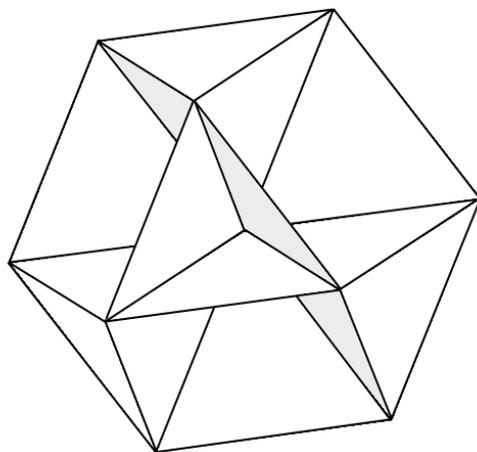


ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

№ 1 (11), том 6 (2009)

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 2003 г.



www.polynumbers.ru

hypercomplex@mail.ru

Оглавление

Павлов Д. Г., Гарасько Г. И. О возможности реализации <i>трингла</i> в трехмерном пространстве со скалярным полипроизведением.....	3
Гарасько Г. И. Объёмы индикатрис некоторых финслеровых пространств специального вида.....	12
Гарасько Г. И. Принцип самодостаточности финслеровой геометрии.....	19
Павлов Д. Г., Кокарев С. С. Метрические бинглы и тринглы в \mathcal{H}_3	42
Перминов Н. С. Конфигуратрисса и результат.....	68
Людковский С. В. Группы обертков кватернионных и октонионных расслоений....	72
Людковский С. В. Структура групп обёрток гиперкомплексных расслоений.....	91
Соловей Л. Г. Варианты гиперкомплексных чисел, описывающих равенства, соответствующие неравенствам Шварца–Коши–Буняковского.....	110
Алексеева Л. А. Полевые аналоги законов Ньютона для одной модели электро-гравитационного поля.....	122
Павлов Д. Г., Панчелюга М. С., Малыхин А. В., Панчелюга В. А. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной.....	135
Павлов Д. Г., Панчелюга М. С., Панчелюга В. А. О форме аналога множества Жюлиа при нулевом значении параметра на плоскости двойной переменной.....	146
Панчелюга В. А., Шноль С. Э. О фрактальной структуре пространства, выявляемой в ходе исследований эффекта местного времени.....	152
Варгашкин В. Я. Результаты поиска выделенного направления и неоднородностей Вселенной на основе статистики распределения квазаров.....	162
Полемика	179
Титов О. Метрика Минковского и метрика Бервальда-Моора.....	179
Информация для авторов.....	184

О ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ТРИНГЛА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ СО СКАЛЯРНЫМ ПОЛИПРОИЗВЕДЕНИЕМ

Д. Г. Павлов

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, МО
geom2004@mail.ru

Г. И. Гарасько

ГУП ВЭИ, Москва, Россия
НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, МО
gri9z@mail.ru

Группы изометрической симметрии и конформной симметрии играют в математике и физике исключительно важную роль, которую трудно переоценить. Первый класс симметрий связан с инвариантностью элемента длины метрического пространства, а второй класс симметрий – с инвариантностью углов. Если существует продолжение этой цепочки групп симметрий: изометрические, конформные, ... – то должны существовать и объекты, которые тесно связаны с таким более общим классом групп симметрий и которые для трехмерных пространств принято называть *тринглами*, или без относительно к размерности – *инглами*, а для указания размерности t больше 3-х – *t-инглами*. В евклидовых и псевдоевклидовых пространствах реализовать объекты, которые можно было бы назвать *инглами*, невозможно в отличие от пространств размерности больше двух со скалярным полипроизведением, имеющих число векторных аргументов также более двух, где такая реализация возможна. В данной работе построен конкретный трингл с точностью до функции от одной действительной переменной и получены его связи с координатами векторов в пространстве со скалярным трипроизведением, которое (пространство) тесно связано с трехмерным пространством Бервальда-Моора и имеет все основания называться *трехмерным временем*. Тем самым строго доказано существование ранее предполагаемых объектов – *трингов*, а значит и реальная возможность существования *t-инглов* с $t > 3$.

Ключевые слова: Финслерова геометрия, пространство Бервальда-Моора, симметрии, поличисла, тринглы.

1 Введение

Здание метрической геометрии покоится на двух базовых понятиях: длине и угле, а те, в свою очередь, органически связаны с другим фундаментальным объектом – скалярным произведением. Действительно, если над линейным пространством задана билинейная симметрическая форма от двух векторов, то в качестве длины обычно выступает величина равная корню квадратному из скалярного произведения вектора самого на себя, а в качестве угла – значение функции арккосинус из билинейной формы от двух единичных векторов. Почти очевидно, что других базовых величин в геометрии строящейся на основе билинейной симметрической формы возникнуть не может. Однако, если формализм связанный со скалярным произведением заменить на практически

аналогичный, но связанный уже с полилинейной симметрической формой от нескольких векторов [1], то, по крайней мере на концептуальном уровне, появляется возможность для построения, помимо прямых обобщений длины и угла, целого ряда новых базисных величин, первую из которых для определенности договоримся называть тринглom.

Изучение геометрических объектов типа тринглom в существенной степени осложняется тем обстоятельством, что в отличие от длин и углов, ни в нашем сознании, ни в быту, ни в научных исследованиях подобные конструкции до сих пор не были востребованы. Они естественны как самостоятельные понятия лишь в пространствах, метрические формы которых уже не квадратичны, а, минимум, кубичны. Однако в науке, казалось бы, по своему замыслу призванной заниматься такими формами, то есть в финслеровой геометрии, до сих пор не расставлены точки над i даже в связи с обобщением угла [6]. Повинно же в этом понятие т. н. финслерова метрического тензора, зависящего как от точки, так и от направления в ней. С переходом же к формализму скалярного полипроизведения [1] финслеров метрический тензор из двухиндексного становится многоиндексным объектом, но, что самое главное, теряет зависимость от направлений. Именно на этом пути, как нам представляется, следует ожидать дальнейший прогресс во взглядах как на геометрию, так и на тесно связанную с последней физику.

Рассмотрение длин и углов в качестве инвариантов приводит к естественному выделению среди произвольных геометрических преобразований пространства изометрических и конформных, а те, в свою очередь, составляют основу очень многих следствий. Почти очевидно, что требование инвариантности тринглom и более сложных их обобщений также должно с необходимостью приводить к появлению неких новых выделенных классов преобразований, которые ранее в качестве объективно выделенных не рассматривались. Иными словами, речь идет о правилах выделения в некоторых пространствах дополнительных групп симметрий. Ну а факт, что непрерывные симметрии составляют один из главных фундаментов не только геометрии, но и физики уже давно не вызывает сомнений.

Рассмотрим вначале евклидово n -мерное пространство, и пусть $A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(n)}, B, C, \dots$ – некоторые векторы в этом пространстве.

Если

$$(B, B) = 1, \quad (C, C) = 1, \quad (1)$$

то

$$(A, B) = (B, A) = \cos \varphi, \quad (2)$$

при этом φ – именно та величина, которая сохраняется при конформных преобразованиях. Отметим, что величина φ выражается через скалярное произведение единичных векторов хотя и через элементарную, но все же не линейную или алгебраическую функцию, а через функцию арккосинус.

Останется ли в евклидовом пространстве хотя бы один непрерывный произвольный параметр при фиксации не только длин векторов, но и углов между ними? Выберем, например, такие требования:

$$(A_{(1)}, A_{(1)}) = 1, \quad (A_{(2)}, A_{(2)}) = 1, \quad \dots, \quad (A_{(n)}, A_{(n)}) = 1, \quad (3)$$

$$(A_{(i)}, A_{(j)}) = 0, \quad i < j.$$

То есть рассмотрим систему n ортонормированных векторов. Число произвольных параметров у n векторов в n -мерном пространстве равно n^2 . Из этого числа надо вычесть

число параметров группы изометрической симметрии, которая поворачивает эти векторы как целое и число параметров в которой равно $\frac{n(n-1)}{2}$, и число условий в формуле (3), которое равно $\left[n + \frac{n(n-1)}{2} \right]$. Таким образом, число оставшихся свободных параметров k равно

$$k = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} - \left[n + \frac{n(n-1)}{2} \right] \equiv 0, \quad (4)$$

что означает невозможность построения непрерывной действительной величины в дополнении в n длинам векторов и $\frac{n(n-1)}{2}$ углам между n векторами.

Число параметров в группах изометрической симметрии в пространствах размерности $n > 2$ со скалярным полипроизведением [1] с числом аргументов $m > 2$ обычно меньше, чем $\frac{n(n-1)}{2}$, поэтому в таких пространствах остается возможность выделить непрерывную величину после исключения числа параметров группы изометрической симметрии и числа условий, аналогичных условиям, записанных в формуле (3). Так в пространствах со скалярным полипроизведением, связанных с невырожденными поличислами [2] размерности n , группа изометрической симметрии имеет $(n-1)$ параметр [2], поэтому для таких пространств формула (3) приобретает вид:

$$k = n^2 - (n-1) - \left[\frac{n(n-1)}{2} + n \right] = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \quad (5)$$

При $n > 2$ число k является натуральным, так если $n = 3$ (поличисла H_3), то число $k = 1$; если $n = 4$ (поличисла H_4), то число $k = 3$. Таким образом, в пространстве со скалярным трипроизведением, связанным с гиперкомплексными числами H_3 , есть все основания надеяться на существование одного триангла [3], а в пространстве со скалярным четырехпроизведением, связанным с гиперкомплексными числами H_4 , есть все основания надеяться на существование трех инглов.

Подчеркнем, что пространства H_3 и H_4 являются метрическими пространствами с метрикой Бервальда-Моора и имеют все основания называться *трехмерным временем* и *четырёхмерным временем* соответственно [4].

Задачей настоящей работы является показать возможность существования инглов на конкретном примере, найти такой объект, выписав конкретные математические формулы, то есть неоспоримо доказать существование, хотя бы одного ингла. Для этого мы выберем простейший случай: пространство со скалярным трипроизведением, связанное с гиперкомплексными числами H_3 , – где есть все основания надеяться на существование одного триангла, и найдем этот математический объект, то есть опишем его с помощью конкретных математических формул, оставив неопределенной лишь одну функцию одной действительной переменной.

2 Пространство со скалярным трипроизведением, связанное с поличислами H_3

Пространство со скалярным трипроизведением [1], связанное с поличислами H_3 , определяется как пара: трехмерное линейное пространство с элементами A, B, C, \dots и трилинейная форма (A, B, C) . Форма (A, B, C) определена на любой тройке векторов линейного пространства и обладает следующими свойствами:

1. при любой подстановке аргументов форма (A, B, C) не изменяет своего значения;

2. если α и β произвольные действительные числа, то

$$(\alpha A + \beta B, C, D) = \alpha(A, C, D) + \beta(A, C, D); \quad (6)$$

3. оба первых свойства (как и ряд других свойств) вытекают из правила вычисления скалярного трипроизведения (A, B, C) [2] в специальном изотропном базисе e_1, e_2, e_3 , $e_1e_1 = e_1, e_2e_2 = e_2, e_3e_3 = e_3, e_ie_j = 0$, если $i \neq j$:

$$(A, B, C) = \frac{1}{3!} \text{perm} \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}_+ . \quad (7)$$

Требования (3) для трехмерного пространства со скалярным произведением с тремя аргументами можно записать по-разному, мы выберем наиболее симметричный способ:

$$(A, A, A) = 1, \quad (B, B, B) = 1, \quad (C, C, C) = 1; \quad (8)$$

$$(A, A, B) = 0, \quad (B, B, C) = 0, \quad (C, C, A) = 0.$$

При выполнении этих 6-ти требований и исключении преобразований системы трех векторов как целого с помощью группы изометрической симметрии, которая (группа) в данном случае является двухпараметрической, остается единственная (см. формулу (5)) непрерывная действительная величина, обозначим ее символом ψ , которую естественно связать с формой (A, B, C) :

$$(A, B, C) = F(\psi), \quad (9)$$

где F – неизвестная пока функция одного действительного аргумента ψ , трингла. Нет оснований надеяться, что функция F окажется линейной или алгебраической, так как даже при введении понятия угла между векторами в евклидовом пространстве аналогичная функция является косинусом (2). Для того, чтобы получить конкретный вид функции $F(\psi)$, необходимо воспользоваться некими общими соображениями, например, потребовать, чтобы существовала операция (или операции) построения из нескольких трек векторов с тринглами $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$ опять тройки векторов с тринглом ψ с аддитивным законом сложения тринглов:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_p. \quad (10)$$

В качестве такой операции в евклидовом пространстве можно взять деление угла с помощью луча, лежащего в той же плоскости, что и угол. Аналогично в рассматриваемом пространстве – добавление к тройке векторов A, B, C вектора D и составление тройки векторов A, B, C из трех троек, например: $A, B, D, B, C, D, C, A, D$.

Из первых трех условий (8) следует, что компоненты векторов A, B, C должны иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} a^1 &= \varepsilon_a^1 e^{\alpha_1}, & b^1 &= \varepsilon_b^1 e^{\beta_1}, & c^1 &= \varepsilon_c^1 e^{\gamma_1}, \\ a^2 &= \varepsilon_a^2 e^{\alpha_2}, & b^2 &= \varepsilon_b^2 e^{\beta_2}, & c^2 &= \varepsilon_c^2 e^{\gamma_2}, \\ a^3 &= \varepsilon_a^3 e^{-\alpha_1 - \alpha_2}, & b^3 &= \varepsilon_b^3 e^{-\beta_1 - \beta_2}, & c^3 &= \varepsilon_c^3 e^{-\gamma_1 - \gamma_2}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $\varepsilon_a^i, \varepsilon_b^i, \varepsilon_c^i$ – знаковые множители, подчиняющиеся трем условиям:

$$\varepsilon_a^1 \varepsilon_a^2 \varepsilon_a^3 = 1, \quad \varepsilon_b^1 \varepsilon_b^2 \varepsilon_b^3 = 1, \quad \varepsilon_c^1 \varepsilon_c^2 \varepsilon_c^3 = 1 \quad (12)$$

– а в остальном пока независимые. Из последних трех условий (8) имеем:

$$(A, A, B) = \frac{1}{3} [a^1 a^2 b^3 + a^1 a^3 b^2 + a^2 a^3 b^1] = 0, \quad (13)$$

или

$$\varepsilon_a^1 \varepsilon_a^2 \varepsilon_b^1 \varepsilon_b^2 e^{\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2} + \varepsilon_a^2 \varepsilon_b^2 e^{-\alpha_2 + \beta_2} + \varepsilon_a^1 \varepsilon_b^1 e^{-\alpha_1 + \beta_1} = 0; \quad (14)$$

$$(B, B, C) = \frac{1}{3} [b^1 b^2 c^3 + b^1 b^3 c^2 + b^2 b^3 c^1] = 0, \quad (15)$$

или

$$\varepsilon_b^1 \varepsilon_b^2 \varepsilon_c^1 \varepsilon_c^2 e^{\beta_1 + \beta_2 - \gamma_1 - \gamma_2} + \varepsilon_b^2 \varepsilon_c^2 e^{-\beta_2 + \gamma_2} + \varepsilon_b^1 \varepsilon_c^1 e^{-\beta_1 + \gamma_1} = 0; \quad (16)$$

$$(C, C, A) = \frac{1}{3} [c^1 c^2 a^3 + c^1 c^3 a^2 + c^2 c^3 a^1] = 0, \quad (17)$$

или

$$\varepsilon_c^1 \varepsilon_c^2 \varepsilon_a^1 \varepsilon_a^2 e^{\gamma_1 + \gamma_2 - \alpha_1 - \alpha_2} + \varepsilon_c^2 \varepsilon_a^2 e^{-\gamma_2 + \alpha_2} + \varepsilon_c^1 \varepsilon_a^1 e^{-\gamma_1 + \alpha_1} = 0. \quad (18)$$

Из вида уравнений (14), (16), (18) следует, что при преобразованиях:

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \rightarrow \alpha_i + \varphi_i, \beta_i + \varphi_i, \gamma_i + \varphi_i \quad (19)$$

– которые содержат два независимых параметра φ_1, φ_2 и реализуют изометрическую группу симметрии, условия (8) не изменяются.

Введем обозначения:

$$U_1 = \varepsilon_a^1 \varepsilon_b^1 e^{\alpha_1 - \beta_1}, U_2 = \varepsilon_a^2 \varepsilon_b^2 e^{\alpha_2 - \beta_2}, V_1 = \varepsilon_b^1 \varepsilon_c^1 e^{\beta_1 - \gamma_1}, V_2 = \varepsilon_b^2 \varepsilon_c^2 e^{\beta_2 - \gamma_2}, \quad (20)$$

тогда уравнения (14), (16), (18) перепишутся следующим образом:

$$U_1 + U_2 + U_1^2 U_2^2 = 0, \quad V_1 + V_2 + V_1^2 V_2^2 = 0, \quad U_1^2 U_2 V_1^2 V_2 + U_1 U_2^2 V_1 V_2^2 + 1 = 0. \quad (21)$$

При решении этой системы уравнений будем считать, что $U_i, V_i \neq 0$. С помощью первых двух уравнений (21) понизим степень третьего уравнения (21), сделав его однородным, в результате третье уравнение (21) перепишется следующим образом:

$$(U_1 + U_2)(V_1 + V_2)(U_1 V_1 + U_2 V_2) + U_1 U_2 V_1 V_2 = 0. \quad (22)$$

Это уравнение превращается в тождество, если

$$1) \quad U_1 = -\frac{U_2(V_1 + V_2)}{V_1} \quad \text{или} \quad 2) \quad U_2 = -\frac{U_1(V_1 + V_2)}{V_2}. \quad (23)$$

В настоящей работе нас не будет интересовать вопрос о числе качественно различных решений, наша задача получить хотя бы одно решение, поэтому выберем первое соотношение (23), подставим его в первое уравнение (21) и после преобразований получим

$$U_2 = \left[\frac{V_1 V_2}{(V_1 + V_2)^2} \right]^{1/3}. \quad (24)$$

Второе уравнение (21) является квадратным уравнением относительно V_2 , если V_1 – независимый параметр, поэтому

$$V_2 = -\frac{1}{2V_1} \pm \sqrt{\frac{1}{4V_1^4} - \frac{1}{V_1}}. \quad (25)$$

По тем же соображениям, изложенным выше, выберем верхний знак.

Итак, одно из решений системы уравнений (21) можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} V_2 &= -\frac{1}{2V_1} + \sqrt{\frac{1}{4V_1^4} - \frac{1}{V_1}}, \\ U_2 &= \left[\frac{V_1 V_2}{(V_1 + V_2)^2} \right]^{1/3}, \\ U_1 &= -\frac{U_2(V_1 + V_2)}{V_1}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Из первого соотношения следует, что независимый параметр V_1 при этом может изменяться лишь в пределах

$$-\infty < V_1 < 0, \quad 0 < V_1 \leq \frac{1}{4^{1/3}}, \quad (27)$$

причем особенность в точке $V_1 = 0$ для функции $V_2(V_1)$ является устранимой, так как пределы слева и справа имеют конечное значение и совпадают. Используя второе уравнение (21), решение (26) можно упростить:

$$\left. \begin{aligned} V_2 &= -\frac{1}{2V_1} + \sqrt{\frac{1}{4V_1^4} - \frac{1}{V_1}}, \\ U_2 &= \frac{1}{V_1 V_2}, \\ U_1 &= V_2. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Запишем в тех же обозначениях формулу (A, B, C) :

$$F(\psi) \equiv (A, B, C) = \frac{1}{6} (a^1 b^2 c^3 + a^1 b^3 c^2 + a^2 b^1 c^3 + a^2 b^3 c^1 + a^3 b^1 c^2 + a^3 b^2 c^1), \quad (29)$$

или с учетом полученных выше формул имеем

$$6F(\psi) = \frac{3V_1^2 V_2 + V_1^3 + V_1^3 V_2^3 + 1}{V_1^2 V_2}. \quad (30)$$

Исследуем область (27) определения формул (28) более подробно.

$V_1 \rightarrow -\infty$:

$$\left. \begin{aligned} V_2 &\approx \frac{1}{|V_1|^{1/2}}, \\ U_2 &\approx -\frac{1}{|V_1|^{1/2}}, \\ 6F(\psi) &\approx -|V_1|^{3/2}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$V_1 = -1$:

$$\left. \begin{aligned} V_2 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \\ U_2 &= -\frac{2}{\sqrt{5}-1}, \\ 6F(\psi) &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$|V_1| \ll 1$:

$$\left. \begin{aligned} V_2 &\approx -V_1, \\ U_2 &\approx -\frac{1}{V_1^2}, \\ 6F(\psi) &\approx -\frac{1}{V_1^3}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$V_1 = \frac{1}{2^{2/3}}$:

$$\left. \begin{aligned} V_2 &= -2^{1/3}, \\ U_2 &= -2^{1/3}, \\ 6F(\psi) &= \frac{3}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Вновь возникает вопрос о качественно различных тринглах, связанный уже с выбором области определения независимой переменной V_1 и изменением знаковых коэффициентов ε_d^i . Будем считать, что переменная V_1 изменяется в пределах:

$$V_1 \in (-\infty; 0). \quad (35)$$

Тогда величины U_1 и V_2 всегда положительны, обращаются в нуль при $V_1 \rightarrow -0, -\infty$ и имеют максимум при $V_1 = -1, 260$; величины U_2 всегда отрицательна и монотонно убывает от 0 до $-\infty$ при изменении переменной V_1 от $-\infty$ до 0; Величина $F(\psi)$ при изменении переменной V_1 от $-\infty$ до 0 монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, обращаясь в нуль при $V_1 = -1, 756$.

Нам не удалось получить обратную аналитическую формулу $V_1(F)$, но можно получить приближенную аналитическую зависимость $V_1(F)$, предварительно получив приближенную зависимость $F(V_1)$. Из выше приведенных формул следует, что в области (35) имеет место следующая приближенная формула:

$$6F(\psi) \simeq \frac{1}{|V_1|^3} - |V_1|^{3/2} + C_0, \quad C_0 \simeq 2, 142. \quad (36)$$

Введем обозначение

$$x = \frac{1}{|V_1|^{3/2}} \quad (37)$$

и получим для определения x кубическое уравнение

$$x^3 - (6F - C_0)x - 1 = 0. \quad (38)$$

Итак, если использовать корень кубического уравнения (38), можно получить приближенную аналитическую зависимость $V_1(F)$. Проблема состоит в том, что функция $F(\psi)$ не известна, поэтому не известна и функция $V_1(\psi)$.

Предположим, что численное значение трингла ψ известно и известна функциональная зависимость $V_1(\psi)$, тогда известна и величина V_1 . По формулам (28) однозначно получаются значения величин U_1, U_2, V_2 , но получить при этом однозначно компоненты векторов A, B, C невозможно, так как формулы (20) инвариантны относительно группы изометрических преобразований. Чтобы исключить этот произвол, будем считать, что

$$A = (1, 1, 1), \quad (39)$$

тогда

$$B = \left(\frac{1}{U_1}, \frac{1}{U_2}, U_1 U_2 \right), \quad C = \left(\frac{1}{U_1 V_1}, \frac{1}{U_2 V_2}, U_1 U_2 V_1 V_2 \right). \quad (40)$$

Заключение

В данной работе доказано, что в трехмерном пространстве с полиформой, соответствующей поличислам H_3 , существует геометрический объект *трингл*, и найдено его численное выражение с точностью до функции одной действительной переменной.

Кроме задач построения инглов для пространств размерности четыре и более, для трехмерного рассматриваемого пространства остались нерешенными три задачи:

1. из общих соображений необходимо построить конкретную функцию $F(\psi)$;
2. провести классификацию всех качественно различных тринглов и выяснить, каким алгебраическим объектом является множество переходов между ними;
3. найти группу преобразований, которые сохраняют тринглы, но не сохраняют норму векторов и углы между векторами.

Литература

- [1] Д. Г. Павлов: Обобщение аксиом скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 5–19.
- [2] Д. Г. Павлов, Г. И. Гарасько: Геометрия невырожденных поличисел, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (7)**, том 4 (2005), 3–25.
- [3] Д. Г. Павлов: Симметрии и геометрические инварианты. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2 (6)**, том 3, 2006, 21–32
- [4] Д. Г. Павлов: Хронометрия трёхмерного времени, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 20–32.
- [5] Д. Г. Павлов: Четырёхмерное время, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 33–42.
- [6] Х. Рунд, Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., Наука, 1981.

**On the possibility of the realization of a tringle
in a 3D space with a scalar product**

D. G. Pavlov^{1,2}, G. I. Garas'ko^{1,3}

(1) – *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia*

(2) – *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

(3) – *Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia*

geom2004@mail.ru, gri9z@mail.ru

The isometric and conform symmetry groups are of exceptional importance in mathematics and physics that can scarcely be overestimated. The former class of symmetry relates to the invariant of the element of length of the metric space, but the latter class of symmetry relates to the angle invariant. If there exists a continuation of this chain of the symmetry groups, isometric, conform. . . etc, then there should exist objects tightly connected with this more generic class of symmetry group, which are common to call as tringles or, without any relation to the dimension, as ingles, and, to show the dimension m exceeding 3 – as m -ingles. It is not possible to have ingles in the Euclidian or pseudo- Euclidian spaces, but, in contrast, it is possible to have ingles in the space with the dimension exceeding 2 and having scalar polyproducts, with the number of the vector arguments also above 2. In the present work, we build a real tringle accurate within a function of one real variable, and we derived its relation to the coordinates of the vectors in the space with a scalar triproduct, where the space is tightly connected with the Berwald-Moor 3D space, which is justified to be called as 3D-time. So, the existence of the tringles, which have been supposed to exist, is rigorously proven that implies a real possibility for m -ingles, with $m > 3$, to exist.

Key words: Finsler geometry, Berwald-Moor space, symmetry, tringles, polynumbers.

ОБЪЕМЫ ИНДИКАТРИС НЕКОТОРЫХ ФИНСЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Г. И. Гарасько

ГУП ВЭИ, Москва, Россия,
НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, МО
gri9z@mail.ru

Получены объёмы индикатрис некоторых финслеровых пространств специального вида, что позволяет прояснить вопрос о существовании конечного (не нулевого) элемента объема в финслеровых пространствах, одна из координат у которых временная, и других финслеровых пространствах с вогнутой индикатрисой.

Ключевые слова: финслеровы пространства, индикатриса.

1 Введение

В работах [1], [2] был предложен новый (геометрический) подход в теории поля, применимый к любому финслеровому пространству, у которого в каждой точке основного пространства x^1, x^2, \dots, x^n может быть определен объем индикатрисы $(V_{ind}(x^1, x^2, \dots, x^n))_{ev}$ в предположении, что касательное центроаффинное пространство является евклидовым, а координаты декартовыми прямоугольными. Действие I для полей, входящих в метрическую функцию финслера пространства, определяется с точностью до постоянного множителя как объем по некоторой n -мерной области \mathcal{V} этого финслера пространства:

$$I = \text{const} \cdot \int_{\mathcal{V}}^{(n)} \frac{dx^1 dx^2 \dots dx^n}{(V_{ind}(x^1, x^2, \dots, x^n))_{ev}}. \quad (1)$$

Таким образом, полевой лагранжиан определяется следующим образом:

$$\mathcal{L} = \text{const} \cdot \frac{1}{(V_{ind}(x^1, x^2, \dots, x^n))_{ev}}. \quad (2)$$

Для псевдоримановых пространств, как и для любых финслеровых пространств, содержащих в качестве одной из координаты время, без специальных дополнительных условий на индикатрису

$$(V_{ind})_{ev} = \infty \quad \Rightarrow \quad dV = 0 \cdot dx^1 dx^2 \dots dx^n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} \equiv 0. \quad (3)$$

Эту проблему можно решить следующим образом: перейти от рассматриваемого финслера пространства к более сложному финслеровому пространству, содержащему некоторый параметр и имеющему конечный объем индикатрисы в каждой точке, если параметр не равен нулю. При стремлении параметра к нулю финслерово пространство с параметром должно переходить в исходное финслерово пространство, а значит при этом

$$(V_{ind})_{ev} \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Все экспериментально получаемые физические величины должны иметь конечные значения при стремлении такого параметра к нулю.

Поясним, как можно ввести этакой параметр на примере пространства Минковского. Если вместо пространства Минковского рассмотреть финслерово пространство с метрической функцией

$$L(dx) = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} + q_0 dx^0 \quad (5)$$

и условиями $dx^0 > 0$, $q_0 > 0$, то у такого пространства объем индикатрисы $(V_{ind})_{ev}$ конечное действительное число, зависящее от параметра q_0 и стремящееся к ∞ , когда параметр q_0 стремится к 0.

Движение заряженной частицы массы m и заряда e в гравитационном и электромагнитном полях можно описать в лагранжевом формализме элементом действия [3]

$$ds = -mc \sqrt{g_{ij}(x) dx^i dx^j} - \frac{e}{c} A_i(x) dx^i, \quad (6)$$

поэтому, кроме финслеровых пространств с метрической функцией типа (5), следует рассмотреть и финслеровы пространства с метрической функцией типа

$$L(dx) = -\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} + q_0 dx^0. \quad (7)$$

В таких пространствах (с условиями $dx^0 > 0$ и $q_0 \equiv 1 + \alpha > 1$) объем индикатрисы $(V_{ind})_{ev}$ конечное действительное число, зависящее от параметра q_0 , или α и стремящееся к ∞ , когда параметр q_0 стремится к 1, или параметр $\alpha \rightarrow 0$.

В связи в выше изложенным рассмотрим ниже финслеровы пространства с метрическими функциями вида:

$$L_{\pm}(dx; q_0) = \pm L'(dx) + q_0 dx^0, \quad dx^0 > 0, \quad q_0 > 0. \quad (8)$$

Здесь $L'(dx)$ – метрическая функция либо гиперболической плоскости, либо пространства Минковского. Вычислив объемы индикатрис таких плоских пространств, мы сможем вычислить объемы индикатрис и соответствующих кривых пространств.

2 Двумерные пространства $L_{\pm}^{H^2}(q_0)$

Наиболее подробно изучим индикатрисы двумерных пространств с элементами длины

$$ds = \pm \sqrt{dx^2 - dy^2} + q_0 dx, \quad dx > 0. \quad (9)$$

Верхний знак, $q_0 > 0$.

В касательном пространстве ξ, η уравнение индикатрисы принимает вид

$$\sqrt{\xi^2 - \eta^2} + q_0 \xi = 1, \quad \xi > 0. \quad (10)$$

Кривая (10) в зависимости от значения параметра q_0 является частью одной ветви гиперболы ($0 < q_0 < 1$), либо частью параболы ($q_0 = 1$), либо частью эллипса ($1 < q_0$); в любом из этих случаев она лишь в одной точке $\xi_1 = \frac{1}{1+q_0}$ пересекает ось ξ , касается биссектрисы первого квадранта в точке $(\frac{1}{q_0}, \frac{1}{q_0})$ и биссектрисы четвертого квадранта в точке $(\frac{1}{q_0}, -\frac{1}{q_0})$, соединяет эти точки касания и проецируется на ось ξ в виде отрезка:

$$\frac{1}{1+q_0} \leq \xi \leq \frac{1}{q_0}. \quad (11)$$

Разрешая уравнение (10) относительно η , получим

$$\eta = \pm \sqrt{(1 - q_0^2)\xi^2 + 2q_0\xi - 1}, \quad (12)$$

а значит объем индикатрисы определяется формулой

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{1}{q_0^2} - 2 \int_{\frac{1}{1+q_0}}^{\frac{1}{q_0}} \sqrt{(1 - q_0^2)\xi^2 + 2q_0\xi - 1} d\xi. \quad (13)$$

Вычисляя табличный интеграл для различных значений параметра q_0 , получим

$$(V_{ind}^{H_2})_{ev}^+ = \begin{cases} \frac{\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-q_0^2}}{q_0}\right)}{(1-q_0^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1-q_0^2)}, & 0 < q_0 < 1, \\ \frac{1}{3}, & q_0 = 1, \\ \frac{1}{(q_0^2-1)} - \frac{\arccos\left(\frac{1}{q_0}\right)}{(q_0^2-1)^{\frac{3}{2}}}, & 1 < q_0. \end{cases} \quad (14)$$

Итак, при изменении параметра q_0 от 0 до $+\infty$ объем индикатрисы $(V_{ind}^{H_2})_{ev}^+$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0.

Нижний знак, $1 < q_0$.

В касательном пространстве ξ, η уравнение индикатрисы принимает вид

$$-\sqrt{\xi^2 - \eta^2} + q_0\xi = 1, \quad \xi > 0. \quad (15)$$

Кривая (15) является частью эллипса, причем она лишь в одной точке $\xi_2 = \frac{1}{q_0-1}$ пересекает ось ξ , касается биссектрисы первого квадранта в точке $(\frac{1}{q_0}, \frac{1}{q_0})$ и биссектрисы четвертого квадранта в точке $(\frac{1}{q_0}, -\frac{1}{q_0})$, соединяет эти точки касания и проецируется на ось ξ в виде отрезка:

$$\frac{1}{q_0} \leq \xi \leq \frac{1}{q_0-1}. \quad (16)$$

Разрешая уравнение (15) относительно η , получим

$$\eta = \pm \sqrt{-(q_0^2 - 1)\xi^2 + 2q_0\xi - 1}, \quad (17)$$

а значит объем индикатрисы определяется формулой

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{1}{q_0^2} + 2 \int_{\frac{1}{q_0}}^{\frac{1}{q_0-1}} \sqrt{-(q_0^2 - 1)\xi^2 + 2q_0\xi - 1} d\xi. \quad (18)$$

Вычисляя табличный интеграл, получим

$$(V_{ind}^{H_2})_{ev}^- = \frac{1}{(q_0^2-1)} + \frac{1}{(q_0^2-1)^{\frac{3}{2}}} \left(\pi - \arccos \frac{1}{q_0} \right), \quad 1 < q_0. \quad (19)$$

Итак, при изменении параметра q_0 от 1 до $+\infty$ объем индикатрисы $(V_{ind}^{H_2})_{ev}^-$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0.

Из формул (14), (19) при $1 < q_0$ получим площадь двумерного эллипса, граница которого состоит из двух индикатрис,

$$(V_{ind}^{H_2})_{ev}^- - (V_{ind}^{H_2})_{ev}^+ = \frac{\pi}{(q_0^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad 1 < q_0, \quad (20)$$

и соотношение

$$\lim_{q_0 \rightarrow +\infty} \frac{(V_{ind}^{H_2})_{ev}^-}{(V_{ind}^{H_2})_{ev}^+} = 1. \quad (21)$$

3 Четырехмерные пространства $L_{\pm}^{\text{Min}}(q_0)$

Рассмотрим финслеровы четырехмерные пространства с элементом длины

$$ds = \pm \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} + q_0 dx^0, \quad dx^0 > 0, \quad q_0 > 0. \quad (22)$$

Верхний знак, $q_0 > 0$.

В касательном пространстве $\xi, \eta^1, \eta^2, \eta^3$ уравнение индикатрисы принимает вид

$$\sqrt{\xi^2 - \eta^2} + q_0 \xi = 1, \quad \xi > 0, \quad (23)$$

где

$$\eta \equiv \sqrt{(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2}. \quad (24)$$

Трехмерная гиперповерхность второго порядка (23) в зависимости от значения параметра q_0 является частью одной полости двуполосного гиперboloида ($0 < q_0 < 1$), либо частью эллиптического параболоида ($q_0 = 1$), либо частью поверхности четырехмерного эллипсоида ($1 < q_0$), но в двумерном пространстве ξ, η индикатрисы будут теми же отрезками кривых, которые фигурировали в предыдущем разделе. Индикатриса пересекает ось ξ в единственной точке $\xi_1 = \frac{1}{1+q_0}$, касается светового конуса при $\xi = \frac{1}{q_0}$ и проецируется на ось ξ в виде отрезка:

$$\frac{1}{1+q_0} \leq \xi \leq \frac{1}{q_0}. \quad (25)$$

Так как интегрирование при вычислении объема индикатрисы надо в данном случае вести теперь по четырехмерной области, то вместо интеграла (13) получим

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{\pi}{3} \frac{1}{q_0^4} - \frac{4\pi}{3} \int_{\frac{1}{1+q_0}}^{\frac{1}{q_0}} [(1 - q_0^2)\xi^2 + 2q_0\xi - 1]^{\frac{3}{2}} d\xi. \quad (26)$$

Вычисляя табличный интеграл для различных значений параметра q_0 , находим

$$(V_{ind}^{Min})_{ev}^+ = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \left[\frac{1 + 2q_0^2}{q_0^2(1 - q_0^2)^2} - \frac{3 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - q_0^2}}{q_0} \right)}{(1 - q_0^2)^{\frac{5}{2}}} \right], & 0 < q_0 < 1, \\ \frac{\pi}{15}, & q_0 = 1, \\ \frac{\pi}{6} \left[\frac{1 + 2q_0^2}{q_0^2(q_0^2 - 1)^2} - \frac{3 \arccos \left(\frac{1}{q_0} \right)}{(q_0^2 - 1)^{\frac{5}{2}}} \right], & 1 < q_0. \end{cases} \quad (27)$$

Итак, при изменении параметра q_0 от 0 до $+\infty$ объем индикатрисы $(V_{ind}^{Min})_{ev}^+$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0.

Нижний знак, $1 < q_0$.

В касательном пространстве $\xi, \eta^1, \eta^2, \eta^3$ уравнение индикатрисы принимает вид

$$-\sqrt{\xi^2 - \eta^2} + q_0\xi = 1, \quad \xi > 0. \quad (28)$$

Гиперповерхность (28) является частью поверхности четырехмерного эллипсоида, причем она лишь в одной точке $\xi_2 = \frac{1}{q_0 - 1}$ пересекает ось ξ , касается светового конуса при $\xi = \frac{1}{q_0}$ и проецируется на ось ξ в виде отрезка:

$$\frac{1}{q_0} \leq \xi \leq \frac{1}{q_0 - 1}, \quad (29)$$

а значит объем индикатрисы определяется формулой

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{\pi}{3} \frac{1}{q_0^4} + \frac{4\pi}{3} \int_{\frac{1}{q_0}}^{\frac{1}{q_0 - 1}} [-(q_0^2 - 1)\xi^2 + 2q_0\xi - 1]^{\frac{3}{2}} d\xi. \quad (30)$$

Вычисляя табличный интеграл, получим

$$(V_{ind}^{Min})_{ev}^- = \frac{\pi}{6} \left[\frac{1 + 2q_0^2}{q_0^2(q_0^2 - 1)^2} + \frac{3 \left(\pi - \arccos \left(\frac{1}{q_0} \right) \right)}{(q_0^2 - 1)^{\frac{5}{2}}} \right], \quad 1 < q_0. \quad (31)$$

Итак, при изменении параметра q_0 от 1 до $+\infty$ объем индикатрисы $(V_{ind}^{Min})_{ev}^-$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0.

Из формул (27), (31) при $1 < q_0$ получим объем четырехмерного эллипсоида, поверхность которого составлен из двух индикатрис,

$$(V_{ind}^{Min})_{ev}^- - (V_{ind}^{Min})_{ev}^+ = \frac{\pi^2}{2(q_0^2 - 1)^{\frac{5}{2}}}, \quad 1 < q_0, \quad (32)$$

и соотношение

$$\lim_{q_0 \rightarrow +\infty} \frac{(V_{ind}^{Min})_{ev}^-}{(V_{ind}^{Min})_{ev}^+} = 1. \quad (33)$$

4 Кривые пространства

Рассмотрим финслерово пространство x^0, x^1, \dots, x^{n-1} с элементом длины

$$ds = \pm \sqrt{g_{ij}(x) dx^i dx^j + a_i(x) dx^i}, \quad g^{ij}(x) a_i(x) a_j(x) > 0, \quad (34)$$

и сигнатурой $(+, -, -, \dots, -)$. Последнее означает, всегда найдется такая система координат y^0, y^1, \dots, y^{n-1} , вообще говоря, своя для каждой точки пространства, что в этой точке

$$g_{ij}(x) = \text{diag}(1, -1, -1, \dots, -1), \quad (35)$$

а элемент длины запишется следующим образом:

$$ds = \pm \sqrt{(dy^0)^2 - (dy^1)^2 - \dots - (dy^{n-1})^2} + b_i(x) dy^i. \quad (36)$$

Будем предполагать, что $b_0(x) > 0$. Если это не так, всегда можно изменить знак у координаты y^0 , то есть $y^0 \rightarrow -y^0$. Используя группу $SO(1, n-1)$, которая сохраняет дифференциальную форму

$$(dy^0)^2 - (dy^1)^2 - \dots - (dy^{n-1})^2, \quad (37)$$

перейдем к системе координат z^0, z^1, \dots, z^{n-1} , в которой элемент длины приобретет вид:

$$ds = \pm \sqrt{(dz^0)^2 - (dz^1)^2 - \dots - (dz^{n-1})^2} + q dz^i, \quad (38)$$

где $q \equiv \sqrt{g^{ij}(x) a_i(x) a_j(x)}$.

Таким образом, вычисление объема $(\tilde{V}_{ind})_{ev}^{\pm}$ индикатрисы финслерова пространства с элементом длины (34) сводится к вычислению объема $(\bar{V}_{ind})_{ev}^{\pm}$ индикатрисы, определяемой уравнением

$$\pm \sqrt{(\xi^0)^2 - (\eta)^2} + q \xi^0 = 1, \quad \xi^0 > 0, \quad q > 0, \quad (39)$$

где

$$\eta = \sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + \dots + (\xi^{n-1})^2}, \quad (40)$$

так как

$$(\tilde{V}_{ind})_{ev}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^{n-1} \det(g_{ij}(x))}} \cdot (\bar{V}_{ind})_{ev}^{\pm}. \quad (41)$$

Объёмы индикатрис (39) были вычислены для двумерного пространства в разделе 2 и для четырехмерного пространства в разделе 3. Сформулируем полученные результаты.

I. Объем индикатрисы в центроаффинном касательном пространстве в точке $M(x^0, x^1)$ финслерова двумерного пространства с элементом длины

$$ds = \pm \sqrt{g_{ij}(x) dx^i dx^j + a_i(x) dx^i}, \quad g^{ij}(x) a_i(x) a_j(x) > 0 \quad (42)$$

и сигнатурой $(+, -)$ вычисляется по формуле

$$(\tilde{V}_{ind})_{ev}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^{n-1} \det(g_{ij}(x))}} \cdot (V_{ind}^{H_2})_{ev}^{\pm} \Big|_{q_0 = \sqrt{g^{ij}(x) a_i(x) a_j(x)}}, \quad (43)$$

где $(V_{ind}^{H_2})_{ev}^{\pm}$ вычисляется по формулам (14) (19).

II. Объем индикатрисы в центроаффинном касательном пространстве в точке $M(x^0, x^1, x^2, x^3)$ финслерова четырехмерного пространства с элементом длины

$$ds = \pm \sqrt{g_{ij}(x) dx^i dx^j} + a_i(x) dx^i, \quad g^{ij}(x) a_i(x) a_j(x) > 0 \quad (44)$$

и сигнатурой $(+, -, -, -)$ вычисляется по формуле

$$\left(\tilde{V}_{ind}\right)_{ev}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^{n-1} \det(g_{ij}(x))}} \cdot \left(V_{ind}^{Min}\right)_{ev}^{\pm} \Big|_{q_0 = \sqrt{g^{ij}(x) a_i(x) a_j(x)}}, \quad (45)$$

где $(V_{ind}^{Min})_{ev}^{\pm}$ вычисляется по формулам (27) (31).

Заключение

Так как через объемы индикатрис выражаются лагранжианы, с помощью которых получают уравнения поля [1], то отношение объемов индикатрис имеет и чисто геометрический смысл как отношение "эталонных" объемов, так и физический смысл как отношение некоторых "эталонов" действия в минус первой степени. Таким образом можно сравнивать разные точки одного и того же финслерова пространства, или даже точки разных финслеровых пространств, используя отношения объемов индикатрис.

Литература

- [1] Г. И. Гарасько, Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2 (6)**, Т. 3 (2006), стр. 6 – 20.
- [2] Г. И. Гарасько, Слабые поля. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2 (8)**, Т. 4 (2007), стр. 3 – 12.
- [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля. М., "Наука", 1967.

Indicatrix volumes of some Finsler spaces of special type

G. I. Garas'ko

Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fрязино, Russia
Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia
 gri9z@mail.ru

Indicatrix volumes of some Finsler spaces of special type were obtained. This allows to clarify the question about existence of finite (non-zero) volume element in the Finsler spaces with single time coordinate and in the Finsler spaces with concave indicatrix.

Key words: Finsler spaces, indicatrix.

ПРИНЦИП САМОДОСТАТОЧНОСТИ ФИНСЛЕРОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Г. И. Гарасько

ГУП ВЭИ, Москва, Россия,

НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, МО

gri9z@mail.ru

Из принципа самодостаточности финслеровой геометрии получаются уравнения поля, причем гравитационное поле и электромагнитное поле естественным образом объединяются и в псевдоримановом четырехмерном пространстве, и в кривом четырехмерном пространстве Бервальда-Моора; и всегда существует тензор энергии-импульса, связанный с законами сохранения.

Показано, что в приближении малых полей новый геометрический подход в теории поля, следующий из принципа самодостаточности финслеровой геометрии, в первом приближении может приводить к линейным уравнениям поля для нескольких независимых полей. При усилении полей, то есть при переходе ко второму приближению, полевые уравнения становятся, вообще говоря, нелинейными, и поля перестают быть независимыми, что приводит к отсутствию закона суперпозиции для каждого отдельного поля и к взаимодействию между разными полями.

Ключевые слова: финслерова геометрия, пространство Бервальда-Моора, теория поля.

1 Введение

Обычно физик теоретик работает сразу с несколькими метрическими пространствами, определенными в одном и том же координатном пространстве, так как написание функции Лагранжа для получения уравнений движения некой материальной частицы – это, в некотором смысле, введение дополнительной геометрии точно так же, как и задание лагранжиана для получения уравнений поля. Как показал Финслер, Лагранжев формализм можно геометризовать [1]. Можно ли геометризовать и получение уравнений поля и считать геометрию единой для геометрических построений и измерений, получения уравнений движения материальных объектов и для написания уравнений поля?

Наиболее удобный способ получения уравнений поля как в классической теории [2], так и в теории квантованных полей [3] связан с понятиями лагранжиана, действия и принципа экстремального (или стационарного, или наименьшего) действия. При этом однозначно устанавливается связь между непрерывными преобразованиями, относительно которых инвариантно действие, и физическими законами сохранения, которые могут быть проверены экспериментально.

Если x^0, x^1, x^2, x^3 – координаты, $f(x) \equiv f(x^0, x^1, x^2, x^3)$ – скалярное поле в пространстве Минковского, а

$$\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{L} \left(f(x); \frac{\partial f}{\partial x^0}, \frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right), \quad (1)$$

– лагранжиан, то интеграл от лагранжиана по некоторому четырехмерному объему \mathcal{V} пространства-времени,

$$I[f] = \int_{\mathcal{V}} \mathfrak{L} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (2)$$

принято называть действием. Считая, что вариации функции поля δf равны нулю на границе объема интегрирования, и требуя экстремальности действия, то есть

$$\delta I[f] = 0, \quad (3)$$

с помощью известной математической процедуры получим уравнение Лагранжа-Эйлера-Остроградского, которое и есть уравнение поля:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = 0. \quad (4)$$

Обычно лагранжиан подбирают так, чтобы получить известные уравнения поля, или строят, обеспечивая заданную симметрию и выполнение некоторых дополнительных требований, например, чтобы получались линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Построение качественно новых лагранжианов, описывающих нелинейные физические процессы является, в известном смысле, искусством. О *самодостаточности геометрии* можно говорить тогда, когда без привлечения дополнительных построений из самой геометрии следуют уравнения поля для не заданных изначально математических (и физических!) полей.

2 Принцип самодостаточности

Функционалу (2) можно придать чисто геометрический смысл и считать его не интегралом в пространстве Минковского от лагранжиана \mathcal{L} , а объемом в некотором более сложном пространстве, в котором элемент объема имеет вид:

$$dV = \mathcal{L} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (5)$$

Рассмотрим финслерово пространство x^1, x^2, \dots, x^n [1] с метрической функцией

$$L(dx; x) \equiv L(dx^1, dx^2, \dots, dx^n; x^1, x^2, \dots, x^n). \quad (6)$$

В таком пространстве элемент длины ds по определению есть

$$ds = L(dx^1, dx^2, \dots, dx^n; x^1, x^2, \dots, x^n). \quad (7)$$

Более наглядно метрические свойства финслерова пространства можно описать с помощью понятия индикатрисы, которая определяется в каждой точке $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ основного пространства в соответствующем касательном центроаффинном пространстве $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ как геометрическое место концом единичных радиус-векторов ξ_{ind} . Такая гиперповерхность описывается уравнением

$$L(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n; x^1, x^2, \dots, x^n) = 1. \quad (8)$$

Задание системы индикатрис в каждой точке основного пространства, или, что тоже самое, задание множеств единичных векторов, полностью определяет финслерову геометрию. Для того, чтобы вычислить длину вектора $(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$, надо найти сонаправленный вектору dx единичный вектор ξ_{ind} , тогда числовой коэффициент ds в формуле

$$dx^i = ds \cdot \xi_{ind}^i \quad (9)$$

и есть длина вектора dx . Из этой формулы следует, что элемент длины

$$ds = \frac{|dx|_{ev}}{|\xi_{ind}|_{ev}}, \quad (10)$$

где $|dx|_{ev}$, $|\xi|_{ev}$ – длины векторов $(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$ и $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$, вычисляемые так, как если бы пространство $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ было евклидово, а система координат в нем – декартовой прямоугольной.

Если при выполнении последних предположений можно вычислить объем индикатрисы, то есть n -мерный объем, который зачерчивает единичный вектор ξ_{ind} в касательном центроаффинном пространстве $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$, пробегая всю индикатрису, то в финслеровом пространстве можно, аналогично (10), определить элемент объема dV по формуле

$$dV = const \cdot \frac{dx^1 dx^2 \dots dx^n}{(V_{ind})_{ev}}, \quad (11)$$

где $(V_{ind})_{ev}$ – объем индикатрисы, вычисленный в предположении, что касательное пространство евклидово, а координаты декартовы прямоугольные. Совершенно очевидно, что таким образом определенный элемент объема инвариантен относительно преобразования координат. Объем $V_{ind}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ является эталонным объемом в той точке основного финслерова пространства, в которой он вычисляется.

Рассмотрим n -мерное риманово пространство, метрическая функция в этом случае имеет вид

$$L(dx; x) = \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}, \quad (12)$$

а уравнение индикатрисы соответственно –

$$g_{ij} \xi^i \xi^j = 1. \quad (13)$$

Это уравнение определяет гиперповерхность второго порядка, а именно, эллипсоид. Если считать пространство $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ евклидовым, то, как известно, объем такого эллипсоида есть

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{const'}{\sqrt{\det(g_{ij})}}. \quad (14)$$

Подставляя это выражение в формулу (11), получим элемент объема в произвольном римановом пространстве

$$dV = const \cdot \sqrt{\det(g_{ij})} \, dx^1 dx^2 \dots dx^n, \quad (15)$$

что совпадает с обычным определением инвариантного элемента объема в римановом пространстве.

Для псевдоримановых пространств без специальных дополнительных условий на индикатрису

$$(V_{ind})_{ev} = \infty \quad \Rightarrow \quad dV = 0 \cdot dx^1 dx^2 \dots dx^n. \quad (16)$$

Точно такая же трудность возникает при определении элемента объема во всех финслеровых пространствах, у которых одна из координат является временной. Тем не менее, обычно проблему (16) удается решить тем или иным способом.

Так псевдориманову пространству с метрическим тензором $g(x)_{ij}$ и сигнатурой $(+, -, -, -)$ можно приписать инвариантный элемент объема вида

$$dV = const \cdot \sqrt{-\det(g(x)_{ij})} \, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3, \quad (17)$$

что и принято в ОТО [2].

К проблеме (16) в псевдоримановых пространствах можно подойти более строго, но при этом приходится переходить к пространствам более общим, чем псевдоримановы

пространства. Поясним это на примере пространства Минковского. Если вместо пространства Минковского взять финслерово пространство с метрической функцией

$$L(dx) = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} + q_0 dx^0 \quad (18)$$

и условием $dx^0 \geq 0$, где $q_0 > 0$, то у такого пространства объем индикатрисы $(V_{ind})_{ev}$ - конечное действительное число, зависящее от параметра q_0 и стремящееся к ∞ , когда параметр q_0 стремится к 0. Все измеряемые физические величины должны получаться при $q_0 \rightarrow 0$.

Итак, будем считать, что в любом финслеровом пространстве, в котором имеет место проблема (16), она может быть разрешена тем или иным способом. Тогда можно утверждать, что из самой геометрии финслерова пространства, если в метрической функции содержатся некоторые поля, автоматически получается лагранжиан

$$\mathfrak{L} = \frac{const}{(V_{ind})_{ev}}, \quad (19)$$

из которого затем получаются уравнения для полей [6], [7].

Замечание. Ниже при получении уравнений поля постоянные, которые фигурируют в формулах (11)–(15), (17), (19), мы часто будем опускать, так как они не входят в полевые уравнения.

Принцип самодостаточности финслеровой геометрии: если метрическая функция финслеровой геометрии содержит неопределенные (незаданные) поля, то эти поля должны удовлетворять уравнениям Лагранжа-Эйлера-Остроградского, следующим из требования экстремума любого объема финслерова пространства при условии, что вариации полей на границе объема равны нулю.

Впервые принцип самодостаточности геометрии был реализован в ОТО: если известно, что геометрия псевдориманова, то известны уравнения движения для пробных частиц и известны уравнения, которым должен удовлетворять метрический тензор, то есть уравнения гравитационного поля. Уравнения поля в ОТО записываются с применением ковариантных производных, или объектов связности. Геометрия Финслера сформулирована именно таким образом, что пробные частица движутся по экстремалиям – мировым линиям, на которых осуществляется экстремум длины мировой линии между двумя событиями, образно говоря, по "геодезическим". В любой финслеровой геометрии из принципа самодостаточности следуют уравнения поля, при этом не нужны ковариантные производные и объекты связности, тем более, что без дополнительных построений далеко не в каждом финслеровом пространстве такие объекты можно определить.

3 Пространства, конформно связанные с евклидовыми пространствами

Пространство, конформно связанное с n -мерным евклидовым пространством, обладает элементом длины

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2}, \quad (20)$$

где $\kappa(x) > 0$. Так как в этом случае

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = \kappa^n(x), \quad (21)$$

лагранжиан имеет вид

$$\mathfrak{L} = \kappa^n(x). \quad (22)$$

Для того, чтобы получить из такого лагранжиана уравнение поля, надо выразить скалярное поле $\kappa(x)$ через другое поле так, что лагранжиан уже будет содержать производные нового поля. Как это сделать, показано в работах [4], [5]. Обобщенные импульсы в пространстве (20) определяются формулой

$$p_i = \kappa(x) \frac{dx^i}{\sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2}}, \quad (23)$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать следующим образом:

$$p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 - \kappa^2(x) = 0. \quad (24)$$

Скалярная функция $S_W(x)$, которая в пространстве x^1, x^2, \dots, x^n определяет нормальную конгруэнцию геодезических и которую в работе [4] предложено называть Мировой функцией, связана с полем коэффициента расширения-сжатия соотношением

$$\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^n}\right)^2 = \kappa^2(x). \quad (25)$$

Таким образом,

$$\mathfrak{L} = \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^n}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}}, \quad (26)$$

а уравнение поля (4) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \frac{\partial S_W}{\partial x^i} \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^n}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}-1} \right\} = 0. \quad (27)$$

Отметим, что для $n > 2$ это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.

Запишем для пространства, конформно связанного с двумерной евклидовой плоскостью (x, y) , уравнение (27),

$$\frac{\partial^2 S_W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_W}{\partial y^2} = 0, \quad (28)$$

то есть функция $S_W(x, y)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа, а значит она является компонентой аналитической функции комплексной переменной. Тогда

$$\kappa(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\partial S_W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial y}\right)^2} \quad (29)$$

– это коэффициент конформного преобразования элемента длины евклидового пространства

$$ds' = \sqrt{(dx')^2 + (dy')^2} = \kappa(x, y) \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad (30)$$

при конформном преобразовании

$$x' = u(x, y), \quad y' = \pm v(x, y), \quad (31)$$

когда функция S_W является одной из компонент аналитической функции $u + iv$ комплексной переменной $x + iy$.

Найдем решение уравнения (27) в предположении, что функция S_W зависит только от радиуса

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2}. \quad (32)$$

Это удобнее сделать, записав элемент объема в сферических координатах и проинтегрировав по всем углам,

$$dV_r = r^{n-1} \left| \frac{dS_W}{dr} \right|^n dr \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{L}_r = r^{n-1} \left| \frac{dS_W}{dr} \right|^n. \quad (33)$$

Тогда уравнение поля запишется следующим образом:

$$\frac{d}{dr} \left[r^{n-1} \left| \frac{dS_W}{dr} \right|^{n-1} \right] = 0. \quad (34)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{dS_W}{dr} = \frac{C}{r}, \quad S_W = C \ln \frac{r}{r_0}, \quad (35)$$

$C \neq 0$, $r_0 > 0$ – действительные числа, тогда

$$\kappa(x) = \left| \frac{dS_W}{dr} \right| = \frac{|C|}{r}. \quad (36)$$

Геодезические в таком пространстве определяются уравнениями

$$\dot{x}^i = \frac{dS_W}{dx^i} \cdot \lambda(x), \quad (37)$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция, \dot{x}^i – производная x^i по параметру вдоль геодезической τ . Выберем $\lambda(x) = \frac{r^2}{C}$, из (37) следует, что

$$\dot{x}^i = x^i. \quad (38)$$

Пусть $j > 1$, тогда

$$\frac{dx^j}{dx^1} = \frac{x^j}{x^1} \quad \Rightarrow \quad x^j = C^j x^1, \quad (39)$$

то есть нормальная конгруэнция геодезических, определяемая функцией (35), в таком пространстве состоит из прямых линий, проходящих через начало координат с направляющим вектором $(1, C^2, C^3, \dots, C^n)$.

4 Пространства, конформно связанные с псевдоевклидовыми пространствами с сигнатурой $(+, -, -, \dots, -)$

Пространство, конформно связанное с n -мерным псевдоевклидовым пространством с сигнатурой $(+, -, -, \dots, -)$, обладает элементом длины

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - \dots - (dx^{n-1})^2}, \quad (40)$$

где $\kappa(x) > 0$. Так как в этом случае

$$\sqrt{(-1)^{n-1} \det(g_{ij})} = \kappa^n(x), \quad (41)$$

лагранжиан имеет вид

$$\mathfrak{L} = \kappa^n(x). \quad (42)$$

Для того, чтобы получить из такого лагранжиана уравнение поля, надо выразить скалярное поле $\kappa(x)$ через другое поле так, что лагранжиан уже будет содержать производные нового поля [4], [5].

Компоненты обобщенного импульса в пространстве (40) определяются формулами

$$p_0 = \frac{\kappa(x) dx^0}{\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - \dots - (dx^{n-1})^2}}, \quad (43)$$

$$p_\mu = -\frac{\kappa(x) dx^\mu}{\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - \dots - (dx^{n-1})^2}},$$

$\mu = 1, 2, \dots, (n-1)$, а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать следующим образом:

$$p_0^2 - p_1^2 - \dots - p_{n-1}^2 - \kappa^2(x) = 0. \quad (44)$$

Скалярная функция $S_W(x)$, которая в пространстве x^0, x^1, \dots, x^{n-1} определяет нормальную конгруэнцию геодезических, должна удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^{n-1}}\right)^2 = \kappa^2(x). \quad (45)$$

Таким образом,

$$\mathfrak{L} = \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^{n-1}}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}}, \quad (46)$$

а уравнение поля (4) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \frac{\partial S_W}{\partial x^0} \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^{n-1}}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}-1} \right\} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \frac{\partial S_W}{\partial x^\mu} \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^{n-1}}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}-1} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Отметим, что для $n > 2$ это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка и это уравнение выполняется, если функция S_W удовлетворяет уравнению эйконала

$$\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^{n-1}}\right)^2 = 0. \quad (48)$$

Для того, чтобы при $n > 2$ уравнение поля (47) являлось волновым уравнением, функция S_W одновременно должна быть решением еще одного уравнения:

$$\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^{n-1}}\right)^2 = const. \quad (49)$$

Но обе эти возможности нас не устраивают, так как уравнение (47) необходимо дополнить требованием

$$\kappa(x) > 0, \quad (50)$$

которое следует непосредственно из постановки задачи, а при выполнении (48) или (49) $\kappa(x) \equiv 0$.

Для пространства, конформно связанного с двумерной псевдоевклидовой плоскостью (x, y) , уравнение (47) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 S_W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_W}{\partial y^2} = 0, \quad (51)$$

то есть в двумерном случае уравнение поля (47) – это волновое уравнение.

Пространство, конформно связанное с пространством Минковского, играет важную роль, поэтому выпишем ряд формул этого раздела для $n = 4$, используя в них метрический тензор пространства Минковского ${}^o g_{ij}$:

связь между функцией $S_W(x)$ и коэффициентом растяжения-сжатия $\kappa(x)$ –

$${}^o g^{ij} \frac{\partial S_W}{\partial x^i} \frac{\partial S_W}{\partial x^j} = \kappa^2(x), \quad (52)$$

лагранжиан –

$$\mathfrak{L} = \left({}^o g^{ij} \frac{\partial S_W}{\partial x^i} \frac{\partial S_W}{\partial x^j} \right)^2, \quad (53)$$

уравнение поля –

$${}^o g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\partial S_W}{\partial x^l} \left({}^o g^{ij} \frac{\partial S_W}{\partial x^i} \frac{\partial S_W}{\partial x^j} \right) \right] = 0 \quad (54)$$

с дополнительным условием

$$\kappa(x) > 0. \quad (55)$$

5 Модельное космологическое уравнение в пространстве, конформно связанном с пространством Минковского

Запишем уравнение (54) в предположении, что функция S_W имеет вид

$$S_W(x^0, r) = S_0 e^{-\gamma x^0} \psi(r), \quad (56)$$

где $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$, а γ и S_0 постоянные. Более просто получить уравнение поля такого вида, если в элементе объема перейти от пространственных координат x^1, x^2, x^3 к сферической системе координат и проинтегрировать по сферическим углам, тогда, опять же опуская постоянную, получим выражение для лагранжиана

$$\mathfrak{L} = r^2 \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial r} \right)^2 \right]^2, \quad (57)$$

а уравнение поля запишется следующим образом:

$$r^2 \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \frac{\partial S_W}{\partial x^0} \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial r} \right)^2 \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial S_W}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial r} \right)^2 \right] \right\} = 0. \quad (58)$$

Подставляя в это уравнение функцию $S_W(x^0, r)$ (56), введем безразмерную переменную $\xi \equiv \gamma r$, тогда для неизвестной функции $\psi(x)$ получим уравнение

$$3\xi^2\psi \left[\psi^2 - \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)^2 \right] - \frac{d}{d\xi} \left\{ \xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \left[\psi^2 - \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)^2 \right] \right\} = 0. \quad (59)$$

Так как это уравнение однородно по искомой функции, то будем ее искать в виде

$$\psi(\xi) = \psi_0 \exp \left(\int_0^\xi \varphi(\xi) d\xi \right), \quad (60)$$

ψ_0 – постоянная, которая при составлении функции S_W перемножается с постоянной S_0 , поэтому положим ее равной единице, $\psi_0 = 1$. Подставляя (60) в (59), имеем

$$\xi(1 - 3\varphi^2) \frac{d\varphi}{d\xi} + 2\varphi(1 - \varphi^2) - 3\xi(1 - \varphi^2)^2 = 0. \quad (61)$$

В области $\xi \ll 1$ будем искать решение в виде степенного ряда

$$\varphi \simeq A\xi + B\xi^2 + C\xi^3 + O(\xi^4). \quad (62)$$

Подставим это разложение в уравнение (61), приведем подобные и получим

$$\varphi \simeq \xi - \frac{1}{5}\xi^3 + O(\xi^4). \quad (63)$$

Движение материальных объектов, определяемое Мировой функцией S_W , происходит по экстремалиям пространства с элементом длины

$$ds = \kappa(x^0, r) \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} \quad (64)$$

и тангенциальным уравнением индикатрисы

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - \kappa^2(x^0, r) = 0. \quad (65)$$

Для поля S_W (56), (62) коэффициент расширения-сжатия вычисляется по формуле

$$\kappa(x^0, r) = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2} = \gamma \cdot \sqrt{1 - \varphi^2} \cdot S(x^0, r). \quad (66)$$

Из этой формулы следует, что $|\varphi| < 1$. Уравнения движения в данном случае принимают вид

$$\dot{x}^0 = \frac{\partial S_W}{\partial x^0} \lambda = -\gamma S_W \lambda, \quad \dot{r} = -\frac{\partial S_W}{\partial r} \lambda = -\gamma S_W \varphi(\gamma r) \lambda, \quad (67)$$

где точка означает полную производную по некоторому параметру эволюции τ , а произвольная функция $\lambda \neq 0$. Тогда

$$\frac{dr}{dx^0} = \varphi(\gamma r) \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = c\varphi(\gamma r). \quad (68)$$

Так как $|\varphi| < 1$, то

$$\left| \frac{dr}{dx^0} \right| < 1 \quad \text{и} \quad \left| \frac{dr}{dt} \right| < c.$$

Посмотрим, как ведет себя скорость материального объекта, движением которого управляет Мироздание, в области $\xi \ll 1$, для этого подставим (62) в формулу (68):

$$\frac{dr}{dt} = c\gamma \left(1 - \frac{1}{5}\gamma^2 r^2 \right) \cdot r. \quad (69)$$

Если обозначить постоянную Хаббла через H_0 , то полученная формула дает нам хорошее выполнение закона Хаббла при $\gamma r < \frac{1}{10}$, причем $H_0 = c\gamma$, и тенденцию того, как изменяется коэффициент Хаббла $H(r)$ с увеличением расстояния от центра:

$$\frac{dr}{dt} = H(r) \cdot r, \quad H(r) = H_0 \cdot \left[1 - \frac{1}{5} \left(\frac{H_0}{c} \right)^2 \cdot r^2 \right]. \quad (70)$$

В области $\xi \ll 1$ коэффициент Хаббла уменьшается с увеличением расстояния от начала координат.

6 Пространство, конформно связанное с четырехмерным пространством Бервальда-Моора

Элемент длины в таком пространстве в специальном изотропном базисе имеет вид

$$ds = \kappa(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}. \quad (71)$$

Обобщенные импульсы находятся по формулам

$$p_i = \frac{1}{4} \kappa(\xi) \frac{\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}}{d\xi^i}. \quad (72)$$

Если $\eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4$ – координаты касательного центроаффинного пространства в точке $M(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ основного пространства, то уравнение индикатрисы запишется

$$\eta^1 \eta^2 \eta^3 \eta^4 = \frac{1}{\kappa^4(\xi)}, \quad (73)$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать, например, так

$$p_1 p_2 p_3 p_4 - \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4} = 0. \quad (74)$$

Тогда функция S_W , определяющая нормальную конгруэнцию экстремалей, связана с коэффициентом растяжения-сжатия соотношением

$$\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^4} = \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4}. \quad (75)$$

Из формулы (73) следует, что

$$(V_{ind})_{ev} = const \cdot \frac{1}{\kappa^4}, \quad (76)$$

а значит, лагранжиан для скалярного поля S_W запишется следующим образом:

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}. \quad (77)$$

Соответственно уравнение поля имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^4} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^4} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^4} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^4} \left(\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (78)$$

Любая функция S_W , зависящая не от всех координат $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ удовлетворяет этому уравнению, но не удовлетворяет необходимому условию

$$\kappa(x) > 0. \quad (79)$$

7 Конформный потенциал

Пусть x^1, x^2, \dots, x^n – финслерово пространство с метрической функцией

$$L(\xi; x) \equiv L(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n; x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (80)$$

где $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ – центроаффинное касательное пространство в точке $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ основного пространства. Тогда элемент длины определяется формулой

$$ds = L(dx^1, dx^2, \dots, dx^n; x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (81)$$

а компоненты обобщенного импульса

$$p_i = \frac{\partial L(dx; x)}{\partial (dx^i)} \quad (82)$$

связаны единственным функциональным соотношением

$$\Phi(p; x) = 0. \quad (83)$$

Тангенциальному уравнению индикатрисы всегда можно придать некоторую специальную форму

$$\Phi_m(p; x) - 1 = 0, \quad (84)$$

где $\Phi_m(p; x)$ – однородная функция m -го порядка ($m > 0$) по первым n аргументам. Если функция $S(x)$ определяет в рассматриваемом финслеровом пространстве нормальную конгруэнцию геодезических, то она должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\Phi \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x^n}; x \right) = 0. \quad (85)$$

Функцию $S(x)$ в классической механике называют действием как функцией координат, а уравнение (85) – уравнением Гамильтона-Якоби. Если функция $S(x)$ известна, то поле обобщенных импульсов находится как

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}, \quad (86)$$

а экстремали (траектории движения, мировые линии, линии тока) находятся из системы уравнений

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \Phi(p; x)}{\partial p_i} \Big|_{p_k = \frac{\partial S}{\partial x^k}} \cdot \lambda(x), \quad (87)$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau}$, а τ – параметр вдоль экстремали, параметр эволюции.

Финслерово пространство, конформно связанное с исходным, имеет метрическую функцию вида

$$\tilde{L}(\xi; x) = \kappa(x)L(\xi; x), \quad (88)$$

где $\kappa(x) > 0$ – некая скалярная функция. Элемент длины в таком пространстве определяется формулой

$$d\tilde{s} = \kappa(x)L(dx; x). \quad (89)$$

Обобщенные импульсы

$$\tilde{p}_i = \kappa(x) \frac{\partial L(dx; x)}{\partial (dx^i)} \quad (90)$$

связаны соотношением

$$\Phi_m(\tilde{p}; x) - \kappa^m = 0, \quad (91)$$

то есть функция Финслера конформно связанного пространства определяется следующим образом:

$$\tilde{\Phi}(\tilde{p}; x) = \Phi_m(\tilde{p}; x) - \kappa^m. \quad (92)$$

Пусть $S_W(x)$ – скалярная функция, тогда в области, где выполняется неравенство

$$\Phi_m \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S_W}{\partial x^n}; x \right) > 0, \quad (93)$$

определена финслерова геометрия, конформно связанная с исходной, и полем коэффициента растяжения-сжатия

$$\kappa(x) = \sqrt[m]{\Phi_m \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S_W}{\partial x^n}; x \right)}, \quad (94)$$

причем в этой же области функция $S_W(x)$ определяет нормальную конгруэнцию геодезических

$$\dot{x}^i = \left. \frac{\partial \Phi_m(\tilde{p}; x)}{\partial \tilde{p}_i} \right|_{\tilde{p}_k = \frac{\partial S_W}{\partial x^k}} \cdot \tilde{\lambda}(x), \quad (95)$$

где $\tilde{\lambda}(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau}$, а τ – параметр эволюции. Таким образом, функция $S_W(x)$ является действием как функцией координат в конформно связанном пространстве.

Из принципа самодостаточности финслеровой геометрии следует, что функция S_W не может быть произвольной, а должна удовлетворять некоторому полевому фундаментальному уравнению. Если в исходном пространстве элемент объема имел вид

$$dV = \varrho(x) dx^1 dx^2 \dots dx^n, \quad (96)$$

то лагранжиан, из которого следует фундаментальное уравнение для поля S_W , имеет вид

$$\mathcal{L} = \varrho(x) \kappa^n(x) \equiv \varrho(x) \left[\Phi_m \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S_W}{\partial x^n}; x^1, \dots, x^n \right) \right]^{\frac{n}{m}}, \quad (97)$$

а фундаментальное уравнение соответственно запишется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \varrho(x) \Phi_m^{\frac{n-m}{m}} \frac{\partial \Phi_m}{\partial \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^i} \right)} \right\} = 0. \quad (98)$$

Если в качестве исходного финслерова пространства взять невырожденное поличисловое пространство $P_n \ni X$, то любая компонента произвольной аналитической функции $F(X)$ в нем удовлетворяет фундаментальному уравнению поля (98) для Мировой функции $S_W(x)$. Аналитические функции можно перемножать, брать их линейные комбинации, строить функцию от функции, при этом опять будут получаться аналитическая функция. Если не оговорено другое, в качестве Мировой функции в невырожденном поличисловом пространстве выступает компонента $U(x^1, \dots, x^2)$ при единице

$$F(X) = U(x) \cdot 1 + V^1(x) \cdot j_1 + \dots + V^{n-1}(x) \cdot j_{n-1} \quad (99)$$

в базисе $1, j_1, \dots, j_{n-1}$, в котором имеет место экспоненциальное представление поличисел, то есть

$$X = |X| \exp(\alpha^1 \cdot j_1 + \dots + \alpha^{n-1} \cdot j_{n-1}), \quad (100)$$

тогда в этом базисе

$$\ln(X/b) = \ln(|X|/b) \cdot 1 + \dots, \quad (101)$$

где b – действительное число, а $|X|$ – модуль поличисла [8].

Конформный потенциал, таким образом построенный с помощью аналитической функции в поличисловом невырожденном пространстве, наиболее близок к понятию комплексного потенциала в теории функций комплексной переменной, поэтому функцию $F(X)$ можно называть гиперкомплексным потенциалом.

8 Малые поля

Под *малыми полями* будем понимать поля, включение которых в метрическую функцию финслерова пространства мало меняет саму метрическую функцию и компоненты обобщенного импульса, а значит и новая индикатриса мало отличается от старой. Поясним это подробнее.

Пусть

$$L_0 = L(\xi^1, \dots, \xi^n; x^1, \dots, x^n; 0), \quad L = L(\xi^1, \dots, \xi^n; x^1, \dots, x^n; \varphi) \quad (102)$$

– метрические функции финслерова пространства с выключенным и включенным полем $\varphi(x)$. Будем говорить, что поле $\varphi(x)$ малое, если

$$|L(\xi; x; \varphi) - L(\xi; x; 0)| \ll L(\xi; x; 0) \quad (103)$$

и

$$\left| \frac{\partial L}{\partial \xi^i} - \frac{\partial L_0}{\partial \xi^i} \right| \ll \left| \frac{\partial L_0}{\partial \xi^i} \right|. \quad (104)$$

Уравнения поля, которые можно записать в финслеровых пространствах, исходя из *принципа самодостаточности*, обычно являются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Введение понятия малого поля позволяет получить линейные дифференциальные уравнения в качестве полевых.

9 Псевдориманово пространство с сигнатурой $(+, -, -, -)$

Рассмотрим псевдориманово пространство с сигнатурой $(+, -, -, -)$, являясь выделив в метрическом тензоре $g_{ij}(x)$ этого пространства метрический тензор $\overset{\circ}{g}_{ij}$ пространства Минковского,

$$g_{ij}(x) = \overset{\circ}{g}_{ij} + h_{ij}(x). \quad (105)$$

Будем предполагать, что поле $h_{ij}(x)$ малое, то есть

$$|h_{ij}(x)| \ll 1. \quad (106)$$

Лагранжиан псевдориманова пространства с сигнатурой $(+, -, -, -)$ равен

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\det(g_{ij})}. \quad (107)$$

Вычислим величину $[-\det(g_{ij})]$ до членов $|h_{ij}(x)|^2$ включительно:

$$-\det(g_{ij}) \simeq 1 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \quad (108)$$

где

$$\mathcal{L}_1 = g^{ij} h_{ij} \equiv h_{00} - h_{11} - h_{22} - h_{33}, \quad (109)$$

$$\mathcal{L}_2 = -h_{00}(h_{11} + h_{22} + h_{33}) + \quad (110)$$

$$+ h_{11}h_{22} + h_{11}h_{33} + h_{22}h_{33} - h_{12}^2 - h_{13}^2 - h_{23}^2 + h_{03}^2 + h_{02}^2 + h_{01}^2.$$

Тогда

$$\mathcal{L} \simeq 1 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 + \frac{1}{2} \left[\mathcal{L}_2 - \frac{1}{4} \mathcal{L}_1^2 \right], \quad (111)$$

Для того, чтобы получить уравнения для малого поля в первом приближении надо использовать лагранжиан \mathcal{L}_1 , а во втором приближении – лагранжиан $(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - \frac{1}{4} \mathcal{L}_1^2)$.

10 Единственное скалярное поле

Для единственного скалярного поля $\varphi(x)$ "в пространстве Минковского" наиболее простое представление тензора $h_{ij}(x)$ имеет вид

$$h_{ij}(x) \equiv h_{ij}^{(\varphi)}(x) = \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}, \quad (112)$$

поэтому

$$\mathcal{L}_\varphi = \sqrt{-\det(g_{ij})} = \sqrt{1 \pm \mathcal{L}_1} \simeq 1 \pm \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 - \frac{1}{8} \mathcal{L}_1^2, \quad (113)$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \right)^2. \quad (114)$$

В первом приближении используя лагранжиан \mathcal{L}_1 , получим следующее полевое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^3 \partial x^3} = 0, \quad (115)$$

которое является волновым уравнением. Стационарное поле, зависящее только от радиуса

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \quad (116)$$

будет соответственно удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0, \quad (117)$$

интегрируя которое, получим

$$\frac{d\varphi}{dr} = -C_1 \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi(r) = C_0 + C_1 \frac{1}{r}. \quad (118)$$

Во втором приближении надо использовать лагранжиан $(\mathcal{L}_1 - \frac{1}{4} \mathcal{L}_1^2)$, при этом получаем уравнение поля во втором приближении:

$$g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\left(\pm 1 - \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right] = 0. \quad (119)$$

Это уравнение уже является нелинейным, и закон суперпозиции для его решений не выполняется.

Точное уравнение поля

$$g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}}{\sqrt{1 \pm \mathcal{L}_1}} \right) = 0 \quad (120)$$

также является нелинейным, и для его решений не выполняется закон суперпозиции. В этом случае стационарное поле, зависящее только от радиуса, должно соответственно удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\frac{d\varphi}{dr}}{\sqrt{1 \mp \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2}} \right) = 0, \quad (121)$$

интегрируя которое, получим

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{C_1}{\sqrt{r^4 \pm C_1^2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi(r) = C_0 + \int_r^\infty \frac{C_1}{\sqrt{r^4 \pm C_1^2}} dr. \quad (122)$$

Поле с верхним знаком и поле с нижним знаком качественно различаются: верхний знак ("+" в формуле (112)) дает поле конечное без особенностей во всем пространстве, нижний знак ("−" в формуле (112)) дает поле определенное везде, кроме сферической области

$$0 \leq r \leq \sqrt{|C_1|}, \quad (123)$$

в которой поле отсутствует, причем при

$$r > \sqrt{|C_1|}, \quad r \rightarrow \sqrt{|C_1|} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dr} \rightarrow -C_1 \cdot \infty. \quad (124)$$

В то же время на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) оба решения $\varphi_{\pm}(r)$ ведут себя одинаково как решение (118) волнового уравнения.

Зная лагранжиан, можно записать тензор энергии импульса T_j^i для полученных решений и попытаться вычислить энергию системы, деленную на скорость света:

$$P_0 = \text{const} \int^{(3)} T_0^0 dV. \quad (125)$$

Для полученных стационарных сферически симметричных решений имеем

$$T_0^0 = - \frac{r^2}{\sqrt{r^4 \pm C_1^2}}, \quad (126)$$

поэтому и для верхнего, и для нижнего знака $|P_0| \rightarrow \infty$.

Метрический тензор (105), (112) – простейший способ "включения" гравитационного поля в пространстве Минковского – исходном плоском пространстве, не содержащем полей. Аддитивно добавляя еще несколько таких слагаемых (112) в метрический тензор, мы сможем описывать все более сложные гравитационные поля с тензором $h_{ij} = h_{ij}^{(grav)}$.

11 Ковариантное векторное поле

Для того, чтобы из ковариантного поля $A_i(x)$ построить симметрический дважды ковариантный тензор $h_{ij}(x)$, не прибегая к использованию объектов связности, вспомним, что альтернированная частная производная от тензора есть тензор,

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}, \quad (127)$$

но антисимметрический. Построим на основе тензора F_{ij} симметрический тензор. Для этого вначале запишем скаляр

$$\mathcal{L}_A = \overset{o}{g}{}^{ij} \overset{o}{g}{}^{km} F_{ik} F_{jm} = 2 \overset{o}{g}{}^{ij} \overset{o}{g}{}^{km} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \right), \quad (128)$$

откуда следуют выражения для двух симметрических тензоров

$$h_{ij}^{(1)} = \overset{o}{g}{}^{km} \left(2 \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{\partial A_k}{\partial x^j} \frac{\partial A_i}{\partial x^m} \right), \quad (129)$$

$$h_{ij}^{(2)} = \overset{o}{g}{}^{km} \left(2 \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k} \frac{\partial A_m}{\partial x^i} \right). \quad (130)$$

Заметим, что не только F_{ij} и \mathcal{L}_A , но и тензоры $h_{ij}^{(1)}$, $h_{ij}^{(2)}$ являются градиентно инвариантными, то есть не изменяются при преобразовании

$$A_i \rightarrow A_i + \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}, \quad (131)$$

где $f(x)$ – произвольная скалярная функция.

Пусть в формуле (105)

$$h_{ij} \equiv h_{ij}^{(A_k)} = \chi(x) h_{ij}^{(1)} + [1 - \chi(x)] h_{ij}^{(2)}, \quad (132)$$

где $\chi(x)$ – некоторая скалярная функция. Тогда в первом приближении получим

$$\mathcal{L}_1 = 2 \overset{o}{g}{}^{ij} \overset{o}{g}{}^{km} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \right) \equiv \mathcal{L}_A, \quad (133)$$

то есть в первом приближении для поля $A_i(x)$ следует выполнение уравнений Максвелла:

$$g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} A_k - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(g^{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right) = 0. \quad (134)$$

Если принять лоренцевскую калибровку

$$g^{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} = 0, \quad (135)$$

то уравнения (134) принимают вид

$$\square A_k = 0. \quad (136)$$

Замечание: вполне возможно, (132) не самая общая запись тензора h_{ij} , который в первом приближении дает уравнения поля, совпадающие с уравнениями Максвелла.

Для того, чтобы получить уравнения Максвелла не для свободного поля, а с заданными источниками $j_i(x)$, можно, например, аддитивно добавить к $h_{ij}^{(A_k)}$ (132) еще тензор

$$h_{ij}^{(j_k)} = \left(\frac{16\pi}{c} \right) \cdot \frac{1}{2} (A_i j_j + A_j j_i), \quad (137)$$

то есть метрический тензор (105) с тензором

$$h_{ij} = h_{ij}^{(Max)} \equiv h_{ij}^{(A_k)} + h_{ij}^{(j_k)} \quad (138)$$

описывает малое электромагнитное поле с источниками поля $j_k(x)$.

Таким образом, метрический тензор (105) с тензором

$$h_{ij} = \mu h_{ij}^{(A_k)} + \gamma h_{ij}^{(grav)}, \quad (139)$$

где μ , γ – фундаментальные постоянные, в рамках единой псевдоримановой геометрии описывает одновременно свободное электромагнитное и свободное гравитационное поле. Для того, чтобы такая теория включала в себя еще и источники электромагнитного поля $j_k(x)$, необходимо, чтобы метрический тензор, кроме $j_k(x)$, содержал и частные производные этого поля или чтобы поле $j_k(x)$ выражалось через другие поля, например, как показано ниже.

