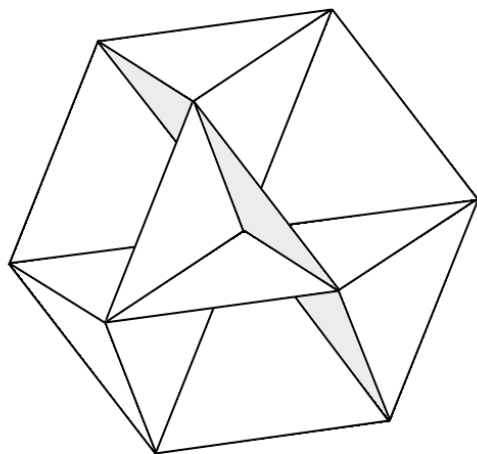


ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

№ 2 (10), том 5 (2008)

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 2003 г.



www.polynumbers.ru

hypercomplex@mail.ru

Оглавление

Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев Конформные калибровки геометрии Бервальда-Моора и индуцированные ими нелинейные симметрии.....	3
Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев Римановы метрики, соприкасающиеся с 3-мерной финслеровой метрикой Бервальда-Моора.....	15
Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев Аддитивные углы в пространстве $\mathcal{H}_3$	26
N. Brinzei, S. Siparov The equations of the electromagnetism in some special anisotropic spaces.....	45
N. Brinzei, S. Siparov On the possibility of the OMPR effect in spaces with Finsler geometry. Part II.....	57
С. В. Сипаров К вопросу об анизотропной геометродинамике.....	65
Ю. С. Владимиров Финслерова геометрия в реляционном подходе к физике.....	76
Ю. С. Владимиров, А. В. Соловьев Финслеровы n -спиноры с комплексными компонентами.....	90
V. Balan Spectral properties and applications of the numerical multilinear algebra of m -root structures.....	101
М. Л. Фильченков, Ю. П. Лаптев, Р. Х. Сайбаталов, В. В. Плотников К вопросу об анизотропных космологических моделях.....	108
Р. Г. Зарипов Об одновременности и пространственной изотропии в Финслеровом пространстве-времени.....	114
Р. Г. Зарипов Модель физического поля в собственном трехмерном пространстве для геометрии событий Бервальда-Моора.....	124
А. А. Элиович О полинормах на неассоциативных алгебрах и их возможном применении в физике.....	131
Н. К. Смоленцев О почти комплексных структурах Кэли на шестимерных произведениях сфер.....	160
А. М. Гальмак Многочестные операции на декартовых степенях.....	173
А. Н. Морозов Влияние пространственной анизотропии Вселенной на флуктуации подвижности ионов.....	193
Информация для авторов.....	201

КОНФОРМНЫЕ КАЛИБРОВКИ ГЕОМЕТРИИ БЕРВАЛЬДА-МООРА И ИНДУЦИРОВАННЫЕ ИМИ НЕЛИНЕЙНЫЕ СИММЕТРИИ

Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев

*Институт гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Москва,
РНОЦ "Логос", Ярославль
logos-distant@mail.ru*

Обсуждаются инвариантные геометрические структуры финслерова пространства Бервальда-Моора $\mathcal{H}_4$. Установлен факт нетривиального "взаимодействия" конформных симметрий и изометрий $\mathcal{H}_4$, позволяющего реализовать различные нелинейные представления группы изометрий и конформных симметрий геометрии Бервальда-Моора в виде изометрий некоторых двухточечных метрик. Построены общие выражения таких нелинейных представлений и общий вид двухточечных функциональных инвариантов.

Ключевые слова: инвариантные структуры, пространства Бервальда-Моора, конформные симметрии, группы изометрий, Финслерова геометрия.

1 Введение

Геометрическое описание законов природы почти неизбежно приводит к вопросу о выборе конформной калибровки физической метрики, в которой все геометрические величины соответствовали бы наблюдаемым. В скалярно-тензорных теориях типа Бранса-Дикке произвол в выборе конформной калибровки привел к плодотворной дискуссии о физическом смысле конформных преобразований, о системах единиц и предпочтительных с той или другой точки зрения калибровках [1, 2]. В теориях типа 5-мерной Калуцы-Клейна было обнаружено, что различный выбор конформного фактора, связанного с геометрическим 4-мерным скалярным полем $\varphi = \sqrt{-g_{55}}$, соответствует физически различным ситуациям в 4-мерных сечениях 5-мерного многообразия [3]. Аппарат конформных преобразований позволяет связывать между собой на первый взгляд совершенно различные геометрические модели: с нелинейным скалярным полем, с высшими по кривизне неэйнштейновскими теориями гравитации, с неметричностью вейлевского типа и т. д. [4]. При этом решения одной модели можно "превращать" в решения другой модели простым конформным преобразованием без решения уравнений поля. В ряде работ по общим вопросам теории относительности конформные преобразования использовались для компактификации и построения конформных диаграмм многообразий [5]. Все эти факты свидетельствуют о принципиальной важности изучения конформно-соответствующих физико-геометрических систем в рамках любой геометрической теории.

Настоящая статья посвящена исследованию свойств конформной симметрии однородной финслеровой метрики Бервальда-Моора 4-ой степени. Эта метрика возникает как естественное обобщение модуля комплексного числа в рамках ассоциативно-коммутативной алгебры $\mathcal{H}_4$ [4, 7]. Как известно, на всяком линейном пространстве над полем вещественных или комплексных чисел можно ввести структуру гладкого многообразия $\mathcal{H}_4$. Для удобства изучения непрерывных симметрий геометрии Бервальда-Моора мы в настоящей статье отвлекаемся от ее алгебраической природы и рассматриваем ее с общих позиций теории гладких многообразий. При этом, разумеется, мы имеем дело с многообразием

очень специального вида, на котором глобально задано ковариантное тензорное поле валентности 4, имеющее в специальных (т. н. *изотропных*) координатах вид:

$$G = \hat{S}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^4), \quad (1)$$

где $\hat{S}$ — оператор симметризации (без числового множителя). Для избежания излишнего усложнения, связанного с глобальными топологическими свойствами многообразия, не имеющими прямого отношения к основной задаче настоящей статьи, все рассуждения будут проводиться для $\mathcal{H}_4 \sim R^4$. При этом большая часть результатов будет справедлива (локально) и для многообразий с глобальной топологией, отличной от R^4 .

В соответствие с вышесказанным, в тех местах, где речь идет об аффинных конструкциях и конструкциях конечной геометрии мы будем использовать термин "пространство Бервальда-Моора", а в местах, где речь идет о дифференциально-геометрических свойствах метрики (2), мы используем термин "многообразие Бервальда-Моора".

2 Сигнатурное разложение пространства Бервальда-Моора

Ограничение метрики (2) на любую из координатных плоскостей π_i ($i = 1, 2, 3, 4$), на которой $x^i = \text{const}$, очевидно приводит к равенству: $G|_{\pi_i} = 0$. Это означает, что семейство координатных плоскостей представляет собой семейство *нулевых* поверхностей геометрии Бервальда-Моора, которые мы будем называть $\mathcal{C}$ -поверхностями. Через каждую точку многообразия (в силу однородности в качестве типичной можно рассматривать, например, точку O с координатами $(0; 0; 0; 0)$) проходит ровно 4 $\mathcal{C}$ -поверхности, пересекающихся в этой точке и образующих *нулевой 4-листник* $\mathcal{C}_O$ с вершиной в этой точке. Рассмотрим вектор X в точке O с координатами $\{X^1, X^2, X^3, X^4\}$. Если одну из его координат (пусть это будет для определенности координата X^1) положить равной нулю, вектор X будет $\mathcal{C}$ -вектором, т. е. вектором с нулевой финслеровой нормой, ввиду его принадлежности в этом случае соответствующей $\mathcal{C}$ -плоскости. Пусть теперь все остальные координаты не равны нулю. Рассмотрим пару векторов $X^\pm$ с координатами $\{\pm\epsilon, X^2, X^3, X^4\}$ соответственно, где ϵ — положительный вещественный параметр. Эти векторы, очевидно, уже не являются $\mathcal{C}$ -векторами и их финслеровы скалярные 4-кубы по соображениям непрерывности обязательно имеют противоположные знаки:

$$G(X^+, X^+, X^+, X^+) \cdot G(X^-, X^-, X^-, X^-) < 0.$$

Таким образом, все пространство¹ $\mathcal{H}_4$ разбивается на компоненты с положительными и отрицательными значениями финслеровой четвертой степени радиус-векторов. Эти компоненты можно классифицировать по знакам изотропных координат: например, $\mathcal{H}_4^{(+,+,+,+)}$ — множество точек с радиус-векторами, все координаты которых положительны, $\mathcal{H}_4^{(-,+,+,+)}$ — множество точек с радиус-векторами, все первые координаты которых отрицательны, а остальные положительны и т. д. Всего будет $2^4 = 16$ таких компонент, чередующихся около начала в "4-мерном шахматном" порядке. Отметим, что такая классификация точек пространства Бервальда-Моора инвариантна, то есть не зависит от выбора системы координат.

Имеет место следующее сигнатурное разложение многообразия $\mathcal{H}_4$ около точки O :

$$\mathcal{H}_4 = \mathcal{C}_O \bigcup_{\sigma} \mathcal{H}_4^{\sigma}, \quad (2)$$

¹ Напомним, что в R^4 (и вообще в любом линейном пространстве) касательное к любой его точке пространство можно отождествить с самим R^4 (самим линейным пространством) посредством стандартной конструкции радиус-вектора.

где индекс σ обозначает двоичный 4-х разрядный код соответствующей компоненты. Для каждого кода σ определим сигнатуру этого кода $|\sigma|$ как сумму $+1$ и -1 , соответствующих знаку каждого разряда, выполненную по всем разрядам кода. Например $|(+, +, +, +)| = 4$, $|(+, -, -, +)| = 0$ и т. д. С помощью сигнатуры кода можно ввести более "грубое" разложение многообразия $\mathcal{H}_4$, аналогичное причинному разложению пространства Минковского. Именно, на множестве сигнатурных компонент $\mathcal{H}_4^\sigma$ введем эквивалентность $\sim$ по правилу: $\mathcal{H}_4^{\sigma_1} \sim \mathcal{H}_4^{\sigma_2}$, если $|\sigma_1| = |\sigma_2| \bmod 4$. Нетрудно убедиться, что введенная таким образом эквивалентность отождествляет те сигнатурные компоненты, у которых коды отличаются в четном числе разрядов. Переходя к классам эквивалентных компонент — их будет всего два: $\mathcal{H}_4^+$ и $\mathcal{H}_4^-$ — получаем разложение:

$$\mathcal{H}_4 = \mathcal{C}_O \bigcup \mathcal{H}_4^+ \bigcup \mathcal{H}_4^-, \quad (3)$$

аналогичное разложению пространства Минковского на световой конус, его внутренность и внешность. При этом точки компоненты $\mathcal{H}_4^+$ имеют положительные скалярные 4-кубы (финслеров аналог причинно-связанной с точкой O области пространства-времени Минковского), а точки компоненты $\mathcal{H}_4^-$ — отрицательные (финслеров аналог причинно-несвязанной с точкой O области пространства-времени Минковского). Отметим, что разложение (2), специфическое для метрики Бервальда-Моора, типично отражает более тонкий характер классификации направлений в пространстве финслеровой геометрии, чем традиционной квадратичной. Обсуждение некоторых физических аспектов разложений (2) и (3) было дано в работах [8, 9].

Рассмотрим уравнение финслеровой сферы в пространстве Бервальда-Моора. Ввиду однородности и изотропии достаточно ограничиться случаем единичной сферы с вещественным радиусом:

$$G(X, X, X, X) = 16X^1X^2X^3X^4 = 1. \quad (4)$$

Это — некомпактное несвязное подмногообразие многообразия $\mathcal{H}_4$, компоненты которого симметрично располагаются в компонентах $\mathcal{H}_4$ из класса $\mathcal{H}_4^+$ — всего 8 несвязных компонент. Конструкция финслеровой сферы может быть использована для чисто геометрического определения понятия 3-мерного расстояния в пространстве с метрикой Бервальда-Моора [10].

При общем невырожденном линейном преобразовании изотропных координат вся описанная выше конструкция испытывает аффинную деформацию, при которой, вообще говоря, нарушается координатная симметрия между отдельными компонентами $\mathcal{H}_4^\sigma$ и симметрия компонент сферы. По этой причине изотропные координаты, в которых метрика Бервальда-Моора имеет вид (2), в определенном смысле выделены, поскольку в максимальной степени отражают ее дискретную симметрию (относительно перестановок и инверсий координат).

3 Конформные симметрии метрики Бервальда-Моора

Перейдем к исследованию непрерывных симметрий метрики Бервальда-Моора. Для этого, в соответствии с общими принципами дифференциально-геометрического подхода к непрерывным симметриям геометрических объектов, определенных на гладком многообразии [11], запишем конформные уравнения Киллинга для метрики G :

$$L_Y G = \varphi G, \quad (5)$$

где φ — некоторое скалярное поле, подлежащее определению, L_Y — оператор производной Ли вдоль векторного поля Y . При этом поле Y , удовлетворяющее уравнениям (5), выступает как поле скорости некоторой однопараметрической подгруппы группы конформных

симметрий метрики G . При $\varphi = 0$ мы имеем дело группой изометрий этой метрики. Учтя, что метрика G является ковариантным симметричным тензором валентности 4 и пользуясь выражением для производной Ли ковариантного тензора в координатах:

$$L_Y(T)_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = Y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} T_{\alpha_1 \dots \alpha_n} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y^\beta}{\partial x^{\alpha_i}} T_{\alpha_1 \dots \beta \dots \alpha_n},$$

получим следующую систему уравнений на поля Y и φ :

$$\frac{\partial Y^1}{\partial x^1} + \frac{\partial Y^2}{\partial x^2} + \frac{\partial Y^3}{\partial x^3} + \frac{\partial Y^4}{\partial x^4} = \varphi; \quad \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} = 0 \quad \text{при } i \neq j. \quad (6)$$

В силу недиагональной части системы уравнений полагаем $Y^i = Y^i(x^i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), так что оставшееся диагональное уравнение по-существу определяет функцию φ при произвольно заданных $Y^i(x^i)$. Для прояснения геометрического смысла найденных полей, составим дифференциальные уравнения для потоков однопараметрических подгрупп:

$$\frac{dx^i}{dt} = Y^i(x^i) \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (7)$$

Ее решение:

$$t = F^i(x^i) \equiv \int_{x_0^i}^{x^i} \frac{dx^i}{Y^i(x^i)} \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (8)$$

неявно определяет гладкое преобразование многообразия $\mathcal{H}_4$ — поток специального вида на этом многообразии:

$$x^i = f^i(t, x_0^i), \quad (9)$$

с начальными условиями $f^i(0, x_0^i) = x_0^i$, который оставляет метрику Бервальда-Моора конформно-инвариантной. Здесь f^i — это функции, обратные к F^i в (13). В силу произвольности компонент Y^i эти функции можно также рассматривать как произвольные (гладкие).

Конформная инвариантность метрики Бервальда-Моора относительно этих (и только этих!) преобразований очевидна и без вычислений по следующим соображениям. Конформная инвариантность метрики обеспечивается в точности теми преобразованиями многообразия, которые оставляют инвариантным множество нулевых 4-листников. Как мы видели выше, уравнения нулевого 4-листника в изотропных координатах имеет вид: $x^i = \text{const}$. Общие преобразования вида (9) сдвигают точки координатной плоскости $x^i = \text{const}$ в точки $x^i = \text{const}'$, так что нулевые направления переходят в нулевые направления. Явная подстановка преобразований вида (9) показывает, что метрика Бервальда-Моора умножается при такой подстановке на общий конформный множитель, как и должно быть для преобразований конформной симметрии. Отметим, что полученная группа конформных симметрий является абелевой и бесконечномерной, т. к. зависит от набора 4-произвольных функций.

Для выделения из группы конформных симметрий группы изометрий метрики Бервальда-Моора, положим в уравнении (4) $\varphi = 0$. В этом случае общее решение оставшегося диагонального уравнения имеет вид:

$$Y^i(x^i) = A^i + B^i x^i, \quad \sum_{i=1}^4 B^i = 0, \quad (10)$$

где A^i и B^i — константы интегрирования. Как видим, группа изометрий метрики Бервальда-Моора является 7-параметрической (неабелевой!). Полагая поочередно все константы кроме одной из A^i равными нулю, получим множество постоянных полей вида

$Y^i = A^i = \text{const}$, которым, как обычно, соответствуют трансляции многообразия $\mathcal{H}_4$ на постоянные векторы смещения. Факт изометричности всех таких преобразований очевиден из факта однородности метрики Бервальда-Моора в изотропных координатах. Интегрируя уравнения потока для векторного поля Y из (10) при $A^i = 0$, получим следующий явный вид другой подгруппы изометрий:

$$x^i(t) = x_0^i e^{B^i t}, \quad \sum_{i=1}^4 B^i = 0. \quad (11)$$

В совокупности эти преобразования представляют собой унимодулярно согласованные дилатации координатных осей. Физическая интерпретация этих преобразований исследовалась в работе [10].

4 Экстремали метрики Бервальда-Моора

Рассмотрим свойства экстремальных кривых метрики Бервальда-Моора. Варьируя функционал финслеровой длины:

$$S[x(t)] = \int_0^t L dt \equiv \int_0^t (G(\dot{x}, \dot{x}, \dot{x}, \dot{x}))^{1/4} dt$$

посредством цепочки стандартных вычислений с учетом исчезновения вариаций на концах, приходим к уравнениям сохранения финслерова 4-импульса:

$$p_i = C_i = \text{const}, \quad (12)$$

где

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{1}{4} \frac{G_{iklm} \dot{x}^k \dot{x}^l \dot{x}^m}{(G(\dot{x}, \dot{x}, \dot{x}, \dot{x}))^{3/4}}. \quad (13)$$

С учетом конкретного вида (2) метрики Бервальда-Моора, уравнения экстремалей (12) принимают вид:

$$C_1 = \frac{3}{2} \frac{\dot{x}^2 \dot{x}^3 \dot{x}^4}{G(\dot{x}, \dot{x}, \dot{x}, \dot{x})^{3/4}}; \quad C_2 = \frac{3}{2} \frac{\dot{x}^1 \dot{x}^3 \dot{x}^4}{G(\dot{x}, \dot{x}, \dot{x}, \dot{x})^{3/4}}; \quad C_3 = \frac{3}{2} \frac{\dot{x}^1 \dot{x}^2 \dot{x}^4}{G(\dot{x}, \dot{x}, \dot{x}, \dot{x})^{3/4}}; \quad C_4 = \frac{3}{2} \frac{\dot{x}^1 \dot{x}^2 \dot{x}^3}{G(\dot{x}, \dot{x}, \dot{x}, \dot{x})^{3/4}}.$$

Из этой системы следует, что для геодезических, не являющихся $\mathcal{C}$ -кривыми², все C_i отличны от нуля. Домножая каждое уравнение, содержащее константу C_i , на соответствующее $\dot{x}^i$ приходим к системе равенств:

$$C_1 \dot{x}^1 = C_2 \dot{x}^2 = C_3 \dot{x}^3 = C_4 \dot{x}^4.$$

Отсюда вытекает пропорциональность всех компонент скоростей друг другу. Полагая $\dot{x}^4 = \xi(t) \neq 0$, находим 4-вектор скорости экстремали:

$$\dot{x} = \xi(t)(C_4/C_1; C_4/C_2; C_4/C_3; 1).$$

На самом деле не все постоянные и отличные от нуля компоненты импульсов C_i независимы. Чтобы получить связь между ними, домножим уравнение (12) на компоненту скорости $\dot{x}^i$ и просуммируем по всем i . С учетом вида 4-импульса (13) и вида метрики (2), приходим к условию связи:

$$16C_1 C_2 C_3 C_4 = 1, \quad (14)$$

² т. е. такими кривыми, у которых касательный вектор в каждой точке кривой является $\mathcal{C}$ -вектором.

которое в соответствии с формулой (4) в точности означает принадлежность компонент финслерова 4-импульса 3-мерной единичной финслеровой сфере. Это соотношение является аналогом соотношения релятивистской связи энергии и импульса в СТО.

Если ввести теперь новый параметр времени по формуле: $\tau = C_4^{-1} \int \xi(t) dt$, то интегрирование компонент скорости по времени приводит к следующему параметрическому представлению экстремальной кривой:

$$x^1(\tau) = C_1^{-1}\tau + x_0^1; \quad x^2(\tau) = C_2^{-1}\tau + x_0^2; \quad x^3(\tau) = C_3^{-1}\tau + x_0^3; \quad x^4(\tau) = C_4^{-1}\tau + x_0^4 \quad (15)$$

с условием связи (14). В такой параметризации очевидно, что экстремали пространства Бервальда-Моора — прямые. Этот факт, на самом деле, не зависит от выбора параметризации. Отметим, что факт прямолинейности экстремальных кривых в силу аналогичных выкладок без труда распространяется на пространства Бервальда-Моора высших размерностей, метрика которых в многомерных изотропных координатах задается формулой:

$$G = \hat{S}(dx^1 \otimes \dots \otimes dx^n), \quad (16)$$

где $n = \dim \mathcal{H}_4$.

Семейство экстремалей многообразия $\mathcal{M}$ будем далее обозначать $\text{Extr}(\mathcal{M})$. Например семейство прямых (15) с условием (14) — это $\text{Extr}(\mathcal{H}_4)$.

5 Конформная калибровка метрики Бервальда-Моора и нелинейные группы симметрий

С точки зрения общей теории многообразий действие конформной группы на многообразии Бервальда-Моора, сводящееся к диффеоморфизмам очень специального вида (9), представляет собой обычное изменение системы "координатных меток" на осях изотропной системы координат, которое приводит в общем случае к "нелинейному закону арифметизации" каждого из изотропных направлений. Однако одновременное рассмотрение группы изометрий метрики Бервальда-Моора и конформной группы приводит к их своеобразному "взаимодействию", которое позволяет реализовать группу изометрий метрики Бервальда-Моора как нелинейную группу симметрии 4-мерных геометрий с квадратичными интервалами (например, интервалом пространства Минковского), интервалами произвольной степени однородности или ряда других метрик общего (нелинейного) вида.

Для общей формулировки рецепта построения таких нелинейных представлений введем некоторые полезные для дальнейшего обозначения, определения и понятия. Группы конформной симметрии и изометрии метрики Бервальда-Моора будем в дальнейшем обозначать $\mathcal{CH}_4$ и $\mathcal{IH}_4$ соответственно. Согласно формулам³ (9) группа конформных симметрий имеет структуру прямого произведения четырех множеств вещественных дифференцируемых и дифференцируемо-обратимых функций:

$$\mathcal{CH}_4 = C^1 \times C^1 \times C^1 \times C^1,$$

так что каждый элемент $f \in \mathcal{CH}_4$ однозначно представляется набором своих компонент: $f = (f^1, f^2, f^3, f^4)$, а его покомпонентное действие на точки многообразия Бервальда-Моора описывается в координатах формулами: $y^i = f^i(x^i)$. Иногда, когда это

³ Для перехода от потоков к более привычным для геометрии преобразованиям координат, например, в формулах (9) необходимо x_0^i считать исходными ("нештрихованными") координатами, x^i — преобразованными ("штрихованными") координатами, а параметру t во всех формулах придать произвольное, но фиксированное значение. Получающиеся формулы будут в этом случае описывать не процесс конформной деформации многообразия, а его конечный результат. Аналогично можно получить представление конечного действия потока и в формуле (11).

не будет приводить к путанице, мы будем для краткости употреблять сокращенную символическую запись такого действия: $y = f(x)$. Действие группы изометрии на точки многообразия Бервальда-Моора будем символически обозначать $\iota(x)$, где ι — элемент группы $\mathcal{IH}_4$. В компонентах такое действие для $\iota = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, c^1, c^2, c^3, c^4)$ описывается системой соотношений:

$$(x')^i = \lambda^i x^i + c^i, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

при этом параметры трансляций — произвольны, а параметры λ^i , как следует из формул⁴ (11), удовлетворяют соотношению:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = 1. \quad (17)$$

Нетрудно убедиться, что группа $\mathcal{IH}_4$ представляет собой полупрямое произведение подгруппы трансляций $\mathcal{I}_0\mathcal{H}_4$ — это нормальный делитель группы $\mathcal{IH}_4$ — и подгруппы унимодулярно согласованных дилатаций $\mathcal{I}_D\mathcal{H}_4$, что принято записывать так:

$$\mathcal{IH}_4 = \mathcal{I}_0\mathcal{H}_4 \rtimes \mathcal{I}_D\mathcal{H}_4.$$

Поддействуем некоторым элементом f группы конформной симметрии на многообразие Бервальда-Моора. В результате мы придем к многообразию Бервальда-Моора $\mathcal{H}_4^f$ в некоторой *специальной конформной калибровке*. Преобразования многообразия $\mathcal{H}_4$ группы $\mathcal{IH}_4$ соответствуют теперь преобразования многообразия $\mathcal{H}_4^f$ группы $(\mathcal{IH}_4)^f < \mathcal{CH}_4^f$, элементы ι^f которой определяются формулой:

$$\iota^f \equiv f \circ \iota \circ f^{-1}. \quad (18)$$

Тот факт, что эта формула действительно определяет действие группы $(\mathcal{IH}_4)^f$ сразу же следует из ассоциативности композиции отображений:

$$\iota_1^f * \iota_2^f = (f \circ \iota_1 \circ f^{-1}) * (f \circ \iota_2 \circ f^{-1}) = f \circ \iota_1 \circ (f^{-1} \circ f) \circ \iota_2 \circ f^{-1} = (f \circ (\iota_1 * \iota_2) \circ f^{-1}),$$

где $*$ обозначает групповую композицию, а $\circ$ — композицию отображений. Таким образом, группа $(\mathcal{IH}_4)^f$ является образом вложения группы $\mathcal{IH}_4$ в группу $\mathcal{CH}_4^f$. Как мы убедимся далее на конкретных примерах, действие группы $(\mathcal{IH}_4)^f$ в пространстве координат многообразия $\mathcal{H}_4^f$ описывается в общем случае нелинейными функциями, поэтому эту группу мы будем называть *нелинейным f -представлением группы $\mathcal{IH}_4$* . Диаграмма (19) наглядно иллюстрирует происхождение формулы (18): именно такое определение нелинейного представления обеспечивает коммутативность этой диаграммы.

$$\begin{array}{ccc} f(\mathcal{H}_4) & \xrightarrow{\iota^f} & f(\mathcal{H}_4) \\ f \uparrow & & \uparrow f \\ \mathcal{H}_4 & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{H}_4 \end{array} \quad (19)$$

В общем случае мы не можем отождествить группу $(\mathcal{IH}_4)^f$ с группой изометрий $\mathcal{IH}_4^f$. Однако, как будет показано ниже, *группу $(\mathcal{IH}_4)^f$ всегда можно рассматривать как группу (вообще говоря, нелинейных) изометрий $\mathcal{IH}_4'^f$ некоторого многообразия $\mathcal{H}_4'^f$, которое отличается от $\mathcal{H}_4^f$ только своей метрикой*. Вид этой метрики зависит от вида калибровочной функции f .

Рассмотрим несколько примеров применения этой общей конструкции.

⁴ Связь потоковых и конечных параметров дается формулой: $\lambda^i = e^{B_i t}$.

5.1 Нелинейное представление группы $\mathcal{I}_D\mathcal{H}_4$ в центро-аффинном пространстве Минковского

Рассмотрим конформную калибровку метрики Бервальда-Моора с компонентами калибровочной функции вида:

$$y^i = f^i(x^i) \equiv \sqrt{\epsilon_i \ln x^i}, \quad (\text{суммирование по } i \text{ нет!}) \quad (20)$$

где $\epsilon_i = -1$ для $i = 1, 2, 3$, $\epsilon_4 = 1$. Тогда формула (18) приводит к следующим законам преобразования координат y на $f(\mathcal{H}_4)$ при действии на них элемента группы $(\mathcal{I}_D\mathcal{H}_4)^f$:

$$(y')^i = \sqrt{\epsilon_i \ln(\lambda^i x^i)}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что комбинация:

$$s^2 = (y^4)^2 - (y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 \quad (21)$$

остаётся инвариантной под действием такого преобразования в силу условия (17). В терминах переменных y действие унимодулярно согласованных дилатаций принимает вид нелинейных преобразований:

$$(y')^i = \sqrt{(y^i)^2 + \epsilon_i \ln \lambda^i}. \quad (22)$$

Подчеркнем, что группа Лоренца является полной линейной однородной группой симметрии интервала (21), в то время как обсуждаемая нами группа $(\mathcal{I}_D\mathcal{H}_4)^f$ является (относительно не полной) нелинейной группой симметрии этого интервала. Отметим также, что рассматриваемые нами нелинейные преобразования действуют именно в центро-аффинном пространстве Минковского, поскольку эти преобразования не содержат трансляций. Непосредственной проверкой можно убедиться, что подгруппа $(\mathcal{I}_0\mathcal{H}_4)^f$ в рассматриваемой калибровке действует на координаты y по формулам:

$$(y')^i = \sqrt{\epsilon_i \ln(c^i + e^{\epsilon_i (y^i)^2})}. \quad (23)$$

При этом, как нетрудно видеть, 4-мерный интервал (21) преобразуется по следующему нелинейному закону:

$$(s')^2 = \ln \prod_{i=1}^4 (c^i + e^{\epsilon_i (y^i)^2}) = s^2 + \ln \prod_{i=1}^4 (1 + c^i e^{-\epsilon_i (y^i)^2}).$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что трансляции многообразия $\mathcal{H}_4^f: y \rightarrow y + \bar{c}$ порождаются преобразованиями конформной группы $\mathcal{CH}_4$ специального вида:

$$(x')^i = e^{\epsilon_i (\bar{c}^i)^2} x^i e^{2\epsilon_i \bar{c}^i \sqrt{\epsilon \ln x^i}}. \quad (24)$$

Таким образом, можно определить f -представление и для самой группы конформных преобразований. Будем обозначать его по аналогии с нелинейным представлением группы изометрий $(\mathcal{CH}_4)^f$. Любой элемент $g \in \mathcal{CH}_4$ порождает элемент $g^f \in (\mathcal{CH}_4)^f$ по формуле: $g^f = f \circ g \circ f^{-1}$.

Рассмотренный пример наглядно иллюстрирует то обстоятельство, что группа изометрий и группа конформных симметрий метрики Бервальда-Моора могут нетривиальным образом взаимодействовать друг с другом, приводя к нелинейным симметриям известных геометрий.

5.2 Нелинейное представление группы $\mathcal{I}_D\mathcal{H}_4$ в центро-аффинном финслеровом обобщенном пространстве Минковского

Конструкция предыдущего примера легко обобщается на нелинейные симметрии интервалов вида:

$$s^n = \sum_{i=1}^4 \epsilon_i (y^i)^n, \quad (25)$$

где $\epsilon_i = \pm 1$ с произвольной расстановкой. При этом калибровочная функция f задается компонентами вида:

$$y^i = [\epsilon_i \ln x^i]^{1/n}, \quad (26)$$

а сами нелинейные преобразования координат на $\mathcal{H}_4^f$ задаются соотношениями:

$$(y')^i = [(y^i)^n + \epsilon_i \ln \lambda^i]^{1/n}. \quad (27)$$

Формулы (25), (26), (27) обобщают соответствующие им формулы (21), (20) и (22). Нетрудно сообразить, что рассматривая группу $\mathcal{I}_D\mathcal{H}_4$ для метрик Бервальда-Моора высших измерений вида (16), можно получить нелинейные группы симметрий интервала вида (25) с любым числом координат.

5.3 Нелинейное представление группы $\mathcal{I}_0\mathcal{H}_4$ в компактном пространстве

Рассмотрим конформную калибровку метрики Бервальда-Моора, задаваемую функцией: $y^i(x^i) = \tanh x^i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и рассмотрим представление группы трансляций $\mathcal{I}_0\mathcal{H}_4$ в этой калибровке. Используя известные формулы гиперболической тригонометрии, получаем следующий вид этого представления:

$$(y')^i = \frac{y^i + \sigma^i}{1 + \sigma^i y^i}, \quad \sigma^i = \tanh c^i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (28)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что элементарная комбинация координат, инвариантная относительно такого преобразования, определяется координатами пары точек $P_1(y_1^1, y_1^2, y_1^3, y_1^4) \in \mathcal{H}_4^f$ и $P_2(y_2^1, y_2^2, y_2^3, y_2^4) \in \mathcal{H}_4^f$ по формуле:

$$\varphi_{12}^i \equiv \frac{y_2^i - y_1^i}{1 - y_1^i y_2^i} = \text{inv}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (29)$$

Общая инвариантная относительно действия группы $\mathcal{I}_0\mathcal{H}_4^f$ комбинация дается произвольной функцией от элементарных инвариантных функций:

$$F(\varphi_{12}^1, \varphi_{12}^2, \varphi_{12}^3, \varphi_{12}^4) = \text{inv}. \quad (30)$$

Действие группы унимодулярных дилатаций представляется в этой калибровке формулами:

$$(y')^i = \tanh(\lambda^i \operatorname{arctanh} y^i), \quad (31)$$

а действие настоящей группы трансляций в $\mathcal{H}_4^f$: $y^i \rightarrow y^i + \bar{c}^i$ порождается конформным преобразованием $\mathcal{H}_4$ вида:

$$(x')^i = \operatorname{arctanh}(\tanh x^i + \bar{c}^i). \quad (32)$$

Отметим, что многообразие $\mathcal{H}_4^f$ является компактным.

5.4 Общий вид нелинейного представления группы $\mathcal{IH}_4$

Все предыдущие конструкции этого параграфа являются частным случаем общего описания нелинейного представления группы $\mathcal{IH}_4$, которое можно получить следующим образом. Зафиксируем некоторую калибровку f и запишем в неявном символическом виде результат действия группы $\mathcal{IH}_4$ в координатах многообразия $\mathcal{H}_4^f$:

$$y = f(x); \quad y' = f(\lambda x + c).$$

Выражая из второго уравнения x :

$$x = \frac{1}{\lambda}(f^{-1}(y') - c)$$

и подставляя его в первое уравнение, приходим к выражению:

$$y = f\left(\frac{1}{\lambda}(f^{-1}(y') - c)\right), \quad (33)$$

откуда обращением находим общий вид нелинейного f -представления $(\mathcal{IH}_4)^f$:

$$y' = f(\lambda f^{-1}(y) + c). \quad (34)$$

Формулы (22), (23), (27), (28) и (31) являются частными случаями общей формулы (34). Нетрудно сообразить, что выражения для преобразований конформной симметрии многообразия $\mathcal{H}_4$, индуцирующие в $\mathcal{H}_4^f$ дилатации и сдвиги, получается из общей формулы (34) заменами $y \rightarrow x$ и $f \leftrightarrow f^{-1}$:

$$x' = f^{-1}(\bar{\lambda}f(x) + \bar{c}), \quad (35)$$

при этом $y' = \bar{\lambda}y + \bar{c}$. Формулы (24) и (32) – частные случаи общей формулы (35).

5.5 Общий вид инварианта нелинейной симметрии в $f(\mathcal{H}_4)$

Выведем общий вид инварианта нелинейного представления $(\mathcal{IH}_4)^f$. Для этой цели применим к обеим частям уравнения (33) обратную функцию f^{-1} . В результате придем к уравнению:

$$f^{-1}(y') = \lambda f^{-1}(y) + c. \quad (36)$$

Для вывода инварианта необходимо исключить из этой формулы параметры преобразований. Для исключения параметров c необходимо рассмотреть пару точек в $f(\mathcal{H}_4)$ с собирательными координатами y_1 и y_2 и вычесть два уравнения вида (36) покомпонентно друг из друга. В результате приходим к соотношению в компонентах, не содержащему параметров трансляции:

$$f^{-1}((y')_2^i) - f^{-1}((y')_1^i) = \lambda^i(f^{-1}(y_2^i) - f^{-1}(y_1^i)), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (37)$$

Далее, для исключения параметров дилатаций перемножим все уравнения (37) и учтем соотношение (17). В результате приходим к искомой элементарной инвариантной комбинации:

$$\prod_{i=1}^4 (f_i^{-1}((y')_2^i) - f_i^{-1}((y')_1^i)) = \text{inv.}$$

Общая инвариантная комбинация может выражаться как произвольная функция F от элементарной:

$$F\left(\prod_{i=1}^4 (f_i^{-1}((y')_2^i) - f_i^{-1}((y')_1^i))\right) = \text{inv.} \quad (38)$$

Здесь и далее F — произвольная дифференцируемая функция своих аргументов.

Отметим, что ограничение группы $\mathcal{IH}_4$ до ее подгрупп $\mathcal{I}_0\mathcal{H}_4$ и $\mathcal{I}_D\mathcal{H}_4$ расширяет класс инвариантных комбинаций. Так, общая инвариантная комбинация для подгруппы $(\mathcal{I}_D\mathcal{H}_4)^f$ представляется выражением:

$$F\left(\prod_{i=1}^4(f_i^{-1}((y')^i))\right) = \text{inv}, \quad (39)$$

которое обобщает формулы (21) и (25), а общая инвариантная комбинация для подгруппы $(\mathcal{I}_0\mathcal{H}_4)^f$ представляется выражением:

$$F(f_1^{-1}(y_2^1) - f_1^{-1}(y_1^1), f_2^{-1}(y_2^2) - f_2^{-1}(y_1^2), f_3^{-1}(y_2^3) - f_3^{-1}(y_1^3), f_4^{-1}(y_2^4) - f_4^{-1}(y_1^4)) = \text{inv}, \quad (40)$$

которое обобщает формулы (29) и (30). В дальнейшем метрику на многообразии $\mathcal{H}_4^f$, группа изометрий которой совпадает с какой-нибудь из нетривиальных подгрупп группы $(\mathcal{IH}_4)^f$, будем называть f -метрикой.

В качестве примера приведем общий вид инварианта для калибровки раздела 5.1, в которой возникает интервал Минковского. Вид (21) получается из общей формулы (39), если функцию f взять из (20), а $F(w) = \ln(w)$. Интервал, инвариантный в этой калибровке относительно полной группы $(\mathcal{IH}_4)^f$, можно взять согласно общей формуле (38) в виде:

$$s^2 = \ln \left[(e^{-(y_1^1)^2} - e^{-(y_2^1)^2})(e^{-(y_1^2)^2} - e^{-(y_2^2)^2})(e^{-(y_1^3)^2} - e^{-(y_2^3)^2})(e^{-(y_1^4)^2} - e^{-(y_2^4)^2}) \right] = \\ (y_1^4)^2 - (y_1^1)^2 - (y_1^2)^2 - (y_1^3)^2 + \ln \left[(1 - e^{(y_1^1)^2 - (y_2^1)^2})(1 - e^{(y_1^2)^2 - (y_2^2)^2})(1 - e^{(y_1^3)^2 - (y_2^3)^2})(1 - e^{(y_2^4)^2 - (y_1^4)^2}) \right].$$

Центро-аффинный интервал Минковского (21) получается из этой формулы в области: $y_2^i \gg y_1^1$ для $i = 1, 2, 3$ и $y_2^4 \ll y_1^4$ (точка 2 удалена на "пространственную бесконечность", а точка 1 — на "временную").

6 Отображение экстремалей

В силу специфичности группы конформных преобразований (перепараметризация координат), семейства экстремалей многообразий $\mathcal{H}_4$ и $\mathcal{H}_4^f$ совпадают (это семейства прямых с единичным 4-импульсом). При этом, как нетрудно убедиться на простых примерах $(\text{Extr}(\mathcal{H}_4))^f \not\subset \text{Extr}(\mathcal{H}_4^f)$ и $(\text{Extr}(\mathcal{H}_4))^f \not\subset \text{Extr}(\mathcal{H}_4'^f)$, хотя указанные семейства и могут иметь ненулевые пересечения. Таким образом, конформная калибровка в общем случае не является геодезическим отображением ни по отношению к метрике Бервальда-Моора на $\mathcal{H}_4^f$, ни по отношению к соответствующей f -метрике. Это означает, что *в терминах экстремалей группа конформных симметрий осуществляет переходы между физически неэквивалентными ситуациями: например, от "свободного" движения к "вынужденному" и наоборот*. В качестве примера на рис. 1 приведены проекции образов прямых на гиперплоскость (y^0, y^1, y^2) в калибровках, рассмотренных в предыдущих разделах.

Отметим, что после задания динамической части теории (конкретных принципов финслеровой динамики), преобразования конформной симметрии $\mathcal{CH}_4$ позволяют, в принципе, связывать между собой различные задачи финслеровой динамики, аналогично тому как это делается для плоских задач классической механики Ньютона в рамках ТФКП [12].

Литература

- [1] С. Н. Brans, Р. Н. Dicke, *Phys. Rev. D* **124**, 925 (1961)
- [2] V. Faraoni, E. Gunzig, P. Nardone, *Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology*, arXiv: gr-qc/9811047v1

- [3] Yu. S. Vladimirov, S. S. Kokarev, *GRG* **29**, 141 (1997)
- [4] L. Querella, *Variational Principles and Cosmological Models in Higher-Order Gravity*, Doct. diss., arXiv: gr-qc/9902044v1
- [5] R. Penrose, *Phys. Rev. Lett.*, **10** p. 66 (1963).
- [6] Д. Г. Павлов, ГЖЧГФ, **1** 5 (2004)
- [7] Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов, ГЖЧГФ, **4** 3 (2007)
- [8] Д. Г. Павлов, ГЖЧГФ, **1** 20 (2004)
- [9] Д. Г. Павлов, ГЖЧГФ, **1** 33 (2004)
- [10] Д. Г. Павлов, Г. И. Гарасько, ГЖЧГФ, **3** 3 (2005)
- [11] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, М., Наука, 1979
- [12] С. С. Кокарев, *Изв. вузов (физика)*, 11, 36 (2000).

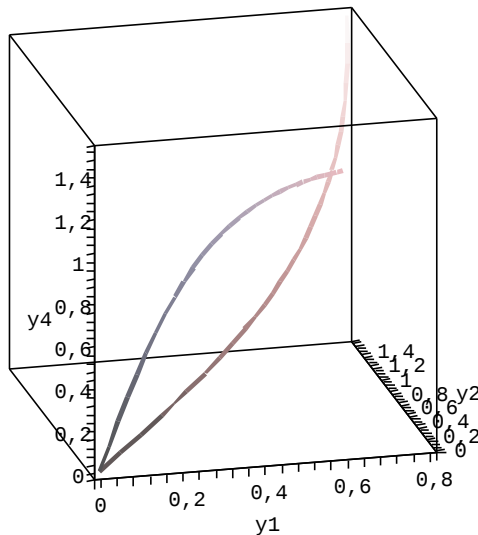


Рис. 1. Кривая, соединяющая два угла координатного куба, описывается параметрическими уравнениями: $y^4 = \sqrt{\ln(1+t)}$, $y^1 = y^2 = \sqrt{-\ln(1-t)}$ и соответствует калибровке (20). Вторая кривая описывается параметрическими уравнениями: $y^4 = \tanh t$, $y^1 = \tanh 2t$, $y^0 = \tanh 3t$ и соответствует калибровке раздела 5.3. Ни одна из кривых не является экстремалью ни для метрики Бервальда-Моора в $\mathcal{H}_4^f$, ни для соответствующих f -метрик.

Conformal gauges in Berwald-Moor geometry and their induced non-linear symmetries

D. G. Pavlov, S. S. Kokarev

MSTU n. a. N. E. Bauman; RSEC Logos, Yaroslavl
hypercomplex@mail.ru, logos-distant@mail.ru

Some invariant geometric structures of the Finslerian Berwald-Moor space $\mathcal{H}_4$ are investigated. It is proved that there exist a non-trivial "interaction" between the conformal symmetries and the isometries of $\mathcal{H}_4$, which allow the existence of various non-linear representations of the isometries and conformal symmetries of the Berwald-Moor geometry as isometries of certain bi-point metrics. As well, are constructed both the general expressions of such non-linear representations, and the general form of the bi-point functional invariants.

Key-words: invariance, Berwald-Moor space, conformal symmetries, isometries, Finsler geometry.

MSC: 30C35, 30F35, 53B40, 15A72.

РИМАНОВЫ МЕТРИКИ, СОПРИКАСАЮЩИЕСЯ С 3-МЕРНОЙ ФИНСЛЕРОВОЙ МЕТРИКОЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев

*Институт гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Москва,
РНОЦ "Логос", Ярославль
geom2004@mail.ru, logos-distant@mail.ru*

Рассматривается общая конструкция соприкосновения финслеровой и римановой метрик и ее приложения к геометрии $\mathcal{H}_3$. Показано, что соприкасающаяся риманова метрика в определенном смысле наследует симметрии исходной финслеровой метрики и, в частности, обладает богатой конформной группой. Доказывается, что среди 3-мерных римановых метрик, соприкасающихся вдоль полей симметрий метрики Бервальда-Моора в $\mathcal{H}_3$, не существует евклидовой метрики.

Ключевые слова: Римановы метрики, Финслеровы метрики, метрика Бервальда-Моора, соприкосновения.

1 Введение

Стандартную метрику на римановом многообразии $\mathcal{M}$ можно рассматривать как функцию $g : \mathcal{M} \times T\mathcal{M} \times T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ на касательном расслоении, которая каждой тройке (p, X_p, Y_p) (p — точка $\mathcal{M}$, X_p, Y_p — векторы из касательного пространства $T_p\mathcal{M}$) ставит в соответствие число: $g(X_p, Y_p)$, называемое скалярным произведением векторов X_p и Y_p в точке p . При этом риманова метрика — это функция очень специального вида: от координат базы она зависит произвольным гладким образом, а от координат слоя — линейно по каждому аргументу и симметрично по паре аргументов. Такое "определение" метрики оказывается согласованным с линейным законом преобразованием координат слоя (т.е. координатных компонент векторов) при произвольных координатных диффеоморфизмах многообразия. Аналогичная точка зрения может быть распространена и на ковариантные тензоры любого ранга, заданные на многообразии $\mathcal{M}$.

Приняв эту точку зрения, не составляет труда перейти к обобщению римановой метрики (и ковариантных тензоров), при котором "метрика" рассматривается как общая функция $G : \mathcal{M} \times T\mathcal{M} \times \dots \times T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. При такой общей "метризации" многообразия его метрические свойства будут довольно расплывчатыми, а введение привычных и важных понятий, типа длин, углов, площадей и объемов, связности и кривизны и т.п. весьма проблематичным. Для получения более конкретной и содержательной теории на метрику G необходимо наложить определенные ограничения. В традиционной финслеровой геометрии [7] рассматриваются метрики вида:

$$G : (p, X_p, Y_p, Z_p) \mapsto \mathbb{R}, \quad (1)$$

при этом относительно Y_p и Z_p отображение G линейно, относительно X_p отображение G является произвольной однородной функцией нулевого порядка, а относительно аргумента p отображение G — произвольное (гладкое). Традиционная финслерова геометрия позволяет таким образом ввести на фундаментальном геометрическом уровне локальную анизотропию пространства, а развитие дифференциальной версии этой теории приводит к интересным (хотя и довольно громоздким) обобщениям римановой геометрии и ее физических приложений [2].

Отметим, что финслеровы метрики вида (1) естественным образом ассоциируются с понятием "скалярного произведения пары векторов, зависящего от направления третьего вектора". Таким образом, в традиционной финслеровой геометрии выделяется билинейная структура скалярного произведения в обобщенном анизотропном варианте¹.

Существует интересный класс обобщенных метрических пространств, в которых метрика в общем случае, с одной стороны, не является римановой, с другой — не относится к классу финслеровых метрик вида (1). Речь идет о пространствах Бервальда-Моора $\mathcal{H}_n$, в которых метрика определяется соотношением:

$${}^nG = \hat{S}(dx^1 \otimes dx^2 \cdots \otimes dx^n), \quad (2)$$

где $\hat{S}$ — оператор симметризации (без числового множителя). Пространства с такой метрикой естественным образом возникают из рассмотрения ассоциативно-коммутативных алгебр H_n с обобщением модуля комплексного числа [6]. В отличие от финслеровых метрик вида (1), метрика (2) в общем случае ассоциируется с понятием скалярного n -произведения или полискалярного произведения [4]. Исключение составляют случаи $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_3$. Пространство Бервальда-Моора $\mathcal{H}_2$ с геометрической точки зрения изоморфно псевдоевклидовой плоскости, а пространство $\mathcal{H}_3$, которому посвящена настоящая статья, формально можно рассматривать как частный случай финслеровой метрики (1). При этом следует заметить, что метрика:

$${}^3G = \hat{S}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3) \quad (3)$$

не удовлетворяет условиям положительной определенности, которые требуются для вывода ряда общих свойств традиционной финслеровой геометрии и, с другой стороны, ввиду высокой степени симметрии, обладает рядом специфических свойств, которые "ускользают" в общем подходе, принятом в [7]. По этим причинам мы в последующем изложении не будем опираться на результаты общего подхода и все рассуждения и утверждения будем формулировать, опираясь непосредственно на свойства метрики (3).

В ряде работ [5, 7] было показано, что метрики Бервальда-Моора (2) обладают группой изометрии $\mathcal{IH}_n$, представляющей собой полупрямое произведение n -параметрической абелевой группы трансляций $\mathcal{I}_0\mathcal{H}_n$ и $(n-1)$ -параметрической абелевой группы унимодулярно согласованных дилатаций $\mathcal{I}_D\mathcal{H}_n$. Базис алгебры Ли группы $\mathcal{IH}_n$ можно задать набором векторных полей

$$T_j = \partial_j, \quad j = \overline{1, n} \text{ (трансляции); } D_j = x^j \partial_j - x^{j+1} \partial_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1} \text{ (дилатации)} \quad (4)$$

(суммирование по повторяющимся индексам нет!). При этом скобки Ли в таком базисе принимают вид:

$$[T_i, T_j] = [D_i, D_j] = 0; \quad [T_i, D_j] = \delta_{i,j} T_i - \delta_{i,j+1} T_{j+1} \quad (5)$$

для всех i и j (суммирование по повторяющимся индексам нет!).

Кроме группы изометрий, пространство $\mathcal{H}_n$ обладает бесконечномерной группой конформной симметрии $\mathcal{CH}_n$, общий элемент алгебры Ли которой имеет вид:

$$X = X^1(x^1) \partial_1 + X^2(x^2) \partial_2 + \cdots + X^n(x^n) \partial_n, \quad (6)$$

¹ На самом деле первичным объектом финслеровой геометрии, как правило, является фундаментальная или мировая функция $F(x, \dot{x})$ первой степени однородности по второму аргументу [7], задающая функционал длины на финслеровом многообразии. Анизотропная "билинейная метрика" вида (1) получается из нее по формуле: $G = \partial_{\dot{x}\dot{x}}^2 F/2$. Таким образом, нелинейная по сути финслерова метрика намеренно сводится к (квази)квадратичному виду для того, чтобы максимально приблизить аппарат и язык финслеровой дифференциальной геометрии к языку и аппарату римановой.

где $X^i(x^i)$ — произвольные гладкие функции. Скобка Ли двух полей такого вида описывается формулой:

$$[X, Y] = \Delta^i(X, Y) \partial_i, \quad (7)$$

где

$$\Delta^i(X, Y) \equiv \begin{vmatrix} X^i & Y^i \\ \dot{X}^i & \dot{Y}^i \end{vmatrix},$$

а точка обозначает дифференцирование функции по своему аргументу.

Имея в распоряжении метрику (2) и векторные поля из алгебр Ли групп $\mathcal{IH}_n$ и $\mathcal{CH}_n$, можно естественным образом получать из метрики (2) бесчисленное множество римановых метрик с помощью следующего общего приема. Рассмотрим "неполное" полискалярное произведение вида:

$$g = {}^n G(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n-2)}, \ , \),$$

где $X_{(j)}$ — элементы алгебр Ли групп $\mathcal{IH}_n$ и (или) $\mathcal{CH}_n$, для удобства перенумерованные индексами, отвечающими их местам как аргументам метрики Бервальда-Моора. Очевидно, что g — (псевдо)риманова метрика, зависящая от выбранных полей $X_{(j)}$. Описанный прием приводит к обобщению понятия "римановой метрики, соприкасающейся к данной финслеровой метрике", рассмотренного в [7], поскольку в общем случае такое "соприкосновение" в пространствах Бервальда-Моора $\mathcal{H}_n$ с $n > 3$ определяется не вдоль одного единственного векторного поля, а вдоль $n - 2$ векторных полей. Мы сохраняем терминологию соприкосновения и поля $X_{(j)}$, вдоль которых риманова метрика соприкасается с метрикой Бервальда-Моора, будем как и в [7], называть *опорными*.

Отметим, что ввиду внутренней специфики геометрии Бервальда-Моора, конструкция соприкосновения не только естественна, но и, в определенном смысле, необходима. Действительно, попытка определить метрику Бервальда-Моора на подмногообразиях (координатных плоскостях) $S_i: x^i = \text{const}$ с помощью стандартной дифференциально-геометрической операции сужения метрики: ${}^n G \rightarrow {}^n G|_{S_i}$ приводит к тривиальному результату: $G|_{S_i} = 0$. Между тем, последовательное проектирование метрики ${}^n G$ на базисные векторы трансляций T_j приводит к цепочке метрик Бервальда-Моора убывающей размерности:

$${}^n G \xrightarrow{\pi_1} {}^{n-1} G \xrightarrow{\pi_2} {}^{n-2} G \xrightarrow{\pi_3} \dots \xrightarrow{\pi_{n-2}} {}^2 G, \quad (8)$$

где $\pi_i: {}^n G(T_1, T_2, \dots, T_{i-1}, \ , \dots, \) \rightarrow {}^n G(T_1, T_2, \dots, T_{i-1}, T_i, \ , \dots, \)$. Таким образом, конструкция соприкосновения в простейшей своей реализации осуществляет корректную и содержательную размерную редукцию пространств Бервальда-Моора.

Целью настоящей статьи является исследование геометрических и физических свойств римановых метрик, соприкасающихся с 3-метрикой пространства $\mathcal{H}_3$.

2 Некоторые частные случаи соприкосновения

2.1 Псевдоевклидовы пространства $\mathcal{M}_{(1,2)}$

Как следует из общей формулы (8), соприкосновение метрики ${}^3 G$ с любым из базисных векторов трансляций T_j приводит к 2-мерной псевдоевклидовой метрике. Например, для $j = 3$ имеем:

$$g = {}^3 G(\partial_3, \ , \) = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2) = dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1 \quad (9)$$

— псевдоевклидову метрику на плоскости (x^1, x^2) в изотропных (световых) координатах, которая превращает такую плоскость в пространство Минковского $\mathcal{M}_{(1,1)}$. С 3-мерной

точки зрения такая метрика является вырожденной, поскольку

$$\det(g) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Переход к пространствам Минковского общего типа возможен, если рассмотреть соприкосновение метрики 3G с полем трансляции общего типа:

$$T = \alpha\partial_1 + \beta\partial_2 + \gamma\partial_3. \quad (10)$$

Используя преобразования из подгруппы $\mathcal{I}_D\mathcal{H}$, можно, не нарушая общности, изменить масштабы координат таким образом, чтобы первые две компоненты векторного поля (10) стали равны единицам. Такая процедура аналогична специальному выбору декартовой системы координат, когда одна из осей ориентирована вдоль определенного заданного вектора. Таким образом, вместо поля (10) можно рассматривать в качестве опорного поле вида:

$$T = \partial_1 + \partial_2 + \delta\partial_3, \quad (11)$$

где δ — произвольный вещественный параметр. Риманова метрика, соприкасающаяся вдоль этого поля с 3G , будет иметь вид:

$$g = dx^2 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^2 + dx^1 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^1 + \delta(dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1).$$

Матрица этой метрики

$$(g) = \begin{pmatrix} 0 & \delta & 1 \\ \delta & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

вообще говоря невырождена. Для исследования алгебраического типа этой метрики поставим задачу на собственные векторы и собственные значения матрицы (g) :

$$(g) \cdot v = \lambda v,$$

где точка обозначает матричное умножение, а вектор v понимается как матрица 3×1 (столбец). Подставляя в это уравнение (77), получаем следующее секулярное уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \delta & 1 \\ \delta & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (2 + \delta^2)\lambda + 2\delta = 0.$$

Его корни даются выражениями:

$$\lambda_1 = -\delta; \quad \lambda_2 = \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 + 8}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 + 8}}{2}. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что при любом δ $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, откуда следует что при любом $\delta \neq 0$ риманова метрика g определяет пространство Минковского типа $\mathcal{M}_{(1,2)}$. При $\delta = 0$ мы приходим к рассмотренному вначале случаю вырожденной псевдоевклидовой метрики (9). Как известно, группа изометрии пространства $\mathcal{M}_{(1,2)}$ — это полупрямое произведение 3-мерной группы трансляций и группы $O(1, 2)$ вещественных 3-мерных псевдоортогональных матриц.

Параллельно с вышеизложенными результатами, мы можем сделать следующее наблюдение: *не существует такого постоянного векторного поля, соприкосновение вдоль которого приводило бы к евклидовой метрике, соприкасающейся с 3G .*

2.2 Риманова метрика, соприкасающаяся с $\mathcal{H}_3$ вдоль поля из алгебры Ли группы $\mathcal{I}_D\mathcal{H}$.

Рассмотрим теперь в качестве опорного векторного поля общий элемент алгебры Ли подгруппы унимодулярных дилатаций $\mathcal{I}_D\mathcal{H}_3$ полной группы $\mathcal{IH}_3$, который имеет вид:

$$X = b_1 D_1 + b_2 D_2 = b_1 x^1 \partial_1 + (b_2 - b_1) x^2 \partial_2 - b_2 x^3 \partial_3,$$

где b_1, b_2 — произвольные вещественные параметры. Соприкасающаяся вдоль этого поля риманова метрика имеет вид:

$$g = b_1 x^1 (dx^2 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^2) + (b_2 - b_1) x^2 (dx^1 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^1) - b_2 x^3 (dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1) \quad (14)$$

или в матричном представлении:

$$(g) = \begin{pmatrix} 0 & -b_2 x^3 & (b_2 - b_1) x^2 \\ -b_2 x^3 & 0 & b_1 x^1 \\ (b_2 - b_1) x^2 & b_1 x^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта метрика, вообще говоря, неплюская. Ее определитель, задающий локальный элемент объема, дается выражением:

$$\det(g) = 2b_2 b_1 (b_2 - b_1) x^1 x^2 x^3.$$

Видно, что метрика (14) невырождена только при одновременном выполнении условий: $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0, b_1 \neq b_2$.

Исследуем симметрии метрики (14). Для отыскания изометрий этой метрики запишем уравнения Киллинга: $L_Y g = 0$. С учетом явного вида метрики (14), эти уравнения принимают вид системы шести дифференциальных уравнений первого порядка относительно компонент Y^i :

$$\begin{aligned} -b_2 x^3 \partial_1 Y^2 + (b_2 - b_1) x^2 \partial_1 Y^3 &= 0; \\ -b_2 Y^3 - b_2 x^3 \partial_1 Y^1 + b_1 x^1 \partial_1 Y^3 - b_2 x^3 \partial_2 Y^2 + (b_2 - b_1) x^2 \partial_2 Y^3 &= 0; \\ -b_2 x^3 \partial_2 Y^1 + b_1 x^1 \partial_2 Y^3 &= 0; \\ (b_2 - b_1) Y^2 + (b_2 - b_1) x^2 \partial_1 Y^1 + b_1 x^1 \partial_1 Y^2 - b_2 x^3 \partial_3 Y^2 + (b_2 - b_1) x^2 \partial_3 Y^3 &= 0; \\ b_1 Y^1 + (b_2 - b_1) x^2 \partial_2 Y^1 + b_1 x^1 \partial_2 Y^2 - b_2 x^3 \partial_3 Y^1 + b_1 x^1 \partial_3 Y^3 &= 0; \\ (b_2 - b_1) x^2 \partial_3 Y^1 + b_1 x^1 \partial_3 Y^2 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Ее решения:

$$\begin{aligned} Y_{(1)} &= D_1; \quad Y_{(2)} = D_2; \\ Y_{(3)} &= \ln \left[\left(\frac{x^1 x^3}{x^2} \right)^{b_1} (x^1)^{-2b_2} \right] x^1 \partial_1 + \ln \left[\left(\frac{x^2 x^3}{x^1} \right)^{b_1} \left(\frac{x^2}{x^1} \right)^{b_2} \right] x^2 \partial_2 + \ln \left[\left(\frac{x^1 x^3}{x^2} \right)^{b_2} (x^3)^{-2b_1} \right] x^3 \partial_3 \end{aligned}$$

образуют алгебру Ли симметрий метрики (14) с коммутационными соотношениями:

$$[Y_{(1)}, Y_{(2)}] = 0; \quad [Y_{(1)}, Y_{(3)}] = 2(b_1 - b_2)Y_{(1)} - 2b_2 Y_{(2)}; \quad [Y_{(2)}, Y_{(3)}] = -2b_1 Y_{(1)} + 2(b_2 - b_1)Y_{(2)}.$$

Из приведенных коммутационных соотношений следует, что полученная алгебра разрешима.

Оказывается, что конформные симметрии метрики (14) существенно богаче. Для отыскания конформных симметрий этой метрики необходимо решить конформные уравнения Киллинга: $L_Y g = \phi g$, где ϕ — некоторая скалярная функция, подлежащая определению. Подставляя в это уравнение явный вид метрики (14), приходим к системе уравнений,

которая отличается от системы (15) дополнительными слагаемыми $-b_2x^3\phi$, $(b_2 - b_1)\phi x_2$ и $b_1x^1\phi$ в левых частях "длинных" уравнений соответственно их приведенному порядку. Решая соответствующую систему, приходим к следующей 10-мерной алгебре конформной симметрии:

$$Y_{(1)} = x^1\partial_1, \quad \phi_1 = 1; \quad Y_{(2)} = x^2\partial_2, \quad \phi_2 = 1; \quad Y_{(3)} = x^3\partial_3, \quad \phi_3 = 1 \quad (\text{растяжения осей});$$

$$Y_{(4)} = x^1 \ln(x^1)^{-b_1/(b_2-b_1)} \partial_1 + x^2 \ln x^1 \partial_2 + x^3 \ln [(x^3)^{-2b_1/(b_2-b_1)} (x^1)^{b_2/(b_2-b_1)}] \partial_3,$$

$$\phi_4 = \ln [(x^1)^2 (x^3)^{-2b_1/(b_2-b_1)}];$$

$$Y_{(5)} = \left(\ln^2 x^1 - \frac{b_1^2}{b_2(b_2-b_1)} \ln x^2 \ln x^3 + \left[\ln b_1 + \frac{2b_1}{b_2-b_1} \ln(b_2-b_1) \right] \ln x^1 + \right.$$

$$\left. \frac{b_1 \ln b_1}{b_2-b_1} \ln x^2 - \frac{b_1^2 \ln(b_2-b_1)}{b_2(b_2-b_1)} \ln x^3 \right) x_1 \partial_1 + \frac{b_1}{b_2} \ln[(b_2-b_1)x^2] \ln x^3 \cdot x^2 \partial_2 +$$

$$\left(\frac{b_1}{b_2} \ln^2 x^3 - \frac{b_1}{b_2-b_1} \ln x^2 \ln x^3 + \frac{b_2 \ln b_1}{b_2-b_1} \ln x^2 - \left[\ln b_1 - \frac{b_1 \ln(b_2-b_1)}{b_2-b_1} \right] \ln x^3 \right) x^3 \partial_3,$$

$$\phi_5 = \ln^2 x^1 + \frac{b_1}{b_2} \ln^2 x^3 + \frac{2b_2}{b_2-b_1} \ln x^1 \ln x^2 + \frac{2b_1^2}{b_2(b_2-b_1)} \ln x^2 \ln x^3 +$$

$$\left(2 - \frac{2b_1 \ln(b_2-b_1)}{b_2-b_1} - \ln b_1 \right) \ln x^1 + \frac{(b_2+b_1) \ln b_1}{b_2-b_1} \ln x^2 + \left(\frac{2b_1}{b_2} - \ln b_1 + \frac{2b_1}{b_2} \ln(b_2-b_1) \right) \ln x^3;$$

$$Y_{(6)} = (b_2 \ln^2 x^1 - b_1 \ln x^1 \ln(x^2 x^3)) x^1 \partial_1 + (b_2 - b_1) x^2 \ln x^1 \ln x^3 \partial_2 - (b_1 \ln^2 x^3 - b_2 \ln x^1 \ln(x^2 x^3)) x^3 \partial_3,$$

$$\phi_6 = b_2 \ln^2 x^1 - b_1 \ln^2 x^3 + 2(b_2 - b_1) \ln x^1 \ln(x^2 x^3) + \ln[(x^1)^{2b_2} (x^3)^{-2b_1}];$$

$$Y_{(7)} = \ln[(x^1)^{2b_2} (x^3)^{-b_1}] x^1 \partial_1 + (b_2 - b_1) x^2 \ln x^3 \partial_2 + b_2 x^3 \ln x^3 \partial_3, \quad \phi_7 = \ln[(x^1)^{2b_2} (x^3)^{2(b_2-b_1)}];$$

$$Y_{(8)} = x^1 \ln x^1 \partial_1 + x^2 \ln x^2 \partial_2 + x^3 \ln x^3 \partial_3, \quad \phi_8 = \ln(x^1 x^2 x^3);$$

$$Y_{(9)} = \frac{b_1}{b_2} (\ln x^2 \ln x^3 + \ln(b_2 - b_1) \ln x^3) x^1 \partial_1 +$$

$$\left(\ln^2 x^2 - \frac{b_2 - b_1}{b_2} \ln x^2 \ln x^3 - \frac{(b_2 - b_1) \ln(b_2 - b_1)}{b_2} \ln x^3 \right) x^2 \partial_2 -$$

$$\left(\frac{b_2 - b_1}{b_2} \ln^2 x^3 - \ln x^2 \ln x^3 + \ln(b_2 - b_1) \ln x^3 \right) x^3 \partial_3, \quad \phi_9 = \ln^2 x^2 - \frac{b_2 - b_1}{b_2} \ln^2 x^3 +$$

$$\frac{2b_1}{b_2} \ln x^2 \ln x^3 - 2 \ln(b_2 - b_1) \ln x^1 + \ln(x^2)^2 - \frac{2(b_2 - b_1)}{b_2} (\ln(b_2 - b_1) + 1) \ln x^3;$$

$$Y_{(10)} = \ln[(x^1)^{(b_2-b_1)/b_2} (x^2)^{b_1/b_2}] x_1 \partial_1 + \ln[x^2 (x^3)^{(b_1-b_2)/b_2}] x^3 \partial_3;$$

$$\phi_{10} = \ln[(x^1)^{(b_1-b_2)/b_2} (x^2)^{-(b_1+b_2)/b_2} (x^3)^{(b_2-b_1)/b_2}].$$

2.3 Риманова метрика, соприкасающаяся вдоль общего поля конформных симметрий метрики Бервальда-Моора

Рассмотрим поле вида:

$$X = f^1(x^1)\partial_1 + f^2(x^2)\partial_2 + f^3(x^3)\partial_3,$$

где f^i — произвольные функции своих аргументов. Это поле описывает общий элемент бесконечномерной алгебры Ли группы конформных симметрий метрики Бервальда-Моора в $\mathcal{H}_3$. Риманова метрика, соприкасающаяся вдоль этого поля с метрикой G , имеет вид:

$$g = \hat{S}(f^1(x^1)dx^2 \otimes dx^3 + f^2(x^2)dx^1 \otimes dx^3 + f^3(x^3)dx^2 \otimes dx^3)$$

или в матричном виде:

$$(g) = \begin{pmatrix} 0 & f^3 & f^2 \\ f^2 & 0 & f^1 \\ f^2 & f^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта метрика, вообще говоря, неплоская. Отличные от нуля компоненты ее тензора кривизны имеют вид:

$$\mathcal{R}_{1212} = -\frac{f^3((f^1)') + (f^2)' - (f^3)')^2}{8f^1f^2}; \quad \mathcal{R}_{1313} = -\frac{f^2((f^1)') + (f^3)' - (f^2)')^2}{8f^1f^3};$$

$$\mathcal{R}_{2323} = -\frac{f^1((f^2)' + (f^3)' - (f^1)')^2}{8f^2f^3};$$

$$\mathcal{R}_{1213} = -\frac{4(f^1)''f^1 - 2(f^2)'(f^3)' + (f^3)'^2 - (f^1)'^2 + (f^2)'^2}{8f^1};$$

$$\mathcal{R}_{1232} = -\frac{4(f^2)''f^2 - 2(f^1)'(f^3)' + (f^1)'^2 - (f^2)'^2 + (f^3)'^2}{8f^2};$$

$$\mathcal{R}_{1323} = -\frac{4(f^3)''f^3 - 2(f^1)'(f^2)' + (f^1)'^2 + (f^2)'^2 - (f^3)'^2}{8f^3};$$

Сама метрика и компоненты кривизны инвариантны относительно группы подстановок координат: $x^1 \leftrightarrow x^2 \leftrightarrow x^3$.

Найдем векторные поля, соприкосновение вдоль которых приводит к плоской римановой метрике. Из равенства нулю компоненты $\mathcal{R}_{1212}$ следует, что f^i — линейные функции вида $b^i x^i + a^i$, при этом $b^2 + b^1 - b^3 = 0$. Аналогично из равенства нулю компонент $\mathcal{R}_{1313}$ и $\mathcal{R}_{2323}$ следуют равенства: $b^1 + b^3 - b^2 = 0$ и $b^3 + b^2 - b^1 = 0$. В совокупности это приводит к равенствам: $b^1 = b^2 = b^3 = 0$. Таким образом, *плоская риманова метрика реализуется только при соприкосновении вдоль постоянных полей*. В совокупности с утверждением в конце раздела 2.1 это приводит к заключению о том, что *среди множества римановых метрик, соприкасающихся с метрикой Бервальда-Моора вдоль полей ее конформной симметрии, не существует евклидовой метрики*. Это важное для физических приложений обстоятельство говорит о том, что кубическая метрика Бервальда-Моора "содержит" внутри себя именно локально лоренцевы, а не евклидовы, метрики, что означает ее изначальную приспособленность для описания релятивистских явлений.

3 Общие свойства симметрии римановых метрик, соприкасающихся с метрикой Бервальда-Моора

Пусть $X_{(j)}$ — элемент алгебры Ли группы $\mathcal{IH}_3$, а $\bar{X}_{(j)}$ — элемент алгебры Ли конформной группы $\mathcal{CH}_3$. При этом алгебра Ли группы $\mathcal{CH}_3$ включает в себя алгебру Ли группы $\mathcal{IH}_3$, при этом для каждого из элементов последней мы полагаем соответствующий конформный фактор ϕ_j в соответствующем конформном уравнении Киллинга:

$$L_{\bar{X}_{(j)}} G = \phi_j G$$

равным нулю. Введем следующие обозначения:

$$g_{(j)} \equiv G(X_{(j)}, \cdot, \cdot); \quad \bar{g}_{(j)} \equiv G(\bar{X}_{(j)}, \cdot, \cdot).$$

Действуя производной Ли $L_{X_{(i)}}$ или $L_{\bar{X}_{(i)}}$ на $g_{(j)}$ и $\bar{g}_{(j)}$ соответственно и используя свойства производной Ли (правило Лейбница и коммутативность со сверткой), приходим к следующим цепочкам равенств:

$$L_{X_{(i)}} g_{(j)} = L_{X_{(i)}} G(X_{(j)}, \cdot, \cdot) = G([X_{(i)}, X_{(j)}], \cdot, \cdot) = c_{ij}^k g_{(j)}, \quad (16)$$

$$L_{\bar{X}_{(i)}} \bar{g}_{(j)} = L_{\bar{X}_{(i)}} G(\bar{X}_{(j)}, \cdot, \cdot) = \phi_i \bar{g}_{(j)} + \bar{c}_{ij}^k \bar{g}_{(k)} = (\phi_i \delta_j^k + \bar{c}_{ij}^k) \bar{g}_{(k)}, \quad (17)$$

где c_{ij}^k и $\bar{c}_{ij}^k$ — структурные константы или структурные функции алгебры Ли групп $\mathcal{IH}_3$ и $\mathcal{CH}_3$ соответственно. Таким образом, семейства метрик $\{g_{(j)}\}$ и $\{\bar{g}_{(j)}\}$ образуют дифференциальные идеалы относительно их Ли-дифференцирования вдоль семейств полей $\{X_{(j)}\}$ и $\{\bar{X}_{(j)}\}$ соответственно. Это свойство позволяет сформулировать ряд утверждений относительно симметрии римановых метрик $g_{(j)}$ и $\bar{g}_{(j)}$.

1. Пусть для некоторых фиксированных i и j $c_{ij}^k = 0$ для всех k . Другими словами, пусть поля $X_{(i)}$ и $X_{(j)}$ коммутируют. Тогда, как это следует из (1), *изометрия $X_{(j)}$ метрики Бервальда-Моора одновременно является изометрией римановой метрики $g_{(j)}$, соприкасающейся с ней вдоль $X_{(j)}$* . Эта ситуация наглядно иллюстрируется примерами разделов 2.1 и 2.2.
2. Рассмотрим векторное X поле в виде линейной комбинации полей из алгебры изометрий: $X = \alpha_s X_{(s)}$. Вычисляя производную Ли метрики $g_{(j)}$ вдоль X аналогично предыдущему пункту, приходим к равенству:

$$L_X g_{(j)} = \alpha_s c_{sj}^k g_{(k)}.$$

Отсюда следует, что выполнение системы равенств $\alpha_s c_{sj}^k = 0$ для некоторого набора коэффициентов $\{\alpha_s\}$ при некотором j и всех k является достаточным условием для того, чтобы X было изометрией. Таким образом, *если для некоторого j выполняется равенство:*

$$\det(c_{ij}^k) = 0 \quad (18)$$

(c_{ij}^k рассматривается как матрица по индексам k и i), *то для метрики $g_{(j)}$ существует изометрия, построенная в виде линейной комбинации изометрий метрики Бервальда-Моора: $X = \alpha_s X_{(s)}$* . В силу антисимметрии структурных констант справедливо и следующее утверждение: *если для некоторого j выполняется равенство (18), то существует набор констант α_s , таких, что поле $X_{(j)}$ будет изометрией римановой метрики $\alpha_s g_{(s)}$* .

3. Предположим, что поле Y лежит в алгебре конформной симметрии метрики Бервальда-Моора и его коммутатор с другим полем из той же алгебры удовлетворяет условию:

$$[Y, \bar{X}_{(j)}] = \psi \bar{X}_{(j)}, \quad (19)$$

где ψ — некоторая функция. По определению $L_Y G = \phi G$. В силу этого равенства и (19) получаем следующую цепочку равенств для производной Ли метрики $\bar{g}_{(j)}$:

$$L_Y \bar{g}_{(j)} = (L_Y G)G(\bar{X}_{(j)}, \cdot, \cdot) + G([Y, \bar{X}_{(j)}], \cdot, \cdot) = (\phi + \psi)\bar{g}_{(j)}.$$

Таким образом, при условии (19) поле Y конформной симметрии метрики Бервальда-Моора становится полем конформной симметрии для метрики $g_{(j)}$. При дополнительном условии $\phi = -\psi$ это поле будет полем изометрии метрики $g_{(j)}$.

4. Вычисление производной Ли метрики $\bar{g}_{(j)}$ вдоль поля конформной симметрии вида $\alpha_s \bar{X}_{(s)}$ приводит к цепочке равенств:

$$L_{\alpha_s X_{(s)}} \bar{g}_{(j)} = \alpha_s \phi_s \bar{g}_{(j)} + \alpha_s \bar{c}_{sj}^k \bar{g}_{(s)} = \alpha_s (\phi_s \delta_j^k + \bar{c}_{sj}^k) g_{(k)}.$$

Отсюда следует: если для некоторого набора функций $\{\alpha_s\}$ выполняется равенство

$$\alpha_s (\phi_s \delta_j^k + \bar{c}_{sj}^k) g_{(k)} = \psi \bar{g}_{(j)},$$

то поле $\alpha_s \bar{X}_{(s)}$ является полем конформной симметрии метрики $\bar{g}_{(j)}$.

5. Вычисляя производную Ли вдоль поля Y конформной симметрии метрики $\bar{g}_{(j)}$, приходим к следующей цепочке равенств:

$$L_Y \bar{g}_{(j)} = (L_Y G)(\bar{X}_{(j)}, \cdot, \cdot) + G([Y, \bar{X}_{(j)}], \cdot, \cdot) = \phi G(\bar{X}_{(j)}, \cdot, \cdot),$$

откуда получаем:

$$(L_Y G)(\bar{X}_{(j)}, \cdot, \cdot) = G(\phi \bar{X}_{(j)} - [Y, \bar{X}_{(j)}], \cdot, \cdot) \quad (20)$$

— условие соприкасающейся конформной симметрии, записанное в терминах исходной метрики Бервальда-Моора, обобщающее условие конформной симметрии (19).

Заключение

Обсуждаемый в настоящей статье формализм соприкосновения метрик является важным (хотя и неединственным) "мостиком", связывающим кубическую геометрию Бервальда-Моора с более привычными римановыми многообразиями с квадратичной метрикой. Поскольку поля симметрий метрики Бервальда-Моора однозначно определяются самой метрикой Бервальда-Моора, то в целом конструкция соприкосновения свободна от какого-либо произвола, который мог бы существовать в случае, если опорные поля выбирались бы произвольно. Наше рассмотрение обнаруживает, что риманова метрика, соприкасающаяся с метрикой Бервальда-Моора в некоторой степени наследует те симметрии, которые существовали в исходном пространстве $\mathcal{H}_3$. При этом (как правило) изометрии римановой метрики богаче изометрий метрики Бервальда-Моора, в то время как конформная группа первой метрики существенно беднее конформной группы второй, поскольку последняя вообще бесконечномерна.

Общие идеи подхода соприкосновения применимы и к высшим пространствам $\mathcal{H}_n$. В частности, соприкосновение римановой метрики в $\mathcal{H}_4$ потребует задания пары опорных векторных полей. Для пары постоянных векторных полей действие группы изометрий позволяет сократить число существенных параметров с 8 до 5. При этом, как показывают предварительные оценки, проведенные в рамках $\mathcal{H}_4$, за счет выбора этих параметров можно добиться, чтобы соприкасающаяся плоская метрика оказалась любого из известных классических типов с симметриями $O(4)$, $O(1, 3)$, $O(2, 2)$, $\text{Sp}(2)$ и прямых сумм $\text{Sp}(1) \oplus O(2)$ и $\text{Sp}(1) \oplus O(1, 1)$. С увеличением номера n число возможных соприкасающихся симметрий растет.

За пределами внимания настоящей статьи остался ряд интересных вопросов:

1) Каковы характерные математические и физические свойства римановых метрик, соприкасающихся с метриками Бервальда-Моора? Опираясь на исследования настоящей статьи, можно высказать предположение, что одним из таких свойств является *богатство группы конформных симметрий*.

2) Каковы связи между геометрическими объектами в $\mathcal{H}_3$ и соприкасающихся римановых метриках? В частности, как связаны структуры параллельного переноса или ковариантной производной?

3) Как зависят свойства римановой метрики от свойств опорных векторных полей?

Следует отметить аналогию между теорией погружения римановых многообразий и теорией соприкосновения римановых многообразий с финслеровыми пространствами и, в частности, с пространствами Бервальда-Моора. По всей видимости, в финслеровой геометрии последние играют роль, аналогичную плоским пространствам в римановой геометрии. Напомним, что изометричное погружение риманова многообразия V_m в риманово многообразие V_n ($m < n$) определяется набором n функций от m координат, т.е. имеет ∞^{nm-m^2} степеней свободы, где мы учли, что задание погружения допускает произвольную параметризацию посредством m функций от m переменных на самом подмногообразии. Функции погружения определяют положение поверхности V_m в V_n и задают метрику на V_m посредством стандартной операции сужения метрики на подмногообразии. В случае конструкции соприкосновения мы имеем дело с многомерием иного рода: оно заключено в многомерности финслеровой метрической формы. При этом, каждая соприкасающаяся с $\mathcal{H}_n$ риманова метрика получается заданием $n - 2$ опорных векторных полей, но остается n -мерной в обычном смысле этого слова, как и исходная метрика Бервальда-Моора (в обоих смыслах).

Отметим, наконец, что определив симметрию соприкасающейся римановой метрики, ее векторное поле можно использовать в качестве опорного и, таким образом, перейти к соприкасающейся римановой метрике второго поколения, у которой будут свои симметрии. Используя соответствующие им поля в качестве опорных, можно переходить к римановым метрикам третьего поколений и т.д. Вся эта иерархия поколений соприкасающихся метрик так же свободна от какого-либо произвола, как и исходная конструкция соприкосновения (первого поколения). На уровне физических приложений римановы метрики различных поколений в конструкции соприкосновения могут описывать различные аспекты одной и той же физической системы. Мы оставляем вопрос о физических приложениях римановых метрик высших поколений и об их свойствах симметрий для будущих исследований.

Литература

- [1] Х. Рунд, *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств*, М., Наука, 1981
- [2] Г. Ю. Богословский, *Теория локально-анизотропного пространства-времени*, МГУ, 1992
- [3] Г. С. Асанов, *Финслероидная геометрия*, М., физфак МГУ, 2006
- [4] Д. Г. Павлов, *ГКЧГФ*, **1**, 5 (2004)
- [5] Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов, *ГКЧГФ*, **4**, 3 (2007)
- [6] Д. Г. Павлов, Г. И. Гарасько, *ГКЧГФ*, **3**, 3 (2005)
- [7] Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев, *Конформные калибровки геометрии Бервальда-Моора и индуцированные ими нелинейные симметрии*, в настоящем номере *ГКЧГФ*.

**Riemannian metrics, having contact to the 3-dimensional
Finslerian Berwald-Moor metric**

D. G. Pavlov, S. S. Kokarev

*MSTU n. a. N. E. Bauman; RSEC Logos, Yaroslavl
hypercomplex@mail.ru, logos-distant@mail.ru*

The general construction of the contact of a Finslerian metric and a Riemannian one, and its applications to geometry of the space $\mathcal{H}_3$, is examined. It is shown that the osculating Riemannian metric, in a certain sense, maintains the symmetry of the original Finslerian metric, and, in particular, has a rich associated conformal group. It is proved that among the 3-dimensional Riemannian metrics, which have contact along the fields of symmetry of the Berwald-Moor metric in $\mathcal{H}_3$, there exist no Euclidean metric.

Key-words: Riemannian metric, Finslerian metric, contact, Berwald-Moor metric.

MSC: 53B40, 53B20, 70G45.

АДДИТИВНЫЕ УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{H}_3$

Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев

Институт гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Москва,

РНОЦ "Логос", Ярославль

geom2004@mail.ru, logos-distant@mail.ru

Исследуется возможность построения аддитивных полиуглов (бинглов и тринглов) в рамках геометрии Бервальда-Моора $\mathcal{H}_3$. Показано, что при определенном (обобщенном) понимании условия аддитивности, таких полиуглов существует бесчисленное множество.

Ключевые слова: аддитивные полиуглы, метрика Бервальда-Моора, Финслеровы пространства.

1 Введение

Традиционными элементарными мерами евклидовой геометрии являются длина и угол. Оба понятия определяются посредством фундаментальной метрической формы — скалярного произведения векторов $\eta: V \times V \rightarrow R$, которое в дальнейшем для любой пары векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать $\eta(\vec{a}, \vec{b})$. Здесь V — линейное вещественное векторное пространство некоторой конечной размерности. Евклидово скалярное произведение обладает тремя характерными свойствами:

1. $\eta(\vec{a}, \vec{b}) = \eta(\vec{b}, \vec{a})$ (симметричность);
2. $\eta(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \vec{c}) = \lambda\eta(\vec{a}, \vec{c}) + \mu\eta(\vec{b}, \vec{c})$ (билинейность);
3. $\eta(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0$ ($= 0$, только при $\vec{a} = 0$) (евклидовость).

