулевого элемента алгебры  $\mathcal{C}l_3$ , который, в силу посылки, отличен также и от единицы:  $\mathbf{E} \neq \mathbf{1}$ . Поэтому комплексные числа  $z_0, z_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) в (2.9), (2.10) с необходимостью удовлетворяют следующим условиям:  $z_0 \neq 0$  и  $z_k \neq 0$  хотя бы для одного значения  $k \in \{1, 2, 3\}$ . Покажем это.

Действительно, если  $z_0 = 0$ , то из (2.10) следует  $z_k = 0$  для всех  $k = 1, 2, 3$ ; но тогда  $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(z_0 \mathbf{1} + z_k \sigma_k) \equiv 0$  в противоречии с условием  $\mathbf{E} \neq 0$ . Если, далее,  $z_0 \neq 0$ , но  $z_k = 0$  для всех  $k = 1, 2, 3$ , то из (2.9) следует  $z_0 = 1$ ; но тогда  $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(z_0 \mathbf{1} + z_k \sigma_k) \equiv \mathbf{1}$  в противоречии с посылкой  $\mathbf{E} \neq \mathbf{1}$ .

Теперь пусть  $J \in \{1, 2, 3\}$  – именно то значение индекса  $k$ , при котором  $z_J \neq 0$ . Из (2.10) при  $k = J$  имеем  $2z_0 z_J = z_J$  и, поделив это равенство на  $z_J \neq 0$ , находим

$$z_0 = 1/2. \quad (2.11)$$

Получив (2.11), сделаем шаг в сторону и напишем для комплексных чисел  $z_k$ , входящих в представление (2.4) идемпотента  $\mathbf{E}$ , выражения

$$z_k = \frac{1}{2}\alpha_k + i\frac{1}{2}\beta_k \quad (\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, 3) \quad (2.12)$$

(коэффициенты  $1/2$  введены здесь для удобства). Подставляя (2.11) и (2.12) в представление (2.4) и определяя пространственные векторы  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  соотношениями

$$\mathbf{U} = \alpha_k \sigma_k, \quad \mathbf{V} = \beta_k \sigma_k, \quad (2.13)$$

получаем

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{U} + i\mathbf{V}). \quad (2.14)$$

Для выявления взаимосвязей входящих в (2.14) векторов  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  вернёмся к (2.11) и подставим (2.11) вместе с (2.12) в (2.9); после очевидных преобразований (2.9) приводится к равенству  $\alpha_k \alpha_k - \beta_k \beta_k + 2i\alpha_k \beta_k = 1$ , которое после отделения действительной и мнимой частей даёт

$$\alpha_k \alpha_k - \beta_k \beta_k = 1, \quad \alpha_k \beta_k = 0.$$

В векторных обозначениях (2.13) два последних равенства переписываются в виде

$$\mathbf{U}^2 - \mathbf{V}^2 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (2.15)$$

Теперь видно, что выражение (2.14) и равенства (2.15) совпадают с выражением (2.1) и равенствами (2.2), (2.3). Теорема доказана.

**2.2. Составные идемпотенты и их разложение.** *Неединичный идемпотент алгебры  $Cl_3$  будет называться простым, simple (составным, composite), если вектор  $V$  в представлении (2.1) этого идемпотента является нулевым (ненулевым).*

Как следует из комментария к формулировке теоремы предыдущего пункта, все простые идемпотенты в  $Cl_3$  являются идемпотентными паравекторами. Но допускает ли идемпотентный паравектор наряду с представлением  $\frac{1}{2}(1 + U)$ ,  $U^2 = 1$  ещё одно представление  $\frac{1}{2}(1 + U' + iV)$ , в котором  $V \neq 0$ ? Как показывает следующая теорема, ответ отрицателен.

**Теорема о простоте идемпотентных паравекторов.** *Все идемпотентные паравекторы алгебры  $Cl_3$  являются простыми идемпотентами.*

Доказательство. Предположим обратное: пусть идемпотентный паравектор  $(1/2)(1 + U)$  является составным. Тогда, по определению,

$$\frac{1}{2}(1 + U) = \frac{1}{2}(1 + U' + iV),$$

где  $U' \neq 0$  и  $V \neq 0$  – ненулевые векторы, удовлетворяющие условиям (2.2), (2.3). Но из написанного равенства вытекает равенство  $U' - U + iV = 0$ , а из него по лемме о базисе (п. 1.8.1) следует  $U' = U$ ,  $V = 0$ . Противоречие с посылкой  $V \neq 0$ .

**Следствие.** *Идемпотент алгебры  $Cl_3$  является простым тогда и только тогда, когда он является идемпотентным паравектором.*

Простой и составной идемпотенты – существенно различные алгебро-геометрические объекты: простой идемпотент является элементом четырёхмерного пространства, являющегося прямой суммой пространств скаляров и векторов, тогда как составной идемпотент принадлежит семимерному пространству – прямой сумме пространств скаляров, векторов и бивекторов.

**Теорема о разложении составного идемпотента.** *Составной идемпотент разлагается в сумму простого идемпотента и нильпотента индекса 2 – такого элемента алгебры  $Cl_3$ , вторая степень которого равна нулю.*

Доказательство. Обращаясь к представлению (2.1) и, предполагая, что  $V \neq 0$ , зададим два вектора  $W$  и  $\sigma$  так, чтобы выполнялись условия

$$W^2 = V^2, \quad W \cdot V = 0, \quad \sigma = U - W, \quad \sigma \cdot W = 0. \quad (2.16)$$

Здесь первые два условия говорят о том, что вектор  $W$  равен по модулю вектору  $V$  и ортогонален ему; поэтому  $W$  лежит в плоскости бивектора  $iV$ , ортогональной вектору  $V$  (рис. 3).

Из третьего условия следует, что вектор  $\sigma$  также лежит в плоскости  $iV$ , ибо этой плоскости принадлежат оба вектора  $U$ ,  $W$  (рис. 2, 3). Это следует также из выкладки

$$\sigma \cdot V = (U - W) \cdot V = U \cdot V - W \cdot V = 0,$$

в которой  $U \cdot V = 0$  по условию (2.3), а  $W \cdot V = 0$  по второму из условий (2.16).

Четвёртое условие (2.16) утверждает, что векторы  $\sigma$  и  $W$  взаимно ортогональны (рис. 3).

Вектор  $\sigma$ , подчинённый указанным условиям, является единичным (рис. 3). В этом можно убедиться, если, используя третье из условий (2.16), написать  $U = W + \sigma$  и затем вычислить  $U^2$ ; применяя в выкладке формулу (1.14) и четвёртое из условий (2.16), получаем

$$\begin{aligned} U^2 = UU &= (W + \sigma)(W + \sigma) = W^2 + (W\sigma + \sigma W) + \sigma^2 = \\ &= W^2 + 2(W \cdot \sigma) + \sigma^2 = W^2 + \sigma^2. \end{aligned}$$

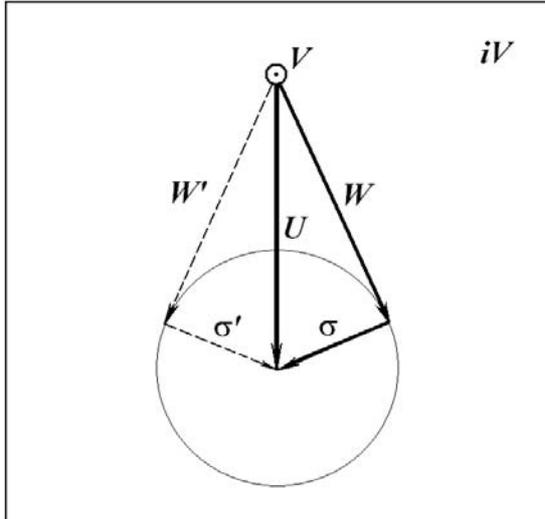


Рис. 3: К разложению составного идемпотента. Вектор  $V$  ортогонален плоскости бивектора  $iV$ , векторы  $U$ ,  $W$  и  $\sigma$  лежат в плоскости  $iV$ . Конечная точка вектора  $W$  касается единичной окружности с центром в конечной точке вектора  $U$ . Пара векторов  $\{W, \sigma\}$  определяет разложение (2.17) составного идемпотента  $E$ . Ещё одно разложение  $E$  определяется парой векторов  $\{W', \sigma'\}$ .

Отсюда  $\sigma^2 = U^2 - W^2 = U^2 - V^2 = 1$  в силу первого из условий (2.16) и условия (2.2).

Используя  $W$  и  $\sigma$ , выражение (2.1), описывающее идемпотент, можно представить в виде

$$E = \frac{1}{2}(1 + U + iV) = \frac{1}{2}[1 + (U - W) + W + iV] = \frac{1}{2}(1 + \sigma) + \frac{1}{2}(W + iV). \quad (2.17)$$

Составной идемпотент оказался разложенным в сумму простого идемпотента – идемпотентного паравектора  $(1/2)(1 + \sigma)$  и элемента  $(1/2)(W + iV)$ , в котором векторы  $W$  и  $V$  имеют равные модули и ортогональны друг другу. Этот последний элемент при умножении на себя самого даёт нуль (см. ниже, п. 3.1); тем самым он является нильпотентом индекса 2 – свойствам таких объектов будут посвящены следующие разделы статьи.

**Замечание.** Разложение (2.17) составного идемпотента не единственно: пара векторов  $\{W, \sigma\}$ , лежащих в плоскости бивектора  $iV$ , определена с точностью до зеркального отражения обоих векторов относительно вектора  $U$ , принадлежащего той же плоскости (рис. 3). Такое отражение переводит векторы  $\{W, \sigma\}$  в пару векторов  $\{W', \sigma'\}$ , которые, как и их прообразы, лежат в плоскости  $iV$  и удовлетворяют условиям (2.16). Векторы  $W'$  и  $\sigma'$ , будучи подставлены в (2.17) вместо  $W$  и  $\sigma$ , порождают ещё одно разложение составного идемпотента  $E$ .

### 2.3. Неминимальность идеалов, порождаемых составными идемпотентами.

Обратимся к разложению (2.17) составного идемпотента и, обозначив этот идемпотент через  $E_+$ , напишем (2.17) в виде

$$E_+ = e_+ + N,$$

где  $e_+ = (1/2)(1 + \sigma)$ ,  $N = (1/2)(W + iV) \neq 0$ . Так как  $E_+$  и  $e_+$  – неединичные идемпотенты, то в силу замечаний, сделанных в начале настоящего раздела статьи, существуют ортогональные им неединичные идемпотенты  $E_-$  и  $e_-$ , определённые выражениями

$$e_- = 1 - e_+ = \frac{1}{2}(1 - \sigma), \quad E_- = 1 - E_+ = 1 - e_+ - N = e_- - N.$$

Две пары взаимно ортогональных идемпотентов  $\{e_+, e_-\}$  и  $\{E_+, E_-\}$  порождают два разложения алгебры  $Cl_3$  в прямые суммы односторонних идеалов – левых или правых.

Рассмотрим два разложения  $Cl_3$  в прямые суммы левых идеалов. Разложение, порождённое парой  $\{e_+, e_-\}$ , имеет вид

$$Cl_3 = Cl_3e_+ \oplus Cl_3e_-.$$

Разложение же, индуцированное парой  $\{E_+, E_-\}$ , выглядит так:

$$Cl_3 = Cl_3E_+ \oplus Cl_3E_- = [Cl_3e_+ + Cl_3N] \oplus [Cl_3e_- - Cl_3N].$$

Из этих разложений следует, что имеют место следующие включения идеалов:

$$Cl_3e_+ \subset Cl_3E_+ = Cl_3e_+ + Cl_3N,$$

$$Cl_3e_- \subset Cl_3E_- = Cl_3e_- - Cl_3N.$$

Здесь левые идеалы  $Cl_3E_+$  и  $Cl_3E_-$ , порождённые парой составных идемпотентов  $\{E_+, E_-\}$ , содержат левые идеалы  $Cl_3e_+$  и  $Cl_3e_-$ , соответственно; поэтому *левые идеалы, порождаемые в алгебре  $Cl_3$  взаимно ортогональными составными идемпотентами, не являются минимальными.*

Повторяя эти рассуждения для разложений  $Cl_3$  в прямые суммы правых идеалов, приходим к заключению, что *правые идеалы, порождаемые в алгебре  $Cl_3$  взаимно ортогональными составными идемпотентами, также не являются минимальными.*

С другой стороны, левые и правые идеалы, порождаемые идемпотентными паравекторами, являются минимальными [3]. Именно эти минимальные идеалы традиционно привлекают внимание: их элементы, как уже отмечалось ранее, отождествляют [3, 7] с двухкомпонентными спинорами Паули, используемыми в квантовой механике частиц со спином. Однако поскольку составные идемпотенты и порождаемые ими неминимальные идеалы содержат нильпотентные элементы, имеющие нетривиальный геометрический смысл и содержательную физическую интерпретацию (см. последующие разделы работы), связь этих идемпотентов и идеалов с физикой требует дальнейшего анализа.

### 3 НИЛЬПОТЕНТЫ ИНДЕКСА 2 ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АЛГЕБРЫ

В силу теоремы Фробениуса, алгебра  $Cl_3$  не является алгеброй с делением. Один из эффектов, сопутствующий этому обстоятельству, состоит в наличии в  $Cl_3$  *нильпотентов.*

*Стандартное общеалгебраическое определение.* Элемент алгебры, первые  $p - 1$  степеней которого отличны от нуля, а  $p$ -ая степень равна нулю, называется *нильпотентом индекса  $p$ .* В частности, *нильпотент  $N$  индекса 2 определяется условиями*

$$N \neq 0, \quad N^2 = 0. \tag{3.1}$$

Как будет показано в разделе 4, нильпотенты индекса 2 выделены в  $Cl_3$  с точки зрения эквивалентности действия на них фазовых преобразований и вращений. В настоящем же разделе, являющемся подготовительным для раздела 4, будет установлен общий вид нильпотентов индекса 2 пространственной алгебры и выявлен их геометрический смысл.

**3.1. Структура нильпотентов индекса 2 пространственной алгебры.** Нетрудно убедиться, что элемент  $N \in Cl_3$  вида

$$N = U + iV, \tag{3.2}$$

где  $U$  и  $V$  – ненулевые, равные по модулю, взаимно ортогональные векторы:

$$U^2 = V^2 \neq 0, \quad U \cdot V \equiv \frac{1}{2}(UV + VU) = 0, \tag{3.3}$$

является нильпотентом индекса 2. Это показывает следующая выкладка, использующая формулу (1.14) и условия (3.3):

$$\mathbf{N}^2 = (\mathbf{U} + i\mathbf{V})(\mathbf{U} + i\mathbf{V}) = \mathbf{U}^2 + i\mathbf{UV} + i\mathbf{VU} + i^2\mathbf{V}^2 = \mathbf{U}^2 - \mathbf{V}^2 + 2i(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) \equiv 0.$$

Оказывается, что элементами этого вида исчерпываются все нильпотенты пространственной алгебры.

**Теорема о структуре нильпотентов алгебры  $Cl_3$ .** Элемент  $\mathbf{N} \in Cl_3$  является нильпотентом индекса 2 тогда и только тогда, когда он имеет вид (3.2) и удовлетворяет условиям (3.3).

Доказательство. То, что каждый такой элемент является нильпотентом индекса 2, уже продемонстрировано представленной выше выкладкой. Остаётся убедиться, что в алгебре  $Cl_3$  любой нильпотент  $\mathbf{N}$  индекса 2 имеет вид (3.2) и удовлетворяет условиям (3.3). Покажем это.

Напишем выражение для  $\mathbf{N}$  в паравекторном представлении (1.36):

$$\mathbf{N} = z_0 + z_k \boldsymbol{\sigma}_k, \quad (3.4)$$

где  $z_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ ,  $z_k = \alpha_k + i\beta_k$ , при этом  $\alpha_0, \beta_0, \alpha_k, \beta_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) суть действительные числа.

Так как  $\mathbf{N}$  является, по условию, нильпотентом индекса 2, для него выполнено

$$\mathbf{N} = (z_0 + z_k \boldsymbol{\sigma}_k)^2 = (z_0 + z_k \boldsymbol{\sigma}_k)(z_0 + z_l \boldsymbol{\sigma}_l) = 0.$$

Раскрывая здесь скобки, получаем

$$z_0^2 + 2z_0 z_k \boldsymbol{\sigma}_k + z_k z_l \boldsymbol{\sigma}_k \boldsymbol{\sigma}_l = 0. \quad (3.5)$$

Левая часть (3.5) совпадает с левой частью равенства (2.6), полученного в предыдущем разделе; поэтому левую часть (3.5) можно сразу же заменить выведенным там выражением (2.8). После такой замены равенство (3.5) переходит в равенство

$$z_0^2 + z_k z_k + 2z_0 z_k \boldsymbol{\sigma}_k = 0.$$

По лемме о базисе (п. 1.8.1) это равенство равносильно паре равенств

$$z_0^2 + z_k z_k = 0, \quad (3.6a)$$

$$z_0 z_k \boldsymbol{\sigma}_k = 0. \quad (3.6b)$$

Равенства (3.6) получены для нильпотента  $\mathbf{N} \neq 0$  – элемента, который является ненулевым по определению. Поэтому среди комплексных чисел  $z_0, z_k$ , ( $k = 1, 2, 3$ ), связанных этими равенствами и входящих в представление (3.4) нильпотента, имеются числа, отличные от нуля.

Покажем, что все такие ненулевые числа расположены среди чисел  $z_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), тогда как  $z_0 = 0$ . Действительно, если  $z_0 \neq 0$ , то умножая (3.6b) на  $z_0^{-1} \neq 0$ , получаем  $z_k \boldsymbol{\sigma}_k = 0$ . Отсюда  $z_k = 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ) по лемме о базисе (п. 1.8.1). Но тогда из (3.6a) имеем  $z_0 = 0$ . Противоречие.

Из сказанного следуют два факта.

Во-первых, представление (3.4) нильпотента  $\mathbf{N}$  не содержит слагаемого  $z_0 = 0$ , и поэтому  $\mathbf{N}$  можно представить в виде

$$\mathbf{N} = z_k \boldsymbol{\sigma}_k = (\alpha_k + i\beta_k) \boldsymbol{\sigma}_k = \alpha_k \boldsymbol{\sigma}_k + i\beta_k \boldsymbol{\sigma}_k = \mathbf{U} + i\mathbf{V}, \quad (3.7)$$

где векторы  $U$  и  $V$  определены соотношениями

$$U = \alpha_k \sigma_k, \quad V = \beta_k \sigma_k. \quad (3.8)$$

Представление (3.7) совпадает с (3.2).

Во-вторых, при  $z_0 = 0$  равенство (3.6 b) выполняется автоматически, и система (3.6) сводится к одному равенству  $z_k z_k = 0$ . Подставляя в него значения  $z_k = \alpha_k + i\beta_k$ , получаем комплексное равенство

$$\alpha_k \alpha_k - \beta_k \beta_k + 2i\alpha_k \beta_k = 0,$$

равносильное двум действительным равенствам

$$\alpha_k \alpha_k = \beta_k \beta_k, \quad \alpha_k \beta_k = 0.$$

Переписывая их в векторных обозначениях (3.8), получаем

$$U^2 = V^2, \quad U \cdot V = 0.$$

Два последних равенства совпадают с (3.3).

Заключительный шаг доказательства: оба вектора  $U, V$  в представлении (3.7) отличны от нуля, ибо если один из них равен нулю, то другой в силу равенства  $U^2 = V^2$  также является нулевым, а это противоречит условию  $N \neq 0$ .

Этим завершается доказательство теоремы.

### 3.2. Геометрическая интерпретация нильпотента индекса 2. Направляющий вектор нильпотента. Рассмотрим нильпотент

$$N = U + iV \quad (U^2 = V^2 \neq 0, \quad U \cdot V = 0).$$

Здесь  $V$  является вектором, а  $iV$  – бивектором. Плоскость этого бивектора ортогональна вектору  $V$ , а поскольку вектор  $U$  также ортогонален  $V$ , постольку  $U$  лежит в плоскости  $iV$  (рис. 4).

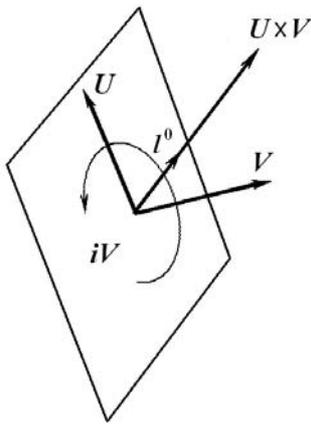


Рис. 4: Вектор  $U$  лежит в плоскости бивектора  $iV$ . Дуга со стрелкой указывает ориентацию этого бивектора. Единичный вектор  $l^0$ , лежащий в плоскости  $iV$ , является направляющим вектором нильпотента  $N$ .

Теперь напомним, что норма бивектора равна норме (т. е. модулю) вектора, которому этот бивектор дуален (п. 1.5). Но векторы  $U$  и  $V$  имеют равные модули. Поэтому можно утверждать, что в алгебре  $Cl_3$  любой нильпотент представляется бивектором и лежащим в его плоскости вектором с равными нормами (рис. 4). В этом заключается геометрическая интерпретация нильпотентов.

Пара векторов  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  определяет третий вектор  $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ , перпендикулярный первым двум. Используя (1.9), (1.15), (1.16) и учитывая, что  $|\mathbf{U}| = |\mathbf{V}|$ ,  $\mathbf{UV} = -\mathbf{VU}$ , для  $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$  можно написать

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = -i(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}) \equiv -\frac{i}{2}(\mathbf{UV} - \mathbf{VU}) = -i\mathbf{UV} = i\mathbf{VU}. \quad (3.9)$$

**Определение.** Единичный вектор  $\mathbf{l}^0 = (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) / |\mathbf{U} \times \mathbf{V}|$ , сонаправленный с вектором  $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ , будет называться направляющим вектором нильпотента  $\mathbf{N}$ .

В силу (3.9), вектор  $\mathbf{l}^0$  определяется любым из следующих выражений:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^0 &= \frac{1}{|\mathbf{U}| |\mathbf{V}|} (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = \frac{1}{U^2} (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = \frac{1}{V^2} (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = \\ &= -\frac{i}{U^2} \mathbf{UV} = -\frac{i}{V^2} \mathbf{UV} = \frac{i}{U^2} \mathbf{VU} = \frac{i}{V^2} \mathbf{VU}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Нильпотент как геометрический объект можно вращать вокруг оси, проходящей вдоль его направляющего вектора  $\mathbf{l}^0$  (рис. 4); в формализме алгебры  $Cl_3$  такое вращение можно реализовать унимодулярными кватернионами. При этом выявляются неожиданные свойства нильпотентов, анализу которых посвящён следующий раздел статьи. Пока же будут выведены полезные равенства и доказано одно утверждение, которые там будут использоваться.

**3.3. Представления нильпотента  $\mathbf{N} = \mathbf{U} + i\mathbf{V}$ , связанные с его направляющим вектором. Два полезных равенства.** Используя выражения (3.10), можно получить представления нильпотента  $\mathbf{N} = \mathbf{U} + i\mathbf{V}$ , в которые входят один из векторов  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  и направляющий вектор  $\mathbf{l}^0$ . Вначале заметим, что из (3.10) вытекают равенства

$$i\mathbf{VU} = U^2 \mathbf{l}^0, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{UV} = iV^2 \mathbf{l}^0. \quad (3.12)$$

Умножая (3.11) и (3.12) на  $\mathbf{U}$  и, соответственно,  $\mathbf{V}$  справа и сокращая на ненулевые скаляры  $U^2$ ,  $V^2$ , имеем

$$i\mathbf{V} = \mathbf{l}^0 \mathbf{U}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{l}^0 i\mathbf{V}. \quad (3.14)$$

Подставляя (3.13) в  $\mathbf{N} = \mathbf{U} + i\mathbf{V}$ , получаем

$$\mathbf{N} = \mathbf{U} + i\mathbf{V} = (\mathbf{1} + \mathbf{l}^0) \mathbf{U}; \quad (3.15)$$

подстановка (3.14) в  $\mathbf{N} = \mathbf{U} + i\mathbf{V}$  даёт

$$\mathbf{N} = \mathbf{U} + i\mathbf{V} = (\mathbf{1} + \mathbf{l}^0) i\mathbf{V}. \quad (3.16)$$

Формулы (3.15), (3.16) суть искомые представления нильпотента  $\mathbf{N} = \mathbf{U} + i\mathbf{V}$ .

Из (3.13) – (3.16) вытекают два полезных равенства, первое из которых получается почленным суммированием (3.13), (3.14), а второе – почленным суммированием (3.15), (3.16):

$$\mathbf{N} = \mathbf{l}^0 \mathbf{N}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} + \mathbf{l}^0) \mathbf{N}. \quad (3.18)$$

С равенством (3.17) тесно связано утверждение, которое формулируется и доказывается в следующем пункте (это утверждение, а также равенство (3.18) будут использоваться в следующем разделе статьи, в п. 4.2.2).

**3.4. Лемма о направляющем векторе нильпотента.** Пусть  $\sigma$  ( $\sigma^2 = 1$ ) – произвольный единичный вектор. Нильпотент  $N = U + iV$  удовлетворяет равенству

$$\sigma N = N, \quad (3.19)$$

тогда и только тогда, когда его направляющий вектор  $l^0$  удовлетворяет равенству

$$l^0 = \sigma. \quad (3.20)$$

Доказательство. Достаточность. Если  $l^0 = \sigma$ , то (3.19) сводится к уже доказанному равенству (3.17).

Необходимость. Перепишем (3.19) в виде

$$\sigma N - N = 0. \quad (3.21)$$

Подставим выражение  $N = U + iV$  в (3.21); это даёт

$$\sigma U + i\sigma V - U - iV = 0. \quad (3.22)$$

Используя (1.10), разложим клиффордовы произведения  $\sigma U$  и  $i\sigma V$  векторов  $\sigma$ ,  $U$  и  $V$ , входящие в (3.22), в суммы скалярного и внешнего произведений:

$$\sigma U = \sigma \cdot U + \sigma \wedge U, \quad i\sigma V = i(\sigma \cdot V) + i(\sigma \wedge V). \quad (3.23)$$

Здесь  $U \cdot \sigma$  и  $V \cdot \sigma$  суть скаляры, а  $\sigma \wedge U$  и  $\sigma \wedge V$  суть бивекторы; поэтому элемент  $i(\sigma \cdot V)$ , будучи дуален скаляру, является тривектором, а элемент  $i(\sigma \wedge V)$ , будучи дуален бивектору, является вектором. Подставляя (3.23) в (3.22) и собирая вместе скаляры, векторы, бивекторы и тривекторы, получаем

$$F_S + F_V + F_B + F_T = 0, \quad (3.24)$$

где

$$\begin{aligned} F_S &= \sigma \cdot U && \text{(скаляр),} \\ F_V &= -U + i(\sigma \wedge V) && \text{(вектор),} \\ F_B &= -iV + (U \wedge \sigma) && \text{(бивектор),} \\ F_T &= i(\sigma \cdot V) && \text{(тривектор).} \end{aligned}$$

Для выполнения равенства (3.24) необходимо и достаточно, чтобы каждый член в его левой части был равен нулю. Приравнявая  $F_S$  и  $F_T$  нулю, получаем

$$\sigma \cdot U = \sigma \cdot V = 0. \quad (3.25)$$

Равенства (3.25) показывают, что если нильпотент  $N = U + iV$  удовлетворяет равенству (3.19), то оба взаимно ортогональных вектора  $U$  и  $V$ , входящие в его представление, ортогональны единичному вектору  $\sigma$ . Но  $U$  и  $V$  определяют по формулам (3.10) единичный направляющий вектор  $l^0$ , который также ортогонален векторам  $U$ ,  $V$ :

$$l^0 = \frac{1}{U^2} (U \times V) = \frac{1}{V^2} (U \times V). \quad (3.26)$$

Очевидно, что  $l^0$  лежит на прямой, проходящей через вектор  $\sigma$ ; покажем, что  $l^0 = \sigma$ . С этой целью напишем условия  $F_V = 0$  и  $F_B = 0$ , вытекающие из (3.24), в явном виде:

$$F_V \equiv -U + i(\sigma \wedge V) = 0, \quad F_B \equiv -iV + (\sigma \wedge U) = 0.$$

Из этих равенств следует, что

$$U = i(\sigma \wedge V) = -i(V \wedge \sigma) = V \times \sigma, \quad (3.27)$$

$$V = -i(\sigma \wedge U) = \sigma \times U \quad (3.28)$$

(здесь внешние произведения векторов выражены через векторные произведения по формулам (1.9), указанным в п. 1.4). Теперь подставим одно из двух последних соотношений, скажем, (3.28), в первый член правой части (3.26) и применим для преобразования получившегося выражения известные формулы векторного исчисления; это даёт

$$l^0 = \frac{1}{U^2} (U \times V) = \frac{1}{U^2} [U \times (\sigma \times U)] = \frac{1}{U^2} [(U \cdot U) \sigma - (U \cdot \sigma) U] = \frac{1}{U^2} U^2 \sigma = \sigma,$$

ибо  $U \cdot \sigma = 0$  в силу (3.25). Тот же результат получится, если подставить (3.27) во второй член правой части (3.26). Итак, если нильпотент удовлетворяет равенству (3.19), то  $l^0 = \sigma$ . Лемма доказана.

#### 4 ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО НИЛЬПОТЕНТОВ ИНДЕКСА 2: ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДЕЙСТВИЯ НА НИЛЬПОТЕНТ ФАЗОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ВРАЩЕНИЙ

В этом разделе будет показано, что действие фазовых преобразований, реализуемых комплексными  $p$ -экспонентами  $\exp(\pm i\varphi)$ , на нильпотент индекса 2 приводит к повороту нильпотента вокруг его направляющего вектора на угол  $\mp\varphi$  (и наоборот, такой поворот нильпотента всегда может быть реализован посредством фазовых преобразований). Основу доказательства составляет решение следующей задачи.

**4.1. Задача.** Рассмотрим в алгебре  $Cl_3$  оператор вращения  $R(\sigma, \varphi)$ , действие которого на элементы  $A \in Cl_3$  определяется через унитарные кватернионы выражением

$$R(\sigma, \varphi)A \equiv \exp\left(-i\sigma \frac{\varphi}{2}\right) A \exp\left(i\sigma \frac{\varphi}{2}\right) \quad (|\sigma| = 1, \varphi \in \mathbb{R}) \quad (4.1)$$

(см. формулы (1.34), (1.35)), где  $\sigma$  – единичный направляющий вектор оси вращения,  $\varphi$  – угол поворота вокруг этой оси, а участвующие в (4.1)  $p$ -экспоненты удовлетворяют соотношениям

$$\exp\left(\pm i\sigma \frac{\varphi}{2}\right) = \cos \frac{\varphi}{2} \pm i\sigma \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (4.2)$$

Произвольно зафиксируем ось вращения фиксацией вектора  $\sigma$  и поставим задачей нахождение таких ненулевых элементов  $A \in Cl_3$ , которые при поворотах вокруг  $\sigma$  на всевозможные углы  $\varphi$  преобразуются простейшим образом, а именно, умножаются на элементы центра этой алгебры – комплексные  $p$ -числа.

Иными словами, задача состоит в отыскании таких  $p$ -чисел, на которые одинаковым образом действуют две группы: группа вращений  $SO_3$ , действующая унитарными  $p$ -кватернионами, и мультипликативная группа центра указанной алгебры, действующая умножениями на комплексные  $p$ -числа.

Эта задача сводится к решению уравнения

$$R(\sigma, \varphi)A = \lambda(\varphi)A, \quad A \in Cl_3, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (4.3)$$

относительно неизвестных ненулевых элементов  $\mathbf{A} \neq 0$ , не зависящих от  $\varphi$ , и неизвестных ненулевых комплексных  $p$ -чисел  $\lambda = \lambda(\varphi) \neq 0$  (последние, не опасаясь двусмысленности, можно отождествлять с элементами поля  $\mathbb{C}$ ).

**4.2. Решение задачи.** Вначале напомним, что при фиксированной оси вращения повороты вокруг неё на различные углы  $\varphi$  образуют коммутативную подгруппу группы вращений:

$$R(\boldsymbol{\sigma}, \chi)R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) = R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)R(\boldsymbol{\sigma}, \chi) = R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi + \chi)$$

(это сразу же следует из (4.1), (4.2) и перестановочности элемента  $\mathbf{i}$  со всеми элементами  $Cl_3$ ). Единицей этой подгруппы является элемент  $R(\boldsymbol{\sigma}, 0) = \mathbf{1}$ , совпадающий с единицей  $Cl_3$ , а элемент  $R^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)$  этой подгруппы, обратный к элементу  $R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)$ , имеет вид

$$R^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) = R(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi).$$

Учтя указанные факты, умножим обе части (4.3) на  $R(\boldsymbol{\sigma}, \chi)$  слева; тогда в левой части получится

$$R(\boldsymbol{\sigma}, \chi)R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) = R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi + \chi)\mathbf{A} = \lambda(\varphi + \chi)\mathbf{A},$$

а справа возникнет выражение

$$R(\boldsymbol{\sigma}, \chi)\lambda(\varphi)\mathbf{A} = \lambda(\varphi)R(\boldsymbol{\sigma}, \chi)\mathbf{A} = \lambda(\varphi)\lambda(\chi)\mathbf{A}$$

(при его написании мы воспользовались перестановочностью комплексных  $p$ -чисел со всеми элементами  $Cl_3$ ). В итоге получаем уравнение

$$\lambda(\varphi + \chi)\mathbf{A} = \lambda(\varphi)\lambda(\chi)\mathbf{A},$$

которое по следствию из леммы о сокращении (п. 1.8.3) эквивалентно уравнению

$$\lambda(\varphi + \chi) = \lambda(\varphi)\lambda(\chi). \tag{4.4}$$

Но, как хорошо известно, в предположении гладкости функции  $\lambda(\varphi)$  функциональное уравнение (4.4) имеет решение

$$\lambda(\varphi) = \exp(\mathbf{i}\omega\varphi), \tag{4.5}$$

где  $\omega \in \mathbb{C}$  – некоторая, вообще говоря,  $p$ -комплексная константа (элемент  $\mathbf{i}$  выделен из  $\omega$  для удобства). Здесь возникают два существенно различных случая:

$$\omega = 0 \Rightarrow \lambda(\varphi) \equiv 1 \tag{4.6}$$

и  $\omega \neq 0$ . Займёмся ими поочерёдно.

**4.2.1. Случай  $\omega = 0$ ,  $\lambda(\varphi) \equiv 1$ .** При выполнении равенства (4.6) уравнение (4.3) имеет вид

$$R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)\mathbf{A} = \mathbf{A}. \tag{4.7}$$

Уравнение (4.7) может быть прочитано как условие инвариантности элемента  $\mathbf{A}$  относительно поворотов вокруг оси  $\boldsymbol{\sigma}$  на всевозможные углы  $\varphi$ . Следующие простые соображения позволяют сразу же перечислить все такие элементы и тем самым найти все решения этого уравнения.