Если гравитационное поле "включено" простейшим образом, как это показано в предыдущем разделе, источники электромагнитного поля можно связать со скалярным полем следующим образом:

$$j_i(x) = q \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}. \quad (140)$$

В этом случае в первом приближении в случае лоренцевской калибровки имеем

$$\square A_k = \frac{4\pi}{c} j_k, \quad (141)$$

$$\square \varphi = 0. \quad (142)$$

А так как плотность тока имеет вид (140), то из уравнения (142) следует уравнение непрерывности

$$g^{ij} \frac{\partial j_i}{\partial x^j} = 0. \quad (143)$$

12 Два скалярных поля

Переход от малых к более сильным полям может приводить к переходу от линейных уравнений поля для независимых полей к нелинейным уравнениям поля для взаимосвязанных взаимодействующих полей. Покажем это на примере двух скалярных полей $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, "включающих" гравитационное поле в пространстве Минковского.

Пусть

$$h_{ij} = \varepsilon_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + \varepsilon_\psi \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^j}, \quad (144)$$

где $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\psi$ – независимые знаковые коэффициенты. Тогда точный лагранжиан может быть записан следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\varphi,\psi} = \sqrt{1 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}, \quad (145)$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \overset{\circ}{g}{}^{ij} \left(\varepsilon_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + \varepsilon_\psi \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right), \quad (146)$$

а

$$\mathcal{L}_2 = \varepsilon_\varphi \varepsilon_\psi \left[- \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \frac{\partial \psi}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \frac{\partial \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \frac{\partial \psi}{\partial x^0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \frac{\partial \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} \right)^2 \right]. \quad (147)$$

В первом приближении в качестве лагранжиана следует использовать \mathcal{L}_1 , тогда уравнения поля суть система двух независимых волновых уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^3 \partial x^3} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^3 \partial x^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

При этом поля $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ независимы и для них выполняется закон суперпозиции.

Используя точный лагранжиан для двух скалярных полей (145), получим систему двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \overset{\circ}{g}{}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \left(1 \pm \overset{\circ}{g}{}^{rs} \frac{\partial \psi}{\partial x^r} \frac{\partial \psi}{\partial x^s} \right) \mp \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \overset{\circ}{g}{}^{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial x^r} \frac{\partial \psi}{\partial x^s}}{\sqrt{1 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}} \right] &= 0, \\ \overset{\circ}{g}{}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x^j} \left(1 + \overset{\circ}{g}{}^{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial x^r} \frac{\partial \varphi}{\partial x^s} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \overset{\circ}{g}{}^{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial x^r} \frac{\partial \psi}{\partial x^s}}{\sqrt{1 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}} \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

При этом поля $\varphi(x), \psi(x)$ зависят друг от друга, и принцип суперпозиции для них не выполняется. Переход от уравнений (148) к уравнениям (149) можно рассматривать как переход от слабых полей к более сильным полям.

13 Невырожденные поличисла

Рассмотрим некоторую систему невырожденных поличисел P_n [8]. Соответствующее координатное пространство x^1, x^2, \dots, x^n является финслеровым метрическим плоским пространством с элементом длины вида

$$ds = \sqrt[n]{\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n}}, \quad (150)$$

$\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \dots i_n}$ – метрический тензор, не зависящий от точки пространства. Такого рода финслеровы пространства встречаются в математической литературе (см., например, [9] – [12]), но то, что все невырожденные поличисловые пространства относятся именно к такому типу финслеровых пространств было установлено, начиная с работ [13], [14] и в последующих работах тех же авторов, особо следует выделить работу [8].

Компоненты обобщенного импульса в геометрии (150) вычисляются по формулам:

$$p_i = \frac{\overset{o}{g}_{i j_2 \dots j_n} dx^{j_2} \dots dx^{j_n}}{\left(\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n}\right)^{\frac{n-1}{n}}}. \quad (151)$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы в пространстве невырожденных поличисел P_n всегда можно записать [8] в виде

$$\overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 \dots i_n} p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_n} - \mu^n = 0, \quad (152)$$

где $\mu > 0$ – некоторая постоянная, причем всегда найдется такой специальный базис (и, вообще говоря, не один) и такое $\mu > 0$, что

$$\left(\overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 \dots i_n}\right) = \left(\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \dots i_n}\right). \quad (153)$$

Перейдем к новой финслеровой геометрии на основе пространства невырожденных поличисел P_n , которая (новая геометрия) уже не является плоской, но отличие новой геометрии от исходной бесконечно мало, причем элемент длины в такой геометрии пусть имеет вид

$$ds = \sqrt[n]{\left[\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \dots i_n} + \varepsilon h_{i_1 i_2 \dots i_n}(x)\right] dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n}}, \quad (154)$$

где ε – бесконечно малая величина. Если в исходном плоском пространстве элемент объема определялся формулой

$$dV = dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n}, \quad (155)$$

то в новом пространстве с точностью до ε в первой степени имеем

$$dV_h \simeq \left[1 + \varepsilon \cdot C_0 \overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 \dots i_n} h_{i_1 i_2 \dots i_n}(x)\right] dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n}, \quad (156)$$

то есть лагранжиан для малых полей в пространстве с элементом длины (154) в первом приближении по ε суть

$$\mathcal{L}_1 = \overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 \dots i_n} h_{i_1 i_2 \dots i_n}(x). \quad (157)$$

Эта формула является обобщением формулы (109).

14 Гиперкомплексное пространство H_4

Пространство H_4 является финслеровым пространством с метрической функцией Бервальда-Моора. В физическом ("ортонормированном" [8]) базисе, в котором каждая точка этого пространства характеризуется четырьмя действительными координатами x^0, x^1, x^2, x^3 , четвертая степень элемента длины ds_{H_4} определяется формулой

$$\begin{aligned}
 (ds_{H_4})^4 &\equiv \overset{o}{g}_{ijkl} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \\
 &= (dx^0 + dx^1 + dx^2 + dx^3)(dx^0 + dx^1 - dx^2 - dx^3) \times \\
 &\times (dx^0 - dx^1 + dx^2 - dx^3)(dx^0 - dx^1 - dx^2 + dx^3) = \\
 &= (dx^0)^4 + (dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 + 8dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 - \\
 &\quad - 2(dx^0)^2(dx^1)^2 - 2(dx^0)^2(dx^2)^2 - 2(dx^0)^2(dx^3)^2 - \\
 &\quad - 2(dx^1)^2(dx^2)^2 - 2(dx^1)^2(dx^3)^2 - 2(dx^2)^2(dx^3)^2.
 \end{aligned} \tag{158}$$

Сравним четвертую степень элемента длины ds_{H_4} в пространстве поличисел H_4 с четвертой степенью элемента длины ds_{Min} в пространстве Минковского:

$$\begin{aligned}
 (ds_{Min})^4 &= (dx^0)^4 + (dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 - \\
 &\quad - 2(dx^0)^2(dx^1)^2 - 2(dx^0)^2(dx^2)^2 - 2(dx^0)^2(dx^3)^2 - \\
 &\quad + 2(dx^1)^2(dx^2)^2 + 2(dx^1)^2(dx^3)^2 + 2(dx^2)^2(dx^3)^2.
 \end{aligned} \tag{159}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 (ds_{H_4})^4 &= (ds_{Min})^4 + 8dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 - \\
 &\quad - 4(dx^1)^2(dx^2)^2 - 4(dx^1)^2(dx^3)^2 - 4(dx^2)^2(dx^3)^2,
 \end{aligned} \tag{160}$$

а в ковариантной записи имеем

$$(ds_{H_4})^4 = \left(\overset{o}{g}_{ij} \overset{o}{g}_{kl} + \frac{1}{3} \overset{o}{g}'_{ijkl} - \overset{o}{G}_{ijkl} \right) dx^i dx^j dx^k dx^l, \tag{161}$$

где

$$\overset{o}{g}'_{ijkl} = \begin{cases} 1, & \text{если индексы } i, j, k, l \text{ все разные,} \\ 0, & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases} \tag{162}$$

$$\overset{o}{G}_{ijkl} = \begin{cases} 1, & \text{если } i, j, k, l \neq 0 \text{ и } i = j \neq k = l, \\ & \text{или } i = k \neq j = l, \\ & \text{или } i = l \neq j = k; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{163}$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы в пространстве H_4 в физическом базисе можно записать следующим образом [8]:

$$(p_0 + p_1 + p_2 + p_3)(p_0 + p_1 - p_2 - p_3)(p_0 - p_1 + p_2 - p_3)(p_0 - p_1 - p_2 + p_3) - 1 = 0, \tag{164}$$

где p_i – компоненты обобщенного импульса,

$$p_i = \frac{\partial ds_{H_4}}{\partial(dx^i)}. \quad (165)$$

Сравнивая формулу (164) с формулой (158), имеем

$${}^o g^{ijkl} p_i p_j p_k p_l - 1 = 0. \quad (166)$$

Здесь

$${}^o g^{ijkl} = {}^o g^{ij} {}^o g^{kl} + \frac{1}{3} g'^{ijkl} - \overset{\circ}{G}^{ijkl}, \quad (167)$$

причем

$$\left(\overset{\circ}{g}^{ijkl} \right) = \left(\overset{\circ}{g}_{ijkl} \right), \quad \left(g'^{ijkl} \right) = \left(g'_{ijkl} \right), \quad \left(\overset{\circ}{G}^{ijkl} \right) = \left(\overset{\circ}{G}_{ijkl} \right). \quad (168)$$

Для того, чтобы задать лагранжиан для малых полей в первом приближении (157), надо задать тензор h_{ijkl} в формуле (154). В упрощенном варианте его можно разделить на две аддитивные составляющие: гравитационную часть и электромагнитную часть. Гравитационная часть может быть построена аналогично тому, как это делалось в разделах 10 и 11, а вот на том как построить электромагнитную часть следует остановиться подробнее.

Так как хотелось бы, сохранив градиентную инвариантность лагранжиана, получить и в пространстве H_4 для свободного малого поля уравнения Максвелла, запишем электромагнитную часть тензора h_{ijkl} для свободного поля следующим образом:

$$h_{ijkl}^{A_k} = \chi(x) h_{ijkl}^{(1)} + [1 - \chi(x)] h_{ijkl}^{(2)}, \quad (169)$$

где тензоры $h_{ijkl}^{(1)}$, $h_{ijkl}^{(2)}$ – это тензоры, стоящие в круглых скобках в правых частях формул (129), (130). Тогда

$$\mathcal{L}_A = {}^o g^{ijkl} h_{ijkl}^{A_k} \equiv 2 {}^o g^{ij} {}^o g^{km} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \right). \quad (170)$$

Для того, чтобы получить уравнения Максвелла не для свободного поля, а с заданными источниками $j_i(x)$, надо аддитивно добавить к $h_{ijkl}^{(A_k)}$ (169) еще тензор

$$h_{ijkl}^{(j_k)} = \left(\frac{16\pi}{c} \right) \cdot \frac{1}{6} \left(2A_i j_j \overset{\circ}{g}_{kl} - A_i \overset{\circ}{g}_{jk} j_l - j_i \overset{\circ}{g}_{jk} A_l \right), \quad (171)$$

симметризованный по всем индексам, то есть тензор

$$h_{ijkl} = h_{ijkl}^{Max} \equiv h_{ijkl}^{(A_k)} + h_{ijkl}^{(j_k)} \quad (172)$$

описывает малое электромагнитное поле с источниками $j_i(x)$, где, например,

$$j_i = \sum_b q_{(a)} \frac{\partial \psi_{(b)}}{\partial x^i}, \quad (173)$$

а $\psi_{(b)}$ – скалярные составляющие гравитационного поля.

Для того, чтобы получить единую теорию электромагнитного и гравитационного полей следует взять линейную комбинацию тензора $h_{ijkl}^{(Max)}$, отвечающего в первом приближении за электромагнитное поле, и тензора $h_{ijkl}^{(grav)}$, отвечающего в первом приближении за гравитационное поле:

$$h_{ijkl} = \mu h_{ijkl}^{(Max)} + \gamma h_{ijkl}^{(grav)}, \quad (174)$$

где μ, γ – постоянные. Тензор $h_{ijkl}^{(grav)}$ можно построить, например, так

$$h_{ijkl}^{grav} = \sum_{a=1}^N \varepsilon_{(a)} \frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial x^l} + \sum_{b=1}^M \epsilon_{(b)} \frac{\partial \psi_{(b)}}{\partial x^{(i}} \frac{\partial \psi_{(b)}}{\partial x^{j)}} \overset{o}{g}_{kl}, \quad (175)$$

где $\varepsilon_{(a)}, \epsilon_{(b)}$ – знаковые множители, а $\varphi_{(a)}, \psi_{(b)}$ – скалярные поля. Общее количество скалярных полей равно $(N + M)$.

15 Заключение

Принцип самодостаточности финслеровой геометрии позволяет построить ТО, исходя из любого плоского финслерова пространства, которое в нерелятивистском приближении, то есть с точностью до $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ включительно, переходит в пространство Галилея с метрической функцией

$$L(dx; x) = dx^0 - \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{2 dx^0}. \quad (176)$$

Теория относительности финслеровых пространств не противоречит ОТО А. Эйнштейна [15], а дополняет и развивает ее, снимая некоторые трудности. Геометрический подход [6] в теории поля, который обычно дает нелинейные не разделяющиеся уравнения поля, для малых полей в первом приближении может дать систему независимых линейных уравнений. При усилении полей принцип суперпозиции полей нарушается, уравнения поля становятся нелинейными и поля начинают взаимодействовать между собой. Можно считать, что эти изменения уравнений поля при переходе от слабых к более сильным полям происходят за счет двух механизмов: во-первых, качественное изменение уравнений поля для свободных полей в первом приближении; во-вторых, появление дополнительных источников поля.

В рамках геометрического подхода в теории поля происходит естественное объединение электромагнитного и гравитационного полей как в четырехмерном псевдоримановом пространстве с метрическим тензором $g_{ij}(x)$, так и в четырехмерном кривом пространстве Бервальда-Моора с метрическим тензором $g_{ijkl}(x)$. Это говорит о том, что эти качественно различные пространства во многом схожи.

Литература

- [1] П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, М. - Л.: ОГИЗ, 1947.
- [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., "Наука", 1967.
- [3] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, М., "Наука", 1973.
- [4] Г. И. Гарасько, О Мировой функции и связи между геометриями. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (5)**, Т. 3 (2006), стр. 3–18.
- [5] Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов, Конструирование псевдоримановой геометрии на основе геометрии Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (5)**, Т. 3 (2006), стр. 19–27.

- [6] Г. И. Гарасько. Теория поля и финслеровы пространства, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2 (6)**, Т. 3 (2006), стр. 6–20.
- [7] Г. И. Гарасько. Слабые поля, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2 (8)**, Т. 4 (2007), стр. 3–12.
- [8] Д. Г. Павлов, Г. И. Гарасько: Геометрия невырожденных поличисел. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (7)**, Т. 4 (2007).
- [9] M. Matsumoto, S. Numata: On Finsler spaces with 1-form metric. Tensor, N.S., Vol. 32 (1978), 161.
- [10] M. Matsumoto, S. Numata: On Finsler spaces with 1-form metric II. Berwald-Moor's metric., Tensor, N.S., Vol. 32 (1978), 275.
- [11] M. Matsumoto, S. Numata: On Finsler spaces with a cubic metric, Tensor, N.S., Vol. 33 (1979), 153.
- [12] H. Shimada: On Finsler spaces with the metric L of m -th root metric, Tensor, N.S., Vol. 33 (1979), 365–372.
- [13] Д. Г. Павлов: Обобщенные аксиомы скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 5–19.
- [14] Г. И. Гарасько: Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 75–88.
- [15] А. Эйнштейн: Сущность теории относительности. М., "ИЛ", 1955.

A self-sufficiency principle in Finsler geometry

G. I. Garas'ko

*Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friaizino, Russia
Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia
gri9z@mail.ru*

By using the self-sufficiency principle of Finsler geometry, one can derive the field equations, where the gravitational field and electromagnetic field naturally join together as in the pseudo-Riemannian 4D space as well as in the curvilinear Berwald-Moor 4D space; there always exists an energy-momentum tensor related to conservation laws.

It has been shown that, in the approximation of small fields, the new geometric approach in the field theory following from the self-sufficiency principle of the Finsler geometry can result in linear field equations valid for several independent fields. When the strength of the fields increases, which means the use of the second approximation, the field equations become generally nonlinear and the fields lose independence that leads to the violation of the superposition principle for each separate field, and results in the interaction among different fields.

Key words: Finsler geometry, Berwald-Moor space, field theory.

МЕТРИЧЕСКИЕ БИНГЛЫ И ТРИНГЛЫ В \mathcal{H}_3

Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев

*НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, МО,
РНОЦ "Логос" Ярославль
logos-center@mail.ru*

В 3-мерном пространстве Бервальда-Моора конструируются бинглы и тринглы как аддитивные характеристики двоек и троек единичных векторов – длины и площади на единичной сфере (индикатрисе). Построены два вида бинглов (взаимные и относительные) по аналогии со сферическими углами θ и φ соответственно. Показано, что взаимные бинглы являются нормами в пространстве экспоненциальных углов (би-пространстве \mathcal{H}_3^b), которые определяют экспоненциально представление поличисел. Оказывается, что метрика в этом пространстве совпадает с метрикой Бервальда-Моора исходного пространства. Относительные бинглы связаны с элементами второго би-пространства (углы в пространстве углов) $(\mathcal{H}_3^b)^b$ и позволяют записать дважды экспоненциальное представление поличисел. Явные формулы для относительных бинглов и тринглов содержат интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.

Ключевые слова: индикатриса, экстремаль, полиугол, бингл, трингл, метрика Бервальда-Моора, би-проекция, форма площади.

1 Введение

Определение и изучение полиуглов является одним из важных элементов программы исследований коммутативно-ассоциативных алгебр (поличисел) и тесно связанных с ними пространств \mathcal{H}_n с метрикой Бервальда-Моора (БМ):

$${}^{(n)}G = \hat{\mathcal{S}}(dX_1 \otimes \cdots \otimes dX_n), \quad (1)$$

где $\hat{\mathcal{S}}$ – оператор симметризации (без числового множителя). Говоря коротко и неформально, полиуглы – это финслеровы обобщения обычных евклидовых или псевдоевклидовых углов, которые характеризуют взаимное расположение пар, троек и т.д. векторов независимо от абсолютных величин этих векторов и их расположения в пространстве как целого. В программных работах [1, 2] были сформулированы общие соображения, выделяющие несколько направлений, которые потенциально могли бы привести к решению задачи о полиуглах. Одна из попыток [3], целиком основанная на соображениях аддитивности и конформной инвариантности, привела к бесконечному множеству вариантов "полиуглов", что в целом порождает больше вопросов (первый из них – на каком варианте остановиться?), чем ответов. Между тем, опыт подобного рода обобщений показывает, что *правильно найденный руководящий принцип или система принципов для построения того или иного обобщения приводят к искомым обобщениям в определенном смысле однозначно.*

В настоящей статье мы собираемся использовать принцип аддитивности способом, отличным от принятого в работе [3]. Вместо решения функционально-дифференциальных уравнений в пространстве базисных конформных инвариантов геометрии БМ, мы с самого начала связываем все типы полиуглов с аддитивными по своему определению величинами, типа длин, площадей или объемов, вычисляемых на единичной сфере геометрии БМ (индикатрисе). Идея подобного рода высказывалась ранее в своих общих чертах в работе [1]. При этом выбранный нами подход реализует принцип деформации евклидовой геометрии, сформулированный в [5], суть которого заключается в переносе

формулировок геометрических понятий и соотношений, сформулированных в терминах евклидовой метрики, в неевклидовы пространства.

Правильность и адекватность выбранного пути поставленной задаче на наш взгляд с избытком подтверждаются всеми теми результатами, к которым мы приходим в настоящей статье:

1. Выбранный подход позволяет получить явные выражения для полиуглов всех типов в любом \mathcal{H}_n .
2. Все полиуглы оказываются по определению аддитивными и конформно-инвариантными.
3. Все полиуглы выражаются через систему метрических инвариантов геометрии БМ.
4. Наши определения в принципе позволяют исследовать полную группу симметрии полиуглов, которая оказывается шире изометрий и постоянных дилатаций и, вообще говоря, выходит за рамки конформно-аналитических преобразований пространств \mathcal{H}_n .
5. Все полиуглы оказываются однозначно связанными с системой углов экспоненциального представления поличисел.
6. Анализ явных выражений для полиуглов обнаруживает красивый факт их *двойственности* с длинами в геометрии БМ.

В настоящей статье мы проводим все явные вычисления для первой неквадратичной геометрии БМ в семействе пространств \mathcal{H}_n , – геометрии \mathcal{H}_3 , но большая часть результатов без труда обобщается на произвольные \mathcal{H}_n .

2 Основные свойства алгебры и геометрии P_3

Для удобства чтения в настоящем разделе мы приводим сводку сведений по алгебре и геометрии поличисел P_3 . Большая часть из этих свойств тривиальным образом распространяется на общие поличисла P_n .

Ассоциативно-коммутативная алгебра P_3 над полем R (алгебра 3-чисел) обобщает хорошо известную алгебру двойных чисел на плоскости. Ее общий элемент имеет вид:

$$A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3, \quad (2)$$

где $\{e_i\}$ – специальный набор образующих алгебры, удовлетворяющих соотношениям:

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_i \quad (\text{нет суммирования!}). \quad (3)$$

Из соотношений (3) следуют простые правила умножения и деления поличисел:

$$AB = A_1 B_1 e_1 + A_2 B_2 e_2 + A_3 B_3 e_3; \quad A/B = (A_1/B_1) e_1 + (A_2/B_2) e_2 + (A_3/B_3) e_3,$$

при этом деление определено только на т. н. невырожденные элементы, у которых все $B_i \neq 0$. Роль единицы алгебры P_3 играет элемент $I = e_1 + e_2 + e_3$.

Определим в P_3 две операции комплексного сопряжения:

$$A^\dagger = (A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3)^\dagger \equiv A_3 e_1 + A_1 e_2 + A_2 e_3; \quad A^\ddagger = (A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3)^\ddagger \equiv A_2 e_1 + A_3 e_2 + A_1 e_3$$

и рассмотрим 3-число $AA^\dagger A^\ddagger$. Простое вычисление показывает, что оно вещественно и равно $A_1 A_2 A_3 I$. Таким образом, по аналогии с модулем комплексного числа, в P_3 можно ввести (квази)норму по формуле:

$$|A| \equiv (AA^\dagger A^\ddagger)^{1/3} = (A_1 A_2 A_3)^{1/3}. \quad (4)$$

Для невырожденных 3-чисел эта норма имеет все свойства обычной нормы, в частности, для таких 3-чисел имеет место равенство:

$$|AB| = |A||B|. \quad (5)$$

В отличие от поля комплексных чисел и тела кватернионов, алгебра P_3 имеет делители нуля, т. е. не равные нулю элементы N , удовлетворяющие условию: $|NA| = 0$ для всякого $A \in P_3$. Такие элементы называются *вырожденными* (будем обозначать их далее P_3°) и характеризуются тем, что в их представлении (2) имеются нулевые коэффициенты. Отметим, что вырожденные элементы образуют идеалы в P_3 .

С операцией умножения на невырожденные элементы в P_3 связана группа внутренних автоморфизмов $\text{Aut}(P_3)$, которая изоморфна подалгебре (по умножению) невырожденных элементов:

$$\text{Aut}(P_3) \sim P_3 \setminus P_3^\circ, \quad \text{Aut}(P_3) \ni \sigma : A \rightarrow \sigma(A) \equiv \sigma A. \quad (6)$$

В этой группе выделяется подгруппа изометрий $\mathcal{I}P_3 \subset P_3$, элементы которой сохраняют норму. Ввиду определения (6) и свойства (5), элементы этой подгруппы выделяются условием: $|\sigma| = 1$ или в компонентах: $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1$. Группа $\mathcal{I}P_3$ – 2-параметрическая абелева.

В пространстве P_3 (и любом P_n) можно определять степени элементов любого порядка и аналитические функции поличисловой переменной. Например, функцию e^A можно определить стандартным рядом для экспоненты:

$$e^A \equiv I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots = e^{A_1}e_1 + e^{A_2}e_2 + e^{A_3}e_3. \quad (7)$$

Определим теперь экспоненциальное представление поличисла по формуле:

$$A = |A|e^B, \quad (8)$$

где B – некоторое 3-число, инвариантное относительно действия группы $\mathcal{I}P_3$, сохраняющей норму $|A|$. Компоненты этого числа в некотором специальном базисе называются *экспоненциальными углами*. Независимых экспоненциальных углов будет два, поскольку, как мы увидим ниже, пространство чисел B для числа A с фиксированной нормой $|A|$ будет 2-мерным. Для выяснения явного вида экспоненциальных углов, выполним следующую цепочку тождественных преобразований¹:

$$\begin{aligned} A = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3 &= (A_1A_2A_3)^{1/3} \left(\frac{A_1^{2/3}}{(A_2A_3)^{1/3}}e_1 + \frac{A_2^{2/3}}{(A_1A_3)^{1/3}}e_2 + \frac{A_3^{2/3}}{(A_1A_2)^{1/3}}e_3 \right) = \\ &|A|(e^{\ln(A_1^{2/3}/(A_2A_3)^{1/3})}e_1 + e^{\ln(A_2^{2/3}/(A_1A_3)^{1/3})}e_2 + e^{\ln(A_3^{2/3}/(A_1A_2)^{1/3})}e_3) = \\ &|A|(e^{\chi_1}e_1 + e^{\chi_2}e_2 + e^{\chi_3}e_3) = |A|e^{\chi_1e_1 + \chi_2e_2 + \chi_3e_3}, \end{aligned} \quad (9)$$

где величины

$$\chi_1 \equiv \ln \left[\frac{A_1^{2/3}}{(A_2A_3)^{1/3}} \right]; \quad \chi_2 \equiv \ln \left[\frac{A_2^{2/3}}{(A_1A_3)^{1/3}} \right]; \quad \chi_3 \equiv \ln \left[\frac{A_3^{2/3}}{(A_1A_2)^{1/3}} \right] \quad (10)$$

¹ Мы предполагаем, что все $A_i > 0$. Рассмотрение в других октантах вполне аналогично, если в определении экспоненциальных углов учитывать тип октанта и рассматривать экспоненту не от A , а от $A/I_{(j)}$, где $I_{(j)}$ ($j = 1, \dots, 8$) – единичный вектор в направлении пространственной биссектриссы (в евклидовом смысле) соответствующего координатного октанта. Такое рассмотрение более адекватно передает смысл углов, как величин, отсчитываемых от соответствующих направлений $I_{(j)}$. Отметим, что в наших обозначениях мы принимаем $I_1 \equiv I$.

и есть искомые экспоненциальные углы. Ввиду соотношения:

$$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 = 0, \quad (11)$$

которое в силу формул (10) выполняются тождественно, независимых углов будет только два и представление (9) можно переписать в следующих эквивалентных формах:

$$A = |A|e^{-\chi_2 E_3 + \chi_3 E_2} = |A|e^{\chi_1 E_3 - \chi_3 E_1} = |A|e^{-\chi_1 E_2 + \chi_2 E_1},$$

где $E_1 = e_2 - e_3$, $E_2 = e_3 - e_1$, $E_3 = e_1 - e_2$ – комбинации базисных векторов, являющиеся генераторами группы \mathcal{D}_2 .

Операции комплексного сопряжения действуют на экспоненциальные углы следующим образом:

$$\dagger : \quad \chi_1 \rightarrow \chi_3; \quad \chi_2 \rightarrow \chi_1; \quad \chi_3 \rightarrow \chi_2; \quad \ddagger : \quad \chi_1 \rightarrow \chi_2; \quad \chi_2 \rightarrow \chi_3; \quad \chi_3 \rightarrow \chi_1$$

и обеспечивают справедливость формулы (4) в экспоненциальном представлении.

С помощью операций \dagger и \ddagger можно определить вещественное число (A, B, C) , называемое *скалярным 3-произведением элементов A, B, C* , которое строится на любых трех векторах в P_3 по правилу:

$${}^{(3)}G(A, B, C) \equiv (A, B, C) \equiv \sum_{X, Y, Z = S(ABC)} XY^\dagger Z^\ddagger = \text{perm} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $S(ABC)$ – множество перестановок элементов A, B, C , а $\text{perm}(M)$ – перманент матрицы M , который повторяет структуру ее детерминанта, но все 6 слагаемых в нем берутся со знаком "плюс".

Если теперь абстрагироваться от алгебры и с самого начала рассматривать векторное пространство с 3-скалярным произведением, которое в специальном базисе имеет вид (12), мы приходим к *финслеровому 3-мерному пространству Бервальда-Моора*, которое будем обозначать \mathcal{H}_3 . В отличие от P_3 , в нем не предполагается существования какой-либо мультипликативной алгебры. Можно сказать, что отношение между P_3 и \mathcal{H}_3 аналогично отношению между комплексной плоскостью C и евклидовой плоскостью R^2 .

Векторы \mathcal{H}_3 , имеющие нулевую норму, называются в геометрии БМ *изотропными*. Как видно из определения (4), всякий изотропный вектор лежит в какой-либо из 3-х координатных плоскостей изотропной системы координат. В частности, векторы $e_1 = \{1, 0, 0\}$, $e_2 = \{0, 1, 0\}$, $e_3 = \{0, 0, 1\}$ изотропного базиса этой системы являются изотропными. Таким образом, все координатное пространство \mathcal{H}_3 разбивается координатными плоскостями на 8 октантов, внутри которых нормы векторов отличны от нуля и имеют определенные знаки (рис. 1).

На координатных плоскостях метрика (12) становится геометрически вырожденной, поскольку все векторы на них имеют нулевую норму. Для правильного описания геометрических свойств координатных плоскостей (это – 2-мерные псевдоевклидовы пространства) можно использовать конструкцию соприкосновения [4]. Ее суть заключается в переходе от финслеровой метрики ${}^{(3)}G$ вида (1) к соприкасающейся с ней вдоль вектора e_j квадратичной метрике:

$${}^{(2)}G_{(j)} \equiv {}^{(3)}G(e_j, \ , \),$$

действующей в гиперплоскости направлений $x^j = \text{const}$. Например, для случая $j = 3$ будем иметь:

$${}^{(2)}G_{(3)} \equiv {}^{(3)}G(e_3, \ , \) = dX_1 \otimes dX_2 + dX_2 \otimes dX_1$$

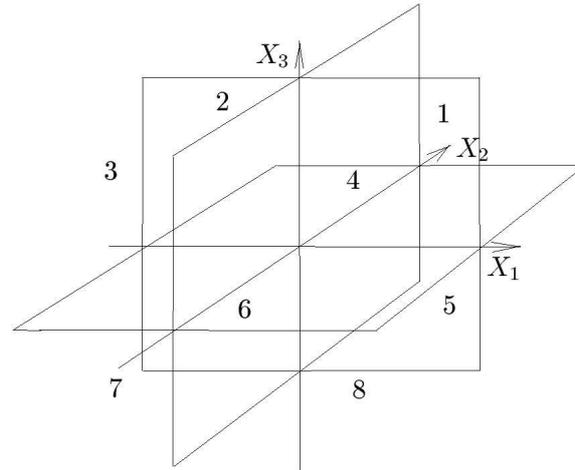


Рис. 1: Изотропные координатные плоскости и октанты в \mathcal{H}_3

– метрику Бервальда-Моора на плоскостях $X_3 = \text{const}$, которая является 2-мерной метрикой Минковского.

Метрические свойства пространства \mathcal{H}_3 наглядно иллюстрируются видом единичной сферы $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$ (индикатрисы \mathcal{H}_3), которая определяется уравнением:

$$\|X\| = |(X_1 X_2 X_3)^{1/3}| = 1, \quad (13)$$

где $X = \{X_1, X_2, X_3\}$ – радиус-вектор в \mathcal{H}_3 . Поверхность $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$ – 8-связная и некомпактная. Ее компоненты связности расположены симметрично во всех 8 октантах и обладают дискретной симметрией относительно любых перестановок координат. Сечения этой поверхности плоскостями $X_i = \text{const}$ – это семейство гипербол (понимаемых в евклидовом смысле). Наглядно одна из компонент индикатрисы в евклидовом представлении изображена на рис. 2

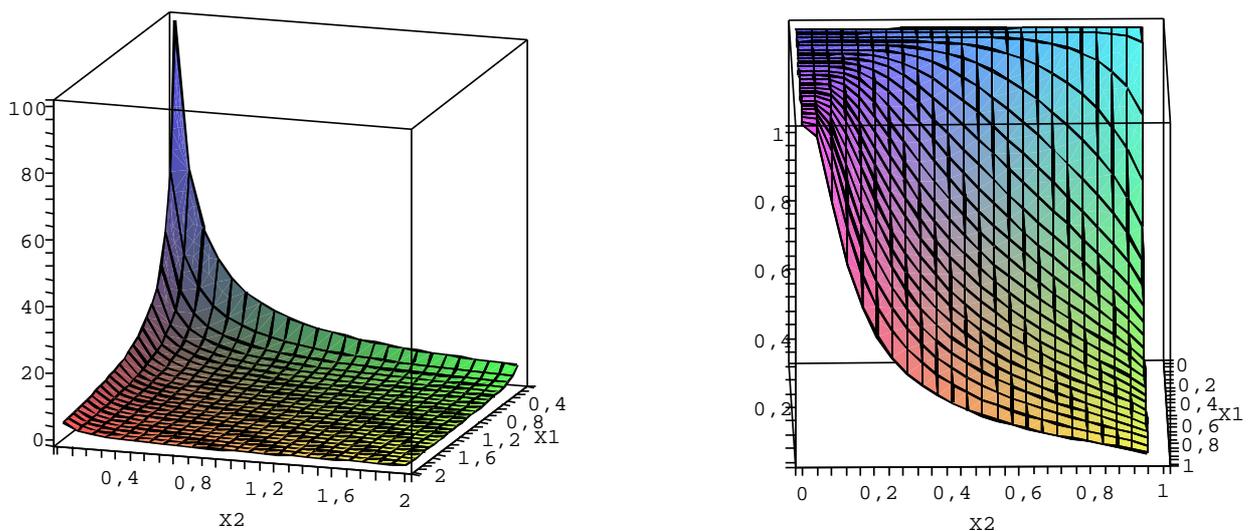


Рис. 2. Компонента индикатрисы $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$, лежащая в первом октанте. На правом рисунке эта компонента компактифицирована в единичный куб с помощью отображения $X_i \mapsto \tanh(X_i \ln 3/2)$. Коэффициент в аргументе гиперболического тангенса подобран так, чтобы точка $\{1, 1, 1\}$ переходила в точку $\{1/2, 1/2, 1/2\}$ единичного куба.

Группа изометрий \mathcal{IH}_3 метрики (12) состоит из 3-параметрической абелевой подгруппы трансляций \mathcal{T}_3 с элементами $T_A : X \rightarrow X + A$ и 2-параметрической абелевой подгруппы унимодулярно-согласованных дилатаций \mathcal{D}_2 с элементами $D_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} : \{X_1, X_2, X_3\} \rightarrow \{\sigma_1 X_1, \sigma_2 X_2, \sigma_3 X_3\}$ и соотношением:

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 1. \quad (14)$$

С алгебраической точки зрения на \mathcal{H}_3 группа \mathcal{D}_2 есть ничто иное, как описанная выше группа \mathcal{IP}_3 умножений на элементы с единичной нормой. Отметим, что группа \mathcal{IH}_3 – неабелева и имеет структуру полупрямого произведения: $\mathcal{IH}_3 = \mathcal{T}_3 \rtimes \mathcal{D}_2$. Группа \mathcal{D}_2 играет роль вращений в пространстве \mathcal{H}_3 и обобщает гиперболические вращения псевдо-евклидовой плоскости. В частности, действие группы \mathcal{D}_2 на индикатрисе транзитивно: $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \mathcal{S}_{\text{BM}}^2$.

3 Об одном определении углов в евклидовом пространстве

Напомним, что одно из эквивалентных определений угла в евклидовом пространстве связано с длиной дуги на единичной окружности. Действительно, из метрического определения угла $\varphi[\vec{a}, \vec{b}]$ между векторами на евклидовой плоскости со скалярным произведением (\cdot, \cdot) :

$$\varphi[\vec{a}, \vec{b}] \equiv \arccos \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} \quad (15)$$

следует, что $\varphi[\vec{a}, \vec{b}] = \varphi[\vec{n}_a, \vec{n}_b]$, где \vec{n}_a, \vec{n}_b – единичные направляющие векторы для векторов \vec{a} и \vec{b} соответственно. Применяя это определение для вычисления длины $L_S[\vec{n}_a, \vec{n}_b]$ дуги единичной окружности S , заключенной между концами векторов \vec{n}_a и \vec{n}_b , получаем:

$$L_S[\vec{n}_a, \vec{n}_b] = \varphi_b - \varphi_a = \varphi[\vec{a}, \vec{b}] \quad (16)$$

где φ_a и φ_b – угловые координаты концов векторов \vec{n}_a и \vec{n}_b , отсчитываемые от некоторого фиксированного направления. При этом аддитивность угла автоматически обеспечивается аддитивностью длины кривой (что, в свою очередь, связано с аддитивностью интеграла), а его конформная инвариантность, по существу, обеспечивается рассмотрением на единичной окружности. Можно обратить рассуждение и положить конструкцию на единичной окружности в основу определения угла. При этом мы приходим к определению (15) как следствию определения на единичной окружности. Именно такой способ изложения принят в элементарной геометрии.

Для пары векторов в евклидовом пространстве (любого числа измерений) конструкция без труда переносится на евклидову единичную сферу. При этом плоскость векторов пересекается со этой сферой по окружности единичного радиуса и угол снова можно определять по формулам аналогичным (16). По самому построению угол обладает свойством аддитивности:

$$\varphi[\vec{a}, \vec{c}] = \varphi[\vec{a}, \vec{b}] + \varphi[\vec{b}, \vec{c}] \quad (17)$$

для всякой тройки ненулевых векторов, удовлетворяющих условию компланарности:

$$\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 c_2 - a_2 c_1} = \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_1 c_3 - a_3 c_1} = \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_2 c_3 - a_3 c_2} \quad (18)$$

или в более компактной форме, которая не зависит от размерности:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = 0, \quad (19)$$

где \wedge – стандартная операция внешнего умножения.

Принципиальным для нашего дальнейшего рассмотрения фактом является то (геометрически неслучайное!) обстоятельство, что *окружности, высекаемые на сфере плоскостями, проходящими через ее центр, являются экстремалами длины на сфере как на многообразии с метрикой, индуцированной евклидовой метрикой объемлющего пространства*. Оказывается, метрический аналог именно этого обстоятельства и можно положить в основу общего определения углов в \mathcal{H}_n .

4 Определение угла в \mathcal{H}_3

Рассмотрим пару неизотропных векторов $A, B \in \mathcal{H}_3$, между которыми мы собираемся определить угол (бингл). Пусть сначала для определенности оба вектора лежат в одном и том же (например, первом) координатном октанте. Перейдем от векторов A, B к их единичным направляющим векторам: $a = A/|A|$ и $b = B/|B|$ соответственно. Их концы отмечают некоторые точки индикатрисы $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$, координаты которых можно представить в виде:

$$a = \{a_1, a_2, (a_1 a_2)^{-1}\}; \quad b = \{b_1, b_2, (b_1 b_2)^{-1}\}.$$

Используя свободу изометрий группы \mathcal{D}_2 , систему координат можно приспособить к этой паре таким образом, чтобы один из векторов – пусть для определенности это будет вектор a – стал ориентированным вдоль пространственной биссектриссы первого координатного октанта. Координаты пары векторов a и b станут при этом равными $\{1, 1, 1\}$ и $\{b_1/a_1, b_2/a_2, a_1 a_2 / (b_1 b_2)\}$ соответственно. Будем называть такой выбор системы координат среди класса всех изотропных систем *каноническим по отношению к паре векторов A и B* . Каноническая система изотропных координат в принципиальном плане ничем не выделена по сравнению с другими изотропными системами, но некоторая часть вычислений производится в ней несколько проще.

Определим бингл $\phi[A, B]$ между векторами A и B формулой:

$$\phi[A, B] \equiv L_{\mathcal{S}_{\text{BM}}^2}[a, b], \quad (20)$$

где правая часть по аналогии с формулой (16) квадратичного случая определяет длину экстремали на индикатрисе $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$, вычисленную между концами векторов a и b . В отличие от евклидова случая, в геометрии \mathcal{H}_3 сечения $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$ плоскостями (аффинными) вообще говоря не будут экстремальными кривыми на этой поверхности. Прежде чем перейти к отысканию экстремалей на $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$, произведем небольшой подсчет оставшихся степеней свободы у пары исходных векторов A и B . Из шести начальных степеней свободы (шесть координат векторов) мы должны вычесть две степени свободы, связанных с двумя условиями нормировки, и две степени свободы, устраняемые за счет выбора канонической системы координат. В результате остается две степени свободы, что, в принципе, дает *возможность определения двух типов независимых бинглов*. Таким образом, у пары векторов в \mathcal{H}_3 *имеется 4 собственных характеристики этой пары – две нормы и два угла*. Очевидно, что отличие от ситуации в 3-мерном евклидовом или псевдоевклидовом пространствах (две нормы и один угол) связано с 2-мерностью группы гиперболических вращений в \mathcal{H}_3 (в упоминаемых квадратичных 3-мерных пространствах группа вращений 3-мерна). Наши рассуждения согласуются с установленным выше фактом о независимости двух из трех экспоненциальных углов. Связь экспоненциальных углов с метрическими бинглами мы установим далее. Аналогичный подсчет для тройки векторов приводит к выводу о наличии 4 угловых характеристик: трех попарных бинглов и четвертой характеристики, которую можно связать с *тринглом* – конформно-инвариантной аддитивной характеристикой взаимного расположения тройки векторов.

5 Экстремали $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$ и их свойства

Выражая из уравнения (13) одну из координат через две других (например X_3 через X_1 и X_2 : $X_3 = (X_1 X_2)^{-1}$) и представляя координатную 1-форму dX_3 в виде:

$$dX_3 = d(X_1 X_2)^{-1} = -\frac{dX_1}{X_1^2 X_2} - \frac{dX_2}{X_1 X_2^2},$$

приходим к внутренней метрике на $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \equiv {}^{(3)}G|_{\mathcal{S}_{\text{BM}}^2} &= -\frac{2}{X_1^2 X_2} (dX_1 \otimes dX_1 \otimes dX_2 + dX_1 \otimes dX_2 \otimes dX_1 + dX_2 \otimes dX_1 \otimes dX_1) \quad (21) \\ &\quad -\frac{2}{X_2^2 X_1} (dX_2 \otimes dX_2 \otimes dX_1 + dX_2 \otimes dX_1 \otimes dX_2 + dX_1 \otimes dX_2 \otimes dX_2). \end{aligned}$$

Таким образом, координатная плоскость $\{X_1, X_2\}$ с выколотыми осями выступает как координатная карта многообразия $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$ в целом (четыре различных ее квадранта для восьми различных компонент поверхности $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$). Вводя параметризованные кривые Γ : $\{X_1 = X_1(\tau), X_2 = X_2(\tau)\}$ можно составить функционал длины для этих кривых²:

$$\text{length}[\Gamma] = \int_{\Gamma} ds = \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\dot{X}|_{\mathcal{G}} d\tau = \frac{1}{3} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{G}(\dot{X}, \dot{X}, \dot{X})^{1/3} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\frac{\dot{X}_1^2 \dot{X}_2}{X_1^2 X_2} + \frac{\dot{X}_2^2 \dot{X}_1}{X_2^2 X_1} \right]^{1/3} d\tau. \quad (22)$$

При выборе в качестве параметра τ длины дуги s кривой (натуральная параметризация) стандартная процедура варьирования этого функционала с закрепленными начальной и конечной точками приводит к следующей системе уравнений на экстремальные кривые поверхности $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$:

$$\frac{dW_1}{ds} + \frac{d \ln X_1}{ds} W_1 = 0; \quad \frac{dW_2}{ds} + \frac{d \ln X_2}{ds} W_2 = 0, \quad (23)$$

где

$$W_1 = \frac{2\dot{X}_1 \dot{X}_2}{X_1^2 X_2} + \frac{\dot{X}_2^2}{X_2^2 X_1}; \quad W_2 = \frac{2\dot{X}_1 \dot{X}_2}{X_2^2 X_1} + \frac{\dot{X}_1^2}{X_1^2 X_2}. \quad (24)$$

Полученные уравнения (23) легко интегрируются: $W_i = C_i/X_i$ $i = 1, 2$, где C_i – константы интегрирования, откуда, с учетом (24), приходим к системе уравнений первого порядка:

$$\frac{2\dot{X}_1 \dot{X}_2}{X_1 X_2} + \frac{\dot{X}_2^2}{X_2^2} = C_1; \quad \frac{2\dot{X}_1 \dot{X}_2}{X_1 X_2} + \frac{\dot{X}_1^2}{X_1^2} = C_2.$$

Вводя новую переменную $U_i = d \ln X_i / ds$, полученную систему можно свести к чисто алгебраической:

$$2U_1 U_2 + U_2^2 = C_1; \quad 2U_1 U_2 + U_1^2 = C_2.$$

Пусть $U_1 = C'_1 = \text{const}$, $U_2 = C'_2 = \text{const}$ – ее решение, тогда возвращаясь к переменным X_1 и X_2 получаем общее представление для экстремалей на $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$ в виде:

$$X_1 = A_1 e^{q_1 s}; \quad X_2 = A_2 e^{q_2 s}. \quad (25)$$

² Мы опускаем несущественный для дальнейшего числовой множитель перед интегралом.

Константы A_i, q_i находятся путем задания начальных и (или) конечных условий для экстремали. При этом компоненты вектора скорости \dot{X} в силу натуральности параметризации должны удовлетворять условию $|\dot{X}|_G = 1$, что с учетом вида ds в (22), приводит к дополнительному ограничению:

$$q_1 q_2 (q_1 + q_2) = 1. \quad (26)$$

Зависимость (26) представлена на рис. 3

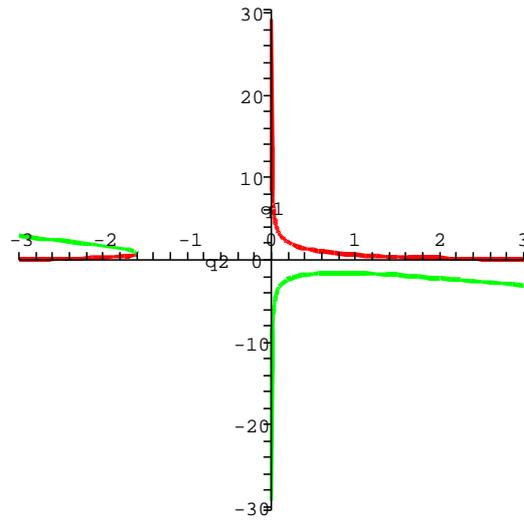


Рис. 3. Зависимость (26) на плоскости (q_1, q_2) . Зависимость содержит три ветви: ветвь (1-2) при $q_1 q_2 > 0$, ветвь (1-3) при $q_1 > 0, q_2 < 0$ и ветвь (2-3) при $q_1 < 0, q_2 > 0$. Каждая из этих трех ветвей описывает пучки экстремалей, пересекающих соответствующую пару из шести компонент единичной окружности на \mathcal{S}_{BM}^2 (см. рис. 4 и 5).

Проекции экстремалей \mathcal{S}_{BM}^2 на координатную плоскость $\{X_1, X_2\}$ – степенные кривые вида: $X_2 = (A_2/A_1^{1/B_1})X_1^{B_2/B_1}$. Как было отмечено выше, экстремали на \mathcal{S}_{BM}^2 в общем случае не являются плоскими в аффинном смысле. Несколько представителей из класса экстремальных кривых показано на рисунке 4.

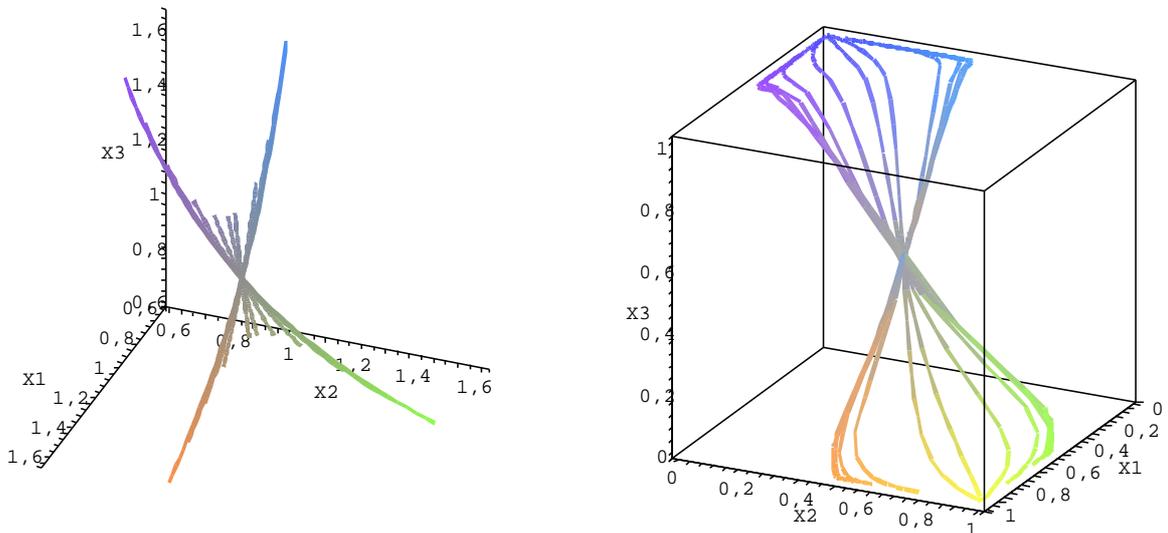


Рис. 4. Семейство экстремалей на $\mathcal{S}_{\text{ВМ}}^2$, пересекающихся в точке $\{1, 1, 1\}$ ($A_1 = A_2 = 1$) для значений параметров $q_1 = 1/25, 1/16, 1/9, 1/4, 1/2, 1/2^{1/3}, 1, 2, 3, 4, 5$, и значений q_2 , взятых на ветви (1–2) зависимости (26) (см. рис. 3). На правом рисунке левый (взятый с продолженными экстремальями) компактифицирован в единичный куб с помощью отображения: $X_i \rightarrow \tanh(X_i \ln 3/2)$.

Кроме экстремалей нам в дальнейшем потребуются выражения и свойства *геодезических окружностей* на $\mathcal{S}_{\text{ВМ}}^2$. По определению, геодезической окружностью с центром в точке $p \in \mathcal{S}_{\text{ВМ}}^2$ называется множество точек $p' \in \mathcal{S}_{\text{ВМ}}^2$ удаленных от p на некоторое фиксированное расстояние $|R|$ (это расстояние равно длине экстремали, соединяющей p и p'), которое называется (геодезическим) радиусом окружности. В силу равноправия точек на $\mathcal{S}_{\text{ВМ}}^2$ достаточно рассмотреть структуру геодезической окружности с центром в точке $\{1, 1, 1\}$. Параметрическое уравнение такой окружности получится, если в уравнениях (25) зафиксировать параметр s : $|s| = |R|$, а менять один из параметров q_i , например q_1 . Таким образом, параметрическое уравнение единичной окружности на $\mathcal{S}_{\text{ВМ}}^2$ с центром в точке $\{1, 1, 1\}$ имеет вид:

$$X_1 = e^{\pm q_1}; \quad X_2 = e^{\pm q_2}, \quad (27)$$

где параметр q_2 связан с q_1 соотношением (26). В зависимости от выбора знака \pm и номера ветви в зависимости (26), получаем для геодезической окружности шесть несвязных компонент. Для случая $|R| = 1$ они показаны на рис. 5.

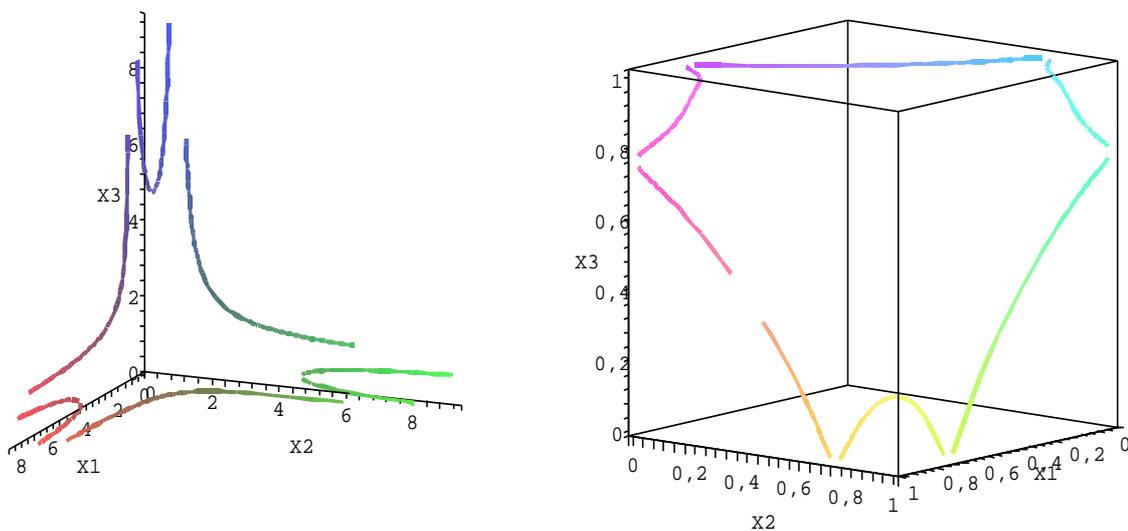


Рис. 5. Шесть компонент геодезической единичной окружности. Компоненты единичной окружности с $R = +1$ – широкие дуги, с $R = -1$ – узкие. Широкие дуги, прилегающие в виде гипербол к координатным плоскостям описываются соответствующими этим плоскостям компонентами зависимости (26). На правом рисунке левый (взятый с продолженными дугами окружностей) компактифицирован в единичный куб с помощью отображения: $X_i \rightarrow \tanh X_i$.

Рассмотрим, наконец, вопрос о пересечении геодезических на $\mathcal{S}_{\text{ВМ}}^2$. Записывая параметрические уравнения пары геодезических:

$$X_1 = a_1 e^{q_1 s}; \quad X_2 = a_2 e^{q_2 s}; \quad \bar{X}_1 = \bar{a}_1 e^{\bar{q}_1 \bar{s}}; \quad \bar{X}_2 = \bar{a}_2 e^{\bar{q}_2 \bar{s}},$$

где буквы без черты относятся к одной геодезической, а с чертой – к другой, получаем условие их пересечения в виде системы уравнений:

$$a_1 e^{q_1 s} = \bar{a}_1 e^{\bar{q}_1 \bar{s}}; \quad a_2 e^{q_2 s} = \bar{a}_2 e^{\bar{q}_2 \bar{s}}.$$

Логарифмируя и перенося слагаемые с параметрами s и \bar{s} в левые части, приходим к системе линейных неоднородных уравнений на эти параметры:

$$q_1 s - \bar{q}_1 \bar{s} = \ln(\bar{a}_1/a_1); \quad q_2 s - \bar{q}_2 \bar{s} = \ln(\bar{a}_2/a_2), \quad (28)$$

определяющей точку пересечения геодезических на \mathcal{S}_{BM}^2 . Если определитель системы (28) $\bar{q}_1 q_2 - q_1 \bar{q}_2 \neq 0$, то система имеет единственное решение, и, следовательно, геодезические пересекаются строго в одной точке. Рассмотрим ситуацию, когда определитель системы (28) равен нулю. В этом случае мы должны проанализировать систему уравнений на параметры геодезических:

$$\bar{q}_1 q_2 - q_1 \bar{q}_2 = 0; \quad q_1 q_2 (q_1 + q_2) = 1; \quad \bar{q}_1 \bar{q}_2 (\bar{q}_1 + \bar{q}_2) = 1. \quad (29)$$

Несложный анализ этой системы обнаруживает, что ее единственное решение: $q_1 = \bar{q}_1$; $q_2 = \bar{q}_2$. Это означает, что при невыполнении условия:

$$\ln(\bar{a}_1/a_1) = \ln(\bar{a}_2/a_2) \quad (30)$$

геодезические не будут пересекаться. Условие (30) по существу означает принадлежность точек (a_1, a_2) и (\bar{a}_1, \bar{a}_2) одной и той же геодезической. Другими словами, имеет место следующая теорема: *через любую точку, не лежащую на данной геодезической можно провести единственную геодезическую, параллельную первой*. Пара параллельных геодезических показана на рис. 7.

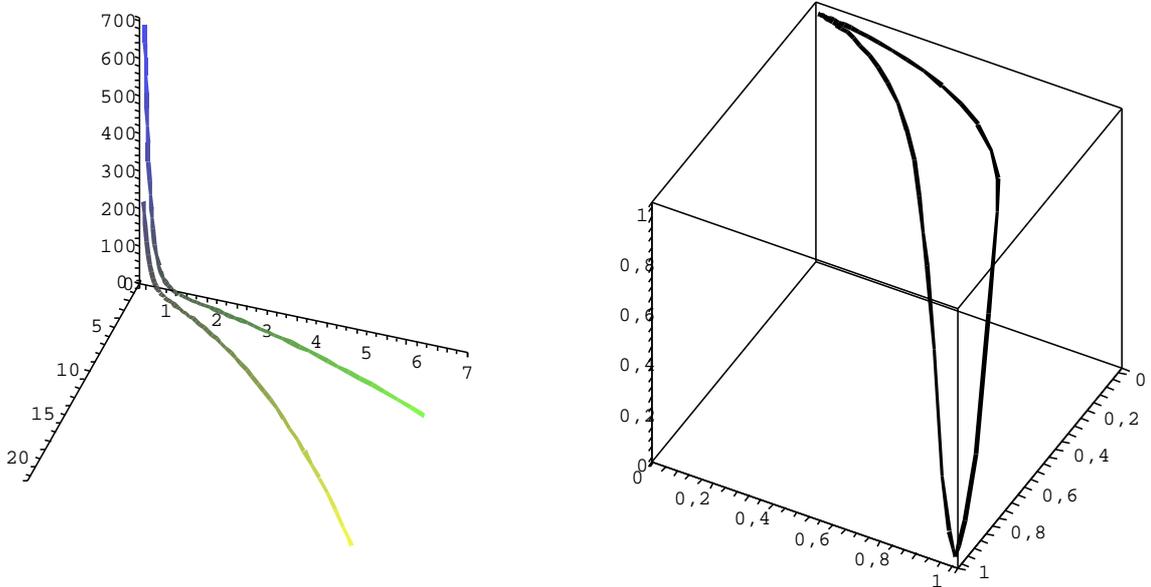


Рис. 6. Пара параллельных геодезических. На правом рисунке левый (взятый с продолженными дугами окружностей) компактифицирован в единичный куб с помощью отображения: $X_i \rightarrow \tanh X_i$.

Установленное свойство по своей форме аналогично известному свойству евклидовой плоскости, выражаемому т. н. пятым постулатом Евклида. Плоскостность индикатрисы становится очевидной, если заметить, что индуцированная метрика $\mathcal{G}_{S_{BM}^2}$ (формула (21)) преобразуется к явно плоскому виду преобразованием координат: $X_i \rightarrow u_i = \ln X_i$.

6 Явное выражение для бингла

Воспользуемся теперь результатами предыдущего раздела, для вывода явного выражения для аддитивного бингла по формуле (20). Обозначая $\phi[A, B] = s_*$ имеем согласно определению (20) и уравнениям (25):

$$b_1/a_1 = e^{q_1 s_*}; \quad b_2/a_2 = e^{q_2 s_*}, \quad (31)$$

где мы положили $A_1 = A_2 = 1$ с учетом начального условия в канонической по отношению к паре векторов A и B системе координат. Переписывая формулы (31) в виде:

$$q_1 = \frac{1}{s_*} \ln(b_1/a_1); \quad q_2 = \frac{1}{s_*} \ln(b_2/a_2)$$

и подставляя эти выражения в условие нормировки (26), приходим к уравнению:

$$\frac{1}{s_*^3} \ln(b_1/a_1) \ln(b_2/a_2) \ln(b_1 b_2/a_1 a_2) = 1,$$

откуда:

$$\phi[a, b] = s_* = [\ln(b_1/a_1) \ln(b_2/a_2) \ln(b_1 b_2/a_1 a_2)]^{1/3}. \quad (32)$$

Эта формула и представляет собой выражение для аддитивного бингла в терминах единичных векторов, аналогичное евклидовому выражению (16). Ее запись в терминах компонент исходных векторов A, B имеет более симметричный вид:

$$\begin{aligned} \phi[A, B] = \phi[a, b] &= - \left[\ln \left(\frac{B_1/A_1}{|B|/|A|} \right) \ln \left(\frac{B_2/A_2}{|B|/|A|} \right) \ln \left(\frac{B_3/A_3}{|B|/|A|} \right) \right]^{1/3} = \\ &= \left[\ln \left(\frac{A_1^{2/3}/(A_2 A_3)^{1/3}}{B_1^{2/3}/(B_2 B_3)^{1/3}} \right) \ln \left(\frac{A_2^{2/3}/(A_1 A_3)^{1/3}}{B_2^{2/3}/(B_1 B_3)^{1/3}} \right) \ln \left(\frac{A_3^{2/3}/(A_1 A_2)^{1/3}}{B_3^{2/3}/(B_1 B_2)^{1/3}} \right) \right]^{1/3}. \end{aligned} \quad (33)$$

7 Финслерово условие компланарности и операция би-сопряжения

Как уже отмечалось выше, бингл, определенный по формуле (33), оказывается аддитивным по определению, т. е. для любой тройки "компланарных" векторов A, B, C выполняется условие, аналогичное (17):

$$\phi[A, C] = \phi[A, B] + \phi[B, C]. \quad (34)$$

Термин "компланарность" мы заключили в кавычки, поскольку он требует прояснения. Как это видно из предыдущих рассуждений, с геометрической точки зрения компланарными будут все векторы, концы единичных направляющих векторов которых упрутся в одну из экстремалей индикатрисы $\mathcal{S}_{\text{ВМ}}^2$. При перемещении единичного вектора вдоль такой экстремали, он замечает некоторую коническую поверхность в \mathcal{H}_3 (по терминологии [1] – "веерообразные фигуры"). Назовем эту коническую поверхность *плоскостью вращения*. Выше мы отметили, что экстремали, за исключением нескольких представителей семейства, не являются в аффинном смысле плоскими кривыми. Это означает, что *плоскости вращения и аффинные плоскости в геометрии \mathcal{H}_3 существенно различаются*. Более того, аффинная плоскость с точки зрения геометрии \mathcal{H}_3 перестает играть сколь-нибудь существенную роль (за исключением изотропных плоскостей, которые являются аффинными плоскостями и не имеют точек пересечения с метрическими!).

Сформулируем аналитическое условие компланарности трех векторов A, B, C . Переходя на индикатрису и полагая, что соответствующие единичные векторы a, b, c лежат на одной и той же экстремали, имеем систему соотношений:

$$b_1 = a_1 e^{q_1 s_1}; \quad b_2 = a_2 e^{q_2 s_1}; \quad c_1 = a_1 e^{q_1 s_2}; \quad c_2 = a_2 e^{q_2 s_2},$$

где мы положили, что значению $s = 0$ соответствует положение конца вектора a , значению $s = s_1$ соответствует положение конца вектора b и значению $s = s_2$ соответствует положение конца вектора c . Исключая из этой системы параметры геодезической q_1, q_2, s_1, s_2 приходим к условию метрической компланарности векторов A, B, C в виде:

$$\frac{\ln(b_1/a_1)}{\ln(c_1/a_1)} = \frac{\ln(b_2/a_2)}{\ln(c_2/a_2)}. \quad (35)$$

Переходя от единичных векторов a, b, c к исходным A, B, C , это соотношение можно записать в более явном виде:

$$\frac{\ln\left(\frac{B_1^{2/3}/(B_2 B_3)^{1/3}}{A_1^{2/3}/(A_2 A_3)^{1/3}}\right)}{\ln\left(\frac{C_1^{2/3}/(C_2 C_3)^{1/3}}{A_1^{2/3}/(A_2 A_3)^{1/3}}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{B_2^{2/3}/(B_1 B_3)^{1/3}}{A_2^{2/3}/(A_1 A_3)^{1/3}}\right)}{\ln\left(\frac{C_2^{2/3}/(C_1 C_3)^{1/3}}{A_2^{2/3}/(A_1 A_3)^{1/3}}\right)} \quad (36)$$

Выделенность третьей координаты векторов в этом выражении, конечно же, случайна и связана с тем, что координатная карта для описания индикатрисы $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$ и геодезических на ней была связана с плоскостью $\{X_1, X_2\}$. Описание той же метрической плоскости в других картах дополнило бы соотношение (36) еще одним равенством, которое полностью восстанавливает симметрию координат и векторов. Полное условие метрической компланарности имеет вид:

$$\frac{\ln\left(\frac{B_1^{2/3}/(B_2 B_3)^{1/3}}{A_1^{2/3}/(A_2 A_3)^{1/3}}\right)}{\ln\left(\frac{C_1^{2/3}/(C_2 C_3)^{1/3}}{A_1^{2/3}/(A_2 A_3)^{1/3}}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{B_2^{2/3}/(B_1 B_3)^{1/3}}{A_2^{2/3}/(A_1 A_3)^{1/3}}\right)}{\ln\left(\frac{C_2^{2/3}/(C_1 C_3)^{1/3}}{A_2^{2/3}/(A_1 A_3)^{1/3}}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{B_3^{2/3}/(B_1 B_2)^{1/3}}{A_3^{2/3}/(A_1 A_2)^{1/3}}\right)}{\ln\left(\frac{C_3^{2/3}/(C_1 C_2)^{1/3}}{A_3^{2/3}/(A_1 A_2)^{1/3}}\right)} \quad (37)$$

и в такой форме оно, очевидно, аналогично евклидову условию компланарности (18). Чтобы показать неслучайность этой аналогии, убедимся, что существует и финслеров аналог более компактного условия (19). Для этого определим отображение $\flat: \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3^b$, действующее по правилу:

$$A = \{A_1, A_2, A_3\} \mapsto A^b = \{\ln(A_1^{2/3}/(A_2 A_3)^{1/3}), \ln(A_2^{2/3}/(A_1 A_3)^{1/3}), \ln(A_3^{2/3}/(A_1 A_2)^{1/3})\}. \quad (38)$$

Назовем это отображение *би-проекцией* \mathcal{H}_3 , пространство \mathcal{H}_3^b – *би-пространством* над \mathcal{H}_3 , а элемент A^b – *бинглом* элемента A . Отметим, что би-пространство \mathcal{H}_3^b – 2-мерно, ввиду тождественного выполнения соотношения:

$$\text{Tr } A^b \equiv A_1^b + A_2^b + A_3^b = 0. \quad (39)$$

Отметим также, что би-проекция нелинейна: $(A + B)^b \neq A^b + B^b$.

Нетрудно проверить, что первое равенство в соотношении (37) имеет вид (12)-компоненты более компактного соотношения:

$$(A^b - B^b) \wedge (A^b - C^b) = 0, \quad (40)$$

а второе равенство имеет смысл (13)-компоненты этого соотношения. Соответственно (23)-компонента этого соотношения получится, если мы рассмотрим равенство первой и третьей дроби в (37). В евклидовом и общем аффинном пространстве соотношение вида (40) означает в точности принадлежность точек с радиус-векторами A^b, B^b, C^b одной и той же аффинной прямой (в 3-мерном случае \wedge можно понимать как векторное произведение \times).

Таким образом, мы приходим к двум важным заключениям:

- 1) евклидово условие (19) компланарности векторов, при котором выполняется условие аддитивности, имеет финслерово-гиперболический аналог в виде условия (40) коллинеарности бинглов $A^b - B^b$ и $B^b - C^b$ или коллинеарности точек A^b, B^b, C^b в \mathcal{H}_3^b ;
- 2) всякой плоскости вращения в \mathcal{H}_3 соответствует некоторая аффинная прямая в \mathcal{H}_3^b и наоборот: всякой аффинной прямой в \mathcal{H}_3^b соответствует плоскость вращения в \mathcal{H}_3 .

Отметим, что полученный результат подтверждает и уточняет правильность гипотезы "нелинейного условия компланарности", высказанной ранее в [3]. Рисунок 7 наглядно иллюстрирует отличие плоскости вращения от аффинной плоскости в \mathcal{H}_3 .

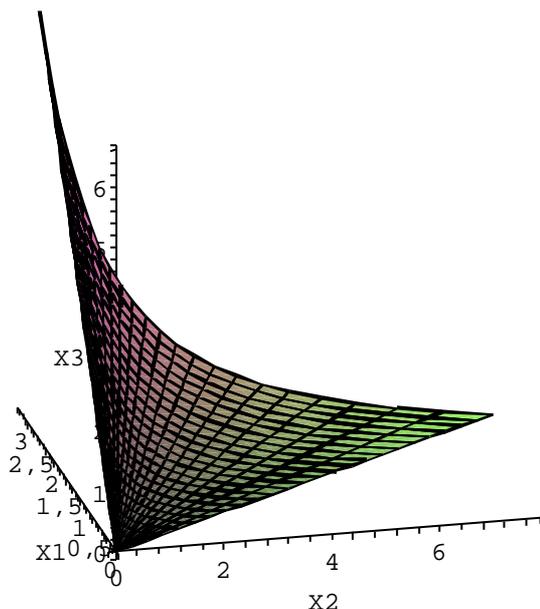


Рис. 7. Кусок метрической плоскости вращения

8 Геометрические свойства пространства \mathcal{H}_3^b

Отображение би-проекции имеет более фундаментальный характер, чем просто средство для установления формальной аналогии условий аффинной и метрической компланарности. Действительно, в терминах векторов пространства \mathcal{H}_3^b выражение (33) для бингла можно переписать в следующем неожиданно простом виде:

$$\phi[A, B] = |A^b - B^b|, \tag{41}$$

где норма в пространстве \mathcal{H}_3^b вычисляется по формуле (4), в предположении, что в этом пространстве определена метрика Бервальда-Моора вида (1). Эта формула и ее следствия имеют глубокий геометрический смысл.

Прежде, чем перейти к их обсуждению, остановимся более подробно на геометрических аспектах пространства \mathcal{H}_3^b и отображения би-проекции, образом которой оно является. Как уже отмечалось выше отображение $b: \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3^b$ переводит 3-мерное линейное пространство \mathcal{H}_3 в 2-мерное многообразие \mathcal{H}_3^b , которое на самом деле является 2-мерным линейным пространством. Действительно, основное свойство его точек – свойство (39) равенства нулю следов – остается инвариантным относительно образования линейных комбинаций:

$$\text{Tr}(\lambda A^b + \mu B^b) = 0, \quad \text{если} \quad \text{Tr}A^b = \text{Tr}B^b = 0.$$

Это и означает, что \mathcal{H}_3^b является линейным пространством, причем $\dim \mathcal{H}_3^b = 2$. Это пространство можно наглядно представлять себе вложенным в 3-мерное линейное пространство $\Omega\mathcal{H}_3$, устроенное точно также, как и исходное \mathcal{H}_3 и имеющее согласно (41) стандартную метрику БМ. Такое вложение в $\Omega\mathcal{H}_3$ изображается плоскостью, проходящей через начало и ортогональной в (евклидовом смысле) вектору $I = \{1, 1, 1\}$ рис. 8). Уравнение этой плоскости – равенство нулю суммы координат.

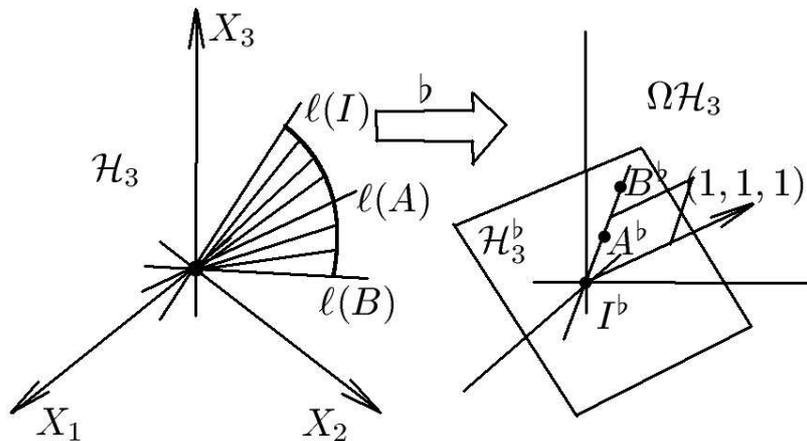


Рис. 8: Вложение \mathcal{H}_3^b в $\Omega\mathcal{H}_3$.

Таким образом, отображение би-проекции каждый из векторов \mathcal{H}_3 переводит в некоторый вектор на плоскости $\mathcal{H}_3^b \subset \Omega\mathcal{H}_3$. Отметим, что отображение би-проекции представляет собой интересный геометрический пример нелинейного отображения линейных пространств. Ввиду нелинейности к этому отображению неприменимо большинство стандартных теорем о морфизмах линейных пространств.

Как и положено для всякой проекции, би-проекция сюръективна³ как отображение $\mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3^b$ (но не сюръективна как отображение $\mathcal{H}_3 \rightarrow \Omega\mathcal{H}_3$). Найдем A^b -слой би-проекции, т.е. множество элементов $X \in \mathcal{H}_3$, для которых $X^b = A^b$. Для этого отметим, что любые два вектора из \mathcal{H}_3 , отличающиеся лишь модулями, би-проекция переводит в один и тот же элемент \mathcal{H}_3^b . Назовем подмножества \mathcal{H}_3 вида $\cup_{\lambda \in R} \lambda A \equiv \ell(A)$ лучами, с направлением A . Таким образом, любые две точки на луче би-проекция "склеивает" в одну точку на плоскости \mathcal{H}_3^b . Поскольку каждый луч в \mathcal{H}_3 однозначно задается единичным вектором направления: $\ell(A) = \ell(a)$, то конструкцию лучей можно перенести на единичную сферу, у которой диаметрально противоположные точки a и $-a$ отождествлены. Такую сферу будем называть *проективной единичной сферой БМ* и будем обозначать ее $PS_{\text{БМ}}^2$. Проективная сфера содержит 4 несвязных компоненты и

³Напомним, что сюръекция – это отображение, при котором у каждого элемента в множестве образов есть прообраз.

получается из сферы $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$ отождествлением центрально-симметричных точек. Для всякого элемента на проективной сфере с координатами $\{a_1, a_2, 1/(a_1 a_2)\}$ общие формулы би-проекции (38) принимают вид:

$$a^b = \{\ln a_1, \ln a_2, -\ln(a_1 a_2)\},$$

из которого следует, что на каждой из компонент $P\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$ би-проекция действует биективно. Это означает, что *слоями би-проекции являются в точности лучи пространства \mathcal{H}_3* .

Отметим, что элементы $\Omega\mathcal{H}_3$, не лежащие в \mathcal{H}_3^b не имеют прообразов в \mathcal{H}_3 и не могут быть истолкованы как бинглы. Отметим так же, что "ядром" би-проекции является луч $\ell(I)$, где $I = \{1, 1, 1\}$, поскольку $I^b = 0$ и если $X^b = 0$, то $X = I$.

Перейдем к симметриям \mathcal{H}_3^b . Поскольку \mathcal{H}_3^b является линейным пространством, то трансляции $\mathcal{T}\mathcal{H}_3^b$ и умножения на вещественные числа $\mathcal{D}\mathcal{H}_3^b$ оставляют пространство бинглов инвариантным. Геометрически эти преобразования описывают скольжения плоскости \mathcal{H}_3^b вдоль себя в $\Omega\mathcal{H}_3$ и ее однородные растяжения. Рассмотрим теперь нелинейные преобразования $\mathcal{N}\mathcal{H}_3^b$, которые переводят \mathcal{H}_3^b в себя. Эти преобразования описываются следующими формулами:

$$A^b \rightarrow A_\lambda^b = \{\lambda_1 A_1^b, \lambda_2 A_2^b, \lambda_3 A_3^b\}, \quad (42)$$

где вектор преобразования $\lambda \in \Omega\mathcal{H}_3$ и лежит в плоскости, которая в евклидовом смысле ортогональна A^b . Действительно, евклидова ортогональность векторов A^b и λ эквивалентна условию: $\text{Tr} A_\lambda^b = \lambda_1 A_1^b + \lambda_2 A_2^b + \lambda_3 A_3^b = 0$. Это означает, что преобразованный вектор A_λ^b является бинглом. Поскольку преобразование зависит от вектора, то оно является нелинейным. Отметим, что элементы преобразования являются вообще говоря векторами из $\Omega\mathcal{H}_3$, т.е. векторы этого пространства можно рассматривать как элементы множества внешних автоморфизмов пространства бинглов. Это множество содержит единицу $I = \{1, 1, 1\}$ (этот вектор ортогонален в евклидовом смысле всем векторам из \mathcal{H}_3^b поэтому применим ко всем векторам там и каждый вектор переводит в себя); для случая, когда все $\lambda_i \neq 0$, преобразование обратимо: $(A_\lambda^b)_{\lambda^{-1}} = A^b$, где $\lambda^{-1} = \{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}\}$ и композиция преобразований при условии $A_\lambda^b \perp \sigma$ имеет вид:

$$(A_\lambda^b)_\sigma = A_{\lambda\sigma}^b,$$

где $\lambda\sigma = \{\lambda_1\sigma_1, \lambda_2\sigma_2, \lambda_3\sigma_3\}$. Можно сказать, что преобразования из $\mathcal{N}\mathcal{H}_3^b$ образуют частичную алгебру, являющуюся специальной частичной подалгеброй алгебры поличисел P_3 .

Формула (41) означает, что в пространстве \mathcal{H}_3^b определена метрика БМ. Кроме отмеченных выше трансляций, ее изометрии описываются гиперболическими вращениями \mathcal{D}_2^b , действующие по правилу (42), в котором вместо ограничения, связанного с евклидовой ортогональностью, наложено условие: $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ – принадлежности конца вектора λ единичной сфере $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$ в $\Omega\mathcal{H}_3^b$. Пересечение $\mathcal{N}\mathcal{H}_3^b \cap \mathcal{D}_2^b \equiv \mathcal{N}\mathcal{D}^b$ образует однопараметрическое семейство нелинейных изометрий \mathcal{H}_3^b . Геометрически векторы преобразований $\lambda \in \mathcal{N}\mathcal{D}^b$ своими концами упираются в гиперболу, являющуюся пересечением единичной сферы $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$ и плоскости, ортогональной вектору A^b , на который это преобразование действует.

9 Дальнейшие свойства бинглов

Опираясь на результаты предыдущего раздела продолжим обсуждение важнейших свойств бинглов. Для того, чтобы отличать бингл $\phi[A, B]$ между векторами и бинглы как элементы пространства \mathcal{H}_3^b , будем называть бинглы вида $\phi[A, B]$ *взаимными бинглами*.

1. Формула (41) означает, что пространство \mathcal{H}_3^b представляет собой метрическое пространство, метрика которого нетривиальным образом наследуется из исходного \mathcal{H}_3 при операции би-проекции. При этом эта метрика по форме оказывается метрикой БМ.
2. Само пространство \mathcal{H}_3^b состоит из объектов (точек) новой геометрической природы: согласно формуле (41) *расстояние между двумя точками этого пространства имеет смысл угла между их векторными прообразами в \mathcal{H}_3* . Двойственность подобного рода в рамках квадратичных геометрий обсуждалась П.К.Рашевским в [6]. Замечательным фактом, обнаружившемся в геометрии поличисел, является *совпадение метрик в пространстве векторов и углов между ними*.
3. Отметим, что би-проекция выходит за рамки конформных и даже аналитических (в поличисловом смысле) отображений.
4. Нетрудно видеть, что элементы пространства \mathcal{H}_3^b с точки зрения алгебры поличисел представляют собой ни что иное, как экспоненциальные углы поличисла:

$$A_1^b = \chi_1; \quad A_2^b = \chi_2; \quad A_3^b = \chi_3,$$

где χ_i – экспоненциальные углы (10). При этом формулу (41) можно переписать в терминах экспоненциальных углов следующим образом:

$$\phi[A, B] = [(\chi_1^A - \chi_1^B)(\chi_2^A - \chi_2^B)(\chi_3^A - \chi_3^B)]^{1/3}. \quad (43)$$

5. Отображение би-проекции реализует изоморфизм общей группы дилатаций \mathcal{D}_2 в \mathcal{H}_3 в группу трансляций \mathcal{T}_2^b в \mathcal{H}_3^b :

$$A = \{A_1, A_2, A_3\} \mapsto \mathcal{D}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} A = \{\alpha_1 A_1, \alpha_2 A_2, \alpha_3 A_3\} \xrightarrow{b, b^{-1}} \quad (44)$$

$$A^b = \{A_1^b, A_2^b, A_3^b\} \mapsto \mathcal{T}_{\tau_1, \tau_2, \tau_3} A^b = \{A_1^b + \tau_1, A_2^b + \tau_2, A_3^b + \tau_3\},$$

где

$$\tau_1 = \frac{2}{3} \ln \alpha_1 - \frac{1}{3} \ln \alpha_2 - \frac{1}{3} \ln \alpha_3; \quad \tau_2 = \frac{2}{3} \ln \alpha_2 - \frac{1}{3} \ln \alpha_1 - \frac{1}{3} \ln \alpha_3; \quad \tau_3 = \frac{2}{3} \ln \alpha_3 - \frac{1}{3} \ln \alpha_1 - \frac{1}{3} \ln \alpha_2.$$

Таким образом, *трансляционная инвариантность взаимных бинглов является b-образом их конформной инвариантности*.

6. Рассмотрим взаимный бингл вида $\phi[I, A]$. Согласно (41) он равен $|A^b| \equiv (\chi_1^A \chi_2^A \chi_3^A)^{1/3}$, где χ_i^A – экспоненциальные углы поличисла A . Такой бингл измеряет отклонение направления A от направления единицы, геометрически совпадающей с пространственной биссектрисой первого координатного октанта. Аналогичные конструкции вида $\phi[I_{(j)} A]$, где $I_{(j)}$ – пространственная биссектриса j -ого координатного октанта, позволяют продолжить определение взаимных бинглов между векторами в других октантах. Отметим, что взаимный бингл между векторами, лежащими в различных октантах, будет с необходимостью комплексным.
7. На рисунке 9 представлены наглядные диаграммы взаимного бингла $\phi[I, A]$ в положительном октанте.

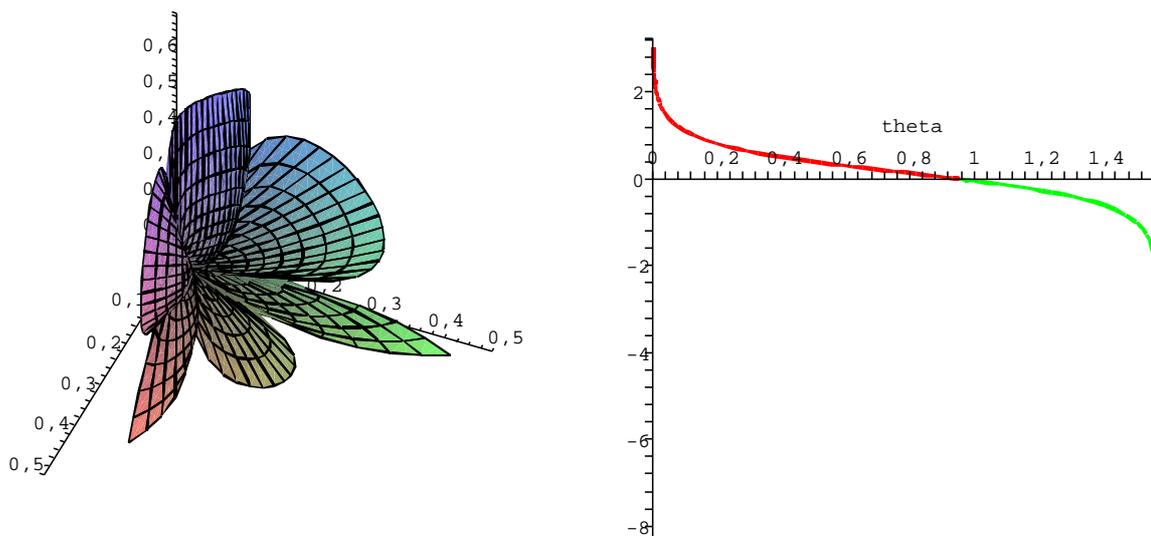


Рис. 9. На левом рисунке представлена пространственная евклидова карта взаимного бингла $\phi[I, A]$: каждому направлению A в \mathcal{H}_3 поверхность ставит в соответствие значение модуля бингла $\phi[I, A]$. Численно он равен евклидову расстоянию от начала до точки пересечения луча $\ell(A)$ с поверхностью. На правом рисунке построен график зависимости взаимного бингла $\phi[I, A]$, где вектор $A = (\alpha \sin \theta, \alpha \sin \theta, \alpha \cos \theta)$, а θ – стандартный сферический угол, как функция θ .