Здесь $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — произвольные векторы, λ, μ — произвольные вещественные числа. Скалярное произведение с такими свойствами позволяет корректно определить длину (норму) вектора $|\vec{a}|$ и угол $\varphi(\vec{a}, \vec{b})$ между любой парой ненулевых векторов по формулам:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\eta(\vec{a}, \vec{a})}; \quad \varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{\eta(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \quad (1)$$

Определенные таким образом числовые меры векторов и их взаимного расположения в силу аксиом скалярного произведения удовлетворяют следующим привычным свойствам:

1. обе меры инвариантны относительно группы движений евклидового пространства (вращений, трансляций и отражений);
2. мера угла инвариантна относительно действия более широкой группы конформных симметрий евклидова пространства, которая, помимо элементов группы движений, включает в себя однородные растяжения осей координат;
3. норма удовлетворяет неравенству треугольника: $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$, причем равенство имеет место только в случае коллинеарных (сонаправленных) векторов и это равенство выражает принцип аддитивности евклидовой длины отрезка;
4. свойство евклидовости скалярного произведения гарантирует корректность определения косинуса:

$$\left| \frac{\eta(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} \right| \leq 1;$$

5. имеет место аддитивность углов:

$$\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi(\vec{a}, \vec{c}) + \varphi(\vec{c}, \vec{b}), \quad (2)$$

для всякой тройки ненулевых векторов c

$$\text{vol}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0, \quad (3)$$

где vol — форма объема (смешанное произведение), если угол считать ориентированным и, например, направление от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ считать положительным;

6. мера угла симметрична, т. е.:

$$\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi(\vec{b}, \vec{a}). \quad (4)$$

Целью настоящей статьи является построение финслерова обобщения понятия угла в рамках 3-мерного пространства Бервальда-Моора $\mathcal{H}_3$, возникающего при рассмотрении коммутативно-ассоциативных алгебр [17]. Основным геометрическим объектом в пространстве $\mathcal{H}_3$ является метрика Бервальда-Моора:

$${}^3G = \hat{S}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3) \quad (5)$$

где $\hat{S}$ — оператор симметризации (без числового множителя). Опираясь на соображения конформной инвариантности и аддитивности, мы исследуем возможность построения углов в $\mathcal{H}_3$. Наш анализ показывает, что геометрия углов в $\mathcal{H}_3$ в определенном смысле богаче геометрии углов в евклидовом пространстве. Вместе с общими точными выражениями для всех видов углов в $\mathcal{H}_3$ мы получаем и соответствующие группы их симметрий, которые также оказываются богаче группы конформной симметрии евклидовой метрики.

2 Аддитивные углы евклидовой и псевдоевклидовой геометрии

Прежде чем приступать к исследованию углов в $\mathcal{H}_3$, продемонстрируем общую идею этого исследования на примере следующей более простой задачи: *найти все аддитивные и конформно-инвариантные углы евклидовой геометрии*. Другими словами, забудем на время про второе определение в (1) и попробуем прийти к нему (или к его обобщению), опираясь лишь на упомянутые свойства конформной инвариантности и аддитивности. Для решения этой задачи заметим, что для любой пары векторов $\vec{a}, \vec{b}$ в евклидовом пространстве существует лишь две функционально независимых конформно-инвариантных комбинации, связанных с евклидовой формой:

$$w_b^a \equiv \frac{\eta(\vec{a}, \vec{b})}{\eta(\vec{a}, \vec{a})} \quad \text{и} \quad w_a^b \equiv \frac{\eta(\vec{a}, \vec{b})}{\eta(\vec{b}, \vec{b})}. \quad (6)$$

Искомый угол должен определяться теперь некоторой универсальной функцией этих переменных:

$$\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = f(w_b^a, w_a^b).$$

Для любого третьего ненулевого вектора $\vec{c}$, удовлетворяющего условию компланарности (3), условие аддитивности угла (2) примет вид:

$$f(w_b^a, w_a^b) = f(w_c^a, w_a^c) + f(w_b^c, w_c^b). \quad (7)$$

Для того, чтобы перевести это соотношение на язык координат и затем на язык функциональных уравнений в пространстве функций числовой переменной, выберем декартову

систему координат таким образом, чтобы $\vec{a} = (a, 0, 0, \dots, 0)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, 0, \dots, 0)$. Условие компланарности векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ эквивалентно условию:

$$\vec{c} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} = (\alpha_1 a + \alpha_2 b_1, \alpha_2 b_2, 0, \dots, 0),$$

так что, фактически, речь можно вести о евклидовой геометрии на плоскости. Простые вычисления конформно-инвариантных комбинаций, входящих в (7), приводят к выражениям:

$$w_b^a = \frac{b_1}{a}; \quad w_a^b = \frac{ab_1}{b_1^2 + b_2^2}; \quad w_c^a = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{b_1}{a}; \quad w_a^c = \frac{(\alpha_1 a + \alpha_2 b_1)a}{(\alpha_1 a + \alpha_2 b_1)^2 + (\alpha_2 b_2)^2};$$

$$w_b^c = \frac{(\alpha_1 a + \alpha_2 b_1)b_1 + \alpha_2 b_2^2}{(\alpha_1 a + \alpha_2 b_1)^2 + (\alpha_2 b_2)^2}; \quad w_c^b = \frac{(\alpha_1 a + \alpha_2 b_1)b_1 + \alpha_2 b_2^2}{b_1^2 + b_2^2}.$$

Подставляя эти выражения в (7) и вводя обозначения: $b_1/a = \xi$, $b_2/a = \eta$, мы приходим к следующему функциональному уравнению, выражающему условие аддитивности угла:

$$f\left(\xi, \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}\right) = f\left(\alpha_1 + \alpha_2 \xi, \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \xi}{(\alpha_1 + \alpha_2 \xi)^2 + (\alpha_2 \eta)^2}\right) +$$

$$f\left(\frac{(\alpha_1 + \alpha_2 \xi)\xi + \alpha_2 \eta^2}{(\alpha_1 + \alpha_2 \xi)^2 + (\alpha_2 \eta)^2}, \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 \xi)\xi + \alpha_2 \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}\right). \quad (8)$$

Разумеется, путем довольно громоздких подстановок с учетом тождества: $\arccos x + \arccos y = \arccos[xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}]$, можно непосредственно убедиться, что уравнение (8) имеет решение вида: $f(w_1, w_2) = \arccos \sqrt{w_1 w_2}$, соответствующее стандартному определению угла (1). Для иллюстрации нетривиальности поставленной задачи мы проведем последовательный анализ уравнения (8). Поскольку это уравнение должно удовлетворяться при всех значениях переменных $\eta, \xi, \alpha_1, \alpha_2$, то оно тем более должно выполняться и на некоторых подмногообразиях пространства этих переменных. Рассмотрим это уравнение на подмногообразии $\eta = 0$:

$$f(\xi, 1/\xi) = f(\alpha_1 + \alpha_2 \xi, (\alpha_1 + \alpha_2 \xi)^{-1}) + f\left(\frac{\xi}{\alpha_1 + \alpha_2 \xi}, \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \xi}{\xi}\right). \quad (9)$$

Вводя обозначение $\alpha_1 + \alpha_2 \xi = x$, уравнение (9) можно переписать в виде:

$$f(\xi, 1/\xi) = f(x, 1/x) + f(\xi/x, x/\xi). \quad (10)$$

Уравнение (10) должно выполняться при всех значениях переменных ξ, x . Вводя обозначение $f(w, 1/w) \equiv F(w)$, приходим к эквивалентному уравнению:

$$F(\xi) = F(x) + F(\xi/x), \quad (11)$$

которое также должно выполняться при всех ξ, x . Предполагая гладкость функции F и дифференцируя уравнение (11) последовательно по x и по ξ , приходим к дифференциальному следствию (11):

$$\frac{\partial^2 F(\xi/x)}{\partial x \partial \xi} = 0$$

или

$$F''u + F' = 0, \quad (12)$$

где $u = \xi/x$, а штрих обозначает дифференцирование по всему аргументу. Уравнение (12) имеет общее решение вида:

$$F(u) = C_1 \ln u + C_2, \quad (13)$$

где C_1, C_2 — произвольные константы. Покажем, что решение $F = C_2 = \text{const}$ соответствует стандартному определению угла (1). Действительно, вспоминая, что $F(x) = f(x, 1/x)$, приходим к заключению, что функция $f(w_1, w_2) = \text{const}$ при $w_1 = x$ и $w_2 = 1/x$ и всех значениях x в случае, когда она зависит от w_1 и w_2 в виде их произведения:

$$f(w_1, w_2) = \psi(w_1 w_2). \quad (14)$$

При этом в силу (10) $\psi(1) = 0$. Вернемся теперь к уравнению (8). Используя в нем представление (14) и рассматривая получившееся уравнение на подмногообразии $\alpha_1 = \alpha_2$, приходим к уравнению вида:

$$\psi\left(\frac{\xi^2}{\xi^2 + \eta^2}\right) = \psi\left(\frac{(1 + \xi)^2}{(1 + \xi)^2 + \eta^2}\right) + \psi\left(\frac{((1 + \xi)\xi + \eta^2)^2}{((1 + \xi)^2 + \eta^2)(\xi^2 + \eta^2)}\right). \quad (15)$$

Перейдем к новым переменным:

$$u = \frac{\xi^2}{\xi^2 + \eta^2}; \quad v = \frac{(1 + \xi)^2}{(1 + \xi)^2 + \eta^2}.$$

В этих переменных уравнение (15) принимает более простой вид:

$$\psi(u) = \psi(v) + \psi((\sqrt{(v-1)(u-1)} + \sqrt{uv})^2). \quad (16)$$

Дифференцируя это уравнение последовательно по u и по v , приходим к дифференциальному следствию (16):

$$\frac{\partial^2}{\partial v \partial u} (\psi(\sqrt{(v-1)(u-1)} + \sqrt{uv})^2) = 0$$

или после некоторых элементарных преобразований к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$(1 - \zeta^2)\bar{\psi}''(\zeta) - \zeta\bar{\psi}'(\zeta) = 0, \quad (17)$$

где $\zeta = \sqrt{(v-1)(u-1)} + \sqrt{uv}$, $\bar{\psi}(x) \equiv \psi(x^2)$. Уравнение (17) интегрируется элементарно и его общее решение имеет вид:

$$\bar{\psi}(\zeta) = A \arcsin \zeta + B \Rightarrow \psi(x) = A \arcsin \sqrt{x} + B. \quad (18)$$

С учетом условия $\psi(1) = 0$, получаем $B = -\pi A/2$, откуда приходим к окончательному виду решения:

$$\psi(x) = A(\arcsin \sqrt{x} - \pi/2) = A \arccos \sqrt{x},$$

что, с точностью до выбора единицы измерения угла, задаваемой параметром A , эквивалентно второму определению (1).

Перейдем теперь к исследованию второго независимого решения, которому в (13) соответствует логарифм. Рассмотрим общее уравнение (8) на подмногообразии $\alpha_1 = 0$:

$$f\left(\xi, \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}\right) = f\left(\alpha_2 \xi, \frac{\xi}{\alpha_2(\xi^2 + \eta^2)}\right) + f(1/\alpha_2, \alpha_2). \quad (19)$$

Если дополнительно ограничить переменные подмногообразием: $\xi/(\xi^2 + \eta^2) = k/\xi$, где $k = \text{const}$ и учесть, что для рассматриваемой ветви решения, как это было установлено выше, $f(x, 1/x) = C \ln x$ то соотношение (19) примет вид:

$$f(\xi, k/\xi) = f(\alpha_2 \xi, k/\alpha_2 \xi) + C \ln \alpha_2.$$

Вводя обозначение $\Phi_k(\xi) \equiv f(\xi, k/\xi)$, последнее уравнение можно переписать в виде:

$$\Phi_k(\alpha\xi) = \Phi_k(\xi) - C \ln \alpha,$$

для всех ξ , α и k . Последнее уравнение решается аналогично (11) и общее решение имеет вид:

$$\Phi_k(\xi) = \ln(\xi^{-C}) + B_k,$$

где B_k — произвольная функция k . Вспоминая, что $\Phi_k(\xi) = f(\xi, k/\xi)$ и сопоставляя это выражение с полученным решением, мы приходим к выводу, что функция $f(w_1, w_2)$ может зависеть от своих аргументов следующим образом (мы опускаем аддитивную константу, поскольку она соответствует уже разобранный выше ветви с арккосинусом):

$$f(w_1, w_2) = \ln w_1^A w_2^B + \varphi(w_1 w_2), \quad (20)$$

где A, B — пока еще произвольные вещественные числа, φ — произвольная функция, описывающая уже исследованную ветвь решения. Для уточнения значений констант подставим решение (20) (опуская слагаемое с φ) в общее уравнение (8). В результате придем к уравнению, которое выполняется тождественно при всех значениях переменных только при условии $A = -B$. При этом $f(w_1, w_2) = A \ln(w_1/w_2)$.

Полученные в этом разделе результаты сформулируем в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. *Существует пара линейно-независимых конформно-инвариантных аддитивных выражений для угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в евклидовой геометрии:*

$$\varphi_1(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \left[\frac{\eta(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} \right]; \quad \varphi_2(\vec{a}, \vec{b}) = \ln \left[\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \right]. \quad (21)$$

При этом

$$\varphi_1(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi_1(\vec{b}, \vec{a}); \quad \varphi_2(\vec{a}, \vec{b}) = -\varphi_2(\vec{b}, \vec{a})$$

и общее выражение для "аддитивного конформно-инвариантного угла" в евклидовой геометрии дается суперпозицией независимых выражений:

$$\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = C_1 \varphi_1(\vec{a}, \vec{b}) + C_2 \varphi_2(\vec{a}, \vec{b}),$$

где C_1, C_2 — произвольные константы.

Отметим, что повторяя почти дословно все рассуждения настоящего раздела, можно сформулировать утверждение для псевдоевклидовой плоскости, аналогичное утверждению 1.

Утверждение 2. *Существует пара линейно-независимых конформно-инвариантных аддитивных выражений для угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в псевдоевклидовой геометрии (η — псевдоевклидова метрика на плоскости):*

$$\varphi_1(\vec{a}, \vec{b}) = \operatorname{arcch} \left[\frac{\eta(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} \right]; \quad \varphi_2(\vec{a}, \vec{b}) = \ln \left[\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \right]. \quad (22)$$

При этом

$$\varphi_1(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi_1(\vec{b}, \vec{a}); \quad \varphi_2(\vec{a}, \vec{b}) = -\varphi_2(\vec{b}, \vec{a})$$

и общее выражение для "аддитивного конформно-инвариантного угла" в псевдоевклидовой геометрии дается суперпозицией независимых выражений:

$$\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = C_1 \varphi_1(\vec{a}, \vec{b}) + C_2 \varphi_2(\vec{a}, \vec{b}),$$

где C_1, C_2 — произвольные константы.

Строго говоря, при переходе к формулам (14) и (20) мы рассмотрели не самый общий случай, поэтому утверждение об общности выражений (21) и (22) требует дополнительного обоснования. Дело в том, что добавка вида $(w_1 w_2 - 1)\varphi(w_1, w_2)$ к функциям (14) и (20), где $\varphi(w_1, w_2)$ конечна при $w_1 w_2 = 1$, не меняет условий, которые были выведены на эти функции ранее, поскольку эта добавка обращается в нуль при $w_1 w_2 = 1$. Докажем, что $\varphi \equiv 0$. Подставляя $f = (w_1 w_2 - 1)\varphi(w_1, w_2)$ в общее уравнение (8), после некоторых упрощений получим:

$$\frac{\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \varphi\left(\xi, \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}\right) = \frac{(\alpha_2 \eta)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2 \xi)^2 + (\alpha_2 \eta)^2} \varphi\left(\alpha_1 + \alpha_2 \xi, \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \xi}{(\alpha_1 + \alpha_2 \xi)^2 + (\alpha_2 \eta)^2}\right) + \quad (23)$$

$$\frac{(\alpha_1 \eta)^2}{((\alpha_1 + \alpha_2 \xi)^2 + (\alpha_2 \eta)^2)(\xi^2 + \eta^2)} \varphi\left(\frac{(\alpha_1 + \alpha_2 \xi)\xi + \alpha_2 \eta^2}{(\alpha_1 + \alpha_2 \xi)^2 + (\alpha_2 \eta)^2}, \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 \xi)\xi + \alpha_2 \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}\right).$$

Рассмотрим это уравнение сначала на подмногообразии $\alpha_1 = 0$. После сокращения на общий множитель, получим уравнение:

$$\varphi\left(\xi, \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}\right) = \varphi\left(\alpha_2 \xi, \frac{\xi}{\alpha_2(\xi^2 + \eta^2)}\right),$$

откуда в точности следует, что функция φ может зависеть от своих аргументов только в их комбинации произведения: $\varphi = \varphi(w_1 w_2)$. Подставляя такое представление в уравнение (23) и рассматривая это уравнение на подмногообразии $\xi = 0$, придем после переобозначения переменных к уравнению:

$$\varphi(0) = y\varphi(x) + x\varphi(y).$$

Это уравнение может выполняться тождественно при всех x и y только при $\varphi \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, выражения (21) и (22) в действительности представляют собой самые общие выражения аддитивных углов на евклидовой и псевдоевклидовой плоскости соответственно. При этом, как легко видеть, аддитивность $\varphi_2(\vec{a}, \vec{b})$ выполняется безусловно, т. е. для всякой тройки векторов, а не только для компланарной тройки.

3 Аддитивный бингл в $\mathcal{H}_3$: аффинная версия

В пространстве Бервальда-Моора существует естественная возможность ввести два типа углов: углы, построенные на паре векторов (*бинглы*) и углы, построенные, на тройке векторов (*тринглы*). Последние представляют собой принципиально новые объекты, связанные с кубичным характером метрики (1.1) в $\mathcal{H}_3$, у которых нет прямых аналогов в евклидовой геометрии. В настоящем разделе мы займемся систематическим отысканием бинглов в $\mathcal{H}_3$.

По аналогии с евклидовым случаем, рассмотрим элементарные конформно-инвариантные комбинации, построенные на паре векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с помощью метрики Бервальда-Моора 3G :

$$w_a^a \equiv \frac{{}^3G(\vec{a}, \vec{a}, \vec{b})}{{}^3G(\vec{a}, \vec{a}, \vec{a})}; \quad w_b^a \equiv \frac{{}^3G(\vec{a}, \vec{a}, \vec{b})}{{}^3G(\vec{b}, \vec{b}, \vec{b})}; \quad w_a^b \equiv \frac{{}^3G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b})}{{}^3G(\vec{a}, \vec{a}, \vec{a})}; \quad w_b^b \equiv \frac{{}^3G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b})}{{}^3G(\vec{b}, \vec{b}, \vec{b})}.$$

Переходя к координатам векторов: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и вводя обозначения $\xi_i \equiv b_i/a_i$ ($i = 1, 2, 3$), получаем:

$$w_a^a = \frac{1}{3}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3); \quad w_b^a = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\xi_1 \xi_2} + \frac{1}{\xi_1 \xi_3} + \frac{1}{\xi_2 \xi_3}\right); \quad w_a^b = \frac{1}{3}(\xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_3);$$

$$w_b^b = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \frac{1}{\xi_3} \right).$$

С учетом того что,

$$\frac{w_a^a}{w_b^a} = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \quad \text{и} \quad w_b^b = \frac{w_a^b w_b^a}{w_a^a},$$

в качестве независимых конформно-инвариантных переменных можно выбрать три симметрических полинома:

$$w_1^{ab} = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3; \quad w_2^{ab} = \xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_3; \quad w_3^{ab} = \xi_1 \xi_2 \xi_3, \quad (24)$$

при этом угол $\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = f(w_1^{ab}, w_2^{ab}, w_3^{ab})$, где f — функция, подлежащая определению.

По аналогии с евклидовым случаем, свойство аддитивности угла в пространстве $\mathcal{H}_3$ следует формулировать не на произвольной тройке векторов, а на тройке, связанной некоторым соотношением. В случае евклидовой или псевдоевклидовой геометрии таким соотношением выступало соотношение компланарности. В геометрии $\mathcal{H}_3$ мы, вообще говоря, не можем ожидать, что плоскости в ней играют такую же роль, как в геометриях с квадратичной метрикой. Тем не менее, в настоящем разделе мы исследуем возможность построения аддитивного угла для тройки компланарных в обычном смысле векторов. Будем обозначать такую ситуацию *аффинной версией аддитивного угла*.

Пусть третий вектор $\vec{c}$ лежит в плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1, \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2, \alpha_1 a_3 + \alpha_2 b_3). \quad (25)$$

Условие аддитивности принимает вид:

$$f(w_1^{ab}, w_2^{ab}, w_3^{ab}) = f(w_1^{ac}, w_2^{ac}, w_3^{ac}) + f(w_1^{cb}, w_2^{cb}, w_3^{cb}), \quad (26)$$

которое должно иметь место для всех (неизотропных) векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и всякого вектора $\vec{c}$ вида (25). Вычисляя w_i^{ac} и w_i^{cb} с помощью (25) и подставляя результат в (26), приходим после некоторых упрощений к следующему функциональному уравнению:

$$f(w_1, w_2, w_3) = f(3\alpha_1 + \alpha_2 w_1, 3\alpha_1^2 + \alpha_2^2 w_2 + 2\alpha_1 \alpha_2 w_1, \Delta) + \quad (27)$$

$$f\left(\frac{\alpha_1^2 w_1 + 3\alpha_2^2 w_3 + 2\alpha_1 \alpha_2 w_2}{\Delta}, \frac{\alpha_1 w_2 + 3\alpha_2 w_3}{\Delta}, \frac{w_3}{\Delta}\right),$$

выражающее в явном координатном виде условие аддитивности угла. Здесь

$$\Delta \equiv \alpha_1^3 + \alpha_2^3 w_3 + \alpha_1^2 \alpha_2 w_1 + \alpha_1 \alpha_2^2 w_2.$$

Рассмотрим соотношение (27), которое как и прежде, должно выполняться при всех значениях пяти переменных $w_1, w_2, w_3, \alpha_1, \alpha_2$, на двумерном подмногообразии, определяемом соотношениями:

$$w_1 = -\frac{3\alpha_1}{\alpha_2}; \quad w_2 = \frac{3\alpha_1^2}{\alpha_2^2}; \quad w_3 = \frac{1 - \alpha_1^3}{\alpha_2^3}.$$

На этом подмногообразии уравнение (27) принимает следующий более простой вид:

$$f\left(-\frac{3\alpha_1}{\alpha_2}, \frac{3\alpha_1^2}{\alpha_2^2}, \frac{1 - \alpha_1^3}{\alpha_2^3}\right) = f(0, 0, 1) + f\left(\frac{3}{\alpha_2}, \frac{3}{\alpha_2^2}, \frac{1 - \alpha_1^3}{\alpha_2^3}\right)$$

или, вводя переменные $\alpha_1 = x, \alpha_2 = 1/y$:

$$f(-3xy, 3x^2y^2, (1 - x^3)y^3) = f(0, 0, 1) + f(3y, 3y^2, (1 - x^3)y^3).$$

Полагая в этом уравнении $y = 0$, приходим к равенству $f(0, 0, 1) = 0$, так что, на самом деле, мы имеем дело с уравнением:

$$f(-3xy, 3x^2y^2, (1-x^3)y^3) = f(3y, 3y^2, (1-x^3)y^3).$$

Дифференцируя обе части этого уравнения по x и полагая затем $x = -1$ после переобозначения переменных приходим к уравнению в частных производных первого порядка:

$$x_1 \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} = 0.$$

Интегрируя его методом характеристик, приходим к следующей зависимости:

$$f(w_1, w_2, w_3) = \psi(w_1^2/w_2, w_3), \quad (28)$$

где ψ — некоторая функция, зависящая уже только от двух переменных.

Подставляя эту зависимость в исходное уравнение (27) и рассматривая его на подмногообразии $\alpha_1 = 0$, приходим теперь к следующему уравнению:

$$\psi\left(\frac{w_1^2}{w_2}, w_3\right) = \psi\left(\frac{w_1^2}{w_2}, \alpha_2^3 w_3\right) + \psi\left(3; \frac{1}{\alpha_2^3}\right).$$

Из этого соотношения следует, что относительно второго аргумента зависимость логарифмическая, и, таким образом:

$$\psi(w_1^2/w_2, w_3) = \chi(w_1^2/w_2) \ln w_3 + C(w_1^2/w_2).$$

Для определения оставшихся функций χ и C подставим это выражение в предыдущее. Окончательно, находим:

$$C = 0, \quad \chi = \text{const}. \quad (29)$$

Для полноты картины остается исследовать случаи, когда аддитивный угол с самого начала предполагается зависящим не от всех переменных w_1, w_2, w_3 , а только от их части. Предположим, что ${}^3\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = f(w_1, w_2)$. Пользуясь общей формулой (27), приходим в этом случае к условию аддитивности вида:

$$f(w_1, w_2) = f(3\alpha_1 + \alpha_2 w_1, 3\alpha_1^2 + \alpha_2^2 w_2 + 2\alpha_1 \alpha_2 w_1) + f\left(\frac{\alpha_1^2 w_1 + 3\alpha_2^2 w_3 + 2\alpha_1 \alpha_2 w_2}{\Delta}, \frac{\alpha_1 w_2 + 3\alpha_2 w_3}{\Delta}\right). \quad (30)$$

Дифференцируя частным образом это соотношение по w_3 , приходим к уравнению:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}(3\alpha_1^2 \Delta - (\alpha_1^2 w_1 + 3\alpha_2^2 w_3 + 2\alpha_1 \alpha_2 w_2)\alpha_2^3) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(3\alpha_2 \Delta - (\alpha_1 w_2 + 3\alpha_2 w_3)\alpha_2^3) = 0,$$

где посредством u_1 и u_2 обозначены аргументы функции f во втором слагаемом правой части (42). Рассмотрим это уравнение на подмногообразии $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$:

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial u_1} \left(\frac{w_1 + 3w_3 + 2w_2}{\alpha(1 + w_1 + w_2 + w_3)}, \frac{w_2 + 3w_3}{\alpha(1 + w_1 + w_2 + w_3)} \right) (3 + 2w_1 + w_2) + \frac{\partial f}{\partial u_2} \left(\frac{w_1 + 3w_3 + 2w_2}{\alpha(1 + w_1 + w_2 + w_3)}, \frac{w_2 + 3w_3}{\alpha(1 + w_1 + w_2 + w_3)} \right) (3 + 3w_1 + 2w_2) = 0.$$

Переходя к новым переменным u_1 и u_2 , перепишем уравнение в виде:

$$\alpha(u_1\alpha - 3)\frac{\partial f}{\partial u_1} + (u_2\alpha - 3)\frac{\partial f}{\partial u_2} = 0.$$

Решая его методом характеристик, находим, что

$$f(u_1, u_2) = F\left(\frac{u_1 - 3/\alpha}{u_2 - 3/\alpha^2}\right).$$

Но универсальная функция угла не может зависеть от координат α_1 и α_2 произвольного третьего вектора. Отсюда приходим к тривиальному выводу, что $f = \text{const}$.

Пусть теперь ${}^3\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = f(w_1, w_3)$. Пользуясь общей формулой (27), приходим в этом случае к условию аддитивности вида:

$$f(w_1, w_3) = f(3\alpha_1 + \alpha_2 w_1, \Delta) + f\left(\frac{\alpha_1^2 w_1 + 3\alpha_2^2 w_3 + 2\alpha_1 \alpha_2 w_2}{\Delta}, \frac{w_3}{\Delta}\right). \quad (31)$$

Рассмотрим это уравнение на подмногообразии: $3\alpha_1 + \alpha_2 w_1 = 0$, $\Delta = 1$. Эту пару уравнений можно рассматривать как определяющую α_1 и α_2 . Выражая из уравнений подмногообразия эти параметры, подставляя их в уравнение (31) и дифференцируя частным образом обе его части по w_2 , приходим к уравнению вида:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot (\dots) = 0,$$

где скобки с точками заменяют громоздкое выражение, которое зависит от w_1, w_2, w_3 и не обращается всюду в нуль. Отсюда вытекает, что f не зависит от u_1 и мы приходим к случаю зависимости от одного аргумента, который рассмотрим ниже.

Пусть теперь ${}^3\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = f(w_2, w_3)$. Снова пользуясь общей формулой (27), приходим в этом случае к условию аддитивности вида:

$$f(w_2, w_3) = f(3\alpha_1 + \alpha_2^2 w_2 + 2\alpha_1 \alpha_2 w_1, \Delta) + f\left(\frac{\alpha_1 w_2 + 3\alpha_2 w_3}{\Delta}, \frac{w_3}{\Delta}\right). \quad (32)$$

Переходя аналогично предыдущему случаю на подмногообразии $\Delta = 1$, $\alpha_1 w_2 + 3\alpha_2 w_3 = 0$, получаем снова: $\partial f / \partial u_1 = 0$ — случай зависимости от одной переменной.

В предположении $f = f(w_1)$ имеем условие аддитивности в виде:

$$f(w_1) = f(3\alpha_1 + \alpha_2 w_1) + f\left(\frac{\alpha_1^2 w_1 + 3\alpha_2^2 w_3 + 2\alpha_1 \alpha_2 w_2}{\Delta}\right),$$

откуда, дифференцируя, например, по w_2 , приходим к равенству $f' = 0$ и $f = \text{const}$. Аддитивность будет выполняться, только при $f = 0$. Аналогично, предполагая $f = f(w_2)$, приходим к уравнению аддитивности:

$$f(w_2) = f(3\alpha_1^2 + \alpha_2^2 w_2 + 2\alpha_1 \alpha_2 w_1) + f\left(\frac{\alpha_1 w_2 + 3\alpha_2 w_3}{\Delta}\right).$$

Переходя на подмногообразии $\alpha_1 w_2 + 3\alpha_2 w_3 = 0$, (задающее к примеру α_1), и дифференцируя уравнение по w_2 , приходим, как и ранее, к $f' = 0$ и $f = 0$.

Наконец, если $f = f(w_3)$, то общее условие (42) приводит к уравнению

$$f(w_3) = f(\Delta) + f(w_3/\Delta),$$

которое имеет общее решение вида (29).

Сформулируем полученный результат в виде утверждения.

Утверждение 3. *Единственный (в аффинной версии) аддитивный бингл в $\mathcal{H}_3$ дается выражением:*

$${}^3\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = A \ln |w_3| = A \ln \left| \frac{{}^3G(\vec{b}, \vec{b}, \vec{b})}{{}^3G(\vec{a}, \vec{a}, \vec{a})} \right|. \quad (33)$$

Отметим, что выражение (33) является финслеровым аналогом угла φ_2 в (21). Также, как и в (псевдо)евклидовом случае, ${}^3\varphi$ аддитивен независимо от условия компланарности. Существенным результатом, вытекающим из утверждения 3, является отсутствие в $\mathcal{H}_3$ аффинного бингла, аналогичного φ_1 в (21).

4 Аддитивный бингл в $\mathcal{H}_3$: нелинейная версия.

Если отказаться от дополнительного условия компланарности векторов, для которых справедлив принцип аддитивности углов, то число возможных обобщений значительно расширится.

4.1 Существование нетривиального аддитивного бингла в $\mathcal{H}_3$ в нелинейной версии

Для доказательства существования нетривиального аддитивного бингла достаточно привести один пример его реализации в явном виде.

Рассмотрим в качестве "обобщенного условия компланарности" следующую, вообще говоря, нелинейную связь промежуточного вектора $\vec{c}$ с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \phi(w_1^{ab}, w_2^{ab}, w_3^{ab})\vec{a},$$

где ϕ — произвольная функция трех аргументов, w_i даются формулами (24), при этом, как и раньше, $\xi_i = b_i/a_i$.

Прямой проверкой можно убедиться, что функция

$${}^3\varphi_{(A,B,C)}(\vec{a}, \vec{b}) \equiv \ln |(w_1^{ab})^A (w_2^{ab})^B (w_3^{ab})^C| - (A + B) \ln 3 \quad (34)$$

удовлетворяет условию аддитивности (26) и определяет конформно-инвариантный обобщенный угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, зависящий от произвольных вещественных параметров A, B, C . Отметим, что несмотря на некоторую искусственность примера (вектор $\vec{c}$ должен быть, фактически, коллинеарен первому из векторов), выражение для угла оказывается нетривиальным:

1. этот угол, вообще говоря, несимметричен:

$${}^3\varphi_{(A,B,C)}(\vec{b}, \vec{a}) = {}^3\varphi_{(B,A,-C-A-B)}(\vec{a}, \vec{b});$$

Симметрия угла имеет место только при условии $A = B = -C$;

2. угол между двумя равными векторами равен нулю:

$${}^3\varphi(\vec{a}, \vec{a}) = 0,$$

а между коллинеарными векторами выражается через их коэффициент подобия:

$${}^3\varphi(\vec{a}, \vec{\lambda}a) = (A + 2B + 3C) \ln \lambda;$$

Равенство нулю угла между коллинеарными векторами имеет место лишь при $A + 2B + 3C = 0$. В частности, это условие выполняется автоматически при выполнении условия симметрии угла.

Очевидно, что рассматриваемое нами 3-параметрическое семейство углов является нетривиальным финслеровым обобщением угла φ_2 евклидовой геометрии.

4.2 Аддитивный бингл в $\mathcal{H}_3$ с аддитивностью углов для 3-ортогональных векторов

В этом параграфе мы рассмотрим в качестве "обобщенного условия компланарности" условие 3-ортогональности вида:

$${}^3G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0, \quad (35)$$

которое является "внутренним" т. е. естественным для геометрии Бервальда-Моора в $\mathcal{H}_3$. Другими словами, мы будем искать функцию угла, аддитивную на любой тройке векторов, удовлетворяющей условию (35). Это условие в координатах имеет вид:

$$c_1(a_2b_3 + a_3b_2) + c_2(a_1b_3 + a_3b_1) + c_3(a_2b_1 + a_1b_2) = 0. \quad (36)$$

Выражение (36) имеет формальный вид обычного евклидова условия ортогональности вектора $\vec{c}$ и "вектора" $\vec{a} \circ \vec{b}$ с компонентами: $(a_2b_3 + a_3b_2, a_1b_3 + a_3b_1, a_2b_1 + a_1b_2)$. В силу известных свойств векторного произведения общее выражение для вектора $\vec{c}$, удовлетворяющего условию 3-ортогональности, можно записать через произвольный вектор $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и операцию евклидова векторного произведения:

$$\vec{c} = \vec{a} \times (\vec{a} \circ \vec{b}).$$

Представляя компоненты вектора $\vec{a}$ в виде: $\alpha_i = k_i/a_i$, где k_i — безразмерные константы и вычисляя компоненты векторного произведения, находим явный общий вид компонент $\vec{c}$, автоматически удовлетворяющих условию 3-ортогональности с некоторыми заданными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$c_1 = k_2(a_1\xi_2 + b_1) - k_3(a_1\xi_3 + b_1); \quad c_2 = k_3(a_2\xi_3 + b_2) - k_1(a_2\xi_1 + b_2); \quad c_3 = k_1(a_3\xi_1 + b_3) - k_2(a_3\xi_2 + b_3).$$

Вычисление с помощью этих формул конформных инвариантов, входящих в (26), приводит к следующим выражениям:

$$w_1^{ac} = k_1(\xi_3 - \xi_2) + k_2(\xi_1 - \xi_3) + k_3(\xi_2 - \xi_1);$$

$$w_2^{ac} = -k_1^2(\xi_1 + \xi_2)(\xi_1 + \xi_3) - k_2^2(\xi_1 + \xi_2)(\xi_2 + \xi_3) - k_3^2(\xi_2 + \xi_3)(\xi_1 + \xi_3) + \\ + 2k_1k_2(\xi_1 + \xi_2)\xi_3 + 2k_1k_3(\xi_1 + \xi_3)\xi_2 + 2k_2k_3(\xi_2 + \xi_3)\xi_1;$$

$$w_3^{ac} = k_1k_2(\xi_1 + \xi_2)^2(k_2(\xi_2 + \xi_3) - k_1(\xi_1 + \xi_3)) + k_1k_3(\xi_1 + \xi_3)^2(k_1(\xi_1 + \xi_2) - k_3(\xi_2 + \xi_3)) + \\ + k_2k_3(\xi_2 + \xi_3)^2(k_3(\xi_1 + \xi_3) - k_2(\xi_1 + \xi_2)).$$

$$w_1^{cb} = \frac{k_1\xi_1^2(\xi_2 - \xi_3) + k_2\xi_2^2(\xi_3 - \xi_1) + k_3\xi_3^2(\xi_1 - \xi_2)}{\xi_1\xi_2\xi_3};$$

$$w_2^{cb} = \frac{2k_1k_2}{\xi_3}(\xi_1 + \xi_2) + \frac{2k_1k_3}{\xi_2}(\xi_1 + \xi_3) + \frac{2k_2k_3}{\xi_1}(\xi_2 + \xi_3);$$

$$w_3^{cb} = \frac{k_1k_2}{\xi_1\xi_2\xi_3}(\xi_1 + \xi_2)^2(k_2(\xi_2 + \xi_3) - k_1(\xi_1 + \xi_3)) + \frac{k_1k_3}{\xi_1\xi_2\xi_3}(\xi_1 + \xi_3)^2(k_1(\xi_1 + \xi_2) - k_3(\xi_2 + \xi_3)) + \\ + \frac{k_2k_3}{\xi_1\xi_2\xi_3}(\xi_2 + \xi_3)^2(k_3(\xi_1 + \xi_3) - k_2(\xi_1 + \xi_2)).$$

Условие аддитивности (26) после подстановки в него вычисленных инвариантов принимает громоздкий вид. Для его упрощения сразу перейдем на подмногообразие

$k_1 = k_2 = k_3 = k$. При этом условие аддитивности в обозначениях раздела (3) принимает более симметричный вид:

$$f(w_1, w_2, w_3) = f(0, k^2(3w_2 - w_1^2), -k^3w) + f\left(\frac{k w}{w_3}, \frac{2k^2(w_1 w_2 - 3w_3)}{w_3}, \frac{-k^3 w}{w_3}\right). \quad (37)$$

где $w = (\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_3)$. Далее, переходя в уравнении (37) на подмногообразии $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi$, приходим к уравнению вида:

$$f(3\xi, 3\xi^2, \xi^3) = f(0, 0, 0) + f(0, 12k^2, 0), \quad (38)$$

откуда следует, во-первых, что функция f не зависит от своего второго аргумента, и, во-вторых, а допустимая зависимость этой функции от оставшихся двух переменных имеет вид: $f(w_1, w_3) = \Phi(w_1^3/w_3)$.

Подставляя такое представление в исходное уравнение (37), мы приходим к более простому уравнению вида:

$$\Phi\left(\frac{w_1^3}{w_3}\right) = \Phi(0) + \Phi\left(-\frac{w^2}{w_3^2}\right). \quad (39)$$

Поскольку w^2 — симметрический полином шестого порядка, он должен выражаться через полиномы w_1, w_2, w_3 . Несложные, но несколько громоздкие вычисления приводят к следующему выражению для w^2 :

$$w^2 = -4w_2^3 - 27w_3^2 + w_1^2 w_2^2 - 4w_1^3 w_3 + 18w_1 w_2 w_3.$$

Очевидно, что уравнение (39) не может иметь решения Φ для произвольных значений w_1, w_2, w_3 , если только не ограничиться подмногообразием переменных вида $w_2 = w_2(w_1, w_3)$, поскольку левая часть не зависит от w_2 , а правая существенно зависит. Из соображений однородности такую связь можно записать в виде:

$$w_2 = w_1^2 \phi(w_1^3/w_3),$$

где ϕ — произвольная функция. Подставляя такое представление в предыдущее уравнение и затем результат в уравнение (39), приходи к уравнению аддитивности вида:

$$\Phi(4x^2 \phi^3(x) - x^2 \phi^2(x) - 18x \phi(x) + 4x + 27) = \Phi(x) - \Phi(0),$$

где $x = w_1^3/w_3$. Полагая $\phi(x)$ решением уравнения:

$$4x^2 \phi^3(x) - x^2 \phi^2(x) - 18x \phi(x) + 4x + 27 = \psi(x),$$

уравнение аддитивности можно привести к общему виду:

$$(\Phi \circ \psi)(x) = \Phi(x) - \Phi(0), \quad (40)$$

которое определяет, вообще говоря, нелинейный гомоморфизм дискретной подгруппы диффеоморфизмов $\psi^n: R \rightarrow R$ в группу трансляций в пространстве углов.

Рассмотрим две явных реализации этого гомоморфизма. Самый простой и естественный вид подмногообразия задается соотношением $w_2 = \xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_3 = 0$. При этом уравнение (40) принимает вид:

$$\Phi(x) = \Phi(0) + \Phi(4x + 27),$$

где $x = w_1^3/w_3$. Решением этого уравнения является функция:

$$\Phi(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{9}\right) - \ln 4.$$

Другое подмногообразие задается функцией $\phi(x)$, являющейся решением уравнения:

$$4x^2\phi^3(x) - x^2\phi^2(x) - 18x\phi(x) + 4x + 27 = \frac{d(1 - bc)x - bd^2}{c(ad - 1)x + ad^2}, \quad (41)$$

где a, b, c, d — произвольные вещественные числа. Прямой проверкой нетрудно показать, что гомоморфизм дробно-линейных преобразований в группу трансляций углов осуществляется решением Φ дробно-линейного вида:

$$\Phi(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Сформулируем полученный результат в виде утверждения.

Утверждение 4. *Аддитивный бингл в $\mathcal{H}_3$ с "обобщенным условием компланарности" в форме условия 3-ортогональности существует при следующих (достаточных, но не необходимых!) условиях:*

- 1) пара векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ связана некоторым соотношением вида $w_2 = w_2(w_1, w_3)$.
- 2) промежуточный вектор $\vec{c}$ ортогонален (в евклидовом смысле!) вектору

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (a_2b_3 + a_3b_2, a_1b_3 + a_3b_1, a_2b_1 + a_1b_2)$$

и вектору $(\vec{a})^{-1} \equiv (1/a_1, 1/a_2, 1/a_3)$.

Для пары $\vec{a}$ и $\vec{b}$, удовлетворяющей условию 1, условие аддитивности бингла эквивалентно существованию гомоморфизма Φ дискретной подгруппы группы диффеоморфизмов вещественной прямой с определяющим уравнением (40). Для подмногообразия $w_2 = 0$ и подмногообразия вида $w_2 = w_1^2\phi(w_1^3/w_3)$, где функция ϕ определяется уравнением (41), выражения для бинглов соответственно имеют следующий вид:

$${}^3\varphi_1(\vec{a}, \vec{b}) = \ln \left(1 + \frac{w_1^3}{9w_3} \right) - \ln 4; \quad {}^3\varphi_2(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{aw_1^3 + bw_3}{cw_1^3 + dw_3}.$$

Особенностью полученных решений является то обстоятельство, что аддитивный бингл существует для пар векторов, подчиненных некоторому условию (5-мерная поверхность в 6-мерном пространстве или 2-мерная поверхность в 3-мерном проективном пространстве координат векторов) — в евклидовом пространстве аддитивный угол существует между любыми векторами; при этом аддитивность имеет место для однопараметрического семейства промежуточных векторов — в евклидовом пространстве семейство промежуточных векторов двухпараметрическое.

4.3 Нелинейное "условие компланарности" с заданным аддитивным бинглом

В этом разделе мы сформулируем задачу о нахождении аддитивного бингла в обратную сторону: требуя, чтобы некоторое конкретное выражение для бингла было аддитивным, мы найдем "условие компланарности", которое обеспечивает эту аддитивность. В такой формулировке задачи об аддитивном бингле проблема решения функциональных уравнений аддитивности полностью отсутствует.

Итак, пусть функция $f(w_1^{ab}, w_2^{ab}, w_3^{ab})$ бингла между парой векторов задана и пусть условие аддитивности бинглов с некоторым промежуточным вектором $\vec{c}$:

$$f(w_1^{ab}, w_2^{ab}, w_3^{ab}) = f(w_1^{ac}, w_2^{ac}, w_3^{ac}) + f(w_1^{cb}, w_2^{cb}, w_3^{cb}), \quad (42)$$

выполняется. Требуется найти зависимость $\vec{c} = \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$, которая бы обеспечивала равенство (42). В компонентах эта зависимость сводится к трем функциям от шести переменных.

Если подходить к задаче совершенно формально, то она всегда имеет бесконечное множество решений. Действительно, задавая произвольно две функции c^i из трех, уравнение (42) можно рассматривать как уравнение на оставшуюся третью функцию, которое, за исключением вырожденных случаев, всегда имеет (возможно неявное) решение. Разумеется, интерес представляют "условия компланарности", обладающие определенным набором базовых свойств: однородность, ковариантность, симметричность и т. д. Примеры соотношений именно такого рода рассмотрены в предыдущих подразделах этого раздела.

В качестве нетривиального примера рассмотрим небольшое обобщение соотношения компланарности, описанного в разделе 4.1. Результат сформулируем в виде утверждения, справедливость которого проверяется непосредственной проверкой.

Утверждение 4. Бингл вида

$${}^3\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \ln[(w_1^{ab})^A (w_2^{ab})^B (w_3^{ab})^C] + \ln D, \quad (43)$$

где A, B, C, D — произвольные вещественные константы ($D > 0$), становится аддитивным при "условии компланарности", задаваемом системой уравнений:

$$w_1^{ac} w_1^{cb} = \gamma^B D^{-1/A} (w_1^{ab})^{1-\beta B/A} (w_2^{ab})^\alpha (w_3^{ab})^{-kB}; \quad w_2^{ac} w_2^{cb} = \gamma^{-A} (w_1^{ab})^\beta (w_2^{ab})^{1-\alpha A/B} (w_3^{ab})^{kA},$$

где α, β, γ — произвольные вещественные числа. При этом первое из "уравнений компланарности" следует игнорировать, если $A = 0$, второе — если $B = 0$, а в случае $A = B = 0$ следует игнорировать оба уравнения и бингл (43) будет аддитивным безусловно.

В случае $A \cdot B \neq 0$ многообразие допустимых промежуточных векторов одномерно, в случае когда $AB = 0$ и $A^2 + B^2 \neq 0$ — двумерно.

Рассмотрим в качестве примера случай: $A = 1, B = C = \alpha = 0, D = 1/3$. Условие компланарности в явном виде приобретает вид:

$$\left(\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \frac{c_3}{a_3} \right) \left(\frac{b_1}{c_1} + \frac{b_2}{c_2} + \frac{b_3}{c_3} \right) = 3 \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} \right)$$

или вводя обозначения $x_i = c_i/a_i, \xi_i = b_i/a_i$,

$$(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{\xi_1}{x_1} + \frac{\xi_2}{x_2} + \frac{\xi_3}{x_3} \right) = 3(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3).$$

Последнее уравнение задает в области $x_i > 0$ коническую поверхность, которая получается некоторым вращением луча, исходящего из точки $x_i = 0$. Переходя с помощью параметрических уравнений

$$x_1 = \frac{1}{3} + u + v; \quad x_2 = \frac{1}{3} - u; \quad x_3 = \frac{1}{3} - v,$$

на плоскость $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, приходим к уравнению сечения полученной конической поверхности этой плоскостью:

$$\frac{(u+v)\xi_1}{1/3 + u + v} + \frac{u\xi_2}{u - 1/3} + \frac{v\xi_3}{v - 1/3} = 0.$$

Полученная кривая имеет 4-ый порядок. Для случая $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$ ее вид представлен на рис. 1.

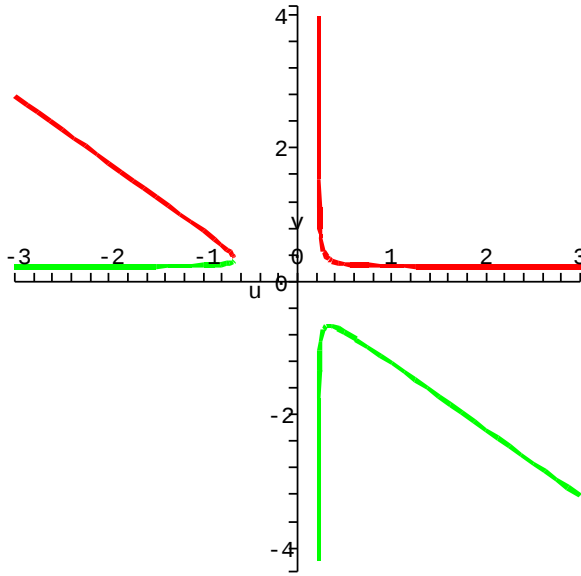


Рис. 1. Сечение поверхности компланарности плоскостью $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Начало системы координат (v, u) совпадает с точкой пересечения этой плоскости прямой $x_1 = x_2 = x_3$.

5 Аддитивные тринглы в $\mathcal{H}_3$.

Конформно-инвариантный аддитивный трингл $\varphi \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, построенный на трех векторах, может зависеть только от следующих 9 независимых конформных инвариантов:

$$w_1^{ab} = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3; \quad w_1^{ac} = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3; \quad w_1^{bc} = \frac{\eta_1}{\xi_1} + \frac{\eta_2}{\xi_2} + \frac{\eta_3}{\xi_3};$$

$$w_2^{ab} = \xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_3 + \xi_1 \xi_3; \quad w_2^{ac} = \eta_1 \eta_2 + \eta_2 \eta_3 + \eta_1 \eta_3; \quad w_2^{bc} = \frac{\eta_1 \eta_2}{\xi_1 \xi_2} + \frac{\eta_2 \eta_3}{\xi_2 \xi_3} + \frac{\eta_1 \eta_3}{\xi_1 \xi_3};$$

$$w_3^{ab} = \xi_1 \xi_2 \xi_3; \quad w_3^{ac} = \eta_1 \eta_2 \eta_3;$$

$$w_4^{abc} = \frac{{}^3G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}{{}^3G(\vec{a}, \vec{a}, \vec{a})} = \xi_2 \eta_3 + \xi_3 \eta_2 + \xi_1 \eta_3 + \xi_3 \eta_1 + \xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1.$$

Таким образом, в общем случае имеем:

$$\varphi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = f(w_1^{ab}, w_1^{ac}, w_1^{bc}, w_2^{ab} w_2^{ac}, w_2^{bc}, w_3^{ab}, w_3^{ac}, w_4^{abc}).$$

Запись условия аддитивности для трингла уже не является столь очевидной, поскольку не имеет аналогов в евклидовой геометрии¹. Не претендуя на исчерпывающую полноту, запишем несколько наиболее простых и симметричных вариантов условия аддитивности тринглов ($\vec{d}$ — промежуточный 4-ый вектор):

1. $\varphi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \varphi(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}) + \varphi(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}) + \varphi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$;
2. $\varphi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \varphi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) + \varphi(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) + \varphi(\vec{c}, \vec{a}, \vec{d})$;

¹ Отметим, что геометрия телесных углов, по существу, сводится к геометрии плоских углов и потому не может рассматриваться как евклидов вариант геометрии тринглов.

3. $\varphi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \sum_{\nu} (-1)^{\sigma_{\nu}} \varphi(S_{\nu}(\widehat{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}}))$, где S_{ν} — всевозможные перестановки троек векторов, которые получаются из четверки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ отбрасыванием одного из первых трех векторов (шляпка $\widehat{}$ и обозначает это отбрасывание), а четность σ_{ν} перестановки S_{ν} равна четности перестановки векторов в аргументе φ по отношению к исходной перестановке $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, если вектор $\vec{d}$ заменить на недостающий третий вектор из исходной тройки в этом аргументе.
4. $\varphi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \varphi(\vec{a}, \vec{d}, \vec{d}) + \varphi(\vec{d}, \vec{b}, \vec{d}) + \varphi(\vec{d}, \vec{d}, \vec{c})$.

Сразу можно отметить, что последний вариант условия аддитивности допускает простое обобщение безусловно-инвариантного бингла (33):

$${}^3\varphi_{(A,B)}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \ln[(w_3^{ab})^A (w_3^{ac})^B],$$

удовлетворяющему ряду свойств:

$${}^3\varphi_{(A,B)}(\vec{a}, \vec{a}, \vec{a}) = 0; \quad {}^3\varphi_{(A,B)}(\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}) = B {}^3\varphi(\vec{a}, \vec{c}); \quad {}^3\varphi_{(A,B)}(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = {}^3\varphi_{(B,A)}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c});$$

$${}^3\varphi_{(A,B)}(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = {}^3\varphi_{(-A-B,B)}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Глядя на приведенные выше соотношения аддитивности можно пойти дальше и называть "обобщенной аддитивностью" свойство трингла выражаться некоторым образом через тринглы, построенные на других тройках векторов, согласованных или не согласованных с исходной тройкой. Речь идет о соотношениях вида:

$${}^3\varphi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = f({}^3\varphi(\vec{s}_{11}, {}^3\vec{s}_{12}, \vec{s}_{13}), \dots, {}^3\varphi(\vec{s}_{i1}, \vec{s}_{i2}, \vec{s}_{i3}), {}^3\varphi(\vec{s}_{n1}, \vec{s}_{n2}, {}^3\vec{s}_{n3}), {}^2\varphi(\vec{t}_{11}, {}^2\vec{t}_{12}), \dots, {}^2\varphi(\vec{t}_{j1}, {}^2\vec{t}_{j2}), \dots, {}^2\varphi(\vec{t}_{n1}, \vec{t}_{n2})), \quad (44)$$

где хотя бы один из векторов $\vec{s}_{ij}$ и $\vec{t}_{kl}$ при каждом i и k не является вектором из тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Ясно, что в такой постановке задача отыскания "аддитивных тринглов" имеет бесконечное множество решений, которые почти всегда будут иметь неявное определение посредством громоздких алгебраических выражений.

5.1 Безразмерные выражения для базисных конформных инвариантов

В настоящем разделе мы приведем для будущих справок полный перечень базисных конформных инвариантов в безразмерном виде. Как и в предыдущих разделах мы вводим следующие безразмерные обозначения:

$$\frac{b_i}{a_i} = \xi_i; \quad \frac{c_i}{a_i} = \eta_i; \quad \frac{d_i}{a_i} = \delta_i.$$

Кроме того, для сокращения размера формул мы примем следующие обозначения:

$$\Delta_p = p_1 p_2 p_3; \quad \Delta_1(p, q) = p_2 q_3 + p_3 q_2; \quad \Delta_2(p, q) = p_1 q_3 + q_3 p_1; \quad \Delta_3(p, q) = p_1 q_2 + p_2 q_1;$$

$$w_1(p) = p_1 + p_2 + p_3; \quad w_2(p) = p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_1 p_3,$$

для всяких троек $\{p_1, p_2, p_3\}$, $\{q_1, q_2, q_3\}$. При этом $p/q \equiv \{p_1/q_1, p_2/q_2, p_3/q_3\}$. Вычисление базисных конформных инвариантов, перечисленных в начале раздела (5), для всевозможных комбинаций троек и двоек векторов из набора $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ приводит к следующей системе выражений:

$$6w_4^{abc} = \Delta_1(\xi, \eta) + \Delta_2(\xi, \eta) + \Delta_3(\xi, \eta); \quad 6w_4^{abd} = w_4^{adb} = \Delta_1(\xi, \delta) + \Delta_2(\xi, \delta) + \Delta_3(\xi, \delta);$$

$$\begin{aligned}
6w_4^{acd} &= 6w_4^{adc} = \Delta_1(\eta, \delta) + \Delta_2(\eta, \delta) + \Delta_3(\eta, \delta); \\
w_4^{bad} &= w_4^{bda} = w_4^{abd}/\Delta_\xi; \quad w_4^{cad} = w_4^{cda} = w_4^{acd}/\Delta_\eta; \\
6w_4^{bcd} &= 6w_4^{bdc} = \Delta_1(\eta/\xi, \delta/\xi) + \Delta_2(\eta/\xi, \delta/\xi) + \Delta_3(\eta/\xi, \delta/\xi); \\
6w_4^{cbd} &= 6w_4^{cdb} = \Delta_1(\xi/\eta, \delta/\eta) + \Delta_2(\xi/\eta, \delta/\eta) + \Delta_3(\xi/\eta, \delta/\eta); \\
w_4^{dab} &= w_4^{dba} = w_4^{abd}/\Delta_\delta; \quad w_4^{dac} = w_4^{dca} = w_4^{acd}/\Delta_\delta; \\
6w_4^{dbc} &= 6w_4^{dcb} = \Delta_1(\eta/\delta, \xi/\delta) + \Delta_2(\eta/\delta, \xi/\delta) + \Delta_3(\eta/\delta, \xi/\delta); \\
w_3^{ab} &= \frac{1}{w_3^{ba}} = \Delta_\xi; \quad w_3^{ac} = \frac{1}{w_3^{ca}} = \Delta_\eta; \quad w_3^{ad} = \frac{1}{w_3^{da}} = \Delta_\delta; \\
w_3^{bc} &= \frac{1}{w_3^{cb}} = \frac{\Delta_\eta}{\Delta_\xi}; \quad w_3^{bd} = \frac{1}{w_3^{db}} = \frac{\Delta_\delta}{\Delta_\xi}; \quad w_3^{cd} = \frac{1}{w_3^{dc}} = \frac{\Delta_\delta}{\Delta_\eta}; \\
3w_2^{ab} &= w_2(\xi); \quad 3w_2^{ac} = w_2(\eta); \quad 3w_2^{ad} = w_2(\delta); \\
3w_2^{ba} &= w_1(\xi)/\Delta_\xi; \quad 3w_2^{ca} = w_1(\eta)/\Delta_\eta; \quad 3w_2^{da} = w_1(\delta)/\Delta_\delta; \\
3w_2^{bc} &= w_2(\eta/\xi); \quad 3w_2^{cb} = w_2(\xi/\eta); \quad 3w_2^{bd} = w_2(\delta/\xi); \quad 3w_2^{db} = w_2(\xi/\delta); \\
3w_2^{cd} &= w_2(\delta/\eta); \quad 3w_2^{dc} = w_2(\eta/\delta).
\end{aligned}$$

Из приведенных инвариантов функционально независимыми являются только двадцать один. Суть процедуры конструирования обобщенно-аддитивных тринглов заключается в выборе из двадцати одного независимого инварианта подмножество из инвариантов числа не меньшего 9, разрешимого относительно 9 переменных $\{\xi, \eta, \delta\}$. Подстановка разрешенных уравнений в любой другой независимый инвариант дает формулу вида (44).

5.2 Пример: обобщенно-аддитивный трингл

Рассмотрим следующие соотношения, вытекающие из уравнений для системы инвариантов предыдущего раздела:

$$\begin{aligned}
w_1(\xi) &= 3w_2^{ba} \Delta_\xi = 3w_2^{ba} \frac{w_4^{abd}}{w_4^{bad}}; \quad w_2(\xi) = 3w_2^{ab}; \quad \Delta_\xi = w_3^{ab} w_3^{ba}; \\
w_1(\eta) &= 3w_2^{ca} \Delta_\eta = 3w_2^{ca} \frac{w_4^{acd}}{w_4^{cad}}; \quad w_2(\eta) = 3w_2^{ac}; \quad \Delta_\eta = w_3^{ac} w_3^{ca}; \\
w_1(\delta) &= 3w_2^{da} \Delta_\delta = 3w_2^{da} \frac{w_4^{acd}}{w_4^{dca}}; \quad w_2(\delta) = 3w_2^{da}; \quad \Delta_\delta = w_3^{ad} w_3^{da}.
\end{aligned}$$

Записанные выражения представляют собой девять симметрических полиномов по переменным $\{\xi_i\}$, $\{\eta_i\}$ и $\{\delta_i\}$, выраженные через инварианты. Процедуру разрешения системы симметрических уравнений относительно этих переменных, ввиду известной связи симметрических полиномов с корнями алгебраических уравнений, можно свести к нахождению троек вещественных решений тройки кубических уравнений следующего вида:

$$\xi^3 - 3w_2^{ba} \frac{w_4^{abd}}{w_4^{bad}} \xi^2 + 3w_2^{ab} \xi - w_3^{ab} w_3^{ba} = 0; \quad (45)$$

$$\eta^3 - 3w_2^{ca} \frac{w_4^{acd}}{w_4^{cad}} \eta^2 + 3w_2^{ac} \eta - w_3^{ac} w_3^{ca} = 0; \quad (46)$$

$$\delta^3 - 3w_2^{da} \frac{w_4^{acd}}{w_4^{dca}} \delta^2 + 3w_2^{da} \delta - w_3^{ad} w_3^{da} = 0.$$

Рассмотрим в качестве выражения для обобщенно аддитивного трингла инвариант w_4^{abc} или какую-то функцию от него. Условие обобщенной аддитивности будет иметь вид:

$$w_4^{abc} = \Delta_1(\xi, \eta) + \Delta_2(\xi, \eta) + \Delta_3(\xi, \eta) \Big|_{\substack{\xi_i = \bar{\xi}_i(w_2^{ba} w_4^{abd} / w_4^{bad}, w_2^{ab}, w_3^{ab} w_3^{ba}) \\ \eta_i = \bar{\eta}_i(w_2^{ca} w_4^{acd} / w_4^{cad}, w_2^{ac}, w_3^{ad} w_3^{da})}}$$

— довольно громоздкого алгебраического выражения, зависящего от указанных комбинаций конформных инвариантов. Здесь $\bar{\xi}_i$ и $\bar{\eta}_i$ — тройки корней кубических уравнений (45)–(46), выраженные через коэффициенты этих уравнений.

6 Экспоненциальные углы

Как обсуждалось в [17], гиперкомплексные числа из $\mathcal{H}_n$ допускают экспоненциальное представление. В этом параграфе мы выведем выражения для экспоненциальных углов и обсудим их связь с постановкой основной задачи статьи. Напомним основные сведения, необходимые нам для вывода формул экспоненциальных углов.

Гиперкомплексные числа как элементы алгебры $\mathcal{H}_n$ будем изображать линейными комбинациями:

$$a = a_1 i_1 + \dots a_n i_n,$$

где i_k — образующие алгебры $\mathcal{H}_n$, удовлетворяющие следующему закону умножения: $i_k \cdot i_l = i_k \delta_{lk}$ (изотропная система образующих). Нормой элемента a называется число $|a| = |a_1 \dots a_n|^{1/n}$. В силу закона умножения определены операции умножения и деления двух элементов $a = a_1 i_1 + \dots a_n i_n$, $b = b_1 i_1 + \dots b_n i_n$:

$$a \cdot b = a_1 b_1 i_1 + \dots + a_n b_n i_n; \quad a/b = (a_1/b_1) i_1 + \dots + (a_n/b_n) i_n,$$

причем деление возможно только на элементы с ненулевой нормой: $|b| \neq 0$.

Функцией гиперкомплексной переменной $f(a)$ будем называть гиперкомплексное число вида:

$$f(a) = f(a_1) i_1 + \dots f(a_n) i_n. \quad (47)$$

Если функция $f(x)$ — аналитическая для вещественных x , то наше определение выполняется автоматически в силу представления функции в виде формального степенного ряда и таблицы умножения алгебры $\mathcal{H}_n$.

Как показано в ([17]), любое гиперкомплексное число a со всеми $a_i > 0$ можно представить в экспоненциальной форме вида:

$$a = |a| \exp(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1}),$$

где $\{\alpha_i\}$ — экспоненциальные углы, $\{e_i\}$ — специальный базис, который может быть связан с изотропным базисом, например, соотношениями:

$$e_1 = i_1 - i_2; \quad e_2 = i_1 - i_3; \quad \dots e_{n-1} = i_1 - i_n.$$

Рассмотрим частный случай алгебры $\mathcal{H}_3$. В ней общие формулы для экспоненциального представления принимают следующий более конкретный вид:

$$a = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 = (a_1 a_2 a_3)^{1/3} \exp((\alpha_1 + \alpha_2) i_1 - \alpha_1 i_2 - \alpha_1 i_3).$$

Воспользовавшись в левой части формулой (47) и приравнявая компоненты гиперчисла слева и справа, находим выражение для углов через изотропные координаты:

$$\alpha_1 = \frac{1}{3} \ln \left[\frac{a_1 a_3}{a_2^2} \right]; \quad \alpha_2 = \frac{1}{3} \ln \left[\frac{a_1 a_2}{a_3^2} \right]. \quad (48)$$

Углы $\phi_1(a, b)$ и $\phi_2(a, b)$ между векторами-гиперчислами a и b естественно определить с помощью формулы:

$$\frac{|a|}{|b|} \exp(\phi_1(a, b)(i_1 - i_2) + \phi_2(a, b)(i_1 - i_3)) = a/b.$$

Явные формулы для этих углов получаются из (48) заменой $a_i \rightarrow a_i/b_i$. Таким образом, получаем:

$$\phi_1(a, b) = \frac{1}{3} \ln \left[\frac{a_1 a_3 b_2^2}{b_1 b_3 a_2^2} \right]; \quad \phi_2(a, b) = \frac{1}{3} \ln \left[\frac{a_1 a_2 b_3^2}{b_1 b_2 a_3^2} \right]. \quad (49)$$

Нетрудно видеть, что каждый из углов конформно-инвариантен, аддитивен в обычном смысле и на равных векторах-гиперчислах обращается в нуль. Тем не менее, эти углы (в нашей терминологии они являются бинглами) не попадают в круг исследуемых нами, поскольку они не выражаются через метрические инварианты, построенные исключительно на векторах-гиперчислах a, b . Действительно, нетрудно проверить, что представление (48) эквивалентно следующему, выраженному через метрические инварианты:

$$\phi_1(a, b) = \frac{1}{3} \ln \left[\frac{(a, a, i_2)(i_1, i_3, b)^2}{(b, b, i_2)(i_1, i_3, a)^2} \right]; \quad \phi_2(a, b) = \frac{1}{3} \ln \left[\frac{(a, a, i_3)(i_1, i_2, b)^2}{(b, b, i_3)(i_1, i_2, a)^2} \right].$$

Мы видим, что экспоненциальные углы между двумя векторами-гиперчислами (бинглы) определяются посредством третьих векторов — изотропного базиса в $\mathcal{H}_3$. Эта ситуация кардинально отличается от постановки задачи, решаемой в настоящей статье, поскольку эта постановка заимствована из евклидовой геометрии. Наличие фундаментальных инвариантных изотропных направлений в $\mathcal{H}_n$ делает возможным обобщить понятия и определения угла, таким образом, чтобы эти направления явно присутствовали в его определении. Совершенно ясно, что ввиду отсутствия каких-бы то ни было инвариантных направлений в евклидовой геометрии, такие определения в ней принципиально невозможны!

Литература

- [1] Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов, ГЧГФ, т. 4, №1, с. 3–37 (2007)

Additive angles in the space $\mathcal{H}_3$

D. G. Pavlov, S. S. Kokarev

MSTU n. a. N. E. Bauman; RSEC Logos, Yaroslavl
geom2004@mail.ru, logos-distant@mail.ru

The possibility of constructing additive poly-angles (bingles and tringles) in the framework of the Berwald-Moor geometry in $\mathcal{H}_3$, is investigated. It is shown that for a certain (generalized) notion of additivity, there exists an infinity of such poly-angles.

Key-words: poly-angle, additivity, Berwald-Moor metric, Finsler space.

MSC: 53B40, 39B55.

THE EQUATIONS OF ELECTROMAGNETISM IN SOME SPECIAL ANISOTROPIC SPACES

Nicoleta Brnzei & Sergey Siparov

Transilvania University, Brasov, Romania
Academy of Civil Aviation, St. Petersburg, Russia
nico.brnzei@rdslink.ro, sergey@siparov.ru

We show that anisotropy of the space naturally leads to new terms in the expression of Lorentz force, as well as in the expressions of currents.

Key-words: anisotropic spaces, Finslerian spaces, equations of the electromagnetism.

1 Introduction

Studying anisotropic spaces has an obvious meaning with regard to physical interpretations. The direction dependence of the metric could cause the appearance of motion dependent forces [1] associated with inertial forces in the accelerated frames. In case there is a physical vector field – an electromagnetic one – in the anisotropic space, this may lead to the appearance of the extra Lorentz type forces or extra currents that could reveal themselves in a special laboratory environment or even in Nature. From mathematical point of view, it is possible to treat the problem in the purely Finslerian setting when $g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}^2}{\partial y^i \partial y^j}$ for some 2-homogeneous in y function $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, y)$ or introduce a more general type of anisotropic metric that could explicitly give extra terms in the equations of geodesics.

If we take into account the y -dependence of the fundamental metric tensor in anisotropic spaces, then the components of an electromagnetic-type tensor F_{ij} , F^i_j , F^{ij} could depend on the directional variables. In order to make sure of this, notice the following. In **isotropic** (pseudo-Riemannian) spaces with $R_{ij} = 0$, the components of the free electromagnetic potential 4-vector $A^i = A^i(x)$ obey de Rham equations:

$$A^{\mu;\nu}_{;\nu} = 0$$

that is,

$$g^{\nu\rho}(x) \nabla_\nu \nabla_\rho (A^\mu) = 0.$$

When passing to **anisotropic** spaces with metric $g_{ij} = g_{ij}(x, y)$, the solution of such an equation would generally depend on directional variables (not to mention that the equation itself could become more complicated). So, it is meaningful to take into consideration the case when the potential 4-vector depends on the directional variables $y = (y^i)$,

$$A^i = A^i(x, y), \quad \text{and} \\ A_i = A_i(x, y).$$

Variational procedures applied to the above naturally lead to additional terms in Lorentz force

$$\begin{aligned} \frac{dy^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} y^j y^k &= \frac{q}{c} F^i_h y^h + \frac{q}{c} \tilde{F}^i_j \frac{dy^j}{dt}, \quad y^i = \dot{x}^i \\ F^i_h &= g^{ij} F_{jh}, \quad F_{jh} = \frac{\partial A_h}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^h}, \\ \tilde{F}^i_j &= g^{ih} \tilde{F}_{hj}, \quad \tilde{F}_{hj} = -\frac{\partial A_h}{\partial y^j} \end{aligned}$$

as well as the appearance of a correction to the usual expression of currents:

$$D \frac{\partial}{\partial x^i} F^{ki} + D \frac{\partial}{\partial y^a} F^{ka} = J^k.$$

In the present paper, we investigate the case of Finslerian spaces whose metrics are obtained by a small (linearly approximable) deformation of metric tensors whose components do not depend on positional variables (*locally Minkowskian metrics*) and coordinate changes which preserve the positional independence of the undeformed metric. The construction will be generalized to arbitrary Finsler spaces in future works.

2 Weak Finslerian deformation of locally Minkowskian metrics

A *locally Minkowskian* Finsler space is a Finsler space $(M, \mathcal{F})$ with the property that there exists a local coordinate system with respect to which the components of the corresponding metric tensor do not depend on positional variables, but only on directional ones:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(y).$$

In the following, we shall only consider coordinate changes which preserve this property.

One of the properties of locally Minkowski spaces is projective flatness, namely, their geodesics are straight lines:

This type of metrics includes as particular cases:

- Minkowski metric $\gamma = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$;
- Berwald-Moor 4-dimensional metric, [8], [9], [10], [11].

Let us consider the space $\mathbb{R}^4$, endowed with linear coordinate changes. Let $(x, y) = (x^i, y^a)_{i,a=\overline{1,4}}$, $y^i = \frac{\partial x^i}{\partial t}$ (t is a parameter), $i = 1, \dots, 4$ be the coordinates in a local frame of $T\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{R}^8$.

Let g be a small (linearly approximable) deformation of a locally Minkowskian metric:

$$g_{ij}(x, y) = \gamma_{ij}(y) + \varepsilon_{ij}(x, y). \quad (1)$$

We suppose that this metric tensor is Finslerian in the sense of [3], this is,

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}^2}{\partial y^i \partial y^j}$$

for some 2-homogeneous in y function $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, y)$, and g_{ij} is nondegenerate. We denote by $_{,k}$ (with commas) partial derivation w.r.t. x^k and with dots $_{\cdot a}$, partial derivation by the directional variable y^a . Whenever convenient – and just in order to point out the difference, we will denote the indices corresponding to y with $a, b, c, \dots$ and those corresponding to x with $i, j, k, \dots$, (though, they run over the same set $\{1, 2, 3, 4\}$). Let

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ih} (g_{hj,k} + g_{hk,j} - g_{jk,h})$$

denote the usual Christoffel symbols (with respect to x) of g .

In our case, Γ^i_{jk} depend on both x and y :

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x, y).$$

Let $|_k$ denote covariant derivation with respect to x^k :

$$X^i|_k = X^i_{,k} + \Gamma^i_{jk} X^j. \quad (2)$$

In the following, we shall also need the **Cartan tensor** C_{ijk} , [4]:

$$C_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{ij \cdot k} + g_{ik \cdot j} - g_{jk \cdot i}) = \frac{1}{2}g_{ij \cdot k}. \quad (3)$$

Also, let

$$X^i|_a = X^i_{\cdot a} + C^i_{ja}X^j$$

denote covariant derivative with respect to y^a .

3 Lorentz force

3.1 Variational principle

The equations of electrodynamics can be obtained from the variational procedure applied to a Lagrangian. In **isotropic spaces**, the Lagrangian is, [6],

$$L(x, y) = \frac{1}{2}g_{ij}(x)y^iy^j + \frac{q}{c}A_i(x)y^i, \quad y^i = \dot{x}^i.$$

where q is the electric charge, and $A_i(x)$ are the covariant components of the 4-vector potential.

In order to obtain Lorentz force in **Finslerian spaces**, let us consider the Lagrangian

$$L = L_0 + \frac{q}{c}L_1,$$

where

$$L_0 = \frac{1}{2}g_{ij}(x, y)y^iy^j$$

(g_{ij} can be chosen as a general Finslerian metric tensor) and $L_1 = L_1(x, y)$ is a scalar function which is 1-homogeneous in the directional variables: $L_1(x, \lambda y) = \lambda L_1(x, y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Let

$$A_i(x, y) := \frac{\partial L_1}{\partial y^i}.$$

Then

$$L_1 = A_j(x, y)y^j$$

and our Lagrangian is written as

$$L(x, y) = \frac{1}{2}g_{ij}(x, y)y^iy^j + \frac{q}{c}A_i(x, y)y^i, \quad y^i = \dot{x}^i, \quad (4)$$

where $A_j = A_j(x, y)$ is now a **direction dependent** potential.

The components of the covector field $A_i = A_i(x, y)$ are 0-homogeneous functions in y , and possess the property

$$A_{i \cdot k}y^i = 0. \quad (5)$$

The Euler-Lagrange equations

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y^i} \right) = 0$$

attached to L lead to

$$g_{kh} \left(\frac{dy^h}{dt} + \Gamma^h_{jl}y^jy^l \right) + \frac{q}{c}(A_{k \cdot h} - A_{h \cdot k})y^h + \frac{q}{c}A_{k \cdot h} \frac{dy^h}{dt} = 0. \quad (6)$$

Let:

$$F_{kh} = A_{h \cdot k} - A_{k \cdot h} \quad (7)$$

We have thus obtained

Proposition 1 *The extremal curves $t \mapsto (x^i(t)) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^4$ of the Lagrangian (4) are given by*

$$\frac{dy^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} y^j y^k = \frac{q}{c} F^i_h y^h - \frac{q}{c} g^{ik} A_{k,h} \frac{dy^h}{dt}, \quad (8)$$

Remark 1 *The term $F^i(x, y) \equiv \frac{q}{c} g^{ik} F_{kh} y^h$ is present also in the isotropic case (see [6]). But the last one,*

$$\tilde{F}^i(x, y) := -\frac{q}{c} g^{ik}(x, y) A_{k,h}(x, y) \frac{dy^h}{dt}$$

can only appear in anisotropic ones.

The usual interpretation of the extremal curves is the equation of motion. Therefore, the expression in the rhs of (8) presents the Lorentz force in the anisotropic space. We see that its first term which is common with the isotropic case is proportional to velocity, while the second term is proportional to acceleration which brings to mind the idea of an "inertial force" in the accelerated reference frame.

Let us designate

$$\tilde{F}_{ia} := -A_{i,a}, \quad \tilde{F}_{ai} = A_{i,a}, \quad (9)$$

where we denote by $a, b, c, d, \dots$ indices corresponding to derivation by directional variables.

Then $\tilde{F}_{ia}$ is (-1) -homogeneous in the directional variables:

$$\tilde{F}_{ia}(x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda} \tilde{F}_{ia}(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Then the relation between $\tilde{F}_{ia}$ and the new term in (8) is

$$\tilde{F}^i = \frac{q}{c} \tilde{F}^i_a \frac{dy^a}{dt},$$

and we have thus obtained an antisymmetric 2-form on $T\mathbb{R}^4$:

$$F = F_{ij} dx^i \wedge dx^j + \tilde{F}_{ia} dx^i \wedge dy^a. \quad (10)$$

The above is nothing but the exterior derivative of the 1-form $A = A_i(x, y) dx^i + 0 \cdot dy^a$ on $T\mathbb{R}^4$:

$$F = dA. \quad (11)$$

Conclusion: Direction dependent electromagnetic potentials lead in a natural way to a correction to the expression of the electromagnetic tensor.

Example 1 1. *In the particular case when the covariant components of A do not depend on direction,*

$$A_i = A_i(x),$$

then $\tilde{F}_{ia} = 0$ and we get the regular expression of Lorentz force.

2. *A simple, but nontrivial particular case is obtained when the contravariant components of the potential 4-vector do not depend on the directional variables:*

$$A^i = A^i(x),$$

taking into account the y -dependence of the perturbed metric tensor g_{ij} , we get that the covariant components of A are direction dependent:

$$A_i = g_{ij}(x, y) A^j \Rightarrow A_i = A_i(x, y).$$

The new term to appear in Lorentz force is then

$$\tilde{F}^i = \frac{q}{c} \tilde{F}_a^i \frac{dy^a}{dt} = -\frac{q}{c} g^{ih} A_{h \cdot a} \frac{dy^a}{dt},$$

which leads to

$$\tilde{F}^i = -2 \frac{q}{c} C^i_{ja} A^j \frac{dy^a}{dt}, \quad (12)$$

and

$$\tilde{F}_{ia} = -2 C_{ija} A^j. \quad (13)$$

Example 2 In particular, if $\gamma = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ is the Minkowski metric, and

$$g_{ij} = \gamma_{ij} + \varepsilon_{ij}(x, y),$$

where $\varepsilon_{ij}(x, y)$ is a small Finslerian perturbation, then the above is

$$\tilde{F}_{ia} = -\varepsilon_{ij \cdot a} A^j, \quad (14)$$

hence its values are small. For other locally Minkowskian metrics, the new term $\tilde{F}_{ia}$ is not necessarily small.

Example 3 For the case when:

- γ_{ij} is the Berwald-Moor Finslerian metric $\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}^2}{\partial y^i \partial y^j}$, $\mathcal{F} = \sqrt[4]{y^1 y^2 y^3 y^4}$
- $\varepsilon_{ij} = 0$, that is,

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}^2}{\partial y^i \partial y^j}, \quad \text{and}$$

- $A^i = A^i(x)$, then the correction $\tilde{F}_{ia}$ is

$$\tilde{F}_{ia} = -A_{i \cdot a} = -\frac{\partial}{\partial y^a} (g_{il} A^l) = -2 C_{ila} A^l,$$

where the Cartan tensor $C_{ila} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 \mathcal{F}^2}{\partial y^i \partial y^l \partial y^a}$ has the explicit values

$$C_{ila} = \alpha \frac{\mathcal{F}^2}{y^i y^l y^a}, \quad \alpha = \begin{cases} \frac{3}{32} & \text{if } i = j = k \\ -\frac{1}{32} & \text{if } i = j \neq k \\ \frac{1}{32} & \text{if } i \neq j \neq k \neq i. \end{cases}$$

Here we see that C_{ila} are not necessarily small.

3.2 New term – "electromagnetic" vs. "metric"

Let us now have a look at equation (6):

$$g_{kh} \frac{Dy^h}{dt} = \frac{q}{c} F_{kh} y^h - \frac{q}{c} A_{k \cdot h} \frac{dy^h}{dt}, \quad y = \dot{x}.$$

From the mathematical point of view, we can interpret the last term in two ways:

- Since it appears multiplied by the acceleration $\frac{dy^h}{dt}$ and moreover, since $A_{k\cdot h} = A_{h\cdot k}$, we can "stick" it to the metric:

$$(g_{kh} + \frac{q}{c}A_{k\cdot h})\frac{dy^h}{dt} + \Gamma_{khl}y^hy^l = \frac{q}{c}F_{kh}y^h.$$

and get a new metric tensor

$$\tilde{g}_{kh} = g_{kh} + \frac{q}{c}A_{k\cdot h} \quad (15)$$

(if the matrix $(\tilde{g}_{kh})$ is invertible), with the property

$$\tilde{g}_{kh}y^ky^h = g_{kh}y^ky^h = \mathcal{F}^2$$

With this, we can write the equation of motion as

$$\frac{Dy^i}{dt} = \tilde{g}^{ik}\frac{q}{c}F_{kh}y^h \quad (16)$$

and the obtained expression for Lorentz force $\tilde{g}^{ik}\frac{q}{c}F_{kh}y^h$ differs from the case of isotropic perturbation $\frac{q}{c}g^{ik}F_{kh}y^h$ due to the new metric (15).

- Also, we might leave the metric as it is and move the third term in the right hand side and interpret it as a new term added to Lorentz force:

$$g_{kh}\frac{Dy^h}{dt} = \frac{q}{c}F_{kh}y^h - \frac{q}{c}A_{k\cdot h}\frac{dy^h}{dt}.$$

This would yield

$$\frac{dy^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}y^jy^k = \frac{q}{c}(F^i_hy^h + \tilde{F}^i_a\frac{dy^a}{dt}). \quad (17)$$

with the influence of the anisotropy given by the second term in the rhs. Notice, that $\frac{q}{c}(F^i_hy^h + \tilde{F}^i_a\frac{dy^a}{dt})$ is equal to $\frac{q}{c}g^{ik}(F_{kh}y^h - A_{k\cdot a}\frac{dy^a}{dt})$ given by eq. (8) since $F^i_h = g^{ik}F_{kh}$, $\tilde{F}^i_a = g^{ik}A_{k\cdot a}$. In eq.(16) the term $\frac{q}{c}g^{ik}A_{k\cdot h}\ddot{x}^h$ was brought to the left hand side of the equation of motion and "swallowed" into the metric – the new "metric" was denoted by $\tilde{g}_{ik}$. This illustrates the remark concerning the equivalence principle made in [1], applied to a (curved) space with an electromagnetic field.

4 Homogeneous Maxwell equations

Let us consider again the 2-form (10)

$$F(x, y) = dA(x, y) = \frac{1}{2}F_{ij}(x, y)dx^i \wedge dx^j + \tilde{F}_{ia}(x, y)dx^i \wedge dy^a.$$

We immediately get:

Proposition 2 *There holds*

$$F_{ij,k} + F_{ki,j} + F_{jk,i} = 0; \quad (18)$$

which is just the homogeneous Maxwell equation or, in terms of covariant derivatives (2),

$$F_{ij|k} + F_{ki|j} + F_{jk|i} = 0.$$

There also hold the equalities

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{ia,k} + \tilde{F}_{ki,a} + \tilde{F}_{ak,i} &= 0; \\ \tilde{F}_{ia,b} + \tilde{F}_{bi,a} &= 0,\end{aligned}$$

where $F_{ia,b} = \frac{\partial F_{ia}}{\partial y^b}$. The above two relations, together with (18) mean actually that the exterior derivative of F is 0:

$$dF = 0. \quad (19)$$

5 Currents in anisotropic spaces

In the classical Riemannian case, the inhomogeneous Maxwell equations can be obtained by means of the variational principle applied to

$$\int (\alpha F_{ij} F^{ij} - \beta j^k A_k) \sqrt{-g} d\Omega,$$

[7], where α and β are constants, $g = \det(g_{ij})$ and $\Omega = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$. Taking into account that in our case, at least one of the quantities F_{ij} , F^{ij} depends on y , the whole integrand depends on y , and is actually defined on some domain in $\mathbb{R}^8$.