Примем во внимание, что восьмимерное линейное пространство, являющееся носителем алгебры  $Cl_3$ , разлагается в прямую сумму двумерного носителя её центра, трёхмерного пространства векторов и трёхмерного пространства бивекторов. Но:

1. центр  $Cl_3$  инвариантен относительно действия оператора  $R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)$  в левой части (4.7);

2. подпространство пространства векторов, инвариантное относительно действия оператора  $R(\sigma, \varphi)$ , одномерно, совпадает с осью вращения и имеет вид  $\mu\sigma$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ;
3. подпространство пространства бивекторов, инвариантное относительно действия оператора  $R(\sigma, \varphi)$ , также одномерно и имеет вид  $\nu i\sigma$ ,  $\nu \in \mathbb{R}$  (здесь  $i\sigma$  – единичный бивектор, дуальный вектору  $\sigma$ , плоскость этого бивектора ортогональна оси вращения).

Поэтому элементы  $\mathbf{A} \in Cl_3$ , являющиеся решениями уравнения (4.8), имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{ \text{элемент центра } Cl_3 \} + \mu\sigma + \nu i\sigma = \\ &= (\alpha + i\beta)\mathbf{1} + (\mu + i\nu)\sigma = a + b\sigma, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  и  $b = \mu + i\nu \in \mathbb{C}$  суть произвольные комплексные  $p$ -числа.

Вариант решения задачи (4.3), представленный выражением (4.8), является тривиальным. Мы отыскивали такие элементы  $\mathbf{A} \in Cl_3$ , которые под действием группы вращений умножаются на комплексные  $p$ -числа. Найденные элементы  $\mathbf{A} = a\mathbf{1} + b\sigma$  обладают этим свойством – однако умножаются они, как следует из (4.8), на единицу алгебры, т. е. вообще не меняются. Содержательным оказывается второй случай.

**4.2.2. Случай  $\omega \neq 0$ ,  $\lambda(\varphi) = \exp(i\omega\varphi)$ .** В этом случае уравнение (4.3) имеет вид

$$R(\sigma, \varphi)\mathbf{A} = \exp(i\omega\varphi)\mathbf{A}. \quad (4.9)$$

В силу определений (4.1), (4.2) оператор  $R(\sigma, \varphi)$  в (4.9) является  $2\pi$ -периодическим по  $\varphi$  и имеет  $2\pi$  своим минимальным периодом. Тогда функция  $\exp(i\omega\varphi)$  в правой части (4.9) должна быть периодической с тем же минимальным периодом. Отсюда (и из того факта, что  $\mathbf{A}$ , по условию, не зависит от  $\varphi$ ) сразу же следует, что, во-первых, параметр  $\omega$  в показателе этой  $p$ -экспоненты является действительным числом и, во-вторых,  $\omega = \pm 1$ . Поэтому функция  $\lambda(\varphi)$  в уравнении (4.9) имеет вид

$$\lambda(\varphi) = \exp(\pm i\varphi), \quad (4.10)$$

а уравнение (4.9) распадается на два уравнения

$$R(\sigma, \varphi)\mathbf{A} = \exp(-i\varphi)\mathbf{A}, \quad (4.11)$$

$$R(\sigma, \varphi)\mathbf{A} = \exp(i\varphi)\mathbf{A}. \quad (4.12)$$

В уравнениях (4.11), (4.12) слева стоит оператор вращения, а справа – комплексные  $p$ -экспоненты, действующие на элемент  $\mathbf{A}$  умножением; эти экспоненты представляют в  $Cl_3$  группу фазовых преобразований  $U_1$ . Поэтому уравнения (4.11) и (4.12) определяют такие элементы  $\mathbf{A} \in Cl_3$ , для которых действие оператора вращения  $R(\sigma, \varphi)$  эквивалентно действию фазовых преобразований.

Сейчас будет доказано, что в нетривиальном случае  $\mathbf{A} \neq 0$  этими элементами являются нильпотенты индекса 2 алгебры  $Cl_3$ , и только они. Попутно будет выявлена связь параметров этих нильпотентов с параметрами оператора вращения в (4.11), (4.12).

Предварительно выведем две полезных формулы.

Одна из них – перестановочное соотношение для элементов  $\mathbf{A}$  и  $\sigma$ , входящих в уравнения (4.11), (4.12). Для вывода этого соотношения рассмотрим (4.11), (4.12) при  $\varphi = \pi$ . Подставляя это значение  $\varphi$  в левые части (4.11), (4.12) и используя (4.1), (4.2), находим

$$R(\sigma, \pi)\mathbf{A} = -i\sigma\mathbf{A}i\sigma = -i\sigma\mathbf{A}\sigma = \sigma\mathbf{A}\sigma,$$

Правые же части (4.11), (4.12) при  $\varphi = \pi$  имеют вид

$$\exp(\pm i\pi)\mathbf{A} = -\mathbf{A}.$$

Таким образом, при указанном значении  $\varphi = \pi$  оба уравнения (4.11), (4.12) сводятся к одному уравнению

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{A}. \quad (4.13)$$

Умножая обе части (4.13) на  $\boldsymbol{\sigma}$  слева и учитывая равенство  $\boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{1}$ , получаем искомое перестановочное соотношение

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{\sigma}\mathbf{A}. \quad (4.14)$$

Вот вторая формула: если  $\mathbf{A}$  удовлетворяет перестановочному соотношению (4.14), то

$$R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)\mathbf{A} = \mathbf{A}R^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi), \quad (4.15)$$

где  $R^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) \equiv R(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi)$  – оператор, обратный оператору  $R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)$ .

Формула (4.15) получается так. Во-первых, из выражений (4.1), (4.2), определяющих  $R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)$ , вытекает равенство

$$R(-\boldsymbol{\sigma}, \varphi) = R(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi) = R^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi). \quad (4.16)$$

Во-вторых, привлекая (4.1), (4.2) и используя (4.14), нетрудно убедиться, что

$$R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)\mathbf{A} = \mathbf{A}R(-\boldsymbol{\sigma}, \varphi). \quad (4.17)$$

Подстановка (4.16) в правую часть (4.17) даёт (4.15).

Теперь всё готово для доказательства того, что ненулевыми решениями уравнений (4.11), (4.12) являются нильпотенты индекса 2.

Обратимся, например, к уравнению (4.11) и возведём обе его части в квадрат:

$$[R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)\mathbf{A}] [R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)\mathbf{A}] = [\exp(-i\varphi)\mathbf{A}] [\exp(-i\varphi)\mathbf{A}]. \quad (4.18)$$

Используя (4.15), левую часть (4.18) можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} [R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)\mathbf{A}] [R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)\mathbf{A}] &= [\mathbf{A}R^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)] [R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)\mathbf{A}] = \\ &= \mathbf{A} [R^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)] \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}^2, \end{aligned}$$

Правая же часть (4.18) в силу перестановочности комплексных  $p$ -чисел с любыми элементами алгебры  $Cl_3$  переписывается в виде

$$[\exp(-i\varphi)\mathbf{A}] [\exp(-i\varphi)\mathbf{A}] = \exp(-2i\varphi)\mathbf{A}^2.$$

Тем самым (4.18) приводится к уравнению

$$\mathbf{A}^2 = \exp(-2i\varphi)\mathbf{A}^2.$$

Это уравнение должно выполняться при любом значении  $\varphi$ . Подставляя в него  $\varphi = \pi/2$ , получаем  $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{A}^2$ , то есть  $2\mathbf{A}^2 = 0$ ; отсюда

$$\mathbf{A}^2 = 0.$$

Последнее равенство показывает, что если существует ненулевой элемент  $\mathbf{A} \in Cl_3$ , удовлетворяющий уравнению (4.11), то он является нильпотентом индекса 2. Поэтому по теореме о структуре таких нильпотентов, доказанной в предыдущем разделе статьи,  $\mathbf{A}$  имеет вид

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{N} = \mathbf{U} + i\mathbf{V}, \quad \mathbf{U}^2 = \mathbf{V}^2, \quad \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0.$$

К этому же результату можно придти, отправляясь от уравнения (4.12) и повторяя вышеизложенные рассуждения.

Остаётся выяснить, каким условиям должны подчиняться нильпотенты  $\mathbf{N}$ , если они являются решениями уравнений (4.11), (4.12), а затем убедиться, что все нильпотенты, подчинённые искомым условиям, в действительности удовлетворяют указанным уравнениям.

Снова начнём с уравнения (4.11) (уравнение (4.12) исследуется аналогично). В этом месте удобно перейти от операторного представления левой части (4.11) к её явному экспоненциальному представлению. Привлекая (4.1), (4.2) и используя перестановочное соотношение (4.14), нетрудно убедиться, что действие оператора  $R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)$  на нильпотент  $\mathbf{N}$  можно описать выражением

$$R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)\mathbf{N} \equiv \exp\left(-i\boldsymbol{\sigma}\frac{\varphi}{2}\right)\mathbf{N}\exp\left(i\boldsymbol{\sigma}\frac{\varphi}{2}\right) = \mathbf{N}\exp(i\boldsymbol{\sigma}\varphi) = \exp(-i\boldsymbol{\sigma}\varphi)\mathbf{N}. \quad (4.19)$$

Действительно, в силу (4.2) и (4.14) справедливы равенства

$$\begin{aligned} \exp\left(-i\boldsymbol{\sigma}\frac{\varphi}{2}\right)\mathbf{N} &= \mathbf{N}\cos\frac{\varphi}{2} - i\boldsymbol{\sigma}\mathbf{N}\sin\frac{\varphi}{2} = \mathbf{N}\cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{N}i\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\varphi}{2} = \mathbf{N}\exp\left(i\boldsymbol{\sigma}\frac{\varphi}{2}\right), \\ \mathbf{N}\exp\left(i\boldsymbol{\sigma}\frac{\varphi}{2}\right) &= \mathbf{N}\cos\frac{\varphi}{2} + i\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{\varphi}{2}\mathbf{N} - i\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\varphi}{2}\mathbf{N} = \exp\left(-i\boldsymbol{\sigma}\frac{\varphi}{2}\right)\mathbf{N}, \end{aligned}$$

из которых уже следует (4.19).

Используя (4.19), перепишем (4.11) в виде равносильного (на нильпотентах) уравнения

$$\exp(-i\boldsymbol{\sigma}\varphi)\mathbf{N} = \exp(-i\varphi)\mathbf{N}$$

и приведём его заменой  $\varphi \rightarrow -\varphi$  к уравнению<sup>8</sup>

$$\exp(i\boldsymbol{\sigma}\varphi)\mathbf{N} = \exp(i\varphi)\mathbf{N}. \quad (4.20)$$

Наша задача состоит в отыскании нильпотента  $\mathbf{N}$  индекса 2, удовлетворяющего (4.20) при всех значениях  $\varphi$ . Но если такой нильпотент существует, то он должен удовлетворять (4.20) также и при  $\varphi = \pi/2$ . В этом случае экспоненциальные множители в левой и правой частях (4.20) имеют значения  $\exp(i\boldsymbol{\sigma}\pi/2) = i\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\exp(i\pi/2) = i$ , и (4.20) редуцируется к уравнению

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{N} = \mathbf{N}. \quad (4.21)$$

Пусть теперь  $\boldsymbol{l}^0$  – направляющий вектор нильпотента  $\mathbf{N}$ ; применяя к (4.21) лемму о направляющем векторе нильпотента, доказанную в п. 3.4, находим  $\boldsymbol{l}^0 = \boldsymbol{\sigma}$ .

Итак, получен следующий результат: если нильпотент  $\mathbf{N}$  индекса 2 является решением уравнения (4.20) (а, следовательно, и исходного уравнения (4.11)), то его направляющий вектор  $\boldsymbol{l}^0$  совпадает с вектором  $\boldsymbol{\sigma}$ , определяющим ось вращения в операторе  $R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)$ .

Убедимся в обратном: если направляющий вектор  $\boldsymbol{l}^0$  нильпотента  $\mathbf{N}$  индекса 2 удовлетворяет условию  $\boldsymbol{l}^0 = \boldsymbol{\sigma}$ , то такой нильпотент тождественно удовлетворяет уравнению (4.11), т. е. является его решением.

Для проверки этого подставим  $\mathbf{N}$  в левую часть (4.11) и напишем

$$R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)\mathbf{N} \equiv \exp\left(-i\boldsymbol{\sigma}\frac{\varphi}{2}\right)\mathbf{N}\exp\left(i\boldsymbol{\sigma}\frac{\varphi}{2}\right). \quad (4.22)$$

<sup>8</sup> Соотношение (4.20) выявляет ещё одно замечательное свойство нильпотентов индекса 2: действие группы  $U_1$  фазовых преобразований на эти объекты, описываемое правой частью 4.20, эквивалентно не только действию группы вращений, но и действию группы  $SU_2$  ( $p$ -кватернион в левой части (4.20) является элементом  $SU_2$ ). Связанные с этими фактами вопросы выходят за рамки настоящей статьи и здесь не обсуждаются.

Покажем, что (4.22) при  $l^0 = \sigma$  приводится к выражению, стоящему в правой части (4.11). Для этого воспользуемся следующими равенствами (они ниже будут прокомментированы):

$$N \exp\left(i\sigma \frac{\varphi}{2}\right) = \exp\left(-i\sigma \frac{\varphi}{2}\right) N; \quad (4.23)$$

$$N = \frac{1}{2}(1 + \sigma) N; \quad (4.24)$$

$$\exp\left(-i\sigma \frac{\varphi}{2}\right) (1 + \sigma) = \exp\left(-i\frac{\varphi}{2}\right) (1 + \sigma). \quad (4.25)$$

Равенство (4.23) получается так. Тот факт, что векторы  $U$  и  $V$  в представлении  $N = U + iV$  нильпотента  $N$  ортогональны его направляющему вектору  $l^0 = \sigma$ , влечёт равенства

$$\sigma N = \sigma U + i\sigma V = -U\sigma - iV\sigma = -N\sigma. \quad (4.26)$$

Учитывая (4.26) и обращаясь к тригонометрическому представлению (4.2), получаем (4.23):

$$N \exp\left(i\sigma \frac{\varphi}{2}\right) = N \cos \frac{\varphi}{2} + iN\sigma \sin \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\varphi}{2} N - i\sigma \sin \frac{\varphi}{2} N = \exp\left(-i\sigma \frac{\varphi}{2}\right) N.$$

Равенство (4.24) есть равенство (3.18), переписанное для нильпотента  $N$  с направляющим вектором  $l^0 = \sigma$ .

Равенство (4.25) следует из тригонометрического представления (4.2) и того факта, что единичный вектор  $\sigma$  ( $\sigma^2 = 1$ ) удовлетворяет очевидному равенству  $\sigma(1 + \sigma) = (1 + \sigma)$ ; действительно,

$$\begin{aligned} \exp\left(-i\sigma \frac{\varphi}{2}\right) (1 + \sigma) &= \cos \frac{\varphi}{2} (1 + \sigma) - i\sigma (1 + \sigma) \sin \frac{\varphi}{2} = \\ &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2}\right) (1 + \sigma) = \exp\left(-i\frac{\varphi}{2}\right) (1 + \sigma). \end{aligned}$$

Используя равенства (4.23) – (4.25), выражение (4.22) можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} R(\sigma, \varphi)N &\equiv \exp\left(-i\sigma \frac{\varphi}{2}\right) N \exp\left(i\sigma \frac{\varphi}{2}\right) = \\ &= \exp(-i\sigma\varphi) N = \\ &= \frac{1}{2} \exp(-i\sigma\varphi) (1 + \sigma) N = \\ &= \exp(-i\varphi) \frac{1}{2} (1 + \sigma) N = \\ &= \exp(-i\varphi) N. \end{aligned}$$

В правой части написанной цепочки равенств стоит то же выражение, что и в правой части уравнения (4.11); следовательно, *любой нильпотент индекса 2, направляющий вектор  $l^0$  которого совпадает с вектором  $\sigma$  оси вращения, является решением уравнения (4.11).*

Остаётся рассмотреть случай уравнения (4.12). Последний можно привести к только что рассмотренному случаю. С этой целью выполним в (4.12) замену  $\varphi \rightarrow -\varphi$  и напишем

$$R(\sigma, -\varphi)N = \exp(-i\varphi)N. \quad (4.27)$$

Теперь напомним, что  $R(\sigma, -\varphi) = R(-\sigma, \varphi)$  (см. равенство (4.16)). Поэтому, введя обозначение  $\sigma' = -\sigma$ , можно переписать (4.27) в виде

$$R(\sigma', \varphi)N = \exp(-i\varphi)N. \quad (4.28)$$

Уравнение (4.28), равносильное уравнению (4.12), с точностью до обозначений совпадает с уже исследованным уравнением (4.11). Отсюда следует, что решениями уравнения (4.12) являются все нильпотенты индекса 2 с направляющими векторами  $\mathbf{l}^0 = \boldsymbol{\sigma}' = -\boldsymbol{\sigma}$ , направленными против вектора  $\boldsymbol{\sigma}$  оси вращения.

Поставленная задача полностью решена.

**4.3. Эквивалентность действия на нильпотенты индекса 2 фазовых преобразований и вращений.** Результатом исследования, изложенного в предыдущем пункте, является следующее

*Утверждение.* Множество элементов пространственной алгебры, которые под действием оператора вращения  $R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)$  умножаются на элементы её центра – комплексные  $p$ -числа, содержит следующие элементы (и только их):

1. элементы  $a\mathbf{1} + b\boldsymbol{\sigma}$  ( $a \in \mathbb{C}$ ,  $b \in \mathbb{C}$ ) (они инвариантны относительно действия оператора  $R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)$ );
2. нильпотенты индекса 2 с направляющими векторами  $\mathbf{l}^0 = \boldsymbol{\sigma}$  (под действием оператора вращения такие нильпотенты умножаются на  $\exp(-i\varphi)$ );
3. нильпотенты индекса 2 с направляющими векторами  $\mathbf{l}^0 = -\boldsymbol{\sigma}$  (под действием оператора вращения такие нильпотенты умножаются на  $\exp(i\varphi)$ ).

Из пунктов (ii) и (iii) этого утверждения извлекается такое

*Следствие.* Действие на нильпотенты индекса 2 группы  $U_1$  фазовых преобразований эквивалентно действию на них группы  $SO_3$  в том смысле, что

$$\exp(-i\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=\boldsymbol{\sigma}} = R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=\boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.29)$$

$$\exp(i\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}} = R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.30)$$

где  $\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=\boldsymbol{\sigma}}$  и  $\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}}$  – нильпотенты индекса 2 с направляющими векторами  $\mathbf{l}^0 = \boldsymbol{\sigma}$  и  $\mathbf{l}^0 = -\boldsymbol{\sigma}$  соответственно,  $R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)$  – оператор вращения:

$$R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)(\cdot) = \exp(-i\boldsymbol{\sigma}\varphi/2)(\cdot)\exp(i\boldsymbol{\sigma}\varphi/2).$$

Указанное свойство нильпотентов индекса 2 является характеристическим: такие нильпотенты – единственные элементы алгебры  $Cl_3$ , для которых действия групп  $U_1$  и  $SO_3$  эквивалентны в вышеуказанном смысле.

Равенства (4.29), (4.30) могут быть переписаны в другой форме, которая показывает, как действует каждое из фазовых преобразований  $\exp(-i\varphi)$ ,  $\exp(i\varphi)$  на оба нильпотента  $\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=\boldsymbol{\sigma}}$ ,  $\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}}$  вместе. С этой целью заменим  $\varphi \rightarrow -\varphi$  сначала в (4.30), а затем в (4.29) и напишем

$$\exp(-i\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}} = R(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.31)$$

$$\exp(i\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=\boldsymbol{\sigma}} = R(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=\boldsymbol{\sigma}}. \quad (4.32)$$

Теперь объединение (4.29) с (4.31) и (4.30) с (4.32) даёт следующие равенства:

$$\exp(-i\varphi) \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=\boldsymbol{\sigma}} \\ R(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}} \end{Bmatrix}, \quad (4.33)$$

$$\exp(i\varphi) \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=\boldsymbol{\sigma}} \\ R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}} \end{Bmatrix}. \quad (4.34)$$

Равенства (4.33), (4.34) можно представить в иной, более обозримой форме. Обратим внимание на тот факт, что выражения  $R(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=\boldsymbol{\sigma}}$  и  $R(\boldsymbol{\sigma}, -\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=\boldsymbol{\sigma}}$  в верхних строках

правых частей (4.33), (4.34) содержат один и тот же вектор  $\sigma$ , который участвует как в аргументе оператора  $R$ , так и в индексе нильпотента  $\mathbf{N}$ . Поэтому в этих выражениях можно убрать явное указание на вектор  $\sigma$  и выполнить такую замену обозначений:

$$R(\sigma, \varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=\sigma} \rightarrow R(\mathbf{l}^0, \varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0}, \quad (4.35)$$

$$R(\sigma, -\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\sigma} \rightarrow R(\mathbf{l}^0, -\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0}. \quad (4.36)$$

Если теперь воспользоваться равенствами

$$R(\sigma, -\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\sigma} = R(-\sigma, \varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\sigma},$$

$$R(\sigma, \varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\sigma} = R(-\sigma, -\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\sigma},$$

вытекающими из определений (4.1), (4.2) оператора вращения, то аналогичную замену обозначений можно выполнить и в нижних строках правых частей (4.33), (4.34):

$$R(\sigma, -\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\sigma} = R(-\sigma, \varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\sigma} \rightarrow R(\mathbf{l}^0, \varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0}, \quad (4.37)$$

$$R(\sigma, \varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\sigma} = R(-\sigma, -\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0=-\sigma} \rightarrow R(\mathbf{l}^0, -\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0}. \quad (4.38)$$

После указанных замен верхняя и нижняя строки правой части равенства (4.33) будут содержать одно и то же выражение  $R(\mathbf{l}^0, \varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0}$ , пришедшее туда из (4.35), (4.37). Что же касается правой части равенства (4.34), то в её верхней и нижней строках будет содержаться выражение  $R(\mathbf{l}^0, -\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0}$ , унаследованное от (4.36), (4.38). Поэтому равенства (4.33), (4.34) можно переписать в следующем компактном виде:

$$\exp(-i\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0} = R(\mathbf{l}^0, \varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0}. \quad (4.39)$$

$$\exp(i\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0} = R(\mathbf{l}^0, -\varphi)\mathbf{N}_{\mathbf{l}^0}. \quad (4.40)$$

Эти два равенства согласованы друг с другом: замена  $\varphi \rightarrow -\varphi$  переводит одно из них в другое. Из (4.39), (4.40) вытекает следующая

**Теорема об эквивалентности действия групп фазовых преобразований и вращений на нильпотенты индекса 2 пространственной алгебры.** *Комплексная  $p$ -экспонента  $\exp(\pm i\varphi)$ , действуя умножением на любой нильпотент индекса 2 алгебры  $Cl_3$ , индуцирует поворот этого нильпотента вокруг его направляющего вектора  $\mathbf{l}^0$  на угол  $\mp\varphi$ . Обратно, в алгебре  $Cl_3$  поворот любого нильпотента индекса 2 вокруг его направляющего вектора  $\mathbf{l}^0$  на угол  $\pm\varphi$  всегда может быть индуцирован умножением этого нильпотента на комплексную  $p$ -экспоненту  $\exp(\mp i\varphi)$ . Кроме нильпотентов индекса 2, в алгебре  $Cl_3$  не существует других элементов, характеризующихся описанным свойством.*

Устанавливая связь между фазовыми преобразованиями и вращениями в алгебре  $Cl_3$ , полученный результат имеет следующий содержательный смысл, имеющий непосредственное отношение к физике.

Рассмотрим любую из  $p$ -экспонент, участвующих в формулировке теоремы, – например,  $\exp(-i\varphi)$ . Пусть  $\varphi = \omega t$ , где  $\omega$  – циклическая частота,  $t$  – время. Вообразим, что каждой точке физического пространства (в малом оно является трёхмерным, евклидовым и входит в носитель порождённой этим пространством алгебры  $Cl_3$  как прямое слагаемое) соотнесён некоторый нильпотент индекса 2, т. е. задано пространственное поле нильпотентов  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ .

Тогда под действием фазового преобразования  $\exp(-i\omega t)\mathbf{N}(\mathbf{x})$ , индуцированного  $p$ -экспонентой  $\exp(-i\omega t)$ , все нильпотенты поля будут вращаться с постоянной угловой

скоростью  $\omega$  вокруг своих направляющих векторов. Если следить за вращением нильпотентов от концов этих векторов, то при  $\omega > 0$  каждый из них вращается "против хода часовой стрелки" в сторону положительного направления отсчёта углов  $\varphi$ ; при  $\omega < 0$  картина обратная: каждый нильпотент вращается "по ходу часовой стрелки" в сторону отрицательного направления отсчёта углов  $\varphi$ .

Пусть направляющие векторы нильпотентов в различных пространственных точках  $\mathbf{x}$  направлены случайно; тогда пространство будет заполнено "мешаниной" вращающихся нильпотентов. Если же направления направляющих векторов при переходе от точки к точке как-то согласовать друг с другом, то картина вращений, вообще говоря, станет более упорядоченной; в этой картине могут появиться даже волны, если в некоторый момент времени  $t$  подходящим образом задать значения углов поворота ("фазы") нильпотентов в различных точках  $\mathbf{x}$ .

Именно это имеет место при распространении свободных электромагнитных волн. Следующий раздел посвящён применению полученных результатов к анализу этого случая.

## 5 ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ: НИЛЬПОТЕНТЫ, ФОТОНЫ И РАЗМЕРНОСТЬ ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Здесь результаты двух предыдущих разделов применяются к анализу динамики свободно распространяющихся плоских монохроматических электромагнитных волн – поляризованных фотонов, описываемых решениями уравнений Максвелла без источников. Перевод этих уравнений и их решений на язык клиффордовой алгебры был выполнен Марселем Риссом [1, 2], а затем усовершенствован Хестенесом [3, 23] (см. также [6]). В конце раздела будут сделаны несколько замечаний относительно структуры реального физического пространства и сформулирована одна неформальная гипотеза, вытекающая из предпринятого анализа. В завершение будут указаны возможные направления дальнейшего поиска.

**5.1. Решения уравнений Максвелла на языке алгебры  $Cl_3$ .** Отправляясь от анализа Рисса, Хестенес продемонстрировал [3], что с точки зрения алгебры  $Cl_3$  электромагнитное поле  $\mathbf{F}$  представляет собой комбинацию  $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}$ , где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  – электрический и магнитный векторы (таким образом, магнитное поле описывается бивектором  $i\mathbf{B}$ ), и показал, что в рамках формализма  $Cl_3$  решения уравнений Максвелла без источников, описывающие плоские гармонические электромагнитные волны, имеют вид [23]

$$\mathbf{F}_{\pm}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f} \exp[\pm i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})], \quad |\mathbf{k}| = \omega/c; \quad (5.1)$$

здесь знаки "плюс" и "минус" соответствуют волнам с правой и левой круговыми поляризациями,  $\mathbf{x}$  – радиус-вектор точек пространства,  $t$  – время,  $c$  – скорость света,  $\mathbf{k}$  – волновой вектор,  $\omega > 0$  – круговая частота волны, а выражение

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}_{\pm}(0, 0) = \mathbf{E}_0 + i\mathbf{B}_0 \quad (5.2)$$

определяет электромагнитное поле в точке  $\mathbf{x} = 0$  в момент времени  $t = 0$ .

Рисс и Хестенес выявили следующие свойства решений (5.1) [1, 2, 23, 6]:

1. векторы  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{B}_0$  имеют равные модули и ортогональны друг другу:  $\mathbf{E}_0^2 = \mathbf{B}_0^2$ ,  $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_0 = 0$ ;
2. волновой вектор  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости магнитного бивектора  $i\mathbf{B}_0$ , ортогонален лежащему в этой же плоскости электрическому вектору  $\mathbf{E}_0$  и направлен так, что  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{k}$  являются положительно ориентированной тройкой векторов;
3. написанный в (5.2) объект  $\mathbf{f}$  удовлетворяет равенству  $\mathbf{f}^2 \equiv (\mathbf{E}_0 + i\mathbf{B}_0)^2 = 0$ .

Выбрав в (5.1) знак "плюс" и применив специальный приём, Хестенес нашёл [23], что в любой точке плоскости  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = 0$ , перпендикулярной волновому вектору  $\mathbf{k}$ , электрическое поле, заданное решением (5.1), меняется по закону  $\mathbf{E}_+(t) = \mathbf{E}_0 \cos \omega t - \mathbf{B}_0 \sin \omega t$ ; такое решение описывает циркулярно поляризованную волну с правой поляризацией, поскольку наблюдатель, повернувшись лицом к набегающей волне, видит вращение вектора  $\mathbf{E}$  по часовой стрелке. Решение же, описывающее волну с левой поляризацией, получается выбором в (5.1) знака "минус". Хестенес подчеркнул [23], что описанный результат, относящийся к волнам (5.1) в пустоте, невозможно получить вне формализма геометрической алгебры. Кроме того, в своей более ранней работе [3] он отметил, что указанным волнам с правой и левой поляризациями соответствуют фотоны с двумя типами спиральности.

Дополнительный шаг был сделан Вильямом Бейлисом (William Baylis) [30, 31], который обратил внимание на тот факт, что пространственный поворот объекта  $\mathbf{f} = \mathbf{E}_0 + i\mathbf{B}_0$  вокруг волнового вектора  $\mathbf{k}$  эквивалентен его фазовому преобразованию – "дуальному вращению", заданному  $p$ -экспонентой в (5.1). (Ссылаясь на Пенроуза, Бейлис именует объект  $\mathbf{f} = \mathbf{E}_0 + i\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{f}^2 = 0$  термином "нуль-флаг" [31]). Хотя в работах [30, 31] отсутствуют общие теоремы, изложенные в разделах 2 – 4, геометрическая интерпретация распространения электромагнитной волны, диктуемая формализмом пространственной алгебры, их автору вполне ясна. Судя по представленным в [30, 31] выкладкам и комментариям к ним, для их автора, по-видимому, важна возможность интерпретировать пространственное вращение "нуль-флага" как фазовое преобразование. С точки зрения же автора настоящей работы акценты должны быть расставлены противоположным образом.

В следующем пункте на основе результатов, полученных в предыдущих разделах, будет описана геометрическая интерпретация решения (5.1), описывающего свободно распространяющуюся электромагнитную волну<sup>9</sup>. Вначале, однако, сделаем пару замечаний.

Во-первых, факт выполнения обнаруженного Риссом и Хестенесом равенства  $\mathbf{f}^2 \equiv (\mathbf{E}_0 + i\mathbf{B}_0)^2 = 0$  не удивителен: из свойств векторов  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{B}_0$ , указанных в пункте (i) и результатов, изложенных в разделе 3, следует, что объект  $\mathbf{f} \equiv (\mathbf{E}_0 + i\mathbf{B}_0)$  является нильпотентом индекса 2 алгебры  $Cl_3$ , и поэтому написанное равенство выполняется автоматически.

Во-вторых, как следует из пункта (2.), направляющий вектор  $\mathbf{l}^0 = (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0) / |\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0|$  нильпотента  $\mathbf{f} \equiv (\mathbf{E}_0 + i\mathbf{B}_0)$  сонаправлен с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , определяющим направление распространения волны:  $\mathbf{l}^0 = \mathbf{k} / |\mathbf{k}|$ .

Оба этих факта сразу же позволяют высветить геометрическую картину распространения электромагнитной волны и зримо представить динамику происходящих процессов.

**5.2. Распространение электромагнитной волны как вращение элементов пространственного поля нильпотентов.** Рассмотрим структуру электромагнитной волны более детально; для этого представим выражение (5.1) в виде

$$\mathbf{F}_\pm(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \exp(\pm i\omega t), \quad (5.3)$$

где

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{f} \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] \equiv (\mathbf{E}_0 + i\mathbf{B}_0) \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})]. \quad (5.4)$$

Здесь  $\mathbf{f} \equiv \mathbf{E}_0 + i\mathbf{B}_0$  является нильпотентом с направляющим вектором  $\mathbf{l}^0 = \mathbf{k} / |\mathbf{k}|$ , на который действует комплексная  $p$ -экспонента в (5.4). Поэтому  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  также является нильпотентом, имеющим тот же направляющий вектор; в каждой точке  $\mathbf{x}$  нильпотент  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  повернут относительно  $\mathbf{f}$  вокруг своего направляющего вектора  $\mathbf{l}^0 = \mathbf{k} / |\mathbf{k}|$  на угол  $\varphi = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ . Из (5.3) следует, что

$$\mathbf{F}_\pm(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{N}(\mathbf{x});$$

<sup>9</sup> К этой интерпретации автор пришёл независимо от работ [30, 31], с которыми познакомился уже после того, как предварительный вариант настоящей статьи был написан.

таким образом, при  $t = 0$  в пространстве существует поле нильпотентов, которые повернуты ("расфазированы") друг относительно друга по гармоническому закону (5.4) вдоль прямых, параллельных волновому вектору  $\mathbf{k}$ . Эти нильпотенты можно назвать электромагнитными.

Электромагнитная волна (5.1) эволюционирует во времени; с помощью (5.3) динамика этой эволюции прочитывается так.

На поле электромагнитных нильпотентов  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  действует комплексная  $p$ -экспонента,  $\exp(\pm i\omega t)$ , понуждающая электрический вектор и магнитный бивектор в каждой точке пространства периодически преобразовываться друг в друга:  $\mathbf{E} \rightarrow i\mathbf{B}$ ,  $i\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{E}$ . В силу результатов предыдущего раздела эти фазовые преобразования проявляются как вращения нильпотентов  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  вокруг их направляющих векторов, сонаправленных с волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Вращения устроены следующим образом. Если в (5.3) выбрать знак "плюс", то на нильпотенты действует экспонента  $\exp(i\omega t)$ , индуцирующая их вращение вокруг направляющих векторов в отрицательном направлении (т.е. "по ходу часовой стрелки", если наблюдать от конца вектора  $\mathbf{k}$ ). Этот случай соответствует циркулярно поляризованной волне с правой поляризацией. Если же в (5.3) выбрать знак "минус", действующая на нильпотенты экспонента  $\exp(-i\omega t)$  будет вращать их в положительном направлении ("против хода часовой стрелки"), что соответствует циркулярно поляризованной волне с левой поляризацией. Эти два направления вращения нильпотентов определяют два значения спиральности фотонов.

Таким образом, *бегущая плоская гармоническая электромагнитная волна есть вращение элементов пространственного поля электромагнитных нильпотентов, расфазированных по гармоническому закону вдоль направления волнового вектора.*

**5.3. Как устроено физическое пространство?** Описанная в предыдущем пункте геометрическая картина представляется весьма изящной. Однако она скрывает под собой нечто другое – и более существенное.

Дело в том, что нильпотенты индекса 2 пространственной алгебры – шестимерные объекты: они являются векторами специального вида в шестимерном линейном пространстве, являющемся прямой суммой трёхмерных линейных пространств векторов и бивекторов. Здесь же протекает и эволюция этих специальных векторов под действием фазовых преобразований – последние никогда не приводят к вырождению нильпотентов ни в трёхмерные векторы, ни в трёхмерные бивекторы (своеобразный геометрический "entanglement" между объектами двух различных трёхмерных пространств).

Поэтому осмысленно полагать, что физические объекты – фотоны "живут" именно в указанном шестимерном пространстве, и именно оно имеет – по крайней мере, в рассматриваемом контексте – онтологический статус физического пространства, тогда как вращение описывающих фотон электромагнитных нильпотентов в трёхмерном пространстве наблюдателя просто-напросто являет собой "метафору" периодических переходов "вектор  $\mathbf{E} \leftrightarrow$  бивектор  $i\mathbf{B}$ ".