10 Второй (относительный) бингл

Определение второго независимого бингла можно сформулировать по аналогии с азимутальным углом φ стандартной угловой системы координат на евклидовой сфере. При этом первый бингл, очевидно, является гиперболическим аналогом широтного угла θ . Как и в евклидовом случае, второй бингл требует задания (произвольного!) начального направления отсчета. Чтобы отличать этот бингл от элементов \mathcal{H}_3^b и взаимного бингла, будем называть его *относительным бинглом*.

В качестве первого шага определения второго бингла приведем пару произвольных единичных векторов a и b на единичной сфере к их каноническому положению так, что $a = \{1, 1, 1\}$, $b = \{b_1/a_1, b_2/a_2, b_3/a_3\}$ и найдем точку пересечения геодезической дуги, соединяющей a и b с геодезической единичной окружностью с центром в a . Соответствующая система параметрических уравнений для геодезической дуги:

$$X_1 = e^{q_1 s}; \quad X_2 = e^{q_2 s},$$

где

$$q_1 = \frac{1}{s_*} \ln(b_1/a_1), \quad s_* = \phi[a, b], \quad q_1 q_2 (q_1 + q_2) = 1,$$

а для единичной окружности:

$$Y_1 = e^{\bar{q}_1}; \quad Y_2 = e^{\bar{q}_2}, \quad \bar{q}_1 \bar{q}_2 (\bar{q}_1 + \bar{q}_2) = 1. \tag{45}$$

Исключая параметр s , приходим к уравнению: $q_1 \bar{q}_2 - q_2 \bar{q}_1 = 0$, которое имеет вид первого уравнения (29). Его решения мы уже знаем: $q_1 = \bar{q}_1$, $q_2 = \bar{q}_2$.

В качестве второго шага заметим, что ввиду шестисвязности единичной окружности, следует различать случаи попадания полученной выше точки пересечения геодезической дуги и единичной окружности на ее различные компоненты. Как уже отмечалось выше в разделе (5), компоненты окружности, содержащие направление $a - b$ можно различать в выбранной нами параметризации знаками параметров:

$$q_1[a, b] = \frac{1}{s_*}(B_1^b - A_1^b) = \frac{B_1^b - A_1^b}{|A^b - B^b|}; \quad q_2[a, b] = \frac{1}{s_*}(B_2^b - A_2^b) = \frac{B_2^b - A_2^b}{|A^b - B^b|} \quad (46)$$

(эти выражения являются гиперболическими аналогами направляющих косинусов векторов в евклидовом пространстве) и знаком самого бингла

$$s_* = |A^b - B^b|.$$

Для определенности договоримся, что в случае $q_1 > 0, q_2 > 0$ и $s_* \leq 0$ мы используем параметризацию в плоскости $(X_1 X_2)$ (третья положительная и отрицательная компонента 3^\pm); в случае $q_1 < 0, q_2 > 0$ и $s_* \leq 0$ мы используем параметризацию в плоскости $(X_1 X_3)$ (вторая положительная и отрицательная компонента 2^\pm); наконец, в случае $q_1 > 0, q_2 < 0$ и $s_* \leq 0$ мы используем параметризацию в плоскости $(X_2 X_3)$ (первая положительная и отрицательная компонента 1^\pm). Таким образом, в первом случае параметризация дуги единичной окружности будет иметь вид:

$$X_1 = e^{\pm q_1}; \quad X_2 = e^{\pm q_2}; \quad q_1 q_2 (q_1 + q_2) = 1,$$

во втором:

$$X_1 = e^{\pm q_1}; \quad X_3 = e^{\pm q_3}; \quad q_1 q_3 (q_1 + q_3) = 1,$$

в третьем

$$X_2 = e^{\pm q_2}; \quad X_3 = e^{\pm q_3}; \quad q_2 q_3 (q_2 + q_3) = 1.$$

Единое для всех компонент направление обхода единичной окружности (которую наглядно можно представлять как односвязную кривую в компактифицированном \mathcal{H}_3 (второй график на рис. 5)), устанавливается следующими правилами изменения параметров (начинаем с третьей положительной компоненты в направлении от X_2 к X_1):

$$3^+ : q_1 \in (0; \infty) \rightarrow 1^- : q_2 \in (0; \infty) \rightarrow 2^+ : q_3 \in (0; \infty) \rightarrow$$

$$3^- : q_1 \in (0; \infty) \rightarrow 1^+ : q_2 \in (0; \infty) \rightarrow 2^- : q_3 \in (0; \infty).$$

Теперь мы можем определить второй бингл $\psi[a, b]$ между a и b как длину дуги единичной окружности, заключенной между некоторой выделенной точкой на этой окружности и найденной выше точкой ее пересечения с геодезической дугой, соединяющей a и b . В зависимости от того, в какую из компонент попадает эта точка пересечения, мы будем иметь отдельный относительный бингл. По этой причине относительный бингл $\psi[a, b]$ можно снабдить дополнительными индексами: $\psi_j^\pm[a, b]$, указывающими к какой из компонент он относится. Например, запись $\psi_1^+[a, b]$ означает, что бингл относится к первой положительной компоненте единичной окружности и т. д. В качестве выделенной точки начала отсчета в каждой из компонент мы будем выбирать "симметричную точку": в первой компоненте ей соответствует значения $q_2 = q_3 = 2^{-1/3}$, во второй: $q_1 = q_3 = 2^{-1/3}$, в третьей $q_1 = q_2 = 2^{-1/3}$. Таким образом, формулы для бинглов на различных компонентах единичной окружности принимают следующий вид:

$$\psi_1[a, b] = \int_{2^{-1/3}}^{q_2[a, b]} \frac{ds}{dq_2} dq_2; \quad \psi_2[a, b] = \int_{2^{-1/3}}^{q_3[a, b]} \frac{ds}{dq_3} dq_3; \quad \psi_3[a, b] = \int_{2^{-1/3}}^{q_1[a, b]} \frac{ds}{dq_1} dq_1, \quad (47)$$

где интегрирования выполняется по дугам соответствующих компонент.

В силу симметрии всех компонент достаточно установить явный вид интегралов для одной из них. Рассмотрим подробно интеграл для третьей компоненты. Подставляя в формулу (22) параметрическую зависимость вида (45), получаем после элементарных преобразований:

$$\psi_3[a, b] = \int_{2^{-1/3}}^{q_1[a, b]} (\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)^{1/3} dq_1,$$

где точка обозначает дифференцирование параметра q_2 по q_1 с учетом их функциональной связи посредством последнего уравнения в (45). Используя дифференциальное следствие этого уравнения (45):

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{q_2(q_2 + 2q_1)}{q_1(q_1 + 2q_2)} \tag{48}$$

и его явное решение для основной ветви:

$$q_2 = \frac{\sqrt{q_1^4 + 4q_1} - q_1^2}{2q_1},$$

приходим после несложных преобразований к искомому выражению для длины дуги третьей компоненты единичной окружности: $\psi_3[a, b] = F(q_1[a, b])$, где функция $F(\xi)$ дается следующим интегралом:

$$F(\xi) \equiv -\frac{1}{2} \int_{2^{-1/3}}^{\xi} \left(\frac{(x^2 - \sqrt{x(x^3 + 4)})(3x^2 + \sqrt{x(x^3 + 4)})\sqrt{x(x^3 + 4)} + x^3 - 2}{x^4(x^3 + 4)} \right)^{1/3} dx. \tag{49}$$

Знак "минус" перед интегралом поставлен для того, чтобы при обходе единичной окружности в выбранном нами положительном направлении (на втором рис. 5 ему соответствует обход "замкнутой кривой" по часовой стрелке), бингл возрастал. Правильность такого выбора знака объясняется видом зависимости куба подинтегральной функции в выражении (49) – она представлена на рис. 10.

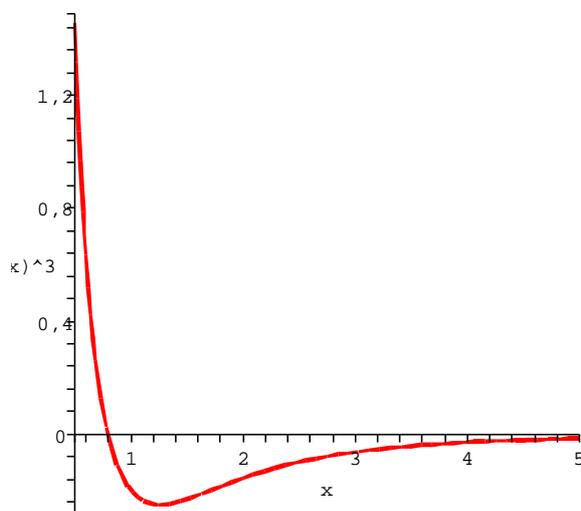


Рис. 10. Вид функции F^3 . Эта функция меняет знак в точке $x = 2^{-1/3}$.

Запишем окончательные выражения для второго бингла с учетом формул (46) и (47):

$$\psi_1[A, B] = F \left[\frac{B_1^b - A_1^b}{|A^b - B^b|} \right]; \quad \psi_2[A, B] = F \left[\frac{B_2^b - A_2^b}{|A^b - B^b|} \right]; \quad \psi_3[A, B] = F \left[\frac{B_3^b - A_3^b}{|A^b - B^b|} \right], \quad (50)$$

где функция F определяется формулой (49). Функция F , которая не выражается через элементарные функции, обеспечивает аддитивность определенного таким образом бингла (см. [7]).

11 Свойства второго бингла

Ввиду отмеченной выше аналогии аргументов функции F в формулах (50) с направляющими косинусами векторов в евклидовом пространстве, функцию F следует считать финслерово-гиперболическим аналогом функции \arccos , а обратную к ней $F^{-1} \equiv \text{cfh}$ – финслерово-гиперболическим аналогом косинуса. Таким образом, имеем⁴:

$$\frac{B_1^b - A_1^b}{|A^b - B^b|} \equiv -\text{cfh}(\psi_1[A, B]); \quad \frac{B_2^b - A_2^b}{|A^b - B^b|} \equiv -\text{cfh}(\psi_2[A, B]); \quad \frac{B_3^b - A_3^b}{|A^b - B^b|} \equiv -\text{cfh}(\psi_3[A, B]). \quad (51)$$

При этом имеет место *основное тождество финслеровой тригонометрии*:

$$\text{cfh } \psi_1 \text{cfh } \psi_2 \text{cfh } \psi_3 = 1. \quad (52)$$

Это соотношение имеет смысл аналогичный евклидову соотношению нормировки направляющих косинусов:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

где α, β, γ – углы между вектором и осями декартовой системы координат. Сравнивая тождество (52) и условие (14) на параметры группы \mathcal{D}_2 , приходим к выводу, что параметрам этой группы можно придать смысл косинусов углов, параметризующих преобразования из группы \mathcal{D}_2 . Действительно, как это видно из формулы (51) каждому вектору $A \in \mathcal{H}_3$, соответствует преобразование $D_{\text{cfh}\psi_1, \text{cfh}\psi_2, \text{cfh}\psi_3} \in \mathcal{D}_2$, где ψ – относительный бингл между A и $I = \{1, 1, 1\}$. Таким образом, функции cfh_i дают естественную параметризацию гиперболических вращений, аналогичную углам Эйлера в евклидовой геометрии.

Можно ввести финслерово-гиперболические аналоги синусов, тангенсов и котангенсов по формулам:

$$\begin{aligned} \text{sfn } \psi_1 &= \text{cfh } \psi_2 \text{cfh } \psi_3; & \text{sfn } \psi_2 &= \text{cfh } \psi_1 \text{cfh } \psi_3; & \text{sfn } \psi_3 &= \text{cfh } \psi_1 \text{cfh } \psi_2; \\ \text{tfn } \psi_i &\equiv \frac{\text{sfn } \psi_i}{\text{cfh } \psi_i}; & \text{ctfn } \psi_i &= 1/\text{tfn } \psi_i. \end{aligned}$$

Имеют место очевидные тождества финслеровой тригонометрии, аналогичные соответствующим евклидовым:

$$\text{sfn } \psi_i \text{cfh } \psi_i = 1; \quad \text{cfh}^2 \psi_i \text{tfn } \psi_i = 1; \quad \text{sfn}^2 \psi_i \text{ctfn } \psi_i = 1$$

(по i нет суммирования) и тождества, не имеющие аналогов в евклидовой геометрии:

$$\text{sfn } \psi_1 \text{sfn } \psi_2 \text{sfn } \psi_3 = 1; \quad \text{tfn } \psi_1 \text{tfn } \psi_2 \text{tfn } \psi_3 = 1; \quad \text{ctfn } \psi_1 \text{ctfn } \psi_2 \text{ctfn } \psi_3 = 1.$$

Отметим, что относительные бинглы, как и взаимные, конформно инвариантны, поскольку они выражаются через разности координат в \mathcal{H}_3^b .

⁴ Знак минус в определении функции cfh вводится для удобства.

12 Связь относительных бинглов с экспоненциальными углами. Высшие бинглы

Для выявления связи экспоненциальных углов и относительных бинглов нужно осуществить би-проекцию формулы (9). С учетом формул (41) и (51) приходим к системе равенств:

$$\text{cfh}\psi_1 = \frac{\chi_1^{2/3}}{(\chi_2\chi_3)^{1/3}} = e^{A_1^{2b}}; \quad \text{cfh}\psi_2 = \frac{\chi_2^{2/3}}{(\chi_1\chi_3)^{1/3}} = e^{A_2^{2b}}; \quad \text{cfh}\psi_3 = \frac{\chi_3^{2/3}}{(\chi_1\chi_2)^{1/3}} = e^{A_3^{2b}}, \quad (53)$$

определяющих искомую связь относительных бинглов и экспоненциальных углов. Здесь

$$A^{2b} \equiv (A^b)^b$$

– элемент пространства \mathcal{H}_3^{2b} бинглов второго порядка.

Таким образом, система относительных бинглов $\{\psi_i\}$, из которых независимых будет только два ввиду соотношений:

$$\text{Tr } A^{2b} = \sum_{i=1}^3 \ln \text{cfh } \psi_i = 0,$$

характеризует ориентацию самих бинглов как элементов \mathcal{H}_3^b друг относительно друга (углы в пространстве углов). Эта интерпретация подтверждается следующими эквивалентными формами представления поличисла:

$$A = |A| e^{\phi[A](\text{cfh } \psi_1 e_1 + \text{cfh } \psi_2 e_2 + \text{cfh } \psi_3 e_3)} \quad (54)$$

– экспоненциально-тригонометрической и

$$A = |A| e^{\phi[A]e^{A_1^{2b}}e_1 + A_2^{2b}}e_2 + A_3^{2b}}e_3 \quad (55)$$

– дважды экспоненциальной. Справедливость этих формул вытекает из (53) и проверяется непосредственно.

13 Связь бинглов с метрическими инвариантами

Запишем выражения для взаимных и относительных бинглов (33) и (50) в терминах отношений компонент: $\xi_i = B_i/A_i$:

$$\phi[A, B] = [\ln(\xi_1^{2/3}/(\xi_2\xi_3)^{1/3}) \ln(\xi_2^{2/3}/(\xi_1\xi_3)^{1/3}) \ln(\xi_3^{2/3}/(\xi_1\xi_2)^{1/3})]^{1/3}; \quad (56)$$

$$\text{cfh } \psi_1 = \left[\frac{\ln(\xi_1^{2/3}/(\xi_2\xi_3)^{1/3})}{\phi[A, B]} \right]; \quad \text{cfh } \psi_2 = \left[\frac{\ln(\xi_2^{2/3}/(\xi_1\xi_3)^{1/3})}{\phi[A, B]} \right]; \quad \text{cfh } \psi_3 = \left[\frac{\ln(\xi_3^{2/3}/(\xi_1\xi_2)^{1/3})}{\phi[A, B]} \right].$$

Для выражения этих бинглов через конформно-инвариантные метрические инварианты:

$$I_1 \equiv \frac{1}{2} \frac{(A, A, B)}{|A|^2|B|}; \quad I_2 \equiv \frac{1}{2} \frac{(A, B, B)}{|A||B|^2}; \quad I_3 \equiv \frac{|A|}{|B|} = \frac{(A, A, A)}{(B, B, B)}$$

запишем последние также в терминах безразмерных переменных ξ_i :

$$I_1 = \frac{\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3}{(\xi_1\xi_2\xi_3)^{2/3}}; \quad I_2 = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{(\xi_1\xi_2\xi_3)^{1/3}}; \quad I_3 = \xi_1\xi_2\xi_3.$$

Последние соотношения можно написать в эквивалентном виде:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = I_2 I_3^{1/3}; \quad \xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_3 + \xi_1 \xi_3 = I_1 I_3^{2/3}; \quad \xi_1 \xi_2 \xi_3 = I_3. \quad (57)$$

Решая систему уравнений (57) относительно ξ_1, ξ_2, ξ_3 и подставляя решение в (56), можно получить искомые выражения бинглов через метрические инварианты. Система уравнений (57) имеет простую алгебраическую интерпретацию. В силу известного обобщения теоремы Виета на кубические уравнения можно утверждать, что три решения системы (57) – это три корня кубического уравнения:

$$\xi^3 - I_2 I_3^{1/3} \xi^2 + I_1 I_3^{2/3} \xi - I_3 = 0.$$

14 Тринглы

14.1 Объемы в квадратичных геометриях

Напомним соображения, на которых строятся определения объемов в квадратичных неевклидовых геометриях. В их основе лежит понятие *относительного скаляра*. Рассмотрим к примеру стандартную форму объема в евклидовом пространстве в декартовой системе координат:

$$\text{vol}_0 \equiv dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \quad (58)$$

Почему эта форма в таком виде не годится для вычисления объема в любой (скажем косоугольной или даже криволинейной) системе координат? Дело в том, что при общем преобразовании координат $x' = f(x)$ форма (58) преобразуется по закону:

$$\text{vol}'_0 = \Delta_f \text{vol}_0, \quad (59)$$

где Δ_f – якобиан преобразования $x' = f(x)$ (т. е. определитель матрицы J , составленной из частных производных новых координат по старым). С формальной алгебраической точки зрения закон преобразования (59) означает, что объект vol_0 является относительным скаляром с весом $+1$ (умножается на якобиан преобразования в первой степени). С геометрической точки зрения такой закон преобразования означает, что определение (58) не годится в качестве общего определения формы объема, поскольку такая форма должна быть скаляром веса нуль (допускается изменение знака, связанное с координатными преобразованиями, меняющими ориентацию исходной системы координат). Для того, чтобы прийти к общему определению формы объема, заметим, что закон преобразования метрики g при рассмотренных выше преобразованиях имеет матричный вид:

$$g' = (J^{-1})^T g J^{-1},$$

где J – якобиева матрица преобразования, откуда для детерминантов получаем:

$$\det g' = \frac{\det g}{\Delta_f^2}.$$

Последняя формула означает, что детерминант метрики является относительным скаляром веса -2 , а величина $\sqrt{\det g}$ является относительным скаляром веса -1 . Перемножая два относительных скаляра с противоположными весами, получаем искомый скаляр с нулевым весом:

$$\text{vol} \equiv \sqrt{\det g} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \quad (60)$$

Формула (60) определяет инвариантную форму объема в любой квадратичной геометрии в любой допустимой системе координат.

14.2 Формы площади и объема в \mathcal{H}_3

В неквадратичных пространствах вопрос о виде формы объемов требует прояснения. Из общих соображений, на которых строится понятие объема, форму объема в неквадратичных пространствах числа измерений n следует искать в виде:

$$\text{vol} = \mathbf{v} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \quad (61)$$

где \mathbf{v} – относительный скаляр веса -1 , построенный из финслеровой метрики. Для его явного построения необходимо привлечь общую теорию инвариантов и ковариантов полилинейных форм, которая в своей алгебраической части опирается на теорию многомерных матриц [8]. В настоящей статье у нас нет необходимости излагать общий подход. Мы ограничимся случаем симметричной кубичной формы с компонентами $(G_{\alpha\beta\gamma})$ в 2-мерном пространстве, которую можно представить парой квадратных матриц:

$$G = (H_1, H_2), \quad H_1 \equiv G_{1\alpha\beta}; \quad H_2 \equiv G_{2\alpha\beta}.$$

Можно показать ([8]), что величина:

$$\Delta \equiv \det \begin{pmatrix} \det(H_1, H_1) & \det(H_1, H_2) \\ \det(H_2, H_1) & \det(H_2, H_2) \end{pmatrix} \quad (62)$$

является относительным скаляром, ассоциированным с формой G , веса -6 . Здесь детерминант кубической матрицы в пространстве двух измерений определяется по формуле:

$$\det G = \det(H_1, H_2) = G_{111}G_{222} - G_{112}G_{221} + G_{122}G_{211} - G_{121}G_{212}$$

В частном случае, когда $G_{111} = G_{222} = 0$, формула (62) приводит к выражению (мы отбрасываем не существенный постоянный множитель):

$$\Delta = G_{112}^2 G_{221}^2 \quad (63)$$

Искомый относительный скаляр \mathbf{v} веса -1 в этом случае равен

$$\mathbf{v} = \Delta^{1/6} = (G_{112}G_{221})^{1/3}. \quad (64)$$

Аналогично, но несколько более громоздко можно строить относительные скаляры веса -1 и для квадратичных форм высших измерений.

14.3 Форма площади на индикатрисе и определение трингла

Для метрики (21) на индикатрисе с помощью формулы (64) легко построить инвариантную форму площади (форма 2-мерного объема):

$$\text{area}_{\mathcal{S}_{\text{ВМ}}^2} = \frac{dX_1 \wedge dX_2}{X_1 X_2}. \quad (65)$$

Определим трингл $\Sigma(A, B, C)$, построенный на тройке векторов A, B, C как площадь соответствующего геодезического треугольника Δabc на индикатрисе, т.е. как интеграл:

$$\Sigma(A, B, C) = \int_{\Delta abc} \frac{dX_1 \wedge dX_2}{X_1 X_2}. \quad (66)$$

Очевидно, что таким образом определенный трингл является аналогом евклидова телесного угла.

14.4 Вывод явной формулы для трингла

Поместим треугольник Δabc на индикатрисе таким образом, чтобы точка a имела координаты $\{1,1,1\}$. Координаты векторов b и c станут при этом равными:

$$b = \{b_1/a_1, b_2/a_2, a_1 a_2 / (b_1, b_2)\}; \quad c = \{c_1/a_1, c_2/a_2, a_1 a_2 / (c_1, c_2)\}.$$

Геодезические Γ_{ab} и Γ_{ac} , соединяющие a с b и a с c соответственно, параметризуются уравнениями:

$$\Gamma_{ab} : \{X_1 = e^{qs}, X_2 = e^{\bar{q}s}\}; \quad \Gamma_{ac} : \{Y_1 = e^{q's}, Y_2 = e^{\bar{q}'s}\}, \quad (67)$$

где по формулам (46):

$$q = \text{cfh}\psi_1[A, B]; \quad \bar{q} = \text{cfh}\psi_2[A, B]; \quad q' = \text{cfh}\psi_1[A, C]; \quad \bar{q}' = \text{cfh}\psi_2[A, C].$$

Систему параметров q и s можно рассматривать как систему координат на множестве точек треугольника Δabc . При этом, как только что установлено, координата q изменяется в интервале от $\text{cfh}\psi_1[A, B]$ до $\text{cfh}\psi_1[A,]$, а область изменения s лежит в интервале от нуля до $s(q)$, где функция $s(q)$ подлежит определению.

Для определения функции $s(q)$ запишем уравнение геодезической Γ_{bc} в параметризованном виде:

$$Z_1 = \frac{b_1}{a_1} e^{p\tau}; \quad Z_2 = \frac{b_2}{a_2} e^{\bar{p}\tau},$$

где

$$p = \text{cfh}\psi_1[B, C]; \quad \bar{p} = \text{cfh}\psi_2[B, C].$$

Далее, составим систему уравнений на точку пересечения геодезических Γ_{am} и Γ_{bc} , где m – некоторая точка на Γ_{bc} :

$$e^{qs} = \frac{b_1}{a_1} e^{p\tau}; \quad e^{\bar{q}s} = \frac{b_2}{a_2} e^{\bar{p}\tau}.$$

Простые выкладки, связанные с исключением τ , приводят к решению:

$$s(q) = \phi[A, B] \frac{\text{cfh}\psi_2[B, C] \text{cfh}\psi_1[A, B] - \text{cfh}\psi_1[B, C] \text{cfh}\psi_2[A, B]}{\text{cfh}\psi_2[B, C]q - \text{cfh}\psi_1[B, C]\bar{q}}. \quad (68)$$

Теперь для трингла $\Sigma(A, B, C)$ имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \Sigma(A, B, C) &= \int_{\Delta abc} \frac{dX_1 \wedge dX_2}{X_1 X_2} = \int_{\Delta abc} d \ln X_1 \wedge d \ln X_2 = \int_{\Delta abc} d(qs) \wedge d(\bar{q}s) = \\ &= \int_{\Delta abc} \left(s\bar{q} - sq \frac{d\bar{q}}{dq} \right) dq \wedge ds. \end{aligned}$$

Мы использовали представление (67) и стандартные свойства операции \wedge . Подставляя производную $d\bar{q}/dq$ из (48) с тривиальными заменами и производя элементарные выкладки под интегралом (с учетом соотношения $q\bar{q}(q + \bar{q}) = 1$), получаем:

$$\Sigma(A, B, C) = 3 \int_{\Delta abc} \frac{s}{q(q + 2\bar{q})} dq \wedge ds = \int_{\text{cfh}\psi_1[A, B]}^{\text{cfh}\psi_1[A, C]} \frac{dq}{q(q + 2\bar{q})} \int_0^{s(q)} s ds.$$

Вычисляя интеграл по s с учетом формулы (68) и свойств функции cfh получаем окончательно следующую формулу для трингла:

$$\Sigma(A, B, C) = \frac{3}{2} \phi^2[A, B] (\text{cfh } \psi_1[B, C] \text{cfh } \psi_1[A, B] - \text{cfh } \psi_2[B, C] \text{cfh } \psi_2[A, B])^2 \times \quad (69)$$

$$\int_{\text{cfh } \psi_1[A, B]}^{\text{cfh } \psi_1[A, C]} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 4x} \left(x/\text{cfh } \psi_1[B, C] - (\sqrt{x^4 + 4x} - x^2)/(2x \text{cfh } \psi_2[B, C]) \right)^2}.$$

Отметим, что выражение (69) симметрично относительно циклических перестановок векторов A, B, C , хотя эта симметрия оказалась замаскированной благодаря выбранной нами локальной системе координат с началом в точке A .

Формула (69) определяет конформно-инвариантный трингл, обладающий по своему определению свойством аддитивности в следующем смысле. Помимо векторов A, B, C , рассмотрим четвертый вектор D , обладающий одним из следующих свойств:

$$(A^b - C^b) \wedge (C^b - D^b) = 0 \quad \text{или} \quad (A^b - B^b) \wedge (B^b - D^b) = 0.$$

Эти свойства означают, что точки A, C, D или A, B, D лежат в одной плоскости вращения, а приведенные к единичной сфере соответствующие точки a, c, d или a, b, d лежат на одних экстремалях $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$. Для любой такой точки D имеет место равенство:

$$\Sigma(A, B, C) + \Sigma(B, C, D) = \Sigma(A, B, D) \quad \text{или} \quad \Sigma(A, B, C) + \Sigma(B, C, D) = \Sigma(A, C, D) \quad (70)$$

соответственно. Это равенство, по существу, выражает аддитивность площадей на единичной сфере $\mathcal{S}_{\text{BM}}^2$.

Литература

- [1] Д. Г. Павлов, *ГЧГФ* (2004) №1, с. 5–19
- [2] Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов, *ГЧГФ* (2007) №1 (7), 3–25
- [3] Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев, *ГЧГФ* 2 (10) (2008) 25–43
- [4] Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев, *ГЧГФ* 2 (10) (2008) 15–24
- [5] Ю. А. Рылов, *ГЧГФ* (2004) №2, с. 69–96
- [6] П. К. Рашевский, *Полиметрическая геометрия*
- [7] Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов, *ГЧГФ* (2007) №1 (7), с. 3–25
- [8] Н. П. Соколов, *Пространственные матрицы и их приложения*, Москва, ГИФМЛ, 1960

Polyangles and their symmetries in \mathcal{H}_3

D. G. Pavlov, S. S. Kokarev

*Research Institute of Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Friezino, Russia,
RSEC "Logos", Yaroslavl*

We construct bingles and tringles in 3D Berwald-Moor space as additive characteristics of pairs and triples of unit vectors – lengths and squares on unit sphere (indicatrix). Two kind of bingles (mutual and relative) can be determined analogously to spherical angles θ and φ respectively. We show that mutual bingle is, in fact, norm in space of exponential bingles (bi-space \mathcal{H}_3^b), which define exponential representation of polynumbers. It is turned out, that metric of bi-space is the same Berwald-Moor ones. Relative angles are connected with elements of second bi-space $(\mathcal{H}_3^b)^b$ and give possibility for two-fold exponential representation of polynumbers. Apparent formulae for relative bingles and tringles contain non-elementary integrals.

Key words: indicatrix, extremal, polyangle, bingle, tringle, Berwald-Moor metric, bi-projection, area form.

КОНФИГУРАТРИССА И РЕЗУЛЬТАНТ

Н. С. Перминов

Казанский государственный университет, Россия

nikolai-kazan@rambler.ru

Получено явное выражение для результата системы нелинейных алгебраических уравнений второй степени $\{\partial_1 S = 0, \dots, \partial_n S = 0\}$ задаваемых симметрическим полиномом S третьей степени от n переменных.

Ключевые слова: конфигуратриса, индикатриса, результат, финслеровы пространства.

1 Введение

В современной физике пользуются популярностью пространства с финслеровыми метрическими функциями [1] полиномиального типа. В частности, для пространств Бервальда-Моора и Минковского уравнения индикатрисс $L(\xi) = 1$ примут полиномиальную форму

$$L^4(\xi) = \xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4 = 1 \quad (1)$$

и

$$L^2(\xi) = \xi^1 \xi^2 + \xi^1 \xi^3 + \xi^1 \xi^4 + \xi^2 \xi^3 + \xi^2 \xi^4 + \xi^3 \xi^4 = 1 \quad (2)$$

соответственно. Интерес представляет также уравнение конфигуратрисы $\Phi(y) = 1$. Это запись соотношения $L(\xi) = 1$ через канонически сопряженные к координатам величины $y_i = \partial_i L$. Его можно представить как условие совместности системы уравнений

$$\begin{cases} L(\xi) = 1, \\ \frac{\partial}{\partial \xi^1} L(\xi) = y_1, \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial \xi^n} L(\xi) = y_n. \end{cases} \quad (3)$$

Как известно, система полиномиальных уравнений совместна тогда и только тогда, когда некоторое выражение, называемое *результантом* [2–4], обращается в ноль. Таким образом, когда $L^k(\xi) \equiv S(\xi)$ – полином от ξ , уравнение конфигуратрисы есть условие на результат

$$R \left\{ \begin{array}{c} S(\xi) - 1 \\ \frac{\partial}{\partial \xi^1} S(\xi) - ky_1 \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial \xi^n} S(\xi) - ky_n \end{array} \right\} = 0. \quad (4)$$

Возможность введения перенормируемого элемента объема в финслеровой геометрии связана с компактностью пространства, ограниченного индикатриссой $L(\xi) = 1$. Это зависит от наличия особых точек у поверхности, задаваемой уравнением $L(\xi) = 0$. Его можно определить как условие совместности системы $\{\partial_i L = 0\}$ или

$$R\{\partial_i S\} = 0, \quad (5)$$

если $L^k(\xi) = S(\xi)$ – полином. С учетом возможных приложений, важно находить простые и явные формулы для результатов в различных частных случаях. Мы рассмотрим случай, когда $S(\xi)$ – симметрический полином третьей степени от n переменных.

2 Вычисление результата

Любой симметрический полином степени 3 можно представить в виде

$$S(x_1, \dots, x_n) = A_1(s_1)^3 + A_2 s_1 s_2 + A_3 s_3, \quad (6)$$

где $\{s_1, \dots, s_n\}$ – элементарные симметрические полиномы,

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_i x_i, \\ s_2 &= \sum_{i < j} x_i x_j \\ &\dots \end{aligned} \quad (7)$$

$$s_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}. \quad (8)$$

В нашем случае

$$\frac{\partial}{\partial x_i} S = A_3 x_i^2 - (A_2 + A_3) x_i s_1 + (3A_1 + A_2) s_1^2 + (A_2 + A_3) s_2. \quad (9)$$

После линейного преобразования

$$F_i = \frac{1}{A_3} \partial_i S + \frac{A_2 + A_3}{A_3(2A_3 - n(A_2 + A_3))} \sum_{i=1}^n \partial_i S \quad (10)$$

получим другую систему уравнений, эквивалентную данной,

$$F_i = x_i^2 + 2A x_i s_1 + B s_1^2, \quad (11)$$

где

$$\begin{cases} A = -\frac{A_2 + A_3}{2A_3}, \\ B = \frac{6A_1 A_3 + 2A_2 A_3 - A_2^2}{A_3(2A_3 - n(A_2 + A_3))}. \end{cases} \quad (12)$$

Результанты старой системы и новой связаны следующим образом [3]

$$R\{\partial_i S\} = R\{F_i\} \left(\frac{A_3^{n-1}(2A_3 - n(A_2 + A_3))}{2} \right)^{2^{n-1}}. \quad (13)$$

Используя формулу Пуассона [2, 4] получим

$$\begin{aligned} R(x_i^2 + 2Ax_i s_1 + Bs_1^2) &= \\ &= \prod_{k_1, \dots, k_n=0}^1 \det_{n \times n} (\delta_{ij} + \lambda(-1)^{k_i} \delta_{ij} + AE_{ij}) = \\ &= \prod_{k_1, \dots, k_n=0}^1 (1 + nA + \lambda \sum_{j=1}^n (-1)^{k_j}), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}, \quad E_{ij} = 1, \quad \lambda^2 = A^2 - B.$$

Легко показать, что это выражение для результата приводится к виду

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left[(1 + nA)^2 + (A^2 - B)(n - 2k)^2 \right]^{C_{n-1}^k}, \quad (15)$$

где

$$C_p^q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$$

– это биномиальные коэффициенты. После простых выкладок получим

$$R\{\partial_i S\} = \prod_{k=0}^{n-1} Y_k^{C_{n-1}^k}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Y_k &= \frac{1}{4} A_3^{n-3} \left\{ (2A_3 - n(A_2 + A_3))^3 - (n - 2k)^2 \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot ((A_2 + A_3)^2 (2A_3 - n(A_2 + A_3)) - 4A_3(6A_1 A_3 + A_2 A_3 - A_2^2)) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

Сделав замену переменных

$$\begin{cases} B_1 = n^2 A_1 + \frac{n(n-1)}{2} A_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{6} A_3, \\ B_2 = nA_2 + (n-2)A_3, \\ B_3 = A_3, \end{cases} \quad (18)$$

приведем ответ к форме

$$R\{\partial_i S\} = (B_3)^{(n-3)2^{n-1}} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{6(n-2k)^2}{n^2} B_1 B_3^2 - \frac{k(n-k)}{n^2} B_2^3 \right)^{C_{n-1}^k} \quad (19)$$

Данная простая и явная формула является основным результатом данной работы.

3 Заключение

Использование теории результатов [2–4] в финслеровой геометрии позволяет сделать понимание некоторых классов метрических структур более простым. Полученное выражение дает простой способ для вычисления результата системы $\{\partial_i S = 0\}$ для S степени 3 в любой размерности. В дальнейшем планируется получить аналогичные выражения для случая симметрических полиномов S степеней больших чем 3.

Литература

- [1] Х. Рунд, *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств*, М.: Наука, 1981.
- [2] М. Gelfand, М. М. Карганов, and А. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multi-dimensional Determinants*, Birkhauser, 1994.
- [3] V. Dolotin and A. Morozov, *Introduction to Non-Linear Algebra*, World Scientific, 2007, hep-th/0609022
- [4] A. Morozov and Sh. Shakirov, *Analogue of the identity $\text{Log Det} = \text{Trace Log}$ for resultants*, arXiv:0804.4632

Configuratrix and resultant

N. S. Perminov

*Kasan State University, Kazan, Russia,
nikolai-kazan@rambler.ru*

In this paper, we obtain an explicit expression for the resultant of n quadratic algebraic equations $\{\partial_1 S = 0, \dots, \partial_n S = 0\}$, where S is a cubic polynomial in n variables, symmetric under permutations of its arguments. Application of this result to the study of Finslerian spaces is discussed.

Keywords: configuratrix, resultant, Finslerian spaces.

ГРУППЫ ОБЕРТОК КВАТЕРНИОННЫХ И ОКТОНИОННЫХ РАССЛОЕНИЙ

С. В. Лютковский

Московский государственный технический университет МИРЭА
sludkowski@mail.ru

Данная статья посвящена исследованию групп оберток связных расслоений над полем действительных \mathbf{R} , комплексных чисел \mathbf{C} , телом кватернионов \mathbf{H} и алгеброй октонионов \mathbf{O} . Эти группы построены с мягкими условиями на расслоения. Приводятся их примеры. Показано, что такие группы существуют и для дифференцируемых расслоений имеют структуру бесконечномерной группы Ли, то есть, они являются непрерывными или дифференцируемыми многообразиями и композиция $(f, g) \mapsto f^{-1}g$ непрерывна или дифференцируема в зависимости от класса гладкости группы. Более того, показано, что в случаях действительных, комплексных, кватернионных и октонионных многообразий эти группы имеют структуры действительных, комплексных, кватернионных или октонионных многообразий соответственно. Тем не менее, доказано, что эти группы не удовлетворяют формуле Кэмпбелла-Хаусдорфа даже локально.

Ключевые слова: группы оберток, расслоения, гиперкомплексные алгебры, кватернионы, октавы.

1 Введение

Группы оберток для расслоений рассмотренные в этой статье построены с помощью семейств отображений из расслоения с отмеченной точкой в другое расслоение с отмеченной точкой над полем \mathbf{R} , \mathbf{C} , телом кватернионов \mathbf{H} и октонионной алгеброй \mathbf{O} . Условия на расслоения снабженные структурами параллельных переносов здесь довольно мягкие. Поэтому они обобщают геометрические группы петель окружности, сфер и расслоений со структурами параллельных переносов на них. Петлевая интерпретация уже теряется в их обобщениях, поэтому они называются здесь группами оберток. Данная работа продолжает предыдущие работы автора по этой теме, где были определены и исследованы обобщенные группы петель многообразий над \mathbf{R} , \mathbf{C} и \mathbf{H} , но только ни для расслоений ни над октонионами [15, 21–23].

Группы петель окружности впервые были введены Лефшецем в 1930-х годах, а затем их конструкция была пересмотрена Милнором в 1950-х годах. Лефшец использовал C^0 -равномерность в семействах непрерывных отображений, что привело к необходимости комбинирования его структуры со структурой свободной группы с помощью слов. Позже Милнор использовал соболевскую H^1 -равномерность, что позволило ввести групповую структуру более естественным образом [28]. Итерации этих построений дают группы петель сфер. Затем их конструкции были обобщены для расслоений над окружностью и сферами со структурами параллельных переносов над \mathbf{R} или \mathbf{C} , но лишь относительно C^0 -равномерности [6].

Группы оберток кватернионных и октонионных расслоений, а также для более общих классов расслоений над \mathbf{R} или \mathbf{C} определены и исследованы здесь впервые.

Голоморфные функции кватернионных и октонионных переменных были исследованы в [17, 19, 20]. Было рассмотрено их специфическое определение супердифференцируемости, потому что тело кватернион имеет алгебраически градуированную структуру. Это определение супердифференцируемости не накладывает условия

правой или левой супер-линейности супер-дифференциала, так как это приводит к узкому классу функций. Хотя и имеются некоторые статьи о кватернионных многообразиях, но практически они подразумевают комплексные многообразия с добавочной кватернионной структурой в их касательном пространстве (смотри, например, [28, 39] и ссылки там). Поэтому кватернионные многообразия так, как они определены ниже не рассматривались ранее другими авторами (смотри также [17]). Приложения кватернионов в математике и физике можно найти в [3, 8, 9, 13].

В данной статье рассматриваются группы оберток различных классов гладкости. Далее мы рассматриваем не только ориентируемые многообразия M и N , но также неориентируемые многообразия.

В частности, геометрические группы петель имеют важные применения в современных физических теориях (смотри [11, 25] и ссылки там). Группы петель также интенсивно используются в калибровочных теориях. Оберточные группы определенные ниже с помощью семейств отображений из многообразия M в другое многообразие N размерности $\dim(M) > 1$ могут быть использованы в теории мембран, которая является обобщением теории струн (суперструн).

Второй раздел посвящен изучению для групп оберток их топологических структур и также как многообразий. Доказано существование этих групп и то, что они являются бесконечномерными группами Ли, которые не удовлетворяют формуле Кэмпбелла-Хаусдорфа даже локально (смотри теоремы 3, 6, 12, следствия 5, 8, 9 и примеры 10). В случаях комплексных, кватернионных и октонионных многообразий доказано, что они имеют структуры комплексных, кватернионных и октонионных многообразий соответственно.

Все главные результаты этой статьи получены впервые.

2 Группы оберток расслоений

Во избежание недоразумений мы приводим сначала наши определения и обозначения.

1.1. Замечание. Обозначим через \mathcal{A}_r алгебру Кэли-Диксона, так что $\mathcal{A}_0 = \mathbf{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}$, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$ – это тело кватернионов, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{O}$ – это алгебра октонионов. Далее мы рассмотрим только $0 \leq r \leq 3$.

1.2. Определение. А каноническое замкнутое подмножество Q евклидова пространства $X = \mathbf{R}^n$ стандартного сепарабельного гильбертова пространства $X = l_2(\mathbf{R})$ над \mathbf{R} называется квадрантом, если его можно задать условием $Q := \{x \in X : q_j(x) \geq 0\}$, где $(q_j : j \in \Lambda_Q)$ линейно независимые элементы топологически сопряженного пространства X^* . Здесь $\Lambda_Q \subset \mathbf{N}$ ($\text{card}(\Lambda_Q) = k \leq n$, когда $X = \mathbf{R}^n$) и k называется индексом Q . Если $x \in Q$ и точно j из q_i 's удовлетворяют $q_i(x) = 0$, то x называется углом индекса j .

Если X – это аддитивная группа и также левый и правый модуль над \mathbf{H} или \mathbf{O} с ассоциативностью или альтернативностью соответственно и законом дистрибутивности, то оно называется векторным пространством над \mathbf{H} или \mathbf{O} соответственно. В частности $l_2(\mathcal{A}_r)$ состоящее из всех последовательностей $x = \{x_n \in \mathcal{A}_r : n \in \mathbf{N}\}$ с конечной нормой $\|x\| < \infty$ и скалярным произведением $(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n^*$ с $\|x\| := (x, x)^{1/2}$ называется гильбертовым пространством (сепарабельного типа) над \mathcal{A}_r , где z^* обозначим сопряженное число Кэли-Диксона, $zz^* =: |z|^2$, $z \in \mathcal{A}_r$. Поскольку унитарное пространство $X = \mathcal{A}_r^n$ или сепарабельное гильбертово пространство $l_2(\mathcal{A}_r)$ над \mathcal{A}_r при рассмотрении над полем \mathbf{R} (действительная тень) изоморфно с $X_{\mathbf{R}} := \mathbf{R}^{2^n}$ или $l_2(\mathbf{R})$, тогда определение также описывает квадранты в \mathcal{A}_r^n и $l_2(\mathcal{A}_r)$. В последнем случае мы также рассмотрим обобщенные квадранты как канонические замкнутые подмножества, которые даются условием

$Q := \{x \in X_{\mathbf{R}} : q_j(x + a_j) \geq 0, a_j \in X_{\mathbf{R}}, j \in \Lambda_Q\}$, где $\Lambda_Q \subset \mathbf{N}$ ($\text{card}(\Lambda_Q) = k \in \mathbf{N}$, когда $\dim_{\mathbf{R}} X_{\mathbf{R}} < \infty$).

1.2.2. Определение. Дифференцируемое отображение $f : U \rightarrow U'$ называется диффеоморфизмом, если

(i) f биективно и существуют непрерывные отображения f' и $(f^{-1})'$, где U и U' являются внутренностями квадрантов Q и Q' в X .

В случае \mathcal{A}_r с $1 \leq r \leq 3$ мы рассмотрим ограниченные обобщенные квадранты Q и Q' в \mathcal{A}_r^n или $l_2(\mathcal{A}_r)$, так что such они являются областями с кусочно C^∞ -границами. Мы наложим добавочные условия на диффеоморфизм f в случае $1 \leq r \leq 3$:

(ii) $\bar{\partial}f = 0$ на U ,

(iii) f и все ее сильные (по Фреше) дифференциалы (как полилинейные операторы) ограничены на U , где ∂f и $\bar{\partial}f$ – это дифференциальные $(1, 0)$ и $(0, 1)$ -формы соответственно, $d = \partial + \bar{\partial}$ – это внешнее дифференцирование, для $2 \leq r \leq 3$ ∂ соответствует супер-дифференцированию по z и $\bar{\partial} = \bar{\partial}$ соответствует супер-дифференцированию по $\bar{z} := z^*$, $z \in U$ (смотри [19, 20]).

Условие Коши-Римана (ii) означает, что f на U является \mathcal{A}_r -голоморфным отображением.

1.2.3. Определение и обозначения. \mathcal{A}_r -многообразие M с углами определяется обычным образом: оно является сепарабельным метрическим пространством моделируемым на $X = \mathcal{A}_r^n$ или $X = l_2(\mathcal{A}_r)$ соответственно и предполагается принадлежащим классу C^∞ , $0 \leq r \leq 3$. Карты на M обозначим (U_l, u_l, Q_l) , то есть, $u_l : U_l \rightarrow u_l(U_l) \subset Q_l$ является C^∞ -диффеоморфизм для любого l , U_l открыто в M , $u_l \circ u_j^{-1}$ является биголоморфным для $1 \leq r \leq 3$ из области $u_j(U_l \cap U_j) \neq \emptyset$ на $u_l(U_l \cap U_j)$ (то есть, $u_j \circ u_l^{-1}$ и $u_l \circ u_j^{-1}$ голоморфны и биективны) и $u_l \circ u_j^{-1}$ удовлетворяют условиям (i – iii) из §1.2.2, $\bigcup_j U_j = M$.

Точка $x \in M$ называется углом индекса j , если существует карта (U, u, Q) для M с $x \in U$ и $u(x)$ имеет индекс $\text{ind}_M(x) = j$ в $u(U) \subset Q$. Множество всех углов индекса $j \geq 1$ называется границей ∂M многообразия M , x называется внутренней точкой в M , если $\text{ind}_M(x) = 0$, поэтому $\partial M = \bigcup_{j \geq 1} \partial^j M$, где $\partial^j M := \{x \in M : \text{ind}_M(x) = j\}$.

Для действительного многообразия с углами на связывающие отображения $u_l \circ u_j^{-1} \in C^\infty$ действительных карт накладывается лишь условие 1.2.2(i).

1.2.4. Терминология. В \mathcal{A}_r -многообразии N существует эрмитова метрика, которая в каждой аналитической системе координат такова: $\sum_{j,k=1}^n h_{j,k} dz_j d\bar{z}_k$, где $(h_{j,k})$ является положительно определенной матрицей с коэффициентами класса C^∞ , $h_{j,k} = h_{j,k}(z) \in \mathcal{A}_r$, z – это локальные координаты в N .

В качестве действительного многообразия мы рассмотрим риманово многообразие.

В соответствие с определением выше внутренних точек в N предполагается, что они принадлежат только внутренностям, но для граничных точек ∂N может случиться, что $x \in \partial N$ принадлежит границам нескольких карт. Удобно выбрать атлас таким, что индекс $\text{ind}(x)$ точки x одинаков для всех карт содержащих данную точку x .

1.3.1. Замечание. Если M – это метризуемое пространство и $K = K_M$ является замкнутым подмножеством в M коразмерности $\text{codim}_{\mathbf{R}} N \geq 2$, так что $M \setminus K = M_1$ является многообразием с углами над \mathcal{A}_r , то мы назовем M псевдо-многообразием над \mathcal{A}_r , где K_M – это критическое подмножество.

Два псевдо-многообразия B и C называются диффеоморфными, если $B \setminus K_B$ диффеоморфно с $C \setminus K_C$ как многообразие с углами (смотри также [6, 26]).

Возьмем на M борелевскую σ -аддитивную меру ν , так что ν на $M \setminus K$ совпадает с римановым элементом объема и $\nu(K) = 0$, так как действительная тень M_1 ее имеет.

Равномерное пространство $H_p^t(M_1, N)$ всех непрерывных кусочно H^t соболевских отображений из M_1 в N вводится стандартным образом [21, 22], которое индуцирует $H_p^t(M, N)$ равномерное пространство непрерывных кусочно H^t соболевских отображений на M , так как $\nu(K) = 0$, где $\mathbf{R} \ni t \geq [m/2] + 1$, m обозначает размерность M над \mathbf{R} , $[k]$ обозначает целую часть числа $k \in \mathbf{R}$, $[k] \leq k$. Далее положим $H_p^\infty(M, N) = \bigcap_{t > m} H_p^t(M, N)$ с соответствующей равномерностью.

Для многообразия над \mathcal{A}_r с $1 \leq r \leq 3$ возьмем как $H_p^t(M, N)$ пополнение семейства всех непрерывных кусочно \mathcal{A}_r -голоморфных отображений из M в N относительно H_p^t равномерности, где $[m/2] + 1 \leq t \leq \infty$. Далее мы рассмотрим псевдо-многообразия со связывающими отображениями карт непрерывными в M и $H_p^{t'}$ класса гладкости в $M \setminus K_M$ для $0 \leq r \leq 3$, где $t' \geq t$.

1.3.2. Замечание. Поскольку алгебра октонионов \mathbf{O} не ассоциативна, то мы рассмотрим неассоциативные подгруппы G семейства $Mat_q(\mathbf{O})$ всех квадратных $q \times q$ матриц с элементами из \mathbf{O} . Более общим образом G является группой, которая имеет структуру H_p^t -многообразия над \mathcal{A}_r и групповые операции являются H_p^t отображениями. Группа G может быть неассоциативной для $r = 3$, но G предполагается являющейся альтернативной, то есть, $(aa)b = a(ab)$ и $a(a^{-1}b) = b$ для любого $a, b \in G$.

Как обобщение псевдо-многообразий здесь используется следующее (над \mathbf{R} и \mathbf{C} смотри также [6, 34]). Предположим, что M является хаусдорфовым топологическим пространством с размерностью в смысле покрытий $\dim M = m$ снабженным семейством $\{h : U \rightarrow M\}$ так называемых локализаций (plots) h , которые являются непрерывными отображениями, удовлетворяющими условиям (D1 – D4):

(D1) каждая локализация имеет в качестве области определения выпуклое подмножество U в \mathcal{A}_r^n , $n \in \mathbf{N}$;

(D2) Если $h : U \rightarrow M$ является локализацией, V – это выпуклое подмножество в \mathcal{A}_r^t и $g : V \rightarrow U$ является H_p^t отображением, то $h \circ g$ также является локализацией, где $t \geq [m/2] + 1$;

(D3) каждое постоянное отображение из выпуклого множества U в \mathcal{A}_r^n в M является локализацией;

(D4) если U – это выпуклое множество в \mathcal{A}_r^n и $\{U_j : j \in J\}$ является покрытием U выпуклыми множествами в \mathcal{A}_r^n , каждое U_j открыто в U , $h : U \rightarrow M$ таково, что его каждое ограничение $h|_{U_j}$ является локализацией, тогда h является локализацией. Тогда M называется H_p^t -дифференцируемым пространством.

Отображение $f : M \rightarrow N$ между двумя H_p^t -дифференцируемыми пространствами называется дифференцируемым, если оно непрерывно и для любой локализации $h : U \rightarrow M$ композиция $f \circ h : U \rightarrow N$ является локализацией для N . Топологическая группа G называется H_p^t -дифференцируемой группой, если ее групповые операции являются H_p^t -дифференцируемыми отображениями.

Пусть E, N, F являются $H_p^{t'}$ -псевдо-многообразиями или $H_p^{t'}$ -дифференцируемыми пространствами над \mathcal{A}_r , пусть также G является $H_p^{t'}$ группой над \mathcal{A}_r , $t \leq t' \leq \infty$. Расслоение $E(N, F, G, \pi, \Psi)$ с пространством расслоения E , базой N , типичным слоем F и структурной группой G над алгеброй Кэли-Диксона \mathcal{A}_r , проекцией $\pi : E \rightarrow N$ и атласом Ψ определяется стандартным образом [6, 26, 36] с условием, что связывающие функции принадлежат классу $H_p^{t'}$, та что для $r = 3$ структурная группа может быть неассоциативной, но альтернативной.

Локальные тривиализации $\phi_j \circ \pi \circ \Psi_k^{-1} : V_k(E) \rightarrow V_j(N)$ индуцируют $H_p^{t'}$ -равномерность в семействе W всех главных $H_p^{t'}$ -расслоений $E(N, G, \pi, \Psi)$, где $V_k(E) = \Psi_k(U_k(E)) \subset X^2(G)$, $V_j(N) = \phi_j(U_j(N)) \subset X(N)$, где $X(G)$ и $X(N)$ являются \mathcal{A}_r -векторными пространствами, на которых моделируются G и N , $(U_k(E), \Psi_k)$ и

$(U_j(N), \phi_j)$ – это карты атласов E и N , $\Psi_k = \Psi_k^E$, $\phi_j = \phi_j^N$.

Если $G = F$ и G действует на себе левыми сдвигами, то расслоение называется главным расслоением и обозначается $E(N, G, \pi, \Psi)$. В частности, может быть $G = \mathcal{A}_r^*$, где \mathcal{A}_r^* обозначает мультипликативную группу $\mathcal{A}_r \setminus \{0\}$. Если $G = F = \{e\}$, то E сводится к N .

2. Определения. Пусть M – это связное H_p^t -псевдо-многообразие над \mathcal{A}_r , $0 \leq r \leq 3$ удовлетворяющее следующим условиям:

(i) оно компактно;

(ii) M является объединением двух замкнутых подмножеств над \mathcal{A}_r A_1 и A_2 , которые являются псевдо-многообразиями и канонически замкнутыми подмножествами в M с $A_1 \cap A_2 = \partial A_1 \cap \partial A_2 =: A_3$, и коразмерность над \mathbf{R} для A_3 в M единична $\text{codim}_{\mathbf{R}} A_3 = 1$, а также A_3 является псевдо-многообразием;

(iii) конечное множество отмеченных точек $s_{0,1}, \dots, s_{0,k}$ принадлежит $\partial A_1 \cap \partial A_2$, более того, ∂A_j линейно связны $j = 1, 2$;

(iv) $A_1 \setminus \partial A_1$ и $A_2 \setminus \partial A_2$ являются H_p^t -диффеоморфна с $M \setminus [\{s_{0,1}, \dots, s_{0,k}\} \cup (A_3 \setminus \text{Int}(\partial A_1 \cap \partial A_2))]$ посредством отображений $F_j(z)$, где $j = 1$ или $j = 2$, $\infty \geq t \geq [m/2] + 1$, $m = \dim_{\mathbf{R}} M$, так что $H^t \subset C^0$ благодаря теореме вложения Соболева [27], где внутренность $\text{Int}(\partial A_1 \cap \partial A_2)$ берется в $\partial A_1 \cup \partial A_2$.

Вместо (iv) мы рассмотрим также случай

(iv') M , A_1 и A_2 таковы, что $(A_j \setminus \partial A_j) \cup \{s_{0,1}, \dots, s_{0,k}\}$ являются $C^0([0, 1], H_p^t(A_j, A_j))$ -ретрагируемыми на $X_{0,q} \cap A_j$, где $X_{0,q}$ – это замкнутое линейно связное подмножество в M , $j = 1$ от $j = 2$, $s_{0,q} \in X_{0,q}$, $X_{0,q} \subset K_M$, $q = 1, \dots, k$, $\text{codim}_{\mathbf{R}} K_M \geq 2$.

Пусть \hat{M} это компактное связное H_p^t -псевдо-многообразие, которое является канонически замкнутым подмножеством в \mathcal{A}_r^l с границей $\partial \hat{M}$ и отмеченными точками $\{\hat{s}_{0,q} \in \partial \hat{M} : q = 1, \dots, 2k\}$ и H_p^t -отображением $\Xi : \hat{M} \rightarrow M$ таким, что

(v) Ξ сюръективно и биективно из $\hat{M} \setminus \partial \hat{M}$ на $M \setminus \Xi(\partial \hat{M})$ открытое в M , $\Xi(\hat{s}_{0,q}) = \Xi(\hat{s}_{0,k+q}) = s_{0,q}$ для любого $q = 1, \dots, k$, также $\partial M \subset \Xi(\partial \hat{M})$.

Структура параллельного переноса на $H_p^{t'}$ -дифференцируемом главном G -расслоении $E(N, G, \pi, \Psi)$ с линейно связными E и G для H_p^t -псевдо-многообразий M и \hat{M} как выше над одной и той же алгеброй Кэли-Диксона \mathcal{A}_r с $t' \geq t + 1$ приписывает каждому H_p^t отображению γ из M в N и точкам $u_1, \dots, u_k \in E_{y_0}$, где y_0 отмеченная точка в N , $y_0 = \gamma(s_{0,q})$, $q = 1, \dots, k$, единственное H_p^t отображение $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} : \hat{M} \rightarrow E$ удовлетворяющее условиям (P1 – P5):

(P1) take $\hat{\gamma} : \hat{M} \rightarrow N$, так что $\hat{\gamma} = \gamma \circ \Xi$, тогда $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(\hat{s}_{0,q}) = u_q$ для любых $q = 1, \dots, k$ и $\pi \circ \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} = \hat{\gamma}$

(P2) $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}$ является $H_p^{t'}$ -отображением по γ и u ;

(P3) для любых $x \in \hat{M}$ и каждого $\phi \in \text{Dif} H_p^t(\hat{M}, \{\hat{s}_{0,1}, \dots, \hat{s}_{0,2k}\})$ выполняется равенство $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(\phi(x)) = \mathbf{P}_{\hat{\gamma} \circ \phi, u}(x)$, где $\text{Dif} H_p^t(\hat{M}, \{\hat{s}_{0,1}, \dots, \hat{s}_{0,2k}\})$ обозначает группу всех H_p^t го-меоморфизмов \hat{M} сохраняющих отмеченные точки $\phi(\hat{s}_{0,q}) = \hat{s}_{0,q}$ для любых $q = 1, \dots, 2k$;

(P4) отображение $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}$ является G -эквивариантным ж это означает, что $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},uz}(x) = \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(x)z$ для любой $x \in \hat{M}$ и любой $z \in G$;

(P5) Если U – это открытая окрестность точки $\hat{s}_{0,q}$ в \hat{M} и $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1 : U \rightarrow N$ являются $H_p^{t'}$ -отображениями такими, что $\hat{\gamma}_0(\hat{s}_{0,q}) = \hat{\gamma}_1(\hat{s}_{0,q}) = v_q$, и касательные пространства, который являются векторными многообразиями над \mathcal{A}_r , для $\hat{\gamma}_0$ и $\hat{\gamma}_1$ в v_q одинаковы (изоморфны), то касательное пространства для $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_0,u}$ и $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,u}$ в u_q одинаковы, где $q = 1, \dots, k$, $u = (u_1, \dots, u_k)$.

Два $H_p^{t'}$ -дифференцируемых главных G -расслоения E_1 и E_2 со структурами параллельных переносов (E_1, \mathbf{P}_1) и (E_2, \mathbf{P}_2) называются изоморфными, если существует изо-

морфизм $h : E_1 \rightarrow E_2$ такой, что $\mathbf{P}_{2,\hat{\gamma},u}(x) = h(\mathbf{P}_{1,\hat{\gamma},h^{-1}(u)}(x))$ для любых H_p^t -отображений $\gamma : M \rightarrow N$ и $u_q \in (E_2)_{y_0}$, где $q = 1, \dots, k$, $h^{-1}(u) = (h^{-1}(u_1), \dots, h^{-1}(u_k))$.

Пусть $(S^M E)_{t,H} := (S^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}} E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$ – это множество H_p^t -замыканий классов изоморфных H_p^t главных G -расслоений со структурами параллельных переносов.

3. Теоремы. 1. *Равномерное пространство $(S^M E)_{t,H}$ из §2 имеет структуру топологического альтернативного моноида с единицей и со свойством сокращения и операцией умножения H_p^l класса с $l = t' - t$ ($l = \infty$ для $t' = \infty$). Если N и G сепарабельны, то $(S^M E)_{t,H}$ тоже сепарабелен. Если N и G полны, то $(S^M E)_{t,H}$ полно.*

2. *Если G ассоциативна, то моноид $(S^M E)_{t,H}$ является ассоциативным. Если G коммутативна, то $(S^M E)_{t,H}$ коммутативен. Если G является группой Ли, то $(S^M E)_{t,H}$ является моноидом Ли.*

3. *Моноид $(S^M E)_{t,H}$ недискретен, локально связан и бесконечно мерен при $\dim_{\mathbf{R}}(N \times G) > 1$.*

Доказательство. Если существует гомоморфизм $\theta : G \rightarrow F$ для $H_p^{t'}$ -дифференцируемых групп, то существует индуцированное главное F расслоение $(E \times^\theta F)(N, F, \pi^\theta, \Psi^\theta)$ с тотальным пространство $(E \times^\theta F) = (E \times F)/\mathcal{Y}$, где \mathcal{Y} – это отношение эквивалентности такое, что $(vg, f)\mathcal{Y}(v, \theta(g)f)$ для любых $v \in E$, $g \in G$, $f \in F$. Тогда проекция $\pi^\theta : (E \times^\theta F) \rightarrow N$ определяется формулой $\pi^\theta([v, f]) = \pi(v)$, где $[v, f] := \{(w, b) : (w, b)\mathcal{Y}(v, f), w \in E, b \in F\}$ обозначает класс эквивалентности для (v, f) .

Поэтому, если структура параллельного переноса \mathbf{P} на главном G -расслоении $E(N, G, \pi, \Psi)$ индуцирует структуру параллельного переноса \mathbf{P}^θ на индуцированном расслоении по формуле $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},[u,f]}^\theta(x) = [\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(x), f]$.

Определим умножение с помощью определенных вложений и изоморфизмов пространств функций. Отметим, что для любых двух компактных канонических замкнутых подмножеств A и B в \mathcal{A}_r^l гильбертовы пространства $H^l(A, \mathbf{R}^m)$ и $H^l(B, \mathbf{R}^m)$ являются линейно топологически изоморфными, где $l, m \in \mathbf{N}$, следовательно, $H_p^t(A, N)$ и $H_p^t(B, N)$ изоморфны как равномерные пространства. Пусть $H_p^t(M, \{s_{0,1}, \dots, s_{0,k}\}; W, y_0) := \{(E, f) : E = E(N, G, \pi, \Psi) \in W, f = \mathbf{P}_{\hat{\gamma},y_0} \in H_p^t : \pi \circ f(s_{0,q}) = y_0 \forall q = 1, \dots, k; \pi \circ f = \hat{\gamma}, \gamma \in H_p^t(M, N)\}$ – это пространства всех H_p^t главных G -расслоений E с их H_p^t -отображениями параллельных переносов $f = \mathbf{P}_{\hat{\gamma},y_0}$, где W такое же, как и в §1.3.2. Положим $\omega_0 = (E_0, \mathbf{P}_0)$ являющимся элементом таким, что $\gamma_0(M) = \{y_0\}$, где $e \in G$ обозначает единичный элемент, $E_0 = N \times G$, $\pi_0(y, g) = y$ для любых $y \in N$, $g \in G$, $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_0,u} = \mathbf{P}_0$.

Отображение $\Xi : \hat{M} \rightarrow M$ из §2 индуцирует вложение

$$\Xi^* : H_p^t(M, \{s_{0,1}, \dots, s_{0,k}\}; W, y_0) \hookrightarrow H_p^t(\hat{M}, \{\hat{s}_{0,1}, \dots, \hat{s}_{0,2k}\}; W, y_0),$$

где \hat{M} и \hat{A}_1 и \hat{A}_2 – это ретрагируемы в точки.

Пусть как обычно $A \vee B := \rho(\mathcal{Z})$ обозначает букет пунктированных пространств (то есть, с отмеченными точками) $(A, \{a_{0,q} : q = 1, \dots, k\})$ и $(B, \{b_{0,q} : q = 1, \dots, k\})$, где $\mathcal{Z} := [A \times \{b_{0,q} : q = 1, \dots, k\} \cup \{a_{0,q} : q = 1, \dots, k\} \times B] \subset A \times B$, ρ – это непрерывное факторное отображение такое, что $\rho(x) = x$ для любых $x \in \mathcal{Z} \setminus \{a_{0,q} \times b_{0,j}; q, j = 1, \dots, k\}$ и $\rho(a_{0,q}) = \rho(b_{0,q})$ для любых $q = 1, \dots, k$, где A и B являются топологическими пространствами с отмеченными точками $a_{0,q} \in A$ и $b_{0,q} \in B$, $q = 1, \dots, k$. Тогда букет $g \vee f$ двух элементов $f, g \in H_p^t(M, \{s_{0,1}, \dots, s_{0,k}\}; N, y_0)$ определен в области $M \vee M$ такой, что $(f \vee g)(x \times b_{0,q}) = f(x)$ и $(f \vee g)(a_{0,q} \times x) = g(x)$ для любых $x \in M$, где f, g соответствуют $f_1, g_1 \in H_p^t(\hat{M}, \{\hat{s}_{0,1}, \dots, \hat{s}_{0,2k}\}; N, y_0)$ такие, что $f_1 = f \circ \Xi$ и $g_1 = g \circ \Xi$.

Пусть $(E_j, \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_j, u_j}) \in H_p^t(M, \{s_{0,1}, \dots, s_{0,k}\}; W, y_0)$, $j = 1, 2$, тогда возьмем их произведение букета $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u^1} := \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1, u^1} \vee \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, u^2}$ на $M \vee M$ с $v_q = u_q g_{2,q}^{-1} g_{1,q+k} = y_0 \times g_{1,q+k}$ для любых

$q = 1, \dots, k$ в силу альтернативности группы G , $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, где $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_j, u^j}(\hat{s}_{j,0,q}) = y_0 \times g_{j,q} \in E_{y_0}$ для любых j и q . Для любых $\gamma_j : M \rightarrow N$ существует $\tilde{\gamma}_j : M \rightarrow E_j$ такое, что $\pi \circ \tilde{\gamma}_j = \gamma_j$. Обозначим через $\mathbf{m} : G \times G \rightarrow G$ операцию умножения. Произведение букета $(E_1, \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1, u^1}) \vee (E_2, \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, u^2})$ является главным G -расслоением $(E_1 \times E_2) \times^{\mathbf{m}} G$ со структурой параллельного переноса $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1, u^1} \vee \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, u^2}$.

Равномерное пространство $H_p^t(J, A_3; W, y_0) := \{(E, f) \in H_p^t(J, W) : \pi \circ f(A_3) = \{y_0\}\}$ имеет структуру H_p^t -многообразия и имеет вложение в $H_p^t(M, \{s_{0,1}, \dots, s_{0,k}\}; W, y_0)$ благодаря условиям 2(i - iii), где или $J = A_1$, или $J = A_2$. Это индуцирует следующее вложение $\chi^* : H_p^t(M \vee M, \{s_{0,q} \times s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0) \hookrightarrow H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0)$.

Аналогично рассматривая $H_p^t(M, \{X_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0) = \{f \in H^t(M, W) : f(X_{0,q}) = \{y_0\}, q = 1, \dots, k\}$ и $H_p^t(J, A_3 \cup \{X_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0)$ в случае (iv') вместо (iv), мы получим вложение $\chi^* : H_p^t(M \vee M, \{X_{0,q} \times X_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0) \hookrightarrow H_p^t(M, \{X_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0)$. Поэтому, $g \circ f := \chi^*(f \vee g)$ является композицией в $H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0)$.

Существует следующее отношение эквивалентности $R_{t,H}$ в $H_p^t(M, \{X_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0)$: $f R_{t,H} h$ тогда и только тогда, когда существуют направленности $\eta_n \in \text{Dif} H_p^t(M, \{X_{0,q} : q = 1, \dots, k\})$, а также f_n и $h_n \in H_p^t(M, \{X_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0)$ с $\lim_n f_n = f$ и $\lim_n h_n = h$, так что $f_n(x) = h_n(\eta_n(x))$ для любых $x \in M$ и $n \in \omega$, где ω – это направленное множество и сходимость рассматривается в $H_p^t(M, \{X_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0)$. Далее в случае 2(iv) мы получим $s_{0,q}$ вместо $X_{0,q}$ в случае 2(iv').

Таким образом, существует факторное равномерное пространство $H_p^t(M, \{X_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0)/R_{t,H} =: (S^M E)_{t,H}$. Известно, что $\text{Dif} H_p^t(M)$ является группой диффеоморфизмов при $t \geq [m/2] + 1$ (смотри [29, 30]). Мера Лебега λ в действительной тени многообразия \hat{M} при отображении Ξ индуцирует меру λ^Ξ на многообразии M , которая эквивалентна ν , так как Ξ является H_p^t -отображением из компактного пространства на компактное пространство, $\lambda(\partial \hat{M}) = 0$ и $\Xi : \hat{M} \setminus \partial \hat{M} \rightarrow M$ биективно.

В силу условий (P1 – P5) каждый элемент $f = \mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}$ с точностью до множества Q_M меры нуль, $\nu(Q_M) = 0$, дается как $f \circ \Xi^{-1}$ на $M \setminus Q_M$, где $\pi \circ f = \hat{\gamma}$, $\hat{\gamma} = \gamma \circ \Xi$. Обозначим $f \circ \Xi^{-1}$ также через f . Таким образом, для любых $(E, f) \in H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0)$ образ $f(M)$ компактен и связан в E .

Поэтому для любого разбиения Z существует $\delta > 0$ такое, что для каждого разбиения Z^* с $\sup_i \inf_j \text{dist}(M_i, M_j^*) < \delta$ и $(E, f) \in H^t(M, W; Z)$, $f(s_{0,q}) = u_q$, существует $(E, f_1) \in H^t(M, W; Z^*)$ с $f_1(s_{0,q}) = u_q$ для любых $q = 1, \dots, k$, так что $f R_{t,H} f_1$, где M_i и M_j^* являются каноническими замкнутыми псевдо-подмногообразиями в M соответствующими разбиениям Z и Z^* , $H^t(M, W; Z)$ обозначает пространство всех непрерывных кусочно H^t -отображений из M в W подчиненных разбиению Z , так что Z и Z^* отвечают H_p^t структуре многообразия M .

Поэтому существует счетное под-семейство $\{Z_j : j \in \mathbf{N}\}$ семейства всех разбиений Υ такое, что $Z_j \subset Z_{j+1}$ для любых j и $\lim_j \text{diam} Z_j = 0$. Тогда

(i) $\text{str} - \text{ind}\{H^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0; Z_j); h_{Z_j}^{Z_i}; \mathbf{N}\}/R_{t,H} = (S^M E)_{t,H}$ сепарабельно, если N и G сепарабельны, так как каждое пространство $H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0; Z_j)$ сепарабельно.

Пространство $\text{str} - \text{ind}\{H^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0; Z_j); h_{Z_j}^{Z_i}; \mathbf{N}\}$ полно в силу Теоремы 12.1.4 [29], когда N и G полны. Каждый класс $R_{t,H}$ -эквивалентных элементов замкнуто в нем. тогда каждой направленности Коши в $(S^M E)_{t,H}$ соответствует направленность Коши в $\text{str} - \text{ind}\{H^t(M \times [0, 1], \{s_{0,q} \times e \times 0; W, y_0; Z_j \times Y_j\}; h_{Z_j \times Y_j}^{Z_i \times Y_i}; \mathbf{N}\}$ благодаря Теоремам о существовании продолжений таких функций [27, 33, 38], где Y_j разбиения

$[0, 1]$ с $\lim_j \tilde{diam}(Y_j) = 0$, $Z_j \times Y_j$ являются соответствующими разбиениями $M \times [0, 1]$. Следовательно, $(S^M E)_{t,H}$ полно, если N и G полны.

Если $f, g \in H^t(M, X)$ и $f(M) \neq g(M)$, то

(ii) $\inf_{\psi \in \text{Dif} H_p^t(M, \{s_{0,q}: q=1, \dots, k\})} \|f \circ \psi - g\|_{H^t(M, X)} > 0$. Таким образом, классы эквивалентности $\langle f \rangle_{t,H}$ и $\langle g \rangle_{t,H}$ различны. Псевдо-многообразие \hat{M} является линейно связным. Возьмем $\eta : [0, 1] \rightarrow \hat{M}$ являющимся H_p^t -отображением с $\eta(0) = \hat{s}_{0,q}$ и $\eta(1) = \hat{s}_{0,k+q}$, где $1 \leq q \leq k$. Выберем в \hat{M} H_p^t -координаты одна из которых является параметром вдоль η . Поэтому, для любых $g_q, g_{k+q} \in G$ существует $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}$ с $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}(s_{0,q}) = y_0 \times g_q$ и $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}(s_{0,k+q}) = y_0 \times g_{k+q}$ для любых $q = 1, \dots, k$. Поскольку E и G линейно связны, то N тоже линейно связно и $(S^M E)_{t,H}$ локально связно при $\dim_{\mathbf{R}} N > 1$. Таким образом, равномерное пространство $(S^M E)_{t,H}$ не дискретно.

Касательное расслоение $TH_p^t(M, E)$ изоморфно $H_p^t(M, TE)$, где TE является $H_p^{t'-1}$ -расслоением, $t' \geq t + 1$. Существует бесконечное семейство $f_\alpha \in H_p^t(M, TE)$ с попарно различными образами в TE для различных α , так что $f_\alpha(M)$ не содержится в $\bigcup_{\beta < \alpha} f_\beta(M)$, $\alpha \in \Lambda$, где Λ – это бесконечный ординал. Поэтому, $T(S^M E)_{t,H}$ является бесконечномерным расслоением благодаря (ii) и неизбежно $(S^M E)_{t,H}$ тоже бесконечномерно.

Очевидно, если $f \vee g = h \vee g$ или $g \vee f = g \vee h$ для $\{f, g, h\} \subset H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0)$, то $f = h$. Таким образом, $\chi^*(f \vee g) = \chi^*(h \vee g)$ или $\chi^*(g \vee f) = \chi^*(g \vee h)$ эквивалентно $f = h$ в силу определения букета отображений $f \vee g$ и определению равенства функций, так как χ^* является вложением. Использование отношения эквивалентности $R_{t,H}$ дает $\langle f \rangle_{t,H} \circ \langle g \rangle_{t,H} = \langle h \rangle_{t,H} \circ \langle g \rangle_{t,H}$ или $\langle g \rangle_{t,H} \circ \langle f \rangle_{t,H} = \langle g \rangle_{t,H} \circ \langle h \rangle_{t,H}$ эквивалентно $\langle h \rangle_{t,H} = \langle f \rangle_{t,H}$. Поэтому, $(S^M E)_{t,H}$ обладает свойством сокращения.

Поскольку группа G альтернативна, то $a_{2,q}[a_{2,q}^{-1}(a_{2,q+k}(a_{2,q}^{-1}a_{1,q+k}))] = a_{2,q+k}(a_{2,q}^{-1}a_{1,q+k})$, следовательно, $\mathbf{P}_1 \vee (\mathbf{P}_2 \vee \mathbf{P}_2) = (\mathbf{P}_1 \vee \mathbf{P}_2) \vee \mathbf{P}_2$; а также $a_{2,q}[a_{2,q}^{-1}(a_{1,q+k}(a_{1,q}^{-1}a_{1,q+k}))] = a_{1,q+k}(a_{1,q}^{-1}a_{1,q+k})$, следовательно, $\mathbf{P}_1 \vee (\mathbf{P}_1 \vee \mathbf{P}_2) = (\mathbf{P}_1 \vee \mathbf{P}_1) \vee \mathbf{P}_2$ и неизбежно для классов эквивалентности $(aa)b = a(ab)$ и $b(aa) = (ba)a$ для любых $a, b \in (S^M E)_{t,H}$. Таким образом $(S^M E)_{t,H}$ альтернативна.

Если G ассоциативна, то структура параллельного переноса дает $(f \vee g) \vee h = f \vee (g \vee h)$ на $M \vee M \vee M$ для любых $\{f, g, h\} \subset H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k; W, y_0\})$. Применяя вложение χ^* и отношение эквивалентности $R_{t,H}$, мы получим, что $(S^M E)_{t,H}$ ассоциативна $\langle f \rangle_\xi \circ (\langle g \rangle_\xi \circ \langle h \rangle_\xi) = (\langle f \rangle_\xi \circ \langle g \rangle_\xi) \circ \langle h \rangle_\xi$.

В силу условий 2(i – iv) существует H_p^t -диффеоморфизм $(A_1 \setminus A_3) \vee (A_2 \setminus A_3)$ с $(A_2 \setminus A_3) \vee (A_1 \setminus A_3)$ как псевдо-многообразий (смотри §1.3.1). Для меры ν на M естественно выполнено равенство $\nu(A_3) = 0$. Если M' – это под-многообразие может быть с углами или псевдо-многообразие, то выполняя разбиение $Z = Z_f$ многообразия M , мы получим, что коразмерность M' в M равна единице и $\nu(M') = 0$. Для точки $s_{0,q}$ в $(M \setminus A_3) \cup \{s_{0,q}\}$ существует открытая окрестность U имеющая H_p^t -ретракцию $F : [0, 1] \times U \rightarrow \{s_{0,q}\}$. Следовательно, можно выбрать последовательность диффеоморфизмов $\psi_n \in \text{Dif} H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\})$ такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\psi_n(U)) = 0$.

Пусть w_0 – это отображение $w_0 : M \rightarrow W$ такое, что $w_0(M) = \{y_0 \times e\}$. Рассмотрим $w_0 \vee (E, f)$ для некоторого $(E, f) \in H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0)$. Если $(E, f) \in H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0)$ с натуральным положительным $t \in \mathbf{N}$, тогда f ограничена относительно равномерности равномерного пространства $H_p^t(M; E)$. Если U_n – это последовательность ограниченных открытых канонических замкнутых подмножеств в M таких, что $\lim_n \text{diam}(U_n) = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(V_n) = 0$ для последовательности ν -измеримых под-множеств V_n таких, что $V_n \subset U_n$. Поэтому для любой ограниченной последовательности $\{g_n : g_n \in H_p^t(M; E); n \in \mathbf{N}\}$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n|_{U_n} = 0$ от-

носителем H_p^t -равномерности, где U_n подчинено разбиению M на H^t под-многообразия. Тогда если $\{g_n : g_n \in H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; E, y_0); n \in \mathbf{N}\}$ – это ограниченная последовательность такая, что g_n сходится к $g \in H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; N, y_0)$ на $M \setminus W_k$ для любых k относительно H_p^t -равномерности, для данных открытых подмножеств W_k в M , где $k, n \in \mathbf{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(W_n \Delta U_n) = 0$, то g_n сходится к g в равномерном пространстве $H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; E, y_0)$.

Заметим, что для любых отмеченной точки $s_{0,q}$ в M существует окрестность U точки $s_{0,q}$ в M такая, что для любых $\gamma_1 \in H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; N, y_0)$ существует $\gamma_2 \in H_p^t$, так что они $R_{t,H}$ эквивалентны и $\gamma_2|_U = y_0$. Поэтому, если C является линейно связным компактным подмножеством в M коразмерности $\text{codim}_{\mathbf{R}} C \geq 1$, так что $s_{0,q} \in C$, то стандартная процедура показывает, что для любых $\gamma_1 \in H_p^t$ существует $\gamma_2 \in H_p^t$ такое, что $\gamma_1 R_{t,H} \gamma_2$ и $\gamma_2|_C = y_0$. В самом деле, множество C компактно, поэтому каждое его открытое покрытие имеет конечное под-покрытие и, следовательно,

(Y_0) существует открытая окрестность U для C в M такая, что для любых γ_1 существует γ_2 такая, что $\gamma_1 R_{t,H} \gamma_2$ и $\gamma_2|_U = y_0$.

Существует последовательность $\eta_n \in \text{Diff} H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\})$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\eta_n(A_2 \setminus \partial A_2)) = 0$ и $w_n, f_n \in H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; E, y_0)$ с

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi^*(f_n \vee w_n)(\eta_n^{-1}) = f$ в силу равенства $\pi \circ f(s_{0,q}) = s_{0,q}$ и формулы дифференцирования композиции функций (над \mathbf{H} и \mathbf{O} смотри о ней в [17, 19, 20]).

Более подробно, последовательность η_n как предел из $\eta_n(A_2)$ дает псевдо-под-многообразие B в M коразмерности не менее единицы, так что B можно представить с помощью букета сфер и компактных квадрантов с точностью до H_p^t -диффеоморфизма с отмеченными точками $\{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}$, но также B может быть конечным дискретным множеством. Тогда по индукции можно продолжить понижение размерности для B . В частности, могут быть окружности и кривые в случае единичной размерности. Два квадранта с точностью до H_p^t факторного отображения склеивающего границы дает сферу. Таким образом, рассмотрение сводится к случаю букета сфер. Случай сфер сводится к итерированной конструкции с окружностями, так как приведенное произведение $S^1 \wedge S^n$ является H_p^t гомеоморфным с S^{n+1} (смотри лемму 2.27 [37] и [6]). В частном случае n -мерной сферы $M_n = S^n$ возьмем $\hat{M}_n = D^n$, где D^n – это единичный шар (диск) в \mathbf{R}^n или в n мерном над \mathbf{R} под-пространстве в \mathcal{A}_r^t , $D_1 = [0, 1]$ для $n = 1$. Но $S^n \setminus s_0$ имеет ретракцию в точку в S^n , где $s_0 \in S^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Поэтому $w_0 \vee (E, f)$ и (E, f) принадлежат классу эквивалентности $\langle (E, f) \rangle_{t,H} := \{g \in H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0) : (E, f) R_{t,H} g\}$ в силу (iii) и (Y_0). Таким образом, $\langle w_0 \rangle_{t,H} \circ \langle g \rangle_{t,H} = \langle g \rangle_{t,H}$.