Let

$$u^a = \frac{1}{H} y^a,$$

where H is a constant, $[H] = \frac{1}{\text{sec}}$, meant to "adjust" measurement units as to have $[x^i] = [u^a]$, hence also $[F_{ij}] = [\tilde{F}_{ia}]$. So, let us consider $A_i = A_i(x, u)$ and the integral of action

$$I = \int (\alpha F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} - \beta j^k A_k) \sqrt{G} d\Omega,$$

where $\lambda, \mu \in \{i, j, a, b\}$, $G = \det(G_{\alpha\beta})$ is the Sasaki lift of g to $T\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{R}^8$, [4]:

$$G_{\alpha\beta}(x, u) = g_{ij}(x, u) dx^i \otimes dx^j + g_{ab}(x, u) du^a \otimes du^b$$

and $\Omega = \prod_{i,a} dx^i du^a$ gives the volume form on $\mathbb{R}^8$.

Remark: The product $F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu}$ is in our case

$$F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} = F_{ij} F^{ij} + \tilde{F}_{ia} \tilde{F}^{ia}.$$

Taking variations with respect to A_k in the above, we get, in terms of covariant derivatives with respect to the metrical connection $D\Gamma = (\Gamma_{jk}^i, C_{jk}^i)$,

$$F^{ki}|_i + \tilde{F}^{ka}|_a = J^i,$$

where $|_i = D \frac{\partial}{\partial x^i}$, $|_a = D \frac{\partial}{\partial y^a}$.

Conclusion: In comparison to the case of isotropic spaces, there appears a new term in the expression for the current, namely,

$$\zeta^k = \tilde{F}^{ka}|_a. \quad (20)$$

This means that in an anisotropic space the measured fields would correspond to an effective current consisting of two terms: one is the current provided by the experimental environment, the other is the current corresponding to the anisotropy of space.

Examples:

1. If $A_i = A_i(x)$, then we get $\tilde{F}_{ia} = 0$ and

$$\zeta^k = 0, \quad F^{ki}|_i = J^k.$$

2. Already a nontrivial example is obtained if

$$A^i = A^i(x);$$

then we have shown above that

$$\tilde{F}_{ia} = -2C_{ija}A^j.$$

Then, $\tilde{F}^{ia} = -2C^{ia}{}_jA^j$ and

$$\zeta^k = -2(C^{ka}{}_jA^j)|_a = -2C^{ka}{}_j|_aA^j - 2C^{ka}{}_jC^j{}_{ha}A^h.$$

The presence of the last current in the experimental situation could be noticed if $|\tilde{F}^{ka}|_a \approx |F^{ki}|_i|$.

In the case of *deformed Minkowski metric*, we get that

$$\zeta^k = -2\varepsilon^{ka}{}_{.ja}A^j. \quad (21)$$

Consequently, the current $\tilde{F}^{ia}$ can be noticed when the "regular" current is small and $|2\varepsilon^{ka}{}_{.ja}A^j| \approx |F^{ki}|_i|$.

If we take instead a deformed Berwald-Moor metric, then the Cartan tensor components are no longer small, and hence the correction ζ^k is generally not small, and it could be noticed even if the regular current is not small.

Conclusion: An anisotropic space with electromagnetic field possesses inherent currents that could produce observable fields.

Comparison to existent results:

R. Miron and collaborators, [7] defined electromagnetic tensors in Lagrange spaces formally, by means of nonlinear (and linear) connections on the tangent bundle TM :

$$F_{ij} = \frac{1}{2}(y_{j|i} - y_{i|j}), \quad f_{ab} = \frac{1}{2}(y_b|_a - y_a|_b)$$

where $N^i{}_j$, $L^i{}_{jk}$, $C^a{}_{bc}$ are the coefficients of the Kern nonlinear connection and respectively, the canonical metrical linear connection, [7], on TM (in the case of Finsler spaces, $(N^i{}_j, L^i{}_{jk}, C^a{}_{bc})$ provide the Cartan connection, [4]).

We notice there the appearance of new quantities f_{ab} (and additional Maxwell equations) in comparison to the Riemannian case:

$$\begin{aligned} F_{ji|k} + F_{kj|i} + F_{ik|j} &= 0, & f_{ab|c} + f_{ca|b} + f_{bc|a} &= 0, \\ F^{ij}{}_{|j} &= J^i, & f^{ab}{}_{|b} &= j^a. \end{aligned}$$

Also, in the cited work is investigated the case of an electromagnetic tensor arising from a potential

$$A_i = A_i(x)$$

depending just on the positional variables x^i . In this case, the authors show that the resulting Maxwell equations and the resulting expression for Lorentz force are formally identical to the usual ones in Riemannian spaces – no additional terms appear.

In our approach, we consider **direction dependent potentials**. The components and the corrections due to anisotropy to the electromagnetic tensor appear from variational approaches. The new appearing terms are to be *added* to the currents, not regarded as separate quantities:

$$F^{ij}{}_{|j} + \tilde{F}^{ia}{}_{.a} = J^i.$$

We could also relate our components of the electromagnetic tensor to linear connections. Namely, let $D\Gamma = (N^a_i, L^i_{jk}, C^i_{jk})$ denote the Cartan connection, [4], [7], determined by the Finslerian function g_{ij} ; let us define the following tensor fields:

$$X^i{}_{jk} = \frac{2q}{c} \frac{g^{ih}}{\mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial y^k} (\mathcal{F} A_{h|j}),$$

where the x -covariant derivative $A_{h|j}$ is taken with respect to the Cartan connection of g : $A_{h|j} = \frac{\delta A_h}{\delta x^j} - L^l_{hj} A_l$. Also, let

$$\Omega_{rj}^{ih} = \frac{1}{2} (\delta_r^i \delta_j^h - g_{rj} g^{ih})$$

denote the Obata operators, [7], of g .

Let us fix the nonlinear connection N as the Cartan one and define the linear connection $\tilde{D}\Gamma(N) = (\tilde{L}^i_{jk}, \tilde{C}^i_{jk})$ by

$$\tilde{L}^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk} + \Omega_{rj}^{ih} X^r{}_{hk}, \quad \tilde{C}^i{}_{jk} = C^i{}_{jk} - \frac{q}{c} g^{ih} A_{h.jk}.$$

We denote x - and y - covariant derivatives with respect to this connection with $||_k$ and $||_k$ respectively.

Then, by direct computation, one can check the following properties:

Proposition 3 1. A curve $t \mapsto (x^i(t), \dot{x}^i(t))$ on $T\mathbb{R}^4$ is an autoparallel curve of $\tilde{D}\Gamma(N)$ if and only if its projection $t \mapsto x^i(t)$ on the base manifold $\mathbb{R}^4$ is a solution of Lorentz equation (8).
 2. $\tilde{D}\Gamma(N)$ is h -metrical: $g_{ij||k} = 0$;
 3. In the adapted basis $(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^k})$, the local coordinates of the electromagnetic tensor are given by:

$$y_{i||j} = \frac{-1}{2} (y_{j||i} - y_{i||j}) = -\frac{q}{c} (A_{j||i} - A_{i||j}) =: -\frac{q}{c} \mathbf{F}_{ij}. \quad y_i||_k = g_{ik} - \frac{q}{c} A_{i.k},$$

6 The Berwald-Moor case

In the following, we shall develop an approach for obtaining a generalization of the expression for the Lorentz force in the case of the Berwald-Moor quartic Finslerian function $\mathcal{F} = \sqrt[4]{y^1 y^2 y^3 y^4}$, [8], [9], [10], [11], [12], in terms of the 4-scalar product introduced in [8].

The 4-scalar product

$$\langle U, V, W, Y \rangle = G_{ijkl} U^i V^j W^k Y^l, \quad \forall U, V, W, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^4),$$

where the components G_{ijkl} are, [8],

$$G_{ijkl} = \begin{cases} \frac{1}{4!} & \text{if } i, j, k, l \text{ are all different from each other} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

induces a (direction dependent) pseudo-scalar product if we specify two of the 4 vectors involved. For instance, for $W = Y = y$, we get

$$\langle U, V \rangle := \langle U, V, y, y \rangle = h_{ij} U^i V^j,$$

where the *flag (polynomial) metric tensor* $h = h(y)$ has the local components

$$h_{ij} = G_{ijkl} y^k y^l =: G_{ij00},$$

equivalently, [12],

$$h_{ij} = \frac{1}{12} \frac{\partial^2 \mathcal{F}^4}{\partial y^i \partial y^j}.$$

We notice that the components h_{ij} are 2-homogeneous polynomials in the directional variables y^i and that

$$h_{ij} y^i y^j = \mathcal{F}^4$$

The Lagrangian in Section 3, providing Lorentz force can be written as

$$L = \frac{1}{2} \langle y, y \rangle + \frac{q}{c} \langle A, y \rangle.$$

If we use in the above, instead of the classical Finslerian metric tensor g_{ij} , the polynomial metric h_{ij} , then we get a specific (generalized) Lagrangian for the Berwald-Moor case:

$$L = \frac{1}{2} h_{ij} y^i y^j + \frac{q}{c} h_{ij} A^i y^j.$$

Remark: The first term in the above is $\frac{1}{2} h_{ij} y^i y^j = \frac{1}{2} \mathcal{F}^4$.

The second term is

$$\frac{q}{c} h_{ij} A^i y^j = \frac{q}{c} G_{ijkl} A^i y^j y^k y^l.$$

Let us denote:

$$A_{jkl} = G_{ijkl} A^i.$$

The above defined tensor is totally symmetric. Its nonvanishing components are:

$$A_{123} = \frac{1}{4!} A^4, \quad A_{124} = \frac{1}{4!} A^3, \quad A_{134} = \frac{1}{4!} A^2, \quad A_{234} = \frac{1}{4!} A^1.$$

Moreover, if $A^i = A^i(x)$ are only position dependent, then A_{jkl} depend only on x and conversely. In the following, we shall assume this, namely

$$A_{jkl} = A_{jkl}(x).$$

We get, thus, the following Lagrangian in case of the Berwald-Moor function

$$L = \frac{1}{2} \mathcal{F}^4 + \frac{q}{c} A_{ijk}(x) y^i y^j y^k. \quad (22)$$

Let us obtain the terms of the Euler-Lagrange equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^m} &= \frac{q}{c} A_{ljk,m} y^l y^j y^k; \\ \frac{\partial L}{\partial y^m} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}^4}{\partial y^m} + 3 \frac{q}{c} A_{mjk}(x) y^j y^k \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y^m} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}^4}{\partial y^m} \right) + 3 \frac{q}{c} A_{mjk,l} y^l y^j y^k + \frac{q}{c} 6 A_{jmk} \frac{dy^j}{dt} y^k = \\ &= \left(\frac{12}{2} h_{mj} \frac{dy^j}{dt} + 6 \frac{q}{c} A_{jmk} y^k \right) \frac{dy^j}{dt} + \frac{q}{c} (A_{mjk,l} + A_{mlk,j} + A_{mjl,k}) y^l y^j y^k. \end{aligned}$$

Therefore, we get

Proposition 4 *The extremal curves for the Lagrangian (22) are given by*

$$6\left(h_{mj} + \frac{q}{c}A_{mj0}\right)\frac{dy^j}{dt} + \frac{q}{c}(A_{mjk,l} + A_{mlk,j} + A_{mjl,k} - A_{ljk,m})y^ly^jy^k = 0,$$

where $A_{mj0} = A_{mjk}y^k$.

Let us denote

$$F_{mjkl} = \frac{1}{6}(A_{mjk,l} + A_{mlk,j} + A_{mjl,k} - A_{ljk,m}). \quad (23)$$

The above relation defines a 4-covariant tensor field, which is symmetric in its 3 last indices: $F_{mjkl} = F_{mkjl} = F_{mklj}$ etc.

By contracting it twice with y^k, y^l , we get an antisymmetric tensor:

$$F_{mj00} := F_{mjkl}y^ky^l \Rightarrow F_{mj00} = F_{jm00}.$$

With the notation (23), the equations of extremal curves can be written as:

$$h_{mj}\frac{dy^j}{dt} + \frac{q}{c}F_{mjkl}y^jy^ky^l + \frac{1}{6}\frac{q}{c}A_{mj0}\frac{dy^j}{dt} = 0.$$

If we raise indices by means of h^{ij} , the above is equivalent to :

$$\frac{dy^i}{dt} + \frac{q}{c}F^i_{jkl}y^jy^ky^l + \frac{1}{6}\frac{q}{c}A^i_{j0}\frac{dy^j}{dt} = 0. \quad (24)$$

With this we can return to 8 and try to derive all the results obtained in what follows there in the similar manner.

Discussion

The relativity principle states that there are no means to distinguish between the inertial frames, but the equivalence principle goes even further. Since we can't distinguish between an accelerated frame and such a physical field as gravity, there is no reason to think that gravity is velocity independent. If the acceleration is not rectilinear, the inertial force acting on a body depends on the velocity of the body (e.g. Coriolis force). Therefore, measuring gravity we can't be sure to which extent we have accounted for the observable kinematics. From the mathematical point of view it means that the space is anisotropic. Locally, it could mean the existence of a preferable direction (e.g. the axis of a rotating reference frame), but generically it demands the direction dependent metric. This leads to the anisotropic geometrodynamics [1] which appears to be able to explain some well known paradoxes observed on the cosmological scale.

In this paper the ideas formulated in [1] were developed for the case when an additional physical (electromagnetic) field is present in such an anisotropic space. Obviously, the notions of Lorentz force and electric current in an accelerated frame (in an anisotropic space) should be redefined with regard to the mentioned circumstances. This is performed for the case of the linearly approximable anisotropic perturbation of the locally Minkowski metric. We have found the expressions for the additional terms both in the Lorentz force 8 and in the current 20. It should be mentioned that it is important in which way – covariant or contravariant – do the measurable (physical) variables transform with the coordinates transformation. The calculations for the case when the unperturbed locally Minkowski metric is Minkowski one lead to the concrete expressions 14 and 21 that can be used in observations.

Alongside with the weak anisotropic perturbation of the Minkowski metric we regarded also the anisotropic Berwald-Moor metric as it was done in [8]. Working in terms of the corresponding

4-scalar product, the geodesic equations have obtained a new form and what could be called a "Lorentz force" has also transformed. This is due to the fact that the algebra chosen for the possible interpretation of experimental measurements essentially differs from the usual one. It is hard to say at once whether it is convenient or not and whether it has any new perspectives because of the lack of the corresponding language in the interpretation of physical notions.

Acknowledgements

The work was supported by the RFBR grant No. 07-01-91681-RA_a and by the grant No. 5 / 5.02.2008, between the Romanian Academy and Politehnica University of Bucharest.

References

- [1] S. Siparov. ArXiv: 0809.1817v2 [gr-qc] 10 Sep 2008
- [2] S. Siparov, N. Brinzei. ArXiv: 0806.3066v1 [gr-qc] 18 Jun 2008
- [3] Rashevsky, P.K. : *The Geometrical theory of partial differential equations*, Second Edition, Editorial USSR, M. 2003 (in Russian).
- [4] Bao, D., Chern, S.S., Shen, Z., *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry* (Graduate Texts in Mathematics; 200), Springer Verlag, 2000.
- [5] Miron, R., Anastasiei, M., *The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and Applications*, Kluwer Acad. Publ. FTPH no. 59, (1994).
- [6] Munteanu, Gh. and Balan, V.: *Lessons of Relativity Theory* (in Romanian), Bren Eds., Bucharest, 2000.
- [7] Raigorodski, L.D., Stavrinou, P.C., Balan, V., *Introduction to the Physical Principles of Differential Geometry*, Univ. of Athens, 1999.
- [8] D.G. Pavlov, *Generalization of Scalar Product Axioms*, "HyperComplex Numbers in Geometry and Physics" 1 (1), Vol 1, 2004, 5–18.
- [9] S. Lebedev. "HyperComplex Numbers in Geometry and Physics" 2 (4), 2005, 44
- [10] V. Balan, N. Brinzei. "HyperComplex Numbers in Geometry and Physics" 2 (4), 2005, 114
- [11] V. Balan, N. Brinzei, S. Lebedev "HyperComplex Numbers in Geometry and Physics" 2 (6), 2006, 113
- [12] N. Brinzei, *Projective relations for m-th root metric spaces*, ArXiv:0711.4781v1.

Уравнения электромагнетизма в некоторых особых анизотропных пространствах

Н. Бринзей, С. Сипаров

Университет Трансильвании, Брасов, Румыния,
Академия гражданской авиации, Петербург, Россия
nico.brinzei@rdslink.ro, sergey@siparov.ru

Показывается, что анизотропия пространства естественно ведет к новым членам в выражениях для силы Лоренца и силы тока

Ключевые слова: анизотропия пространства, финслеровы пространства, уравнения электромагнитного поля

MSC2000: 53B40, 53C60

ON THE POSSIBILITY OF THE OMPR EFFECT IN SPACES WITH FINSLER GEOMETRY. PART II

Sergey Siparov & Nicoleta Brinzei

State University of civil aviation, St-Petersburg, Russia

"Transilvania" University, Brasov, Romania

sergey@siparov.ru, nico.brinzei@rdslink.ro

As a continuation of the ideas in [1], we determine a new solution for Einstein equations in vacuum for linearly approximable anisotropic perturbations of flat Minkowski and Berwald-Moor Finslerian metric. Also, we determine the effective expressions for geodesics and eikonal for small anisotropic perturbations of Minkowski and Berwald-Moor metrics and the changes of the OMPR conditions for the two models. This could in principle provide the possibility to study the anisotropic properties of space-time in our galaxy.

Key-words: Finsler geometry, Berwald-Moor metric, anisotropic spaces, OMPR effect.

1 Introduction

This paper is the continuation of [1] in which the motivation and the physical background of this research were given in detail. To remind it briefly, we should mention the following. The astrophysical data collected during the last decade contradicts the GRT expectations for several specific cases and demands to modify the expression for the Einstein-Hilbert action which is the base for the popular cosmological models. Several such attempts appeared to be unsatisfactory for various reasons, and in [1] the modification accounting for the possible anisotropy of space-time was suggested. The consequences of such suggestion are meaningful, therefore, there must be an experimental test able to show if this idea could be applied to the physical world. The corresponding effect is the optic-metrical parametric resonance (OMPR) exploiting the metrical properties of space-time, particularly, the existence and properties of the gravitational waves. The theory of OMPR can be found in [2], [3], [4], [5], the first experimental evidence of its existence are given in [6].

The goal of [1] was to adjust the ideas underlying the theory of the OMPR effect to the case when the geometry used for the description of the space-time is not Riemannian but the Finslerian one. This included the modifications of the Einstein equations, of the eikonal equation and of the geodesic equations. In order to do this the needed mathematical formalism was introduced, and the Einstein equations in vacuum, [7], for the linearized h-v model

$$G = (\gamma_{ij}(y) + \varepsilon_{ij}(x, y))dx^i \otimes dx^j + v_{ab}(x, y)\delta y^a \otimes \delta y^b$$

(where $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(y)$ is a locally Minkowski metric, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x, y)$ and $v_{ab} = v_{ab}(x, y)$ are small anisotropic perturbations), became:

$$\begin{cases} R_{ij} - \frac{1}{2}R\gamma_{ij} = \frac{1}{2}S(\gamma_{ij} + \varepsilon_{ij}) \\ (\delta_s^i \delta_j^l - \gamma^{il} \gamma_{sj}) \Gamma_{li \cdot b}^s = 0 \\ S_{ab} - \frac{1}{2}(r + S)v_{ab} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Here, Γ_{jk}^i are the usual Christoffel symbols for $g_{ij} = \gamma_{ij} + \varepsilon_{ij}$, R_{ij} is the corresponding Ricci tensor, and S_{ab} is the Ricci tensor corresponding to the "vertical" part v_{ab} of the metric structure G .

We ascertained that they preserve the form of the wave equation $\square \varepsilon_{ij} = 0$ for the direction dependent metric, while the solution $\varepsilon_{jh} = \text{Re}(a_{jh}(y)e^{ik_m(y)x^m})$ appeared to be expectedly different from the regular plane wave even for the simplest case: its amplitude, $a_{jh}(y)$, and wave vector, $k_m(y)$, were no longer isotropic and depended on each other. In [1] there was proposed a generalized eikonal equation. Here we use the simpler and more natural variant

$$g^{ij}k_ik_j = 0. \quad (2)$$

where $k_i = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}$. By a similar approach to the Riemannian case, the eikonal appears to be

$$\psi = k_i(y)x^i + h\tilde{A}(y) \sin(K_ix^i), \quad \gamma^{ij}k_ik_j = 0, \quad k_i = k_i(y) \quad (3)$$

where $\tilde{A} = \tilde{A}(y)$ is expressed in terms of the wave vectors (k_i) and (K_i) of the gravitational and of the electromagnetic waves as $\tilde{A}(y) = \frac{1}{2} \frac{\tilde{a}_{ij}k^ik^j}{K_ik^i} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{a}^{ij}k_ik_j}{\gamma^{ij}K_ik_j}$. The generalized geodesic equation took the form

$$g_{ij}^* \frac{dy^j}{dt} + \gamma_{i00} + \frac{1}{2} \varepsilon_{hl,i,j} y^h y^l y^j = 0, \quad (4)$$

where $\gamma_{i00} = \gamma_{ijk}y^jy^k$; $g_{ij}^* = \frac{1}{2} \frac{\partial F^2}{\partial y^i \partial y^j}$ is the (usual) Finsler metric generated by the Finslerian function $F^2 = (\gamma_{ij}(y) + \varepsilon_{ij}(x, y))y^iy^j$ and the third term originated from the anisotropic deformation of the metric.

It should be noticed that this equation has a physical meaning. For the locally Minkowskian space with small anisotropic deformation, the force potentials consist of two terms. The second term in brackets, originating from the anisotropy of the deformation, is associated with the velocity and provides an analogue to the second term in the expression for the Lorentz force in electrodynamics. This illustrates the ideas formulated in the end of [3], [4] and developed in [8], [9].

In this paper we obtain the solutions of these equations for the flat Minkowski and Berwald-Moor metrics as unperturbed ones and use them for the calculation of the OMPR effect in Finsler case.

2 Weak anisotropic perturbation of the flat Minkowski metric

2.1 Solution

Let the initial (undeformed) metric be the flat Minkowskian one $\gamma = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Then the conditions on the wave solution lead to the system

$$\begin{cases} \gamma^{hl}k_hk_l = 0 \\ a^i_jk_i = \frac{1}{2}a^i_ik_j \\ \frac{\partial}{\partial y^b} \left(\frac{1}{2}a^i_ik_j \sin(k_mx^m) \right) = \overset{0}{C^i}_{lb} \{2a^l_jk_i - a^l_ik_j\} \sin(k_mx^m). \end{cases} \quad (5)$$

obtained in [1] which is identically satisfied by

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 + h\tilde{a}(y) \cos\left(\frac{D}{c}(x^1 - x^2)\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - h\tilde{a}(y) \cos\left(\frac{D}{c}(x^1 - x^2)\right) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Here $\tilde{a}(y)$ is an arbitrary scalar 0-homogeneous function, and $h \in \mathbb{R}$ is a constant, small enough such that $h^2 \simeq 0$. When $a(y) := h\tilde{a}(y)$ is a constant, this metric reduces to the perturbed Minkowski metric for the isotropic empty space.

In other words, the obtained perturbation is

$$\begin{aligned}\varepsilon_{33} &= h\tilde{a}(y) \cos\left(\frac{D}{c}(x^1 - x^2)\right), & \varepsilon_{44} &= -h\tilde{a}(y) \cos\left(\frac{D}{c}(x^1 - x^2)\right), \\ \varepsilon_{ij} &= 0, & \text{for all other } (i, j).\end{aligned}$$

2.2 Eikonal

For the above perturbation of the Minkowski metric, we get $\tilde{A} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{a}^{ij} k_i k_j}{\gamma^{ij} K_i k_j} = \frac{1}{2} \frac{c^2 \tilde{a}(y)(k_3^2 - k_4^2)}{D(ck_2 - \omega)}$, and the eikonal (3) takes the form

$$\psi = -\frac{\omega}{c}x^1 + k_2x^2 + k_3x^3 + k_4x^4 + \frac{h}{2} \frac{c^2 \tilde{a}(y)(k_3^2 - k_4^2)}{D(ck_2 - \omega)} \sin(K_i x^i), \quad (7)$$

Example: Let $v \in \mathcal{X}(M)$ be an arbitrary vector field on $M = \mathbb{R}^4$ and $\tilde{a} = \frac{K_i y^i}{\gamma_{ij} v^i y^j}$, where K is the wave vector. As the ratio of two invariant quantities under coordinate changes, $\tilde{a}$ is globally defined.

In the particular local frame in which $K_1 = \frac{D}{c}$, $K_2 = -\frac{D}{c}$, $K_3 = 0$, $K_4 = 0$ (which is, chosen such that the GW propagates antiparallel to the Ox axis), we get $\tilde{a} = \frac{\frac{D}{c}(y^1 - y^2)}{\gamma_{ij} v^i y^j}$.

More particularly, if in the given frame, $v^i = 0$, $i = 1, 2, 3$ and $v^4 = -\frac{D}{c}$, then we get

$$\tilde{a} = \frac{y^1 - y^2}{y^4}$$

hence,

$$\psi = -\frac{\omega}{c}x^1 + k_2x^2 + k_3x^3 + k_4x^4 + \frac{h}{2} \frac{c^2(y^1 - y^2)(k_3^2 - k_4^2)}{Dy^4(ck_2 - \omega)} \sin(K_i x^i) \quad (8)$$

2.3 Geodesics

If $\varepsilon_{ij}(x, y) = h\tilde{a}_{ij}(y) \cos(K_m(y)x^m)$, then, performing the derivations, we obtain the geodesic equations:

$$\frac{dy^i}{ds} + hA^i(y) \sin(K_m x^m) + hB_p^i(y) x^p \cos(K_m x^m) = 0 \quad (9)$$

where the coefficients

$$\begin{aligned}A^i &= -\frac{1}{2} \gamma^{it} y^l y^s [y^j \frac{\partial(K_j \tilde{a}_{sl})}{\partial y^t} + (K_s \tilde{a}_{tl} + K_l \tilde{a}_{ts} - K_t \tilde{a}_{ls})], \\ B_p^i &= -\frac{1}{2} \gamma^{it} y^l y^s y^j K_j \tilde{a}_{sl} \frac{\partial K_p}{\partial y^t} = -\frac{1}{2} \gamma^{it} K_0 \tilde{a}_{00} \frac{\partial K_p}{\partial y^t}.\end{aligned} \quad (10)$$

depend only on the directional variables y^i . Here $\tilde{a}_{00} \equiv \tilde{a}_{nm} y^n y^m$ and $K_0 \equiv K_i y^i$. In particular, if K_i are constant, then $B_p^i = 0$, $i = 1 \div 4$ and the equations of geodesics simplify.

Solving 9, one can find that unit-speed geodesics of the perturbed metric $g_{ij}(x, y) = \gamma_{ij}(x, y) + h\tilde{a}_{ij}(y) \cos(K_m(y)x^m)$ are described by

$$x^i(s) = \alpha^i s + \beta^i - \frac{h}{2} \gamma^{it} \frac{\partial}{\partial y^t} \left(\frac{\tilde{a}_{00}}{K_0} \right) \sin(K_m x^m) - \frac{h x^p}{2} \gamma^{it} \frac{\tilde{a}_{00}}{K_0} \frac{\partial K_p}{\partial y^t} \cos(K_m x^m), \quad (11)$$

where α^i and β^i depend on the initial conditions. In particular, if K_m are constant, geodesics of the perturbed metric obey

$$x^i(s) = \alpha^i s + \beta^i - \frac{h}{2} \gamma^{it} \frac{\partial}{\partial y^t} \left(\frac{\tilde{a}_{00}}{K_0} \right) \sin(K_m x^m). \quad (12)$$

From (11), we get that along geodesics $hx^i(s) \simeq h(\alpha^i s + \beta^i)$, and $hy^i(s) = h \frac{dx^i}{ds} \simeq h\alpha^i$. Eq. (12) describes the geodesics in the case of a small anisotropic perturbation of the Minkowski metric.

Examples: 1) For $a = h = \text{const}$ (Riemannian perturbation), that is, $\tilde{a} = 1$, we get the expression obtained in [2].

2) If $a = h \frac{y^1 - y^2}{y^4}$ as earlier, we get $a = \frac{h\alpha}{y^4}$ along geodesics, and, with $x^i(0) = 0$, $i = \overline{1, 4}$ ($\Rightarrow \beta = \nu = 0$),

$$x^3 = u_0 \frac{x^1 - x^2}{h\alpha} + u_0 \frac{hc}{y^4 D} \sin\left(\frac{D}{c}(x^1 - x^2)\right). \quad (13)$$

Then the Oy -component of the atom velocity will contain a term proportional to

$$y^3 \sim u_0^2 \frac{h\alpha}{y^4} \cos\left(\frac{D}{c}(x^1 - x^2)\right)$$

and the amplitude factor in front of the cosine depends on the velocity component, y^4 , orthogonal to Ox and Oy axes.

3 Weak perturbation of the anisotropic Berwald-Moor metric

3.1 Solution

Instead of the anisotropic correction to the isotropic (Minkowski) metric, we could try an originally anisotropic but still locally Minkowskian (i.e. spatial variables independent) metric on $\mathbf{R}^4$. Let us consider the Finslerian Berwald-Moor metric $\gamma_{ij}(y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$, in which $F = \sqrt[4]{y^1 y^2 y^3 y^4}$. The explicit form of the unperturbed metric is provided by the matrices

$$(\gamma_{ij}) = \frac{F^2}{8} \begin{pmatrix} \frac{-1}{(y^1)^2} & \frac{1}{y^1 y^2} & \frac{1}{y^1 y^3} & \frac{1}{y^1 y^4} \\ \frac{1}{y^1 y^2} & \frac{-1}{(y^2)^2} & \frac{1}{y^2 y^3} & \frac{1}{y^2 y^4} \\ \frac{1}{y^1 y^3} & \frac{1}{y^2 y^3} & \frac{-1}{(y^3)^2} & \frac{1}{y^3 y^4} \\ \frac{1}{y^1 y^4} & \frac{1}{y^2 y^4} & \frac{1}{y^3 y^4} & \frac{-1}{(y^4)^2} \end{pmatrix}, \quad (\gamma^{ij}) = \frac{2}{F^2} \begin{pmatrix} -(y^1)^2 & y^1 y^2 & y^1 y^3 & y^1 y^4 \\ y^1 y^2 & -(y^2)^2 & y^2 y^3 & y^2 y^4 \\ y^1 y^3 & y^2 y^3 & -(y^3)^2 & y^3 y^4 \\ y^1 y^4 & y^2 y^4 & y^3 y^4 & -(y^4)^2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

The wave solutions $\varepsilon_{ij} = a_{ij}(y) \cos(K_m x^m)$ for Einstein's equations in vacuum are given by the solutions of the system (5), where the coefficients, $C_{jd}^i = \frac{1}{2} \gamma^{ih} \frac{\partial \gamma_{hj}}{\partial y^d}$ will be given by

$$C_{jd}^i = \frac{p}{8} \frac{y^i}{y^j y^d}, \quad p = \begin{cases} -\frac{3}{8}, & \text{if } i = j = d \\ \frac{1}{8}, & \text{if } i = j \neq d \text{ or } i \neq j = d \text{ or } i = d \neq j. \\ -\frac{1}{8}, & \text{if } i \neq j \neq d \neq i. \end{cases} \quad (15)$$

If we choose the coordinate system such that

$$K_3 = K_4 = 0, \quad (16)$$

then the light-like condition $\gamma^{ij}K_iK_j = 0$ leads to

$$K_2 = \frac{y^1}{y^2}K_1. \quad (17)$$

Moreover, $a_{ij} = h\lambda(y)K_iK_j$ (here $\lambda(y)$ is an arbitrary scalar 0-homogeneous function and h is a small constant $h^2 \simeq 0$) defines a solution of (5) obeying the transverse traceless conditions $a^i_i = 0$, $a^i_jK_i = 0$. We get

Proposition 1 *The following perturbation defines a solution for the Einstein equations in vacuum for the Bewald-Moor metric:*

$$\varepsilon_{ij}(x, y) = h\lambda\tilde{a}_{ij} \cos(K_1x^1 + K_2x^2), \quad (18)$$

$$(\tilde{a}_{ij}) = \begin{pmatrix} K_1^2 & K_1K_2 & 0 & 0 \\ K_1K_2 & K_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

where the first component $K_1 = K_1(y)$ of the wave vector is an arbitrary 0-homogeneous function of the directional variables and K_2 obeys relation 17.

Let us denote, in some fixed coordinate system:

$$K_i = \frac{D}{y^i}, \quad n_i = \frac{c}{D}K_i, \quad i = 1, \dots, 4.$$

With these, the solution can be written as:

$$\varepsilon_{ij} = h\frac{\lambda D^2}{c^2}n_in_j \cos\left(\frac{D}{c}(n_ix^i)\right). \quad (20)$$

In the given frame, we have $K_2 = \frac{D}{y^2}$, $n_3 = n_4 = 0$.

Example:

An example which is interesting because of its symmetry, is $\lambda D^2 = y^1y^2$. Then,

$$(\tilde{a}_{ij}) = \lambda D^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{(y^1)^2} & \frac{1}{y^1y^2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{y^1y^2} & \frac{1}{(y^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \frac{n_1}{n_2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{n_2}{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (21)$$

and we see that in this case the perturbation, ε_{ij} , of the metric becomes

$$\varepsilon_{ij} = h\frac{n_in_j}{n_1n_2} \cos\left[\frac{D}{c}(n_1x^1 + n_2x^2)\right], \quad i, j = 1, 2. \quad (22)$$

3.2 Eikonal equation

With the help of $\tilde{A} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{a}^{ij} k_i k_j}{\gamma^{ij} K_i k_j} = \frac{1}{2} \frac{\lambda (K^i k_i)^2}{K^i k_i} = \frac{\lambda(y)}{2} K^i k_i$, eq. (2) yields the solution for the eikonal (3). Rewriting $\tilde{A} = \frac{\lambda D}{2c} n_i k^i$, one obtains the solution for the eikonal as:

$$\psi = k_i(y) x^i + h \frac{\lambda D}{2c} n_i k^i \sin\left[\frac{D}{c} (n_1 x^1 + n_2 x^2)\right] \quad (23)$$

Example: for $\lambda D^2 = y^1 y^2$, we get

$$\psi = k_i(y) x^i + h \frac{c}{2D} \frac{(n_1 k^1 + n_2 k^2)}{n_1 n_2} \sin\left[\frac{D}{c} (n_1 x^1 + n_2 x^2)\right]$$

Equation (23) describes the eikonal of the wave propagating in the model anisotropic space-time with the Berwald-Moor metric perturbed by the GW. In the Berwald-Moor case, the components $k_i(y)$ cannot be constant, since the equation $\gamma^{ij} k_i k_j = 0$ does not have any constant solutions (except the trivial one $k_i = 0, i = 1, \dots, 4$).

3.3 Geodesics

Equations (4), for linearized perturbations of BM metric, lead again to the equivalent formulation (9), (10) and to the solution (11). In the case under discussion we get $K_0 = K_1 y^1 + K_2 y^2 = 2D$, $\tilde{a}_{00} = \lambda K_0^2 = 4\lambda D^2$, $\frac{\tilde{a}_{00}}{K_0} = 2\lambda D$, hence unit-speed geodesics ($F = 1$) obey

$$x^i(s) = \alpha^i s + \beta^i - h \gamma^{ij} \frac{\partial(\lambda D)}{\partial y^j} \sin(K_m x^m) - h \gamma^{ij} \frac{\partial K_p}{\partial y^j} x^p \lambda D \cos(K_m x^m). \quad (24)$$

The simplest solutions are obtained for

$$D := D(y^1, y^2);$$

in this case, performing the calculations, we find $s = \frac{K_1 x^1 + K_2 x^2}{K_1 \alpha^1 + K_2 \alpha^2}$. In this case, the cosine term in (24) vanishes in the expressions of x^3 and x^4 . Calculating the derivative and using the initial conditions, $x^i(0) = 0 \Rightarrow \beta^i = 0, i = 1, 2, 3$, we get the Oy-component of the velocity

$$y^3 = \alpha^3 - 4 \frac{h \lambda D^2 y^3}{F^2} \cos(K_m x^m). \quad (25)$$

Example: if $\lambda D^2 = y^1 y^2$, then

$$y^3 = \alpha^3 - 4 \frac{h F^2}{y^4} \cos(K_m x^m) \stackrel{F^2=1}{=} \alpha^3 - 4h \frac{1}{y^4} \cos(K_m x^m) \quad (26)$$

4 OMPR modifications

4.1 Flat Minkowski space with weak anisotropic perturbation

The physical interpretation of the obtained solutions leading to the modifications in the OMPR effect is the following. One can see that the anisotropy does not destroy the solution of the OMPR equations given in [1]. For a simple anisotropic deformation of the Minkowski metric, we get the dependence of eqs. (8, 13) on the directional variable orthogonal to Ox and

Oy , i.e. to the plane containing the Earth, the space maser and the GW source. This plane can belong to the galaxy plane and can be perpendicular to it.

Geodesics describe the trajectory of the particle, and the sample eq. (13) means that the amplitude of the oscillations of the space maser atom velocity component oriented at the Earth, y^3 , depends on y^4 . This means that when the system "Earth-space maser-GW source" is located close to the periphery of the galaxy, the orientation of this system might affect the OMPR conditions. In our example the OMPR conditions must be modified and take the form

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\omega h}{8Dy^4} = b\varepsilon; \quad b = O(1); \quad \varepsilon \ll 1 \quad (27)$$

$$\frac{kv_1}{\alpha_1} = \frac{\omega hc}{\alpha_1 y^4} = \kappa\varepsilon; \quad \kappa = O(1); \quad \varepsilon \ll 1 \quad (28)$$

that illustrates the qualitative analysis given in [4]. This means that the experimental investigation of the astrophysical systems with various orientations might provide the information on the quantitative characteristics of the geometrical anisotropy (if any) of our galaxy.

4.2 Anisotropic space with Berwald-Moor metric and weak perturbation

As in the previous case, the anisotropy does not destroy the OMPR effect itself, but now the modifications are more pronounced. Eq.(23) for the eikonal also gives a trichromatic EMW, but the amplitudes of the sidebands and their frequencies are now different from the isotropic case. The geodesics in the form (25) shows that the amplitude of the atomic oscillations is now also different. All this would affect the OMPR conditions and they would be modified in the following way

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = h \frac{\lambda D}{4c} n_i k^i = b\varepsilon; \quad b = O(1); \quad \varepsilon \ll 1 \quad (29)$$

$$4h \frac{\omega}{\alpha_1} \frac{\lambda D^2}{c^2} \sqrt{\frac{n_1 n_2 n_4}{n_3}} = \kappa\varepsilon; \quad \kappa = O(1); \quad \varepsilon \ll 1 \quad (30)$$

$$(\omega - \Omega + kv_0)^2 + 4\alpha_1^2 = D^2 n_1^2 + O(\varepsilon) \Rightarrow Dn_1 \sim 2\alpha_1 \quad (31)$$

or, for the sample example, $\lambda D^2 = y^1 y^2$,

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = h \frac{c}{4D} \frac{(n_1 k^1 + n_2 k^2)}{n_1 n_2} = b\varepsilon; \quad b = O(1); \quad \varepsilon \ll 1 \quad (32)$$

$$4h \frac{\omega}{\alpha_1} \sqrt{\frac{n_4}{n_1 n_2 n_3}} = \kappa\varepsilon; \quad \kappa = O(1); \quad \varepsilon \ll 1 \quad (33)$$

$$(\omega - \Omega + kv_0)^2 + 4\alpha_1^2 = D^2 n_1^2 + O(\varepsilon) \Rightarrow Dn_1 \sim 2\alpha_1 \quad (34)$$

As in the previous Section, we find that the orientation of the system would affect the observations. Calculating the left hand sides of the second condition in (32) for the systems belonging and perpendicular to the galactic plane, one can see that their ratio is equal to the ratio of the star velocity corresponding to the galactic rotation and the star velocity in the direction of the galaxy axis. Therefore, if we take two equivalent astrophysical systems that initially suffice the OMPR conditions and differ only by their orientation with regard to the galactic plane, only one of them will produce an observable OMPR signal.

5 Discussion

The main results obtained in this paper are the following. In search for the modifications of the Einstein-Hilbert action due to the anisotropy of the space-time, we have constructed

two simple models of the anisotropic space-time with metrics containing small perturbations. The additional terms lead to a change of the OMPR conditions in the anisotropic space-time. It turned out that the orientation of the astrophysical system (taking part in the OMPR) with regard to the galactic plane causes changes in the observable effect, thus, giving one the possibility to experimentally investigate space-time geometrical properties on the galactic scale.

The expression for the "simplest scalar" which can be used in the variation principle based on the Einstein-Hilbert expression for the action was particularized for our model. If the perturbed locally Minkowskian metric can be presented as $g_{ij}(x, y) = \gamma_{ij}(y) + \varepsilon_{ij}(x, y)$, then the space-time anisotropy produces additional terms to the usual Ricci tensor R_{jk} which is to be calculated with regard to Γ^i_{jk} equal to

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\gamma^{il}\left(\frac{\partial\varepsilon_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial\varepsilon_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial\varepsilon_{jk}}{\partial x^l}\right) = -\frac{1}{2}\gamma^{il}(a_{lj}K_k + a_{lk}K_j - a_{jk}K_l)\sin(K_mx^m), \quad (35)$$

Acknowledgements

The work was supported by the RFBR grant No. 07-01-91681-RA_a and by the grant No.5 / 5.02.2008, between the Romanian Academy and Politehnica University of Bucharest.

References

- [1] Brinzei, N., Siparov, S., 2007, *Hypercomplex numbers in Geometry and Physics*, v. 4, p. 41.
- [2] Siparov, S. 2004, *Astronomy&Astrophysics*, v. 416, p. 815.
- [3] Siparov, S. 2006, *HyperComplex numbers in Geometry and Physics*, v. 6, p. 155.
- [4] Siparov, S. 2007, in *Space-time structure*, p. 495.
- [5] Siparov, S. 2007, *Proc. Conf. PIRT-07*, Moscow, p. 282.
- [6] Siparov, S., Samodurov, V., 2009, *Computer optics* (to appear in 2009).
- [7] Miron, R., Anastasiei, M. 1994, *The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and Applications*, Kluwer Acad. Publ. FTPH no. 59.
- [8] Siparov, S. 2009, *HyperComplex numbers in Geometry and Physics*, – this issue.
- [9] Brinzei, N., Siparov, S. 2009, *HyperComplex numbers in Geometry and Physics*, – this issue.
- [10] Balan, V., Brinzei, N. 2006, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 11 (2), p. 20.
- [11] Balan, V., Brinzei, N. 2005, *HyperComplex numbers in Geometry and Physics*, v. 4, p. 114.

О возможности ОМПР-эффекта в пространствах с финслеровой геометрией. Часть II

Н. Бринзей, С. Сипаров

*Университет Трансильвании, Брасов, Румыния,
Академия гражданской авиации, Петербург, Россия
nico.brinzei@rdslink.ro, sergey@siparov.ru*

В развитие идей [1] найдено новое решение уравнений Эйнштейна в вакууме для линейно аппроксимируемых анизотропных возмущений плоского пространства Минковского и финслерова пространства с метрикой Бервальда-Моора. Также находятся эффективные выражения для геодезической и эйконала для малых анизотропных возмущений метрик Минковского и Бервальда-Моора и изменения ОМПР-условий для этих двух моделей. Это, в принципе, создает возможность для изучения анизотропных свойств пространства-времени в Нашей галактике.

Ключевые слова: анизотропия пространства, финслерова геометрия, метрика Бервальда-Моора, метрика Минковского, ОМПР-эффект

MSC2000: 53B40, 53C60

К ВОПРОСУ ОБ АНИЗОТРОПНОЙ ГЕОМЕТРОДИНАМИКЕ

С. В. Сипаров

Государственный университет гражданской авиации, Санкт-Петербург, Россия

sergey@siparov.ru

Показано, что ряд затруднений классической геометродинамики таких, как плоские кривые вращения в спиральных галактиках, закон Талли-Фишера, а также ряд других, могут быть устранены на основе принципа эквивалентности с помощью модификации выражения для метрики в действии Гильберта-Эйнштейна. Это приводит к обобщенному уравнению геодезической, а затем к уравнениям для гравитационной силы, содержащей не только Ньютоновское слагаемое. Используемый подход содержит все результаты классической геометродинамики. Обсуждается связь полученных результатов со следствиями подхода Лензе-Тирринга и возможные космологические следствия.

Ключевые слова: геометродинамика, анизотропность, принцип эквивалентности, гравитационные поля, космология.

1 Введение

Общеизвестные выдающиеся успехи ОТО, достигнутые вскоре после ее формулировки, в настоящее время сменились проблемами, возникшими в результате наблюдений на космологических масштабах, которые не удается решить в рамках классической геометродинамики. Следуя [1], можно перечислить ряд астрофизических наблюдений, которые должна объяснить любая приемлемая модификация теории гравитации (геометродинамики). Это: плоский характер кривых вращения спиральных галактик; эмпирический закон Талли-Фишера о связи орбитальной скорости звезд на периферии галактики и светимости этой галактики; различный характер гравитации для звезд, принадлежащих плоскости галактики, и для глобулярных скоплений вне этой плоскости; существование галактических кластеров, общая масса которых, измеренная астрономическими методами, представляется недостаточной для поддержания устойчивого состояния, а также эффект гравитационного линзирования, качественно соответствующий оценке, сделанной на основании ОТО, но в некоторых случаях количественно превосходящий ее в разы. Кроме того, имеется и проблема другого рода и большего масштаба, которая возникает при интерпретации наблюдений сверхновых типа Ia, указывающих на изменение наклона в законе Хаббла, что трактуется как ускорение расширения Вселенной на современной стадии ее эволюции. Последнее требует существования сил отталкивания.

Попытки изменить теорию, в первую очередь, в отношении возможности описания кривых вращения и обеспечения гравитационной устойчивости, предпринимаются уже несколько десятилетий. При этом наиболее очевидная модификация связана с изменением "простейшего скаляра" в выражении для действия Гильберта-Эйнштейна

$$S_{EH} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x (-g)^{1/2} R_\alpha^\alpha. \quad (1)$$

Упомянем лишь некоторые из предлагаемых модификаций. В работе [2] были учтены члены более высокого порядка вида

$$S_{W_1} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x (-g)^{1/2} (R_\alpha^\alpha)^2; \quad S_{W_2} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x (-g)^{1/2} R_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \quad (2)$$

что в дальнейшем привело к возникновению так называемых $f(R)$ -теорий. Другой тип поправок представляет собой введение дополнительного скалярного поля. Например в [3] действие имело вид

$$S_{BD} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x (-g)^{1/2} (SR^\alpha_\alpha - w \frac{S_{;\mu} S^{;\mu}}{S}) \quad (3)$$

где w является константой. Попытка модифицировать саму метрику была предпринята в [4], где были введены антисимметричные части метрического тензора.

В серии работ, начавшейся с [5], был развит феноменологический подход, известный как МОНД, с помощью которого удастся получить удовлетворительное соответствие с рядом наблюдений. Однако, он не дает объяснения происхождению и выбору дополнительных функций, искусственно вводимых в закон динамики или в закон гравитации. Кроме того, с его помощью не удастся получить наблюдаемый профиль температуры межгалактического газа в галактических кластерах.

Как показано в [1], ни одно из этих и других известных предположений не удовлетворяет всему комплексу ограничений, накладываемых данными наблюдений.

Наиболее известные попытки объяснения этих наблюдаемых эффектов используют такие понятия, как *темная материя* и *темная энергия*. Но это означает, что теория, разработанная и успешно используемая для описания 5 процентов наблюдаемого общего количества всей массы (энергии) Вселенной, гравитационное взаимодействие которой соответствует только притяжению, должна включить в себя все еще не обнаруженную явно часть, составляющую остальные 95 процентов, и взаимодействие отталкивания. Первое отсылает к поиску соответствующих элементарных частиц (например, бозонов Хиггса), второе – к введению в уравнения Эйнштейна космологической постоянной, либо к учету некоторой *квинтэссенции*. Все это делает картину, использующую *темные* объекты довольно искусственной.

Более естественно было бы начать построение теории для тех масштабов, которые характеризуют большую часть Вселенной, и лишь затем убедиться, что и в более локальном частном случае, например, для планетной системы, теория остается работоспособной. Тогда то, что сейчас является ограничением, станет исходной посылкой, а в пределе следует получить гравитацию Ньютона-Эйнштейна-Шварцшильда для точечной массы.

Принцип относительности утверждает, что не существует возможности различить инерциальные системы отсчета. Но принцип эквивалентности идет дальше. Поскольку мы не можем различить эффекты, связанные с ускорением системы отсчета и с таким физическим полем, как гравитационное, нет оснований полагать, что измеряемое гравитационное взаимодействие не зависит от скорости движения тел. Если ускорение системы отсчета не является прямолинейным, инерциальные силы, действующие на тело, зависят от скорости его движения (например, сила Кориолиса). Поэтому, измеряя действие гравитационных сил, мы никогда не знаем, в какой мере в наблюдениях учитывается кинематика. С математической точки зрения это означает, что пространство является анизотропным. Локально это может представлять существование выделенного направления (например, ось вращающейся системы отсчета), но в общем случае это соответствует зависимости метрики от направлений в каждой точке. Формально это повлечет за собой и естественное изменение "простейшего скаляра" в выражении для действия (1), а, значит, и изменение соответствующих уравнений динамики. Учет зависимости метрики не только от координаты, но и от направления в каждой точке приводит к тому, что касательное пространство к основному многообразию становится восьмимерным *фазовым* пространством, имеющим в физике наглядный смысл. В результате все это приводит к построению анизотропной геометродинамики, с помощью которой удастся объяснить указанные выше наблюдаемые эффекты, а также получить новые космологические следствия.

2 Анизотропное возмущение

Углубим взаимосвязь между геометрией и физикой и рассмотрим анизотропное пространство с деформированной метрикой простейшего вида

$$g_{ij}(x, y) = \gamma_{ij} + \varepsilon_{ij}(x, y) \quad (4)$$

где γ_{ij} – x -независимая метрика типа Минковского, а $\varepsilon_{ij}(x, y)$ – малое анизотропное возмущение. Такая метрика является так называемой обобщенной Лагранжевой метрикой, а касательное расслоение эквивалентно фазовому пространству. На этом расслоении y -переменные, $y^i = \frac{dx^i}{ds}$, должны играть точно такую же роль, как и x -переменные x^i (см. Приложение).

2.1 Предположения

Будем считать $\varepsilon(x, y)$ достаточно малым для того, чтобы использовать линейное приближение и сделаем следующие упрощающие предположения:

1. Скорости рассматриваемых объектов значительно меньше, чем фундаментальная скорость. Это означает, что компонентами $y^2 = \frac{dx^2}{ds}$, $y^3 = \frac{dx^3}{ds}$ и $y^4 = \frac{dx^4}{ds}$ можно пренебречь по сравнению с компонентой $y^1 = \frac{dx^1}{ds}$, которая равна единице с точностью до второго порядка;
2. Поскольку скорости малы, производной метрики по времени $\frac{\partial \varepsilon_{hj}}{\partial x^1}$ можно пренебречь по сравнению с производными по пространственным координатам $\frac{\partial \varepsilon_{hj}}{\partial x^\alpha}$; $\alpha = 2, 3, 4$;
3. Последнее считается верным и для соответствующих ускорений, т. е. на y -подпространстве фазового пространства производной по y^1 можно пренебречь по сравнению с производными по y^2 , y^3 и y^4 .

Заметим, что два первых предположения в точности совпадают с предположениями, традиционно используемыми в ОТО со времен классической работы Эйнштейна [6]

2.2 Геодезическая

Поскольку метрика теперь зависит от y , следует использовать формализм Финслеровой геометрии [7]. Это означает, что уравнения Эйлера-Лагранжа могут быть получены при варьировании Финслеровского квадрата расстояния $\bar{F}^2 = (\gamma_{hl} + \varepsilon_{hl}(x, y))y^h y^l$. В этом случае выражение для обобщенной геодезической принимает вид [8]:

$$\frac{dy^i}{ds} + (\Gamma_{lk}^i + \frac{1}{2}\gamma^{it} \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x^j \partial y^t} y^j) y^k y^l = 0. \quad (5)$$

Здесь $\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}\gamma^{ih} \left(\frac{\partial \varepsilon_{hj}}{\partial x^k} + \frac{\partial \varepsilon_{hk}}{\partial x^j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x^h} \right)$ представляет собой символ Кристоффеля, зависящий от y .

Замечание. Третий член в выражении (5) не появится в том специальном случае, когда анизотропная метрика выбирается в виде $g_{ij}^* = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$ где F^2 – однородная функция второй степени по y . Геодезическая, полученная для анизотропной метрики эквивалентна траектории частицы, движущейся под действием силы, зависящей от скорости в пространстве с обобщенной метрикой.

Геодезическая (5) представляет собой геометрические уравнения, которые следует использовать для описания динамики частицы в гравитационном поле, соответствующем анизотропной метрике. Как и в [6], используем сделанные предположения для того, чтобы сохранить только члены с $k = l = 1$, т. е. из всех ε_{kl} , имеющихся в уравнении (5), останется только ε_{11} , при этом $y^k = y^l = 1$. Введем новые обозначения

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y^t} \equiv A_t, \quad (6)$$

соответствующие компонентам тензора Картана. Заметим, что на y -подпространстве касательного расслоения A_t представляют собой компоненты дифференциала ε_{11} по y , т. е. $A_\alpha = \frac{1}{2}(\nabla_{(y)}\varepsilon_{11})_\alpha$ для $\alpha = 2, 3, 4$ (для обоих переменных x - и y - используется одна и та же нумерация $1 \div 4$). Тогда получим

$$\frac{dy^i}{ds} + \Gamma_{11}^i + \gamma^{it} \frac{\partial A_t}{\partial x^j} y^j = 0. \quad (7)$$

Третий член в уравнении (7) не исчезает, поскольку, хотя мы и предположили $\frac{\partial A^i}{\partial x^1} \ll \frac{\partial A^i}{\partial x^\alpha}$, но $y^1 \gg y^\alpha$, $\alpha = 2, 3, 4$. Теперь добавим и вычтем одну и ту же величину $\gamma^{it} \frac{\partial A_j}{\partial x^t} y^j$ и получим

$$\frac{dy^i}{ds} + \Gamma_{11}^i + \gamma^{it} \left[\left(\frac{\partial A_t}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^t} \right) + \frac{\partial A_j}{\partial x^t} \right] y^j = 0 \quad (8)$$

где $\left(\frac{\partial A_t}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^t} \right)$ могут рассматриваться как компоненты антисимметричного тензора, F_{jt} , точно такого же, как и в электродинамике. Выражения $\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} \right)$ представляют собой компоненты ротора вектора $\mathbf{A}$ для $\alpha, \beta = 2, 3, 4$ на x -подпространстве касательного расслоения. Тогда для геодезической получим

$$\frac{dy^i}{ds} + \Gamma_{11}^i - \gamma^{it} F_{tj} y^j + \gamma^{it} \frac{\partial A_j}{\partial x^t} y^j = 0. \quad (9)$$

2.3 "Тождества Максвелла"

Формально введенный тензор F_{ij} обладает полезными чисто геометрическими свойствами. А именно, он удовлетворяет тождеству

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0. \quad (10)$$

Вводя формальное обозначение

$$F_{12} = E_x^{(g)}; \quad F_{13} = E_y^{(g)}; \quad F_{14} = E_z^{(g)}; \quad F_{23} = -B_z^{(g)}; \quad F_{24} = B_y^{(g)}; \quad F_{34} = -B_x^{(g)} \quad (11)$$

можно немедленно получить пару "тождеств Максвелла", которые в электродинамике известны как уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}^{(g)}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E}^{(g)} &= 0 \\ \text{div } \mathbf{B}^{(g)} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Следуя геометрическому рецепту, как и в [6], перейдем к контравариантному тензору $F^{ij} = \gamma^{ik} \gamma^{jm} F_{mk}$ (для поднятия значков можно использовать γ^{it} , поскольку A_t уже содержит ε), и введем новый 4-вектор I^i следующим образом

$$I^i = \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} \quad (13)$$

Тогда аналогично может быть получена и вторая пара "тождеств Максвелла"

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B}^{(g)} - \frac{\partial \mathbf{E}^{(g)}}{\partial t} &= \mathbf{j}^{(m)} \\ \text{div } \mathbf{E}^{(g)} &= \rho^{(m)} \end{aligned} \quad (14)$$

где мы формально обозначили $I^1 = \rho^{(m)}$, $I^2 = j_x^{(m)}$; $I^3 = j_y^{(m)}$; $I^4 = j_z^{(m)}$. Вектор $\mathbf{E}^{(g)}$ равен $\mathbf{E}^{(g)} = (F_{12}, F_{13}, F_{14})$ и, согласно предположению $\frac{\partial A^i}{\partial x^1} \ll \frac{\partial A^i}{\partial x^\alpha}$ и определению (6), равен и $\mathbf{E}^{(g)} = -\nabla_{(x)} A_1$ где A_1 – значение первой компоненты y -градиента ε_{11} , т.е. $A_1 = \frac{1}{2}(\nabla_{(y)} \varepsilon_{11})_1$.

Физическая интерпретация полученных геометрических результатов не может включать ничего, кроме гравитации. Смысл функций в уравнениях (12–14) не такой, как в уравнениях Максвелла в электромагнетизме. Вектора $\mathbf{E}^{(g)}$ и $\mathbf{B}^{(g)} \equiv \text{rot}_{(x)} \mathbf{A}$ характеризуют пространство-время с анизотропной метрикой и, таким образом, характеризуют гравитацию, зависящую от скорости. Если интерпретировать $\mathbf{A}$ как вектор-потенциал гравитационного поля, $\rho^{(m)}$ – как плотность массы источника гравитации, и $\mathbf{j}^{(m)} = \rho^{(m)} \mathbf{v}$ – как плотность потока массы, или массовый ток, соответствующий собственному движению источника и его частей, мы получим впечатляющую аналогию с электромагнетизмом, и весь соответствующий ему формализм может быть использован при расчетах. Близкие по смыслу уравнения рассматривались в теории, начиная с работ Лензе-Тирринга [9]. Их взаимосвязь с предложенными выше, будет подробнее обсуждена далее.

3 Гравитационная сила

Возвращаясь к уравнению (9) с учетом (12–14), получим

$$\frac{dy^i}{ds} = -\Gamma_{11}^i + \gamma^{it} F_{tj} y^j - \gamma^{it} \frac{\partial A_j}{\partial x^t} y^j \quad (15)$$

и увидим, что гравитационное ускорение теперь представляет собой сумму трех членов. Первый из них связан с Γ_{11}^i и приводит к появлению классического выражения $-\frac{1}{2}\nabla_{(x)} \varepsilon_{11}$, приводящего к гравитации Ньютона $\mathbf{F}_N^{(g)}$, появление двух остальных связано с анизотропией метрики. Второй член представляет собой гравитационный аналог силы Лоренца $\mathbf{F}_L^{(g)}$, пропорциональный

$$\mathbf{F}_L^{(g)} \sim (\mathbf{E}^{(g)} + [\mathbf{y}, \mathbf{B}^{(g)}]) \quad (16)$$

где $\mathbf{E}^{(g)} = -\frac{1}{2}\nabla_{(x)} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y^1}$ и $\mathbf{B}^{(g)} \equiv \text{rot}_{(x)} \mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y^2}, \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y^3}, \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y^4})$. С учетом третьего предположения слагаемым $\mathbf{E}^{(g)}$ в уравнении (16) можно пренебречь. Третье слагаемое в (15) можно сначала преобразовать с учетом второго предположения

$$-\gamma^{\alpha t} \frac{\partial A_j}{\partial x^t} y^j = -(-\delta^{\alpha t}) \left[\frac{\partial}{\partial x^t} (A_j y^j) - \frac{\partial y^j}{\partial x^t} \right] = (\nabla_{(x)} (A_j y^j))^\alpha = (\nabla_{(x)} (\mathbf{A}, \mathbf{y}))^\alpha \quad (17)$$

где $\frac{\partial y^j}{\partial x^t}$ исчезает, поскольку x и y – независимые переменные. Вспоминая, что правая часть уравнения (15) вначале была умножена на $y^1 y^1$, и $y^1 = 1$ единицы длины, учтем все размерные множители непосредственно

$$H \frac{d\mathbf{y}}{c^2 dt} = \frac{1}{2} \left\{ -\nabla_{(x)} \varepsilon_{11} + [\mathbf{y}, \text{rot}_{(x)} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \mathbf{y}}] + \nabla_{(x)} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \mathbf{y}}, \mathbf{y} \right) \right\} \cdot \left(\frac{H}{c} y^1 \right)^2. \quad (18)$$

Поскольку $\mathbf{y} = \frac{1}{H}\mathbf{v}$ и $v^1 = c$, выражение для гравитационной силы, действующей на частицу массы m , имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}^{(g)} = \frac{mc^2}{2} \left\{ -\nabla_{(x)} \varepsilon_{11} + [\mathbf{v}, \text{rot}_{(x)} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \mathbf{v}}] + \nabla_{(x)} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \mathbf{v}}, \mathbf{v} \right) \right\}. \quad (19)$$

Первый член в скобках соответствует выражению для обычной гравитационной силы. Второй член можно соотнести с "силой Кориолиса", пропорциональной скорости $\mathbf{v}$ частицы, динамика которой может быть описана выражением (19), и обусловлена также собственным движением источника гравитации $\text{rot}_{(x)} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \mathbf{v}}$. И если система отсчета связана с последним, и его ускорение не прямолинейно, а, например, соответствует движению по окружности, принцип эквивалентности неизбежно требует появления компоненты гравитации типа силы Кориолиса. Третий член в скобках является новым. Полное ускорение частицы теперь зависит не только от распределения масс, но и от их собственного движения и от скорости частицы. Отметим, что в анизотропной геометродинамике гравитационное взаимодействие уже не является только притяжением, как раньше.

3.1 Компоненты гравитационной силы

Упомянем некоторые подробности, касающиеся всех трех членов $F^{(g)1} = F_N^{(g)}$, $F^{(g)2} = F_L^{(g)}$, $F^{(g)3} = \frac{mc^2}{2} \nabla_{(x)} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \mathbf{v}}, \mathbf{v} \right)$ в фигурных скобках выражения (19).

Первая компонента гравитационной силы $F_N^{(g)}$, действующая на частицу с массой m , представляет собой действие источника с массой M и направлена по радиусу к центру распределения масс источника. Решение уравнения Пуассона для стационарного гравитационного поля дает $\varepsilon_{11} \sim \frac{1}{r}$, где r – расстояние от частицы до центра, и выбор $\varepsilon_{11} = \frac{2GM}{c^2} \frac{1}{r}$ в ур. (19) для точечного источника на достаточных расстояниях приводит к закону Ньютона $F_N^{(g)} = G \frac{Mm}{r^2}$. Величина $r_S = \frac{2GM}{c^2}$ соответствует радиусу Шварцшильда [10].

Третья компонента гравитационной силы $F^{(g)3}$ соответствует воздействию, оказываемому на движущуюся частицу расширением или сжатием (распределенного) источника. Расширение гравитирующего источника приводит к дополнительной силе притяжения частицы, двигающейся по радиусу к центру.

Выражение для второй компоненты гравитационной силы, $F_L^{(g)}$, требует рассмотреть взаимодействие между движущейся частицей и движущимся распределением масс. В простейшем случае источник представляет собой точечную массу M , вращающуюся с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{c^2}{4H} \text{rot}_{(x)} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \mathbf{y}}. \quad (20)$$

Тогда $F_L^{(g)} = 2m[v, \Omega] \equiv F_C^{(g)}$ принимает вид "грави-Кориолисовой силы" (см. также [11]) и непосредственно демонстрирует отмеченный выше общий характер связи между инерцией и гравитацией. На плоскости, проходящей через M перпендикулярно Ω , можно получить траектории частиц, двигающихся в различных направлениях с различными скоростями. Таким образом, можно проследить различные действия силы $F_L^{(g)}$: притяжение, отталкивание и тангенциальное воздействие, зависящие от угла между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V} = [\mathbf{R}_{eff}, \Omega]$, где $\mathbf{R}_{eff}$ – радиус вектор в направлении частицы, R_{eff} – эффективный радиус вращающегося источника. Компоненты скорости, перпендикулярные плоскости, не испытывают действия силы $F_L^{(g)}$, что снимает проблему глобулярных скоплений, упомянутую во Введении. Очевидно, что аналогия с электромагнетизмом (ур. (12, 14) и ниже) может быть весьма полезна при расчетах.

Вклад той или иной компоненты в наблюдаемые явления зависит от параметров системы.

Пример

Рассмотрим упрощенный пример. Пусть источник гравитации представляет собой двойную звезду с характерным расстоянием r_0 , массой M и периодом T . Пусть планета m движется вокруг звезд по орбите с характерным радиусом r , $r > r_0$, которая принадлежит плоскости движения звезд. Можно сказать, что движение массивных звезд представляет собой круговой массовый ток $J^{(m)}(r_0)$ такой, что соответствующая величина $B^{(g)}(r)$ может быть рассчитана по закону Био-Савара. Компонента $B^{(g)}(r)$, перпендикулярная плоскости, пропорциональна $B_z^{(g)}(r) \sim J^{(m)}(r_0)/r$. (Заметим, что она направлена "вверх" и "вниз" снаружи и внутри контура, достигая максимума в его центре). Центробежная сила, действующая на обращающуюся планету, $m \frac{v_{orb}^2}{r}$, равна сумме обычного Ньютоновского притяжения $F^{(g)} = mC_1/r^2$, и "грави-Лоренцевой силы" $F_L^{(g)} = mv_{orb}C_2(r_0)/r$, где $C_1, C_2(r_0)$ – константы. Таким образом, квадрат орбитальной скорости планеты v_{orb}^2 , будет равен

$$v_{orb}^2 = \frac{C_1}{r} + v_{orb}C_2(r_0). \quad (21)$$

При $r \rightarrow \infty$ мы видим, что имеется два корня. Первый из них дает Ньютоновский вклад $v_{orb}|_{r \rightarrow \infty} = 0$, а второй соответствует

$$v_{orb}|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow C_2(r_0), \quad (22)$$

что приводит к плоской кривой вращения. Для схожей, но более сложной системы (например, для спиральной галактики) следует обобщить понятие r_0 и найти эффективный радиус R_e . Это можно сделать, например, так

$$I_{eff} = \sum I_n = MR_e^2 \Rightarrow R_e^2 = \sqrt{\frac{I_{eff}}{M}}, \quad (23)$$

где I_{eff} – момент инерции системы с общей массой M . Таким образом, R_e характеризует конкретную систему (например, галактику), а эффективная угловая скорость Ω_e может быть найдена из условия $I_{eff} \Omega_e = L_{eff} = \sum L_n$, где L_n моменты импульсов тел составляющих систему. Таким образом, получаем

$$\Omega_e = \frac{L_{eff}}{I_{eff}}. \quad (24)$$

Внутри окружности радиуса R_e , компонента $B_z^{(g)}(r)$ меняет знак и $F_L^{(g)}$ становится отталкивающей силой, действующей от центра распределения вращающихся масс.

Оценим величину $C_2(R_e) \sim J^{(m)}(R_e)$. Массовый ток $J^{(m)}(R_e) \sim \frac{M}{T}$, где M пропорциональна площади спиральной галактики R_e^2 , а период $T \sim R_e^{3/2}$ в соответствии с законом Кеплера. Это дает $J^{(m)}(R_e) \sim \sqrt{R_e}$. Поскольку светимость L_{lum} , также пропорциональна площади галактики, получим $R_e \sim \sqrt{L_{lum}}$. Поэтому

$$v_{orb}|_{r \rightarrow \infty} \sim L_{lum}^{1/4}, \quad (25)$$

что соответствует закону Талли-Фишера.

Для того, чтобы найти дополнительное ускорение $\mathbf{a}_L = 2[\mathbf{v}, \mathbf{\Omega}]$, где $\mathbf{\Omega}$ определяется выражением (20), удобно воспользоваться электромагнитной аналогией, следующей из (12, 14) и выбрать $rot_{(x)} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \mathbf{y}} = B^{(g)}$, $B_z^{(g)}(R_e) \sim J^{(m)}(R_e)/r$ для данного распределения движущихся масс. Если выбрать приближение в виде кругового массового тока $J^{(m)}$, с радиусом R_e , и скоростью движения масс $\mathbf{V}$, то

$$\Omega \sim \frac{G}{c^2 r} \frac{MV}{R_e} \quad (26)$$

и дополнительное ускорение тела пропорционально

$$a_L \sim v \frac{GMV}{c^2 r R_e}. \quad (27)$$

Отношение этого ускорения к Ньютоновскому $a_N = \frac{GM}{r^2}$ равно

$$\frac{a_L}{a_N} \sim \frac{vV}{c^2} \frac{r}{R_e} = \frac{vr}{c^2} \Omega_e \quad (28)$$

и можно определить области где специфика анизотропии пространства становится существенной. Для заданной частицы, двигающейся со скоростью v на расстоянии r от центра, это отношение дает

$$\frac{a_L}{a_N} \sim \frac{vr}{c^2} \frac{L_{eff}}{I_{eff}}, \quad (29)$$

где L_{eff} и I_{eff} характеризуют распределенный источник гравитации.

3.2 Соотношение с "гравитомагнетизмом"

Влияние вращения (точечного) источника на гравитационные эффекты исследовалось уже давно (см. обзор [12]). Вероятно, наиболее известным является эффект Лензе-Тирринга, предложенный в [9], в котором рассчитывается прецессия гироскопа (например, планеты) в поле вращающейся массы (например, звезды). Стоит обратить внимание на то, что исходной целью авторов было исследование принципа Маха о происхождении инерции. Известны и многие другие гравитомагнитные эффекты, рассчитанные в рамках релятивистского подхода: разница показаний часов, переместившихся по и против вращения центрального тела вокруг этого тела в его экваториальной плоскости (используется метрика Керра); эффект Саньяка; вращающаяся черная дыра и другие, включая расщепление спектральных линий, аналогичное эффекту Штерна-Герлаха. Во времена своего расчета все эти эффекты были слишком малыми для экспериментальной проверки, но с тех пор техника эксперимента существенно продвинулась. В работе [13] обсуждается гравитомагнитное воздействие, следующее из полевых уравнений для вращающейся массы в терминах углового момента. Единственный член, входящий там в уравнения динамики, следующие из уравнения геодезической, совпадает с нашим выражением (16).

Существование гравитомагнитных явлений подтверждается измерениями так называемой прецессии Де Ситтера для системы Земля-Луна, совпадающими с расчетом с точностью до 1%, и для гироскопа, установленного на космическом аппарате Gravity Probe B, где достигнутая точность была еще выше. Упомянем также дополнительное ускорение, равное $2.1 \cdot 10^{-11} \text{ м/с}^2$, вызываемое вращением Солнца на расстоянии, равном радиусу орбиты Земли.

В отличие от подхода, развиваемого в данной работе, в рамках гравитомагнитного подхода никогда не рассматривалась метрика в общем виде, а масштаб гравитомагнитных явлений, известных из литературы, никогда не превышал масштаб планетной системы, оставаясь малой поправкой к решениям Ньютона-Шварцшильда для сферически симметричного точечного источника.

Пример

Рассмотрим известную [15] аномалию "Пионеров", состоящую в том, что у космических аппаратов "Пионер-10,11" было обнаружено дополнительное ускорение, направленное к Солнцу и равное $(8.74 \pm 1.33) \cdot 10^{-10} \text{ м/с}^2$, что для расстояния порядка $r \sim 68 \text{ а. е.}$ от Солнца составляет 0.065% соответствующего Ньютоновского ускорения. Получим качественную оценку этой величины на основе существенного упрощения предлагаемого подхода

и применим формулу (29). Выбирая скорость аппарата равной $v \sim 1.6 \cdot 10^4 \text{ m/s}$, получим $3.4 \cdot 10^{-11} \text{ m/s}^2$, что заметно меньше, чем измеренная величина, но зато соотносится с гравитомагнитным эффектом вращения Солнца, упомянутым выше. Это указывает на то, что при более детальном расчете следует принять во внимание пролетный (flyby) эффект, который в рамках предлагаемого подхода будет обусловлен влиянием *орбитального движения* массивных планет, что приведет к росту полученной оценки.

4 Астрофизические наблюдения и их интерпретация

Как следует из выражений (22) и (25), предложенная анизотропная модификация теории естественным образом обеспечивает плоский характер кривых вращения и выполнение закона Талли-Фишера. Проблема, связанная с различием гравитационного взаимодействия в плоскости галактики и вне ее (для глобулярных скоплений) также теряет остроту, поскольку движение, перпендикулярное галактической плоскости, не испытывает воздействия дополнительных сил, зависящих от скоростей, и таким образом, соответствующие "законы гравитации" действительно различаются.

Необходимость учета некоторой темной материи (или модификации теории гравитации) была впервые заявлена в [14]: видимая масса галактик оказалась слишком мала для того, чтобы они могли объединяться в кластеры. К настоящему времени понятие темной материи нашло много сторонников в связи с накоплением соответствующих данных наблюдений. Одним из наиболее весомых свидетельств в пользу существования темной материи считаются наблюдения сталкивающихся галактических кластеров, выполненных обсерваторией "Чандра" [16].

На данном этапе развития модели анизотропной геометродинамики количественные расчеты этих эффектов еще не получены. Но нетрудно видеть, что предложенная модификация теории гравитации приводит к дополнительному взаимодействию, обусловленному собственными движениями как галактик в кластере, так и в самих галактиках. Это может позволить обойтись и без введения темной материи для объяснения астрофизических эффектов, хотя и не будет противоречить самой возможности существования таких объектов, как бозоны Хиггса.

Идея расширяющейся Вселенной утвердилась в связи с измеренным Хабблом красным смещением спектральных линий удаленных галактик, которое принято объяснять с помощью эффекта Доплера, и в настоящее время общепринятыми являются космологические модели типа Фридмана-Робертсона-Уолкера, соответствующие классической геометродинамике. С этих позиций трактуется и обнаруженное "ускорение расширения", потребовавшее учета в теории Λ -члена, соответствующего взаимодействию отталкивания. Но теперь мы можем предположить, что красное смещение является *гравитационным* красным смещением, обусловленным тангенциальными движениями далеко удаленных объектов. Эта идея находит подтверждение в наблюдениях тангенциального движения квазаров, которое происходит при удивительно высоких скоростях [17]. Таким образом, наблюдаемые эффекты могут быть объяснены и без предположения о радиальном расширении Вселенной, требующем введения темной энергии, но при учете тангенциального движения объектов, вызывающего анизотропию метрики. Таким образом, в астрофизике и космологии повышается роль гидродинамики, поскольку любые скопления масс, такие, как галактики, кластеры галактик и сама Вселенная, можно интерпретировать как турбулентные вихри с присущими им свойствами взаимодействия, проявляющимися на соответствующих масштабах.

В каких случаях и в какой степени можно пренебречь эффектами крупномасштабных движений, следует каждый раз решать отдельно, ориентируясь на соотношение (29), которое устанавливает критерий учета анизотропии. Заметим также, что при измерениях

на больших масштабах необходимо учитывать соответствующие модификации уравнений Эйнштейна и электромагнитного волнового уравнения для анизотропной метрики, рассмотренные в [8].

5 Заключение

С проблемами, возникшими у классической геометродинамики, оказалось возможным справиться, обратив внимание на смысл принципа эквивалентности, состоящий в неразличимости инерции и гравитации, а, значит, и на возможность зависимости гравитации от скоростей. С геометрической точки зрения это повлекло введение анизотропной метрики, а это, в свою очередь, потребовало модифицировать выражение Гильберта-Эйнштейна для действия. Таким образом, ни дополнительных поправочных членов в выражении для кривизны ($f(R)$ -теории), ни дополнительных скалярных полей (темная материя), ни произвольно задаваемых функций (МОНД) не потребовалось, и модификация получилась естественной. В результате учета анизотропии изменились уравнения геодезической, и выражение для гравитационного ускорения стало уже в линейном приближении включать не только Ньютоновский член, но также и слагаемые, зависящие от движения самой частицы и от собственного движения (распределенного) источника гравитации. Это позволило разрешить такие проблемы, как плоский характер кривых вращения спиральных галактик, закон Талли-Фишера и различие гравитационного потенциала в плоскости и вне плоскости галактики, не выходя за рамки метрической теории. Сопоставление результатов предлагаемого подхода с результатами теории гравитомагнетизма показало их соответствие в масштабах планетной системы (заметим, что теория гравитомагнетизма применима только к таким масштабам).

Следствием анизотропии в геометродинамике является также возможность интерпретации красного смещения, измеренного Хабблом, как гравитационного, а не Доплеровского, что приводит к новому взгляду на космологические модели Вселенной и не требует привлечения такого понятия, как темная энергия, для объяснения наблюдаемых явлений.

Благодарности

Выражаю глубокую признательность Н. Бринзей за полезные обсуждения.

Работа была поддержана грантом РФФИ № 07-01-91681-РА_а и "Финслеровским фондом".

6 Приложение

Мы рассматриваем x^i как координатную переменную, тогда y^i является переменной, характеризующей направление, и она пропорциональна

$$y^i \sim \frac{dx^i}{ds}, \quad (30)$$

где s – параметр, в качестве которого обычно выбирается длина дуги. Поскольку теперь следует обращаться с x и y одинаковым образом, в определение y^i необходимо ввести такой размерный множитель, что единицы измерения y^i будут теми же, что и единицы измерения x^i

$$y^i = L \frac{dx^i}{ds}; \quad [L] = length. \quad (31)$$

Такое определение позволяет использовать один и тот же метрический тензор для поднятия и опускания значков и в x , и в y подпространствах касательного расслоения.

Рассматривая физические задачи, удобно вместо длины дуги использовать время t , т.е. выбрать $ds = cdt$, где c – константа, имеющая размерность скорости $[c] = \text{метр/сек.}$ Тогда

$$y^i = L \frac{dx^i}{cdt} = \frac{1}{H} \frac{dx^i}{dt} = \frac{1}{H} v^i; \quad [H] = (\text{time})^{-1}. \quad (32)$$

Выполняя математические преобразования, удобно использовать систему единиц, в которой $c = H = 1$.

Литература

- [1] A. Aguirre, C. P. Burgess, A. Friedland and D. Nolte. arXiv: hep-ph/0105083 v2 25 May 2001
- [2] B. S. DeWitt, Relativity, Groups and Topology, C. DeWitt and B. S. DeWitt, Eds. (Gordon and Breach New York 1964)
- [3] C. Brans and R. H. Dicke, Phys. Rev. 124, p. 925, (1961)
- [4] J.W. Moffat. Phys.Lett.B 355, p. 447, (1995)
- [5] M. Milgrom, Astrophys.J. 270, p. 384, (1983)
- [6] A. Einstein. Ann. d. Phys. 49, p. 769, (1916) (Rus.trans. in "Albert Einstein and the Theory of Gravitation", Mir, Moscow, 1979)
- [7] H. Rund. *Differential Geometry of Finsler Spaces*, Nauka, Moscow, 1981 (rus)
- [8] S. Siparov, N. Brinzei. arXiv: [gr-qc] 0806.3066 v1 18 Jun 2008
- [9] J. Lense, H. Thirring. Phys. Z. 19, s. 156, (1918)
- [10] K. Schwarzschild. Sitzungsber. d. Berl. Akad., s. 189, (1916)
- [11] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Теория поля*, Наука, Москва, 1967
- [12] M. L. Ruggiero, A. Tartaglia. arXiv:gr-qc/0207065v2
- [13] B. Mashhoon et.al. Lect. Notes Phys., 562, p. 83, (2001)
- [14] F. Zwicky. Helvetic Physica Acta 6, p. 110, (1933)
- [15] J. D. Anderson et al. Phys. Rev. Lett. 81, p. 2858, (1998)
- [16] D. Clowe, et al. arXiv: astro-ph/0608407 v1 19 Aug 2006
- [17] D. S. MacMillan. arXiv: astro-ph/0309826; O. Titov. Proc. Conf. FERT-07, Moscow, 2007

On the question regarding anisotropic dynamics

S. V. Syparov

State University of civil aviation, Sankt-Peterbourg
sergey@siparov.ru

It is shown, that several problems occurring in classical geometrodynamics rely on the fact that the plane curves of revolution which describe the spiral galaxies, the Tully-Fisher law, and several other problems can be removed if considering the equivalence principle, with the modified expression of the metric, within the Hilbert-Einstein action. This leads to generalized equations of geodesics, and further to equations of the gravitational field which contains not only the Newtonian term. This approach contains all the results of classical geometrodynamics. The connections between the obtained results and both the consequences of the Lense-Thirring approach, and possible cosmological consequences, are investigated.

Key-words: equivalence principle, gravitational field, geometrodynamics, anisotropy, cosmology.

MSC: 53C07, 83C05, 83F05, 53C22.

ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ В РЕЛЯЦИОННОМ ПОДХОДЕ К ФИЗИКЕ

Ю. С. Владимиров

Физический факультет МГУ

Рассмотрен класс финслеровых геометрий, соответствующих многоточечным геометриям, наиболее близким геометрии Бервальда-Моора. Показано, что в реляционном подходе к физике, основанном на идее теории прямого межчастичного взаимодействия и на теории систем отношений, возникают свойства многоточечной геометрии в ряде ключевых положений теории. Это имеет место в реляционной формулировке как классической физики, так и физики микромира.

Ключевые слова: реляционный подход, Финслерова геометрия, пространство Бервальда-Моора, теория прямого межчастичного взаимодействия.

1 Введение

Имеется ряд пониманий финслеровой геометрии, которым соответствуют различные каналы исследований. Одним из таковых являются исследования в рамках геометрии Бервальда-Моора, метрика задается не квадратично, а выражением четвертой степени по смещениям (см. [1]). Это направление ближе всего к так называемым многоточечным геометриям, где метрика определяется не для двух, а для трех, четырех и т. д. точек [2]. Именно в таком духе здесь будет пониматься финслерова геометрия.

Реляционный подход к физике означает использование концепции дальнодействия, которая опирается не на готовое пространственно-временное многообразие, а на отношения между элементами, в качестве которых могут выступать геометрические точки, физические события или физические лагранжианы (действия) между взаимодействующими частицами [3]. Наиболее известными теориями такого рода являются теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана [4, 5].

Сопоставление идей многоточечных геометрий и концепции дальнодействия в совокупности с развиваемой в нашей группе теории систем отношений позволяет выявить ряд любопытных обстоятельств и закономерностей.

1. Прежде всего, следует отметить, что в основе теории систем отношений лежит понятие закона системы отношений, который записывается для некоторого числа (ранга) элементов (точек), (парные) отношения между которыми входят в закон. Закон записывается в виде равенства нулю определителей из парных отношений между элементами.

2. Ранги закона фактически определяют размерность используемого аналога геометрии. Миноры определителей в формулировке закона характеризуют многоточечные понятия (отношения), которые возможны в рамках используемого аналога общепринятых геометрий.

3. Поскольку физики стремятся применить финслеровы и многоточечные геометрии для описания физических взаимодействий и новых следствий из них, следует подчеркнуть, что в реляционном подходе к классической физике присутствуют две системы отношений, что отражено в принципе Фоккера. Одной системы отношений (геометрии) недостаточно.

4. В реляционном подходе к физике микромира используются бинарные системы комплексных отношений, соответствующие общепринятой теории спиноров, причем для описания взаимодействий необходимо перейти к своеобразному бинарному многомерию, приводящему к теории финслеровых спиноров.

5. От бинарных систем комплексных отношений (бинарных геометрий) можно перейти к унарным (общепринятым) геометриям. При этом оказывается, что бинарное многомерие автоматически приводит к финслеровым (унарным) геометриям финслерова типа, в которых мероопределение имеет кубичный, четвертичный и т. д. характер, зависящий от ранга закона для бинарных систем комплексных отношений.

Данная работа посвящена демонстрации указанных обстоятельств и закономерностей многоточечности в реляционной формулировке физики.

2 Реляционный подход к классической физике

Начнем с напоминания основных понятий теории прямого межчастичного взаимодействия (action-at-a-distance) Фоккера–Фейнмана. В этой теории категория полей переносчиков взаимодействий исключается из числа исходных понятий: поля вводятся на некотором этапе развития теории, но лишь как вторичные вспомогательные понятия, строящиеся из характеристик частиц.