*Неформальная рабочая гипотеза. Реальное физическое пространство не трёхмерно, а является, по меньшей мере, шестимерным пространством, натянутым на базис из трёх линейно независимых векторов и трёх линейно независимых бивекторов, порождённых этими векторами.*

Отметим, что гипотеза о шестимерности физического пространства уже неоднократно выдвигалась (см., например, [32, 33] и представленные там ссылки); вопрос всегда заключался в том, где искать три дополнительных измерения и как их интерпретировать. В соответствии с высказанной нами гипотезой эти дополнительные измерения скрыты не за "занавесом" Реальности, а находятся здесь же: они реализованы тремя линейно независимыми бивекторами  $\sigma_{23} = \sigma_2\sigma_3$ ,  $\sigma_{31} = \sigma_3\sigma_1$ ,  $\sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2$ , порождёнными ортами

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  нашего трёхмерного пространства (при этом базис шестимерного пространства автоматически удовлетворяет условиям  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathbf{1}$ ,  $\sigma_{23}^2 = \sigma_{31}^2 = \sigma_{12}^2 = -\mathbf{1}$ , которые являются аналогами условий, постулируемых в [32] и других публикациях). Если принять эту гипотезу, то сразу же возникает вопрос о возможности существования и типе физической симметрии между нашим векторным и "их" бивекторным пространствами. Таким образом, формализм  $Cl_3$  с неизбежностью подводит к некоторым физическим вопросам фундаментального характера.

**5.4. Дальнейшее.** В настоящее время в задачах механики твёрдого тела с неподвижной точкой широко применяются кватернионные и бикватернионные методы [34–36]. Используя геометрическую интерпретацию нильпотентов индекса 2 и их алгебраические свойства, выявленные в настоящей работе, можно попытаться привлечь эти объекты к указанным задачам, полностью заменив ими кватернионы. Это даст возможность работать только с фазовыми преобразованиями и, возможно, прольёт свет на некоторые известные, но, по-видимому, до сих пор содержательно не понятые (по крайней мере, автором настоящей статьи) примеры успешного решения некоторых из таких задач методами теории спиноров (один такой пример описан в гл. 1 монографии [37]).

Один из шагов в этом направлении состоит в построении представления алгебры  $Cl_3$ , так сказать, "в нильпотентах". Автор надеется вернуться к этим вопросам.

## ВЫВОДЫ

**1.** Найден общий вид идемпотентов пространственной алгебры – клиффордовой алгебры  $Cl_3$ , порождённой линейным трёхмерным евклидовым пространством  $E_3$  над полем действительных чисел. Показано, что каждый идемпотент  $E \in Cl_3$  представляется выражением  $E = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{U} + i\mathbf{V})$ , где  $i$  ( $i^2 = -1$ ) – базисный тривектор алгебры,  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  – векторы, удовлетворяющие условиям  $\mathbf{U}^2 - \mathbf{V}^2 = \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0$ . Введены понятия простого (simple) и составного (composite) идемпотентов: при  $\mathbf{V} = 0$  ( $\mathbf{V} \neq 0$ ) идемпотент называется простым (составным). Простыми идемпотентами являются идемпотентные паравекторы – элементы вида  $E = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{U})$ ,  $\mathbf{U}^2 = \mathbf{1}$ , все они и только они. Построено разложение составного идемпотента в сумму идемпотентного паравектора и нильпотента индекса 2. На основе этого разложения установлено, что левые и правые идеалы, порождаемые в алгебре  $Cl_3$  составными идемпотентами, не являются минимальными.

**2.** Найден общий вид нильпотентов  $N$  индекса 2 алгебры  $Cl_3$ . Показано, что все такие нильпотенты описываются выражением  $N = \mathbf{U} + i\mathbf{V}$ , где  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  – векторы, подчинённые условиям  $\mathbf{U}^2 = \mathbf{V}^2$ ,  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0$ , а в остальном произвольные. Введено понятие направляющего вектора нильпотента – единичного вектора  $l^0$ , определённого выражением  $l^0 = (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) / |\mathbf{U} \times \mathbf{V}|$ .

**3.** Показано, что нильпотенты индекса 2 алгебры  $Cl_3$ , и только они, обладают следующим свойством: действие на них фазовых преобразований, реализуемых умножениями нильпотентов на комплексные экспоненты  $\exp(\pm i\varphi) \in Cl_3$  (действие группы  $U_1$ ), приводит к пространственным поворотам нильпотентов вокруг их направляющих векторов на углы  $\mp\varphi$  (действие группы  $SO_3$ ). Наоборот, пространственные повороты нильпотентов всегда могут быть реализованы посредством фазовых преобразований этих элементов.

**4.** Эквивалентность действия групп  $U_1$  и  $SO_3$  на нильпотенты индекса 2 привлечена к анализу геометрии вакуумных решений уравнений Максвелла без источников, описывающих плоские гармонические электромагнитные волны – фотоны с двумя типами спиральности. На основе предпринятого анализа сформулирована неформальная гипотеза о том, что реальное физическое пространство является, по меньшей мере, шестимерным пространством, натянутым на базис из трёх линейно независимых пространственных векторов и трёх линейно независимых бивекторов, порождённых этими векторами.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Riesz M. Clifford Numbers and Spinors. – Lecture series No. 38, The Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland, 1958.
- [2] Riesz M. Clifford Numbers and Spinors: With Riesz's Private Lectures to E. Folke Bolinder and a Historical Review by Pertti Lounesto. – Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher, 1993.
- [3] Hestenes D. Space Time Algebra. – New York: Gordon & Breach, 1966.
- [4] Hestenes D., Sobczyk G. Clifford Algebra to Geometric Calculus, a Unified Language for Mathematics and Physics. – Dordrecht/Boston: Kluwer Academic Publisher, 1986.
- [5] Hestenes D. New Foundations for Classical Mechanics. – Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1986, 1987.
- [6] Hestenes D. Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. - <http://geocalc.clas.asu.edu/pdf/OerstedMedalLecture.pdf>
- [7] Casanova G. L'Algèbre Victorielle – Presses Universitaires de France, 1976 (Перевод на русский: Казанова Г. Векторная алгебра. – М.: Мир, 1979. Переиздано: Казанова Г. От алгебры Клиффорда до атома водорода. – Волгоград: Платон, 1997).
- [8] Lasenby A., Doran C. Geometric Algebra for Physicists. – Cambridge: Cambridge U. Press, 2002
- [9] Baylis W.E. Clifford (Geometric) Algebras with Applications in Physics, Mathematics, and Engineering. – Birkhauser Verlag AG, 1999.
- [10] Corrochano B. E., Sobczyk G. Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering – Boston: Birkhauser, 2001.
- [11] L. Dorst, C. Doran & J. Lasenby (Eds.), Applications of Geometrical Algebra in Computer Science and Engineering. – Boston: Birkhauser, 2002.
- [12] Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. – М.: Наука, 1976.
- [13] Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия – М.: Наука, 1986.
- [14] Шафаревич И. Р. Алгебра – 1. (Итоги науки и техники. Серия "Современные проблемы математики / Фундаментальные направления"). М.: ВИНТИ, 1986.
- [15] Шафаревич И. Р. Основные понятия алгебры. – Москва – Ижевск: РХД, 2001.
- [16] Калужнин Л. А. Введение в общую алгебру – М.: Наука, 1973.
- [17] Скорняков Л. А. Элементы алгебры. – М.: Наука, 1980.
- [18] Скорняков Л. А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.
- [19] Тарханов В. И. Геометрическая алгебра, ЯМР и обработка информации. СПб: Изд-во СПбГПУ, 2002.
- [20] Эбанга А., Тарханов В. И. Паравекторная логика операций на состояниях геометрического байта. – Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (НТВ СПбГПУ), 2008, № 3 (59), с. 278-283.
- [21] Ebanga A., Tarkhanov V.I. Information in eight dimensions: structuring and processing. – Proc. SPIE, 2008, Vol. 7006, 70060P; DOI:10.1117/12.802298. DOI Link: <http://dx.doi.org/10.1117/12.802298>.
- [22] Tarkhanov V.I., Nesterov M.M. Geometric information in eight dimensions vs. quantum information. – Proc. SPIE, 2008, Vol. 7023, 70230J; DOI:10.1117/12.801913. DOI Link: <http://dx.doi.org/10.1117/12.801913>.
- [23] Hestenes D. Vectors, Spinors and Complex Numbers in Classical and Quantum Physics. – Am. J. Phys. 1971, Vol. 39/9, P. 1013–1028.
- [24] Rowlands P., Cullerne J.P. QED using the Nilpotent Formalism. – arXiv:quant-ph/0109069v1. <http://arxiv1.library.cornell.edu/abs/quant-ph/0109069v1>
- [25] 2003-01-15. Rowlands P. The nilpotent Dirac equation and its applications in particle physics. – arXiv:quant-ph/0301071v1. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0301071v1>

- [26] Rowlands P. Removing redundancy in relativistic quantum mechanics – arXiv:physics/0507188v1. <http://arxiv.org/abs/physics/0507188v1>
- [27] Rowlands P. A Mathematical Description of The Fermionic State. – Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2007, том 4, 1 (7), с.
- [28] Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 1973.
- [29] Арнольд В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. – М.: МЦНМО, 2002.
- [30] Baylis W.E. Applications of Clifford Algebras in Physics. – <http://cronus.uwindsor.ca/users/b/baylis/main.nsf/.../cainphys.pdf>
- [31] Baylis W.E. Geometry of Paravector Space, with Applications to Relativistic Physics. – <http://cronus.uwindsor.ca/users/b/baylis/main.nsf/.../baylis1.pdf>
- [32] Попов Н. Н. Новые представления о структуре пространства–времени и проблема геометризации материи. – М.: УРСС, 2002.
- [33] Ефремов А. П. Кватернионные пространства, системы отсчёта и поля. – М.: Издательство Российского университета дружбы народов, 2005.
- [34] Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твёрдого тела. – М.: Наука, 1973.
- [35] Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М.: Наука, 1992.
- [36] Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твёрдого тела и их приложения. – М.: Физматлит, 2003.
- [37] Бакай А. С., Степановский Ю. П. Адиабатические инварианты. – Киев: "Наукова Думка", 1981.

## Idempotents and Nilpotents in the Clifford Algebra of Euclidean 3-Space and Their Interconnections in Physics

O. Mornev

*Institute of Theoretical and Experimental Biophysics of RAS, Pushchino, Russia*  
*mornev@mail.ru*

Within the framework of Space Algebra, the Clifford algebra  $Cl_3$  generated by the three-dimensional Euclidean space  $E_3$  over  $\mathbb{R}$ , a structure of idempotents and nilpotents of index 2 is investigated. The general view of these elements is derived *ab initio*, and their algebraic and geometric properties are revealed. The equivalence of action of the groups of phase transformations ( $U_1$ ) and rotations ( $SO_3$ ) on the nilpotents of index 2 is discovered: the phase transformations of the nilpotent, which are realized by its multiplications on the complex exponents, lead to spatial rotations of the nilpotent in  $E_3$ , and vice versa. It is proved that the nilpotents of index 2 are the unique elements of  $Cl_3$ , for which the equivalence of action of the groups  $U_1$  and  $SO_3$  takes place; thus, this property of nilpotents is a characteristic one. The results obtained are applied to analyzing geometry of vacuum solutions to the Maxwell equations without sources, which describe plane harmonic electromagnetic waves, the photons, with two types of helicity. On the basis of the analysis performed, the non-formal hypothesis is formulated that the real physical space is at least a six-dimensional one: in the minimal case its basis consists of six linearly independent elements, three vectors and three bivectors generated by these base vectors.

**Key words:** Clifford algebra, geometric algebra, space algebra, idempotents, nilpotents, group  $U_1$  of phase transformations, group  $SO_3$  of rotations, complex numbers, quaternions, electromagnetic waves, photons, dimensionality of space.

## ОКТОНИОНЫ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Г. А. Кузнецов

*Челябинский государственный университет*

*gunn@mail.ru, quznets@yahoo.com*

Выражение вероятностей точечных событий октонионами дает уравнения движения, подобные уравнению Дирака.

**Ключевые слова:** уравнение Дирака, октонионы, точечные события, плотность вероятности.

Обозначим:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &:= (x_1, x_2, x_3), \\ \underline{x} &:= \langle x_0, \mathbf{x} \rangle, \\ \int d^{3+1}\underline{x} &:= \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3, \\ \int d^3\mathbf{y} &:= \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \int_{-\infty}^{\infty} dy_3. \end{aligned}$$

Если  $A(x_0, \mathbf{x})$  – точечное событие, происходящее в точке  $(x_0, \mathbf{x})$ , и  $D$  – область пространства этих точек, то  $A(D)$  означает  $(A(x_0, \mathbf{x}) \& \ll (x_0, \mathbf{x}) \in D \gg)$ .

Пусть  $P$  – функция вероятности.

Я называю [1] *абсолютной плотностью* вероятности события  $A$  функцию  $p_A(\underline{x})$  такую, что

$$\int_D d^{3+1}\underline{x} \cdot p_A(\underline{x}) = P(A(D))$$

для любой области  $D$ .

Если  $J$  – якобиан преобразования

$$\begin{aligned} x_0 \rightarrow x'_0 &= \frac{x_0 - vx_k}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ x_k \rightarrow x'_k &= \frac{x_k - vx_0}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ x_j \rightarrow x'_j &= x_j \quad \text{для} \quad j \neq 0, j \neq k, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $v$  вещественное число, такое что  $|v| < 1$ , то

$$J = \frac{\partial(x'_0, x')}{\partial(x_0, x)} = 1.$$

Поэтому абсолютная плотность вероятности инвариантна относительно преобразований Лоренца.

Если

$$\rho_A(x_0, \mathbf{x}) = \frac{p_A(x_0, \mathbf{x})}{\int d^3\mathbf{y} \cdot p_A(x_0, \mathbf{y})},$$

то  $\rho_A(x_0, \mathbf{x})$  представляет *плотность распределения* вероятности  $A$  в момент  $x_0$ .

В преобразованиях (1):

$$\rho_A(x_0, \mathbf{x}) \rightarrow \rho'_A(x_0, \mathbf{x}) = \frac{p_A(x_0, \mathbf{x})}{\int d^3\mathbf{y} \cdot p_A(x_0 + v(y_k - x_k), \mathbf{y})}.$$

Следовательно,  $\rho_A$  не инвариантна относительно этих преобразований.

Пусть событие  $A(\underline{x})$  таково, что  $\rho_A$  представляет нулевую компоненту некоторого 3+1-векторного поля  $\underline{j}_A$  ( $\underline{j}_A = (j_{A,0}, \mathbf{j}_A) = (j_{A,0}, j_{A,1}, j_{A,2}, j_{A,3})$ ). То есть найдутся вещественные функции  $j_{A,k}(\underline{x})$  такие, что:

$$\rho_A = \dot{j}_{A,0}$$

и в преобразованиях (1):

$$\begin{aligned} j_{A,0} &\rightarrow j'_{A,0} = \frac{j_{A,0} - v j_{A,k}}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ j_{A,k} &\rightarrow j'_{A,k} = \frac{j_{A,k} - v j_{A,0}}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ j_{A,s} &\rightarrow j'_{A,s} = j_{A,s} \quad \text{для} \quad s \neq k, s \neq 0. \end{aligned}$$

Такие события я называю *прослеживаемыми*.

Для этих событий существуют [2] 4X1 комплексные матричные функции  $\varphi(x_0, \mathbf{x})$ , такие что

$$\begin{aligned} \rho_A &= \varphi^\dagger \varphi, \\ j_{A,r} &= -\varphi^\dagger \beta^{[r]} \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

здесь  $(\beta^{[1]}, \beta^{[2]}, \beta^{[3]}, \beta^{[4]}, \gamma^{[0]})$  – клиффордова пентада [2].

Функции  $\varphi$  при некоторых несущественных ограничениях подчиняются [3] уравнению вида

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{c} -(\partial_0 + i\Theta_0 + i\Upsilon_0\gamma^{[5]}) + \\ \sum_{k=1}^3 \beta^{[k]} (\partial_k + i\Theta_k + i\Upsilon_k\gamma^{[5]}) \\ +2(iM_0\gamma^{[0]} + iM_4\beta^{[4]}) \end{array} \right) \varphi + \left( \begin{array}{c} -(\partial_0 + i\Theta_0 + i\Upsilon_0\gamma^{[5]}) \\ -\sum_{k=1}^3 \zeta^{[k]} (\partial_k + i\Theta_k + i\Upsilon_k\gamma^{[5]}) \\ +2(-iM_{\zeta,0}\gamma_{\zeta}^{[0]} + iM_{\zeta,4}\zeta^{[4]}) \end{array} \right) \varphi + \\ &+ \left( \begin{array}{c} (\partial_0 + i\Theta_0 + i\Upsilon_0\gamma^{[5]}) \\ -\sum_{k=1}^3 \eta^{[k]} (\partial_k + i\Theta_k + i\Upsilon_k\gamma^{[5]}) \\ +2(-iM_{\eta,0}\gamma_{\eta}^{[0]} - iM_{\eta,4}\eta^{[4]}) \end{array} \right) \varphi + \left( \begin{array}{c} -(\partial_0 + i\Theta_0 + i\Upsilon_0\gamma^{[5]}) \\ -\sum_{k=1}^3 \theta^{[k]} (\partial_k + i\Theta_k + i\Upsilon_k\gamma^{[5]}) \\ +2(iM_{\theta,0}\gamma_{\theta}^{[0]} + iM_{\theta,4}\theta^{[4]}) \end{array} \right) \varphi = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $(\zeta^{[1]}, \zeta^{[2]}, \zeta^{[3]}, \zeta^{[4]}, \gamma_{\zeta}^{[0]})$ ,  $(\eta^{[1]}, \eta^{[2]}, \eta^{[3]}, \eta^{[4]}, \gamma_{\eta}^{[0]})$  и  $(\theta^{[1]}, \theta^{[2]}, \theta^{[3]}, \theta^{[4]}, \gamma_{\theta}^{[0]})$  – клиффордовы пентады [2],  $\Theta_k$  и  $\Upsilon_k$  – вещественные, ведущие себя как калибровочные поля, а  $M_{\theta,0}$ ,  $M_{\theta,4}$ ,  $M_{\eta,0}$ ,  $M_{\eta,4}$ ,  $M_{\zeta,0}$ ,  $M_{\zeta,4}$ ,  $M_0$ ,  $M_4$  – тоже вещественные, аналогичны массовым членам уравнения Дирака.

Первое слагаемое этого уравнения:

$$\left( \begin{array}{c} -(\partial_0 + i\Theta_0 + i\Upsilon_0\gamma^{[5]}) + \\ \sum_{k=1}^3 \beta^{[k]} (\partial_k + i\Theta_k + i\Upsilon_k\gamma^{[5]}) \\ + 2(iM_0\gamma^{[0]} + iM_4\beta^{[4]}) \end{array} \right) \varphi$$

соответствует лептонным состояниям [2, 4] (электрону и электронному нейтрино, или мюону и мюонному нейтрино и т. д.).

Остальные три слагаемых соответствуют кварковым состояниям [2, 3].

Далее в этой статье подобные уравнения получаются для абсолютной плотности вероятности без ограничений на эту функцию. Вывод таких уравнений требует алгебр Кэли-Диксона [5, 6]:

Пусть  $1, i, j, k, E, I, J, K$  представляют базисные элементы 8-мерной алгебры Кэли (*алгебры октонионов*) [5, 6]. Произведение элементов этой алгебры определяется следующим образом [5]:

1) для каждого базисного элемента  $e$ :

$$ee = -1;$$

2) если  $u_1, u_2, v_1, v_2$  – вещественные числа, то

$$(u_1 + u_2i)(v_1 + v_2i) = (u_1v_1 - v_2u_2) + (v_2u_1 + u_2v_1)i;$$

3) если  $u_1, u_2, v_1, v_2$  – числа формы  $w = w_1 + w_2i$  ( $w_s$  – вещественные числа,  $s \in \{1, 2\}$ , и  $\bar{w} = w_1 - w_2i$ ), то

$$(u_1 + u_2j)(v_1 + v_2j) = (u_1v_1 - \bar{v}_2u_2) + (v_2u_1 + u_2\bar{v}_1)j \quad (4)$$

и  $k := ij$ ;

4) если  $u_1, u_2, v_1, v_2$  – числа вида  $w = w_1 + w_2i + w_3j + w_4k$  ( $w_s$  – вещественные числа,  $s \in \{1, 2, 3, 4\}$ , и  $\bar{w} = w_1 - w_2i - w_3j - w_4k$ ), то

$$(u_1 + u_2E)(v_1 + v_2E) = (u_1v_1 - \bar{v}_2u_2) + (v_2u_1 + u_2\bar{v}_1)E \quad (5)$$

и

$$I := iE, \quad J := jE, \quad K := kE.$$

Следовательно, в соответствие с пунктом 2): поле вещественных чисел ( $\mathbf{R}$ ) расширяется до поля комплексных чисел ( $\mathbf{C}$ ), и в соответствии с пунктом 3): поле комплексных чисел расширяется до поля кватернионов ( $\mathbf{K}$ ), а пункт 4) расширяет поле кватернионов до поля октонионов ( $\mathbf{Q}$ ). Этот метод расширения полей называется *процедурой удвоения Диксона* [5].

Если

$$u = a + bi + cj + dk + AE + BI + CJ + DK$$

с вещественными  $a, b, c, d, A, B, C, D$ , то вещественное число

$$\|u\| := \sqrt{u\bar{u}} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2)^{0.5}$$

называется *нормой* октониона  $u$  [5].

Для всех октонионов  $u$  и  $v$ :

$$\|uv\| = \|u\| \|v\|. \quad (6)$$

Алгебры с этим условием называются *нормированными алгебрами* [5, 6].

Для любой пары октонионов  $u$  и  $v$  найдется единственным образом октонион  $s$ , такой, что если  $u \neq 0$ , то:

$$us = v. \quad (7)$$

Алгебры с этим условием называются *алгебрами с делением* [5, 6].

Кроме того, алгебра октонионов *альтернативна*, т. е. любая пара октонионов  $r$  и  $p$  подчиняется условию:

$$(r\bar{r})p = r(\bar{r}p).$$

Обозначим:  $z := x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ .

Пусть функции  $u(z)$ ,  $v(z)$ ,  $w(z)$ ,  $l(z)$ ,  $U(z)$ ,  $V(z)$ ,  $W(z)$ ,  $L(z)$  имеют вещественные значения, и пусть функция

$$f(z) := u(z) + v(z)i + w(z)j + l(z)k \\ + U(z)E + V(z)I + W(z)J + L(z)K$$

такова, что

$$\|f(z)\|^2 = p_A(\underline{x}).$$

Поскольку алгебра  $\mathbf{Q}$  – алгебра с делением, то найдется октонионная функция  $\wp(y_1, y_2)$ , такая что для любых кватернионов  $z_1$  и  $z_2$ :

$$f(z_2) = \wp(z_1, z_2) f(z_1).$$

В частности,

$$f(z + \Delta z) = \wp(z, z + \Delta z) f(z)$$

с  $\Delta z := \Delta x_0 + \Delta x_1i + \Delta x_2j + \Delta x_3k \rightarrow 0$ .

Отсюда:

$$f(z + \Delta z) - f(z) = \wp(z, z + \Delta z) f(z) - \wp(z, z) f(z). \quad (8)$$

Обозначим:

$$\aleph(z, \Delta z) := \frac{\wp(z, z + \Delta z) - \wp(z, z)}{\|\Delta z\|^2}.$$

Пусть функция  $f$  имеет частные производные по всем своим вещественным переменным:  $x_0, x_1, x_2, x_3$ .

В таком случае из (8):

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \Delta x_3 \right) f(z) = (\Delta z \aleph(z, \Delta z)) f(z). \quad (9)$$

Рассмотрим уравнение:

$$\Delta z \acute{O}(z, \Delta z) = \frac{\partial f(z)}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial f(z)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(z)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial f(z)}{\partial x_3} \Delta x_3 \quad (10)$$

с неизвестной  $\acute{O}$ .

Пусть вещественные  $r, \alpha, \beta, \gamma$  таковы, что

$$\Delta x_0 = r \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma, \\ \Delta x_1 = r \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma, \\ \Delta x_2 = r \cos \alpha \sin \beta, \\ \Delta x_3 = r \sin \alpha.$$

В таком случае уравнение (10) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} \acute{O}(z, \Delta z) = & \\ & \left( \begin{array}{l} (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) \frac{\partial f(z)}{\partial x_0} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ - (i \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) \frac{\partial f(z)}{\partial x_1} \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ - (j \cos \alpha \sin \beta) \frac{\partial f(z)}{\partial x_2} \cos \alpha \sin \beta - (k \sin \alpha) \frac{\partial f(z)}{\partial x_3} \sin \alpha \end{array} \right) + \\ & \left( \begin{array}{l} - (i \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) \frac{\partial f(z)}{\partial x_0} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ + (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) \frac{\partial f(z)}{\partial x_1} \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ - (k \sin \alpha) \frac{\partial f(z)}{\partial x_2} \cos \alpha \sin \beta - (j \cos \alpha \sin \beta) \frac{\partial f(z)}{\partial x_3} \sin \alpha \end{array} \right) + \quad (11) \\ & \left( \begin{array}{l} - (j \cos \alpha \sin \beta) \frac{\partial f(z)}{\partial x_0} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - (k \sin \alpha) \frac{\partial f(z)}{\partial x_1} \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ + (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) \frac{\partial f(z)}{\partial x_2} \cos \alpha \sin \beta - (i \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) \frac{\partial f(z)}{\partial x_3} \sin \alpha \end{array} \right) + \\ & \left( \begin{array}{l} - (k \sin \alpha) \frac{\partial f(z)}{\partial x_0} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - (j \cos \alpha \sin \beta) \frac{\partial f(z)}{\partial x_1} \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ - (i \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) \frac{\partial f(z)}{\partial x_2} \cos \alpha \sin \beta + (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) \frac{\partial f(z)}{\partial x_3} \sin \alpha \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отсюда, из (9) и из (10) при

$$\begin{aligned} i_{\alpha\beta\gamma} &:= i \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}, \\ j_{\alpha\beta\gamma} &:= j \frac{\sin \beta}{\cos \beta \cos \gamma}, \\ k_{\alpha\beta\gamma} &:= k \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_0} &:= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \frac{\partial}{\partial x_0}, \\ \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_1} &:= \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_2} &:= \cos \alpha \sin \beta \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_3} &:= \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned}$$

получается:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_0} - i_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_1} - j_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_2} - k_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_3} \right) + \\ & \left( -i_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_0} + \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_1} - k_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_2} - j_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_3} \right) + \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( -j_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_0} - k_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_1} + \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_2} - i_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_3} \right) + \\ & \left( -k_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_0} - j_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_1} - i_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_2} + \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_3} \right) = \\ & = \frac{\aleph}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} \end{aligned}$$

Поскольку  $\aleph$  = октонион, то найдутся вещественные  $G_0, G_1, G_2, G_3$  и  $m_0, m_1, m_2, m_3$ , такие что:

$$\frac{\aleph}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} := G_0 + G_1 i + G_2 j + G_3 k + m_0 E + m_1 I + m_2 J + m_3 K.$$

В таком случае уравнение (12) дает следующую формулу:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{c} \left( \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_0} - G_0 \right) - i_{\alpha\beta\gamma} \left( \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_1} + G_1 \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \right) \\ -j_{\alpha\beta\gamma} \left( \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_2} + G_2 \frac{\cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta} \right) - k_{\alpha\beta\gamma} \left( \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_3} + G_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{\sin \alpha} \right) \\ -m_0 E \end{array} \right) + \\ & \left( -i_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_0} + \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_1} - k_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_2} - j_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_3} - m_1 I \right) + \\ & \left( -j_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_0} - k_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_1} + \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_2} - i_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_3} - m_2 J \right) + \\ & \left( -k_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_0} - j_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_1} - i_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_2} + \frac{\partial_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_3} - m_3 K \right) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Понятно, что это уравнение, так же как уравнение (3), представляет обобщенное уравнение Дирака.

## Литература

- [1] G. Quznetsov, *Logical Foundation of Theoretical Physics*, Nova Sci. Publ., NY (2006), p. 105
- [2] G. A. Quznetsov, *Progress in Physics*, v. 3, (2009), pp. 32–40
- [3] G. A. Quznetsov, *Progress in Physics*, v. 2, (2009), pp. 96–106
- [4] G. Quznetsov, *Probabilistic Treatment of Gauge Theories* in series Contemporary Fundamental Physics. ed. V. Dvoeglazov, Nova Sci. Publ., NY (2007), pp. 95–117
- [5] М. Л. Кантор, А. С. Солодовников, *Гиперкомплексные числа*, М., (1973)
- [6] О. В. Мельников, В. Н. Ремесленников, и др., *Общая алгебра*, М., (1990), p. 396

## Octonions and Moving Equations of Probabilities

G. A. Quznetsov

*Chelyabinsk State University, Russia*  
gunn@mail.ru, quznets@yahoo.com

The expression of pointlike event probabilities in terms of octonions gives moving equations, which are similar to Dirac's equations.

**Key-words:** Dirac equation, octonions, pointlike event, probability density.

**PACS:** Probability theory, 02.50.Cw, Dirac equation 03.65.Pm, Algebraic methods in quantum mechanics, 03.65.Fd

# ЗАКОН ГРАВИТАЦИИ И МОДЕЛЬ ИСТОЧНИКА В АНИЗОТРОПНОЙ ГЕОМЕТРОДИНАМИКЕ

С. В. Сипаров

*Государственный Университет гражданской авиации, Санкт-Петербург,  
НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино  
sergey@siparov.ru*

Построена модификация ОТО, учитывающая зависимость метрики от скоростей источников гравитации. Показано, что эта зависимость следует из принципа эквивалентности и взаимной обусловленности уравнений поля и уравнений геодезических. Последние, как известно, являются условием разрешимости уравнений поля, причем их вид приводит к уравнениям Ньютона только в низшем приближении. Построенная модификация естественным образом включает плоский характер кривых вращения спиральных галактик, закон Талли-Фишера, особенности поведения шаровых скоплений, существенное превышение наблюдаемого угла преломления света гравитационной линзой над расчетным значением и не требует привлечения понятия темной материи и произвольного изменения уравнений динамики. Имеются важные космологические следствия, связанные с интерпретацией наблюдений.

**Ключевые слова:** модифицированные теории гравитации, анизотропная метрика, кривые вращения, закон Талли-Фишера.

## 1 Введение

Плоские кривые вращения спиральных галактик представляют собой наиболее выраженную из известных проблем ОТО, проявляющихся на галактическом масштабе. Это простой, не малый и статистически достоверный эффект, не находящий объяснения ни в Ньютонской гравитации, ни в рамках представлений ОТО. Он состоит в том, что орбитальные скорости звезд в спиральных галактиках с увеличением расстояния от центра не стремятся к нулю, а выходят на константы порядка  $10^5$  м/с для всех галактик. В работах [1–3] были кратко перечислены и проанализированы известные попытки решения этой проблемы и предложен новый подход (анизотропная геометродинамика или АГД), позволяющий справиться не только с этой, но и с рядом других проблем, известных из наблюдений и перечисленных в [4] как необходимые условия для любой модификации теории гравитации. В разделах 2 и 3 будут более подробно обсуждаться идеи, лежащие в основе предложенного подхода.

В отличие от теории Ньютона, где в абсолютном и пустом Евклидовом пространстве находились массивные тела, мгновенно взаимодействующие на расстоянии, в ОТО ситуация радикально изменилась. Не только пространство и время стали неразделимым пространством-временем, а скорость передачи взаимодействия – конечной, но и тел в нем не оказалось. Вместо них рассматриваются особенности решений уравнений поля (уравнений Эйнштейна) в искривленном пространстве Римана, метрика которого зависит от всех четырех координат. Последнее означает, что пространственное положение особенностей меняется с течением времени. При интерпретации этих особенностей решений как физических тел, можно вслед за Эйнштейном повторить, что «пространство указывает массам, как двигаться, массы указывают пространству, как изгибаться». Эта взаимосвязь составляет фундаментальную основу ОТО. В работе [5] Фок подчеркнул, что для ОТО ключевым является то обстоятельство, что уравнение геодезической (или, что в данном случае то же, уравнение движения) не является независимым уравнением. Оно является

условием разрешимости уравнений поля. Поэтому если в теории Ньютона в случае затруднений можно было пытаться выдвинуть какие-то отдельные предположения о свойствах тел, о законе их взаимодействия, о пространстве или о времени, а уравнение динамики фактически, представляло собой определение силы и могло также подвергнуться независимому изменению, то в ОТО это невозможно – все эти понятия оказались связанными между собой в единое целое. Эта целостность является неоспоримым достижением ОТО, и любая последующая теория может отказаться от нее лишь при наличии достаточно веских оснований, более значительных, чем объяснение отдельных наблюдений.

## 2 Современные проблемы ОТО и попытки их решения

Для того, чтобы справиться с затруднениями, следующими из астрофизических наблюдений, в настоящее время используется несколько идей. Первая и наиболее популярная состоит в том, что надо наращивать правую часть известных уравнений поля, которые хорошо описывают ситуацию с одной точечной массой (Солнечная система), и наращивать до тех пор, пока получающееся решение не «накрывает» наблюдаемый эффект. Это соответствует введению в рассмотрение «темной материи», масса которой оказывается в 3–4 раза большей, чем масса наблюдаемой барионной (или «светящейся») материи. Впервые эта мысль была предложена Ф. Цвики [6], она получила развитие в применении к плоским кривым вращения, и ряд современных астрономических наблюдений [7] также интерпретируют с ее помощью. Тем не менее, этой идее присущи определенные логические неувязки. Сам способ определения массы темной материи апостериорен, кроме того, он позволяет определить ее не для всех наблюдаемых систем, наконец, имеется экспериментально установленная связь между светящейся материей (светимостью галактики, связанной с ее светящейся массой) и наблюдаемым движением звезд (например, закон Талли-Фишера для их орбитальной скорости), не требующая существования темной материи.

Второй идеей, выдвинутой именно в связи с потребностью объяснения плоских кривых вращения, является модификация уравнений динамики или эквивалентная модификация закона тяготения Ньютона – так называемая теория МОНД Мильгрема [8]. Поскольку эта модификация имела своей заявленной задачей описание эксперимента, с помощью МОНД удается правильно описать многие, хотя и не все [4] наблюдательные данные. Однако произвольный выбор как вида поправочного члена в уравнениях, так и введение новой эмпирической мировой константы с размерностью ускорения, делают эту теорию скорее прикладной, чем естественнонаучной. Выделение уравнения движения в качестве независимого и произвольное его изменение нарушают отмеченную выше самосогласованность, характерную для ОТО, об опасности чего предупреждал еще Фок [5]. Попытка [9] придать теории МОНД ковариантный характер привела лишь к введению дополнительного скалярного поля, что ставит ее в один ряд с теориями типа Бранса-Дике [10], но не делает предпочтительной.