Псевдо-многообразие $M \vee M \setminus \{s_{0,q} \times s_{0,j} : q, j = 1, \dots, k\}$ имеет H_p^t -диффеоморфизм ψ (смотри определение в §1.3.1), так что $\psi(x, y) = (y, x)$ для любых $(x, y) \in (M \times M \setminus \{s_{0,q} \times s_{0,j} : q, j = 1, \dots, k\})$. Предположим теперь, что G коммутативна. Тогда $(f \vee g) \circ \psi|_{(M \times M \setminus \{s_{0,q} \times s_{0,j} : q, j = 1, \dots, k\})} = g \vee f|_{(M \times M \setminus \{s_{0,q} \times s_{0,j} : q, j = 1, \dots, k\})}$. С другой стороны, $\langle f \vee w_0 \rangle_{t,H} = \langle f \rangle_{t,H} \circ \langle w_0 \rangle_{t,H} = \langle f \rangle_{t,H} \circ \langle w_0 \rangle_{t,H} \circ \langle f \rangle_{t,H}$, следовательно, $\langle f \vee g \rangle_{t,H} = \langle f \rangle_{t,H} \circ \langle g \rangle_{t,H} = \langle f \vee w_0 \rangle_{t,H} \circ \langle w_0 \vee g \rangle_{t,H} = \langle (f \vee w_0) \vee (w_0 \vee g) \rangle_{t,H} = \langle (w_0 \vee g) \vee (f \vee w_0) \rangle_{t,H}$ благодаря существованию единичного элемента $\langle w_0 \rangle_{t,H}$ и благодаря свойствам ψ . В самом деле, возьмем последовательность ψ_n как выше. Поэтому структура параллельного переноса дает $(g \vee f)(\psi(x, y)) = (g \circ f)(y, x)$ для любых $x, y \in M$, следовательно, $(f \circ g) R_{t,H} (g \circ f)$ для любых $f, g \in H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0)$. Использование вложения χ^* дает, что $(S^M E)_{t,H}$ коммутативен, когда G коммутативна.

Отображение $(f, g) \mapsto f \vee g$ из $H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0)^2$ в $H_p^t(M \vee M \setminus$

$\{s_{0,q} \times s_{0,j} : q, j = 1, \dots, k\}; W, y_0)$ принадлежит классу H_p^t . Поскольку отображение χ^* принадлежит классу H_p^t , то $(f, g) \mapsto \chi^*(f \vee g)$ является H_p^t -отображением. Факторное отображение из $H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0)$ в $(S^M E)_{t,H}$ непрерывно и индуцирует факторную равномерность, а $T^b(S^M E)_{t,H}$ имеет вложение в $(S^M T^b E)_{t,H}$ для любых $1 \leq b \leq t' - t$, когда $t' > t$ конечно, и для любого $1 \leq b < \infty$, если $t' = \infty$, так как E является $H_p^{t'}$ расслоением, а $T^b E$ – это расслоение с базой N . Следовательно, умножение $(\langle f \rangle_{t,H}, \langle g \rangle_{t,H}) \mapsto \langle f \rangle_{t,H} \circ \langle g \rangle_{t,H} = \langle f \vee g \rangle_{t,H}$ непрерывно в $(S^M E)_{t,H}$ и принадлежит классу H_p^l с $l = t' - t$ для конечного t' и $l = \infty$ при $t' = \infty$.

4. Определение. Моноид $(S^M E)_{t,H}$ из теоремы 3.1 мы назовем моноидом оберток.

5. Следствие. Пусть $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ является сюръективным H_p^t -отображением H_p^t -псевдо-многообразий над одной и той же алгеброй Кэли-Диксона \mathcal{A}_r , так что $\phi(s_{1,0,q}) = s_{2,0,a(q)}$ для любых $q = 1, \dots, k_1$, где $\{s_{j,0,q} : q = 1, \dots, k_j\}$ – это отмеченные точки в M_j , $j = 1, 2$, $1 \leq a \leq k_2$, $l_1 \leq k_2$, $l_1 := \text{card } \phi(\{s_{1,0,q} : q = 1, \dots, k_1\})$. Тогда существует индуцированный гомоморфизм моноидов $\phi^* : (S^{M_2} E)_{t,H} \rightarrow (S^{M_1} E)_{t,H}$. Если $l_1 = k_2$, то ϕ^* является вложением.

Доказательство. Возьмем $\Xi_1 : \hat{M}_1 \rightarrow M_1$ с отмеченными точками $\{\hat{s}_{1,0,q} : q = 1, \dots, 2k_1\}$ как в §2, тогда возьмем \hat{M}_2 Ю, а также \hat{M}_1 с дополнительными $2(k_2 - l_1)$ отмеченными точками $\{\hat{s}_{2,0,q} : q = 1, \dots, 2k_3\}$, так что $\hat{s}_{1,0,q} = \hat{s}_{2,0,q}$ для любых $q = 1, \dots, k_1$, $k_3 = k_1 + k_2 - l_1$, тогда $\phi \circ \Xi_1 := \Xi_2 : \hat{M}_2 \rightarrow M_2$ является требуемым отображением индуцирующим структуру параллельного переноса из нее для M_1 . Поэтому каждое $\hat{\gamma}_2 : \hat{M}_2 \rightarrow N$ индуцирует $\hat{\gamma}_1 : \hat{M}_1 \rightarrow N$ и $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, u^2}$ соответствует $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1, u^1}$ с дополнительными условиями в добавочных отмеченных точках, где $u^1 \subset u^2$. Класс эквивалентности $\langle (E_2, \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, u^2}) \rangle_{t,H} \in (S^{M_2} E)_{t,H}$ дает соответствующие элементы $\langle (E_1, \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1, u^1}) \rangle_{t,H} \in (S^{M_1} E)_{t,H}$, так как $\text{Dif} H_p^t(\hat{M}_1, \{\hat{s}_{0,q} : q = 1, \dots, 2k_2\}) \subset \text{Dif} H_p^t(\hat{M}_1, \{\hat{s}_{0,q} : q = 1, \dots, 2k_3\})$. Тогда $\phi^*(\langle (E_2, \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, u^2}) \vee (E_1, \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, v^2}) \rangle_{t,H}) = \phi^*(\langle (E_2, \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, u^2}) \rangle_{t,H}) \phi^*(\langle (E_1, \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, v^2}) \rangle_{t,H})$, так как $f_2 \circ \phi(x)$ для всякого $x \in \Xi_1(\hat{M}_1 \setminus \partial \hat{M}_1)$ совпадает с $f_1(x)$, где f_j соответствует $\mathbf{P}_{\gamma_j, y_0 \times e}$ (смотри также начало §3).

Если $l_1 = k_2$, тогда $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ и группа диффеоморфизмов $\text{Dif} H_p^t(\hat{M}_1, \{\hat{s}_{0,q} : q = 1, \dots, 2k_1\})$ одна и та же в двух случаях, следовательно, ϕ^* биективно и неизбежно ϕ^* является вложением.

6. Теоремы. 1. Существует альтернативная топологический группа $(W^M E)_{t,H}$ содержащая моноид $(S^M E)_{t,H}$ и с групповыми операциями класса H_p^l при $l = t' - t$ ($l = \infty$ при $t' = \infty$). Если N и G сепарабельны, то $(W^M E)_{t,H}$ сепарабельна. Если N и G полны, то $(W^M E)_{t,H}$ полна.

2. Если G ассоциативна, то $(W^M E)_{t,H}$ ассоциативна. Если G коммутативна, то $(W^M E)_{t,H}$ коммутативна. Если G – это группа Ли, то $(W^M E)_{t,H}$ – тоже группа Ли.

3. Группа $(W^M E)_{t,H}$ не дискретна, локально связна и бесконечно мерна при $\dim_{\mathbf{R}}(N \times G) > 1$. Более того, если имеются два различных множества отмеченных точек $s_{0,q,j}$ в A_3 , $q = 1, \dots, k$, $j = 1, 2$, то две группы $(W^M E)_{t,H,j}$, определенные для $\{s_{0,q,j} : q = 1, \dots, k\}$ как отмеченных точек, изоморфны.

4. Группа $(W^M E)_{t,H}$ также имеет структуру H_p^t -дифференцируемого многообразия над \mathcal{A}_r .

Доказательство. Если $\gamma \in H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; N, y_0)$, то для $u \in E_{y_0}$ существует и единственное $h_q \in G$ такое, что $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}(\hat{s}_{0,q+k}) = u_q h_q$, где $h_q = g_q^{-1} g_{q+k}$, $y_0 \times g_q = \mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}(\hat{s}_{0,q})$, $g_q \in G$. В силу эквивариантности структуры параллельного переноса h зависит только от γ и мы обозначим его $h^{(E, \mathbf{P})}(\gamma) = h(\gamma) = h$, $h = (h_1, \dots, h_k)$. Элемент

$h(\gamma)$ называется голономией \mathbf{P} вдоль γ и $h^{(E,\mathbf{P})}(\gamma)$ зависит лишь от классов изоморфных (E, \mathbf{P}) в силу использования $\text{Dif}H_p^t(M; \{\hat{s}_{0,q} : q = 1, \dots, 2k\})$ и граничных условий на $\hat{\gamma}$ в $\hat{s}_{0,q}$ для $q = 1, \dots, 2k$.

Поэтому, $h^{(E_1, \mathbf{P}_1)(E_2, \mathbf{P}_2)}(\gamma) = h^{(E_1, \mathbf{P}_1)}(\gamma)h^{(E_2, \mathbf{P}_2)}(\gamma) \in G^k$, где G^k обозначает прямое произведение k копий группы G . Следовательно, для любой такой γ существует гомоморфизм $h(\gamma) : (S^M E)_{t,H} \rightarrow G^k$, который индуцирует гомоморфизм $h : (S^M E)_{t,H} \rightarrow C^0(H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; N, y_0), G^k)$, где $C^0(A, G^k)$ – это пространство непрерывных отображений из топологического пространства A в G^k и с групповой структурой $(hb)(\gamma) = h(\gamma)b(\gamma)$ (смотри также [6] для S^n).

Таким образом, достаточно построить $(W^M N)_{t,H}$ из $(S^M N)_{t,H}$. Для коммутативного моноида $(S^M N)_{t,H}$ с единичным элементом и свойством сокращения существует коммутативная группа $(W^M N)_{t,H}$. Алгебраически она является фактор-группой F/\mathbf{B} , где F – это свободная коммутативная группа порожденная $(S^M N)_{t,H}$, в то время как \mathbf{B} – это минимальная замкнутая подгруппа в F порожденная всеми элементами вида $[f + g] - [f] - [g]$, f и $g \in (S^M N)_{t,H}$, $[f]$ обозначает элемент в F соответствующий f (смотри также об абстрактной конструкции Гротендика в [13, 36]).

По построению каждая точка в $(S^M N)_{t,H}$ является замкнутым подмножеством, следовательно, $(S^M N)_{t,H}$ является топологическим T_1 -пространством. В силу теоремы 2.3.11 [4] произведение T_1 -пространств является T_1 -пространством. С другой стороны, для топологической группы G из аксиомы отделимости T_1 следует, что G – это тихоновское пространство [4, 32]. Естественное отображение $\eta : (S^M N)_{t,H} \rightarrow (W^M N)_{t,H}$ инъективно. Снабдим F топологией наследуемой из топологии тихоновского произведения $(S^M N)_{t,H}^{\mathbf{Z}}$, где каждый элемент z в F имеет вид $z = \sum_f n_{f,z}[f]$, $n_{f,z} \in \mathbf{Z}$ для любого $f \in (S^M N)_{t,H}$, $\sum_f |n_{f,z}| < \infty$. По построению F и F/\mathbf{B} являются T_1 -пространствами, следовательно, F/\mathbf{B} является тихоновским пространством. В частности, $[nf] - n[f] \in \mathbf{B}$, следовательно, $(W^M N)_{t,H}$ является полной топологической группой, если N и G полны. В то же время η является топологическим вложением, так как $\eta(f + g) = \eta(f) + \eta(g)$ для любых $f, g \in (S^M N)_{t,H}$, $\eta(e) = e$, так как $(z + B) \in \eta(S^M N)_{t,H}$, когда $n_{f,z} \geq 0$ для любых f , и неизбежно в общем случае $z = z^+ - z^-$, где $(z^+ + B)$ и $(z^- + B) \in \eta(S^M N)_{t,H}$.

Используя локализации и $H_p^{t'}$ связывающие отображения карт для N и $E(N, G, \pi, \Psi)$ и классы эквивалентности относительно $\text{Dif}H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\})$, мы получим, что $(W^M E)_{t,H}$ имеет структуру H_p^t -дифференцируемого многообразия, так как $t' \geq t$.

Последняя часть доказательства и утверждения теорем 6(1-4) следуют из теорем 3(1-3) и [21, 22]. Так как $(S^M E)_{t,H}$ является бесконечномерной благодаря теореме 3.3, тогда $(W^M E)_{t,H}$ бесконечномерна.

7. Определение. Группа $(W^M E)_{t,H} = (W^{M, \{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}} E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$ из теоремы 6.1 мы назовем группой оберток.

8. Следствие. Существует групповой гомоморфизм $h : (W^M E)_{t,H} \rightarrow C^0(H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; N, y_0), G^k)$.

Доказательство вытекает из §6, и полагая $h^{f^{-1}}(\gamma) = (h^f(\gamma))^{-1}$.

9. Следствие. Если M_1 и M_2 и ϕ удовлетворяют условиям следствия 5, тогда существует гомоморфизм $\phi^* : (W^{M_2} E)_{t,H} \rightarrow (W^{M_1} E)_{t,H}$. Если $l_1 = k_2$, то ϕ^* является вложением.

10. Замечания и примеры. Рассмотрим примеры M , для которых выполнены достаточные условия для существования групп оберток $(W^M E)_{t,H}$. Возьмем M , например, D_R^n , $S_R^n \setminus V$ с $s_0 \in \partial V$, $D_R^n \setminus \text{Int}(D_b^n)$ с $s_0 \in \partial D_b^n$ и $0 < b < R < \infty$, где S_R^n обозначает сферу размерности $n > 1$ над \mathbf{R} и радиуса R , V является H_p^t -диффеоморфной с внутренностью $\text{Int}(D_R^n)$ n -мерного шара $D_R^n := \{x \in \mathbf{R}^n : \sum_{k=1}^n x_k^2 \leq R\}$ или в

n мерном над \mathbf{R} под-пространстве в \mathcal{A}_r^l и является собственным подмножеством в $S_R^n := \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = R\}$. Вместо сферы можно взять H_p^t псевдо-многообразие Q^n гомеоморфное сфере или диску, в частности, сферу Милнора. В самом деле, разделим M по экватору $\{x_1 = 0\}$ на две части A_1 и A_2 и возьмем $A_3 = \{x \in M : x_1 = 0\} \cup P$, где $s_0 \in \partial A_1 \cap \partial A_2$, в то время как $P = \emptyset$, $P = \partial V$, $P = \partial D_b^n$ соответственно. Тогда возьмем также V и D_b^n , так чтобы их экватор был порожден экватором $\{x_1 = 0\}$ в S_R^n или D_R^n соответственно или более общим образом Q^n .

Возьмем тогда $M = Q^n \setminus \bigcup_{k=1}^l V_k$, где V_k являются H_p^t -диффеоморфными внутренностям ограниченных квадрантов в \mathbf{R}^n или в n мерном подпространстве в \mathcal{A}_r^a , где $l > 1$, $l \in \mathbf{N}$, $\partial V_k \cap \partial V_j = \{s_0\}$ и $V_k \cap V_j = \emptyset$ для любых $k \neq j$, $\text{diam}(V_k) \leq b < R/3$. Более подробно можно взять специальные случаи: если l четно, то $[l/2] - 1$ среди V_k расположены над экватором и то же количество ниже него, два из V_k имеют экваторы, порожденные экваторами $\{x_1 = 0\}$ в Q^n . Если же l нечетно, то $[(l-1)/2]$ среди V_k расположены над и то же количество под ним, одно из V_k имеет экватор порожденный экватором $\{x_1 = 0\}$ в Q^n , $s_0 \in \bigcap_k \partial V_k \cap \{x \in M : x_1 = 0\}$.

Поделим M экватором $\{x_1 = 0\}$ на две части A_1 и A_2 , и пусть $A_3 = \{x \in M : x_1 = 0\} \cup P$, где $P = \bigcup_{k=1}^l \partial V_k$. Тогда или $A_1 \setminus A_3$ и $A_2 \setminus A_3$ являются H_p^t диффеоморфными как псевдо-многообразия или многообразия с углами и H_p^t диффеоморфна с $M \setminus [\{s_0\} \cup (A_3 \setminus \text{Int}(\partial A_1 \cap \partial A_2))]$ =: D или $2(iv')$ выполнено, так как последнее топологическое пространство D получается из Q^n вырезанием непустого связного замкнутого подмножества, $n > 1$, следовательно, D ретрагируемо в точку.

В случае обычного многообразия M точка $s_0 \in \partial M$ (для $\partial M \neq \emptyset$) может быть критической точкой, но в случае многообразия с углами эта s_0 является угловой точкой из ∂M , так как при $x \in \partial M$ имеется не менее одной карты (U, u, Q) такой, что $u(x) \in \partial Q$, $M \setminus \partial M = \bigcup_k u_k^{-1}(\text{Int}(Q_k))$, $\partial M \subset \bigcup_k u_k^{-1}(\partial Q_k)$. Далее, если M удовлетворяет условиям $2(i-v)$ или $(i-iii, iv', v)$, то $M \times D_R^m = P$ также им удовлетворяет при $m \geq 1$, так как D_R^m ретрагируемо в точку, беря две части $A_j(K) = A_j(M) \times D_R^m$ в P , где $j = 1, 2$, $A_j(M)$ являются псевдо-под-многообразиями в M . Тогда $A_1(P) \cap A_2(P) = (A_1(M) \cap A_2(M)) \times D_R^m$ и можно взять $A_3(P) = A_3(M) \times D_R^m$, $s_0(P) \in s_0(M) \times \{x \in D_R^m : x_1 = 0\}$. В частности, для $M = S^1$ и $m = 1$ это дает заполненный тор.

Эта конструкция может быть естественно обобщена для неориентируемых многообразий, например, ленты Мёбиуса L , также для $M := L \setminus (\bigcup_{j=1}^\beta V_j)$ с диаметром b_j множества V_j меньшим ширины ленты L , где каждое V_j является H_p^t диффеоморфным внутренности ограниченного квадранта в \mathbf{R}^2 , $s_{0,q} \in \partial L \cap (\bigcap_{j=a_1+\dots+a_{q-1}+1}^{a_1+\dots+a_q} \partial V_j)$, $a_0 := 0$, $a_1 + \dots + a_k = \beta$, $q = 1, \dots, k$, так как граница ∂L диффеоморфна окружности S^1 , также $S^1 \setminus \{s_{0,q}\}$ ретрагируема в точку, следовательно, A_1 и A_2 ретрагируемы в точку. Для L возьмем $\hat{M} = I^2$, тогда также возьмем связную кривую $\hat{\eta}$ состоящую из левой части $\{0\} \times [0, 1]$, отрезка прямой линии соединяющим точки $\{0, 1\}$ и $\{1, 0\}$, и с правой частью $\{1\} \times [0, 1]$. Это дает подходящее разрезание многообразия \hat{M} , которое индуцирует подходящее разрезание ленты L и многообразия M с $A_3 \supset \eta \cup \partial L$ с точностью до H_p^t диффеоморфизм, где $\eta := \Xi(\hat{\eta})$, следовательно, лента Мёбиуса L и многообразие M удовлетворяют условиям $2(i-iii, iv', v)$.

Теперь возьмем факторное отображение $\phi : I^2 \rightarrow S^1$, так что $\phi(\{s_{0,1}, s_{0,2}\}) = s_0 \in S^1$, $s_{0,1} = (0, 0)$, $s_{0,2} = (0, 1) \in I^2$, где $I = [0, 1]$, следовательно, существует вложение $\phi^* : (W^{S^1, s_0} E)_{t,H} \hookrightarrow (W^{I^2, \{s_{0,1}, s_{0,2}\}} E)_{t,H}$.

Бутылка Клейна K имеет $\hat{M} = I^2$ со скрученным (косым) отношением эквивалентности на ∂I^2 , так что оно удовлетворяет достаточным условиям. Более того, K является факторпространством $\phi : Z \rightarrow K$ цилиндра Z со скрученным отношением эквивалентности своих концов S^1 используя отражение относительно гори-

зонтального диаметра. Таким образом, $A_3 \supset \phi(S^1)$. Поэтому существует вложение $\phi^* : (W^{K, \{s_0\}} E)_{t,H} \rightarrow (W^{Z, \{s_{0,1}, s_{0,2}\}} E)_{t,H}$, где $s_{0,1}, s_{0,2} \in \partial Z$, $\phi(\{s_{0,1}, s_{0,2}\}) = s_0$.

Возьмем псевдо-многообразие Q^n H_p^t -диффеоморфное с S^n для $n \geq 2$, вырежем из него β непересекающихся открытых областей V_1, \dots, V_β H_p^t -диффеоморфных внутренностям ограниченных квадрантов в \mathbf{R}^n , $s_{0,q} \in \bigcap_{j=a_1+\dots+a_{q-1}+1}^{a_1+\dots+a_q} \partial V_j$, $a_0 := 0$, $a_1 + \dots + a_k = \beta$, $q = 1, \dots, k$. Тогда склеим для V_1, \dots, V_l , $1 \leq l \leq \beta$, по границам разрезов H_p^t -диффеоморфных с S^{m-1} приведенное произведение $L \vee S^{n-2}$, так как $\partial L = S^1$, $S^1 \wedge S^{n-2}$ является H_p^t -диффеоморфным с S^{n-1} [37]. Мы получим неориентируемое H_p^t -псевдо-многообразие M , удовлетворяющее достаточным условиям.

Проективное пространство $\mathbf{R}P^n$ получается из сферы идентификацией диаметрально противоположных точек. Тогда возьмем M H_p^t -диффеоморфным с $\mathbf{R}P^n$ для $n > 1$, а также другие M с вырезанными подмножествами V_1, \dots, V_β H_p^t -диффеоморфными открытым подмножествам в $\mathbf{R}P^n$, $s_{0,q} \in (\bigcap_{j=a_1+\dots+a_{q-1}+1}^{a_1+\dots+a_q} \partial V_j) \cap \{x \in M : x_1 = 0\}$, $V_j \cap V_l = \emptyset$ для любых $j \neq l$, $a_0 := 0$, $a_1 + \dots + a_k = \beta$, $q = 1, \dots, k$. Тогда условия $2(i - v)$ или $(i - iii, iv', v)$ также выполнены для $\mathbf{R}P^n$ и M .

В силу предложения 2.14 [37] об H -группах $[X, x_0; K, k_0]$ не следует ожидать или иметь нужду в сильных условиях на класс допустимых многообразий M для построений групп оберток $(W^M E)_{t,H}$.

Если M_1 является аналитическим действительным многообразием, то взятие градуированного произведения с генераторами $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$ алгебры Кэли-Диксона дает \mathcal{A}_r -многообразие (смотри [17–19]). В частности, это дает $l2^r$ мерный тор в \mathcal{A}_r^l для l мерного действительного тора $\mathbf{T}_2 = (S^1)^l$ как M_1 .

Рассмотрим \mathbf{T}_2 . Его можно разрезать вдоль замкнутой кривой (петли) C H_p^∞ -диффеоморфной с S^1 и отмеченными точками $s_{0,q} \in C \subset \mathbf{T}_2$ так что C вращается на поверхности тора $\mathbf{T}_2 = S_R^1 \times S_b^1$ на угол π вокруг S_b^1 в то время как C вращается на 2π вокруг S_R^1 , так что C вращается на 4π вокруг S_R^1 , чтобы вернуться к начальной точке на C , где $0 < b < R < \infty$, $q = 1, \dots, k$, $k \in \mathbf{N}$. Поэтому разрез вдоль C тора \mathbf{T}_2 является неориентируемой лентой, которая неизбежно является лентой Мёбиуса с дважды большим числом отмеченных точек $\{s_{0,j}^L : j = 1, \dots, 2k\} \subset \partial L$.

Поэтому для $M = \mathbf{T}_2$ в качестве \hat{M} возьмем квадрант в \mathbf{R}^2 с $2k$ попарно противоположными отмеченными точками $\hat{s}_{0,q}$ и $\hat{s}_{0,q+k}$ на границе \hat{M} , $q = 1, \dots, k$, $k \in \mathbf{N}$. Подходящее склеивание граничных точек в $\partial \hat{M}$ дает отображение $\Xi : \hat{M} \rightarrow \mathbf{T}_2$, $\Xi(\hat{s}_{0,q}) = \Xi(\hat{s}_{0,q+k}) = s_{0,q}$, $q = 1, \dots, k$. Собственное разрезание \hat{M} на \hat{A}_j , $j = 1, 2$, или ленты Мёбиуса L индуцирует разрезание для \mathbf{T}_2 . Таким образом, мы получаем псевдо-подмногообразие $A_3(\mathbf{T}_2) =: A_3 \supset C$, в то время как A_1 и A_2 ретрагируемы в отмеченную точку $s_{0,q} \in C$ для любых q , следовательно, \mathbf{T}_2 удовлетворяет условиям $2(i - iii, iv', v)$. В силу следствия 9 существует вложение $\phi^* : (W^{\mathbf{T}_2, \{s_{0,q}: q=1, \dots, k\}} E)_{t,H} \rightarrow (W^{L, \{s_{0,q}^L: q=1, \dots, 2k\}} E)_{t,H}$, где $\phi : L \rightarrow \mathbf{T}_2$ является факторным отображением с $\phi(\{s_{0,q}^L, s_{0,q+k}^L\}) = \{s_{0,q}\}$, $q = 1, \dots, k$.

Для n -мерного тора \mathbf{T}_n в \mathcal{A}_r^a с $n > 2$ возьмем $n - 1$ -мерную поверхность B такую, что каждая её проекция в \mathbf{T}_2 является H_p^t -диффеоморфной с C для петли C как выше. Поэтому разрез вдоль B с точностью до H_p^t -диффеоморфизма дает $M_0 := L \times I^{n-2}$ для четного n или $M_0 := S^1 \times I^{n-1}$ для нечетного n , где $I = [0, 1]$. Так как I^m ретрагируема в точку, где $m \geq 1$. Таким образом мы легко получаем, что для \mathbf{T}_n псевдо-подмногообразие $A_3 \supset B$ и два подмногообразия A_1 и A_2 ретрагируемы в точки и удовлетворяют достаточным условиям $2(i - iii, iv', v)$, где $\hat{M} = I^n$ с точностью до H_p^t -диффеоморфизма, $s_{0,q} \in B \subset A_3 := A_3(\mathbf{T}_n)$, $\{s_{0,q}^{M_0}, s_{0,q+k}^{M_0}\} \subset \partial M_0$, $q = 1, \dots, k$, $k \in \mathbf{N}$. Подходящее разрезание многообразия \hat{M} на \hat{A}_j , $j = 1, 2$, индуцирует разрезание для \mathbf{T}_n . Таким образом, существует H_p^t факторное отображение $\phi : M_0 \rightarrow \mathbf{T}_n$ с $\phi(\{s_{0,q}^{M_0}, s_{0,q+k}^{M_0}\}) = \{s_{0,q}\}$ и вложение

$\phi^* : (W^{\mathbf{T}_n, \{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}} E)_{t,H} \hookrightarrow (W^{M_0, \{s_{0,q}^{M_0}:q=1,\dots,2k\}} E)_{t,H}$ благодаря следствию 9.

Более общим образом вырежем из \mathbf{T}_n открытые подмножества V_j , которые являются H_p^t -диффеоморфными внутренностям ограниченных квадрантов в \mathbf{R}^n вложенного в \mathcal{A}_r^l , $j = 1, \dots, \beta$, так что $s_{0,q} \in B \cap (\bigcap_{j=a_1+\dots+a_{q-1}+1}^{a_1+\dots+a_q} \partial V_j)$, $V_j \cap V_i = \emptyset$ для любых $j \neq i$, $V_j \cap B = \emptyset$ для любых j , где B определено с точностью до H_p^t диффеоморфизма, $a_0 := 0$, $a_1 + \dots + a_k = \beta$, $q = 1, \dots, k$, что дает многообразие M_2 . Тогда из M_0 аналогично вырежем соответствующие $V_{j,b}$, так что $s_{0,q} \in B \cap (\bigcap_{j=a_1+\dots+a_{q-1}+1}^{a_1+\dots+a_q} \partial V_{j,1})$, $s_{0,q+k} \in B \cap (\bigcap_{j=a_1+\dots+a_{q-1}+1}^{a_1+\dots+a_q} \partial V_{j,2})$, $V_{j,b_1} \cap V_{i,b_2} = \emptyset$ для любых $j \neq i$ или $b_1 \neq b_2$, $a_0 := 0$, $a_1 + \dots + a_k = \beta$, $q = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, \beta$, $b = 1, 2$, что дает многообразие M_1 . Мы выберем $V_{j,b}$, так что для ограничения $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ отображения ϕ выполняется равенство $\phi(V_{j,1} \cup V_{j,2}) = V_j$ для любых j , $\phi(\{s_{0,q}^{M_1}, s_{0,q+k}^{M_1}\}) = \{s_{0,q}\}$. Это дает вложение $\phi^* : (W^{M_2, \{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}} E)_{t,H} \hookrightarrow (W^{M_1, \{s_{0,q}^{M_1}:q=1,\dots,2k\}} E)_{t,H}$.

Другим примером является многообразие M_3 полученное из предыдущего M_2 с $2k$ отмеченными точками и 2β вырезанными областями V_j , когда $s_{0,q}$ отождествляется с $s_{0,q+k}$ и каждая граница ∂V_j склеивается с $\partial V_{j+\beta}$ для любых $j \in \lambda_q \subset \{d : a_1 + \dots + a_{q-1} + 1 \leq d \leq a_1 + \dots + a_q\}$, $q = 1, \dots, k$, $k \in \mathbf{N}$, посредством отношения эквивалентности v . Такое M_3 получается из тора $\mathbf{T}_{n,m}$ с m дырками вместо одной дырки в стандартном торе $\mathbf{T}_{n,1} = \mathbf{T}_n$ вырезанием из него V_j с $j \in \{1, \dots, 2\beta\} \setminus (\bigcup_{q=1,\dots,k} \lambda_q)$, где $m = m_1 + \dots + m_k$, $m_q := \text{card}(\lambda_q)$. Для \mathbf{T}_n и M_2 поверхность B является H_p^t -диффеоморфной с $(\partial L) \times I^{n-2}$ для четного n или $S^1 \times I^{n-1}$ для нечетного n . Возьмем $A_3 \supset B \cup (\bigcup_{j \in \lambda_q} v(\partial V_j))$, оно линейно связно и содержит все отмеченные точки. Поэтому, M_3 удовлетворяет условиям §2 и существует вложение $v^* : (W^{M_3, \{s_{0,q}^{M_3}:q=1,\dots,k\}} E)_{t,H} \hookrightarrow (W^{M_2, \{s_{0,q}^{M_2}:q=1,\dots,2k\}} E)_{t,H}$. Это также индуцирует вложение $(W^{\mathbf{T}_{n,m}, \{s_{0,q}^{\mathbf{T}_{n,m}}:q=1,\dots,k\}} E)_{t,H} \hookrightarrow (W^{\mathbf{T}_n, \{s_{0,q}^{\mathbf{T}_n}:q=1,\dots,2k-1\}} E)_{t,H}$, так что каждый элемент $g \in (W^{\mathbf{T}_{n,m}, \{s_{0,q}^{\mathbf{T}_{n,m}}:q=1,\dots,k\}} E)_{t,H}$ можно представить в виде произведения $g = (\dots(g_1 g_2) \dots g_m)$ из m элементов $g_j \in (W^{\mathbf{T}_n, \{s_{0,q}^{\mathbf{T}_n}:q=1,\dots,2k-1\}} E)_{t,H}$, $g_j = \langle f_j \rangle_{t,H}$, $\text{supp}(\pi \circ f_j) \subset B_j$, $B_1 \cup \dots \cup B_m = \mathbf{T}_n$, $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$ для всякого $i \neq j$, каждое B_j является каноническим замкнутым подмножеством в \mathbf{T}_n , $s_{0,1} \in B_1$, $s_{0,2q}, s_{2q+1} \in B_d$ для $m_1 + \dots + m_0 + 1 \leq d \leq m_1 + \dots + m_q$, $q = 1, \dots, k-1$, где $m_0 := 0$.

Очевидно, что в общем случае для различных многообразий M и N группы оберток могут быть неизоморфными. Например, в качестве M_1 возьмем сферу S^n размерности $n > 1$, а как M_2 возьмем $M_1 \setminus K$, где K является с точностью до H_p^t -диффеоморфизма объединением непересекающихся внутренностей B_j квадрантов диаметров d_1, \dots, d_s значительно меньше, чем 1, $K = B_1 \cup \dots \cup B_l$, $l \in \mathbf{N}$. Пусть N будет δ -раздутием для M_2 в \mathbf{R}^{n+1} относительно метрики последнего евклидова пространства, где $0 < \delta < \min(d_1, \dots, d_l)/2$. Тогда группы $(W^{M_1} N)_{t,H}$ и $(W^{M_2} N)_{t,H}$ не изоморфны. Это легко следует из рассмотрения элемента $b := \langle f \rangle_{t,H} \in (W^{M_2} N)_{t,H}$, где $f : M_2 \rightarrow N$ является тождественным вложением индуцированным структурой δ -раздутием.

Напомним, что для ориентируемого замкнутого многообразия A и B той же размерности m степень непрерывного отображения $f : A \rightarrow B$ определяется как целое число $\text{deg}(f) \in \mathbf{Z}$ такое, что $f_*[A] = \text{deg}(f)[B]$, где $[A] \in H_m(A)$ или $[B] \in H_m(B)$ обозначает генератор, определяемый ориентацией A или B соответственно [5]. Рассмотрим отображения $f_j : S^n \rightarrow N$ такие, что $V_j \supset \partial B_j \cap N$, где V_j является областью в \mathbf{R}^{n+1} ограниченной гиперповерхностью $f_j(B_j)$, f_j возьмем равным w_0 на каждом B_i с $i \neq j$, в то время как степень отображения f_j из S^n в $f_j(S^n)$ равна единице. Если бы существовал изоморфизм $\theta : (W^{M_2} N)_{t,H} \rightarrow (W^{M_1} N)_{t,H}$, то $\theta(b)$ имело бы нетривиальное разложение в сумму несокращающихся ненулевых слагаемых, которое индуцировано отображениями $f_j : S^n \rightarrow N$. Однако элемент b в $(W^{M_2} N)_{t,H}$ не имеет такого разложения.

Если две группы G_1 и G_2 не изоморфны, то, конечно, $(W^M E; N, G_1, \mathbf{P})_{t,H}$ и $(W^M E; N, G_2, \mathbf{P})_{t,H}$ не изоморфны.

Конструкцию группы оберток можно распространить на локально компактное некомпактное M удовлетворяющее условиям $2(ii - iv)$ или (ii, iii, iv') меняя (v) , так что \hat{M} является локально компактной некомпактной H_p^t -областью в \mathcal{A}_r^l , его граница $\partial\hat{M}$ может оказаться пустой. Для этого достаточно ограничить семейство функций, наложив условие, что функции имеют компактные носители $f : M \rightarrow W$ относительно $w_0 : M \rightarrow W$, то есть, носитель $\text{supp}_{w_0}(f) := \text{cl}_M\{x \in M : f(x) \neq y_0 \times e\}$ компактен, $\text{cl}_M A$ обозначает замыкание подмножества A в M . Тогда классы эквивалентных элементов даются с помощью замыканий орбит группы всех H_p^t диффеоморфизмов g с компактными носителями сохраняющими отмеченные точки $\text{Dif}_{p,c}^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\})$, то есть, $\text{supp}_{id}(g) := \text{cl}_M\{x \in M : g(x) \neq x\}$ компактны, где $id(x) = x$ для любых $x \in M$. Тогда группы оберток $(W^M E)_{t,H}$ для многообразий M таких как однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический гиперболоид, гиперболический параболоид и так далее или для больших размерностей многообразий над \mathcal{A}_r . Для некомпактного локально компактного многообразия можно рассмотреть бесконечное счетное дискретное множество отмеченных точек или изолированных сингулярностей. Эти примеры можно естественным образом обобщить для определенных заузленных многообразий возникающих из рассмотренных выше.

Милнор и Лефшец использовали окружность $M = S^1$ и тривиальную группу $G = \{e\}$, а также подгруппу диффеоморфизмов сохраняющих ориентацию и отмеченную точку в S^1 . Поэтому их группа петель $L(S^1, N)$ может быть некоммутативной. Итерированная группа петель $L(S^1, L(S^{n-1}, N))$ изоморфна с $L(S^n, N)$, где последняя группа снабжена равномерностью из итерированной группы петель, поэтому n раз итерированная группа петель окружности S^1 дает группу петель S^n [6]. При $\dim_{\mathbf{R}} M > 1$ сохранение ориентации теряет свое значение. Здесь выше была использована группа диффеоморфизмов без требования на сохранение ориентации многообразия M , так что две копии M в букете уже не различаются в классах эквивалентности функций и для коммутативной группы G это дает коммутативную группу оберток.

Отметим для сравнения группы гомотопий, которые как известно являются фактор-группами классических групп петель. Группа $\pi_q(X)$ для топологического пространства X с отмеченной точкой x_0 в силу предложения 17.1 (b) [2] коммутативна при $q > 1$. Для $q = 1$ фундаментальная группа $\pi_1(X)$ может быть некоммутативной, но она всегда коммутативна в частном случае, когда $X = G$ является линейно связной топологической группой (смотри §49(G) в [32]).

11. Предложение. Пусть $L(S^1, N)$ является H_p^1 группой петель в классическом смысле. Тогда итерированная группа петель $L(S^1, L(S^1, N))$ коммутативна.

Доказательство. Рассмотрим два элемента $a, b \in L(S^1, L(S^1, N))$ и два отображения $f \in a, g \in b, (f(x))(y) = f(x, y) \in N$, где $x, y \in I = [0, 1] \subset \mathbf{R}, e^{2\pi x} \in S^1$. Обратный элемент d^{-1} для $d \in L(S^1, N)$ определяется как класс эквивалентности $d^{-1} = \langle h^- \rangle$, где $h \in d, h^-(x) := h(1 - x)$. Тогда

(1) $f(x, 1-y) = (f(x))(1-y) \in a^{-1}$ и $g(x, 1-y) = (g(x))(1-y) \in b^{-1}$ для $L(S^1, L(S^1, N))$ и симметрично

(2) $(f(y))(1-x) = f(1-x, y) \in a^{-1}$ и $(g(y))(1-x) = g(1-x, y) \in b^{-1}$. С другой стороны, $f \vee g$ соответствует ab , и $g \vee f$ соответствует ba , где приведенное произведение $S^1 \wedge S^1$ является H_p^t -диффеоморфным с S^2 в смысле псевдо-многообразий с точностью до критических подмножеств коразмерности не менее двух.

Рассмотрим $(S^1 \vee S^1) \wedge (S^1 \vee S^1)$ и $(f \vee w_0) \vee (w_0 \vee g)$ и $(g \vee w_0) \vee (w_0 \vee f)$ и итерированное отношение эквивалентности $R_{1,H}$. Эта ситуация соответствует $\hat{M} = I^2$ раз-

деленному на четыре квадрата отрезками прямых линий $\{1/2\} \times [0, 1]$ и $[0, 1] \times \{1/2\}$ с соответствующими областями определений для f, g и w_0 в рассматриваемом букете, где $\langle f \vee w_0 \rangle = \langle w_0 \vee f \rangle = \langle f \rangle$ – это тот же класс эквивалентных элементов.

Поскольку $G = \{e\}$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, то $g(1-x, y) \vee f(1-x, y)$ принадлежит тому же классу эквивалентных элементов как и $g(x, 1-y) \vee f(x, 1-y)$. Но в силу включений (1, 2) $\langle g(1-x, y) \vee f(1-x, y) \rangle = \langle f(x, y) \vee g(x, y) \rangle^{-1}$ и $\langle f(x, y) \vee g(x, y) \rangle = \langle g(x, 1-y) \vee f(x, 1-y) \rangle^{-1}$ и $\langle h(x, y) \rangle^{-1} = \langle h(x, 1-y) \rangle = \langle h(1-x, y) \rangle$ для $h \in ab$, следовательно, $\langle h(x, y) \rangle = \langle h(1-x, 1-y) \rangle$ и $\langle (f \vee g)(x, 1-y) \rangle = \langle f(x, 1-y) \vee g(x, 1-y) \rangle \in (ab)^{-1}$, так как имеется отображение $(x, y) \mapsto (1-x, 1-y)$ при перестановке двух сфер в букете $S^2 \vee S^2$. Следовательно, $a^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ и неизбежно $ab = ba$.

12. Теорема. Пусть M и N – это два связанных одновременно или C^∞ римановых или \mathcal{A}_r голоморфных многообразий с углами, где M компактно и $\dim M \geq 1$, и $\dim N > 1$. Тогда $(W^M N)_{t,H}$ не имеет никакой нетривиальной непрерывной локальной одно-параметрической под-группы g^b для $b \in (-\epsilon, \epsilon)$ $\epsilon > 0$.

Доказательство. Предположим противное, что $\{g^b : b \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ $\epsilon > 0$ является локальной нетривиальной одно-параметрической под-группой, то есть, $g^b \neq e$ для $b \neq 0$. Тогда элементу g^δ для отмеченного $0 < \delta < \epsilon$ соответствует $f = f_\delta \in H_p^\infty$, так что $\langle f \rangle_{t,H} = g^\delta$, где $f \in H_p^t$. Если $f(U) = \{y_0 \times e\}$ для достаточно малой связной открытой окрестности U точки $s_{0,q}$ в M , то существует последовательность $f \circ \psi_n$ в классе эквивалентности $\langle f \rangle_{t,H}$ с семейством диффеоморфизмов $\psi_n \in \text{Diff}_p^t(M; \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\})$, так что $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} \psi_n(U) = 0$ и $\bigcap_{n=1}^\infty \psi_n(U) = \{s_{0,q}\}$. Если $h(x) \neq y_0$, то в силу непрерывности h существует открытая окрестность P точки x в M такая, что $y_0 \notin h(P)$. Рассмотрим ковариантное дифференцирование ∇ на многообразии M (смотри [12]). Множество S_h точек, где $\nabla^k h$ является разрывным образует под-многообразие коразмерности не менее единицы, следовательно, меры нуль относительно риманова элемента объема в M . Для других точек x в M , $x \in M \setminus S_h$, все $\nabla^k h$ непрерывны.

Возьмем тогда открытое подмножество $V = V(f)$ в M такое, что $V \supset U$ и $\nabla_\nu^k f|_{\partial V} \neq 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, где $\nabla_\nu f(x) := \lim_{z \rightarrow x, z \in M \setminus V} \nabla_\nu f(z)$, ν – это нормаль (перпендикуляр) к ∂V в M в точке x границы ∂V подмножества V в M . Практически возьмем минимальное $k = k(x)$ с таким свойством. Поскольку M компактно и $\partial V := \text{cl}(V) \cap \text{cl}(M \setminus V)$ замкнуто в M , то ∂V компактно. Функция $x \mapsto k(x) \in \mathbb{N}$ непрерывна, так как f и $\nabla^l f$ для любых l непрерывны. Но \mathbb{N} дискретно, следовательно, каждое $\partial_q V := \{x \in \partial V : k(x) = q\}$ открыто в V . Поэтому, ∂V является конечным объединением из $\partial_q V$, $1 \leq q \leq q_m$, где $q_m := \max_{x \in \partial V} k(x) < \infty$ для $f = f_\delta$, так как ∂V компактно. Таким образом, существует подмножество $\lambda \subset \{1, \dots, q_m\}$ такое, что $\partial V = \bigcup_{q \in \lambda} \partial_q V$ и $\partial_q V \neq \emptyset$ для любых $q \in \lambda$. Если $\nabla^l f(x) = 0$ для $l = 1, \dots, k(x) - 1$ и $\nabla^{k(x)} f(x) \neq 0$, тогда $\nabla^{k(x)} f(\psi(y)) = \nabla^{k(x)}(\psi(y)) \cdot (\nabla \psi(y))^{\otimes k(x)} \neq 0$ для $y \in M$, так что $\psi(y) = x$, так как $\nabla \psi(y) \neq 0$, где $\psi \in \text{Diff}_p^\infty(M; \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\})$.

Мы можем взять $\epsilon > 0$ такое, что $\{g^b : b \in (-\epsilon, \epsilon)\} \subset U$, где $U = -U$ – это связная симметричная открытая окрестность единичного элемента e в $(W^M N)_{t,H}$. Поскольку $g^{b_1} + g^{b_2} = g^{b_1+b_2}$ для любых $b_1, b_2, b_1 + b_2 \in (-\epsilon, \epsilon)$, то $\lim_{t \rightarrow 0} g^t = e$ для локальной однопараметрической под-группы и, в частности, $\lim_{m \rightarrow \infty} g^{1/m} = e$, где $m \in \mathbb{N}$. Возьмём $\delta = \delta_m = 1/m$ и $f = f_m \in H_p^\infty$, так что $\langle f_m \rangle_{t,H} = g^{1/m}$. С другой стороны, $jg^{1/m} = g^{j/m}$ для любых $j < m\epsilon$, $j \in \mathbb{N}$, следовательно, $f_{j/m}(M) = f_{1/m}(M)$ для любых $j < m\epsilon$, так как $f \vee h(M \vee M) = f(M) \vee h(M)$ и используя вложение η моноида $(S^M N)_{t,H}$ в группу $(W^M N)_{t,H}$.

Функция $|\nabla_\nu^{k(x)} f_\delta(x)|$ для $x \in \partial V$ непрерывна по δ благодаря теореме вложения Соболева [27], $0 < \delta < \epsilon$, следовательно, $\inf_{x \in \partial V} |\nabla_\nu^{k(x)} f_\delta(x)| > 0$, так как ∂V компактно. Мы можем выбрать семейство f_δ такое, что $z^{(l)}(\delta, x) := \nabla^l f_\delta(x)$ непрерыв-

на для любых $0 \leq l \leq k_0$ по $(\delta, x) \in (-\epsilon, \epsilon) \times M$, так как $\{g^b : b \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ – это непрерывная по b однопараметрическая подгруппа, где $k_0 := q_m(\delta_0)$. Поэтому, для этого семейства существует окрестность $[-\epsilon + c, \epsilon - c]$ такая, что $\delta_0 \in [-\epsilon + c, \epsilon - c] \subset (-\epsilon, \epsilon)$ с $0 < c < \epsilon/3$, так что $q_m(\delta) \leq k_0$ для любых $\delta \in [-\epsilon + c, \epsilon - c]$ с подходящим выбором $V(f_\delta)$, так как \mathbf{N} дискретно. С другой стороны, $\sup_{x \in \partial V(f_\delta), 0 < \delta \leq \epsilon - c} |\nabla_\nu^{k(x)} f_\delta(x)| \leq \sup_{x \in M, 0 < \delta \leq \epsilon - c} |\nabla_\nu^{k(x)} f_\delta(x)| =: B < \infty$, так как M и $[-\epsilon + c, \epsilon - c]$ компактны.

Тогда для этого семейства существует окрестность $[-\epsilon + c, \epsilon - c]$ такая, что $\delta_0 \in [-\epsilon + c, \epsilon - c] \subset (-\epsilon, \epsilon)$ с $0 < c < \epsilon/3$, так что $q_m(\delta) \leq k_0$ для любого $\delta \in [-\epsilon + c, \epsilon - c]$ с подходящим выбором $V(f_\delta)$, так как \mathbf{N} дискретно.

Тогда $\lim_{\delta \rightarrow 0, \delta > 0} |\nabla_\nu^{k(x)} f_\delta(x)| =: b > 0$ для $x \in \partial V$ с подходящим выбором $V = V(f_\delta)$, так как M связно, $\dim M \geq 1$ и $\inf_{m \in \mathbf{N}} \text{diam} f_{j/m}(M) > 0$ для отмеченного $\delta_0 = j/m_0 < \epsilon$ с $j, m > m_0 \in \mathbf{N}$ взаимно простых, $(j, m) = 1$, $(j, m_0) = 1$. Классу эквивалентности $\langle f_{l/m} \rangle_{t, H}$ соответствует l -кратный букет $\langle f_{1/m} \rangle_{t, H} \vee \dots \vee \langle f_{1/m} \rangle_{t, H} =: \langle f_{1/m} \rangle_{t, H}^{\vee l}$. Таким образом, существует константа $C = \text{const} > 0$ для M такая, что $|\nabla_\nu^{k(x)} f_{l/m}(x)| \geq Cl \inf_{y \in \partial V(f_{1/m})} |\nabla_\nu^{k(y)} f_{1/m}(y)| \geq Clb$, где $C > 0$ фиксировано для выбранного атласа $At(M)$ с данными связывающими отображениями $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ карт.

Рассмотрим $\delta_0 \leq l/m < \epsilon - c$ и m и l стремящиеся к бесконечности. Тогда это дает $B \geq Clb$ для любых $l \in \mathbf{N}$, что является противоречивым неравенством, следовательно, $(W^M N)_{t, H}$ не содержит никакой нетривиальной локальной однопараметрической подгруппы.

Литература

- [1] E. J. Beggs. "The de Rham complex of infinite dimensional manifolds". Quart. J. Math. Oxford (2) **38** (1987), 131–154.
- [2] Р. Ботт, Л. В. Ту. "Дифференциальные формы в алгебраической топологии" (Москва: Наука, 1989).
- [3] Г. Бредон. "Теория пучков" (Москва: Наука, 1988).
- [4] P. Gajer. "Higher holonomies, geometric loop groups and smooth Deligne cohomology". in: "Advances in geometry". J.-L. Brylinski ed. Progr. Math. V. **172**, P. 195–235 (Boston: Birkhäuser, 1999).
- [5] Y. H. Ding, J. Z. Pang. "Computing degree of maps between manifolds", Acta Mathem. Sinica. English Series. **21: 6** (2005), 1277–1284.
- [6] G. Emch. "Mèchanique quantique quaternionienne et Relativité restreinte". Helv. Phys. Acta **36** (1963), 739–788.
- [7] Р. Энгелькинг. "Общая топология" (Москва: Мир, 1986).
- [8] P. Gajer. "Higher holonomies, geometric loop groups and smooth Deligne cohomology". In: "Advances in geometry". Progr. in Math. **172**, 195–235 (Boston: Birkhäuser, 1999).
- [9] F. Gürsey, C.-H. Tze. "On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics" (Singapore: World Scientific Publ. Co., 1996).
- [10] У. Р. Гамильтон. "Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы" (Москва: Наука, 1994).
- [11] C. J. Isham. "Topological and global aspects of quantum theory". In: "Relativity, groups and topology. II" 1059–1290, (Les Hauches, 1983). Editors: R. Stora, B. S. De Witt (Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1984).
- [12] W. Klingenberg. "Riemannian geometry" (Berlin: Walter de Gruyter, 1982).
- [13] S. Lang. "Algebra" (New York: Addison-Wesley, 1965).
- [14] H. B. Lawson, M.-L. Michelson. "Spin geometry" (Princeton: Princ. Univ. Press, 1989).

- [15] С. В. Людковский. "Квази-инвариантные меры на группах петель римановых многообразий", Докл. Акад. Наук **370: 3** (2000), 306–308.
- [16] S. V. Ludkovsky. "Poisson measures for topological groups and their representations". Southeast Asian Bulletin of Mathematics. **25** (2002), 653–680. (shortly in Russ. Math. Surv. **56: 1** (2001), 169–170; previous versions: **IHES/M/98/88**, 38 pages, also Los Alamos Nat. Lab. **math.RT/9910110**).
- [17] S. V. Ludkovsky. "Functions of several Cayley-Dickson variables and manifolds over them", J. Mathem. Sci. **141: 3** (2007), 1299–1330 (previous variant: Los Alamos Nat. Lab. **math.CV/0302011**).
- [18] С. В. Людковский. Соврем. Матем. Фундам. Направл. "Нормальные семейства функций и группы псевдоконформных диффеоморфизмов кватернионных и октонионных переменных", **18** (2006), 101–164 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. **math.DG/0603006**).
- [19] S. V. Ludkovsky, F. van Oystaeyen. Bull. Sci. Math. (Paris). Ser. 2. "Differentiable functions of quaternion variables", **127** (2003), 755–796.
- [20] С. В. Людковский. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. "Дифференцируемые функции чисел Кэли-Диксона", **1: (3)** (2005), 93–140 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. **math.NT/0406048**; **math.CV/0406306**; **math.CV/0405471**).
- [21] S. V. Ludkovsky. J. Mathem. Sci. "Stochastic processes on geometric loop groups, diffeomorphism groups of connected manifolds, associated unitary representations", **141: 3** (2007), 1331–1384 (previous version: Los Alam. Nat. Lab. **math.AG/0407439**, July 2004).
- [22] S. V. Ludkovsky. "Geometric loop groups and diffeomorphism groups of manifolds, stochastic processes on them, associated unitary representations". In the book: "Focus on Groups Theory Research" (Nova Science Publishers, Inc.: New York) 2006, pages 59–136.
- [23] S. V. Ludkovsky. J. Mathem. Sci. "Generalized geometric loop groups of complex manifolds, Gaussian quasi-invariant measures on them and their representations", **122: 1** (2004), 2984–3011 (earlier version: Los Alam. Nat. Lab. **math.RT/9910086**, October 1999).
- [24] М. Б. Менский. "Группа путей. Измерение. Поля. Частицы" (Москва: Наука, 1983).
- [25] В. П. Михайлов. "Дифференциальные уравнения в частных производных" (Москва: Наука, 1976).
- [26] P. W. Michor. "Manifolds of differentiable mappings" (Shiva, Boston, 1980).
- [27] J. Milnor. "Morse theory" (Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1963).
- [28] N. Murakoshi, K. Sekigawa, A. Yamada. "Integrability of almost quaternionic manifolds". Indian J. Mathem. **42: 3**, 313–329 (2000).
- [29] L. Narici, E. Beckenstein. "Topological vector spaces". New York: Marcel-Dekker Inc., 1985.
- [30] H. Omori. "Groups of diffeomorphisms and their subgroups". Trans. Amer. Math. Soc. **179** (1973), 85–122.
- [31] H. Omori. "Local structures of groups of diffeomorphisms". J. Math. Soc. Japan **24: 1** (1972), 60–88.
- [32] Л. С. Понтрягин. "Непрерывные группы" (Москва: Наука, 1984).
- [33] R. T. Seeley. "Extensions of C^∞ functions defined in a half space", Proceed. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 625–626.
- [34] J. M. Souriau. "Groupes différentiels" (Berlin: Springer Verlag, 1981).
- [35] Р. Зуланке, П. Виттен. "Дифференциальная геометрия и расслоения" (Москва: Мир, 1975).
- [36] R. C. Swan. "The Grothendieck ring of a finite group", Topology **2** (1963), 85–110.
- [37] Р. М. Свитцер. "Алгебраическая топология – гомотопии и гомологии" (Москва: Наука, 1985).
- [38] J. C. Tougeron. "Ideaux de fonctions différentiables" (Berlin: Springer-Verlag, 1972).
- [39] K. Yano, M. Ako. "An affine connection in almost quaternion manifolds". J. Differ. Geom. **3** (1973), 341–347.

Wrap groups of quaternion and octonion fiber bundles

S. V. Ludkovsky

MIREA

sludkowski@mail.ru

This article is devoted to the investigation of wrap groups of connected fiber bundles over the fields of real \mathbf{R} , complex \mathbf{C} numbers, the quaternion skew field \mathbf{H} and the octonion algebra \mathbf{O} . These groups are constructed with mild conditions on fibers. Their examples are given. It is shown, that these groups exist and for differentiable fibers have the infinite dimensional Lie groups structure, that is, they are continuous or differentiable manifolds and the composition $(f, g) \mapsto f^{-1}g$ is continuous or differentiable depending on a class of smoothness of groups. Moreover, it is demonstrated that in the cases of real, complex, quaternion and octonion manifolds these groups have structures of real, complex, quaternion or octonion manifolds respectively. Nevertheless, it is proved that these groups does not necessarily satisfy the Campbell-Hausdorff formula even locally.

Key words: wrap groups, fiber bundles, hypercomplex algebra, quaternion, octonion.

СТРУКТУРА ГРУПП ОБЕРТОК ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ РАССЛОЕНИЙ

С. В. Людковский

Московский государственный технический университет МИРЭА

sludkowski@mail.ru

Данная статья посвящена исследованию структуры групп обёрток связных расслоений над полями вещественных \mathbf{R} , комплексных \mathbf{C} чисел, телом кватернионов \mathbf{H} и октонионной алгеброй \mathbf{O} , а также коммутативной квадра-алгеброй. Более того, изучаются итерированные группы обёрток. Построены их скрещенные (smashed, букв. "разбитые") произведения.

Ключевые слова: группы обёрток, расслоения, скрещенные произведения, гиперкомплексные алгебры, кватернионы, октавы.

1 Введение

Геометрические группы петель окружности впервые были введены Лефшецем в 1930-х годах, и потом их конструкция была пересмотрена Милнором в 1950-х годах. Лефшец использовал C^0 -равномерность на семействах непрерывных отображений, что приводило к необходимости комбинирования его конструкции со структурой свободной группы с помощью слов. Позже Милнор использовал соболевскую H^1 -равномерность, что позволило ввести групповую структуру более естественным образом [28].

Конструкция Лефшеца очень ограниченная, потому что она оперирует с C^0 равномерностью непрерывных отображений в компактно-открытой топологии. Даже для сфер S^n размерности $n > 1$ она не работает напрямую, но использует построение итерированных групп петель окружности. Затем их конструкция была обобщена для расслоений над окружностью и сферами со структурами параллельного переноса над \mathbf{C} . Гладкие когомологии Делигне также изучались на таких группах [6].

Группы обёрток кватернионных и октонионных расслоений, а также более широких классов расслоений над \mathbf{R} или \mathbf{C} были определены и даны их примеры вместе с основными теоремами в предыдущей работе автора [14]. В той статье построение групп обёрток было выполнено с помощью соболевских равномерностей, что позволило рассмотреть более широкие семейства многообразий и расслоений. Данная статья продолжает предыдущие работы автора на эту тему [14, 15, 21–23]. Группы обёрток являются обобщениями геометрических групп петель со сферы на более широкие классы многообразий и расслоений над ними.

Геометрические группы петель имеют важные применения в современных физических теориях (смотри [11, 25] и ссылки там). Группы петель также интенсивно используются в калибровочной теории. Группы обёрток можно использовать в теории мембран, которая является обобщением теории струн (суперструн). Ввиду работ Вильсона об описании удержания кварков эти группы также полезны и в области теории кварков [5, 39].

В статье [14] группы обёрток расслоений над кватернионами и октонионами были определены и исследованы и их многочисленные примеры были описаны. Данная статья посвящена исследованию их структуры и использует обозначения и результаты предыдущей работы. Кроме кватернионов и октонионов также рассматриваются вещественные и комплексные расслоения с группами обёрток для них. Более того, группы

обёрток расслоений над гиперкомплексными числами такими как H_n , в частности, квадрата алгебра, также изучаются. Для таких алгебр выделены частные случаи коммутативных структур с группами обёрток. Построены скрещенные произведения групп обёрток. Изучаются также итерированные группы обёрток.

Все главные результаты этой статьи получены впервые и они даются в теоремах 2, 6, 9, 10, 20, 21, 23, предложениях 3, 7, 8, 12, 13, 17 и следствии 11.

Напомним основные определения и обозначения.

1. Замечание. Обозначим через \mathcal{A}_r алгебру Кэли-Диксона такую, что $\mathcal{A}_0 = \mathbf{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}$, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$ – это тело кватернионов, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{O}$ – это октонионная алгебра. Далее мы рассмотрим лишь значения $0 \leq r \leq 3$.

Мы рассматриваем не только ассоциативные группы G , но также слабо ассоциативные, другими словами альтернативные, (квази-) группы с аксиомой ассоциативности заменённой на $a(ab) = (aa)b$ и $(ba)a = b(aa)$, и $a^{-1}(ab) = b$, и $(ba)a^{-1} = b$ для всех $a, b \in G$. Для краткости мы пишем группа вместо ассоциативная группа или альтернативная (квази-) группа. Это ясно из содержания ниже.

2.1. Замечание. Если M есть метризуемое пространство и $K = K_M$ – это замкнутое подмножество в M коразмерности $\text{codim}_{\mathbf{R}} N \geq 2$, так что $M \setminus K = M_1$ – это многообразие с углами над \mathcal{A}_r , тогда мы назовём M псевдо-многообразием над \mathcal{A}_r , где K_M – это критическое подмножество.

Два псевдо-многообразия B и C называются диффеоморфными, если $B \setminus K_B$ диффеоморфны с $C \setminus K_C$ как многообразия с углами (смотри также [6, 26]).

Возьмём на M борелевскую σ -аддитивную меру ν такую, что ν на $M \setminus K$ совпадает с римановым элементом объёма $\nu(K) = 0$, так как вещественная тень M_1 имеет его.

Равномерное пространство $H_p^t(M_1, N)$ всех непрерывных кусочно H^t соболевских отображений из M_1 в N вводится стандартным образом [21, 22], что индуцирует $H_p^t(M, N)$ равномерное пространство всех непрерывных кусочно H^t соболевских отображений на M , так как $\nu(K) = 0$, где $\mathbf{R} \ni t \geq [m/2] + 1$, m обозначает размерность M над \mathbf{R} , $[k]$ обозначает целую часть числа $k \in \mathbf{R}$, $[k] \leq k$. Тогда мы положим $H_p^\infty(M, N) = \bigcap_{t > m} H_p^t(M, N)$ с соответствующей равномерностью.

Для многообразий над \mathcal{A}_r с $1 \leq r \leq 3$ возьмём $H_p^t(M, N)$ как пополнение всех непрерывных кусочно \mathcal{A}_r -голоморфных отображений из M в N относительно H_p^t равномерности, где $[m/2] + 1 \leq t \leq \infty$. Далее мы рассмотрим псевдо-многообразия со связывающими отображениями карт непрерывными в M и класса $H_p^{t'}$ в $M \setminus K_M$ при $0 \leq r \leq 3$, где $t' \geq t$.

2.2. Замечание. Поскольку октонионная алгебра \mathbf{O} неассоциативная, то мы рассмотрим неассоциативную под (квази-) группу G семейства $Mat_q(\mathbf{O})$ всех квадратных $q \times q$ матриц с элементами из \mathbf{O} . Более общим образом G – это группа, которая имеет структуру H_p^t многообразия над \mathcal{A}_r и групповые операции являются H_p^t отображениями. (Квази-) Группа G может быть неассоциативной при $r = 3$, но G предполагается альтернативной, то есть, $(aa)b = a(ab)$ и $a(a^{-1}b) = b$ для любых $a, b \in G$.

Как обобщение псевдо-многообразий используется следующее (над \mathbf{R} и \mathbf{C} смотри [6, 34]). Предположим, что M – это хаусдорфово топологическое пространство размерности в смысле покрытий $\dim M = m$, снабжённое семейством $\{h : U \rightarrow M\}$ так называемых локализаций (plots) h , которые являются непрерывными отображениями, удовлетворяющими условиям (D1 – D4):

(D1) каждая локализация имеет в качестве области выпуклое подмножество U в \mathcal{A}_r^n , $n \in \mathbf{N}$;

(D2) если $h : U \rightarrow M$ есть локализация, V – это выпуклое подмножество в \mathcal{A}_r^l и $g : V \rightarrow U$ есть H_p^t отображение, тогда $h \circ g$ – это также локализация, где $t \geq [m/2] + 1$;

(D3) всякое постоянное отображение из выпуклого подмножества U содержащегося в \mathcal{A}_r^n в M является локализацией;

(D4) если U – это \mathcal{A}_r – выпуклое множество в \mathcal{A}_r^n и $\{U_j : j \in J\}$ есть покрытие множества U выпуклыми множествами в \mathcal{A}_r^n , каждое U_j открыто в U , $h : U \rightarrow M$ таково, что каждое ограничение $h|_{U_j}$ является локализацией, тогда h – это также локализация. Тогда M называется H_p^t -дифференцируемым пространством.

Отображение $f : M \rightarrow N$ между двумя H_p^t -дифференцируемыми пространствами называется дифференцируемым, если оно непрерывно и для любых локализаций $h : U \rightarrow M$ композиция $f \circ h : U \rightarrow N$ является локализацией для N . Топологическая группа G называется H_p^t -дифференцируемой группой, если её групповые операции являются H_p^t -дифференцируемыми отображениями.

Пусть E, N, F – это $H_p^{t'}$ -псевдо-многообразия или $H_p^{t'}$ -дифференцируемые пространства над \mathcal{A}_r , пусть также G есть $H_p^{t'}$ группа над \mathcal{A}_r , $t \leq t' \leq \infty$. Расслоение $E(N, F, G, \pi, \Psi)$ с пространством расслоения E , базой N , типичным слоем F и структурной группой G над \mathcal{A}_r , проектором $\pi : E \rightarrow N$ и атласом Ψ определяются стандартным образом [6, 26, 36] с условием, что связывающие отображения принадлежат $H_p^{t'}$ классу гладкости, так что для $r = 3$ структурная группа может быть неассоциативной, но альтернативной.

Локальные тривиализации $\phi_j \circ \pi \circ \Psi_k^{-1} : V_k(E) \rightarrow V_j(N)$ индуцируют $H_p^{t'}$ -равномерность в семействе W всех главных $H_p^{t'}$ -расслоений $E(N, G, \pi, \Psi)$, где $V_k(E) = \Psi_k(U_k(E)) \subset X^2(G)$, $V_j(N) = \phi_j(U_j(N)) \subset X(N)$, где $X(G)$ и $X(N)$ являются \mathcal{A}_r -векторными пространствами, на которых G и N моделируются, $(U_k(E), \Psi_k)$ и $(U_j(N), \phi_j)$ – 0 это карты атласов E и N , $\Psi_k = \Psi_k^E$, $\phi_j = \phi_j^N$.

Если $G = F$ и G действует на самой себе левыми сдвигами, тогда расслоение называется главным расслоением и обозначается через $E(N, G, \pi, \Psi)$. Может быть частный случай $G = \mathcal{A}_r^*$, где \mathcal{A}_r^* обозначает мультипликативную (квази-) группу $\mathcal{A}_r \setminus \{0\}$. Если $G = F = \{e\}$, тогда E сводится к N .

3. Определения. Пусть M – это связное H_p^t -псевдо-многообразие над \mathcal{A}_r , $0 \leq r \leq 3$, а также выполнены следующие условия:

- (i) M компактно;
- (ii) M является объединением двух замкнутых подмножеств над \mathcal{A}_r A_1 и A_2 , которые являются псевдо-многообразиями, и которые являются каноническими замкнутыми подмножествами в M с $A_1 \cap A_2 = \partial A_1 \cap \partial A_2 =: A_3$ и коразмерностью над \mathbf{R} для A_3 в M равной единице, $\text{codim}_{\mathbf{R}} A_3 = 1$, также A_3 есть псевдо-многообразие;
- (iii) имеется конечное множество отмеченных точек $s_{0,1}, \dots, s_{0,k}$ в $\partial A_1 \cap \partial A_2$, более того, ∂A_j линейно связны $j = 1, 2$;
- (iv) $A_1 \setminus \partial A_1$ и $A_2 \setminus \partial A_2$ являются H_p^t -диффеоморфными с $M \setminus [\{s_{0,1}, \dots, s_{0,k}\} \cup (A_3 \setminus \text{Int}(\partial A_1 \cap \partial A_2))]$ посредством отображений $F_j(z)$, где $j = 1$ или $j = 2$, $\infty \geq t \geq [m/2] + 1$, $m = \text{dim}_{\mathbf{R}} M$, так что $H^t \subset C^0$ в силу теоремы вложения Соболева [27], где внутренность $\text{Int}(\partial A_1 \cap \partial A_2)$ берётся в $\partial A_1 \cup \partial A_2$.

Вместо (iv) мы также рассмотрим случай

- (iv') M, A_1 и A_2 таковы, что $(A_j \setminus \partial A_j) \cup \{s_{0,1}, \dots, s_{0,k}\}$ являются $C^0([0, 1], H_p^t(A_j, A_j))$ -ретрагируемыми на $X_{0,q} \cap A_j$, где $X_{0,q}$ – это замкнутое линейно связное подмножество в M , $j = 1$ или $j = 2$, $s_{0,q} \in X_{0,q}$, $X_{0,q} \subset K_M$, $q = 1, \dots, k$, $\text{codim}_{\mathbf{R}} K_M \geq 2$.

Пусть \hat{M} – это компактное связное H_p^t -псевдо-многообразие, которое канонически замкнуто в \mathcal{A}_r^t с границей $\partial \hat{M}$ и отмеченными точками $\{\hat{s}_{0,q} \in \partial \hat{M} : q = 1, \dots, 2k\}$ и H_p^t -отображениями $\Xi : \hat{M} \rightarrow M$ такими, что

(v) Ξ сюръективно и биективно из $\hat{M} \setminus \partial\hat{M}$ на $M \setminus \Xi(\partial\hat{M})$ открытое в M , $\Xi(\hat{s}_{0,q}) = \Xi(\hat{s}_{0,k+q}) = s_{0,q}$ для любых $q = 1, \dots, k$, также $\partial M \subset \Xi(\partial\hat{M})$.

Структура параллельного переноса на $H_p^{t'}$ -дифференцируемом главном G -расслоении $E(N, G, \pi, \Psi)$ с линейно связными E и G для H_p^t -псевдо-многообразий M и \hat{M} как и выше над одной и той же алгеброй Кэли-Диксона \mathcal{A}_r с $t' \geq t + 1$ сопоставляет каждому H_p^t отображению γ из M в N и точкам $u_1, \dots, u_k \in E_{y_0}$, где y_0 – это отмеченная точка в N , $y_0 = \gamma(s_{0,q})$, $q = 1, \dots, k$, единственное H_p^t отображение $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} : \hat{M} \rightarrow E$ удовлетворяющее условиям (P1 – P5):

(P1) возьмём $\hat{\gamma} : \hat{M} \rightarrow N$ такое, что $\hat{\gamma} = \gamma \circ \Xi$, тогда $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(\hat{s}_{0,q}) = u_q$ для любых $q = 1, \dots, k$ и $\pi \circ \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} = \hat{\gamma}$

(P2) $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}$ есть H_p^t -отображение по γ и u ;

(P3) для любых $x \in \hat{M}$ и всякого $\phi \in \text{Dif}H_p^t(\hat{M}, \{\hat{s}_{0,1}, \dots, \hat{s}_{0,2k}\})$ выполняется равенство $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(\phi(x)) = \mathbf{P}_{\hat{\gamma} \circ \phi, u}(x)$, где $\text{Dif}H_p^t(\hat{M}, \{\hat{s}_{0,1}, \dots, \hat{s}_{0,2k}\})$ обозначает группу всех H_p^t гомеоморфизмов для \hat{M} сохраняющих отмеченные точки $\phi(\hat{s}_{0,q}) = \hat{s}_{0,q}$ для любых $q = 1, \dots, 2k$;

(P4) $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}$ является G -эквивариантным, что означает $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},uz}(x) = \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(x)z$ для всякого $x \in \hat{M}$ и каждого $z \in G$;

(P5) если U есть открытая окрестность точки $\hat{s}_{0,q}$ в \hat{M} и $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1 : U \rightarrow N$ являются $H_p^{t'}$ -отображениями такими, что $\hat{\gamma}_0(\hat{s}_{0,q}) = \hat{\gamma}_1(\hat{s}_{0,q}) = v_q$ и касательные пространства, который являются векторными многообразиями над \mathcal{A}_r , для γ_0 и γ_1 в точке v_q одинаковы, тогда касательные пространства для $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_0,u}$ и $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,u}$ в точке u_q одинаковы, где $q = 1, \dots, k$, $u = (u_1, \dots, u_k)$.

Два $H_p^{t'}$ -дифференцируемых главных G -расслоения E_1 и E_2 со структурами параллельных переносов (E_1, \mathbf{P}_1) и (E_2, \mathbf{P}_2) называются изоморфными, если существует изоморфизм $h : E_1 \rightarrow E_2$ такой, что $\mathbf{P}_{2,\hat{\gamma},u}(x) = h(\mathbf{P}_{1,\hat{\gamma},h^{-1}(u)}(x))$ для любых H_p^t -отображений $\gamma : M \rightarrow N$ и $u_q \in (E_2)_{y_0}$, где $q = 1, \dots, k$, $h^{-1}(u) = (h^{-1}(u_1), \dots, h^{-1}(u_k))$.

Пусть $(S^M E)_{t,H} := (S^{M, \{s_{0,q}: q=1, \dots, k\}} E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$ – это множество H_p^t -замыканий изоморфных классов H_p^t главных G расслоений со структурами параллельных переносов.

2 Структура группы обёрток

1. Предложение. H_p^m равномерность в $L(S^m, N)$ (смотри §2.10 in [14]) при $m > 1$ строго сильнее, чем m раз итерированная H_p^1 равномерность.

Доказательство. Если $f \in H^m$, тогда $\partial^k f(x) / \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m} \in L^2$ для любых $0 \leq k \leq m$, $k = k_1 + \dots + k_m$, $0 \leq k_j$, $j = 1, \dots, m$. Но g m раз итерированная H^1 равномерность означает, что $\partial^k g(x) / \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m} \in L^2$ для любых $0 \leq k \leq m$, $k = k_1 + \dots + k_m$, $0 \leq k_j \leq 1$, $j = 1, \dots, m$. Последние условия слабее, чем H^m . При $m > 1$ может оказаться отображение g , для которого такие частные производные не принадлежат L^2 , когда $1 < k_j \leq m$. Используя связывающие отображения карт атласов $At(M)$ и $At(N)$, и применяя это локально, мы получим утверждение.

2. Теорема. Для группы обёрток $W = (W^M E)_{t,H}$ (смотри определение 2.7 [14]) существует косое произведение $\hat{W} = W \tilde{\otimes} W$, которое является H_p^l альтернативной (квази-) группой Ли, и существует групповое вложение из W в \hat{W} , где $l = t' - t$ ($l = \infty$ при $t' = \infty$), $E = E(N, G, \pi, \Psi)$ – это главное G -расслоение класса гладкости $H_p^{t'}$ с $t' \geq t \geq [\dim(M)/2] + 1$. Если G ассоциативна, тогда \hat{W} ассоциативна. Более того, группа петель $L(S^1, E)$ является H_p^t изоморфной с $(\hat{W}^{S^1} E)_{t,H}$ в частном случае S^1 .

Доказательство. Пусть \tilde{W} – это множество всех элементов $(g_1 a_1 \otimes g_2 a_2) \in (W \otimes B)^2$, где B есть свободная некоммутативная ассоциативная группа с двумя генераторами a, b , $ab \neq ba$, $g_1, g_2 \in W$. Возьмём в \tilde{W} отношение эквивалентности: $g_1 g_2 a \otimes g_2 b \stackrel{\sim}{=} g_1 e_B \otimes e e_B$, для всяких $g_1, g_2 \in W$, где e и e_B обозначают единичные элементы в W и в B .

Определим в \tilde{W} умножение:

$$(g_1 a_1 \otimes g_2 a_2) \tilde{\otimes} (g_3 a_3 \otimes g_4 a_4) := ((g_1 g_3)(a_1 a_3) \otimes (g_4 g_2)((a_1^{-1} a_4 a_1) a_2))$$

для любых $g_1, g_2, g_3, g_4 \in W$ и всяких $a_1, a_2, a_3, a_4 \in B$, следовательно,

$$(e \otimes g_1 a_1) \tilde{\otimes} (e \otimes g_2 a_2) = e \otimes (g_2 g_1)(a_2 a_1),$$

$$(g_1 a_1 \otimes e) \tilde{\otimes} (g_2 a_2 \otimes e) = (g_1 g_2)(a_1 a_2) \otimes e,$$

$$(g_1 a_1 \otimes e) \tilde{\otimes} (e \otimes g_4 a_4) = g_1 a_1 \otimes g_4 (a_1^{-1} a_4 a_1),$$

$$(e \otimes g_4 a_4) \tilde{\otimes} (g_1 a_1 \otimes e) := g_1 a_1 \otimes g_4 a_4.$$

Таким образом, это полупрямое произведение \tilde{W} групп $(W \otimes B) \otimes^s (W \otimes B)$ некоммутативное, так как $b^{-1} a b a^{-1} \neq e$, где $e := e \times e_B$, \otimes^s обозначает полупрямое произведение, \otimes обозначает прямое произведение.

Рассмотрим минимальную замкнутую подгруппу A в полупрямом произведении \tilde{W} порождённом элементами $(g_1 g_2 a \otimes g_2 b) \tilde{\otimes} (g_1 e_B \otimes e e_B)^{-1}$, где B снабжено дискретной топологией и \tilde{W} снабжено равномерностью произведения. Тогда мы положим $\hat{W} := \tilde{W}/A =: W \tilde{\otimes} W$ и обозначим умножение в \hat{W} так же как в \tilde{W} .

Поэтому, W имеет групповое вложение $\theta : g \mapsto (g e_B \otimes e)$ в \hat{W} и умножение $m[(g_1 e_B \otimes e), (g_2 e_B \otimes e)] = (g_1 e_B \otimes e) \tilde{\otimes} (g_2 e_B \otimes e)$.

С другой стороны, $(g a_1 \otimes e) \tilde{\otimes} (e \otimes g a_1 a_2 a_1^{-1}) = g a_1 \otimes g a_2 = (e \otimes e) =: \tilde{e}$, $\hat{e} = \tilde{e} A = A$ – это единичный элемент в \hat{W} и $(e \otimes g a_1 a_2 a_1^{-1}) = (g a_1 \otimes e)^{-1}$ есть обратный элемент в $(g a_1 \otimes e)$, где $a_2 \in B$ таково, что $(a_1 \otimes a_2) \tilde{\otimes} A = (e \otimes e) \tilde{\otimes} A = A$ в \hat{W} , $a_1 = e a_1$, то есть $a_1 \otimes a_2 \stackrel{\sim}{=} e \otimes e$ в \tilde{W} .

Из предыдущих формул вытекает, что \hat{W} некоммутативная и альтернативная (квази-) группа. Как многообразие \hat{W} является факторным H_p^t многообразием W^2 по H_p^t отношению эквивалентности, следовательно, \hat{W} есть H_p^t дифференцируемое пространство, так как выполнены условия (D1 – D4) из §2.1.3.2 [14]. Групповая операция и инверсия в \hat{W} комбинирует произведение в W и инверсию с тензорным произведением и отношением эквивалентности, следовательно, они являются H_p^l дифференцируемыми с $l = t' - t$, $l = \infty$ при $t' = \infty$, (смотри §§1.11, 1.12, 1.15 в [34] и §2.1.3.1 в [14]).

Тогда $((g_1 \otimes g_2) \tilde{\otimes} (g_3 \otimes g_4)) \tilde{\otimes} (g_5 \otimes g_6) := ((g_1 g_3) g_5 \otimes g_6 (g_4 g_2))$ и

$$(g_1 \otimes g_2) \tilde{\otimes} ((g_3 \otimes g_4)) \tilde{\otimes} (g_5 \otimes g_6) := (g_1 (g_3 g_5) \otimes (g_6 g_4) g_2).$$

Поэтому, \hat{W} альтернативна, так как W альтернативна (смотри Теорема 2.6.1 [14]) и B ассоциативна. Если группа G ассоциативна, тогда W ассоциативна и \hat{W} ассоциативна.

Рассмотрим коммутатор

$$\begin{aligned} & [(g_1 a_1 \otimes g_2 a_2) \tilde{\otimes} (g_3 a_3 \otimes g_4 a_4)] \tilde{\otimes} [(g_1 a_1 \otimes g_2 a_2)^{-1} \tilde{\otimes} \\ & (g_3 a_3 \otimes g_4 a_4)^{-1}] = \{((g_1 g_3)(a_1 a_3) \otimes (g_4 g_2)((a_1^{-1} a_4 a_1) a_2)) \tilde{\otimes} \\ & [(g_1^{-1} a_1^{-1} \otimes g_2^{-1} (a_1 a_2^{-1} a_1^{-1})) \tilde{\otimes} (g_3^{-1} a_3^{-1} \otimes g_4^{-1} (a_3 a_4^{-1} a_3^{-1}))]\} \\ & = ((g_1 g_3)(a_1 a_3) \otimes (g_4 g_2)((a_1^{-1} a_4 a_1) a_2)) \tilde{\otimes} ((g_1^{-1} g_3^{-1})(a_1^{-1} a_3^{-1}) \otimes (g_4^{-1} g_2^{-1}) \\ & (a_1 (a_3 a_4^{-1} a_3^{-1}) a_1^{-1}) (a_1 a_2^{-1} a_1^{-1})) = (((g_1 g_3)(g_1^{-1} g_3^{-1})) (a_1 a_3 a_1^{-1} a_3^{-1}) \otimes \\ & ((g_4^{-1} g_2^{-1})(g_4 g_2)) ((a_1 a_3)^{-1} [(a_1 a_3) a_4^{-1} (a_1 a_3)^{-1}] (a_1 a_3)) ((a_1^{-1} a_4 a_1) a_2)). \end{aligned}$$

Минимальная замкнутая подгруппа порождённая произведениями таких элементов является (топологическим) коммутантом \tilde{W}_c для \tilde{W} . Группа $(W^M N)_{t,H}$ коммутативна (смотри теорему 6(2) [14]). Мы имеем $B/B_c = \{e\}$, фактор-группа $G/G_c = G_{ab}$ является абелианизацией G , в частности, если G коммутативна, то $G_{ab} = G$, где G_c обозначает коммутантную подгруппу в G . Поэтому,

$$(W^M E; N, G, \mathbf{P})_{t,H} / [(W^M E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}]_c = (W^M E; N, G_{ab}, \mathbf{P})_{t,H}$$

и неизбежно $\tilde{W}/\tilde{W}_c = (W^M E; N, G_{ab}, \mathbf{P})_{t,H}$.

Используя отношение эквивалентности в \tilde{W} , мы получим $\hat{W}/\hat{W}_c = (W^M E; N, G_{ab}, \mathbf{P})_{t,H}$.

В частном случае $M = S^1$ для $g \in W$ мы возьмём $f \in g$, то есть $\langle f \rangle_{t,H} = g$. Класс эквивалентности для f относительно аналогичных замыканий орбит правого действия подгруппы $Diff_+^\infty(S^1, s_0)$ сохраняющей отмеченную точку и ориентацию S^1 индуцированную ориентацией отрезка $I = [0, 1]$ мы обозначим через $[f]_{t,H}$, тогда для $[f]_{t,H}$ мы сопоставим $ga \otimes e$ в \tilde{W} , в то время как $[f^-]_{t,H}$ мы сопоставим $e \otimes gaba^{-1}$, где $f^-(x) := f(1-x)$ для любых $x \in [0, 1]$, единичная окружность S^1 параметризована как $z = e^{2\pi i x}$, $z \in S^1 \subset \mathbf{C}$, $x \in [0, 1]$. Их классы эквивалентности $(ga \otimes e) \otimes A$ и $(e \otimes gaba^{-1}) \otimes A$ в \tilde{W} дают элементы в \hat{W} .

Поскольку $[f]_{t,H}^{-1} := [f^-]_{t,H}$ и $[f_1 \vee f_2]_{t,H} = [f_1]_{t,H} [f_2]_{t,H}$, то \hat{W} изоморфна с $L(S^1, E)_{t,H}$.