Теория прямого межчастичного *электромагнитного взаимодействия* Фоккера является упрощенным вариантом реляционной теории, в которой из всего мира выделяется пара взаимодействующих частиц. Обозначим две выделенные частицы символами 1 и 2. Ключевым понятием этой теории является классическое действие парного взаимодействия $S(1, 2)$, которое представляется в виде

$$S_{int}^{(e)}(1, 2) = -\frac{1}{c} \int \int j_{(1)}^\mu j_{(2)\mu} \delta(s^2(1, 2)) ds_1 ds_2, \quad (1)$$

где $j_{(1)}^\mu = e_1 dx_1^\mu / ds_1$ – вектор 4-тока частицы с номером 1; ds_1, ds_2 – смещения вдоль мировых линий частиц; $\eta_{\mu\nu}$ – метрический тензор пространства-времени Минковского. Интегрирование производится вдоль мировых линий выделенных частиц. Поскольку в классической теории полагается, что каждая частица участвует в огромном количестве событий, то ее удобно аппроксимировать в виде непрерывной мировой линии.

Под знаком интеграла в (1) стоят два инвариантных парных отношения, соответствующие двум обобщенным категориям. Слагаемое $j_{(1)}^\mu j_{(2)\mu}$ – скалярное произведение токов двух взаимодействующих частиц – характеризует токовое парное отношение. Выражение $s^2(1, 2)$ во втором слагаемом под интегралом – квадрат интервала между точками на мировых линиях двух частиц – характеризует пространственно-временное отношение, а дельта-функция от нее представляется в виде

$$\delta(s^2(1, 2)) = \delta(c^2 t_{12}^2 - r_{12}^2) = \frac{1}{2|r_{12}|} [\delta(ct_{12} - r_{12}) + \delta(ct_{12} + r_{12})], \quad (2)$$

где t_{12} и r_{12} – промежуток времени и расстояние между положениями взаимодействующих частиц.

Полное действие для системы взаимодействующих электрических зарядов в классической теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия записывается с участием действия <свободных> частиц S_0 и S_{int} – всех возможных парных взаимодействий.

Поясним, как в теории прямого межчастичного взаимодействия можно ввести вторичные (вспомогательные) понятия, соответствующие потенциалам и напряженностям электромагнитного поля. Для этого из суммарного действия всех заряженных частиц мира, следует выделить одну частицу, например с номером $i = 1$, и записать для нее действие в более привычной форме

$$S_1^{(e)} = -m_1 c \int ds_1 - \frac{1}{c} \sum_{k \neq 1} \int j_{(1)}^\mu A_\mu(1, k) ds_1, \quad (3)$$

где введено обозначение для отдельного вклада

$$A_\mu(1, k) = \int j_{(k)\mu} \delta(s^2(1, k)) ds_k, \quad (4)$$

который интерпретируется как векторный электромагнитный потенциал, создаваемый зарядом e_k в том месте, где находится заряд e_1 . Объединяя вклады всех заряженных частиц, получаем суммарный электромагнитный потенциал $A_\mu(1) = \sum_{k \neq 1} A_\mu(1, k)$ в месте нахождения заряда с номером 1 и действие для выделенной частицы:

$$S_1^{(e)} = -m_1 c \int ds_1 - \frac{1}{c} \int j_{(1)}^\mu A_\mu(1) ds_1, \quad (5)$$

формально совпадающее с общепринятым выражением в электродинамике Максвелла-Лоренца. Однако следует подчеркнуть, что *в теории прямого межчастичного взаимодействия бессмысленно говорить о потенциале в точках пространства-времени, где отсутствуют электрические заряды.*

Из действия (5) с помощью принципа наименьшего действия легко получить уравнение движения выделенной заряженной частицы, которое имеет знакомый вид.

Идеи дальнего действия были возрождены в 20-х годах XX века в работах К. Шварцшильда, Г. Тетроде и А. Д. Фоккера [4], благодаря которым концепция прямого межчастичного взаимодействия получила четкую математическую формулировку. Было показано, что теория электромагнетизма, построенная на ее основе, согласуется с теорией Максвелла для статических и стационарных электромагнитных явлений. Тогда же были выявлены и основные трудности, препятствовавшие развитию этой теории. Главная из них состояла в равноправности запаздывающих и опережающих взаимодействий (см. [5]).

В реляционном миропонимании осуществляется переход к двум обобщенным категориям: к пространственно-временным отношениям, которые заменяют первичные категории пространства-времени и частиц, и к категории токовых отношений, которая заменяет категорию полей переносчиков взаимодействий.

2.1 Пространственно-временные отношения

1. Отношение в геометрии – это не что иное, как *метрика (расстояния)*. Однако в современном изложении геометрии, как правило, исходят из координатной системы в многообразии той или иной размерности, а затем через разности координат двух точек задаются расстояния (метрика). Но возможен и другой ход рассуждений: можно начинать с расстояний, – парных отношений между точками, – а затем уже из них получать координаты и все другие понятия.

2. С некоторыми фрагментами переформулировки геометрии в терминах расстояний встречается каждый школьник. Известно определение площади треугольника через половину произведения основания на высоту. Но можно определить его площадь исключительно через расстояния (отношения) между его вершинами. Пусть его вершины обозначаются буквами i, j, k , а расстояния между ними (длины сторон) есть l_{ik}, l_{ij}, l_{jk} . Тогда квадрат площади треугольника S_{ijk}^2 находится по формуле Герона

$$S_{ijk}^2 = \frac{1}{16} (l_{ik} + l_{ij} + l_{kj})(l_{ik} + l_{ij} - l_{kj})(l_{ik} - l_{ij} + l_{kj})(-l_{ik} + l_{ij} + l_{kj}). \quad (6)$$

Полученное выражение можно переписать с помощью *определителя Кэли-Менгера* для трех точек (вершин треугольника),

$$16S_{ikj}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{ik}^2 & l_{ij}^2 \\ 1 & l_{ki}^2 & 0 & l_{kj}^2 \\ 1 & l_{ji}^2 & l_{jk}^2 & 0 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

3. Аналогичным образом через определитель Кэли–Менгера на четырех точках находится квадрат 3-мерного объема

$$288V_{ikjn}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{ik}^2 & l_{ij}^2 & l_{in}^2 \\ 1 & l_{ki}^2 & 0 & l_{kj}^2 & l_{kn}^2 \\ 1 & l_{ji}^2 & l_{jk}^2 & 0 & l_{jn}^2 \\ 1 & l_{ni}^2 & l_{nk}^2 & l_{nj}^2 & 0 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Очевидно, что обращение в нуль определителя (8) означает, что четыре рассматриваемые точки лежат в одной плоскости.

Через расстояния между точками можно выразить привычные *пространственные координаты* геометрических точек, а через обобщенные определители Кэли–Менгера записывается ряд других геометрических выражений, например, углы между двумя лучами, исходящими из одной точки, значения двугранных и телесных углов и т. д. Таким образом, всю евклидову (и псевдоевклидову) геометрию можно переписать через расстояния.

4. В специальной и общей теориях относительности в качестве отношений вместо расстояний выступают **интервалы** s_{ik} между парами событий i и k . Для них соотношение (8) обобщается на случай уже 6 точек-событий. Выберем произвольные точки-события i, k, a, b, c, d (см. рис. 1), тогда квадраты интервалов между ними удовлетворяют условию

$$\Phi_{(6)} \equiv D_{ikabcd} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s_{ik}^2 & s_{ia}^2 & s_{ib}^2 & s_{ic}^2 & s_{id}^2 \\ 1 & s_{ki}^2 & 0 & s_{ka}^2 & s_{kb}^2 & s_{kc}^2 & s_{kd}^2 \\ 1 & s_{ai}^2 & s_{ak}^2 & 0 & s_{ab}^2 & s_{ac}^2 & s_{ad}^2 \\ 1 & s_{bi}^2 & s_{bk}^2 & s_{ba}^2 & 0 & s_{bc}^2 & s_{bd}^2 \\ 1 & s_{ci}^2 & s_{ck}^2 & s_{ca}^2 & s_{cb}^2 & 0 & s_{cd}^2 \\ 1 & s_{di}^2 & s_{dk}^2 & s_{da}^2 & s_{db}^2 & s_{dc}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

означающему, что 5-мерный объем образованного ими симплекса равен нулю.

Назовем это соотношение **законом классических пространственно-временных отношений** и будем его рассматривать в качестве первого ключевого постулата, характеризующего реляционный подход к теории относительности. На основе закона (9), т. е. из элементов и миноров определителя Кэли–Менгера строится вся теория пространственно-временных отношений. Назовем ключевые понятия (см. также [6]).

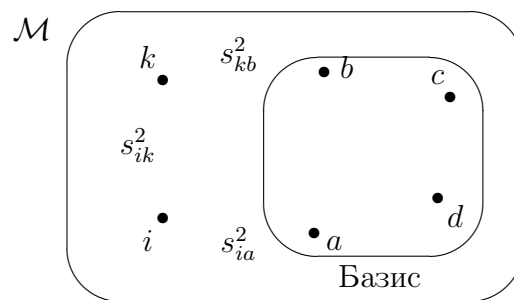


Рис. 1: Унарная система вещественных отношений ранга (6)

5. **Рангом закона** (9) назовем число точек-событий $r = 6$, для которых он записан. Очевидно, что ранг связан с общепринятым геометрическим понятием размерности n соотношением

$$n = r - 2 \rightarrow 4 = 6 - 2. \quad (10)$$

Фундаментальной симметрией пространственно-временных отношений назовем свойство любых 6 точек-событий удовлетворять закону (9). В реляционном подходе фундаментальная симметрия заменяет общепринятые симметрии пространства-времени Минковского, описываемые 10-параметрической группой Пуанкаре.

Базис пространственно-временных отношений задается 4 эталонными точками-событиями, относительно которых можно определить координаты всех точек-событий. Для избранного базиса из четырех элементов парные отношения полагаются раз навсегда заданными (на рис. 1 это элементы a, b, c, d). Базис системы отношений соответствует понятию тела отсчета в теории относительности.

6. **Четверку координат** точек-событий можно понимать как функцию парных отношений этого события относительно 4 точек-событий базиса. В этом легко убедиться, рассматривая закон (9) как уравнение для парного отношения s_{ik}^2 , полагая остальные 4 элемента a, b, c, d эталонными. Тогда выделенное парное отношение будет являться функцией 4 парных отношений элемента i относительно 4 базисных элементов, 4 парных отношений элемента k относительно базиса и раз навсегда заданных парных отношений между базисными элементами. Таким образом, понятия координат не вводятся, а определяются из закона системы отношений. Как и в случае 3-мерного евклидова пространства их можно выразить через миноры определителя Кэли–Менгера в законе (9).

Легко убедиться, что парные отношения в законе (9) можно представить через параметры (декартовы координаты) точек-событий следующим образом

$$s_{ik}^2 = (x_i^0 - x_k^0)^2 - \sum_{l=1}^3 (x_i^l - x_k^l)^2 \equiv \tau_{ik}^2 - l_{ik}^2. \quad (11)$$

Очевидно, закон (9) выполняется тождественно при подстановке в него (11).

7. Можно было бы продолжить изложение теории пространственно-временных отношений в сугубо реляционном подходе. Однако ограничимся выводом, который имеет принципиально важное значение для дальнейшего изложения: *все геометрические понятия пространственно-временных отношений могут быть выражены через миноры из определителя Кэли–Менгера в законе (9). И обратно, все миноры закона могут быть наделены некоторым геометрическим смыслом.*

2.2 Электромагнетизм

1. Перейдем к рассмотрению закона для токовых отношений. Для этого положим, что тела состоят из идеализированных микрочастиц с одинаковыми по модулю зарядами. Постулируем что для событий с идеализированными микрочастицами, кроме закона пространственно-временных отношений (9), имеет место второй закон вида

$$\Phi_{(5)} = \begin{vmatrix} \tilde{e}^2 & \tilde{u}_{ik} & \tilde{u}_{ij} & \tilde{u}_{is} & \tilde{u}_{il} \\ \tilde{u}_{ki} & \tilde{e}^2 & \tilde{u}_{kj} & \tilde{u}_{ks} & \tilde{u}_{kl} \\ \tilde{u}_{ji} & \tilde{u}_{jk} & \tilde{e}^2 & \tilde{u}_{js} & \tilde{u}_{jl} \\ \tilde{u}_{si} & \tilde{u}_{sk} & \tilde{u}_{sj} & \tilde{e}^2 & \tilde{u}_{sl} \\ \tilde{u}_{li} & \tilde{u}_{lk} & \tilde{u}_{lj} & \tilde{u}_{ls} & \tilde{e}^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

От этого выражения можно перейти к определителю с единицами на главной диагонали посредством конформного преобразования всех параметров элементов. В таком случае закон (12) определяет 3-мерную геометрию Лобачевского, физически интерпретируемую как пространство скоростей.

Парные отношения в (12) представляются в виде скалярного произведения 4-мерных векторов, нормированных на универсальную константу: $\tilde{u}_{(i)}^\mu \tilde{u}_{(i)\mu} = \tilde{e}_{(i)}^2$. Закон (12) можно трактовать как равенство нулю определителя Грама для 5 элементов, описываемых равными по длине 4-мерными векторами.

2. Конформные факторы разных элементов $\tilde{e}_{(i)}$ в (12) могут отличаться друг от друга лишь знаком. Предлагается их интерпретировать (с точностью до размерного множителя) как электрические заряды элементарных микрочастиц, тогда

$$\tilde{u}_{ik} = \tilde{e}_i \tilde{e}_k u_{(i)}^\mu u_{(k)\mu}. \quad (13)$$

Таким образом, теперь парное отношение $\tilde{u}_{ik}$ уже принимает не кинематический, а динамический характер.

Легко видеть, что парное отношение $\tilde{u}_{ik}$ входит в подинтегральное выражение (1) для парного электромагнитного взаимодействия двух частиц. Однако имеется существенное отличие в значениях зарядов взаимодействующих частиц. Выражение в (1) записано для классических частиц с произвольными зарядами q_i , тогда как в (13) входят одинаковые по модулю заряды $\tilde{e}_i$ идеализированных микрочастиц.

3. Чтобы получить в классическом принципе Фоккера произвольные заряды макротел, перейдем от отношений между отдельными микрочастицами к суммам парных отношений элементарных частиц, составляющих два макрообъекта A и B . Поскольку достаточно разнесенные макрообъекты приближенно можно считать точечными (в классическом смысле), то все составляющие их идеализированные микрочастицы полагаются имеющими одинаковые скорости и одинаковые парные пространственно-временные отношения. Это значит, что при суммировании можно вынести за скобки скалярные произведения скоростей частиц и дельта-функцию, тогда процедура перехода к макрообъектам сводится к суммированиям по зарядам микрочастиц, составляющих эти объекты. Так приходим к зарядам двух макрообъектов:

$$\tilde{q}_A = \sum_{(i \in A)} \tilde{e}_i; \quad \tilde{q}_B = \sum_{(k \in B)} \tilde{e}_k. \quad (14)$$

Переходя от безразмерных зарядов $\tilde{e}$ к известным элементарным зарядам электрона $e = \sqrt{\hbar c} |\tilde{e}|$ через размерные универсальные константы, получаем ранее записанное выражение для действия электромагнитного взаимодействия двух классических заряженных частиц.

2.3 Гравитация как следствие электромагнетизма

1. Исходя из закона (12), можно получить и гравитационное взаимодействие. Для этого следует воспользоваться сформулированным выше принципом, согласно которому физическим смыслом обладают все миноры из определителя, через который сформулирован закон системы отношений. В данном случае это будет определитель из закона токовых отношений (12). Как только что было показано, миноры минимального порядка характеризуют парные электромагнитные взаимодействия. Рассмотрим физический смысл миноров более высокого порядка.

Линеаризованное гравитационное взаимодействие обусловлено учетом *диагональных* миноров следующего, второго порядка в определителе закона (12). Так, для двух частиц, описываемых элементами i и k , можно определить парное отношение:

$$D_{ik}^{(2)} = \begin{vmatrix} \tilde{e}^2 & \tilde{u}_{ik} \\ \tilde{u}_{ki} & \tilde{e}^2 \end{vmatrix} = \tilde{e}^4 (1 - u_{ik} u_{ki}) = -\frac{\tilde{e}^4}{2} u_{(i)}^\mu u_{(i)}^\nu (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - 2\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}) u_{(k)}^\alpha u_{(k)}^\beta, \quad (15)$$

где $\eta_{\mu\nu}$ – опять метрический тензор пространства Минковского.

2. Здесь по-прежнему рассматриваются парные отношения двух элементов, что означает, что в выражении для гравитационного взаимодействия следует использовать прежнее выражение для координатного парного отношения в виде дельта-функции (2). Принцип Фоккера для прямого межчастичного гравитационного взаимодействия представляется в следующем виде:

$$S^{(g)}(i, k) = \frac{G}{2c} m_i m_k \int \int u_{(i)}^\mu u_{(i)}^\nu (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - 2\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}) u_{(k)}^\alpha u_{(k)}^\beta \delta(s^2(i, k)) ds_i ds_k, \quad (16)$$

аналогичном принципу Фоккера (1) для электромагнитного взаимодействия.

3. Поскольку теперь конформный фактор (электрический заряд) дает квадратичный вклад в множители перед скалярными произведениями скоростей, то эти множители могут принимать лишь положительные значения, в отличие от электрических зарядов в минорах первого порядка. Очевидно, они могут соответствовать лишь значениям масс идеализированных микрочастиц.

2.4 Принцип Маха и прямые многочастичные взаимодействия

Пока были задействованы лишь два простейших вида миноров первого и второго порядков. Рассмотрим оставшиеся миноры более высокого порядка.

1. Из определителя в законе (12) можно построить несколько видов миноров: три вида миноров второго порядка, три вида миноров третьего порядка и два минора четвертого порядка, которые, как оказывается, имеют четкую физическую интерпретацию и играют важную роль в описании классических электромагнитных и гравитационных взаимодействий.

Выпишем в виде таблицы все названные миноры, начиная с первого порядка:

Гравитация	Электромагнетизм	Принцип Маха
$\tilde{e}^2 = e^2/(\hbar c) = Const$	$\tilde{u}_{ik}$	0
$D_{ik}^{(2)} = \begin{vmatrix} \tilde{e}_i^2 & \tilde{u}_{ik} \\ \tilde{u}_{ki} & \tilde{e}_k^2 \end{vmatrix}$	$D_{ik,j}^{(2)} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{ki} & \tilde{u}_{kj} \\ \tilde{u}_{ji} & \tilde{e}_j^2 \end{vmatrix}$	$D_{ikjs}^{(2)} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{ij} & \tilde{u}_{is} \\ \tilde{u}_{kj} & \tilde{u}_{ks} \end{vmatrix}$
$D_{ikj}^{(3)} = \begin{vmatrix} \tilde{e}_i^2 & \tilde{u}_{ik} & \tilde{u}_{ij} \\ \tilde{u}_{ki} & \tilde{e}_k^2 & \tilde{u}_{kj} \\ \tilde{u}_{ji} & \tilde{u}_{jk} & \tilde{e}_j^2 \end{vmatrix}$	$D_{ik,js}^{(3)} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{ik} & \tilde{u}_{ij} & \tilde{u}_{is} \\ \tilde{u}_{jk} & \tilde{e}_j^2 & \tilde{u}_{js} \\ \tilde{u}_{sk} & \tilde{u}_{sj} & \tilde{e}_s^2 \end{vmatrix}$	$D_{ikjs,l}^{(3)} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{ij} & \tilde{u}_{is} & \tilde{u}_{il} \\ \tilde{u}_{kj} & \tilde{u}_{ks} & \tilde{u}_{kl} \\ \tilde{u}_{lj} & \tilde{u}_{ls} & \tilde{e}_l^2 \end{vmatrix}$
$D_{ikjs}^{(4)} = \begin{vmatrix} \tilde{e}_i^2 & \tilde{u}_{ik} & \tilde{u}_{ij} & \tilde{u}_{is} \\ \tilde{u}_{ki} & \tilde{e}_k^2 & \tilde{u}_{kj} & \tilde{u}_{ks} \\ \tilde{u}_{ji} & \tilde{u}_{jk} & \tilde{e}_j^2 & \tilde{u}_{js} \\ \tilde{u}_{si} & \tilde{u}_{sk} & \tilde{u}_{sj} & \tilde{e}_s^2 \end{vmatrix}$	$D_{ik,jsl}^{(4)} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{ik} & \tilde{u}_{ij} & \tilde{u}_{is} & \tilde{u}_{il} \\ \tilde{u}_{jk} & \tilde{e}_j^2 & \tilde{u}_{js} & \tilde{u}_{jl} \\ \tilde{u}_{sk} & \tilde{u}_{sj} & \tilde{e}_s^2 & \tilde{u}_{sl} \\ \tilde{u}_{lk} & \tilde{u}_{lj} & \tilde{u}_{ls} & \tilde{e}_l^2 \end{vmatrix}$	0

Здесь верхний слева элемент $\tilde{e}^2$ выписан для полноты представленных здесь миноров.

2. Два минора $\tilde{y}_{ik}$ и $D_{ik}^{(2)}$ в левом верхнем углу таблицы описывают двухчастичные взаимодействия. Два минора: $D_{ik,j}^{(2)}$ и $D_{ikj}^{(3)}$, расположенные наискось правее и ниже двух названных, описывают трехчастичные взаимодействия. Три минора $D_{ikjs}^{(2)}$, $D_{ik,sj}^{(3)}$ и $D_{ikjs}^{(4)}$, расположенные по диагонали, описывают четырехчастичные взаимодействия. Наконец, два оставшихся минора $D_{iksl,j}^{(3)}$ и $D_{ik,jsl}^{(4)}$ в правом нижнем углу описывают пятичастичные взаимодействия. В обозначениях частиц запятая отделяет электромагнитно взаимодействующие частицы от частиц, оказывающих на них гравитационное воздействие.

3. В выписанной таблице сверху дана физическая интерпретация трех столбцов миноров. Первый столбец характеризует гравитационное взаимодействие двух, трех и четырех частиц. Миноры второго столбца описывают электромагнитное взаимодействие двух частиц и гравитационное влияние на электромагнитное взаимодействие двух частиц со стороны других (третьих и четвертых) частиц. Миноры третьего столбца описывают электромагнитное (и частично гравитационное) влияние на электромагнитно взаимодействующую пару (и четверку) частиц.

Отличие электромагнитных от гравитационных взаимодействий фактически определяется числом диагональных элементов вида $\tilde{e}^2$, входящих в соответствующие миноры. Если число диагональных элементов совпадает с числом элементов, представленных в миноре, то данный минор описывает вклады только в гравитационное взаимодействие. Это имеет место для миноров первого столбца. В минорах $\tilde{y}_{ik}$ и $D_{ikjs}^{(2)}$ названные диагональные элементы отсутствуют, следовательно, данные миноры описывают чисто электромагнитные взаимодействия. Во всех остальных минорах представлены как электромагнитные, так и гравитационные взаимодействия.

Влияние третьих частиц на взаимодействие рассматриваемой пары частиц в литературе принято трактовать как проявления принципа Маха. Строго говоря, принципу Маха соответствуют все трех-, четырех- и пятичастичные взаимодействия, однако значительная часть проявлений принципа Маха маскируется нелинейностью гравитационного взаимодействия (в общей теории относительности). По этой причине лишь миноры третьего столбца отнесены к явному проявлению принципа Маха.

4. Прообраз действия многочастичных взаимодействий, как и прежде, строится в виде произведения вкладов от миноров из пространства токов (скоростей) и из пространственно-временных отношений. Последние должны иметь характер соответствующих n -точечных отношений. Так, ранее для описания двухчастичных взаимодействий использовались парные отношения из двух пространств, что означало одинаковые выражения в виде дельта-функции при разных порядках миноров из токового пространства. Для описания трех- и более частичных взаимодействий необходимо использовать соответствующие многоточечные характеристики из пространственно-временных отношений, которые оказываются в парах с минорами разных рангов. Кроме того, необходимо уточнение коэффициентов перед указанными минорами при построении полного действия (см. [00]).

3 Реляционная теория микромира

Реляционное описание физики микромира осуществляется на основе бинарных систем комплексных отношений. Такая теория была названа бинарной геометрофизикой. Она предназначена для описания элементарного звена ($\langle \text{мига} \rangle$) перехода системы из одного в другое состояние. Бинарная геометрофизика строится на **двух множествах элементов** $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, характеризующих соответственно начальное и конечное состояния системы. Условимся обозначать элементы первого множества $\mathcal{M}$ латинскими буквами, а элементы второго множества $\mathcal{N}$ – греческими буквами.

Как и в случае унарного описания мира, бинарные системы комплексных отношений определяются законом, представляющим собой равенство нулю некоего определителя из

парных отношений между элементами двух множеств. Количества элементов, входящих в закон, определяют ранг бинарной системы комплексных отношений. Это означает, что ранг характеризуется двумя числами. В бинарной геометрофизике оба множества являются эквивалентными, следовательно, будут использоваться лишь симметричные ранги (r, r) .

Бинарная геометрофизика строится на основе ранга $(6,6)$, однако в ней рассматриваются и случаи меньших рангов как некие упрощенные или идеализированные варианты.

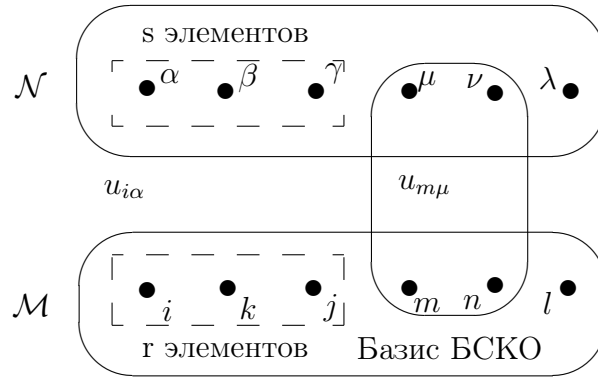


Рис. 2: Бинарная система отношений (структура) ранга (r, s)

3.1 Истоки 4-мерности и сигнатуры классического пространства-времени

Понятия БСКО низших рангов фактически уже давно используются в теоретической физике. В частности, *понятие спина элементарных частиц и теория 2-компонентных спиноров, оказывается, возникает в рамках БСКО минимального невырожденного ранга $(3,3)$* . Поясним это утверждение. Согласно общей теории бинарных систем отношений, закон БСКО ранга $(3,3)$ имеет вид

$$\Phi = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0, \quad (18)$$

где парные отношения

$$u_{i\alpha} = i^1 \alpha^1 + i^2 \alpha^2 \quad (19)$$

определяются двумя парами комплексных параметров i^1, i^2 (начальное состояние) и α^1, α^2 (конечное состояние).

Возьмем фундаментальное 2×2 -отношение (отличный от нуля минор максимального порядка), которое представляется в виде

$$\begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Ограничимся рассмотрением лишь таких элементарных базисов, которые связаны линейными преобразованиями, оставляющими инвариантными (неизменными) каждый из определителей справа в (20), т. е.

$$\begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} = i^1 k^2 - i^2 k^1 = Inv; \quad \alpha^1 \beta^2 - \alpha^2 \beta^1 = Inv. \quad (21)$$

Эти выражения можно понимать как антисимметричные метрики в каждом из двух множеств (пространств) БСКО ранга (3,3). Но, если вспомнить определение 2-компонентных спиноров как 2-мерных комплексных векторов, для которых определена инвариантная антисимметричная квадратичная форма (метрика), то станет ясно, что элементы БСКО ранга (3,3) с условием (21) описываются 2-компонентными спинорами.

Коэффициенты линейных преобразований, оставляющих инвариантными антисимметричные формы (21), удовлетворяют условию $C_1^1 C_2^2 - C_2^1 C_1^2 = 1$. Следовательно, на четыре комплексных коэффициента C_r^s наложено два вещественных условия. Эти преобразования, связывающие выделенный класс базисных элементов, образуют 6-параметрическую группу $SL(2, C)$, соответствующую группе Лоренца.

Линейные преобразования, одновременно сохраняющие инвариантными как антисимметричные формы (21), так и парные отношения $u_{i\alpha}$ в (19), образуют 3-параметрическую группу $SU(2)$, соответствующую вращениям в 3-мерном пространстве.

Напомним, что в общепринятой теории к спинорам приходят, исходя из плоского 4-мерного пространства-времени с соответствующей ему группой Лоренца, а на основе алгебр Клиффорда над полем вещественных чисел можно определить спиноры в пространствах любой размерности и сигнатуры. Но можно рассуждать и в обратном направлении: если задан вид спиноров, то сразу же можно сказать о размерности и сигнатуре многообразия, в котором определены эти спиноры. Учитывая, что в нашем случае автоматически возникают 2-компонентные спиноры, приходим к выводу, что таким образом уже заложены основы 4-мерности теории с сигнатурой $(+ - - -)$. Другими словами, можно утверждать, что **размерность (4-мерность) и сигнатура классического пространства-времени обусловлены бинарной системой комплексных отношений минимального невырожденного ранга (3,3).**

3.2 Переход к унарной геометрии

От БСКО ранга (3,3) можно перейти к унарным системам вещественных отношений, соответствующих общепринятым геометриям, несколькими способами. Переход к пространственно-временным отношениям осуществляется склейкой пар элементов (по одному из каждого множества). Другой способ перехода к унарным системам вещественных отношений основан на сшивке двух пар элементов (по два элемента в каждом из множеств) так, как это изображено на рисунке 3. Он соответствует переходу к унарной геометрии Лобачевского, физически интерпретируемой как пространство скоростей частиц.

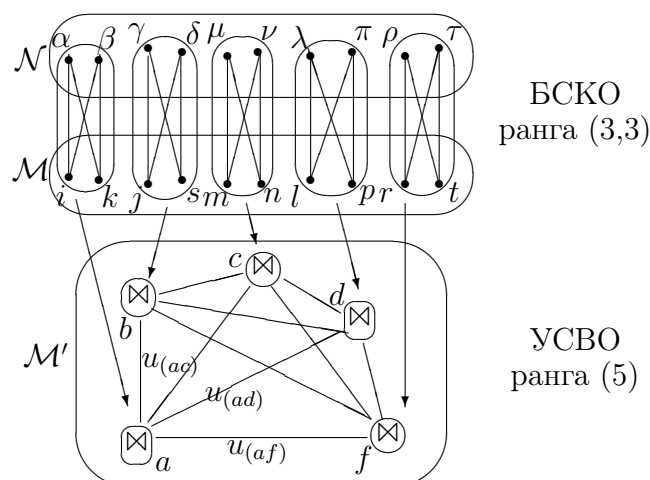


Рис. 3: Переход от БСКО ранга (3,3) к УСВО ранга (5)

В верхней части рисунка изображены четверки сопряженных элементов из двух множеств БСКО ранга (3,3), а в нижней части – сопоставленные с ними элементы одного нового множества $\mathcal{M}'$.

Из параметров пар элементов – двух 2-компонентных спиноров – по обычным правилам строятся 4-мерные векторы, физически интерпретируемые как скорости (или импульсы) массивных частиц. Так, компоненты 4-скорости частицы, описываемой элементами i и k в начальном состоянии и α и β в конечном состоянии, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{1}{2}(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 + k^2\beta^2); \\ u^1 &= \frac{1}{2}(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 + k^2\beta^1); \\ u^2 &= \frac{i}{2}(i^1\alpha^2 - i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 - k^2\beta^1); \\ u^3 &= \frac{1}{2}(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 - k^2\beta^2). \end{aligned} \quad (22)$$

Очевидно, компоненты вектора в (22) являются вещественными, если параметры элементов α и β комплексно сопряжены параметрам элементов i и k . Именно компоненты u^μ физически интерпретируются.

3.3 Простейшее бинарное многомерие

1. Поскольку БСКО ранга (3,3) соответствует 4-мерию классической геометрии и физики, то простейшее бинарное многомерие означает использование БСКО ранга (4,4).

В бинарной геометрофизике БСКО ранга (4,4) выступает в нескольких ролях. Во-первых, на основе математического аппарата БСКО ранга (4,4) строится простейший реляционный вариант теории электромагнитных взаимодействий элементарных частиц. Это позволяет говорить об аналогии с 5-мерной теорией Калуцы в рамках многомерных (унарных) геометрических моделей физических взаимодействий. Как известно, в унарной геометрофизике увеличение размерности с четырех до пяти приводит к появлению дополнительных компонент метрики и импульса, которые отождествляются с электромагнитными характеристиками. То же характерно и для случая перехода от БСКО ранга (3,3) к БСКО ранга (4,4).

Во-вторых, БСКО ранга (4,4) позволяет взглянуть на привычные в 4-мерии понятия с более общих позиций. Предпринятый на ее основе анализ показывает, что принятое в унарной геометрии квадратичное мероопределение обусловлено именно рангом (3,3), тогда как более высокие ранги диктуют кубичное, четвертой степени и т. д. мероопределения, которые обычно связываются с финслеровой геометрией.

2. Закон БСКО ранга (4,4) записывается в виде равенства нулю определителя, составленного из 16 парных отношений между двумя четверками элементов i, k, j, l и $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ из двух разных множеств

$$\Phi_{(4,4)} = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\lambda} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\lambda} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\lambda} \\ u_{l\alpha} & u_{l\beta} & u_{l\gamma} & u_{l\lambda} \end{vmatrix} = 0, \quad (23)$$

где парные отношения $u_{i\alpha}$ задаются формулой

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3. \quad (24)$$

Здесь i^1, i^2, i^3 – три комплексных параметра элемента $i \in \mathcal{M}$, а $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ – комплексные параметры элемента $\alpha \in \mathcal{N}$. Это парное отношение можно рассматривать как скалярное произведение двух 3-мерных векторов из двух разных пространств.

3. Фундаментальное 3×3 -отношение, согласно общим правилам, определяется как минор максимального порядка из определителя в законе (23):

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikj \end{bmatrix} \equiv \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix}, \quad (25)$$

т. е. аналогично (20) записывается через произведение двух определителей отдельно из параметров элементов множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Оно играет ключевую роль в общей теории БСКО ранга (4,4) и в определении 3-компонентных спиноров.

3.4 Финслеровы 3-компонентные спиноры и геометрия

1. Если в рамках БСКО ранга (3,3) формулируется новый подход к теории 2-компонентных спиноров, то в БСКО следующего ранга (4,4) по тем же правилам строится теория объектов, которые естественно назвать 3-компонентными спинорами. Они определяются точно так же, как и 2-компонентные спиноры с заменой двух компонент на три, поскольку каждый элемент БСКО ранга (4,4), согласно (24), описывается вектором в 3-мерном комплексном пространстве. В каждом из двух множеств (пространств) элементов определены линейные преобразования. Далее, поскольку фундаментальное 3×3 -отношение, согласно (25), представляется в виде произведения двух определителей из параметров одного множества, то каждый из определителей можно рассматривать как антисимметричную (кубичную) форму для троек элементов в соответствующем множестве. Так, в множестве $\mathcal{M}$ для трех элементов i, k, j определено тройное отношение

$$b_{(ikj)} \equiv \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} = i^1 k^2 j^3 + i^3 k^1 j^2 + i^2 k^3 j^1 - i^3 k^2 j^1 - i^2 k^1 j^3 - i^1 k^3 j^2, \quad (26)$$

играющее такую же роль, что и (21) в теории 2-компонентных спиноров в рамках БСКО ранга (3,3).

2. Ограничимся такими преобразованиями, которые оставляют инвариантными эти кубичные формы. Легко убедиться, что при линейных преобразованиях имеет место соотношение

$$b'_{(ikj)} = \begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & C_3^2 \\ C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 \end{vmatrix} b_{(ikj)}, \quad (27)$$

т. е. для инвариантности $b_{(ikj)}$ на коэффициенты C_r^s следует наложить условие

$$C_1^1 C_2^2 C_3^3 + C_1^3 C_2^1 C_3^2 + C_1^2 C_2^3 C_3^1 - C_1^3 C_2^2 C_3^1 - C_1^1 C_2^3 C_3^2 - C_1^2 C_2^1 C_3^3 \equiv \Delta_c = 1, \quad (28)$$

обобщающее условие $C_1^1 C_2^2 - C_2^1 C_1^2 = 1$ в теории БСКО ранга (3,3). Это два условия на 18 вещественных параметров.

Таким образом, можно утверждать, что налицо аналоги всех трех составляющих в определении 2-компонентных спиноров: векторы в комплексном пространстве, линейные преобразования и инвариантная относительно них антисимметричная форма, т. е., действительно, в теории БСКО ранга (4,4) возникают величины, которые естественно назвать 3-компонентными (финслеровыми) спинорами. Термин <финслеровы> обусловлен тем, что унарные геометрии с более общим, нежели общепринятым квадратичным, мероопределением принято называть финслеровыми геометриями.

Линейные преобразования с условием (28) составляют *унимодулярную* (16-параметрическую) *группу* $SL(3, C)$. Эта группа преобразований играет в теории БСКО ранга (4,4) ту же роль, что 6-параметрическая группа $SL(2, C)$ в теории БСКО ранга (3,3).

3. Аналогично 4-мерию, перейдем от 3-компонентных спиноров к векторам. Это можно осуществить несколькими способами. Воспользуемся тем же способом, которым ранее были введены 4-мерные векторы. В итоге находим 9 компонент в виде:

$$\begin{aligned}
 B_{(3)}^0 &= \frac{1}{2}(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 + k^2\beta^2 + j^1\gamma^1 + j^2\gamma^2); \\
 B_{(3)}^1 &= \frac{1}{2}(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 + k^2\beta^1 + j^1\gamma^2 + j^2\gamma^1); \\
 B_{(3)}^2 &= \frac{i}{2}(i^1\alpha^2 - i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 - k^2\beta^1 + j^1\gamma^2 - j^2\gamma^1); \\
 B_{(3)}^3 &= \frac{1}{2}(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 - k^2\beta^2 + j^1\gamma^1 - j^2\gamma^2); \\
 B_{(3)}^4 &= \frac{1}{2}(i^1\alpha^3 + i^3\alpha^1 + k^1\beta^3 + k^3\beta^1 + j^1\gamma^3 + j^3\gamma^1); \\
 B_{(3)}^5 &= \frac{i}{2}(i^1\alpha^3 - i^3\alpha^1 + k^1\beta^3 - k^3\beta^1 + j^1\gamma^3 - j^3\gamma^1); \\
 B_{(3)}^6 &= \frac{1}{2}(i^2\alpha^3 + i^3\alpha^2 + k^2\beta^3 + k^3\beta^2 + j^2\gamma^3 + j^3\gamma^2); \\
 B_{(3)}^7 &= \frac{i}{2}(i^2\alpha^3 - i^3\alpha^2 + k^2\beta^3 - k^3\beta^2 + j^2\gamma^3 - j^3\gamma^2); \\
 B_{(3)}^8 &= i^3\alpha^3 + k^3\beta^3 + j^3\gamma^3.
 \end{aligned} \tag{29}$$

В принципе, можно определить величины B^A с разными знаками вкладов сопряженных пар, составляющих $B^{s\bar{r}}$, а также для случаев, когда вектор определен для одной или для двух <спитых> пар. Очевидно, что в этих случаях первые четверки компонент совпадают с величинами, определенными в (22).

Зная коэффициенты преобразований спинорных компонент, можно найти векторный закон преобразований компонент B^A относительно группы $SL(3, C)$ в 9-мерном многообразии

$$B'^A = L^A_B B^B, \tag{30}$$

где коэффициенты линейных преобразований L^A_B выражаются через квадратичные комбинации из коэффициентов C_s^r и $\check{C}_s^r$.

Введем 9-мерный инвариант, непосредственно обобщающий инвариант $\eta_{\mu\nu}B^\mu B^\nu$ в 4-мерной теории. Легко показать, что он имеет вид

$$\begin{aligned}
 G_{ABC}B^AB^BB^C &= B^8((B^0)^2 - (B^1)^2 - (B^2)^2 - (B^3)^2) + 2B^1(B^4B^6 + B^5B^7) - \\
 &- B^0((B^4)^2 + (B^5)^2 + (B^6)^2 + (B^7)^2) + 2B^2(B^5B^6 - B^4B^7) + B^3((B^4)^2 + (B^5)^2 - (B^6)^2 - (B^7)^2).
 \end{aligned} \tag{31}$$

При данном обобщении **происходит не просто увеличение размерности с четырех до девяти, но и изменение характера мероопределения**. Напомним, что в известных работах по многомерным теориям Калуцы и Клейна обычно используется постулат квадратичного (риманова) мероопределения. В данном же случае получается **унарная финслерова геометрия с кубичным мероопределением**.

Заключение

В заключение сделаем ряд выводов, замечаний и дополнений.

1. В рамках реляционного подхода открывается новый канал обобщений 2-компонентных спиноров, отличный от обычно используемого обобщения, вводимого на основе алгебр Клиффорда над полем вещественных чисел.

2. Теория финслеровых спиноров (бинарное многомерие) порождает унарные финслеровы геометрии с кубичным, четвертичным и т. д. мероопределением, зависящим от ранга исходных бинарных систем комплексных отношений. При этом степень мероопределения тесно связана с размерностью возникающей финслеровой геометрии.

3. В простейшей бинарной модели физических взаимодействий на базе БСКО ранга (4,4) достаточно полно описываются электромагнитные взаимодействия лептонов (без учета барионов). Из тройки параметров элементов этой системы отношений строятся внешние (4-мерные) и внутренние характеристики элементарных частиц по образу и подобию 5-мерной теории Калуцы, где электрические заряды частиц описываются дополнительной компонентой 5-скорости. Теперь таковыми являются дополнительные параметры элементов с номером 3. Оказывается, в этой бинарной модели удастся описать не только электромагнитные, но и ряд свойств электрослабых взаимодействий лептонов. Для описания также сильных взаимодействий следует использовать ранг (6,6).

4. Общепринятые теории физических взаимодействий на самом деле имеют финслеров характер, однако он завуалирован суммированиями по третьим, четвертым и т. д. элементам, приводящими к внутренним характеристикам частиц и полей.

5. В рамках реляционного подхода к физике открывается возможность решения фундаментальной задачи современной физики – вывода классических пространственно-временных отношений из наложений физических факторов, присущих физике микромира.

Литература

- [1] Д. Г. Павлов Метафизика симметрий //Альманах "Метафизика. Век XXI". Вып. 2. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007, с. 267–283.
- [2] В. Я. Скоробогатько, Г. Н. Фешин, В. А. Пелых N-Точечная геометрия типа Евклида //Сб. Математические методы и физико-механические поля. Вып. 1. – Киев.: Наукова думка, 1975, с. 5–10.
- [3] Ю. С. Владимиров Основания физики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.
- [4] A. D. Fokker Ein invarianter Variationssatz fur die Bewegung mehrerer electrischer Massenteilchen //Z. Phys., 1929, Bd. 58, S. 386–393.
- [5] J. A. Wheeler, R. P. Feynman Interaction with the absorber as the mechanism of radiation //Rev. Mod. Phys., 1945, vol. 17, p. 157–181.
- [6] Ю. И. Кулаков Теория физических структур. – М.: 2004.
- [7] Я. И. Грановский, А. А. Пантюшин К релятивистской теории тяготения //Изв. АН Каз. ССР, сер. физ-мат., 1965, №2, с. 65–69.

Finsler geometry in relational approach in physics

Yu. S. Vladimirov

MSU n. a. M. V. Lomonosov

The class of Finslerian geometries corresponding to the multipoint geometries very close to the Berwald-Moore geometry is considered. It is shown that in the relational approach in physics based on the action-at-a-distance idea and on the theory of systems of relations, the properties of multipoint geometry appear in a number of key statements of the theory. It holds true in case of relational formulation of classical physics as well as physics of microcosm.

Key-words: relational approach, Finsler Geometry, Berwald-Moor space, action-at-a-distance idea.

MSC: 53B40, 08A02.

ФИНСЛЕРОВЫ N -СПИНОРЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ¹

Ю. С. Владимиров, А. В. Соловьев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

anton@spin.phys.msu.ru

Изучаются математические объекты, называемые финслеровыми N -спинорами. Строится общая алгебраическая теория финслеровых N -спиноров. Показано, что финслеровы N -спиноры тесно связаны с N^2 -мерным плоским финслеровым пространством. Произведено обобщение эпиморфизма $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow O_+^\uparrow(1, 3)$ на случай группы $SL(N, \mathbb{C})$. Детально рассмотрены примеры финслеровых N -спиноров при $N = 2, 3$.

Ключевые слова: Финслеровы спиноры, плоские Финслеровы пространства.

1. Введение

Спиноры как геометрические объекты были открыты Э. Картаном в 1913 году при исследовании линейных представлений ортогональных групп [1]. Полтора десятилетиями позднее В. Паули [2] и П. А. М. Дирак [3] переоткрыли спиноры в связи с квантовой задачей описания спина электрона. С тех пор спиноры интенсивно используются в математике и физике.

В классических работах [4, 5] понятие спинора было обобщено на случай произвольного n -мерного псевдоевклидова пространства. В этой статье рассматривается другое обобщение спиноров, ведущее непосредственно к финслеровой геометрии. Первоначально такое обобщение под названием *гиперспиноров* было предложено в работах [6, 7], в которых, однако, не была построена сколько-нибудь полная алгебраическая теория данных объектов. Те же математические объекты под названием *финслеровых N -спиноров* совершенно независимо изучались в наших работах, посвященных реляционной теории пространства-времени (см., например, [8, 9] и библиографию к ним). Соответствующая математическая схема оказалась довольно содержательной и ее алгебраическая часть будет представлена ниже.

В следующем разделе статьи строится общий алгебраический формализм финслеровых N -спиноров. Дальнейшие разделы посвящены теории простейших финслеровых 2- и 3-спиноров. Заключение содержит некоторые замечания, касающиеся полученных в статье результатов.

2. Общий формализм

Пусть $\mathbb{FS}^N$ — векторное пространство $N > 1$ измерений над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, а

$$[\cdot, \cdot, \dots, \cdot]: \underbrace{\mathbb{FS}^N \times \mathbb{FS}^N \times \dots \times \mathbb{FS}^N}_{N \text{ множителей}} \rightarrow \mathbb{C} \quad (1)$$

— ненулевой антисимметричный N -линейный функционал на $\mathbb{FS}^N$. Последнее означает:

(i) существуют такие $\xi_0, \eta_0, \dots, \lambda_0 \in \mathbb{FS}^N$, что

$$[\xi_0, \eta_0, \dots, \lambda_0] = z_0 \neq 0 \quad (z_0 \in \mathbb{C}); \quad (2)$$

¹ Переработанный русскоязычный вариант статьи авторов: A. V. Solov'yov and Yu. S. Vladimirov. *Finslerian N -spinors: Algebra*. International Journal of Theoretical Physics **40**, 1511–1523 (2001).

(ii) для любых $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N \in \mathbb{FS}^N$ выполняются соотношения

$$[\xi_a, \xi_b, \dots, \xi_c] = \varepsilon_{ab\dots c} [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N],$$

где $a, b, \dots, c = 1, 2, \dots, N$, а $\varepsilon_{ab\dots c}$ — N -мерный символ Леви-Чивиты, нормированный стандартным условием $\varepsilon_{12\dots N} = 1$;

(iii) для любых $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_N, \eta_N \in \mathbb{FS}^N$ и $z \in \mathbb{C}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} [\xi_1, \dots, \xi_a + \eta_a, \dots, \xi_N] &= [\xi_1, \dots, \xi_a, \dots, \xi_N] + [\xi_1, \dots, \eta_a, \dots, \xi_N], \\ [\xi_1, \dots, z\xi_a, \dots, \xi_N] &= z[\xi_1, \dots, \xi_a, \dots, \xi_N], \end{aligned}$$

где a принимает значения $1, 2, \dots, N$.

Мы будем использовать следующую терминологию. Пространство $\mathbb{FS}^N$, снабженное функционалом (1) со свойствами (i), (ii) и (iii), называется *пространством финслеровых N -спиноров*. Комплексное число $[\xi, \eta, \dots, \lambda]$, соответственно, называется *скалярным N -произведением* финслеровых N -спиноров $\xi, \eta, \dots, \lambda \in \mathbb{FS}^N$.

Следует отметить, что $\xi_0, \eta_0, \dots, \lambda_0$ линейно независимы. Действительно, если бы они были линейно зависимы, то один из финслеровых N -спиноров $\xi_0, \eta_0, \dots, \lambda_0$ был бы линейной комбинацией остальных и, в соответствии с (ii)–(iii), скалярное N -произведение $[\xi_0, \eta_0, \dots, \lambda_0]$ обратилось бы в нуль. Но это противоречит (2). Таким образом, $\xi_0, \eta_0, \dots, \lambda_0$ линейно независимы, т. е. образуют базис в $\mathbb{FS}^N$.

Введем обозначения: $\epsilon_1 = \xi_0, \epsilon_2 = \eta_0, \dots, \epsilon_N = \lambda_0/z_0$. Очевидно, упорядоченное множество $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N\}$ является базисом в $\mathbb{FS}^N$. В силу (2) и (iii) его элементы удовлетворяют условию

$$[\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N] = 1. \quad (3)$$

Базисы в пространстве $\mathbb{FS}^N$, для которых имеет место (3), назовем *каноническими*. Они играют выделенную роль во всем развиваемом формализме.

Пусть $\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_N$ — произвольные финслеровы N -спиноры, а

$$\epsilon'_a = c_a^b \epsilon_b \quad (4)$$

— их разложения по каноническому базису $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N\}$; здесь $a, b = 1, 2, \dots, N$, $c_a^b \in \mathbb{C}$ и производится суммирование по повторяющемуся индексу b . При помощи (ii), (iii), (3) и (4) находим

$$[\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_N] = \det C_N, \quad (5)$$

где $C_N = \|c_a^b\|$. Поскольку линейная (не)зависимость $\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_N$ равносильна линейной (не)зависимости столбцов комплексной $N \times N$ -матрицы C_N , то $\{\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_N\}$ является базисом в $\mathbb{FS}^N$ тогда и только тогда, когда $\det C_N \neq 0$. Кроме того, из (5) следует, что $\{\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_N\}$ — канонический базис, если $\det C_N = 1$. Таким образом, когда матрица C_N пробегает группу $SL(N, \mathbb{C})$ комплексных $N \times N$ -матриц с единичным определителем, соответствующий базис $\{\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_N\}$ пробегает множество $\mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$ канонических базисов в $\mathbb{FS}^N$.

Выразим скалярное N -произведение финслеровых N -спиноров через их компоненты относительно *произвольного* канонического базиса $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$. Используя (ii), (iii), (3) и разложения $\xi = \xi^a \epsilon_a, \eta = \eta^b \epsilon_b, \dots, \lambda = \lambda^c \epsilon_c$, получаем

$$[\xi, \eta, \dots, \lambda] = \varepsilon_{ab\dots c} \xi^a \eta^b \dots \lambda^c, \quad (6)$$

где $\xi, \eta, \dots, \lambda \in \mathbb{FS}^N$, $\xi^a, \eta^b, \dots, \lambda^c \in \mathbb{C}$, $a, b, \dots, c = 1, 2, \dots, N$ (здесь, как и в других формулах этой статьи, производится суммирование по всем повторяющимся индексам). Ясно, что скалярное N -произведение (6) обращается в нуль тогда и только тогда, когда финслеровы N -спиноры $\xi, \eta, \dots, \lambda$ линейно зависимы.

Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} \mathbf{S}: \mathbf{E}(\mathbb{FS}^N) &\rightarrow \mathbb{C}^{N^{k+l+m+n}}, \\ \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} &\mapsto \mathbf{S}\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} = \left(S_{a_1 \dots a_m \dot{d}_1 \dots \dot{d}_n}^{b_1 \dots b_k \dot{c}_1 \dots \dot{c}_l} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

такое, что для любых двух канонических базисов $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}, \{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$, связанных между собой соотношениями (4), имеют место формулы

$$\begin{aligned} S_{a_1 \dots a_m \dot{d}_1 \dots \dot{d}_n}^{b_1 \dots b_k \dot{c}_1 \dots \dot{c}_l} \{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_N\} &= c_{a_1}^{e_1} \dots c_{a_m}^{e_m} \overline{c_{d_1}^{h_1}} \dots \overline{c_{d_n}^{h_n}} d_{f_1}^{b_1} \dots d_{f_k}^{b_k} \overline{d_{g_1}^{c_1}} \dots \overline{d_{g_l}^{c_l}} \times \\ &\times S_{e_1 \dots e_m \dot{h}_1 \dots \dot{h}_n}^{f_1 \dots f_k \dot{g}_1 \dots \dot{g}_l} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}; \end{aligned} \quad (8)$$

здесь все индексы (обычные и пунктирные) независимо пробегают значения от 1 до N , горизонтальные линии обозначают комплексное сопряжение, d_b^a — комплексные числа, удовлетворяющие условиям $c_a^b d_c^a = \delta_c^b$ (δ_c^b — символ Кронекера), $\det \|c_b^a\| = \det \|d_b^a\| = 1$, а k, l, m, n — неотрицательные целые числа.

Всякое отображение (7), обладающее свойством (8), будем называть *финслеровым N -спинтензором валентности $\begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$* . Операции сложения и умножения таких N -спинтензоров определяются стандартным способом: если $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ имеют одинаковую валентность $\begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$, а $\mathbf{U}$ имеет валентность $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, то числа

$$\begin{aligned} (S + T)_{a_1 \dots a_m \dot{d}_1 \dots \dot{d}_n}^{b_1 \dots b_k \dot{c}_1 \dots \dot{c}_l} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} &= S_{a_1 \dots a_m \dot{d}_1 \dots \dot{d}_n}^{b_1 \dots b_k \dot{c}_1 \dots \dot{c}_l} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} + \\ &+ T_{a_1 \dots a_m \dot{d}_1 \dots \dot{d}_n}^{b_1 \dots b_k \dot{c}_1 \dots \dot{c}_l} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} \end{aligned}$$

являются компонентами суммы $\mathbf{S} + \mathbf{T}$, а числа

$$\begin{aligned} (S \otimes U)_{a_1 \dots a_{m+r} \dot{d}_1 \dots \dot{d}_{n+s}}^{b_1 \dots b_{k+p} \dot{c}_1 \dots \dot{c}_{l+q}} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} &= S_{a_1 \dots a_m \dot{d}_1 \dots \dot{d}_n}^{b_1 \dots b_k \dot{c}_1 \dots \dot{c}_l} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} \times \\ &\times U_{a_{m+1} \dots a_{m+r} \dot{d}_{n+1} \dots \dot{d}_{n+s}}^{b_{k+1} \dots b_{k+p} \dot{c}_{l+1} \dots \dot{c}_{l+q}} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} \end{aligned}$$

— компонентами произведения $\mathbf{S} \otimes \mathbf{U}$ относительно произвольного канонического базиса $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$. Отметим, что все финслеровы N -спинтензоры валентности $\begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$ образуют $N^{k+l+m+n}$ -мерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$.

Пусть $\text{Herm}(N)$ — *векторное пространство N^2 измерений над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел*, состоящее из финслеровых N -спинтензоров $\mathbf{X}$ валентности $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, компоненты которых удовлетворяют условиям эрмитовой симметрии

$$X^{b\dot{c}} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} = \overline{X^{c\dot{b}} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}} \quad (9)$$

для любого $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$. Пусть, кроме того, $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_{N^2-1}\}$ — некоторый базис в $\text{Herm}(N)$, а $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N\}$ — некоторый канонический базис в $\mathbb{FS}^N$. С каждым $\{\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$ свяжем базис $\{\mathbf{E}'_0, \mathbf{E}'_1, \dots, \mathbf{E}'_{N^2-1}\}$ в $\text{Herm}(N)$ такой, что

$$E'^{b\dot{c}} \{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_N\} = E_\alpha^{b\dot{c}}, \quad (10)$$

где $E_\alpha^{b\dot{c}} = E_\alpha^{b\dot{c}} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}$, а $\alpha = 0, 1, \dots, N^2 - 1$. Иными словами, (10) определяет отображение $\{\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_N\} \mapsto \{\mathbf{E}'_0, \mathbf{E}'_1, \dots, \mathbf{E}'_{N^2-1}\}$ множества $\mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$ в множество всех базисов пространства $\text{Herm}(N)$. Но согласно N -спинтензорному закону преобразования (8)

$$E_\alpha^{b\dot{c}} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} = c_f^b \overline{c_g^{\dot{c}}} E_\alpha^{f\dot{g}} \{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_N\}. \quad (11)$$

Сравнивая (10) и (11), получаем формулы

$$E_\alpha^{b\dot{c}} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} = c_f^b \overline{c_g^{\dot{c}}} E_\alpha^{f\dot{g}}, \quad (12)$$

связывающие между собой компоненты финслеровых N -спинтензоров $\mathbf{E}'_\alpha$ и $\mathbf{E}_\alpha$ относительно одного и того же канонического базиса $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{F}\mathbb{S}^N)$.

Рассмотрим следующие разложения

$$\mathbf{E}'_\alpha = L(C_N)_\alpha^\beta \mathbf{E}_\beta, \quad (13)$$

где $L(C_N)_\alpha^\beta \in \mathbb{R}$, а $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, N^2 - 1$. Чтобы найти $L(C_N)_\alpha^\beta$ как функции c_a^b , полезно ввести N^2 финслеровых N -спинтензоров $\mathbf{E}^\alpha$ валентности $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ таких, что

$$\text{свертка}(\mathbf{E}^\alpha \otimes \mathbf{E}_\beta) = \delta_\beta^\alpha. \quad (14)$$

Легко показать, что $\mathbf{E}^\alpha$ существуют, единственны и $E_{bc}^\alpha = \overline{E_{cb}^\alpha}$ в обозначениях $E_{bc}^\alpha = E_{bc}^\alpha \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}$. На основании (13) и (14) заключаем, что

$$L(C_N)_\beta^\alpha = \text{свертка}(\mathbf{E}^\alpha \otimes \mathbf{E}'_\beta). \quad (15)$$

С другой стороны, из (12) следует

$$\text{свертка}(\mathbf{E}^\alpha \otimes \mathbf{E}'_\beta) = E_{bc}^\alpha c_f^b \overline{c_g^c} E_\beta^{fg}. \quad (16)$$

Таким образом, согласно (15) и (16) имеем

$$L(C_N)_\beta^\alpha = E_{bc}^\alpha c_f^b \overline{c_g^c} E_\beta^{fg}. \quad (17)$$

Пусть $E^\alpha = \|E_{cb}^\alpha\|$, $E_\beta = \|E_\beta^{fg}\|$, а $E'_\beta = \|E_\beta^{fg} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}\|$. Тогда (12) и (17) можно переписать в матричной форме как, соответственно,

$$E'_\beta = C_N E_\beta C_N^+ \quad (18)$$

и

$$L(C_N)_\beta^\alpha = \text{Tr}(E^\alpha C_N E_\beta C_N^+), \quad (19)$$

где крест обозначает эрмитово сопряжение. Однако из (13) следует, что $E'_\beta = L(C_N)_\beta^\gamma E_\gamma$. Поэтому

$$C_N E_\beta C_N^+ = L(C_N)_\beta^\gamma E_\gamma. \quad (20)$$

Принимая во внимание (19) и (20), немедленно получаем

$$L(B_N C_N)_\beta^\alpha = \text{Tr}(E^\alpha B_N C_N E_\beta C_N^+ B_N^+) = L(B_N)_\gamma^\alpha L(C_N)_\beta^\gamma \quad (21)$$

для любых $B_N, C_N \in \text{SL}(N, \mathbb{C})$.

Пусть $L(C_N) = \|L(C_N)_\beta^\alpha\|$, а $\text{FL}(N^2, \mathbb{R}) = \{L(C_N) \mid C_N \in \text{SL}(N, \mathbb{C})\}$. Тогда (21) означает, что $\text{FL}(N^2, \mathbb{R})$ — группа относительно матричного умножения, а отображение

$$L: \text{SL}(N, \mathbb{C}) \rightarrow \text{FL}(N^2, \mathbb{R}), \quad C_N \mapsto L(C_N) \quad (22)$$

— эпиморфизм, так что, в частности, $L(1_N) = 1_{N^2}$ ($1_N, 1_{N^2}$ — единичные матрицы соответствующих порядков) и $L(C_N^{-1}) = L(C_N)^{-1}$. Легко проверить, что ядро эпиморфизма (22) имеет вид

$$\ker L = \{e^{i\frac{2\pi k}{N}} 1_N \mid k = 0, 1, \dots, N-1\}. \quad (23)$$

Вернемся к соотношениям (13). Поскольку $\{\mathbf{E}_0, \dots, \mathbf{E}_{N^2-1}\}$ и $\{\mathbf{E}'_0, \dots, \mathbf{E}'_{N^2-1}\}$ являются базисами в $\text{Herm}(N)$, то произвольный вектор $\mathbf{X} \in \text{Herm}(N)$ может быть разложен двояким образом

$$\mathbf{X} = X^\alpha \mathbf{E}_\alpha = X'^\beta \mathbf{E}'_\beta, \quad (24)$$

где $X^\alpha, X'^\beta \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $X'^\beta = L(C_N^{-1})^\beta_\alpha X^\alpha$. С другой стороны, $X^{b\dot{c}}\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} = c_f^b \bar{c}_g^{\dot{c}} X^{f\dot{g}}\{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_N\}$ или, что то же самое,

$$\|X^{b\dot{c}}\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}\| = C_N \|X^{f\dot{g}}\{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_N\}\| C_N^+. \quad (25)$$

Вспоминая, что $\det C_N = 1$, и вычисляя определитель от обеих сторон равенства (25), получаем

$$\det \|X^{b\dot{c}}\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}\| = \det \|X^{f\dot{g}}\{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_N\}\| \quad (26)$$

для *любого* $\{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$. Значит формула (26) задает *инвариантную* числовую характеристику вектора $\mathbf{X}$, которую естественно обозначить через $\det \mathbf{X}$. Отметим, что $\det \mathbf{X} = \det \|X^{b\dot{c}}\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}\| \in \mathbb{R}$ как это следует из (9).

Таким образом, не ограничивая общности, можно вычислить $\det \mathbf{X}$ относительно базиса $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$. Согласно (24) и (26) имеем $\det \mathbf{X} = \det(X^\alpha E_\alpha) = \det(X'^\beta E'_\beta)$. Однако из (18) следует, что $\det(X'^\beta E'_\beta) = \det(C_N X'^\beta E_\beta C_N^+) = \det(X'^\beta E_\beta)$. Поэтому

$$\det \mathbf{X} = \det(X^\alpha E_\alpha) = \det(X'^\alpha E_\alpha). \quad (27)$$

С другой стороны,

$$\det(X^\alpha E_\alpha) = G_{\alpha\beta\dots\gamma} \underbrace{X^\alpha X^\beta \dots X^\gamma}_{N \text{ множителей}}, \quad (28)$$

где действительные коэффициенты $G_{\alpha\beta\dots\gamma}$ полностью определяются выбором базиса $\{\mathbf{E}_0, \dots, \mathbf{E}_{N^2-1}\}$ в $\text{Herm}(N)$. В силу (27) и (28)

$$\det \mathbf{X} = G_{\alpha\beta\dots\gamma} X^\alpha X^\beta \dots X^\gamma = G_{\alpha\beta\dots\gamma} X'^\alpha X'^\beta \dots X'^\gamma, \quad (29)$$

т.е. $\det \mathbf{X}$ *форминвариантен* относительно преобразований из группы $\text{FL}(N^2, \mathbb{R})$. Отметим, что (29) справедливо для *любого* базиса $\{\mathbf{E}'_0, \dots, \mathbf{E}'_{N^2-1}\}$, элементы которого связаны с элементами базиса $\{\mathbf{E}_0, \dots, \mathbf{E}_{N^2-1}\}$ соотношениями (13).

Обозначая $\det \mathbf{X}$ через $\mathbf{X}^N$ и используя (28), получаем (в базисе $\{\mathbf{E}_0, \dots, \mathbf{E}_{N^2-1}\}$)

$$\mathbf{X}^N = G_{\alpha\beta\dots\gamma} X^\alpha X^\beta \dots X^\gamma, \quad (30)$$

где $G_{\alpha\beta\dots\gamma}$ симметричны по всем индексам и не зависят от выбора канонического базиса в $\mathbb{FS}^N$. Таким образом, (30) корректно определяет на $\text{Herm}(N)$ структуру N^2 -мерного плоского финслерова пространства, так что $\mathbf{X}^N$ представляет собой N -ую степень финслеровой длины вектора $\mathbf{X} \in \text{Herm}(N)$ [10]. Следует отметить, что однородная алгебраическая форма (30), вообще говоря, не является положительно определенной.

В следующих двух разделах мы проиллюстрируем изложенный формализм простейшими примерами финслеровых 2- и 3-спиноров.

3. Финслеровы 2-спиноры

Рассмотрим применение общего формализма при $N = 2$. В этом случае функционал (1) является обычным симплектическим скалярным умножением на $\mathbb{FS}^2$. Значит $\mathbb{FS}^2$ изоморфно пространству $\mathbb{S}^2$ стандартных 2-спиноров [11], так что финслеровы 2-спиноры *совпадают* с вейлевскими 2-спинорами. Ниже мы воспроизведем некоторые существенные сведения о 2-спинорах, которые понадобятся в следующем разделе статьи.

Прежде всего, для любых $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}, \{\epsilon'_1, \epsilon'_2\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^2)$ и $\xi = \xi^a \epsilon_a = \xi'^b \epsilon'_b \in \mathbb{FS}^2$ из (4) вытекают соотношения

$$\xi'^a = d_b^a \xi^b, \quad (31)$$

где $\xi'^a, \xi^b \in \mathbb{C}$, $c_b^a d_c^b = \delta_c^a$, а $a, b, c = 1, 2$. Само собой разумеется, что $C_2, D_2 \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ и $D_2 = C_2^{-1}$ в обозначениях $C_2 = \|c_b^a\|$, $D_2 = \|d_b^a\|$. Аналогичным образом из (6) получаем формулу

$$[\xi, \eta] = \varepsilon_{ab} \xi^a \eta^b = \xi^1 \eta^2 - \xi^2 \eta^1 \quad (32)$$

для скалярного произведения произвольных 2-спиноров ξ и η относительно канонического базиса $\{\epsilon_1, \epsilon_2\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^2)$.

Положим

$$E^\alpha = \frac{1}{2} \sigma^\alpha, \quad E_\beta = \sigma_\beta, \quad (33)$$

где $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, $\sigma^\alpha = \sigma_\alpha$, а

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

— единичная матрица и три матрицы Паули. Поскольку $\text{Tr}(\sigma^\alpha \sigma_\beta) = 2\delta_\beta^\alpha$, такой выбор гарантирует выполнение условий (14). Из (13), (21) и (24) следует, что

$$X'^\alpha = L(D_2)^\alpha_\beta X^\beta \quad (35)$$

для любого 4-вектора $\mathbf{X} \in \text{Herm}(2)$. Используя (19), (33) и (34), получаем

$$L(D_2)^\alpha_\beta = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma^\alpha D_2 \sigma_\beta D_2^+) \quad (36)$$

или, в явном виде,

$$\begin{aligned} L(D_2)_0^0 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_1^1 + d_2^1 \bar{d}_2^1 + d_1^2 \bar{d}_1^2 + d_2^2 \bar{d}_2^2), & L(D_2)_1^0 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_2^1 + d_1^2 \bar{d}_2^2 + d_2^1 \bar{d}_1^1 + d_2^2 \bar{d}_1^2), \\ L(D_2)_2^0 &= \frac{i}{2}(d_2^1 \bar{d}_1^1 + d_2^2 \bar{d}_1^2 - d_1^1 \bar{d}_2^1 - d_1^2 \bar{d}_2^2), & L(D_2)_3^0 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_1^1 + d_1^2 \bar{d}_1^2 - d_2^1 \bar{d}_2^1 - d_2^2 \bar{d}_2^2), \\ L(D_2)_0^1 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_1^2 + d_1^2 \bar{d}_1^1 + d_2^1 \bar{d}_2^2 + d_2^2 \bar{d}_2^1), & L(D_2)_1^1 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_2^2 + d_1^2 \bar{d}_2^1 + d_2^1 \bar{d}_1^2 + d_2^2 \bar{d}_1^1), \\ L(D_2)_2^1 &= \frac{i}{2}(d_2^1 \bar{d}_1^2 + d_2^2 \bar{d}_1^1 - d_1^1 \bar{d}_2^2 - d_1^2 \bar{d}_2^1), & L(D_2)_3^1 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_1^2 + d_1^2 \bar{d}_1^1 - d_2^1 \bar{d}_2^2 - d_2^2 \bar{d}_2^1), \\ L(D_2)_0^2 &= \frac{i}{2}(d_1^1 \bar{d}_1^2 - d_1^2 \bar{d}_1^1 + d_2^1 \bar{d}_2^2 - d_2^2 \bar{d}_2^1), & L(D_2)_1^2 &= \frac{i}{2}(d_1^1 \bar{d}_2^2 - d_1^2 \bar{d}_2^1 + d_2^1 \bar{d}_1^2 - d_2^2 \bar{d}_1^1), \\ L(D_2)_2^2 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_2^2 + d_2^1 \bar{d}_1^2 - d_1^2 \bar{d}_2^1 - d_2^2 \bar{d}_1^1), & L(D_2)_3^2 &= \frac{i}{2}(d_1^1 \bar{d}_1^2 - d_1^2 \bar{d}_1^1 - d_2^1 \bar{d}_2^2 + d_2^2 \bar{d}_2^1), \\ L(D_2)_0^3 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_1^1 - d_1^2 \bar{d}_1^2 + d_2^1 \bar{d}_2^1 - d_2^2 \bar{d}_2^2), & L(D_2)_1^3 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_2^1 - d_1^2 \bar{d}_2^2 + d_2^1 \bar{d}_1^1 - d_2^2 \bar{d}_1^2), \\ L(D_2)_2^3 &= \frac{i}{2}(d_2^1 \bar{d}_1^1 - d_2^2 \bar{d}_1^2 - d_1^1 \bar{d}_2^1 + d_1^2 \bar{d}_2^2), & L(D_2)_3^3 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_1^1 - d_1^2 \bar{d}_1^2 - d_2^1 \bar{d}_2^1 + d_2^2 \bar{d}_2^2). \end{aligned} \quad (36a)$$

Кроме того, из (28), (30), (33) и (34) следует

$$\mathbf{X}^2 = G_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2. \quad (37)$$

В силу (29) и (37) $\text{Herm}(2)$ изоморфно пространству Минковского, $\text{FL}(4, \mathbb{R}) = \text{O}_+^\uparrow(1, 3)$, а (22) совпадает с известным эпиморфизмом $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{O}_+^\uparrow(1, 3)$ [11].

Пусть $\mathbb{FS}_\mathbb{R}^2$ — овеществление $\mathbb{FS}^2$ (исчерпывающая информация об общей процедуре овеществления векторных пространств содержится в книге [12]). Тогда $\mathbb{FS}_\mathbb{R}^2$ является 4-мерным векторным пространством над полем $\mathbb{R}$, а его элементы — майорановскими 4-спинорами. Действительно, полагая

$$\xi^1 = \xi_\mathbb{R}^1 - i\xi_\mathbb{R}^2, \quad \xi^2 = \xi_\mathbb{R}^3 - i\xi_\mathbb{R}^4, \quad \xi'^1 = \xi_\mathbb{R}'^1 - i\xi_\mathbb{R}'^2, \quad \xi'^2 = \xi_\mathbb{R}'^3 - i\xi_\mathbb{R}'^4, \quad (38)$$

получаем

$$\begin{aligned}\xi &= \xi^a \epsilon_a = \xi_{\mathbb{R}}^1 \epsilon_1 - \xi_{\mathbb{R}}^2 i \epsilon_1 + \xi_{\mathbb{R}}^3 \epsilon_2 - \xi_{\mathbb{R}}^4 i \epsilon_2, \\ \xi &= \xi'^b \epsilon'_b = \xi_{\mathbb{R}}'^1 \epsilon'_1 - \xi_{\mathbb{R}}'^2 i \epsilon'_1 + \xi_{\mathbb{R}}'^3 \epsilon'_2 - \xi_{\mathbb{R}}'^4 i \epsilon'_2\end{aligned}\quad (39)$$

для любых $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}, \{\epsilon'_1, \epsilon'_2\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^2)$ и $\xi \in \mathbb{FS}^2$; здесь $\xi_{\mathbb{R}}^i, \xi_{\mathbb{R}}'^j \in \mathbb{R}$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$). Из (39) следует, что $\{\epsilon_1, -i\epsilon_1, \epsilon_2, -i\epsilon_2\}$ и $\{\epsilon'_1, -i\epsilon'_1, \epsilon'_2, -i\epsilon'_2\}$ являются базисами в $\mathbb{FS}_{\mathbb{R}}^2$. Более того, подстановка (38) в (31) показывает, что

$$\xi_{\mathbb{R}}^i = M(D_2)_j^i \xi_{\mathbb{R}}^j, \quad (40)$$

где $M(D_2)_j^i \in \mathbb{R}$ имеют вид

$$\begin{aligned}M(D_2)_1^1 &= \frac{1}{2}(\bar{d}_1^1 + d_1^1), & M(D_2)_1^3 &= \frac{1}{2}(\bar{d}_1^2 + d_1^2), \\ M(D_2)_2^1 &= \frac{i}{2}(\bar{d}_1^1 - d_1^1), & M(D_2)_2^3 &= \frac{i}{2}(\bar{d}_1^2 - d_1^2), \\ M(D_2)_3^1 &= \frac{1}{2}(\bar{d}_2^1 + d_2^1), & M(D_2)_3^3 &= \frac{1}{2}(\bar{d}_2^2 + d_2^2), \\ M(D_2)_4^1 &= \frac{i}{2}(\bar{d}_2^1 - d_2^1), & M(D_2)_4^3 &= \frac{i}{2}(\bar{d}_2^2 - d_2^2), \\ M(D_2)_1^2 &= \frac{i}{2}(d_1^1 - \bar{d}_1^1), & M(D_2)_1^4 &= \frac{i}{2}(d_1^2 - \bar{d}_1^2), \\ M(D_2)_2^2 &= \frac{1}{2}(d_1^1 + \bar{d}_1^1), & M(D_2)_2^4 &= \frac{1}{2}(d_1^2 + \bar{d}_1^2), \\ M(D_2)_3^2 &= \frac{i}{2}(d_2^1 - \bar{d}_2^1), & M(D_2)_3^4 &= \frac{i}{2}(d_2^2 - \bar{d}_2^2), \\ M(D_2)_4^2 &= \frac{1}{2}(d_2^1 + \bar{d}_2^1), & M(D_2)_4^4 &= \frac{1}{2}(d_2^2 + \bar{d}_2^2).\end{aligned}\quad (41)$$

Очевидно, матричная группа $\text{Maj}(4) = \{\|M(D_2)_j^i\| \mid D_2 \in \text{SL}(2, \mathbb{C})\}$ изоморфна группе $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. Наконец, используя $\eta^1 = \eta_{\mathbb{R}}^1 - i\eta_{\mathbb{R}}^2$, $\eta^2 = \eta_{\mathbb{R}}^3 - i\eta_{\mathbb{R}}^4$ и (38), можно переписать (32) как

$$[\xi, \eta] = \bar{\xi} \gamma^5 \eta - i \bar{\xi} \eta,$$

где $\xi = (\xi_{\mathbb{R}}^1, \xi_{\mathbb{R}}^2, \xi_{\mathbb{R}}^3, \xi_{\mathbb{R}}^4)^\top$ и $\eta = (\eta_{\mathbb{R}}^1, \eta_{\mathbb{R}}^2, \eta_{\mathbb{R}}^3, \eta_{\mathbb{R}}^4)^\top$ — матрицы-столбцы, знак “ $\top$ ” обозначает транспонирование, $\bar{\xi} = \xi^\top \gamma^0$ — матрица-строка, а

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, & \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^5 &= \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (42)$$

— матрицы Дирака в майорановском представлении [13], которые удовлетворяют стандартным условиям $\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = 2g^{\alpha\beta}$ с $\|g^{\alpha\beta}\| = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

4. Финслеровы 3-спиноры

В этом разделе мы рассмотрим нетривиальный случай финслеровых N -спиноров при $N = 3$. Кроме того, здесь будет изучено алгебраическое строение группы $\text{FL}(9, \mathbb{R})$.

Начнем со следующего замечания. Для любых $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}, \{\epsilon'_1, \epsilon'_2, \epsilon'_3\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^3)$ и $\xi = \xi^a \epsilon_a = \xi'^b \epsilon'_b \in \mathbb{FS}^3$ из (4) вытекают соотношения $\xi'^a = d_b^a \xi^b$, где $\xi'^a, \xi^b \in \mathbb{C}$, $c_b^a d_c^b = \delta_c^a$, а $a, b, c = 1, 2, 3$. Ясно, что $C_3, D_3 \in \text{SL}(3, \mathbb{C})$ и $D_3 = C_3^{-1}$ в обозначениях $C_3 = \|c_b^a\|$, $D_3 = \|d_b^a\|$. Аналогичным образом из (6) получаем формулу $[\xi, \eta, \zeta] = \varepsilon_{abc} \xi^a \eta^b \zeta^c$ для скалярного 3-произведения произвольных финслеровых 3-спиноров ξ, η и ζ относительно канонического базиса $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^3)$.

По аналогии с предыдущим разделом положим

$$E^A = \frac{1}{2} \lambda^A, \quad E_B = \lambda_B, \quad (43)$$

где $A, B = 0, 1, \dots, 8$, $\lambda^A = \lambda_A$ ($A \neq 8$), $\lambda^8 = 2\lambda_8$, а

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_7$ совпадают с матрицами Гелл-Манна). Поскольку $\text{Tr}(\lambda^A \lambda_B) = 2\delta_B^A$, выбор (43) обеспечивает выполнение условий (14). Из (13), (21) и (24) следует, что

$$X'^A = L(D_3)_B^A X^B \quad (45)$$

для любого 9-вектора $\mathbf{X} \in \text{Herm}(3)$. Используя (19), (43) и (44), получаем

$$L(D_3)_B^A = \frac{1}{2} \text{Tr}(\lambda^A D_3 \lambda_B D_3^+). \quad (46)$$

Кроме того, из (28), (30), (43) и (44) вытекает формула

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^3 &= G_{AB\Gamma} X^A X^B X^\Gamma = [(X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2] X^8 \\ &\quad - X^0[(X^4)^2 + (X^5)^2 + (X^6)^2 + (X^7)^2] \\ &\quad + 2X^1[X^4 X^6 + X^5 X^7] + 2X^2[X^5 X^6 - X^4 X^7] \\ &\quad + X^3[(X^4)^2 + (X^5)^2 - (X^6)^2 - (X^7)^2]. \end{aligned} \quad (47)$$

В силу (29) финслеров “скалярный куб” (47) 9-вектора $\mathbf{X} \in \text{Herm}(3)$ форминвариантен относительно преобразований (45) – (46) из группы $\text{FL}(9, \mathbb{R})$.

Более или менее ясно, что любая матрица $\hat{D}_3 \in \text{SL}(3, \mathbb{C})$ с $\hat{d}_3^3 \neq 0$ может быть представлена в виде произведения

$$\hat{D}_3 = D_3^{(1)} D_3^{(2)} D_3^{(3)} D_3^{(4)}, \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} D_3^{(1)} &= \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 & 0 \\ d_1^2 & d_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D_3^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_3^1 \\ 0 & 1 & d_3^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ D_3^{(3)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d_1^3 & d_2^3 & 1 \end{pmatrix}, & D_3^{(4)} &= \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d^{-2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (49)$$

также являются $SL(3, \mathbb{C})$ -матрицами. Используя формулы (21), (48) и (49), получаем разложение

$$L(\widehat{D}_3) = L(D_3^{(1)})L(D_3^{(2)})L(D_3^{(3)})L(D_3^{(4)}) \quad (50)$$

соответствующей $FL(9, \mathbb{R})$ -матрицы $L(\widehat{D}_3)$. Таким образом, (50) сводит общее $FL(9, \mathbb{R})$ -преобразование $X'^A = L(\widehat{D}_3)_B^A X^B$ к композиции четырех более простых преобразований, индуцированных матрицами (49). Явное описание этих $FL(9, \mathbb{R})$ -преобразований будет дано ниже.

Пусть $\xi_{\mathbb{R}}^i = X^{3+i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Тогда, с помощью (45) и (46), $FL(9, \mathbb{R})$ -преобразование $X'^A = L(D_3^{(1)})_B^A X^B$ записывается в следующей форме

$$\begin{aligned} X'^\alpha &= L(D_2)_\beta^\alpha X^\beta, \\ \xi_{\mathbb{R}}^i &= M(D_2)_j^i \xi_{\mathbb{R}}^j, \\ X'^8 &= X^8, \end{aligned} \quad (51)$$

где $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, а $i, j = 1, 2, 3, 4$. Нетрудно видеть, что первая строка в (51) совпадает с преобразованием Лоренца (35) – (36а) 4-вектора X^α , а вторая строка — с преобразованием (40) – (41) майорановского 4-спинора $\xi_{\mathbb{R}}^i$. Поэтому преобразования (51) образуют 6-параметрическую неабелеву подгруппу группы $FL(9, \mathbb{R})$.

Пусть $d_3^1 = \varepsilon^1 - i\varepsilon^2$, $d_3^2 = \varepsilon^3 - i\varepsilon^4$ — параметризация комплексной матрицы $D_3^{(2)}$ из (49). Вводя действительные матрицы-столбцы $\varepsilon = (\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4)^\top$, $\xi = (X^4, X^5, X^6, X^7)^\top$ и используя (42), (45), (46), запишем $FL(9, \mathbb{R})$ -преобразование $X'^A = L(D_3^{(2)})_B^A X^B$ как

$$\begin{aligned} X'^\alpha &= X^\alpha + \bar{\varepsilon} \gamma^\alpha \xi + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} \gamma^\alpha \varepsilon X^8, \\ \xi' &= \xi + \varepsilon X^8, \\ X'^8 &= X^8, \end{aligned} \quad (52)$$

где $\alpha = 0, 1, 2, 3$, а $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^\top \gamma^0$. Поскольку $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4 \in \mathbb{R}$, преобразования (52) образуют 4-параметрическую абелеву подгруппу группы $FL(9, \mathbb{R})$.

Пусть $d_3^1 = \varkappa^3 - i\varkappa^4$, $d_3^2 = -\varkappa^1 + i\varkappa^2$ — параметризация комплексной матрицы $D_3^{(3)}$ из (49). Вводя действительные матрицы-столбцы $\varkappa = (\varkappa^1, \varkappa^2, \varkappa^3, \varkappa^4)^\top$, $\xi = (X^4, X^5, X^6, X^7)^\top$ и используя (42), (45), (46), запишем $FL(9, \mathbb{R})$ -преобразование $X'^A = L(D_3^{(3)})_B^A X^B$ как

$$\begin{aligned} X'^\alpha &= X^\alpha, \\ \xi' &= -ig_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \varkappa X^\beta + \xi, \\ X'^8 &= g_{\alpha\beta} \bar{\varkappa} \gamma^\alpha \varkappa X^\beta + 2i\bar{\varkappa} \xi + X^8, \end{aligned} \quad (53)$$

где $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, $\bar{\varkappa} = \varkappa^\top \gamma^0$, а $\|g_{\alpha\beta}\| = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Поскольку $\varkappa^1, \varkappa^2, \varkappa^3, \varkappa^4 \in \mathbb{R}$, преобразования (53) образуют 4-параметрическую абелеву подгруппу группы $FL(9, \mathbb{R})$.

Пусть $d = |d|e^{i\varphi} \neq 0$ — параметризация комплексной матрицы $D_3^{(4)}$ из (49). Используя (45) и (46), представим $\text{FL}(9, \mathbb{R})$ -преобразование $X'^A = L(D_3^{(4)})^A_B X^B$ в следующей форме

$$\begin{aligned} X'^\alpha &= |d|^2 X^\alpha, \\ \begin{pmatrix} X'^4 \\ X'^5 \end{pmatrix} &= |d|^{-1} \begin{pmatrix} \cos 3\varphi & \sin 3\varphi \\ -\sin 3\varphi & \cos 3\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^4 \\ X^5 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} X'^6 \\ X'^7 \end{pmatrix} &= |d|^{-1} \begin{pmatrix} \cos 3\varphi & \sin 3\varphi \\ -\sin 3\varphi & \cos 3\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^6 \\ X^7 \end{pmatrix}, \\ X'^8 &= |d|^{-4} X^8, \end{aligned} \tag{54}$$

где $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Поскольку $|d| > 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}$, преобразования (54) образуют 2-параметрическую абелеву подгруппу группы $\text{FL}(9, \mathbb{R})$.