Обсудим физический смысл этих двух идей. На рис. 1а представлены кривые вращения спиральных галактик разных типов, полученные из наблюдений. На рис. 1б представлена зависимость напряженности поля однородного шара радиуса  $R$ , пропорциональная квадрату орбитальной скорости спутника, – кривая ОАВ (материал шара считается разреженным, а спутник малым). Связь между рис. 1а и рис. 1б ясна. Поскольку вместо кривой ОАВ в эксперименте наблюдаются ОАС и ОС, понятно, что модель однородного шара непригодна, причем сразу по нескольким причинам. Неоднородность распределения материи в спиральной галактике поддается расчету и измерению, таким образом, зависимость напряженности от расстояния можно уточнить. Тем не менее, она по-прежнему соответствует выбранным граничным условиям, т. е. напряженность стремится к нулю с удалением от центра. Следующее уточнение – найти такие параметры полученного рас-

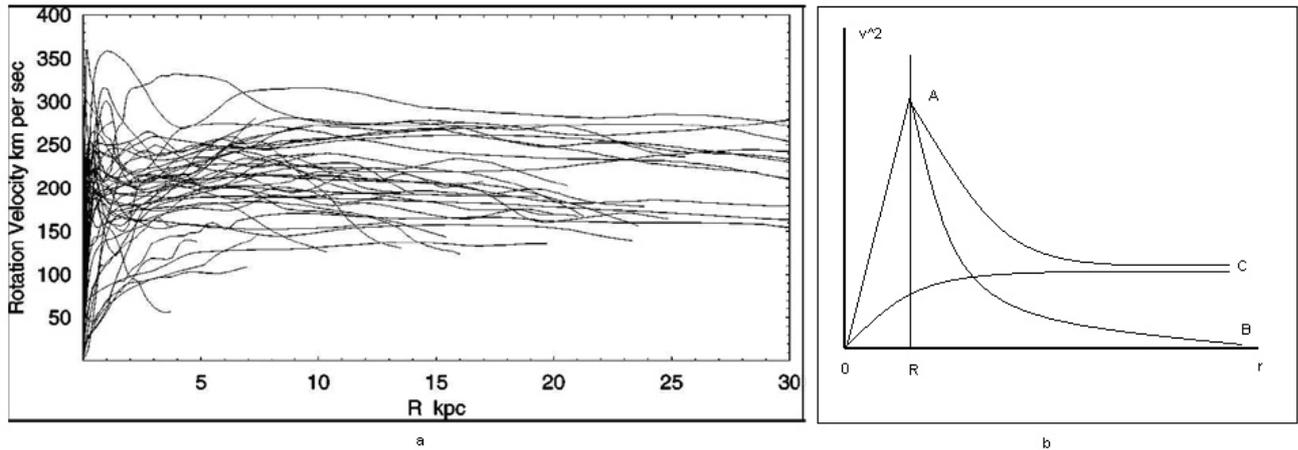


Рис. 1: а) кривые вращения для различных спиральных галактик, полученные из наблюдений (взято из [9], где дана ссылка на [Sofue, Y. & Rubin, V, 2001, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 31, 137]); б) зависимость квадрата орбитальной скорости спутника от расстояния до центра однородного шара

четного распределения масс, чтобы экспериментальные точки, полученные из наблюдений (рис. 1а), оказались на теоретической кривой вида ОАС. Оказалось, что для этого нужны втрое большие полные массы, и впятеро большие эффективные радиусы, чем те, что соответствуют распределениям видимых звезд галактик, так что большая часть требуемого распределения масс по каким-то причинам не проявляет себя никак иначе и представляет собой *темную* материю, (имеющую, таким образом, некоторое сходство со светоносным эфиром). Одновременно становится понятно, что обсуждаемый парадоксальный эффект плоских кривых вращения соответствует внутренней, а не внешней задаче. Существование наблюдательных данных (рис. 1а), соответствующих кривой ОС на рис. 1б, также наводит на мысль, что граничные условия были выбраны поспешно, и не соответствовали рассматриваемой проблеме: до того, как напряженность начнет стремиться к нулю, может проявиться еще некоторый эффект, связанный с физическими причинами, которых мы пока не знаем. Эти соображения соответствуют попытке эмпирической *модификации* закона динамики (или гравитации) на больших расстояниях и при малых ускорениях.

Таким образом, мы видим, что в первом подходе отсутствует физическая идея, а во втором – путь к ней лишь намечен. Для полноты картины можно упомянуть еще один – радикальный – подход, хотя он и не связан с попытками исправить конкретную ситуацию, возникшую в ОТО после выполнения наблюдений на галактическом масштабе. Он предложен в работах [11, 12], предусматривает сохранение единства, присущего ОТО, но требует *априорной* замены геометрии Римана другой геометрией: предлагается версия Финслеровой геометрии с метрикой Бервальда-Моора. В остальном этот подход является методологически непротиворечивым, однако он до сих пор не вышел за рамки идеи, поскольку, несмотря на определенные достижения в математических разработках, ни одного наблюдаемого феномена с его помощью пока не описано.

С введением темной энергии для интерпретации новых появившихся наблюдений, кризисную ситуацию в теории гравитации можно считать утвердившейся, поскольку наиболее успешная теория, описывающая Вселенную, т. е. ОТО, делает это лишь для 4% энергии Вселенной, остальные 96% приходятся на «темные» составляющие, недоступные для прямых наблюдений. Для того, чтобы понять причины, приведшие к этому кризису, следует рассмотреть и традиционные подходы, характерные для той части ОТО, которая считается успешной. Таких имеется также два. Первый из них – это подход самого Эйнштейна [13, 14], а затем Фока [5], последовательно строивших приближенные решения уравнений поля

и остановившихся на втором приближении в связи с нарастанием технической сложности. Сначала Эйнштейн получил Ньютоновскую гравитацию в [13], а потом Эйнштейн и Фок одновременно и независимо получили следующее приближение решения (эквивалентного вида), которое для точки вдали от системы тел дает гравитационный потенциал [5] в виде

$$U = \frac{G}{r} \left( M + \frac{E}{c^2} \right), \quad (2.1)$$

где  $M$  – суммарная масса тел, а  $E$  включает в себя сумму кинетической и потенциальной энергии взаимодействия тел системы. Формула (2.1), полученная из уравнений поля, соответствует представлениям об эквивалентности массы и энергии, установленной в СТО.

Второй подход начался с решения Шварцшильда [15], а затем был использован Фридрихом [16] и многими другими для рассмотрения разнообразных конкретных метрик, имевших правдоподобные обоснования. Их достоинствами являлись эстетическая привлекательность точных решений и открывающиеся тем самым широкие возможности для разнообразных интерпретаций, особенно после наблюдений Хаббла. Однако имелись и общие недостатки, не привлекавшие достаточного внимания на фоне указанных достоинств. Они состояли в следующем: во-первых, угадывание частных решений (метрик) не сопровождалось перестройкой геодезических, т. е. уравнений движения, что могло приводить к решениям, не имеющим физического смысла, а во-вторых, непосредственная проверка не могла быть произведена и долгое время не проводилась в связи с недостаточным развитием экспериментальной базы, и учитывались лишь косвенные соображения. Когда же проверка была произведена, то были получены плоские кривые вращения спиральных галактик, не соответствующие теоретическим расчетам. В свете рассматриваемых обстоятельств, на которые и указывал Фок, это не кажется удивительным. Близкие по смыслу соображения о ситуации, возникшей в связи с темной энергией, и о возможных ее причинах приведены в разделе 6.2.

### 3 Принцип эквивалентности, анизотропия и единство теории

Для того, чтобы наметить пути преодоления возникших затруднений, обсудим некоторые важные идеи, не получившие должного внимания при развитии ОТО.

Закон гравитации Ньютона, основанный на эмпирическом законе Кеплера, касающемся движения планет в Солнечной системе, никак не противоречил представлениям об абсолютном пространстве, в котором размещались Солнце и планеты. С этим пространством предположительно могла быть связана и абсолютная (инерциальная) система отсчета, а представления о существовании неинерциальных систем касались сначала только лабораторных условий, а потом – Земли, вращающейся вокруг своей оси. Но для таких систем, как галактики, состоящих из множества источников гравитации, ситуация меняется. Согласно фундаментальному для ОТО принципу эквивалентности, не существует экспериментальной возможности отличить силы гравитации от сил инерции. Поэтому становится понятно, что мы никогда не можем определить из наблюдений, какого сорта систему отсчета с точки зрения ее собственного движения мы используем при наблюдениях в масштабе галактики. Помимо сил инерции, связанных с линейным ускорением системы отсчета, эквивалентность которым силам гравитации обычно и обсуждается, известны и силы инерции, зависящие от скорости тела и скорости системы отсчета (например, сила Кориолиса). Тогда в соответствии с принципом эквивалентности нет оснований полагать, что силы гравитации не зависят от скоростей – именно потому, что пока мы остаемся в пределах рассматриваемой системы многих тел и участвуем в движении, нет экспериментальной возможности отличить их от сил инерции. Переход к бесконечности, где силы инерции типа силы Кориолиса также становятся бесконечными, нуждается в адекватной

интерпретации при экспериментальной проверке. Этим ситуация в галактике отличается от ситуации в планетной системе, где явления, происходящие в окрестности звезды, планеты и в лаборатории нетрудно разнести по масштабам и выбрать систему отсчета с определенными свойствами собственного движения по отношению к изучаемым явлениям. Таким образом, представляется естественным учесть зависимость сил гравитации от скоростей пробного тела и окружающей системы источников.

Как известно, любая теория, которая последовательно объединяет закон обратных квадратов для сил и Лоренцеву инвариантность, должна содержать поле, порождаемое токами (см. обсуждение в [2, 3]). В электродинамике, где постоянные взаимодействия  $q$  представляет собой электрический заряд, это – магнитное векторное поле, которому соответствует сила Лоренца, зависящая от скоростей зарядов и входящая в правую часть уравнения геодезической. Ее выражение имеет вид

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (3.1)$$

В подходе, известном как гравитоэлектромагнетизм (ГЭМ) [17], используется описание гравитации с помощью скалярного и векторного потенциалов аналогично электродинамике. Однако, хотя расчет получающихся малых поправок к классической ОТО, связанных с вращательным движением гравитирующих тел, и не противоречит измерениям, такая аналогия слишком прямолинейна и не может быть применена к гравитации непосредственно. Теория ГЭМ копирует электромагнетизм формально, но в последнем зависящая от скорости сила Лоренца, присущая электродинамике, создается дополнительным (внешним) полем и соответствующими источниками (электрическими зарядами). В ОТО не исключаемую гравитационную силу нельзя приписать внешнему (дополнительному) полю, также и никакая его часть не может быть произвольно рассмотрена в качестве дополнительного поля, как в ГЭМ. Являясь в силу принципа эквивалентности причиной геометрической кривизны, гравитационное поле должно учитываться непосредственно в метрике. Эти же соображения относятся и к возможной попытке применения в гравитации теории западывающих потенциалов и потенциалов Лиенара-Вихерта

Возвращаясь к зависимости гравитационных сил от скоростей, мы заключаем, что метрика, соответствующая потенциалам гравитационных сил, должна включать и векторные поля, связанные со скоростью пробной частицы и скоростями источников гравитации. Метрика, зависящая от производной координаты (от «скорости»), характеризует анизотропное пространство, геометрия которого уже не является геометрией Римана.

При любой попытке построения или модификации теории следует обратить внимание на сохранение ее единства, достигнутого в ОТО, т. е. на сохранение взаимосвязи уравнения геодезической и уравнений поля в процессе решения получаемых уравнений. Следует также иметь в виду, что решение уравнений поля (метрика) интересует нас не только само по себе, оно используется для того, чтобы подставить его в уравнения движения и сравнить расчетное движение с наблюдаемым.

Как уже упоминалось, уравнение геодезической не является независимым уравнением, закон движения в пространстве Римана получается в форме закона Ньютона только в низшем приближении разложения метрики в окрестности метрики Минковского, и даже при учете следующих членов в Римановском случае в закон движения неизбежно должны войти поправки [5]. Однако, волевым образом, т. е. без учета связанных с ним уравнений поля вводить поправки в уравнение динамики нельзя. Это относится и к тому анизотропному пространству, которое мы намерены рассматривать и в котором соответствующее уравнение геодезической должно принять другой вид.

Подводя итог этим вступительным рассуждениям, можно сформулировать положение, на основе которых была предложена [2,3] анизотропная геометродинамика (АГД), особенности которой рассматриваются в последующих разделах.

1. Принцип эквивалентности утверждает неотличимость сил инерции от сил гравитации, и зависимость от скорости должна войти в выражения для гравитационной силы и для метрического тензора явным образом, поскольку в противном случае гравитация окажется аналогична электромагнетизму, что неправомерно.
2. Следствие: уравнения движения, связанные с гравитационной силой, строго зависят от вида метрики, являющейся решением уравнений поля, наряду с соответствующими граничными условиями и поэтому изменятся.

#### 4 Метрика, уравнения движения и закон гравитации

Получим общий вид уравнения движения, соответствующего решению уравнений поля, не конкретизируя вида метрики  $\tilde{g}_{ij}(x, u(x), y)$ , но считая ее анизотропной в соответствии со сказанным выше. Представим метрику в виде [2]

$$\tilde{g}_{ij}(x, u(x), y) \equiv g_{ij}(x, y) = \gamma_{ij} + \varepsilon_{ij}(x, y) \quad (4.1)$$

где  $\gamma_{ij}$  – метрика Минковского;  $\varepsilon_{ij}(x, y)$  – малое анизотропное возмущение;  $y$  принадлежит касательному пространству, и вдоль траектории  $x^i = x^i(s)$  пробной частицы всегда  $y^i = \frac{dx^i}{ds}$ ; наконец,  $u(x)$  – векторное поле, описывающее самосогласованное движение источников и необходимое для учета анизотропии пространства. Геометрия, в которой метрика имеет вид (4.1), является обобщенной Лагранжевой геометрией.

**Замечание:** Общеизвестная Финслерова геометрия, определяемая Финслеровым метрическим тензором  $g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$ , где функция  $F = F(x, y)$  однородная первого порядка по  $y$ , и  $\det(g_{ij}) \neq 0$  для всех  $(x, y)$ , принадлежащих касательному расслоению, является ее частным случаем. Упомянутая в разделе 2 версия Финслеровой геометрии не имеет отношения к данному рассмотрению.

Будем считать поле слабым, т. е. при решении ограничимся учетом только первых производных  $\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^k}$ ,  $\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial y^k}$  и смешанной производной  $\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x^k \partial y^l}$ . Для получения уравнения обобщенной геодезической, соответствующей рассматриваемому приближению, будем варьировать Лагранжиан  $L = (\gamma_{hl} + \varepsilon_{hl}(x, y))y^h y^l$  аналогично [18]. Тогда обобщенная геодезическая примет вид

$$\frac{dy^i}{ds} + (\Gamma_{ik}^i + \frac{1}{2} \gamma^{it} \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x^j \partial y^t} y^j) y^k y^l = 0, \quad (4.2)$$

где  $\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \gamma^{ih} (\frac{\partial \varepsilon_{hj}}{\partial x^k} + \frac{\partial \varepsilon_{hk}}{\partial x^j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x^h})$  – символ Кристоффеля, зависящий от  $y$ . Таким образом, для получения уравнения движения (уравнения динамики) в пределе слабого поля в анизотропном пространстве после решения уравнений поля следует использовать уравнение (4.2), а не уравнение геодезической  $\frac{dy^i}{ds} + \Gamma_{ik}^i y^l y^k = 0$ , пригодное в первом приближении в пространстве Римана. В результате повторения известных упрощений<sup>1</sup> и выкладок, сделанных Эйнштейном в [13], и выделения антисимметричной части вспомогательного

<sup>1</sup> Упрощения Эйнштейна: компонентами  $y^2, y^3, y^4$  можно пренебречь по сравнению с  $y^1$ , которая равна 1 с точностью до второго порядка; движение медленное, т. е. производной по времени в уравнениях геодезической можно пренебречь по сравнению с производными по координатам. Дополнительное упрощение в рассматриваемой задаче с анизотропной метрикой: в  $y$ -подпространстве фазового пространства  $(x, y)$  производной по  $y^1$  можно пренебречь по сравнению с производными по  $y^2, y^3$  и  $y^4$ .

тензора, введенного в [2,3], уравнение движения в пространственном сечении, полученное из геодезической (4.2), приобретает вид

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{c^2}{2} \left\{ -\nabla\varepsilon_{11} + [\vec{v}, \text{rot} \frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\vec{v}}] + \nabla(\vec{v}, \frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\vec{v}}) \right\} \quad (4.3)$$

где  $\varepsilon_{11}$  – единственная компонента метрического тензора, которая остается в уравнении движения в случае слабого поля и использования допущений, аналогичных [13], о малости скоростей по сравнению с фундаментальной скоростью. Полагая (4.3) уравнением динамики, получаем выражение для обобщенной гравитационной силы [2,3]

$$\vec{F}^{(g)} = \frac{mc^2}{2} \left\{ -\nabla\varepsilon_{11} + [\vec{v}, \text{rot} \frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\vec{v}}] + \nabla(\vec{v}, \frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\vec{v}}) \right\} \quad (4.4)$$

Оба последних уравнения получены из геодезической, соответствующей уравнениям поля для нового вида метрики. Они не требуют специального выбора тензора энергии-импульса и каких-либо дополнительных априорных предположений о виде уравнений геодезических. Обратим внимание на физический смысл отдельных составляющих гравитационной силы, входящих в (4.4).

Первый член непосредственно соотносится с выражением для Ньютоновой силы тяготения  $F_N^{(g)}$ , действующей на частицу с массой  $m$ . Для единственного стационарного сферически симметричного источника гравитации задача сводится к [13], и обычное решение уравнений поля дает  $\varepsilon_{11}(x) = \frac{r_s}{r}$ . Если в качестве масштаба длины  $r_s$  выбрать  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ , что соответствует т. н. радиусу Шварцшильда для источника с массой  $M$ , то получится известный закон гравитации Ньютона.

Если обозначить

$$\Omega(x) = \frac{c^2}{4} \text{rot} \frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\vec{v}}, \quad (4.5)$$

то во втором члене в выражении (4.4) можно распознать аналог «силы Кориолиса»  $F_C^{(g)} = 2m[\vec{v}, \vec{\Omega}(x)]$ , которая свойственна неинерциальной (равномерно вращающейся) системе отсчета, пропорциональна скорости  $\vec{v}$  пробной частицы и зависит также от движения системы отсчета<sup>2</sup>. Здесь эта сила связана с собственным движением источников гравитации. Заметим, что действия, производимые составляющей  $F_C^{(g)}$  гравитационной силы, могут быть притяжением, отталкиванием и тангенциальным действием в зависимости от угла между  $\vec{v}$  и  $\vec{\Omega}(x)$ . Если в некоторой области пространства вектор  $\vec{\Omega}(x)$  сохраняет постоянное направление, то компонента скорости  $\vec{v}$ , параллельная  $\vec{\Omega}$ , не испытывает воздействия второго слагаемого в формуле (4.4). Помимо плоских кривых вращения, известен и другой наблюдательный парадокс [4], согласно которому в отличие от орбитального движения звезд на периферии, движение шаровых скоплений в плоскости, перпендикулярной плоскости спиральной галактики, соответствует расчету, основанному на законе Кеплера. Представление о наличии дополнительной компоненты гравитационной силы вида  $F_C^{(g)}$ , действующей на звезды, движущиеся в плоскости, но не действующей на скопления, движущиеся перпендикулярно ей, объясняет этот парадокс.

Третий член в (4.4) представляет собой [2] дополнительную силу притяжения или отталкивания, действующую на движущуюся частицу, если система гравитационных источников радиально расширяется (взрыв) или радиально сжимается (коллапс), что представляет интерес с точки зрения описания и расчета соответствующих астрофизических процессов.

<sup>2</sup> Если же обозначить  $\frac{c^2}{2} \text{rot} \frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\vec{v}} = B^{(g)}(x) = 2\text{rot}\vec{u}$ , то можно говорить о гравитационном аналоге силы Лоренца, что может быть удобно с вычислительной точки зрения и будет использовано в дальнейшем.

Для того, чтобы придать выражению для гравитационной силы в пространстве с метрикой (4.1), зависящей от скоростей распределенных источников, более удобный для экспериментальной проверки вид, зафиксируем некоторое тело отсчета. Введем еще одно обозначение

$$\vec{u} \equiv \frac{c^2}{4} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \vec{v}} \equiv [\vec{\Omega}, \vec{r}], \quad (4.6)$$

где  $r$  – радиус-вектор, проведенный в рассматриваемую точку, объединим первое и третье слагаемое в (4.4) под общим знаком градиента

$$\vec{F}^{(g)} = \frac{mc^2}{2} \nabla \{ -\varepsilon_{11} + \frac{2}{c^2} \cdot 2(\vec{u}, \vec{v}) \} + 2m[\vec{v}, \text{rot} \vec{u}] \quad (4.7)$$

и введем скалярный потенциал  $([\vec{v}, \text{rot} \vec{u}], \vec{r})$ , для которого второе слагаемое в (4.4) тоже будет градиентом. Воспользуемся соотношением  $([\vec{v}, \text{rot} \vec{u}], \vec{r}) = (\vec{v}, [\text{rot} \vec{u}, \vec{r}]) = (\vec{v}, \vec{u})$ . Тогда окончательно получим уравнение

$$\vec{F}^{(g)} = \frac{mc^2}{2} \nabla \{ -\varepsilon_{11} + \frac{2}{c^2} \cdot 4(\vec{u}, \vec{v}) \}, \quad (4.8)$$

определяющее закон гравитации из уравнения динамики (уравнения геодезической), служащего условием разрешимости уравнений поля в рассматриваемом общем случае. При вычислениях следует учесть все тела, принимающие участие в движении. Помимо обычного слагаемого, связанного с Ньютоновскими потенциалами, в новом уравнении присутствует и анизотропный скалярный потенциал, вклад которого становится заметным при определенных условиях. Отметим, что никаких предположений о конкретном виде метрики не делается, и единственным произвольным допущением является предположение слабого поля.

Требую, чтобы существовал предельный переход к изотропному пространству ОТО, получим

$$\vec{F}^{(g)} = \frac{mc^2}{2} \nabla \left\{ - \sum_n \frac{r_{n,s}}{r_n} + \frac{2}{c^2} \cdot 4(\vec{u}, \vec{v}) \right\}, \quad (4.9)$$

Несмотря на формальное сходство, выражение (4.9) не может быть рассмотрено как пост-ньютоновское приближение по двум причинам. Во-первых, в рассматриваемой задаче нет выраженного центра. Во-вторых, физический смысл различия состоит в том, что в пост-ньютоновском приближении поправка к закону Ньютона начинает играть важную роль с приближением к центру гравитации, а в нашем случае второе слагаемое становится заметным, когда интересующая точка удаляется от него, и Ньютоновское слагаемое затухает. Вопрос, связанный с вычислением  $\vec{u}(x)$ , решается так же, как и в электродинамике, поскольку, как уже отмечалось ранее [2, 3], обе полевые теории имеют одно и то же геометрическое происхождение. Это означает, что можно пользоваться одними и теми же математическими результатами в обоих случаях. Так, применяя к рассматриваемой гравитационной задаче известную формулу индукции магнитного поля, получим

$$\Omega = \text{rot} \left( \int \frac{j^{(m)}(r)}{|r - r_0|} dV \right), \quad (4.10)$$

где  $j^{(m)}(r)$  – плотность «тока массы», а  $r_0$  – координата наблюдателя. Конкретные примеры ее использования будут рассмотрены ниже.

Новым обстоятельством является возможность появления отрицательной поправки к обычному гравитационному потенциалу вплоть до преобладания (наблюдаемых) сил отталкивания над силами притяжения. Но это не должно удивлять, т.к. связано с принципом эквивалентности и отождествлением гравитационных и инерциальных сил, а последние включают в себя, например, центробежные силы. Возможно также и появление

дополнительных (к Ньютонским) сил притяжения, связанных с движением. Но и это находится в соответствии с общими идеями ОТО, представленными формулой (2.1). Все тела, включая то, на котором находится наблюдатель и начало системы отсчета, которой он пользуется, а также то тело, за движением которого он наблюдает, движутся по своим геодезическим. Поэтому при переходе в системы отсчета, связанные с другими телами, описание расчетных траекторий будет, естественно, изменяться, однако новых событий (типа появления новых столкновений) возникнуть не может.

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, сравним полученное выражение (4.7) для гравитационной силы с выражением для силы в неинерциальной системе отсчета. Выбирая для простоты равномерно вращающуюся систему, получим, что в ней на тело действует сила

$$\vec{F}_{N-I} = m\nabla\left(\Phi + \frac{V^2}{2}\right) + 2m[\vec{v}, \text{rot}\vec{V}], \quad (4.11)$$

где  $\Phi$  – силовой потенциал,  $v$  – скорость частицы,  $\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$  – линейная скорость точки, измеряемая из неподвижной системы на расстоянии  $r$  от оси вращения. Второе слагаемое в (4.11) пропорционально силе Кориолиса, второе слагаемое в скобках под градиентом называется центробежной потенциальной энергией. С приближением  $r$  к бесконечности эта энергия также становится бесконечной.

Во-вторых, сравним потенциал в формуле (4.9) и результат Фока (2.1). Имеющееся различие связано с тем, что уравнение (2.1) относится к внешней задаче и подразумевает потенциал в точке, достаточно далекой от всей рассматриваемой системы тел. В нашем случае это не так. Пробное тело является одним из тел системы, и потенциал определяется в той точке, которую оно занимает, двигаясь внутри распределения движущихся масс. Особенности, возникающие при определении потенциала вдали от системы тел в рамках АГД, важные для обоих замечаний, будут рассмотрены в разделе 6.3.

## 5 Модель источника гравитации и ее приложения

Особенности решений уравнений поля в АГД, в общем виде могут обладать более сложными свойствами, чем точки, поскольку потенциал теперь зависит не только от координат, но и от векторного поля, у которого может быть и соленоидальная часть. Поэтому при физической интерпретации таких особенностей в качестве источников гравитации простейшей (базовой) моделью источника будет не точка (сферически симметричное тело), как в ОТО, а система вида «центр плюс ток» (ЦПТ) – центральное тело, окруженное эффективным массовым током  $J^{(m)}$ . Спиральные галактики, очевидно, являются объектами, для описания которых модель ЦПТ пригодна. Для описания более сложных распределений движущихся масс модель необходимо усложнить.

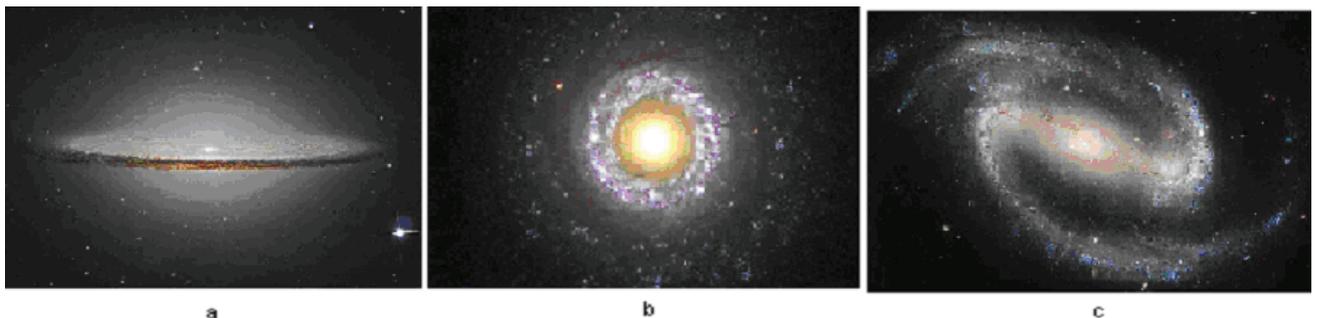


Рис. 2: Спиральные галактики: а – М104, б – NGC7742, с – NGC1300. (Изображения получены с помощью телескопа «Хаббл»)

Ограничимся здесь случаем спиральных галактик. Для таких галактик, как M104 (Сомбреро) или NGC7742 (рис. 2 а,b), наделенных кольцом, эта модель может быть применена непосредственно. Для других спиральных галактик – с более выраженными рукавами – можно ввести эффективные значения радиуса контура  $R_{eff}$ , постоянной угловой скорости  $\Omega_{eff}$ , и линейной скорости плотности массового тока вдоль контура  $V_{eff} = \Omega_{eff}R_{eff}$ . Это можно сделать, например, следующим образом

$$I_{eff} = \sum I_n \equiv MR_{eff}^2 \Rightarrow R_{eff}^2 = \sqrt{\frac{I_{eff}}{M}} \quad (5.1)$$

где  $I_{eff}$  – момент инерции системы с общей массой  $M$ . Эффективная угловая скорость  $\Omega_{eff}$  может быть определена из условия  $I_{eff}\Omega_{eff} \equiv L_{eff} = \sum L_n$ , где  $L_n$  – моменты импульса компонент системы. Таким образом, получаем

$$\Omega_{eff} = \frac{L_{eff}}{I_{eff}} \quad (5.2)$$

Эти параметры могут быть определены для каждой конкретной галактики из астрономических наблюдений. Связь феноменологической величины  $\Omega_{eff}$  с введенной ранее в общем виде величиной  $\Omega(x)$  очевидна.

Определим условия, при которых обычной модели ОТО (точки) для описания физической системы недостаточно и следует применять модель ЦПТ. Они наступают тогда, когда оба члена в уравнении (4.9) начинают играть сопоставимую роль. Будем считать, что пробное тело, т.е. одна из звезд периферии спиральной галактики, движется примерно так же, как и тела, условно принадлежащие круговому контуру, при этом  $u \sim v$ . Тогда из формулы (4.9) следует, что искомое условие для расстояния от звезды до центра галактики и для скорости движения звезды должно иметь вид

$$rv^2 \sim \frac{1}{4}GM, \quad (5.3)$$

что для массы галактики  $M$ , радиуса ее видимого диска  $r$  и скорости  $v$  движения звезд на периферии соответствует значениям, наблюдаемым в астрофизике на галактических масштабах. Поэтому расхождение с наблюдениями предсказаний Ньютона-Эйнштейна-Шварцшильда, сделанными на основе точечной модели, не является удивительным.

Благодаря обсуждавшемуся [2, 3] общему геометрическому происхождению «уравнений Максвелла» в электромагнетизме и гравитации, для расчета гравитационных систем можно использовать математические результаты, полученные в электродинамике. Нетрудно видеть, что гравитационная модель ЦПТ аналогична электромагнитной модели, состоящей из кругового тока и заряда, находящегося в его центре.

### 5.1 Плоские кривые вращения

Рассмотрим для удобства сначала электромагнитный вариант модели ЦПТ, т.е. положительный заряд, окруженный круговым витком с током  $J$ , вокруг которого в плоскости и окрестности витка движется электрон. Строго говоря, электрон в такой системе не может совершать финитного движения и должен либо упасть на центр, либо улететь на бесконечность. Однако число оборотов, выполненное им до этого, может быть достаточно большим. Значение компоненты магнитной индукции  $B_z(r)$ , создаваемой контуром радиуса  $R_{eff}$ , может быть найдено с помощью закона Био-Савара, и, согласно [19], при  $c = 1$  равно

$$B_z(r) = J \frac{2}{\sqrt{(R_{eff} + r)^2 + z^2}} \left[ K + \frac{R_{eff}^2 - r^2 - z^2}{(R_{eff} - r)^2 + z^2} E \right],$$

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}; \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad (5.4)$$

$$k^2 = \frac{4R_{eff}r}{(R_{eff} + r)^2 + z^2}.$$

где  $K$  и  $E$  – эллиптические интегралы. Вводя обозначение  $b = r/R_{eff}$  и принимая  $z = 0$ , получим

$$B_z(r) = J \frac{2}{R_{eff}(1+b)} \left[ K + \frac{1-b^2}{(1-b)^2} E \right]. \quad (5.5)$$

Внутренняя область, близкая к заряду, соответствует  $b \ll 1$  и постоянному значению  $B_z(r) \rightarrow J/2R_{eff}$ , удаленная область соответствует  $b \gg 1$  и  $B_z(r) \rightarrow 0$ , промежуточная область, в которой находится контур и движется рассматриваемый электрон, соответствует  $b \geq 1$ , и

$$B_z(r) \sim J/r. \quad (5.6)$$

Центробежная сила  $m \frac{v_{orb}^2}{r}$ , действующая на электрон, равна сумме Кулоновского притяжения  $F_{Cl} = qC_1/r^2$ , создаваемого центральным зарядом, и силы Лоренца  $F_L = qv_{orb}B_z(r)$

$$\frac{mv_{orb}^2}{r} = \frac{qC_1}{r^2} \pm qv_{orb}B_z(r). \quad (5.7)$$

При переходе к рассмотрению гравитационной версии ЦПТ следует заменить электрический заряд гравитационным, т.е.  $q = m_g$ , использовать принцип эквивалентности  $m_g = m$ , и учесть, что область, соответствующая периферии галактики, является промежуточной, т.е.  $B_z^{(g)}(r) \sim J/r$ . Для спиральной галактики ее эффективный радиус  $R_{eff}$  не слишком отличается от радиуса видимого диска, где возможны измерения орбитальных скоростей звезд. Поэтому изменение характера спада  $B_z(r)$  с дальнейшим ростом  $r$  можно не учитывать. Тогда уравнение динамики, в котором обозначим  $J \equiv C_2$ , будет иметь вид

$$v_{orb}^2 = \frac{C_1}{r} \pm v_{orb}C_2, \quad (5.8)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные, характеризующие систему, а знак соответствует направлению тока и положению пробного тела вне или внутри контура. Меньший корень квадратного уравнения (5.8) дает значение  $v_{orb} = \frac{C_2}{2} \left( 1 - \sqrt{1 \pm d \frac{4C_1}{rC_2^2}} \right)$ , соответствующее закону Ньютона, знак зависит от направления движения частицы. Пренебрегая малым слагаемым под корнем в большем из корней уравнения (5.8), т.е. в  $v_{orb} = \frac{C_2}{2} \left( 1 + \sqrt{1 \pm \frac{4C_1}{rC_2^2}} \right)$ , получим

$$v_{orb} \sim C_2, \quad (5.9)$$

что соответствует плоской кривой вращения на периферии галактики и не требует ни привлечения темной материи, ни произвольного изменения уравнения динамики.

### 5.2 Закон Талли-Фишера

Оценим величину  $C_2(R_{eff}) = J^{(m)}(R_{eff})$ . Массовый ток можно задать выражением  $J^{(m)}(R_{eff}) \sim M/T$ , где масса спиральной галактики  $M$  пропорциональна ее площади, т. е.  $R_{eff}^2$ , а период оценим в соответствии с законом Кеплера как  $T \sim R_{eff}^{3/2}$ . Это дает  $J^{(m)}(R_{eff}) \sim \sqrt{R_{eff}}$ . Поскольку светимость  $L_{lum}$  также пропорциональна площади галактического диска, получим  $R_{eff} \sim \sqrt{L_{lum}}$ . Таким образом,  $J^{(m)}(R_{eff}) \sim \sqrt{R_{eff}} \sim L_{lum}^{1/4}$  и окончательно

$$v_{orb} \sim L_{lum}^{1/4} \quad (5.10)$$

что соответствует эмпирическому закону Талли-Фишера. Можно заметить, что показатель  $1/4$  соответствует предположению о постоянном отношении массы к светимости, т. е.  $M/L$ , что используется как одно из основных соотношений при определении расстояний в космологии.