2.1. Замечание. Рассмотрим группу $B^2 \otimes B^2/\mathcal{E}$, где отношение эквивалентности \mathcal{E} индуцировано отношением эквивалентности из B^2 как в \tilde{W} : $(a \otimes b) \approx (e \otimes e)$, группа B та же, что и в §2 с двумя генераторами a, b . Тогда это даёт эквивалентности: $[(a \otimes b) \otimes (a \otimes b)] \mathcal{E} [(e \otimes e) \otimes (e \otimes e)] \mathcal{E} [(e \otimes b) \otimes (a \otimes e)] \otimes [(e \otimes b) \otimes (a \otimes e)] \mathcal{E} \{(e \otimes b) \otimes [(a \otimes e) \otimes (e \otimes b)]\} \otimes (a \otimes e) \mathcal{E} (e \otimes a^{-1}ba) \otimes (a \otimes e) \mathcal{E} [(e \otimes ab) \otimes (ba \otimes e)]$ в $B^2 \otimes B^2$, так как B^4 – это ассоциативная группа. Это предполагает коммутативность итерированного косога произведения групп обёрток, когда G коммутативна, то есть $(\hat{W}^M(\hat{W}^M E)_{t,H})_{t,H} = (W^M(W^M E)_{t,H})_{t,H}$, $G = G_{ab}$. В частности, $(\hat{W}^M(\hat{W}^M N)_{t,H})_{t,H} = (W^M(W^M N)_{t,H})_{t,H}$, где $G = \{e\}$. Поэтому, из этого замечания и теоремы 2 вытекает новое доказательство предложения 11 из [14].

3. Предложение. Если существует H_p^l -диффеоморфизм $\eta : N \rightarrow N$ такой, что $\eta(y_0) = y_0'$, где $t \leq t'$ тогда группы обёрток $(W^M E; y_0)_{t,H}$ и $(W^M E; y_0')_{t,H}$ определённые с отмеченными точками y_0 и y_0' являются H_p^l -изоморфными как H_p^l -дифференцируемые группы, где $l = t' - t$ для конечного t' , $l = \infty$ при $t' = \infty$.

Доказательство. Пусть $f \in H_p^t(M, E)$, тогда $\eta \circ \pi \circ f(s_{0,q}) = \eta(y_0) = y_0'$ для любых отмеченных точек $s_{0,q}$ in M , где $\pi : E \rightarrow N$ – это проектор, $\pi \circ f = \gamma$, γ – это обёртка, то есть H_p^t -отображение из M в N с $\gamma(s_{0,q}) = y_0$ при $q = 1, \dots, k$. Многообразие N связно вместе с E и G согласно условиям наложенным в [14]. Рассмотрим $H_p^{t'}$ -диффеоморфизм $\eta \times e$ главного расслоения E . Тогда $\Theta : H_p^t(M, W) \rightarrow H_p^{t'}(M, W)$ индуцирует изоморфизм такой, что $\pi \circ \Theta(f) := \eta \circ \pi \circ f : M \rightarrow N$ и $(\eta \times e) \circ f = \Theta(f)$ for $f \in H_p^t(M, E)$. Отображение Θ является H_p^l дифференцируемым по f , следовательно, оно даёт H_p^l изоморфизм рассматриваемых H_p^l -дифференцируемых групп обёрток (смотри теорему 6(1) [14]).

4. Замечание. Как обычно мы предположим, что главное расслоение E , его структурная группа G и базовое многообразие N являются линейно связными. Пусть $(\mathcal{P}^M E)_{t,H}$ – это пространство классов эквивалентности $\langle f \rangle_{t,H}$ для $f \in H_p^t(M, W)$ относительно замыкания орбит левого действия группы диффеоморфизмов $Diff H_p^t(M; \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\})$. Это означает, что $(\mathcal{P}^M E)_{t,H}$ есть факторпространство для $H_p^t(M, W)$ относительно отношения эквивалентности $R_{t,H}$.

Имеется вложение $\theta : H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W) \hookrightarrow H_p^t(M; W)$ и отображение вычисления $\hat{e}v : H_p^t(M; W) \rightarrow N^k$ такое, что $\hat{e}v(f) := (\hat{f}(\hat{s}_{0,q}) : q = k+1, \dots, 2k)$, $\hat{e}v_{\hat{s}_{0,q}}(f) := \hat{f}(\hat{s}_{0,q})$, где $\hat{f} \in H_p^t(\hat{M}; W)$ таково, что $\hat{f} = f \circ \Xi$, $\Xi : \hat{M} \rightarrow M$ есть факторное отображение. Мы получаем диаграмму $H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W) \rightarrow H_p^t(M; W) \rightarrow N^k$ с H_p^t дифференцируемыми отображениями, которое индуцирует диаграмму $H_p^{t,l+1}(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0) \rightarrow H_p^t(M, H_p^{t,l}(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0) \rightarrow H_p^{t,l}(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0)$ для любых $l \in \mathbf{N}$, где $H_p^{t,l+1}(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0) := H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; H_p^{t,l}(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0))$, $H_p^{t,l}(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0) := H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0)$. Поэтому, существуют итерированные (квази-) моноиды и (квази-) группы обёр-

ток $(S^M E)_{l+1;t,H} := (S^M(S^M E)_{l;t,H})_{t,H}$ и $(W^M E)_{l+1;t,H} := (W^M(W^M E)_{l;t,H})_{t,H}$, где $(S^M E)_{1;t,H} := (S^M E)_{t,H}$ и $(W^M E)_{1;t,H} := (W^M E)_{t,H}$.

Очевидно, если имеются H_p^t и $H_p^{t'}$ диффеоморфизмы $\rho : M \rightarrow M_1$ и $\eta : N \rightarrow N_1$ отображающие отмеченные точки в соответствующие отмеченные точки, тогда $H_p^t(M, W)$ изоморфно с $H_p^t(M_1, W_1)$ и, следовательно, $(W^M E)_{b;t,H}$ является H_p^t изоморфной как H_p^t -многообразие и H_p^t -изоморфной как H_p^l (квази-) группа Ли с $(W^{M_1} E_1)_{b;t,H}$ для любых $b \in \mathbf{N}$, где $l = t' - t$, $l = \infty$ при $t' = \infty$, $t' \geq t \geq [\dim(M)/2] + 1$. Если $f : N \rightarrow N_1$ есть сюръективное отображение и N является H_p^t -дифференцируемым пространством, тогда N наследует структуру H_p^t -дифференцируемого пространства с локализациями имеющими локальную форму $f \circ \rho : U \rightarrow N_1$, где $\rho : U \rightarrow N$ есть локализация для N .

5. Лемма. Пусть E является $H_p^{t'}$ главным расслоением и пусть D есть всюду плотное подмножество в N такое, что для любых $y \in D$ существует открытая окрестность V точки y в N и дифференцируемое отображение $p : V \rightarrow H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; V, y) := \{f \in H_p^t(M; V) : f(s_{0,q}) = y, q = 1, \dots, k\}$ такое, что $\hat{e}v_{\hat{s}_{0,q}}(\hat{p}(y)) = y$ для любых $q = 1, \dots, 2k$ и каждого $y \in D$, где $p \circ \Xi = \pi \circ \hat{p}$. Тогда $\hat{e}v : H_p^t(M; W) \rightarrow N^k$ является H_p^t дифференцируемым главным $(S^M E)_{t,H}$ расслоением.

Доказательство. Пусть $\{(V_j, y_j) : j \in J\}$ – это семейство такое, что $y_j \in V_j \cap D$ для любых j и существует $p_j : V_j \rightarrow H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; V_j, y_j)$ такое, что $\hat{p}_j(\hat{s}_{0,q})(y) = y \times e$ для любых $q = 1, \dots, 2k$ и всякого j , где $\{V_j : j \in J\}$ – это открытое покрытие для N , y – это постоянное отображение из \hat{M} в V_j с $y(\hat{M}) = \{y\}$, где $\hat{p}_j(\hat{s}_{0,q})$ – это ограничение на V_j проектора $\hat{p}(\hat{s}_{0,q}) : (\mathcal{P}^M E)_{t,H} \rightarrow E$, в то время как $p_j(\Xi(\hat{x}))(y) = \pi \circ \hat{p}_j(\hat{x})(y \times e)$ для любых $y \in N$ и $x = \Xi(\hat{x})$ in M , где $\hat{x} \in \hat{M}$, $\Xi : \hat{M} \rightarrow M$. Тогда $(W^M E)_{t,H}$ и $(\mathcal{P}^M E)_{t,H}$ снабжено структурой H_p^t -дифференцируемого пространства (смотри замечание 4 выше и теорему 6 [14]), где вложение $(S^M E)_{t,H} \hookrightarrow (\mathcal{P}^M E)_{t,H}$ и проектор $\hat{e}v_{\hat{s}_{0,q}} : (\mathcal{P}^M E)_{t,H} \rightarrow N$ являются H_p^t -отображениями.

Пусть $\psi_j \in \text{Diff} H_p^t(N)$ таково, что $\psi_j(y) = y_j$. Возьмём тривиализацию $\phi_j : \hat{p}_j^{-1}(\hat{s}_{0,q})(V_j) \rightarrow V_j \times (S^M E)_{t,H}$ ограничения $\hat{p}_j(\hat{s}_{0,q})|_{V_j}$ проектора $\hat{p}_j(\hat{s}_{0,q}) : (\mathcal{P}^M E)_{t,H} \rightarrow E$ по формуле $\phi_j(f) = (f(\hat{s}_{0,q}), \psi_j \circ \hat{p}_j(\hat{s}_{0,q})(f))$ для каждой $f \in (\mathcal{P}^M E)_{t,H}$ с $\pi \circ f(\hat{s}_{0,q}) = y$, где $\psi_j \circ \hat{p}_j(f) = \psi_j(\hat{p}_j(f))$. Тогда $\phi_j^{-1}(y, g) = g^{-1}(\psi_j \circ \hat{p}_j(y)) =: \eta$, $\eta \in (\mathcal{P}^M E)_{t,H}$ с $\pi \circ \psi_j \circ f(\hat{s}_{0,q}) = y_j$, так как G есть группа, где $g = \psi_j \circ \hat{p}_j(f)$. В итоге комбинация семейства $\{\hat{e}v_{\hat{s}_{0,q}} : q = k + 1, \dots, 2k\}$ индуцирует отображение $\hat{e}v : H_p^t(M; W) \rightarrow N^k$. По построению такого расслоения оно является (квази-) моноидом $(S^M E)_{t,H}$.

6. Теорема. Если N – это гладкое многообразие над \mathcal{A}_r (голоморфное при $1 \leq r \leq 3$ соответственно), Тогда существует H_p^t -дифференцируемое главное $(S^M E)_{t,H}$ расслоение $\hat{e}v : (\mathcal{P}^M E)_{t,H} \rightarrow N^k$.

Доказательство. В силу леммы 5 достаточно доказать, что для любых $y \in N$ существует окрестность U точки y в N и H_p^t -отображение $p_q : U \rightarrow H_p^t(M, W)$ такое, что $ev_{s_{0,q}}(p_q(z)) = z$ для любых $q = 1, \dots, k$, $z \in U$, где $ev_x(f) = f(x)$.

В \hat{M} рассмотрим спрямляемую кривую $\zeta_q : [0, 1] \rightarrow \hat{M}$ соединяющую $\hat{s}_{0,q}$ с $\hat{s}_{0,q+k}$, где $1 \leq q \leq k$. Тогда рассмотрим координатную систему (x_1, \dots, x_m) в \hat{M} такую, что x_1 соответствует естественным координатам вдоль ζ_q . Эта координатная система определена локально для любых карт в \hat{M} , и x_1 задаётся глобально.

Рассмотрим вещественную тень $N_{\mathbf{R}}$ для N , тогда $N_{\mathbf{R}}$ есть риманово C^∞ многообразие. Таким образом, существует риманова метрика \mathbf{g} в N . Для любых $y \in N$ существует геодезический шар U вокруг y радиуса меньшего, чем радиус инъективности \exp^N для \mathbf{g} . Тогда существует отображение $p_q : U \rightarrow (\mathcal{P}^M U)_{t,H}$ с $\pi \circ [p_q(\hat{s}_{0,q+k})(z)] = z$ и $\pi \circ [p_q(\hat{s}_{0,q})(z)] = y$ для любых $z \in U$, где $p_q \circ \zeta_q =: \hat{\gamma}_{q,y,z}$ – это кратчайшая геодезическая

в U соединяющая y с z , $\hat{\gamma}_{q,y,z} : [0, 1] \rightarrow N$, $\hat{\gamma}_{q,y,z} \circ \zeta_q^{-1}(x_1) \in N$ для любых x_1 . Исходную обёртку $\hat{\gamma}_{q,y,z}$ продолжим до \hat{p}_q на \hat{M} со значениями в E такое, что $p_q \circ \Xi = \pi \circ \hat{p}_q$.

7. Предложение. (1). (Квази-) Группа обёрток $(W^M E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$ является главным G^k расслоением над $(W^M N)_{t,H}$.

(2). Абелианизация $[(W^M E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}]_{ab}$ (квази-) группы обёрток $(W^M E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$ изоморфна с $(W^M E; N, G_{ab}, \mathbf{P})_{t,H}$.

(3). При $n \geq 2$ итерированная группа петель $(L^{S^n} E)_{t,H}$ изоморфна с группой обёрток $(W^{S^n} E)_{t,H}$ для сферы S^n и главного расслоения E при $\dim_{\mathbf{R}} N \geq 2$ с $k = 1$.

Доказательство. 1. Структура расслоения $\pi : E \rightarrow N$ индуцирует структуру расслоения $\hat{\pi} : (W^M E; N, G, \mathbf{P})_{t,H} \rightarrow (W^M N)_{t,H}$, так как $\pi \circ \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} = \hat{\gamma}$. В силу леммы 5 достаточно показать, что существует окрестность U_G единицы e в $(W^M E)_{t,H}$ и G -эквивариантное отображение $\phi : U_G \rightarrow (W^M N)_{t,H}$. Пусть $\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} \rangle_{t,H} \in (W^M E)_{t,H}$, где $\hat{\gamma} : \hat{M} \rightarrow N$, $\hat{\gamma} = \gamma \circ \Xi$, $\gamma : M \rightarrow N$, $\gamma(s_{0,q}) = y_0$ для любых $q = 1, \dots, k$. Тогда $\pi \circ \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} = \hat{\gamma}$ и $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}$ является G -эквивариантным согласно условиям определяющим структуру параллельного переноса, то есть $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(x)z = \mathbf{P}_{\hat{\gamma},uz}(x)$ для любых $x \in \hat{M}$ и $z \in G$ и всякого $u \in E_{y_0}$. Мы имеем, что $uG = \pi^{-1}(y)$ для любых $u \in E_y$ и $y \in N$.

Поэтому, мы положим $\phi = \pi_*$, где $\pi_* \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} \rangle_{t,H} = \langle \hat{\gamma}, u \rangle_{t,H}$ и возьмём $U_G = \pi_*^{-1}(U)$, где U – это симметричная $U^{-1} = U$ окрестность единицы e в $(W^M N)_{t,H}$.

(Квази-) Группа G действует эффективно на E . Поскольку G линейно связна, то G^k действует эффективно на $(W^M E)_{t,H}$. В самом деле, для любых ζ_q из §6 существует $g_q \in G$ соответствующее $\hat{\gamma}(\hat{s}_{0,q+k})$ с $\mathbf{P}_{\hat{p}_q, \hat{s}_{0,q} \times e}(\hat{s}_{0,q+k}) = \{y_0 \times g_q\} \in E_{y_0}$, $g_q \in G$ для всякого $q = 1, \dots, k$. Более того, $\pi_*^{-1}(\pi_*(\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} \rangle_{t,H})) = \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} \rangle_{t,H} G^k$. Тогда слой $\hat{\pi} : (W^M E; N, G, \mathbf{P})_{t,H} \rightarrow (W^M N)_{t,H}$ равен G^k . Благодаря условиям 2(P1 – P5) [14] оно является главным G^k дифференцируемым расслоением класса H_p^t .

2, 3. В силу предложения 1 группа петель $(L^{S^n} E)_{l,H}$ всюду плотна в n раз итерированной группе петель $(L^{S^1}(\dots(L^{S^1} E)_{1,H}\dots))_{1,H}$, в то время как группа обёрток $(W^{S^n} E)_{l,H}$ всюду плотна в n раз итерированной группе обёрток $(W^{S^1} E)_{n;1,H}$ для любых $l \geq n$. Для каждого $n > t$ существует естественный проектор $\pi_n^m : S^n \rightarrow S^m$, который индуцирует вложения $(W^{S^m} E)_{t,H} \hookrightarrow (W^{S^n} E)_{t,H}$ и $(L^{S^m} E)_{t,H} \hookrightarrow (L^{S^n} E)_{t,H}$ согласно следствию 9 [14], так как $k = 1$ и выбирая отмеченную точку $s_0 \in S^1$. Поэтому, благодаря $\dim_{\mathbf{R}} N \geq 2$ рассматриваемые здесь группы обёрток и петель бесконечномерны. Поэтому, утверждения (2, 3) вытекают из (1) и доказательства теоремы 2 выше и предложения 11 [14], согласно которому итерированная группа петель $(L^{S^1}(\dots(L^{S^1} E)_{1,H}\dots))_{1,H}$ коммутативна.

8. Предложение. Если E контрактируема (в точку), то $(\mathcal{P}^M E)_{t,H}$ контрактируема (в точку e).

Доказательство. Пусть $g : [0, 1] \times E \rightarrow E$ – это контрактирование такое, что g непрерывна и $g(0, z) = z$, и $g(1, z) = y_0 \times e$ для любых $z \in E$. Тогда для любых $f \in H_p^t(M, W)$ мы получим $g(0, f(x)) = f(x)$ и $g(1, f(x)) = y_0 \times e$ для любых $x \in M$. Более того, $g(s, \langle f \rangle_{t,H}) \subset \langle g(s, f) \rangle_{t,H}$ для любых $s \in [0, 1]$, так как $f \in g_s^{-1}(\langle g(s, f) \rangle_{t,H})$ и g непрерывны, в то время как $\langle g(s, f) \rangle_{t,H}$ по своему определению замкнуты в $H_p^t(M, W)$, где $g_s(z) := g(s, z)$. Поэтому, $id = g(0, *) : (\mathcal{P}^M E)_{t,H} \rightarrow (\mathcal{P}^M E)_{t,H}$ и $g(1, (\mathcal{P}^M E)_{t,H}) = \langle w_0 \rangle_{t,H}$.

8.1. Обозначения. Обозначим через $Hom_p^t((W^M E)_{t,H}, G)$ или $Hom_p^t((S^M E)_{t,H}, G)$ (квази-) группу или (квази-) моноид H_p^t дифференцируемых гомоморфизмов из $(W^M E)_{t,H}$ или $(S^M E)_{t,H}$ соответственно в G . Через \mathcal{A}_r^* обозначим мультипликативную (квази-) группу для $\mathcal{A}_r \setminus \{0\}$, где $0 \leq r \leq 3$.

9. Теорема. Пусть $Dif H_p^{t'}(N)$ действует транзитивно на N , $t \leq t'$. Для любых H^∞ многообразия N и H_p^t дифференцируемой группы G такой, что $\mathcal{A}_r^* \subset G$ с

$1 \leq r \leq 3$ существует гомоморфизм H_p^t дифференцируемого пространства всех классов эквивалентности $(\mathcal{P}^M E)_{t,H}$ относительно $\text{Dif} H_p^t(N)$ (смотри §1.3.2 и 3 [14]) и $\text{Hom}_p^t((S^M E)_{t,H}, G^k)$. Они изоморфны, когда G коммутативна.

Доказательство. Отметим, что благодаря теореме 6 H_p^t -дифференцируемое главное $(S^M E)_{t,H}$ расслоение $\hat{e}v : (\mathcal{P}^M E)_{t,H} \rightarrow N^k$ имеет структуру параллельного переноса $\hat{\mathbf{P}}_{\hat{\gamma},uz}(x) = \hat{\mathbf{P}}_{\hat{\gamma},u}(x)z$ для любых $x \in \hat{M}$ и всех $\gamma \in H_p^t(M, N)$, и $u \in \hat{e}v^{-1}(\gamma(s_{0,k}))$, и всякого $z \in G$, и соответствующего $\hat{\gamma} : \hat{M} \rightarrow N$ такие, что $\gamma \circ \Xi = \hat{\gamma}$. Если $x = \hat{s}_{0,q}$ с $1 \leq q \leq k$, тогда $\hat{\mathbf{P}}$ даёт тождественный гомоморфизм из $(S^M E)_{t,H}$ в $(S^M E)_{t,H}$. Если $\theta : (S^M E)_{t,H} \rightarrow G^k$ есть H_p^t дифференцируемый гомоморфизм, тогда голономия ассоциированная с параллельным переносом $\hat{\mathbf{P}}^\theta$ расслоения $(\mathcal{P}^M E)_{t,H} \times^\theta G \rightarrow N^k$ является гомоморфизмом $\theta : (S^M E)_{t,H} \rightarrow G^k$ (смотри §2.3 в [14]). В тоже время группа G содержит непрерывные одно-параметрические подгруппы из \mathcal{A}_r^* , где $1 \leq r \leq 3$. Если $g \in (W^M N)_{t,H}$ и $g \neq e$, тогда g имеет конечный порядок, так как w_0 не принадлежит g^n для любых $n \neq 0$ ненулевых целых чисел n , где $w_0(M) = \{y_0\}$.

Эта голономия индуцирует отображение $h : (\mathcal{P}^M E)_{t,H}/\mathcal{Q} \rightarrow \text{Hom}_p^t((S^M E)_{t,H}, G^k)$, где \mathcal{Q} – это отношение эквивалентности вызванное транзитивным действием группы диффеоморфизмов $\text{Dif} H_p^t(N)$, так что $(S^M E)_{t,H}$ с различными отмеченными точками или $\{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}$ в M и y_0 , или \tilde{y}_0 в N изоморфны, так как существует $\psi \in \text{Dif} H_p^t(N)$ такое, что $\psi(y_0) = \tilde{y}_0$.

Если G коммутативна, тогда это отображение является гомоморфизмом, так как $(S^M E)_{t,H}$ есть коммутативный моноид для коммутативной группы G (смотри теорему 3.2 [14]) и $u\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1, v_1}(x_1)\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, v_2}(x_2) = u\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, v_2}(x_2)\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1, v_1}(x_1)$ для любых $x_1, x_2 \in \hat{M}$ и $u, v_1, v_2 \in E_{y_0}$. Имеется вложение $(S^M E)_{t,H} \hookrightarrow (W^M E)_{t,H}$, следовательно, гомоморфизм $\theta : (W^M E)_{t,H} \rightarrow G^k$ имеет ограничение на $(S^M E)_{t,H}$, которое является также гомоморфизмом.

Для $G \supset \mathcal{A}_r^*$ существует семейство $f \in \text{Hom}_p^t((S^M E)_{t,H}, G^k)$ различающих элементы моноида обёрток $(S^M E)_{t,H}$, следовательно, существует вложение $(S^M E)_{t,H}$ в $\text{Hom}_p^t((S^M E)_{t,H}, G^k)$. Расслоение $(\mathcal{P}^M E)_{t,H} \times^\theta G \rightarrow N^k$ индуцирует структуру параллельного переноса \mathbf{P}^θ . Голономия структуры параллельного переноса на $(\mathcal{P}^M N)_{t,H} \times^\theta G \rightarrow N^k$ есть θ . Поэтому, отображение $H_p^t((S^M E)_{t,H}, G^k) \ni \theta \mapsto \mathbf{P}^\theta$ является обратным к h .

10. Теоремы. Предположим, что $M_2 \hookrightarrow M_1$ и $M = M_1 \setminus (M_2 \setminus \partial M_2)$, и $\hat{M}_2 \hookrightarrow \hat{M}_1$, и $\hat{M} = \hat{M}_1 \setminus (\hat{M}_2 \setminus \partial \hat{M}_2)$, и $N_2 \hookrightarrow N_1$ – это H_p^t -псевдо-многообразия с одними и теми же отмеченными точками $\{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}$ для M_1 и M_2 , и M , и $y_0 \in N_2$ удовлетворяющими условиям §2 [14] и G_2 – это замкнутая подгруппа в G_1 с полным (как равномерное пространство) главным расслоением E и со структурной группой G_1 .

1. Тогда $(W^{M_2, \{s_{0,q}: q=1, \dots, k\}} E; N_2, G_2, \mathbf{P})_{t,H}$ имеет вложение в качестве замкнутой подгруппы в $(W^{M_1, \{s_{0,q}: q=1, \dots, k\}} E; N_1, G_1, \mathbf{P})_{t,H}$.

2. Группа обёрток $(W^{M_2, \{s_{0,q}: q=1, \dots, k\}} E; N, G_2, \mathbf{P})_{t,H}$ является нормальной в $(W^{M_1, \{s_{0,q}: q=1, \dots, k\}} E; N, G_1, \mathbf{P})_{t,H}$ тогда и только тогда, когда G_2 является нормальной подгруппой в G_1 .

3. В последнем случае $(W^M E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$ изоморфна с $(W^{M_1} E; N, G_1, \mathbf{P})_{t,H} / (W^{M_2} E; N, G_2, \mathbf{P})_{t,H}$, где $G = G_1/G_2$.

Доказательство. 1. Если $\hat{\gamma}_2 \in H_p^t(\hat{M}_2, N_2)$, тогда она имеет H_p^t продолжение до $\hat{\gamma}_1 \in H_p^t(\hat{M}_1, N_1)$ благодаря теореме III.4.1 [27]. Поэтому, структура параллельного переноса $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1, u}$ над \hat{M}_1 служит продолжением для $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, u}$ над \hat{M}_2 . Равномерные пространства $H_p^t(M_j, \{s_{0,1}, \dots, s_{0,k}\}; W_j, y_0)$ полны при $j = 1, 2$, так как главное расслоение E топологически полно и соответствующие главные под-расслоения E_2 со структурной группой G_2 также полно (как равномерное пространство, смотри теорему

8.3.6 [4]). Поэтому, $H_p^t(M_2, \{s_{0,1}, \dots, s_{0,k}\}; W_2, y_0)$ имеет вложение в качестве замкнутого подпространства в $H_p^t(M_1, \{s_{0,1}, \dots, s_{0,k}\}; W_1, y_0)$. Каждый H_p^t диффеоморфизм псевдо-многообразия M_2 имеет H_p^t продолжение до диффеоморфизма псевдо-многообразия M_1 (смотри также §III.4 в [27] и [38]). Поскольку G_2 есть замкнутая подгруппа в G_1 , то $(S^{M_2, \{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}} E; N_2, G_2, \mathbf{P})_{t,H}$ имеет вложение в качестве замкнутого под-моноида в $(S^{M_1, \{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}} E; N_1, G_1, \mathbf{P})_{t,H}$ и неизбежно $(W^{M_2, \{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}} E; N_2, G_2, \mathbf{P})_{t,H}$ имеет вложение в качестве замкнутой подгруппы в $(W^{M_1, \{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}} E; N_1, G_1, \mathbf{P})_{t,H}$ благодаря теореме 6.1 [14].

2. Группы $(W^{M_j, \{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}} N)_{t,H}$ for $j = 1, 2$ коммутативны и $(W^{M_j, \{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}} E)_{t,H}$ являются G_j^k главными расслоениями над $(W^{M_j, \{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}} N)_{t,H}$ (смотри теорему 6.2 [14] и предложение 7.1 выше). Поэтому, $(W^{M_2, \{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}} E)_{t,H}$ есть нормальная (замкнутая) подгруппа в $(W^{M_1, \{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}} E)_{t,H}$ тогда и только тогда, когда G_2 является нормальной (замкнутой) подгруппой в G_1 .

3. Рассмотрим главное расслоение $E(N, G, \pi, \Psi)$ со структурной группой G (смотри замечание 1.3.2 [14]) и структурой параллельного переноса \mathbf{P} для H_p^t псевдо-многообразия \hat{M} , где $G = G_1/G_2$ – это фактор-группа. Если $\hat{\gamma}_1 \in H_p^t(\hat{M}_1, N)$, тогда $\hat{\gamma}_1$ является комбинацией

$$(i) \hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2 \nabla \hat{\gamma},$$

где $\hat{\gamma}_2$ и $\hat{\gamma}$ – это ограничения $\hat{\gamma}_1$ на \hat{M}_2 и \hat{M} соответственно. С другой стороны, каждое $\hat{\gamma} \in H_p^t(\hat{M}, N)$ имеет продолжение $\hat{\gamma}_1 \in H_p^t(\hat{M}_1, N)$. Многообразие \hat{M}_1 метризуемо метрикой ρ . Для любого $\epsilon > 0$ существует $\psi \in \text{Dif} H_p^t(\hat{M}_1; \{\hat{s}_{0,q} : q = 1, \dots, 2k\})$ такое, что $(\psi(\hat{M}) \cap \hat{M}_2) \subset \bigcup_{l=1}^s B(\hat{M}_1, x_l, \epsilon)$ для некоторого $x_l \in \hat{M}_1$ с $l = 1, \dots, s$ и $s \in \mathbf{N}$, и $\psi|_{\hat{M}_1 \setminus (\bigcup_{l=1}^s B(\hat{M}_1, x_l, \epsilon))} = id$, так как \hat{M}_1 и \hat{M}_2 являются компактными псевдо-многообразиями. Поэтому, использование леммы 2.1.3.16 [22] и карт многообразий даёт

$$\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}|_M \rangle_{t,H} = \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1, u}|_{M_1} \rangle_{t,H} / \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, u}|_{M_2} \rangle_{t,H}$$

благодаря разложению (i), так как $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}|_{M_j} \in G_j$ при $j = 1, 2$ и $G = G_1/G_2$ есть H_p^t фактор-группа с $t' \geq t$. Итак, $(W^M E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$ изоморфна с $(W^{M_1} E; N, G_1, \mathbf{P})_{t,H} / (W^{M_2} E; N, G_2, \mathbf{P})_{t,H}$ (смотри также §§3, 6 [14]).

11. Следствие. Пусть выполнены предположения теоремы 10. Тогда $(W^M N)_{t,H}$ изоморфна с $(W^{M_1} N)_{t,H} / (W^{M_2} N)_{t,H}$.

Доказательство. При $(W^M N)_{t,H}$ беря $G = G_1 = G_2 = \{e\}$, мы получим утверждение этого следствия из теоремы 10.3.

12. Предложение. Предположим, что $M = M_1 \vee M_2$, где M_1 и M_2 являются H_p^t -псевдо-многообразиями удовлетворяющими условиям 2.2(i-v) [14] с букетом взятым по отмеченным точкам $\{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}$, тогда $(W^M N)_{t,H}$ изоморфна с внутренним прямым произведением $(W^{M_1} N)_{t,H} \otimes (W^{M_2} N)_{t,H}$.

Доказательство. Многообразие M имеет отмеченные точки $\{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}$ такие, что $s_{0,q}$ соответствует $s_{0,q,1}$ склеенной с $s_{0,q,2}$ в букете $M_1 \vee M_2$ для каждого $q = 1, \dots, k$, где $s_{0,q,j} \in M_j$ – это отмеченные точки $j = 1, 2$. Поскольку каждое M_j удовлетворяет условиям 2.2(i-v) [14], тогда M также им удовлетворяет.

В силу теоремы 10.1 $(W^{M_j, \{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}} N)_{t,H}$ имеет вложение в качестве замкнутой подгруппы в $(W^{M, \{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}} N)_{t,H}$ при $j = 1, 2$. Если $\gamma_j \in H_p^t(M_j, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; N, y_0)$ при $j = 1, 2$, тогда $\gamma_1 \vee \gamma_2 \in H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; N, y_0)$. С другой стороны, каждая обёртка $\gamma \in H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; N, y_0)$ имеет разложение $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, где $\gamma_j = \gamma|_{M_j}$ при $j = 1, 2$. Поэтому, $\langle \gamma \rangle_{t,H} = \langle \gamma_1 \vee w_{0,2} \rangle_{t,H} \vee \langle w_{0,1} \vee \gamma_2 \rangle_{t,H}$, где $w_0(M) = \{y_0\}$, $w_{0,j} = w_0|_{M_j}$ при $j = 1, 2$, следовательно, $(W^M N)_{t,H}$ изоморфна с $(W^{M_1} N)_{t,H} \otimes (W^{M_2} N)_{t,H}$.

13. Предложения. 1. Пусть $\theta : N_1 \rightarrow N$ является вложением с $\theta(y_1) = y_0$, или $F : E_1 \rightarrow E$ – это вложение главных расслоений над \mathcal{A}_r такое, что $\pi \circ F|_{N_1 \times e} = \theta \circ \pi_1$, тогда существуют вложения $\theta_* : (W^M N_1)_{t,H} \rightarrow (W^M N)_{t,H}$ и $F_* : (W^M E_1)_{t,H} \rightarrow (W^M E)_{t,H}$.

2. Если $\theta : N_1 \rightarrow N$ и $F : E_1 \rightarrow E$ – это факторные отображения и факторный гомоморфизм такой, что N_1 – это псевдо-многообразие являющееся покрытием для псевдо-многообразия N , тогда $(W^M N)_{t,H}$ – это фактор-группа некоторой замкнутой подгруппы в $(W^M N_1)_{t,H}$, и $(W^M E)_{t,H}$ есть фактор-группа некоторой замкнутой подгруппы в $(W^M E_1)_{t,H}$.

3. Если имеются H_p^t диффеоморфизм $f_1 : M \rightarrow M_1$ и H_p^t -изоморфизм $f_2 : E \rightarrow E_1$, тогда группы обёрток $(W^{M_1} E_1)_{t,H}$ и $(W^M E)_{t,H}$ изоморфны.

Доказательство. 1. Если $\gamma_1 \in H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; N_1, y_1)$, тогда $\theta \circ \gamma_1 = \gamma \in H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; N, y_0)$, $\langle \gamma \rangle_{t,H} = \theta_* \langle \gamma_1 \rangle_{t,H}$, где $\theta_* \langle \gamma_1 \rangle_{t,H} := \{\theta \circ f : f R_{t,H} \gamma_1\}$. Вдобавок $F|_{E_1,v}$ даёт вложение $F : G_1 \rightarrow G$, где G_1 и G – это структурные группы для расслоений E_1 и E . Поэтому, для структур параллельных переносов мы получим:

$$(1) F \circ \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,v}^1(x) = \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(x)$$

для любых $x \in \hat{M}$, где $F(v) = u$, $\pi \circ F = \theta \circ \pi_1$, где \mathbf{P}^1 отвечает E_1 и \mathbf{P} соответствует E . Определим отображение $F_* \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,v}^1 \rangle_{t,H} := \{F \circ g : g R_{t,H} \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,v}^1\}$. Поскольку θ и F являются H_p^t дифференцируемыми отображениями, то θ_* и F_* являются вложениями H_p^t многообразий и групповыми гомоморфизмами H_p^t дифференцируемых групп (смотри также теоремы 6 [14]).

2. Если $\gamma \in H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; N, y_0)$, тогда существует $\gamma_1 \in H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; N_1, y_1)$ такое, что $\theta \circ \gamma_1 = \gamma$, так как N_1 – это покрытие для N , то есть каждая точка $y \in N$ имеет окрестность V_y , для которой $\theta^{-1}(V_y)$ является дизъюнктным объединением открытых подмножеств в N_1 для любых $y \in N$. Такая γ_1 существует благодаря связности псевдо-многообразия M и образа $\gamma(M)$, где $\gamma(M) \subset N$. Каждому параллельному переносу в E_1 соответствует параллельный перенос в E , то есть выполнено уравнение (1) выше. Мы положим $\theta_*^{-1} \langle \gamma \rangle_{t,H} = \{\langle \gamma_1 \rangle_{t,H} : \theta \circ \gamma_1 = \gamma\}$ и $F_*^{-1} \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} \rangle_{t,H} := \{\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,v}^1 \rangle_{t,H} : F \circ \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,v}^1 = \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}\}$, где $F(v) = u$.

Это даёт факторные отображения θ_* и F_* из замкнутых подгрупп $\theta_*^{-1}(W^M N)_{t,H}$ и $F_*^{-1}(W^M E)_{t,H}$ в $(W^M N_1)_{t,H}$ и $(W^M E_1)_{t,H}$ соответственно на $(W^M N)_{t,H}$ и $(W^M E)_{t,H}$ по замкнутым подгруппам $\theta_*^{-1}(e)$ и $F_*^{-1}(e)$ соответственно.

3. Мы имеем, что $g \in H_p^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, \dots, k\}; W, y_0)$ тогда и только тогда, когда $f_2 \circ g \circ f_1^{-1} \in H_p^t(M_1, \{s_{0,q,1} : q = 1, \dots, k\}; W_1, y_1)$, где $f_1(s_{0,q}) = s_{0,q,1}$ для любых $q = 1, \dots, k$, $f_2(y_0 \times e) = y_1 \times e$. В тоже время $\psi \in \text{Dif} H_p^t(M)$ тогда и только тогда, когда $f_1 \circ \psi \circ f_1^{-1} \in \text{Dif} H_p^t(M_1)$. Таким образом, $(S^M E)_{t,H}$ (квази-) моноид изоморфен с $(S^{M_1} E_1)_{t,H}$ и неизбежно (квази-) группы обёрток $(W^M E)_{t,H}$ и $(W^{M_1} E_1)_{t,H}$ являются H_p^t диффеоморфными как многообразия и изоморфны как H_p^t (квази-) группы.

14. Замечание. Если N – это многообразие не обязательно ориентируемое, тогда оно содержит с точностью до эквивалентности атласы связных карт V открытых в N таких, что $y \in V$ и V ориентируемо. Поскольку $(W^M E|_V)_{t,H}$ есть бесконечномерная группа, то $(W^M E)_{t,H}$ также бесконечномерна даже, если N неориентируемо благодаря предложению 13.1. Если многообразие N неориентируемо, тогда существует ориентируемое покрытие многообразия N_1 и факторное отображение $\theta : N_1 \rightarrow N$ как в предложении 13(2) (смотри также о покрытиях и ориентируемых покрытиях в §§50, 51 [32], §§II.4.18,19 [2]).

Необходимо отметить, что некоторые особенности групп обёрток также связаны с их бесконечномерностью.

15. Замечание. Пусть G – это топологическая (квази-) группа не обязательно ассоциативная, но альтернативная:

(A1) $g(gf) = (gg)f$ и $(fg)g = f(gg)$ и $g^{-1}(gf) = f$ и $(fg)g^{-1} = f$ для любых $f, g \in G$ и имеющая операцию сопряжения, которая является непрерывным (анти) автоморфизмом (квази-) группы G таким, что

(C1) $conj(gf) = conj(f)conj(g)$ для любых $g, f \in G$,

(C2) $conj(e) = e$ для единичного элемента e в G .

Если G принадлежит определённому классу гладкости, например, H_p^t дифференцируема, тогда (анти) автоморфизм $conj$ предполагается принадлежащим тому же классу. Для коммутативной группы в частности можно взять единичное отображение в качестве сопряжения. Для $G = \mathcal{A}_r^*$ можно взять $conj(z) = \tilde{z}$ как обычное сопряжение для любых $z \in \mathcal{A}_r^*$, где $1 \leq r \leq 3$.

Предположим, что

(A2) $\hat{G} = \hat{G}_0 i_0 \oplus \hat{G}_1 i_1 \oplus \dots \oplus \hat{G}_{2r-1} i_{2r-1}$, так что G есть мультипликативная скрученная (twisted) группа кольца \hat{G} с мультипликативной групповой структурой, где $\hat{G}_0, \dots, \hat{G}_{2r-1}$ – это попарно изоморфные коммутативные ассоциативные кольца и $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$ – это генераторы алгебры Кэли-Диксона \mathcal{A}_r , $1 \leq r \leq 3$ и $(y_l i_l)(y_s i_s) = (y_l y_s)(i_l i_s)$ – это естественное умножение произвольных чистых состояний в G при $y_l \in G_l$. Например, $G = (\mathcal{A}_r^*)^n$ и $\hat{G} = \mathcal{A}_r^n$. При $r = 3$ она будет квази-группой G , но мы часто для краткости и единообразия опускаем приставку "квази", так как ситуация оговорена и ясна. При $0 \leq r \leq 2$ она является ассоциативной группой G .

16. Лемма. Если G и K – это две топологические дифференцируемые группы скрученные над $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$ и удовлетворяющие условиям 15(A1, A2, C1, C2) и K – это замкнутая нормальная подгруппа в G , где $2 \leq r \leq 3$, тогда фактор-группа является топологической или дифференцируемой и скрученной над $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$.

Доказательство. Поскольку $\hat{G} = \hat{G}_0 i_0 \oplus \hat{G}_1 i_1 \oplus \dots \oplus \hat{G}_{2r-1} i_{2r-1}$, где $\hat{G}_0, \dots, \hat{G}_{2r-1}$ попарно изоморфны, тогда $\hat{G}/\hat{K} = (\hat{G}_0/\hat{K}_0) i_0 \oplus \dots \oplus (\hat{G}_{2r-1}/\hat{K}_{2r-1}) i_{2r-1}$ также скрученная. Каждая группа \hat{G}_j ассоциативна, следовательно, G/K альтернативна, так как $2 \leq r \leq 3$ и используя таблицу умножения генераторов алгебры Кэли-Диксона \mathcal{A}_r . С другой стороны, $conj(K) = K$, следовательно, $conj(gK) = K conj(g) = conj(g)K \in G/K$ и $conj(ghK) = conj(gh)K = (conj(h)conj(g))K = (conj(h)K)(conj(g)K) = conj(hK)conj(gK) = conj(gKhK)$.

Подгруппа K замкнута в G , следовательно, по определению факторной дифференцируемой структуры G/K является дифференцируемой группой (смотри также §§1.11, 1.12, 1.15 в [34]).

17. Предложение. Пусть $\eta : N_1 \rightarrow N_2$ является $H_p^{t'}$ -ретракцией H_p^t многообразий, $N_2 \subset N_1$, $\eta|_{N_2} = id$, $y_0 \in N_2$, где $t' \geq t$, M – это H_p^t многообразие, $E(N_1, G, \pi, \Psi)$ и $E(N_2, G, \pi, \Psi)$ – это главные $H_p^{t'}$ расслоения со структурной группой G удовлетворяющей условиям §2 [14]. Тогда η индуцирует групповой гомоморфизм η_* из $(W^M E; N_1, G, \mathbf{P})_{t,H}$ на $(W^M E; N_2, G, \mathbf{P})_{t,H}$.

Доказательство. В силу предложения 7(1) группа обёрток $(W^M E; N_1, G, \mathbf{P})_{t,H}$ является главным G^k расслоением над $(W^M N_1)_{t,H}$. Продолжим η до $\vartheta : E(N_1, G, \pi, \Psi) \rightarrow E(N_2, G, \pi, \Psi)$, так что $\pi_2 \circ \vartheta = \eta \circ \pi_1$ и $pr_2 \circ \vartheta = id : G \rightarrow G$, где $pr_2 : E_y \rightarrow G$ – это проектор, $y \in N_1$. Если $f \in H_p^t(M, N_1)$, то $\eta \circ f := \eta(f(*)) \in H_p^t(M, N_2)$. Если же $f(s_{0,q}) = y_0$, тогда $\eta(f(s_{0,q})) = y_0$, так как $y_0 \in N_2$. Поскольку $N_2 \subset N_1$, тогда $H_p^t(M, N_2) \subset H_p^t(M, N_1)$. Структура параллельных переносов \mathbf{P} задаётся над одним и тем же многообразием M .

Мы положим $\eta_*(\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} \rangle_{t,H}) = \langle \mathbf{P}_{\eta \circ \hat{\gamma},u} \rangle_{t,H}$, где $\hat{\gamma} : \hat{M} \rightarrow N_1$. В силу теорем 2.3 и 2.6 [14] $\eta_*(\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,u} \vee \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2,u} \rangle_{t,H}) = \eta_*(\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,u} \rangle_{t,H}) \eta_*(\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2,u} \rangle_{t,H})$, и мы можем положить

$\eta_*(q^{-1}) = [\eta_*(q)]^{-1}$, следовательно, η_* – это группа гомоморфизмов. Более того, для любых $g \in (W^M E; N_2, G, \mathbf{P})_{t,H}$ существует $q \in (W^M E; N_1, G, \mathbf{P})_{t,H}$ такое, что $\eta_*(q) = g$, так как $\gamma : M \rightarrow N_2$ и $N_2 \subset N_1$ влечёт $\gamma : M \rightarrow N_1$, в то время как структурная группа G является той же, следовательно, η_* есть эпиморфизм.

18. Определение. Пусть G – это топологическая группа удовлетворяющая условиям 15(A1, A2, C1, C2) такая, что G есть мультипликативная группа кольца \hat{G} , где $1 \leq r \leq 2$. Тогда мы определим скрещенное произведение G^s такое, что оно является мультипликативной группой кольца $\hat{G}^s := \hat{G} \otimes_l \hat{G}$, где $l = i_{2r}$ обозначает генератор удвоения, умножение в $\hat{G} \otimes_l \hat{G}$ зададим формулой:

$$(1) (a + bl)(c + vl) = (ac - v^*b) + (va + bc^*)l \text{ для любых } a, b, c, v \in \hat{G}, \text{ где } v^* = \text{conj}(v).$$

Сокрушительное произведение $M_1 \otimes_l M_2$ многообразий M_1, M_2 над \mathcal{A}_r с $\dim(M_1) = \dim(M_2)$ определяется как \mathcal{A}_{r+1} многообразие с локальными координатами $z = (x, yl)$, где x в M_1 и y в M_2 являются локальными координатами.

Его описание и существование даны ниже.

19. Предложение. Кольцо \hat{G}^s имеет мультипликативную группу G^s содержащую все $a + bl \neq 0$ с $a, b \in \hat{G}$. Если \hat{G} – это топологическое или H_p^t дифференцируемое кольцо над \mathcal{A}_r при $t \geq \dim(G) + 1$, тогда \hat{G}^s является топологическим или H_p^t дифференцируемым кольцом над \mathcal{A}_{r+1} .

Доказательство. Для любых $1 \leq r \leq 2$ группа G ассоциативна, так как генераторы $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$ образуют ассоциативную группу, когда $r \leq 2$. Элемент $a + bl \in \hat{G}^s$ ненулевой тогда и только тогда, когда $(a + bl)(a + bl)^* = aa^* + bb^* \neq 0$ благодаря 15(A1, A2, C1, C2) и 18(1). При $a + bl \neq 0$ мы положим $u = (a^* - lb^*)/(aa^* + bb^*)$, где $aa^* + bb^* \in G_0$, следовательно, $u(a + bl) = (a + bl)u = 1 \in G_0$, так как группа G_j коммутативна для любых $j = 0, \dots, 2^r - 1$, где G_j обозначает мультипликативную группу кольца \hat{G}_j . При $r \leq 2$ семейство генераторов $\{i_0, \dots, i_{2r+1-1}\}$ образует альтернативную группу, следовательно, (квази-) группа $\hat{G}^s = \hat{G}_0 i_0 \oplus \dots \oplus \hat{G}_{2^r+1-1} i_{2^r+1-1}$ альтернативна, где группа \hat{G}_j изоморфна с \hat{G}_0 для любых j .

Если сложение в кольце \hat{G} непрерывно, тогда очевидно $(a + bl) + (c + ql) = (a + c) + (b + q)l$ непрерывно. Если умножение в кольце \hat{G} непрерывно, тогда формула 18(1) показывает, что умножение в \hat{G}^s также непрерывно.

Мы имеем разложение $\mathcal{A}_{r+1} = \mathcal{A}_r \oplus \mathcal{A}_r l$. Если \hat{G} является H_p^t дифференцируемым, тогда из определения локализаций вытекает, что кольцо \hat{G}^s является H_p^t дифференцируемым над \mathcal{A}_{r+1} (смотри также подробнее 20(1 – 5)).

20. Теорема. Пусть M_1, M_2 и N_1, N_2 – это H_p^t многообразия над \mathcal{A}_r с $1 \leq r \leq 2$, и пусть G – это группа удовлетворяющая условиям 15(A1, A2, C1, C2), пусть также $M_1 \otimes_l M_2, N_1 \otimes_l N_2$ – это скрещенные произведения многообразий, и G^s – скрещенное произведение групп (смотри предложение 19), где $\dim(M_1) = \dim(M_2), \dim(N_1) = \dim(N_2), t \geq \max(\dim(M_1), \dim(N_1), \dim(G)) + 1$. Тогда группа обёрток $(W^{M_1 \otimes_l M_2; \{s_{0,j,1} \otimes s_{0,v,2} : j=1, \dots, k_1; v=1, \dots, k_2\}} E; N_1 \otimes_l N_2, G^s, \mathbf{P}^s)_{t,H}$ скручена над $\{i_0, \dots, i_{2^r+1-1}\}$ и изоморфна с скрещенным произведением

$$W^{M_2; \{s_{0,v,2} : v=1, \dots, k_2\}} E; N_1, (W^{M_1; \{s_{0,j,1} : j=1, \dots, k_1\}} E; N_1, G, \mathbf{P}_1)_{t,H}, \mathbf{P}_2)_{t,H} \otimes_l$$

$W^{M_2; \{s_{0,v,2} : v=1, \dots, k_2\}} E; N_2, (W^{M_1; \{s_{0,j,1} : j=1, \dots, k_1\}} E; N_2, G, \mathbf{P}_1)_{t,H}, \mathbf{P}_2)_{t,H}$ дважды итерированных групп обёрток скрученных над $\{i_0, \dots, i_{2^r-1}\}$.

Доказательство. Пусть M_b и N_b – это H_p^t многообразия над \mathcal{A}_r с $1 \leq r \leq 2, b = 1, 2$ и пусть G – это группа удовлетворяющая условиям 15(A1, A2, C1, C2) такая, что $E(N_b, G, \pi, \Psi)$ есть главное G -расслоение. Рассмотрим скрещенные произведения $M_1 \otimes_l M_2, N_1 \otimes_l N_2$ многообразий и скрещенное произведение групп G^s (смотри предложение 19), где $t \geq \max(\dim(M_1), \dim(N_1), \dim(G)) + 1$, где $\dim(M_b)$ – тополо-

гическая размерность в смысле покрытий для M_b (смотри [4]), $dim(M_1) = dim(M_2)$, $dim(N_1) = dim(N_2)$. При $At(M_b) = \{(U_{j,b}, \phi_{j,b}) : j\}$ атлас для многообразия M_b его связывающие отображения $\phi_{j,b} \circ \phi_{k,b}^{-1}$ являются H_p^t функциями над \mathcal{A}_r при $U_{j,b} \cap U_{k,b} \neq \emptyset$, где $\phi_{j,b} : U_{j,b} \rightarrow \mathcal{A}_r$ – это гомеоморфизмы из $U_{j,b}$ на $\phi_{j,b}(U_{j,b})$. Тогда $M_1 \otimes_l M_2$ состоит из всех точек (x, yl) с $x \in M_1$ и $y \in M_2$, с атласом $At(M_1 \otimes_l M_2) = \{(U_{j,1} \otimes_l U_{q,2}, \phi_{j,1} \otimes_l \phi_{q,2}) : j, q\}$ таким, что $\phi_{j,1} \otimes_l \phi_{q,2} : U_{j,1} \otimes_l U_{q,2} \rightarrow \mathcal{A}_{r+1}^m$, где m – это размерность многообразия M_1 над \mathcal{A}_r . Выразим для $z = x + yl \in \mathcal{A}_r$ с $x, y \in \mathcal{A}_r$ числа x, y в z представлении, тогда обозначим через $\theta_{j,q}$ отображения соответствующие $\phi_{j,1} \otimes_l \phi_{q,2}$ в z представлении, следовательно, связывающие отображения $\theta_{j,q} \circ \theta_{k,n}^{-1}$ принадлежат классу H_p^t над \mathcal{A}_{r+1} , когда $(U_{j,1} \otimes_l U_{q,2}) \cap (U_{k,1} \otimes_l U_{n,2}) \neq \emptyset$. Поэтому, $M_1 \otimes_l M_2$ и $N_1 \otimes_l N_2$ есть H_p^t многообразия над \mathcal{A}_{r+1} .

В силу теоремы вложения Соболева каждое H^t отображение на $M_1 \otimes_l M_2$ или $N_1 \otimes_l N_2$, или G^s непрерывно при t удовлетворяющем неравенству

$$t \geq \max(dim(M_1), dim(N_1), dim(G)) + 1, \text{ где } dim(M_1) = dim(M_2), dim(N_1) = dim(N_2).$$

Каждая локально аналитическая функция $f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)l$ по $x \in U$ и $y \in V$ может быть записана в виде локально аналитических функций по $z = x + yl$ со значениями в \mathcal{A}_{r+1} , где U и V открыты в \mathcal{A}_r^m , $f_b(x, y)$ – это локально аналитическая функция со значениями в \mathcal{A}_r^w , $b = 1, 2$, $m, w \in \mathbf{N}$. В самом деле, запишем каждую переменную x_j и y_j через z_j с помощью генераторов \mathcal{A}_{r+1} , где $x_j, y_j \in \mathcal{A}_r$, $z_j \in \mathcal{A}_{r+1}$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{A}_r^m$, $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathcal{A}_{r+1}^m$ (смотри формулы 2.8(2) и теорему 2.16 [20]). Если $z \in \mathcal{A}_{r+1}$, тогда

$$(1) z = v_0 i_0 + \dots + v_{2^{r+1}-1} i_{2^{r+1}-1}, \text{ где } v_j \in \mathbf{R} \text{ для любых } j = 0, \dots, 2^{r+1} - 1,$$

$$(2) v_0 = (z + (2^{r+1} - 2)^{-1} \{-z + \sum_{j=1}^{2^{r+1}-1} i_j(z i_j^*)\})/2,$$

(3) $v_s = (i_s(2^{r+1} - 2)^{-1} \{-z + \sum_{j=1}^{2^{r+1}-1} i_j(z i_j^*)\} - z i_j)/2$ для любых $s = 1, \dots, 2^{r+1} - 1$, где $z^* = \tilde{z}$ обозначает сопряжённое число Кэли-Диксона z . В то же время мы имеем для $z = x + yl$ с $x, y \in \mathcal{A}_r$, что

$$(4) x = v_0 i_0 + \dots + v_{2^r-1} i_{2^r-1} \text{ и}$$

$$(5) y = (v_{2^r} i_{2^r} + \dots + v_{2^{r+1}-1} i_{2^{r+1}-1})l^*,$$

где $l = i_{2^r}$ обозначает генератор удвоения.

Поэтому, $f(x, y)$ становится \mathcal{A}_{r+1} голоморфной при использовании соответствующих фраз возникающих канонически из выражений x_j, y_j через z_j по формулам (1 – 5). Множество голоморфных функций всюду плотно в H_p^t согласно с определением этого пространства и теоремой Стоуна-Вейерштрасса в её некоммутативном варианте [19, 20], следовательно, используя направленность Коши, мы можем рассмотреть для любых $f_1, f_2 \in H_p^t$ над \mathcal{A}_r представление функции $f = f_1 + f_2 l$ принадлежащей H_p^t над \mathcal{A}_{r+1} (смотри также [17, 20]).

Тогда расслоение $E(N_1 \otimes_l N_2, G^s, \pi^s, \Psi^s)$ естественно изоморфно с $E(N_1, G, \pi_1, \Psi_1) \otimes_l E(N_2, G, \pi_2, \Psi_2)$, где $\pi^s = \pi_1 \otimes \pi_2 l : E(N_1 \otimes_l N_2, G^s, \pi^s, \Psi^s) \rightarrow N_1 \otimes_l N_2$ – это естественный проектор.

Если $\gamma : M_1 \otimes_l M_2 \rightarrow N_1 \otimes_l N_2$ является H_p^t отображением, тогда $\gamma(z) = \gamma_1(x, y) \times \gamma_2(x, y)l$, где $x \in M_1$ и $y \in M_2$, $z = (x, yl) \in M_1 \otimes_l M_2$, $\gamma_b : M_1 \otimes_l M_2 \rightarrow N_b$. Мы можем записать $\gamma_b(x, y)$ как $(\gamma_{b,1}(x))(y)$ семейство функций по x и параметру y , или как $(\gamma_{b,2}(y))(x)$ семейство функций по y с параметром x . Если $\eta_{b,a} : M_a \rightarrow N_b$, тогда $\mathbf{P}_{\eta_{b,a}, u_b, a}$ обозначает структуру параллельного переноса на M_a над $E(N_b, G, \pi_b, \Psi_b)$.

Поэтому, $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}^s(z) = [\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_{1,1}, u_1; 1}(x)][\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_{1,2}, u_1; 2}(y)] \otimes_l [\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_{2,1}, u_2; 2}(x)][\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_{2,2}, u_2; 2}(y)] \in E_{y_0}(N_1 \otimes_l N_2, G^s, \pi^s, \Psi^s)$ – это структура параллельного переноса в $M_1 \otimes_l M_2$ индуцированная ею из M_1 и M_2 , где $u \in E_{y_0}(N_1 \otimes_l N_2, G^s, \pi^s, \Psi^s)$, $u = u_1 \otimes_l u_2$, $u_b \in E_{y_{0,b}}(N_b, G, \pi_b, \Psi_b)$, $y_{0,b} \in N_b$ – это отмеченная точка, $b = 1, 2$, $y_0 = y_{0,1} \otimes_l y_{0,2}$. Тогда параллельный перенос \mathbf{P}^s является G^s эквивариантным. Поэтому, $\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}^s \rangle_{t, H} = \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1, u_1} \rangle_{t, H} \otimes_l \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, u_2} \rangle_{t, H} = \langle$

$[\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_{1,1,u_1;1}}(x)][\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_{1,2,u_1;2}}(y)] >_{t,H} \otimes_l < [\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_{2,1,u_2;2}}(x)][\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_{2,2,u_2;2}}(y)] >_{t,H}$, где $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b,u_b}$ - это структура параллельного переноса на $M_1 \otimes_l M_2$ над $E(N_b, G, \pi_b, \Psi_b)$, $b = 1, 2$.

Итак, $(W^{M_1 \otimes_l M_2; \{s_{0,j,1} \otimes_l s_{0,v,2}; j=1, \dots, k_1; v=1, \dots, k_2\}} E; N_1 \otimes_l N_2, G^s, \mathbf{P}^s)_{t,H}$ изоморфно с скрещенным произведением

$$W^{M_2; \{s_{0,v,2}; v=1, \dots, k_2\}} E; N_1, (W^{M_1; \{s_{0,j,1}; j=1, \dots, k_1\}} E; N_1, G, \mathbf{P}_1)_{t,H}, \mathbf{P}_2)_{t,H} \otimes_l$$

$$W^{M_2; \{s_{0,v,2}; v=1, \dots, k_2\}} E; N_2, (W^{M_1; \{s_{0,j,1}; j=1, \dots, k_1\}} E; N_2, G, \mathbf{P}_1)_{t,H}, \mathbf{P}_2)_{t,H} \quad \text{итерированных}$$

групп обёрток.

21. Теорема. *Существует гомоморфизм итерированных группа обёрток $\theta : (W^M E)_{a;\infty,H} \otimes (W^M E)_{b;\infty,H} \rightarrow (W^M E)_{a+b;\infty,H}$ для любых $a, b \in \mathbf{N}$, где G - это H_p^∞ группа, $E(N, G, \pi, \Psi)$ является главным H_p^∞ расслоением со структурной группой G . Более того, если (квази-) группа G или ассоциативна, или альтернативна, тогда гомоморфизм θ или ассоциативна, или альтернативна.*

Доказательство. Рассмотрим итерированные группы обёрток $(W^M E)_{a;\infty,H}$ как в §4, $a \in \mathbf{N}$. Если $\gamma_a : M^a \rightarrow N$, $\gamma_b : M^b \rightarrow N$ являются H_p^∞ отображениями такими, что $\gamma_b(s_{0,j_1} \times \dots \times s_{0,j_b}) = y_0$ для любых $j_l = 1, \dots, k$ и $l = 1, \dots, b$, тогда $\gamma := \gamma_a \times \gamma_b : M^a \times M^b \rightarrow N \times N = N^2$, где $M^a \times M^b = M^{a+b}$, $s_{0,j}$ - это отмеченные точки в M с $j = 1, \dots, k$, и y_0 - это отмеченная точка в N , $H_p^\infty = \bigcap_{t \in \mathbf{N}} H_p^t$. Это даёт итерированную структуру параллельного переноса $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u;a+b}(x) := \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a,u_a;a}(x_a) \otimes \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b,u_b;b}(x_b)$ на M^{a+b} над $E(N^2, G^2, \pi, \Psi)$, где $u_b \in E_{y_0}(N, G, \pi, \Psi)$, $u = u_a \times u_b \in E_{y_0 \times y_0}(N^2, G^2, \pi, \Psi)$.

Букет $M^b \vee M^b$ берётся по точкам s_{j_1, \dots, j_b} в M^b , где $s_{j_1, \dots, j_b} := s_{0,j_1} \times \dots \times s_{0,j_b}$ с $j_1, \dots, j_b \in \{1, \dots, k\}$; $s_{0,j}$ - это отмеченные точки в M с $j = 1, \dots, k$. Тогда $(M^a \vee M^a) \times (M^b \vee M^b) \setminus \{s_{j_1, \dots, j_{a+b}} : j_l = 1, \dots, k; l = 1, \dots, a+b\}$ является H_p^t гомеоморфным с $M^{a+b} \vee M^{a+b} \setminus \{s_{j_1, \dots, j_{a+b}} : j_l = 1, \dots, k; l = 1, \dots, a+b\}$, так как $s_{j_1, \dots, j_a} \times s_{j_{a+1}, \dots, j_{a+b}} = s_{j_1, \dots, j_{a+b}}$ для любых j_1, \dots, j_{a+b} . Имеется вложение $Dif H_p^\infty(M^a) \times Dif H_p^\infty(M^b) \hookrightarrow Dif H_p^\infty(M^{a+b})$ для любых $a, b \in \mathbf{N}$. Если $f_a \in Dif H_p^\infty(M^a)$ имеет ограничение $f_a|_{K_a} = id$, тогда $f_a \times f_b \in Dif H_p^\infty(M^{a+b})$ и $f_a \times f_b|_{K_a \times K_b} = id$ при $K_a \subset M^a$. Положим $\theta(< \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{\infty, H; a}, < \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b, u_b; b} >_{\infty, H; b}) = << \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{\infty, H; a} \otimes < \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b, u_b; b} >_{\infty, H; b} >_{\infty, H; a+b}$ есть группа гомоморфизмов, где детальное обозначение $< * >_{t, H; a}$ означает класс эквивалентности над многообразием M^a вместо M , $a \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} & \text{Поэтому, } < \mathbf{P}_{\hat{\gamma} \vee \hat{\eta}, u; a+b} >_{\infty, H; a+b} = << \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a \vee \hat{\eta}_a, u_a; a} >_{\infty, H; a} \otimes < \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b \vee \hat{\eta}_b, u_b; b} >_{\infty, H; b} >_{\infty, H; a+b} \\ & = < (< \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{\infty, H; a} < \mathbf{P}_{\hat{\eta}_a, u_a; a} >_{\infty, H; a}) \otimes (< \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b, u_b; b} >_{\infty, H; b} < \mathbf{P}_{\hat{\eta}_b, u_b; b} >_{\infty, H; b}) >_{\infty, H; a+b} \\ & = < (< \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{\infty, H; a} \otimes < \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b, u_b; b} >_{\infty, H; b}) (< \mathbf{P}_{\hat{\eta}_a, u_a; a} >_{\infty, H; a} \otimes < \mathbf{P}_{\hat{\eta}_b, u_b; b} >_{\infty, H; b}) >_{\infty, H; a+b} \\ & = << \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{\infty, H; a} \otimes < \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b, u_b; b} >_{\infty, H; b} >_{\infty, H; a+b} << \mathbf{P}_{\hat{\eta}_a, u_a; a} >_{\infty, H; a} \otimes < \mathbf{P}_{\hat{\eta}_b, u_b; b} >_{\infty, H; b} >_{\infty, H; a+b} \\ & \mathbf{P}_{\hat{\eta}_b, u_b; b} >_{\infty, H; b} >_{\infty, H; a+b} \\ & = \theta(< \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{\infty, H; a}, < \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b, u_b; b} >_{\infty, H; b}) \theta(< \mathbf{P}_{\hat{\eta}_a, u_a; a} >_{\infty, H; a}, < \mathbf{P}_{\hat{\eta}_b, u_b; b} >_{\infty, H; b}). \end{aligned}$$

Таким образом, θ является групповым гомоморфизмом.

Отображение $H_p^\infty(M^a, N) \times H_p^\infty(M^b, N) \ni (\gamma_a \times \gamma_b) \mapsto (\gamma_a, \gamma_b) \in H_p^\infty(M^{a+b}, N^2)$ принадлежит H_p^∞ классу. Умножение в G^v является H_p^∞ для любых $v \in \mathbf{N}$, так как оно таково для G , так как умножение в G^v таково: $(a_1, \dots, a_v) \times (b_1, \dots, b_v) = (a_1 b_1, \dots, a_v b_v)$, где G^v является v кратным прямым произведением группы G , $a_1, \dots, a_v, b_1, \dots, b_v \in G$.

Итерированная группа обёрток $(W^M E)_{l;t,H}$ для расслоения E является главным G^{kl} расслоением над итерированной коммутативной группой обёрток $(W^M N)_{l;t,H}$ для многообразия N , так как число отмеченных точек в M^l равно kl , где E - это главное G расслоение на многообразии N , $l \in \mathbf{N}$. Таким образом, итерированные группы обёрток ассоциативны или альтернативны, если такова структурная группа G . В силу предложения 7 и замечания 4 гомоморфизм θ принадлежит H_p^∞ классу. С моноида обёрток он имеет естественное H_p^∞ продолжение на группу обёрток.

Если структурная группа G ассоциативна, тогда

$$< \mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u; a+b+v} >_{\infty, H; a+b+v} = << (< \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{\infty, H; a} \otimes < \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b, u_b; b} >_{\infty, H; b}) >_{\infty, H; a+b} \otimes <$$

$\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_v, u_v; v} >_{\infty, H; v} >_{\infty, H; a+b+v}$
 $= \langle \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{\infty, H; a} \otimes (\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b, u_b; b} >_{\infty, H; b} \otimes \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_v, u_v; v} >_{\infty, H; v}) >_{\infty, H; a+b+v} = \theta(\theta(\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{t, H; a}, \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b, u_b; b} >_{t, H; b}), \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_v, u_v; v} >_{t, H; v}))$
 $\theta(\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{t, H; a}, \theta(\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b, u_b; b} >_{t, H; b}), \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_v, u_v; v} >_{t, H; v}))$,
 следовательно, θ есть ассоциативный гомоморфизм.

Если структурная группа G альтернативна, тогда

$\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{\infty, H; a+a+b} = \langle \langle \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{\infty, H; a} \otimes \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{\infty, H; a} \rangle_{\infty, H; a+a} \otimes \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b, u_b; b} >_{\infty, H; v} >_{\infty, H; a+a+b}$
 $= \langle \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{\infty, H; a} \otimes (\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{\infty, H; a} \otimes \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b, u_b; b} >_{\infty, H; b}) >_{\infty, H; a+a+b} = \theta(\theta(\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{t, H; a}, \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{t, H; a}), \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b, u_b; b} >_{t, H; b}))$
 $\theta(\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{t, H; a}, \theta(\langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a, u_a; a} >_{t, H; a}), \langle \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b, u_b; b} >_{t, H; b}))$,
 следовательно, гомоморфизм θ альтернативен слева, аналогично проверяется, что он также альтернативен справа.

22. Замечание. Группы обёрток были определены и изучены выше для расслоений не только над \mathbf{C} , \mathbf{H} и \mathbf{O} , но также над \mathbf{R} со структурной группой Ли. В частности, это охватывает случай мультипликативных групп G коммутативных алгебр таких как H_n , в частности, H_4 квадра чисел. Квадра алгебра коммутативных кватернионов изоморфна с H_4 и играет очень важную роль в физических приложениях (смотри [7, 31]).

Мы предположим теперь, что \mathbf{R} – это кольцо имеющее две подгруппы. Одна из них G_1 коммутативна и связана со сложением, $G_1 = (\mathbf{R}, +)$. Другая – мультипликативна $G_2 = (\mathbf{R} \setminus \{0\}, \times)$. В частности, \mathbf{R} может быть алгеброй \mathbf{A} над полем вещественных чисел \mathbf{R} . Мы рассмотрим случаи коммутативного, ассоциативного и также неассоциативного колец и алгебр с ассоциативным сложением в G_1 и альтернативным умножением в G_2 . Предположим, что расслоение дано со структурным кольцом \mathbf{R} или структурной алгеброй \mathbf{A} вместо группы, так что с G_1 и G_2 ассоциированы структуры параллельных переносов ${}_1\mathbf{P}$ и ${}_2\mathbf{P}$. Поэтому мы скажем, что существует структура параллельных переносов \mathbf{P} на главном расслоении $E(N, \mathbf{R}, \pi, \Psi)$ или $E(N, \mathbf{A}, \pi, \Psi)$ с линейно связным E для линейно связного кольца \mathbf{R} или алгебры \mathbf{A} соответственно.

В частности, \mathbf{A} может быть квадра алгеброй изоморфной с H_4 или более общим образом с алгеброй H_n всех диагональных вещественных $n \times n$ матриц.

23. Теорема. *Существуют группы обёрток $(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}} E; N, \mathbf{R}, \mathbf{P})_{t, H}$ или $(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}} E; N, \mathbf{A}, \mathbf{P})_{t, H}$ с двумя H_p^l групповыми операциями и они являются главными расслоениями над коммутативной группой $(W^M N)_{t, H}$ со структурным кольцом \mathbf{R}^k или со структурной алгеброй \mathbf{A}^k соответственно, где $l = t' - t$ при $[m/2] + 1 \leq t \leq t' < \infty$ или $l = \infty$ при $t' = \infty$ (смотри также замечание 22 выше и [14]).*

Доказательство. Ранее были построены группы обёрток $(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}} E; N, G_j, j\mathbf{P})_{t, H}$ при $j = 1, 2$ для главных расслоений $E(N, G_j, \pi_j, \Psi_j)$ имеющих H_p^l групповые операции согласно теореме 6 [14]. В силу предложения 7 они являются главными расслоениями над $(W^M N)_{t, H}$ со структурными группами G_j^k . С другой стороны, главное расслоение $E(N, \mathbf{R}, \pi, \Psi)$ или $E(N, \mathbf{A}, \pi, \Psi)$ изоморфно с $E((E(N, G_2, \pi_2, \Psi_2)), G_1, \pi_1, \Psi_1)/\xi$, где отношение эквивалентности ξ индуцировано равенством $\theta_1(x) = \theta_2(y)$ в \mathbf{R} или \mathbf{A} соответственно соответствующих элементов $x \in G_1$ и $y \in G_2$, где $\theta_j : G_j \hookrightarrow \mathbf{R}$ или $\theta_j : G_j \hookrightarrow \mathbf{A}$ обозначают $H_p^{t'}$ групповые вложения, $j = 1, 2$. Тогда мы положим

$$(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}} E; N, \mathbf{T}, \mathbf{P})_{t, H} := (W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}} E((E(N, G_2, \pi_2, \Psi_2)), G_1, \pi_1, \Psi_1); \mathbf{P})_{t, H}/\xi,$$

где $\mathbf{T} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{T} = \mathbf{A}$ соответственно, также мы положим

$$(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}} E; K, G_j, j\mathbf{P})_{t, H} = (W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}} E(K, G_j, \pi_j, \Psi_j)); \mathbf{P})_{t, H},$$

следовательно, $(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}} E; N, \mathbf{T}, \mathbf{P})_{t, H}$ снабжено двумя H_p^l групповыми операциями соответствующими $(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}} E; N, G_j, j\mathbf{P})_{t, H}$ при $j = 1, 2$, и существует главное расслоение

$$(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}} E((E(N, G_2, \pi_2, \Psi_2)), G_1, \pi_1, \Psi_1); \mathbf{P})_{t, H} \\ \rightarrow (W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}} E; N, G_2, 2\mathbf{P})_{t, H}$$

со структурной группой G_1^k и использование отношения эквивалентности ξ неизбежно влечёт, что существует главное расслоение

$$(W^{M, \{s_0, q: q=1, \dots, k\}} E; N, \mathbf{T}, \mathbf{P})_{t, H} \rightarrow (W^M N)_{t, H}$$

со структурным кольцом \mathbb{R}^k или структурной алгеброй \mathbf{A}^k соответственно.

Литература

- [1] G. E. Bredon. "Sheaf theory" (New York: McGraw-Hill, 1967).
- [2] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. "Современная геометрия" (Москва: Наука, 1979).
- [3] G. Emch. Helv. Phys. Acta. "Mèchanique quantique quaternionienne et Relativité restreinte", **36** (1963), 739–788.
- [4] Р. Энгелькинг. "Общая топология" (Москва: Мир, 1986).
- [5] K. Fredenhagen, M. Marcu. Phys. Rev. Lett. "Confinement criterion for QCD with dynamical quarks", **56: 3** (1986), 223–224.
- [6] P. Gajer. "Higher holonomies, geometric loop groups and smooth deligne cohomology". in: "Advances in Geometry". J.-L. Brylinski ed. Progr. Math. V. **172**, P. 195–235 (Boston: Birkhäuser, 1999).
- [7] Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов. Гиперкомпл. числа в геометрии и физике. "Группа Лоренца как подгруппа комплексифицированных конформных преобразований пространств с метрикой Бервальда-Моора", **5: 1** (2008), 3–11.
- [8] F. Gürsey, C.-H. Tze. "On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics" (Singapore: World Scientific Publ. Co., 1996).
- [9] У. Р. Гамильтон. "Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы" (Москва: Наука, 1994).
- [10] F. R. Harvey. "Spinors and calibrations". Perspectives in Mathem. **9** (Boston: Academic Press, 1990).
- [11] C. J. Isham. "Topological and global aspects of quantum theory". In: "Relativity, groups and topology. II" 1059–1290, (Les Hauches, 1983). Editors: R. Stora, B. S. De Witt (Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1984).
- [12] I. L. Kantor, A. S. Solodovnikov. "Hypercomplex numbers" (Berlin: Springer-Verlag, 1989).
- [13] H. B. Lawson, M.-L. Michelson. "Spin geometry" (Princeton: Princ. Univ. Press, 1989).
- [14] С. В. Людковский. Гиперкомпл. числа в геометрии и физике. "Группы обёрток кватернионных и октонионных расслоений", **1 (11) vol. 6** (2009) (предыдущий вариант: Los Alamos Nat. Lab. **math.FA 0802.0661**, 27 pages).
- [15] С. В. Людковский. Докл. Акад. Наук. "Квази-инвариантные меры на группах петель римановых многообразий", **370: 3** (2000), 306–308.
- [16] S. V. Ludkovsky. Southeast Asian Bulletin of Mathematics. "Poisson measures for topological groups and their representations", **25** (2002), 653–680. (кратко в Усп. Матем. Наук. **56: 1** (2001), 169–170; предыдущие версии: **IHES/M/98/88**, 38 pages, also Los Alamos Nat. Lab. **math.RT/9910110**).
- [17] S. V. Ludkovsky. J. Mathem. Sci. "Functions of several Cayley-Dickson variables and manifolds over them", **141: 3** (2007), 1299–1330 (предыдущий вариант: Los Alamos Nat. Lab. **math.CV/0302011**).

- [18] С. В. Людковский. *Соврем. Матем. Фундам. Направл.* "Нормальные семейства функций и группы псевдоконформных диффеоморфизмов кватернионных и октонионных переменных", **18** (2006), 101–164 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. math.DG/0603006).
- [19] S. V. Ludkovsky, F. van Oystaeyen. *Bull. Sci. Math. (Paris). Ser. 2.* "Differentiable functions of quaternion variables", **127** (2003), 755–796.
- [20] S. V. Ludkovsky. *J. Mathem. Sci.* "Differentiable functions of Cayley-Dickson numbers and line integration", **141: 3** (2007), 1231–1298 (предыдущая версия: Los Alam. Nat. Lab. math.NT/0406048; math.CV/0406306; math.CV/0405471).
- [21] S. V. Ludkovsky. *J. Mathem. Sci.* "Stochastic processes on geometric loop groups, diffeomorphism groups of connected manifolds, associated unitary representations", **141: 3** (2007), 1331–1384 (предыдущая версия: Los Alam. Nat. Lab. math.AG/0407439, July 2004).
- [22] S. V. Ludkovsky. "Geometric loop groups and diffeomorphism groups of manifolds, stochastic processes on them, associated unitary representations". In the book: "Focus on Groups Theory Research" (Nova Science Publishers, Inc.: New York) 2006, pages 59–136.
- [23] S. V. Ludkovsky. *J. Mathem. Sci.* "Generalized geometric loop groups of complex manifolds, Gaussian quasi-invariant measures on them and their representations", **122: 1** (2004), 2984–3011 (предыдущая версия: Los Alam. Nat. Lab. **math.RT/9910086**, October 1999).
- [24] S. V. Ludkovsky. *Far East J. of Math. Sci. (FJMS).* "Quasi-conformal functions of quaternion and octonion variables, their integral transformations", **28: 1** (2008), 37–88.
- [25] М. Б. Менский. "Группа путей. Измерения. Поля. Частицы" (Москва: Наука, 1983).
- [26] P. W. Michor. "Manifolds of differentiable mappings" (Boston: Shiva, 1980).
- [27] В. П. Михайлов. "Дифференциальные уравнения в частных производных" (Москва: Наука, 1976).
- [28] J. Milnor. "Morse theory" (Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1963).
- [29] H. Omori. *Trans. Amer. Math. Soc.* "Groups of diffeomorphisms and their subgroups", **179** (1973), 85–122.
- [30] H. Omori. *J. Math. Soc. Japan.* "Local structures of groups of diffeomorphisms", **24: 1** (1972), 60–88.
- [31] Д. Г. Павлов. *Гиперкомпл. числа в геометрии и физике.* "Обобщение аксиомы скалярного произведения", **1: 1** (2004), 5–18.
- [32] Л. С. Понтрягин. "Непрерывные группы" (Москва: Наука, 1984).
- [33] R. T. Seeley. *Proceed. Amer. Math. Soc.* "Extensions of C^∞ functions defined in a half space", **15** (1964), 625–626.
- [34] J. M. Souriau. "Groupes différentiels" (Berlin: Springer Verlag, 1981).
- [35] N. Steenrod. "The topology of fibre bundles" (Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1951).
- [36] R. Sulanke, P. Wintgen. "Differentialgeometrie und Faserbündel" (Berlin: Veb deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972).
- [37] R. M. Switzer. "Algebraic topology – homotopy and homology" (Berlin: Springer-Verlag, 1975).
- [38] J. C. Tougeron. "Ideaux de fonctions différentiables" (Berlin: Springer-Verlag, 1972).
- [39] K. G. Wilson. *Phys. Rev. D.* "Confinement of quarks", **10** (1974), 2445–2459.

Structure of wrap groups of hypercomplex fiber bundles

S. V. Ludkovsky

MIREA

sludkowski@mail.ru

This article is devoted to the investigation of structure of wrap groups of connected fiber bundles over the fields of real \mathbf{R} , complex \mathbf{C} numbers, the quaternion skew field \mathbf{H} and the octonion algebra \mathbf{O} , as well as commutative hypercomplex quadra-algebra. Iterated wrap groups are studied as well. Their smashed products are constructed.

Key words: wrap groups, fiber bundles, smashed products, hypercomplex algebra, quaternion, octonion.

ВАРИАНТЫ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ, ОПИСЫВАЮЩИХ РАВЕНСТВА, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ НЕРАВЕНСТВАМ ШВАРЦА–КОШИ–БУНЯКОВСКОГО

Л. Г. Соловей

lgsolovey@gmail.com

Рассмотрены различные варианты гиперкомплексных систем (квазикватернионов), с помощью которых записываются равенства, соответствующие неравенствам Шварца–Коши–Буняковского. Эти варианты различны для систем с комплексными коэффициентами, но для систем с действительными коэффициентами совпадают. Изучаются характерные свойства рассматриваемых вариантов.

Ключевые слова: гиперкомплексные системы, квазикватернионы, неравенства Шварца–Коши–Буняковского.

Введение

Как известно [1], в комплексном n -мерном евклидовом пространстве существуют неравенства Шварца–Коши–Буняковского между скалярными произведениями (\vec{x}, \vec{x}) , (\vec{y}, \vec{y}) и (\vec{x}, \vec{y}) векторов \vec{x}, \vec{y} :

$$|\vec{x}|^2 \cdot |\vec{y}|^2 \geq |(\vec{x}, \vec{y})|^2, \quad (1)$$

где

$$|\vec{x}|^2 = (\vec{x}, \vec{x}), \quad |\vec{y}|^2 = (\vec{y}, \vec{y}), \quad (2)$$

причем

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i^*, \quad (3)$$

x_i, y_i – декартовы координаты векторов \vec{x} и \vec{y} . В статье [2], в частности, установлены равенства, соответствующие указанным неравенствам, и найдены некоторые гиперкомплексные системы, с помощью которых эти равенства могут быть записаны. Эти равенства имеют вид:

$$|\vec{x}|^2 \cdot |\vec{y}|^2 - |(\vec{x}, \vec{y})|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1, (i \neq k)}^n |x_i y_k - x_k y_i|^2 \quad (4)$$

(в правой части – сумма $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ различных слагаемых $|x_i y_k - x_k y_i|^2$).

Сделаем некоторые замечания.

1. При $n = 3$ выражения $x_i y_k - x_k y_i$ являются компонентами векторного произведения $[\vec{x}, \vec{y}]$:

$$[\vec{x}, \vec{y}] = (x_2 y_3 - x_3 y_2) i_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) i_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) i_3. \quad (5)$$

В случае $n \neq 3$ величины $x_i y_k - x_k y_i$ также могут быть истолкованы как $\frac{n(n-1)}{2}$ компонент векторного произведения $[\vec{x}, \vec{y}]$; орты i_k могут быть выбраны следующим образом: выпишем последовательность целых чисел $1, 2, \dots, n$; комбинации $1, 2$ соответствует орт i_3 ; $2, 3 \rightarrow i_4$; $3, 4 \rightarrow i_5$; ... $\rightarrow n$ ортов; затем номера выбираются через один: $1, 3 \rightarrow i_{n+1}$; $2, 4 \rightarrow i_{n+2}$; ... до исчерпания; затем через 2: $1, 4$; $2, 5 \rightarrow$ и т.д., пока не наберется $n' = \frac{n(n-1)}{2}$ различных слагаемых. Пример: $n = 5$. Имеем:

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1) i_3, (x_2 y_3 - x_3 y_2) i_4, (x_3 y_4 - x_4 y_3) i_5, (x_4 y_5 - x_5 y_4) i_1, (x_5 y_1 - x_1 y_5) i_2,$$

$$(x_1y_3 - x_3y_1)i_6, (x_2y_4 - x_4y_2)i_7, (x_3y_5 - x_5y_3)i_8, (x_4y_1 - x_1y_4)i_9, (x_5y_2 - x_2y_5)i_{10}.$$

Теперь равенство (4) запишется следующим образом:

$$|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - |(\vec{x}, \vec{y})|^2 = |[\vec{x}, \vec{y}]|^2, \quad (6)$$

или

$$|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 = |(\vec{x}, \vec{y})|^2 + |[\vec{x}, \vec{y}]|^2. \quad (6')$$

Подставим в (6) вектор $\vec{y} = \vec{y}^*$ и заметим, что $|\vec{y}|^2 = |\vec{y}^*|^2$. Тогда

$$|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - |(\vec{x}, \vec{y}^*)|^2 = |[\vec{x}, \vec{y}^*]|^2, \quad (6'')$$

причем

$$(\vec{x}, \vec{y}^*) = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (7)$$

Э. Картан [3] вводил скалярное произведение

$$(\vec{x}, \vec{y})_c = (\vec{x}, \vec{y}^*) = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (8)$$

Введем также векторное произведение согласно формуле

$$[\vec{x}, \vec{y}]_{c,m} = (x_i y_k^* - x_k y_i^*) i_m, \quad (9)$$

и назовем это векторное произведение *картановым*. Тогда формула (6'') может быть записана в виде

$$|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - |(\vec{x}, \vec{y})_c|^2 = |[\vec{x}, \vec{y}]_c|^2. \quad (10)$$

Соответствующее неравенство Шварца–Коши–Буняковского запишется:

$$|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - |(\vec{x}, \vec{y})_c|^2 \geq 0. \quad (11)$$

Ниже будет продолжено предпринятое в работе [2] изучение гиперкомплексных систем, соответствующих неравенствам (1), (11) и равенствам (4), или (6), и (10).