Таким образом, все четыре $\text{FL}(9, \mathbb{R})$ -преобразования, отвечающие матрицам разложения (50), описаны явно в (51), (52), (53) и (54). Наконец, в использованных выше обозначениях, можно переписать (47) как

$$\mathbf{X}^3 = g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta X^8 - g_{\alpha\beta} X^\alpha \bar{\xi} \gamma^\beta \xi.$$

Заключение

В этой статье мы рассмотрели алгебраические аспекты теории финслеровых N -спиноров. Были сформулированы общие определения финслерова N -спинора и финслерова N -спинтензора произвольной валентности.

Показано, что эрмитово-симметричные финслеровы N -спинтензоры валентности $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ являются векторами N^2 -мерного плоского финслерова пространства $\text{Herm}(N)$. Метрика на $\text{Herm}(N)$ характеризуется однородной алгебраической формой N -ой степени (30).

Мы также построили обобщение (22) хорошо известного группового эпиморфизма $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{O}_+^\uparrow(1, 3)$ и обнаружили, что его ядро состоит из N скалярных матриц (23). В частности, оказалось, что финслеровы 2-спиноры совпадают со стандартными вейлевскими 2-спинорами. В этой связи пришлось напомнить некоторые существенные сведения о майорановских 4-спинорах.

Наконец, мы рассмотрели свойства финслеровых 3-спиноров и дали подробное описание алгебраического строения группы $\text{FL}(9, \mathbb{R})$, преобразования которой сохраняют финслерovu метрику (47).

Обратим внимание, что в линейном по ε и $\varkappa$ приближении преобразования (52) и (53) весьма напоминают преобразования $N = 1$ суперсимметрии. Отличие заключается лишь в том, что в нашем случае элементы столбцов ε и $\varkappa$ являются комплексными, а не грассмановыми числами.

References

- [1] Cartan É. (1913). Les groupes projectifs, qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **41**, 53–96.
- [2] Pauli W. (1927). Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons, *Zeitschrift für Physik*, **43**, 601–623.
- [3] Dirac P. A. M. (1928). The quantum theory of the electron, *Proceedings of the Royal Society (London)*, **A117**, 610–624.
- [4] Brauer R. and Weyl H. (1935). Spinors in n dimensions, *American Journal of Mathematics*, **57**, 425–449.

- [5] Cartan É. (1938). *Leçons sur la théorie des spineurs*. Actualités scientifiques et industrielles, Paris.
- [6] Finkelstein D. (1986). Hyperspin and hyperspace, *Physical Review Letters*, **56**, 1532–1533.
- [7] Finkelstein D., Finkelstein S. R., and Holm C. (1986). Hyperspin Manifolds, *International Journal of Theoretical Physics*, **25**, 441–463.
- [8] Владимиров Ю. С. (2008). *Основания физики*. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний.
- [9] Соловьев А. В. (1996). *N-спинорное исчисление в реляционной теории пространства-времени*. Дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.04.02, Москва.
- [10] Finsler P. (1918). *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*. Dissertation, Göttingen.
- [11] Пенроуз Р., Риндлер В. (1987). *Спиноры и пространство-время. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля*. М.: Мир.
- [12] Кострикин А. И., Манин Ю. И. (1986). *Линейная алгебра и геометрия*. М.: Наука.
- [13] Majorana E. (1937). Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone, *Nuovo Cimento*, **14**, 171–184.

Finslerian N –spinors with complex components

Yu. S. Vladimirov, A. V. Solovyev

MSU n. a. M. V. Lomonosov
anton@spin.phys.msu.ru

There are studied mathematical objects, called Finslerian N –spinors, and the general algebraic theory of such objects, is constructed. It is shown that the Finslerian N –spinors are tightly connected to the N^2 –dimensional flat Finsler space. The generalization of the endomorphism $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow O_+^\uparrow(1, 3)$ is provided, for the case of the group $SL(N, \mathbb{C})$. The examples of Finslerian N –spinors are examined in detail for $N = 2, 3$.

Key-words: Finslerian spinors, flat Finsler space.

MSC: 53B40, 15A66.

SPECTRAL PROPERTIES AND APPLICATIONS OF THE NUMERICAL MULTILINEAR ALGEBRA OF M -ROOT STRUCTURES

Vladimir Balan

University Politehnica of Bucharest, Faculty of Applied Sciences

vbalan@mathem.pub.ro

In the framework of supersymmetric tensors and multivariate homogeneous polynomials, the talk discusses the 4-th order Berwald-Moor case. The eigenvalues and eigenvectors are determined; the recession and degeneracy vectors, characterization points, rank, asymptotic rays, base index, are studied. As well, the best rank-one approximation is derived, relations to the Berwald-Moor poly-angles are pointed out, and a brief outlook on real-world applications is provided.

MSC: 65F30, 15A18, 15A69.

Keywords: recession vector, degeneracy vector, characterization points, asymptotic rays, best rank-one approximation.

1 Introduction

Within the framework of applied computational mathematics, the numerical multilinear algebra has developed in recent years in connection with computational topics regarding higher-order tensors, as: tensor decomposition, computation of tensor rank, eigenvalues and eigenvectors, lower-rank approximation of tensors, numerical stability and perturbation analysis of tensor computation, etc. (e.g., [15], [14]).

The wide applications of this field include digital image restoration, psycho-, chemo- and econometrics, multi-way data analysis, blind source separation and blind source deconvolution in signal processing, higher-order statistics, etc (e.g., [1–6, 9, 16, 17]).

As example, the blind source separation problem (BSS problem, known as Independent component analysis – ICA problem) from signal processing has, among multiple aims, both interception and classification in military applications and surveillance of communications in the civil resort. Here, the problem of blind separation of convolutive mixtures is known as Blind Deconvolution (BD) - problem.

This problem attempts in separating and recovering statistically an independent stochastic process (a source vector $x \in \mathbb{R}^n$) given the output $z = Ax + v$, where $z \in \mathbb{R}^m$ is the observed random variable of dimension m , A is an $m \times n$ mixing matrix and $v \in \mathbb{R}^m$ is the x –independent noise vector. The main method to recover the source is to project the observed variable z onto a vector u selected such that the inner product $\langle u, z \rangle$ is maximized. The problem reduces ultimately to finding the best approximation to a 4-th cumulant supersymmetric tensor T by another rank-one tensor – where in case of convexity/concavity assumptions, the symmetric higher-order power method converges.

In the present work, using the tools developed in [14, 15], we investigate spectral aspects – including the 1-rank approximant problem, of the Berwald-Moor supersymmetric $(0, 4)$ –tensor:

$$A_{ijkl} = \begin{cases} \frac{1}{24!}, & \text{for } \{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1.1)$$

2 Eigenvalues and eigenvectors of supersymmetric tensors. The Berwald-Moor case

In general, for a supersymmetric tensor $A \in \mathcal{T}_m^0(\mathbb{R}^n)$ of order m on $\mathbb{R}^n$, we say that $\lambda \in \mathbb{R}$ is an (Z-)eigenvalue and a vector $y \in \mathcal{T}_0^1(\mathbb{R}^n) \equiv \mathbb{R}^n$ is an associated (Z-)eigenvector, if they satisfy the system:

$$Ay^{m-1} = \lambda y; \quad g(y, y) = 1, \quad (2.1)$$

where we have considered the transvection

$$Ay^{m-1} = C_1^1 C_2^2 \dots C_{m-1}^{m-1} (A \otimes \underbrace{y \otimes \dots \otimes y}_{m-1 \text{ times}}),$$

C_j^i is the transvection operator on the corresponding indices and $y = y^i e_i$ is the Liouville vector field on the flat manifold $\mathbb{R}^n$, considered at some point $x \in \mathbb{R}^n$, and $g = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j$ is the flat Euclidean metric on $\mathbb{R}^n$ which implicitly raises/lowers the tensor indices. For the complex variant, λ and y are simply called *eigenvalue* and *eigenvector*, respectively.

As a corollary to [14, Theorem 1, p.1312], after tedious computations, one infers the following result:

Theorem 2.1 *Consider the Berwald-Moor supersymmetric tensor A given in (1.1). Then*

a) *The eigenvalues of A are $\lambda \in \sigma(A) = \{0, \pm \frac{1}{16}\}$, with the associated eigenvectors*

$$\left\{ \begin{array}{ll} S_{\lambda=0} &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \exists i < j; i, j \in \overline{1, 4}, \exists \theta \in [0, 2\pi), \\ &\quad x_i = \cos \theta, x_j = \sin \theta, x_k = 0, \forall k \in \overline{1, 4} \setminus \{i, j\}\} \\ S_{\lambda=1/16} &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{\pm 1/2\}, x_1 x_2 x_3 x_4 > 0\} \\ S_{\lambda=-1/16} &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{\pm 1/2\}, x_1 x_2 x_3 x_4 < 0\} \end{array} \right.$$

b) *The supersymmetric tensor A is not positive semi-definite.*

c) *The hyperquartic surface $\Sigma : Ay^4 = c$ for $c > 0$ is nonempty and the distance $d = \text{dist}(O, \Sigma) = 2\sqrt[4]{c}$ which occurs at the $2 + \binom{4}{2} = 8$ points $y_* \cdot d$, given by the directions*

$$y_* \in \left\{ \frac{1}{2}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \mid \varepsilon_{1,2,3,4} \in \{\pm 1\}, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = 1 \right\}. \quad (2.2)$$

d) *Σ does not surround a bounded region in $\mathbb{R}^4$.*

Proof. a) Tedious computation for solving $Ay^3 = \lambda y, g(y, y) = 1$. b) Apply [14] for $\sigma(A) \not\subset \mathbb{R}_+$. c) $\sigma(A) \cup \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset$ and the minimal distance $d = d(O, \Sigma) = (c/\lambda_{\max})^{1/m}$ occurs at $d \cdot y_*$. d) is a consequence of non-positive semidefiniteness and [14].

Remark. The eigenvalues considered above are the Z -eigenvalues studied by L. Qi in [13].

Alternatively, L. Qi has defined the following spectral objects ([12, 15]):

Definition. A real number $\lambda \in \mathbb{R}$ is an (H-)eigenvalue and a vector $y \in \mathbb{R}^n$ is an associated (H-)eigenvector, if they satisfy the homogeneous polynomial system of order $n - 1$:

$$(Ay^{m-1})_k = \lambda (y_k)^{m-1}. \quad (2.3)$$

For the complex variant, λ and y are simply called *(E-)eigenvalue* and *(E-)eigenvector*, respectively.

Regarding the existence of eigenvalues/eigenvectors, the following result holds true:

Theorem 2.2 *H-eigenvalues and Z-eigenvalues always exist for even supersymmetric tensors. A supersymmetric tensor A is positive definite/semidefinite iff all its H- (or Z-) eigenvalues are positive/non-negative.*

3 Recession vectors and rank

Among vectors which characterize a supersymmetric tensor $A \in T_m^0(\mathbb{R}^n) \equiv (T_m^0)_x(\mathbb{R}^m)$, we have the following:

Definitions. a) A recession vector of A is $y \in V = \mathbb{R}^n$ such that for all $x \in V$ and $\alpha \in \mathbb{R}$, we have

$$A(x + \alpha y)^m = Ax^m,$$

i.e., the multi-action of A on any line passing through any point x which is oriented by y , depends only on the direction of y (i.e., A has the same multi-action on the whole pencil of parallel lines of direction y).

b) The mixed $(m-k, k)$ action of A onto the pair $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ is given by

$$Ax^{m-k}y^k = C_1^1 \dots C_m^m A \otimes \underbrace{u \otimes \dots \otimes u}_{m-k \text{ times}} \otimes \underbrace{v \otimes \dots \otimes v}_{k \text{ times}}.$$

We note that due to the supersymmetry we have ([14]) $Ax^{m-k}y^k = Ay^k x^{m-k}$ and $A(x + \alpha y)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \alpha^k Ax^{m-k}y^k$, and that

$$Ay^k = 0, k \in \overline{1, m-1} \Rightarrow Ay^{k+s} = 0, s \in \overline{1, m-k} \text{ and } Ay^k x^{m-k} = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

We note that the mixed action on vectors provides alternative versions of angles in the Berwald-Moor relativistic framework ([10], [11]). The following result provides a characterization of recession vectors ([14, Th. 3, p. 1315]):

Theorem 3.1 *Let R be the set of recession vectors of $A \in T_m^0(\mathbb{R}^n)$. Then*

- a) $y \in R \Leftrightarrow Ay = 0$, and R is a vector subspace of $\mathbb{R}^n$;
- b) any unit vector from R is a Z -eigenvector associated to the Z -eigenvalue $\lambda = 0 \in \sigma(A)$;
- c) any vector of R is orthogonal to all the Z -eigenvectors associated to non-zero Z -eigenvalues.

As a consequence of the fact that for the Berwald-Moor supersymmetric tensor A given in (1.1), we have $Ay = 0 \Rightarrow y = 0$, a) immediately infers that $R = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

As well, denoting the base of Σ with $B = R^\perp$, then the rank of T is $\dim B$. We note that in the Berwald-Moor case, since $B = \mathbb{R}^4$, we have $\text{rank } A = 4$ and hence A is non-singular. Hence Σ is *not* a cylinder. Actually, Σ is a Tzitzeica surface given by $\Sigma : y_1 y_2 y_3 y_4 = c$, which for $c > 0$ has 8 connected sheets.

4 Asymptotic rays

We say that the semi-line $L = \{\alpha y \mid \alpha \geq 0\} \subset \mathbb{R}^m$ with $\|y\| = 1$ is an asymptotic ray for $A \in T_m^0(\mathbb{R}^n)$ for Σ if $\alpha y \notin \Sigma, \forall \alpha \geq 0$ and there exists a sequence of points $u^{(k)} \in \Sigma, k \geq 1$, such that $\|u^{(k)}\| \rightarrow \infty$ and $d(u^{(k)}, L) \rightarrow 0$, for $k \rightarrow \infty$. We say that an asymptotic ray L of A is of degree d if there exists a sequence of points as above, such that

$$\|u^{(k)} - \text{pr}_y u^{(k)}\| = \mathcal{O} \left(\left\| \frac{1}{\|u^{(k)}\|} u^{(k)} - y \right\|^d \right).$$

It is known that if L is an asymptotic ray for A , then $Ay^m = 0$. From [14], we get

Theorem 4.1 *Let $\|y\| = 1$ and $Ay^m = 0$. Then:*

- a) L is an asymptotic ray for A iff $y \notin R$;
 b) L is an asymptotic ray of degree $1 - \frac{1}{m}$ iff y is not a Z -eigenvector associated to the Z -eigenvalue $\lambda = 0$;
 c) L is an asymptotic ray of degree $1 - \frac{k}{m}$ iff y is a Z -eigenvector associated to the Z -eigenvalue $\lambda = 0$ and $Ay^{m-k} \neq 0, Ay^{m-k+1} = 0$.

For the Berwald-Moor tensor, one easily finds that the asymptotic rays are characterized by $Ay^4 = y_1y_2y_3y_4 = 0$, and belong to the union of the four coordinate hyperplanes of $\mathbb{R}^4$. Moreover, we have the possible degrees of the asymptotic rays $3/4; 1/2; 1/4$ for $y \in D_0 \setminus D_1$, $y \in D_1 \setminus D_2$ or $y \in D_2 \setminus D_3$, respectively (according to the definitions of degeneracy sets from below).

5 Degeneracy vectors and base index

We have the decomposition $S_0 = R \oplus S_{0B}$, where $S_0 : Ay^m = 0$ and $S_{0B} = S_0 \cap R^\perp$.

Definition. a) A vector $y \in R^\perp$ is called *degeneracy vector of degree k* of A if $Ay^{m-k} = 0$, the set of such vectors being denoted with $D_k, k \in \overline{0, m-2}$.

b) If $D_{k-1} \neq \{0\}$ but $D_k = \{0\}$, then we call $d = k$ the *base index*. If $D_0 = \{0\}$, then we put $d = 0$.

The following result provides a general characterization of degeneracy sets:

Theorem 5.1 Let $A \in T_m^0(\mathbb{R}^n)$. Then

a) We have the chain

$$\mathbb{R}^4 \supset D_0 \supset D_1 \supset D_2 \supset \cdots \supset D_{m-2} \supset \{0\};$$

b) $\forall k \in \overline{0, m-2}, (x \in D_k \Rightarrow \text{Span}(x) \subset D_k)$;

c) If A is positive or negative semidefinite, then $D_1 \neq \{0\}$;

d) If $k + j \geq m$, then $D_k + D_j \subset D_{k+j-m}$.

For the Berwald-Moor tensor, we have

- $D_0 = \{y | Ay^4 = 0\} = \{y | \exists i \in \overline{1, 4}, y_i = 0\}$;
- $D_1 = \{y | Ay^3 = 0\} = \{y | \exists i, j \in \overline{1, 4}, i \neq j, y_i = y_j = 0\}$;
- $D_2 = \{y | Ay^2 = 0\} = \{y | \exists i, j, k \in \overline{1, 4}, i \neq j \neq k \neq i, y_i = y_j = y_k = 0\}$;
- $D_3 = \{y | Ay = 0\} = \{0\} = R$.

and a) provides the link

$$\mathbb{R}^4 \supset D_0 \supset D_1 \supset D_2 \supset D_3 = \{0\}.$$

Since $D_2 \neq \emptyset$, the base index is $d = 3$. However, item c) does not apply for A , and $D_2 + D_2 \subset D_4$.

We note that the vectors of a degeneracy set D_k provide null Pavlov poly-angles with complimentary k -copies of vectors, for $k \in \overline{1, 2}$ ([10, 11]).

6 Characterization points

According to [14, Th. 7, p.1324], we have that for $m \geq 2$, $\lambda \in \sigma(A) \cap \mathbb{R}_+^*$ with $x \in \mathbb{R}^n$ associated eigenvector, considering $y = \theta x$ with $\theta = (c/\lambda)^{1/m}$, if $y \in \Sigma$ provides the minimal distance $d(O, \Sigma)$, if except for the value $2 - m$, the $(0, 2)$ -tensor $I - \frac{m-1}{\lambda} Ax^{m-2}$ has all the other eigenvalues positive, and local maximizer for the distance for the similar statement with negative eigenvalues. Further, we have

Theorem 6.1 Let $A \in T_m^0(\mathbb{R}^n)$, y as above and assume that the minimality condition from above holds. Then, denoting $T_1 = \{u \in \mathbb{R}^n | x \perp u, u = \frac{m-1}{\lambda} Ax^{m-2}u\}$, we have

- a) for $m = 3$, y provides a local minimizer for $d(0, \Sigma)$ iff $Ax^{m-3}u^3, \forall u \in T_1$;
 b) for $m \geq 4$, if y provides a local minimizer for $d(0, \Sigma)$, then

$$Ax^{m-3}u^3 = 0, \forall u \in T_1 \text{ and } Ax^{m-4}u^4 \leq 0;$$

- c) for $m \geq 4$, if

$$Ax^{m-3}u^3 = 0, \forall u \in T_1 \text{ and } Ax^{m-4}u^4 < 0;$$

then y provides a local minimizer for $d(0, \Sigma)$.

We note that in the Berwald-Moor case, the theorem provides the characterization points previously described in (2.2).

7 Best rank-one approximation

We define the best rank-one super-symmetric approximation of $A \in T_m^0(\mathbb{R}^n)$, as the homogeneous polynomial $\lambda y^m \equiv \lambda y \otimes \cdots \otimes y$ which is global minimizer for the distance $\|A - \lambda y^m\|_F$ for $\lambda \in \mathbb{R}, \|y\|_2 = 1$, where $\|\cdot\|_F$ is the Frobenius norm, and where y^n can be regarded as an n -th order n -dimensional rank-1 tensor with entries $y_{i_1} \dots y_{i_n}$. A strong result in this respect is ([14, Th. 9, p.1325], [15])

Theorem 7.1 Consider $A \in T_m^0(\mathbb{R}^n)$. Then:

- a) For $\lambda \in \sigma(A)$ and y its associated Z -eigenvector, we have

$$\lambda = Ay^m \text{ and } \|A - \lambda y^m\|_F^2 = \|A\|_F^2 - \lambda^2 \geq 0.$$

- b) the best rank one approximation of A is given by the value $\max_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda$ for y associated to λ .

We note that for the Berwald-Moor tensor, the minimizer $\lambda = 1/16$, is attended at the eigenvectors of λ , by the super-symmetric tensors

$$\hat{A} = \sum_{i_1, 2, 3, 4 \in \overline{1, 4}} \frac{1}{16^2 \cdot 4!} \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2} \varepsilon_{i_3} \varepsilon_{i_4} dy_{i_1} \otimes dy_{i_2} \otimes dy_{i_3} \otimes dy_{i_4},$$

where $\varepsilon_{1, 2, 3, 4} \in \{\pm 1\}, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = 1$, attached to the quartic forms

$$\hat{A}y^4 = \frac{1}{16^2} (\varepsilon_1 y_1 + \varepsilon_2 y_2 + \varepsilon_3 y_3 + \varepsilon_4 y_4)^4.$$

One can show that the minimization problem defined above is equivalent to the dual problem of maximizing

$$f(y) = \sum_{i_1, \dots, m = \overline{1, n}} A_{i_1 \dots i_m} y_{i_1} \dots y_{i_m} = \langle A, y^{*m} \rangle, \text{ for } \|y\|_2 = 1,$$

which turns out to be equivalent to the maximization of the Rayleigh quotient.

The best rank-one approximation has several notable applications in signal processing (e.g., [7, 8]).

Conclusions

The Berwald-Moor supersymmetric tensors is discussed in terms of multivariate homogeneous polynomials. We find the eigenvalues and eigenvectors, the recession and degeneracy vectors, characterization points, rank, asymptotic rays, base index and the best rank-one approximation. As well, several relations to the Berwald-Moor poly-angles and real-world applications are included.

Acknowledgement. The present work was developed as part of the Romanian Academy Grant No. 5 / 5.02.2008.

References

- [1] G. Bienvenu, L. Kopp, *Optimality of high-resolution array processing using the eigen- system approach*, IEEE Trans. ASSP 31 (1983), 1235–1248.
- [2] X. R. Cao, R. W. Liu, *General approach to blind source separation*, IEEE Trans. Signal Processing 44 (1996), 562–570.
- [3] J. F. Cardoso, *High-order contrasts for independent component analysis*, Neural Computation 11 (1999), 157–192.
- [4] P. Comon, *Block methods for channel identification and source separation*, In: IEEE Symposium on Adaptive Systems for Signal Process, Commun. Control (Lake Louise, Alberta, Canada, Oct 1–4, 2000. Invited Plenary Lecture), 87–92.
- [5] P. Comon, *Tensor diagonalization, a useful tool in signal processing*, In: Blanke M, Soderstrom T (eds.), IFAC-SYSID, 10th IFAC Symposium on System Identification (Copenhagen, Denmark, July 4–6, 1994. Invited Session), Vol. 1, 77–82.
- [6] R. Coppi, S. Bolasco (eds.), *Multiway Data Analysis* Amsterdam, Elsevier, 1989.
- [7] E. Kofidis, P. A. Regalia, *Tensor approximation and signal processing applications*, In: V. Olshevsky (ed.), Structured Matrices in Mathematics, Computer Science and Engineering, Vol I. Contemporary Mathematics, 280, Providence, AMS, 2001.
- [8] L. de Lathauwer, *First-order perturbation analysis of the best rank-($R_1; R_2; R_3$) approximation in multilinear algebra*, J. Chemometrics 18 (2004), 2–11.
- [9] L. de Lathauwer, B. de Moor, J. Vandewalle, *A multilinear singular value decomposition*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 21 (2000), 1253–1278.
- [10] D. G. Pavlov, *Four-dimensional time*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 31–39.
- [11] D. G. Pavlov, *Generalization of scalar product axioms*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 5–18.
- [12] L. Qi, *Eigenvalues of a real supersymmetric tensor*, Journal of Symbolic Computation 40 (2005), 1302–1324.
- [13] L. Qi, *Eigenvalues of an even-order real supersymmetric tensor*, Jour. Symb. Comp. 40 (2005), 1302–1324.
- [14] L. Qi, *Rank and eigenvalues of a supersymmetric tensor, the multivariate homogeneous polynomial and the algebraic hypersurface it defines*, Jour. Symb. Comp. 41 (2006), 1309–1327.
- [15] L. Qi, W. Sun, Y. Wang, *Numerical multilinear algebra and its applications*, Front. Math. China, 2 (4) (2007), 501–526.
- [16] L. R. Tucker, *Some mathematical notes on the three-mode factor analysis*, Psychometrika 31 (1966), 279–311.
- [17] S. A. Vorobyov, Y. Rong, N. D. Sidiropoulos et al., *Robust iterative fitting of multilinear models*, IEEE Trans. on Signal Processing 53 (2005), 2678–2689.

**Спектральные свойства и приложения
численной мультилинейной алгебры m -корневых структур**

В. Балан

*Политехнический университет Бухареста, факультет прикладных наук
vbalan@mathem.pub.ro*

В работе обсуждается случай метрики Бервальда-Моора 4 порядка с точки зрения сверхсимметрических тензоров и многомерных однородных полиномов. Определены собственные значения и собственные векторы; изучены векторы регрессии и вырождения, характеристические точки, ранг, асимптотические лучи, базисный индекс. Также получена наилучшая аппроксимация ранга 1, указаны связи с полиуглами пространства Бервальда-Моора, также дается краткий обзор применений к реальному миру.

Ключевые слова: вектор регрессии, вектор вырождения, характеристические точки, асимптотические лучи, наилучшая аппроксимация ранга 1.

MSC2000: 65F30, 15A18, 15A69.

К ВОПРОСУ ОБ АНИЗОТРОПНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

М. Л. Фильченков^{a, b1}, Ю. П. Лаптев^{a, c},
Р. Х. Сайбаталов^b, В. В. Плотников^a

Классические анизотропные космологические модели описываются с помощью уравнения Райчаудури для идеальной жидкости. Квантовые модели рассматриваются, используя уравнение Уилера-ДеВитта. Вычисляется вероятность рождения Вселенной для плоской модели с пылью и деситтеровским вакуумом. Рассматривается метрика типа Бервальда-Моора. Показано, что она сводится к произведению двух анизотропных римановых метрик.

Ключевые слова: анизотропные космологические модели, уравнение Райчаудури, уравнение Уилера-ДеВитта, метрика Бервальда-Моора.

Введение

Рассматриваются анизотропные космологические модели с идеальной жидкостью, учитывающие вращение и сдвиг [1]. Лагранжиан для анизотропных космологических моделей получен из уравнения Райчаудури при условии, что ускорение равно нулю. Изучены анизотропные квантовые космологические модели, для которых уравнение Уилера-ДеВитта выводится, следуя стандартному гамильтонову формализму. С учетом вращения и сдвига вычислены вероятности рождения (коэффициенты прохождения) для плоской Вселенной, заполненной пылью и деситтеровским вакуумом. Анализ анизотропии пространства-времени в рамках римановой геометрии, проведенный в предыдущей работе [2], обобщен на случай анизотропных космологических моделей, рассматриваемых в рамках финслеровой геометрии для метрик типа Бервальда-Моора.

1. Космологическая жидкость

Мы будем следовать гидродинамическому подходу, в котором вещество во Вселенной считается идеальной жидкостью.

Движение космологической жидкости описывается в общей теории относительности с помощью уравнения Райчаудури [3]

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 - A^i_{;i} + 2(\sigma^2 - \omega^2) = -\frac{4\pi G}{c^2}(\varepsilon + 3p), \quad (1)$$

где θ – скаляр расширения, A^i – 4-ускорение, σ – скаляр сдвига, ω – скаляр вращения, ε – плотность энергии, p – давление.

Метрика пространства-времени имеет вид

$$ds^2 = (N^2 - N_\alpha N^\alpha)dt^2 - 2N_\alpha dt dx^\alpha - \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где N – функция хода, $N_\alpha = c g_{0\alpha}$ – функция сдвига и перекрестный член метрики $g_{0\alpha}$, удовлетворяющий соотношению $g^{00} = 1 - g_{0\alpha} g^{0\alpha}$, $\gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} = a^6$, $a(t)$ – масштабный фактор. Величины θ , A^i , σ , ω имеют вид

$$\theta = u^i_{;i}, \quad A^i = u^i_{;k} u^k, \quad \omega^2 = \frac{1}{2} \omega_{ik} \omega^{ik}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ik} \sigma^{ik},$$

¹ fmichael@mail.ru ^a Институт гравитации и космологии, Российский университет дружбы народов, Москва; ^b Фридмановская лаборатория теоретической физики, Санкт-Петербург; ^c Кафедра физики, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана.

где u_i – 4-скорость. Условия ортогональности имеют вид

$$u_i \omega_{ik} = 0, \quad u^i \sigma_{ik} = 0, \quad u^i A_i = 0.$$

Из закона сохранения $T^i_k = 0$ для тензора энергии-импульса

$$T^{ik} = (p + \varepsilon) u^i u^k - p g^{ik}, \quad (3)$$

при условии $\theta = \frac{3\dot{a}}{a}$, которое справедливо, если $\sigma_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = 0$, где $n^\alpha n_\alpha = 1$, получаем следующее выражение для дивергенции 4-ускорения

$$A^i_{;i} = w(1 - g^{00})(\dot{\theta} + \theta^2), \quad g^{00} = \text{const}, \quad (4)$$

где $1 - g^{00}$ характеризует отклонение от фридмановской геометрии. Уравнение состояния $p = w\varepsilon$, где $w = \text{const}$.

2. Гамильтонов формализм

Лагранжиан для идеальной жидкости дается формулой

$$\mathcal{L} = \frac{3p - \varepsilon}{2} N a^3. \quad (5)$$

Считаем космологическую материю двухкомпонентной средой, состоящей из деситтеровского вакуума и пыли с уравнениями состояния соответственно $p = -\varepsilon$ и $p = 0$. Для пыли и деситтеровского вакуума $A^i_{;i} = 0$. Уравнение Райчаудури в этом случае принимает вид

$$\frac{\ddot{a}c^2}{N^2} = -\frac{4\pi G}{3c}(\varepsilon + 3p)a + \frac{2}{3}(\omega^2 - \sigma^2). \quad (6)$$

Выводя ε и p из (5), получаем

$$\mathcal{L} = \frac{a\dot{a}^2}{2N} - \frac{kNa}{2} + \frac{4\pi G\varepsilon}{3c^4} Na^3 + \frac{2Na}{3c^2} \int (\omega^2 - \sigma^2) ada. \quad (7)$$

Гамильтониан $\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} \dot{a} - \mathcal{L}$ сводится к

$$\mathcal{H} = N \left[\frac{p_a^2}{2a} + \frac{ka}{2} - \frac{4\pi G\varepsilon}{3c^4} a^3 - \frac{2a}{3c^2} \int (\omega^2 - \sigma^2) ada \right], \quad (8)$$

где $p_a = \frac{a\dot{a}}{N}$. Так как $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} = 0$, $H = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N} = 0$, мы имеем гамильтонову связь

$$H = \frac{p_a^2}{2a} + \frac{ka}{2} - \frac{4\pi G\varepsilon}{3c^4} a^3 - \frac{2a}{3c^2} \int (\omega^2 - \sigma^2) ada = 0. \quad (9)$$

3. Квантовая космология

Из факта расширения Вселенной следует, что в прошлом она имела очень малый размер и должна рассматриваться в рамках квантовой модели. В 1973 г. физики Э. П. Трайен (США) и П. И. Фомин (СССР) независимо друг от друга выдвинули предположение о том, что Вселенная возникла из вакуума в результате квантовой флуктуации. Так родилось новое научное направление – квантовая космология. В 1982 г. А. Виленкин (США) предложил интерпретировать спонтанное квантовое рождение Вселенной из деситтеровского

вакуума (см. предыдущий параграф) как туннельный эффект, подобный альфа-распаду атомного ядра.

Квантовая космология базируется на подходе, получившем название квантовой геометродинамики (КГД). Квантовая геометродинамика представляет собой квантование геометрии в целом. Основное уравнение КГД, позволившее объединить общую теорию относительности и квантовую теорию, называется уравнением Уилера-ДеВитта (УДВ). Ниже приводится алгоритм получения УДВ, основанный на стандартном гамильтоновом формализме.

Заменим p_a в (9) на оператор $\hat{p}_a = \frac{l_{pl}^2}{i} \frac{d}{da}$. Тогда получим оператор Гамильтона, который действует на волновую функцию Вселенной ψ , т.е. $\hat{H}\psi = 0$, что сводится к уравнению Уилера-ДеВитта [4]

$$\frac{d^2\psi}{da^2} - V(a)\psi = 0, \quad (10)$$

которое описывает раннюю Вселенную в рамках квантовой космологии, где потенциал

$$V(a) = \frac{1}{l_{pl}^4} \left[ka^2 - \frac{8\pi G\varepsilon}{3c^4} a^4 - \frac{4a^2}{3c^2} \int (\omega^2 - \sigma^2) ada \right], \quad (11)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sum_{n=0,3} B_n \left(\frac{r_0}{a} \right)^n, \quad B_0 + B_3 = 1. \quad (12)$$

Здесь r_0 и ε_0 – соответственно деситтеровский радиус и плотность энергии.

Для пыли имеем

$$\omega = \frac{Jc^2}{\varepsilon a^5}, \quad (13)$$

где $J = const$ (закон сохранения углового момента),

$$\sigma = \frac{\Sigma}{a^3}, \quad (14)$$

где $\Sigma = const$. Для деситтеровского вакуума $\omega = \sigma = 0$ и $g^{00} = 1$.

Потенциал может быть представлен в виде

$$V(a) = f_1 a^2 + f_2 a^4 + f_3 a + f_4 + f_5 a^{-2}, \quad (15)$$

где

$$f_1 = \frac{k}{l_{pl}^4} (k = 0, \pm 1), \quad f_2 = -\frac{B_0}{r_0^2 l_{pl}^4}, \quad f_3 = -\frac{B_3 r_0}{l_{pl}^4},$$

$$f_4 = \frac{2c^2 J_3^2}{3\varepsilon_0^2 l_{pl}^4 B_3^2 r_0^6}, \quad f_5 = -\frac{\Sigma_3^2}{3c^2 l_{pl}^4}.$$

Вероятность рождения Вселенной (коэффициент прохождения для туннелирования через потенциальный барьер V) дается формулой Гамова, которая вблизи максимума потенциала a_m принимает вид

$$D = \exp \left\{ -\frac{\pi \sqrt{2V(a_m)}}{\sqrt{-V''(a_m)}} \right\}, \quad (16)$$

где $V'(a_m)$. Для плоской модели ($k = 0$) имеем

$$a_m = \sqrt[3]{-\frac{f_3}{8f_2} + \sqrt{\frac{1}{64} \left(\frac{f_3}{f_2} \right)^2 + \frac{f_5}{2f_2}}}. \quad (17)$$

Вычисляя $V_m = V(a_m)$ and $V_m'' = V_m''(a_m)$, получаем

$$D = \exp \left\{ -\pi \sqrt{2} \frac{f_2 a_m^4 + f_3 a_m + f_5 a_m^{-2} + f_4}{\sqrt{-12 f_2 a_m^2 - 6 f_5 a_m^{-4}}} \right\}. \quad (18)$$

Таким образом, деситтеровский вакуум, пыль и сдвиг увеличивают коэффициент прохождения D , а вращение уменьшает его.

При $f_2 f_5 \gg f_3^2$ максимум барьера сводится к

$$a_m = \sqrt[6]{\frac{f_5}{2 f_2}}, \quad (19)$$

а коэффициент прохождения к

$$D = \exp \left\{ -\frac{2^{\frac{1}{6}} \pi}{3^{\frac{1}{3}}} \frac{f_4}{\sqrt[6]{-f_2^2 f_5}} \right\}. \quad (20)$$

Угловой момент J_3 квантован, что неявно следует из формулы Бора-Зоммерфельда

$$2 \int_0^{a_0} \sqrt{-V(a)} da = \pi l, \quad (21)$$

где $V(a_0) = 0$, $a_0 < a_m$, и l – орбитальное квантовое число. Уровни J_3 , существующие при $|f_5| \geq \frac{1}{4}$ могут быть оценены по формуле

$$2 a_m \sqrt{f_4} = \pi l \quad (22)$$

при условии, что $l \ll \frac{\sqrt{|f_5|}}{2\pi}$. Заметим, что параметр f_4 в формулах (20) и (22) пропорционален J_3^2 .

4. Метрика типа Бервальда-Моора

В заключение рассмотрим метрику типа Бервальда-Моора

$$ds^4 = (cdt + Adx + Bdy + Cdz)(cdt + Ddx + Edy + Fdz) \\ (cdt + Gdx + Hdy + Idz)(cdt + Kdx + Ldy + Mdz), \quad (23)$$

где величины $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M$, вообще говоря, являются функциями времени и пространственных координат, в отличие от постоянных, равных ± 1 для метрики Бервальда-Моора. Сравним метрику с произведением двух римановых анизотропных метрик типа

$$ds_A^2 = c^2 dt^2 - 2g_{0\alpha} c dt dx^\alpha - \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (24)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, выведенных из (2), переопределяя время t . Приравнявая (24) к билинейной форме

$$ds^2 = (cdt + Adx + Bdy + Cdz)(cdt + Ddx + Edy + Fdz), \quad (25)$$

получим

$$A = -g_{01} \pm \sqrt{g_{01}^2 + \gamma_{11}}, \\ B = -g_{02} \pm \sqrt{g_{02}^2 + \gamma_{22}}, \\ C = -g_{03} \pm \sqrt{g_{03}^2 + \gamma_{33}}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} D &= -g_{01} \mp \sqrt{g_{01}^2 + \gamma_{11}}, \\ E &= -g_{02} \mp \sqrt{g_{02}^2 + \gamma_{22}}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$F = -g_{03} \mp \sqrt{g_{03}^2 + \gamma_{33}},$$

$$\gamma_{12} = \sqrt{(g_{01}^2 + \gamma_{11})(g_{02}^2 + \gamma_{22})} - g_{01}g_{02}, \quad (28)$$

$$\gamma_{13} = \sqrt{(g_{01}^2 + \gamma_{11})(g_{03}^2 + \gamma_{33})} - g_{01}g_{03}, \quad (29)$$

$$\gamma_{23} = \sqrt{(g_{02}^2 + \gamma_{22})(g_{03}^2 + \gamma_{33})} - g_{02}g_{03}. \quad (30)$$

Наложим следующие условия на коэффициенты

$$\begin{aligned} G &= A, \quad D = K = -A, \quad E = B, \\ H &= L = -B, \quad M = C, \quad F = I = -C, \end{aligned} \quad (31)$$

которые сводят (23) к стандартному виду метрики Бервальда-Моора (см., например, [5])

$$\begin{aligned} ds^4 &= (cdt + dx + dy + dz)(cdt - dx + dy - dz) \\ &\quad (cdt + dx - dy - dz)(cdt - dx - dy + dz) \end{aligned} \quad (32)$$

при условии, что $A = B = C = 1$. Из формул (28) – (31) получим

$$g_{01} = g_{03} = \gamma_{12} = \gamma_{23} = 0, \quad \gamma_{13} = \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{33}}, \quad \gamma_{22} = -g_{02}^2. \quad (33)$$

Тогда формулы (26), (27) примут вид

$$\begin{aligned} A &= \pm\sqrt{\gamma_{11}}, \quad B = -g_{02}, \quad C = \pm\sqrt{\gamma_{33}}, \\ D &= \mp\sqrt{\gamma_{11}}, \quad E = -g_{02}, \quad F = \mp\sqrt{\gamma_{33}}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} G &= \pm\sqrt{\gamma_{11}}, \quad H = g_{02}, \quad I = \mp\sqrt{\gamma_{33}}, \\ K &= \mp\sqrt{\gamma_{11}}, \quad L = g_{02}, \quad M = \pm\sqrt{\gamma_{33}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Анизотропная метрика (24) сводится к

$$ds_A^2 = c^2 dt^2 - 2g_{02}cdtdy - \gamma_{11}dx^2 + g_{02}^2 dy^2 - \gamma_{33}dz^2 - 2\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{33}}dxdz. \quad (36)$$

Отсюда следует, что метрика типа Бервальда-Моора может быть сведена к произведению двух римановых анизотропных метрик: одна дается формулой (36), а другая следующей формулой

$$ds_{A'}^2 = c^2 dt^2 + 2g_{02}cdtdy - \gamma_{11}dx^2 + g_{02}^2 dy^2 - \gamma_{33}dz^2 + 2\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{33}}dxdz. \quad (37)$$

Так как определитель пространственной части $\gamma = \det \gamma_{\alpha\beta} = 0$ для метрик ds_A^2 и $ds_{A'}^2$, то они могут сводиться к виду

$$ds_A^2 = c^2 dT^2 - dL^2, \quad ds_{A'}^2 = c^2 dT^2 - dl^2, \quad (38)$$

где

$$cdT = cdt - g_{02}dy, \quad dL = \sqrt{\gamma_{11}}dx + \sqrt{\gamma_{33}}dz, \quad dl = \sqrt{\gamma_{11}}dx - \sqrt{\gamma_{33}}dz.$$

Метрика типа Бервальда-Моора принимает вид

$$ds^4 = (c^2 dT^2 - dL^2)(c^2 dT^2 - dl^2). \quad (39)$$

Таким образом, метрика типа Бервальда-Моора представляет собой "пересечение" двух римановых метрик с нулевым определителем γ , имеющих одну временную и одну пространственную координату. Сведение финслеровых метрик к произведению двух анизотропных римановых метрик с ненулевым определителем γ будет предметом нашей следующей работы.

Заключение

Гамильтонова связь выведена из уравнения Райчаудури при условии, что дивергенция ускорения равна нулю, что позволяет рассматривать двухкомпонентную модель с пылью и деситтеровским вакуумом. Уравнение Уилера-ДеВитта выведена, следуя стандартному гамильтонову формализму, не зная явного вида метрики пространства-времени. В явном виде получена формула для квантования углового момента пыли. Вычислена вероятность рождения Вселенной в зависимости от относительных вкладов компонент в полную плотность энергии на горизонте де Ситтера. Метрика типа Бервальда-Моора представлена в виде произведения двух римановых анизотропных метрик с нулевым определителем пространственной метрики.

Литература

- [1] M. L. Fil'chenkov, R. Kh. Saibatalov, *Grav. Cosmol.*, Vol. 11, 2005, p. 116.
- [2] М. Л. Фильченков, Ю. П. Лаптев, *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, № 2 (8), том 4, 2007, с. 71.
- [3] С. Хокинг, Дж. Эллис "Крупномасштабная структура пространства-времени", Изд. "Мир": М. 1977.
- [4] A. Vilenkin, *Phys. Rev.*, Vol. D50, 1994, p. 2581.
- [5] Р. Г. Зарипов, *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, № 2 (8), том 4, 2007, с. 24.

On the question of anisotropic cosmological models

M. L. Filchenkov^{a,b}, Yu. P. Laptev^{a,c}, R. H. Saybatalov^b, V. V. Plotnikov^a

a – Institute of Gravitation and Cosmology, Peoples Friendship University, Moscow;

b – Laboratory of Theoretical Physics, Sankt-Peterbourg;

c – MSTU n. a. N. E. Bauman

fmichael@mail.ru

The classical anisotropic cosmological models are described by means of the Raychaudhuri equation for an ideal fluid. The quantum models are investigated using the Wheeler-de Witt equation. The probability of the emerging Universe is calculated, in the flat model with dust and de Sitter vacuum. A metric of Berwald-Moor type is examined. It is shown that it reduces to the product of two anisotropic Riemannian metrics.

Key-words: anisotropic cosmological models, Berwald-Moor metric.

MSC: 83F05, 53B40.

ОБ ОДНОВРЕМЕННОСТИ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ИЗОТРОПИИ В ФИНСЛЕРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Р. Г. Зарипов

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия

zaripov@mail.knc.ru

Обсуждается вопрос об одновременности разноместных событий и перехода между стандартной синхронизацией часов по Пуанкаре и нестандартной синхронизацией часов по Рейхенбаху-Грюнбауму. Приводится метрическая функция для финслерова пространства-времени с пространственной изотропией со стандартной синхронизацией часов и находятся новые преобразования времени и координат в векторном виде.

Ключевые слова: одновременность, синхронизация часов, Финслерова геометрия, метрическая функция.

1. Введение

А. Пуанкаре в своей фундаментальной статье [1] в 1898 году по физическим основам временных отношений в трехмерном пространстве Евклида впервые после И. Ньютона раскрыл содержание понятия одновременности в инерциальной системе отсчета с причинно-следственными связями между разноместными событиями. В качестве взаимосвязи используется световой сигнал, являющийся наиболее быстрым процессом установления причинной цепи (или передачи информации) в отличие от ньютоновской механики, где полагается наличие бесконечной скорости передачи сигнала.

Рассмотрим подробное изложение процедуры синхронизации часов в инерциальной системе отсчета. Пусть в глобальном трехмерном пространстве происходят события в точке A начала координат с $\mathbf{r} = 0$ и произвольной точке B с $\mathbf{r} = (x, y, z)$ для твердого тела длиной $|\mathbf{r}|$. В этих точках координация во времени определяется показаниями часов, а координация в пространстве – масштабами расстояния при помощи линеек. Установим отношение метрической одновременности разноместных событий *по определению* в виде равенства для координатных времен

$$t^B(\mathbf{r}) = t_1^A(0) + \frac{1}{2} [t_2^A(0) - t_1^A(0)], \quad (1)$$

где $t_1^A(0)$ – время отправления сигнала из точки A , $t^B(\mathbf{r})$ – время прибытия сигнала в точку B , $t_2^A(0)$ – время прибытия сигнала, мгновенно отраженного от точки B в точку A . Тем самым достигается стандартная синхронизация часов с единым временем в этих точках, которая означает равенство времени $t^B(\mathbf{r})$ значению времени, определяемому величиной $[t_1^A(0) + t_2^A(0)] / 2$ посередине временного интервала $[t_2^A(0) - t_1^A(0)]$ для причинно-несвязанных событий или среднему арифметическому от моментов времен в точке A . События с этими значениями времен являются абсолютно одновременными *по определению*. Синхронность часов будет удовлетворять во первых условию симметричности относительно точек A и B , во вторых условию транзитивности относительно трех точек и в третьих, согласно опыту, условию постоянства "средней" скорости света вдоль замкнутого пути

$$t_2^A(0) - t_1^A(0) = \frac{2|\mathbf{r}|}{c_0} \quad (2)$$

с $c_0 = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек. По Пуанкаре синхронизация часов происходит в евклидовом пространстве с $|\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, то есть также *по определению* полагается равенство масштабов расстояния, измеряющих длину твердого тела в прямом и обратном направлениях.

Таким образом, согласно (1) с учетом (2), имеет место соотношение для промежутка времени $t^B(\mathbf{r}) - t_1^A(0) = t_2^A(0) - t^B(\mathbf{r})$, означающее равенство $c_+ = c_- = c_0$ однонаправленных скоростей света в прямом и обратном направлениях (или изотропность скорости света) относительно используемых точек твердого тела, и выражения для характеристик

$$t_1^A(0) = t^B(\mathbf{r}) - \frac{|\mathbf{r}|}{c_0}, \quad t_2^A(0) = t^B(\mathbf{r}) + \frac{|\mathbf{r}|}{c_0}, \quad (3)$$

равные наблюдаемым значениям времени в начале координат. При переходе к псевдоевклидовой четырехмерной геометрии Минковского [2] определяются собственное время в точке B , как среднее геометрическое от моментов времен в точке A , и элемент длины

$$t_0^B(\mathbf{r}) = [t_1^A(0) t_2^A(0)]^{1/2} = \left(t^2 - \frac{\mathbf{r}^2}{c_0^2} \right)^{1/2}, \quad (4)$$

$$s_0 = c_0 t_0 = (c_0^2 t^2 - \mathbf{r}^2)^{1/2}$$

с $t = t^B(\mathbf{r})$ и $t_0 = t_0^B(\mathbf{r})$. Группа преобразований координатного времени и пространственных координат, которая оставляет форм-инвариантным элемент длины, а также другие функции, определена впервые А. Пуанкаре [3]. Дальнейший переход к локальному риманову многообразию с квадратичной формой $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ на координатной сетке (x_0, x, y, z) с $x_0 = c_0 t$ и сигнатурой $(+, -, -, -)$ позволяет включить гравитацию зависимостью метрического тензора от тензора энергии-импульса на основе уравнений Гильберта-Эйнштейна с тензором кривизны $R_{ijkl} \neq 0$. Такое историческое развитие и имела современная физика (в смысле специальной и общей теории относительности).

Согласно Г. Рейхенбаху [4] и А. Грюнбауму [5] причинно-несвязанные события в точке A , происходящие во временном интервале $[t_2^A(0) - t_1^A(0)]$ являются топологически одновременными событиями в точке B . Выбор любого события внутри указанного интервала, *по определению*, дает исходную метрическую одновременность события в точке A с событием в точке B , что определяет единое время вдоль твердого тела или является критерием нестандартной синхронизации часов. Остальные определения остаются в силе. Такой подход основывается на выборе значения ξ_{AB} в равенстве

$$t^B(\mathbf{r}) = t_1^A(0) + \xi_{AB} [t_2^A(0) - t_1^A(0)], \quad (5)$$

где временной порядок чередования событий

$$t_1^A(0) < t^B(\mathbf{r}) < t_2^A(0) \quad (6)$$

приводит к неравенству $0 < \xi_{AB} < 1$. Момент времени $t^B(\mathbf{r})$ равняется некоторому значению внутри временного интервала $[t_2^A(0) - t_1^A(0)]$ для причинно-несвязанных событий или взвешенному среднему $t^B(\mathbf{r}) = p_1 t_1^A(0) + p_2 t_2^A(0)$ с $p_1 = \xi_{BA}$ и $p_2 = \xi_{AB}$ от моментов времен в точке A . Синхронность часов так же, как при стандартной синхронизации часов по Пуанкаре ($\xi_{AB} = \xi_{BA} = 1/2$), удовлетворяет условию симметричности с $\xi_{AB} + \xi_{BA} = 1$ и транзитивности. Выражения характеристик примут следующий вид

$$t_1^A(0) = t^B(\mathbf{r}) - \frac{|\mathbf{r}|}{c_+}, \quad t_2^A(0) = t^B(\mathbf{r}) + \frac{|\mathbf{r}|}{c_-}, \quad (7)$$

с анизотропными однонаправленными координатными скоростями сигнала вдоль радиус-вектора

$$c_+ = \frac{c_0}{1 + \varepsilon_r}, \quad c_- = \frac{c_0}{1 - \varepsilon_r}, \quad -1 < \varepsilon_r < 1, \quad (8)$$

где параметр анизотропии вдоль вектора $\mathbf{r}$ есть $\varepsilon_r = 2\xi_{AB} - 1$. Собственное время определяется выражением

$$t_0^B(\mathbf{r}) = [t_1^A(0) t_2^A(0)]^{1/2} = \left[t(\mathbf{r})^2 - \left(\frac{1}{c_+} - \frac{1}{c_-} \right) t|\mathbf{r}| - \frac{\mathbf{r}^2}{c_+ c_-} \right]^{1/2}, \quad (9)$$

а элемент длины имеет значение

$$s_0 = c_0 t_0 = [(c_0 t - \varepsilon_r |\mathbf{r}|)^2 - \mathbf{r}^2]^{1/2}. \quad (10)$$

Параметр анизотропии ε_r равняется, согласно работе [6], выражению

$$\varepsilon_r = \frac{(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} = \frac{\varepsilon_x x + \varepsilon_y y + \varepsilon_z z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \varepsilon_x \cos \alpha + \varepsilon_y \cos \beta + \varepsilon_z \cos \gamma, \quad (11)$$

где вектор анизотропии $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ с $|\boldsymbol{\varepsilon}| \leq 1$ дает выделенное направление и углы отсчитываются от осей координат до радиус-вектора. Такой результат был получен при рассмотрении движения света вдоль замкнутого пути от точки $A(0, 0, 0)$ к $B(x, 0, 0)$, от $B(x, 0, 0)$ к $C(x, y, 0)$, от $C(x, y, 0)$ к $D(x, y, z)$, от $D(x, y, z)$ к $A(0, 0, 0)$ параллельно осям координат, а также условию постоянства "средней" скорости света вдоль этого пути, что записывается следующим равенством

$$\frac{x}{c_x} + \frac{y}{c_y} + \frac{z}{c_z} + \frac{|\mathbf{r}|}{c_-} = \frac{x + y + z + |\mathbf{r}|}{c_0}. \quad (12)$$

Здесь $c_x = c_0 / (1 + \varepsilon_x)$, $c_y = c_0 / (1 + \varepsilon_y)$, $c_z = c_0 / (1 + \varepsilon_z)$ есть однонаправленные скорости света вдоль координатных осей в прямом направлении. В итоге выражение (10) примет окончательный вид

$$s_0 = c_0 t_0 = \{[c_0 t - (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r})]^2 - \mathbf{r}^2\}^{1/2}. \quad (13)$$

В работе [7] приводится доказательство того, что в опыте астронома О. К. Рёмера в 1676 году по изменению промежутков времени между затмениями спутников Юпитера была измерена именно "средняя" скорость света вдоль замкнутого пути. Там же рассматривается примечательный пример нестандартной синхронизации часов, расположенных в вершинах квадрата.

Интересный вариант представлен в работе [8], где изотропность скорости света сохраняется, однако имеют место анизотропные масштабы расстояний в прямом и обратном направлениях, то есть вместо (7) определяются следующие соотношения

$$t_1(0) = t(\mathbf{r}) - \frac{|\mathbf{r}|_+}{c_0}, \quad t_2(0) = t(\mathbf{r}) + \frac{|\mathbf{r}|_-}{c_0}, \quad (14)$$

$$|\mathbf{r}|_+ + |\mathbf{r}|_- = 2|\mathbf{r}|$$

и получены преобразования времени и одномерного расстояния. Дальнейшее рассмотрение в этом направлении приводится в работе [9].

Из изложенного следует, что определяется координатное время t из показаний часов и, соответственно, координатная скорость $\mathbf{u} = \mathbf{r}/t$. Однако, в современной физике даются следующие определения физического времени, физического расстояния и физической скорости

$$\begin{aligned} T &= t - \varepsilon_r \frac{|\mathbf{r}|}{c_0} = t - \frac{(\varepsilon \mathbf{r})}{c_0}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}, \\ U &= \frac{\mathbf{R}}{T} = \frac{\mathbf{u}}{1 - \varepsilon_r |\mathbf{u}|/c_0} = \frac{\mathbf{u}}{1 - (\varepsilon \mathbf{u})/c_0}. \end{aligned} \quad (15)$$

Такие определения означают переход от нестандартной синхронизации к стандартной синхронизации часов по Пуанкаре с изотропной скоростью света и к собственному времени с элементом длины

$$t_0 = \left(T^2 - \frac{\mathbf{R}^2}{c_0^2} \right)^{1/2}, \quad s_0 = c_0 t_0 = [c_0^2 T^2 - |\mathbf{R}|^2]^{1/2}. \quad (16)$$

не выбором параметра анизотропности $\varepsilon_r = 0$ по определению, а переходом к новой координатной системы событий. При этом собственное трехмерное пространство Евклида уже определяется как множество одновременных событий по физическому времени T , включающее в себя координатное время и пространственные координаты. При $T = 0$ из (15) следует уравнение гиперповерхности $t - (\varepsilon \mathbf{u})/c_0 = 0$ для $s_0^2 < 0$ с неодновременными координатными временами. С математической точки зрения переход между синхронизациями часов означает, например, в двумерном случае с $(c_0 t, x)$ переход от декартовой системы координат к косоугольной, что и реализуется при преобразованиях Лоренца между инерциальными системами отсчетов. Напомним также, что преобразования Галилея также дают косоугольную систему координат. Неизменность декартовой системы координат при соответствующих преобразованиях приводит к евклидовой двумерной геометрии.

Итак, переход от координатного времени t к физическому T сохраняет во всех инерциальных системах отсчетов собственное трехмерное пространство Евклида и инвариантность скорости света. В псевдоевклидовом пространстве Минковского с элементом длины (4) физическое время и физическая скорость в трехмерном пространстве Евклида совпадают, соответственно, с их координатными величинами.

В работах [10, 11] приводится расширение нестандартной синхронизации часов, при котором в каждой инерциальной системе отсчета имеет место свое значение постоянной "средней" скорости вдоль замкнутого пути $c = c_0 n \left(\lim_{c_0 \rightarrow \infty} n = 1 \right)$. Такая общая синхронизация часов приводит к следующим выражениям собственного времени и элемента длины

$$\begin{aligned} t_0 &= \sqrt{c/c_0} \{ [t - (\varepsilon \mathbf{r})/c]^2 - \mathbf{r}^2/c^2 \}^{1/2}, \\ s_0 &= c_0 t_0 = \left\{ [\sqrt{n} c_0 t - (\varepsilon \mathbf{r})/\sqrt{n}]^2 - \mathbf{r}^2/n \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Не останавливаясь на рассмотрении подходов, отметим некоторые обобщения излагаемой теории на финслеровы геометрии.

В работе [12] используется собственное время в двумерном случае, которое для четырехмерного пространства-времени имеет вид

$$t_0 = n^{1/2} \left(\frac{t - |\mathbf{r}|/c_+}{t + |\mathbf{r}|/c_-} \right)^{r/2} \left[t^2 - \left(\frac{1}{c_+} - \frac{1}{c_-} \right) t |\mathbf{r}| - \frac{\mathbf{r}^2}{c_+ c_-} \right]^{1/2} \quad (18)$$

с односторонними скоростями $c_+ = c/(1 + \varepsilon)$ и $c_- = c/(1 - \varepsilon)$ при общей синхронизации часов [10, 11], а также с тремя скалярными параметрами r , ε и $n = c/c_0$. При

$r = (c_+ - c_-) / (c_+ + c_-) = -\varepsilon$ и $c_+ c_- = c_0^2$ собственное время без множителя n запишется так [13]

$$t_0 = \left(\frac{t - |\mathbf{r}|/c_+}{t + |\mathbf{r}|/c_-} \right)^{-\varepsilon/2} \left(t^2 - \frac{2\varepsilon t |\mathbf{r}|}{c} - \frac{\mathbf{r}^2}{c_0^2} \right)^{1/2}, \quad (19)$$

где $c_+ = c_0 n / (1 + \varepsilon)$, $c_- = c_0 n / (1 - \varepsilon)$ есть однонаправленные скорости сигнала и "средняя" скорость вдоль замкнутого пути равняется $c = c_0 n$ с $n = (1 - \varepsilon^2)^{1/2}$.

Оба выражения (18) и (19) нарушают опытный факт условия постоянства "средней" скорости света вдоль замкнутого пути в трехмерном пространстве так как не имеет место равенство (12) при $\varepsilon_r = \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon$. Единственный релятивистский подход, в котором отсутствует нарушение указанного опытного факта, соответствует рассматриваемому пространству-времени с одной пространственной координатой [12], поскольку реализуется случай параллельных векторов. Также добавим, что финслерова двумерная геометрия с метрической функцией вида (18) впервые рассматривалась для группы параметризованных энтропий и информации различия в теории информации и в статистической механике неэкстенсивных (неаддитивных) систем, а результаты исследований обобщены в [14, 15]. Примечательно, что роль аналога постоянной скорости света c_0 играет величина $k / (1 - q)$, которая зависит от постоянной Больцмана и действительного числа q . Роль аналога скорости света играет параметризованная энтропия. Параметр q связан с фрактальной размерностью для фрактальных систем, а для неэкстенсивных систем характеризует степень их неаддитивности в свойстве композиции параметризованных энтропий с квадратичной нелинейностью.

Указанный фундаментальный недостаток этих теорий для релятивистской интерпретации устраняется, поскольку выражения (18) и (19) всегда можно привести к виду с одним параметром и элементом длины

$$T_0 = \left(\frac{T - |\mathbf{R}|/c_0}{T + |\mathbf{R}|/c_0} \right)^{r/2} \left(T^2 - \frac{\mathbf{R}^2}{c_0^2} \right)^{1/2}, \quad (20)$$

$$s_0 = c_0 T_0 = \left(\frac{c_0 T - |\mathbf{R}|}{c_0 T + |\mathbf{R}|} \right)^{r/2} (c_0^2 T^2 - \mathbf{R}^2)^{1/2} = (c_0 T - |\mathbf{R}|)^{1+r/2} (c_0 T + |\mathbf{R}|)^{1-r/2}$$

при переходе к физическому времени и физическому расстоянию с изменением масштабов

$$T = t - \varepsilon \frac{|\mathbf{r}|}{c}, \quad |\mathbf{R}| = \frac{c_0}{c} |\mathbf{r}|, \quad \mathbf{R} = \frac{c_0}{c} \mathbf{r}, \quad (21)$$

а для (18) еще добавляется физическое собственное время $T_0 = c_0 t_0 / c$. В итоге имеет место стандартная синхронизация часов по Пуанкаре с изотропной скоростью света, при которой в выражении (20) имеется один скалярный параметр r .

Возникает вопрос о преобразованиях физического времени и физических пространственных координат, которые оставляют форм-инвариантным собственное время (20) или соответствующую метрическую функцию $F = s_0 = c_0 T_0$. В известных преобразованиях [13] комформный множитель в (19) или в (20)

$$\lambda = \left(\frac{T - |\mathbf{R}|/c_0}{T + |\mathbf{R}|/c_0} \right)^{r/2} \quad (22)$$

не обладает групповыми свойствами для трехмерного случая. Этот факт препятствует нахождению искомым преобразований с тремя пространственными координатами, о чем подчеркивалось в [12].

Поэтому возникает необходимость нахождения такого выражения метрической функции в финслеровой пространстве-времени с пространственной изотропностью, чтобы комформный множитель имел групповые свойства при переходах между инерциальными системами отсчетов.

2. Преобразования времени и пространственных координат

Рассмотрим инерциальную систему отсчета (K) со стандартной синхронизацией часов для $c = c_0$ и исходной метрической функцией

$$F = s = ct_0 = \lambda (c^2 t^2 - \mathbf{r}^2)^{1/2}, \quad (23)$$

где наличие конформного множителя $\lambda = \lambda(t, x, y, z)$, обладающего групповыми свойствами, обобщает метрическую функцию пространства-времени Минковского.

Для нахождения преобразований времени и пространственных координат при форм-инвариантности метрической функции (23) остановимся сначала подробно на случае псевдоевклидовой геометрии. Известные преобразования времени и компонент радиус-вектора между инерциальными системами отсчетов (K) и (K') , движущихся с относительной скоростью $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$ для начала координат трехмерного пространства Евклида, записываются так

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_{\parallel} &= \frac{1}{N(|\mathbf{v}|/c)} (\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t), \\ t' &= \frac{1}{N(|\mathbf{v}|/c)} \left(t - \frac{|\mathbf{v}|}{c^2} |\mathbf{r}_{\parallel}| \right), \\ \mathbf{r}'_{\perp} &= \mathbf{r}_{\perp}, \quad N(|\mathbf{v}|/c) = (1 - \mathbf{v}^2/c^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\mathbf{r}_{\parallel}$ и $\mathbf{r}_{\perp}$ есть компоненты радиус-вектора параллельная и перпендикулярная скорости $\mathbf{v}$, соответственно. Поскольку имеют место равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp}, \\ \mathbf{r}_{\parallel} &= \frac{(\mathbf{r}\mathbf{v})\mathbf{v}}{\mathbf{v}^2}, \quad \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel} = \mathbf{r} - \frac{(\mathbf{r}\mathbf{v})\mathbf{v}}{\mathbf{v}^2}, \end{aligned} \quad (25)$$

то, согласно (24), преобразования принимают общепринятый вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}t}{N(|\mathbf{v}|/c)} + \frac{1}{\mathbf{v}^2} \left(\frac{1}{N(|\mathbf{v}|/c)} - 1 \right) (\mathbf{r}\mathbf{v})\mathbf{v} = \frac{1}{N(|\mathbf{v}|/c)} \left\{ \mathbf{r} - \mathbf{v}t + \frac{1}{c^2} \frac{[\mathbf{v}[\mathbf{v}\mathbf{r}]]}{[1 + N(|\mathbf{v}|/c)]} \right\}, \\ t' &= \frac{1}{N(|\mathbf{v}|/c)} \left[t - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}\mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Приведенные преобразования в векторной форме оставляют форм-инвариантным элемент длины

$$(c_0^2 t'^2 - \mathbf{r}'^2)^{1/2} = (c_0^2 t^2 - \mathbf{r}^2)^{1/2} \quad (27)$$

и были впервые получены в работе [16].

Из формул (24) для компонент $\mathbf{r}'_{\parallel}$ и $\mathbf{r}_{\parallel}$ вытекают следующие преобразования их модулей

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'_{\parallel}| &= \frac{1}{N(|\mathbf{v}|/c)} (|\mathbf{r}_{\parallel}| - |\mathbf{v}|t), \\ t' &= \frac{1}{N(|\mathbf{v}|/c)} \left(t - \frac{|\mathbf{v}| |\mathbf{r}_{\parallel}|}{c^2} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

из которых получим соотношения

$$\begin{aligned} t - \frac{|\mathbf{r}_{\parallel}|}{c} &= \frac{1 + |\mathbf{v}|/c}{N(|\mathbf{v}|/c)} \left(t - \frac{|\mathbf{r}_{\parallel}|}{c} \right), \\ t + \frac{|\mathbf{r}_{\parallel}|}{c} &= \frac{1 - |\mathbf{v}|/c}{N(|\mathbf{v}|/c)} \left(t + \frac{|\mathbf{r}_{\parallel}|}{c} \right), \\ \left(\frac{t - |\mathbf{r}'_{\parallel}|/c}{t + |\mathbf{r}'_{\parallel}|/c} \right) \left(\frac{1 - |\mathbf{v}|/c}{1 + |\mathbf{v}|/c} \right) &= \left(\frac{t - |\mathbf{r}_{\parallel}|/c}{t + |\mathbf{r}_{\parallel}|/c} \right), \\ \left(\frac{t - |\mathbf{u}'_{\parallel}|/c}{t + |\mathbf{u}'_{\parallel}|/c} \right) \left(\frac{1 - |\mathbf{v}|/c}{1 + |\mathbf{v}|/c} \right) &= \left(\frac{t - |\mathbf{u}_{\parallel}|/c}{t + |\mathbf{u}_{\parallel}|/c} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Параллельные трехмерные скорости и их модули образуют абелевы группы с законами композиций

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_{\parallel} &= \mathbf{v}' \circ \mathbf{u}_{\parallel} = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{u}_{\parallel}}{1 + (\mathbf{v}'\mathbf{u}_{\parallel})/c^2}, \\ |\mathbf{u}'_{\parallel}| &= |\mathbf{v}'| \circ |\mathbf{u}_{\parallel}| = \frac{|\mathbf{v}'| + |\mathbf{u}_{\parallel}|}{1 + |\mathbf{v}'||\mathbf{u}_{\parallel}|/c^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Это позволяет, согласно последнему равенству (29), обобщить преобразования (24) следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_{\parallel} &= \frac{\lambda(|\mathbf{v}|/c)}{N(|\mathbf{v}|/c)} (\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t), \\ t' &= \frac{\lambda(|\mathbf{v}|/c)}{N(|\mathbf{v}|/c)} \left(t - \frac{|\mathbf{v}|}{c^2} |\mathbf{r}_{\parallel}| \right), \\ \mathbf{r}'_{\perp} &= \lambda(|\mathbf{v}|/c) \mathbf{r}_{\perp} \end{aligned} \quad (31)$$

с конформным множителем

$$\lambda(|\mathbf{v}|/c) = \left(\frac{1 + |\mathbf{v}|/c}{1 - |\mathbf{v}|/c} \right)^{-r/2}. \quad (32)$$

Функция (32) имеет групповые свойства для параллельных скоростей с законом композиции

$$\lambda(|\mathbf{v}|/c) = \lambda(|\mathbf{v}_1|/c) \lambda(|\mathbf{v}_2|/c) \quad (33)$$

в виде произведения. В итоге получим обобщенные преобразования

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \left(\frac{1 + |\mathbf{v}|/c}{1 - |\mathbf{v}|/c} \right)^{-r/2} \left[\mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}t}{N(|\mathbf{v}|/c)} + \frac{1}{\mathbf{v}^2} \left(\frac{1}{N(|\mathbf{v}|/c)} - 1 \right) (\mathbf{r}\mathbf{v}) \mathbf{v} \right] = \\ &= \left(\frac{1 + |\mathbf{v}|/c}{1 - |\mathbf{v}|/c} \right)^{-r/2} \frac{1}{N(|\mathbf{v}|/c)} \left\{ \mathbf{r} - \mathbf{v}t + \frac{1}{c^2} \frac{[\mathbf{v}[\mathbf{v}\mathbf{r}]]}{[1 + N(|\mathbf{v}|/c)]} \right\}, \\ t' &= \left(\frac{1 + |\mathbf{v}|/c}{1 - |\mathbf{v}|/c} \right)^{-r/2} \frac{1}{N(|\mathbf{v}|/c)} \left[t - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}\mathbf{r}) \right], \end{aligned} \quad (34)$$

которые оставляют, согласно соотношению для конформного множителя в (29), форм-инвариантным следующий элемент длины в финслеровом пространстве-времени

$$F = s = ct_0 = \left(\frac{ct' - |\mathbf{r}'_{\parallel}|}{ct' + |\mathbf{r}'_{\parallel}|} \right)^{r/2} (c^2 t'^2 - \mathbf{r}'^2)^{1/2} = \left(\frac{ct - |\mathbf{r}_{\parallel}|}{ct + |\mathbf{r}_{\parallel}|} \right)^{r/2} (c^2 t^2 - \mathbf{r}^2)^{1/2}. \quad (35)$$

Напомним, что вектор скорости $\mathbf{v}$ в (34) параллелен вектору $\mathbf{r}_{\parallel}$. Таким образом, конформный множитель в (23), обладающий групповыми свойствами, имеет вид

$$\lambda = \left(\frac{ct - |\mathbf{r}_{\parallel}|}{ct + |\mathbf{r}_{\parallel}|} \right)^{r/2} = \left(\frac{ct - \sqrt{\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}_{\perp}^2}}{ct + \sqrt{\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}_{\perp}^2}} \right)^{r/2}. \quad (36)$$

Компонента радиус-вектора $\mathbf{r}_{\perp}$, перпендикулярная относительной скорости движения инерциальных систем преобразуется при переходе к движущейся системе, согласно последней формуле (31). Таким образом, в отличие от предположения $\mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}$, при котором поперечные размеры тел сохраняются относительно скорости $\mathbf{v}$, в данном случае поперечные размеры тел не сохраняются. При $\mathbf{r}_{\parallel} = (x, 0, 0)$, $\mathbf{r}_{\perp} = (0, y, z)$ и $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$ получим следующие преобразования и форм-инвариантный элемент длины

$$\begin{aligned} x' &= \left(\frac{1 + |v_x|/c}{1 - |v_x|/c} \right)^{-r/2} \frac{x - v_x t}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}, \\ t' &= \left(\frac{1 + |v_x|/c}{1 - |v_x|/c} \right)^{-r/2} \frac{t - v_x x/c^2}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}, \\ y' &= \left(\frac{1 + |v_x|/c}{1 - |v_x|/c} \right)^{-r/2} y, \\ z' &= \left(\frac{1 + |v_x|/c}{1 - |v_x|/c} \right)^{-r/2} z, \\ F = s = ct_0 &= \left(\frac{ct - |x|}{ct + |x|} \right)^{r/2} (c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (37)$$

которые при $y = z = 0$ и $\varepsilon_x = 0$ совпадают с результатами работы [12], полученными для нестандартной синхронизации часов с $\varepsilon_x \neq 0$ в двумерном случае пространства-времени.

Если рассматривается нестандартная синхронизация часов с $\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon}$, то в приведенных результатах необходимо сделать замену $t \rightarrow t - (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r})/c$ и $t' \rightarrow t' - (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r}')/c$ при переходе к новой координации часов и, соответственно, заменить значение относительной скорости движения систем $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{V}/[1 + (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{V})/c]$.

3. Заключение

В работе рассматривается переход между стандартной синхронизацией часов по Пуанкаре и нестандартной синхронизацией часов по Рейхенбаху-Грюнбауму двумя способами, либо выбором *по определению* параметра анизотропии, либо введением физического времени, физического расстояния и физической скорости. Особо подчеркнем, что справедливость уравнений Максвелла приводит к необходимости использовать именно стандартную синхронизацию часов по Пуанкаре. Дается некоторый вариант пространственно изотропного финслерова пространства-времени, который исправляет подходы работ [12, 13] в плане выполнения условия постоянства "средней" скорости света вдоль замкнутого пути в трехмерном пространстве и групповых свойств конформного множителя. Итогом является метрическая функция (35), в которую входит компонента радиус-вектора параллельная скорости движения инерциальной системы отсчета. Не останавливаясь на различных случаях ориентаций векторов $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ приведем элемент длины для финслеровой геометрии с параллельными векторами при $\mathbf{r}_{\perp} = 0$

$$F = s = ct_0 = \left(\frac{ct - |\mathbf{r}_{\parallel}|}{ct + |\mathbf{r}_{\parallel}|} \right)^{r/2} (c^2 t^2 - \mathbf{r}_{\parallel}^2)^{1/2} = (c^2 t^2 - \mathbf{r}_{\parallel}^2)^{(1+r)/2} (c^2 t^2 - \mathbf{r}_{\parallel}^2)^{(1-r)/2} \quad (38)$$

и следующие преобразования

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_{\parallel} &= \left(\frac{1 + |\mathbf{v}|/c}{1 - |\mathbf{v}|/c} \right)^{-r/2} \frac{1}{N(|\mathbf{v}|/c)} (\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t), \\ t' &= \left(\frac{1 + |\mathbf{v}|/c}{1 - |\mathbf{v}|/c} \right)^{-r/2} \frac{1}{N(|\mathbf{v}|/c)} \left[t - \frac{(\mathbf{v}\mathbf{r}_{\parallel})}{c^2} \right], \\ \mathbf{r}'_{\perp} &= \mathbf{r}_{\perp} = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Отметим также переход от псевдоевклидовой геометрии в системе отсчета (K) к финслеровой в системе отсчета (K') при $\mathbf{r}_{\parallel} = 0$, отражаемый в метрической функции

$$F = s = ct_0 = \left(\frac{ct' - |\mathbf{r}'_{\parallel}|}{ct' + |\mathbf{r}'_{\parallel}|} \right)^{r/2} (c^2 t'^2 - \mathbf{r}'^2)^{1/2} = (c^2 t^2 - \mathbf{r}_{\perp}^2)^{1/2}. \quad (40)$$

Дальнейшее рассмотрение результатов теории на основе метрической функции (35) представляет собой отдельную задачу.

Наконец, отметим еще один интересный вариант преобразований модулей различно ориентированных векторов и координатного времени. Так имеем форм-инвариантность элемента длины (4) при преобразованиях

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'| &= \frac{1}{N(|\mathbf{v}|/c)} (|\mathbf{r}| - |\mathbf{v}|t), \\ t' &= \frac{1}{N(|\mathbf{v}|/c)} \left(t - \frac{|\mathbf{v}||\mathbf{r}|}{c^2} \right), \end{aligned} \quad (41)$$

что означает гиперболический поворот всего трехмерного пространства. Обобщением (41) на случай с (20) являются следующие преобразования.

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'| &= \left(\frac{1 + |\mathbf{v}|/c}{1 - |\mathbf{v}|/c} \right)^{-r/2} \frac{1}{N(|\mathbf{v}|/c)} (|\mathbf{r}| - |\mathbf{v}|t), \\ t' &= \left(\frac{1 + |\mathbf{v}|/c}{1 - |\mathbf{v}|/c} \right)^{-r/2} \frac{1}{N(|\mathbf{v}|/c)} \left(t - \frac{|\mathbf{v}|}{c^2} |\mathbf{r}| \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Список литературы

- [1] Poincare H. La mesure du temps. Rev. Metaphys. Morale. 1898. V. 6. P. 1–13.
- [2] Minkowski H. I. "Raum und Zeit", 80. Versammlung Deutscher Naturforscher (Koln, 1908). Published in Physikalische Zeitschrift 10, 104–111 (1909) and Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 18, 75–88 (1909).
- [3] Poincare H. Sur la dynamique de l'électron. Rend. Circolo Mat. Palermo. 1906. V. 21. P. 129–176.
- [4] Reichenbach H. Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre. Braunschweig: F. Vieweg & Sons, 1924. 302 p.
- [5] Grunbaum A. Philosophical Problem of Space and Time. New York: Alfred A. Knopf, 1963. 590 p.
- [6] Edwards W. F. Special relativity in anisotropic space. Am. J. Phys. 1963. V. 31 (7). P. 482–486.
- [7] Karlov L. Does Romers methot yield a unidirectional speed of light? Austr. J. Phys. 1970. V. 23. P. 243–253.
- [8] Болтянский В. Г. Анизотропный релятивизм. Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 10. С. 2101–2110.

- [9] Зарипов Р. Г. К определению расстояния в специальной теории относительности. Гравитация и теория относительности. Казань: Изд-во КГУ, 1984. Вып. 21. С. 78–87.
- [10] Зарипов Р. Г. К определению одновременности в специальной теории относительности. Гравитация и теория относительности. Казань: Изд-во КГУ, 1978. Вып. 14–15. С. 60–69.
- [11] Зарипов Р. Г. О физическом понятии отношения одновременности. Гравитация и теория относительности. Казань: Изд-во КГУ, 1980. Вып. 17. С. 47–51.
- [12] Зарипов Р. Г. Бинарная система чисел и финслерова геометрия локального анизотропного пространства-времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. №1 (3). С. 47–60.
- [13] Асанов Г. С. Финслероидная геометрия. М.: Изд-во МГУ, 2004. 160 с.
- [14] Зарипов Р. Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах. Казань: Изд-во "Фэн", 2002. 251 с.
- [15] Зарипов Р. Г. Новые меры и методы в теории информации. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2005. 364 с.
- [16] Herglotz G. Über die Mechanik des Deformierbaren Körpers vom Standpunkte der Relativitätstheorie. Annalen der Physik. 1911. Bande. 36 (4. Folge). P. 493–533.

On simultaneity and spatial isotropy in Finslerian Space-Time

R. G. Zarypov

Institute of mechanics RAS, Kazan, Russia

zaripov@mail.knc.ru

There are studied the problems of simultaneity of spatially non-coincident events, and of the transition from the standard synchronizations of clocks in the Poincare and respectively in the Reichenbach-Grünbaum settings. We introduce a metric function for the Finslerian Space-Time with spatial isotropy with standard synchronization of clocks, and obtain new time and coordinate transformations, in vectorial form.

Key-words: simultaneity, synchronization of clocks, Finsler Geometry, metric function.

MSC: 53B40, 83D05.

МОДЕЛЬ ФИЗИЧЕСКОГО ПОЛЯ В СОБСТВЕННОМ ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ГЕОМЕТРИИ СОБЫТИЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Р. Г. Зарипов

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия

zaripov@mail.knc.ru

Построена модель физического векторного поля с плотностями скалярного и векторного источников в собственном трехмерном пространстве для геометрии событий Бервальда-Моора. Получены релятивистские уравнения третьего порядка для векторного поля и четвертого порядка для потенциалов.

Ключевые слова: пространство Бервальда-Моора, релятивистские уравнения, теория потенциалов.

1 Введение

В настоящее время релятивистская теория на основе финслерова полностью анизотропного пространства-времени является предметом интенсивных исследований, обусловленных возможностью практических приложений. Метрическая функция глобального четырехмерного пространства-времени Бервальда-Моора в скалярно-векторной форме запишется так

$$F = s_{12} = \left\{ \prod_m^4 [c(t_2 - t_1) + \varepsilon^m(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] \right\}^{1/4} = [c^4 T_{12}^4(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) - \rho^4(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]^{1/4}, \quad (1.1)$$

где введены интервалы физического времени и расстояния в собственном трехмерном пространстве [1]

$$\begin{aligned} T_{12}(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) &= [(t_2 - t_1)^4 - 2(t_2 - t_1)^2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 / c^2 + \\ &+ 4(t_2 - t_1)((\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\}) / 3c^3]^{1/4}, \\ \rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \rho(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = [(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]^2 - ((\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1))^2]^{1/4}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Интервал физического времени нелинейно зависит от разности координат и координат событий. Собственное трехмерное пространство с расстоянием в виде полунормы определяется как множество одновременных событий по физическому времени при сигнальном методе синхронизации разноместных часов [1]. В метрической функции (1.1) имеют место известные значения компонентов векторов $\varepsilon^1 = (1, 1, 1)$, $\varepsilon^2 = (-1, 1, -1)$, $\varepsilon^3 = (1, -1, -1)$, $\varepsilon^4 = (-1, -1, 1)$ выделенных направлений в трехмерном пространстве, которые удовлетворяют равенствам [2]

$$\begin{aligned} \sum_m^4 \varepsilon_\alpha^m &= 0, \quad \frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon_\alpha^m \varepsilon_\beta^m = \delta_{\alpha\beta}, \quad \frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon_\alpha^m \varepsilon_\beta^m \varepsilon_\gamma^m = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}, \\ 1 + (\varepsilon^m)^2 &= 4, \quad 1 + (\varepsilon^m \varepsilon^r) = 0 \quad (m \neq r). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера и $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ есть трехмерный абсолютно симметричный символ со свойством $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 1$ при $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, а остальные значения являются нулевыми, m – номер вектора и α с β имеют значения 1, 2, 3. При $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \varepsilon^r c(t_2 - t_1)$ с учетом (1.3)

получим равные величины $\rho^4 [\varepsilon^r c (t_2 - t_1)] = c^4 T^4 [t_2 - t_1, \varepsilon^r c (t_2 - t_1)] = 3c^4 (t_2 - t_1)^4$ и, соответственно $F = 0$ для всех выделенных направлений. Компоненты указанных векторов являются элементами нормализованной матрицы Адамара порядка четыре с элементами равными числам ± 1

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} H_1 & H_1 \\ H_1 & -H_1 \end{pmatrix}, \quad H_1 = 1, \quad HH^T = 4I, \quad (1.4)$$

посредством которой метрическая функция (1.1) для локального пространства-времени принимает следующий вид

$$\begin{aligned} F = ds &= [c^4 dt^4 + dx^4 + dy^4 + dz^4 - \\ &- 2(c^2 dt^2 dx^2 + c^2 dt^2 dy^2 + c^2 dt^2 dz^2 + dx^2 dy^2 + dy^2 dz^2 + dz^2 dx^2) + 8cdtdxdydz]^{1/4} = \\ &= [(cdt + dx + dy + dz)(cdt - dx + dy - dz)(cdt + dx - dy - dz)(cdt - dx - dy + dz)]^{1/4} = \\ &= (\varepsilon_{1234} H_i^1 H_j^2 H_k^3 H_l^4 dx^i dx^j dx^k dx^l)^{1/4} = \left(\frac{1}{4!} \varepsilon_{abcd} H_i^a H_j^b H_k^c H_l^d dx^i dx^j dx^k dx^l \right)^{1/4}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где символ ε_{abcd} есть абсолютно симметричный символ со свойством $\varepsilon_{abcd} = 1$ если $a \neq b \neq c \neq d$, остальные значения нулевые, $dx^i = (cdt, d\mathbf{x})$, H_i^a есть матрица Адамара со свойством $H_i^a H_a^j = 4\delta_i^j$ и четырехмерным символом Кронекера δ_i^j , I – единичная четырехмерная матрица. Учет гравитации приводит к функциям $H_k^a = H_k^a(x^i)$ с непрерывными частными производными, а ds интерпретируется как полунорма вектора dx^i .

В продолжение работы [3], в которой приводятся релятивистские уравнения, здесь ставится цель кратко изложить нахождение уравнений некоторого физического векторного поля в собственном трехмерном пространстве при наличии скалярного и векторного источников.