### 5.3 Логарифмический потенциал

В применении к спиральной галактике, вещество которой расположено преимущественно в плоскости, полученные результаты имеют прозрачный физический смысл, связанный с уравнениями поля. Обратим внимание на второе слагаемое в выражении для потенциала в (4.8). В рассматриваемом приближении, описывающем характер зависимости  $\varepsilon_{11}$  от координат и скоростей, и в связи с определением  $\vec{u} = \frac{c^2}{4} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \vec{v}}$  произведение  $(u, v)$  зависит от скорости  $v$  линейно, а от координаты – только через  $u$ . Поэтому из указанного определения следует зависимость  $\varepsilon_{11}$  от скорости в виде  $\varepsilon_{11} \sim \ln(v/V_s)$ , где  $V_s$  – некоторый масштаб скорости. Для спиральной галактики направление угловой скорости не меняется (величина ее не обязательно постоянна). Поэтому в этом случае наличие второго слагаемого в (4.8) неизбежно влечет появление в потенциале слагаемого вида  $\varepsilon_{11} \sim \ln(r/r_s)$ . Как известно, логарифмический потенциал является решением двумерного уравнения Пуассона, которое здесь, как и в [13], получится из уравнений поля в том же приближении. Для этого нужно в тензоре Эйнштейна не рассматривать слагаемое, связанное с направлением, перпендикулярным плоскости галактики, а в тензоре энергии-импульса учесть принадлежность массы как центральной, так и кольцевой части ее распределения в соответствии с представлениями модели ЦПТ. Тогда выражение для компоненты метрического тензора будет содержать решение уравнения Пуассона не только для трехмерной задачи,  $\varepsilon_{11} \sim 1/r$  (потенциал Ньютона, связанный с ядром галактики), но и для двумерной задачи,  $\varepsilon_{11} \sim \ln r$  (потенциал, связанный с вращением галактики).

Такой логарифмический потенциал для описания гравитации в спиральной галактике был предложен в работе [20] эвристически. Авторы использовали его для попытки описания наблюдений без использования понятия темной материи, и выражали надежду, что такой потенциал можно получить из релятивистских соображений. Этот же потенциал обсуждался и в [21], где он был введен для описания некоторого  $(2+1)$ -мерного скалярного поля, относящегося к космологической доменной стенке, плоскости которой принадлежат плоскости спиральных галактик.

Интересно, что такой логарифмический гравитационный потенциал можно не угадать, как в [20], а получить в рамках общей физики, т. е. непосредственно из наблюдений. Если бы Земля была единственным небесным телом, вращающимся вокруг Солнца, то третий закон Кеплера, имеющий вид  $R^3/T^2 = const$  для орбит планет, из наблюдений получить бы не удалось. Однако именно этот закон как раз и привел Ньютона к выражению для гравитационного потенциала в Солнечной системе в виде  $\Phi_g \sim r_S/r$ . Вместо этого выполненные впоследствии наблюдения движения звезд в спиральных галактиках дали бы закон

$v_{orb} = const$ , т. е.  $R/T = const$  для орбит звезд, что с помощью тех же самых простых выкладок, что и в Ньютонском случае, немедленно приводит к потенциалу  $\Phi_g \sim \ln(r/r_s)$ . То есть плоские кривые вращения очевидным образом обеспечиваются логарифмическим гравитационным потенциалом.

Нетрудно видеть, что в АГД логарифм для спиральной галактики возникает не произвольно и не из опыта, а из метрической теории в связи с учетом анизотропии пространства. Он также не требует введения дополнительных полей. При более сложных распределениях движущихся масс потенциалы будут иметь родственный вид в соответствии с (4.6).

## 6 Классические тесты ОТО на галактическом масштабе

Важным достижением ОТО явилось предсказание и последующее наблюдение так называемых классических тестов – прецессии орбиты, отклонения луча и гравитационного красного смещения. Выясним с помощью модели ЦПТ, чему соответствуют эти явления на галактическом масштабе. Наглядные результаты можно получить с помощью численных расчетов, обусловленных в основном тем, что требуемые функции выражаются с помощью эллиптических интегралов.

### 6.1 Прецессия орбиты

Для того, чтобы описать движение звезды в спиральной галактике вокруг ядра галактики, используем модель ЦПТ и, как и ранее, рассмотрим частицу, двигающуюся по орбите в плоскости контура. Выбирая различные начальные условия, можно обнаружить рассеяние, быстрое падение на центр и продолжительное орбитальное движение (см. примеры на рис. 3). Если начальное состояние приводит к достаточно большому числу оборотов частицы вокруг центра ЦПТ, то на рис. 3а можно видеть то, что можно назвать квази-прецессией. Этот тип движения звезды в масштабах галактики является АГД-аналогом прецессии орбиты в ОТО в масштабах планетной системы. К сожалению, убедиться в соответствии расчетной и наблюдаемой траекторий в масштабе галактики довольно трудно. Представления о прецессии (эллиптических) орбит звезд спиральной галактики вокруг ее центра использовались в [22] при разработке теории волн плотности, приводящих к образованию рукавов. Траектория, представленная на рис. 3б, позволяет

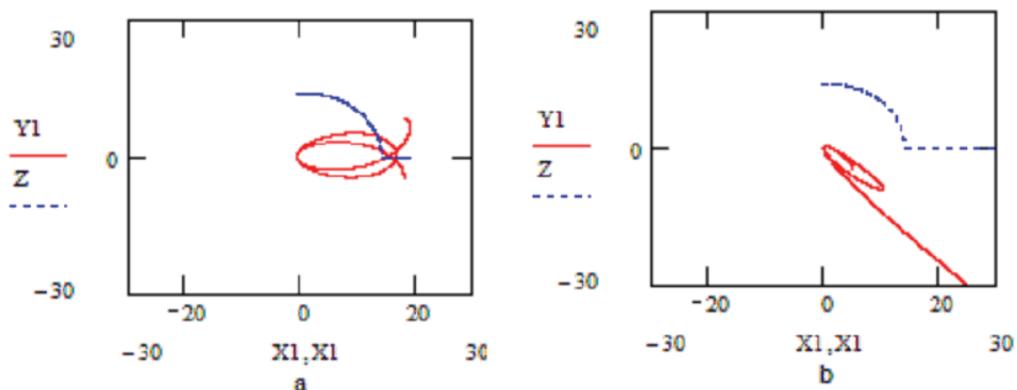


Рис. 3: Траектории, построенные на основе базовой модели АГД: а – квазипрецессия орбиты; б – движение шаровых скоплений, противоречащее закону Кеплера

объяснить, почему шаровые скопления можно зачастую обнаружить в окрестности центра галактики, а не на периферии, где они должны были бы проводить большую часть времени своего существования в соответствии с представлениями Кеплера об эллиптических

орбитах – основе гравитации Ньютона. Действительно, если плоскость траектории скопления близка к плоскости галактики, то влиянием массового тока, связанного с вращением звезд галактики вокруг центра галактики, нельзя пренебречь, и оно может приводить к ситуации, представленной на рис. 3б, т. е. удерживать скопление вблизи центра. Объяснение этой особенности движения шаровых скоплений также указывается в [4] как одно из требований к модификации теории гравитации.

Следует отметить, что численное моделирование системы ЦПТ позволяет обнаружить немало паттернов, весьма сходных с наблюдениями, что позволяет выдвинуть новые гипотезы образования, как самих рукавов, так и баров (перекладин), имеющих у 2/3 спиральных галактик, происхождение которых до сих пор остается неясным.

### 6.2 Отклонение луча

На рис. 3 сопоставлены результаты рассеяния пробного тела на Кулоновском центре и на ЦПТ в рамках развитых выше представлений. Поскольку метрика (4.1), используемая для расчета угла отклонения света, теперь зависит и от собственного движения источников, эти траектории дают представление и о траекториях световых лучей. Сопоставление рис. 4а и рис. 4б позволяет объяснить, почему наблюдаемые величины отклонения световых лучей гравитационными линзами могут существенно (в разы) превышать значения, рассчитанные с помощью ОТО, при этом темная материя не требуется.

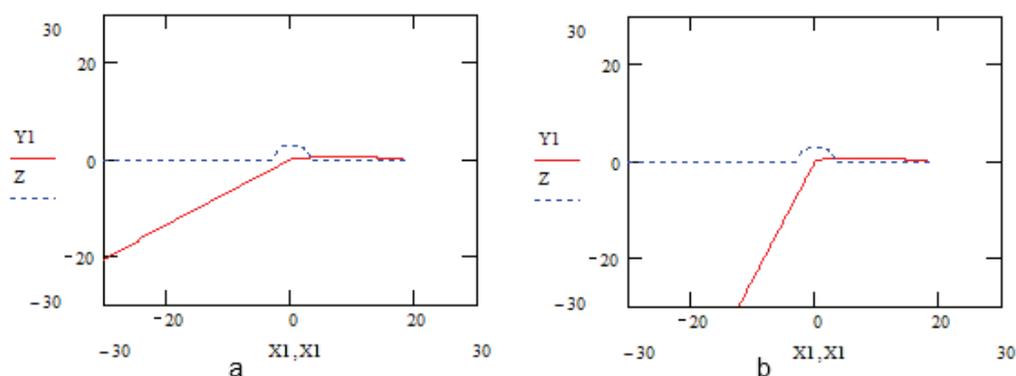


Рис. 4: Траектории рассеяния пробного тела: а – на Кулоновском центре; б – на ЦПТ

Более того, на рис. 5 представлена траектория пробного тела, рассеивающегося на ЦПТ и имеющего два отклонения разного знака, что происходит при изменении направления массового тока на рис. 4б. С точки зрения преломления света это означает, что АГД предсказывает существование рассеивающих гравитационных линз, которые уменьшают угловой размер находящихся за ними объектов. Если подобная линза находится между объектом и наблюдателем на Земле и ориентирована соответствующим образом, то оценка расстояния до объекта может быть завышенной. Если этот объект – астрономическая стандартная свеча, то такая ситуация может послужить причиной неправильной интерпретации результатов наблюдений последнего десятилетия за сверхновыми типа 1а: было сделано предположение, что они указывают на нарушение линейного закона Хаббла [23].

Именно эти наблюдения привели к представлению об ускоренном расширении Вселенной и введению понятия *темная энергия* (отталкивания), которая обеспечивает ускорение, и к появлению новой космологической постоянной (с другим знаком) в уравнениях Эйнштейна. Однако не исключено, что интерпретация наблюдений SN1a с учетом возможного существования рассеивающих гравитационных линз, позволит и не требовать от Вселенной существования темной энергии, в то время как все результаты ОТО в области ее применимости сохранят свою силу.

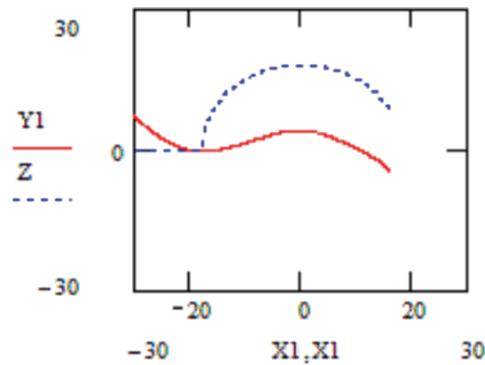


Рис. 5: Траектория рассеяния пробного тела на ЦПТ: два отклонения с разными знаками

Изложим соображения, упомянутые в конце раздела 2. Как известно, впервые космологическая постоянная была введена Эйнштейном для того, чтобы обеспечить наблюдаемую стационарность Вселенной в рамках ОТО. Ее физический смысл соответствовал существованию дополнительной энергии притяжения, характерной для космологических масштабов. Существование этой (непосредственно ненаблюдаемой) энергии представлялось Эйнштейну более вероятным, чем (непосредственно ненаблюдаемая) отсутствие стационарности Вселенной, подразумеваемой решением Фридмана, которое он поначалу считал математически корректным, но не имеющим отношения к физической реальности. После наблюдений Хаббла и интерпретации обнаруженного красного смещения в терминах теории Фридмана, Эйнштейн сделал вывод об ошибочности введения космологической константы. Обе эти ситуации с введением констант схожи в том, что имеющаяся теория не справляется с наблюдениями.

В рамках АГД в гравитационном потенциале в (4.9) появляется дополнительное слагаемое, которое может иметь разные знаки в зависимости от объекта и условий рассмотрения. Это делает введение абсолютной константы менее естественным, чем использование локальных поправок, связанных с относительным движением частей Вселенной.

### 6.3 Гравитационное красное смещение

В случае галактических масштабов неразличимость кинематических и динамических эффектов, т. е. зависимость метрики от скоростей, приводит к неразличимости эффектов типа Доплера, связанных с равномерным движением системы отсчета, и эффектов гравитационного – в некоторых случаях не обязательно красного – смещения.

При переходе к рассмотрению гравитационного потенциала точки, удаленной от наблюдателя, в АГД возникает принципиальное обстоятельство, которое характеризует анизотропное пространство, введенное в связи с намерением более строго учесть принцип эквивалентности и возможности наблюдений. Если начало координат (наблюдатель) находится на одном из тел системы, то с удалением точки, в которой мы хотим определить гравитационный потенциал, на бесконечность, потенциал будет затухать в соответствии с формулой (4.9) по закону, схожему с формулой (2.1), и энергия тел системы также войдет в эффективную массу, которая останется конечной. Однако если все более далеко от рассматриваемой системы тел будет располагаться тело, на котором находится сам наблюдатель, определяющий потенциал в окрестности одного из тел системы, то в потенциал войдет и кинетическая энергия всей системы в целом, измеренная относительно тела отсчета. Это означает, что реализуются ситуации, когда с удалением от наблюдателя системы массивных движущихся тел они приобретают увеличивающийся с расстоянием

наблюдаемый гравитационный потенциал. Это странное на первый взгляд утверждение имеет прямое отношение к идеям Маха, может быть проверено экспериментально и должно приводить к наблюдению гравитационного красного смещения, которое будет увеличиваться с расстоянием до источника. Собственно говоря, наблюдения красного смещения Хаббла могут интерпретироваться как проявления именно этого эффекта, предсказываемого теорией АГД. Это означает, что красное смещение может быть связано не только с радиальным расширением Вселенной, но и с тангенциальными движениями ее удаленных частей. Заметим, что в соответствии с полученным видом гравитационного потенциала в формуле (4.9) первое слагаемое с удалением наблюдателя от системы тел стремится к нулю, но второе будет расти, как  $(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow v^2 \sim r^2$ . Поэтому временной интервал будет обратно пропорционален расстоянию до движущегося источника, что соответствует линейному закону Хаббла. Разброс данных и наблюдаемая анизотропия в законе Хаббла обусловлены различными значениями множителя  $\Omega(x)$  при  $r$ , соответствующего разнообразным тангенциальным движениям.

Косвенным свидетельством в пользу такой интерпретации могут служить измерения тангенциальных скоростей удаленных квазаров [24], представленные на рис. 5, которые оказались удивительно высокими.

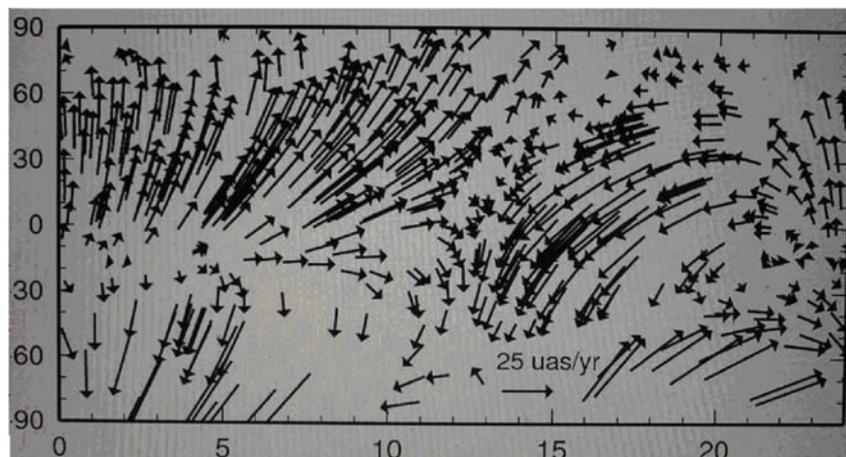


Рис. 6: Наблюдаемое тангенциальное движение квазаров [24]

Таким образом, явления, известные как классические тесты ОТО, не только соответствуют представлениям АГД и поддаются соответствующему расчету, но и наблюдаются. При этом оказывается, что они связаны как раз с теми парадоксальными астрофизическими наблюдениями, которые не находят объяснения в классической ОТО, но являются естественными для АГД.

## 7. Специфический тест АГД

Несмотря на указанные недостатки, связанные с общепринятой интерпретацией наблюдений, включающих понятия темной материи и темной энергии, и отсутствие таковых при использовании для интерпретации теории АГД, следует предложить эксперимент, который будет непосредственно указывать на зависимость метрического тензора от скоростей движущихся масс на галактических масштабах. Как было более подробно описано в [1], таким экспериментом может быть исследование результатов эффекта оптико-метрического параметрического резонанса (ОМПР) для различных астрофизических систем в нашей галактике. Теория ОМПР была разработана в [25], а начавшиеся наблюдения привели к первым обнадеживающим результатам [26]. Эффект ОМПР проявляется при резонансном воздействии гравитационных волн, испускаемых периодическим

источником (тесной двойной звездой), на космический мазер. Сигнал может быть принят обычным радиотелескопом, если выполнены определенные условия ОМПР. Если метрический тензор имеет анизотропию, связанную с вращением спиральной галактики, каковой является и Млечный путь, то условия ОМПР будут зависеть от ориентации исследуемой системы «космический мазер-источник гравитационных волн» относительно плоскости галактики. Это можно зафиксировать при наблюдениях, и подходящие астрофизические системы были предложены в [1]. В работе [18] выполнен расчет влияния анизотропии на условия ОМПР. Сопоставление с результатами соответствующих наблюдений можно будет провести, когда объем накопленного материала наблюдений станет достаточным для статистического анализа.

### Выводы и обсуждение

Основной вывод настоящей работы сводится к тому, что имеются основания реинтерпретировать накопленные результаты наблюдений, выполненных на масштабах галактики и выше, в связи с невозможностью последовательно преодолеть возникшие расхождения с теоретическими предсказаниями ОТО путем введения «темных понятий» и произвольного изменения вида уравнений. К счастью, кардинальной ломки сложившихся представлений и отказа от основ ОТО это не потребует. В то же время косметические попытки, связанные с угадыванием метрик, в том числе таких известных, как метрика Шварцшильда или метрика Фридмана, недостаточны. Причина этого состоит в подчеркнутой В. А. Фоком нерасторжимой взаимосвязи уравнений поля и уравнений геодезической. Такие обстоятельства, как учет принципа эквивалентности во всей его полноте, общие свойства Лоренц-инвариантных полей, соответствующих силам, изменяющимся по закону обратных квадратов, геометрическая основа «уравнений Максвелла» одновременно вынуждают и позволяют использовать закон гравитации, учитывающий скорости движения гравитирующих тел. Это приводит к необходимости введения анизотропной метрики и соответствующего анизотропного пространства. Полученные общие выражения для геодезической, для гравитационной силы и гравитационного потенциала, с одной стороны, имеют своим пределом известные выражения ОТО и Ньютоновские законы, а с другой, – на галактических масштабах – правильно описывают результаты наблюдений без использования темной материи. Известные классические тесты ОТО на галактических масштабах соответствуют наблюдаемым явлениям, с которыми как раз и связаны проблемы классической теории. При этом появляется теоретическая возможность обойтись и без темной энергии, что, впрочем, нуждается в экспериментальной проверке.

В результате использования подхода АГД все результаты классической ОТО, характерные для масштаба планетных систем остаются в силе, расхождения с теорией на галактических масштабах последовательно устранены, предложен характерный эксперимент по выявлению анизотропии на галактическом масштабе, для которого выполнен теоретический расчет и проведены первые обнадеживающие наблюдения.

Подход АГД уместно применить и на следующих масштабах, соответствующих галактическим кластерам и ячейкам крупномасштабной структуры Вселенной, но эти задачи, как и многие другие, возникающие в связи с реинтерпретацией наблюдений, выходят за пределы данной статьи.

### Благодарности

Работа была выполнена в рамках гранта РФФИ 07-01-91681-РА\\_а. Автор выражает признательность Д. Г. Павлову за поддержку, а также Н. Войку, Н. А. Разумовскому, А. Я Казакову и особенно С. С. Кокареву за полезные обсуждения.

## Литература

- [1] С. В. Сипаров. 2006, ГЧГФ 26, с. 155; S. Siparov. 2007, In “*Space-Time Structure: Algebra and Geometry*”, p. 495, Moscow; S. Siparov. 2008, Acta Mathematica APN, 241, p. 135
- [2] S. Siparov. 2008, arXiv: 0809.1817 v3; S. Siparov. 2009, arXiv: 0910.3408
- [3] С. В. Сипаров. 2008, ГЧГФ 210, с. 64
- [4] A. Aguirre, C.P. Burgess, A. Friedland and D. Nolte. 2001, CQG 18, R223
- [5] В. А. Фок. 1939, ЖЭТФ 94, с. 375
- [6] F. Zwicky. 1937, ApJ 86, p. 217
- [7] D. Clowe et al. 2006, ApJ Lett. 648, L109
- [8] M. Milgrom. 1983, ApJ. 270, p. 384
- [9] J.D. Bekenstein, and M. Milgrom. (1984), ApJ 286, p. 7; J. D. Bekenstein. (2007) arXiv: 0701848v2
- [10] C. Brans and R. H. Dicke. 1961, Phys. Rev. 124, p. 925
- [11] Д. Г. Павлов. 2005, ГЧГФ 2 (4), с. 12
- [12] Г. И. Гарасько. 2006 ГЧГФ 1 (5), с. 3
- [13] A. Einstein. 1916, Ann. d. Phys. 49, p. 769
- [14] A. Einstein, I. Infeld and B. Hoffmann. 1938, Ann. Math. 39 (№1), p. 65
- [15] K. Schwarzschild. 1916, Sitzungsber. d. Berl. Akad. p.189
- [16] A. Friedmann. 1922, Zs. Phys., 10, p. 377
- [17] M. L. Ruggiero and A. Tartaglia. 2002, arXiv: [gr-qc] 0207065v2
- [18] S. Siparov & N. Brinzei. 2008, arXiv: [gr-qc] 0806.3066; N. Brinzei, S. Siparov. 2007, ГЧГФ 4, с. 41; S. Siparov, N. Brinzei. 2008 ГЧГФ 2 (10), с. 56
- [19] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. 1957, «*Электродинамика сплошных сред*», Москва.
- [20] W. H. Kinney & M. Brisudova. 2000, arXiv: [astro-ph] 0006453
- [21] G. Dvali, G. Gabadadze & M. Shifman. 2001, arXiv: [astro-ph] 0102422v2
- [22] C. C. Lin & F. H. Shu. 1964, ApJ 140, p. 646
- [23] A. Riess et al. 1998, Astronomical Journal 116, p. 1009
- [24] D. S. MacMillan. 2003, arXiv: [astro-ph] 0309826
- [25] S. V. Siparov. 2004, Astron. & Astrophys., 416, p. 815
- [26] С. В. Сипаров, В. А. Самодуров. 2009, Комп. опт. 33 1, с. 79

## Gravitation law and source model in the anisotropic geometrodynamics

S. V. Siparov

*State University of Civil Aviation, St. Petersburg, Russia,  
Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friaizino, Russia  
sergey@siparov.ru*

The GRT modification taking into account the dependence of metric on the velocities of the sources is built. It is shown that this dependence follows from the equivalence principle and from the inseparability of the field equations and geodesics equations. As it is known, the latter are the conditions of the field equations solvability, and their form coincides with Newtonian one only in the lowest approximation. The obtained modification provides the explanation for the flat character of the rotation curves of spiral galaxies, for Tully-Fisher law, for some specific features of globular clusters behavior and for the essential excess of the observable gravitational lens effect over the predicted one. Neither dark matter nor arbitrary change of dynamics equations appeared to be needed. Important cosmological consequences are obtained.

**Keywords:** modified theory of gravity, anisotropic metric, rotation curves, Tully-Fisher law.

**PACS:** 04.20.Cv, 04.50.Kd, 95.30.Sf, 98.20.Gm, 98.52.Nr, 98.80.Es.

## О ФОРМЕ АНАЛОГОВ МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА НА ПЛОСКОСТИ ДВОЙНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Д. Г. Павлов<sup>1</sup>, М. С. Панчелюга<sup>1,2</sup>, В. А. Панчелюга<sup>1,2</sup>

(1) – НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, г. Фрязино,

(2) – Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, г. Пущино  
*panvic333@yahoo.com*

Построены предфракталы множества Жюлиа для случая квадратичного отображения  $z_{n+1} \rightarrow z_n^2 + c$ , при  $c \neq 0$  на плоскости двойной переменной. Описан численный алгоритм правильно воспроизводящий форму предфракталов множества Жюлиа и проиллюстрированы пределы его применимости для случая квадратичного отображения  $z_{n+1} \rightarrow z_n^2 + c$ , при  $c = 0$ . Предложены аналитические методы, позволяющие исследовать форму аналогов множеств Жюлиа на плоскости двойной переменной в общем случае. Проиллюстрировано применение данных методов для предфракталов 1–3 поколения.

**Ключевые слова:** фракталы, множество Жюлиа, двойные числа, фракталы на двойных числах.

### 1. Введение

В работе [1] было показано наличие фрактальных свойств у аналогов множеств Жюлиа и Мандельброта на плоскости двойной переменной,  $H_2$ . Как отмечено в [1], результаты полученные в этой работе являются предварительными, т. к., показывая фрактальные свойства аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа они, тем не менее, оставляют открытым вопрос об истинной форме упомянутых множеств. Первый шаг в направлении исследования формы аналога множества Жюлиа на плоскости двойной переменной сделан в [2], где проведено детальное аналитическое исследование формы данного множества в случае квадратичного отображения:

$$z_n \rightarrow z_{n-1}^2 + c, \quad z, c \in H_2, \quad (1)$$

при  $c = 0$ , отдельно для случаев  $z_n \rightarrow \infty$  и  $|z_n| \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . В этой работе было показано, что известное в литературе [3–6] «квадратное» множество Жюлиа является результатом аналитического решения, так же как и впервые полученное в [2] «гиперболическое» множество. Несмотря на то, что оба подхода  $z_n \rightarrow \infty$  и  $|z_n| \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  приводят к правильным результатам, подход  $|z_n| \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  является более предпочтительным, т. к. позволяет выявить характерные для плоскости двойной переменной гиперболические «хвосты» и связанные с ними линии делителей нуля, которые отсутствуют в случае  $z_n \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Также в [2] был подробно рассмотрен вопрос численного воспроизведения результатов, полученных аналитически, и отмечено, что часто «квадратное» множество Жюлиа является следствием неправомерного перенесения на плоскость двойной переменной методов построения фрактальных множеств, обычно используемых на комплексной плоскости, и, по-сути, может рассматриваться как вычислительная ошибка.

Настоящая работа продолжает исследование формы аналогов множеств Жюлиа на плоскости двойной переменной начатое в [2] и рассматривает результаты применения компьютерного алгоритма, позволяющего, в общем случае, правильно воспроизводить форму данных множеств для предфракталов 1–5 поколения. Также рассмотрены аналитические методы, позволяющие исследовать форму множеств Жюлиа на  $H_2$  в общем случае.

## 2. Метод построения

Все изображения фрактальных множеств, представленные в настоящей работе, получены с использованием метода линий равного модуля. Данный метод состоит в следующем. На первом шаге задается сетка чисел  $z_{0ij} \in H_2$ , по сути, являющаяся частью плоскости двойной переменной. Для каждого  $z_{0ij}$  вычисляется квадрат модуля  $|z_{0ij}|^2$ . После этого с заданным шагом  $\Delta$  проводятся линии равного модуля, т. е. линии, все точки которых удовлетворяют условию:

$$|z_{0ij}|^2 = \Delta m, \quad (2)$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Т. к. описанная процедура проводится над начальными, «нулевыми» значениями  $z_{0ij}$ , то данный шаг для удобства будем называть нулевой итерацией. Полученный для нулевой итерации результат обозначен на рис. 2 и рис. 3 для двойных (слева) и комплексных (справа) чисел нулем. Легко видеть, что нулевая итерация дает представление об окрестности точки для соответствующей числовой системы.

На втором шаге для каждого  $z_{0ij}$  согласно (1) вычисляется первая итерация квадратичного отображения и мы получаем сетку значений  $z_{1ij} \in H_2$ . Далее, для каждого  $z_{1ij}$  вычисляются  $|z_{1ij}|^2$  для которых, аналогично предыдущему, проводим линии через точки, удовлетворяющие условию:

$$|z_{1ij}|^2 = \Delta m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Аналогично, для  $n$ -го шага квадратичного отображения (1) вычисляется новая сетка значений  $z_{nij} \in H_2$ , для каждого из которых получаем квадрат модуля двойного числа  $|z_{nij}|^2$ :

$$|z_{nij}|^2 = x_{nij}^2 - y_{nij}^2 = (x_{nij} + y_{nij})(x_{nij} - y_{nij}) \quad (4)$$

где  $x_{nij}$  и  $y_{nij}$  – действительная и мнимая части двойного числа  $z_{nij}$  и  $x_{nij}, y_{nij} \in \mathbb{R}$ . После этого, проводим линии через точки, удовлетворяющие условию:

$$|z_{nij}|^2 = \Delta m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Как уже отмечалось, вычисления с использованием модуля числа более полно отражают некоторые особенности, специфичные для двойных чисел. Но кроме этого, использование выражения для квадрата модуля в виде  $(x_{nij} + y_{nij})(x_{nij} - y_{nij})$ , в описанном выше численном алгоритме, позволяет несколько отсрочить момент, когда вычисляемые значения начинают превосходить компьютерное представление числа.

## 3. Аналог множества Жюлиа при $c = 0$

Метод линий равного модуля может быть использован для построения аналога множества Жюлиа на  $H_2$  при  $c = 0$ . Исследованность [2] этого множества и возможность его аналитического описания делают его удобным объектом для тестирования используемых численных методов. Нижеследующие построения можно рассматривать как тест для метода линий равного модуля.

На рис. 1 показан пример использования линий равного модуля для построения аналога множества Жюлиа при  $c = 0$  для первых двадцати итераций квадратичного отображения (1). Задающее форму множества Жюлиа семейство из четырех гипербол, являющихся результатом аналитического исследования (1) при  $c = 0$ , выделены более жирными линиями.<sup>1</sup> Сплошной черный цвет соответствует разности  $0 \div 0.21$  в значениях квадрата модуля.

<sup>1</sup> В электронной версии – красными линиями. Вариант статьи с цветными иллюстрациями доступен на Интернет-сайте журнала: <http://www.polynumbers.ru/section.php?lang=ru&genre=3>.

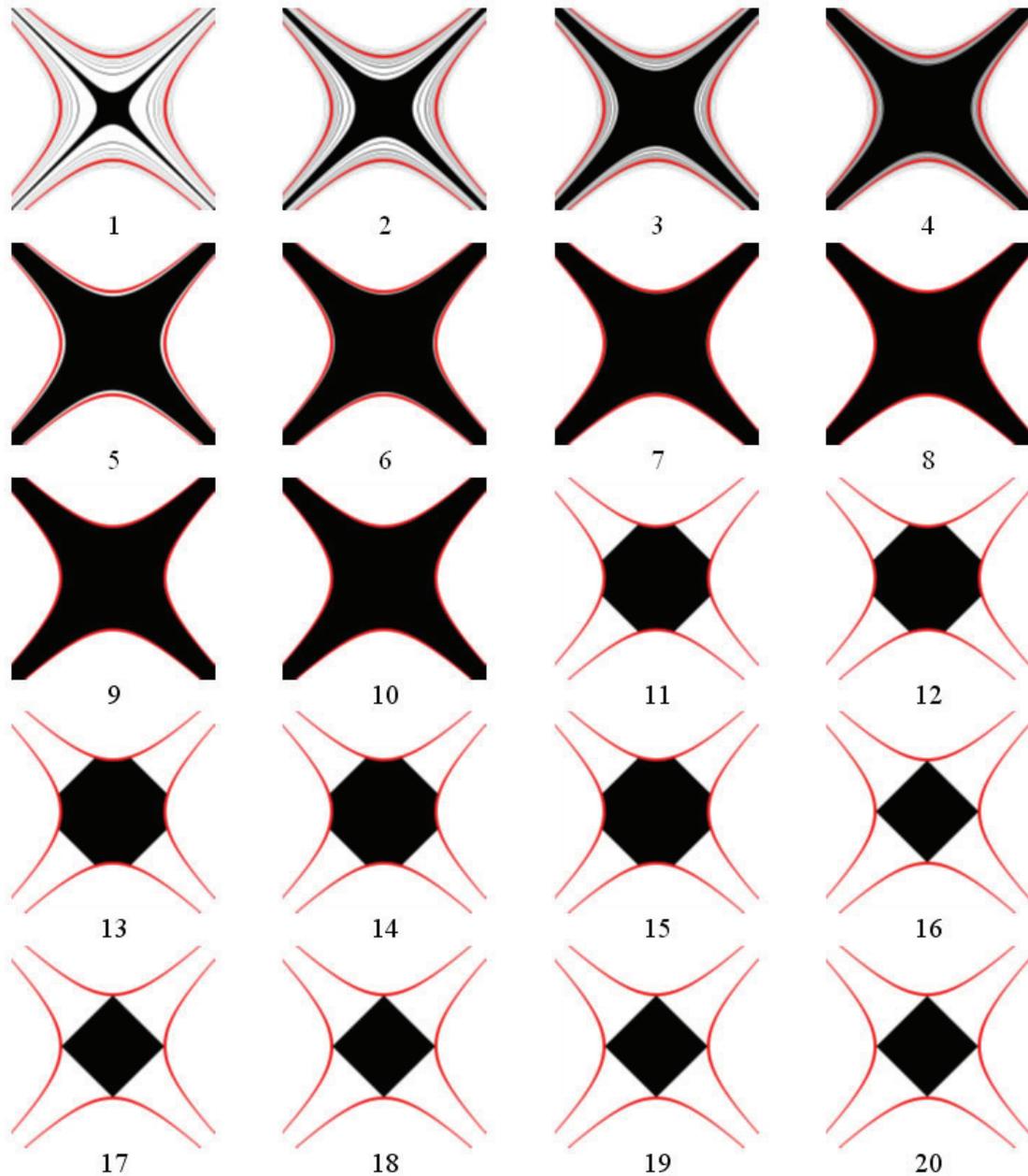


Рис. 1: Пример использования метода линий равного уровня для построения аналога множества Жюлиа при  $c = 0$  для первых двадцати итераций отображения (1). Начиная с седьмой итерации мы имеем полное совпадение численного построения с аналитическим решением, а начиная с одиннадцатой итерации – появляются искажения обусловленные выходом значений итерационного процесса за границы компьютерного представления числа.

В построениях на рис. 1 используется  $\Delta = 0.21$ . Из приведенных рисунков, которые соответствуют последовательным итерациям, легко видеть, что, начиная с седьмой итерации, мы имеем полное совпадение между численным построением и аналитическим решением. Но, начиная с 11-й итерации, численное построение более не воспроизводит аналитическое: множество Жюлиа начинает терять свои гиперболические «хвосты». После небольшого числа итераций форма множества Жюлиа стабилизируется и после 12-й итерации остается неизменной – черный квадрат, который, в данном случае, считать множеством Жюлиа было бы ошибкой. В действительности, все изменения формы множества Жюлиа, происходящие после 10-й итерации, обусловлены выходом итерационного процесса (1) за пределы компьютерного представления числа.

#### 4. Аналоги множеств Жюлиа при $c \neq 0$

В настоящем разделе метод линий равного модуля применен для построения аналогов множеств Жюлиа на  $H_2$  с использованием (1) при  $c \neq 0$ . Также как и в предыдущем разделе линии равного модуля проводились с шагом  $\Delta = 0.21$  в диапазоне  $0 \dots 2$ . Параллельно с построением множеств на плоскости двойной переменной для тех же значений параметра  $c$  строились комплексные множества Жюлиа.