§I. Квазикватернионы

В рассмотренных в [2] квазикватернионах дано их определение, которое нуждается в расширении с тем, что в его рамках можно было увеличить число изучаемых вариантов.

Рассмотрим гиперкомплексную систему

$$a = x_0 + \vec{a}, \quad (12)$$

где \vec{a} – вектор в $n' = \frac{n(n-1)}{2}$ -мерном пространстве,

$$\vec{a} = \sum_{m=1}^{n'} x_m i_m, \quad (13)$$

$$\vec{x} = \vec{a} \mid x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{n'} = 0, \quad (14)$$

i_m – орты.

Определим квазикватернионы как гиперкомплексную систему, для которой:

1.

$$i_m^2 = -1; \quad (15)$$

2. а.

$$i_k i_l = -i_l i_k, \quad k \neq l, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq l \leq n; \quad (16)$$

$$i_k i_l = i_m, \quad m \neq k, \quad m \neq l; \quad \text{при } m \neq m', \quad (k, l) \neq (k', l'),$$

$$\text{причем при } n = 3 \quad i_1 i_2 = i_3, \quad i_2 i_3 = i_1, \quad i_3 i_1 = i_2;$$

$$\text{при } n > 3 \quad i_1 i_2 = i_3, \dots, i_{n-1}, \quad i_n = i_1, \quad i_n i_1 = i_2; \quad i_1 i_2 = i_{n+1}, \dots$$

до повторения; $i_1 i_4 = \dots$ до повторения и т. д., пока не наберется

$$n' = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{таких произведений.} \quad (17)$$

Пример: $n = 5$. Имеем: $i_1 i_2 = i_3, \quad i_2 i_3 = i_4, \quad i_3 i_4 = i_5, \quad i_4 i_5 = i_1, \quad i_5 i_1 = i_2, \quad i_1 i_3 = i_6, \quad i_2 i_4 = i_7, \quad i_3 i_5 = i_8, \quad i_4 i_1 = i_9, \quad i_5 i_2 = i_{10}$ – всего $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ произведений.

б.

$$i_k i_m = 0 \quad \text{при } k > n \quad \text{или } m > n, \quad \text{причем } k \neq m. \quad (18)$$

в. Для каждого элемента a имеется сопряженный элемент a^+ , т. е. такой, что

$$(a^+)^+ = a, \quad (19)$$

$$aa^+ = a^+a = \sum_{m=0}^{n'} |x_m|^2 = (a, a), \quad n' = \frac{n(n-1)}{2}; \quad (20)$$

$$(a+b)^+ = a^+ + b^+. \quad (20')$$

При этом выполнение соотношения $(ab)^+ = b^+a^+$ не обязательно для комплексных пространств. Легко видеть, что при $n = 3$ в действительном пространстве квазикватернион является кватернионом.

§2. Некоторые варианты квазикватернионов и их свойства

1. В статье [2] были рассмотрены квазикватернионы со следующим законом умножения, который мы запишем в векторной форме. Пусть a и b – квазикватернионы, причем

$$a \cdot b = x_0 y_0^* - (\vec{a}, \vec{b}) + \vec{a} y_0 + x_0 \vec{b} + [\vec{x}, \vec{y}]. \quad (21)$$

Элементам a и b при этом соответствуют сопряженные элементы

$$a^+ = x_0 - \vec{a}, \quad b^+ = y_0 - \vec{b}. \quad (22)$$

Действительно,

$$(a^+)^+ = a, \quad (19)$$

и при $b = a^+$ имеем, согласно (21), (22),

$$aa^+ = |x_0|^2 + (\vec{a}, \vec{a}) + \vec{a} x_0 - x_0 \vec{a} + [\vec{x}, \vec{x}] = (a, a) = \sum_{m=0}^{n'} |x_m|^2, \quad (20)$$

поскольку, как легко видеть, $[\vec{x}, \vec{x}] = 0$. Легко также видеть, что

$$a^+a = aa^+.$$

Этим квазикватернионам, которые в [2] названы правыми, соответствуют квазикватернионы названные в [2] левыми, с законом умножения

$$(ab)_l = x_0^* y_0 - (\vec{a}^*, \vec{b}^*) + x_0 \vec{b} + [\vec{x}, \vec{y}] + \vec{a} y_0. \quad (23)$$

Легко видеть, что

$$(\vec{a}^*, \vec{b}^*) = \sum_{m=1}^{n'} x_m^* y_m, \quad n' = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (24)$$

(\vec{a}^*, \vec{b}^*) может быть названо левым скалярным произведением,

$$(\vec{a}^*, \vec{b}^*) = (\vec{a}, \vec{b})_l. \quad (25)$$

По-прежнему \vec{a}^+, \vec{b}^+ определяются формулой (22). В [2] показано, что

$$(ab)^+ \neq b^+ a^+ \quad (26)$$

но

$$(ab)^+ = (b^+ a^+)_l. \quad (27)$$

Покажем также, что

$$((ab)_l)^+ = b^+ a^+. \quad (28)$$

Имеем, согласно (21), (22), (23)

$$((ab)_l)^+ = x_0^* y_0 - (\vec{a}^*, \vec{b}^*) - \vec{a} y_0 - x_0 \vec{b} - [\vec{x}, \vec{y}], \quad (29)$$

$$b^+ a^+ = y_0 x_0^* - (\vec{b}^*, \vec{a}^*) - \vec{b} x_0 - y_0 \vec{a} + [\vec{y}, \vec{x}]. \quad (30)$$

Но, так как

$$(\vec{a}^*, \vec{b}^*) = (\vec{b}, \vec{a}), \quad (31)$$

$$[\vec{y}, \vec{x}] = -[\vec{x}, \vec{y}], \quad (32)$$

то

$$b^+ a^+ = y_0 x_0^* - (\vec{a}^*, \vec{b}^*) - \vec{b} x_0 - y_0 \vec{a} - [\vec{x}, \vec{y}]. \quad (33)$$

Сравнивая (29) и (33), убеждаемся в том, что

$$((ab)_l)^+ = b^+ a^+. \quad (28)$$

В статье [2] показано, что

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2. \quad (34)$$

Из формулы (21) следует, в частности:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = -(\vec{x}, \vec{y}) + [\vec{x}, \vec{y}]. \quad (35)$$

Далее,

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}|^2 = |(\vec{x}, \vec{y})|^2 + |[\vec{x}, \vec{y}]|^2. \quad (36)$$

Формула (34) получается из сравнения формул (36) и (6'). Точно так же из формулы (23) имеем:

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})_l = -(\vec{x}^*, \vec{y}^*) + [\vec{x}, \vec{y}], \quad (37)$$

$$|(\vec{x} \cdot \vec{y})_l|^2 = |(\vec{x}^*, \vec{y}^*)|^2 + |[\vec{x}, \vec{y}]|^2. \quad (38)$$

Но так как

$$|(\vec{x}^*, \vec{y}^*)|^2 = |(\vec{x}, \vec{y})|^2, \quad (39)$$

то

$$|(\vec{x} \cdot \vec{y})_l|^2 = |(\vec{x}, \vec{y})|^2 + |[\vec{x}, \vec{y}]|^2, \quad (40)$$

т. е.

$$|(\vec{x} \cdot \vec{y})_l|^2 = |\vec{x} \cdot \vec{y}|^2, \quad (41)$$

$$|(\vec{x}\vec{y})_l|^2 = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2. \quad (42)$$

Формулы (36) и (40) являются равенствами, соответствующими неравенствам Шварца–Коши–Буняковского, но с записанными с помощью квазикватернионов. Для более единообразного рассмотрения различных вариантов будем их законам умножения приписывать номера. Так, произведения $a \cdot b$ и $(a \cdot b)_l$ будем также обозначать как $(ab)_1$ и $(ab)_2$.

Перейдем к рассмотрению других вариантов квазикватернионов. Рассмотрим прежде всего квазикватернионы, в которых:

1. В формуле (21) вместо y_0, \vec{b}, \vec{y} подставляются $y_0^*, \vec{b}^*, \vec{y}^*$; тогда получается квазикватернион с законом умножения

$$(a \cdot b)_3 = x_0 y_0 - (\vec{a}, \vec{b}^*) + \vec{a} y_0^* + x_0 \vec{b}^* + [\vec{x}, \vec{y}^*]. \quad (43)$$

Легко видеть, что

$$(\vec{a}, \vec{b}^*) = \sum_{i=1}^{n'} x_i y_i, \quad (8')$$

а m -я компонента $[\vec{x}, \vec{y}^*]$ определяется формулой

$$[\vec{x}, \vec{y}^*]_m = (x_i y_k^* - x_k y_i^*) i_m; \quad (9)$$

Произведения (8') и (2), как было указано выше, будем называть картановыми; произведение $(a \cdot b)_3$ и соответствующие квазикватернионы назовем правыми картановыми,

$$(ab)_3 = (ab)_c; \quad (44)$$

2. В формуле (23) вместо x_0, \vec{a}, \vec{x} подставляются $x_0^*, \vec{a}^*, \vec{x}^*$; при этом получается квазикватернион с законом умножения

$$(a \cdot b)_4 = (a \cdot b)_{c, l} = x_0 y_0 - (\vec{a}, \vec{b}^*) + \vec{a}^* y_0 + x_0^* \vec{b} + [\vec{x}^*, \vec{y}], \quad (45)$$

или

$$(a \cdot b)_{c, l} = x_0 y_0 - (\vec{a}, \vec{b}^*) + \vec{a}^* y_0 + x_0^* \vec{b} + [\vec{x}, \vec{y}^*]^*. \quad (46)$$

В формулу (46) как и в формулу (43), входят картановы скалярное и векторное произведения (\vec{a}, \vec{b}^*) и $[\vec{x}, \vec{y}^*]$.

В качестве сопряженных квазикватернионов в обоих случаях следует принять выражения

$$a^+ = x_0^* - \vec{a}^*. \quad (47)$$

При этом, как и должно быть,

$$(a \cdot a^+)_l = (a^+ a)_l = (a, a^*)_l = (a, a), \quad (48)$$

а также

$$(a \cdot a^+)_{c, l} = (a^+ a)_{c, l} = (a, a^*)_c = (a, a). \quad (49)$$

Вычисления приводят к формулам, аналогичным формулам (27), (28):

$$((ab)_c)^+ = (b^+ a^+)_{c, l}, \quad (50)$$

$$((ab)_{c, l})^+ = (b^+ a^+)_{c, l}. \quad (51)$$

Полагая в формуле (43) $a = \vec{x}$, $b = \vec{y}$, получим:

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})_c = -(\vec{x}, \vec{y}^*) + [\vec{x}, \vec{y}^*], \quad (52)$$

$$|(\vec{x} \cdot \vec{y})_c|^2 = |(\vec{x}, \vec{y}^*)|^2 + |[\vec{x}, \vec{y}^*]|^2. \quad (53)$$

Сравнение формул (53) и (6'') дает

$$|(\vec{x} \cdot \vec{y})_c|^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2. \quad (54)$$

Точно так же из формулы (46) следует

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})_{c, l} = -(\vec{x}, \vec{y}^*) + [\vec{x}, \vec{y}^*]^*, \quad (55)$$

откуда

$$|(\vec{x} \cdot \vec{y})_{c, l}|^2 = |(\vec{x}, \vec{y}^*)|^2 + |[\vec{x}, \vec{y}^*]|^2, \quad (56)$$

или

$$|(\vec{x} \cdot \vec{y})_{c, l}|^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2. \quad (57)$$

Формулы (56) и (57) снова являются равенствами, соответствующими неравенствам Шварца–Коши–Буняковского, но записанными в квазикватернионном виде.

2. В статье [2] наряду с квазикватернионом с законом умножения $(ab)_1$ рассматривался четырехмерный квазикватернион ($n + 1 = 4$) с законом умножения

$$ab = x_0 y_0 - x_1 y_1^* - x_2 y_2^* - x_3 y_3^* + (x_0 y_1 + x_1 y_0^* + x_2 y_3 - x_3 y_2) i_1 + (x_0 y_2 + x_2 y_0^* + x_3 y_1 - x_1 y_3) i_2 + (x_0 y_3 + x_3 y_0^* + x_1 y_2 - x_2 y_1) i_3, \quad (58')$$

причем

$$a^+ = x_0^* - x_1 i_1 - x_2 i_2 - x_3 i_3. \quad (59')$$

Подобный квазикватернион для $n \geq 3$ определяется законом умножения

$$(ab)_d = (ab)_5 = x_0 y_0 - (\vec{a}, \vec{b}) + \vec{a} y_0^* + x_0 \vec{b} + [\vec{x}, \vec{y}], \quad (58)$$

$$a^+ = x_0^* - \vec{a}. \quad (59)$$

Соответствующие левые квазикватернионы умножаются по правилу

$$(ab)_{d, l} = (ab)_6 = x_0 y_0 - (\vec{a}^*, \vec{b}^*) + \vec{a} y_0^* + x_0 \vec{b} + [\vec{x}, \vec{y}], \quad (60)$$

причем a^+ определяется формулой (59).

Отметим (см. также [2]), что, полагая в формуле (58) коэффициенты при всех мнимых единицах, кроме одной (i_m), равными нулю, мы получаем т. н. "удвоенные" комплексные числа, изоморфные действительным кватернионам [5]. Квазикватернионы с правилами умножения (58), (60), а также рассматриваемые ниже, будем называть дуальными. Вычисления, аналогичные приведенным для квазикватернионов, рассмотренных выше, приводят к формулам

$$((ab)_d)^+ = (b^+ a^+)_{d, l}, \quad (61)$$

$$((ab)_{d, l})^+ = (b^+ a^+)_{d, l}. \quad (62)$$

Формулы (61), (62) показывают, что для соответствующих квазикватернионов сопряжение является стандартным. Полагая в формулах (58) и (60) $a = \vec{x}$, $b = \vec{y}$, получим соответственно

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})_d = -(\vec{x}, \vec{y}) + [\vec{x}, \vec{y}], \quad (63)$$

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})_{d, l} = -(\vec{x}^*, \vec{y}^*) + [\vec{x}, \vec{y}], \quad (64)$$

откуда

$$|(\vec{x} \cdot \vec{y})_d|^2 = |(\vec{x}, \vec{y})|^2 + |[\vec{x}, \vec{y}]|^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2, \quad (65)$$

$$|(\vec{x} \cdot \vec{y})_{d, l}|^2 = |(\vec{x}, \vec{y})|^2 + |[\vec{x}, \vec{y}]|^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2, \quad (66)$$

аналогично формулам, полученным для рассмотренных ранее квазикватернионов. Далее, полагая формуле (58) y_0^* вместо y_0 , \vec{b}^* вместо \vec{b} , \vec{y}^* вместо \vec{y} , получим квазикватернионы с законом умножения

$$(ab)_7 = (ab)_{c, d} = x_0 y_0^* - (\vec{a}, \vec{b}^*) + \vec{a} y_0 + x_0 \vec{b}^* + [\vec{x}, \vec{y}^*]. \quad (67)$$

Далее, полагая в формуле (60) x_0^* вместо x_0 , \vec{a}^* вместо \vec{a} , \vec{x}^* вместо \vec{x} , получим квазикватернион с законом умножения

$$(ab)_8 = (ab)_{c, d, l} = x_0^* y_0 - (\vec{a}, \vec{b}^*) + \vec{a}^* y_0^* + x_0^* \vec{b} + [\vec{x}^*, \vec{y}]. \quad (68)$$

Сопряжение в обоих случаях определяется формулой

$$\vec{a}^+ = x_0 - \vec{a}^*. \quad (69)$$

Для этих квазикватернионов получаются формулы

$$((ab)_{c, d})^+ = ((b^+ a^+)_{c, d})^*, \quad (70)$$

$$((ab)_{c, d, l})^+ = ((b^+ a^+)_{c, d, l})^*. \quad (71)$$

Как и ранее, из формул (67) и (68) следует

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})_{c, d} = -(\vec{x}, \vec{y}^*) + [\vec{x}, \vec{y}^*], \quad (72)$$

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})_{c, d, l} = -(\vec{x}, \vec{y}^*) + [\vec{x}^*, \vec{y}], \quad (73)$$

а также

$$|(\vec{x} \cdot \vec{y})_{c, d}|^2 = |(\vec{x}, \vec{y}^*)|^2 + |[\vec{x}, \vec{y}^*]|^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2, \quad (74)$$

$$|(\vec{x} \cdot \vec{y})_{c, d, l}|^2 = |(\vec{x}, \vec{y}^*)|^2 + |[\vec{x}, \vec{y}^*]|^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2. \quad (75)$$

Таким образом, для всех рассмотренных квазикватернионов имеем:

$$|(\vec{x} \cdot \vec{y})_m|^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2 = |(\vec{x}, \vec{y})|^2 + |[\vec{x}, \vec{y}]|^2 = |(\vec{x}, \vec{y}^*)|^2 + |[\vec{x}, \vec{y}^*]|^2. \quad (76)$$

Легко видеть, что рассмотренные выше варианты квазикватернионов в действительной области совпадают. Покажем, что для всех рассмотренных квазикватернионов соблюдаются законы дистрибутивности, поскольку они соблюдаются при написании произведений $a \cdot b$. Все указанные произведения могут быть записаны в виде

$$(a \cdot b)_m = x_0^{\delta_{01}^m} y_0^{\delta_{02}^m} - (\vec{a}^{\delta_{11}^m}, \vec{b}^{\delta_{12}^m}) + \vec{a}^{\delta_{21}^m} y_0^{\delta_{22}^m} + x_0^{\delta_{31}^m} \vec{b}^{\delta_{32}^m} + [\vec{x}^{\delta_{41}^m}, \vec{y}^{\delta_{42}^m}]. \quad (77)$$

где δ_{ik}^m или 1, или знак комплексного сопряжения *. Запишем символы δ_{ik}^m в виде строки

$$\delta_{ik}^m = (\delta_{01}^m \delta_{02}^m \delta_{11}^m \delta_{12}^m \delta_{21}^m \delta_{22}^m \delta_{31}^m \delta_{32}^m \delta_{41}^m \delta_{42}^m), \quad (78)$$

причем, очевидно,

$$(a + b)^{\delta_{ik}^m} = a^{\delta_{ik}^m} + b^{\delta_{ik}^m}. \quad (79)$$

для произведений $(ab)_m$ имеем:

$$\delta_{ik}^1 = (1 * 11 11 11 11), \quad (80)$$

$$\delta_{ik}^2 = (*1 * * 11 11 11), \quad (81)$$

$$\delta_{ik}^3 = (11 1 * 1 * 1 * 1*), \quad (82)$$

$$\delta_{ik}^4 = (11 1 * *1 * 1 * 1), \quad (83)$$

$$\delta_{ik}^5 = (11 11 1 * 11 11), \quad (84)$$

$$\delta_{ik}^6 = (11 * * 1 * 11 11), \quad (85)$$

$$\delta_{ik}^7 = (1 * 1 * 11 1 * 1*), \quad (86)$$

$$\delta_{ik}^8 = (*1 1 * * * 1 * 1). \quad (87)$$

Произведения квазикватернионов $[(a + b)c]_m$ равны:

$$\begin{aligned} [(a + b)c]_m &= (x_0 + \vec{a} + y_0 + \vec{b})(z_0 + \vec{c})_m = [x_0 + y_0 + (\vec{a} + \vec{b})](z_0 + \vec{c})_m = (x_0 + y_0)^{\delta_{01}^m} z_0^{\delta_{02}^m} \\ &\quad - ((\vec{a} + \vec{b})^{\delta_{11}^m}, \vec{c}^{\delta_{12}^m}) + (\vec{a} + \vec{b})^{\delta_{21}^m} z_0^{\delta_{22}^m} + (x_0 + y_0)^{\delta_{31}^m} \vec{c}^{\delta_{32}^m} + [(\vec{x} + \vec{y})^{\delta_{41}^m}, \vec{z}^{\delta_{42}^m}]; \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} (a \cdot c)_m + (b \cdot c)_m &= x_0^{\delta_{01}^m} z_0^{\delta_{02}^m} - (\vec{a}^{\delta_{11}^m}, \vec{c}^{\delta_{12}^m}) + \vec{a}^{\delta_{21}^m} z_0^{\delta_{22}^m} + x_0^{\delta_{31}^m} \vec{c}^{\delta_{32}^m} + [\vec{x}^{\delta_{41}^m}, \vec{z}^{\delta_{42}^m}] + \\ & y_0^{\delta_{01}^m} z_0^{\delta_{02}^m} - (\vec{b}^{\delta_{11}^m}, \vec{c}^{\delta_{12}^m}) + \vec{b}^{\delta_{21}^m} z_0^{\delta_{22}^m} + y_0^{\delta_{31}^m} \vec{c}^{\delta_{32}^m} + [\vec{y}^{\delta_{41}^m}, \vec{z}^{\delta_{42}^m}] = (x_0 + y_0)^{\delta_{01}^m} z_0^{\delta_{02}^m} - ((\vec{a} + \vec{b})^{\delta_{11}^m}, \vec{c}^{\delta_{12}^m}) + \\ & (\vec{a} + \vec{b})^{\delta_{21}^m} z_0^{\delta_{22}^m} + (x_0 + y_0)^{\delta_{31}^m} \vec{c}^{\delta_{32}^m} + [(\vec{x} + \vec{y})^{\delta_{41}^m}, \vec{z}^{\delta_{42}^m}]. \end{aligned} \quad (89)$$

Сравнение (88) и (89) дает:

$$[(a + b)c]_m = (ac)_m + (bc)_m \quad - \text{левый закон дистрибутивности.} \quad (90)$$

Точно так же имеем:

$$\begin{aligned} [c(a + b)]_m &= z_0^{\delta_{01}^m} (x_0 + y_0)^{\delta_{02}^m} - (\vec{c}^{\delta_{11}^m}, (\vec{a} + \vec{b})^{\delta_{12}^m}) + \vec{c}^{\delta_{21}^m} (x_0 + y_0)^{\delta_{22}^m} + \\ & z_0^{\delta_{31}^m} (\vec{a} + \vec{b})^{\delta_{32}^m} + [\vec{z}^{\delta_{41}^m}, (\vec{x} + \vec{y})^{\delta_{42}^m}]; \end{aligned} \quad (91)$$

$$\begin{aligned} [(ca)_m + (cb)_m] &= z_0^{\delta_{01}^m} x_0^{\delta_{02}^m} - (\vec{c}^{\delta_{11}^m}, \vec{a}^{\delta_{12}^m}) + \vec{c}^{\delta_{21}^m} x_0^{\delta_{22}^m} + z_0^{\delta_{31}^m} \vec{a}^{\delta_{32}^m} + [\vec{z}^{\delta_{41}^m}, \vec{x}^{\delta_{42}^m}] + \\ & z_0^{\delta_{01}^m} y_0^{\delta_{02}^m} - (\vec{c}^{\delta_{11}^m}, \vec{b}^{\delta_{12}^m}) + \vec{c}^{\delta_{21}^m} y_0^{\delta_{22}^m} + z_0^{\delta_{31}^m} \vec{b}^{\delta_{32}^m} + [\vec{z}^{\delta_{41}^m}, \vec{y}^{\delta_{42}^m}] = z_0^{\delta_{01}^m} (x_0 + y_0)^{\delta_{02}^m} - (\vec{c}^{\delta_{11}^m}, (\vec{a} + \vec{b})^{\delta_{12}^m}) + \\ & \vec{c}^{\delta_{21}^m} (x_0 + y_0)^{\delta_{22}^m} + z_0^{\delta_{31}^m} (\vec{a} + \vec{b})^{\delta_{32}^m} + [\vec{z}^{\delta_{41}^m}, (\vec{x} + \vec{y})^{\delta_{42}^m}]. \end{aligned} \quad (92)$$

Сравнивая формулы (91) и (92), имеем

$$[c(a + b)]_m = (ca)_m + (cb)_m \quad - \text{правый закон дистрибутивности.} \quad (93)$$

Мы видим, что рассмотренные квазикватернионы являются кольцами. Рассмотрим теперь подробнее связь между скалярным, а также векторным произведением, и произведением квазикватернионов (для ряда гиперкомплексных систем этот вопрос исследовался А. А. Элиовичем в статье [4]). Согласно формулам (20), (20') для любого квазикватерниона

$$(a + b)(a + b)^+ = |a|^2 + |b|^2 + ab^+ + ba^+, \quad (94)$$

$$(a + b)(a + b)^+ = (a + b, a + b) = |a|^2 + |b|^2 + (a, b) + (b, a) = |a|^2 + |b|^2 + 2Re(a, b). \quad (95)$$

Сравнивая формулы (94) и (95), получим для всех вариантов

$$\frac{1}{2}(ab^+ + ba^+) = Re(a, b). \quad (96)$$

Далее, имеем:

$$(a + b)^+(a + b) = |a|^2 + |b|^2 + a^+b + b^+a, \quad (97)$$

$$(a + b)^+(a + b) = (a + b, a + b) = |a|^2 + |b|^2 + (a, b) + (b, a) = |a|^2 + |b|^2 + 2Re(a, b). \quad (98)$$

Сравнивая формулу (97) и (98), имеем:

$$\frac{1}{2}(a^+b + b^+a) = Re(a, b). \quad (99)$$

Из формул (96) и (99) следует ([4])

$$\frac{1}{2}(ab^+ + ba^+) = \frac{1}{2}(a^+b + b^+a). \quad (100)$$

Для действительных квазикватернионов получается ([4]):

$$\frac{1}{2}(ab^+ + ba^+) = \frac{1}{2}(a^+b + b^+a) = (a, b). \quad (101)$$

В статье [4] также рассматривалась связь величин $\frac{1}{2}(ab^+ - ba^+)$ и $\frac{1}{2}(a^+b - b^+a)$ с векторным произведением. Вычислим эти величины для квазикватернионов с произведением $(ab)_1$. Имеем:

$$(ab)_1 = x_0y_0^* - (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}y_0 + x_0\vec{b} + [\vec{x}, \vec{y}]), \quad (21)$$

$$(ab^+)_1 = x_0y_0^* + (\vec{a}, \vec{b}) + \vec{a}y_0 - x_0\vec{b} - [\vec{x}, \vec{y}] = (a, b) + \vec{a}y_0 - x_0\vec{b} - [\vec{x}, \vec{y}], \quad (102)$$

$$(ba^+)_1 = y_0x_0^* + (\vec{b}, \vec{a}) + \vec{b}x_0 - y_0\vec{a} - [\vec{y}, \vec{x}] = (a, b)^* + \vec{b}x_0 - y_0\vec{a} - [\vec{y}, \vec{x}], \quad (103)$$

$$\frac{1}{2}[(ab^+)_1 - (ba^+)_1] = iIm(a, b) + \vec{a}y_0 - x_0\vec{b} - [\vec{x}, \vec{y}]. \quad (104)$$

В действительной области

$$\frac{1}{2}(ab^+ - ba^+) = \vec{a}y_0 - x_0\vec{b} - [\vec{x}, \vec{y}] \quad (105)$$

для всех квазикватернионов. Из формулы (105) получается для \vec{a} и \vec{b} :

$$\frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b}^+ - \vec{b}\vec{a}^+) = -[\vec{x}, \vec{y}], \quad (106)$$

а также, в частности

$$\frac{1}{2}(\vec{x}\vec{y}^+ - \vec{y}\vec{x}^+) = -[\vec{x}, \vec{y}]. \quad (107)$$

Далее,

$$(a^+b)_1 = x_0 y_0^* + (\vec{a}, \vec{b}) - \vec{a} y_0 + x_0 \vec{b} - [\vec{x}, \vec{y}] = (a, b) - \vec{a} y_0 + x_0 \vec{b} - [\vec{x}, \vec{y}], \quad (108)$$

$$(b^+a)_1 = (b, a) - \vec{b} x_0 + y_0 \vec{a} - [\vec{y}, \vec{x}], \quad (109)$$

$$\frac{1}{2}[(a^+b)_1 - (b^+a)_1] = iIm(a, b) - \vec{a} y_0 + x_0 \vec{b} - [\vec{x}, \vec{y}]. \quad (110)$$

В действительной области

$$\frac{1}{2}[(a^+b) - (b^+a)] = -\vec{a} y_0 + x_0 \vec{b} - [\vec{x}, \vec{y}]. \quad (111)$$

При $a = \vec{a}$, $b = \vec{b}$ получается [4]:

$$\frac{1}{2}(a^+b - b^+a) = -[\vec{x}, \vec{y}], \quad (112')$$

или, так как $\vec{a}^+ = -\vec{a}$, $\vec{b}^+ = -\vec{b}$, то

$$\frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}) = [\vec{x}, \vec{y}]. \quad (112)$$

В частности,

$$\frac{1}{2}(\vec{x}^+\vec{y} - \vec{y}^+\vec{x}) = -[\vec{x}, \vec{y}], \quad (113')$$

или

$$\frac{1}{2}(\vec{x}\vec{y} - \vec{y}\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{y}]. \quad (113)$$

Рассмотренные варианты квазикватернионов позволяют с их помощью записать равенства, соответствующие неравенствам Шварца–Коши–Буняковского. В эти равенства в зависимости от вариантов скалярные и векторные произведения входят либо в стандартной форме, либо в форме, названной выше картановой. Отметим также, что в квазикватернионе a естественно считать x_0 реальной частью, а \vec{a} – мнимой частью.

$$x_0 = \widetilde{Re} a, \quad (114)$$

$$\vec{a} = \widetilde{Im} a. \quad (115)$$

При этом x_0 – вообще говоря комплексное число, а \vec{a} – вообще говоря отнюдь не чисто мнимый вектор [4]. Из формул (21), (23), (43), (45), (58), (60), (67), (68) для произведений $(a \cdot b)_i$, ($i = 1, 2, \dots, 8$) получим:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{b} \\ (\vec{a} \cdot \vec{b})_d \end{array} \right\} = -(\vec{a}, \vec{b}) + [\vec{x}, \vec{y}], \quad (116)$$

$$\left. \begin{array}{l} (\vec{a} \cdot \vec{b})_c \\ (\vec{a} \cdot \vec{b})_{c; d} \end{array} \right\} = -(\vec{a}, \vec{b}^*) + [\vec{x}, \vec{y}^*], \quad (117)$$

$$\left. \begin{array}{l} (\vec{a} \cdot \vec{b})_l \\ (\vec{a} \cdot \vec{b})_{d; l} \end{array} \right\} = -(\vec{a}^*, \vec{b}^*) + [\vec{x}, \vec{y}], \quad (118)$$

$$\left. \begin{array}{l} (\vec{a} \cdot \vec{b})_{c; l} \\ (\vec{a} \cdot \vec{b})_{c; d; l} \end{array} \right\} = -(\vec{a}, \vec{b}^*) + [\vec{x}^*, \vec{y}]. \quad (119)$$

Из этих формул следует, что скалярные произведения (\vec{a}, \vec{b}) , (\vec{a}, \vec{b}^*) и $(\vec{a}, \vec{b})^*$ представляют собой реальные части произведений мнимых частей квазикватернионов, взятые с обратным знаком $(-\widetilde{Re}(\vec{a}, \vec{b}))$, тогда как векторные произведения $[\vec{x}, \vec{y}]$, $[\vec{x}, \vec{y}^*]$ и $[\vec{x}^*, \vec{y}]$ – их мнимые части $(\widetilde{Im}(\vec{a}, \vec{b})_i)$. Из полученных формул видно, что для действительных квазикватернионов формулы (116) – (119) совпадают, и что для рассмотренных в [4] (в действительной области) произведений

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b}^+ + \vec{b}\vec{a}^+) \\ \frac{1}{2}(\vec{a}^+\vec{b} + \vec{b}^+\vec{a}) \end{aligned} \right\} = -\widetilde{Re}(\vec{a}\vec{b}), \quad (120')$$

или

$$\frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}) = \widetilde{Re}(\vec{a}\vec{b}), \quad (120)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b}^+ - \vec{b}\vec{a}^+) \\ \frac{1}{2}(\vec{a}^+\vec{b} - \vec{b}^+\vec{a}) \end{aligned} \right\} = -\widetilde{Im}(\vec{a}\vec{b}), \quad (121')$$

или

$$\frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}) = \widetilde{Im}(\vec{a}\vec{b}). \quad (121)$$

Дополнение. Неравенства типа Шварца–Коши–Буняковского для векторных произведений

Из формул (6'), (10), очевидно, следуют неравенства

$$|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 \geq |[\vec{x}, \vec{y}]|^2, \quad (D1)$$

$$|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 \geq |[\vec{x}, \vec{y}]_c|^2, \quad (D2)$$

в правой части которых стоят векторные произведения.

Благодарности

Автор благодарит А. А. Элиовича за полезное обсуждение результатов, относящихся к связи ряда гиперкомплексных систем со скалярным и векторным произведением.

Литература

- [1] С. Ленг. *Алгебра*. Пер. с англ. Е. С. Голода. Под ред. А. И. Кострикина. Мир, Москва, 1968.
- [2] Л. Г. Соловей. *Равенства, соответствующие псевдонормам матриц n-го порядка и неравенствам Шварца–Коши–Буняковского*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (7)**, том 4, 2007.
- [3] Э. Картан. *Теория спиноров*. Пер. с франц. по ред. проф. П. А. Широкова, Государственное издательство иностранной литературы, Москва, 1947.
- [4] А. А. Элиович *О норме бикватернионов и иных алгебр с центральным сопряжением*. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2 (2)**, 2001.
- [5] И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. *Гиперкомплексные числа*. Наука, Москва, 1973.

**Types of hypercomplex numbers describing equality,
which corresponds to inequalities of Schwarz–Cauchy–Bounjakowsky**

L. G. Solovey

lgsolovey@gmail.com

The paper considers a different variants of hypercomplex systems (quasiquaternions) for which inequalities equivalent to Schwarz–Cauchy–Bounjakowsky inequalities exists. The variants are different for systems with complex coefficients but coincide for systems with real coefficients. Paper investigates typical properties of the considered variants.

Key words: hypercomplex systems, quasiquaternions, inequalities of Schwarz–Cauchy–Bounjakowsky.

ПОЛЕВЫЕ АНАЛОГИ ЗАКОНОВ НЬЮТОНА ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРО-ГРАВИМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Л. А. Алексеева

Институт математики МОН РК, Алматы, Казахстан
alexeeva@math.kz

С использованием гамильтоновой формы уравнений Максвелла предложена бикватернионная модель электро-гравимагнитного (ЭГМ) поля. Построены уравнения взаимодействия ЭГМ-полей, порождаемых различными зарядами и токами. Рассмотрены полевые аналоги трех законов Ньютона для свободных и взаимодействующих зарядов-токов, а также суммарного поля взаимодействий. Исследована инвариантность уравнений модели ЭГМ-поля при преобразованиях Лоренца, и, в частности, закона сохранения заряда-тока. Показано, что при взаимодействии полей этот закон отличается от общеизвестного. Предложена новая модификация уравнений Максвелла с введением скалярного поля сопротивления в бикватернион напряженности ЭГМ-поля. Построены релятивистские формулы преобразования плотностей масс и зарядов, токов, сил и их мощностей. Дано решение задачи Коши для уравнения трансформации зарядов и токов.

Ключевые слова: электро-гравимагнитное поле, бикватернион, уравнения Максвелла, уравнения трансформации, законы сохранения, энергия взаимодействия, преобразования Лоренца.

MSC 35Q60, 83C50. УДК 519.6:537.12:531.1

В статье рассматривается одна бикватернионная модель электро-гравимагнитного (ЭГМ) поля, названная *A-полем*. Для ее построения использовалась комплексная гамильтонова форма симметризованных уравнений Максвелла [1]. В [2] показано, что гамильтонова форма позволяет легко перейти к бикватернионной записи этих уравнений и законов сохранения. Следует отметить, что свои уравнения Д. К. Максвелл дал в кватернионной форме, а ныне принятая и широко используемая принадлежит О. Хевисайду [3]. Кватернионные формы уравнений Максвелла ранее получали и другие авторы [3–5]. Они различаются в зависимости от того, как вводятся кватернионы напряженности, зарядов и токов ЭМ-поля, а также операции на их алгебрах. Однако эти формы использовались в основном лишь для исследования решений уравнений Максвелла. Подобные формы также использовал В. В. Кассандров для построения своей модели поля [6].

Здесь используется скалярно-векторная запись бикватернионов, которая очень наглядна и удивительно приспособлена для записи физических величин и уравнений. Рассмотрена задача Коши для комплексных градиентов в пространстве бикватернионов и получены их решения.

С введением бикватерниона *силы-мощности* развивается бикватернионный подход для построения уравнений взаимодействия *A*-полей, порождаемых различными зарядами и токами, и на их основе аналоги трех законов Ньютона для свободных и взаимодействующих зарядов-токов, а также суммарного поля взаимодействий. Получены законы преобразования и сохранения энергии при взаимодействии.

Исследована инвариантность уравнений модели *A*-поля при преобразованиях Лоренца, и, в частности, закона сохранения заряда-тока. Показано, что при взаимодействии

зарядов-токов, этот закон отличается от общеизвестного. Предложена новая модификация уравнений Максвелла с введением скалярного поля в бикватернион напряженности А-поля. Построены релятивистские формулы преобразования плотностей масс и зарядов, токов, сил и их мощностей.

1. Гамильтонова форма уравнений Максвелла

Симметризованные уравнения Максвелла для ЭМ-поля можно записать в виде одного векторного и одного скалярного уравнения. В пространстве Минковского $\mathbf{M} = R^{1+3} = \{(\tau, x) = (ct, x_1, x_2, x_3)\}$ они имеют следующий вид [1]:

$$\partial_\tau A + i \operatorname{rot} A + J = 0, \quad (1)$$

$$\rho = \operatorname{div} A, \quad (2)$$

где A – комплексный вектор напряженности поля:

$$A = A^E + i A^H = \sqrt{\varepsilon} E + i \sqrt{\mu} H, \quad (3)$$

E, H – напряженности электрического и магнитного полей, ε, μ – константы, характеризующие электрическую проводимость и магнитную проницаемость среды, $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ – скорость ЭМ-волн. Плотность заряда ρ и J – ток выражаются через электрические и магнитные заряды и токи формулами:

$$\rho = \rho^E / \sqrt{\varepsilon} - i \rho^H / \sqrt{\mu}, \quad J = \sqrt{\mu} j^E - i \sqrt{\varepsilon} j^H, \quad (4)$$

$$\rho^E = \varepsilon \operatorname{div} E, \quad \rho^H = -\mu \operatorname{div} H. \quad (5)$$

Плотность энергии А-поля W и вектор Пойнтинга P определяются выражениями:

$$W = 0,5 (\varepsilon \|E\|^2 + \mu \|H\|^2) = 0,5(A, \bar{A}), \quad P = c^{-1} E \times H = 0,5i [A, \bar{A}], \quad (6)$$

где $\bar{A} = \sqrt{\varepsilon} E - i \sqrt{\mu} H$ – комплексно-сопряженное A . Здесь всюду $(a, b) = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$, $[a, b] = a \times b = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} e_i a_j b_k$ – скалярное и векторное произведения a и b соответственно, ε_{ijk} – псевдотензор Леви-Чивита, e_i – орты декартовой системы координат. Как видим из (6), плотность энергии – это просто половина квадрата модуля комплексного вектора A .

В уравнениях Максвелла плотность магнитного заряда $\rho^H = 0$, так как магнитное поле – вихревое: $\operatorname{div} H = 0$. Известно, что гравитационное поле является скалярным, описывается скалярным гравитационным потенциалом, который зависит от распределения масс. Здесь предлагаем объединить эти два поля в одно – *гравимагнитное*, что можно сделать введением гравитационной плотности в уравнения Максвелла. В частности, предположим, что *плотность ρ^H эквивалентна плотности гравитационной массы*. Далее покажем, что эта гипотеза имеет теоретические подтверждения, приводящие к весьма правдоподобным следствиям.

Отсюда следует, что потенциальная часть вектора H описывает гравитационное поле, а вихревая – магнитное, поэтому H -поле – это гравимагнитное поле. Следовательно, A -поле является *электро-гравимагнитным*. Поскольку его размерность определяется плотностью энергии, его можно назвать *энергетическим*.

Будем называть j^H *гравимагнитным* током. При $\rho^H = 0$ это чисто *магнитные* токи, при потенциальном H токи *массовые*.

Заметим, что все соотношения для А-поля (а не для E и H) не содержат констант среды, в частности, скорость электромагнитных волн, которая во введенной системе координат безразмерна и равна 1.

Приведем здесь также некоторые известные утверждения для А-поля, которые являются следствием уравнений Максвелла [1].

Т е о р е м а 1. При заданных токах и зарядах решение (1) является решением волнового уравнения:

$$\square A = (\partial_\tau^2 - \Delta)A = i \operatorname{rot} J - \operatorname{grad} \rho - \partial_\tau J, \quad (7)$$

и удовлетворяет законам сохранения заряда и энергии:

$$\partial_\tau \rho + \operatorname{div} J = 0, \quad (8)$$

$$\partial_\tau W + \operatorname{div} P = -\operatorname{Re}(J, \bar{A}) = c^{-1}(j^H H - j^E E). \quad (9)$$

Система уравнений Максвелла незамкнута. Она позволяет по заданным зарядам и токам определять поле, и наоборот, при заданном поле находить порождающие его заряды и токи. Если последние неизвестны, то для ее замыкания обычно используют уравнения механики сплошных сред. Однако здесь мы поступим иным образом, используя бикватернионную запись этих уравнений и законы Ньютона.

Для перехода к бикватернионной записи этих и последующих уравнений дадим краткое описание функционального пространства бикватернионов и операций над ним.

2. Бикватернионы на пространстве Минковского и их комплексные градиенты

Рассмотрим функциональное пространство бикватернионов – это пространство комплексных кватернионов: $K(\mathbf{M}) = \{\mathbf{F} = f(\tau, x) + F(\tau, x)\}$, где f – комплекснозначная функция, а F – трехмерная вектор-функция с комплексными компонентами, f и F – локально интегрируемы и дифференцируемы на $\mathbf{M} = \{(\tau, x) : \tau \in R^1, x \in R^3\}$. Пространство K – ассоциативная, но некоммутативная алгебра со сложением вида: $\mathbf{F} + \mathbf{G} = (f + g) + (F + G)$, и операцией кватернионного умножения (\circ):

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = (f + F) \circ (g + G) = (fg - (F, G)) + (fG + gF + [F, G]). \quad (10)$$

Бикватернион $\bar{\mathbf{F}} = \bar{f} + \bar{F}$ называется *комплексно-сопряженным*, а $\mathbf{F}^* = \bar{f} - \bar{F}$ называется *сопряженным*. Если $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}$, бикватернион называется *самосопряженным*.

Скалярным произведением бикватернионов $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ назовем билинейную операцию $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = f_1 f_2 + (F_1, F_2)$. Норма бикватерниона $\|\mathbf{F}\| = \sqrt{(\mathbf{F}, \bar{\mathbf{F}})} = \sqrt{f \cdot \bar{f} + (F, \bar{F})} = \sqrt{|f|^2 + \|F\|^2}$, а псевдонормой бикватерниона назовем величину $\langle \mathbf{F} \rangle = \sqrt{f \cdot \bar{f} - (F, \bar{F})} = \sqrt{|f|^2 - \|F\|^2}$.

Далее используются дифференциальные операторы – взаимные комплексные градиенты: $\mathbf{D}^+ = \partial_\tau + i\nabla$, $\mathbf{D}^- = \partial_\tau - i\nabla$, где $\nabla = \operatorname{grad} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$. Их действие на K определено как в алгебре кватернионов: (соответственно знакам)

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\pm \mathbf{F} &= (\partial_\tau \pm i\nabla) \circ (f + F) = (\partial_\tau f \mp i(\nabla, F)) \pm \partial_\tau F \pm i\nabla f \pm i[\nabla, F] = \\ &= (\partial_\tau f \mp i \operatorname{div} F) \pm \partial_\tau F \pm i \operatorname{grad} f \pm i \operatorname{rot} F. \end{aligned}$$

Заметим, что в смысле выше данных определений: $(\mathbf{D}^-)^* = \mathbf{D}^-$, $(\mathbf{D}^+)^* = \mathbf{D}^+$. Легко проверить, что волновой оператор представим в виде:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta = \mathbf{D}^- \circ \mathbf{D}^+ = \mathbf{D}^+ \circ \mathbf{D}^-.$$

Используя это свойство, можно строить частные решения дифференциальных уравнений на $K(\mathbf{M})$ вида:

$$\mathbf{D}^\pm \mathbf{K} = \mathbf{G}. \tag{11}$$

Отсюда следует, что $\square \mathbf{K} = \mathbf{D}^\mp \mathbf{G}$. Его решением является следующая свертка [7]:

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}^\mp \mathbf{G} * \psi, \tag{12}$$

где $\psi(\tau, x)$ – фундаментальное решение волнового уравнения: $\square \psi = \delta(\tau)\delta(x)$. Это решение является также и решением (11). Действительно, используя свойство дифференцирования свертки, получим

$$\mathbf{D}^\pm \mathbf{K} = \mathbf{D}^\pm \mathbf{D}^\mp (\mathbf{G} * \psi) = \square (\mathbf{G} * \psi) = (\mathbf{G} * \square \psi) = \mathbf{G} * \delta(\tau)\delta(x) = \mathbf{G}.$$

Фундаментальные решения определяются с точностью до решений однородного волнового уравнения. Для задач с начальными по времени условиями в качестве фундаментального решения удобно использовать обобщенную функцию - простой слой на световом конусе $\tau = \|x\|$:

$$\psi = (4\pi \|x\|)^{-1} \delta(\tau - \|x\|),$$

которую назовем *волновой функцией*.

В этом случае, как легко показать, записав свертку в интегральном виде, решение (12) будет равно нулю при $\tau = 0$. Воспользуемся им для построения решений уравнения (13) с данными Коши.

Задача Коши. Пусть известны начальные условия: $\mathbf{K}(0, x) = \mathbf{K}_0(x)$. Требуется построить решение уравнения (11), удовлетворяющее этим данным.

Используем для этого аппарат теории обобщенных функций [7]. Рассмотрим регулярные обобщенные функции вида $\widehat{\mathbf{G}} = H(\tau)\mathbf{G}(\tau, x)$, где $H(\tau)$ – функция Хевисайда. Используя дифференцирование обобщенных функций ($\widehat{\mathbf{D}}^\pm$), получим $\widehat{\mathbf{D}}^\pm \widehat{\mathbf{K}} = \widehat{\mathbf{G}} + \delta(\tau)\mathbf{K}_0(x)$. Следовательно,

$$\mathbf{H}(\tau)\mathbf{K}(\tau, x) = \mathbf{D}^\mp \{H(\tau)\mathbf{G} * \psi\} + \mathbf{G}(0, x) * \psi + \mathbf{D}^\mp \{\mathbf{K}_0(x) * \psi\} \tag{13}$$

(здесь знак " $*_x$ " означает, что свертка берется только по x).

Формула (13) является обобщением формулы Кирхгофа [7] для решения задачи Коши для волнового уравнения. Ее интегральная запись легко выписывается, с учетом вида полной и неполной свертки с ψ . А именно,

$$4\pi \mathbf{K}(\tau, x) = -\mathbf{D}^\mp \left\{ \int_{r \leq \tau} \frac{\mathbf{G}(\tau - r, y)}{r} dV(y) + \tau^{-1} \int_{r=\tau} \mathbf{K}_0(y) dS(y) \right\} - \tau^{-1} \int_{r=\tau} \mathbf{G}(0, y) dS(y), \tag{14}$$

где $r = \|y - x\|$, $dV(y) = dy_1 dy_2 dy_3$, $dS(y)$ – дифференциал площади сферы.

Перейдем к бикватернионному представлению уравнений А-поля [2].

3. Бикватернионы А-поля

Вводятся бикватернионы: *потенциал* $\Phi = i\phi - \Psi$, *напряженность* $\mathbf{A} = 0 + A$, *плотность заряда-тока* $\Theta = -i\rho - J$, *плотность энергии-импульса* $\Xi = 0, 5 \mathbf{A}^* \circ \mathbf{A} = W + iP$.

Уравнения Максвелла (1)–(2) в пространстве бикватернионов имеют простой вид:

$$\mathbf{D}^+ \mathbf{A} = \Theta. \tag{15}$$

Если потенциал Φ удовлетворяет лоренцевой калибровке: $\partial_\tau \phi - \text{div } \Psi = 0$, то $\mathbf{A} = \mathbf{D}^- \Phi$. Откуда, взяв соответствующий комплексный градиент, получаем волновые уравнения:

$$\square \Phi = \Theta, \quad (16)$$

$$\square \mathbf{A} = \mathbf{D}^- \Theta. \quad (17)$$

Следовательно просто последовательное взятие комплексных градиентов от потенциала \mathbf{A} -поля определяет бикватернионы, соответствующие напряженности поля, зарядам и токам. Скалярная часть комплексного градиента кватерниона энергии-импульса \mathbf{A} -поля дает закон сохранения энергии [2]. Т.е. заряды и токи – это просто *физическое проявление комплексного градиента напряженности ЭГМ-поля*.

Задача Коши для уравнения Максвелла. Как следует из уравнения (13), при известных зарядах-токах и начальных данных $\mathbf{A}(0, x) = \mathbf{A}_0(x)$, решение (15) дается формулой:

$$4\pi \mathbf{A} = -\mathbf{D}^- \left\{ \int_{r \leq \tau} \frac{\Theta(\tau - r, y)}{r} dV(y) + \tau^{-1} \int_{r=\tau} \mathbf{A}_0(y) dS(y) \right\} - \tau^{-1} \int_{r=\tau} \Theta(0, y) dS(y). \quad (18)$$

Отсюда легко записать интегральные представления для векторов напряженности E, H .

4. Преобразование Лоренца \mathbf{K} на \mathbf{M}

Преобразования Лоренца бикватернионов на пространстве Минковского удобно строить, используя алгебру кватернионов. Для этой цели кватернизируем \mathbf{M} , вводя комплексно-сопряженные бикватернионы: $\mathbf{Z} = \tau + ix$, $\bar{\mathbf{Z}} = \tau - ix$. Легко видеть, что

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^*, \quad \bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{Z}}^*, \quad \|\mathbf{Z}\|^2 = \|\bar{\mathbf{Z}}\|^2 = (\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}), \quad \langle \mathbf{Z} \rangle^2 = \langle \bar{\mathbf{Z}} \rangle^2 = \mathbf{Z} \circ \bar{\mathbf{Z}}.$$

Введем самосопряженные бикватернионы $\mathbf{U} = \text{ch } \theta + ie \text{ sh } \theta$, $\bar{\mathbf{U}} = \text{ch } \theta - ie \text{ sh } \theta$, $\|e\| = 1$, θ – действительное число, $\mathbf{U} \circ \bar{\mathbf{U}} = 1$.

Прямым вычислением доказываются следующие леммы.

Л е м м а 1. *Классическое преобразование Лоренца $L : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}'$ имеет вид:*

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{U} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{U}, \quad \mathbf{Z} = \bar{\mathbf{U}} \circ \mathbf{Z}' \circ \bar{\mathbf{U}},$$

Если вести обозначения: $\text{ch } 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, $\text{sh } 2\theta = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$, $|v| < 1$, то скалярная и векторная часть бикватернионов запишется в виде известных релятивистских формул:

$$\begin{aligned} \tau' &= \frac{\tau + v(e, x)}{\sqrt{1-v^2}}, & x' &= (x - e(e, x)) + e \frac{(e, x) + v\tau}{\sqrt{1-v^2}}, \\ \tau &= \frac{\tau' - v(e, x)}{\sqrt{1-v^2}}, & x &= (x' - e(e, x')) + e \frac{(e, x') - v\tau'}{\sqrt{1-v^2}}, \end{aligned}$$

что соответствует движению системы координат X в направлении вектора e с безразмерной скоростью v . Легко видеть, что сохраняется псевдонорма:

$$\langle \mathbf{Z}' \rangle^2 = \mathbf{U} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{U} \circ \bar{\mathbf{U}} \circ \bar{\mathbf{Z}} \circ \bar{\mathbf{U}} = \langle \mathbf{Z} \rangle^2.$$

Л е м м а 2. *Сопряженные кватернионы $\mathbf{W} = \cos \varphi + e \sin \varphi$, $\mathbf{W}^* = \cos \varphi - e \sin \varphi$, $\|e\| = 1$, определяют группу преобразований на \mathbf{M} , ортогональных на векторной части $\mathbf{Z} : \mathbf{Z}' = \mathbf{W} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{W}^*$, $\mathbf{Z} = \mathbf{W}^* \circ \mathbf{Z}' \circ \mathbf{W}$.*

Это преобразование есть вращение вокруг вектора e на угол 2φ . Следствием этих двух лемм является

Л е м м а 3. Преобразование Лоренца на M можно определить как преобразование вида:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{L} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{L}^*, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{L}^* \circ \mathbf{Z}' \circ \mathbf{L}, \quad (19)$$

где $\mathbf{L} = \mathbf{W} \circ \mathbf{U} = \text{ch}(\theta + i\varphi) + ie \text{sh}(\theta + i\varphi)$, $\mathbf{L}^* = \mathbf{U}^* \circ \mathbf{W}^* = \text{ch}(\theta - i\varphi) + ie \text{sh}(\theta - i\varphi)$. При этом сохраняется псевдонорма: $\langle \mathbf{Z} \rangle = \langle \mathbf{Z}' \rangle$.

Легко видеть, что $\bar{\mathbf{L}} \circ \mathbf{L}^* = \mathbf{L}^* \circ \bar{\mathbf{L}} = 1$, поэтому псевдонорма \mathbf{Z} сохраняется.

Взаимные комплексные градиенты при преобразованиях Лоренца \mathbf{L} преобразуются в соответствии со следующей леммой.

Л е м м а 4. Если $\mathbf{Z}' = \mathbf{L} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{L}^*$, то $\mathbf{D}' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{L}$, $\mathbf{D} = \mathbf{L} \circ \mathbf{D}' \circ \bar{\mathbf{L}}^*$, где $\mathbf{D} = \mathbf{D}^+$ или $\mathbf{D} = \mathbf{D}^-$.

На основе этой леммы рассмотрим, как меняется уравнение типа (11) при преобразовании Лоренца. Используя ассоциативность произведения и свойства \mathbf{L} , получим

$$\mathbf{D}'\mathbf{K}' = (\bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{L}) (\bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{L}) = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{L} = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{G} \circ \mathbf{L} = \mathbf{G}'.$$

Следовательно, при действии преобразования Лоренца сохраняется вид уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau'} \pm i\nabla' \right) \mathbf{K}' = \mathbf{G}',$$

где $\mathbf{K}' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{L}$, $\mathbf{G}' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{G} \circ \mathbf{L}$. Отсюда следует теорема.

Т е о р е м а 2. Преобразования Лоренца для уравнения Максвелла имеют вид:

$$\mathbf{D}^+\mathbf{A}' = \Theta', \quad \text{где } \mathbf{A}' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{L}, \quad \Theta' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \Theta \circ \mathbf{L}.$$

Релятивистские формулы для напряженности, зарядов и токов (при $\varphi = 0$):

$$A' = (A - e(e, A)) + e \frac{(e, A)}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (20)$$

$$\rho' = \frac{\rho - v(e, J)}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad J' = (J - e(e, J)) + e \frac{(e, J) - v\rho}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (21)$$

Как видим, напряженность A -поля здесь всегда увеличивается в направлении вектора e . В отсутствие токов, происходит увеличение заряда-массы. При наличии токов, в зависимости от направления их движения, заряд-масса может как увеличиваться, так и уменьшаться.

5. Третий закон Ньютона. Мощность и плотность объемных сил

Рассмотрим два ЭГМ-поля \mathbf{A} и \mathbf{A}' , Θ и Θ' – соответствующие им (или порождающие их) заряды-токи. Назовем бикватернион

$$\mathbf{F} = M - iF = \Theta \circ \mathbf{A}' = -(i\rho + J) \circ \mathbf{A}' = (A', J) - i\rho A' + [A', J] \quad (22)$$

плотностью мощности-силы, действующей со стороны поля A' на заряды и токи поля A . Действительно, с учетом (3),(4), скалярная часть имеет вид плотности мощности действующих сил:

$$M = (A', J) = c^{-1}((E', j^E) + (H', j^H)) + i((B', j^E) - (D', j^H)) \quad (23)$$

Выделяя действительную и мнимую части векторной составляющей бикватерниона, получим выражения для плотности объемных сил ($F = F^H + i F^E$):

$$F^H = \rho^E E' + \rho^H H' + j^E \times B' - j^H \times D' \quad (24)$$

$$F^E = c (\rho^E B' - \rho^H D') + c^{-1} (E' \times j^E + H' \times j^H) \quad (25)$$

Здесь $B = \mu H$ – аналог вектора магнитной индукции (в вихревой части совпадает с ним), $D = \varepsilon E$ – вектор электрического смещения.

Напряженность гравитационного поля описывается потенциальной частью вектора H , а роторная часть этого вектора описывает магнитное поле. Тогда скалярная часть Θ , Θ' содержит плотности электрического заряда и массы, а векторная – плотности электрического тока и тока массы (количество движения массы).

Исходя из этих предположений, в формуле (24) стоят известные массовые силы, последовательно: кулоновская сила $\rho^E E'$, гравитационная сила $\rho^H H'$ (точнее совпадает с ней в потенциальной части H'), сила Лоренца $j^E \times B'$ (точнее совпадает с ней в вихревой части B') и новая сила $-D' \times j^H$, которую назовем *электромассовой*. В действительной части мощности (23) стоит мощность кулоновских, гравитационных и магнитных сил. Мощность электромассовой силы в действительную часть (23) не входит, так как она не работает на перемещениях массы, поскольку перпендикулярна ее скорости. Интересно, что мощность силы Лоренца в действительную часть (23) также не входит, что свидетельствует в пользу того, что эта сила перпендикулярна скорости массы, хотя непосредственно из уравнений Максвелла это не следует.

Естественно, по аналогии, предположить, что уравнения (25) описывают силы, вызывающие изменение электрических токов (электрические силы), а в мнимой части M стоят соответствующие им мощности.

В силу третьего закона Ньютона о действующих и противодействующих силах, предположим, что должно выполняться: $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$. Отсюда получим

Закон о действии и противодействии полей

$$\Theta \circ \mathbf{A}' = -\Theta' \circ \mathbf{A}. \quad (26)$$

Интересно, что в скалярной части он требует равенства плотностей мощностей соответствующих сил, действующих на заряды и токи другого поля, т. е. подобен известному в механике сплошных средств тождеству взаимности Бетти, которое обычно записывается для работы сил.

6. Второй закон Ньютона. Уравнение трансформации

Поле зарядов и токов меняется под воздействием поля других зарядов и токов. Как известно, направление наиболее интенсивного изменения скалярного поля описывает его градиент. По аналогии предположим, что изменение поля зарядов-токов происходит наиболее интенсивно, условно говоря, в направлении его комплексного градиента. Естественно предположить, что это изменение должно происходить в направлении мощности-силы, действующей со стороны второго поля на первое. Поэтому закон изменения заряда-тока поля под действием другого, подобный второму закону Ньютона, предлагается в виде следующих уравнений.

Уравнения взаимодействия зарядов-токов (полей):

$$\kappa \mathbf{D}^- \Theta = \mathbf{F} \equiv \Theta \circ \mathbf{A}', \quad \kappa \mathbf{D}^- \Theta' = \Theta' \circ \mathbf{A}, \quad (27)$$

$$\Theta \circ \mathbf{A}' = -\Theta' \circ \mathbf{A}, \quad (28)$$

$$\mathbf{D}^+ \mathbf{A} = \Theta, \quad \mathbf{D}^+ \mathbf{A}' = \Theta'. \quad (29)$$

Здесь уравнения (27) соответствуют второму закону Ньютона, записанному для зарядов-токов каждого из взаимодействующих полей, а уравнение (28) – третьему. Вместе с уравнениями Максвелла для этих полей (29) они дают замкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений для определения \mathbf{A} , \mathbf{A}' , Θ , Θ' . Введение константы взаимодействия κ связано с размерностью.

Раскрывая скалярную и векторную часть (27), запишем

уравнения трансформации зарядов-токов A-поля :

$$i \kappa (\partial_\tau \rho + \operatorname{div} J) = M, \quad (30)$$

$$i \kappa (\partial_\tau J - i \operatorname{rot} J + \nabla \rho) = F. \quad (31)$$

Рассмотрим вначале второе уравнение. С учетом (2), (3), (4), получим

Аналог второго закона Ньютона для зарядов-токов:

$$\kappa (\sqrt{\varepsilon} \partial_\tau j^H + \sqrt{\mu} \operatorname{rot} j^E + \mu^{-0,5} \operatorname{grad} \rho^H) = \rho^E E' + \rho^H H' + j^E \times B' - j^H \times D', \quad (32)$$

$$\kappa (\sqrt{\mu} \partial_\tau j^E - \sqrt{\varepsilon} \operatorname{rot} j^H + \varepsilon^{-0,5} \operatorname{grad} \rho^E) = c (\rho^E B' - \rho^H D') + c^{-1} (E' \times j^E + H' \times j^H). \quad (33)$$

Аналогом количества движения массы здесь в (32) является $\kappa \sqrt{\varepsilon} j^H$. Уравнение (33) описывает воздействие внешнего поля на электрические токи, его аналог автору неизвестен.

Если одно поле намного сильнее второго, например, если $W' \gg W$, то можно изменением второго поля под воздействием зарядов и токов первого пренебречь. В этом случае получаем замкнутую систему уравнений для определения движения зарядов и токов первого поля под воздействием зарядов и токов второго: $\kappa \mathbf{D}^- \Theta - \Theta \circ \mathbf{A}' = 0$, где \mathbf{A}' известно. Соответствующее им A-поле определяется уравнениями Максвелла.

Рассмотрим первое уравнение (30). Очевидно, это закон сохранения для зарядов-токов, который в правой части содержит мощность внешних действующих сил M . Только при $M = 0$, например, в отсутствии внешних полей и соответствующих им зарядов и токов, справа будет стоять 0. Тогда этот закон принимает хорошо известный вид: $\partial_\tau \rho + \operatorname{div} J = 0$, который следовал из уравнений Максвелла (см. теорема 1).

Значит, при взаимодействии ЭГМ-полей уравнения Максвелла меняют вид, а именно, появляется скалярная часть у бикватерниона напряженности: $\mathbf{A} = ia(\tau, x) + A(\tau, x)$. Назовем $a(\tau, x)$ – *сопротивлением* A-поля.

Из системы уравнений (27)–(29) следует, что $\square \mathbf{A} = \mathbf{D}^- \Theta = \kappa^{-1} \mathbf{F}$. Откуда имеем:

$$\kappa \square a = iM.$$

Заметим, что в системе уравнений Максвелла (1)–(2), первое уравнение определяет токи, второе уравнение является определением заряда, а закон сохранения заряда является следствием этих двух уравнений. Его получаем, взяв дивергенцию в (1) с учетом (2). Однако последовательный бикватернионный подход, как здесь показано, приводит к модификации системы уравнений Максвелла, которая, как следует из (29), имеет следующий вид:

(модифицированные уравнения Максвелла)

$$\partial_\tau A + i \operatorname{rot} A + J = \operatorname{grad} a, \quad \rho = \operatorname{div} A - \partial_\tau a. \quad (34)$$

Если заряды ρ и токи J известны, эта система уравнений для определения a и A замкнута. Только в замкнутых системах (при отсутствии внешних полей) $a = 0$ и она приобретает вид уравнений Максвелла (1)–(2).

Очевидно, что с введением сопротивления a , вид скалярной и векторной части бикватерниона мощности-силы (22) меняется, а именно

$$\mathbf{F} = \Theta \circ \mathbf{A}' = ((A', J) + a'\rho) - i(a'J + \rho A') + [A', J], \quad (35)$$

т.е. в результате появляются дополнительные слагаемые в представлении мощности ($a'\rho$) и силы ($-ia'J$).

Силу $ia'J$ назовем *силой сопротивления* A' -поля. Выделяя действительную и мнимую части векторной составляющей этой силы, получим дополнительные слагаемые в выражениях для плотности электрической F^E и гравимагнитной F^H составляющих F в уравнении (31) с учетом силы сопротивления полей, которые следует добавить в правые части уравнений (32), (33).

Задача Коши для уравнения трансформации. Используя формулу (12), получим

$$\kappa \Theta(\tau, x) = \mathbf{D}^+ \{H(\tau) \mathbf{F}(\tau, x) * \psi\} + \mathbf{F}(0, x) * \psi + \kappa \mathbf{D}^+ \{\Theta(0, x) * \psi\} \quad (36)$$

Это уравнение дает систему интегральных уравнений для определения Θ , поскольку правая часть содержит Θ в выражении \mathbf{F} . Эту систему можно использовать для решения задачи, если изменением второго поля пренебречь. В общем случае аналогичное уравнение выписываем для второго поля Θ' . Дополняя их интегральным представлением решения задачи Коши для модифицированных уравнений Максвелла для каждого поля, получим полную систему нелинейных интегральных уравнений для определения зарядов-токов при их взаимодействии, если начальные поля известны.

Преобразования Лоренца уравнения трансформации.

(Здесь штрих означает координаты в подвижной системе координат.) Согласно теореме 2, преобразования Лоренца для \mathbf{A} , Θ , \mathbf{F} имеют следующий вид:

$$\mathbf{A}' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{L}, \quad \Theta' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \Theta \circ \mathbf{L}, \quad \mathbf{F}' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{F} \circ \mathbf{L}, \quad (37)$$

Заметим, что преобразование Лоренца для для мощности-силы взаимодействия двух полей вида (22) имеет тот же вид:

$$\mathbf{F}' = \Theta'_1 \circ \mathbf{A}'_2 = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \Theta_1 \circ \mathbf{L} \circ \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{L} = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \Theta_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{L} = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{F} \circ \mathbf{L}.$$

Для $\varphi = 0$ соотношения (27) эквивалентны равенствам (20)–(21) и

$$\mathbf{F}' = (Mch2\theta - (e, F)sh2\theta) + i\{F + 2e(e, F)sh^2\theta - Mesh2\theta\} \Rightarrow$$

релятивистские формулы для мощности и силы:

$$M' = \frac{M + v(e, F)}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad F' = (F - e(e, F)) + e \frac{(e, F) - vM}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (38)$$

Итак мощность также зависит от скорости системы координат. И если в исходной системе она равна нулю, то в другой будет равна нулю только в отсутствии внешних сил $F = 0$. Поэтому постулировать закон сохранения заряда в традиционном виде (9) для открытых систем (систем, подверженных внешним воздействиям), нельзя¹

¹ В [8,9] для сохранения этого закона было введено предположение: $M = 0$. Как здесь показано, это было неверное предположение.

8. Первый закон Ньютона. Свободное поле

Рассмотрим А-поле, порождаемое Θ , в отсутствии других зарядов-токов. Назовем такое поле *свободным*.

В этом случае $\mathbf{F} = 0$, поэтому аналогом первого закона Ньютона об инерции массы в отсутствии действующих на нее сил здесь, как следует из (27), естественно принять *закон инерции для зарядов-токов А-поля*:

$$\mathbf{D}^- \Theta = 0, \tag{39}$$

что эквивалентно уравнениям:

$$\partial_\tau \rho + \operatorname{div} J = 0, \quad \partial_\tau J - i \operatorname{rot} J + \nabla \rho = 0,$$

или для исходных величин:

$$\partial_t \rho^E + \operatorname{div} j^E = 0, \quad \partial_\tau j^E = \sqrt{\varepsilon/\mu} \operatorname{rot} j^H - c \operatorname{grad} \rho^E, \tag{40}$$

$$\partial_t \rho^H + \operatorname{div} j^H = 0, \quad \partial_\tau j^H = -\sqrt{\mu/\varepsilon} \operatorname{rot} j^E - c \operatorname{grad} \rho^H. \tag{41}$$

Следовательно, в отсутствии внешних полей закон сохранения заряда в виде (9) выполняется.

Задача Коши. В этом случае ее решение имеет вид:

$$\kappa \Theta(\tau, x) = \kappa \mathbf{D}^- \{ \Theta_0(x) *_x \psi \} = -\frac{\kappa H(\tau)}{4\pi} \mathbf{D}^- \left\{ \tau^{-1} \int_{r=\tau} \Theta_0(y) dS(y) \right\}, \tag{42}$$

а напряженность А-поля определяется соотношениями (18).

10. Первое начало термодинамики

Аналогично плотности энергии-импульса А-поля введем плотность энергии-импульса поля зарядов-токов:

$$0,5 \Theta \circ \Theta^* = \left(\frac{\|\rho^E\|^2}{\varepsilon} + \frac{\|\rho^H\|^2}{\mu} + Q \right) + i \left(P_J - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \rho^E j^E - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \rho^H j^H \right), \tag{43}$$

которая содержит плотность энергии токов:

$$Q = 0,5 \|J\|^2 = 0,5 \left(\mu \|j^E\|^2 + \varepsilon \|j^H\|^2 \right),$$

где первое слагаемое включает джоулево тепло $\|j^E\|^2$, а второе – плотность кинетической энергии массовых токов $\|j^H\|^2$, но не только, т. к. в них входит и энергия вихревой части токов (магнитных токов). Здесь также введен вектор P_J , подобный вектору Пойнтинга, но для токов:

$$P_J = 0,5 i J \times \bar{J} = c^{-2} [j^H, j^E]$$

Если гравимагнитный и электрический токи параллельны, либо один из них отсутствует (нулевой), то $P_J = 0$. В общем случае $P_J \neq 0$.

Умножим скалярно уравнение (31) на $-i\bar{J}$, сложим с соответствующим комплексно-сопряженным и поделим на 2. В результате получим *закон сохранения энергии зарядов-токов Θ -поля*:

$$\kappa (\partial_\tau Q - \operatorname{div} P_J + \operatorname{Re} (\nabla \rho, \bar{J})) = \operatorname{Im} (F, \bar{J}) = c^{-1} ((F^H, j^H) + (F^E, j^E)), \tag{44}$$

аналогичный закону сохранения энергии для А-поля (теорема 1). Однако в левой части появилось третье слагаемое. Нетрудно видеть, что этот закон подобен первому началу термодинамики. Здесь второй и третий член в левой части обозначим $-U$. Функция

$$U = \operatorname{div} P_J - \sqrt{\mu/\varepsilon} (\nabla \rho^E, j^E) - \sqrt{\varepsilon/\mu} (\nabla \rho^H, j^H)$$

характеризует собственную скорость изменения плотности энергии токов Θ -поля. Правая часть (44), зависящая от мощности действующих внешних сил, может увеличивать или уменьшать эту скорость.

Для свободного поля первое начало термодинамики имеет вид: $\partial_\tau Q = U$.

Интегрируя (44) по пространственно-временному цилиндру $\{(D^- + D) \times (0, t)\}$ и используя формулу Остроградского-Гаусса, получим

интегральное представление первого начала термодинамики:

$$\int_{D^-} (Q(x, t) - Q(x, 0)) dV(x) = \int_0^t dt \int_D (P_J, n) dD(x) - \\ - \int_0^t dt \int_{D^-} \{ \varepsilon^{-1} (\nabla \rho^E, j^E) + \mu^{-1} (\nabla \rho^H, j^H) \} dV(x) + c^{-1} \int_0^t dt \int_{D^-} \{ (F^H, j^H) + (F^E, j^E) \} dV(x).$$

Здесь $n(x)$ – вектор единичной нормали к границе D открытой области D^- в R^3 .

11. Уравнения суммарного поля и энергия взаимодействий

Если есть несколько (N) взаимодействующих полей, порождаемых различными зарядами и токами, то уравнения (27) примут вид:

$$\kappa \mathbf{D}^+ \Theta^k + \Theta^k \circ \sum_{m \neq k} \mathbf{A}^m = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D}^+ \mathbf{A}^k + \Theta^k = \mathbf{0}, \quad k = 1, \dots, N \quad (45)$$

$$\mathbf{D}^+ \mathbf{A}^m \circ \mathbf{A}^k + \mathbf{D}^+ \mathbf{A}^k \circ \mathbf{A}^m = \mathbf{0}, \quad k \neq m. \quad (46)$$

Суммарное поле, как легко видеть (суммируя (45) по k), в силу (45), является свободным, поскольку, аналогично механике взаимодействующих тел, все действующие силы внутренне:

$$\mathbf{D}^+ \Theta = \mathbf{D}^+ \sum_{m=1}^M \Theta^m = \mathbf{0}.$$

Уравнения суммарного поля являются следствием и дают первые интегралы взаимодействующих полей зарядов-токов. Если в начальный момент времени заряды-токи известны, система (43) – (44) позволяет определять создаваемые ими поля и их совместное изменение во времени и пространстве.

В [7,8] рассмотрены законы преобразования энергии А-полей при взаимодействии различных зарядов-токов. Аналогично рассмотрим, как меняется энергия и импульс Θ -полей при взаимодействии. Энергия-импульс для суммарного поля зарядов-токов имеет вид:

$$\Xi_\Theta = 0,5 \Theta \circ \Theta^* = 0,5 \sum_{k=1}^N \Theta^k \circ \sum_{l=1}^N \Theta^{*l} = 0,5 \left(\sum_{k=1}^N \Theta^k \circ \Theta^{*k} + \sum_{k \neq l} \Theta^k \circ \Theta^{*l} \right) = \\ = \sum_{k=1}^N W_\Theta^{(k)} + i \sum_{k=1}^N P_\Theta^{(k)} + \delta \Xi_\Theta$$

Здесь первое слагаемое – это сумма энергий-импульсов взаимодействующих зарядов-токов

Введем бикватернион *энергии-импульса взаимодействия*. Его действительная часть описывает энергию-импульс взаимодействия одноименных зарядов и токов, а мнимая часть – разноименных:

$$\delta \Xi_{\Theta} = \delta W_{\Theta} + i \delta P_{\Theta} = \sum_{k \neq l} \Xi_{\Theta}^{kl}, \quad \Xi_{\Theta}^{kl} = 0,5 (\Theta^k \circ \Theta^{*l} + \Theta^l \circ \Theta^{*k})$$

$$\Xi_{\Theta}^{kl} = \text{Re} (\rho^k \rho^{*l} + (J^k, J^{*l})) - i \{ \text{Re} (\rho^k J^{*l} + \rho^{*l} J^k) + \text{Im} [J^k, J^{*l}] \},$$

или в исходных обозначениях:

$$\begin{aligned} \Xi_{\Theta}^{kl} = & \frac{\rho^{E(k)} \rho^{E(l)}}{\sqrt{\varepsilon_k \varepsilon_l}} + \frac{\rho^{(k)H} \rho^{H(l)}}{\sqrt{\mu_k \mu_l}} + \sqrt{\mu_k \mu_l} (j^{(k)E}, j^{(l)E}) + \sqrt{\varepsilon_k \varepsilon_l} (j^{(k)H}, j^{(l)H}) - \\ & - i \left\{ \sqrt{\frac{\mu_l}{\varepsilon_k}} \rho^{(k)E} j^{(l)E} + \sqrt{\frac{\varepsilon_l}{\mu_k}} \rho^{(k)H} j^{(l)H} + \sqrt{\frac{\mu_k}{\varepsilon_l}} \rho^{(l)E} j^{(k)E} + \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{\mu_l}} \rho^{(l)H} j^{(k)H} - \right. \\ & \left. - \sqrt{\varepsilon_k \mu_l} [j^{(l)E}, j^{(k)H}] + \sqrt{\varepsilon_l \mu_k} [j^{(k)E}, j^{(l)H}] \right\} \end{aligned}$$

В результате получаем условия преобразования энергии при взаимодействии зарядов-токов: *выделение* энергии, если $\delta W_{\Theta} > 0$; *поглощение* энергии, если $\delta W_{\Theta} < 0$; *сохранение* энергии, если $\delta \Xi_{\Theta} = 0$.

Заключение

Рассмотренная здесь модель ЭГМ-поля (*A-поле*) основана на гипотезе о магнитном заряде-массе что позволило назвать такие поля *электро-гравимагнитными*. Для этого использовались уравнения Максвелла, которые очень просто записываются в бикватернионной форме. С введением бикватерниона мощности-силы взаимодействия полей зарядов-токов предложены уравнения для описания их преобразования при взаимодействии, во многом аналогичные законам Ньютона для материальных тел. Исследование этих уравнений на инвариантность при преобразованиях Лоренца показало, что необходимо введение скалярного поля сопротивления $a(\tau, x)$ в бикватернион напряженности ЭГМ-поля. Это приводит к модификации уравнений Максвелла для зарядов-токов, подверженных воздействию внешних полей.

При построении уравнения трансформации зарядов-токов помимо известных гравитационных и электромагнитных сил выявлено наличие новых сил (см. п. 5), обусловленных алгеброй бикватернионов, которая здесь используется, и для которых, безусловно, необходимо экспериментальное подтверждение. Некоторые соображения по этому поводу автором были высказаны в [8, 9], где первоначально эта модель была предложена. В этих работах постулировался закон сохранения заряда-тока в традиционном виде, что, как здесь показано на основе преобразований Лоренца, делать нельзя.

Отметим также, что существенным при построении и исследовании этой модели ЭГМ-поля является использование алгебры бикватернионов, без которой построение дифференциальных уравнений, описывающих взаимодействие зарядов и токов в такой форме практически невозможно.

Список использованных источников

1. Алексеева Л. А. Гамильтонова форма уравнений Максвелла и ее обобщенные решения// Дифференциальные уравнения. Т. 39 (2003). №6. С. 769–776
2. Алексеева Л. А. Кватернионы гамильтоновой формы уравнений Максвелла// Математический журнал. Т. 3. (2003). №4. С. 20–24
3. Rastall R. Quaternions in relativity. Review of modern physics. 1964. 820–832.
4. Ефремов А. П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории// Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. Т. 1 (2004). №1. С. 111–127.
5. Казанова Г. Векторная алгебра. М. 1979. 120 с.
6. Kassandrov V.V. Bi quaternion electroynamics and Weyl-Cartan geometry of space-time// Gravitation and cosmology. V. 1 (1995). №3. P. 216–222.
7. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М. 1979.
8. Алексеева Л. А. Об одной модели электро-гравимагнитного поля. Уравнения взаимодействия и законы сохранения// Математический журнал. Т. 4. (2004). №2. С. 23–34.
9. Алексеева Л. А. Уравнения взаимодействия А-полей и законы Ньютона // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. 2004. №3. С. 45–53.

Статья поступила 30 декабря 2008 г.

Fields analogues of Newton's laws for one model of electro-gravymagnetic field

L. A. Alexeyeva

Institute of mathematics, Alma-Ata, Kazakhstan

With use the Hamilton's form of the Maxwell's equations one biquaternion model for electro-gravymagnetic (EGM) field is offered. The equations of the interaction of EGM-fields, generated different charge and current, are built. The field analogues of three Newton's laws are offered for free and interacting charge-currents, as well as total field of interaction. An invariance of the equations at Lorentz transformation is investigated, and, in particular, law of the conservation of the charge-current. It is shown that at fields interaction, this law differs from the well-known one. The new modification of the Maxwell's equations is offered with entering the scalar resistance field in biquaternion of EGM-field tension. Relative formulas of the transformation of density of the masses and charge, current, forces and their powers are built. The solution of the Cauchy problem is given for equation of charge-current transformations.

Keywords: electro-gravymagnetic field, biquaternion, Maxwell's equations, conservation laws, Lorentz transformation, relative formulas of the transformation.

О ФРАКТАЛЬНОСТИ АНАЛОГОВ МНОЖЕСТВ МАНДЕЛЬБРОТА И ЖЮЛИА НА ПЛОСКОСТИ ДВОЙНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Д. Г. Павлов¹, М. С. Панчелюга^{1,2}, А. В. Малыхин¹,
В. А. Панчелюга^{1,2}

(1) – НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, МО;

(2) – Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, Пущино, МО
panvic333@yahoo.com

В статье представлены результаты построения аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной. Демонстрируется фрактальный характер полученных множеств. Дается краткий обзор работ, содержащих попытки построения аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной. Отмечается пионерский характер приведенных в статье результатов.¹

Ключевые слова: фракталы, множество Жюлиа, множество Мандельброта, двойные числа.

Введение

Как известно, термин "фрактал" был введен в научный обиход Б. Мандельбротом в 1975 г. [1, 2] Одно из первых определений фрактала опиралось на классическое представление о хаусдорфовой размерности: Мандельброт назвал фракталами множества, для которых размерность Хаусдорфа строго больше топологической (и обычно выражается нецелым числом) [1]. Но в дальнейшем он стал придерживаться более широкого определения, в котором ключевым моментом является идея подобия части и целого: на различных масштабах существуют части фигуры, подобные фигуре в целом. [3, 4] При этом имелось в виду именно подобие, а не точное соответствие части и целого. Такое определение фрактала позволяет значительно расширить область его применимости, особенно для физических систем, которые, в отличие от математических построений, практически никогда не дают точного соответствия целого и его частей.

Определение фрактала, которое используется в настоящей работе, соответствует более позднему определению, основанному на подобии целого и его частей.

Ставшие уже классическими множества Мандельброта и Жюлиа были получены при изучении итераций квадратичного отображения $z \rightarrow z^2 + c$ на множестве комплексных чисел \mathbb{C} . Впервые теория итераций рациональных отображений комплексной плоскости была развита в работах французских математиков Гастона Жюлиа [5] и Пьера Фату [6] в 1918–1919 г.г. С работами Жюлиа и Фату Мандельброт познакомился в 1945 г., а через 35 лет, заинтересовавшись фракталами, инвариантными относительно нелинейных преобразований, он вернулся к этим работам и, уже с применением компьютера, построил первое изображение множества, получившего впоследствии его имя [2, 4].

Последовавший за этим бурный рост числа работ, посвященных фракталам, относился почти исключительно к исследованию фракталов на множестве комплексных чисел.

¹ Чтобы улучшить разрешение приводимых в статье изображений аналогов множеств Жюлиа и Мандельброта некоторые рисунки сделаны цветными. Вариант статьи с цветными иллюстрациями может быть получен (в свободном доступе) на интернет сайте журнала по адресу: <http://www.polynumbers.ru/section.php?lang=ru&genre=3>

Но, как известно, у множества комплексных чисел \mathbf{C} есть "двойник" – гиперболические (двойные) числа \mathbf{H}_2 . В то время, как в качестве расширения \mathbf{C} обычно рассматривается некоммутативная алгебра кватернионов \mathbf{Q} , для \mathbf{H}_2 естественным расширением является коммутативная алгебра \mathbf{H}_4 [7]. Коммутативность алгебр \mathbf{C} , \mathbf{H}_2 , \mathbf{H}_4 и вообще \mathbf{H}_n – во многом предопределяет разнообразие множества аналитических функций соответствующих переменных, а те, в свою очередь, жестко связаны с разнообразием группы конформных отображений. При этом, коммутативно-ассоциативные гиперкомплексные числа \mathbf{H}_n органично связаны с нетривиальными финслеровыми геометриями с метрикой Бервальда-Моора и видятся, возможно не менее перспективными с точки зрения физических приложений, чем обычные комплексные числа [8]. В свете сказанного можно надеяться, что на \mathbf{H}_2 , также как и на \mathbf{C} , могут существовать фрактальные аналоги множеств Мандельброта и Жюлиа.

В настоящей работе представлены некоторые предварительные результаты, обосновывающие высказанное предположение.