2 Дифференциальные гиперкомплексные операторы

Воспользуемся элементами векторной алгебры в собственном трехмерном пространстве [2] и скалярно-векторной формой для композиции квадрaчисел

$$(a_0, \mathbf{a}) \circ (b_0, \mathbf{b}) = (a_0 b_0 + (\mathbf{a}\mathbf{b}), b_0 \mathbf{a} + a_0 \mathbf{b} + \{\mathbf{a}\mathbf{b}\}) \quad (2.1)$$

с известным равенством композиции четырех квадрaчисел скалярной величине

$$(a_0, \mathbf{a}) \circ (a_0, \mathbf{a}_1) \circ (a_0, \mathbf{a}_2) \circ (a_0, \mathbf{a}_3) = a_0^4 - 2a_0^2 \mathbf{a}^2 + 4a_0 (\mathbf{a} \{ \mathbf{a}\mathbf{a} \}) / 3 + (\mathbf{a}\mathbf{a}) (\mathbf{a}\mathbf{a}) - (\{ \mathbf{a}\mathbf{a} \} \{ \mathbf{a}\mathbf{a} \}), \quad (2.2)$$

которая при $a_0 = c(t_2 - t_1)$ и $\mathbf{a} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ равняется метрической функции (1.1) в степени четыре. Здесь $(\mathbf{a}\mathbf{b})$ есть скалярное произведение, $(\mathbf{a}\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$ с модулем вектора $|\mathbf{a}|$, а для нового векторного произведения $\{\mathbf{a}\mathbf{b}\}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma$ имеем следующие соотношения из [3] и некоторые дополнительные равенства

$$\begin{aligned} \{\mathbf{a}\mathbf{b}\} &= \{\mathbf{b}\mathbf{a}\}, \quad \{\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})\} = \{\mathbf{a}\mathbf{b}\} + \{\mathbf{a}\mathbf{c}\}, \\ (\{\mathbf{a}\mathbf{b}\}\mathbf{c}) &= (\{\mathbf{a}\mathbf{c}\}\mathbf{b}) = (\{\mathbf{b}\mathbf{a}\}\mathbf{c}) = (\{\mathbf{b}\mathbf{c}\}\mathbf{a}) = (\{\mathbf{c}\mathbf{a}\}\mathbf{b}) = (\{\mathbf{c}\mathbf{b}\}\mathbf{a}), \\ \{\mathbf{a}\{\mathbf{b}\mathbf{c}\}\} &- \{\{\mathbf{a}\mathbf{b}\}\mathbf{c}\} = (\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{c} - \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c}), \\ \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 &+ (\{\mathbf{a}\mathbf{a}\}\{\mathbf{b}\mathbf{b}\}) = (\mathbf{a}\mathbf{b})^2 + \{\mathbf{a}\mathbf{b}\}^2, \\ \{\mathbf{a}\mathbf{b}\}_\alpha &= a_\beta b_\gamma + a_\gamma b_\beta, \quad \{\{\mathbf{a}\mathbf{a}\}\mathbf{b}\}_\alpha = 2a_\alpha (a_\beta b_\beta + a_\gamma b_\gamma), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\{aa\}b) &= 2(a_\alpha a_\beta b_\gamma + a_\beta a_\gamma b_\alpha + a_\gamma a_\alpha b_\beta), \\
\{a\{ab\}\}_\alpha &= a_\alpha(a_\beta b_\beta + a_\gamma b_\gamma) + b_\alpha(a_\beta^2 + a_\gamma^2), \\
\{aa\}_\alpha &= 2a_\beta a_\gamma, \quad \{a\{aa\}\}_\alpha = 2a_\alpha(a_\beta^2 + a_\gamma^2), \quad (a\{aa\}) = 6a_\alpha a_\beta a_\gamma, \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma), \\
\{a\{a\{aa\}\}\} &= (aa)\{aa\} + \frac{1}{3}(a\{aa\})a, \\
(\{a\{aa\}\}b) &= (\{aa\}\{ab\}), \\
(\{a\{a\{aa\}\}\}b) &= (\{a\{aa\}\}\{ab\}) = (aa)(\{aa\}b) + \frac{1}{3}(a\{aa\})(ab).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

В композиции четырех квадрaчисел (2.2) приводятся векторы

$$\begin{aligned}
a &= (a_1, a_2, a_3), \\
a_1 &= (-a_1, a_2, -a_3), \\
a_2 &= (a_1, -a_2, -a_3), \\
a_3 &= (-a_1, -a_2, a_3),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

удовлетворяющие четырем векторным уравнениям [1]

$$\begin{aligned}
a + a_1 + a_2 + a_3 &= 0, \\
\{aa_1\} + \{aa_2\} + \{aa_3\} + \{a_1a_2\} + \{a_2a_3\} + \{a_3a_1\} &= 0, \\
(aa_1)a_3 + \{\{aa_1\}a_3\} + (a_1a_2)a_3 + \{\{a_1a_2\}a_3\} + \\
+ (a_2a)a_3 + \{\{a_2a\}a_3\} + (aa_1)a_2 + \{\{aa_1\}a_2\} &= 0, \\
\{\{\{aa_1\}a_2\}a_3\} + (aa_1)\{a_2a_3\} + (\{aa_1\}a_2)a_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Квадрачисло (a_0, a) есть исходное число, а остальные (a_0, a_1) , (a_0, a_2) , (a_0, a_3) являются частично сопряженные к нему. Сопряженное число к исходному имеет значение [2]

$$\begin{aligned}
(\bar{a}_0, \bar{a}) &= (a_0, a_1) \circ (a_0, a_2) \circ (a_0, a_3) = \\
&= (a_0(a_0^2 - a^2) + \frac{1}{3}(a\{aa\}), -(a_0^2 - a^2)a + a_0\{aa\} - \{a\{aa\}\}).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Не останавливаясь на всех свойствах векторной алгебры, отметим, что при $a_0 = 0$ из (2.6) вытекают сопряженный, обратный векторы и расстояние между одновременными событиями на концах вектора в собственном трехмерном пространстве [1]

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= -\{a\{aa\}\} + a(aa), \\
a^{-1} &= -\frac{\bar{a}}{[\rho(a)]^4} = \frac{\{a\{aa\}\} - a(aa)}{\{aa\}\{aa\} - (aa)(aa)}, \\
\rho(a) &= [-(a\bar{a})]^{1/4} = [(\{aa\}\{aa\}) - (aa)(aa)]^{1/4}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Композиция (2.6) с числом (b_0, b) запишется так

$$\begin{aligned}
(\bar{a}_0, \bar{a}) \circ (b_0, b) &= (a_0(a_0^2 - a^2)b_0 + \frac{1}{3}(a\{aa\})b_0 - (a_0^2 - a^2)(ab) + a_0(\{aa\}b) - \\
&- (\{a\{aa\}\}b), -(a_0^2 - a^2)ab_0 + a_0\{aa\}b_0 - \{a\{aa\}\}b_0 + a_0(a_0^2 - a^2)b + \\
&+ \frac{1}{3}(a\{aa\})b - (a_0^2 - a^2)\{ab\} + a_0\{\{aa\}b\} - \{\{a\{aa\}\}b\}).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

При $b_0 = 0$ из (2.8) вытекает следующая композиция

$$\begin{aligned}
(\bar{a}_0, \bar{a}) \circ (0, b) &= (-(a_0^2 - a^2)(ab) + a_0(\{aa\}b) - (\{a\{aa\}\}b), a_0(a_0^2 - a^2)b + \\
&+ \frac{1}{3}(a\{aa\})b - (a_0^2 - a^2)\{ab\} + a_0\{\{aa\}b\} - \{\{a\{aa\}\}b\}).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Далее перейдем к операциям векторного анализа и введем следующие дифференциальные гиперкомплексные операторы

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla \right), \quad \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_1 \right), \quad \nabla_1 &= \left(-\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_2 \right), \quad \nabla_2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_3 \right), \quad \nabla_3 &= \left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где первый есть исходный, а остальные три являются частично сопряженные к нему. При этом первый гиперкомплексный оператор в (2.10) вытекает при замене $(a_0, \mathbf{a}) \rightarrow \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, а остальные при замене остальных векторов. Согласно (2.2) композиция дифференциальных гиперкомплексных операторов из (2.10) дает скалярный дифференциальный оператор четвертого порядка с одним операторным вектором ∇ [3]

$$\begin{aligned} \square_4 &= \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla \right) \circ \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_1 \right) \circ \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_2 \right) \circ \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_3 \right) = \\ &= \frac{\partial^4}{c^4 \partial t^4} - 2 \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \Delta + \frac{4}{3} \frac{\partial}{c\partial t} (\nabla \{ \nabla \nabla \}) + \Delta \Delta - (\{ \nabla \nabla \} \{ \nabla \nabla \}) = \\ &= \frac{\partial^4}{c^4 \partial t^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} - 2 \left(\frac{\partial^4}{c^2 \partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{c^2 \partial t^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{c^2 \partial t^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial x^2} \right) + 8 \frac{\partial^4}{c \partial t \partial x \partial y \partial z} = \prod_m^4 \left[\frac{\partial}{c\partial t} + (\epsilon^m \nabla) \right], \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\Delta = (\nabla \nabla)$ есть оператор Лапласа. При выводе (2.11) используются соотношения для операторных векторов

$$\begin{aligned} \nabla + \nabla_1 + \nabla_2 + \nabla_3 &= 0, \\ \{ \nabla \nabla_1 \} + \{ \nabla \nabla_2 \} + \{ \nabla \nabla_3 \} + \{ \nabla_1 \nabla_2 \} + \{ \nabla_2 \nabla_3 \} + \{ \nabla_3 \nabla_1 \} &= 0, \\ (\nabla \nabla_1) \nabla_3 + \{ \{ \nabla \nabla_1 \} \nabla_3 \} + (\nabla_1 \nabla_2) \nabla_3 + \{ \{ \nabla_1 \nabla_2 \} \nabla_3 \} + & \\ + (\nabla_2 \nabla) \nabla_3 + \{ \{ \nabla_2 \nabla \} \nabla_3 \} + (\nabla \nabla_1) \nabla_2 + \{ \{ \nabla \nabla_1 \} \nabla_2 \} &= 0, \\ \{ \{ \{ \nabla \nabla_1 \} \nabla_2 \} \nabla_3 \} + (\nabla \nabla_1) \{ \nabla_2 \nabla_3 \} + (\{ \nabla \nabla_1 \} \nabla_2) \nabla_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

которые вытекают из равенств (2.5).

Согласно (2.6) и (2.10), сопряженный дифференциальный гиперкомплексный оператор имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_1 \right) \circ \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_2 \right) \circ \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_3 \right) &= \\ = \left(\frac{\partial}{c\partial t} \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta \right) + \frac{1}{3} (\nabla \{ \nabla \nabla \}), - \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta \right) \nabla + \frac{\partial}{c\partial t} \{ \nabla \nabla \} - \{ \nabla \{ \nabla \nabla \} \} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Тогда скалярный дифференциальный оператор (2.11) запишется как следующая композиция

$$\square_4 = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla \right) \circ \left(\frac{\partial}{c\partial t} \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta \right) + \frac{1}{3} (\nabla \{ \nabla \nabla \}), - \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta \right) \nabla + \frac{\partial}{c\partial t} \{ \nabla \nabla \} - \{ \nabla \{ \nabla \nabla \} \} \right). \quad (2.14)$$

Новое векторное произведение представляется через производные в компонентах

$$\begin{aligned}\{\nabla \mathbf{a}\} &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} + \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y} \right), \\ \{\nabla \mathbf{a}\}_\alpha &= 2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} e_{\beta\gamma}, \quad e_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_\beta}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta} \right).\end{aligned}\quad (2.15)$$

с тензором "деформации" $e_{\beta\gamma}$ для векторного поля $\mathbf{a}$. Наряду с (2.15) легко находится из $\{\nabla_1 \mathbf{a}\}$, $\{\nabla_2 \mathbf{a}\}$ и $\{\nabla_3 \mathbf{a}\}$ компоненты еще трех тензоров "деформации" векторного поля $\mathbf{a}$. Можно говорить о четырех тензорах "деформаций", которые соответствуют четырем выделенным направлениям в собственном трехмерном пространстве. Сумма этих четырех тензоров "деформации" с учетом первого равенства в (2.12) равняется нулю.

Используя формулы (2.3), выпишем некоторые дифференциальные операции различных порядков для скалярного и векторных полей в операторной форме

$$\begin{aligned}(\{\nabla \{\nabla \nabla\}\} \nabla \varphi) &= (\{\nabla \nabla\} \{\nabla \nabla\}) \varphi, \\ \{\{\nabla \{\nabla \nabla\}\} \nabla \varphi\} &= \Delta \{\nabla \nabla \varphi\} + \frac{1}{3} (\nabla \{\nabla \nabla\}) \nabla \varphi, \\ (\{\nabla \{\nabla \{\nabla \nabla\}\} \mathbf{A}\}) &= (\{\nabla \{\nabla \nabla\}\} \{\nabla \mathbf{A}\}) = \Delta (\nabla \{\nabla \mathbf{A}\}) + \frac{1}{3} (\nabla \{\nabla \nabla\}) (\nabla \mathbf{A}), \\ \{\nabla \{\nabla \mathbf{A}\}\} - \{\{\nabla \nabla\} \mathbf{A}\} &= \Delta \mathbf{A} - \nabla (\nabla \mathbf{A}).\end{aligned}\quad (2.16)$$

3 Уравнения физического поля

Рассмотрим квадратичное число потенциалов

$$(\varphi, \mathbf{A}), \quad \mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) \quad (3.1)$$

и композицию с исходным гиперкомплексным оператором

$$\left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla \right) \circ (\varphi, \mathbf{A}) = (0, \mathbf{R}), \quad (3.2)$$

где вектор $\mathbf{R}$ есть сумма векторов напряженности двух полей

$$\mathbf{R} = \mathbf{G} + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{A}}{c\partial t} + \nabla \varphi, \quad \mathbf{Q} = \{\nabla \mathbf{A}\} \quad (3.3)$$

В (3.2) скалярная часть приравнивается нулю, что дает калибровку для потенциалов

$$\frac{\partial \varphi}{c\partial t} + (\nabla \mathbf{A}) = 0 \quad (3.4)$$

с $(\nabla \mathbf{A}) = \text{div } \mathbf{A}$, а компоненты $\{\nabla \mathbf{A}\}$ представлены формулой (2.15).

Теперь используем квадратичное

$$(\rho, \mathbf{J}/c), \quad \mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z) \quad (3.5)$$

с плотностью источника ρ и вектора плотности тока источника $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ и рассмотрим следующую композицию сопряженного гиперкомплексного оператора с результатом композиции (3.2)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{c\partial t} \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta \right) + \frac{1}{3} (\nabla \{\nabla \nabla\}) \right) \circ \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta \right) \nabla + \frac{\partial}{c\partial t} \{\nabla \nabla\} - \{\nabla \{\nabla \nabla\}\} \right) \circ (0, \mathbf{R}) = \\ = \nu (\rho, \mathbf{J}/c),\end{aligned}\quad (3.6)$$

из которой получим систему уравнений третьего порядка в операторном виде

$$-\square (\nabla \mathbf{R}) + \frac{\partial}{c\partial t} (\{\nabla \nabla\} \mathbf{R}) - (\{\nabla \{\nabla \nabla\}\} \mathbf{R}) = \nu \rho, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{c\partial t} \square \mathbf{R} + \frac{1}{3} (\nabla \{\nabla \nabla\}) \mathbf{R} - \square \{\nabla \mathbf{R}\} + \frac{\partial}{c\partial t} \{\{\nabla \nabla\} \mathbf{R}\} - \{\{\nabla \{\nabla \nabla\}\} \mathbf{R}\} = \frac{\nu}{c} \mathbf{J}. \quad (3.8)$$

Здесь учитывались соотношения (2.9) и вышеуказанная замена на производные, а $\square = \partial^2 / c^2 \partial t^2 - \Delta$ есть оператор Гамильтона и ν – постоянный коэффициент.

При подстановке выражений (3.3) в (3.7) и (3.8) с учетом калибровки (3.4) получим следующие волновые уравнения четвертого порядка для потенциалов

$$\begin{aligned} \square_4 \varphi &= \nu \rho, \\ \square_4 \mathbf{A} &= \frac{\nu}{c} \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Дифференцируя (3.7) по времени

$$-\frac{\partial}{c\partial t} \square (\nabla \mathbf{R}) + \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} (\{\nabla \nabla\} \mathbf{R}) - \left(\{\nabla \{\nabla \nabla\}\} \frac{\partial \mathbf{R}}{c\partial t} \right) = \nu \frac{\partial \rho}{c\partial t} \quad (3.10)$$

и умножая (3.8) скалярно на оператор ∇

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{c\partial t} \square (\nabla \mathbf{R}) + \frac{1}{3} (\nabla \{\nabla \nabla\}) (\nabla \mathbf{R}) - \square (\nabla \{\nabla \mathbf{R}\}) + \\ &+ \frac{\partial}{c\partial t} (\nabla \{\{\nabla \nabla\} \mathbf{R}\}) - (\nabla \{\{\nabla \{\nabla \nabla\}\} \mathbf{R}\}) = \frac{\nu}{c} (\nabla \mathbf{J}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

складываем уравнения (3.10) и (3.11) и получим уравнение непрерывности для плотности источника

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \mathbf{J}) = 0. \quad (3.12)$$

Для статических полей с потенциалами и калибровкой

$$\mathbf{G} = \nabla \varphi, \quad \mathbf{Q} = \{\nabla \mathbf{A}\}, \quad (\nabla \mathbf{A}) = 0 \quad (3.13)$$

имеет место расщепление исходных уравнений (3.7) и (3.8) на систему уравнений для поля $\mathbf{G}$

$$\begin{aligned} \Delta (\nabla \mathbf{G}) - (\{\nabla \{\nabla \nabla\}\} \mathbf{G}) &= \nu \rho, \\ \frac{1}{3} (\nabla \{\nabla \nabla\}) \mathbf{G} + \Delta \{\nabla \mathbf{G}\} - \{\{\nabla \{\nabla \nabla\}\} \mathbf{G}\} &= 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

и систему уравнений для поля $\mathbf{Q}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} (\nabla \{\nabla \nabla\}) \mathbf{Q} + \Delta \{\nabla \mathbf{Q}\} - \{\{\nabla \{\nabla \nabla\}\} \mathbf{Q}\} &= \frac{\nu}{c} \mathbf{J}, \\ \Delta (\nabla \mathbf{Q}) - (\{\nabla \{\nabla \nabla\}\} \mathbf{Q}) &= 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

Потенциалы удовлетворяют дифференциальным уравнениям четвертого порядка

$$\begin{aligned} \Delta_4 \varphi &= \nu \rho, \\ \Delta_4 \mathbf{A} &= \frac{\nu}{c} \mathbf{J}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где введено обозначение скалярного оператора

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= (0, \nabla) \circ (0, \nabla_1) \circ (0, \nabla_2) \circ (0, \nabla_3) = \Delta \Delta - (\{\nabla \nabla\} \{\nabla \nabla\}) = \\ &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} - 2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial x^2} \right) = \prod_m^4 (\epsilon^m \nabla). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Заключение

Таким образом, построена модель физического поля и найдены дифференциальные уравнения третьего порядка для векторного поля с плотностями скалярного и векторного источников. С учетом условия калибровки имеют место волновые уравнения четвертого порядка для потенциалов поля с источниками. При этом выполняется уравнение непрерывности для плотности источника. Решение полученных уравнений представляет собой отдельную задачу. Не представляет труда дать изложение в привычной ковариантной форме для четырехмерных величин пространства-времени Бервальда-Моора.

Следует отметить работы [4, 5], где последовательно изучаются физические поля в ковариантном виде для пространства-времени Бервальда-Моора. В них векторный источник определяет антисимметричный тензор напряженностей физического поля, который соотносится к аналогу электромагнитного поля. Различие этих работ от представленной состоит в том, что основой физического поля напряженностей здесь является симметричный тензор "деформации". Налицо два различных по своей природе физических поля.

Список литературы

- [1] Зарипов Р. Г. Физическое время и расстояние в пространстве-времени Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. №2 (8). Т. 4. С. 24–40.
- [2] Зарипов Р. Г. Отношение одновременности в финслеровом пространстве-времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2006. № 1 (5). Т. 3. С. 27–46.
- [3] Зарипов Р. Г. О релятивистских уравнениях в пространстве-времени Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. №1 (7). Т. 4. С. 82–92.
- [4] Гарасько Г. И. Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2006. №2 (6). Т. 3. С. 6–20.
- [5] Гарасько Г. И. Слабые поля. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. №2 (8). Т. 4. С. 3–12.

The model of physical field in the proper 3-dimensional space for the Berwald-Moor of events

R. G. Zarypov

*Institute of mechanics RAS, Kazan, Russia
zaripov@mail.knc.ru*

We build the model of the physical vector field with the densities of the scalar and vector sources in the proper 3-dimensional space for the Berwald-Moor geometry of events. The relativistic equations of order three for the vector field, and of order four - for the potentials, are obtained.

Key-words: Berwald-Moor space, relativity, potentials.

MSC: 53C05, 31C15, 35Q75.

Статья послана 30.01.2009

О ПОЛИНОРМАХ НА НЕАССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ И ИХ ВОЗМОЖНОМ ПРИМЕНЕНИИ В ФИЗИКЕ

А. А. Элиович

Российский университет дружбы народов, НИИ ГСГФ

eliovich@mail.ru

В работе доказываются ряд утверждений о неассоциативных алгебрах, квадратичных над своим центром. В частности, доказываются, что в квадратичных алгебрах существует почти точный антиавтоморфизм. Как частный, но широкий класс таких алгебр, вводится понятие алгебр с центральным сопряжением, обобщающее гиперкомплексные алгебры Кэли-Диксона. Доказывается, что альтернативные алгебры с центральным сопряжением обладают мультипликативной нормой степени 2 (вообще говоря, не вещественной). Как следствие, эти алгебры (в частности, бикватернионы и биоктавы) обладают мультипликативной вещественной полинормой, которая может иметь несколько различных, но эквивалентных представлений. Вводится квадроскалярное и квадровекторное произведение. На примере алгебры бикватернионов рассматриваются некоторые возможности для применения полученного аппарата в геометрии и физике. В частности, показывается, что рассмотрение 4-нормы в теории поля делает естественным переход от электродинамики Максвелла к электродинамике Борна-Инфельда, а также обосновывает модифицированный лагранжиан для модели Скимма.

Ключевые слова: квадратичные алгебры, неассоциативные алгебры, центральное сопряжение, полинормы, электродинамика Борна-Инфельда, модель Скимма.

Введение

В последние два десятилетия фундаментальная теоретическая физика находится в состоянии идейного поиска. В этой ситуации приобретают смысл не только магистральные направления исследований, но и разного рода "окольные тропы" [23]. Одной из таких полузабытых программ была красивая идея алгебраизации физики, предложенная в середине XIX века Уильямом Гамильтоном и поддержанная, в частности, Уильямом Клиффордом. Они пытались понять устройство природы, предположив, что в основе физики лежит геометрия, а в основе геометрии – некоторая гиперкомплексная алгебра с исключительными свойствами. На этом пути был найден ряд замечательных наблюдений и неочевидных связей. Согласно гиперкомплексной программе они представляют собой осколки единой картины, которую со временем удастся собрать; напротив, большинство современных исследователей полагает, что здесь имеет место лишь набор совпадений, неизбежных в малых размерностях. Вне зависимости от того, насколько соответствует истине мечта Гамильтона, те или иные связи между гиперкомплексными алгебрами, геометрией и физикой представляются интересным объектом изучения.

Статья состоит из трех частей. Первая кратко представляет мотивировку и предмет исследования. Во второй части вводятся основные математические конструкции и доказываются ряд утверждений. В третьей показываются некоторые возможности для применения полученного аппарата в физике, в частности, для теории поля.

Часть 1. Общий обзор

1.1. Классические гиперкомплексные алгебры

Кватернионы (см., например, [1]) есть гиперкомплексные числа вида

$$\mathbf{a} = a_0 1 + a_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3, \quad (1)$$

где a_i – вещественные числа, а орты $\mathbf{q}_i$ перемножаются согласно правилу умножения

$$1\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k1 = \mathbf{q}_k, \quad \mathbf{q}_j\mathbf{q}_k = -\delta_{jk}1 + \varepsilon_{jkn}\mathbf{q}_n,$$

где δ_{jk} и ε_{jkn} – символы Кронекера и Леви-Чивиты ($j, k, n = 1, 2, 3$).

Умножение кватернионов некоммутативно, но ассоциативно (т.е. не зависит от расстановки скобок). Кватернионы были придуманы У. Гамильтоном в 1843 г. для описания вращений 3-мерного пространства (подобно тому, как комплексные числа могут служить для описания преобразований плоскости). Самое замечательное в кватернионах – мультипликативность их нормы: норма произведения кватернионов равна произведению их норм. Норма кватерниона вводится, как и для комплексных чисел, с помощью умножения на сопряженный элемент:

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3, \quad (2)$$

$$N(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \quad (3)$$

$$N(\mathbf{a}\mathbf{b}) = N(\mathbf{a})N(\mathbf{b}). \quad (4)$$

Из вида нормы ясно, что метрика кватернионов имеет сигнатуру $+4$. Мультипликативность нормы кватернионов приводит к появлению для вещественных чисел замечательного тождества четырех квадратов: правильно записанное произведение сумм четырех квадратов есть снова сумма четырех квадратов. Отметим, что кватернионное сопряжение переставляет порядок сомножителей (является антиавтоморфизмом):

$$\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}. \quad (5)$$

Октонионы, или октавы, (см. [1], [2] и [3]) были введены Т. Грейвсом (1844) и независимо А. Кэли (1845). Это гиперкомплексные числа вида

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 + A_0\mathbf{e}_0 + A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3, \quad (6)$$

где правило умножения орт $\mathbf{q}_i, \mathbf{e}_j$ определяется на основании формулы удвоения Кэли-Диксона кватернионов (сами кватернионы также получаются с помощью этого удвоения – от комплексных чисел):

$$(a + A \cdot \mathbf{e}_0)(b + B \cdot \mathbf{e}_0) = ab - \bar{B}A + (Ba + A\bar{b}) \cdot \mathbf{e}_0, \quad (7)$$

(a, b, A, B – кватернионы). Если снять различие между мнимыми элементами $\mathbf{q}_i$ и $\mathbf{e}_j$ (положив $\mathbf{e}_j \equiv \mathbf{q}_{j+4}$), правило умножения может быть выражено следующим образом:

$$\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = -\delta_{ij} \cdot 1 + C_{ijk}\mathbf{q}_k, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, 7, \quad (8)$$

где полностью антисимметричные октонионные структурные константы C_{ijk} равны

$$C_{123} = C_{145} = C_{176} = C_{246} = C_{257} = C_{347} = C_{365} = 1 \quad (9)$$

(и обращаются в нуль в при других сочетаниях индексов).

Для удобства приведем таблицу умножения октав (ее левый верхний угол заодно представляет таблицу умножения кватернионов):

×	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$
$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$-\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	-1	$-\mathbf{q}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_1$	-1

(Tab. 1)

Удвоение Кэли-Диксона обеспечивает октавы хорошими свойствами. Хотя их умножение не ассоциативно, оно обладает ослабленной ассоциативностью – оно *альтернативно*:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \quad \text{и} \quad \mathbf{b}\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}\mathbf{a} \quad (10)$$

Другое определение альтернативности – в альтернативной алгебре любые два элемента порождают ассоциативную подалгебру. Теорема Артина утверждает, что эти определения эквивалентны. Самое важное достоинство октав – их норма по-прежнему мультипликативна. Это приводит к выполнению для вещественных чисел тождества восьми квадратов – правильно записанное произведение сумм восьми квадратов есть снова сумма восьми квадратов. Как и в случае кватернионов, норма октав положительно определена; ее метрика имеет сигнатуру +8.

Для дальнейшего нам понадобятся также антикватернионы (псевдокватернионы) и антиоктавы (псевдооктавы). Таблица умножения первых получается из таблицы умножения кватернионов изменением всех знаков в нижней правой четверти:

×	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	1	$-\mathbf{q}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_1$	1

(Tab. 2)

Точно также, таблица умножения антиоктав получается из таблицы для октав изменением всех знаков в нижней правой четверти. Все замечательные свойства кватернионов и октав переносятся на антикватернионы и антиоктавы, за одним исключением – норма теперь не является положительно определенной, так что корректно говорить о псевдонорме. Метрика антикватернионов имеет сигнатуру (+2, -2), октав (+4, -4).

1.2. Гиперкомплексные алгебры над комплексными и двойными числами

Бикватернионы есть кватернионы, определенные над полем комплексных чисел ($\mathbf{i}^2 = -1$). *Дикватернионы* – это кватернионы, определенные над алгеброй двойных чисел ($\mathbf{i}^2 = +1$). В связи с этим, эти числа можно по-прежнему записывать в виде (1), имея в виду под коэффициентами a_i уже комплексные (двойные) числа. Однако, мы примем более свободную трактовку бикватернионов (дикватернионов) как 8-мерной алгебры над полем вещественных чисел, состоящей из двух блоков:

$$\mathbf{a} = a + k \cdot \mathbf{i}_0, \quad (11)$$

или, в развернутой записи,

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3 + k_0 \mathbf{i}_0 + k_1 \mathbf{i}_1 + k_2 \mathbf{i}_2 + k_3 \mathbf{i}_3, \quad (12)$$

где a, k – кватернионы с вещественными коэффициентами. $\mathbf{i}_0$ является внешней единицей, коммутирующей с кватернионами a, k ; $\mathbf{i}_0^2 = -1$ для бикватернионов и $+1$ для дикватернионов, единицы $\mathbf{i}_j$ – результат внешнего (тензорного) произведения $\mathbf{i}_0 \otimes \mathbf{q}_j$. (Мы будем использовать для удобства изложения одинаковое обозначение $\mathbf{i}_0$ для обеих алгебр, поскольку перемешиваться в данной работе они не будут.) Отсюда вытекает правило умножения бикватернионов (дикватернионов, нижний знак) в блочном и табличном виде:

$$(a + k \cdot \mathbf{i}_0)(b + l \cdot \mathbf{i}_0) = ab \mp kl + (al + kb) \cdot \mathbf{i}_0. \quad (13)$$

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$
$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	∓ 1	$\mp \mathbf{q}_1$	$\mp \mathbf{q}_2$	$\mp \mathbf{q}_3$
$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mp \mathbf{q}_1$	± 1	$\mp \mathbf{q}_3$	$\pm \mathbf{q}_2$
$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mp \mathbf{q}_2$	$\pm \mathbf{q}_3$	± 1	$\mp \mathbf{q}_1$
$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mp \mathbf{q}_3$	$\mp \mathbf{q}_2$	$\pm \mathbf{q}_1$	± 1

(Tab. 3)

Дуокватернионы есть кватернионы, определенные над полем дуальных чисел ($\mathbf{i}^2 = 0$). Они здесь изучаться не будут.

Наконец, *биооктавы* (*биооктонионы*) – это октавы, определенные над полем комплексных чисел, т.е. алгебра размерности 16 над полем вещественных чисел. Из определения вытекает правило умножения октав в блочном виде:

$$(a + A \cdot \mathbf{e}_0 + k \cdot \mathbf{i}_0 + K \cdot \mathbf{f}_0)(b + B \cdot \mathbf{e}_0 + l \cdot \mathbf{i}_0 + L \cdot \mathbf{f}_0) = ab - \bar{B}A - kl + \bar{L}K + (Ba + A\bar{b} - Lk - K\bar{l}) \cdot \mathbf{e}_0 + (al - \bar{L}A + kb - \bar{B}K) \cdot \mathbf{i}_0 + (La + K\bar{b} + Bk + A\bar{l}) \cdot \mathbf{f}_0, \quad (14)$$

где $\mathbf{f}_0 \equiv \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{e}_0$. Его можно записать в виде символической таблицы:

$\times$	b	$B \cdot \mathbf{e}_0$	$l \cdot \mathbf{i}_0$	$L \cdot \mathbf{f}_0$
a	ab	$Ba \cdot \mathbf{e}_0$	$al \cdot \mathbf{i}_0$	$La \cdot \mathbf{f}_0$
$A \cdot \mathbf{e}_0$	$A\bar{b} \cdot \mathbf{e}_0$	$-\bar{B}A$	$A\bar{l} \cdot \mathbf{f}_0$	$-\bar{L}A \cdot \mathbf{i}_0$
$k \cdot \mathbf{i}_0$	$k\bar{b} \cdot \mathbf{i}_0$	$Bk \cdot \mathbf{f}_0$	$-kl$	$-Lk \cdot \mathbf{e}_0$
$K \cdot \mathbf{f}_0$	$K\bar{b} \cdot \mathbf{f}_0$	$-\bar{B}K \cdot \mathbf{i}_0$	$-K\bar{l} \cdot \mathbf{e}_0$	$\bar{L}K$

(Tab. 4)

Эта таблица содержит в качестве фрагментов таблицы умножения бикватернионов и октав.

Ниже мы увидим, что правильным образом введенная (псевдо)норма бикватернионов и биооктав также обладает замечательным свойством мультипликативности.

1.3. Система сопряжений для бикватернионов

Учитывая, что бикватернионы и дикватернионы есть прямо удвоенные кватернионы, аналогичное *кватернионное сопряжение* $\bar{\mathbf{a}}$ для них можно ввести по очевидному правилу:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}} &= a_0 - a_1 \mathbf{q}_1 - a_2 \mathbf{q}_2 - a_3 \mathbf{q}_3, \\ & \text{(запись с комплексными коэффициентами),} \\ \bar{\mathbf{a}} &= a_0 - a_1 \mathbf{q}_1 - a_2 \mathbf{q}_2 - a_3 \mathbf{q}_3 + k_0 \mathbf{i}_0 - k_1 \mathbf{i}_1 - k_2 \mathbf{i}_2 - k_3 \mathbf{i}_3, \\ & \text{(полная запись с вещественными коэффициентами),} \\ \bar{\mathbf{a}} &= \overline{a + k \cdot \mathbf{i}_0} = \bar{a} + \bar{k} \cdot \mathbf{i}_0 \\ & \text{(сокращенная запись).}\end{aligned}\tag{15}$$

Однако, для изучения 4-нормы и 4-скалярного произведения в алгебрах бикватернионов и дикватернионов этого сопряжения, как мы увидим ниже, недостаточно. Введем поэтому второе, *дуальное кватернионное сопряжение* по следующему правилу (записи в той же последовательности):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}} &= a_0^* - a_1^* \mathbf{q}_1 - a_2^* \mathbf{q}_2 - a_3^* \mathbf{q}_3, \\ \tilde{\mathbf{a}} &= a_0 - a_1 \mathbf{q}_1 - a_2 \mathbf{q}_2 - a_3 \mathbf{q}_3 - k_0 \mathbf{i}_0 + k_1 \mathbf{i}_1 + k_2 \mathbf{i}_2 + k_3 \mathbf{i}_3. \\ \tilde{\mathbf{a}} &= \alpha + \widetilde{k \cdot \mathbf{i}_0} = \bar{\alpha} - \bar{k} \cdot \mathbf{i}_0\end{aligned}\tag{16}$$

Сопряжение $\tilde{\mathbf{a}}$ (16) также является инволюционным антиавтоморфизмом и поэтому заслуживает название сопряжения.

Теперь рассмотрим комбинацию сопряжений $\tilde{\tilde{\mathbf{a}}}$:

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{\mathbf{a}}} &= a_0^* + a_1^* \mathbf{q}_1 + a_2^* \mathbf{q}_2 + a_3^* \mathbf{q}_3, \\ \tilde{\tilde{\mathbf{a}}} &= a_0 + a_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3 - k_0 \mathbf{i}_0 - k_1 \mathbf{i}_1 - k_2 \mathbf{i}_2 - k_3 \mathbf{i}_3, \\ \tilde{\tilde{\mathbf{a}}} &= \overline{a + k \cdot \mathbf{i}_0} = a - k \cdot \mathbf{i}_0.\end{aligned}\tag{17}$$

Иначе говоря, это преобразование $\tilde{\tilde{\mathbf{a}}}$ есть *комплексное сопряжение*, внешнее для кватернионов a, k . Обозначим его $\mathbf{a}^*$. Оно является инволюцией и автоморфизмом (а не антиавтоморфизмом):

$$(\mathbf{a}^*)^* = \mathbf{a} \quad \text{и} \quad (\mathbf{ab})^* = \mathbf{a}^* \mathbf{b}^*.\tag{18}$$

Как следствие, выражение $\mathbf{aa}^*$, вообще говоря, изменяется при сопряжении своего рода (иначе говоря, не является инвариантным, реальным для него):

$$(\mathbf{aa}^*)^* = \mathbf{a}^* \mathbf{a} \neq \mathbf{aa}^*.\tag{19}$$

В связи с этим, комбинированное преобразование (комплексное сопряжение) $\mathbf{a}^*$, строго говоря, не является сопряжением данной алгебры.

Самое важное преимущество базового сопряжения $\bar{\mathbf{a}}$ (15) перед дуальным сопряжением $\tilde{\mathbf{a}}$ в том, что гиперкомплексные числа, реальные (инвариантные) относительно основного сопряжения $\bar{\mathbf{a}}$, содержат в себе только орты 1 и $\mathbf{i}_0$ и поэтому, подобно вещественным числам, коммутируют с любыми числами алгебры. Данное свойство кватернионного сопряжения и является источником ряда хороших свойств алгебр кватернионов, бикватернионов, а также октав и биоктав. Важно, что далеко не все алгебры располагают таким "хорошим" сопряжением. Во второй части статьи будут изучаться алгебры именно с таким сопряжением.

1.4. Обобщенно-ассоциативные свойства алгебр и классические теоремы об исключительности

Для упрощения дальнейших выкладок введем, как принято, *ассоциатор*

$$\{a, b, c\} \equiv (ab)c - a(bc). \quad (20)$$

С очевидностью он линеен по каждому из элементов. В ассоциативных алгебрах ассоциатор тождественно равен нулю. В альтернативных он антисимметричен по всем переменным:

$$\begin{aligned} \{a, b, b\} = 0 &\Leftrightarrow \{a, b, c\} = -\{a, c, b\} && \text{(правая альтернативность),} \\ \{a, a, b\} = 0 &\Leftrightarrow \{a, b, c\} = -\{b, a, c\} && \text{(левая альтернативность).} \end{aligned} \quad (21)$$

Как следствие, ассоциатор в альтернативных алгебрах цикличен:

$$\{a, b, c\} = \{c, a, b\}. \quad (22)$$

Альтернативные алгебры, с очевидностью, *эластичны*, т. е.

$$a \cdot ba = ab \cdot a, \quad \text{поскольку в них} \quad (23)$$

$$\{a, b, a\} = -\{a, a, b\} = 0.$$

Но обратное неверно: не всякая эластичная алгебра альтернативна. Отметим, что свойство эластичности с очевидностью эквивалентно

$$\{a, b, c\} = -\{c, b, a\}. \quad (24)$$

Легко показать, что всякая алгебра, полученная удвоением Кэли-Диксона (7) из эластичной квадратичной алгебры, также эластична и квадратична. Таким образом, эластична вся бесконечная цепочка алгебр Кэли-Диксона, начинающаяся с вещественных чисел.

Для физических приложений важно свойство *йордановости*:

$$a^2b \cdot a = a^2 \cdot ba \quad \text{или} \quad \{a^2, b, a\} = 0, \quad (25)$$

Как легко видеть, заменив в (25) a на $a + 1$, для алгебр с единицей из йордановости вытекает эластичность. В квадратичных алгебрах верно и обратное, но в общем случае это не так – йордановость уже (сильнее) эластичности.

Наконец, *моноассоциативными*, или *степенно ассоциативными* называют алгебры, в которых один элемент порождает ассоциативную подалгебру. Иначе говоря, в произведениях элемента на самого себя можно не следить за расстановкой скобок, заменяя все произведения на соответствующую степень элемента:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Как известно ([14]), алгебра над полем характеристики 0 будет моноассоциативна, если в ней выполняются два тождества:

$$\begin{aligned} a \cdot aa = aa \cdot a \quad \text{и} \quad aa \cdot aa = (aa \cdot a)a, \quad \text{т. е.} \\ \{a, a, a\} = 0, \quad \{a^2, a, a\} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Подытожим все сказанное в виде иерархии уровней ассоциативных свойств (из верхних уровней вытекают нижние, но вообще говоря не наоборот):

ассоциативность:	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} = \mathbf{ab} \cdot \mathbf{c}$		$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} = 0;$
альтернативность:	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{bb} = \mathbf{ab} \cdot \mathbf{b}$	$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} = -\{\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}\}$	$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}\} = 0$
вместе с	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{ab} = \mathbf{aa} \cdot \mathbf{b}$	$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} = -\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\}$	$\{\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\} = 0;$
йордановость:	$\mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{ba} = \mathbf{a}^2 \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$		$\{\mathbf{a}^2, \mathbf{b}, \mathbf{a}\} = 0;$
эластичность:	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{ba} = \mathbf{ab} \cdot \mathbf{a}$	$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} = -\{\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\}$	$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\} = 0;$
моноассоциативность:	$\mathbf{a}^n \cdot \mathbf{a}^m = \mathbf{a}^{n+m}$	$\{\mathbf{a}^2, \mathbf{a}, \mathbf{a}\} = 0$	$\{\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}\} = 0;$

Теперь можно привести классические теоремы об исключительных алгебрах (см. [1], [2], [12], [13]).

Теорема Гурвица: любая алгебра с единицей, обладающая мультипликативной положительно определенной нормой, изоморфна действительным числам либо комплексным числам, кватернионам или октавам.

Обобщенная теорема Фробениуса: любая альтернативная алгебра с делением изоморфна на одной из алгебр того же списка.

Теорема Алберта: альтернативными алгебрами с единицей, реальные элементы в которых суть вещественные числа и которые обладают невырожденной мультипликативной квадратичной формой, являются только алгебры комплексных и двойных чисел, кватернионы и антикватернионы, октавы и антиоктавы.

Теорема Цорна: единственными простыми конечномерными альтернативными неассоциативными алгебрами являются октавы, антиоктавы и биоктавы.

Обобщенная теорема Понтрягина: только вещественные, комплексные числа, кватернионы и октавы являются связными локально компактными альтернативными топологическими телами.

1.5. Краткая история применения гиперкомплексных алгебр в физике ([3], [4])

– Кватернионы и 3-мерные вращения.

Кватернионы – обертывающая алгебра для алгебры Ли группы 3-мерных вращений $SO(3)$. Группа автоморфизмов кватернионов $SU(2)$ локально изоморфна этой группе. Как следствие, кватернионы – естественный язык для машинного моделирования поворотов, для описания вращений твердого тела и для ньютоновой механики в целом.

– Бикватернионы и группа Лоренца.

Бикватернионы – обертывающая алгебра для алгебры Ли группы Лоренца $SO(1, 3)$. Группа автоморфизмов бикватернионов $SL(2, C)$ локально изоморфна этой группе. Как следствие, многие результаты частной теории относительности могут быть довольно органично записаны на языке бикватернионов.

– Аналитические функции от бикватернионов и уравнения Максвелла.

Прямолинейные попытки создать аналог теории функций комплексных переменных для кватернионов или бикватернионов не проходят, что связано с их некоммутативностью (см. [10]). Швейцарским математиком Фютером был предложен более тонкий вариант введения аналитичных кватернионных и бикватернионных функций от переменных того же рода, который стал фактически стандартным (хотя есть и несколько других, менее известных вариантов, см. [18], [19]). Уравнения Фютера, выражающие условие аналитичности бикватернионных переменных, совпали с уравнениями Максвелла (см. [4]).

– Бикватернионы и матрицы Паули.

Матрицы Паули, рассматриваемые с алгебраической точки зрения, изоморфны бикватернионам. Уже одно это показывает связь этой алгебры с квантовой механикой, в частности, с теорией спиноров.

– Октавы связаны с исключительными группами Ли, значение которых для физики в последнее время растет. Кроме того, октавы связаны с наиболее глубокими областями проективной геометрии. В целом, роль октав в физике остается не вполне проясненной.

Проблемы:

– Во всех этих успехах нет ясной системы.
 – Даже высшей классической исключительной алгебры – октав (а равно антиоктав) не хватает для "упаковки" всего богатства физики в духе программы Гамильтона. В связи с этим, имеет смысл изучить алгебры, псевдонорма которых имеет степень выше 2 (*поли-норма*), т. е. алгебры выше квадратичных (над полем вещественных чисел). Как минимум, это те же бикватернионы, а в перспективе биоктавы или иные алгебры. Правда, переход к алгебрам более высокой размерности затруднен, так как обостряется проблема лишних измерений (она есть уже для бикватернионов).

Вопрос о применении полинорм в физике независимо от автора ставился в работах Д. Г. Павлова и его группы ([17] и др.). Однако, перспектива применения в физике изучаемых ими коммутативно-ассоциативных алгебр выглядит неясной.

1.6. Нормы выше квадратичных – за и против

Отметим распространенные доводы против использования форм степени выше 2:

– Аргумент максимальной подвижности, выдвинутый Гельмгольцем и Ли: только в пространствах с квадратичной метрикой возможно вращение твердых тел, в прочих пространствах группа движений с фиксированной точкой беднее [5]. Аргумент не имеет решающей силы с позиций релятивистской и квантовой физики.

– Все классические простые группы Ли есть, как известно, группы инвариантности той или иной квадратичной формы. При этом все простые группы известны (перечислены в полной классификации Картана), а остальные невырожденные непрерывные группы сводятся к ним. Поскольку геометрии согласно Эрлангенской программе Клейна связаны с теми или иными группами, формы степени выше 2 выглядят излишними.

Можно выдвинуть и контраргументы в пользу использования полинорм:

– В современной физике применяются не только простые, но и полупростые группы (прямые произведения простых групп), а они приводят к формам выше квадратичных.

– Представления одной и той же абстрактной группы могут сильно отличаться по своим геометрическим характеристикам. Есть ситуации, когда группа, оставляющая инвариантной квадратичную форму в некотором пространстве, вместе с тем действует и как группа преобразований в совершенно другом пространстве (иной размерности), оставляя в нем инвариантной форму более высокой размерности, например, 4. С точки зрения математики, достаточно изучить лишь первый случай, второй излишен. С физической точки зрения это не так, поскольку а priori неясно, какое из этих пространств отвечает реальному миру.

– Исключительные группы (см. примеры ниже) явно связаны с формами выше 2 (прежде всего, антисимметричными).

Главная проблема в том, что переход к алгебрам с псевдонормой (формой) выше квадратичной открывает слишком много степеней свободы. Чтобы нащупать какой-то ясный путь, имеет смысл и здесь действовать в духе программы Гамильтона, рассматривая не все алгебры, а прежде всего чем-то замечательные, выделяющиеся среди прочих.

Общая идея подхода – искать какие-либо жесткие ограничения, исключительности в алгебрах выше квадратичных.

1.7. Мультипликативные полиномы

Самый простой и очевидный подход к полиномам – распространить на них условие мультипликативности 2-нормы $N(a \cdot b) = N(a)N(b)$. Это условие естественным образом связывает псевдонорму (форму) с умножением алгебры. В 1950–60-х гг. вопрос о мультипликативности форм степени выше 2 поставил и решил Ричард Д. Шафер [6]– [8] (с дополнениями К. МакКриммона [9]). Пусть V – векторное пространство, возможно ∞ -мерное, над полем F характеристики 0 или $p > n$. Отображение $\mathbf{u} \rightarrow N(\mathbf{u})$ V на F называется *формой степени n* на V в случае

$$N(\lambda \mathbf{u}) = \lambda^n N(\mathbf{u}) \quad \text{для любых } \lambda \in F, \mathbf{u} \in V.$$

Теорема Шафера. Пусть $\mathbb{U}$ – алгебра с единицей, вообще говоря бесконечномерная, над полем F характеристики 0 или $p > n$. Необходимое и достаточное условие для существования на $\mathbb{U}$ невырожденной формы N степени $n > 0$, допускающей композицию, состоит в том, что $\mathbb{U}$ является конечномерной сепарабельной альтернативной алгеброй $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{U}_r$, $\mathbb{U}_i$ – простые алгебры степени m_i , где

$$n = m_1 f_1 + \dots + m_r f_r,$$

удовлетворяется для положительных целых чисел f_i ($i = 1, \dots, r$). Более того, форма N на $\mathbb{U}$ задается посредством

$$N(\mathbf{u}) = [n_1(u_1)]^{f_1} \dots [n_r(u_r)]^{f_r}, \quad (27)$$

где $n_j(u_j)$ – форма, заданная на простой алгебре $\mathbb{U}_j$.

В теореме существенным является понятие *невырожденности* нормы степени n , которое вводится так: С каждой n -нормой связывается n -линейная форма n -скалярного произведения от n гиперкомплексных чисел по формуле Шафера:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = & \frac{1}{n!} \left[N(\mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_n) - \sum_{i=1}^n N(\mathbf{u}_1 + \dots + \check{\mathbf{u}}_i + \dots + \mathbf{u}_n) \right. \\ & \left. + \sum_{i < j} N(\mathbf{u}_1 + \dots + \check{\mathbf{u}}_i + \dots + \check{\mathbf{u}}_j + \dots + \mathbf{u}_n) - \dots + (-1)^{n-1} \sum N(\mathbf{u}_i) \right], \quad (28) \end{aligned}$$

где запись $\check{\mathbf{u}}_i$ означает, что $\mathbf{u}_i$ опущен. Легко видеть, что

$$N_n(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}), \quad \text{поскольку} \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k (n-k)^n = n!$$

Форма $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ имеет все свойства, которые естественно ожидать от обобщения понятия скалярного произведения. Она вещественна, симметрична относительно любых перестановок векторов, линейна по каждому из них (в частности, обращается в нуль, если один из векторов равен нулю). Более точно называть эту форму n -псевдоскалярным произведением, т. к. она вообще говоря не является положительно определенной.

По определению Шафера, формы степени n называются *невырожденными* в случае, если из $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = 0$ для всех $\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ вытекает $\mathbf{u}_1 = 0$.

Итак, в случае мультипликативных полиномов ситуация представляется достаточно ясной. Кроме того, условие мультипликативности вносит искомое ограничение, сужая круг рассматриваемых алгебр. Однако, возможно, это условие является слишком жестким. Мультипликативной полиномой обладают только ассоциативные алгебры и альтернативные (их мало; по-сути, они сводятся к октавам или антиоктавам над каким-либо центром, например, к комплексным или двойным октавам). Имеет смысл изучить, возможны ли какие-либо не столь жесткие ограничения, с более широким охватом.

1.8. Проблемы и предварительные выводы

– Фундаментальная проблема: *неясно, как связать (псевдо)норму с алгеброй, если она неассоциативна и неальтернативна*. Вероятно, не для всякой алгебры можно ввести норму, естественным образом связанную с ее таблицей умножения. Существование такой нормы является первым ограничением на алгебры.

– Очевидный путь ввести норму, используя умножение алгебры, – теорема Гамильтона-Кэли (или ее обобщение): любой элемент x алгебры удовлетворяет соотношению [6]

$$x^n - T_1(x)x^{n-1} + T_2(x)x^{n-2} - \dots + (-1)^n T_n(x)1 = 0, \quad \text{где } T_i(x) = C_n^i(\underbrace{x, \dots, x}_i, 1 \dots 1) \quad (29)$$

Однако, эта теорема заведомо верна только для ассоциативных и альтернативных алгебр. В любом случае для этого пути как минимум нужна моноассоциативность, т. е. надо иметь уверенность, что интересные для приложений в геометрии и физике алгебры должны обладать некоторым остатком ассоциативных свойств.

– Для существенно неассоциативных алгебр можно пойти другим путем: найти универсальный алгоритм, который порождает вещественное (комплексное) число для любого элемента данной алгебры. Однако это успешно работает, только если степень нормы не выше 4. Есть сильные аргументы, что для норм степени выше 4 в общем случае такого алгоритма не существует, – даже для ассоциативных алгебр. Точнее, такой алгоритм невыразим средствами самой алгебры (сложение, умножение + инволюции умножения). Для нахождения полинормы приходится переходить к определенному матричному представлению и считать детерминант. Отсутствие инвариантной записи плохо вяжется с духом геометрического подхода. Здесь просматривается некоторая аналогия с теорией Галуа. Отметим, что ограничение нормой 4 порядка не есть плохо, напротив это хорошо, поскольку является неким ограничением уже за пределами классических теорем Фробениуса – Гурвица. Возможно, требование, что норма должна быть не выше 4 степени, отделяет "хорошие" алгебры от "не очень хороших".

– Неоднозначное соответствие между существенно неассоциативными алгебрами и нормами. Нередко одну и ту же норму могут иметь несколько алгебр и, что еще хуже, одной алгебре соответствует несколько норм. Требование однозначности полинормы может рассматриваться как одно из ограничивающих, вводящих исключительность. По-видимому, это требование также эквивалентно выполнению в алгебре некоторых свойств ослабленной ассоциативности.

– Следующий вопрос возникает в связи с тем, что группа движений, оставляющих полинорму инвариантной, вообще говоря, не совпадает с группой автоморфизмов алгебры, т. е. набором преобразований, сохраняющих умножение алгебры. Основная идея геометрии состоит в том, что картина мира не должна зависеть от выбора угла зрения. Это должно выражаться в существовании некоторых инвариантов или, более общо, инвариантных соотношений, сохраняющихся при некоторых преобразованиях, считающихся допустимыми. Для ассоциативных и альтернативных алгебр в силу мультипликативности полинормы такие преобразования можно вводить посредством изометрий, ее сохраняющих: $A' = U \cdot A \cdot V$, где U и V – элементы алгебры с единичной нормой, $N_k(U) = N_k(V) = 1$. Возникают две копии групп и алгебр Ли, порождаемых коммутаторами исходной гиперкомплексной алгебры (т. е. обертывающей алгебры по отношению к ним). Однако, поскольку мы рассматриваем геометрию в контексте исходной алгебры, ее порождающей, интересна более сильная вещь, чем изометрия, – *автоморфизм*, независимость умножения $(A \cdot B)' = A' \cdot B'$. Известно, что для ассоциативных алгебр всякий автоморфизм является внутренним, т. е. порождается некоторым элементом алгебры U по формуле $A' = U \cdot A \cdot U^{-1}$. Тогда в ассоциативном случае возникает вместо двух одна группа и алгебра Ли, жестко порождаемая коммутаторами исходной гиперкомплексной алгебры. Отметим, что в узком случае

ассоциативно-коммутативных алгебр этот путь заблокирован, поскольку, как легко видеть, в них нет нетривиальных автоморфизмов.

Проблема состоит в том, что для неассоциативных алгебр не существует универсального алгоритма, дающего группу автоморфизмов. Поэтому становится актуальным вопрос: какой геометрический объект связан с автоморфизмами алгебры (инвариантен относительно них и только них), поскольку требования инвариантности полинормы недостаточно? Пример подсказывают кватернионы и октавы. В них, как известно, существует смешанное произведение (антисимметричная форма 3 степени), которое является скаляром, но при этом инвариантно относительно именно автоморфизмов, а не относительно всех изометрий (для октав группа автоморфизмов есть G_2 , в то время, как группа изометрий есть $SO(8)$). Сходным образом, для единственной исключительной йордановой алгебры Алберта размерности 27 группа автоморфизмов есть исключительная группа F_4 , а группа инвариантности формы 3 степени (детерминанта квазиматрицы), связанной с алгеброй Алберта, есть существенно более широкая исключительная группа E_6 . По-видимому, это говорит о том, что для геометрий, связанных с алгебрами, фундаментальным понятием является не симметрическая форма, а антисимметрическая (в частности, для классических квадратичных алгебр – не длина, а объем).

Если это так, то в центре внимания оказывается не только таблица умножения алгебры, но и система заданных на ней *сопряжений* (линейных инволюционных антиавтоморфизмов), поскольку сопряжения представляются необходимым языком для записи антисимметричных форм. В таком случае условием существования в алгебре нетривиальной группы автоморфизмов (которая всегда будет подгруппой группы изометрий) является наличие в ней сопряжений. Это также является важным ограничением.

– Просуммируем все найденные выше ограничения на алгебры, позволяющие связать с ними нетривиальные геометрии. Алгебра должна обладать полинормой, связанную с нею некоторым естественным образом (посредством формулы Гамильтона-Кэли или некоторого универсального алгоритма). Существование такого алгоритма гарантировано только для полинорм степени не выше 4, для норм более высокой степени этот алгоритм существует не для всех алгебр. Алгебре, по-видимому, должна соответствовать одна норма, а не несколько. Эта норма должна быть инвариантна относительно нетривиальной группы движений. Желательно также, чтобы алгебра обладала нетривиальной группой автоморфизмов, связанной с некоторым геометрическим объектом. В связи с этим, в алгебре должен существовать набор сопряжений (антиавтоморфизмов).

Все это подводит к общему выводу: перспективна какая-то разумная доза неассоциативности, когда уже возникают интересные вещи, которых нет в ассоциативном случае, и в то же время алгебра еще не слишком "искорежена" и можно выстроить мост от нее к геометрии.

Ниже будет разобран некоторый класс таких алгебр, которые являются естественным обобщением гиперкомплексных алгебр Кэли-Диксона.

Часть 2. Алгебры с центральным сопряжением

2.1. Основные теоремы

Далее везде будет подразумевается, что алгебры обладают единицей и что они заданы над полем характеристики 0 (поля вещественных и комплексных чисел).

Рассмотрение основывается на двух идеях: 1) рассмотрение набора сопряжений, заданных в алгебре, позволяет доказать многие факты довольно простым и общим образом; 2) правильное изучать полинормы, естественно возникающие в алгебрах, чем искусственно приписывать им квадратичную норму (как это нередко делается). (См. подробности в [22].)

Далеко не во всех гиперкомплексных алгебрах существует сопряжение, "плохих" гиперкомплексных алгебр без сопряжения несопоставимо больше. Под сопряжениями понимаются линейные инволюционные антиавтоморфизмы:

$$\begin{aligned} C(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) &= \lambda C(\mathbf{a}) + \mu C(\mathbf{b}) \quad (\lambda, \mu - \text{элементы центра, линейность}), \\ C(C(\mathbf{a})) &= \mathbf{a} \quad (\text{инволюция}), \\ C(\mathbf{a}\mathbf{b}) &= C(\mathbf{b}) \cdot C(\mathbf{a}) \quad (\text{антиавтоморфизм}). \end{aligned}$$

Благодаря этим свойствам, следующие выражения не изменяются при сопряжении:

$$\begin{aligned} \Re(\mathbf{a}) &= 1/2(\mathbf{a} + C(\mathbf{a})) \quad (\text{реальная часть } \mathbf{a}), \\ N_r &= \mathbf{a} \cdot C(\mathbf{a}), \quad N_l = C(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = N_r(C(\mathbf{a})) \quad (\text{правая и левая 2-нормы}) \end{aligned} \quad (30)$$

(назовем их *инвариантными* или *реальными* для данного сопряжения). При этом $\Re(C(\mathbf{a})) = \Re(\mathbf{a})$, но вообще говоря $N(C(\mathbf{a})) \neq N(\mathbf{a})$.

Для неквадратичных алгебр инвариантные выражения, вообще говоря, не являются вещественными числами. Однако, выражения $\mathbf{a} \cdot C(\mathbf{a})$ и $C(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}$ во многих алгебрах коммутируют со всеми элементами и вполне заслуживают название 2-нормы. Такое понимание (псевдо)нормы выглядит более правомерным, чем вещественное выражение в виде суммы или разности квадратов, никак не укорененное в свойствах алгебры.

Определение 1. *Сопряжение, реальные элементы которого принадлежат коммутативному и ассоциативному центру алгебры, будем называть **центральной**. (Другое название – **скалярное** сопряжение).*

Все реально изучаемые гиперкомплексные алгебры (в частности, все алгебры бесконечной цепочки Кэли-Диксона), со всеми их комплексификациями и гиперболическими удвоениями, есть алгебры с центральной сопряжением (обозначим их $\mathbb{A}_c$).

Для понимания того, что такое алгебры с центральной (скалярным) сопряжением важна следующая

Теорема 1. *Алгебра с центральной сопряжением $\mathbb{A}_c$ представляет собой внешнее (тензорное) произведение своего центра $\mathbb{Z}$ на некоторую квадратичную алгебру, т. е. является квадратичной алгеброй над некоторой унитарной (обладающей единицей) коммутативно-ассоциативной алгеброй $\mathbb{A}_0$.*

В самом деле, используя (30), видим, что для произвольного элемента алгебры $\mathbf{a}$ (n, t – некоторые элементы центра алгебры $\mathbb{A}_c$):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot C(\mathbf{a}) = n; \quad \mathbf{a} + C(\mathbf{a}) = 2t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot (2t - \mathbf{a}) = n \quad \text{или} \\ \mathbf{a}^2 - 2t(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} + n(\mathbf{a}) = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

что и означает, что алгебра $\mathbb{A}_c$ квадратична над своим центром; $t(\mathbf{a})$ – *след* (реальная часть) элемента $\mathbf{a}$, $n(\mathbf{a})$ – его (правая) 2-норма.

Конструкция алгебр над ассоциативно-коммутативными алгебрами, а не над полем, как это делается обычно, удобна тем, что позволяет единым образом рассматривать как алгебры над комплексными числами, так и алгебры над двойными числами.

Отметим также, что хотя алгебраические свойства квадратичных алгебр и алгебр $\mathbb{A}_c$ во-многом аналогичны, геометрические и топологические свойства связанных с ними многообразий могут существенно отличаться. Уже поэтому целесообразно различать квадратичные алгебры в строгом смысле (заданные над полем вещественных чисел)

и обобщенно-квадратичные алгебры (квадратичные над сепарабельными ассоциативно-коммутативными унитарными алгебрами A_0).

Принципиально важно также и то, что не всякие обобщенно-квадратичные алгебры над своим центром есть алгебры с центральным сопряжением. Чтобы прояснить этот вопрос, докажем ряд утверждений о квадратичных алгебрах.

Лемма 1. *Всякая обобщенно-квадратичная алгебра моноассоциативна.*

В самом деле, равенство (31) позволяет свести умножение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ к линейному по $\mathbf{a}$ члену, убрав скобку вместе с умножением, что и позволяет не заботиться о порядке расстановки скобок при перемножениях $\mathbf{a}$ на самое себя.

Введем важное понятие

Определение 2. *Отображение $\mathbf{a} \rightarrow \tilde{\mathbf{a}}$ назовем почти точным антиавтоморфизмом (почти-сопряжением), если оно отличается от антиавтоморфизма не более, чем на элемент $\mathbf{r}$ центра алгебры (в частном случае – на вещественное, комплексное или двойное число), т. е.*

$$\widetilde{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})} = \tilde{\mathbf{b}} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{r}$$

Введем и докажем следующую важную теорему.

Теорема 2. *В любой обобщенно-квадратичной алгебре существует инволюция, являющаяся почти точным центральным антиавтоморфизмом (т. е. оставляющая инвариантным центр алгебры).*

Доказательство. Мы предполагаем, что для всех элементов алгебры выполняется соотношение (31)

$$\mathbf{a}^2 - 2t(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} + n(\mathbf{a}) = 0,$$

где $t(\mathbf{a})$, $n(\mathbf{a})$ принадлежат алгебраически замкнутому ассоциативному и коммутативному центру алгебры, который не совпадает с самой алгеброй. Для самосогласованности определения мы должны также полагать, что центр представляет алгебру 1 порядка над самим собой, т. е. выполняется

$$r - t(r) = 0 \quad \text{или} \quad t(r) = r \quad (r \in \text{центру алгебры}). \quad (32)$$

Как следствие,

$$n(r) = r^2, \quad t(1) = 1, \quad n(1) = 1, \quad t(t(\mathbf{a})) = t(\mathbf{a}). \quad (33)$$

1. Несложно показать, что для всех элементов алгебры след линеен по аргументу, а норма имеет 2 порядок (для элементов центра это очевидно):

$$t(r\mathbf{a} + s\mathbf{b}) = r t(\mathbf{a}) + s t(\mathbf{b}); \quad n(r\mathbf{a}) = r^2 n(\mathbf{a}) \quad (r, s \in \text{центру алгебры}).$$

В самом деле, для $r\mathbf{a}$ как элемента алгебры выполняется

$$\begin{aligned} (r\mathbf{a}) \cdot (r\mathbf{a}) - 2t(r\mathbf{a}) \cdot r\mathbf{a} + n(r\mathbf{a}) &= 0, \quad \Rightarrow \\ r^2 \mathbf{a}^2 - 2t(r\mathbf{a}) \cdot r\mathbf{a} + n(r\mathbf{a}) &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Домножая (31) на r^2 и вычитая (34), имеем:

$$\begin{aligned} -2t(r\mathbf{a}) \cdot r\mathbf{a} + n(r\mathbf{a}) + 2r^2 t(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} - r^2 n(\mathbf{a}) &= 0, \quad \Rightarrow \\ 2ar [rt(\mathbf{a}) - t(r\mathbf{a})] + n(r\mathbf{a}) - r^2 n(\mathbf{a}) &= 0 \quad \text{или} \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}r_1 + r_2 = 0, \quad \text{где } r_1, r_2 \in \text{центру алгебры.}$$

Поскольку элемент $\mathbf{a}$ не принадлежит алгебраически замкнутому сепарабельному центру алгебры, то $r_1 = 0, r_2 = 0$, что завершает 1 этап доказательства.

2. Теперь мы можем рассмотреть *каноническое отображение* $\mathbf{a} \rightarrow \tilde{\mathbf{a}}$, заданное посредством

$$\tilde{\mathbf{a}} = 2t(\mathbf{a}) - \mathbf{a}. \quad (35)$$

Это отображение является инволюцией в силу (33):

$$\tilde{\tilde{\mathbf{a}}} = 2t(\tilde{\mathbf{a}}) - \tilde{\mathbf{a}} = 2t(2t(\mathbf{a}) - \mathbf{a}) - (2t(\mathbf{a}) - \mathbf{a}) = 4t(t(\mathbf{a})) - 2t(\mathbf{a}) - 2t(\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

По той же причине оно оставляет центр алгебры инвариантным

$$\tilde{r} = 2t(r) - r = 2r - r = r \quad (\text{в частности, } \tilde{1} = 1). \quad (36)$$

3. Теперь осталось доказать, что наше отображение является почти точным антиавтоморфизмом. Из (31) легко видеть, что

$$n(\mathbf{a}) = 2t(\mathbf{a})\mathbf{a} - \mathbf{a}^2 = \tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \tilde{\mathbf{a}}.$$

Это означает, что выполняется следующая Лемма:

Лемма 2. В квадратичных алгебрах совпадают правая и левая 2-нормы:

$$N_l(\mathbf{a}) \equiv \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a} = N_r(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}}. \quad (37)$$

Поляризуя 2- норму, введем для удобства 2-скалярное произведение.

$$2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = n(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - n(\mathbf{a}) - n(\mathbf{b}). \quad (38)$$

Оно с очевидностью принадлежит центру алгебры, симметрично по аргументам, а кроме того, как и норма, не будет разделяться на правое и левое:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_p = 1/2 (\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{a}}) = 1/2 (\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \tilde{\mathbf{b}}\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})_l = (\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})_p,$$

или иначе, в квадратичных алгебрах совпадают скалярные произведения элементов и скалярные произведения сопряженных к ним. С учетом (36) легко видеть,

$$n(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}); \quad 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{a}}); \quad 2(\mathbf{a}, 1) = \mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}} = 2t(\mathbf{a}); \quad (\mathbf{a}, r) = r(\mathbf{a}, 1).$$

Рассмотрим разность, которую можно назвать *дефектом антиавтоморфизма*:

$$\mathbf{x}\tilde{\mathbf{y}} - \widetilde{\mathbf{y}\mathbf{x}} = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (39)$$

Добавим и вычтем слева $\mathbf{y}\tilde{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{x}\tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{y}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\tilde{\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{y}\mathbf{x}} = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \text{т. е.}$$

$$2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - 2(\mathbf{y}\tilde{\mathbf{x}}, 1) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Откуда сразу видно, что дефект антиавтоморфизма принадлежит центру алгебры, что завершает доказательство теоремы. $\square$

Лемма 3. Дефект антиавтоморфизма является антисимметричной функцией от аргументов:

$$\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\lambda(\mathbf{y}, \mathbf{x}); \quad \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0. \quad (40)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - 2(\mathbf{y}\tilde{\mathbf{x}}, 1) + 2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - 2(\mathbf{x}\tilde{\mathbf{y}}, 1) = \\ &= 4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - 2(\mathbf{y}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}\tilde{\mathbf{y}}, 1) = 4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - 4((\mathbf{x}, \mathbf{y}), 1) = 0 \end{aligned} \quad \text{по (33).}$$

Кроме того, с очевидностью $\lambda(\mathbf{x}, 1) = 0$.

В каком случае дефект антиавтоморфизма равен 0, т.е. квадратичная алгебра является алгеброй с центральным сопряжением? Докажем ряд утверждений.

Теорема 3. Эластичные (и тем более альтернативные) квадратичные алгебры обладают строгим антиавтоморфизмом (т.е. сопряжением).

В самом деле, в эластичных алгебрах

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{ab} \cdot \mathbf{a}} &= \widetilde{\mathbf{a}} \cdot \widetilde{\mathbf{ab}} - \lambda(\mathbf{ab}, \mathbf{a}) = \widetilde{\mathbf{a}} \cdot \widetilde{\mathbf{ba}} - \widetilde{\mathbf{a}}\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}); \\ \widetilde{\mathbf{a} \cdot \mathbf{ba}} &= \widetilde{\mathbf{ba}} \cdot \widetilde{\mathbf{a}} - \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{ba}) = \widetilde{\mathbf{ab}} \cdot \widetilde{\mathbf{a}} - \widetilde{\mathbf{a}}\lambda(\mathbf{b}, \mathbf{a}) - \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{ba}) \quad \text{или} \\ &\widetilde{\mathbf{a}}\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \lambda(\mathbf{ab}, \mathbf{a}) = \widetilde{\mathbf{a}}\lambda(\mathbf{b}, \mathbf{a}) + \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{ba}) \quad \text{или} \\ &2\widetilde{\mathbf{a}}\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{ba}) - \lambda(\mathbf{ab}, \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Т.е. произвольный элемент $\widetilde{\mathbf{a}}$ оказывается принадлежащим центру алгебры, или же $\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ (и в правой части также 0).

Условие эластичности является достаточным, но не необходимым. Множество квадратичных алгебр с точным антиавтоморфизмом значительно шире множества эластичных алгебр. В следующем разделе будет приведен пример неэластичной квадратичной алгебры с точным антиавтоморфизмом. В отношении необходимых условий можно доказать две леммы.

Лемма 4. Отображение $\mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}$ в квадратичной алгебре является точным антиавтоморфизмом тогда и только тогда, когда возможно перестановка сомножителей под знаком реальной части:

$$Re(\mathbf{x}\mathbf{y}) = Re(\mathbf{y}\mathbf{x}).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{x}\tilde{\mathbf{y}} - \widetilde{\mathbf{y}\mathbf{x}} \Rightarrow \\ \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (\mathbf{x}\tilde{\mathbf{y}} - \widetilde{\mathbf{y}\mathbf{x}}, 1) = (\mathbf{x}\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\tilde{\mathbf{x}}, 1) \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda(\mathbf{x}, 1) = 0$, в этом выражении остаются лишь чисто мнимые части $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:

$$\lambda(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (-\mathbf{p}\mathbf{q} + \mathbf{q}\mathbf{p}, 1) = Re(\mathbf{q}\mathbf{p} - \mathbf{p}\mathbf{q}).$$

Лемма 5. Отображение $\mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}$ в квадратичной алгебре является точным антиавтоморфизмом тогда и только тогда, когда коммутатор произвольных элементов алгебры является чисто мнимым.

В самом деле,

$$\widetilde{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]} = \widetilde{\mathbf{ab}} - \widetilde{\mathbf{ba}} = \widetilde{\mathbf{ba}} - \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \widetilde{\mathbf{ab}} + \lambda(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = -[\widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}}] + 2\lambda(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = -[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + 2\lambda(\mathbf{b}, \mathbf{a})$$

(последнее равенство вытекает из того, что элементы центра коммутируют со всеми элементами алгебры).

Лемма 3 позволяет сразу же построить пример квадратичной алгебры с неточным антиавтоморфизмом ("испорченные" кватернионы, r – вещественное число).

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3 + r$	$-\mathbf{q}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3 - r$	-1	$\mathbf{q}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1

(Tab. N)

Отображение $\tilde{\mathbf{a}}$ меняет знак у орт $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$. Алгебра квадратична:

$$\mathbf{a} = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3$$

$$\mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ra_1a_2 - ra_2a_1 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Однако,

$$\widetilde{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2} = \widetilde{\mathbf{q}_3 + r} = -\mathbf{q}_3 + r \neq$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_2\tilde{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{q}_2\mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_3 - r.$$

В соответствии с теоремой 3, алгебра неэластична:

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1(-\mathbf{q}_3 - r) = \mathbf{q}_2 - r\mathbf{q}_1, \quad \text{но}$$

$$\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1 = (\mathbf{q}_3 + r)\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 + r\mathbf{q}_1$$

Отметим, что все результаты для обобщенно-квадратичных алгебр (например, их моноассоциативность) есть вместе с тем и результаты для алгебр с центральным сопряжением, но, вообще говоря, не обратно.

Итак, понятие алгебры с центральным сопряжением шире крайне узкого понимания гиперкомплексных алгебр как алгебр Кэли-Диксона, но уже предельно широкого их понимания как конечномерных алгебр с единицей.

Несложно доказать ряд утверждений об алгебрах с центральным сопряжением.

Теорема 4. *Всякая альтернативная алгебра с центральным сопряжением обладает мультипликативной (не всегда вещественной) 2-нормой $N_2 = \mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a}$.*

Для произвольной, уже неальтернативной алгебры с центральным сопряжением несложно доказать следующую теорему (результат новый):

Теорема 5. *Любая алгебра с центральным сопряжением (и более того, всякая квадратичная алгебра) монокомпозиционна, т.е. 2-норма квадрата элемента равна квадрату 2-нормы этого элемента:*

$$N_2(\mathbf{a}\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}), \quad \text{и более общо} \quad N_2(\mathbf{a}^k) = N_2(\mathbf{a})^k. \quad (41)$$

Лемма 6. *Во всякой эластичной алгебре с центральным сопряжением произведение трех элементов под знаком реальной части ассоциативно:*

$$Re(\mathbf{a}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = Re(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\mathbf{c}). \quad (42)$$

Для произведения произвольного числа элементов это не так: $\Re(\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\mathbf{d})) \neq \Re(\mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}))$.

Лемма 7. Во всякой эластичной алгебре с центральным сопряжением возможна циклическая перестановка 3 сомножителей под знаком реальной части.

$$Re(\mathbf{a} \cdot \mathbf{bc}) = Re(\mathbf{ab} \cdot \mathbf{c}) = Re(\mathbf{c} \cdot \mathbf{ab}) = Re(\mathbf{ca} \cdot \mathbf{b}) = Re(\mathbf{b} \cdot \mathbf{ca}). \quad \square \quad (43)$$

Введем теперь, по аналогии с кватернионами, левое и правое векторные произведения:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_l &\equiv Im(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = 1/2(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\mathbf{a}) \\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_p &\equiv Im(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}) = 1/2(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} - \mathbf{b}\bar{\mathbf{a}}) \end{aligned} \quad (44)$$

С очевидностью, выполняется:

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle = -\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_p = \langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle_l.$$

Отметим, что для векторных произведений

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \neq \langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle \quad \text{или} \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_p \neq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_l.$$

Вместо этого, в эластичных алгебрах с центральным сопряжением выполняется:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 = \langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle^2, \quad \text{т. е.} \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_p^2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_l^2, \quad (45)$$

однако, не является верным равенство

$$(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle)^2 \neq (\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle + \langle \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{d}} \rangle)^2.$$

В альтернативных алгебрах $\mathbb{A}_c$ верно тождество (более общее выражение мультипликативности 2-нормы)

$$N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2. \quad (46)$$

Несложно доказать, что в любых алгебрах с центральным сопряжением (но не в любых квадратичных алгебрах) выполняются следующие тождества ($\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} = \mathbf{ab} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{bc}$ – ассоциатор, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{ab} - \mathbf{ba}$ – коммутатор):

$$\begin{aligned} \{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]^2, \mathbf{c}, \mathbf{d}\} &\equiv 0 && \text{Тождество Клейнфельда} \\ [[\mathbf{a}, \mathbf{b}]^2, \mathbf{c}] &\equiv 0 && \text{Тождество Холла} \\ \Re(\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} + \{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\} + \{\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}) &\equiv 0 \end{aligned}$$

2.2. О геометрии и ассоциативности: алгебра, связанная с псевдонормой Минковского

Значение ассоциативных свойств для геометрии, естественно порождаемой алгеброй, можно проиллюстрировать на одном простом и наглядном примере. Можно вспомнить, что кватернионы имеют метрику сигнатуры $+4$, а антикватернионы – метрику сигнатуры $(+2, -2)$. Зададимся вопросом, какая алгебра соответствует напрямую метрике Минковского $(1, -3)$ $s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Таких алгебр можно сконструировать несколько, причем все они будут неассоциативны. По степени нарушения ассоциативности эти алгебры будут распадаться на два класса. Рассмотрим, к примеру, две таблицы умножения:

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	1	$\mathbf{q}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	1

(Tab. A)

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	1	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	1	$\mathbf{q}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	1

(Tab. B)

Сопряжение в таких алгебрах согласно Лемме 4 существует (т. е. является точным антиавтоморфизмом); оно задается обычным образом (все орты, кроме 1, полагаются мнимыми):

$$\bar{a} = a_0 \cdot 1 - a_1 \mathbf{q}_1 - a_2 \mathbf{q}_2 - a_3 \mathbf{q}_3, \quad \overline{ab} = \bar{b} \bar{a}.$$

Поскольку реальная часть элемента алгебр есть просто вещественное число, перед нами алгебры с центральным сопряжением. Естественная квадратичная норма также является вещественным числом и совпадает с метрикой Минковского:

$$a\bar{a} = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2.$$

Рассматриваемые алгебры неассоциативны и, более того, неальтернативны:

$$\mathbf{q}_3 \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1, \quad \text{но} \quad \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_3 \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_3(-\mathbf{q}_2) = -\mathbf{q}_1.$$

Вторая из алгебр даже не эластична (хотя согласно Лемме 1, она, как и все квадратичные алгебры, моноассоциативна).

Теперь рассмотрим непосредственные геометрические следствия этих свойств.

1) Поскольку алгебры *неассоциативны*, движения в них нельзя задать посредством внутренних автоморфизмов:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{u} \mathbf{a} \mathbf{u}^{-1}, \quad (47)$$

поскольку не проходит то, что проходит в ассоциативных алгебрах:

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} \mathbf{u}^{-1}) \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \mathbf{u}^{-1}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} \cdot (\mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{b} \mathbf{u}^{-1} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^{-1} = (\mathbf{a} \mathbf{b})'.$$

2) Поскольку алгебры *неальтернативны*, норма произведения не равна произведению норм, а значит движения в них нельзя задать посредством умножения на элемент (элементы) единичной нормы $\mathbf{e}$:

$$N_2(\mathbf{e} \mathbf{a}) \neq N_2(\mathbf{e}) N_2(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a}).$$

3) Поскольку вторая из алгебр *неэластична*, возникают проблемы с определением ортогональности чисто мнимых элементов (по идее, соответствующих векторам обычного трехмерного пространства). Чтобы убедиться в этом, можно доказать:

Теорема 6. В эластичных алгебрах с центральным сопряжением векторное произведение произвольных мнимых векторов ортогонально каждому из них [22]:

$$(\mathbf{q}, \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle) = 0.$$

Все это иллюстрирует, что требование порождать "хорошие" геометрии является довольно жестким ограничением для гиперкомплексных алгебр. Чрезмерное удаление от ассоциативности приводит к малосодержательным, по-видимому, геометриям.

2.3. Полинорма. 4-норма для бикватернионов, дикватернионов и биоктав

Используя теорему Вейерштрасса об ассоциативно-коммутативных алгебрах (утверждающую, что все такие алгебры без нильпотентных элементов разлагаются в прямую сумму вещественных и комплексных чисел), несложно доказать:

Теорема 7. Всякая альтернативная алгебра с центральным сопряжением (и сепарбельным центром) обладает невырожденной 2-нормой и вещественной невырожденной мультипликативной нормой степени n , выражающейся посредством набора инволюций

через исходную 2-норму. При этом степень нормы вдвое выше размерности центра алгебры $n = 2r$.

Поскольку n -норма строится на основе 2-нормы, многие ее свойства в альтернативных алгебрах с центральным сопряжением автоматически переносятся на n -норму и порождаемую ею n -скалярное произведение. Так,

$$N_n(\bar{\mathbf{u}}) = N_n(\mathbf{u}), \quad (\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \dots, \bar{\mathbf{u}}_n) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n), \\ (\mathbf{v}\mathbf{u}_1, \mathbf{v}\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{v}\mathbf{u}_n) = N_n(\mathbf{v})(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n).$$

Особенно легко получить вещественную норму алгебр бикватернионов, дикватернионов, биоктавов или диоктавов, она будет иметь степень 4. Алгоритм очевиден: 2-норма является здесь комплексным или двойным числом; умножив его на сопряженное, получим вещественное число [$*$ – комплексное или двойное сопряжение $(\mathbf{ab})^* = \mathbf{a}^*\mathbf{b}^*$, см. 1.3]:

$$N_4(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a})^* = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}})^* = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}^*\bar{\mathbf{a}}^* = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}^*). \quad (48)$$

В блочном виде 4-норма для алгебр бикватернионов (верхний знак) и дикватернионов равна:

$$N_4(\mathbf{a}) = N_4(a + k \cdot \mathbf{i}_0) = (N_2(a) \mp N_2(k))^2 \pm 4(a, k)^2, \quad (49)$$

а для биоктавов:

$$N_4(a + A \cdot \mathbf{e}_0 + k \cdot \mathbf{i}_0 + K \cdot \mathbf{f}_0) = (N_2(a) + N_2(A) - N_2(k) - N_2(K))^2 + 4((a, k) + (A, K))^2. \quad (50)$$

В покомпонентном виде 4-норма бикватернионов и дикватернионов равна:

$$N_4(\mathbf{a}) = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \mp (k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2))^2 \pm 4(a_0k_0 + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3)^2, \quad (51)$$

для биоктавов:

$$N_4(\mathbf{a}) = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 - K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 - K_3^2) \\ + 4(a_0k_0 + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + A_0K_0 + A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3)^2. \quad (52)$$

С очевидностью, все 4-нормы неотрицательны. Но они не являются положительно определенными (и не могут являться в силу теоремы Фробениуса): из факта $N_4(\mathbf{a}) = 0$ не следует $\mathbf{a} = 0$. (Поэтому более корректно говорить о *псевдонормах*.) Для дикватернионов достаточно взять $a = A$ и 4-норма будет = 0: Для бикватернионов ситуация несколько хитрее. Чтобы занулить 4-норму, нужно взять A равным по 2-норме a , и при этом перпендикулярным ему: $(a, A) = 0$. Например, $a = 3\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_3$, $A = 2\mathbf{i}_0 + 3\mathbf{i}_2$.

Формула мультипликативности 4-нормы алгебры биоктавов в кватернионной записи выглядит так (с помощью ряда преобразований ее несложно доказать и напрямую):

$$(N_2(a) + N_2(A) - N_2(k) - N_2(K))^2 + 4((a, k) + (A, K))^2. \\ (N_2(b) + N_2(B) - N_2(l) - N_2(L))^2 + 4((b, l) + (B, L))^2 = \\ = (N_2(ab - \bar{B}A - kl + \bar{L}K) + N_2(Ba + A\bar{b} - Lk - K\bar{l}) \\ - N_2(al - \bar{L}A + kb - \bar{B}K) - N_2(La + K\bar{b} + Bk + A\bar{l}))^2 \\ + 4((ab - \bar{B}A - kl + \bar{L}K, al - \bar{L}A + kb - \bar{B}K) \\ + (Ba + A\bar{b} - Lk - K\bar{l}, La + K\bar{b} + Bk + A\bar{l}))^2 \quad (53)$$

Это громоздкое в вещественных числах [22] тождество является непосредственным обобщением знаменитого тождества восьми квадратов. Более того, его можно считать максимальным и исключительным. Поскольку по теореме Цорна биоктавы – максимальная

простая альтернативная (неассоциативная) алгебра, то все тождества большей размерности, связанные с неассоциативными алгебрами, сведутся к данному или его фрагментам. Подобно формулам суммы квадратов, это тождество, случайное для вещественных чисел, является отражением существования алгебры биоктав.