Два примера построения множеств Жюлиа для разных значений параметра приведены на рис. 2 и рис. 3. На рис. 2 приведены предфракталы первых пяти поколений для квадратичного отображения (1) при  $c = -1.3 + j0$ . В левом столбце показаны аналоги множества Жюлиа на  $H_2$ , справа – множество Жюлиа на множестве комплексных чисел. Цифры между изображениями двойного и комплексного множеств обозначают номер итерации. Предфракталы первых четырех поколений для квадратичного отображения (1) при  $c = -1 + j0.2$  показаны на рис. 3. Принцип построения рис. 3 аналогичен таковому для рис. 2. Как следует из предыдущего раздела, приведенные на рис. 2 и рис. 3 изображения получены для практически максимально возможного числа итераций, при котором не возникают проблемы с выходом (1) за пределы компьютерного представления числа.

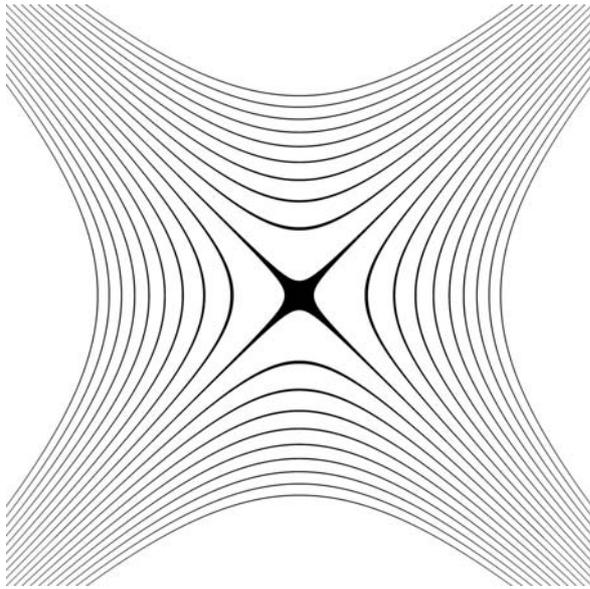
Также хотелось бы отметить, что представленные на рис. 2 и рис. 3 множества являются не фракталами, а предфракталами. Для получения изображения фракталов мы должны отобразить бесконечное число итераций, что всегда технически невыполнимо. Поэтому любое графическое изображение фрактальных множеств должно рассматриваться, как предфрактал. Очевидно, фрактальные свойства получаемых множеств в полном объеме могут быть изучены только аналитическими методами.

Рассмотрим структуру полученных множеств. Как можно видеть из последовательности предфракталов в левом столбце, рис. 2, существует определенная регулярность их формирования, отчетливо наблюдаемая при рассмотрении последовательных итераций. Рассмотрим ее на примере рис. 2.

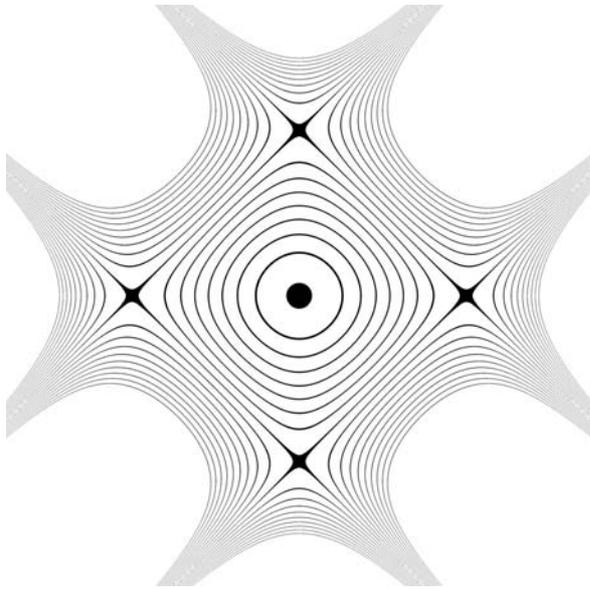
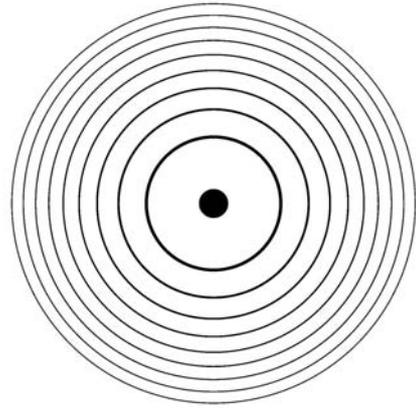
Можно видеть, что фигура, полученная на нулевой итерации – семейство четырех гипербол – присутствует на фигуре, полученной в первой итерации в виде четырех копий, расположенных в верхнем, нижнем, левом и правом углах. Можно сказать, что центральная тема нулевой итерации повторена четыре раза в предфрактале первой итерации.

Легко видеть, что описанная закономерность повторяется и для второй итерации: центральная часть первой итерации – маленький, черный круг окруженный концентрическими замкнутыми линиями, вписанными в квадрат – повторена четыре раза на предфрактале второй итерации. При этом на второй итерации возникает новая центральная часть, которая четырежды повторяется на третьей итерации и т.д.

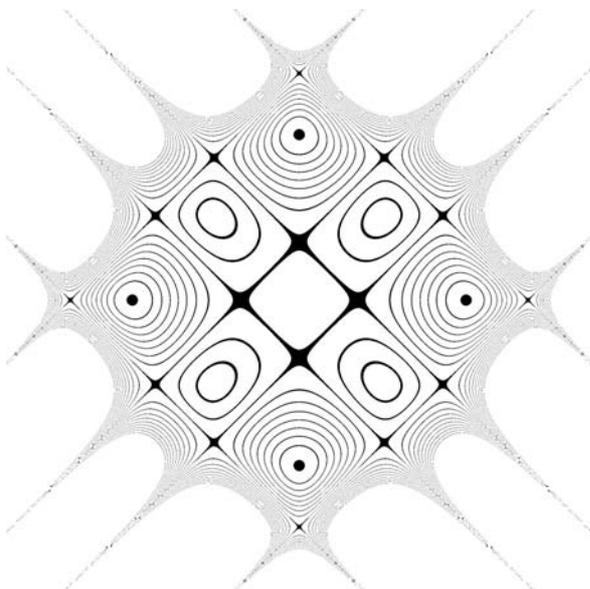
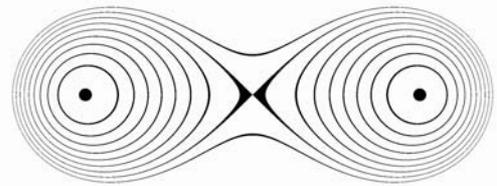
Последовательность предфракталов на  $H_2$ , представленная на рис. 2, иллюстрирует существование общего правила: центральная часть фигуры, полученная для  $n$ -й итерации повторяется четыре раза в «углах» следующей,  $n + 1$  итерации, а центральная часть фигуры для  $n + 1$  итерации повторяется четыре раза для  $n + 2$  итерации и т.д. Также можно заметить, что если мы рассматриваем  $n + 1$  итерацию, то все центральные части предыдущих итераций от нулевой до  $n$ -й присутствуют в углах предфрактала  $n + 1$  степени. В некотором смысле предфрактал  $n + 1$  степени содержит в себе копии всех своих предшественников. Если надлежащим образом увеличивать части фигуры, расположенные в углах, то мы сможем проследить всю последовательность от нулевой итерации до  $n$ -й.



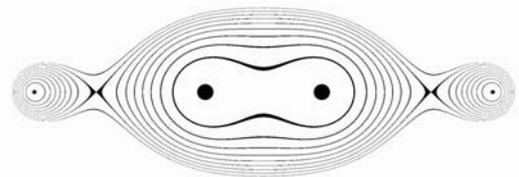
0



1



2



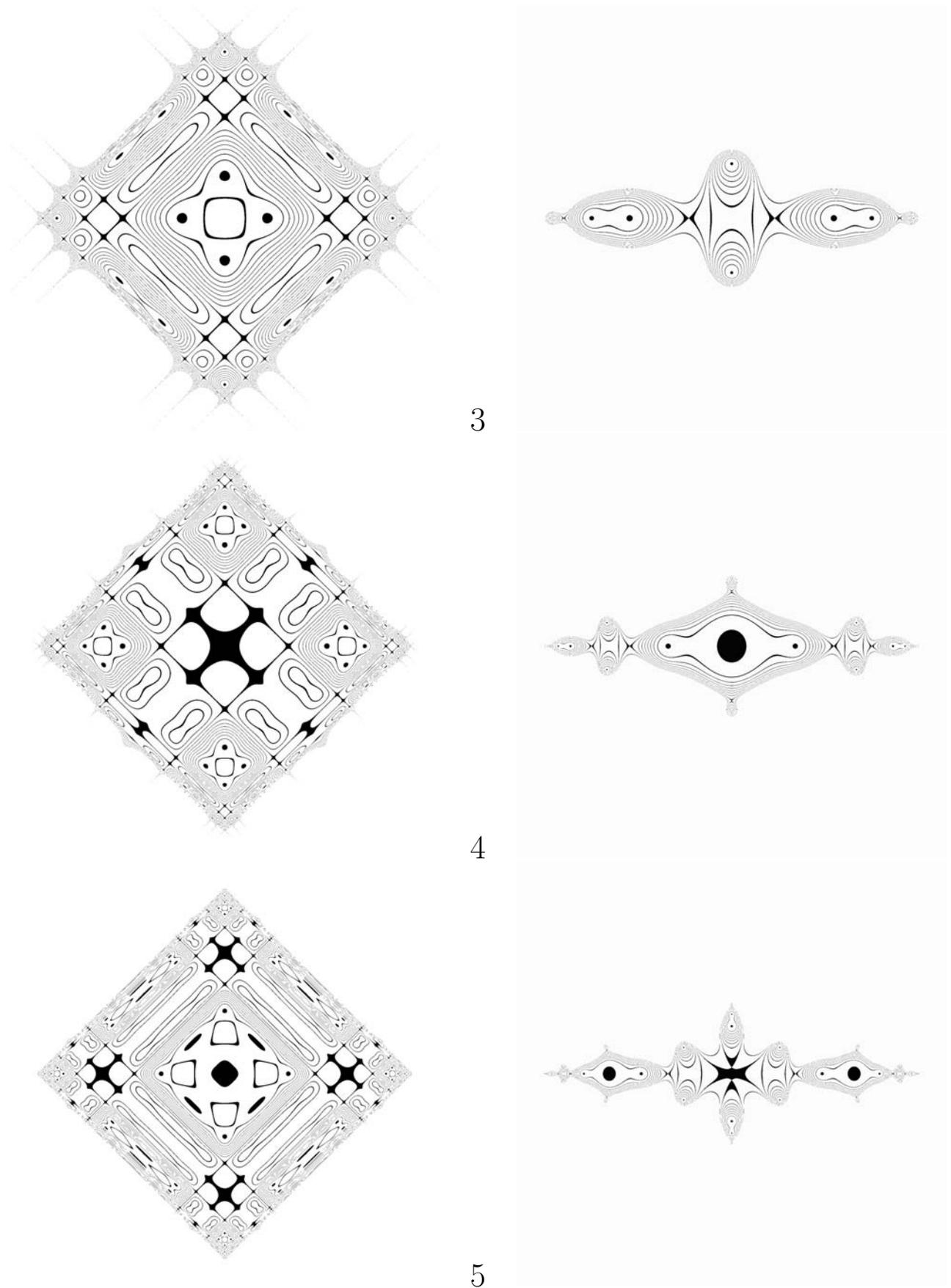


Рис. 2: Предфракталы первых 5 поколений для квадратичного отображения (1) при  $c = -1.3 + j0$ . Левый столбец – аналоги множества Жюлиа на  $H_2$ ; правый – множество Жюлиа на  $C$ .

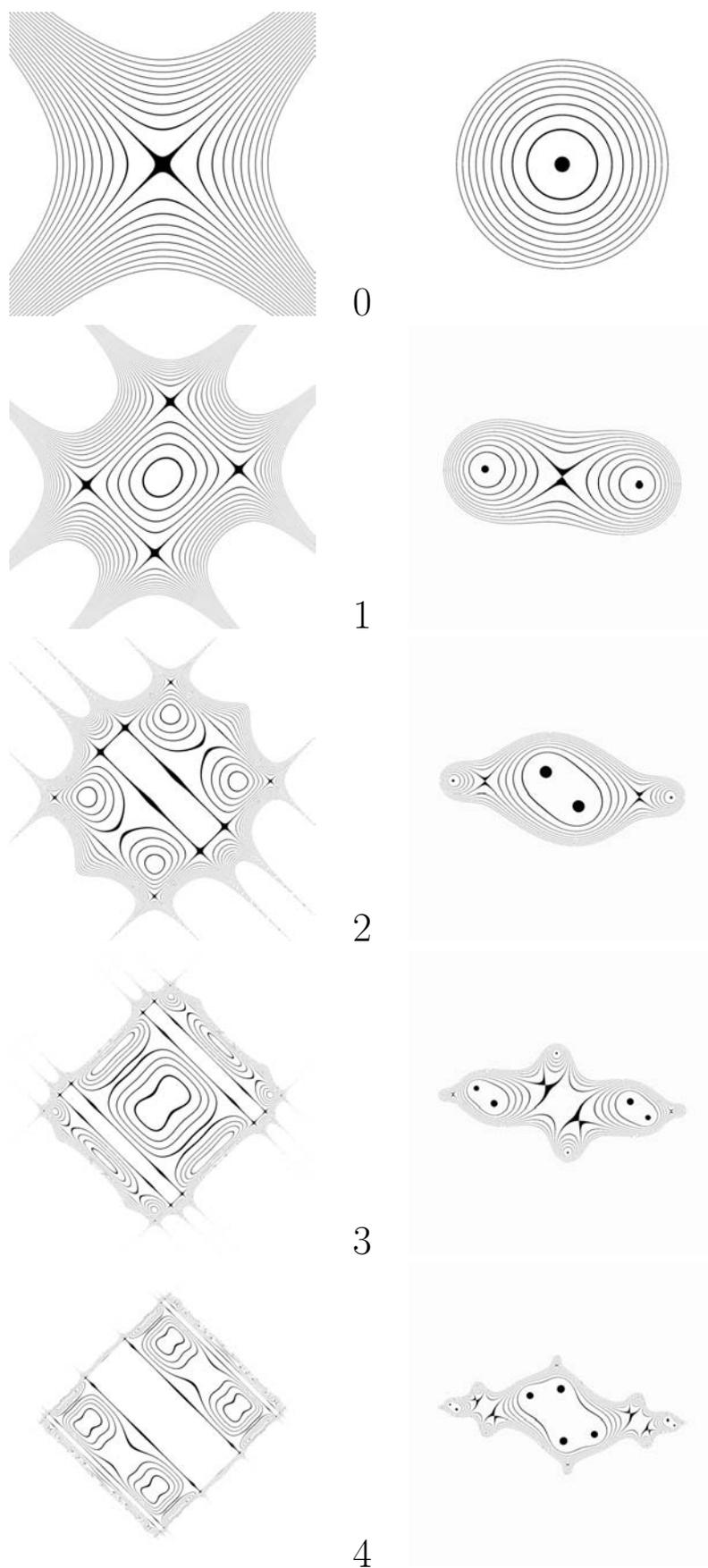


Рис. 3: Предфракталы первых 4 поколений для квадратичного отображения (1) при  $c = -1 + j0.2$ . Левый столбец – аналоги множества Жюлиа на  $H_2$ ; правый – множество Жюлиа на  $C$ .

### 5. Форма аналогов множеств Жюлиа при $c \neq 0$ .

Рассмотрим некоторые примеры определений множества Жюлиа существующие в литературе. «Множество Жюлиа функции  $f$ , обозначаемое  $J(f)$ , определяется как

$$J(f) = \partial \{z : f^{(n)} \rightarrow \infty, \text{ при } n \rightarrow \infty\}.$$

Таким образом, множество Жюлиа функции  $f$  есть граница множества точек  $z$  стремящихся к бесконечности при итерировании  $f(z)$ » [7, с. 231]. Такого же определения придерживается и автор [8]: «Множество Жюлиа  $J(a, b)$  – это граница области  $D_\infty$  (то есть граница области притяжения бесконечности)» [8, с. 100]. В [9] множеством Жюлиа называются просто границы областей притяжения.

Необходимо отметить, что приведенные определения формировались в ходе исследований фракталов на комплексной плоскости. Их применимость в случае двойных чисел требует отдельного рассмотрения.

Численное построение предфракталов аналога множества Жюлиа на  $H_2$ , рис. 2 – рис. 3, показывает, что границы представленных множеств состоят из набора гиперболических хвостов. Подобные гиперболические хвосты хорошо различимы на предфракталах малых порядков. Но с увеличением порядка предфрактала их становится все труднее визуализировать. Как можно видеть, из приведенных на рис. 2 предфракталов, они практически неразличимы для четвертой итерации, а множество, полученное на пятой итерации выглядит как квадрат с практически гладкими границами.

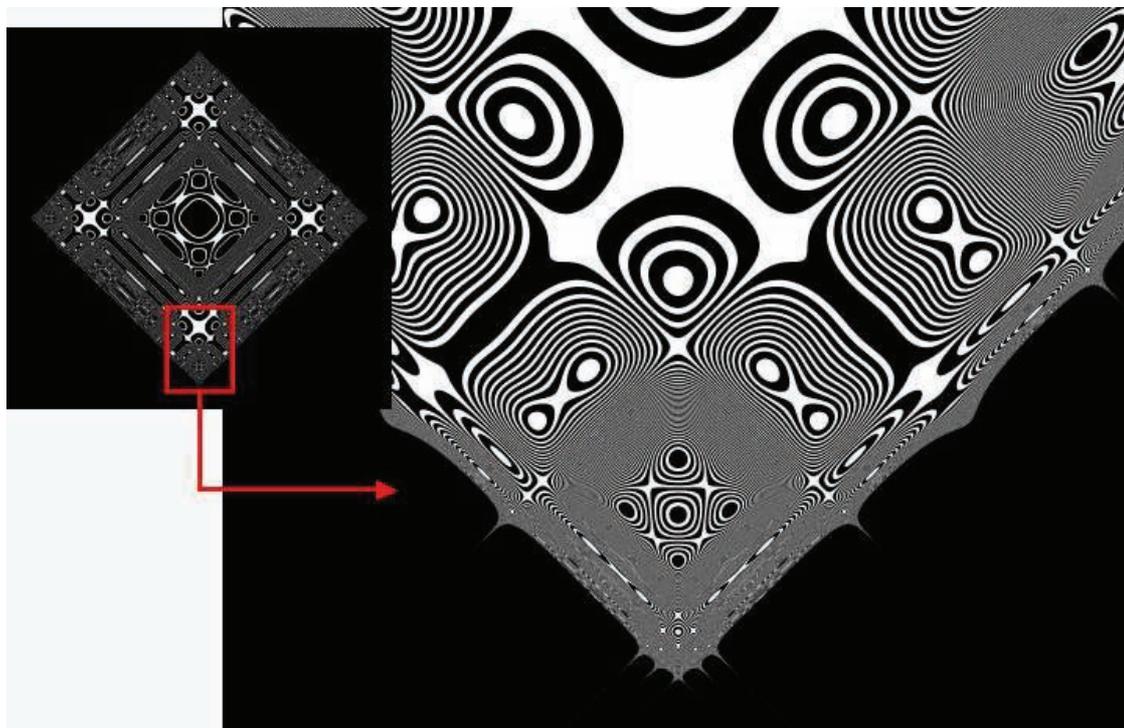


Рис. 4: Гиперболические хвосты аналога множества Жюлиа на фрагменте предфрактала пятого порядка.

Но техническая трудность визуализации гиперболических хвостов с ростом номера итерации, не означает их отсутствия. На рис. 4, слева, показан предфрактал множества Жюлиа, полученный для пятой итерации. Создается впечатление, что форма множества – квадрат с гладкой границей. Прямоугольник отмечает область, которая показана (по стрелке) в большем масштабе справа от исходного множества при  $\Delta = 0.05$ . На увеличенной части

рисунка хорошо видны гиперболические хвосты, практически неразличимые на изображении исходного множества. С увеличением номера итерации (1) число таких хвостов увеличивается. Трудности их компьютерной визуализации не должны приводить к ложному заключению, что форма множества Жюлиа – квадрат или прямоугольник с гладкими границами.

## 6. Аналитическое вычисление особенностей формы аналогов множеств Жюлиа при $c \neq 0$

### Идея метода аналитического вычисления множества Жюлиа

Предшествующее рассмотрение показывает сложность получения границы множества Жюлиа численными методами. С увеличением числа итераций гиперболические хвосты становятся все более «тонкими» и после 5–6 итераций становятся практически невоспроизводимыми. Численно их можно визуализировать только при очень большом увеличении. Поэтому, для корректного воспроизведения формы множества Жюлиа при  $c \neq 0$  необходимо использование аналитических методов.

Идею такого метода дает структура предфрактала множества Жюлиа на нулевой итерации, рис. 2. Из приведенного рисунка видно, что в данном случае гиперболические хвосты, очевидно, связаны с делителями нуля и формирующие их линии равного модуля расположены симметрично относительно линий делителей нуля, т. е. линий для которых выполняется условие  $|x| = |y|$  и, следовательно,  $|z| = 0$ . Наше предположение состоит в том, что и для всех итераций сохраняется та же закономерность: гиперболические хвосты множества Жюлиа связаны с делителями нуля, т. е. для любого  $z_n$  (1) линии делителей нуля  $|z_n| = 0$  связаны с гиперболическими хвостами множества Жюлиа. Найдя для данной итерации все линии для которых  $|z_n| = 0$  мы, тем самым, сможем найти положение гиперболических хвостов, образующих границу множества Жюлиа. Рассмотрим в явном виде уравнения линий делителей нуля для последовательных итераций, которые показаны на рис. 2.

### Нулевая итерация

В данном случае линии делителей нуля получаются из соотношения  $|x|=|y|$  и в явном виде могут быть записаны:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases} \quad (6)$$

Необходимо отметить сходство того, что мы называем «нулевой итерацией» и множеством Жюлиа при нулевом значении параметра [2].

### Общий случай

Вначале рассмотрим значение  $z_n$  на  $n$ -м шаге итерационной процедуры (1). Для этого, представим (1) в изотропном базисе. В этом базисе двойное число  $z = x + jy$  и константа  $c = p + jq$  имеют следующий вид:

$$z = (x - y)e + (x + y)e^* = Xe + Ye^*, \quad (7)$$

$$c = (p - q)e + (p + q)e^* = Pe + Qe^*, \quad (8)$$

где  $e = (1 - j)/2$  и  $e^* = (1 + j)/2$  и  $x, y, p, q \in \mathbb{R}$ . Используя (7) и (8) возможно получить  $z_n$  для последовательных шагов итерационной процедуры (1):

$$z_1 = (X^2 + P)e + (Y^2 + Q)e^*, \quad (9)$$

$$z_2 = ((X^2 + P)^2 + P)e + ((Y^2 + Q)^2 + Q)e^*, \quad (10)$$

$$z_3 = (((X^2 + P)^2 + P)^2 + P)e + (((Y^2 + Q)^2 + Q)^2 + Q)e^*, \quad (11)$$

$$z_4 = (((((X^2 + P)^2 + P)^2 + P)^2 + P)e + (((((Y^2 + Q)^2 + Q)^2 + Q)^2 + Q)e^*, \quad (12)$$

$$\dots$$

$$z_n = \underbrace{\left( \dots \left( X^2 + P \right)^2 + P \right)^2 + \dots + P}_{n} e + \underbrace{\left( \dots \left( Y^2 + Q \right)^2 + Q \right)^2 + \dots + Q}_{n} e^*. \quad (13)$$

Как уже отмечалось, уравнения делителей нуля находятся из условия  $|z| = 0$ . Исходя из (4), а также (7) и (8) квадрат модуля двойного числа может быть записан в виде:

$$|z|^2 = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = XY. \quad (14)$$

Следовательно, условие  $|z| = 0$  эквивалентно условию

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}. \quad (15)$$

Условие (15) дает возможность получить уравнения для линий делителей нуля.

### Первая итерация

Множество Жюлиа после первой итерации отображения (1) для  $c = 1.3 + j0$  показано на рис. 2. Легко видеть, что в данном случае у нас имеются восемь гиперболических хвостов, положения которых, предположительно, связано с делителями нуля. Рассмотрим данное предположение.

Используя (9) и (15) запишем для первой итерации:

$$\begin{cases} X^2 + P = 0 \\ Y^2 + Q = 0 \end{cases}. \quad (16)$$

Из (16) получим значения X и Y:

$$\begin{cases} X = \pm\sqrt{-P} \\ Y = \pm\sqrt{-Q} \end{cases}. \quad (17)$$

Переходя в обычный базис можем записать выражения для линий делителей нуля в явном виде:

$$\begin{cases} y' = \mp\sqrt{-P} + x' = \mp\sqrt{q-p} + x' \\ y'' = \pm\sqrt{-Q} - x'' = \pm\sqrt{-p-q} - x'' \end{cases}, \quad (18)$$

где пары переменных  $(x', y')$  и  $(x'', y'')$  определяют соответствующие пары прямых на рис. 5.

Из (18) следует, что  $x' = x''$ ,  $y' = -y''$  и  $|y'| = |y''|$ , т.е. точки пересечения линий делителей нуля с осями координат совпадают для обеих пар прямых, соответствующих делителям нуля. Используя численное значение  $c = -1.3 + j0$  получим для точек пересечения следующие значения:  $(1.14, 0)$ ,  $(-1.14, 0)$ ,  $(0, 1.14)$  и  $(0, -1.14)$ .

На рис. 5 показаны линии делителей нуля, построенные на основе (18). Как можно видеть, в случае первой итерации все восемь гиперболических хвостов, формирующих предфрактал множества Жюлиа расположены симметрично относительно линий делителей нуля. Полученный результат говорит о том, что в случае первой итерации сделанное нами предположение выполняется, т.е., положение гиперболических хвостов определяется положением линий делителей нуля.

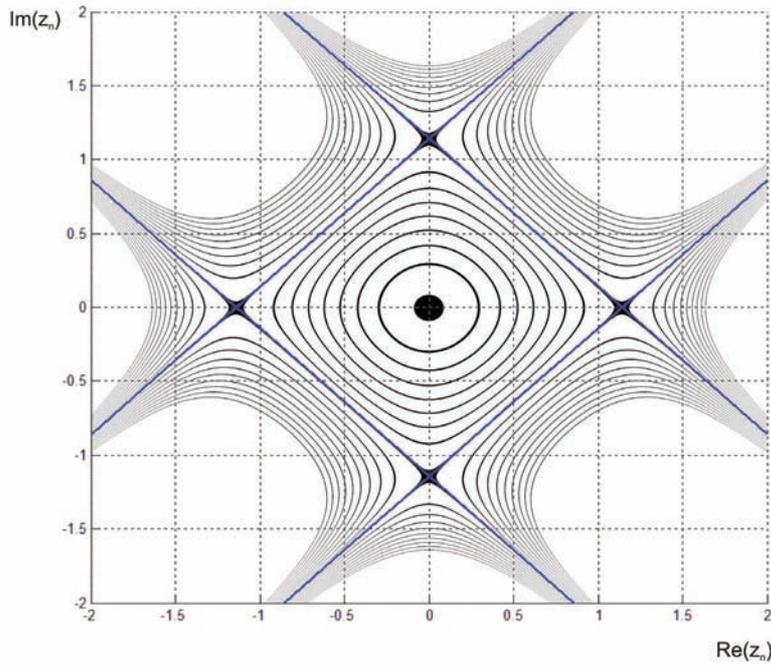


Рис. 5: Предфрактал первого поколения для аналога множества Жюлиа на  $H_2$  и линии делителей нуля для первой итерации. Видны восемь гиперболических хвостов, связанных с двумя парами линий делителей нуля  $|z_1| = 0$ .

**Вторая итерация**

Используя (10) для второй итерации условие (15) может быть записано в виде:

$$\begin{cases} (X^2 + P)^2 + P = 0 \\ (Y^2 + Q)^2 + Q = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Из (19) получаем:

$$\begin{cases} X = \pm\sqrt{\pm\sqrt{-P} - P} \\ Y = \pm\sqrt{\pm\sqrt{-Q} - Q} \end{cases} \quad (20)$$

В силу того, что при построении рис. 6 используется значение  $c = -1.3 + j0$ , то  $P = Q = p = -1.3$ , т.к.  $P = p - q$ ,  $Q = p + q$  и  $q = 0$ . Следовательно,  $X = Y$  и (20) можно переписать в виде:

$$X = Y = \pm\sqrt{\pm\sqrt{1.3} + 1.3} \quad (21)$$

Результаты вычисления (21) запишем в виде следующей таблицы:

$$\begin{matrix} X_1, Y_1 & + & + & 1.56 \\ X_2, Y_2 & - & - & -0.4 \\ X_3, Y_3 & + & - & 0.4 \\ X_4, Y_4 & - & + & -1.56 \end{matrix} \quad (22)$$

Во втором и третьем столбцах записаны знаки, используемые при вычислении (21), в последнем столбце – результат вычисления. Имея в виду, что  $X = x - y$  и  $Y = x + y$  легко убедиться, используя (22), что полученные на основе (20) и (21) линии делителей нуля связаны с гиперболическими хвостами аналога множества Жюлиа, рис. 6.

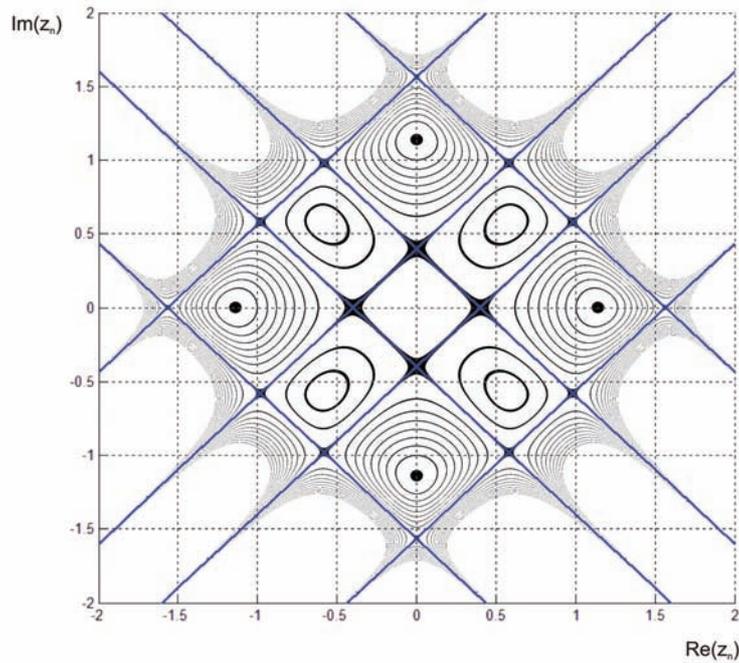


Рис. 6: Предфрактал второго поколения для аналога множества Жюлиа и линии делителей нуля для второй итерации.

### Третья итерация

Из (10) и (15) получаем:

$$\begin{cases} ((X^2 + P)^2 + P)^2 + P = 0 \\ ((Y^2 + Q)^2 + Q)^2 + Q = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Из (23) следует:

$$\begin{cases} X = \pm \sqrt{\pm \sqrt{\pm \sqrt{-P} - P} - P} \\ Y = \pm \sqrt{\pm \sqrt{\pm \sqrt{-Q} - Q} - Q} \end{cases} \quad (24)$$

Аналогично предыдущему, используя (24) запишем:

$$X = Y = \pm \sqrt{\pm \sqrt{\pm \sqrt{1.3} + 1.3} + 1.3} \quad (25)$$

Вычисляя (25) получим:

$X_1, Y_1$	+	+	+	1.69	(26)
$X_2, Y_2$	-	+	+	-1.69	
$X_3, Y_3$	+	-	+	$0.51i$	
$X_4, Y_4$	+	+	-	1.3	
$X_5, Y_5$	-	-	+	$-0.51i$	
$X_6, Y_6$	-	+	-	-1.3	
$X_7, Y_7$	+	-	-	0.95	
$X_8, Y_8$	-	-	-	-0.95	

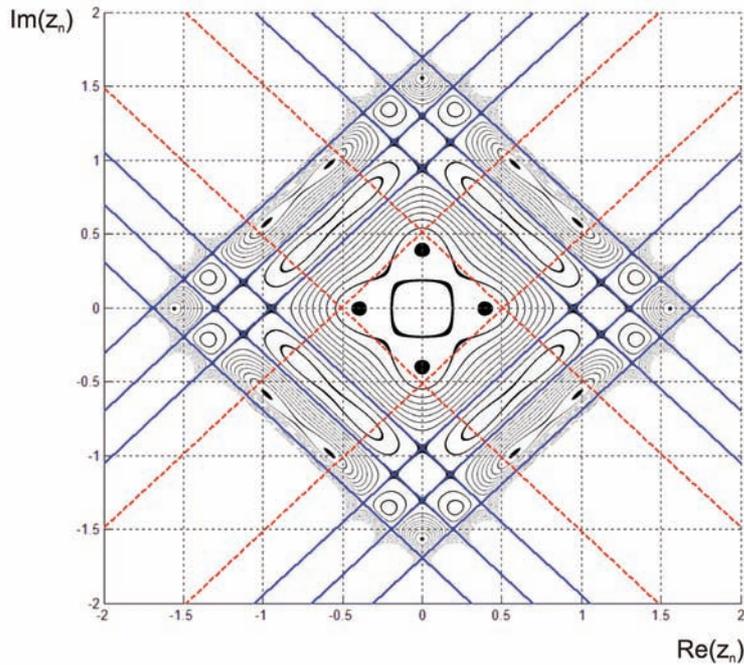


Рис. 7: Предфрактал третьего поколения для аналога множества Жюлиа и линии делителей нуля для третьей итерации.

Так же, как и в предыдущем, линии делителей нуля, полученные на основе (23) и (24) связаны, как показывает рис. 7 и результаты вычислений (26), с гиперболическими хвостами аналога множества Жюлиа.

Но, в отличие от рассмотренных выше случаев, здесь имеются две пары линий, полученные на основе (24) – (25) и соответствующие случаям  $X_3, Y_3$  и  $X_5, Y_5$  (26), которые не принадлежат  $H_2$ . Они формально нанесены на рис. 7 в виде пунктирных линий. Легко видеть, что с этими линиями не связаны гиперболические хвосты множества Жюлиа.

**Общий случай:  $n$ -я итерация**

Из (13) и (15) получаем:

$$\begin{cases} \underbrace{(\dots (X^2 + P)^2 + P)^2 + \dots + P)^2 + P}_n = 0 \\ \underbrace{(\dots (Y^2 + Q)^2 + Q)^2 + \dots + Q)^2 + Q}_n = 0 \end{cases} \tag{27}$$

Из (27) получаем  $X$  и  $Y$ :

$$\begin{cases} X = \pm \sqrt{\underbrace{\pm \sqrt{\dots \pm \sqrt{\pm \sqrt{-P} - P} \dots - P - P}}_n} \\ Y = \pm \sqrt{\underbrace{\pm \sqrt{\dots \pm \sqrt{\pm \sqrt{-Q} - Q} \dots - Q - Q}}_n} \end{cases} \tag{28}$$

Исходя из (28) число линий формально соответствующих (15) будет  $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ . Но, как показывает, рассмотренный выше пример, нельзя утверждать, что всем им соответствуют

делители нуля. Вопрос о том, какое число значений (28) принадлежит  $H_2$  и, следовательно, связано с делителями нуля, требует отдельного рассмотрения.