Первые попытки построения фракталов на H_2

Число работ, посвященных двойным числам, в мировой научной литературе очень невелико. Еще меньше работ, ставящих перед собой задачу построения и исследования фракталов на плоскости двойной переменной. Возможно, наиболее показательной в этом отношении, выглядит серия статей в *American Journal of Physics*, последовавшая за статьей [9], в которой автор "открывает" двойные числа (в статье используется термин перплексы ("perplex")) и отмечает удобство их применения в релятивистской физике. Перплексами называются числа вида $a + jb$, где $a, b \in \mathbf{R}$, и j – мнимая единица, такая, что $j^2 = 1$. Данная работа повлекла за собой серию публикаций [10–14] в которых поднятая в [9] тема получила дальнейшее развитие. В [10–11] отмечается, что перплексы можно рассматривать в качестве частного случая, так называемых, бинарных чисел $R_{\alpha\beta} = \{a + be \mid a, b \in \mathbf{R}, e \notin \mathbf{R}, e^2 = \alpha + \beta e\}$, для которых наиболее важными случаями являются: $\alpha = -1, \beta = 0$ – комплексные числа, $\alpha = 1, \beta = 0$ – перплексы (двойные числа) и $\alpha = 0, \beta = 0$ – дуальные числа.

Подход развитый в [9–11] нельзя назвать новым. Задолго до появления работ [9–11] подобное рассмотрение можно было встретить, например, в книгах Кантора и Солодовникова [12], И. М. Яглома [13]. Позже в том же журнале в статье *The perplex numbers are in fact the binary numbers* [14] приводится ссылка на немецкое издание [15] книги Кантора и Солодовникова [12].

В рассмотренной серии публикаций, возможно впервые, была поставлена задача построения фракталов на \mathbf{H}_2 . В 1989 году Senn в своей статье *The Mandelbrot set for binary numbers* [16] показал, что в случае квадратичного отображения $z \rightarrow z^2 + c$, где $z, c \in \mathbf{H}_2$, множество параметров c для которых итеративная последовательность является ограниченной, представляет собой квадрат с вершинами $(-2, 0)$ и $(\frac{1}{4}, 0)$. Это множество он назвал перплексным множеством Мандельброта (perplex Mandelbrot set).

В [17–18] Metzler предпринял первые попытки описания формы "перплекс"-множества Мандельброта в точных координатах на плоскости двойной переменной: квадрат с длиной стороны $\frac{9}{8}\sqrt{2}$, центром $(-\frac{7}{8}, 0)$ и диагональю $[-2, \frac{1}{4}]$.

Независимо, Artzy в статье *Dynamics of quadratic functions in cycle plane* [19] представил подобные результаты о форме множества Мандельброта на плоскости двойной переменной, а также показал, соответствующие множества Жюлиа имеют форму прямоугольника.

Необходимо отметить, что в упомянутых работах на \mathbf{H}_2 один к одному переносились методы, используемые на комплексной плоскости. Полученные при этом результаты –

изображения аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа в виде квадрата и прямоугольника, соответственно – показаны на рис. 1.

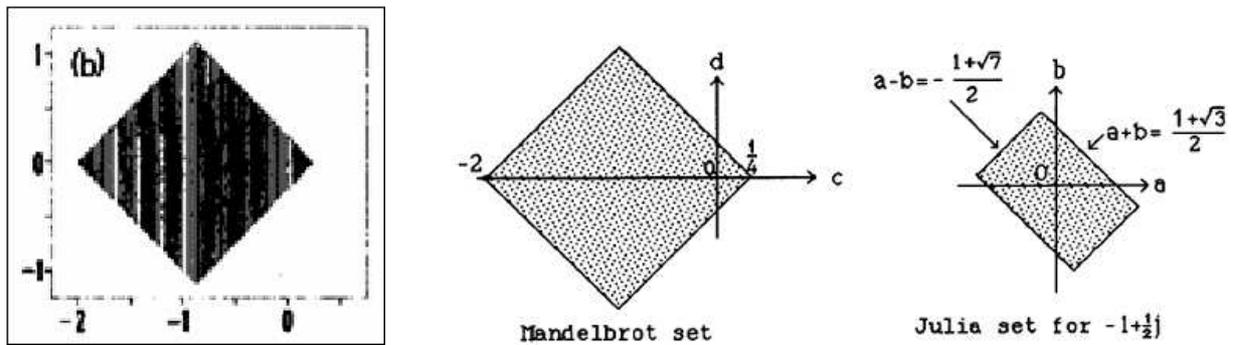


Рис. 1. Примеры аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа: слева одно из первых изображений множества Мандельброта на \mathbf{H}_2 [16]; справа множества Мандельброта и Жюлиа, полученные в работе [19]

Рассматривая рис. 1 необходимо отметить полное отсутствие каких-либо признаков фрактальности: мы действительно, имеем множества в виде квадрата и прямоугольника с совершенно гладкими границами и полным отсутствием каких-либо признаков внутренней структуры. Говорить о масштабной инвариантности, о подобии части и целого, применительно к данным фигурам, не приходится. То, что представлено на рис. 1, можно было бы назвать областями сходимости или устойчивости итераций квадратичного отображения на плоскости двойной переменной, но никак не фракталами.

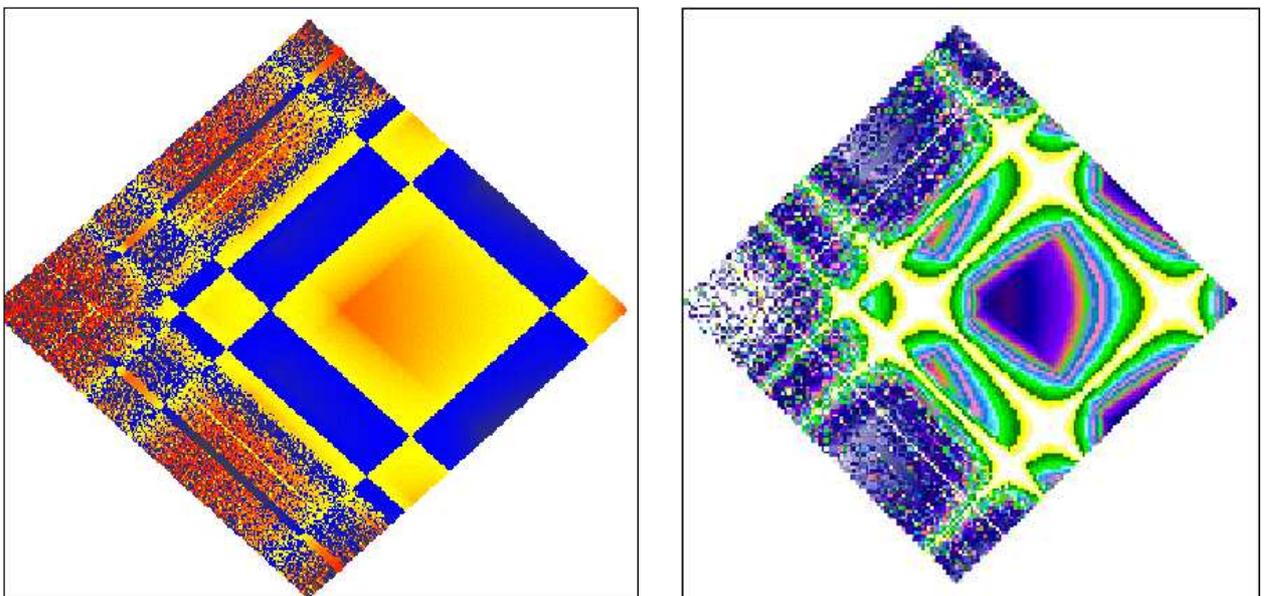


Рис. 2. Аналоги множества Мандельброта для \mathbf{H}_2 . Скорость ухода точки на бесконечность оценивалась по величине действительной и мнимой части, а), и по величине модуля двойного числа, б)

Рассмотренные работы и приведенные на рис. 1 изображения очень показательны. В мировом научном сознании бытует представление о фракталах на \mathbf{H}_2 именно, как о квадратах и прямоугольниках.

В самом начале нашей работы по построению фракталов нами также были построены аналоги множества Мандельброта для двойных чисел [20]. Результаты этого построения представлены на рис. 2. Несмотря на то, что к приведенным фигурам применимы

те же упреки в отсутствии фрактальности, что и для "черного квадрата" здесь, тем не менее, видна некоторая нетривиальная структура полученных множеств, которая и вдохновила нас на дальнейшие поиски и продолжение работы.

Фрактальный аналог множества Жюлиа на H_2

Рассмотренный в [21] пример построения гиперболической границы множества Жюлиа показывает необходимость использования алгоритмов, отличных от алгоритмов "прямой итерации". В случае двойных чисел наиболее привлекательным является алгоритм, который для получения результата требует минимального количества итераций. Идеальным представляется случай, когда мы можем непосредственно вычислять точки границы множества не используя итераций. В определенном смысле этим требованиям удовлетворяет метод обратной итерации [22]. Результат применения этого метода для построению множества Жюлиа показан на рис. 3.

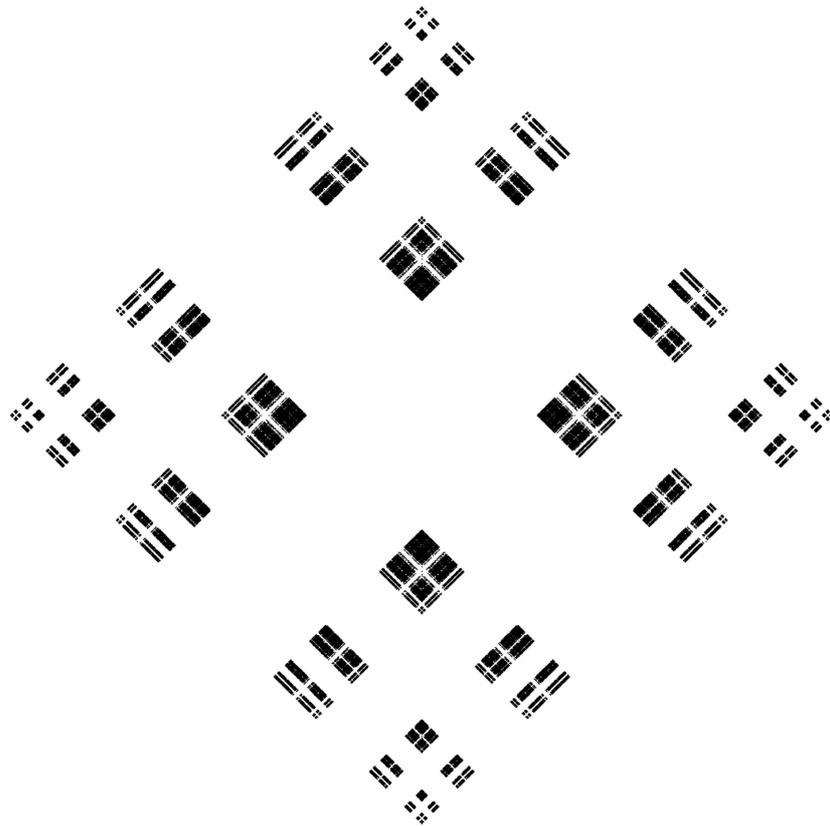


Рис. 3. Множество Жюлиа полученное с использованием метода обратных итераций

Как можно заметить из внимательного рассмотрения показанного на рис. 3 множества, каждая его часть повторяет структуру множества в целом, т. е., подобное множество можно рассматривать как фрактал. Более наглядно фрактальность этого множества демонстрирует рис. 4. Здесь квадраты показывают часть множества, которая на следующем рисунке (указан стрелкой) показана в увеличенном масштабе. Также необходимо отметить симметрию полученного множества: оно состоит из четырех идентичных копий, которые воспроизводятся в показанном на рис. 4 процессе увеличения.

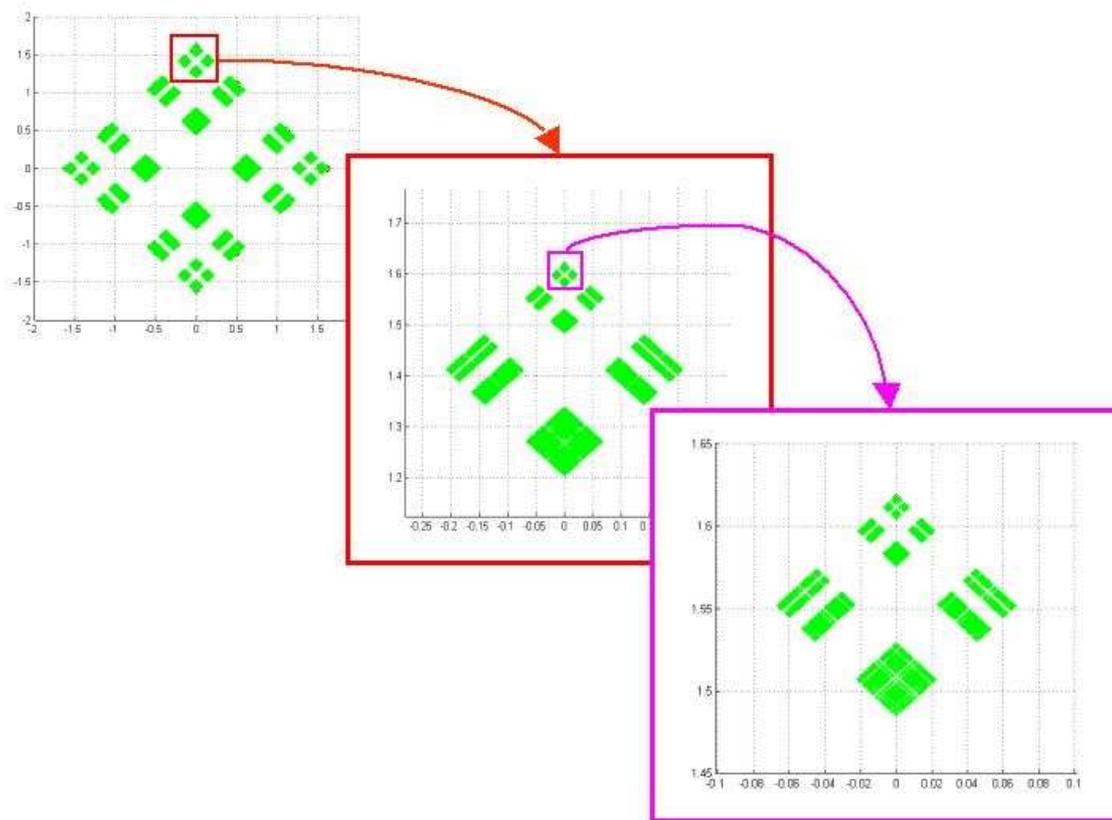


Рис. 4. Фрактальная структура множества Жюлиа, представленного на рис. 3

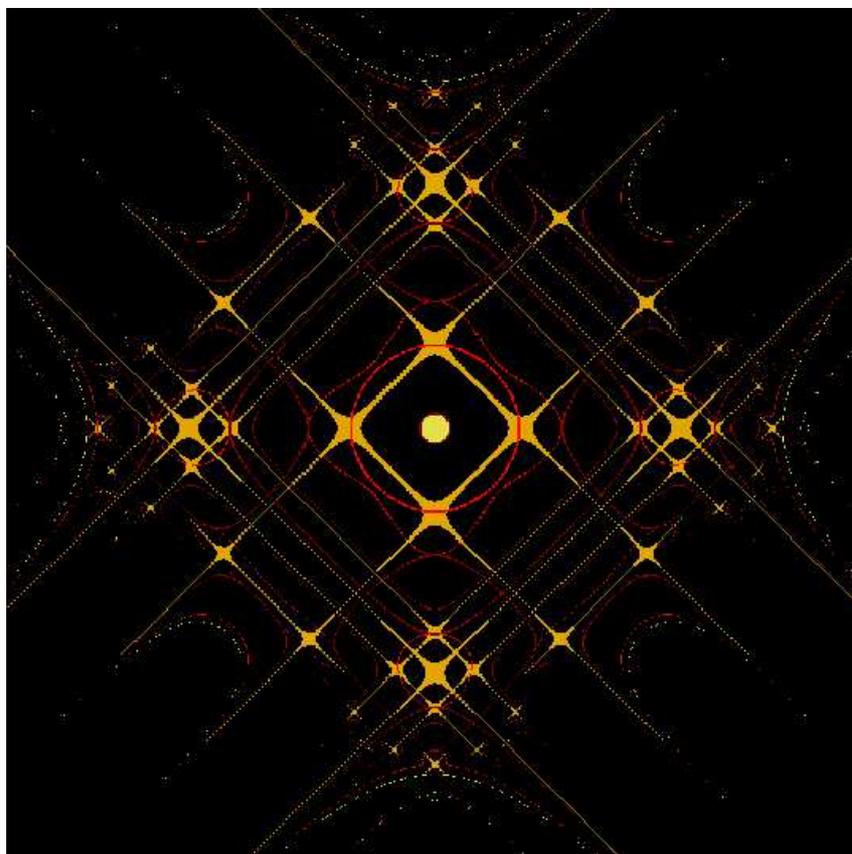


Рис. 5. Фрактальное множество Жюлиа

Главный вывод, который следует из представленных на рис. 3–4 изображений – фрактальность полученного множества Жюлиа. Другой вариант множества Жюлиа (полученного при другом значении параметра) приведен на рис. 5. При надлежащем увеличении (на рис. 5 не показано) также возможно проиллюстрировать его фрактальную природу.

Необходимо отметить, что представленные изображения необходимо рассматривать как неокончательные. Существуют еще целый ряд вопросов и нерешенных проблем, как технического так и фундаментального характера, учет которых в дальнейшем, может повлиять на форму получаемых множеств Жюлиа. Обсуждение этих проблем в настоящей работе не предполагается.

Аналог множества Мандельброта для двойных чисел

Тесная связь двойных чисел с релятивистской физикой [23] и наличие делителей нуля на плоскости двойной переменной приводят к тому, что в зависимости от значения квадрата модуля двойного числа $z = p + jq$ принято рассматривать двойные числа как пространственноподобные ($p^2 - q^2 > 0$, $p^2 > q^2$), времениподобные ($p^2 - q^2 < 0$, $p^2 < q^2$) и светоподобные ($p^2 - q^2 = 0$, $p^2 = q^2$) [24]. Графически, разделение плоскости двойной переменной на пространственно-, времени- и светоподобные числа демонстрирует рис. 6.

Следовательно мы можем строить аналог множества Мандельброта для следующих, различающихся случаев: отдельно для пространственноподобных и времениподобных чисел и для случая, когда подобного различия не производится. Впервые, насколько нам известно, идея подобного "раздельного" построения множества Мандельброта была высказана в [25].

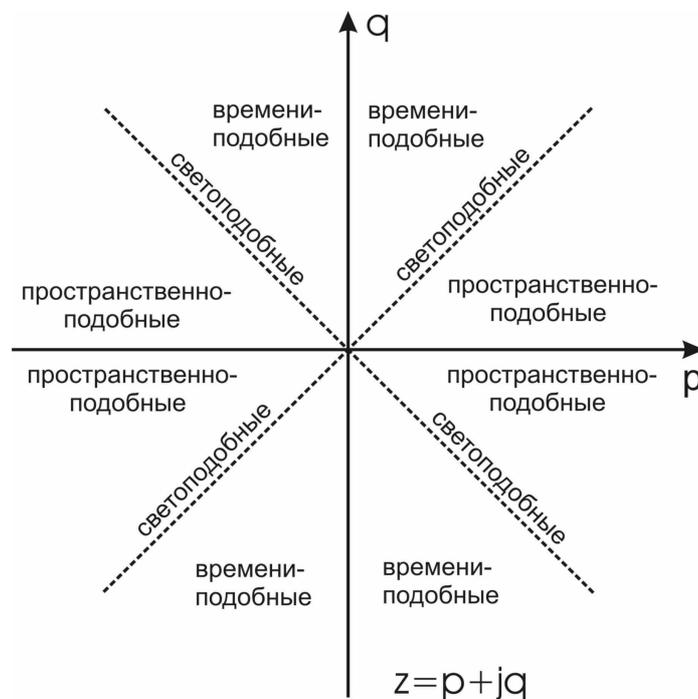


Рис. 6. Разделение плоскости двойной переменной на три типа чисел: пространственноподобные, времениподобные и светоподобные

Случай, когда различия между пространственноподобными и времениподобными числами не учитываются при построении, представлен на рис. 7 а). Сюда же относятся результаты построений, приведенные на рис. 1.



Рис. 7. Варианты аналогов множества Мандельброта не обладающие свойством фрактальности: а) случай, когда различия между пространственноподобными и времениподобными числами не учитываются при построении; б) времениподобный аналог множества Мандельброта



Рис. 8. Пространственноподобное множество Мандельброта

По отношению к времениподобному множеству Мандельброта, рис. 7 б), можно повторить все то же, что и по отношению к множеству, показанному на рис. 7 а): в данном случае мы не наблюдаем никаких признаков фрактальности. Но, внимательное рассмотрение пространственноподобного множества Мандельброта, рис. 8, показывает, что оно имеет нетривиальную структуру. Построим фрагменты данного множества последовательно переходя ко все более мелким масштабам. Схема такого каскада с последовательно уменьшающимся масштабом показана на рис. 9.

Характерной особенностью показанных на рис. 8–9 изображений является то, что на каждом из них присутствует уменьшенная, почти точная копия исходного множества, т. е. строение данного множества соответствует принципу подобия между частью и целым и в силу этого может рассматриваться как фрактал. Следовательно, мы можем утверждать о существовании фрактального множества Мандельброта на \mathbf{H}_2 . Более отчетливо данное утверждение иллюстрирует рис. 10 на котором приведен каскад увеличений аналогичный показанному на рис. 9. Главное отличие от рис. 9 – введение специальной кодировки при помощи цветных прямоугольников, примыкающих к сторонам множества Мандельброта. Подобный прием позволяет визуализировать структуру

множества, которая при обычном изображении (как это показано на рис. 9) остается невидимой. Точки в которых соприкасаются вершины прямоугольников, лежащих по разные стороны от оси симметрии фигуры являются "зародышами" новых копий множества Мандельброта в точности повторяющие форму исходного множества.

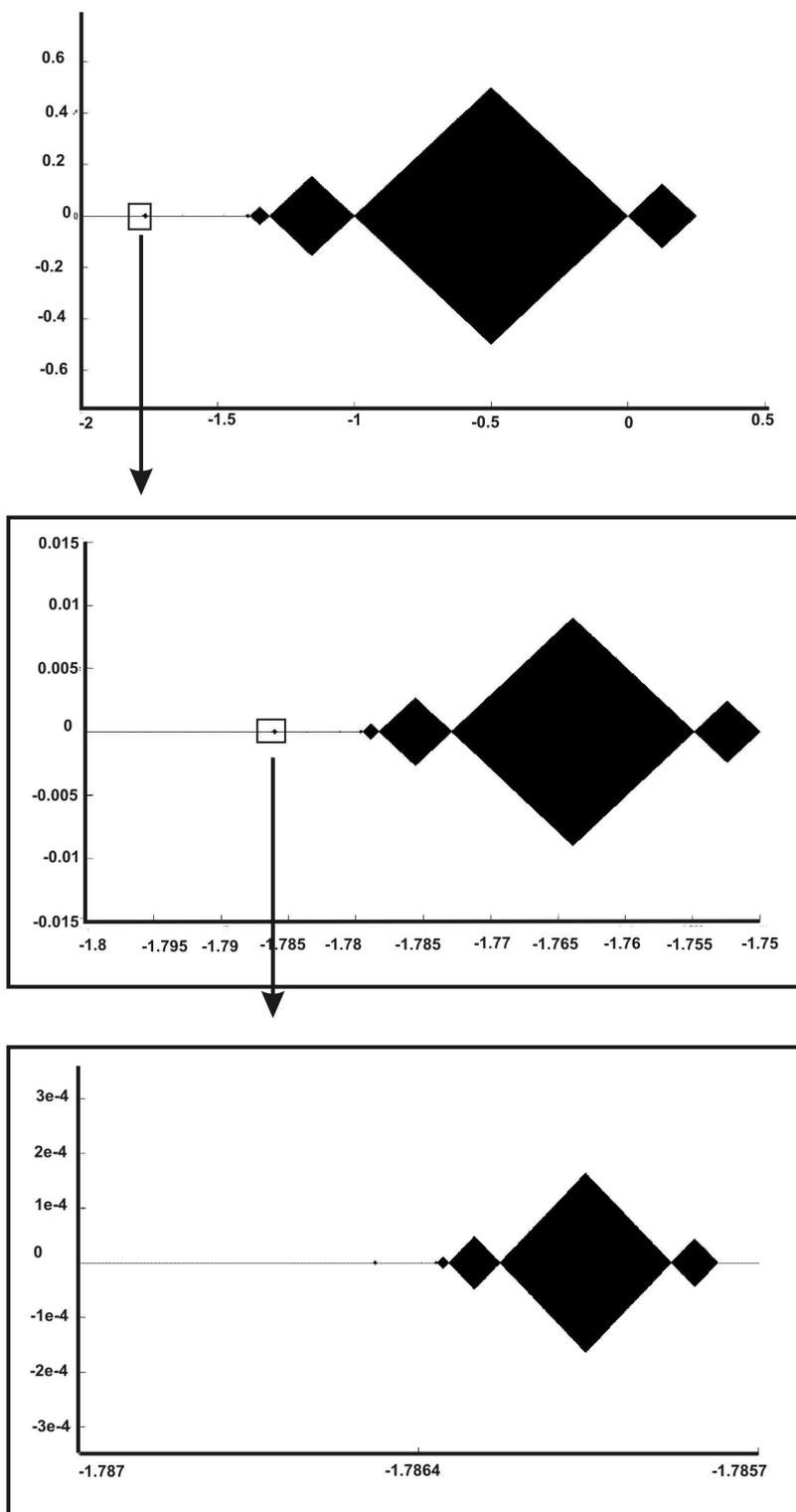


Рис. 9. Структура пространственноподобного множества Мандельброта. Нижние рисунки соответствуют части верхних рисунков, выделенных прямоугольником

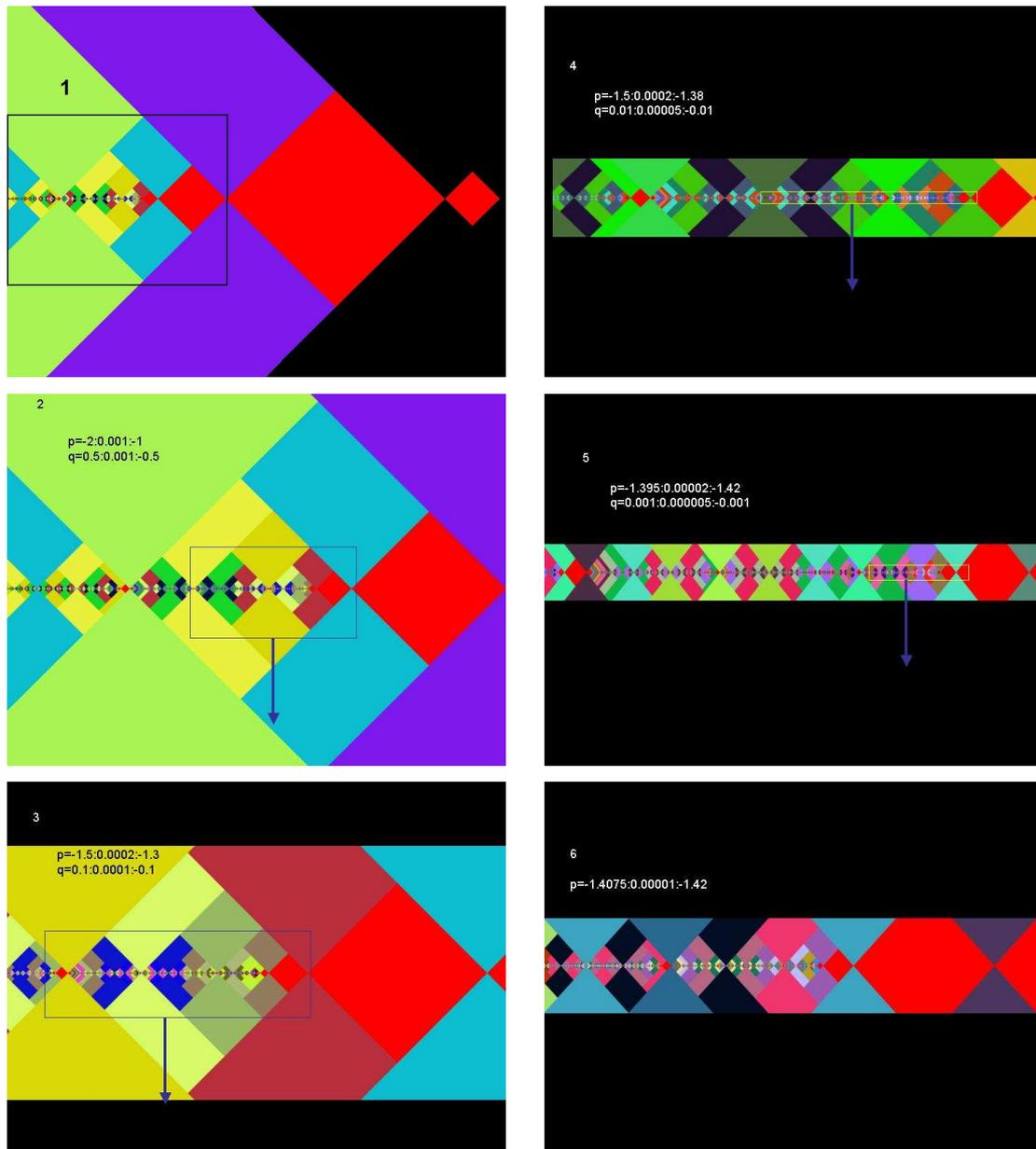


Рис. 10. Каскад увеличенных фрагментов множества Мандельброта с применением цветного кодирования, помогающего визуализировать его структуру. Стрелки и номера рисунков показывают последовательность переходов между ними. Размеры прямоугольника на каждом рисунке характеризуются действительной p и мнимой q частью двойного числа, а также шагом используемой решетки

Заключение

Главным результатом представленного исследования мы считаем демонстрацию фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа, получаемых в результате итераций квадратичного отображения на множестве двойных чисел, \mathbf{H}_2 . Полученные результаты противоречат часто высказываемому мнению, что на множестве двойных чисел невозможно получение фигур отличных от квадрата или прямоугольника.

С другой стороны, как уже отмечалось, представленные изображения фрактальных множеств являются предварительными в силу ряда проблем, как технического, так и принципиального характера.

Литература

- [1] Б. Мандельброт. Фрактальная геометрия природы. М., Институт компьютерных исследований, 2002 - 656 с.
- [2] Бенуа Б. Мандельброт. Фракталы и возрождение теории итераций. // Х. -О. Пайтген, П. Рихтер Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М., Мир, 1993, с. 131–140.
- [3] Б. Мандельброт, Р. Л. Хадсон. (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах. М., Издательский дом "Вильямс", 2006 - 400 с.
- [4] В.А. Шлык. Он оставил царашину на поверхности всего: к 80-летию Бенуа Мандельброта. // Известия Челябинского научного центра, вып. 3 (29), 2005 - с. 107–124.
- [5] Gaston Julia. Memoire sur l'Iteration des Fonctions Rationnelles // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees, 4 (83), 1918 - pp. 47–245.
- [6] Pierre Fatou. Sur les Equations Fonctionnelles // Bulletin Societe. Math. France, Vol. 47, 1919 - pp. 161–271.
- [7] Д. Г. Павлов Обобщение аксиом скалярного произведения. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (1), 2004 - с. 5–19.
- [8] Г. И. Гарасько Теория поля и финслеровы пространства. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 3 (6), 2006 - с. 6–20.
- [9] P. Fjelstad. Extending special relativity via the perplex numbers. // American Journal of Physics, 1986, Vol. 54, No. 5 - pp. 416–422.
- [10] A. Ronveaux, About perplex numbers. // American Journal of Physics 1987, Vol. 55, No. 5 - p. 392.
- [11] W. Band. Comments on Extending special relativity via the perplex numbers. // American Journal of Physics 1988, Vol. 56, No. 5 - p. 469.
- [12] И. Л. Кантор, А. С. Солодовников Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973 - 144 с.
- [13] И. М. Яглом. Комплексные числа и их применение в геометрии. М., Эдиториал УРСС, 2004 - 192 с.
- [14] V. Majernik. The perplex numbers are in fact the binary numbers. // American Journal of Physics, 1988, Vol. 56, No.8
- [15] I. L. Kantor, A. S. Solodownikow. Hyperkomplexe Zahlen. Teuberg, Leipzig, 1978.
- [16] P. Senn. The Mandelbrot set for binary numbers. // The American Journal of Physics, 1989, 58, 1018.
- [17] W. Metzler. The "mystery" of the quadratic Mandelbrot set. // The American Journal of Physics, 1994, 62, 813–814.
- [18] W. Metzler, A. Brelle, K. D. Schmidt. Nonanalytic dynamics for generating the mandelbrot set: A tutorial. // International Journal of Bifurcation and Chaos, 1992, 2, 241–250.
- [19] R. Artzy. Dynamics of quadratic functions in cycle planes. // Journal of Geometry, 1992, 44, 26–32.
- [20] Д. Г. Павлов, М. С. Просандеева, В. А. Панчелюга. О построении аналога множества Мандельброта на плоскости двойных чисел. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. №1, (7), том 4, 2007, с. 93–97.
- [21] Д. Г. Павлов, М. С. Панчелюга, В. А. Панчелюга. О форме аналога множества Жюлиа при нулевом значении параметра на плоскости двойной переменной. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2009, №1, (11), 2009 (этот номер).
- [22] Р. Кроновер. Фракталы и хаос в динамических системах. М., Техносфера, 2006 - 488 с.
- [23] Д. Г. Павлов. Философские и математические основания финслеровых расширений теории относительности. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005, 2 (4), с. 12–18.
- [24] N. A. Borota, E. Flores, T. J. Osler. Spacetime numbers. The easy way. // Mathematics and Computer Education, 2000, Vol. 34, No. 2 - pp. 159–168.
- [25] B. Fauser. Clifford Algebraic Remark on the Mandelbrot Set of Two-Component Number Systems. // Adv. Appl. Clifford Algebras, 1996, 6, 1–26

On fractality of Mandelbrot and Julia sets on double-numbers plane

Pavlov D. G.¹, Panchelyuga M. S.^{1,2}, Malykhin V. A.¹, Panchelyuga V. A.^{1,2}

(1) – *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fрязино, Russia,*

(2) – *Institute of Theoretical and Experimental Biophysics RAS, Pushchino, Russia*

panvic333@yahoo.com

The paper presents results of numerical calculation of analogues of Mandelbrot and Julia sets on double-numbers plane and for the first time demonstrates their fractal character. Also a short revue of works, which devoted to building of double-numbers Mandelbrot and Julia sets is presented.

Key words: fractals, Julia set, Mandelbrot set, double numbers.

О ФОРМЕ АНАЛОГА МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА ПРИ НУЛЕВОМ ЗНАЧЕНИИ ПАРАМЕТРА НА ПЛОСКОСТИ ДВОЙНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Д. Г. Павлов¹, М. С. Панчелюга^{1,2}, В. А. Панчелюга^{1,2}

(1) – НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, МО;

(2) – Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, Пущино, МО
panvic333@yahoo.com

Получено аналитическое решение для формы множества Жюлиа в случае квадратичного отображения $z_{n+1} \rightarrow z_n^2 + c$, при $c = 0$ на плоскости двойной переменной. Рассмотрены проблемы создания компьютерного алгоритма правильно воспроизводящего форму множества Жюлиа. Несмотря на простоту рассматриваемых в статье задач они позволяют проиллюстрировать ряд проблем построения фракталов на плоскости двойной переменной, отсутствующих для общеизвестной задачи построения фракталов на комплексной плоскости¹.

Ключевые слова: фракталы, множество Жюлиа, двойные числа.

Введение

Двойные числа, часто, по-другому, называют гиперболическими. И, в этой связи, естественно ожидать, что гиперболический характер этих чисел как-то проявится в процессе построения фракталов на множестве двойных чисел \mathbf{H}_2 . Но, как следует из первых попыток компьютерного построения множеств Жюлиа и Мандельброта на плоскости двойной переменной [1, 2], этого не происходит. Причины становятся более понятными, если мы попытаемся построить аналог множества Жюлиа при нулевом значении параметра для итераций квадратичного отображения $z \rightarrow z^2 + c$ на \mathbf{H}_2 . Данный случай, благодаря его простоте, позволяет аналитически исследовать форму множества Жюлиа, которое в дальнейшем может служить одним из тестов для разрабатываемых компьютерных методов.

Необходимо отметить, что при компьютерном построении множества Жюлиа на комплексной плоскости обычно используются два условия принадлежности точки к множеству Жюлиа: ограниченность комплексного числа или ограниченность его модуля. На множестве комплексных чисел \mathbf{C} оба эти условия приводят к одним и тем же результатам. Одной из задач настоящей работы является проверка эквивалентности данных условий для плоскости двойной переменной.

Форма множества Жюлиа при $c = 0$. Аналитическое решение

Воспользуемся представлением двойного числа $z = x + jy$, $x, y \in \mathbf{R}$ в изотропном базисе: $z = x + jy = (x - y)e + (x + y)e^*$, где $e = (1 - j)/2$ и $e^* = (1 + j)/2$. Легко видеть, что $ee = e$, $e^*e^* = e^*$ и $e^*e = ee^* = 0$. Вычислим в этом базисе итерации квадратичного отображения $z \rightarrow z^2 + c$, где $c = p + jq$, $p, q \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} z_1 = z_0^2 + c &= ((x_0 - y_0)e + (x_0 + y_0)e^*)^2 + (p - q)e + (p + q)e^* = \\ &= (x_0 - y_0)^2 e + (x_0 + y_0)^2 e^* + (p - q)e + (p + q)e^*. \end{aligned} \quad (1)$$

¹Для того, чтобы улучшить разрешение приводимых в статье изображений аналогов множества Жюлиа, рис. 2 сделан цветным. Вариант статьи с цветными иллюстрациями может быть получен (в свободном доступе) на интернет-сайте журнала по адресу: <http://www.polynumbers.ru/section.php?lang=ru&genre=3>.

Так как мы рассматриваем множество Жюлиа при $c = 0$, то $p = q = 0$ и (1) принимает вид:

$$z_1 = (x_0 - y_0)^2 e + (x_0 + y_0)^2 e^*. \quad (2)$$

При вычислении множества Жюлиа начальные точки z_0 могут принимать любые значения из \mathbf{H}_2 , поэтому, для удобства, вместо x_0 и y_0 в дальнейшем будем писать x и y и введем обозначения:

$$X = x - y, \quad Y = x + y. \quad (3)$$

Тогда:

$$z_1 = X^2 e + Y^2 e^*, \quad (4)$$

$$z_2 = z_1^2 = (X^2 e + Y^2 e^*)^2 = X^4 e + Y^4 e^*, \quad (5)$$

$$z_3 = z_2^2 = (X^4 e + Y^4 e^*)^2 = X^8 e + Y^8 e^* \quad (6)$$

...

$$z_n = X^{2^n} e + Y^{2^n} e^*, \quad (7)$$

где n – номер итерации. Или, с учетом (3):

$$z_n = (x - y)^{2^n} e + (x + y)^{2^n} e^*, \quad (8)$$

Как уже говорилось, условием принадлежности точки множеству Жюлиа могут быть два условия: ограниченность итерационной последовательности z_n ($z_n \not\rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$) и ограниченность ее модуля $|z_n|$ ($|z_n| \not\rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$). Рассмотрим эти условия.

1. Условие $z_n \not\rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$

Исходя из (7) легко видеть, что при $n \rightarrow \infty$, z_n остается ограниченным при

$$\begin{cases} |X| \leq 1 \\ |Y| \leq 1 \end{cases}. \quad (9)$$

Условие (9) описывает форму заполненного множества Жюлиа при нулевом значении параметра в изотропном базисе. Форма множества Жюлиа в том же базисе получается из условия:

$$\begin{cases} |X| = 1 \\ |Y| = 1 \end{cases}. \quad (10)$$

Аналогично, в обычном, "диагональном" базисе форма заполненного множества Жюлиа может быть получена из (11) и множества Жюлиа из (12):

$$\begin{cases} |x - y| \leq 1 \\ |x + y| \leq 1 \end{cases}, \quad (11)$$

$$\begin{cases} |x - y| = 1 \\ |x + y| = 1 \end{cases}. \quad (12)$$

На рис. 1 а) и рис. 1 б) пунктиром показаны множества Жюлиа для случаев (10) и (12) соответственно.

2. Условие $|z_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$

Используя (7) получим квадрат модуля двойного числа z_n для n -й итерации: $|z_n|^2 = X^{2n} Y^{2n} = (XY)^{2n}$. При $n \rightarrow \infty$ модуль остается ограниченным (заполненное множество Жюлиа) при условии:

$$XY \leq 1. \quad (13)$$

Следовательно, множество Жюлиа в изотропном базисе:

$$|Y| = \frac{1}{|X|}. \quad (14)$$

В диагональном базисе: $|z_n|^2 = X^{2n} Y^{2n} = (XY)^{2n} = [(x-y)(x+y)]^{2n} = [x^2 - y^2]^{2n}$ и модуль остается ограниченным (заполненное множество Жюлиа) при:

$$x^2 - y^2 \leq 1. \quad (15)$$

Множество Жюлиа в диагональном базисе:

$$x^2 - y^2 = 1. \quad (16)$$

Множество Жюлиа в изотропном (14) и диагональном (16) базисах показано сплошными линиями на рис. 1 а) и рис. 1 б) соответственно.

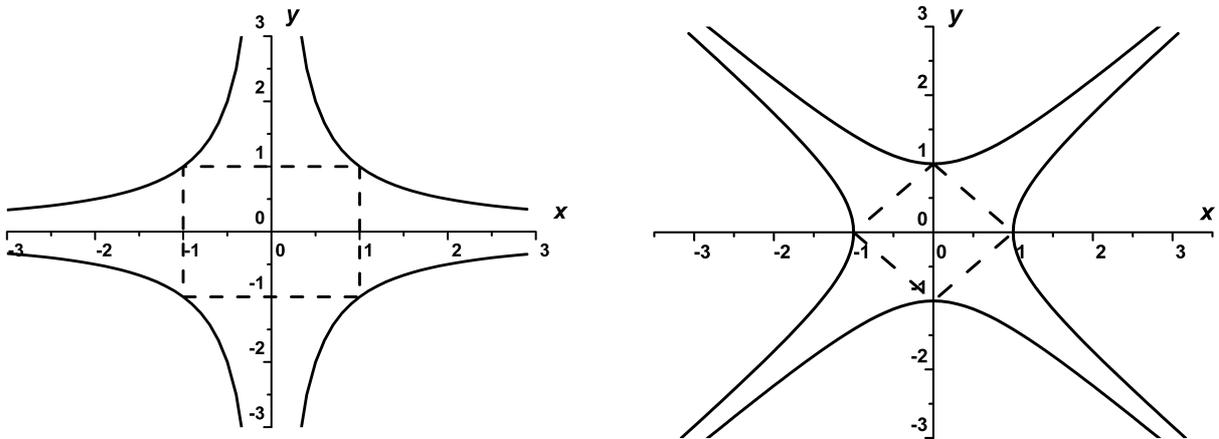


Рис. 1. Сводные графики в стандартном а) и диагональном б) базисах

Компьютерное построение множества Жюлиа при $c = 0$

Аналитическое рассмотрение множества Жюлиа при нулевом значении параметра, приводит к результатам, которые очень важны для отработки адекватных компьютерных алгоритмов, используемых для исследования квадратичного отображения на плоскости двойной переменной. Как уже отмечалось, гиперболические границы – редкость для существующих изображений множества Жюлиа. Причина этого кроется в особенностях итерационного процесса на \mathbf{H}_2 . Рассмотрим их более детально.

Для квадратичного отображения $z \rightarrow z^2 + c$, где $z, c \in \mathbf{H}_2$ итерационная процедура в координатной форме имеет вид:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 + y_n^2 + p \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + q \end{cases}. \quad (17)$$

Одной из особенностей (17) является то, что в случае $|x| > 1$ и $|y| > 1$ их величина растет с номером итерации n , в степени 2^n . Это обстоятельство является причиной того, что величины x и y очень быстро превышают значение, которое возможно для обработки в современных вычислительных системах. Так, например, для начальных значений $x = y = 2$ уже на шестом шаге получим: $x = 2.1896 \cdot 10^{269}$ и $y = \infty$, т. е. превышает машинное представление числа. Следовательно, в данном случае, возможно проанализировать только 5 итераций. В случае, если мы следим за поведением квадрата модуля двойного числа:

$$r_{n+1}^2 = x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 \quad (18)$$

мы, фактически, можем просмотреть только 4 итерации, т. к. необходимость на шаге $n + 1$ смотреть квадраты x и y приводит к необходимости оперировать с величинами характерными для $n + 2$ -го шага.

На рис. 2 а) показан результат компьютерного построения заполненного множества Жюлиа при нулевом значении параметра с использованием традиционной итерационной процедуры (17): на n -м шаге итераций вычисляются действительная и мнимая части двойного числа, после этого вычисляется его модуль (18) по величине которого контролируется скорость убегания точки на бесконечность. Но, при этом, вместо фигуры, у которой должны быть гиперболические границы, как показано сплошной линией на рис. 1, мы получаем традиционный квадрат, уже знакомый из результатов, проиллюстрированных, например, в статье [2]. Подобное компьютерное построение, очевидно, является ошибочным, так как здесь неявно реализуется алгоритм, приводящий к изображениям, которые показаны на рис. 1 пунктиром.

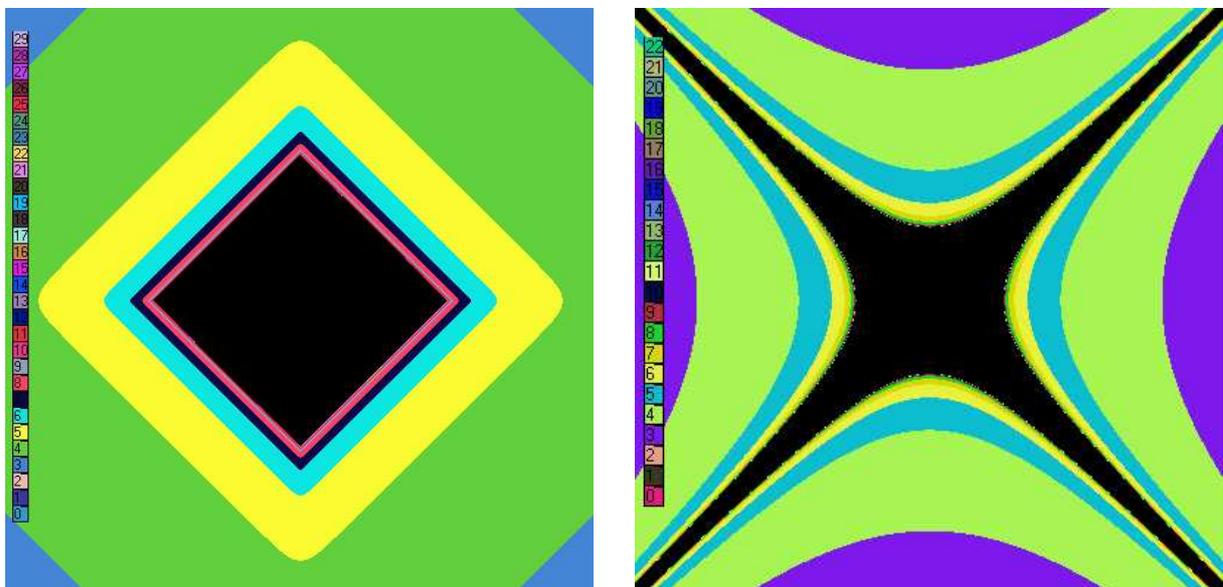


Рис. 2. Результат компьютерного построения заполненного множества Жюлиа (показано черным цветом) при нулевом значении параметра на \mathbf{H}_2 . а) Используется алгоритм, обычно применяемый на \mathbf{C} . Скорость убегания точки на бесконечность контролируется по модулю двойного числа. Как было показано выше, в данном случае множество Жюлиа должно иметь гиперболические границы, но этого не происходит. б) Результат работы предложенного в статье компьютерного алгоритма. В данном случае, полученная численно форма множества Жюлиа в точности совпадает с аналитическим решением, показанным на рис. 1 б) сплошной линией. Цветом показана скорость убегания точки на бесконечность.

Числа на цветовой шкале слева дают число шагов в течение которых было достигнуто максимальное число итераций.

В связи с этим встает задача разработки и тестирования компьютерных алгоритмов, правильно отображающих форму множества Жюлиа при нулевом значении параметра.

Нами был предложен алгоритм, модернизирующий обычно применяемый алгоритм построения множеств Жюлиа и Мандельброта на комплексной плоскости, и позволяющий построить компьютерную итерационную процедуру, воспроизводящую гиперболическую границу множества Жюлиа в том виде, как это было получено теоретически. Суть данного алгоритма состоит в следующем.

Запишем выражение для модуля двойного числа в виде:

$$r_{n+1}^2 = (x_{n+1} - y_{n+1})(x_{n+1} + y_{n+1}). \quad (19)$$

Используя (17) найдем, чему равны $x_{n+1} + y_{n+1}$ и $x_{n+1} - y_{n+1}$ в случае $c = 0$:

$$\begin{cases} x_{n+1} - y_{n+1} = x_n^2 + y_n^2 - 2x_n y_n = (x_n - y_n)^2 \\ x_{n+1} + y_{n+1} = x_n^2 + y_n^2 + 2x_n y_n = (x_n + y_n)^2 \end{cases} \quad (20)$$

Обозначая

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= x_{n+1} - y_{n+1} \\ Y_{n+1} &= x_{n+1} + y_{n+1} \end{aligned} \quad (21)$$

перепишем (20):

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n^2 \\ Y_{n+1} = Y_n^2 \end{cases}. \quad (22)$$

При этом (19) принимает вид:

$$r_{n+1}^2 = X_{n+1} Y_{n+1}. \quad (23)$$

Выражения (21) и (22) используются, как основа новой итерационной процедуры. Основанный на ней численный алгоритм построения множества Жюлиа при $c = 0$ выглядит следующим образом.

1. Задаём число *MaxIter*, равное максимально возможному количеству итераций, а также число *M*, отождествляемое с бесконечностью.

2. Задаём множество значений x и y ($x = -2 : 2$, $y = -2 : 2$)

3. Выбираем конкретные значения x_0, y_0 из x, y .

4. Вычисляем $X_0 = x_0 - y_0$ и $Y_0 = x_0 + y_0$.

5. В цикле вычисляются

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n^2 \\ Y_{n+1} = Y_n^2 \end{cases},$$

где на первом шаге $X_n = X_0$, $Y_n = Y_0$.

6. Вычисляется значение модуля $R = X_n Y_n$.

7. Итерации проводятся пока $R < M$ и число итераций меньше *MaxIter*. При нарушении одного из этих условий цикл прерывается.

8. Если условием выхода из цикла было

- нарушение условия $R < M$, то считается, что выбранные x_0 и y_0 не принадлежат множеству Жюлиа.

- число итераций больше *MaxIter*, но R осталось меньше M , то считается, что выбранные x_0 и y_0 принадлежат множеству Жюлиа и отмечаются на графике точкой, например, чёрного цвета.

9. Возвращаемся к пункту 3 и выбираем следующие значения x_0 и y_0 из множества значений x, y заданных в пункте 2.

Результат применения приведенного алгоритма для построения множества Жюлиа при нулевом значении параметра показан на рис. 2 б). Он в точности совпадает с аналитическим решением на рис. 1 б) (сплошная линия).

Выводы

Выполненное в статье аналитическое и численное исследование методов построения множества Жюлиа при $c = 0$ на плоскости двойной переменной выявило сильную зависимость результата подобных построений от используемой методики: в отличие от комплексной плоскости, где требования $z_n \rightarrow \infty$ и $|z_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ являются эквивалентными, на \mathbf{H}_2 они приводят к разным результатам. При этом "квадратное" и "гиперболическое" множества Жюлиа при $c = 0$ являются одинаково верными.

Аналитический характер полученных результатов, суммированных на рис. 1, позволяет использовать их в качестве тестовых при создании компьютерных алгоритмов, используемых для построения аналогов множеств Жюлиа и Мандельброта на плоскости двойной переменной.

Литература

1. Павлов Д. Г., Просандеева М. С., Панчелюга В. А. О построении аналога множества Мандельброта на плоскости двойных чисел. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007, №1 (7), том 4 - с. 93-97.
2. Павлов Д. Г., Панчелюга М. С., Малыхин А. В., Панчелюга В. А. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2009, №1 (11), (этот номер).

About shape of Julia set at zero parameter on double numbers plane

Pavlov D. G.¹, Panchelyuga M. S.^{1,2}, Panchelyuga V. A.^{1,2}

(1) – *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia,*

(2) – *Institute of Theoretical and Experimental Biophysics RAS, Pushchino, Russia*

panvic333@yahoo.com

Analytic solution for Julia set on double numbers plane in the case of quadratic map $z_{n+1} \rightarrow z_n^2 + c$, at $c = 0$ is presented. Paper illustrates main problems of numerical algorithm creation to calculate the Julia set having correct shape. Despite on simple mathematical character the consideration allows to illustrate main problems of double numbers fractals calculations, which don't exist for complex numbers fractals.

Key words: fractals, Julia set, double numbers.

О ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ ПРОСТРАНСТВА, ВЫЯВЛЯЕМОЙ В ХОДЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ЭФФЕКТА МЕСТНОГО ВРЕМЕНИ.

В. А. Панчелюга^{1,2}, С. Э. Шноль^{2,3}

(1) – НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, МО,
(2) – Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, Пущино
(3) – Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова, Москва
panvic333@yahoo.com, shnoll@mail.ru

В работе представлены результаты экспериментов, в которых была исследована структура пика местного времени вплоть до расщеплений второго порядка. Было найдено, что структура обнаруженных расщеплений имеет выраженный фрактальный характер. На этом основании выдвигается гипотеза о возможности расщеплений n -го порядка. Полученные экспериментальные результаты дают основание предполагать, что реальному пространству также присуща фрактальная структура.

Ключевые слова: флуктуации, феномен макроскопических флуктуаций, эффект местного времени, фрактальность.

1. Введение

Самое общее содержание феномена макроскопических флуктуаций, одним из проявлений которого является эффект местного времени, состоит в неслучайном характере формы гистограмм, построенных по коротким, непересекающимся отрезкам временных рядов флуктуаций в ходе процессов различной природы. Исследуя подобие формы для пар гистограмм, разделенных различными временными интервалами [1], был обнаружен ряд феноменов, наиболее значительными среди которых можно назвать существование различных периодов – суточного, около 27-суточных, годовичных [2–4], а также эффект местного времени [5–8].

Эффект местного времени состоит в повышенной вероятности сходства тонкой структуры для пар гистограмм разделенных интервалом равным разности местного времени. Существование этого эффекта было показано для различных расстояний между местами проведения измерений: от, практически, максимально возможных на Земле (ок. 15 тыс. км) до расстояний порядка одного метра. Также необходимо отметить, что эффект местного времени наблюдается для процессов различной природы [2–4].

Идею организации эксперимента по исследованию эффекта местного времени дает рис. 1. Здесь 1 и 2 – источники флуктуаций, фиксированные на расстоянии L друг от друга и движущиеся с некоторой скоростью V , так, чтобы линия, соединяющая источники флуктуаций, была коллинеарна вектору скорости измерительной системы. При этом, через время Δt_0 равное

$$\Delta t_0 = \frac{L}{V} \quad (1)$$

источник флуктуаций 1 попадет в то же место пространства, где до этого находился источник 2. На рис. 1 эти новые положения показаны как 1' и 2'. Как оказалось, и в этом состоит главное содержание эффекта местного времени, одинаковые пространственные положения обуславливают подобие формы гистограмм, разделенных интервалом времени Δt_0 , что выражается появлением пика на результирующем распределении интервалов.

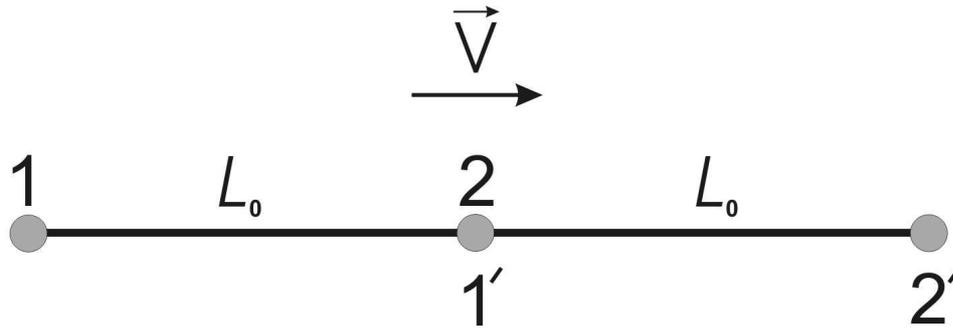


Рис. 1. Иллюстрация возникновения эффекта местного времени

В предыдущих работах [6–8] было показано, что при увеличении разрешающей способности (уменьшении длительности используемых гистограмм) пик местного времени расщепляется на два субпика. При этом, было найдено, что отношение величины этого расщепления Δt_1 к величине разности местного времени Δt_0 равно $k = 2.78 \cdot 10^{-3}$. Эта величина, с высокой точностью, оказалась равной отношению величины расщепления суточного периода 240 сек к самому периоду $T = 86400$ сек [7, 8]. Это позволило рассматривать эффект местного времени и суточный период, как феномены одной природы. Поэтому, суточный период рассматривается, как предельный случай эффекта местного времени, когда величина Δt_0 принимает максимально возможное значение, обусловленное скоростью вращения Земли вокруг своей оси.

В работе [8] было высказано предположение, что субпики, обнаруженные при расщеплении пика местного времени, также могут расщепляться, при дальнейшем увеличении временного разрешения метода исследований. При этом, последовательность расщеплений Δt_n дается выражением:

$$\Delta t_n = k^n \Delta t_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Предварительные результаты, полученные в [8] частично подтвердили это предположение. В настоящей работе представлены дальнейшие результаты исследований расщеплений пика местного времени – расщепления второго порядка.

Легко видеть из (2), что исследование каждого последующего расщепления, требует повышения разрешающей способности метода, более чем на два порядка. Поэтому, представляется наиболее удобным, исследовать расщепления суточного периода, т. к. в этом случае, значения Δt_n , согласно (2), будут иметь максимальную величину. Это позволяет снизить требования к частотным свойствам регистрирующей аппаратуры и используемым источникам флуктуаций.

2. Метод исследования и основные результаты

Исходя из (2) можно рассчитать величины Δt_n . Результаты такого расчета для суточного периода $\Delta t_0 = 86400$ сек приведены в Табл. 1. В первом столбце таблицы приведены значения n , для которых были рассчитаны величины Δt_n (второй столбец), соответствующие Δt_n частоты вхождения гистограмм в последовательность, F_0 (третий столбец), частоты сбора данных, обеспечивающие требуемое разрешение при определении $\Delta t_n - F^{ADC}$ (четвертый столбец). При определении F^{ADC} предполагалось, что гистограммы строятся по 60-точечным отрезкам временных рядов, а искомое расщепление Δt_n должно быть порядка пяти гистограмм. Последний столбец содержит суммарное число расщеплений и усредненные частоты сбора данных. Первые две строки таблицы, выделенные цветом, относятся к суточному периоду (первая строка) и расщеплению первого порядка Δt_1 (вторая строка), которые, как отмечалось выше, хорошо изучены.

Третья строка, выделенная более темным цветом, содержит информацию, являющуюся предметом изучения настоящей статьи. Строки 1–5 относятся к расщеплениям, которые могут быть, в принципе, изучены современными средствами эксперимента. Шестая строка, в настоящее время, не может быть исследована. Также необходимо отметить, что до проведения соответствующих исследований, существование расщеплений порядка выше второго гипотетично. Оценки, приведенные в четвертом и пятом столбцах таблицы, являются приблизительными и служат для ориентировочного определения параметров, которые должны быть выдержаны в соответствующих экспериментах. Реальные значения этих параметров могут слегка отличаться от приведенных в Табл. 1.

Табл. 1. Результаты расчета величин расщепления суточного периода и соответствующих частот, необходимых для сбора данных

n	Δt_n , сек	F_0 , Гц	F^{ADC} $F_0 \times 60 \times 5$, Гц	$2^n \rightarrow F^{ADC}$
0	86400			
1	240	4.17×10^{-3}	1.251	2 \rightarrow 1 Гц
2	0.67	1.49	447	4 \rightarrow 0.5 кГц
3	1.85×10^{-3}	540	162000	8 \rightarrow 160 кГц
4	5.14×10^{-6}	194400	58.3×10^6	16 \rightarrow 60 МГц
5	1.43×10^{-8}	69.98×10^6	21×10^9	32 \rightarrow 2.1 ГГц
6	3.97×10^{-11}	2.5×10^{10}	7.5×10^{12}	64 \rightarrow 7.5 ТГц

Для проверки предположения о существовании расщеплений второго порядка использовался метод последовательных уточнений положения уже известных пиков: "солнечного" – 1440 мин и "звездного" – 1436 мин. Суть данного метода иллюстрирует рис. 2, где схематично представлены хорошо исследованные, в одноминутном разрешении, солнечный и звездный пики. Эти пики и прилегающие к ним 30-сек окрестности формируют множество интервалов, исследуемых при помощи 10-сек гистограмм, показанных на рис. 2 отдельными столбиками. Нулевой интервал, выделенный на рис. 2 черным цветом, соответствует моменту относительно которого выровнены последовательности гистограмм – гистограммы с совпадающими номерами. Эти гистограммы разделены интервалом времени равным длительности солнечных суток – 86400 сек. Величины интервалов, указанные на рис. 2 даны относительно нулевого интервала, т. е., за вычетом суточного периода.

После получения распределения интервалов для 10-сек гистограмм, положение солнечного и звездного пиков будет известно с точностью ± 10 сек. Далее, описанная процедура повторяется, но с использованием 2-сек гистограмм. После этого, распределение интервалов для 2-сек гистограмм, дает возможность повторить ту же процедуру с использованием гистограмм длительностью 0.2 сек.

Для получения временных рядов, пригодных для применения описанных выше процедур, были проведены три серии измерений 2, 3 и 4 ноября 2007 г. Каждое измерение включало в себя две записи флуктуаций тока обратно смещенного p - n перехода длиной 50000 и 19200000 точек, измеренные с частотой 5 Гц и 8 кГц соответственно. На основе этих временных рядов строились две идентичные последовательности гистограмм. При этом, гистограммы, имеющие одинаковые номера были разделены интервалом времени, равным длительности солнечных суток – 86400 сек. Пары гистограмм с одинаковыми номерами соответствуют нулевому интервалу, показанному на рис. 2, более темным цветом.

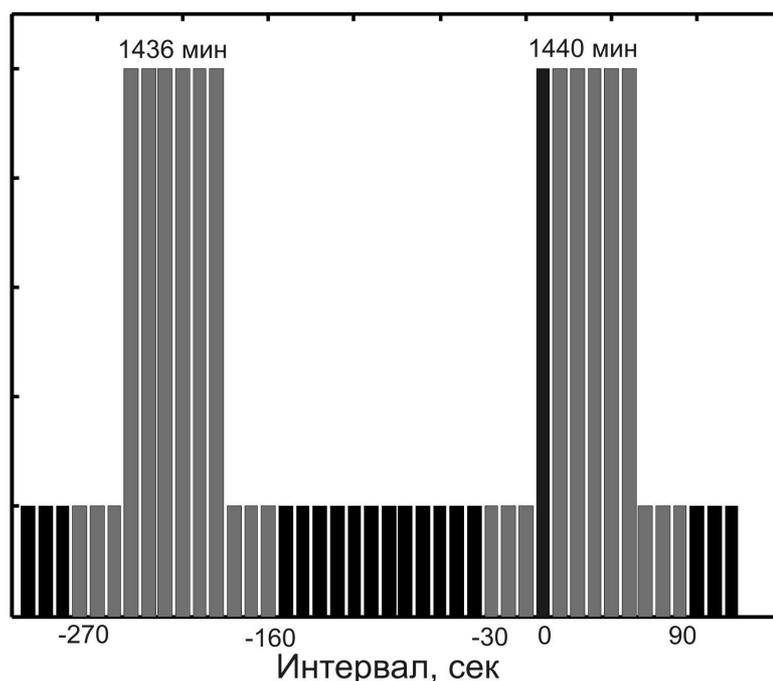
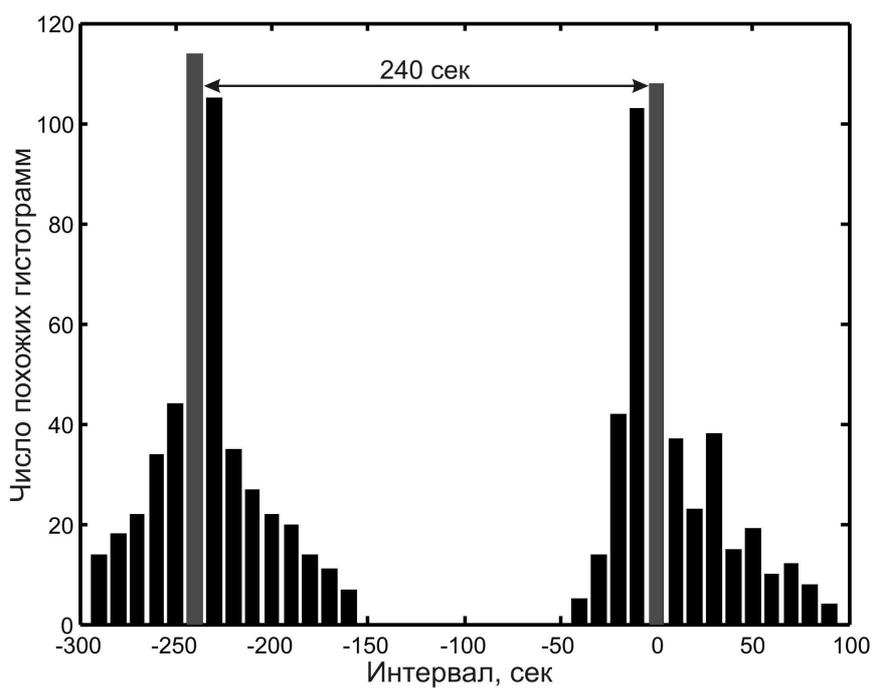


Рис. 2. "Солнечный" – 1440 мин и "звездный" – 1436 мин пики в расщеплении суточного периода. Диаграмма иллюстрирует метод последовательных уточнений положения уже известных пиков – серыми столбцами показаны интервалы, соответствующие 10-сек гистограммам. Нулевой интервал (выделен черным цветом) соответствует моменту относительно которого выровнены последовательности гистограмм – гистограммам с совпадающими номерами, которые разделены интервалом времени равным длительности солнечных суток – 86400 сек

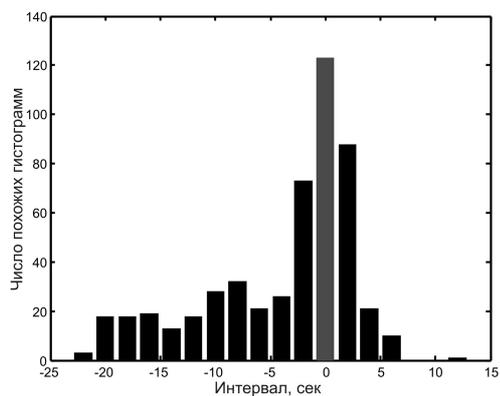
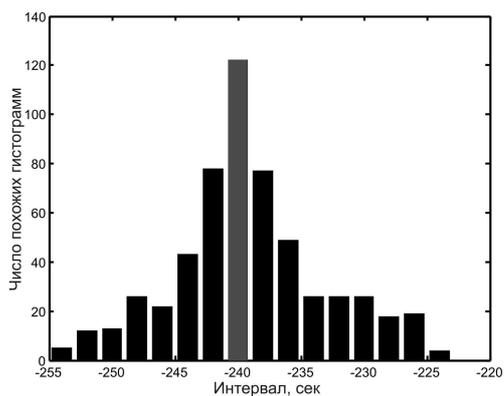
Необходимо отметить, что длительность солнечных суток, как правило, не равна точно 86400 сек, но колеблется в течение года. Характер этих колебаний описывается уравнением времени [9, 10]. Время для получения временных рядов, используемых в настоящей работе, было выбрано так, чтобы оно совпадало с одним из экстремумов уравнения времени: 2–4.11.2007. Это обеспечивает наиболее стабильную продолжительность солнечных суток в течение времени измерений.

Распределения интервалов, полученные в результате попарного сравнения гистограмм показаны на рис. 3. Верхний рисунок (рис. 3 а) содержит распределение интервалов, полученное с использованием 10-сек гистограмм. Последовательность этих гистограмм строилась на основе 50000-точечного временного ряда, измеренного с частотой 5 Гц. Гистограммы строились на основе 50-точечных отрезков временного ряда. Были получены две последовательности, состоящие из 1000 гистограмм, каждая, которые сравнивались между собой для интервалов отмеченных серым цветом на рис. 2. Как следует из приведенного на рис. 3 а) распределения интервалов, в окрестности, показанных на рис. 2 1-мин пиков снова получены два одиночных пика, разделенных интервалом равным 240 ± 10 сек.

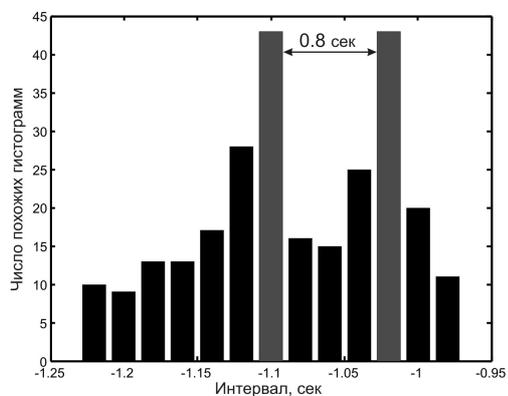
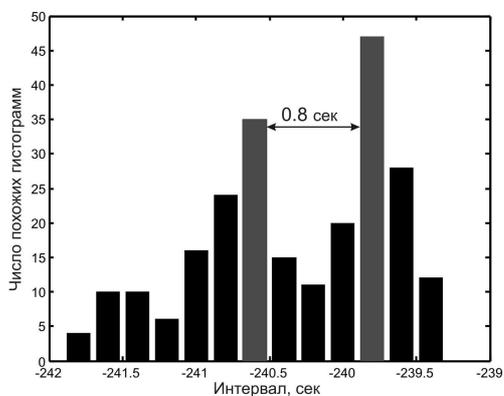
Распределения интервалов, для полученных на рис. 3 а) 10-сек пиков, исследовалось с помощью 2-сек гистограмм. В этом случае ряд, измеренный с частотой 8 кГц пере-считывался в 25-Гц ряд, из которого, используя 50-точечные отрезки данных, также строились 1000-точечные последовательности 2-сек гистограмм. Распределения интервалов для этого случая показаны на рис. 3 б). В данном случае окрестности пиков, показаны на отдельных рисунках: слева – "звездный" пик, справа – "солнечный". В



а)



б)



в)

Рис. 3. Распределение интервалов для 10-сек гистограмм, а), 2-сек гистограмм, б), 0,2-сек гистограмм, в)

данном случае расстояние между пиками также равно 240 сек, но с 2-сек точностью: 240 ± 2 сек.

Аналогичная процедура была использована также для 0.2-сек гистограмм. Они строились на основе ряда частотой 250 Гц, на основе 50-точечных отрезков. В данном случае использовались 2000-точечные последовательности гистограмм. Как можно видеть из рис. 3 в), при использовании 0.2-сек гистограмм для построения распределения интервалов происходит расщепление "солнечного" и "звездного" пиков на два субпика, каждый. При этом величина расщепления, как можно видеть из рис. 3, составляет 0.8 ± 0.2 сек, что согласуется с оценкой 0.67 сек, приведенной в третьей строке Табл. 1.

Т. о., распределения интервалов, приведенные на рис. 3 в), подтверждает предположение о существовании расщеплений 2-го порядка в суточном периоде.

3. Обсуждение

Как отмечалось во введении, эффект местного времени исследован для широкого диапазона расстояний между местами проведения измерений, вплоть до расстояний порядка одного метра. В последнем случае, время, необходимое, для получения временного ряда флуктуаций, длина которого будет достаточна для получения распределения интервалов, составляет доли секунды. В течение этого времени, внешние (как правило – геофизические) влияния на измерительные системы 1 и 2 (рис. 1) с высокой точностью одинаковы. Учитывая это, а также предпринимаемые меры по экранированию 1 и 2 от внешних полей, стабилизации источников питания и т. д., единственным изменением, происходящим с системой, является изменение ее пространственного положения, как это показано на рис. 1. С этим утверждением согласуются также устойчиво получаемые в многочисленных экспериментах результаты, которые всегда находятся в согласии с (1). Необходимо отметить, что формула (1) справедлива также для источников флуктуаций, которые находятся в движении относительно поверхности Земли [11].

Из всего сказанного следует вывод, что распределения интервалов, представленные на рис. 3 и аналогичные им, обусловлены движением измерительной системы в неоднородном пространстве. Действительно, для получения распределений, имеющих четко выраженные пики, воздействие на измерительную систему должно быть: а) неоднородным; б) характер этой неоднородности должен мало изменяться в течение времени Δt_0 .

Представленные в настоящей статье результаты позволяют сделать следующий шаг и говорить не просто о неоднородности, а о структуре пространства. При этом, как следует из полученных результатов, структура реального пространства должна иметь фрактальный характер.

Говоря о структуре пространства, необходимо отметить связь между законами сохранения и однородностью пространства [12]. Т. к. выполнимость законов сохранения энергии, импульса и момента импульса, связанных с однородностью времени, однородностью и изотропностью пространства, считается хорошо доказанной, то может возникнуть впечатление о противоречии вывода о наличии у пространства структуры с выполнимостью законов сохранения. Но противоречие это кажущееся. Действительно, экспериментальная проверка законов сохранения, как и большинство физических измерений, предполагает регистрацию хода во времени некоторых средних значений, в то время как, для используемого в настоящей работе метода макроскопических флуктуаций исходным экспериментальным материалом являются не средние величины, а флуктуации относительно среднего. Образно говоря, если представить исследование сохраняющейся величины, как неизменность показаний некоторого измерительного прибора, то исходным материалом для метода макроскопических флуктуаций является еле заметное дрожание – флуктуации – стрелки прибора относительно неизменного во времени среднего

значения. Подобные флуктуации всегда сопровождают любое высокоточное измерение. Метод макроскопических флуктуаций, основан на исследовании подобия формы пар гистограмм, построенных на основе коротких отрезков временных рядов такого рода флуктуаций в результатах измерений хода во времени параметра некоторого процесса. Будучи привязанным к форме гистограмм, он, поэтому, совершенно нечувствителен ни к изменениям среднего, ни к изменению амплитуды самих флуктуаций, при условии, что эти изменения происходят за время большее, чем длительность отрезка временного ряда, необходимого для построения гистограмм. Измерения, на основе которых получены результаты, представленные на рис. 3, как и любые другие измерения, используемые для исследования феномена макроскопических флуктуаций, выполняются при неизменном или при равном нулю среднем значении измеряемой величины.

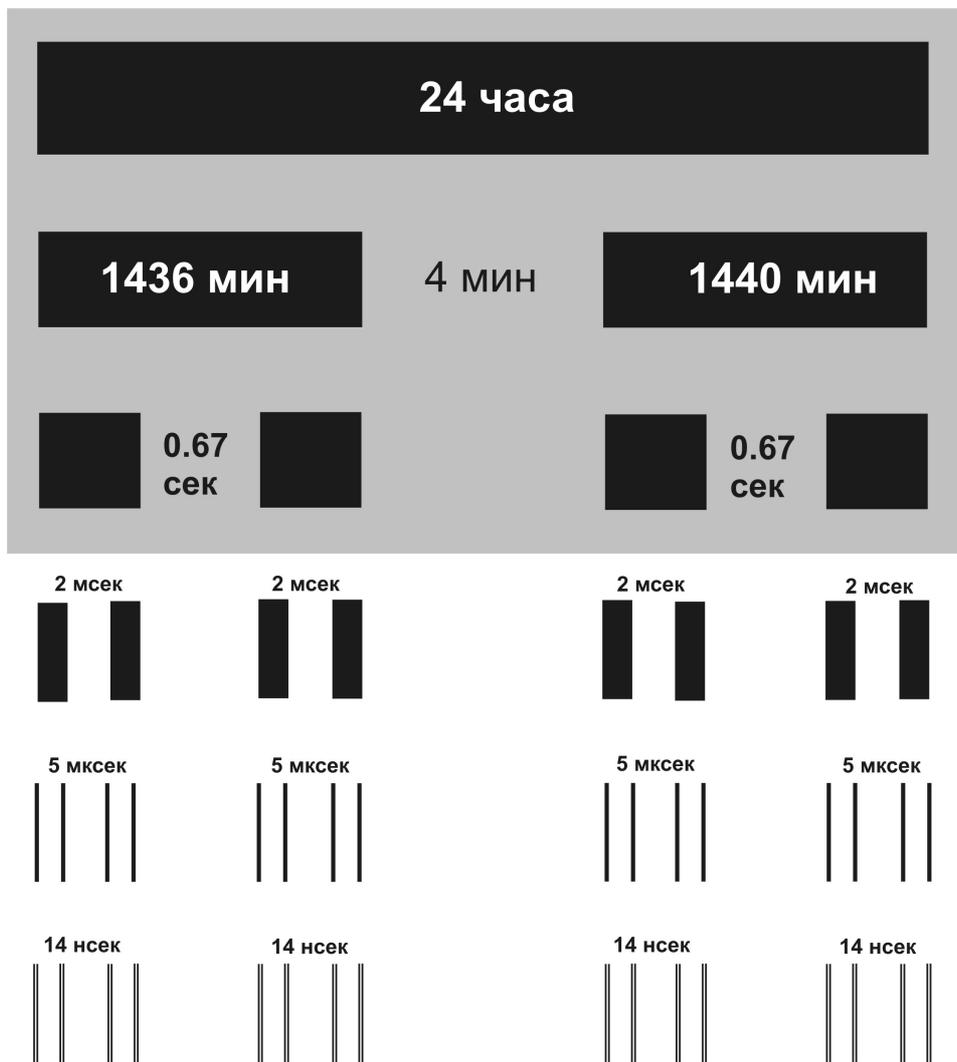


Рис. 4. Схема расщеплений суточного цикла. Серым прямоугольником показаны расщепления, исследованные к настоящему времени. Вне прямоугольника показаны расщепления, которые предполагается исследовать в будущем. Схема построена на основе

Табл. 1

Вывод о фрактальной структуре пространства ведет к предположению, что подобная структура должна отражаться в спектрах параметров любых динамических процессов, происходящих в нем. В настоящее время существует ряд работ, которые, на наш взгляд, говорят в пользу подобного предположения. В первую очередь, здесь необходимо отметить [13, 14] посвященные феномену "многофазности", где был показан полиэкстре-

мальный характер отклика различных химико-биологических систем на слабые внешние воздействия. Фрактальность в спектрах параметров различных природных систем является предметом рассмотрения концепции Global Scaling [15] в рамках которой решается задача вычисления фрактальных спектров для параметров различных природных систем, а также развивается ряд основанных на этом приложений.

Распределения интервалов, показанные на рис. 3 могут быть представлены в виде схемы, рис. 4, где серым прямоугольником выделены расщепления, исследованные к настоящему времени. Схема, рис. 4, построена на основе Табл. 1 и иллюстрирует зависимость (2), являясь, по сути, графическим выражением гипотезы о существовании расщеплений высшего порядка. Исследование этих расщеплений требует все более высокочастотных источников флуктуаций. В последней строке Табл. 1 выделены расщепления величина которых меньше 14 нсек (не показаны на рис. 4), исследование которых в настоящее время сталкивается с непреодолимыми техническими трудностями.

Изучение расщеплений Δt_n , $n > 2$, ведет к минимальному масштабу, на котором возможно исследование эффекта местного времени и через это к пониманию механизмов генерации флуктуаций, ответственных за возникновение этого эффекта.

Схема расщеплений, приведенная на рис. 4, возможно, простирается не только в сторону расщеплений высших порядков с $n > 2$, но и в сторону масштабов, больших в сравнении с Δt_0 :

$$\Delta t_m = \frac{\Delta t_0}{k^m}. \quad (3)$$

Для исследования этого участка пространственно-временной шкалы необходимо получение очень длинных записей. Рассмотрим пример. Как уже упоминалось, при исследовании расщеплений высших порядков наиболее перспективно использование расщеплений суточного периода, т. к., это позволяет получить максимальное, в земных условиях Δt_0 . Но, если предположить, что суточный период сам является расщеплением более длительного периода, то последний должен быть порядка года. Для обнаружения подобного периода необходим временной ряд флуктуаций продолжительностью не менее двух лет. Следующий шаг в сторону больших периодов (3) потребует запись не менее 720 лет. Приведенные оценки показывают, что в настоящее время реальным представляется изучение только годового периода. Его изучение, как и исследование расщеплений высших порядков, имеет принципиальное значение. Наличие расщеплений годового периода можно рассматривать как свидетельство того, что "солнечный" и "звездный" периоды, в действительности, обусловлены некоторой глобальной причиной, внешней, по отношению к солнечной системе. Отсутствие расщеплений, наоборот, может трактоваться в пользу того, что на структуру расщеплений пика местного времени в сильной мере влияют условия внутри Солнечной системы.

В настоящее время исследованы окологодичные периоды равные 525600 мин (календарный год) и 525939 мин (сидерический год) [16–17]. Исследование расщеплений во временной области получаемой из (3) к настоящему времени не проводилось. Вопрос о том можно ли рассматривать полученные окологодичные периоды как расщепление годового периода также остается открытым.

Необходимо отметить, что расщепление первого порядка наблюдалось также в опытах с вращением коллиматоров, вырезающих коллинеарные пучки α -частиц, вылетающих при радиоактивном распаде. При вращении коллиматоров против часовой стрелки – имитации суточного вращения Земли – также наблюдалось расщепление на "звездный" и "солнечный" периоды, длительность которых определялась числом оборотов коллиматора в сутках [18–19].

Выражение (1) на основе которого рассчитывалась Табл. 1 и строилась схема расщеплений, рис. 4, в случае когда линия соединяющая источники флуктуаций и вектор

скорости измерительной системы не коллинеарны, может быть переписано в более общей форме:

$$\Delta t_0 = \frac{L_0}{V} = \frac{L \cos \varphi}{V}. \quad (4)$$

где φ – угол между вектором скорости измерительной системы и линией, соединяющей источники флуктуаций. Для пары неподвижных источников флуктуаций (4) дает разность местного времени в местах проведения измерений при условии, что V – тангенциальная скорость измерительной системы, обусловленная вращательным движением Земли. Многочисленные экспериментальные исследования подтвердили несомненную выполнимость (4) для тех случаев, когда L_0 порядка десятков километров и больше [2–4, 17]. Для расстояний порядка метра эта зависимость выполняется только для малых в окрестности направлений север-юг и восток-запад [5, 20]. По нашему мнению, последнее обстоятельство также может быть связано с фрактальной структурой, присущей реальному пространству. Действительно, с ростом φ траектории источников флуктуаций 1 и 2, рис. 1, расходятся и, начиная с некоторого значения φ формы, получаемых от источников флуктуаций гистограмм, будут определяться разными неоднородностями. Что, в конечном итоге, приводит к исчезновению эффекта.

Предположение о фрактальной структуре пространства ведет к выводу о зависимости величины k в (2) от скорости движения измерительной системы. Все описанные выше результаты были получены в условиях, когда V обусловлена суточным вращением Земли. Для случаев когда это не так, нами получены предварительные результаты, свидетельствующие в пользу предположения о зависимости получаемой картины расщеплений от скорости движения измерительной системы.