Для бикватернионов (а также для дикватернионов, но не для биоктав) 4-норма может быть представлена в ином виде [22] :

$$N_4(\mathbf{a}) = N_4(a + k \cdot \mathbf{i}_0) = (N_2(a) - N_2(k))^2 + 4(a, k)^2 = (N_2(a) + N_2(k))^2 + 4\langle k, a \rangle^2. \quad (54)$$

Знание 4-нормы позволяет ввести *обратный элемент* для алгебр би(ди)кватернионов и биоктав (и вообще для любой алгебры с центральным сопряжением и нормой 4 порядка). Поскольку

$$N_4(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a})N_2^*(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}N_2^*(\mathbf{a}), \quad N_4(\bar{\mathbf{a}}) = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}N_2^*(\bar{\mathbf{a}}), \quad N_4(\bar{\mathbf{a}}) = N_4(\mathbf{a}),$$

то ясно, как ввести правый и левый обратный элемент (он, конечно, $\exists$ не всегда):

$$\mathbf{a}_p^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{a}}N_2^*(\mathbf{a})}{N_4(\mathbf{a})} = \frac{\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a}^* \bar{\mathbf{a}}^*}{N_4(\mathbf{a})}, \quad \mathbf{a}_l^{-1} = \frac{N_2^*(\bar{\mathbf{a}})\bar{\mathbf{a}}}{N_4(\mathbf{a})} \equiv \mathbf{a}_p^{-1}. \quad (55)$$

Поскольку $N_2(\bar{\mathbf{a}}) = N_2(\mathbf{a})$, то *правый и левый обратные элементы совпадают в любой алгебре с центральным сопряжением* – с любой степенью нормы, поскольку рассуждение легко обобщается. Т. о., обратный элемент существует для каждого элемента с ненулевой 4-нормой алгебры $\mathbb{A}_c$.

2.4. Четырехскалярное произведение для би(ди)-кватернионов и биоктав

Для случая $n = 4$ формула Шафера (28) выглядит так:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{1}{24} [& N_4(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) - N_4(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) - N_4(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d}) - N_4(\mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) \\ & - N_4(\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) + N_4(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + N_4(\mathbf{a} + \mathbf{c}) + N_4(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + N_4(\mathbf{a} + \mathbf{d}) \\ & + N_4(\mathbf{b} + \mathbf{d}) + N_4(\mathbf{c} + \mathbf{d}) - N_4(\mathbf{a}) - N_4(\mathbf{b}) - N_4(\mathbf{c}) - N_4(\mathbf{d})]. \end{aligned} \quad (56)$$

Учтя теперь формулу, выражающую для алгебр бикватернионов и биоктав 4-норму через 2-норму (48), и выражая 2-норму суммы через 2-скалярное произведение согласно (38), получаем после ряда упрощений формулу 4-скалярного произведения в алгебрах с центральным сопряжением с (псевдо)нормой 4 степени:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{1}{6} [& (\mathbf{a}, \mathbf{b})(\mathbf{c}^*, \mathbf{d}^*) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}^*, \mathbf{d}^*) + (\mathbf{a}, \mathbf{d})(\mathbf{b}^*, \mathbf{c}^*) \\ & + (\mathbf{c}, \mathbf{d})(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) + (\mathbf{b}, \mathbf{d})(\mathbf{a}^*, \mathbf{c}^*) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{a}^*, \mathbf{d}^*)]. \end{aligned} \quad (57)$$

Несложно вывести ряд полезных следствий из этой формулы. Так, при решении геометрических вопросов важны вещественные 4-формы от двух векторов. На основании 4-формы от 4 векторов их можно ввести две:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) = \frac{1}{6} [N_2(\mathbf{a})N_2^*(\mathbf{b}) + 4(\mathbf{a}, \mathbf{b})(\mathbf{a}, \mathbf{b})^* + N_2(\mathbf{b})N_2^*(\mathbf{a})], \quad (58)$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} [N_2(\mathbf{a})(\mathbf{a}, \mathbf{b})^* + (\mathbf{a}, \mathbf{b})N_2^*(\mathbf{a})], \quad (59)$$

а кроме того может оказаться полезной третья

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})(\mathbf{a}, \mathbf{b})^*. \quad (60)$$

Отметим также симметризованную форму:

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}[(N_2(\mathbf{a}) + N_2(\mathbf{b}))(\mathbf{a}, \mathbf{b})^* + (\mathbf{a}, \mathbf{b})(N_2^*(\mathbf{a}) + N_2^*(\mathbf{b}))] \quad (61)$$

С ее использованием формула 4-нормы суммы

$$\begin{aligned} N_4(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = \\ &= N_4(\mathbf{a}) + 4(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) + 6(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) + 4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) + N_4(\mathbf{b}) \end{aligned} \quad (62)$$

выглядит так:

$$N_4(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = N_4(\mathbf{a}) + N_4(\mathbf{b}) + N_2(\mathbf{a})N_2^*(\mathbf{b}) + N_2(\mathbf{b})N_2^*(\mathbf{a}) + 4\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} + 4\mathbf{a} \circ \mathbf{b} \quad (63)$$

Свойства форм $(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b})$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ весьма различны. В самом деле, как несложно подсчитать, симметричная форма $(\mathbf{j}_p, \mathbf{j}_p, \mathbf{j}_q, \mathbf{j}_q)$ для биоктав (и значит, в том числе, для октав, бикватернионов и дикватернионов) равна

$$\begin{aligned} (\mathbf{j}_p, \mathbf{j}_p, \mathbf{j}_q, \mathbf{j}_q) &= 1 \quad \text{при } p = q, \\ (\mathbf{j}_p, \mathbf{j}_p, \mathbf{j}_q, \mathbf{j}_q) &= \pm 1/3 \quad \text{при } p \neq q. \end{aligned} \quad (64)$$

Напротив, $\mathbf{j}_p \circ \mathbf{j}_q$ равен нулю не только тогда, когда 2-скалярное произведение $(\mathbf{j}_p, \mathbf{j}_q) = 0$, но и во всех случаях, когда орты $\mathbf{j}_p$ и $\mathbf{j}_q$ различны:

$$\begin{aligned} (\mathbf{j}_p, \mathbf{j}_p, \mathbf{j}_p, \mathbf{j}_q) &= 0 \quad \text{если } p \neq q, \quad \text{и поэтому} \\ \mathbf{j}_p \circ \mathbf{j}_q &= \delta_{pq}, \end{aligned}$$

Таким образом, отношение $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 0$ можно рассматривать как обобщение ортогональности векторов на случай форм 4 степени.

2.5. Четырехвекторное произведение для бикватернионов и биоктав

Имеет смысл пойти дальше результатов Шафера и обобщить не только скалярное, но и векторное произведение. Для алгебр бикватернионов, биоктав и им подобным четырехвекторное произведение можно предложить на основе следующей формулы:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle &= \frac{1}{6} [\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{c}^*, \mathbf{d}^* \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{d}^*, \mathbf{b}^* \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{b}^*, \mathbf{c}^* \rangle \\ &+ \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{a}^*, \mathbf{b}^* \rangle + \langle \mathbf{d}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{a}^*, \mathbf{c}^* \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{a}^*, \mathbf{d}^* \rangle]. \end{aligned} \quad (65)$$

Как легко видеть, 4-векторное произведение полностью антисимметрично относительно перестановок в любой паре векторов. Как и 2-векторное произведение, это не вещественное число, а гиперкомплексный вектор. В отличие от мнимого 2-векторного произведения, 4-векторное произведение реально относительно базового сопряжения $\bar{\mathbf{f}}$ (и содержит поэтому только орты 1 и $\mathbf{i}_0$). Можно показать, что если половина степени нормы $n/2$ – четное число, то n -векторное произведение будет реальным, при нечетном $n/2$ – мнимым (так, мнимо 2-векторное произведение кватернионов).

Если образовать 4-векторное произведение из кватернионов (алгебры с нормой степени 2, а не 4), получится вещественное число с ясным геометрическим смыслом. Как легко показать, оно равно детерминанту матрицы, составленной из координат всех 4-х векторов:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Т. о. 4-векторное произведение для кватернионов равно 4-объему параллелепипеда, натянутого на четыре вектора, т. е. совпадает с смешанным произведением 4 порядка.

2.5. Основные конструкции в матричном представлении

Для приложения введенных выше конструкций в геометрии и физике целесообразно увидеть, как они будут выглядеть в матричном представлении. Бикватернионы имеют точное матричное представление посредством комплексных матриц 2×2 . Это представление известно как алгебра матриц Паули.

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{i}_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{i}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{i}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{i}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В данном представлении бикватернион

$$\mathbf{a} = a_0 \cdot 1 + a_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3 + k_0 \mathbf{i}_0 + k_1 \mathbf{i}_1 + k_2 \mathbf{i}_2 + k_3 \mathbf{i}_3$$

записывается так:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + k_3 - ia_3 + ik_0 & -ia_1 - a_2 + k_1 - ik_2 \\ -ia_1 + a_2 + k_1 + ik_2 & a_0 - k_3 + ia_3 + ik_0 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Бикватернионному сопряжению (15)

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 \cdot 1 - a_1 \mathbf{q}_1 - a_2 \mathbf{q}_2 - a_3 \mathbf{q}_3 + k_0 \mathbf{i}_0 - k_1 \mathbf{i}_1 - k_2 \mathbf{i}_2 - k_3 \mathbf{i}_3$$

соответствует присоединенная матрица

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - k_3 + ia_3 + ik_0 & ia_1 + a_2 - k_1 + ik_2 \\ ia_1 - a_2 - k_1 - ik_2 & a_0 + k_3 - ia_3 + ik_0 \end{pmatrix}. \quad (67)$$

2-норма бикватерниона, понимаемая как комплексное число, равна детерминанту его матрицы, а с другой стороны, она может быть выражена через произведение матрицы бикватерниона на присоединенную ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}' = \text{Det } \mathbf{A} \cdot I$):

$$N_2(\mathbf{a}) = \text{Det } \mathbf{A} = \frac{1}{2} Sp(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}'). \quad (68)$$

Отсюда 2-скалярное произведение (комплексное число) есть:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{4} Sp(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}' + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}'). \quad (69)$$

Правое 2-векторное произведение (элемент алгебры) есть:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}' - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}'). \quad (70)$$

Дуальному кватернионному сопряжению (16)

$$\tilde{\mathbf{a}} = a_0 - a_1 \mathbf{q}_1 - a_2 \mathbf{q}_2 - a_3 \mathbf{q}_3 - k_0 \mathbf{i}_0 + k_1 \mathbf{i}_1 + k_2 \mathbf{i}_2 + k_3 \mathbf{i}_3$$

соответствует эрмитово-сопряженная матрица

$$\mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + k_3 + ia_3 - ik_0 & ia_1 + a_2 + k_1 - ik_2 \\ ia_1 - a_2 + k_1 + ik_2 & a_0 - k_3 - ia_3 - ik_0 \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Внешнему для кватернионов комплексному сопряжению (17) (равному комбинации сопряжений $\tilde{\mathbf{a}}$)

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^* = a_0 + a_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3 - k_0 \mathbf{i}_0 - k_1 \mathbf{i}_1 - k_2 \mathbf{i}_2 - k_3 \mathbf{i}_3$$

соответствует матрица

$$\mathbf{A}'^+ = \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a_{22}^* & -a_{21}^* \\ -a_{12}^* & a_{11}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - k_3 - ia_3 - ik_0 & -ia_1 - a_2 - k_1 + ik_2 \\ -ia_1 + a_2 - k_1 - ik_2 & a_0 + k_3 + ia_3 - ik_0 \end{pmatrix}. \quad (72)$$

Как следствие, 4-норма равна,

$$N_4(\mathbf{a}) = \frac{1}{4} Sp(\mathbf{A}\mathbf{A}') [Sp(\mathbf{A}\mathbf{A}')]^* = \frac{1}{4} Sp(\mathbf{A}\mathbf{A}') Sp(\mathbf{A}^* \mathbf{A}'^*) \quad (73)$$

а 4-скалярное произведение есть

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{1}{96} [& Sp(\mathbf{A}\mathbf{B}' + \mathbf{B}\mathbf{A}') Sp(\mathbf{C}^* \mathbf{D}'^* + \mathbf{D}^* \mathbf{C}'^*) + Sp(\mathbf{A}\mathbf{C}' + \mathbf{C}\mathbf{A}') Sp(\mathbf{B}^* \mathbf{D}'^* + \mathbf{D}^* \mathbf{B}'^*) + \\ & + Sp(\mathbf{A}\mathbf{D}' + \mathbf{D}\mathbf{A}') Sp(\mathbf{B}^* \mathbf{C}'^* + \mathbf{C}^* \mathbf{B}'^*) + Sp(\mathbf{C}\mathbf{D}' + \mathbf{D}\mathbf{C}') Sp(\mathbf{A}^* \mathbf{B}'^* + \mathbf{B}^* \mathbf{A}'^*) \\ & + Sp(\mathbf{B}\mathbf{D}' + \mathbf{D}\mathbf{B}') Sp(\mathbf{A}^* \mathbf{C}'^* + \mathbf{C}^* \mathbf{A}'^*) + Sp(\mathbf{B}\mathbf{C}' + \mathbf{C}\mathbf{B}') Sp(\mathbf{A}^* \mathbf{D}'^* + \mathbf{D}^* \mathbf{A}'^*)]. \quad (74) \end{aligned}$$

Все формулы значительно упрощаются в важном для приложений случае чисто мнимых бикватернионов ($a_0 = k_0 = 0$), шесть координат не равны 0. В этом случае

$$\bar{\mathbf{a}} = -\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}^* = -\tilde{\mathbf{a}}, \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{A}' = -\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^* = -\mathbf{A}^+.$$

Тогда 2-норма, 2-скалярное и 2-векторное произведения есть:

$$N_2(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}^2 = -\frac{1}{2} Sp(\mathbf{A}^2), \quad (75)$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\frac{1}{4} Sp(\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A}), \quad (76)$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{B}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{B}) = \frac{1}{2} [\mathbf{B}, \mathbf{A}] \quad (77)$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 = -N_2(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) = \frac{1}{8} Sp([\mathbf{A}, \mathbf{B}]^2). \quad (78)$$

($[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ – коммутатор матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}$). 4-норма и 4-скалярное произведение в данном случае равны

$$N_4(\mathbf{a}) = \frac{1}{4} Sp(\mathbf{A}^2) Sp(\mathbf{A}^{+2}) \quad (79)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{1}{96} [& Sp(\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A}) Sp(\mathbf{C}^+ \mathbf{D}^+ + \mathbf{D}^+ \mathbf{C}^+) + Sp(\mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{C}\mathbf{A}) Sp(\mathbf{B}^+ \mathbf{D}^+ + \mathbf{D}^+ \mathbf{B}^+) + \\ & + Sp(\mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{A}) Sp(\mathbf{B}^+ \mathbf{C}^+ + \mathbf{C}^+ \mathbf{B}^+) + Sp(\mathbf{C}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{C}) Sp(\mathbf{A}^+ \mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^+ \mathbf{A}^+) \\ & + Sp(\mathbf{B}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{B}) Sp(\mathbf{A}^+ \mathbf{C}^+ + \mathbf{C}^+ \mathbf{A}^+) + Sp(\mathbf{B}\mathbf{C} + \mathbf{C}\mathbf{B}) Sp(\mathbf{A}^+ \mathbf{D}^+ + \mathbf{D}^+ \mathbf{A}^+)]. \quad (80) \end{aligned}$$

Часть 3. Некоторые возможности применения полиномов алгебр с центральным сопряжением в физике

Как хорошо известно [4], электромагнитное поле довольно естественно описывается бикватернионными переменными, поэтому здесь логично искать приложение норм 4 порядка и иных конструкций для алгебр с центральным сопряжением.

3.1. 4-форма и элемент массы электромагнитного поля

Введем бикватернион электромагнитного поля

$$\mathbf{F} = \mathbf{q}_1 H_1 + \mathbf{q}_2 H_2 + \mathbf{q}_3 H_3 + \mathbf{i}_1 E_1 + \mathbf{i}_2 E_2 + \mathbf{i}_3 E_3 = \mathbf{H} + \mathbf{i}_0 \mathbf{E} \quad (81)$$

($\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ – чисто мнимые кватернионы, которые могут рассматриваться просто как 3-векторы). Его комплексная 2-норма равна

$$\begin{aligned} N_2(\mathbf{F}) &= H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2 + 2\mathbf{i}_0(H_1 E_1 + H_2 E_2 + H_3 E_3) = \\ &= \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2 + 2\mathbf{i}_0(\mathbf{H}, \mathbf{E}) = \mathbf{I}_s + 2 \cdot \mathbf{i}_0 \mathbf{I}_p, \end{aligned} \quad (82)$$

т.е. она составлена из скалярного $\mathbf{I}_s$ и псевдоскалярного $\mathbf{I}_p$ инвариантов электромагнитного поля, а 4-норма (вещественный скаляр):

$$\begin{aligned} N_4(\mathbf{F}) &= (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2)^2 + 4(H_1 E_1 + H_2 E_2 + H_3 E_3)^2 \\ N_4(\mathbf{F}) &= (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{H}, \mathbf{E})^2 = \mathbf{I}_s^2 + 4\mathbf{I}_p^2. \end{aligned} \quad (83)$$

Чтобы выявить скрытый смысл этого выражения, используем (54):

$$\begin{aligned} N_4(\mathbf{F}) &= (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{E}, \mathbf{H})^2 = (\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}^2)^2 + 4\langle \mathbf{H}, \mathbf{E} \rangle^2 \quad \text{или} \\ N_4(\mathbf{F}) &= (\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}^2)^2 - 4|\langle \mathbf{H}, \mathbf{E} \rangle|^2 \end{aligned} \quad (84)$$

(последний член ≤ 0). Т.о. 4-норма эл. магн. поля имеет ясный физический смысл: с точностью до коэффициента она является релятивистской нормой 4-вектора потока энергии-импульса поля, т.е. по сути представляет собой квадрат *плотности массы поля*. (Эта плотность $\neq 0$ в силу неаддитивности массы в релятивистской физике.) Несложно также показать, что 4-норма электромагнитного поля с точностью до коэффициента равна свертке тензора энергии-импульса поля с самим собой $T_{ik}T^{ik}$.

3.2. 4-форма и преобразование дуальности электромагнитного поля

В виде (84) становится очевидным, что 4-норма эл. магн. поля содержит скрытую симметрию кирального типа $U(1)$. Она инвариантна при замене

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} \cos \theta + \mathbf{H} \sin \theta \\ \mathbf{H}' &= -\mathbf{E} \sin \theta + \mathbf{H} \cos \theta, \end{aligned} \quad \text{т.е.} \quad (85)$$

$$\mathbf{F}' = (\mathbf{H} + \mathbf{i}_0 \mathbf{E})' = \mathbf{F} e^{\mathbf{i}_0 \theta} \quad (86)$$

Это – обобщенное преобразование дуальности, оставляющее, как известно, инвариантными уравнения Максвелла в вакууме [16]. При наличии зарядов его надо дополнить преобразованием

$$\begin{aligned} e' &= e \cos \theta + g \sin \theta \\ g' &= -e \sin \theta + g \cos \theta. \end{aligned} \quad (87)$$

где g – магнитный заряд. Частицы здесь несут одновременно оба типа зарядов, что впрочем не приводит к нетривиальным экспериментальным последствиям. Т.о., введение в рассмотрение 4-нормы эл. магн. поля позволяет прояснить природу обобщенной дуальной инвариантности уравнений Максвелла, скрытую при стандартном квадратичном подходе.

3.3. Связь с электродинамикой Борна-Инфельда

Вид (83) 4-нормы эл. магн. поля содержит в качестве одного из своих членов выражение, совпадающее с Максвелловским лагранжианом. Что получится, если использовать 4-норму при конструировании лагранжиана поля? Оказывается, это естественным путем ведет к электродинамике Борна-Инфельда. В самом деле, принцип соответствия подсказывает следующий вид модифицированного лагранжиана в первом нетривиальном приближении:

$$L' = L_0 + \Lambda,$$

где L_0 – Максвелловский лагранжиан, а Λ – малая в обычных условиях поправка. Т. е., модифицированный лагранжиан, использующий 4-норму поля, должен иметь в 1-м пост-максвелловском приближении следующий вид:

$$L' = -\frac{1}{8\pi} \left[(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) + \alpha ((\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{H}, \mathbf{E})^2) \right]. \quad (88)$$

Именно такое приближение дает электродинамика Борна-Инфельда. В самом деле, лагранжиан здесь, как известно, равен:

$$L = -\frac{1}{4\pi a^2} \left[\sqrt{1 + a^2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) - a^4(\mathbf{H}, \mathbf{E})^2} - 1 \right]. \quad (89)$$

Используя разложение корня $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2 - x^2/8$ и сохраняя члены до a^4 , получаем следующее соответствие с электродинамикой Максвелла:

$$\begin{aligned} L &\approx -\frac{1}{4\pi a^2} \left(1 + \frac{1}{2} a^2 (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) - \frac{1}{2} a^4 (\mathbf{H}, \mathbf{E})^2 - \frac{1}{8} a^4 (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 - 1 \right) = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \left((\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) - \frac{1}{4} a^2 ((\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{H}, \mathbf{E})^2) \right) \end{aligned}$$

т. е. в точности вид (88).

Преобразовав лагранжиан Борна-Инфельда к виду

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4\pi a^2} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{2} (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)\right)^2 - \frac{a^4}{4} ((\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{H}, \mathbf{E})^2)} - 1 \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi a^2} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{2} L_0\right)^2 - \frac{a^4}{4} N_4(\mathbf{F})} - 1 \right] \end{aligned}$$

можно увидеть, что сходная ситуация будет сохраняться во всех порядках: будут комбинироваться 2-норма (Максвелловский лагранжиан) и 4-норма эл. магн. поля (83), т. е. скаляры 2-го и 4-го порядка. Оговорим, что требование составлять лагранжиан из скаляров 2 и 4 порядка вместе с принципом соответствия жестко дает теорию Борна-Инфельда лишь в первом нетривиальном порядке. В следующих порядках этих условий недостаточно, чтобы зафиксировать коэффициенты, т. е. возникает некоторый теоретический произвол (диапазон теорий). Тем не менее, несомненно, что рассмотрение 4-нормы показывает естественность нелинейного обобщения электродинамики в теории Борна-Инфельда.

3.4. О лагранжиане модели Скирма

Проф. В. И. Санюк (РУДН) предложил выяснить, могут ли развитые выше алгебраические соображения дать обоснование модели Скирма ([20], [21]) ядерных взаимодействий. Т. Скирма создавал эту модель для описания барионов как протяженных локализованных структур с нетривиальным топологическим зарядом, который интерпретировался как барионное число. Модель оказалась простым и удачным прообразом эффективной

мезонной теории (в общем виде еще неизвестной), к которой должна сводиться квантовая хромодинамика в низкоэнергетическом пределе. В этом пределе сильные взаимодействия в значительной мере сводятся к обмену π -мезонами. В рамках модели Скирма удается удовлетворительным образом описывать спектроскопию основных состояний адронов и их взаимодействия.

Основной объект модели – *скирмионы* – представляют собой киральные топологические солитоны со спонтанно нарушенной киральной симметрией. Описывающее их киральное поле $U(x)$ принимает значения на полевым многообразии модели $\Phi = S^3 \simeq [SU(2)]$ и параметризуется изовекторным полем $\varphi^a(x)$, соответствующим триплету пионных полей:

$$U(x) = \varphi^0 + i(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\varphi}) = \exp[i(n^a\tau^a)\Theta(x)];$$

$$n^a = \varphi^a/|\boldsymbol{\varphi}|; \quad \sin \Theta = \pm|\boldsymbol{\varphi}|; \quad a = 1, 2, 3,$$
(90)

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, $\boldsymbol{\tau}$ – матрицы Паули, $\Theta(x)$ – киральный угол, $x = (x^0, \mathbf{x})$. Поля (90) подчинены естественным граничным условиям на пространственной бесконечности

$$U(x) \rightarrow \mathbf{I} \quad (\varphi^a(x) \rightarrow 0) \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$
(91)

где $\mathbf{I}$ – единичная 2×2 матрица.

Левоинвариантные киральные токи $l_\mu = U^{-1}\partial_\mu U$ принимают значения в алгебре Ли группы $SU(2)$. Динамика модели Скирма определяется плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\lambda^2}Sp(l_\mu l^\mu) + \frac{\varepsilon^2}{16}Sp([l_\mu, l_\nu][l^\mu, l^\nu]),$$
(92)

где ε, λ – параметры модели. Первый член совпадает с лагранжианом Вайнберга-Гюрши, который в "древесном" приближении хорошо воспроизводит результаты алгебры токов для низкоэнергетической динамики пионов. Второй член 4 порядка отвечает идее Скирма рассматривать барионы как вихри в некоторой жидкости, описываемой "обобщенными скоростями" l_μ .

Однако, поскольку лагранжиан модели Скирма не выводится напрямую из КХД и не является единственным обобщением лагранжиана Вайнберга-Гюрши, возникает вопрос о возможности его обоснования посредством алгебраических соображений.

Как легко видеть, в алгебраическом плане каждая из компонент токов l_μ представляет собой чисто мнимый кватернион. Это означает, что мы имеем дело с тензорным произведением алгебры бикватернионов (эрмитовы компоненты которой представляются матрицами Паули и отвечают пространству-времени) на алгебру кватернионов $B \otimes H$. Такая алгебра не является алгеброй с центральным сопряжением, поэтому здесь приходится расширять технику, изложенную выше. Можно показать, что в общем случае алгебра $B \otimes H$ обладает вещественной формой 8 степени. Однако в данном случае ситуация сильно упрощается благодаря тому, что не равны 0 только 12 компонент этой алгебры (по 3 чисто мнимых кватерниона на каждую из 4 эрмитовых компонент пространственно-временного бикватерниона). Благодаря этому псевдонорма сводится к форме 4 степени. Опустив за недостатком места вычисления, приведем конечный результат – в кватернионной записи 4-форма равна

$$N_4 = (|l_0|^2 - |l_1|^2 - |l_2|^2 - |l_3|^2)^2 +$$

$$+ 4(< l_2, l_3 >^2 + < l_3, l_1 >^2 + < l_1, l_2 >^2 - < l_0, l_1 >^2 - < l_0, l_2 >^2 - < l_0, l_3 >^2).$$
(93)

Используя формулы (77), (78) подраздела 2.5, можно перевести эту 4-форму на обычный тензорный язык:

$$N_4 = \frac{1}{4}(Sp(l_\mu l^\mu))^2 + \frac{1}{2}(Sp([l_\mu, l_\nu][l^\mu, l^\nu])).$$
(94)

В согласии с принципом соответствия и по аналогии с электродинамикой Борна-Инфельда естественно считать, что лагранжиан модели (в первом постлинейном приближении) должен представлять собой сумму вещественной части псевдонормы 2 порядка $N_2 = \frac{1}{2}Sp(l_\mu l^\mu)$ и псевдонормы 4 порядка в качестве малой поправки. Т.о. лагранжиан в этом приближении должен иметь вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= N_2 + \alpha N_4, \quad \text{или} \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{4\lambda^2}Sp(l_\mu l^\mu) + \frac{\varepsilon^2}{32}\left((Sp(l_\mu l^\mu))^2 + 2Sp([l_\mu, l_\nu][l^\mu, l^\nu])\right),\end{aligned}\quad (95)$$

Это выражение очень похоже на лагранжиан Скимма, в частности, естественным образом появляется нелинейный "вихревой член". Однако, в лагранжиане Скимма нет среднего члена. В связи с этим имеет смысл выяснить, улучшает ли добавление этого члена свойства модели.

Как и в электродинамике Борна-Инфельда, алгебраические соображения вместе с принципом соответствия определяют вид модифицированного лагранжиана Скимма (95) лишь в первом постлинейном порядке. В общем случае лагранжиан может представлять собой некоторую функцию, комбинирующую псевдонормы 2 и 4 порядка, т.е. опять же возникает диапазон теорий. В связи с этим, приведем согласованный с алгебраическими соображениями вид модифицированного лагранжиана в форме, сходной с электродинамикой Борна-Инфельда:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{\lambda^2}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}N_2\right)^2 - \frac{\varepsilon^2\lambda^2}{4}N_4} - 1\right] = \\ &= -\frac{1}{\lambda^2}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4}Sp(l_\mu l^\mu)\right)^2 - \frac{\varepsilon^2\lambda^2}{16}\left((Sp(l_\mu l^\mu))^2 + 2Sp([l_\mu, l_\nu][l^\mu, l^\nu])\right)} - 1\right].\end{aligned}\quad (96)$$

3.5. О моменте импульса

Имеет смысл поискать какие-либо аналоги подобных построений в механике. Тензор момента импульса также можно рассмотреть как бикватернион:

$$\mathbf{M} = \mathbf{q}_1 M_{23} + \mathbf{q}_2 M_{31} + \mathbf{q}_3 M_{12} + \mathbf{i}_1 M_{01} + \mathbf{i}_2 M_{02} + \mathbf{i}_3 M_{03} = \mathbf{K} + \mathbf{i}_0 \mathbf{L} \quad (97)$$

Его 2-норма и 4- нормы равны

$$\begin{aligned}N_2(\mathbf{M}) &= (M_{23}^2 + M_{31}^2 + M_{12}^2 - M_{01}^2 - M_{02}^2 - M_{03}^2) + 2\mathbf{i}_0(M_{23}M_{01} + M_{31}M_{02} + M_{12}M_{03}) = \\ &= \mathbf{K}^2 - \mathbf{L}^2 + 2\mathbf{i}_0(\mathbf{K}, \mathbf{L}) \\ N_4(\mathbf{M}) &= (\mathbf{K}^2 - \mathbf{L}^2)^2 + 4(\mathbf{K}, \mathbf{L})^2\end{aligned}$$

Однако, 4-норма здесь тривиально сводится к 2-норме, так как несложно показать, что $(\mathbf{K}, \mathbf{L}) = M_{23}M_{01} + M_{31}M_{02} + M_{12}M_{03} \equiv 0$. Квадратичность бикватерниона момента импульса тесно связана с квадратичностью релятивистского вектора энергии-импульса. Можно сказать, что для механики материальных точек, в отличие от теории поля, характерна квадратичность (величины 4 ранга не нужны).

Выводы

Поскольку 4-норма для алгебр бикватернионов и биоктав однозначно выражается через 2-норму (которая также является мультипликативной), неясно, насколько существенными будут те новые возможности, которые создает переход от комплексной (или двойной)

2-нормы к вещественной 4-норме. Точно так же неясно, дадут ли что-то принципиально новое 4-скалярное и 4-векторное произведения, поскольку и они выражаются через свои прототипы 2 степени. Тем не менее, как минимум выявляются некоторые новые связи между уже известными вещами, которые затухают при стандартном квадратичном подходе.

В любом случае, представляются интересными попытки придать квадраобъектам какой-либо геометрический и физический смысл. Некоторые первые попытки сделать это (прежде всего, для электромагнитного поля) представлены здесь. При этом возникает новый угол зрения на ряд привычных вопросов. В частности, рассмотрение связанной с бикватернионами вещественной 4-нормы показывает естественность перехода от электродинамики Максвелла к нелинейной электродинамике Борна-Инфельда. Кроме того, алгебраический подход показывает естественность добавления предложенного Т. Скирмом нелинейного члена в лагранжиан, описывающий ядерные взаимодействия посредством обмена пионами. При этом выявляется целесообразность введения дополнительного члена в лагранжиане Скирма, что предположительно может улучшить свойства модели. Т. о., алгебраическое рассмотрение позволяет внести некоторые дополнительные элементы жесткости в нелинейные полевые теории.

Благодарности

Автору приятно выразить свою признательность Ю. П. Рыбакову, И. В. Воловичу, участникам семинара отдела математической физики МИРАН за ценное обсуждение и, прежде всего, проф. В. И. Санюку за предложение применить описанную выше методику и конструкции к модели Скирма.

Литература

- [1] И. Л. Кантор и А. С. Солодовников. *Гиперкомплексные числа*, Наука, М. 1973.
- [2] John C. Baez. *The Octonions*. ArXiv: math-RA/0105155. Русский перевод: Баэз Джон С., *Октониионы*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (5)**, том 3, 2006, 120–176.
- [3] Я. Лыхмус, Э. Паал, Л. Соргесепп, "Неассоциативность в математике и физике". Труды института физики Академии наук Эстонии, вып. 66, 8–22.
- [4] А. В. Березин, Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев, "Кватернионы в релятивистской физике", Изд. 2, УРСС, М. 2003.
- [5] "Об основаниях геометрии". Сборник к столетию со дня смерти Лобачевского под ред. А. П. Нордена, М., ГИТТЛ, 1956.
- [6] R. D. Schafer. *On forms of degree n permitting composition*, J. Math. Mech. **12** (1963), 777–792. Русский перевод: Р. Д. Шафер, *О формах степени n , допускающих композицию*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, том 1, 2004, 140–154.
- [7] R. D. Schafer. *Forms permitting composition*, Advances in Mathematics **4**, 111–148 (1970).
- [8] R. D. Schafer. *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York, 1 изд. 1967, 2 изд. 1991.
- [9] K. McCrimmon. *Generically algebraic algebras*, Trans. Amer. math. Soc. **127** (1967), 527–551.
- [10] A. Sudbery, *Quaternionic Analysis*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1979), **85**, 199–225. Русский перевод: Э. Садбери, *Кватернионный анализ*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2**, том 1, 2004, 130–157.
- [11] Б. А. Розенфельд: *Многомерные пространства*, Наука, М. 1966.
- [12] Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский: *Геометрия групп Ли*, МЦНМО, М. 2003.
- [13] "Общая алгебра", том 1. Справочная математическая библиотека. М., "Наука", Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
- [14] А. Т. Гайнов. *Тождественные соотношения для бинарно левых колец*, Успехи мат. наук, 1957, т. 12, № 3, 141–146.

- [15] M. Bremner, L. Murakami, I. Shestakov, *Nonassociative algebras*. Chapter 69 of Handbook of Linear Algebra. ed. by L. Hogben. Chapman & Hall/ CRC, 2007.
- [16] В. И. Стражев, Л. М. Томильчик. Электродинамика с магнитным зарядом, "Наука и техника", Минск, 1975.
- [17] Д. Г. Павлов. *Четырехмерное время*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, том 1, 2004.
- [18] В. В. Кассандров, Кватернионный анализ и алгебродинамика, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2006, 3, 2 (6), 58–84.
- [19] С. В. Лютковский. *Дифференцируемые функции чисел Кэли-Диксона*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. **1 (3)**, том 5, 2005, 93–140
- [20] В. Г. Маханьков, Ю. П. Рыбаков, В. И. Санюк. *Модель Скурма и сильные взаимодействия (к 30-летию создания модели Скурма)*, УФН, том 162, №2, 1992, с. 1–61.
- [21] Ю. П. Рыбаков, В. И. Санюк. Многомерные солитоны, изд-во Российского унив-та дружбы народов, М., 2001.
- [22] А. А. Элиович. О норме бикватернионов и иных алгебр с центральным сопряжением, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2**, том 1, 2004, 24–50.
- [23] А. А. Элиович. От эфира к струнам (методологические размышления о современной физике) – в печати.

On polynorms on non-associative algebras and their possible applications to Physics

A. A. Eliovich

*Peoples Friendship University, Moscow;
Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fрязино, Russia
eliovich@mail.ru*

The paper contains several results regarding non-associative algebras, which are quadratic over their center. In particular, it is proved that in quadratic algebras there exists an almost exact automorphism. As a particular, but wide class of such algebras, is presented the notion of algebras with central conjugation, which are generalizations of the hypercomplex Cayley-Dickson algebras. It is proved, that alternative algebras with central conjugation are endowed with a multiplicative norm of order two (which is generally not real). As consequence, these algebras (in particular the bi-quaternions and the bi-octaves) have a multiplicative real poly-norm, which has several different, but equivalent, representations. Further are introduced the quadri-scalar and the quadri-vector products. For the example of the bi-quaternionic algebra, are examined several possibilities of applying the developed technique to Geometry and Physics. In particular, it is shown that the study of the 4-norm in the field theory provides a natural transition from the Maxwell electrodynamics to the Born-Infeld electrodynamics, and motivates the modified Lagrangian from the Skyrme model.

Key-words: non-associative algebras, quadratic algebras, central conjugation, poly-norms, Born-Infeld electrodynamics, Skyrme model.

MSC: 17D99, 46K70, 81V10.

О ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУРАХ КЭЛИ НА ШЕСТИМЕРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ СФЕР

Н. К. Смоленцев

Кемеровский государственный университет, Россия

smolen@kuzbass.net

В статье рассматриваются почти комплексные структуры Кэли на сфере S^6 и на произведениях сфер $S^1 \times S^5$, $S^2 \times S^4$ и $S^3 \times S^3$, которые естественно возникают при их вложении в алгебру октав Кэли. Показано, что все они являются неинтегрируемыми. Получено выражение фундаментальной формы для каждого случая через калибровки пространства $\mathbb{R}^7$, найдено выражение тензора Нейенхейса.

Ключевые слова: структуры Кэли, произведения сфер, интегрируемость, фундаментальные формы.

1. Введение. Хорошо известно [6], что на ориентируемом шестимерном подмногообразии M в алгебре $\mathbb{Ca}$ чисел Кэли может быть определена почти комплексная структура при помощи трехместного векторного произведения. Такая структура Кэли достаточно активно изучается в случае сферы $S^6 \subset \mathbb{R}^7 = Im(\mathbb{Ca})$, [2], [4], [3], [11], [14]. Структуры Кэли на произведениях сфер $S^1 \times S^5$, $S^2 \times S^4$ и $S^3 \times S^3$ пока не столь популярны. Напомним, что на произведениях нечетномерных сфер имеется комплексная структура, определенная Екманом и Калаби [10], см. также [12]. Для произведений четномерных сфер ситуация значительно сложнее. Единственный нетривиальный случай существования почти комплексной структуры на произведениях четномерных сфер дает произведение $S^2 \times S^4$ [5]. Вопрос о существовании интегрируемой почти комплексной структуры в настоящее время открыт как для $S^2 \times S^4$, так и для S^6 . Известно, что ортогональные почти комплексные структуры J на S^6 со стандартной метрикой g_0 не интегрируемы [11]. В работе [1] показано, что неинтегрируемыми будут почти комплексные структуры J , ортогональные относительно метрик, близких к стандартной. Среди ортогональных почти комплексных структур J на (S^6, g_0) почти комплексная структура Кэли J_c занимает особое место. В работе [3] показано, что для структуры Кэли объем многообразия $J_c(S^6)$ в пространстве ортогональных комплексных структур в $\mathbb{R}^8$ является минимальным среди всех других ортогональных почти комплексных структур на S^6 . В работе [13] для структуры Кэли J_c на сфере получены явные выражения фундаментальной формы и ее внешнего дифференциала через калибровки пространства $\mathbb{R}^7$, найден тензор Нейенхейса через тройное векторное произведение и показано, что фундаментальная форма ω является собственной для оператора Лапласа.

1.1. Числа Кэли. Пусть $\mathbb{Ca}$ – алгебра чисел Кэли, т. е. чисел вида $x = x^0 + x^1 e_1 + \dots + x^7 e_7$, где $x^i \in \mathbb{R}$, а числа $e_1, \dots, e_7$ – мнимые единицы. Квадрат каждой мнимой единицы равен -1 ; правила их перемножения задаются таблицей:

$\times$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_3$	0	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	0	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	0	e_1	e_2	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	0	$-e_3$	e_2
e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	0	$-e_1$
e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	0

Если $x^0 = 0$, то число Кэли x называется чисто мнимым. Будем записывать число Кэли x в виде $x = x^0 + X$, где x^0 – действительная часть и $X = x^1 e_1 + \dots + x^7 e_7$ – чисто мнимая часть.

Алгебра Кэли $\mathbb{Ca}$ имеет операцию сопряжения, $\bar{x} = x^0 - X$, которая обладает свойством $\bar{x} \bar{y} = \overline{xy}$ и позволяет определить естественным образом скалярное произведение и норму: $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x})$, $|x|^2 = x\bar{x}$. Формула $X \times Y = \frac{1}{2}(XY - YX)$ определяет векторное произведение в пространстве $\text{Im}(\mathbb{Ca})$ чисто мнимых чисел Кэли.

Алгебра чисел Кэли $\mathbb{Ca}$ неассоциативна, т.е. $(xy)z \neq x(yz)$. Ассоциатором называется выражение $[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$. Ассоциатор кососимметричен по всем аргументам, что сразу следует из следующих хорошо известных свойств алгебры Кэли:

- альтернативность, $(xx)y = x(xy)$, $x(yy) = (xy)y$, $x(yx) = (xy)x$, т.е. $[x, x, y] = 0$, $[x, y, y] = 0$, $[x, y, x] = 0$, а также $(x\bar{x})y = x(\bar{x}y)$, $x(\bar{y}y) = (x\bar{y})y$, т.е. $[x, \bar{x}, y] = 0$ и $[x, \bar{y}, y] = 0$;
- тождества Муфанг, $((xy)z)y = x(yzy)$, $(xyx)z = x(y(xz))$, $(xy)(zx) = x(yz)x$;
- иордановость, $(xx)y = xx(xy)$, т.е. $[xx, y, x] = 0$.

Напомним еще ряд свойств алгебры Кэли: $\langle xy, zy \rangle = \langle x, z \rangle \langle y, y \rangle$, $\langle xw, y \rangle = \langle x, y\bar{w} \rangle$, $\langle wx, y \rangle = \langle x, \bar{w}y \rangle$, $(xu)\bar{v} + (xv)\bar{u} = 2x\langle u, v \rangle$, $u(\bar{v}x) + v(\bar{u}x) = 2x\langle u, v \rangle$.

1.2. Векторное произведение в $\mathbb{R}^7 = \text{Im}(\mathbb{Ca})$. Пространство $\mathbb{R}^7 = \text{Im}(\mathbb{Ca})$ мнимых октав наследует из $\mathbb{Ca}$ скалярное произведение $\langle X, Y \rangle$ и векторное произведение $X \times Y$, которые определяются как вещественная и чисто мнимая части произведения XY :

$$\langle X, Y \rangle = -\text{Re}(XY), \quad X \times Y = \text{Im}(XY). \quad (1.1)$$

Это сразу следует из формулы: $xy = (x^0 y^0 - \langle X, Y \rangle) + x^0 Y + y^0 X + X \times Y$. Легко видеть, что векторное произведение $X \times Y$ билинейно, кососимметрично и ортогонально каждому из сомножителей.

Смешанное произведение определяется равенством $(XYZ) = \langle X, Y \times Z \rangle = \langle X \times Y, Z \rangle$ и представляет собой кососимметричную 3-форму, которая называется *ассоциативной калибровкой* [8] пространства $\mathbb{R}^7 = \text{Im}(\mathbb{Ca})$ и обозначается буквой φ ,

$$\varphi(X, Y, Z) = \langle X, Y \times Z \rangle. \quad (1.2)$$

Если $\omega_{pqr} = dx_p \wedge dx_q \wedge dx_r$, то калибровка φ имеет следующее выражение:

$$\varphi = \omega_{123} - \omega_{167} + \omega_{257} - \omega_{356} + \omega_{145} + \omega_{246} + \omega_{347}.$$

Тройное векторное произведение определяется равенством

$$[XYZ] = (X \times Y) \times Z - \langle X, Z \rangle Y + \langle Y, Z \rangle X = -X \times (Y \times Z) + \langle X, Z \rangle Y - \langle X, Y \rangle Z. \quad (1.3)$$

Тройное векторное произведение связано с ассоциатором следующей формулой: $[X, Y, Z] = 2[XYZ]$.

Нам потребуются также следующие свойства векторного произведения, которые сразу следуют из равенства (1.3).

Если $n, Y, Z \in \mathbb{R}^7$ и если $Y, Z \perp n$, то

$$(n \times Y) \times Z = -n \times (Y \times Z) - \langle Y, Z \rangle n.$$

Если n – чисто мнимый вектор единичной длины, то для любого $Z \in \mathbb{R}^7$,

$$n \times (n \times Z) = -Z + \langle n, Z \rangle n.$$

Отсюда следует, что для любых $X, Y \in \mathbb{R}^7$ имеет место равенство

$$\langle n \times X, n \times Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \langle X, n \rangle \langle Y, n \rangle.$$

Коассоциативная калибровка [8] пространства $\mathbb{R}^7 = \text{Im}\mathbb{C}\mathfrak{a}$ – это внешняя 4-форма ψ , определенная равенством

$$\psi(X, Y, Z, W) = \frac{1}{2} \langle X, [Y, Z, W] \rangle = \langle X, [YZW] \rangle. \quad (1.4)$$

Калибровка ψ имеет следующее выражение в стандартных координатах $\mathbb{R}^7$:

$$\psi = \omega_{4567} - \omega_{4523} - \omega_{4163} - \omega_{4127} + \omega_{2367} + \omega_{1357} + \omega_{1256}.$$

Легко видеть, что формы φ и ψ связаны соотношением $\psi = *\varphi$, где $*$ – оператор Ходжа.

1.3. Векторное произведение на алгебре Кэли. Напомним, что векторным (r -местным) произведением на n -мерном евклидовом пространстве V называется [6] полилинейное отображение $P : V^r \rightarrow V$, $r = 1, \dots, n$, обладающее свойствами

$$\langle P(x_1, \dots, x_r), x_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

$$\|P(x_1, \dots, x_r)\|^2 = \det(\langle x_i, x_j \rangle).$$

Одноместное векторное произведение на V есть ортогональная комплексная структура J . Двухместное векторное произведение существует только в размерности 3 и 7. На семимерном пространстве V двухместное векторное произведение изоморфно введенному выше векторному произведению на пространстве $\text{Im}(\mathbb{C}\mathfrak{a})$ чисто мнимых чисел Кэли. Как известно [6], на алгебре Кэли $\mathbb{C}\mathfrak{a}$ трехместное векторное произведение определено формулами:

$$P(x, y, z) = -(x\bar{y})z + \langle x, y \rangle z + \langle y, z \rangle x - \langle z, x \rangle y, \quad (1.5)$$

$$P_1(x, y, z) = -x(\bar{y}z) + \langle x, y \rangle z + \langle y, z \rangle x - \langle z, x \rangle y,$$

Отметим, что если векторы x, y, z взаимно ортогональны, то $P(x, y, z) = -(x\bar{y})z$. Легко видеть также, что операция сопряжения определяет антиизоморфизм этих векторных произведений. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать на $\mathbb{C}\mathfrak{a}$ только первое векторное произведение P , заданное формулой (1.5).

Из свойств векторного произведения сразу следует, что 4-форма

$$\Phi(x, y, x, u) = \langle P(x, y, z), u \rangle \quad (1.6)$$

является кососимметрической. Простые вычисления [13] показывают, что

$$\Phi = dx_0 \wedge \varphi + \psi, \quad (1.7)$$

где φ и ϕ – введенные ранее ассоциативная и коассоциативная калибровки. Легко также видеть, что форма Φ является антиавтотдуальной, $*\Phi = -\Phi$.

Понятие векторного произведения естественно определяется и на римановых многообразиях. При этом имеет место следующее свойство.

Теорема 1. ([6]) Пусть P_M – r -местное векторное произведение на римановом многообразии M и N – ориентируемое подмногообразие коразмерности k в M . Тогда P_M определяет $(r-k)$ -местное векторное произведение P_N на подмногообразии N по формуле

$$P_N(X_1, \dots, X_{r-k}) = P_M(n_1, \dots, n_k, X_1, \dots, X_{r-k}), \quad (1.8)$$

где $n_1, \dots, n_k$ – локально определенный ортонормированный базис нормального расслоения к подмногообразию N .

Из этой теоремы следует, что любое семимерное ориентируемое подмногообразие M^7 в алгебре $\mathbb{Ca} = \mathbb{R}^8$ имеет двухместное векторное произведение, а любое шестимерное ориентируемое подмногообразие $N \subset \mathbb{R}^8$ имеет почти комплексную структуру (одноместное векторное произведение), определенную формулой $J(X) = P(n_1, n_2, X)$. В частности, любое шестимерное ориентируемое подмногообразие $N \subset M^7$ имеет почти комплексную структуру.

2. Структура Кэли. Возьмем разложение $\mathbb{Ca} = \mathbb{R}^8$ на две ортогональные плоскости $\mathbb{Ca} = E^p \oplus E^q$, $p + q = 8$, причем так, что первая плоскость E^p содержит вещественную ось пространства $\mathbb{Ca}$. В каждой плоскости E^p и E^q рассмотрим единичную сферу S^{p-1} и S^{q-1} . Их произведение $S^{p-1} \times S^{q-1}$ является шестимерным ориентируемым подмногообразием в $\mathbb{R}^8$ и, поэтому, имеет почти комплексную структуру, определенную формулой $J(X) = P(n_1, n_2, X)$, где $n_1(x) = x \in S^{p-1}$ и $n_2(y) = y \in S^{q-1}$ – нормальные векторы сфер, а X – касательный вектор к произведению сфер. Поскольку второй вектор n_2 – чисто мнимый и все векторы n_1 , n_2 и X взаимно ортогональны, то по формуле (1.5) получаем следующую формулу для почти комплексной структуры на произведении сфер:

$$J(X) = P(n_1, n_2, X) = (n_1 n_2)X, \quad X \in T_{(n_1, n_2)} S^{p-1} \times S^{q-1}. \quad (2.1)$$

Отметим, что поскольку n_1 и n_2 являются ортогональными, единичной длины и n_2 – чисто мнимый вектор, то их произведение $n = n_1 n_2$ является чисто мнимым единичным вектором. Поэтому при фиксированных n_1 и n_2 , формула $J(X) = (n_1 n_2)X$ определяет комплексную структуру во всем пространстве $\mathbb{Ca}$. Действительно, для $n = n_1 n_2$ имеем: $J^2(X) = n(nX) = (nn)X = -X$. Поскольку n_1 и n_2 являются ортогональными и n_2 – чисто мнимый, то

$$P(n_1, n_2, X) = (n_1 n_2)X + \langle n_2, X \rangle n_1 - \langle n_1, X \rangle n_2.$$

Поэтому получаем следующее выражение для оператора почти комплексной структуры на пространстве $\mathbb{Ca}$:

$$J(X) = P(n_1, n_2, X) - \langle n_2, X \rangle n_1 + \langle n_1, X \rangle n_2. \quad (2.2)$$

Отсюда, в частности, следует, что $J(n_1) = n_2$ и $J(n_2) = -n_1$, а также

$$\langle J(X), n_1 \rangle = -\langle X, n_2 \rangle \quad \text{и} \quad \langle J(X), n_2 \rangle = \langle X, n_1 \rangle. \quad (2.3)$$

Оператор J комплексной структуры на $\mathbb{Ca}$ зависит от векторов $(n_1, n_2) \in S^{p-1} \times S^{q-1}$. Легко видеть, что эту зависимость можно продолжить на открытое всюду плотное множество $E^{p,q}$ в $\mathbb{Ca}$, являющееся произведением плоскостей E^p и E^q с выкинутыми нулями,

$$E^{p,q} = (E^p \setminus \{0\}) \times (E^q \setminus \{0\}) \subset \mathbb{Ca}. \quad (2.4)$$

Элементы пространства $E^{p,q}$ будем записывать в виде $x = (x_1, x_2)$, где $x_1 \in E^p$ и $x_2 \in E^q$. Для каждой точки $x \in E^{p,q}$ определены два ортогональных единичных вектора,

$$n_1(x) = \frac{x_1}{\|x_1\|}, \quad n_2(x) = \frac{x_2}{\|x_2\|}. \quad (2.5)$$

Тогда оператор J_x почти комплексной структуры на восьмимерном многообразии $E^{p,q}$ в точке $x = (x_1, x_2)$ определим по той же формуле

$$J_x(X) = (n_1(x) n_2(x))X, \quad X \in T_x E^{p,q} = \mathbb{Ca}. \quad (2.6)$$

Определение 1. Почти комплексную структуру J на $E^{p,q} = (E^p \setminus \{0\}) \times (E^q \setminus \{0\}) \subset \mathbb{Ca}$, определенную формулой (2.6) будем называть почти комплексной структурой Кэли.

Найдем выражение тензора Нейенхейса $N(X, Y) = 2([JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y])$ структуры Кэли на $E^{p,q}$. Для вычисления $N(X, Y)$ нам потребуется производная $D_X(J)$ тензорного поля J в направлении вектора X . $D_X(J)(Y) = D_X((n_1 n_2)Y) - (n_1 n_2)(D_X Y)$. Поскольку пространство $E^{p,q}$ является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^8$, то можно считать векторы X, Y параллельными векторными полями на $E^{p,q}$ и тогда $D_X(J)(Y) = D_X(n_1 n_2)Y$. Производная единичных векторов n_1 и n_2 в направлении вектора $X = (X_1, X_2)$ в точке $x = (x_1, x_2)$ находится простым дифференцированием указанных выше формул (2.5) для n_1 и n_2 ,

$$dn_1(X) = \frac{1}{\|x_1\|} (X_1 - \langle X, n_1 \rangle n_1), \quad dn_2(X) = \frac{1}{\|x_2\|} (X_2 - \langle X, n_2 \rangle n_2),$$

Поэтому из формулы $D_X(J)(Y) = D_X(n_1 n_2)Y = (dn_1(X)n_2 + n_1 dn_2(X))Y$ получаем следующую формулу для производной почти комплексной структуры на $E^{p,q}$:

$$D_X(J)(Y) = \frac{1}{\|x_1\|} (X_1 n_2)Y + \frac{1}{\|x_2\|} (n_1 X_2)Y - \left(\frac{1}{\|x_1\|} \langle X, n_1 \rangle + \frac{1}{\|x_2\|} \langle X, n_2 \rangle \right) (n_1 n_2)Y.$$

В частности, в точках произведения сфер $S^{p-1} \times S^{q-1}$ мы имеем: $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, поэтому

$$D_X(J)Y = (X_1 n_2)Y + (n_1 X_2)Y - (\langle X, n_1 \rangle + \langle X, n_2 \rangle)(n_1 n_2)Y. \quad (2.7)$$

Для векторов X, Y , ортогональных $S^{p-1} \times S^{q-1}$ получаем:

$$D_X(J)(Y) = (X_1 n_2)Y + (n_1 X_2)Y. \quad (2.8)$$

Напомним, что нижний индекс у векторов X_1 и X_2 обозначает компоненты вектора X в пространствах E^p и E^q , соответственно.

Вычислим теперь все слагаемые тензора Нейенхейса $N(X, Y) = 2([JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y])$ структуры Кэли на $E^{p,q}$ в точках произведения сфер и для векторов X, Y , ортогональных произведению сфер. Поскольку X, Y – параллельные векторные поля, то $[X, Y] = 0$. Для остальных слагаемых имеем:

$$\begin{aligned} [JX, JY] &= D_{JX}(JY) - D_{JY}(JX) = D_{JX}(J)Y - D_{JY}(J)X = \\ &= ((JX)_1 n_2)Y + (n_1 (JX)_2)Y - ((JY)_1 n_2)X + (n_1 (JY)_2)X, \\ J[X, JY] &= J(D_X(JY) - D_{JY}X) = J(D_X(J)Y) = J((X_1 n_2)Y + (n_1 X_2)Y), \\ J[JX, Y] &= J(D_{JX}Y - D_Y(JX)) = -J(D_Y(J)X) = -J((Y_1 n_2)X + (n_1 Y_2)X). \end{aligned}$$

Получаем следующее выражение тензора Нейенхейса в точках произведения сфер $S^{p-1} \times S^{q-1}$ для векторов X, Y ортогональных произведению сфер,

$$\begin{aligned} N(X, Y) &= 2 \{ (((JX)_1 n_2 + n_1 (JX)_2)Y - ((JY)_1 n_2 + n_1 (JY)_2)X - \\ &\quad - J((X_1 n_2)Y - (Y_1 n_2)X + (n_1 X_2)Y - (n_1 Y_2)X) \}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из полученного выражения следует, что почти комплексная структура J на $E^{p,q}$ является неинтегрируемой.

Вычислим также $\langle D_X(J)Y, Z \rangle$ в точках произведения сфер и для векторов X, Y, Z ортогональных произведению сфер через векторное произведение. Если в формуле трехместного векторного произведения P второй вектор y – чисто мнимый, то $P(x, y, z) = (xy)z + \langle x, y \rangle z + \langle y, z \rangle x - \langle z, x \rangle y$. Поэтому $(xy)z = P(x, y, z) - \langle x, y \rangle z - \langle y, z \rangle x + \langle z, x \rangle y$. Тогда для $D_X(J)Y = (X_1 n_2)Y + (n_1 X_2)Y$ имеем:

$$(X_1 n_2)Y = P(X_1, n_2, Y) + \langle Y, X_1 \rangle n_2, \quad (n_1 X_2)Y = P(n_1, X_2, Y) - \langle X_2, Y \rangle n_1.$$

Поэтому

$$D_X(J)Y = P(X_1, n_2, Y) + P(n_1, X_2, Y) + \langle Y, X_1 \rangle n_2 - \langle X_2, Y \rangle n_1. \quad (2.10)$$

Если Z – любой вектор, ортогональный произведению сфер в точке x , то

$$\langle D_X(J)Y, Z \rangle = \Phi(X_1, n_2, Y, Z) + \Phi(n_1, X_2, Y, Z). \quad (2.11)$$

Теорема 2. Почти комплексная структура Кэли J на $E^{p,q}$ является ортогональной и неинтегрируемой. Ее фундаментальная форма $\Omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle$ имеет вид:

$$\Omega_x(X, Y) = \Phi(n_1, n_2, X, Y) + n_1^* \wedge n_2^*(X, Y), \quad (2.12)$$

где символами n_1^* и n_2^* обозначены линейные формы, дуальные к векторным полям $n_1(x)$ и $n_2(x)$ на $E^{p,q}$.

Доказательство. Ортогональность J следует из свойства $\langle nX, nY \rangle = \langle n, n \rangle \langle X, Y \rangle$, когда $n = n_1 n_2$. Поскольку открытое множество $E^{p,q}$ имеет единые координаты из $\mathbb{R}^8$, то тензор Нейенхейса $N(X, Y) = 2([JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y])$ может быть вычислен непосредственно по формуле $N_{jk}^i = 2(J_j^h \partial_h J_k^i - J_k^h \partial_h J_j^i - J_h^i \partial_j J_k^h + J_h^i \partial_k J_j^h)$. Для того, чтобы воспользоваться этой формулой достаточно оператор умножения $J_x(X) = \frac{x_1 x_2}{\|x_1\| \|x_2\|} X$ записать в виде матрицы, действующей на столбец координат вектора X и провести явное вычисление компонент N_{jk}^i . Легко видеть, что квадраты компонент N_{jk}^i тензора Нейенхейса являются рациональными функциями координат точки x . Поэтому для доказательства неинтегрируемости J достаточно показать, что хотя бы в одной точке значение тензора $N_x(X, Y) \neq 0$. Тогда $N \neq 0$ почти всюду на $E^{p,q}$. Поэтому можно использовать формулу (2.9) для нахождения тензора Нейенхейса в точках произведения сфер и для векторов X, Y ортогональных произведению сфер. Пусть например: $n_1 = 1$, $n_2 = e_5$, $X = X_1 = e_1$, $Y = Y_1 = e_2$. Тогда $N_{(n_1, n_2)}(e_1, e_2) = 4e_3 - 4e_6 \neq 0$.

Фундаментальная 2-форма почти комплексной структуры J на $E^{p,q}$ находится достаточно просто из (2.2),

$$\begin{aligned} \Omega_x(X, Y) &= \langle JX, Y \rangle = \langle P(n_1, n_2, X) - \langle n_2, X \rangle n_1 + \langle n_1, X \rangle n_2, Y \rangle = \\ &= \Phi(n_1, n_2, X, Y) + \langle n_1, X \rangle \langle n_2, Y \rangle - \langle n_1, Y \rangle \langle n_2, X \rangle = \\ &= \Phi(n_1, n_2, X, Y) + n_1^* \wedge n_2^*(X, Y). \end{aligned}$$

где $\Phi(x, y, z, w) = \langle P(x, y, z), w \rangle$ – введенная ранее кососимметрическая 4-форма на алгебре $\mathbb{C}a$, а символами n_1^* и n_2^* обозначены линейные формы, дуальные к векторным полям $n_1(x)$ и $n_2(x)$ на $E^{p,q}$.

3. Шестимерные произведения сфер в $\mathbb{C}a = \mathbb{R}^8$. Почти комплексная структура Кэли на открытом множестве $E^{p,q}$ при ограничении на подмногообразие $S^{p-1} \times S^{q-1}$ определяет на нем почти комплексную структуру, которую также будем называть именем Кэли. Точку $x \in S^{p-1} \times S^{q-1}$ естественно представить в виде двух компонент, $x = (n_1, n_2)$, где $n_1 \in S^{p-1}$ и $n_2 \in S^{q-1}$ отождествляются также с нормальными векторами сфер. Тогда для вектора $X \in T_x(S^{p-1} \times S^{q-1})$ имеем $J_x(X) = P(n_1, n_2, X) = (n_1 n_2)X$.

Теорема 3. Ортогональная почти комплексная структура Кэли J на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ является неинтегрируемой. Фундаментальная 2-форма на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ и ее внешний дифференциал имеют выражения

$$\Omega_x(X, Y) = \Phi(n_1, n_2, X, Y), \quad (3.1)$$

$$d\Omega(X, Y, Z) = \Phi(X_1, n_2, X, Z) + \Phi(Y_1, n_2, Z, X) + \Phi(Z_1, n_2, X, Y) +$$

$$+\Phi(n_1, X_2, X, Z) + \Phi(n_1, Y_2, Z, X) + \Phi(n_1, Z_2, X, Y),$$

где $n_1 \in S^{p-1}$, $n_2 \in S^{q-1}$, а нижние индексы 1 и 2 у векторов $X, Y, Z \in T_x(S^{p-1} \times S^{q-1})$ обозначают компоненты этих векторов, касательные к S^{p-1} и S^{q-1} , соответственно.

Для ковариантной производной $\nabla_X J$ на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ имеет место следующее выражение

$$\langle \nabla_X(J)Y, Z \rangle = \Phi(X_1, n_2, Y, Z) + \Phi(n_1, X_2, Y, Z). \quad (3.2)$$

Почти комплексная структура Кэли J на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ является частично приблизительно кэлеровой, т. е. имеют место следующие равенства:

$$\nabla_{X_1}(J)X_1 = 0, \quad \nabla_{X_2}(J)X_2 = 0, \quad (3.3)$$

для любых векторов касательных только к одному из сомножителей в произведении $S^{p-1} \times S^{q-1}$, т. е. векторов вида $X = (X_1, 0)$ и $X = (0, X_2)$.

Доказательство. Поскольку сфера $S^{p-1} \times S^{q-1}$ (почти)голоморфно вкладывается в пространство $E^{p,q}$, то выражения тензора Нейенхейса, фундаментальной формы и ковариантной производной тензора J получаются из общих выражений, полученных для пространства $E^{p,q}$, считая, что все векторы X, Y, Z ортогональны нормальным векторам n_1 и n_2 . Таким образом, на сфере $S^{p-1} \times S^{q-1}$ тензор Нейенхейса имеет выражение (2.9), из которого следует неинтегрируемость J .

Для фундаментальной 2-формы, учитывая, что X, Y ортогональны n_1 и n_2 , имеем: $\Omega_x(X, Y) = \langle JX, Y \rangle = \langle P(n_1, n_2, X) - \langle n_2, X \rangle n_1 + \langle n_1, X \rangle n_2, Y \rangle = \langle P(n_1, n_2, X), Y \rangle = \Phi(n_1, n_2, X, Y)$.

Найдем внешний дифференциал формы Ω по формуле $d\Omega(X, Y, Z) = X\Omega(Y, Z) + Y\Omega(Z, X) + Z\Omega(X, Y) - \Omega([X, Y], Z) - \Omega([Y, Z], X) - \Omega([Z, X], Y)$. Векторы $X, Y, Z \in T_x(S^{p-1} \times S^{q-1})$ удобно считать продолженными на $E^{p,q}$ как параллельные векторные поля, тогда их скобки Ли будут нулевыми. Поскольку вектор $X = (X_1, X_2)$ ортогонален к n_1 и n_2 , то $dn_1(X) = X_1$ и $dn_2(X) = X_2$. Поэтому $X\Omega(Y, Z) = X\Phi(n_1, n_2, X, Y) = \Phi(X_1, n_2, X, Y) + \Phi(n_1, X_2, X, Y)$. Остальные компоненты вычисляются аналогично. Складывая их, получаем $d\Omega$.

Формула (3.2) установлена ранее как формула (2.11). Из последнего выражения легко получается, что $\nabla_{X_1}(J)X_1 = 0$, $\nabla_{X_2}(J)X_2 = 0$, для векторов вида $X = (X_1, 0) = X_1$ и $X = (0, X_2) = X_2$. Это свойство естественно назвать частичной приблизительно кэлеровостью, т. е. приблизительно кэлеровость отдельно по направлениям, касательным к S^{p-1} и отдельно к S^{q-1} . Для общего вектора X это свойство не выполняется, что легко проверяется прямыми вычислениями. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь различные случаи произведений сфер в пространстве $\mathbb{C}\mathbb{a}$. Отметим, что в отличие от S^6 , на произведении сфер $S^1 \times S^{2m-1}$ существует комплексная структура, она была открыта Хопфом [9]. Калаби и Экман нашли комплексную структуру на произведении любых нечетномерных сфер, см. [10] и [12]. Как известно [5], на произведении четномерных сфер почти комплексная структура существует только в случае $S^2 \times S^4$. Мы рассмотрим почти комплексные структуры Кэли на S^6 , $S^1 \times S^5$, $S^2 \times S^4$ и $S^3 \times S^3$.

3.1 Сфера S^6 . Для шестимерной сферы S^6 нужно брать разложение пространства $\mathbb{C}\mathbb{a}$ в произведение одномерного и семимерного подпространств, $\mathbb{C}\mathbb{a} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^7$. Получаем $S^0 \times S^6 = \{-1, +1\} \times S^6$ – два экземпляра стандартной единичной сферы S^6 в пространстве $\mathbb{R}^7$ чисто мнимых чисел Кэли. Будем рассматривать один экземпляр $S^6 \subset \mathbb{R}^7$. Почти комплексная структура Кэли J на S^6 определяется следующим образом. Если $n = n(x)$ – единичный нормальный вектор в точке $x \in S^6$, тогда $J_x : T_x S^6 \rightarrow T_x S^6$ есть умножение на n слева, $J_x(X) = n \times X$. Очевидно, что J является ортогональной. Хорошо известно, что J не интегрируема, т. е. $N(X, Y) \neq 0$.

Пусть $\omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle$ – фундаментальная 2-форма, соответствующая J . Форма ω имеет очень простое выражение через векторное произведение:

$$\omega(X, Y) = \langle n \times X, Y \rangle = \langle n, X \times Y \rangle \quad (3.4)$$

По классификации Грея-Харвеллы [7] почти эрмитовых многообразий, многообразие (S^6, J_0) принадлежит классу $W_1 = NK$ приблизительно кэлеровых многообразий (nearly Kähler). Напомним, что это такие многообразия, что $\nabla_X(J)X = 0$, или $3\nabla\omega = d\omega$. В работе [7] установлены следующие свойства приблизительно кэлеровых многообразий:

$$\delta\omega = 0, \quad |\nabla\omega|^2 = \frac{1}{9}|d\omega|^2 = \frac{1}{16}|N|^2 = s - s^*,$$

где ω – фундаментальная форма, N – тензор Нейенхейса и s, s^* – скалярные кривизны.

Выразим основные характеристики почти комплексной структуры J на сфере S^6 через векторное произведение (подробные вычисления см. в [13]).

Лемма 1. Калибровка φ при ее ограничении на сферу обладает свойством:

$$\varphi(JX, Y, Z) = \varphi(X, JY, Z) = \varphi(X, Y, JZ). \quad (3.5)$$

Доказательство. $\varphi(Z, JX, Y) = \langle Z, JX \times Y \rangle = \langle Z, -n \times (X \times Y) - (X, Y)n \rangle = \langle Z, -n \times (X \times Y) \rangle = -\langle Z \times n, X \times Y \rangle = \langle n \times Z, X \times Y \rangle = \langle JZ, X \times Y \rangle = \varphi(JZ, X, Y)$.

Лемма 2. Пусть φ и ψ – ассоциативная и соответственно, коассоциативная калибровки пространства $\mathbb{R}^7$. Тогда для любых X, Y, Z касательных к сфере S^6 имеет место равенство

$$i_n\psi(X, Y, Z) = -\varphi(JX, Y, Z), \quad (3.6)$$

где i_n – внутреннее произведение с вектором нормали $n(x)$.

Доказательство. $i_n\psi(X, Y, Z) = \langle n, [XYZ] \rangle = \langle n, -X \times (Y \times Z) \rangle = -\langle n \times X, Y \times Z \rangle = -\varphi(JX, Y, Z)$.

Пусть $*_S$ – оператор Ходжа на сфере и $\theta|_S$ – ограничение дифференциальной формы θ в $\mathbb{R}^7$ на подмногообразие S^6 .

Теорема 4. ([13]) Фундаментальная форма ω почти комплексной структуры Кэли J на S^6 и ее внешний дифференциал $d\omega$ обладают свойствами:

$$\omega = i_n\varphi, \quad d\omega = 3\varphi|_S, \quad (3.7)$$

$$*_S \omega = \psi|_S, \quad *_S d\omega = -3 i_n\psi, \quad (3.8)$$

$$d\omega(X, Y, Z) = 3 i_n\psi(JX, Y, Z), \quad (3.9)$$

$$d\omega(JX, Y, Z) = d\omega(X, JY, Z) = d\omega(X, Y, JZ), \quad (3.10)$$

$$d\omega(X, JY, JZ) = -d\omega(X, Y, Z). \quad (3.11)$$

Напомним, что $\omega(X, Y) = \langle n(x), X \times Y \rangle$. Из теоремы сразу следует, что

$$d\omega(X, Y, Z) = 3\langle X, Y \times Z \rangle.$$

Найдем ковариантную производную тензора J . Поскольку $n(x) = x$, то для любого касательного вектора $X \in T_x S^6$ имеем $Dn_x(X) = X$. Тогда, из равенства $(\nabla_X J)Y = pr(D_X(JY)) = pr(D_X(n \times Y)) = pr(X \times Y)$, где pr – проекция на касательное пространство $T_x S^6$, получаем,

$$(\nabla_X J)Y = X \times Y - \langle n(x), X \times Y \rangle n = X \times Y - \omega(X, Y)n. \quad (3.12)$$

Теорема 5. Тензор Нейенхейса $N(X, Y)$ почти комплексной структуры J имеет вид

$$N(X, Y) = -8 n \times (X \times Y). \quad (3.13)$$

Доказательство. Сразу следует из формулы (2.9). Можно также использовать формулу $g(N(X, Y), JZ) = 4g((\nabla_Z J)X, Y) + 2d\omega(Z, JX, JY) - 2d\omega(Z, X, Y)$, установленную в книге [10] (с учетом разницы в определении внешней степени и фундаментальной формы) и равенства (3.12) и (3.11).

Теорема 6. ([6]) Фундаментальная 2-форма ω почти комплексной структуры Кэли является собственной для оператора Лапласа

$$\Delta\omega = 12 \omega. \quad (3.14)$$

3.2. Произведение сфер $S^1 \times S^5$. Произведение двух нечетномерных сфер S^1 и S^5 вложим в $\mathbb{C}a = \mathbb{R}^8$ следующим образом. Сфера S^1 является единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^2$, состоящей из чисел вида $x = x^0 + x^4 e_4$, а S^5 является единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^6$, состоящей из чисел вида как $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7$. Единичную нормаль n_1 к сфере S^1 будем отождествлять с точкой $x \in S^1$ этой сферы, $n_1(x) = x \in S^1$. Аналогично, для единичной нормали n_2 к сфере S^5 имеем $n_2(x) = x \in S^5$.

Поскольку $S^1 \times S^5$ есть шестимерное подмногообразие $\mathbb{R}^8$, то оно имеет почти комплексную структуру, определенную формулой

$$J(X) = P(n_1, n_2, X) = (n_1 n_2)X, \quad X \in T_{((n_1, n_2))} S^1 \times S^{2m-1}.$$

Вложение $S^1 \times S^5 \subset E^{2,6}$ является (почти)голоморфным. Поэтому мы можем использовать полученные ранее выражения для тензора Нейенхейса (2.9) и для фундаментальной 2-формы (3.1) с учетом того, что касательные векторы X, Y ортогональны к n_1 и n_2 .

Отметим, что S^1 является группой относительно умножения чисел Кэли. Легко видеть, что $n_1 n_2 \in S^5$. Поэтому группа S^1 действует слева на S^5 , $S^1 \times S^5 \rightarrow S^5$. Определено также и правое действие группы S^1 на S^5 . Это действие удобно выразить при помощи комплексных чисел.

Вектор $x = x^0 + x^4 e_4 \in \mathbb{R}^2$ удобно отождествить с комплексным числом $x = x^0 + x^4 i = z \in \mathbb{C}$, считая, что $e_4 = i$ – мнимая единица. Для векторов $y \in \mathbb{R}^6$ имеем,

$$\begin{aligned} y = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7 &= e_1(x^1 + x^5 e_4) + e_2(x^2 + x^6 e_4) + e_3(x^3 + x^7 e_4) = \\ &= e_1(x^1 + ix^5) + e_2(x^2 + ix^6) + e_3(x^3 + ix^7) = e_1 z^1 + e_2 z^2 + e_3 z^3 \equiv (z^1, z^2, z^3). \end{aligned}$$

Таким образом можно отождествить $\mathbb{R}^6$ с $\mathbb{C}^3$.

Группа S^1 действует на S^5 правым умножением. При этом выполняются следующие свойства. Если $x = x^0 + x^4 i = z \in S^1$ и $y = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7 = e_1 z^1 + e_2 z^2 + e_3 z^3$, то

$$yx = (e_1 z^1 + e_2 z^2 + e_3 z^3)z = e_1(z^1 z) + e_2(z^2 z) + e_3(z^3 z) \equiv (z^1 z, z^2 z, z^3 z).$$

Кроме того, для $k = 1, 2, 3$ выполняются следующие свойства умножения:

$$z(z^k e_k) = (zz^k) e_k, \quad e_k z = \bar{z} e_k.$$

Теорема 7. Ортогональная почти комплексная структура Кэли J на $S^1 \times S^5$ является неинтегрируемой. Она инвариантна при правом действии группы S^1 на $S^1 \times S^5$. Действие S^1 на S^5 , заданное умножением справа определяет расслоение Хопфа $S^5 \rightarrow \mathbb{C}P^3$. Оператор почти комплексной структуры Кэли J переводит векторное поле V_1 , касательное к S^1 , в векторное поле V_2 на S^5 , касательное к слоям расслоения Хопфа.

Доказательство. Находим тензор Нейенхейса прямым вычислением по формуле (2.9). Легко видеть, что для $n_1 = \cos(\theta) + \sin(\theta)e_4 = e^{i\theta}$, $n_2 = e_1$, $X = X_2 = e_2$, $Y = Y_2 = e_3$, $N_{(n_1, n_2)}(e_2, e_3) = -4(1 - e^{i2\theta}) \neq 0$. Поэтому J неинтегрируема.

Рассмотрим вопрос об инвариантности почти комплексной структуры J относительно действия S^1 на $S^1 \times S^5$ правым умножением на элемент $z = x^0 + x^4i \in S^1$. Пусть X – касательный вектор к $S^1 \times S^5$ в точке (n_1, n_2) . Тогда $J(n_1, n_2)X = (n_1n_2)X$. При умножении справа на элемент $z \in S^1$ вектор X переходит в вектор Xz в точке (n_1z, n_2z) , поэтому $J_{(n_1z, n_2z)}(Xz) = ((n_1z)(n_2z))(Xz)$. В случае инвариантности должно выполняться равенство $dz(J_{(n_1, n_2)}X) = J_{(n_1z, n_2z)}(Xz)$. Учитывая линейность оператора умножения $z : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$, последнее равенство принимает вид: $((n_1n_2)X)z = ((n_1z)(n_2z))(Xz)$. Оно устанавливается прямым вычислением с использованием коммутативности S^1 и следующих свойства умножения чисел Кэли: $(xx)y = x(xy)$, $x(yu) = (xy)u$, $x(yx) = (xy)x = xux$, $((xy)z)y = x(yzy)$, $(xyx)z = x(y(xz))$, $(xy)(zx) = x(yz)x$, $(xxy)x = xx(yx)$.

Действительно,

$$\begin{aligned} ((n_1z)(n_2z))(Xz) &= ((zn_1)(n_2z))(Xz) = (z(n_1n_2)z)(Xz) = (z(n_1\bar{z}n_2))(Xz) \\ &= z((\bar{z}n_1n_2)X)z = ((z\bar{z}n_1n_2)X)z = ((n_1n_2)X)z. \end{aligned}$$

Пусть $n_1 = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta} \in S_1$ и $n_2 = e_1(x^1 + ix^5) + e_2(x^2 + ix^6) + e_3(x^3 + ix^7) \in S^5$. Тогда $n_1n_2 = e^{i\theta}e_1z^1 + e^{i\theta}e_2z^2 + e^{i\theta}e_3z^3 \in S^5$. Касательное векторное поле $V_1(n_1)$ к окружности S^1 определяется следующим образом: $V_1(n_1) = ie^{i\theta} = in_1$. Тогда $J(V_1(n_1)) = (n_1n_2)ie^{i\theta} = (e^{i\theta}z^1e_1, e^{i\theta}z^2e_2, e^{i\theta}z^3e_3)ie^{i\theta} = (z^1e_1, z^2e_2, z^3e_3)ie^{i\theta}e^{-i\theta} = (z^1, z^2, z^3)i = V_2(n_2)$ – векторное поле, касательное к слоям расслоения Хопфа.

3.3. Произведение сфер $S^2 \times S^4$. Как известно [5], такое произведение четномерных сфер является единственным нетривиальным случаем, когда на нем существует почти комплексная структура. Вложим $S^2 \times S^4$ в $\mathbb{C}\mathfrak{a} = \mathbb{R}^8$ следующим образом. Сфера S^2 является единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^3$, состоящей из чисел вида $x = x^0 + x^1e_1 + x^2e_2$, а S^4 является единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^5$, состоящей из чисел вида $x = x^3e_3 + x^4e_4 + x^5e_5 + x^6e_6 + x^7e_7$. Пусть n_1 и n_2 – нормальные векторы к сферам S^2 и S^4 . Как шестимерное подмногообразие $\mathbb{R}^8$, произведение $S^2 \times S^4$ имеет почти комплексную структуру, определенную формулой $J(X) = P(n_1, n_2, X) = (n_1n_2)X$, $X \in T_{(n_1, n_2)}S^2 \times S^4$. Поскольку касательный вектор X ортогонален к n_1 и n_2 , то данное вложение $S^2 \times S^4 \subset E^{3,5}$ является (псевдо)голоморфным. Поэтому мы можем использовать полученные ранее выражения (2.9) и (3.1) для тензора Нейенхейса и для фундаментальной 2-формы с учетом того, что касательные векторы X, Y ортогональны к n_1 и n_2 .

Прямая проверка показывает, что почти комплексная структура Кэли J на $S^2 \times S^4$ является неинтегрируемой. Действительно, пусть например: $n_1 = 1$, $n_2 = e_5$, $X = X_1 = e_1$, $Y = Y_1 = e_2$. Тогда $N_{(n_1, n_2)}(e_1, e_2) = 4e_3 - 4e_6$.

3.4. Произведение сфер $S^3 \times S^3$. Рассмотрим произведение двух нечетномерных сфер S^3 и S^3 , вложенное в $\mathbb{C}\mathfrak{a} = \mathbb{R}^8$ следующим образом. Сфера S^3 является единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^4$, состоящей из чисел вида $x = x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3$, а вторая сфера S^3 является единичной в другой координатной плоскости $\mathbb{R}^4$, состоящей из чисел вида $y = x^4e_4 + x^5e_5 + x^6e_6 + x^7e_7$.

Считая число e_1 комплексной мнимой единицей $e_1 = i$, отождествим первое пространство $\mathbb{R}^4$ чисел $x = x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3$ с комплексными матрицами следующим образом:

$$x = x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3 = (x^0 + x^1i) + (x^2 + x^3i)e_2 = z^1 + z^2e_2 \equiv \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \\ -\bar{z}^2 & \bar{z}^1 \end{pmatrix} = U_x.$$

При этом произведение xy чисел Кэли переходит в произведение матриц $U_x U_y$.

Легко видеть, что сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ отождествляется с группой $SU(2)$. Касательное пространство в единице $T_1 S^3$ имеет базис из векторов e_1, e_2, e_3 . При отождествлении $S^3 \equiv SU(2)$, данному базису соответствует базис алгебры Ли $su(2)$, состоящий из матриц:

$$E_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда соответствующие правоинвариантные векторные поля на S^3 имеют вид:

$$V_1(x) = dR_x(E_1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \\ -\bar{z}^2 & \bar{z}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz^1 & iz^2 \\ i\bar{z}^2 & -i\bar{z}^1 \end{pmatrix} = (-x^1, x^0, -x^3, x^2),$$

$$V_2(x) = dR_x(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \\ -\bar{z}^2 & \bar{z}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{z}^2 & \bar{z}^1 \\ -z^1 & -z^2 \end{pmatrix} = (-x^2, x^3, x^0, -x^1),$$

$$V_3(x) = dR_x(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \\ -\bar{z}^2 & \bar{z}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\bar{z}^2 & i\bar{z}^1 \\ iz^1 & iz^2 \end{pmatrix} = (-x^3, -x^2, x^1, x^0).$$

Легко видеть, что данные левоинвариантные поля получаются из векторов e_1, e_2, e_3 при их умножении справа (как чисел Кэли) на элемент $x \in S^3$. Действительно: $e_1 x = e_1(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3) = -x^1 + x^0 e_1 - x^3 e_2 + x^2 e_3 = (-x^1, x^0, -x^3, x^2) = V_1(x)$, $e_2 x = e_2(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3) = -x^2 + x^3 e_1 + x^0 e_2 - x^1 e_3 = (-x^2, x^3, x^0, -x^1) = V_2(x)$, $e_3 x = e_3(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3) = -x^3 - x^2 e_1 x^1 e_2 + x^0 e_3 = (-x^3, -x^2, x^1, x^0) = V_3(x)$.

Аналогичным образом отождествим второе пространство $\mathbb{R}^4$ чисел $y = x^4 e_4 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7 = (x^4 + x^5 e_1 + x^6 e_2 + x^7 e_3)e_4$ с комплексными матрицам следующим образом:

$$y = (x^4, x^5, x^6, x^7) = (x^4 + x^5 i, x^6 + x^7 i) = (w^1, w^2) = \begin{pmatrix} w^1 & -\bar{w}^2 \\ w^2 & \bar{w}^1 \end{pmatrix} = U_y.$$

Легко видеть, что сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ отождествляется с группой $SU(2)$. Касательное пространство $T_{e_4} S^3$ в точке e_4 имеет базис из векторов e_5, e_6, e_7 . При отождествлении $S^3 \equiv SU(2)$, данному базису соответствует базис алгебры Ли $su(2)$, состоящий из матриц $E_1, -E_2, E_3$. Тогда соответствующие им правоинвариантные векторные поля на S^3 имеют вид:

$$W_1(y) = (-x^5, x^4, x^7, -x^6), \quad W_2(y) = (-x^6, -x^7, x^4, x^5), \quad W_3(y) = (-x^7, x^6, -x^5, x^4).$$

Нетрудно заметить, что данные левоинвариантные поля получаются из векторов e_1, e_2, e_3 при их умножении справа на элемент $y \in S^3$. Действительно, $e_1 y = e_1(x^4 e_4 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7) = x^4 e_5 - x^5 e_4 - x^6 e_7 + x^7 e_6 = (-x^5, x^4, x^7, -x^6) = W_1(y)$, $e_2 y = e_2(x^4 e_4 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7) = x^4 e_6 + x^5 e_7 - x^6 e_4 - x^7 e_5 = (-x^6, -x^7, x^4, x^5) = W_2(y)$, $e_3 y = e_3(x^4 e_4 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7) = x^4 e_7 - x^5 e_6 + x^6 e_5 - x^7 e_4 = (-x^7, x^6, -x^5, x^4) = W_3(y)$.