### Заключение

В результате проведенного исследования нами показано, что форма аналогов множеств Жюлиа квадратичного отображения (1) характеризуется множеством гиперболических хвостов, положения которых определяются линиями делителей нуля (28). Линии делителей нуля являются своего рода осями симметрии гиперболических хвостов.

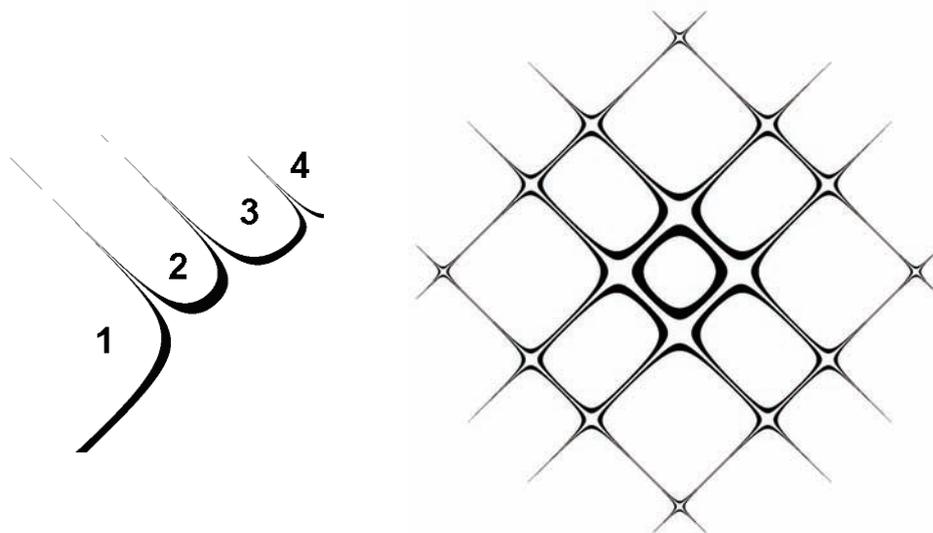


Рис. 8: Форма аналога множества Жюлиа на  $H_2$ . Фрагмент границы предфрактала аналога множества Жюлиа состоит из изолированных гиперболических сегментов, *а*); форма предфрактала аналога множества Жюлиа на  $H_2$  характеризуется наличием гиперболических хвостов и изолированных внутренних областей, *б*).

На рис. 8 показан увеличенный фрагмент границы аналога множества Жюлиа. Особенностью границы является то, что в действительности она состоит из изолированных фрагментов, которые на рис. 8 *а*) помечены цифрами 1 ÷ 4. Изолированность фрагментов связана с тем, что они разделены делителями нуля: гиперболы, находящиеся во втором фрагменте никогда не пересекаются с гиперболами первого и третьего сегментов. Число подобных фрагментов очень быстро растет с увеличением номера итерации.

Принимая, что фрагменты 1 ÷ 4 изолированы, мы должны сделать следующий шаг и признать, что аналоги множеств Жюлиа на плоскости двойной переменной в отличие от множеств Жюлиа на комплексной плоскости обладают внутренней структурой, которая характеризуется наличием изолированных замкнутых областей, которые, как и сегменты на рис. 8 *а*) разграничены линиями делителей нуля. На рис. 8 *б*) показана форма предфрактала аналога множества Жюлиа на  $H_2$ , вычисленная с учетом сделанных замечаний.

Итак, форма множества Жюлиа на  $H_2$  характеризуется: 1) изолированными сегментами, формирующими гиперболические хвосты; 2) изолированными замкнутыми областями. В то время как комплексные множества Жюлиа – это в первую очередь, фрактальная граница, линия, то их двойные аналоги мы уже не можем рассматривать, подобным образом. Предфрактал, показанный на рис. 8 *б*), ближе по своему строению к таким объектам, как, например, ковер Серпинского.

Если принять, что граница аналогов множеств Жюлиа на  $H_2$  устроена, как описано выше, то, возможно, что определение множеств Жюлиа на  $H_2$  также должно быть скорректировано.

## Литература

- [1] Павлов Д. Г., Панчелюга М. С., Малыхин А. В., Панчелюга В. А. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2009, 1 (11), том. 6, - с. 135–145.
- [2] Павлов Д. Г., Панчелюга М. С., Панчелюга В. А. О форме аналога множества Жюлиа при нулевом значении параметра на плоскости двойной переменной. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2009, 1 (11), том. 6, - с. 146–151.
- [3] Senn P. The Mandelbrot set for binary numbers. // American Journal of Physics, 1989, Vol. 58 - p. 1018.
- [4] Metzler W. The “mystery” of the quadratic Mandelbrot set. // American Journal of Physics, 1994, 62 (9) - pp. 813–814.
- [5] Metzler W., Brelle A., Schmidt K.D. Nonanalytic dynamics for generating the mandelbrot set: A tutorial. // International Journal of Bifurcation and Chaos, 1992, 2, pp. 241–250.
- [6] Artzy R. Dynamics of quadratic functions in cycle planes. // Journal of Geometry, 1992, Vol. 44 - pp. 26–32.
- [7] Р. Кроновер Фракталы и хаос в динамических системах. М., Техносфера, 2006 – 488 с.
- [8] Морозов А. Д. Введение в теорию фракталов. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2002 – 160 с.
- [9] Божокин С. В., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы. Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001 – 128 с.

## About Shape of Julia Sets Analogous on Double Numbers Plane

Pavlov D. G.<sup>1</sup>, Panchelyuga M. S.<sup>1,2</sup>, Panchelyuga V. A.<sup>1,2</sup>

*1 – Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia,*

*2 – Institute of Theoretical and Experimental Biophysics of RAS, Pushchino, Russia*

*panvic333@yahoo.com*

Double-numbers analogous of Julia sets pre-fractals in the case of iteration of  $z_{n+1} \rightarrow z_n^2 + c$ , for  $c \neq 0$  are constructed. Numerical algorithm, which allows correct visualization of the Julia set pre-fractals is described and limits of it applicability in the case of  $c = 0$  are illustrated. Analytical methods, which allow studying of the Julia sets shapes are described and application of the methods to pre-fractals of low orders is demonstrated.

**Key words:** fractals, Julia set, double numbers, double numbers fractals.

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

В. А. Панчелюга

*НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, г. Фрязино,  
Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, г. Пущино  
panvic333@yahoo.com*

Основную задачу настоящей статьи мы видим не столько в том, чтобы представить наши результаты по основам теории элементарных отношений, сколько в том, чтобы привлечь внимание к проблеме, остающейся в тени, несмотря на то, что она скрыто присутствует во многих логических, математических и физических моделях. Это проблема элементарных, т. е. не разложимых на более простые, отношений. Понятие отношения, благодаря его крайне общей природе, лежит в основе таких чрезвычайно важных понятий современной науки, как число, симметрия, взаимодействие, пространство-время и др. По этой причине, внимательное исследование проблемы элементарных отношений может помочь не только более полному пониманию вышеназванных понятий, но и осознанию пределов их применимости.

**Ключевые слова:** полярность, отношение, элементарное отношение, качество, целостность, теория качества, число, общая теория систем.

## 1. Введение

Внимательное рассмотрение понятия числа, свойств и принципов построения существующих числовых систем, позволяет говорить о двух атрибутах, неизменно присущих числу: количественный – величина или модуль и качественный – знаковая часть числа, связанная с определенной системой отношений. Существующие в настоящее время числовые системы однородны относительно количественного атрибута, который, как правило, выражается действительным числом, и отличаются качественно, в том смысле, что любая числовая система – это, по сути, способ количественного описания определенного типа отношений. Поэтому, теория, описывающая возможные типы отношений, является мета-теорией по отношению к теории числовых систем [1].

Говоря о теории отношений, нужно различать случай элементарного, т. е. неразложимого на более простые, отношения и случай, когда рассматриваются системы отношений, которые можно рассматривать как суперпозиции элементарных. В связи с этим встает вопрос об изучении элементарных отношений или, другими словами, о построении теории элементарных отношений. Цель настоящей работы – представить возможные основы такой теории.

Необходимо отметить, что существующие в настоящее время теории отношений неявно предполагают существование единственного типа элементарных отношений – бинарных. Говоря о других типах отношений, например, тернарных, в действительности говорят об определенных системах бинарных отношений, в данном случае трех. При этом, попытки рассмотрения иных, кроме бинарных, элементарных отношений отсутствуют, как, отсутствует и само понятие *элементарного* отношения. В то же время, как в инженерной практике, так и в естественнонаучных моделях существуют примеры использования не бинарных отношений. В качестве примеров, которые будут подробно рассмотрены в дальнейшем, можно привести системы из трех и шести базовых цветов в цветоведении, лежащие в основе многочисленных инженерных приложений – цветной печати, цветного телевидения, систем записи и отображения видеoinформации. Второй пример – кварковая модель, созданная как основа для систематизации наблюдаемой феноменологии адронов,

в которой вводятся цветовые заряды кварков и постулируется, что наблюдаемые адроны – бесцветные частицы. Наличие такого рода примеров не бинарных отношений также основывает задачу изучения элементарных отношений.

## 2. Задача исследования элементарных отношений

Рассмотрим два произвольных объекта, имеющих онтологический статус, между которыми существует элементарная связь. Ее наличие означает, что изменения свойств одного из объектов вызывает изменения свойств другого. Подобное изменение, очевидно, возможно только в том случае, когда между ними существует какое-либо взаимодействие. Таким образом, утверждение, что между объектами существует связь и, что между ними существует взаимодействие, оказываются синонимичными. В силу этого, мы можем рассматривать взаимодействие, как онтологический аспект связи.

С другой стороны, понятие «связь» также синонимично понятию «отношение». При этом обычно отмечается, что «... любая связь есть отношение, но не всякое отношение есть связь» [2, с. 286], т. е. отношение является более общим понятием: оно может характеризовать логический аспект связи, будучи, в силу этого, связанным с соответствующим взаимодействием, или быть чисто логическим, характеризуя соотношенность неких мыслимых объектов. В силу наличия онтологического статуса у рассматриваемых нами объектов, случай «не всякое отношение есть связь» автоматически исключается из рассмотрения. Суммируя, приходим к выводу, что понятия «отношение» и «взаимодействие», будучи соответственно логическим и онтологическим аспектами связи, являются тесно связанными.

Рассматриваемые нами объекты связаны. Говоря о связи, необходимо отметить, что она возможна только между *различающимися* вещами. Поэтому утверждение о существовании связи, влечет за собой вывод о различии объектов. Но, как известно, «Способность вещей, явлений, событий отличаться от всех других вещей, явлений, событий называется качеством» [3, с. 31].

Т. о., исходя из факта существования рассматриваемых объектов и существования между ними связи, мы можем говорить о составляющих исследуемую систему объектах, как о качествах.

Связь между рассматриваемыми нами объектами – элементарная. Требование элементарности связи тождественно требованию отсутствия частей, структуры, другими словами, неделимости объектов. Действительно, предположим, что рассматриваемые объекты имеют структуру, т. е., в них можно выделить части. В таком случае, связь между объектами может мыслиться как состоящая из связей между частями каждого из них. В этом случае, вместо элементарной связи мы будем иметь систему связей. В то же время, неделимость – определяющее свойство целостности. Действительно, об объекте можно говорить, как о целостном, только если он является неделимым, атомарным, лишенным частей.

Итак, рассматриваемая нами система состоит из двух связанных целостных объектов, имеющих характер качеств. В силу их целостности, а следовательно – атомарности, связь между рассматриваемыми объектами – элементарная.

Суммируя вышесказанное, можно сделать вывод, что категория элементарного отношения неразрывно связана с категориями качества и целостности. Вместе они образуют понятийное единство, смысловыми проекциями которого являются три названные категории и в силу которого теория элементарных отношений является в то же время теорией качества и целостности.

В настоящее время не существует законченной, общепринятой теории целостности. Чаще всего понятие целостности исследуется в рамках общей теории систем, для которой оно является одним из основных. Но, общая теория систем, являясь «потребителем» этого

понятия не является его «производителем». «Производителем» является теория качества. Ниже представлен ее краткий обзор.

### 3. Краткий обзор теории качества

#### Качественная определенность

Как уже было сказано, способность вещей, явлений, событий отличаться от всех других вещей, явлений, событий называется качеством. Т. к. реальность существует благодаря различиям, то качество, согласно данному определению есть следствие факта существования. Таким образом мы приходим к классическому определению качества, данному Гегелем [4]: *качество – определенность вещи, тождественная с ее бытием.*

Рассмотрим данное определение. «Поскольку качество, как тождественная с бытием определенность, неотделимо от существования соответствующего объекта, оно отделяет его от всех других объектов и тем самым является границей его существования» [2, с. 32]. Т. к. качество есть граница, то оно характеризует вещь через ее отношение к другим вещам. По отношению к данной вещи качество выступает как ее утверждение, а по отношению ко всем другим – как отрицание. Реальность данного утверждения и отрицания проявляется во внешних связях и отношениях. Поэтому о качестве можно судить только через его отношение к другим вещам. Т. е. определенность качества – внешняя.

Суммируя можно сказать, что качество это: 1) определенность; 2) определенность тождественная с бытием, т. е. неотделимая от существования объекта; 3) определенность внешняя, т. е. граница.

#### Свойство. Отношение. Взаимодействие

Качество обнаруживает себя потому, что вещь обладает разнообразными свойствами. Свойства же обнаруживаются благодаря тому, что вещи могут действовать друг на друга и на органы чувств воспринимающего субъекта – т. е., благодаря взаимодействию. Таким образом: *свойство – способность вещи, явления, процесса изменяться или изменять другие вещи, явления, процессы.*

Т. к. свойство есть результат взаимодействия, то нельзя говорить о свойстве единичного изолированного объекта. По своему определению свойство предполагает существование как минимум двух взаимодействующих вещей и существует лишь постольку, поскольку есть их *отношение*. Т. е. свойство всегда предполагает некоторое *множество соотносящихся* объектов по отношению к которым данный объект обладает им.

Свойство существует лишь постольку, поскольку возможно то взаимодействие, которое это свойство порождает. Поэтому, свойство можно рассматривать как потенциальную возможность взаимодействия. Отсюда, можно говорить о *спектре свойств качества* или о *спектре возможных для него взаимодействий*.

Рассматривая свойство как характеристику возможного результата взаимодействия, мы можем выделить два его аспекта: активность и пассивность. Активность – это способность изменять вещи, явления, процессы при взаимодействии с ними, а пассивность – это способность изменяться в соответствующем взаимодействии.

Итак, вещь обладает качественной определенностью, как совокупностью свойств, лишь в той мере, в какой она вступает во взаимодействие с другими материальными объектами. Полное определение качества т. о. основано на выявлении совокупности свойств или спектра возможных для него взаимодействий.

### Существование и логическая непротиворечивость

Т. к. качество является, в первую очередь, определенностью, это предполагает наличие или отсутствие некоторого множества свойств. В силу того, что качество есть определенность, неотделимая от существования некоторого объекта, то самый общий подход к проблеме существования состоит в том, что исследуется вопрос о принципиальной возможности сосуществования некоторого *множества свойств* в едином объекте. Это множество не может быть любым. С одной стороны, т. к. мы имеем множество, это предполагает существование различий между его элементами, т. е. свойствами, с другой – оно должно обладать внутренним единством. Т. е., существующие на данном множестве различия для сохранения данной качественной определенности должны оставаться в пределах некоторого тождества.

Соотношение тождества и различия в рамках данной качественной определенности позволяет рассмотреть вопрос о возможности существования объектов, обладающих данным качеством.

Проблема существования являлась предметом рассмотрения многих ученых и философов, как пример можно привести Гильберта, Лейбница, Гегеля. Ее решение видится, как правило, в логической непротиворечивости множества свойств данного качества. Так, согласно Лейбницу, любая непротиворечивая система высказываний имеет смысл, поскольку ее высказывания могут быть проинтерпретированы на реальных объектах. Другая точка зрения на проблему существования состоит в том, что тождество бытия и определенности имеет место лишь на уровне логико-математических структур.

Т. о. общим местом обоих подходов является утверждение о том, что в формальном отношении, условием существования качества является логическая непротиворечивость множества его свойств. Онтологический же статус логически непротиворечивой системы свойств требует отдельного рассмотрения.

### Качество и целостность. Система

Онтологически непротиворечивость и внутреннее единство свойств качества, остающихся в пределах некоторого тождества, приводит к их обособлению и образованию целостности, т. е. превращения этой совокупности свойств в нечто единое – единицу. Возникает единство, замкнутость в совокупности свойств с точки зрения ее детерминированного поведения.

Соотношение тождества и различия в рамках данной качественной определенности, являющееся основой анализа проблемы существования, тесно связано также с проблемой единичности и множественности. Действительно, качество – есть целостность, а в силу этого единичность. В то же время ему присущ набор отличающихся между собой свойств, которые в совокупности образуют некоторое множество.

Чтобы избежать противоречия между целостной, а поэтому неделимой и единичной, природой качества и множественной природой его свойств, мы должны признать, что последние, в онтологическом отношении, не могут рассматриваться как отдельные сущности, а лишь как проявления, манифестации целостной природы качества. Т. о. говорить о множественности свойств можно лишь в логическом отношении, в онтологическом же отношении мы имеем единичность целостного и, поэтому, неделимого качества.

Понятие целостности тесно связано с понятием системы. Действительно, если мы ограничим наше рассмотрение только системами естественного происхождения, то обнаружим, что всем им присуще свойство целостности. Потеря этого свойства приводит к гибели системы, ее распаду на некоторое множество систем с более простым уровнем организации, составлявших до этого субстрат системы.

Говоря о системе можно выделить три уровня ее организации: 1) субстрат системы –

множество целостных элементов, обладающих определенным качественным многообразием; 2) мезоуровень – множество взаимосвязанных функциональных систем, состоящих из элементов субстрата и не обладающих свойством целостности; 3) уровень определяющего качества – целостность, обладающая соответствующей данной системе качественной определенностью. Именно последний, из трех названных уровней строения системы, исчезает в случае ее гибели, а остаются, обладающие свойством целостности, элементы субстрата.

### **Количество. Измерение. Число**

В самой общей форме логический переход от качества к количеству может быть описан исходя из определения качества. Качество – это то, что образует своеобразие материального объекта в его внешних проявлениях, т.е. то, благодаря чему один материальный объект отличается от другого. Но именно в силу того, что качество есть логическое, т.е. универсальное свойство вещей, без которого вся объективная реальность слилась бы в нечто аморфное, неопределенное, единое, мы приходим к выводу, что все материальные объекты не только взаимно исключают друг друга, но и сходны друг с другом. Их сходство заключается, по крайней мере, в том, что каждый отличен от всех остальных. Поэтому, абсолютное своеобразие приводит к необходимости существования абсолютно универсального сходства. Т.о. количество есть *сходство, порождаемое различием, или различие, ведущее к сходству* [2, с. 99].

Очевидно, что для того, чтобы об объекте можно было говорить как об обладающим количеством, необходимо, чтобы ему было присуще свойство делимости. Отдельно взятое качество, в силу присущей ему целостности, неделимо, и выступает как единица; а объективная реальность, состоящая из таких обособленных качественных определенностей, разграниченных друг от друга, есть разнообразие или множество. Переход от единичного качества к множеству приводит к тому, что набор свойств, который вначале был специфической характеристикой одного качества, становится общим для многих качеств, и в силу этого превращается из качества в количество.

Т.о. количество является относительной характеристикой свойств качества и характеризует интенсивность их проявления. Проявленность свойства качества связана с возможными для него типами взаимодействий. Интенсивность проявления свойства может быть охарактеризована числом, которое является результатом некоторой измерительной процедуры.

Результатом измерения количества данного свойства является некоторое множество, которое может быть непрерывным или дискретным и соответственно бесконечным или конечным. Соответственно этому мы можем говорить о непрерывности или дискретности спектра свойства качества.

Необходимо отметить, что понятие элементарного отношения и связанные с ним понятия качества и целостности являются «до-количественными» и, как уже отмечалось, теория элементарных отношений является метатеорией по отношению к теории числовых систем. Поэтому, в настоящей работе рассматривается только качественный аспект теории элементарных отношений, а количественный – теория числовых систем, изоморфных определенным системам элементарных отношений, является дальнейшим развитием представленных в настоящей работе идей и будет темой последующих публикаций.

## **4. Полярность**

### **Двухполярное качество**

Обобщение повседневных наблюдений, опытных фактов, полученных в различных науках, конструкций языка, относящихся к выражению качества, показывает что его свой-

ствам, как правило, присущ полярный характер, т. е. для любого из них можно найти противоположное, полярное по смыслу, значению. В силу чрезвычайной общности категории качества полярная природа его свойств проявляется как в большинстве явлений действительности, так и в описывающих их моделях науки. Например: в математике – прямые и обратные операции (плюс и минус, возведение в степень и извлечение корня, дифференцирование и интегрирование); в физических системах – полярные зарядовые состояния, два возможных направления тока в проводнике и направления движения вдоль траектории физической системы; в химии – анализ и синтез химических веществ, ассоциация и диссоциация; в биологии – ассимиляция и диссимиляция, наследственность и изменчивость, жизнь и смерть, здоровье и болезнь; в физиологии высшей нервной деятельности – возбуждение и торможение; в лингвистике – бинарные оппозиции на уровне фонем, лексем, морфов, страдательный и действительный залог, совершенное и несовершенное время и т. д. Подобные примеры можно привести для любой области человеческой деятельности. Также, в различных разделах науки можно найти обширную литературу, описывающую полярный, бинарный характер изучаемых явлений, моделей, теорий.

Характерной особенностью данных противоположностей является то, что, будучи полярными проявлениями качества, они в то же время неразрывно связаны, едины, немислимы друг без друга. Подобные противоположности, в дальнейшем, будем называть *полярными атрибутами* (ПА).

Рассмотрим, например, качество «электрический заряд»,  $e$ . Основной его особенностью является наличие двух полярных состояний:  $e^+$  и  $e^-$ , которые являются полярными атрибутами, или полярностями этого качества. Аналогично для, например, качества «температура» имеем полярную пару «высокая – низкая». И т. д. Так как у рассмотренных качеств «электрический заряд» и «температура» имеется по два полярных атрибута, то по их числу мы будем называть эти и подобные им качества *двухполярными*.

Природа полярных атрибутов идентична природе качества. В онтологическом аспекте ПА задают крайние, полярные проявления свойств качества. В логическом аспекте они могут рассматриваться как способ описания данного спектра свойств.

На рис. 1 а) показан хорошо известный символ инь-ян, являющийся графическим выражением одноименной концепции, занимающей центральное место в философских учениях ряда древнекитайских школ. Способ, которым изображены ПА (белая и черная части рисунка, помеченные знаками «+» и «-», соответственно) на рис. 1 а), удачно подчеркивает следующие важные свойства полярных атрибутов двухполярного качества: 1) полярные атрибуты не являются отдельными сущностями – они есть проявления свойств целого, а поэтому неделимого, бесструктурного объекта – качества; 2) в силу целостной природы качества между его полярными атрибутами не могут существовать отношения. Отношения возможны только между двумя различными качествами.

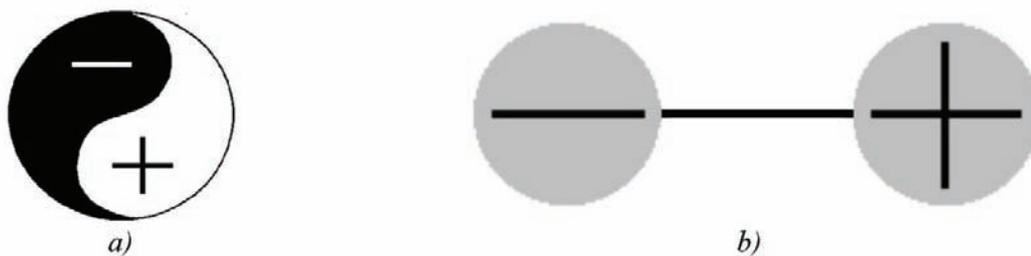


Рис. 1: Графическое изображение полярных атрибутов двухполярного качества.

Для удобства в дальнейшем мы будем представлять полярные атрибуты качества как это сделано на рис. 1 б). При этом для изображения на рис. 1 б) справедливы все те

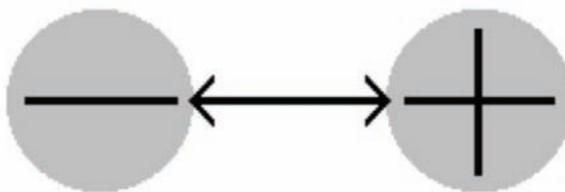


Рис. 2: Связь между двумя двухполярными качествами.

же замечания, что и для рис. 1 а). В том случае, когда нам будет необходимо показать связь между двумя двухполярными качествами, мы будем использовать знак ( $\leftrightarrow$ ) между полярными атрибутами, как это сделано на рис. 2. По сути, приведенные на рис. 2 объекты (+) и (-) и отношение между ними ( $\leftrightarrow$ ) представляют собой систему, обладающую структурой и, соответственно, могут быть разделены. Например, в случае, показанном на рис. 2 мы можем рассматривать объекты (+) и (-), как заряды электрона и протона, соответственно.

### Трехполярное качество

По аналогии с предыдущим примером, мы можем представить полярные атрибуты трехполярного качества, как показано на рис. 3 а). Здесь три круга обозначают его полярные атрибуты, а связывающий их треугольник – символизирует взаимопереходы между ними и подчеркивает целостный характер рассматриваемого качества.

Интересно отметить, что в культуре Востока существует символ, рис. 3 б), принцип построения которого аналогичен принципу построения символа на рис. 1 а). Это изображение можно рассматривать как другой способ представления полярных атрибутов 3-полярного качества, удачно подчеркивающее его целостный характер и дающее более отчетливое представление о взаимопереходах между его ПА. Как можно видеть, из рис. 3 б), относительная обособленность трех его элементов, в своем единстве образует неделимое целое, которое тождественно взаимопереходам между полярными атрибутами трехполярного качества, показанным на рис. 3 а) в виде темного треугольника.

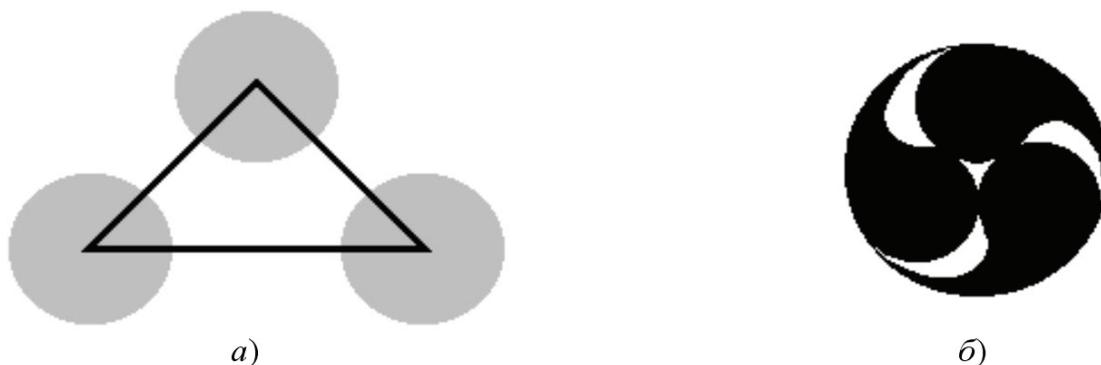


Рис. 3: Полярные атрибуты трехполярного качества, а); другое изображение связи между полярными атрибутами 3-полярного качества, подчеркивающее его целостный характер, б).

Взаимопереходы между полярными атрибутами 3-полярного качества, показанные на рис. 3 а) в виде темного треугольника, не нужно путать со случаем системы состоящей из трех двухполярных качеств, показанной на рис. 4. Тогда как на рис. 3 показан единичный, целостный, неделимый, бесструктурный объект, то система на рис. 4 имеет структуру и, соответственно, в ней могут быть выделены части или подсистемы.

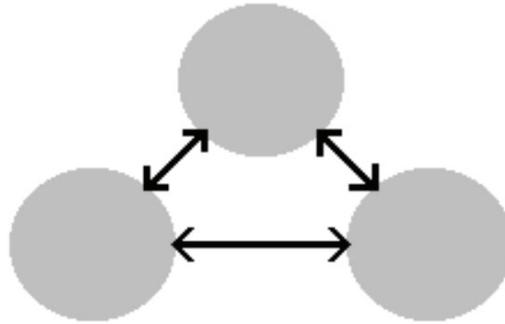


Рис. 4: Пример суперпозиции трех двухполярных качеств.

Примером полярных атрибутов 3-полярного качества могут служить три основных цвета – красный, синий и зеленый в цветоведении. Каждый из ПА, на рис. 3 соответствует одному из этих цветов. В зависимости от состояния связи между ними качество “цвет”, для внешнего наблюдателя, будет проявлять себя как один из цветов цветового спектра.

## 5. Определения. Принципы

### Компенсированное состояние

Для приведенных выше примеров можно заметить, общую, характерную особенность. В случае двухполярных качеств существует нейтральное состояние, для трехполярного качества – бесцветное. Т.е., такие состояния, в которых качества «заряд» и «цвет» не проявлены. Для общности, назовем подобные состояния компенсированными. *Компенсированное состояние* (КС), мы определяем как такое, в котором отсутствуют любые внешние проявления качества, т.е. любые проявления его свойств.

Понятие КС позволяет дать строгое определение введенному выше понятию полярности качества: *полярностью качества называется минимальное число полярных атрибутов, необходимых для достижения компенсированного состояния.*

Важно отметить, что полярность есть именно минимальное количество полярных атрибутов, необходимых для достижения компенсированного состояния. Если число полярных атрибутов меньше полярности качества, то компенсированное состояние не может быть достигнуто.

Так, например, качество “электрический заряд” имеет полярность  $P$  равную двум, т.к. для него КС достигается наличием двух полярных атрибутов:  $e^+$  и  $e^-$ . Очевидно, что присутствие только одного из них никогда не даст компенсированного, нейтрального состояния. Во втором примере  $P = 3$ , и, соответственно КС достижимо только в случае присутствия трех основных цветов – красного, синего и зеленого. Любые два из них никогда не дадут компенсированное, бесцветное состояние.

### Принцип компенсации

Можно заметить, что для приведенных примеров существует вторая характерная особенность: будучи предоставленными сами себе рассмотренные качества стремятся к достижению КС. Так, электрические заряды разного знака стремятся к распределению наиболее близкому к нейтральному. Для трехполярного качества в качестве примера можно привести, уже упоминавшийся во введении, принцип, согласно которому, в природе реализуются только такие адроны в которых цветовые заряды составляющих их кварков образуют нейтральное в смысле цветового заряда, т.е. бесцветное состояние. Исходя из

этого, сформулируем принцип компенсации (ПК): *любое качество стремится к достижению компенсированного состояния;*

Данный принцип постулирует, что естественным состоянием любого качества является КС и внутренняя природа качества такова, что оно всегда стремится достичь компенсированного состояния, т. е. стремиться минимизировать любые свои внешние проявления. Поэтому, если мы допустим существование невозмущающего наблюдателя и полностью изолированного, единичного качества, то наблюдатель не обнаружит никаких внешних признаков существования данного качества.

Очевидно, что ПК позволяет ввести принцип взаимодействия в его наиболее общем виде. Для этого рассмотрим понятие поляризации.

### Поляризация

Изолированное качество, согласно ПК, находится в КС. Введем понятие поляризации: *поляризацией называется любой процесс, выводящий качество из компенсированного состояния.*

Понятие поляризации дает возможность говорить о компенсированном состоянии, как о состоянии с нулевой поляризацией. Поэтому ПК может быть переформулирован следующим образом: *любое качество стремится к состоянию с нулевой поляризацией.*

Согласно ПК, поляризация изолированного качества всегда равна нулю. Для ее возникновения должно нарушиться состояние изолированности. Т. е. поляризация качества всегда вызывается его окружением.

Поляризованное качество, согласно ПК, стремится вернуться в состояние с нулевой поляризацией. По отношению к вызывающему поляризацию окружению, это тождественно возникновению сил, стремящихся скомпенсировать внешнее поляризующее воздействие. Т. о. нарушение КС приводит к возникновению силового взаимодействия. Отсюда следует важный вывод: КС качества связано с концепцией взаимодействия. При этом, понятие КС является первичным по отношению к понятию взаимодействия: тип взаимодействия будет зависеть от типа компенсированного состояния.

Предположим, что в качестве поляризующего окружения выступает другое качество. Тогда, условием их взаимной поляризации должно быть наличие одинаковых КС у каждого из качеств. По этой причине, например, двухполярное качество не может быть поляризовано при помощи трехполярного в силу различия их КС.

### Шестиполярное качество. Спектр компенсированных состояний

Третьим, хорошо известным примером, который иллюстрирует введенные выше принципы, является взаимосвязь между шестью цветами: красным (К), синим (С), зеленым (З), голубым (Г), желтым (Ж) и пурпурным (П). Данные цвета можно рассматривать как примеры полярных атрибутов шестиполярного качества. В случае наличия всех перечисленных цветов для данного качества существует компенсированное (“нейтральное”, бесцветное) состояние, которое мы обозначим символом  $\otimes$  и запишем следующим образом:

$$f^6 (К,С,З,Г,Ж,П) \rightarrow \otimes. \quad (1)$$

Здесь  $f^6$  обозначает связь между полярными атрибутами 6-полярного качества.

Но, в отличие от рассмотренных ранее примеров, рис. 1 и рис. 3, из цветов, являющихся полярными атрибутами 6-полярного качества кроме (1) можно составить также следующие бесцветные комбинации:

$$f^3 (К,С,З) \rightarrow \otimes \quad (2)$$

$$f^3 (Г,Ж,П) \rightarrow \otimes \quad (3)$$

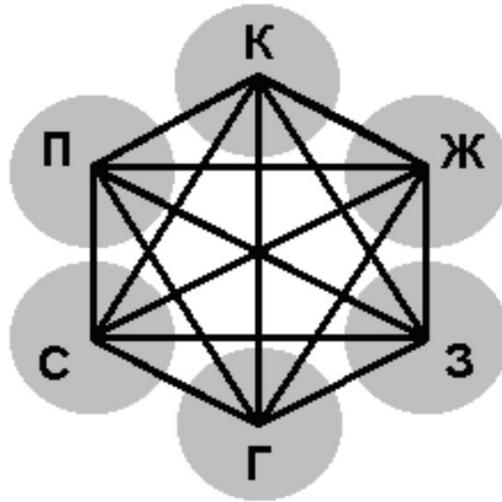


Рис. 5: Полярные атрибуты шестиполярного качества.

$$f^2(K, Г) \rightarrow \otimes \quad (4)$$

$$f^2(С, Ж) \rightarrow \otimes \quad (5)$$

$$f^2(З, П) \rightarrow \otimes. \quad (6)$$

Исходя из (1) – (6) мы должны заключить, что для 6-полярного качества существуют шесть компенсированных состояний различной полярности: одно 6-полярное, два 3-полярных и три 2-полярных. Будем говорить, что выражения (1) – (6) дают *спектр компенсированных состояний* (СКС) 6-полярного качества.