Литература

1. С. Э. Шноль, В. А. Панчелюга Феномен макроскопических флуктуаций. Методика измерений и обработки экспериментальных данных. // Мир измерений, 2007, №6, с. 49–55.
2. С. Э. Шноль, В. А. Коломбет, Э. В. Пожарский, Т. А. Зенченко, И. М. Зверева, А. А. Конрадов. О реализации дискретных состояний в ходе флуктуаций в макроскопических процессах // УФН1998, 168 (10) с. 1129–1140.
3. С. Э. Шноль, Т. А. Зенченко, К. И. Зенченко, Э. В. Пожарский, В. А. Коломбет, А. А. Конрадов. Закономерное изменение тонкой структуры статистических распределений как следствие космофизических причин // УФН 2000, 170 (2), с. 214–218.
4. С. Э. Шноль. Закономерные изменения тонкой структуры статистических распределений в случайных процессах, как следствие арифметических и космофизических причин. Труды семинара "Время, хаос и математические проблемы" выпуск 3, М., Книжный Дом "Университет", 2004, с. 121–154.
5. В. А. Панчелюга, С. Э. Шноль. О пространственной анизотропии выявляемой при исследовании "эффекта местного времени". // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2006, №2 (6), Vol. 3 с. 188–193.
6. V. A. Panchelyuga, S. E. Shnol'. Space-time structure and macroscopic fluctuations phenomena. // Physical Interpretation of Relativity Theory: Proceedings of International Meeting. Moscow, 2 – 5 July 2007 / Edited by M. C. Duffy, V. O. Gladyshev, A. N. Morozov, P. Rowlands. - Moscow: BMSTU, 2007 - pp. 231–243.
7. В. А. Панчелюга, В. А. Коломбет, М. С. Панчелюга, С. Э. Шноль. Исследование эффекта местного времени на малых пространственно-временных масштабах // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (5), Vol. 3, 2006, с. 116–121.
8. Victor A. Panchelyuga, Valery A. Kolombet, Maria S. Panchelyuga and Simon E. Shnoll. Experimental Investigations of the Existence of Local-Time effect on the Laboratory Scale and the Heterogeneity of Space-Time. // Progress in Physics, V.1, January, 2007, pp. 64–69.

9. Г. Н. Рессел, Р. С. Дэган, Д. К. Стюарт. *Астрономия*. Т. 1. Солнечная система. М.-Л., ОНТИ, 1934 - 383 с.
10. А. А. Михайлов. *Земля и ее вращение*. М., Наука, 1984 - 80 с.
11. Victor A. Panchelyuga, Simon E. Shnoll. A Study of a Local Time Effect on Moving Sources of Fluctuations // *Progress in Physics*, July, 2007 V. 3, pp. 55-56.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика*. М., Наука, 1988 - 216 с.
13. С. Э. Шноль, М. Н. Кондрашова, Х. Ф. Шольц. О многофазном характере зависимости аденозинтрифосфатной активности актомиозина и миозина от различных воздействий. // *Вопросы медицинской химии*, 1957, т. 3, вып. 1, с. 54-77.
14. С. Э. Шноль. Многофазный характер изменений свойств белка под влиянием слабых воздействий. // *Применение радиоактивных изотопов в клинических и экспериментальных исследованиях*. М., 1958, с. 199-208.
15. Raum und Zeit. Special 1. Global Scaling. 2002 - 157 p.
16. S. E. Shnoll, K. I. Zenchenko, and N. V. Udaltsova. Cosmophysical Effects in the Structure of Daily and Yearly Periods of Changes in the Shape of Histograms Constructed from the Measurements of ^{239}Pu alpha-Activity. // *Biophysics*, 2004, v. 49, Suppl. 1, pp. 155-164.
17. Simon E. Shnoll. Changes in Fine Structure of Stochastic Distributions as a Consequence of Space-Time Fluctuations. // *Progress in Physics*, 2006, v. 2, pp. 39-45
18. С. Э. Шноль, К. И. Зенченко, И. И. Берулис, Н. В. Удадьцова, С. С. Жирков, И. А. Рубинштейн. Зависимость "макроскопических флуктуаций" от космофизических факторов. Пространственная анизотропия. // *Биофизика*, 2004, т. 49 № 1 с. 132-139.
19. S. E. Shnoll, I. A. Rubinshtejn, K. I. Zenchenko, V. A. Shlekhtarev, A. V. Kaminsky, A. A. Konradov, N. V. Udaltsova. Experiments with rotating collimators cutting out pencil of alpha-particles at radioactive decay of ^{239}Pu evidence sharp anisotropy of space. // *Progress in Physics*, 2005, v. 1, pp. 81-84.
20. Victor A. Panchelyuga, Simon E. Shnoll. On the Dependence of a Local-Time Effect on Spatial Direction // *Progress in Physics*, 2007, v. 3, pp. 51-54.

On fractal structure of space revealing during investigations of local-time effect

Victor A. Panchelyuga^{1,2}, Simon E. Shnoll^{2,3}

(1) – *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fрязино, Russia,*

(2) – *Institute of Theoretical and Experimental Biophysics RAS, Pushchino, Russia,*

(3) – *Department of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

panvic333@yahoo.com, shnoll@mail.ru

The paper presents experimental investigations of local-time peak splitting right up to second-order splitting. Splitting pattern found in the experiments has a fractal character. A hypothesis about the possibility of high order splitting is proposed. The obtained experimental result leads to a supposition that the real space possess fractal character.

Key words: fluctuations, macroscopic fluctuations phenomenon, local-time effect, fractality.

РЕЗУЛЬТАТЫ ПОИСКА ВЫДЕЛЕННОГО НАПРАВЛЕНИЯ И НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ВСЕЛЕННОЙ НА ОСНОВЕ СТАТИСТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КВАЗАРОВ

В. Я. Варгашкин

Орловский государственный технический университет (ОрёлГТУ)

varg@ostu.ru

Проанализированы гистограммы распределения квазаров по значениям красного смещения для статистических окон выборки, различным образом ориентированных по направлениям небесной сферы. Выявлены неоднородности этого распределения, имеющие вид структур филаментов и войдов. Проанализирован глобальный характер анизотропии распределения квазаров по небесной сфере.

Ключевые слова: Красное смещение, квазары, собственное движение квазаров, широко-масштабная анизотропия Вселенной, филаменты, войды, окна выборки.

PACS: 98.54.-h 98.65.-r 98.80.Jk

1. Постановка задачи исследования

Крупнейшую к настоящему времени базу данных, включающей описание квазаров, активных галактических ядер и лацертид содержит каталог обсерватории Сен-Мишель французского Высокого Прованса [1]. В двенадцатом издании этого каталога приведены характеристики более чем ста восьми тысяч объектов.

Издание, однако, не содержит сведений о собственном движении квазизвездных объектов, поскольку при наблюдениях с расстояний порядка гигапарсеков собственные движения объектов измерить не удалось.

Наиболее точные астрометрические измерения были выполнены консорциумом Европейского Космического Агентства в ходе работы спутника "Гипшарх" с 1989 по 1993 гг. Погрешность измерений координат, параллаксов и собственного движения составляла 6...20 тысячных долей угловой секунды [2]. Однако в ходе более чем трехлетней работы спутника наблюдениям подвергся лишь один квазар, и вопрос о собственном движении квазаров остался открытым.

Наиболее ранними прямыми результатами измерения собственного движения квазаров явились данные, полученные Д.-С. Мак-Милланом [3] с использованием радиоинтерферометрии с широко разнесенными базами. В его работе представлено распределение собственных движений квазаров по небесной сфере (рисунок 1). В ходе наблюдений были прямо измерены собственные движения квазаров, достигавшие 35 тысячных долей угловой секунды.

Анализ распределения векторов скоростей собственного движения, полученного Д.-С. Мак-Милланом, свидетельствует о том, что распределение его направлений по небесной сфере носит неслучайный характер. На небесной сфере выделяются области типа радиантов и антирадиантов, из которых преимущественно исходит или в которые сходится видимый поток квазаров, а также области преимущественно однонаправленного собственного движения квазаров в видимом потоке.

Близкие по полученному выводу результаты были получены О. Титовым [4].

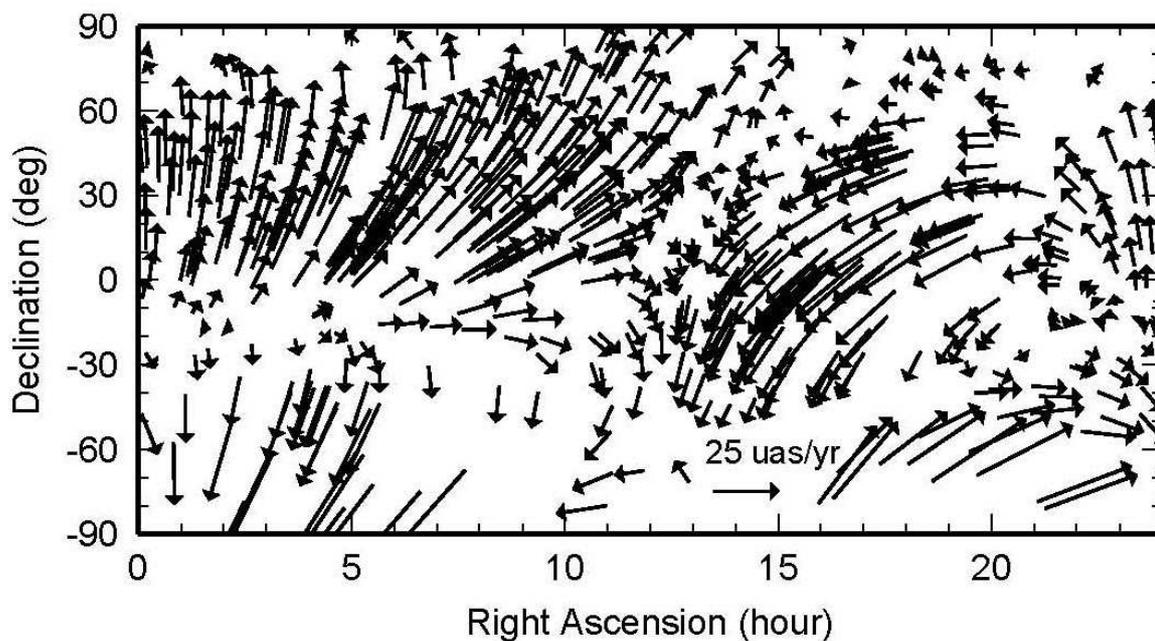


Рис. 1. Наличие выделенных направлений в видимых собственных движениях квазаров по данным работы [3]

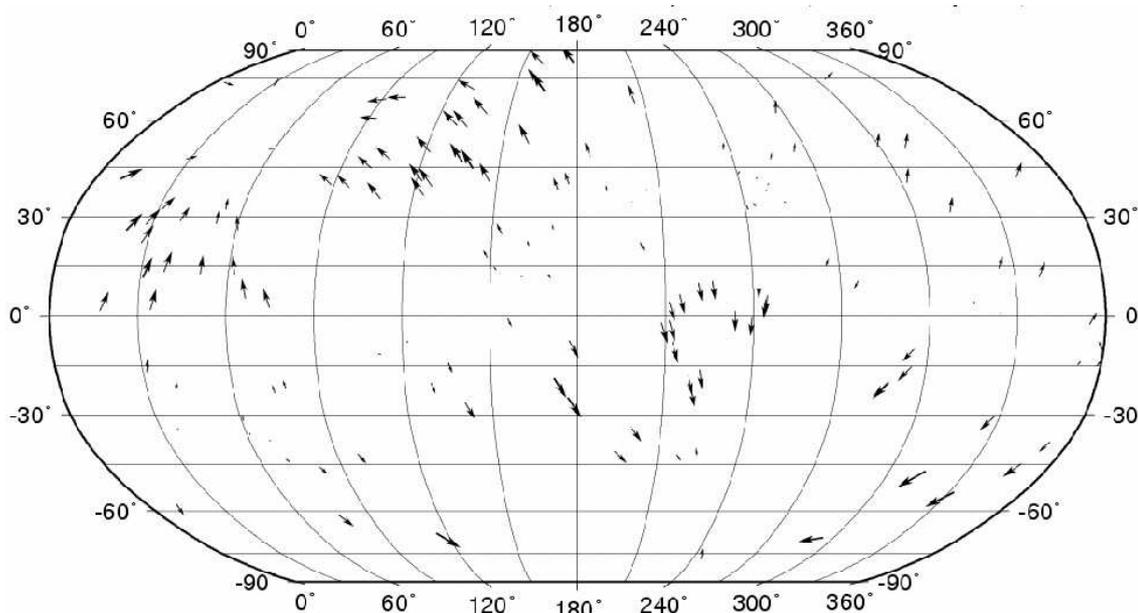


Рис. 2. Наличие выделенных направлений в видимых собственных движениях квазаров по данным работы [4]

Можно предположить, что видимое перемещение квазаров из областей дивергенции в области конвергенции должно отразиться на их количествах в тех или иных областях на карте расположения ныне открытых квазаров. Подобная карта, построенная по данным каталога [1], приведена на рисунке 3.

Анализ рисунка, однако, показывает, что обнаружение квазаров на небесной сфере велось крайне неравномерно. Так, на рисунке 3 выделяется синусоидальная светлая область, в которой обнаруженные квазары практически отсутствуют. На эту область проецируется ребро Нашей Галактики, создающей паразитную засветку и препятствующую процессу обнаружения. На карте выделяются также темные пятна и полосы —

данные отдельных экспериментов, в ходе которых в целях обнаружения квазаров детально просматривались отдельные, относительно небольшие, участки неба.

Поэтому непосредственный анализ частот распределения квазаров по участкам небесной сферы мог бы привести к неверному выводу о том, что видимые потоки квазаров следуют из областей, закрытых Млечным Путем в области, детально обследованные в поисках квазаров.

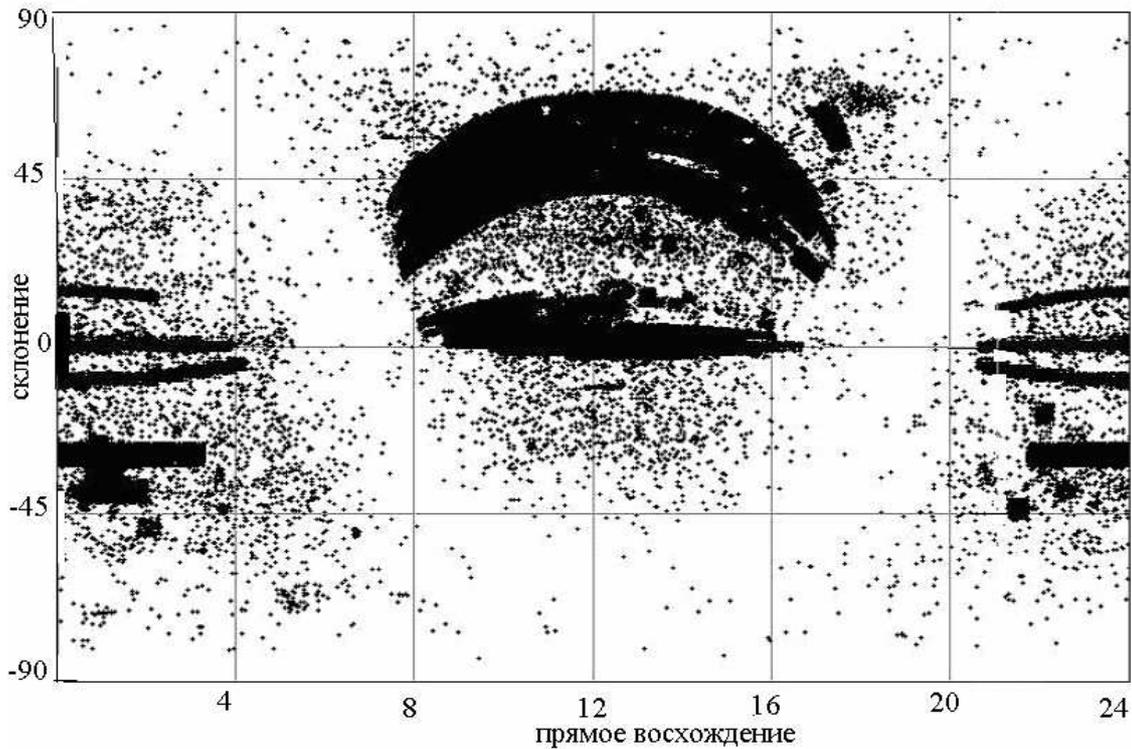


Рис. 3. Расположение 108.000 квазаров на небесной сфере по данным каталога [1]

Вследствие этого для обнаружения выделенных направлений Вселенной, по отношению к которым группируются участки расходимости и сходимости видимого потока квазаров на небесной сфере, анализу были подвергнуты регрессионные зависимости, характеризующие изменение относительных частот распределения квазаров по небесной сфере в зависимости от их красного смещения.

2. Особенности регрессионного анализа относительных частот распределения квазаров на небесной сфере в зависимости от красного смещения

В таблице 1 содержатся числовые значения количеств квазаров, приходящихся на различные диапазоны красного смещения z в каталоге [1].

Таблица 1. Распределение количества квазаров по красному смещению z

Интервал	1	2	3	4	5	6	7
Диапазон z	0...0,5	0,5...1,0	1,0...1,5	1,5...2,0	2,0...2,5	2,5...3,0	3,0...3,5
Число квазаров	21639	17883	22076	24528	13297	3866	2540
Интервал	8	9	10	11	12	13	1...13
Диапазон z	3,5...4,0	4,0...4,5	4,5...5,0	5,0...5,5	5,5...6,0	6,0...6,5	0...6,5
Число квазаров	1349	651	215	36	14	8	Всего 108102

На рисунке 4 (а) изображена гистограмма распределения количества квазаров по значениям красного смещения z , соответствующая таблице 1.

Согласно табличным данным и гистограмме более 92% квазаров приходится на интервал красных смещений из диапазона от 0 до 2,5.

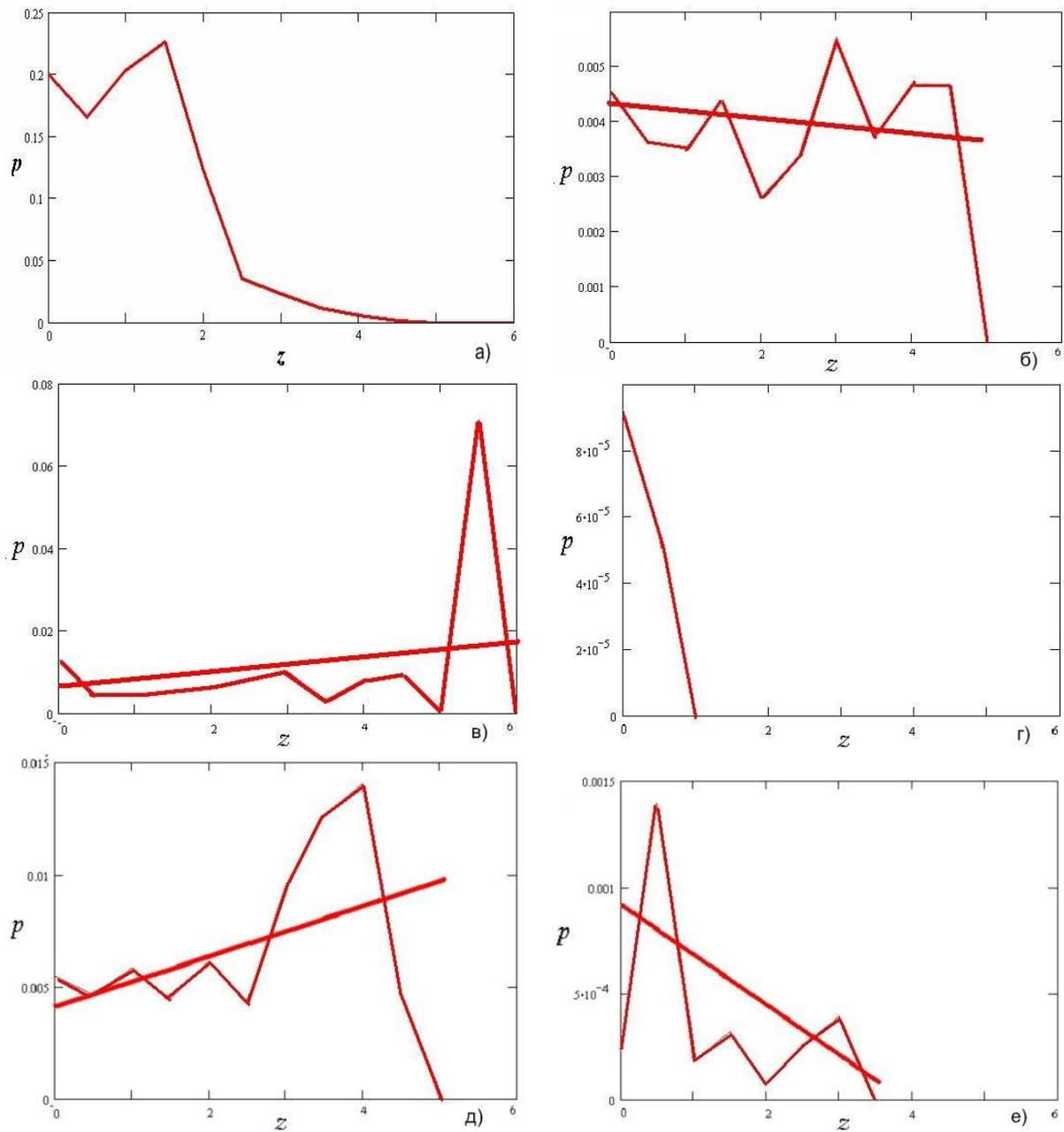


Рис. 4. Гистограмма распределения квазаров по значениям красного смещения z с относительной вероятностью p по данным каталога [1] (а); типичный вид гистограммы распределения квазаров по значениям красного смещения z для выборок по различным направлениям на небесной сфере (б); атипичная гистограмма с выбросом в области больших значений z (в); атипичная гистограмма с круто падающей линией регрессии (г); атипичная гистограмма с нарастающей линией регрессии (д); атипичная гистограмма с падающей линией регрессии (е)

Для дальнейших расчетов небесная сфера была разбита на 480 участков одинаковой площади. При этом окружность небесного экватора оказалась разбитой на 24 отрезка, что, таким образом, соответствовало интервалу разбиения по прямому восхождению в один угловой час дуги окружности. Дуга полуокружность небесного меридиана была

разбита на 20 отрезков переменной длины для удовлетворения требованию равновеликости образованных в ходе разбиения сферических прямоугольников.

В среднем на каждый такой прямоугольник пришлось по 225 квазаров. Дальнейшее увеличение числа участков разбиения небесной сферы было признано нецелесообразным из-за роста влияния на результаты дальнейшего анализа хвоста распределения количества квазаров по z ввиду малости процентной доли квазаров, приходящейся на интервал значений красных смещений, превышающих 2,5.

При этом для каждого участка строилась гистограмма, аналогичная рисунку 4 (а), которая аппроксимировалась прямолинейной регрессионной зависимостью. Типичный вид такой гистограммы представлен на рисунке 4 (б).

График типичной гистограммы содержит два участка. На начальном участке, с относительно малыми значениями z , линия графика испытывает колебания плотности вероятности p по оси z . На конечном участке, с относительно большими значениями z , происходит падение линии гистограммы до нуля и совмещение ее с осью абсцисс. Падение обусловлено тем, что уже при $z > 2,5$, согласно данным таблицы 1, количества обнаруженных квазаров оказываются меньшими количества участков разбиения небесной сферы, вследствие чего типичная плотность вероятности обнаружения квазара в пределах такого участка на конце типичной же гистограммы оказывается нулевой. В результате полученная типичная аппроксимирующая прямая, построенная на интервале значений плотности вероятности p , которые отличаются от окончательного нулевого значения, оказывается несколько наклоненной к оси абсцисс за счет наличия окончательного падающего участка гистограммы.

На рисунке 4 (в) представлена аналогичная гистограмма, которую будем считать атипичной. Она содержит выброс плотности вероятности p в области больших значений z . Этот выброс обусловлен указанным выше малым количеством квазаров, приходящихся на интервал больших значений z , что повышает статистический вес каждого такого квазара, присутствующего на данном участке небесной сферы.

На рисунке 4 (г) представлен другой вид атипичности. Гистограмма содержит только квазары, приходящиеся на область достаточно малых значений z ($z < 1 \dots 1,5$) при достаточно малых значениях плотности вероятности p ($p < 10^{-4}$). При этом велика доля вероятности того, что участок неба в соответствующем направлении не был обследован с достаточно чувствительной аппаратурой, что могло привести к занижению вероятности обнаружения квазаров с большими значениями z в сравнении с действительными ее значениями.

На рисунках 4 (д) – 4 (е) представлены два других вида атипичности. Рисунок 4 (д) содержит гистограмму с круто падающей линией регрессии, рисунок 4 (е) – с нарастающей линией регрессии.

3. Области дивергенции и конвергенции видимого потока квазаров на небесной сфере

Поведение гистограмм в поле графиков плотность вероятности p – красное смещение z может быть интерпретировано следующим образом.

Предположим, что собственные движения квазаров по небесной сфере на каком-либо ее участке отсутствуют, и их смещение в пространстве является чисто радиальным. Тогда с течением времени квазары будут удаляться от наблюдателя, т. е. будет происходить рост z , но с ростом z абсолютное количество обнаруженных квазаров в соответствии с гистограммой рис. 4 (а) падает. Относительная доля квазаров с текущим значением z на текущем же участке небесной сферы в отношении общего их числа с таким же значением z по всей небесной сфере в условиях роста z будет испытывать случайные колебания

около некоторого среднего относительного значения с последующим падением этой доли к оси z , как это было показано в пояснении к графику типичной гистограммы рис. 4 (б).

Аналогичным образом будет вести себя гистограмма также в случае наличия у квазаров их видимого собственного движения при случайном распределении его направления между квазарами в пределах текущего участка небесной сферы.

Если квазары обладают видимым собственным движением, имеющим неслучайное преимущественное направление в пределах нескольких соседних участков небесной сферы, это будет приводить к видимому перемещению квазаров из одних участков небесной сферы в другие через некоторое количество смежных участков транзитного движения. При этом с ростом z относительная доля квазаров с текущим значением z в отношении к общему их числу с этим же значением z по все небесной схеме будет либо систематически уменьшаться на одних участках небесной сферы, т. е. на участках расходимости видимого потока, либо систематически увеличиваться на других участках, т. е. на участках сходимости видимого потока, либо оставаться неизменной в пределах участков транзитного движения.

На участках расходимости гистограмма будет обладать аномально крутым падением линии регрессии (рисунок 4е) в сравнении с типичной гистограммой (рисунок 4б). На участках сходимости будет наблюдаться аномальная пологость линии регрессии или даже ее подъем от оси z (рисунок 4д). На участках транзитного перемещения квазаров будет реализовываться распределение квазаров с типичной гистограммой, поскольку выбывшие с этих участков квазары будут замещаться вновь поступившими.

Аномальный подъем линии регрессии от оси z может быть обусловлен также описанным выше (см.: рисунок 4в) выбросом гистограммы в области больших значений z .

Аномальный спад диаграммы может наблюдаться также при недостаточности экспериментальных данных с большими значениями z (см.: рисунок 4г) при низкой чувствительности экспериментального оборудования.

Влияние этих двух случаев аномальности на анализ ориентации точек дивергенции и конвергенции видимого потока квазаров по небесной сфере может быть снижено путем статистической обработки имеющихся экспериментальных данных.

4. Анализ анизотропии видимого потока квазаров по небесной сфере

Выполненные рассуждения не позволяют сделать априорных выводов о том, какие значения углов наклона линии регрессии следует отнести к типичным, и где пролегают границы типичных линий с аномально крутыми и аномально пологими линиями регрессии. Можно лишь предположить, что при отсутствии статистически значимых преимущественных направлений видимого движения квазаров аномальности угла наклона прямой регрессии следует считать случайными выбросами, случайным же образом распределенными по небесной сфере. В противном случае, т. е. при выделенности видимых направлений собственного движения квазаров, участки небесной сферы с аномальностями угла наклона линии регрессии, окажутся распределенными по небу с некоторой систематичностью.

Уменьшение влияний выброса (см.: рисунок 4 (в)) либо недостаточности выборки (см.: рисунок 4 (г)) может быть достигнуто путем усечения выборки квазаров в области больших значений z . При расчетах подобное усечение осуществлялось двумя способами. Согласно первому из способов, усечению подвергались все квазары с красным смещениями, превышающим значение $z = 3$. Согласно второму способу усечению подвергались все цепочки нулевых значений плотности вероятности, располагающиеся правее правого края линии гистограммы.

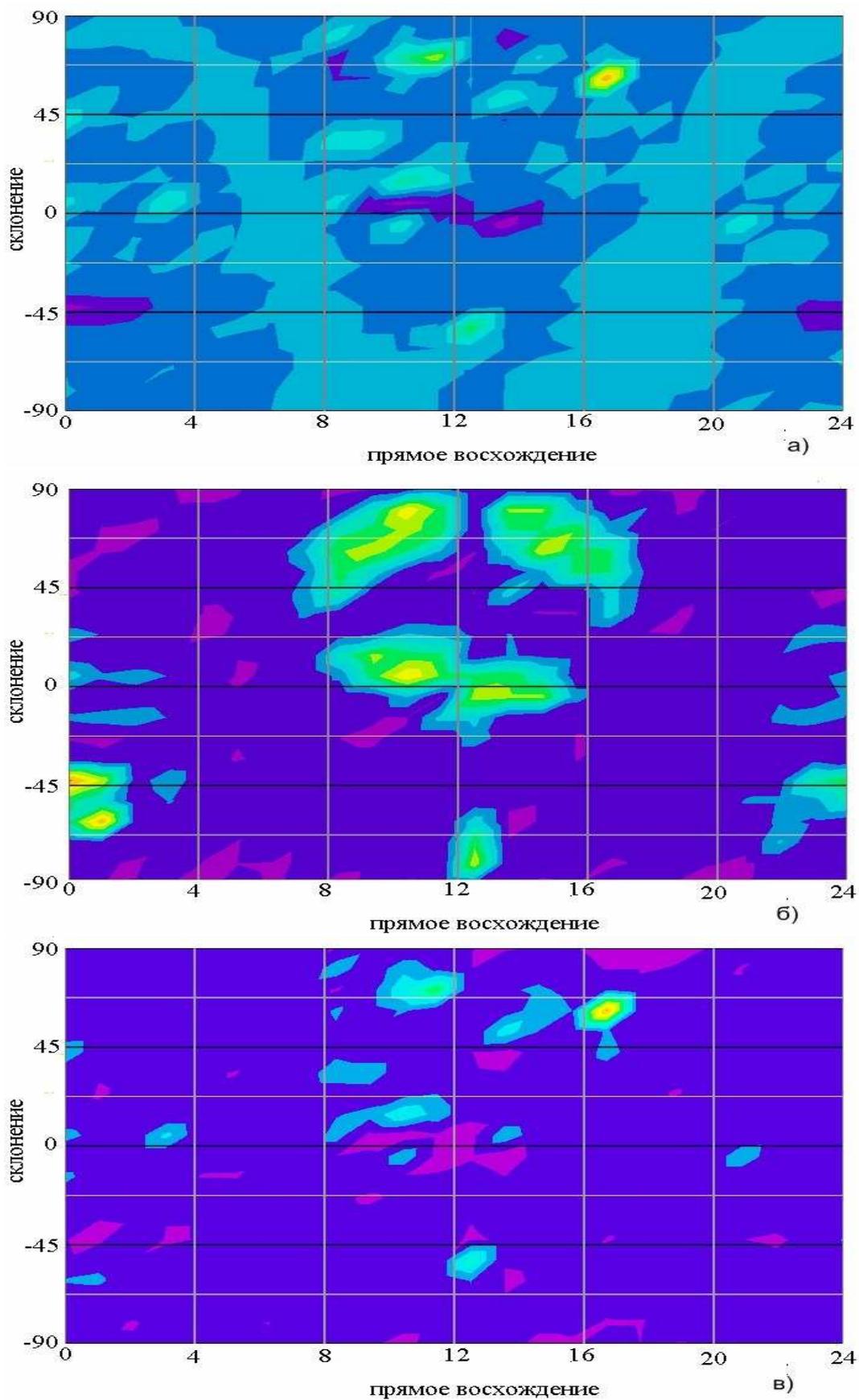


Рис. 5. Распределение значений углового коэффициента регрессии по небесной сфере для полной выборки квазаров (а); выборки, усечённой по первому способу (б); выборки, усечённой по второму способу (в)

На рисунке 5 (а) представлено распределение углового коэффициента наклона линии регрессии по небесной сфере при неусеченной выборке. На рисунках 5 (б) и 5 (в) представлены аналогичные распределения, полученные после усечения выборок двумя описанными выше способами.

Для выявления систематичности угловой коэффициент наклона прямой регрессии, аппроксимирующей гистограмму распределения квазаров по значениям красного смещения z , как функцию $f(\theta; \varphi)$ угловых координат θ и φ сферической координатной системы, следует разложить в ряд по сферическим функциям. Неслучайный характер распределения углового коэффициента наклона при этом обуславливает значимость вклада в разложение амплитуд мультипольных сферических функций, в первом приближении амплитуд дипольной, квадрупольной и октупольной сферических функции, в сравнении с амплитудой сферической функции нулевого порядка.

Таким образом, полученные поля $f(\theta; \varphi)$ оценок отклонения (см.: рисунки 5 (а) – (в)), распределенные на сфере $0 \leq \varphi < 2\pi$; $0 \leq \theta < \pi$, были разложены по сферическим функциям Бесселя вида:

$$F(\theta; \varphi) = \sum_{h=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} a_{h;0} (P_h \cos \theta) + \sum_{m=1}^h P_h^m(\cos \theta) (a_{h;m} \cos m\varphi + b_{h;m} \sin m\varphi) \right], \quad (1)$$

с сохранением первых четырех членов разложения, где амплитуды гармонических составляющих вычисляются по формулам:

$$a_{h;m} = \frac{2h+1}{2\pi} \frac{(h-m)!}{(h+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos m\varphi' \int_0^{\pi} f(\theta'; \varphi') P_h^m(\cos \theta') \sin \varphi' d\theta', \quad (2)$$

$$b_{h;m} = \frac{2h+1}{2\pi} \frac{(h-m)!}{(h+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi' \sin m\varphi' \int_0^{\pi} f(\theta'; \varphi') P_h^m(\cos \theta') \sin \varphi' d\theta', \quad (3)$$

$P_n^m(\cos \theta)$ – присоединённые сферические функции:

$$P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta, \quad (4)$$

$$P_2^1(\cos \theta) = \frac{3}{2} \sin 2\theta, \quad (5)$$

$$P_2^2(\cos \theta) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos 2\theta, \quad (6)$$

$$P_3^1(\cos \theta) = \frac{3}{8} \sin \theta - \frac{15}{8} \sin 3\theta, \quad (7)$$

$$P_3^2(\cos \theta) = \frac{15}{4} \cos \theta - \frac{15}{4} \cos 3\theta, \quad (8)$$

$$P_3^3(\cos \theta) = \frac{45}{4} \sin \theta - \frac{15}{4} \sin 3\theta, \quad (9)$$

а прочие из входящих в (2–3) присоединенных сферических функций, т.е. $P_h^0(\cos \theta)$, рассчитываются с использованием зональных сферических функций $P_0(\cos \theta)$:

$$P_0(\cos \theta) = P_0^0(\cos \theta) = 1, \quad (10)$$

$$P_1(\cos \theta) = P_1^0(\cos \theta) = \cos \theta, \quad (11)$$

$$P_2(\cos \theta) = P_2^0(\cos \theta) = \frac{3}{4} \cos 2\theta + \frac{1}{4}, \quad (12)$$

$$P_3(\cos\theta) = P_3^0(\cos\theta) = \frac{5}{8}\cos 3\theta + \frac{3}{8}\cos\theta. \quad (13)$$

При использовании усеченных выборок результаты расчетов оказались очень слабо зависящими от способа подготовки выборки описанными выше способами. Достигнутая относительно слабая зависимость результата от способа подготовки выборки, характеризующаяся относительно малыми доверительными интервалами оценок угловых координат дипольного момента позволяет считать полученные оценки статистически значимыми.

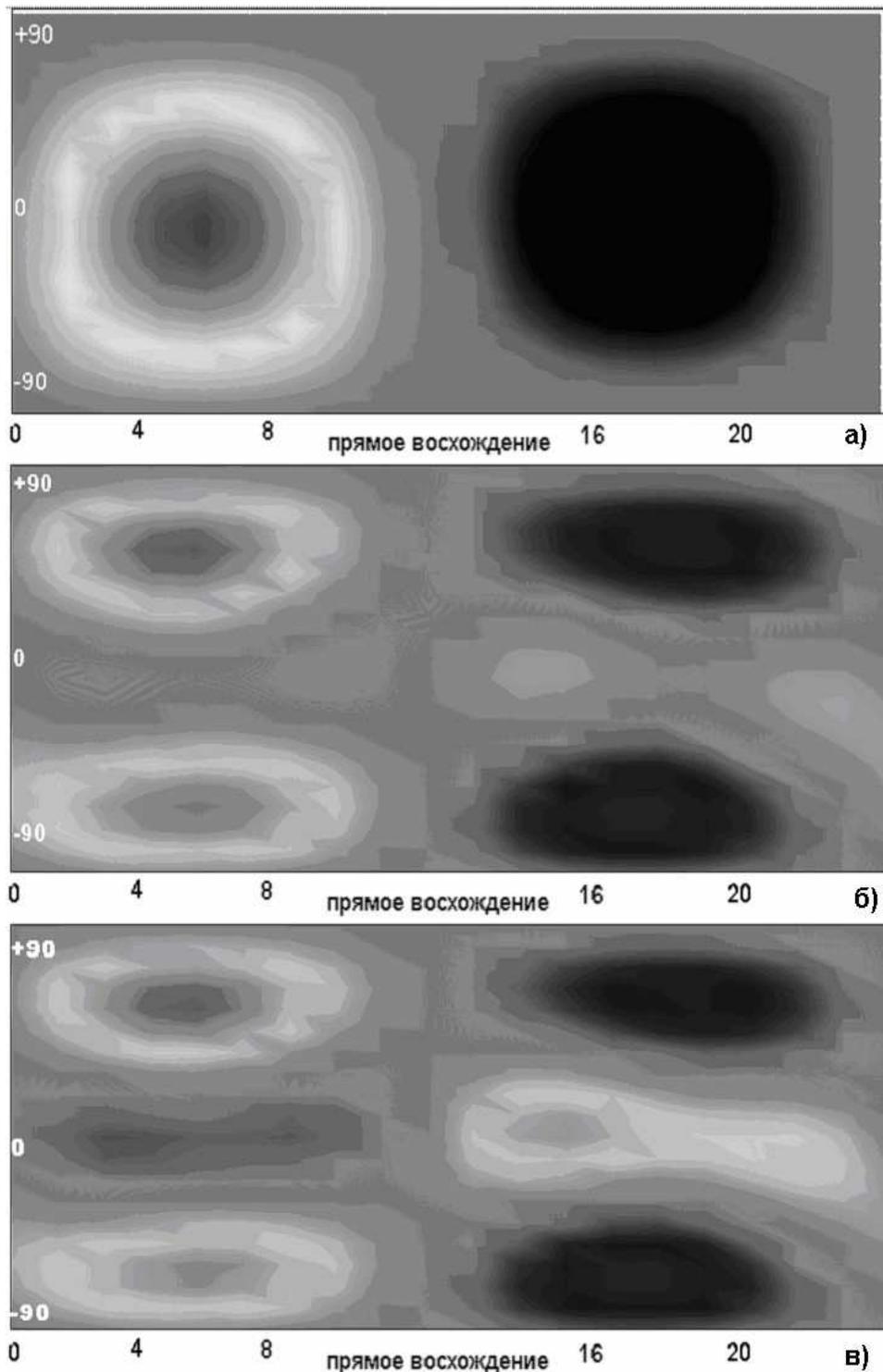


Рис. 6. Диаграммы дипольной (а), квадрупольной (б) и октупольной (в) составляющих разложения в ряд (1) распределения углового коэффициента наклона уравнения регрессии по небесной сфере

На рисунке 6 (а, б, в) представлены, диаграммы дипольной, квадрупольной и октупольной составляющей разложения (1) углового коэффициента наклона прямых регрессии, вычисляемые согласно формулам амплитуд $a_{1; m}$; $a_{2; m}$; $a_{3; m}$ (2), $b_{1; m}$; $b_{2; m}$; $b_{3; m}$ (3), а также наборов (4), (11), и (5) – (6), (12), и (7) – (9), (13) присоединенных функций.

Можно предположить, что расположение дипольной составляющей (рисунок 6(а)) разложения в существенной степени определяется влиянием проекции ребра Нашей Галактики на результаты измерений. Эта проекция хорошо различима на рисунке 3.

Квадрупольная (рисунок 6 (б)) и октупольная (рисунок 6 (в)) составляющие распределения, согласно рассмотренному методу оценивания характеризуют неоднородность распределения материи квазаров по небесной сфере с течением времени, т.е. наличие выделенных направлений в видимой части Вселенной.

5. К вопросу о статистически значимом выделенном направлении во Вселенной

Интересным также является вопрос о сравнении взаимной ориентированности вычисленных дипольной (рисунок 6 (а)), квадрупольной (рисунок 6 (б)) и октупольной (рисунок 6 (в)) составляющих с аналогичными составляющими микроволнового реликтового излучения, полученными по данным WMAP [5] (рисунок 7 (б) – (в)). В случае с реликтовым излучением оси диполя, квадруполя и октуполя оказались практически совпавшими, образовав так называемую "ось зла". При этом, дипольная составляющая излучения, вероятно, обусловлена эффектом Доплера, вызванным движением наземного наблюдателя. Происхождение же квадрупольной и октупольной компонент не вполне ясно и является предметом научной дискуссии.

Рисунок 8, взятый из работы Д. Г. Павлова [10], наглядно показывает это совпадение. На нем указаны направления концов осей диполя, квадруполя и октуполя, отложенные в галактической координатной сетке.

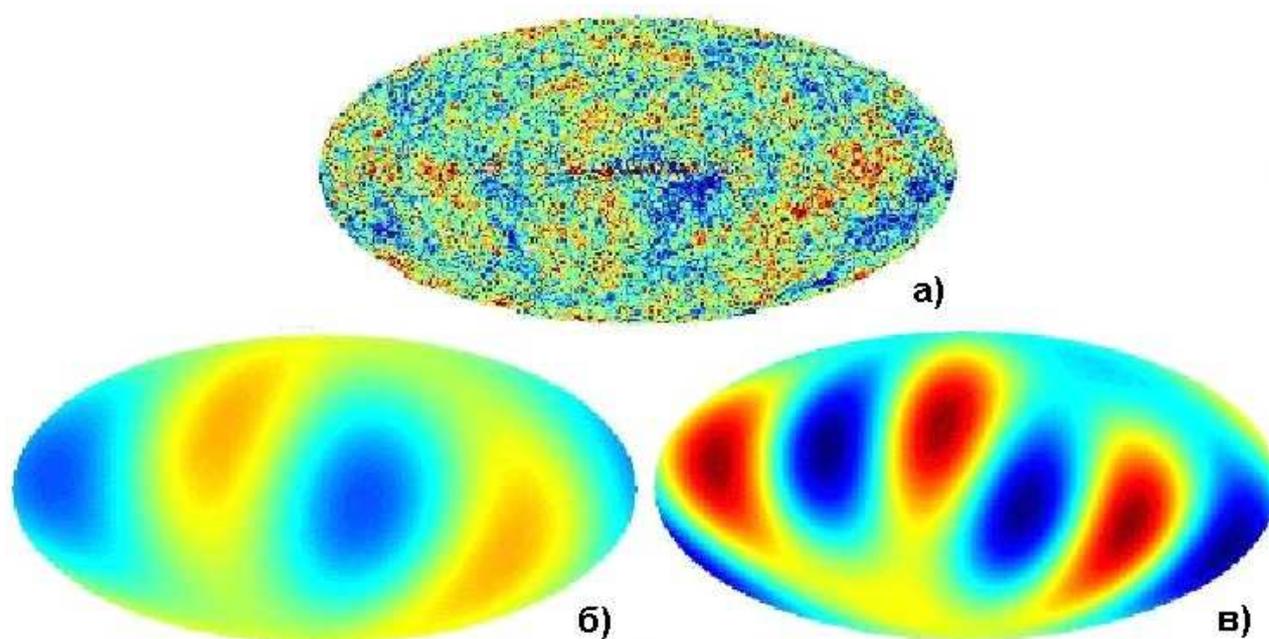


Рис. 7. Диаграммы анизотропии микроволнового реликтового излучения (а) по данным WMAP, а также его квадрупольной (б) и октупольной (в) составляющих [5]

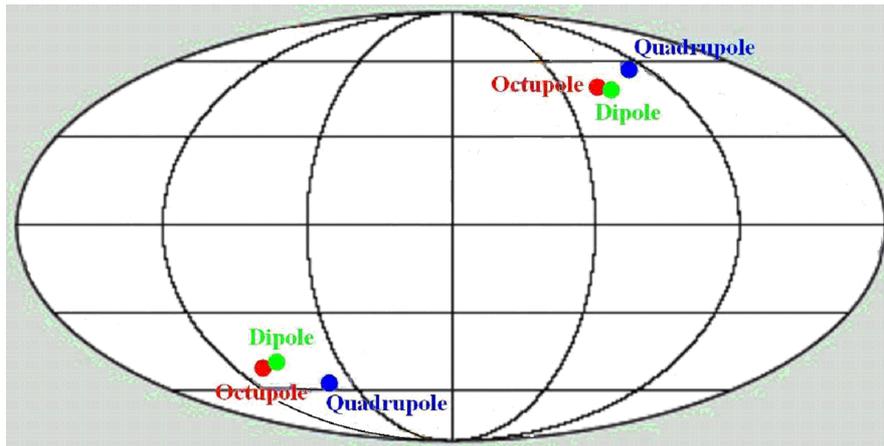


Рис. 8. Выделенное направление во Вселенной по данным работы [10]

Для сравнения на рисунке 9 изображена развертка небесной сферы, построенная в сферических координатах θ и φ , соответствующих экваториальной системе координат. На развертку нанесены координаты оцененного выше вектора дипольного момента.

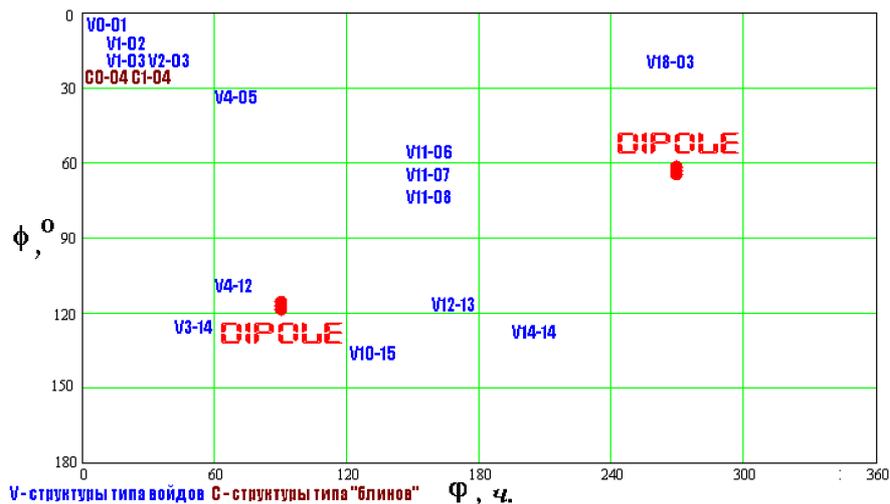


Рис. 9. Выделенное направление Вселенной и ее неоднородности на масштабах расстояний порядка десятков гигапарсек

К сожалению, видимое на этих диаграммах сходство представленных в настоящей работе результатов и данных по реликтовому излучению оказывается лишь кажущимся, поскольку в действительности диаграммы построены в различных системах координат. Эти результаты не дают оснований для их использования с целью независимого подтверждения вывода о наличии во Вселенной выделенного направления,

В случае с полученной оценкой анизотропии изменения распределения квазаров по небесной сфере соориентированность диполя, квадруполя и октуполя (характерная для реликтового излучения) отсутствует. Полученный результат свидетельствует о том, что анизотропия микроволнового реликтового фона излучения и видимого потока квазаров по небесной сфере имеют несколько различающуюся природу. Следует, однако, обратить внимание на то, что составляющие октупольного момента, как в одном, так и в другом случае имеют сильно подавленную третью гармонику по одной из координатных осей. Вследствие этого вид октупольной составляющей разложения реликтового фона может быть получен путем сжатия графика аналогичной составляющей распределения квазаров вдоль ребра Нашей Галактики, что свидетельствует о наличии некой общей закономерности формирования обеих видов анизотропии.

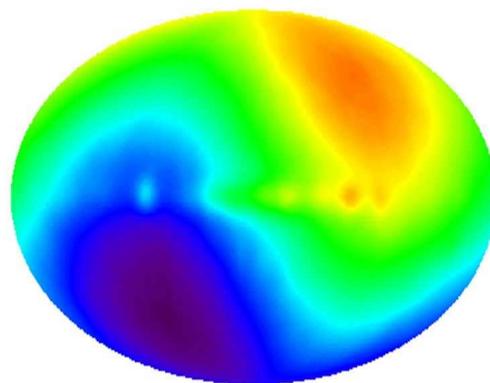


Рис. 10. Диаграмма дипольной составляющей анизотропии микроволнового реликтового излучения по данным COBE за четыре года [11]

При этом открытым остаётся вопрос о природе видимого движения квазаров по небесной сфере, в частности, вопрос о том, является ли такое движение пекулярным, носит ли оно космологическую природу, обусловлено неким эффектом геометрии пространства-времени или же оно обусловлено чисто оптическими факторами типа искривления световых лучей под действием тяготения каких-либо гравитационных линз.

6. О воспроизведении крупномасштабной структуры Вселенной на расстояниях масштаба порядка гигапарсеков и более

На рисунке 11 представлена крупномасштабная структура Вселенной по данным [8], отражающая анизотропию распределения галактик и галактических скоплений по небесной сфере. Можно предположить, что крупномасштабная структура Вселенной простирается по шкале расстояний в область красных смещений квазаров.

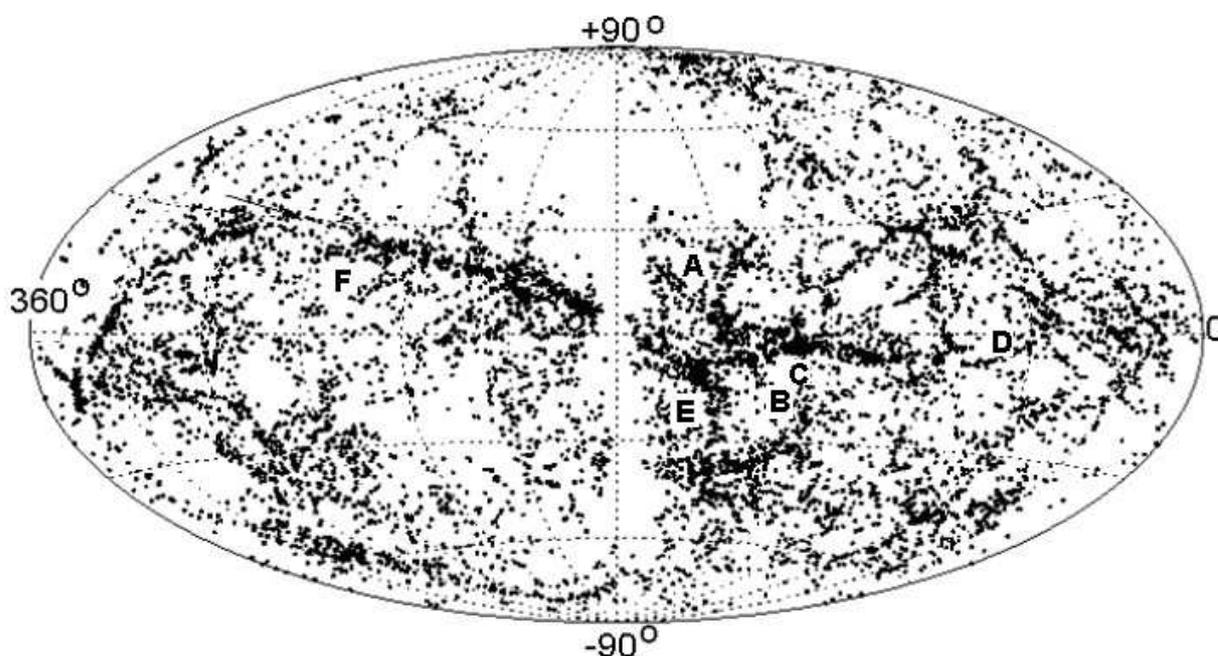


Рис. 11. Крупномасштабная структура Вселенной. По центру справа виден Великий Аттрактор (AB) – сверхскопление галактик протяжённостью в несколько десятков угловых градусов; правее, через созвездия Волосы Вероники, отходит сверхскопление Великая стена (CD); влево от центра простирается сверхскопление – стена (EF) в созвездиях Гидры – Девы – Центавра – Телескопа – Павлина – Индейца

Для проверки этого предположения среди графиков гистограмм распределения количеств квазаров по значениям красного смещения z , по различным направлениям на небесной сфере, типа рис 4 (б), были выявлены аномалии двух дополнительных типов. К первому из них относятся гистограммы, имеющие ярко выраженный максимум. Для дальнейшего анализа были использованы лишь те гистограммы, в которых максимум плотности вероятности превышал вероятность боковых минимумов, в которых он лежал, не менее чем в пять раз. На рисунке 12 (а) приведены примеры подобных гистограмм.

Ко второму типу отнесены гистограммы, имеющие ярко выраженный минимум плотности вероятности, не менее чем в пять раз меньший вероятности, соответствующей окаймляющим его краям. Примеры подобных гистограмм изображены на рисунке 12 (б).

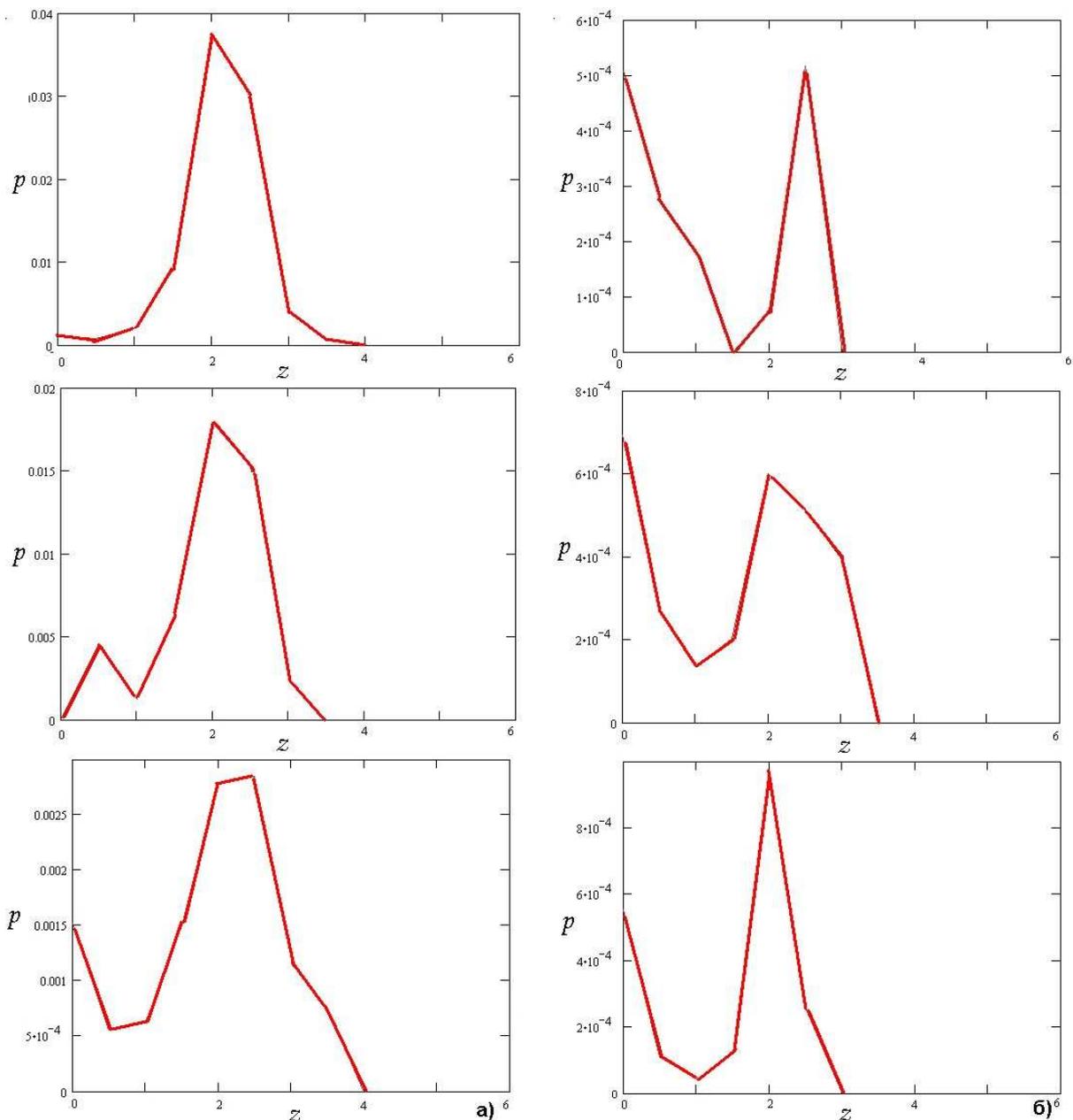


Рис. 12. Примеры гистограмм распределения квазаров по значениям красного смещения z с выбросами (а) указывающими на область скопления квазаров и впадинами (б) типа пустот

Всего обнаружено три гистограммы, соответствующие крупномасштабным скоплениям и четырнадцать, соответствующих крупномасштабным пустотам. Участки небесной сферы, соответствующие подобным аномалиям, образуют на ней протяженные

структуры пустот и скоплений квазаров, по размерам сопоставимые с размерами Великого Аттрактора (см.: рисунок 11).

Сказанное позволяет предположить, что крупномасштабная структура Вселенной простирается на масштаб расстояний, соответствующих красным смещениям квазаров и достигающих значений порядка гигапарсеков и более.

На рисунке 13 показана [9] ячеистость крупномасштабной структуры Вселенной, представленная системой филаментов и войдов. Эта ячеистость обусловлена распределением галактик и галактических скоплений по небесной сфере и обнаруживается на угловых масштабах порядка нескольких градусов. При этом большая часть материи оказывается сосредоточенной в «стенках» ячеек, составленных из отдельных галактик и их скоплений, между которыми находятся пустоты, или *войды*. Пересечения «стенок» образуют вытянутые нитевидные структуры сверхскоплений галактик, именуемые также *филаментами*.

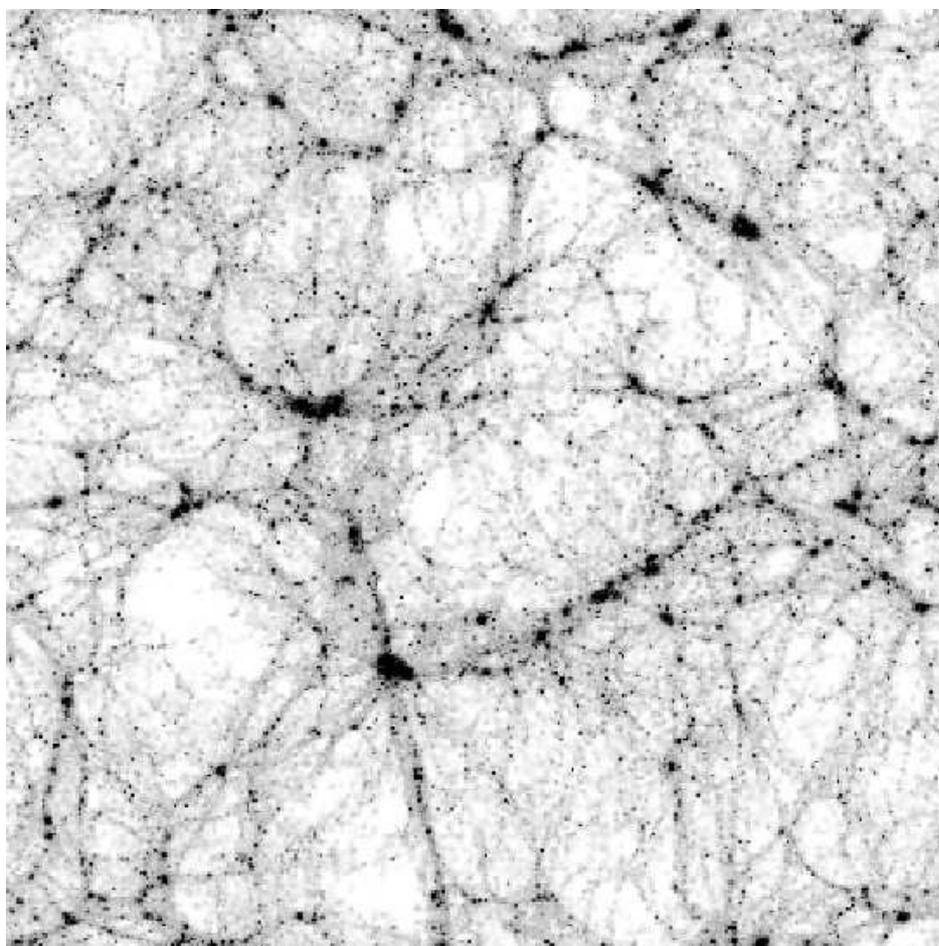


Рис. 13. Фрагмент крупномасштабная структура Вселенной в виде совокупности войдов и филаментов размерами до 2,5 угловых градусов

Аналізу были подвергнуты также фрагменты одной из областей небесной сферы с наиболее высокой плотностью размещения выявленных квазаров. На рисунке 14 (а) представлено распределение квазаров в окне выборки одной из подобных областей размерами $5 \times 1^\circ$. На диаграмме представлены квазары, относящиеся ко всем выявленным значениям красного смещения. Распределение носит практически случайный характер, о чем свидетельствует коэффициент корреляции абсцисс и ординат распределения, составляющий всего 0,07. На рисунке 14 (б) и 14 (в) представлены два распределения квазаров, относящиеся к этому же самому участку небесной сферы.

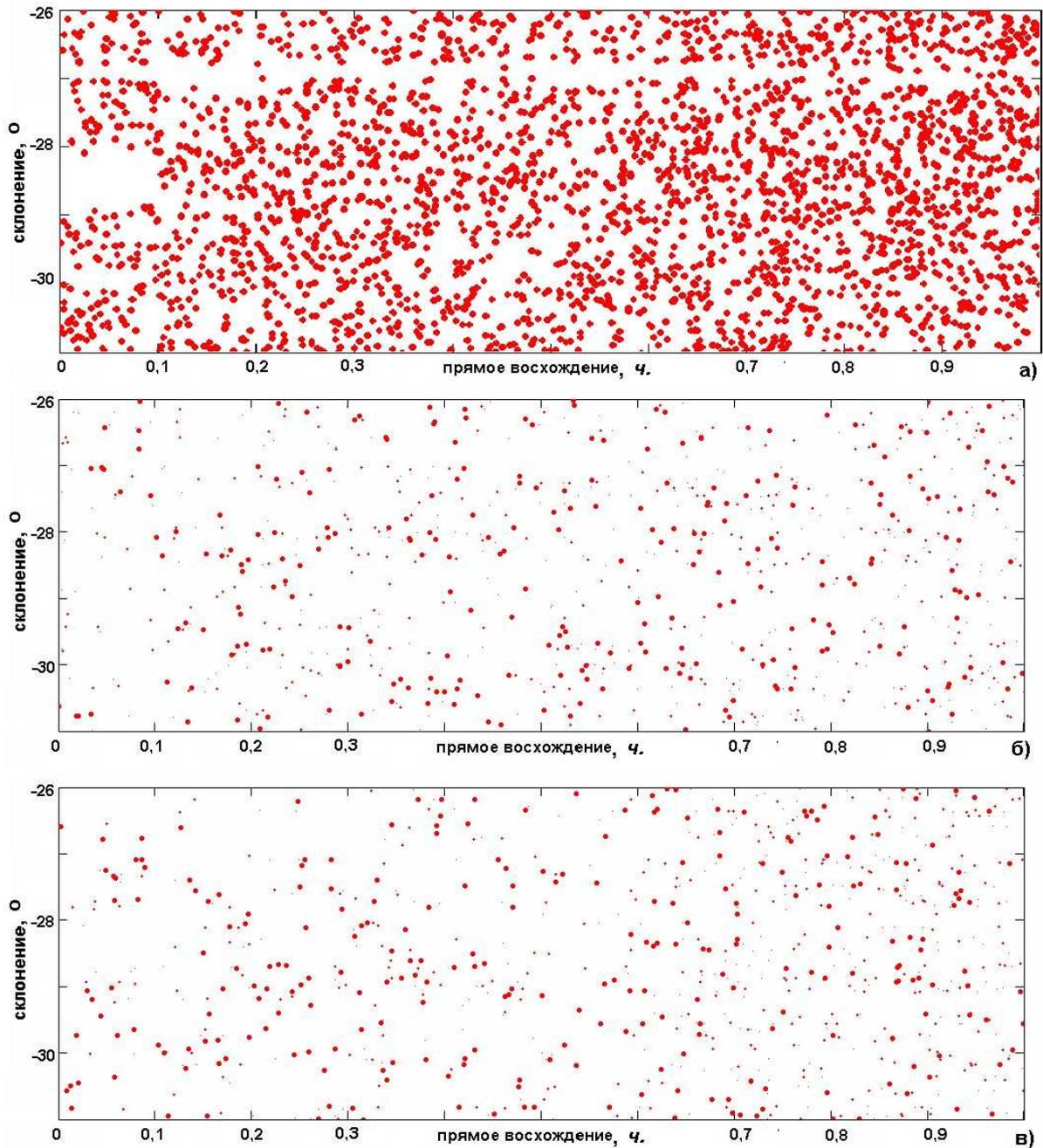


Рис. 14. Распределение квазаров по участку небесной сферы во всех наблюдавшихся диапазонах красного смещения (а), в диапазоне красного смещения $3,0 \dots 3,6$ (а) и $3,6 \dots 4,2$ (б)

На рисунке 14(б) представлены три совокупности точек, жирные, полужирные и тонкого начертания, относящиеся, соответственно, к трем диапазонам красного смещения, соответственно от 3,0 до 3,2; от 3,2 до 3,4, а также от 3,4 до 3,6. На рисунке 14(в) представлены три аналогичные совокупности точек, относящиеся к трем другим диапазонам красного смещения, соответственно, от 3,6 до 3,8; от 3,8 до 4,0, а также от 4,0 до 4,2.

Точки на диаграммах рисунков 14(б) и 14(в), в отличие от диаграммы рисунка 14(а), образуют, хотя и слабо выраженные, структуры, обладающие определенным подобием рисунку 13. Об этом свидетельствует также диаграмма рисунка 15, на котором изображено отношение коэффициента корреляции между абсциссами и ординатами диаграмм распределений квазаров по небесной сфере, относящихся к различным диапазо-

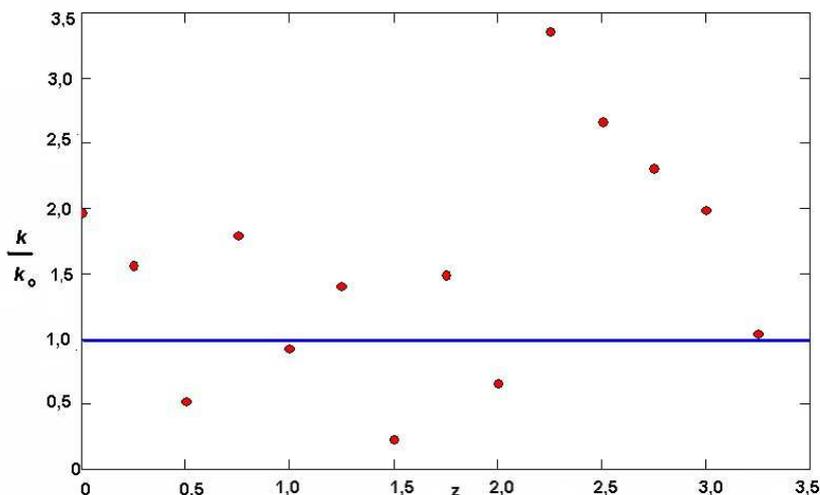


Рис. 15. Превышение коррелированности абсцисс и ординат в окнах выборки с различающимися значениями красного смещения над их коррелированностью по полной выборке красного смещения

нам значений красного смещения. При этом значения красного смещения принадлежали пятнадцати диапазонам. Переход от диапазона к диапазону соответствовал увеличению красного смещения на 0,2, а значения z для всех диапазонов лежали в пределах от 0 до 3,0, что соответствовало общему количеству точек рисунка 14 (а). В каталоге [2] содержались также данные о квазарах с красными смещениями до 6,5, однако их количество, приходящееся на анализируемое окно выборки, оказалось достаточно малым и не подвергалось статистическому анализу.

6. Основные выводы

Анализ статистики распределения квазаров, активных галактических ядер и лацертид по небесной сфере позволяет предположить, что крупномасштабная структура Вселенной распространяется на масштабы расстояний порядка гигапарсеков, причем квазары образуют скопления и пустоты протяженностью в несколько десятков градусов.

Квазары образуют также слабо выраженную ячеистую структуру в виде совокупности войдов и связывающих их филаментов с характерным масштабом расстояний в несколько градусов.

Квазары образуют на небесной сфере видимый поток от точек видимой расходимости (радиантов) к точкам видимой конвергенции (анти-радиантам), которые следует считать выделенными направлениями. Разложение плотности источников и стоков в ряд по сферическим функциям позволило установить, что, в отличие от аналогичного разложения флуктуаций микроволнового фона, оси квадруполя и октуполя мультипольного представления плотности являются несовпадающими. Однако, в обоих этих случаях третья гармоника разложения октуполя по одной из осей оказалась подавленной. При этом октупольное представление флуктуаций микроволнового фона качественно может быть получено из октупольного представления плотности источников путем простой деформации соответствующего графика к проекции Нашей Галактики. Таким образом, оба вида анизотропии обладают некоторыми общими свойствами.

Распределение таких характерных точек оказалось независимым от способа обработки выборки, что свидетельствует о статистической значимости выполненных расчетов.

Список использованных источников

1. M.-P. Veron-Cetty and P. Veron. A Catalogue of Quasars and Active Nuclei: 12-th Edition // ESO Scientific Report.-№ 19.-2006.
2. The Hipparcos and Tycho Catalogues: Astrometric and Photometric Star Catalogues derived from the ESA Hipparcos Space Astrometry Mission. A Collaboration Between the European Space Agency and the FAST, NDAC, TDAC and INCA Consortia and the Hipparcos Industrial Consortium led by Matra Marconi Space and Alenia Spazio.- European Space Agency, SP 1200.-June 1997.
3. D. S. MacMillan. Quasar Apparent Proper Motion Observed by Geodetic VLBI Networks // Directions in High Resolution Astronomy: The 10th Anniversary of the VLBA / J. D. Romney & M. J. Reid (eds.).-ASP Conference Series, 2003; arXiv:astro-ph/0309826v1 30 Sep, 2003.
4. O. Titov. The apparent proper motions of reference radio sources // Материалы конференции FERT-2007, 24 – 30 сентября 2007 г., Москва–Фрязино.- <http://hypercomplex.xpsweb.com/video/04titov-2007Fr.wmv>.
5. Д. И. Макаров. Распределение галактик в Местной Вселенной. <http://www.astronet.ru/db/msg/1169719>.
6. К. А. Постнов. Лекции по общей астрофизике для физиков: <http://www.astronet.ru/db/msg/1176797/>.
7. <http://www.astronet.ru/db/msg/1170612>.
8. http://img.encyc.yandex.net/illustrations/krugosvet/pictures/9/97/1011834-1834_304.gif.
9. http://www.en.edu.ru/shared/files/old/mlaPresent/presentations/30/7467_30.html.
10. Д. Г. Павлов. Гипотеза о финслеровой природе "Оси Зла" // Российская гравитационная конференция.-Москва, РУДН.-2007.
11. Robert Nemiroff (MTU), Jerry Bonnell (USRA). COBE Dipole: Speeding Through the Universe. <http://www.astronet.ru/db/msg/1186527/>

Search results of preferential direction and the heterogeneity of the Universe on the base of quasars distribution statistic

V. Ya. Vargashkin

Orel State Technical University, Orel, Russia
varg@physics.org

Presents the analysis of histograms of distribution of quasars in the redshift values for the statistical sampling windows, different ways oriented in directions of the celestial sphere. Detected heterogeneity of this distribution having the form of structures of filaments and voids. Global character of anisotropy of distribution of quasars on heavenly sphere is analysed.

Key words: Redshift, quasars, quasars proper motion, large-scale anisotropy of the Universe, filaments, voids, sample windows.

PACS: 98.54.-h 98.65.-r 98.80.Jk

МЕТРИКА МИНКОВСКОГО И МЕТРИКА БЕРВАЛЬДА-МООРА

О. Титов

Geoscience Australia
olegtitov903@hotmail.com

Пространство Бервальда-Моора H_4 было предложено Гарасько и Павловым [1, 2, 3] в качестве расширения пространства Минковского. В качестве основного аргумента, предусматривающего возможность такого расширения, рассматривалось представление интервалов в обеих геометриях в виде системы изотропных векторов. При этом, согласно утверждениям авторов "координаты (x_0, x_1, x_2, x_3) в "ортонормированном" базисе пространства H_4 в нерелятивистском приближении в геометрическом (метрическом) плане ведут себя также как общепринятые координаты четырехмерного пространства-времени Минковского". В данной работе показано, что данное утверждение неправильно.

Ключевые слова: пространства Минковского, пространство Бервальда-Моора.

1. Бесконечно малые величины интервалы

В изотропных координатах (x_0, x_1, x_2, x_3) бесконечно малый интервал в пространстве Минковского

$$dS^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2, \quad (1)$$

возведенный в квадрат, имеет вид

$$dS^4 = dx_0^4 + dx_1^4 + dx_2^4 + dx_3^4 - 2dx_0^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - 2dx_1^2dx_2^2 + 2dx_1^2dx_3^2 + 2dx_2^2dx_3^2. \quad (2)$$

В то же время бесконечно малый интервал в пространстве Бервальда-Моора определяется как

$$dS^4 = dx_0^4 + dx_1^4 + dx_2^4 + dx_3^4 - 2dx_0^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - 2dx_1^2dx_2^2 - 2dx_1^2dx_3^2 - 2dx_2^2dx_3^2 + 8dx_0dx_1dx_2dx_3. \quad (3)$$

Внешнее сходство записи интервалов (2) и (3) действительно наводит на мысль о том, что при определенных условиях (3) можно свести к (2). Если бы это удалось доказать, то тогда метрику Бервальда-Моора можно было рассмотреть как расширение метрики Минковского. Однако аргументация, предложенная Гарасько и Павловым [1, 2, 3] выглядит неубедительно, так как сводится к рассмотрению случая

$$dx_\alpha = \varepsilon dx_0, \quad \varepsilon \ll 1 \quad \text{для } \alpha = 1, 2, 3. \quad (4)$$

При этом утверждается, что в нерелятивистском приближении интервал (3) принимает вид (см [2], формула (116)),

$$dS = \sqrt{dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2}, \quad (5)$$

что совпадает с выражением для интервала в пространстве Минковского (1).

Однако, из общих соображений для построения необходимого доказательства выражение для интервала в пространстве Бервальда-Моора (3) должно сводиться к (2) при произвольных отношениях бесконечно малых интервалов (dx_1, dx_2, dx_3) к интервалу (dx_0) . Таким образом вопрос об интерпретации метрики Бервальда-Моора как расширения метрики Минковского остается открытым.

Запишем (1) в матричном виде

$$dS^2 = Dx^T G Dx, \quad (6)$$

где $Dx^T = (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3)$ – вектор-строка, и

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

– матрица, определяющая метрический тензор. Тогда в развернутом виде (6) записывается как

$$dS^2 = \begin{pmatrix} dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Очевидно, что в матричном виде (2) может быть записано как

$$dS^4 = (Dx^T G Dx)^2 = \begin{pmatrix} dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Интервал, заданный метрикой Бервальда-Моора (3), не может быть сведен к квадратичной метрике вида (1) из-за отсутствия метрического тензора в виде (7). Однако выражение для интервала (3) представимо в матричном виде, аналогичном (9)

$$dS^4 = (Dx^T H Dx)(Dx^T H' Dx), \quad (10)$$

где матрицы H, H' , в отличие от (7), уже не являются диагональными

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

В развернутом виде (10)

$$dS^4 = \begin{pmatrix} dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

По сравнению с формулой (9), в которой матрица (7) встречается дважды, в (12) требуются две различные недиагональные матрицы (11).

При сравнении (9) и (12) обращает внимание, что их различие определяется несколькими элементами входящих в формулы матриц. Для обеспечения предельного перехода Павлов и Гарасько рассматривают условие (4). Однако, это условие по отношению к дифференциалам, (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3) , входящим в выражения для интервалов (2) и (3) некорректно. Почему-то авторы полагают, что условие (4) аналогично нерелятивистскому приближению, когда в формулах присутствуют множители вида $\frac{v}{c}$ (v – скорость объекта, c – скорость света). Такая аналогия была бы уместна, если бы множители вида $\frac{v}{c}$ входили бы в элементы матриц H, H' (11), чего, однако, не происходит. Поэтому авторам следует привести более подробное доказательство корректности условия (4) применительно к интервалам (9) и (12) при условии, что скорость света в обоих выражениях является конечной.

Вообще говоря, если скорость света полагать равной бесконечности, то оба интервала (9) и (12) сводятся к виду

$$dS = dx_0 \quad (13)$$

Это известный переход к так называемый метрике Галилея [4], которую можно вывести из метрики Минковского, устремив скорость света к бесконечности. В таком виде условие (4) приобретает определенный смысл. Однако в результате данного предельного перехода оба выражения (9) и (12) сводятся к интервалу в пространстве Галилея (13). Но в нерелятивистском случае этот переход по-прежнему остается недоказанным.

2. Конечные интервалы S

Интересно, что в работе [1] Павлов и Гарасько используют схожую схему доказательства, но уже для конечной величины S . В их представлении четвертая степень интервала пространства Минковского записывается как

$$S^4 = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_0^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + 2x_2^2x_3^2, \quad (14)$$

а четвертая степень интервала пространства Бервальда-Моора как

$$S^4 = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_0^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2 + 8x_0x_1x_2x_3. \quad (15)$$

В работе [1] на стр. 6 авторы вводят понятие скорости как

$$v_\alpha = \frac{x_\alpha}{x_0}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (16)$$

После чего утверждается, что в случае малых скоростей $|v_\alpha| \ll 1$, выражения (14) и (15) равны с точностью до бесконечно малых $|v_\alpha|$ второго порядка.

В векторно-матричной форме выражения (14) и (15) примут вид

$$S^4 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$S^4 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Здесь следует отметить, что в отличие от выражения для бесконечно малых интервалов, в случае конечных значений x_α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) выражение (16) представляет просто отношение двух конечных величин, то есть не является выражением для скорости (поэтому оно само по себе уже неправильно). В данном случае отсутствие бесконечно малых величин, хотя бы в виде дифференциалов, делает невозможным обоснование предельного перехода по малым скоростям, которое было возможно ранее, если бы авторам удалось доказать обоснованность применения условия (4). Это еще раз показывает, что для обоснования предельного перехода "в нерелятивистском приближении" от (17) к (18) эти малые скорости должны появиться среди элементов матриц H, H' .

Подытоживая сказанное, все возражения вкратце формулируются следующим образом:

1. Предельный переход от интервала в пространстве Бервальда-Моора (3) к интервалу в пространстве Минковского (2) не определен математически корректным способом.
2. Вероятно, оба выражения (2) и (3) можно свести к интервалу в пространстве Галилея, при скорости света, стремящейся к бесконечности, но этот переход также не определен авторами.
3. При переходе к конечным интервалам выражение (16) не является корректным определением скорости.
4. Отсутствие бесконечно малых величин в формулах (14) и (15) не позволяет в принципе осуществить предельный переход "в нерелятивистском приближении" от (15) к (14).
5. Формула (44) в работе [3] неправильна, равно как и формула (116) в работе [2].

Поэтому заключение авторов в статьях [2,3], что координаты (x_0, x_1, x_2, x_3) в "орто-нормированном" базисе пространства H_4 в нерелятивистском приближении в геометрическом (метрическом) плане ведут себя также как общепринятые координаты четырехмерного пространства-времени Минковского, к сожалению, оказывается ошибочным.

Литература

- [1] Павлов Д. Г., Гарасько Г. И., Понятия расстояния и модуля скорости в линейных Финслеровых пространствах. Гиперкомплексные числа в физике и геометрии, т. **1 (3)**, 2005. <http://hypercomplex.xpsweb.com/articles/208/ru/pdf/03-01.pdf>
- [2] Гарасько Г.И, Павлов Д.Г. Геометрия невырожденных поличисел Гиперкомплексные числа в физике и геометрии, т. **7 (1)**, 2007. <http://hypercomplex.xpsweb.com/articles/357/ru/pdf/07-01.pdf>
- [3] Павлов Д. Г., Гарасько Г. И., Об аналоге решения Фридмана в Финслеровом пространстве-времени с анизотропной метрикой Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в физике и геометрии, т. **7 (4)**, 2007. <http://hypercomplex.xpsweb.com/articles/360/ru/pdf/07-04.pdf>
- [4] И. М. Яглом, Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия - Москва: Наука, 1969.

Minkowski metrics and Berwald-Moor metrics

O. Titov

Geoscience, Australia
olegtitov903@hotmail.com

Berwald-Moor space H_4 was proposed by Garas'ko and Pavlov as expansion of Minkowski space. As basic argument allowing such expansion in both geometries was considered presentation of interval like system of isotropic vectors. At the same time, according to statement of authors 'coordinates (x_0, x_1, x_2, x_3) in orthonormal basis of H_4 space in non-relativistic approach in geometrical (metrical) sense behave oneself as conventional coordinates of four-dimensional Minkowski space-time'. Present work shows that such statement is incorrect.

Key words: Berwald-Moor space, Minkowski space.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных алгебр в физике, е) Экспериментальные исследования возможной анизотропии пространства-времени и иных проявлений финслеровой геометрии.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.
2. Объем статьи не должен превышать 1 печ. листа (24 усл. маш. стр.)
3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате \LaTeX (версия $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$, для набора формул используется $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$) и файл статьи в формате PostScript или PDF.
4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).
5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок) и ключевые слова. Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.
6. Название статьи, аннотация, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.
7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.
8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи. Публикация бесплатна для всех авторов.

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

Научный журнал. Основан в 2003 г.

№ 1 (11), том 6, 2009

Главный редактор Павлов Д. Г.

Зам. главного редактора Панчелюга В. А.

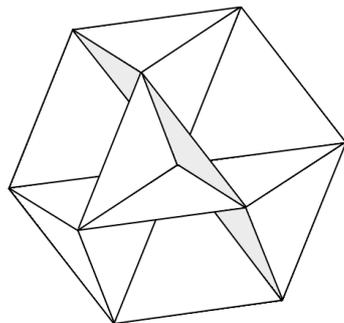
Ответственный секретарь Элиович А. А.

www.polynumbers.ru
hypercomplex@mail.ru

Свидетельство о регистрации
ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.

ISSN 1814-3946

© "МОЗЭТ", Российское Гиперкомплексное Общество



Типографские данные