Замечательной особенностью СКС 6-полярного качества (1) – (6) является то, что все вместе они образуют полный граф, рис. 5. При этом, каждому КС (1) – (6) соответствует один непересекающийся цикл полного графа.

Рассматривая изображения полярных атрибутов качества, приведенных на рис. 1 б) и рис. 3 а) мы должны заключить, что, как и рис. 5, они также являются полными графами. На самом деле это обстоятельство служит выражению идеи целостной природы качества, так же как и изображения типа тех, которые показаны на рис. 1 а) и рис. 3 б).

Действительно, как уже отмечалось, полярные атрибуты не являются отдельными сущностями. Они есть крайние, а потому отличающиеся, несовместимые друг с другом, проявления свойств качества – целостного, неделимого объекта. Так как эти проявления различные, в логическом отношении мы можем рассматривать полярные атрибуты как отдельности. В то же время, в силу целостной природы качества, каждый из его полярных атрибутов должен быть связан со всеми остальными. Это требование соотнесенности каждого из ПА со всеми остальными приводит к тому, что взаимопереходы между ними должны быть представлены как аналог полного графа, вершинами которого являются полярные атрибуты качества. Будем называть его *графом полярных атрибутов* (ГПА).

С другой стороны, линии, соединяющие вершины показанных на рис. 1 б), рис. 3 а) и рис. 5 графов, нельзя рассматривать, как его ребра. Так, например, связь между полярными атрибутами 3-полярного качества, показанная на рис. 3 а) это не три различных ребра, соединяющих три вершины (допуская подобное предположение, мы неизбежно приходим к случаю показанному на рис. 4, т. е. происходит подмена 3-полярного качества системой из трех 2-полярных качеств), а единый замкнутый цикл. Целостность качества ведет к требованию, чтобы взаимосвязи между его полярными атрибутами выражались через соответствующие КС циклы. Для случая двух полярных атрибутов, показанных на рис. 1 б), цикл вырождается в линию.



лярностью  $2 \div 22$ . В первом столбце таблицы приведена полярность качества. В строках, соответствующих полярности качества, приведены спектры компенсированных состояний: в числителе указана полярность КС в знаменателе – число непересекающихся циклов ГПА для данного типа КС. В настоящей работе мы опускаем описание алгоритма построения Табл. 1.

Изучение СКС двух качеств позволяет исследовать вопрос о возможности и типах взаимодействий между ними. Взаимодействие между двумя качествами возможно только в том случае, когда в СКС данных качеств есть совпадающие компенсированные состояния. По этой причине, например, невозможна поляризация двухполярного качества трехполярным. Речь идет именно о принципиальной невозможности такого взаимодействия: какой бы чувствительностью не обладал двухполярный прибор он никогда не сможет зарегистрировать трехполярную динамику. Но 3-полярное качество может поляризовать 6-полярное, т. к. в СКС последнего есть 3-полярные КС. В свою очередь, целостная динамика 6-полярного качества, благодаря наличию в СКС последнего 2-полярных КС способна поляризовать 2-полярное качество. Т. о. благодаря возможности косвенной поляризации через 6-полярное качество мы, в принципе, можем обнаружить проявление 3-полярной динамики при помощи 2-полярного прибора.

## 6. Спектры компенсированных состояний некоторых качеств

Ниже рассмотрены примеры СКС некоторых качеств. Кроме более детального, чем это было сделано ранее, рассмотрения СКС данных качеств, здесь будут рассмотрены также некоторые дополнительные примеры, иллюстрирующие сформулированные выше положения.

### Однополярное качество

Данное качество можно представить как показано на рис. 6, где схематически представлены два однополярных качества. Так как в данном случае мы имеем только один полярный атрибут, то связь отсутствует. Т. е. любые взаимодействия с подобным качеством, в силу отсутствия связи, невозможны. А это означает также принципиальную невозможность обнаружения объекта обладающего подобным качеством.



Рис. 6: Схематическое представление двух однополярных качеств.

В силу невозможности связи невозможно и образование каких-либо структур, невозможны любого рода динамические процессы. Поэтому, для данного качества невозможны также какие-либо конструкции пространства и времени.

Не касаясь вопроса о реальности существования подобных качеств, необходимо отметить, что любое качество, как целостная система, в какой-то мере подобно однополярному. Действительно, согласно принципу компенсации, абсолютно изолированное качество стремится к состоянию, в котором сведены к минимуму внешние проявления его полярных атрибутов, а следовательно, и возможность взаимодействия. Т. е. в случае полной компенсации любое качество будет подобно однополярному, с тем отличием, что однополярное – единственное из качеств, которое не может быть поляризовано.

### Двухполярное качество

Граф полярных атрибутов двухполярного качества, рис. 1 б), состоит из единственного цикла. Рассматриваемое качество – первое, в ряду качеств, позволяющих поляризацию и взаимодействие. Как было отмечено в четвертом разделе, большинство явлений действительности может быть охарактеризовано наличием двух полярных атрибутов и, следовательно, они являются манифестациями тех или иных двухполярных качеств.



Рис. 7: Динамика двухполярного качества.

Если рассмотреть динамику двухполярного качества, то локально, в силу двухполярности связи, единственному начальному состоянию может соответствовать единственное конечное и процесс изменения являет собой последовательную смену состояний  $1, 2, \dots, n$ , т. е. переход от предыдущего состояния  $1$  к последующему  $2$ , после чего  $2$  становится предыдущим по отношению к  $3$  и т. д., рис. 7. В силу очевидной единственности связи из любого данного состояния качество, в силу его целостности, может перейти лишь в единственное следующее положение, чем определяется *линейность* его изменений. Простым примером динамики двухполярного качества может служить механическое движение материальной точки, которое аналогично процессу на рис. 7: она может двигаться вдоль любой непрерывной линейной траектории только так, что из данного состояния может перейти в единственное следующее, т. е. переход типа изображенного на рис. 8, когда предыдущее состояние связано с двумя последующими – невозможен.

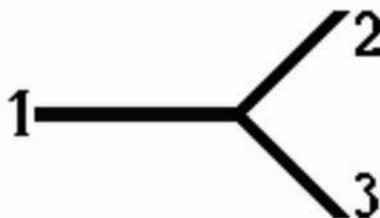


Рис. 8: Пример нелокального перехода  $1 \rightarrow (2, 3)$ .

Важным выводом из вышесказанного является то, что динамика, «развертывание» свойств двухполярного качества неизменно приводит к появлению множества линейных шкал. Например, шкала температуры: «теплый-холодный», вес: «легкий-холодный», количество: «больше-меньше» и т. д. Во всех этих шкалах переход от одного полюса к другому происходит через множество последовательно проходимых промежуточных значений.

Результат любого измерения, как процесса сравнения двух качественно однородных величин, одна из которых имеет эталонное количество, также выражается при помощи полярной пары «больше-меньше» и является двухполярным, что обуславливает двухполярный характер измерительной базы современного естествознания.

Обычно используемые конструкции пространства и времени, рассматриваемые как способ параметризации некоторой динамики в явном виде используют для этого четыре линейных шкалы: одну временную и три пространственных. Использование линейных шкал и определяет двухполярный характер конструкций пространства и времени. С другой стороны, двухполярность пространства также следует из уже рассмотренного пространственного движения механической системы – линейности ее траектории. Возможно,

что справедливо и обратное: сама возможность существования известного нам пространства, основана на двухполярности процессов нашего мира. Анализ конструкций времени также дает  $P = 2$ . Действительно, рассмотрение времени как параметра в описании динамических процессов основано на использовании некоторого эталонного процесса  $s$ , по возможности, постоянной длительностью и подсчета числа периодов этого эталонного процесса в ходе наблюдения изучаемого динамического процесса. Таким образом, время конструируется как переход от предыдущего момента  $t_1$  с числом циклов эталонного процесса  $n_1$  к последующему моменту  $t_2$  с числом циклов  $n_2$ . Полярными состояниями здесь являются моменты  $t_1$  и  $t_2$ . И также как и раньше мы не можем перейти от момента времени  $t_1$  к временам  $t_2$  и  $t_3$  “одновременно”. Т.е. время, как и пространство, является линейно упорядоченным двухполярным процессом.

Процедура упорядочения произвольных величин, количеств, как правило, основанная на полярной паре «больше-меньше» лежит в основе формирования числового ряда – множества действительных чисел. Расширение понятия числа на гиперкомплексные числовые системы основано на суперпозиции двухполярных действительных числовых осей, что, в конечном итоге, приводит к числовым системам, которые также двухполярны.

В силу сказанного, по нашему мнению, понятия «классический» и «двухполярный» в большинстве случаев могут рассматриваться как синонимы. Когда мы говорим, что с уменьшением размеров объекта мы с некоторого момента должны учитывать квантовомеханические закономерности, то дело здесь, очевидно, не в размере, а в том, что объекты микромира качественно отличаются от макрообъектов – их существование связано с другими, не-двухполярными типами отношений. Если классический, двухполярный объект бесконечно уменьшать в размерах, то это не приведет к появлению у него новых свойств.

Нам доступна для восприятия, измерения, описания, преимущественно та часть действительности, которая двухполярна. Это находит свое выражение, например, в принципе Бора – требовании, чтобы описание квантовой реальности производилось на обычном языке, дополненном терминологией классической физики. Результаты расчетов в математических моделях должны быть выражены в действительных числах для того, чтобы они могли сравниваться с экспериментом. И т. д.

В заключение нам хотелось бы обратить внимание на важный для нашего рассмотрения факт, что границы человеческого восприятия определяются логической структурой субъект-объектного отношения, через призму которого преломляется восприятие, мышление личности. Т.к. человек осознает себя как субъект, а все остальное им воспринимается в качестве некоторого совокупного объекта, то субъект-объектное отношение, которое, как известно [5], представляет собой полярную пару, определяет собой глобальную логическую структуру сознания индивида. Т.к. восприятие любого объекта, мышление о нем осуществляется через призму двухполярного субъект-объектного отношения, то данный факт можно рассматривать как существование некоторого двухполярного фильтра ограничивающего возможности прямого восприятия только двухполярными качествами.

Двухполярная приборная база современного естествознания, двухполярность математических конструкций и, как следствие, основанных на них математических и физических моделей и, наконец, двухполярность сознания, по крайней мере той его части, которую обычно называют «обыденным сознанием» в контексте многополярной действительности, наличия в окружающем нас мире недвухполярных отношений, ведет к необходимости рассмотрения понятия двухполярной проекции. Ее суть заключается в том, что любой процесс, явление для того, чтобы быть воспринятым, измеренным должны быть «спроецированы» на тот или иной двухполярный процесс, понятие, логическую конструкцию. Уже упоминавшиеся примеры двухполярной проекции: числовой – все что имеет отношение к физической реальности должно быть выражено в действительных числах, физический – любое измерение является классическим, а следовательно двухполярным.

Из всего вышесказанного о двухполярном качестве следует его чрезвычайная важность, выделенность, как в окружающей нас действительности, так и во всех аспектах человеческой практики. Но эта выделенность не должна умалять значение других типов отношений, к рассмотрению которых мы переходим.

**Четырехполярное качество**

Как следует из Табл. 1 четырехполярное качество – первое в ряду качеств, чей граф полярных атрибутов состоит более чем из одного цикла. Следовательно, в данном случае мы должны говорить о спектре компенсированных состояний. Граф полярных атрибутов 4-полярного качества показан на рис. 9 а). Его разложение на непересекающиеся циклы представлено на рис. 9 б) и рис. 9 в). Спектр компенсированных состояний 4-полярного качества дан на рис. 9 г) – рис. 9 е), На всех рисунках прописными  $\alpha, \beta, a, b$  – обозначены полярные атрибуты четырехполярного качества.

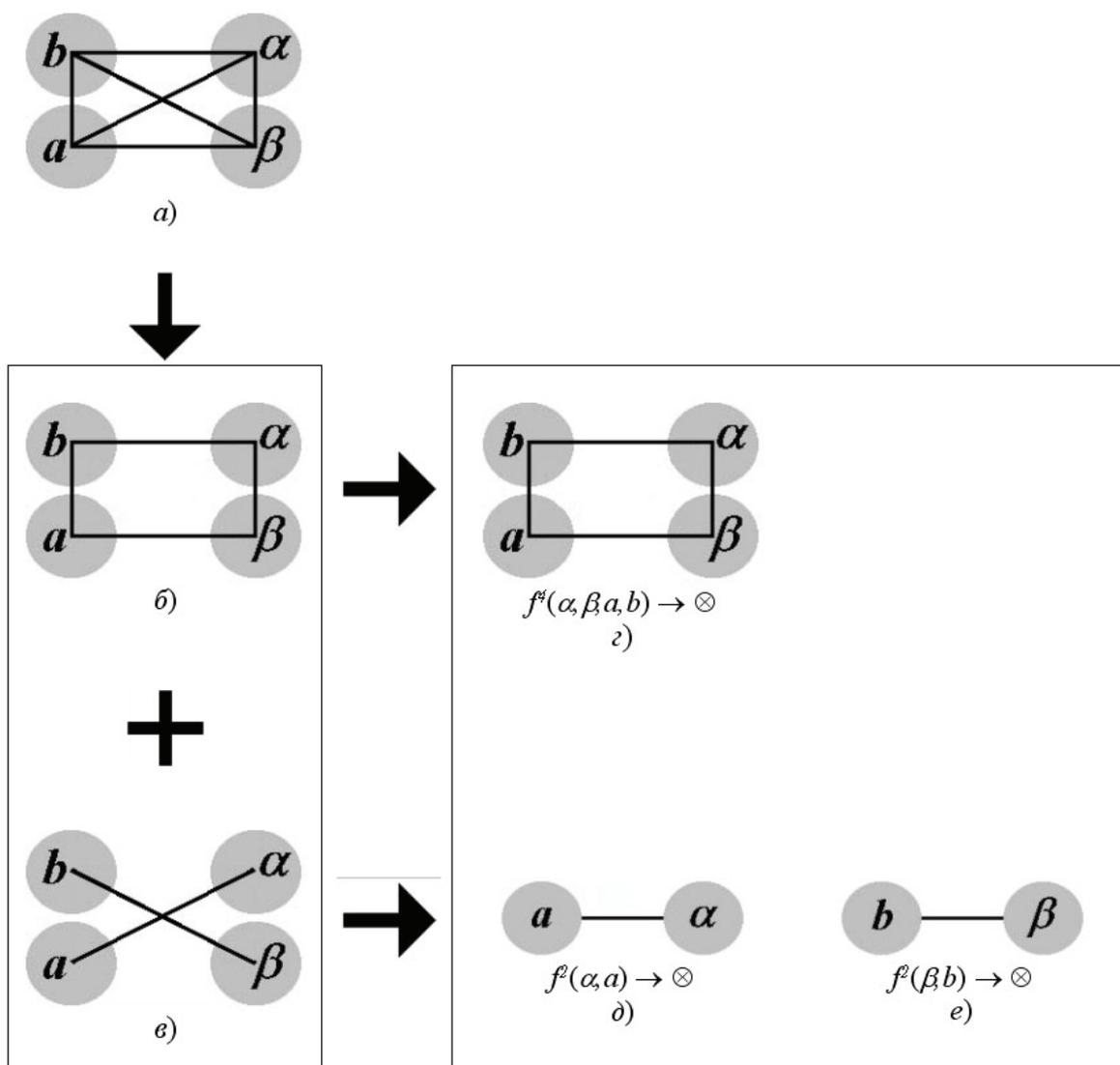


Рис. 9: Спектр компенсированных состояний четырехполярного качества.

Подобного рода разложения ГПА в СКС, в виду его удобства, нами будет использоваться также и для других качеств, рассматриваемых в настоящей работе. Разложение состоит из трех частей. Первая – ГПА рассматриваемого качества, который, как известно, имеет вид полного графа, рис. 9 а). Стрелка  $\downarrow$  под ГПА указывает его разложение на

сумму непересекающихся циклов, которое взято в отдельную рамку. В нашем случае это рис. 9 б) и рис. 9 в). Стрелкой  $\rightarrow$  справа от каждого из непересекающихся циклов показан его вклад в СКС, т. е. приведены соответствующие ему компенсированные состояния, рис. 9 г) – е). Под каждым из графических изображений КС приведена его символическая запись. Т. о. в рамке справа от разложения в непересекающиеся циклы мы имеем все КС данного качества, в совокупности формирующие его СКС.

Как можно видеть из приведенного СКС, рис. 9, в отличие от рассмотренных выше примеров 2-полярного и 3-полярного качеств, СКС 4-полярного качества состоит из одного 4-полярного, рис. 9 г) и двух 2-полярных КС, рис. 9 д) и рис. 9 е). Соответственно этому, 4-полярное качество может быть поляризовано двумя типами взаимодействий: 2-полярными и 4-полярным, что и определяет связанные с ним типы элементарных отношений.

Наличие в СКС 4-полярного качества 2-полярных КС также говорит о возможности его приборной регистрации и наблюдения. При этом важно отметить, что двухполярные КС существуют в СКС четырехполярного качества и, в силу целостности последнего, их проявления должны отличаться от проявлений двух 2-полярных качеств, имеющих те же КС. Очевидно, что данные проявления должны быть взаимосогласованы. Тогда как для двухполярного качества динамика – последовательная смена проявлений его полярных атрибутов, то для четырехполярного это должна быть смена последовательных проявлений свойств двухполярных качеств, каждое из которых связано со своей парой полярных атрибутов.

Примером четырехполярного качества может служить электромагнитное поле. В этом случае двухполярным КС соответствуют его электрическая и магнитная компоненты. При этом, мы не можем регистрировать электромагнитное поле как таковое, а только его компоненты, т. е. двухполярные проекции четырехполярного качества.

Если мы попробуем представить динамику электромагнитного поля аналогично тому, как это было сделано для двухполярного качества, рис. 7, то в качестве начального состояния должны взять элементарный излучатель, а в качестве конечного – фронт волны, который, согласно принципу Гюйгенса можно представить состоящим из множества элементарных излучателей, которые мы, в свою очередь, можем рассматривать как начальное состояние для следующего положения фронта волны и т. д. Т. е., в отличие от двухполярного качества в рассмотренном случае возможен переход между начальным и конечным состояниями, как это показано на рис. 8. Следовательно, динамика четырехполярного качества нелокальна. Также мы не можем говорить о линейной упорядоченности, применительно к динамике четырехполярного качества.

### **Трехполярное качество**

Граф полярных атрибутов трехполярного качества был рассмотрен ранее. Трехполярное и двухполярное качества – единственные у которых ГПА состоит из одного цикла. Это значит, что прямые попытки его обнаружения будут безрезультатными. В силу невозможности взаимодействия между двух- и трехполярными качествами, также невозможно чувственное восприятие последних.

В силу возможности поляризации, для трехполярного качества, очевидно, возможно построение трехполярной динамики и аналогов понятий пространства и времени. Но, такой трехполярный мир будет полностью необнаружим и недоступен восприятию сознания логика работы которого определяется субъект-объектным отношением.

### **Пятиполярное качество**

Согласно Табл. 1, пятиполярное качество первое в ряду качеств значение полярности которых – простое число, а ГПА состоит более чем из одного цикла.

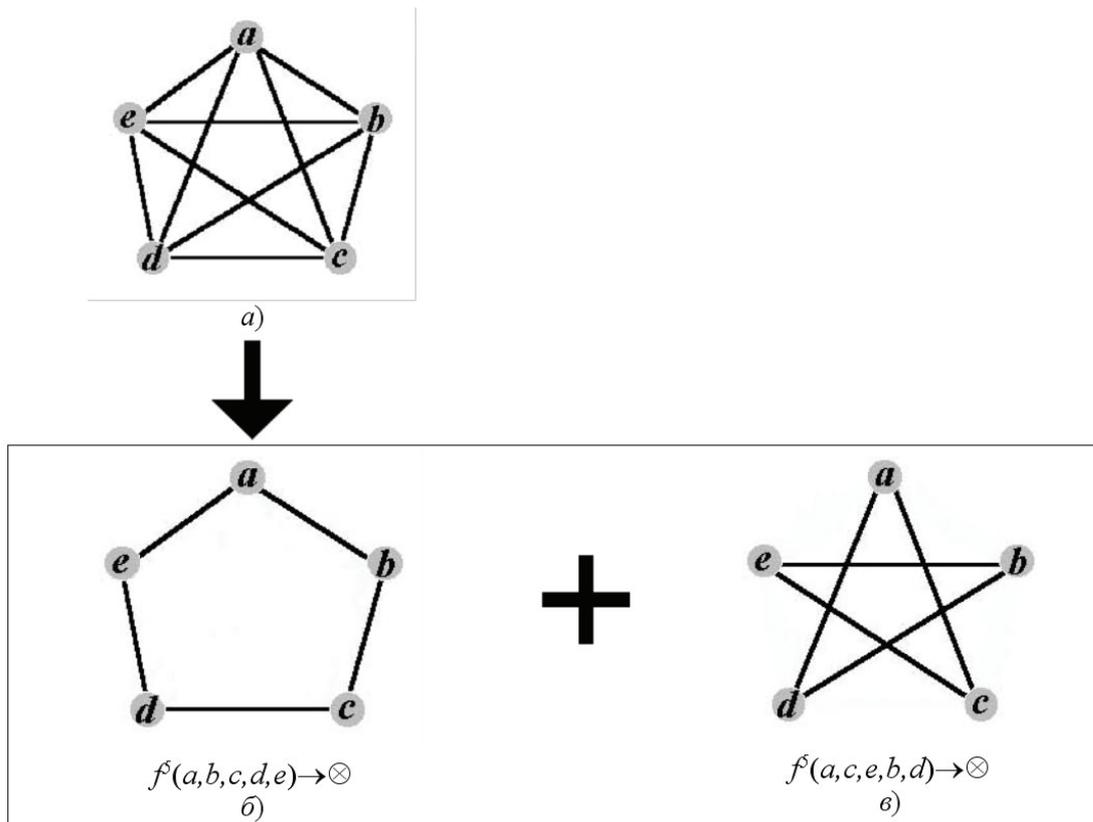


Рис. 10: Спектр компенсированных состояний пятиполярного качества.

Граф полярных атрибутов для пятиполярного качества показан на рис. 10 а). Очевидно, что согласно определению непересекающихся циклов, в нем могут быть выделены циклы, показанные на рис. 10 б) и рис. 10 в). Данные циклы и соответствующие им КС имеют одинаковую полярность, но отличаются порядком следования полярных атрибутов при обходе цикла.

Выше была проиллюстрирована тесная связь концепции Инь-Ян с двухполярным качеством. Пример подобного рода связи можно привести также для пятиполярного качества. Его ГПА связан с положениями концепции У-Син. Рассмотрим эту связь более подробно.

Концепция У-Син характеризуется сложной диалектической связью, выражающейся двумя циклами: продуктивным циклом или кругом жизни и деструктивным циклом или кругом смерти. Первоэлементы продуктивного цикла связаны между собой следующим образом: дерево (b) рождает огонь (c), огонь рождает землю (d), земля рождает металл (e), металл рождает воду (a), вода рождает дерево, замыкая круг. В деструктивном цикле связь между первоэлементами следующая: дерево побеждает землю, земля побеждает воду, вода побеждает огонь, огонь побеждает металл, металл побеждает дерево [6]. Древневосточные врачи применяли концепцию У-Син к анализу жизнедеятельности организма человека и для упорядочения сущности многообразных отношений человека и природы. В настоящее время, данное учение наиболее часто применяется во врачебной практике рефлексотерапии.

Как правило, в У-Син принято изображение первоэлементов так же как это сделано на рис. 10 а) для полярных атрибутов 5-полярного качества. При этом, цикл, показанный на рис. 10 б), соответствует продуктивному циклу концепции У-Син, а цикл на рис. 10 в) – деструктивному. Т. о. циклы СКС 5-полярного качества полностью соответствуют циклам У-Син.

**Шести- и двенадцатиполярное качества**

В заключение мы хотели бы рассмотреть примеры шести- и двенадцатиполярных качеств. Шестиполярное качество – первое в ряду качеств, которые содержат в своих СКС одновременно двух- и трехполярные КС, что, как отмечалось, дает возможность опосредованной регистрации трехполярного качества.

Спектр компенсированных состояний шестиполярного качества показан на рис. 11. На рис. 11 а) приведен граф полярных атрибутов данного качества, а на рис. 11 б) – г) – его разложение на непересекающиеся циклы. Рис. 11 д) – л) представляют спектр компенсированных состояний шестиполярного качества.

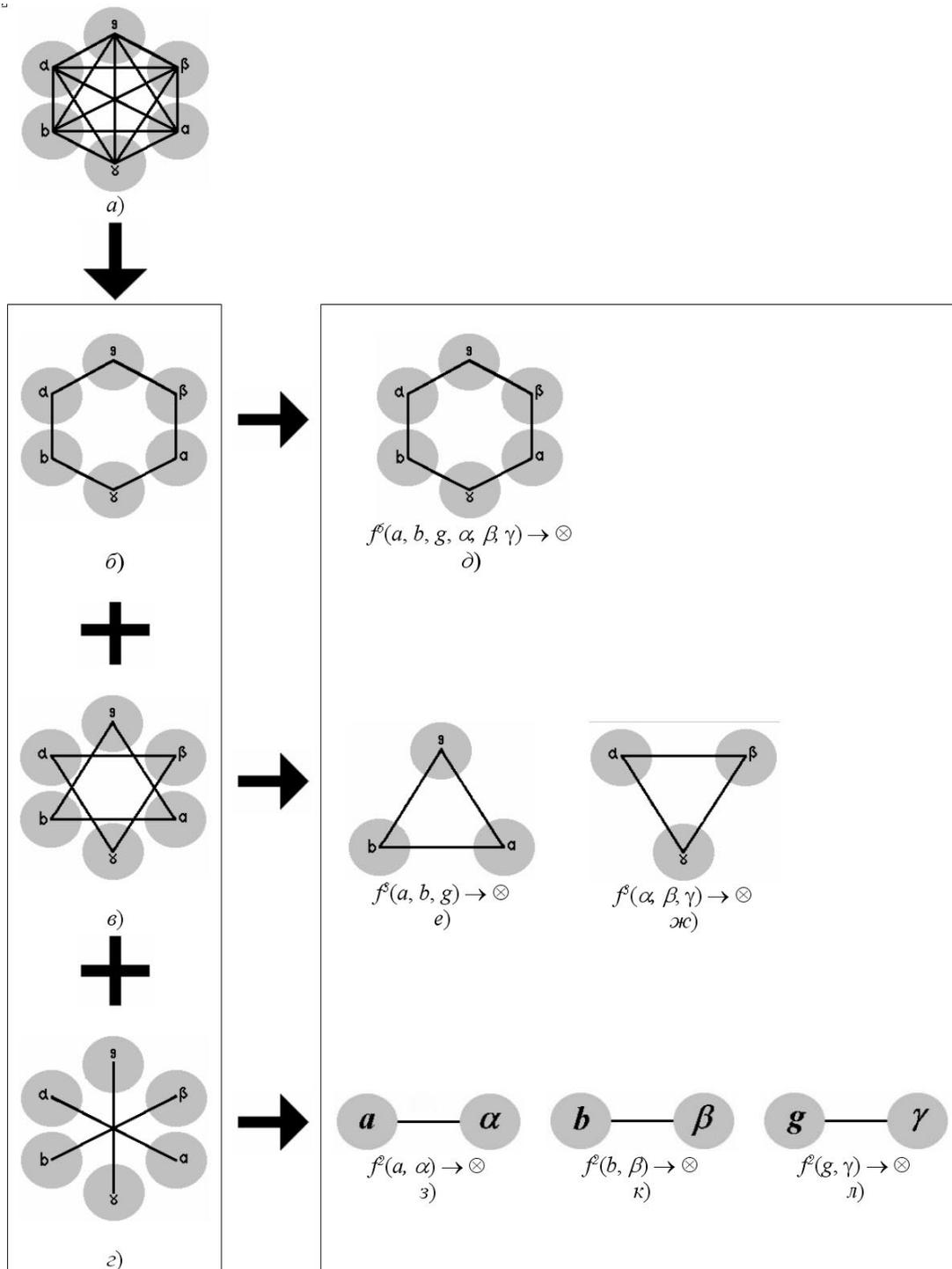


Рис. 11: Спектр компенсированных состояний шестиполярного качества.

Исходя из набора КС, представленных на рис. 11 *д) – л)* мы можем заключить, что данное качество может проявлять себя через двух-, трех- и шестиполярные элементарные отношения.

Если попробовать представить динамику шестиполярного качества (в силу наличия трехполярных КС такая попытка очень условна), то это могла бы быть поляризация трехполярного КС, например  $f^3(a, b, g)$ , рис. 11 *е)*, которая, согласно принципу компенсации приведет к компенсирующей ее поляризации второго трехполярного КС –  $f^3(\alpha, \beta, \gamma)$ , рис. 11 *ж)*. Поляризация трехполярных КС будет вести к противоположной по знаку поляризации двухполярных КС, рис. 11 *з) – л)*. Очевидно, что поляризация трехполярных КС связана со своим типом нелокальности, а поляризация двухполярных КС происходит синхронно, в отличие от, например, четырехполярного качества, где двухполярные КС проявляют себя поочередно.

Двенадцатиполярное качество – последнее которое мы ставим целью рассмотреть в настоящей работе. Оно интересно тем, что, с одной стороны, может быть поляризовано любым из уже рассмотренных двух-, трех-, четырех- и шестиполярных КС, а с другой – может поляризовать любое из них. По причине большого объема мы не приводим здесь граф полярных атрибутов, его разложение на непересекающиеся циклы и СКС двенадцатиполярного качества. Как можно видеть из Табл. 1, рассматриваемое качество имеет шесть двухполярных компенсированных состояний, четыре трехполярных, три четырехполярных, два шестиполярных и два двенадцатиполярных компенсированных состояния. Следовательно, оно может проявлять себя через двух-, трех-, четырех-, шести- и двенадцатиполярные элементарные отношения.

Очень трудно привести пример двенадцатиполярного качества, который иллюстрировал бы все особенности его СКС. Т. к. в СКС двенадцатиполярного качества существуют шесть двухполярных КС, то на основе этого можно предположить, что известные на сегодня шесть кварков и шесть антикварков могут рассматриваться, как полярные атрибуты двенадцатиполярного качества. При этом цветовые заряды кварков формируют трех- и шестиполярные КС в СКС двенадцатиполярного качества. Если подобное предположение справедливо, то в силу строения СКС двенадцатиполярного качества, такой объект должен обладать богатым набором свойств, часть из которых недоступна прямой регистрации.

## Заключение

В настоящей работе нами введено понятие элементарного отношения, выявлена связь между категорией элементарного отношения, качества и целостности, а также разработаны принципы, на которых основывается построение теории элементарных отношений. Эти принципы, изложенные в четвертом и пятом разделах, в определенном смысле повторяют третий раздел с тем отличием, что система категорий, являющаяся предметом существующих теорий качества [3, 4] не выходит за рамки двух полярных атрибутов, подчиненных диалектическому единству противоположностей. В то время как, разделы 4 и 5 закладывают основы теории качества произвольной полярности, в которой ее двухполярный вариант является частным случаем. В силу связанности категорий качества и элементарного отношения список элементарных отношений также не может быть ограничен только бинарными.

Одним из важных аспектов работы является связь ее построений с категорией целостности. Целостность, важность которой не столь очевидна в области физико-математических наук, становится тем важнее, чем ближе мы подходим к области наук о жизни, где создание языка ее формального описания одна из насущных задач. Решение такой задачи упирается в ряд антиномий целостности [7]. «Единоутробность» категорий

целостности и элементарного отношения, на наш взгляд, дает надежду на подход к такому описанию, т. к. понятие отношения практически всегда лежит в основе любой формальной системы.

Но, самой главной задачей этой работы нам видится постановка проблемы исследования элементарных отношений и привлечения внимания к факту существования отношений, которые не двухполярны. Осознание их наличия, на наш взгляд, необходимо, может быть, не столько для осмысления того, что не укладывается в привычные рамки двухполярных отношений, сколько для понимания границ их применимости.

### Литература

- [1] В. А. Панчелюга. Генезис числовых систем и общая теория отношений. // Международная научная конференция «Число, время, относительность», Москва, 10–13 августа, 2004, с. 76–78.
- [2] Овчинников Н.Ф. Принципы сохранения. М., Наука, 1966 – 331 с.
- [3] Ахлибинский Б. В., Храленко Н. И. Теория качества в науке и практике: Методологический анализ. Л., Изд-во Ленигр. ун-та, 1989 – 200 с.
- [4] Г. В. Ф. Гегель. Энциклопедия философских наук. Т. 1. Наука логики. М., «Мысль», 1974 – 452 с.
- [5] Лекторский В. А. Субъект, объект, познание. М., 1980.
- [6] Философский энциклопедический словарь. М., «Советская энциклопедия», 1989 – 815 с.
- [7] И. В. Блауберг. Проблема целостности и системный подход. М., Эдиториал УРСС, 1997 – 448 с.

## Fundamentals of Elementary Relations Theory

Victor A. Panchelyuga

*Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friaizino, Russia,  
Institute of Theoretical and Experimental Biophysics of RAS, Pushchino, Russia  
panvic333@yahoo.com*

Main goal of the paper is maybe not so much to present our results on the fundamentals of elementary relations theory as rather than draw attention to a problem, which steel unstated despite the fact that it implicitly exists in many logical, mathematical and physical models. This is the problem of elementary, i.e. indecomposable to more simple, relations. Due to extremely general nature of the notion of relation it underlies such the most general concepts of contemporary science as, for example, notion of number, symmetry, interaction, space-time, and so on. Because of this, careful investigation of the elementary relations problem can give us a way to understand not only the origin of the above-mentioned notions but also its possible limits.

**Key-words:** polarity, relation, elementary relation, quality, wholeness, quality theory, number, general systems theory.

## ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных алгебр в физике, е) Экспериментальные исследования возможной анизотропии пространства-времени и иных проявлений финслеровой геометрии.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.
2. Объем статьи не должен превышать 1 печ. листа (24 усл. маш. стр.)
3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате  $\LaTeX$  (версия  $\LaTeX 2_{\epsilon}$ , для набора формул используется  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\LaTeX$ ) и файл статьи в формате PostScript или PDF.
4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).
5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок), ключевые слова, классификацию по PACS или MSC2000. Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.
6. Название статьи, аннотация, ключевые слова, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.
7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.
8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи.
9. Публикация бесплатна для всех авторов.

# ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

Научный журнал. Основан в 2003 г.

№ 2 (12), том 6, 2009

Главный редактор Павлов Д. Г.

Зам. главного редактора Панчелюга В. А.

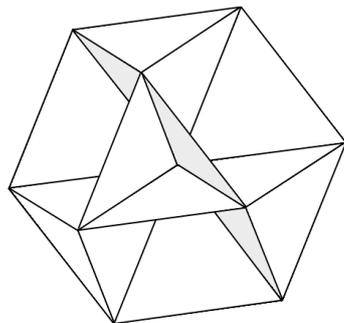
Ответственный секретарь Элиович А. А.

[www.polynumbers.ru](http://www.polynumbers.ru)  
[hypercomplex@mail.ru](mailto:hypercomplex@mail.ru)

Свидетельство о регистрации  
ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.

ISSN 1814-3946

© "МОЗЭТ", Российское Гиперкомплексное Общество



Типографские данные