Теорема 8. *Ортогональная почти комплексная структура Кэли на $S^3 \times S^3$ является неинтегрируемой. При естественном отождествлении произведения сфер $S^3 \times S^3$ с группой Ли $SU(2) \times SU(2)$, почти комплексная структура Кэли J является правоинвариантной. При этом, для базисных левоинвариантных векторных полей V_i и W_j на группах-сомножителях, имеют место равенства: $JW_1 = V_1, JW_2 = V_2, JW_3 = V_3$.*

Доказательство. Для правоинвариантности структуры Кэли J достаточно показать, что оператор почти комплексной структуры J переводит правоинвариантные векторные поля $W_i(y)$ в правоинвариантные векторные поля $V_i(x)$. Пусть $(x, y) \in S^3 \times S^3$. Как уже отмечалось, $n_1(x) = x$ и $n_2(y) = y$. В дальнейших вычислениях будем использовать следующие свойства:

$$n_1 n_2 \perp e_i, n_1 \perp n_2, n_2 \perp e_i, n_1 \perp n_2 \times e_i, n_2 \perp n_2 \times e_i \text{ для } i = 1, 2, 3;$$

$$uv = U \times V - \langle U, V \rangle - \text{для чисто мнимых октав } u \text{ и } v;$$

$$n \times (n \times Z) = -Z + \langle n, Z \rangle n, \text{ если } n - \text{вектор единичной длины};$$

$$(X \times Y) \times Z = -X \times (Y \times Z) + 2\langle X, Z \rangle Y - \langle X, Y \rangle Z - \langle Y, Z \rangle X;$$

$$\langle xy, zy \rangle = \langle x, z \rangle \langle y, y \rangle.$$

Учитывая разложение $n_1 = n_1^0 + N_1$ на вещественную и чисто мнимую части, имеем для $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} J(W_i(y)) &= J(e_i y) = (n_1 n_2)(e_i n_2) = -\langle n_1 n_2, e_i n_2 \rangle + (n_1 n_2) \times (e_i n_2) = -\langle n_1, e_i \rangle + ((n_1^0 + N_1) n_2) \times (e_i \times n_2) = \\ &= -\langle n_1, e_i \rangle + n_1^0 (n_2 \times (e_i \times n_2)) + (N_1 \times n_2) \times (e_i \times n_2) = -\langle n_1, e_i \rangle - n_1^0 (n_2 \times (n_2 \times e_i)) - \\ &- (N_1 \times n_2) \times (n_2 \times e_i) = -\langle n_1, e_i \rangle + n_1^0 e_i - (N_1 \times n_2) \times (n_2 \times e_i) = -\langle n_1, e_i \rangle + n_1^0 e_i + N_1 \times (n_2 \times (n_2 \times e_i)) - \\ &- 2\langle N_1, n_2 \times e_i \rangle n_2 + \langle N_1, n_2 \rangle (n_2 \times e_i) + \langle n_2, n_2 \times e_i \rangle N_1 = -\langle n_1, e_i \rangle + n_1^0 e_i + N_1 \times (n_2 \times (n_2 \times e_i)) = \\ &= n_1^0 e_i - N_1 \times e_i - \langle N_1, e_i \rangle = n_1^0 e_i + e_i \times N_1 - \langle e_i, N_1 \rangle = e_i (n_1^0 + N_1) = e_i n_1 = e_i x = V_i(x). \end{aligned}$$

Очевидно, что почти комплексная структура Кэли на $S^3 \times S^3$ является неинтегрируемой. Тензор Нейенхейса легко вычисляется для базисных левоинвариантных полей V_i и W_j , $i, j = 1, 2, 3$ с учетом того, что $[V_i, W_j] = 0$.

Литература

- [1] Bor G., Hernandez-Lamoned L. The canonical bundle of hermitian manifold. // Bol. Soc. Mat. Mexicana, 1999, (3) Vol 5, p. 187–198.
- [2] Bryant R. Submanifolds and special structures on the octonions // J. Diff. Geom., 1982, Vol. 17, p. 185–232.
- [3] Calabi E. and Gluck H. What are best almost-complex structures on the 6-sphere? // Proc. Symp. in Pure Math. 1993 Vol. 54, Part 2, p. 99–108.
- [4] Calabi E. Construction and properties of some 6-dimensional almost-complex manifolds. // Trans. Amer. Math. Soc. 1958, Vol. 87, p. 407–438.
- [5] Datta B., Subramanian S. Nonexistence of almost complex structures on products of even-dimensional spheres / Topol. and its Appl., 1990, Vol. 36, No. 1, p. 39–42.
- [6] Gray A. Vector cross products on manifolds // Trans AMS, 1969, Vol. 141, p. 465–504.
- [7] Gray A., Harvella L.M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear Invariants // Ann. Math. Pura Appl. 1980, Vol. 123, p. 35–58.
- [8] Harvey R., Lawson H. Calibrated geometries. // Acta math. 1982, N148, p. 47–157.
- [9] Hopf H. Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten. Studies and Essays presented to R. Courant. N.Y.: Interscience, 1948, 167–185
- [10] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, т. 1 и т. 2. 1981, М.: Наука.
- [11] LeBrun C. Orthogonal complex structures on S^6 // Proc. Amer. Math. Soc. 1958, 101, N1, p. 136–138.
- [12] Peng C.K., Tang Z. Integrability Condition on an Almost Complex Structure and Its Application // Acta Math. Sinica, English Series, V. 21, No. 6, 2005, 1459–1464.
- [13] Смоленцев Н.К. О почти комплексной структуре Кэли на сфере S^6 // Труды Рубцовского индустриального института. Вып. 12. Математика и приложения. Рубцовск-Барнаул: Изд. Алт. Ун-та., 2003, 78–85.
- [14] Sekigawa K. Almost complex submanifolds of a 6-dimensional sphere // Kodai Math. J., 1983, Vol. 6, No. 2, 174–185.

On almost complex Cayley structures on six-dimensional products of spheres

N. K. Smolentzev

State University of Kemerovo, Russia

smolen@kuzbass.net

In the paper are studied the complex Cayley structures on the sphere S^6 , and on the products of spheres $S^1 \times S^5$, $S^2 \times S^4$ and $S^3 \times S^3$, which naturally appear as submersed in the Cayley algebra of octaves. It is shown that all of them are non-integrable. In each case, the expressions of the fundamental forms are obtained, by means of the gauging of the space $\mathbb{R}^7$, and the expression of the Nijenhuis tensor is determined.

Key-words: Cayley structure, products of spheres, integrability, fundamental forms.

MSC: 32C15, 32Q40, 57N35.

МНОГОМЕСТНЫЕ ОПЕРАЦИИ НА ДЕКАРТОВЫХ СТЕПЕНЯХ

А. М. Гальмак

Могилевский государственный университет продовольствия

mti@mogilev.by

Для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$, $m \geq 1$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на декартовой степени B^{mk} множества B определяется l -арная операция $[]_{l,\sigma,m,mk}$ и изучаются свойства этой операции. Особенно подробно рассматривается случай $m = 1$, то есть операция $[]_{l,\sigma,1,k}$. Частными случаями этой операции, а значит и операции $[]_{l,\sigma,m,mk}$, являются изучавшиеся ранее автором операции $[]_{n,n-1}$, $[]_{n,s(n-1)+1}$ и $[]_{l,k}$.

УДК 512.548

Ключевые слова: многоместные операции, n -арные операции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Многоместным операциям на декартовых степенях посвящены работы автора [1–4]. В [1] для любых целых $l \geq 2$, $k \geq 2$, $m \geq 1$ и $n \geq 3$ были определены и изучались l -арная и n -арная операции $[]_{l,k}$ и $[]_{n,m,m(n-1)}$. Подробное исследование разнообразных свойств этих операций было осуществлено в [2], где приведены также многочисленные примеры, представляющие, на наш взгляд, интерес для исследователей, изучающих многомерные пространства в геометрии и физике. В [3, 4] для тех же, что и выше l и k , и произвольной подстановки $\sigma \in S_k$ была определена еще одна l -арная операция $[]_{l,\sigma,k}$, которая в случае $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ k)$ совпадает с операцией $[]_{l,k}$: $[]_{l,k} = []_{l,(1 \ 2 \ \dots \ k),k}$. В данной работе, являющейся естественным продолжением работ [1–4] определяется и изучается новая многоместная операция $[]_{l,\sigma,m,mk}$, частными случаями которой являются все вышеуказанные операции:

$$[]_{l,k} = []_{l,(1 \ 2 \ \dots \ k),1,k}; \quad []_{n,m,m(n-1)} = []_{n,(1 \ 2 \ \dots \ n-1),m,m(n-1)}; \quad ()_{l,\sigma,k} = []_{l,\sigma,1,k}.$$

Определения большинства используемых здесь понятий есть в [2]. Можно воспользоваться также работами [5–9].

2. l -АРНАЯ ОПЕРАЦИЯ $[]_{l,k}$

Пусть A – группоид, $k \geq 2$, $l \geq 2$. Определим на A^k вначале бинарную операцию

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \circ (y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1 y_2, x_2 y_3, \dots, x_{k-1} y_k, x_k y_1),$$

а затем l -арную операцию

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l,k} = \mathbf{x}_1 \circ (\mathbf{x}_2 \circ (\dots (\mathbf{x}_{l-2} \circ (\mathbf{x}_{l-1} \circ \mathbf{x}_l)) \dots)). \quad (1)$$

Понятно, что операция $[]_{2,k}$ совпадает с операцией $\circ$.

2.1. Пример. Тернарная $[]_{3,2}$ и 4-арная $[]_{4,2}$ операции, определенные на $\mathbb{R}^2$, где $\mathbb{R}$ рассматривается как группоид с обычной операцией умножения чисел, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} [(x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)]_{3,2} &= (x_1 y_2 z_1, x_2 y_1 z_2); \\ [(x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(u_1, u_2)]_{4,2} &= (x_1 y_2 z_1 u_2, x_2 y_1 z_2 u_1). \end{aligned}$$

Тернарная операция $[\]_{3,3}$, определенная на $\mathbb{R}^3$, где $\mathbb{R}$ снова группоид с обычной операцией умножения чисел, имеет следующий вид

$$[(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)]_{3,3} = (x_1 y_2 z_3, x_2 y_3 z_1, x_3 y_1 z_2).$$

Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в ассоциативности тернарной операции $[\]_{3,2}$ и неассоциативности 4-арной операции $[\]_{4,2}$ и тернарной операции $[\]_{3,3}$.

Нам понадобится следующая

2.2. Лемма [1]. Пусть A – полугруппа, $n \geq 3$, $[\]_{n,n-1}$ – n -арная операция, определенная на A^{n-1} формулой (1) при $k = n - 1$, $l = n$. Если $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i(n-1)}) \in A^{n-1}$, $i = 1, \dots, n$, то

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n]_{n,n-1} = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}),$$

где

$$y_j = x_{1j} x_{2(j+1)} \dots x_{(n-j)(n-1)} x_{(n-j+1)1} \dots x_{(n-1)(j-1)} x_{nj}, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Таким образом, согласно лемме 2.2,

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n]_{n,n-1} &= (x_{11} x_{22} \dots x_{(n-1)(n-1)} x_{n1}, x_{12} x_{23} \dots x_{(n-2)(n-1)} x_{(n-1)1} x_{n2}, \dots \\ &\dots, x_{1(n-2)} x_{2(n-1)} x_{31} \dots x_{n(n-2)}, x_{1(n-1)} x_{21} \dots x_{n(n-1)}). \end{aligned} \quad (2)$$

Лемма 2.2 показывает, что, если A – полугруппа, то n -арная операция $[\]_{n,n-1}$, определенная на A^{n-1} может быть определена аналогично n -арной операции, которую Пост определил на множестве всех n -арных подстановок [6, 7, 9], и относительно которой, как он установил, множество всех n -арных подстановок является n -арной группой; в частности, эта n -арная операция ассоциативна. Можно предположить, что ассоциативной будет и n -арная операция (2).

2.3. Теорема [2, 3]. Операция $[\]_{s(n-1)+1,n-1}$, где $s \geq 1$, определенная на декартовой степени A^{n-1} полугруппы A является ассоциативной. В частности, ассоциативной является n -арная операция $[\]_{n,n-1}$.

Компоненты в правой части (2) могут быть записаны иначе.

2.4. Предложение [3]. Пусть A – полугруппа, $n \geq 3$, $[\]_{n,n-1}$ – n -арная операция, определенная на A^{n-1} формулой (1) при $k = n - 1$, $l = n$, пусть также $\alpha = (1 \ 2 \ \dots \ n-1)$ – циклическая подстановка из S_{n-1} , $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i(n-1)}) \in A^{n-1}$, $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n]_{n,n-1} = (x_{11} x_{2\alpha(1)} \dots x_{n\alpha^{n-1}(1)}, \dots, x_{1(n-1)} x_{2\alpha(n-1)} \dots x_{n\alpha^{n-1}(n-1)}). \quad (3)$$

2.5 Замечание. Так как α^{n-1} – тождественная подстановка, то $\alpha^{n-1}(j) = j$ для любого $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Поэтому равенство (3) может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n]_{n,n-1} &= \\ &= (x_{11} x_{2\alpha(1)} \dots x_{(n-1)\alpha^{n-2}(1)} x_{n1}, \dots, x_{1(n-1)} x_{2\alpha(n-1)} \dots x_{(n-1)\alpha^{n-2}(n-1)} x_{n(n-1)}). \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть $\langle A, * \rangle$ – группоид, $k \geq 2$, $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Определим преобразование f_i декартовой степени A^k по правилу

$$f_i : (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k) \rightarrow (a_{i+1}, \dots, a_k, a_1, \dots, a_i),$$

в частности,

$$f_1 : (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k) \rightarrow (a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_1).$$

2.6. Лемма [3]. Справедливы следующие утверждения:

- 1) $f_i = f_1^i$ для любого $i \in \{2, \dots, k-1\}$;
- 2) f_1^k – тождественное преобразование;
- 3) для любого $i \in \{1, \dots, k-1\}$ преобразование f_i является автоморфизмом группоида $\langle A^k, \circ \rangle$ и группоида $\langle A^k, * \rangle$ с операцией $*$, определенной на A^k покомпонентно.

С помощью этой леммы доказывается следующая

2.7. Теорема [3]. Пусть A – полугруппа, $l \geq 2$, $k \geq 2$. Тогда в полугруппе A^k выполняется тождество

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{l-1} \mathbf{x}_l]_{l,k} = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_1} \dots \mathbf{x}_{l-1}^{f_1^{l-2}} \mathbf{x}_l^{f_1^{l-1}}.$$

2.8. Теорема [4]. Пусть A – группоид с единицей, содержащий элемент, отличный от единицы, $k \geq 2$, $2 \leq l \leq k$, $s \geq 0$. Тогда $(sk + l)$ -арная операция $[]_{sk+l,k}$, определенная на A^k не является полуассоциативной, в частности ассоциативной.

Более подробная информация об l -арном группоиде $\langle A^k, []_{l,k} \rangle$ есть в [2].

3. l -АРНАЯ ОПЕРАЦИЯ $[]_{l,\sigma,k}$

Формулы (3) и (4) наводят на мысль об определении еще одной серии многоместных операций, включающей операцию $[]_{n,n-1}$.

Пусть A – полугруппа, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_k . Определим на A^k l -арную операцию

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = (x_{11} x_{2\sigma(1)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)} x_{l\sigma^{l-1}(1)}, \dots, x_{1k} x_{2\sigma(k)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)} x_{l\sigma^{l-1}(k)}). \quad (5)$$

3.1. Пример. Укажем вид операций $[]_{3,\sigma_1,3}$, $[]_{3,\sigma_2,3}$ и $[]_{4,\sigma,3}$, где $\sigma_1 = (12) \in S_3$, $\sigma_2 = (13) \in S_3$, $\sigma = (132) \in S_3$,

$$[\mathbf{xyz}]_{3,\sigma_1,3} = (x_1 y_2 z_1, x_2 y_1 z_2, x_3 y_3 z_3), \quad [\mathbf{xyz}]_{3,\sigma_2,3} = (x_1 y_3 z_1, x_2 y_2 z_2, x_3 y_1 z_3),$$

$$[\mathbf{xyzu}]_{4,\sigma,3} = (x_1 y_3 z_2 u_1, x_2 y_1 z_3 u_2, x_3 y_2 z_1 u_3).$$

Имеет место

3.2. Теорема [3]. Пусть A – полугруппа, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда l -арная операция $[]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной.

Покажем, что если в определении операции $[]_{l,\sigma,k}$ подстановка σ не удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $[]_{l,\sigma,k}$ может быть неассоциативной.

3.3. Пример. Полагая в (5) $l = k = 3$, $\sigma = (132)$, определим на $\mathbb{R}^3$ тернарную операцию $[] = []_{3,(132),3}$

$$[\mathbf{xyz}] = (x_1 y_{\sigma(1)} z_{\sigma^2(1)}, x_2 y_{\sigma(2)} z_{\sigma^2(2)}, x_3 y_{\sigma(3)} z_{\sigma^2(3)}) = (x_1 y_3 z_2, x_2 y_1 z_3, x_3 y_2 z_1).$$

Так как σ^3 – тождественная подстановка, то условие $\sigma^3 = \sigma$ не выполняется, а так как

$$[[\mathbf{xyz}]\mathbf{uv}] = [(x_1 y_3 z_2, x_2 y_1 z_3, x_3 y_2 z_1)\mathbf{uv}] = (x_1 y_3 z_2 u_3 v_2, x_2 y_1 z_3 u_1 v_3, x_3 y_2 z_1 u_2 v_1),$$

$$[\mathbf{x}[\mathbf{yzu}]\mathbf{v}] = [\mathbf{x}(y_1 z_3 u_2, y_2 z_1 u_3, y_3 z_2 u_1)\mathbf{v}] = (x_1 y_3 z_2 u_1 v_2, x_2 y_1 z_3 u_2 v_3, x_3 y_2 z_1 u_3 v_1),$$

$$[\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]] = [\mathbf{xy}(z_1 u_3 v_2, z_2 u_1 v_3, z_3 u_2 v_1)] = (x_1 y_3 z_2 u_1 v_3, x_2 y_1 z_3 u_2 v_1, x_3 y_2 z_1 u_3 v_2),$$

то элементы $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ можно выбрать так, что будут выполняться неравенства:

$$[[\mathbf{xyz}]\mathbf{uv}] \neq [\mathbf{x}[\mathbf{yzu}]\mathbf{v}], \quad x_1 = y_3 = z_2 = v_2 = 1, \quad u_3 \neq u_1;$$

$$[[\mathbf{xyz}]\mathbf{uv}] \neq [\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]], \quad x_1 = y_3 = z_2 = u_3 = u_1 = 1, \quad v_2 \neq v_3;$$

$$[\mathbf{x}[\mathbf{yzu}]\mathbf{v}] \neq [\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]], \quad x_1 = y_3 = z_2 = u_1 = 1, \quad v_2 \neq v_3.$$

Следствием любого из трех записанных неравенств является неассоциативность операции $[\]$. Из второго неравенства вытекает, что операция $[\]$ не является и полуассоциативной, то есть в $\mathbb{R}^3$ не выполняется тождество

$$[[\mathbf{xyz}]\mathbf{uv}] = [\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]].$$

Покажем, что тернарная операция, определенная на $\mathbb{R}^3$, не являющаяся ассоциативной, может быть полуассоциативной.

3.4. Пример. Определим на $\mathbb{R}^3$ тернарную операцию

$$[\mathbf{xyz}] = (x_1 y_3 z_1, x_2 y_1 z_2, x_3 y_2 z_3).$$

Так как

$$[[\mathbf{xyz}]\mathbf{uv}] = [(x_1 y_3 z_1, x_2 y_1 z_2, x_3 y_2 z_3)\mathbf{uv}] = (x_1 y_3 z_1 u_3 v_1, x_2 y_1 z_2 u_1 v_2, x_3 y_2 z_3 u_2 v_3),$$

$$[\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]] = [\mathbf{xy}(z_1 u_3 v_1, z_2 u_1 v_2, z_3 u_2 v_3)] = (x_1 y_3 z_1 u_3 v_1, x_2 y_1 z_2 u_1 v_2, x_3 y_2 z_3 u_2 v_3),$$

$$[\mathbf{x}[\mathbf{yzu}]\mathbf{v}] = [\mathbf{x}(y_1 z_3 u_1, y_2 z_1 u_2, y_3 z_2 u_3)\mathbf{v}] = (x_1 y_3 z_2 u_3 v_1, x_2 y_1 z_3 u_1 v_2, x_3 y_2 z_1 u_2 v_3),$$

то

$$[[\mathbf{xyz}]\mathbf{uv}] = [\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]]$$

для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, но

$$[\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]] \neq [\mathbf{x}[\mathbf{yzu}]\mathbf{v}]$$

для некоторых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Следовательно, операция $[\]$ является полуассоциативной, но не является ассоциативной.

Заметим, что операция $[\]$ из предыдущего примера не является операцией вида $(\)_{l,\sigma,k}$.

3.5. Пример. Положим в теореме 3.2 $A = \mathbb{R}$ – полугруппа с обычной операцией умножения чисел, $k = 4$ и укажем все ассоциативные на $\mathbb{R}^4$ операции вида $[\]_{l,\sigma,4}$, где $\sigma \in S_4$, $l - 1$ – порядок подстановки σ . Каждая из шести транспозиций

$$(12), (13), (14), (23), (24), (34) \in S_4,$$

как элемент второго порядка, определяет на $\mathbb{R}^4$ тернарную ассоциативную операцию. Выпишем, например, явный вид операции $[\]_{3,(24),4}$:

$$[x_1 x_2 x_3]_{3,(24),4} = (x_{11} x_{21} x_{31}, x_{12} x_{24} x_{32}, x_{13} x_{23} x_{33}, x_{14} x_{22} x_{34}).$$

Ассоциативные тернарные операции определяют также три элемента второго порядка

$$(12)(34), (13)(24), (14)(23) \in S_4.$$

Выпишем, например, явный вид операции $[\]_{3,(14)(23),4}$:

$$[x_1 x_2 x_3]_{3,(14)(23),4} = (x_{11} x_{24} x_{31}, x_{12} x_{23} x_{32}, x_{13} x_{22} x_{33}, x_{14} x_{21} x_{34}).$$

Каждый из восьми циклов

$$(123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243) \in S_4,$$

как элемент третьего порядка, определяет на $\mathbb{R}^4$ 4-арную ассоциативную операцию. Выпишем, например, явный вид операции $[]_{4,(143),4}$:

$$[x_1x_2x_3x_4]_{4,(143),4} = (x_{11}x_{24}x_{33}x_{41}, x_{12}x_{22}x_{32}x_{42}, x_{13}x_{21}x_{34}x_{43}, x_{14}x_{23}x_{31}x_{44}).$$

Каждый из шести циклов

$$(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432) \in S_4,$$

как элемент четвертого порядка, определяет на $\mathbb{R}^4$ 5-арную ассоциативную операцию. Выпишем явный вид всех этих операций:

$$[x_1x_2x_3x_4x_5]_{5,(1234),4} = (x_{11}x_{22}x_{33}x_{44}x_{51}, x_{12}x_{23}x_{34}x_{41}x_{52}, x_{13}x_{24}x_{31}x_{42}x_{53}, x_{14}x_{21}x_{32}x_{43}x_{54});$$

$$[x_1x_2x_3x_4x_5]_{5,(1243),4} = (x_{11}x_{22}x_{34}x_{43}x_{51}, x_{12}x_{24}x_{33}x_{41}x_{52}, x_{13}x_{21}x_{32}x_{44}x_{53}, x_{14}x_{23}x_{31}x_{42}x_{54});$$

$$[x_1x_2x_3x_4x_5]_{5,(1324),4} = (x_{11}x_{23}x_{32}x_{44}x_{51}, x_{12}x_{24}x_{31}x_{43}x_{52}, x_{13}x_{22}x_{34}x_{41}x_{53}, x_{15}x_{21}x_{33}x_{42}x_{54});$$

$$[x_1x_2x_3x_4x_5]_{5,(1342),4} = (x_{11}x_{23}x_{34}x_{42}x_{51}, x_{12}x_{21}x_{33}x_{44}x_{52}, x_{13}x_{24}x_{32}x_{41}x_{53}, x_{15}x_{22}x_{31}x_{43}x_{54});$$

$$[x_1x_2x_3x_4x_5]_{5,(1423),4} = (x_{11}x_{24}x_{32}x_{43}x_{51}, x_{12}x_{23}x_{31}x_{44}x_{52}, x_{13}x_{21}x_{34}x_{42}x_{53}, x_{14}x_{22}x_{33}x_{41}x_{54});$$

$$[x_1x_2x_3x_4x_5]_{5,(1432),4} = (x_{31}x_{24}x_{33}x_{42}x_{51}, x_{12}x_{21}x_{34}x_{43}x_{52}, x_{13}x_{22}x_{31}x_{44}x_{53}, x_{15}x_{23}x_{32}x_{41}x_{54}).$$

Заметим, что определенная на $\mathbb{R}^4$ бинарная операция

$$x_1x_2 = (x_{11}x_{21}, x_{12}x_{22}, x_{13}x_{23}, x_{14}x_{24})$$

определяется, как несложно заметить, тождественной подстановкой $\varepsilon \in S_4$, то есть совпадает с операцией $[]_{2,\varepsilon,4}$.

Помимо указанных 24 ассоциативных операций, на $\mathbb{R}^4$ имеются и другие ассоциативные полиадические операции. Так как для любой подстановки $\sigma \in S_4$ порядка r и любого целого $t \geq 1$ подстановка σ^{rt} – тождественная, то по теореме 3.2 $[]_{rt+1,\sigma,4}$ – ассоциативная $(rt+1)$ -арная операция, определенная на $\mathbb{R}^4$. Например, $[]_{7,(13)(24),4}$ и $[]_{7,(134),4}$ – ассоциативные 7-арные операции. Для первой из указанных операций $r=2$, $t=3$, для второй – $r=3$, $t=2$.

Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, где $l \geq 2$, то и для обратной подстановки σ^{-1} верно соответствующее равенство $(\sigma^{-1})^l = \sigma^{-1}$. Поэтому из теоремы 3.2 вытекает

3.6. Следствие [3]. Пусть A – полугруппа, $k \geq 2$, $l \geq 2$, γ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\gamma^l = \gamma$, $\sigma = \gamma^{-1}$. Тогда l -арная операция $[]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной.

Например, в примере 3.5 ассоциативность операции $[]_{5,(1324),4}$ может быть получена как следствие ассоциативности операции $[]_{5,(1423),4}$, так как подстановки (1324) и (1423) взаимно обратны.

3.7. Теорема [4]. Пусть A – полугруппа с единицей, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда l -арная операция $[]_{l,\sigma,k}$ не является полуассоциативной, в частности ассоциативной.

3.8. Предложение. Если $\langle A, +, \times \rangle$ – ассоциативная алгебра над полем P , то $\langle A^k, +, []_{l,\sigma,k} \rangle$ – $(2, l)$ -алгебра над P . Если же $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, +, []_{l,\sigma,k} \rangle$ – ассоциативная $(2, l)$ -алгебра над P .

3.9. Предложение. Пусть полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от единицы. Если подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, то l -арный группоид $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$ не является абелевым.

3.10. Предложение. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то из абелевости полугруппы A следует полуабелевость l -арной полугруппы $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$. Если же полугруппа A содержит единицу, то верно и обратное утверждение, то есть из полуабелевости l -арной полугруппы $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ следует абелевость полугруппы A .

3.11. Предложение. Если A – группа, то $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ – l -арная квазигруппа. Если же, кроме того, выполняется условие $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ – l -арная группа.

3.12. Предложение. Если 0 – нуль полугруппы A , то $\underbrace{(0, \dots, 0)}_k$ – нуль l -арного группоида $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$. Если к тому же $l \geq 3$, то в l -арном группоиде $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ все элементы являются делителями его нуля.

3.13. Предложение. Если полугруппа A содержит более одного элемента, а σ – нетождественная подстановка из S_k , то в $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ нет единиц.

Если $\langle A, +, \times \rangle$ – алгебра над полем P , $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in A^k$, то положим

$$\bar{\mathbf{a}} = (a_1, -a_2, \dots, -a_k) \in A^k.$$

3.14. Предложение. Если A – ассоциативная алгебра над полем P , то

$$\overline{[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k}} = [\bar{\mathbf{x}}_1 \bar{\mathbf{x}}_2 \dots \bar{\mathbf{x}}_l]_{l,\sigma,k}.$$

Если же σ – цикл длины k из S_k , удовлетворяющий условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$\overline{[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k}} = [\bar{\mathbf{x}}_1 \bar{\mathbf{x}}_2 \dots \bar{\mathbf{x}}_l]_{l,\sigma,k}$$

при четном $\frac{(l-1)(k-1)}{k}$,

$$\overline{[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k}} = -[\bar{\mathbf{x}}_1 \bar{\mathbf{x}}_2 \dots \bar{\mathbf{x}}_l]_{l,\sigma,k}$$

при нечетном $\frac{(l-1)(k-1)}{k}$,

3.15. Следствие. Если A – ассоциативная алгебра над полем P , σ – цикл длины k из S_k , то

$$\overline{[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{k+1}]_{k+1,\sigma,k}} = [\bar{\mathbf{x}}_1 \bar{\mathbf{x}}_2 \dots \bar{\mathbf{x}}_{k+1}]_{k+1,\sigma,k}$$

при нечетном k ,

$$\overline{[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{k+1}]_{k+1,\sigma,k}} = -[\bar{\mathbf{x}}_1 \bar{\mathbf{x}}_2 \dots \bar{\mathbf{x}}_{k+1}]_{k+1,\sigma,k}.$$

при четном k .

3.16. Следствие. Если A – ассоциативная алгебра над полем P , σ – цикл длины k из S_k , то

$$\overline{[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{2k-1}]_{2k-1,\sigma,k}} = [\bar{\mathbf{x}}_1 \bar{\mathbf{x}}_2 \dots \bar{\mathbf{x}}_{2k-1}]_{2k-1,\sigma,k}.$$

3.17. Предложение. Если A – группа, 1 – ее единица, $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_p$ – разложение в произведение независимых циклов, исключая циклы единичной длины, подстановки $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, то элемент $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ является идемпотентом в $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ тогда и только тогда, когда компоненты ε_m , индексы m которых подстановка σ оставляет неподвижными, удовлетворяют условию

$$\varepsilon_m^{l-1} = 1,$$

а компоненты, индексы которых входят в запись цикла σ_r ($r = 1, \dots, p$), удовлетворяют условию

$$\varepsilon_{i_r} \varepsilon_{\sigma(i_r)} \varepsilon_{\sigma^2(i_r)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(i_r)} = 1,$$

где i_r – любой символ, входящий в запись цикла σ_r .

3.18. Следствие. Если A – группа, 1 – ее единица, цикл $\sigma \in S_k$ длины k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$I(A^k, [\]_{l,\sigma,k}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in A^k \mid (\varepsilon_1 \varepsilon_{\sigma(1)} \varepsilon_{\sigma^2(1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(1)})^{\frac{l-1}{k}} = 1\}.$$

В частности,

$$I(A^k, [\]_{k+1,\sigma,k}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in A^k \mid \varepsilon_1 \varepsilon_{\sigma(1)} \varepsilon_{\sigma^2(1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(1)} = 1\}.$$

3.19. Следствие. Если A – абелева группа, 1 – ее единица, а цикл $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$I(A^k, [\]_{l,\sigma,k}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in A^k \mid (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k)^{\frac{l-1}{k}} = 1\}.$$

В частности,

$$I(A^k, [\]_{k+1,\sigma,k}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in A^k \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k = 1\}.$$

3.20. Замечание. В предложении 3.17 условие

$$\varepsilon_{i_r} \varepsilon_{\sigma(i_r)} \varepsilon_{\sigma^2(i_r)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(i_r)} = 1$$

можно заменить равносильным условием

$$\varepsilon_{\sigma(i_r)} \varepsilon_{\sigma^2(i_r)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(i_r)} \varepsilon_{i_r} = 1.$$

Соответствующие замены можно сделать в следствиях 3.18 и 3.19.

3.21. Теорема. Пусть, $\langle A, +, \times \rangle$ – ассоциативная алгебра над полем P , 0 – ее нуль, $k \geq 2$, $l \geq 3$, k делит $l-1$, σ – цикл длины k из S_k . Тогда:

1) $\langle A^k, +, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ – ассоциативная $(2, l)$ -алгебра над P , в которой все элементы являются делителями ее нуля $\underbrace{(0, \dots, 0)}_k$;

2) если $\langle A, +, \times \rangle$ – коммутативна, то $\langle A^k, +, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ – полуабелева;

3) если $\langle A \setminus \{0\}, \times \rangle$ – группа, то $\langle (A \setminus \{0\})^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ – l -арная группа;

4) для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ и любого $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{j-1}, 0, a_{j+1}, \dots, a_k) \in A^k$ верно

$$\underbrace{[\mathbf{a}, \dots, \mathbf{a}]_l}_{l,\sigma,k} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k;$$

5) если алгебра $\langle A, +, \times \rangle$ содержит более одного элемента и в ней есть единица, то $\langle A^k, +, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ – неабелева;

6) если A содержит более одного элемента, то в $\langle A^k, +, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ нет единиц;

7) если $\langle A \setminus \{0\}, \times \rangle$ – группа, 1 – ее единица, то

$$I(A^k, [\]_{l,\sigma,k}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in A^k \mid (\varepsilon_1 \varepsilon_{\sigma(1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(1)})^{\frac{l-1}{k}} = 1\} \bigcup \underbrace{\{(0, \dots, 0)\}}_k;$$

8) если $\frac{(l-1)(k-1)}{k}$ – четное, то $\overline{[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k}} = [\overline{\mathbf{x}_1} \overline{\mathbf{x}_2} \dots \overline{\mathbf{x}_l}]_{l,\sigma,k}$, если же $\frac{(l-1)(k-1)}{k}$ – нечетное, то $\overline{[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k}} = -[\overline{\mathbf{x}_1} \overline{\mathbf{x}_2} \dots \overline{\mathbf{x}_l}]_{l,\sigma,k}$.

Доказательство. 1) Используются предложения 3.8 и 3.12.

2) Используется предложение 3.10.

3) Используется предложение 3.11.

4) Проверяется непосредственными вычислениями.

5) Используется предложение 3.9.

6) Используется предложение 3.13.

7) Используется следствие 3.18 и утверждение 4).

8) Используется предложение 3.14. Предложение доказано.

Полагая в теореме 3.21 $l = k + 1$, получим

3.22. Следствие. Пусть $\langle A, +, \times \rangle$ – ассоциативная алгебра над полем P , 0 – ее нуль, $k \geq 2$, σ – цикл длины k из S_k . Тогда:

1) $\langle A^k, +, [\]_{k+1, \sigma, k} \rangle$ – ассоциативная $(2, k+1)$ -алгебра над P , в которой все элементы являются делителями ее нуля $\underbrace{(0, \dots, 0)}_k$;

2) если $\langle A, +, \times \rangle$ – коммутативна, то $\langle A^k, +, [\]_{k+1, \sigma, k} \rangle$ – полуабелева;

3) если $\langle A \setminus \{0\}, \times \rangle$ – группа, то $\langle (A \setminus \{0\})^k, [\]_{k+1, \sigma, k} \rangle$ – $(k+1)$ -арная группа;

4) для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ и любого $a = (a_1, \dots, a_{j-1}, 0, a_{j+1}, \dots, a_k) \in A^k$ верно

$$\underbrace{[a, \dots, a]}_{k+1}_{k+1, \sigma, k} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k;$$

5) если алгебра $\langle A, +, \times \rangle$ содержит более одного элемента и в ней есть единица, то $\langle A^k, +, [\]_{k+1, \sigma, k} \rangle$ – неабелева;

6) если A содержит более одного элемента, то в $\langle A^k, +, [\]_{k+1, \sigma, k} \rangle$ нет единиц;

7) если $\langle A \setminus \{0\}, \times \rangle$ – группа, 1 – ее единица, то

$$I(A^k, +, [\]_{k+1, \sigma, k}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in A^k \mid \varepsilon_1 \varepsilon_{\sigma(1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(1)} = 1\} \bigcup \underbrace{\{(0, \dots, 0)\}}_k;$$

8) если k – нечетное, то $\overline{[x_1 x_2 \dots x_{k+1}]}_{k+1, \sigma, k} = [\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{k+1}]_{k+1, \sigma, k}$, если же k – четное, то $\overline{[x_1 x_2 \dots x_{k+1}]}_{k+1, \sigma, k} = -[\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{k+1}]_{k+1, \sigma, k}$.

Прежде чем перейти к следующему разделу, докажем совпадение операций $[\]_{l, k}$ и $[\]_{l, (12 \dots k), k}$.

3.23. Предложение. Пусть A – полугруппа, $l \geq 2$, $k \geq 2$, $\alpha = (12 \dots k) \in S_k$. Тогда операции $[\]_{l, k}$ и $[\]_{l, \alpha, k}$ совпадают: $[\]_{l, k} = [\]_{l, \alpha, k}$.

Доказательство. Пусть $l = sk + r$, $s \geq 0$, $1 \leq r \leq k$. Используя теорему 2.7, утверждения 1) и 2) леммы 2.6, определение преобразования f_i и равенства

$$\alpha(j) = j + 1, \alpha^2(j) = j + 2, \dots, \alpha^{k-j}(j) = k, \alpha^{k-j+1}(j) = 1, \dots, \alpha^{k-1}(j) = j - 1, \alpha^k(j) = j,$$

получим

$$\begin{aligned} [x_1 x_2 \dots x_l]_{l, k} &= [x_1 x_2 \dots x_k x_{k+1} x_{k+2} \dots x_{2k} x_{2k+1} x_{2k+2} \dots \\ &\dots x_{(s-1)k} x_{(s-1)k+1} x_{(s-1)k+2} \dots x_{sk} x_{sk+1} x_{sk+2} \dots x_{sk+r}]_{l, k} = \\ &= x_1 x_2^{f_1} \dots x_k^{f_{k-1}} x_{k+1}^{f_k} x_{k+2}^{f_{k+1}} \dots x_{2k}^{f_{2k-1}} x_{2k+1}^{f_{2k}} x_{2k+2}^{f_{2k+1}} \dots \\ &\dots x_{(s-1)k}^{f_{(s-1)k-1}} x_{(s-1)k+1}^{f_{(s-1)k}} x_{(s-1)k+2}^{f_{(s-1)k+1}} \dots x_{sk}^{f_{sk-1}} x_{sk+1}^{f_{sk}} x_{sk+2}^{f_{sk+1}} \dots x_{sk+r}^{f_{sk+r-1}} = \\ &= x_1 x_2^{f_1} \dots x_k^{f_{k-1}} x_{k+1}^{f_1} x_{k+2}^{f_1} \dots x_{2k}^{f_{k-1}} x_{2k+1}^{f_1} x_{2k+2}^{f_1} \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots \mathbf{X}_{(s-1)k}^{f_{k-1}} \mathbf{X}_{(s-1)k+1} \mathbf{X}_{(s-1)k+2}^{f_1} \dots \mathbf{X}_{sk}^{f_{k-1}} \mathbf{X}_{sk+1} \mathbf{X}_{sk+2}^{f_1} \dots \mathbf{X}_{sk+r}^{f_{r-1}} = \\
 & = (x_{11}, \dots, x_{1k}) (x_{22}, \dots, x_{2k}, x_{21}) \dots (x_{kk}, x_{k1}, \dots, x_{k(k-1)}) \\
 & (x_{(k+1)1}, \dots, x_{(k+1)k}) (x_{(k+2)2}, \dots, x_{(k+2)k}, x_{(k+2)1}) \dots (x_{(2k)k}, x_{(2k)1}, \dots, x_{(2k)(k-1)}) \\
 & (x_{(2k+1)1}, \dots, x_{(2k+1)k}) (x_{(2k+2)2}, \dots, x_{(2k+2)k}, x_{(2k+2)1}) \dots (x_{((s-1)k)k}, x_{((s-1)k)1}, \dots, x_{((s-1)k)(k-1)}) \\
 & (x_{((s-1)k+1)1}, \dots, x_{((s-1)k+1)k}) (x_{((s-1)k+2)2}, \dots, x_{((s-1)k+2)k}, x_{((s-1)k+2)1}) \dots \\
 & \dots (x_{(sk)k}, x_{(sk)1}, \dots, x_{(sk)(k-1)}) (x_{(sk+1)1}, \dots, x_{(sk+1)k}) (x_{(sk+2)2}, \dots, x_{(sk+2)k}, x_{(sk+2)1}) \dots \\
 & \dots (x_{(sk+r)r}, \dots, x_{(sk+r)k}, x_{(sk+r)1}, \dots, x_{(sk+r)(r-1)}) = \\
 & = (x_{11}, \dots, x_{1k}) (x_{2\alpha(1)}, \dots, x_{2\alpha(k-1)}, x_{2\alpha(k)}) \dots (x_{k\alpha^{k-1}(1)}, x_{k\alpha^{k-1}(2)}, \dots, x_{k\alpha^{k-1}(k)}) \\
 & (x_{(k+1)1}, \dots, x_{(k+1)k}) (x_{(k+2)\alpha(1)}, \dots, x_{(k+2)\alpha(k)}) \dots (x_{(2k)\alpha^{k-1}(1)}, \dots, x_{(2k)\alpha^{k-1}(k)}) \\
 & (x_{(2k+1)1}, \dots, x_{(2k+1)k}) (x_{(2k+2)\alpha(1)}, \dots, x_{(2k+2)\alpha(k)}) \dots (x_{((s-1)k)\alpha^{k-1}(1)}, \dots, x_{((s-1)k)\alpha^{k-1}(k)}) \dots \\
 & \dots (x_{((s-1)k+1)1}, \dots, x_{((s-1)k+1)k}) (x_{((s-1)k+2)\alpha(1)}, \dots, x_{((s-1)k+2)\alpha(k)}) \dots (x_{(sk)\alpha^{k-1}(1)}, \dots, x_{(sk)\alpha^{k-1}(k)}) \\
 & (x_{(sk+1)1}, \dots, x_{(sk+1)k}) (x_{(sk+2)\alpha(1)}, \dots, x_{(sk+2)\alpha(k)}) \dots (x_{(sk+r)\alpha^{r-1}(1)}, \dots, x_{(sk+r)\alpha^{r-1}(k)}) = \\
 & = (x_{11} x_{2\alpha(1)} \dots x_{k\alpha^{k-1}(1)} x_{(k+1)1} x_{(k+2)\alpha(1)} \dots x_{(2k)\alpha^{k-1}(1)} \dots x_{((s-1)k+1)1} x_{((s-1)k+2)\alpha(1)} \dots \\
 & \dots x_{(sk)\alpha^{k-1}(1)} x_{(sk+1)1} x_{(sk+2)\alpha(1)} \dots x_{(sk+r)\alpha^{r-1}(1)}, \dots, x_{1k} x_{2\alpha(k)} \dots x_{k\alpha^{k-1}(k)} x_{(k+1)k} x_{(k+2)\alpha(k)} \dots \\
 & \dots x_{(2k)\alpha^{k-1}(k)} \dots x_{((s-1)k+1)k} x_{((s-1)k+2)\alpha(k)} \dots x_{(sk)\alpha^{k-1}(k)} \dots x_{(sk+1)k} x_{(sk+2)\alpha(k)} x_{(sk+r)\alpha^{r-1}(k)}) = \\
 & = (x_{11} x_{2\alpha(1)} \dots x_{k\alpha^{k-1}(1)} x_{(k+1)\alpha^k(1)} x_{(k+2)\alpha^{k+1}(1)} \dots x_{(2k)\alpha^{2k-1}(1)} \dots \\
 & \dots x_{((s-1)k+1)\alpha^{(s-1)k}(1)} x_{((s-1)k+2)\alpha^{(s-1)k+1}(1)} \dots x_{(sk)\alpha^{sk-1}(1)} x_{(sk+1)\alpha^{sk}(1)} x_{(sk+2)\alpha^{sk+1}(1)} \dots \\
 & \dots x_{(sk+r)\alpha^{sk+r-1}(1)}, \dots, x_{1k} x_{2\alpha(k)} \dots x_{k\alpha^{k-1}(k)} x_{(k+1)\alpha^k(k)} x_{(k+2)\alpha^{k+1}(k)} \dots x_{(2k)\alpha^{2k-1}(k)} \dots \\
 & \dots x_{((s-1)k+1)\alpha^{(s-1)k}(k)} x_{((s-1)k+2)\alpha^{(s-1)k+1}(k)} \dots x_{(sk)\alpha^{sk-1}(k)} \\
 & x_{(sk+1)\alpha^{sk}(k)} x_{(sk+2)\alpha^{sk+1}(k)} \dots x_{(sk+r)\alpha^{sk+r-1}(k)}) = \\
 & = (x_{11} x_{2\alpha(1)} \dots x_{(sk+r)\alpha^{sk+r-1}(1)}, \dots, x_{1k} x_{2\alpha(k)} \dots x_{(sk+r)\alpha^{sk+r-1}(k)}) = \\
 & = (x_{11} x_{2\alpha(1)} \dots x_{l\alpha^{l-1}(1)}, \dots, x_{1k} x_{2\alpha(k)} \dots x_{l\alpha^{l-1}(k)}) = [x_1 x_2 \dots x_l]_{l,\alpha,k},
 \end{aligned}$$

то есть

$$[x_1 x_2 \dots x_l]_{l,k} = [x_1 x_2 \dots x_l]_{l,\alpha,k}.$$

Предложение доказано.

Предложение 3.23 показывает, что теорема 6.1 и следствие 6.2 из [2] являются частными случаями теоремы 3.21 и следствия 3.22 соответственно, так как получаются из них при $n \geq 3$, $l = s(n-1)$, $k = n-1$, $\sigma = (12 \dots n-1)$. Отметим, что частными случаями утверждений 3.8 – 3.19 являются также соответствующие утверждения из [2].

4. n -АРНАЯ ОПЕРАЦИЯ $[\]_{n,m,m(n-1)}$

Пусть B – множество, $m \geq 1$, $n \geq 3$, $A = B^m$ – m -ая декартова степень множества A , $\langle A, \times \rangle$ – полугруппа, операцию которой в некоторых случаях для сокращения записей указывать не будем.

Заметим, что если B – полугруппа, то в качестве $\times$ можно взять операцию, определенную на $A = B^m$ покомпонентно.

Определим на $B^{m(n-1)}$ n -арную операцию $[\]_{n,m,m(n-1)}$ следующим образом. Если

$$\alpha_i = (\alpha_{i1}^{(1)}, \dots, \alpha_{im}^{(1)}, \alpha_{i1}^{(2)}, \dots, \alpha_{im}^{(2)}, \dots, \alpha_{i1}^{(n-1)}, \dots, \alpha_{im}^{(n-1)}) \in B^{m(n-1)}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

то

$$[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n]_{n,m,m(n-1)} = (y_{11}, \dots, y_{1m}, y_{21}, \dots, y_{2m}, \dots, y_{(n-1)1}, \dots, y_{(n-1)m}) \in B^{m(n-1)}, \quad (6)$$

где y_{ij} определяются следующим образом

$$\begin{aligned} (y_{j1}, \dots, y_{jm}) &= (\alpha_{11}^{(j)}, \dots, \alpha_{1m}^{(j)}) \times (\alpha_{21}^{(j+1)}, \dots, \alpha_{2m}^{(j+1)}) \times \dots \\ &\dots (\alpha_{(n-j)1}^{(n-1)}, \dots, \alpha_{(n-j)m}^{(n-1)}) \times (\alpha_{(n-j+1)1}^{(1)}, \dots, \alpha_{(n-j+1)m}^{(1)}) \times \dots \\ &\dots (\alpha_{(n-1)1}^{(j-1)}, \dots, \alpha_{(n-1)m}^{(j-1)}) \times (\alpha_{n1}^{(j)}, \dots, \alpha_{nm}^{(j)}) \in B^m, \quad j = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (7)$$

Если положить $\alpha_{ij} = (\alpha_{i1}^{(j)}, \dots, \alpha_{im}^{(j)}) \in B^m$, $y_j = (y_{j1}, \dots, y_{jm})$, $j \in \{1, \dots, n-1\}$, то

$$y_j = \alpha_{ij} \alpha_{2(j+1)} \dots \alpha_{(n-j)(n-1)} \alpha_{(n-j+1)1} \dots \alpha_{(n-1)(j-1)} \alpha_{nj} \in B^m.$$

Понятно, что ввиду (2), при $m = 1$ n -арная операция $[\]_{n,m,m(n-1)}$ совпадает с n -арной операцией $[\]_{n,n-1}$: $[\]_{n,m,m(n-1)} = [\]_{n,1,n-1}$.

4.1. Теорема [1, 2]. n -Арная операция $[\]_{n,m,m(n-1)}$ ассоциативна.

Если в теореме 4.1 положить $m = 2$, то получим

4.2. Следствие. n -Арная операция $[\]_{n,2,2(n-1)}$ ассоциативна.

Если в следствии 4.2 положить $n = 3$, $B = \mathbb{R}$, а в качестве операции $\times$ взять умножение комплексных (двойных, дуальных) чисел, то получим три различные ассоциативные тернарные операции, определенные на $\mathbb{R}^4$. Явный вид этих операций есть в [1, 2].

Вообще, если в качестве операции $\times$ брать операцию умножения комплексных (двойных, дуальных) чисел, то согласно следствию 4.2, для любого $n \geq 3$ на декартовой степени $\mathbb{R}^{2(n-1)}$ можно построить три различные ассоциативные n -арные операции. Укажем здесь явный вид такой операции для умножения комплексных чисел при $n = 4$.

4.3. Следствие [1, 2]. Определенная на $\mathbb{R}^6$ 4-арная операция

$$[(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$$

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)]_{4,2,6} = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6),$$

где

$$r_1 = x_1 y_3 z_5 u_1 - x_2 y_4 z_5 u_1 - x_1 y_4 z_6 u_1 - x_2 y_3 z_6 u_1 - x_1 y_3 z_6 u_2 + x_2 y_4 z_6 u_2 - x_1 y_4 z_5 u_2 - x_2 y_3 z_5 u_2,$$

$$r_2 = x_1 y_3 z_5 u_2 - x_2 y_4 z_5 u_2 - x_1 y_4 z_6 u_2 - x_2 y_3 z_6 u_2 + x_1 y_3 z_6 u_1 - x_2 y_4 z_6 u_1 + x_1 y_4 z_5 u_1 + x_2 y_3 z_5 u_1,$$

$$r_3 = x_3 y_5 z_1 u_3 - x_4 y_6 z_1 u_3 - x_3 y_6 z_2 u_3 - x_4 y_5 z_2 u_3 - x_3 y_5 z_2 u_4 + x_4 y_6 z_2 u_4 - x_3 y_6 z_1 u_4 - x_4 y_5 z_1 u_4,$$

$r_4 = x_3y_5z_1u_4 - x_4y_6z_1u_4 - x_3y_6z_2u_4 - x_4y_5z_2u_4 + x_3y_5z_2u_3 - x_4y_6z_2u_3 + x_3y_6z_1u_3 + x_4y_5z_1u_3,$
 $r_5 = x_5y_1z_3u_5 - x_6y_2z_3u_5 - x_5y_2z_4u_5 - x_6y_1z_4u_5 - x_5y_1z_4u_6 + x_6y_2z_4u_6 - x_5y_2z_3u_6 - x_6y_1z_3u_6,$
 $r_6 = x_5y_1z_3u_6 - x_6y_2z_3u_6 - x_5y_2z_4u_6 - x_6y_1z_4u_6 + x_5y_1z_4u_5 - x_6y_2z_4u_5 + x_5y_2z_3u_5 + x_6y_1z_3u_5,$
является ассоциативной.

Если в теореме 4.1 положить $m = 4$, $B = \mathbb{R}$, а в качестве операции $\times$ взять умножение кватернионов, то для любого $n \geq 3$ на декартовой степени $\mathbb{R}^{4(n-1)}$ можно определить ассоциативную n -арную операцию. В [1, 2] указан явный вид такой операции при $m = 4$, $n = 3$, то есть тернарной операции, определенной на $\mathbb{R}^8$.

5. l -АРНАЯ ОПЕРАЦИЯ $[\]_{l,\sigma,m,mk}$

Как уже отмечалось, при $m = 1$ n -арная операция $[\]_{n,m,m(n-1)}$ совпадает с n -арной операцией $[\]_{n,n-1}$, которая является частным случаем операции $[\]_{l,k}$ при $l = n$, $k = n - 1$, а последняя, в свою очередь, является частным случаем операции $[\]_{l,\sigma,k}$ при $\sigma = (12 \dots k)$. В связи со сказанным возникает задача: обобщить операцию $[\]_{n,m,m(n-1)}$ так, чтобы при $m = 1$ она совпадала с операцией $[\]_{l,\sigma,k}$.

Пусть B – множество, $m \geq 1$, $l \geq 2$, $k \geq 2$, $\sigma \in S_k$, $A = B^m$ – m -ая декартова степень множества B , $< A, \times >$ – полугруппа. Как и ранее, в некоторых случаях операцию $\times$ указывать не будем.

Определим на B^{mk} – l -арную $[\]_{l,\sigma,m,mk}$ следующим образом. Если

$$\alpha_i = (\alpha_{i1}^{(1)}, \dots, \alpha_{im}^{(1)}, \alpha_{i1}^{(2)}, \dots, \alpha_{im}^{(2)}, \dots, \alpha_{i1}^{(k)}, \dots, \alpha_{im}^{(k)}) \in B^{mk}, \quad i \in \{1, \dots, l\},$$

то

$$[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l]_{l,\sigma,m,mk} = (y_{11}, \dots, y_{1m}, y_{21}, \dots, y_{2m}, \dots, y_{k1}, \dots, y_{km}) \in B^{mk}, \quad (8)$$

где y_{ij} определяются следующим образом

$$(y_{j1}, \dots, y_{jm}) = (\alpha_{11}^{(j)}, \dots, \alpha_{1m}^{(j)}) \times (\alpha_{21}^{(\sigma(j))}, \dots, \alpha_{2m}^{(\sigma(j))}) \times \dots \\ \dots (\alpha_{(l-1)1}^{(\sigma^{l-2}(j))}, \dots, \alpha_{(l-1)m}^{(\sigma^{l-2}(j))}) \times (\alpha_{lm}^{(\sigma^{l-1}(j))}, \dots, \alpha_{lm}^{(\sigma^{l-1}(j))}). \quad (9)$$

Если положить

$$\alpha_{ij} = (\alpha_{i1}^{(j)}, \dots, \alpha_{im}^{(j)}) \in B^m, \quad y_j = (y_{j1}, \dots, y_{jm}), \quad j \in \{1, \dots, k\},$$

то равенство (9) примет следующий вид

$$y_j = \alpha_{1j} \alpha_{2\sigma(j)} \dots \alpha_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} \alpha_{l\sigma^{l-1}(j)} \in B^m.$$

Понятно, что ввиду (4), при $m = 1$ l -арная операция $[\]_{l,\sigma,m,mk}$ совпадает с l -арной операцией $(\)_{l,\sigma,k}$. Если же $l = n$, $k = n - 1$, $\sigma = (12 \dots n - 1)$, то (8) и (9) принимают вид (6) и (7), а операция $[\]_{l,\sigma,m,mk}$ совпадает с операцией $[\]_{n,m,m(n-1)}$. Таким образом, поставленная задача обобщения операции $[\]_{n,m,m(n-1)}$ решена.

Рассмотрим на $A^k = \underbrace{B^m \times \dots \times B^m}_k$ l -арную операцию $(\)_{l,\sigma,k}$ и запишем явный вид этой операции. Для этого для любого $i \in \{1, \dots, l\}$ положим

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}) \in A^k, \quad \mathbf{x}_{ij} = (x_{i1}^{(j)}, \dots, x_{im}^{(j)}) \in B^m, \quad j = 1, \dots, k,$$

то есть

$$\mathbf{x}_i = ((x_{i1}^{(1)}, \dots, x_{im}^{(1)}), (x_{i1}^{(2)}, \dots, x_{im}^{(2)}), \dots, (x_{i1}^{(k)}, \dots, x_{im}^{(k)})) \in A^k.$$

Используя равенство (5) из определения операции $(\cdot)_{l,\sigma,k}$, получим

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k),$$

где

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{x}_{1j} \mathbf{x}_{2\sigma(j)} \dots \mathbf{x}_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} \mathbf{x}_{l\sigma^{l-1}(j)} \in B^m$$

или

$$\mathbf{y}_j = (x_{11}^{(j)}, \dots, x_{1m}^{(j)})(x_{21}^{(\sigma(j))}, \dots, x_{2m}^{(\sigma(j))}) \dots (x_{(l-1)1}^{(\sigma^{l-2}(j))}, \dots, x_{(l-1)m}^{(\sigma^{l-2}(j))})(x_{l1}^{(\sigma^{l-1}(j))}, \dots, x_{lm}^{(\sigma^{l-1}(j))}).$$

5.1. Лемма. Универсальные алгебры $\langle B^{mk}, [\cdot]_{l,\sigma,m,mk} \rangle$ и $\langle A^k, [\cdot]_{l,\sigma,k} \rangle$ изоморфны.

Доказательство. Ясно, что отображение ψ , ставящее в соответствие элементу

$$(\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(2)}, \dots, \alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_m^{(k)}) \in B^{mk}$$

элемент

$$((\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(1)}), (\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(2)}), \dots, (\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_m^{(k)})) \in A^k$$

является биекцией B^{mk} на A^k .

Кроме того,

$$\begin{aligned} [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l]_{l,\sigma,m,mk}^\psi &= (y_{11}, \dots, y_{1m}, y_{21}, \dots, y_{2m}, \dots, y_{k1}, \dots, y_{km})^\psi = \\ &= ((y_{11}, \dots, y_{1m}), (y_{21}, \dots, y_{2m}), \dots, (y_{k1}, \dots, y_{km})) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k) = \\ &= (\alpha_{11} \alpha_{2\sigma(1)} \dots \alpha_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)} \alpha_{l\sigma^{l-1}(1)}, \dots, \alpha_{1k} \alpha_{2\sigma(k)} \dots \alpha_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)} \alpha_{l\sigma^{l-1}(k)}) = \\ &= ((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1k})(\alpha_{21}, \dots, \alpha_{2k}) \dots (\alpha_{l1}, \dots, \alpha_{lk}))_{l,\sigma,k} = \\ &= (((\alpha_{11}^{(1)}, \dots, \alpha_{1m}^{(1)}), \dots, (\alpha_{11}^{(k)}, \dots, \alpha_{1m}^{(k)}))((\alpha_{21}^{(1)}, \dots, \alpha_{2m}^{(1)}), \dots, (\alpha_{21}^{(k)}, \dots, \alpha_{2m}^{(k)})) \dots \\ &\quad \dots ((\alpha_{l1}^{(1)}, \dots, \alpha_{lm}^{(1)}), \dots, (\alpha_{l1}^{(k)}, \dots, \alpha_{lm}^{(k)})))_{l,\sigma,k} = \\ &= ((\alpha_{11}^{(1)}, \dots, \alpha_{1m}^{(1)}, \dots, \alpha_{11}^{(k)}, \dots, \alpha_{1m}^{(k)})^\psi (\alpha_{21}^{(1)}, \dots, \alpha_{2m}^{(1)}, \dots, \alpha_{21}^{(k)}, \dots, \alpha_{2m}^{(k)})^\psi \dots \\ &\quad \dots (\alpha_{l1}^{(1)}, \dots, \alpha_{lm}^{(1)}, \dots, \alpha_{l1}^{(k)}, \dots, \alpha_{lm}^{(k)})^\psi)_{l,\sigma,k} = [\alpha_1^\psi \alpha_2^\psi \dots \alpha_l^\psi]_{l,\sigma,k}, \end{aligned}$$

то есть

$$[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l]_{l,\sigma,m,mk}^\psi = [\alpha_1^\psi \alpha_2^\psi \dots \alpha_l^\psi]_{l,\sigma,k}$$

Следовательно, ψ – искомый изоморфизм. Лемма доказана.

Лемма 5.1 и теорема 3.2 позволяют сформулировать следующую теорему

5.2. Теорема. Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $[\cdot]_{l,\sigma,m,mk}$ ассоциативна.

Теорема 4.1 получается из теоремы 5.2 при $l = n$, $k = n - 1$, $\sigma = (12 \dots n - 1)$.

Если в теореме 5.2 положить $m = 2$, то получим

5.3. Следствие. Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $[\cdot]_{l,\sigma,2,2k}$ ассоциативна.

Заметим, что 4-арная операция из следствия 4.3 совпадает с операцией $[\cdot]_{4,(123),2,6}$, то есть является операцией вида $[\cdot]_{l,\sigma,m,mk}$ при $m = 2$, $l = 4$, $k = 3$, $\sigma = (123)$ – подстановка третьего порядка из S_3 . Но подстановка (132) из S_3 также удовлетворяет условию $\sigma^4 = \sigma$. Поэтому, считая $B = \mathbb{R}$, $\langle A = \mathbb{R}^2, \times \rangle$ – полугруппа комплексных чисел, и, полагая в следствии 5.3 $l = 4$, $k = 3$, $\sigma = (132)$, получим

5.4. Следствие. Определенная на $\mathbb{R}^6$ 4-арная операция

$$[(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \\ (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)]_{4,(132),2,6} = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6),$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= x_1 y_5 z_3 u_1 - x_2 y_6 z_3 u_1 - x_1 y_6 z_4 u_1 - x_2 y_5 z_4 u_1 - x_1 y_5 z_4 u_2 + x_2 y_6 z_4 u_2 - x_1 y_6 z_3 u_2 - x_2 y_5 z_3 u_2, \\ r_2 &= x_1 y_5 z_3 u_2 - x_2 y_6 z_3 u_2 - x_1 y_6 z_4 u_2 - x_2 y_5 z_4 u_2 + x_1 y_5 z_4 u_1 - x_2 y_6 z_4 u_1 + x_1 y_6 z_3 u_1 + x_2 y_5 z_3 u_1, \\ r_3 &= x_3 y_1 z_5 u_3 - x_4 y_2 z_5 u_3 - x_3 y_2 z_6 u_3 - x_4 y_1 z_6 u_3 - x_3 y_1 z_6 u_4 + x_4 y_2 z_6 u_4 - x_3 y_2 z_5 u_4 - x_4 y_1 z_5 u_4, \\ r_4 &= x_3 y_1 z_5 u_4 - x_4 y_2 z_5 u_4 - x_3 y_2 z_6 u_4 - x_4 y_1 z_6 u_4 + x_3 y_1 z_6 u_3 - x_4 y_2 z_6 u_3 + x_3 y_2 z_5 u_3 + x_4 y_1 z_5 u_3, \\ r_5 &= x_5 y_3 z_1 u_5 - x_6 y_4 z_1 u_5 - x_5 y_4 z_2 u_5 - x_6 y_3 z_2 u_5 - x_5 y_3 z_2 u_6 + x_6 y_4 z_2 u_6 - x_5 y_4 z_1 u_6 - x_6 y_3 z_1 u_6, \\ r_6 &= x_5 y_3 z_1 u_6 - x_6 y_4 z_1 u_6 - x_5 y_4 z_2 u_6 - x_6 y_3 z_2 u_6 + x_5 y_3 z_2 u_5 - x_6 y_4 z_2 u_5 + x_5 y_4 z_1 u_5 + x_6 y_3 z_1 u_5, \end{aligned}$$

является ассоциативной.

Заметим, что в соответствии с определением операции $[]_{l,\sigma,m,mk}$ компоненты $r_1, \dots, r_6$ определялись из равенств

$$\begin{aligned} (r_1, r_2) &= (x_1, x_2) \times (y_5, y_6) \times (z_3, z_4) \times (u_1, u_2), \\ (r_3, r_4) &= (x_3, x_4) \times (y_1, y_2) \times (z_5, z_6) \times (u_3, u_4), \\ (r_5, r_6) &= (x_5, x_6) \times (y_3, y_4) \times (z_1, z_2) \times (u_5, u_6). \end{aligned}$$

Лемма 5.1 и теорема 3.7 позволяют сформулировать следующую теорему.

5.5. Теорема. Если полугруппа $\langle A, \times \rangle$ из определения операции $[]_{l,\sigma,m,mk}$ содержит единицу, а подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$, то l -арная операция $[]_{l,\sigma,m,mk}$ не является полуассоциативной, в частности ассоциативной.

Если в теореме 5.5 положить $m = 2$, то получим

5.6. Следствие. Если полугруппа $\langle A, \times \rangle$ из определения операции $[]_{l,\sigma,m,mk}$ содержит единицу, а подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$, то l -арная операция $[]_{l,\sigma,2,2k}$ не является полуассоциативной, в частности ассоциативной.

Приведем примеры неассоциативных многочестных операций вида $[]_{l,\sigma,m,mk}$.

5.7. Пример. Пусть $\langle A, \times \rangle$ – полугруппа комплексных (двойных, дуальных) чисел, $m = 2$, $k = 3$. Тогда, если $l = 3$, то по следствию 5.6, тернарные операции $[]_{3,(123),2,6}$ и $[]_{3,(132),2,6}$ не являются ассоциативными. Если же $l = 4$, то по тому же следствию неассоциативными будут 4-арные операции $[]_{4,(12),2,6}$, $[]_{4,(13),2,6}$ и $[]_{4,(23),2,6}$. Все пять указанных операций определены на декартовой степени $\mathbb{R}^6$.

Пусть по-прежнему B – множество, $m \geq 1$, $n \geq 3$, $A = B^m$ – m -ая декартова степень множества B , и пусть, кроме того, $\langle A, + \rangle$ – группоид. Определим на B^{mk} бинарную операцию $\tilde{+}$ следующим образом. Если

$$\alpha = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}, \dots, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}), \beta = (\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}, \dots, \beta_{k1}, \dots, \beta_{km}) \in B^{mk},$$

то

$$\alpha \tilde{+} \beta = (u_{11}, \dots, u_{1m}, \dots, u_{k1}, \dots, u_{km}) \in B^{mk},$$

где

$$(u_{j1}, \dots, u_{jm}) = (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}) + (\beta_{j1}, \dots, \beta_{jm}) \in B^{mk}$$

для любого $j \in \{1, \dots, k\}$.

5.8. Замечание. Если на множестве B определена операция $+$, с помощью которой на множестве $A = B^m$ покомпонентно определена операция $+$, то

$$\alpha \tilde{+} \beta = (\alpha_{11} + \beta_{11}, \dots, \alpha_{1m} + \beta_{1m}, \dots, \alpha_{k1} + \beta_{k1}, \dots, \alpha_{km} + \beta_{km}),$$

то есть, в этом случае, операция $\tilde{+}$ совпадает с операцией $+$, определенной на B^{mk} покомпонентно.

Пусть при тех же предположениях о m , n , B и A определено произведение элементов поля P на элементы из $A = B^m$:

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda(a_1, \dots, a_m) = (u_1, \dots, u_m).$$

Определим произведение о элементов $\lambda \in P$ на элементы из B^{mk} следующим образом. Если

$$\alpha = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}, \dots, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}) \in B^{mk}$$

то

$$\lambda \circ \alpha = (u_{11}, \dots, u_{1m}, \dots, u_{k1}, \dots, u_{km}),$$

где

$$(u_{j1}, \dots, u_{jm}) = \lambda(\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm})$$

для любого $j \in \{1, \dots, k\}$.

5.9. Замечание. Если

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda(a_1, \dots, a_m) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_m),$$

то

$$\lambda \circ \alpha = (\lambda \alpha_{11}, \dots, \lambda \alpha_{1m}, \dots, \lambda \alpha_{k1}, \dots, \lambda \alpha_{km}).$$

Если $\langle A = B^m, +, \times \rangle$ – алгебра, то для любого

$$\alpha = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{2m}, \dots, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}) \in B^{mk}$$

положим

$$\underline{\alpha} = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}, \beta_{21}, \dots, \beta_{2m}, \dots, \beta_{k1}, \dots, \beta_{km}) \in B^{mk}$$

где

$$(\beta_{i1}, \dots, \beta_{im}) = -(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{im}), \quad i = 2, \dots, k.$$

Так как

$$\begin{aligned} \alpha^\psi &= ((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), (\alpha_{21}, \dots, \alpha_{2m}), \dots, (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km})), \\ \overline{\alpha^\psi} &= ((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), -(\alpha_{21}, \dots, \alpha_{2m}), \dots, -(\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km})) = \\ &= ((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), (\beta_{21}, \dots, \beta_{2m}), \dots, (\beta_{k1}, \dots, \beta_{km})), \\ (\overline{\alpha^\psi})^{\psi^{-1}} &= (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}, \beta_{21}, \dots, \beta_{2m}, \dots, \beta_{k1}, \dots, \alpha_{km}), \end{aligned}$$

то имеет место

5.10. Лемма. Для любого $\alpha \in B^{mk}$ верно равенство $\underline{\alpha} = (\overline{\alpha^\psi})^{\psi^{-1}}$.

5.11. Теорема. Пусть B – множество, $m \geq 1$, $k \geq 2$, $l \geq 3$, k делит $l - 1$, σ – цикл длины k из S_k , $\langle A = B^m, +, \times \rangle$ – ассоциативная алгебра над полем P , $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ – ее нуль. Тогда:

- 1) $\langle B^{mk}, \widetilde{+}, [\]_{l,\sigma,m,mk} \rangle$ – ассоциативная $(2, l)$ -алгебра над полем P , изоморфная $(2, l)$ -алгебре $\langle A^k, +, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$;
 2) в $\langle B^{mk}, \widetilde{+}, [\]_{l,\sigma,m,mk} \rangle$ все элементы являются делителями ее нуля

$$\underbrace{(\theta_1, \dots, \theta_m, \dots, \theta_1, \dots, \theta_m)}_k;$$

- 3) если $\langle A, +, \times \rangle$ – коммутативна, то $\langle B^{mk}, \widetilde{+}, [\]_{l,\sigma,m,mk} \rangle$ – полуабелева;
 4) если $\langle A^* = A \setminus \{\theta\}, \times \rangle$ – группа, то $\langle \widetilde{B}, [\]_{l,\sigma,m,mk} \rangle$ – l -арная группа, где $\widetilde{B}$ – множество всех элементов

$$(b_{11}, \dots, b_{1m}, \dots, b_{k1}, \dots, b_{km}) \in B^{mk}$$

таких, что $(b_{j1}, \dots, b_{jm}) \neq (\theta_1, \dots, \theta_m)$ для любого $j = 1, \dots, k$;

5) для любого

$$\mathbf{b} = (b_{11}, \dots, b_{1m}, \dots, b_{k1}, \dots, b_{km}) \in B^{mk}$$

такого, что $(b_{j1}, \dots, b_{jm}) = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ для некоторого $j \in \{1, \dots, k\}$ верно

$$\underbrace{[\mathbf{b} \dots \mathbf{b}]}_l]_{l,\sigma,m,mk} = \underbrace{(\theta_1, \dots, \theta_m, \dots, \theta_1, \dots, \theta_m)}_k;$$

6) если множество B содержит более одного элемента и в $\langle A, +, \times \rangle$ есть единица, то $\langle B^{mk}, \widetilde{+}, [\]_{l,\sigma,m,mk} \rangle$ – неабелева;

7) если множество B содержит более одного элемента, то в $\langle B^{mk}, \widetilde{+}, [\]_{l,\sigma,m,mk} \rangle$ нет единиц;

8) если $\langle A^*, \times \rangle$ – группа, $\mathbf{e}$ – ее единица, то

$$I(B^{mk}, \widetilde{+}, [\]_{l,\sigma,m,mk}) = J \bigcup \{ \underbrace{(\theta_1, \dots, \theta_m, \dots, \theta_1, \dots, \theta_m)}_k \},$$

где J – множество всех элементов

$$(\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{1m}, \dots, \varepsilon_{(k-1)1}, \dots, \varepsilon_{(k-1)m}, \varepsilon_{k1}, \dots, \varepsilon_{km}) \in B^{mk}$$

таких, что

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_{\sigma(1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(1)})^{\frac{l-1}{k}} = \mathbf{e},$$

где

$$\varepsilon_1 = (\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{1m}), \dots, \varepsilon_k = (\varepsilon_{k1}, \dots, \varepsilon_{km}) \in A.$$

9) если $\frac{(l-1)(k-1)}{k}$ – четное, то

$$[\underline{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l}]_{l,\sigma,m,mk} = [\underline{\alpha_1} \ \underline{\alpha_2} \dots \underline{\alpha_l}]_{l,\sigma,m,mk}$$

если же $\frac{(l-1)(k-1)}{k}$ – нечетное, то

$$[\underline{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l}]_{l,\sigma,m,mk} = -[\underline{\alpha_1} \ \underline{\alpha_2} \dots \underline{\alpha_l}]_{l,\sigma,m,mk}$$

Доказательство. 1) Сразу же заметим, что по теореме 3.8 $\langle A^k, +, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ – ассоциативная $(2, l)$ -алгебра над P .

Ясно, что отображение φ , ставящее в соответствие элементу

$$((\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(1)}), (\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(2)}), \dots, (\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_m^{(k)})) \in A^k$$

элемент

$$(\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(2)}, \dots, \alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_m^{(k)}) \in B^{mk}$$

является биекцией A^k на B^{mk} .

Так как $\varphi = \psi^{-1}$, где ψ – отображение из леммы 5.1, то φ – изоморфизм $\langle A^k, +, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ на $\langle B^{mk}, [\]_{l,\sigma,m,mk} \rangle$. Следовательно

$$[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l]_{l,\sigma,k}^\varphi = [\alpha_1^\varphi \alpha_2^\varphi \dots \alpha_l^\varphi]_{l,\sigma,m,mk} \quad (10)$$

Пусть

$$\alpha = ((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km})), \beta = ((\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}), \dots, (\beta_{k1}, \dots, \beta_{km}))$$

произвольные элементы из A^k . Тогда

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^\varphi &= (((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km})) + ((\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}), \dots, (\beta_{k1}, \dots, \beta_{km})))^\varphi = \\ &= ((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}) + (\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}), \dots, (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}) + (\beta_{k1}, \dots, \beta_{km}))^\varphi = \\ &= ((v_{11}, \dots, v_{1m}), \dots, (v_{k1}, \dots, v_{km}))^\varphi = (v_{11}, \dots, v_{1m}, \dots, v_{k1}, \dots, v_{km}), \end{aligned}$$

где для любого $j = 1, \dots, k$ положено

$$(v_{j1}, \dots, v_{jm}) = (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}) + (\beta_{j1}, \dots, \beta_{jm}). \quad (11)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \alpha^\varphi \tilde{+} \beta^\varphi &= ((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}))^\varphi \tilde{+} ((\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}), \dots, (\beta_{k1}, \dots, \beta_{km}))^\varphi = \\ &= (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}, \dots, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}) \tilde{+} (\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}, \dots, \beta_{k1}, \dots, \beta_{km}) = \\ &= (u_{11}, \dots, u_{1m}, \dots, u_{k1}, \dots, u_{km}), \end{aligned}$$

где, согласно определению операции $\tilde{+}$,

$$(u_{j1}, \dots, u_{jm}) = (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}) + (\beta_{j1}, \dots, \beta_{jm}). \quad (12)$$

для любого $j = \{1, \dots, k\}$. Так как правые части в (11) и (12) равны, то

$$(\alpha + \beta)^\varphi = \alpha^\varphi \tilde{+} \beta^\varphi \quad (13)$$

Пусть

$$\alpha = ((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}))$$

– произвольный элемент из A^k . Тогда

$$\begin{aligned} (\lambda \alpha)^\varphi &= (\lambda((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km})))^\varphi = \\ &= (\lambda(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, \lambda(\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}))^\varphi = ((v_{11}, \dots, v_{1m}), \dots, (v_{k1}, \dots, v_{km}))^\varphi = \\ &= (v_{11}, \dots, v_{1m}, \dots, v_{k1}, \dots, v_{km}), \end{aligned}$$

где положено

$$(v_{j1}, \dots, v_{jm}) = \lambda(\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}). \quad (14)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \lambda \circ \alpha^\varphi &= \lambda \circ ((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}))^\varphi = \\ &= \lambda \circ (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}, \dots, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}) = (u_{11}, \dots, u_{1m}, \dots, u_{k1}, \dots, u_{km}), \end{aligned}$$

где, согласно определению произведения $\circ$,

$$(u_{j1}, \dots, u_{jm}) = \lambda(\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}) \quad (15)$$

для любого $j = \{1, \dots, k\}$. Так как правые части в (14) и (15) равны, то

$$(\lambda\alpha)^\varphi = \lambda \circ \alpha^\varphi \quad (16)$$

Из (10), (13) и (16) следует, что φ является изоморфизмом $\langle A^k, +, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ на $\langle B^{mk}, +, [\]_{l,\sigma,m,mk} \rangle$. А так как $\langle A^k, +, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ – ассоциативная $(2, l)$ -алгебра над P , то $\langle B^{mk}, +, [\]_{l,\sigma,m,mk} \rangle$ – ассоциативная $(2, l)$ -алгебра над P .

2) согласно утверждению 1) теоремы 3.21, в $(2, l)$ -алгебре $\langle A^k, +, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ все элементы являются делителями ее нуля

$$\underbrace{(\theta \dots \theta)}_k = ((\theta_1, \dots, \theta_m), \dots, (\theta_1, \dots, \theta_m)).$$

Далее используется установленный в 1) изоморфизм φ .

3) Используются утверждение 2) теоремы 3.21 и изоморфизм φ .

4) Используются утверждение 3) теоремы 3.21 и равенство

$$((A \setminus \{(\theta_1, \dots, \theta_m)\})^k)^\varphi = \tilde{B}.$$

5) Используются утверждение 4) теоремы 3.21 и изоморфизм φ .

6) Используются утверждение 5) теоремы 3.21 и изоморфизм φ .

7) Используются утверждение 6) теоремы 3.21 и изоморфизм φ .

8) Используются утверждения 7) теоремы 3.21 и изоморфизм φ .

9) По лемме 5.10 $\underline{\alpha} = (\alpha^\psi)^\varphi$ для любого $\alpha \in B^{mk}$, где ψ – изоморфизм из леммы 5.1, а $\varphi = \psi^{-1}$ – изоморфизм из утверждения 1). Тогда, ввиду 8) теоремы 3.21,

$$\begin{aligned} [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l]_{l,\sigma,m,mk} &= (\overline{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l]_{l,\sigma,m,mk}^\psi})^\varphi = \\ &= (\overline{[\alpha_1^\psi \alpha_2^\psi \dots \alpha_l^\psi]_{l,\sigma,mk}})^\varphi = (\overline{[\alpha_1^\psi \alpha_2^\psi \dots \alpha_l^\psi]_{l,\sigma,mk}})^\varphi = \\ &= [(\overline{\alpha_1^\psi})^\varphi (\overline{\alpha_2^\psi})^\varphi \dots (\overline{\alpha_l^\psi})^\varphi]_{l,\sigma,m,mk} = [\underline{\alpha}_1 \underline{\alpha}_2 \dots \underline{\alpha}_l]_{l,\sigma,m,mk} \end{aligned}$$

при четном $\frac{(l-1)(k-1)}{k}$.

Если же $\frac{(l-1)(k-1)}{k}$ – нечетное, то, снова применяя утверждения 8) теоремы 3.2.1, получим

$$\begin{aligned} [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l]_{l,\sigma,m,mk} &= (\overline{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l]_{l,\sigma,m,mk}^\psi})^\varphi = \\ &= (\overline{[\alpha_1^\psi \alpha_2^\psi \dots \alpha_l^\psi]_{l,\sigma,mk}})^\varphi = (-[\overline{\alpha_1^\psi} \overline{\alpha_2^\psi} \dots \overline{\alpha_l^\psi}]_{l,\sigma,mk})^\varphi = -([\overline{\alpha_1^\psi} \overline{\alpha_2^\psi} \dots \overline{\alpha_l^\psi}]_{l,\sigma,m,mk})^\varphi = \\ &= -[(\overline{\alpha_1^\psi})^\varphi (\overline{\alpha_2^\psi})^\varphi \dots (\overline{\alpha_l^\psi})^\varphi]_{l,\sigma,m,mk} = -[\underline{\alpha}_1 \underline{\alpha}_2 \dots \underline{\alpha}_l]_{l,\sigma,m,mk} \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Если в теореме 5.11 положить $m = 2$, $l = 4$, $k = 3$, $\sigma = (132)$, $B = \mathbb{R}$, $\langle A = \mathbb{R}^2, +, \times \rangle$ – алгебра комплексных чисел, то получим

5.12. Следствие. Справедливы следующие утверждения:

1) $\langle \mathbb{R}^6, +, [\]_{4,(132),2,6} \rangle$ – ассоциативная, неабелева, полуабелева $(2, 4)$ -алгебра над $\mathbb{R}$, в которой все элементы являются делителями ее нуля $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$, и в которой нет единиц;

2) $< \widetilde{\mathbb{R}}, [\]_{4,(132),2,6} >$ – 4-арная группа, где

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^6 \setminus (\{(0, 0, a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \cup$$

$$\cup \{(a, b, 0, 0, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, b, c, d, 0, 0) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\});$$

3) множество всех мультипликативных идемпотентов в $< \mathbb{R}^6, +, [\]_{4,(132),2,6} >$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned} I(\mathbb{R}^6, +, [\]_{4,2,6}) = \\ = \{(a, b, c, d, \frac{ac - bd}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}, \frac{-ad - bc}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, \\ a^2 + b^2 \neq 0, c^2 + d^2 \neq 0\} \cup \{(0, 0, 0, 0, 0, 0)\}. \end{aligned}$$

4) для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_6 \in \mathbb{R}^6$ верно

$$[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_6]_{4,(132),2,6} = [\underline{\alpha_1} \ \underline{\alpha_2} \dots \underline{\alpha_6}]_{4,(132),2,6}$$

5.13. Замечание. Утверждение 3) предыдущего следствия вытекает из следствия 3.19, согласно которому для абелевой группы A и любых подстановок σ и $\tau \in S_k$, удовлетворяющих условиям $\sigma^l = \sigma$, $\tau^l = \tau$, верно равенство $I(A^k, [\]_{l,\sigma,k}) = I(A^k, [\]_{l,\tau,k})$.

6. СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ГРУППА l -АРНОЙ ГРУППЫ $< A^k, [\]_{l,\sigma,k} >$

Если A – группа, и выполняется условие $\sigma^l = \sigma$, то по предложению 3.11 $< A^k, [\]_{l,\sigma,k} >$ – l -арная группа. А так как согласно Посту [6], всякая l -арная группа обладает соответствующей группой, то возникает задача нахождения соответствующей группы Поста $(A^k)_0$ l -арной группы $< A^k, [\]_{l,\sigma,k} >$.

6.1. Предложение. Если A – группа, $l \geq 3$, $k \geq 2$, σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, то соответствующая группа Поста $(A^k)_0$ l -арной группы $< A^k, [\]_{l,\sigma,k} >$ изоморфна прямому произведению A^k k экземпляров группы A : $(A^k)_0 \simeq A^k$.

Доказательство. Положим $\mathbf{e} = (\underbrace{1, \dots, 1}_k)$, где 1 – единица группы A . Согласно предложению 1.6.1 [8], группа $(A^k)_0$ изоморфна группе $< A^k, \textcircled{\cdot} >$ с операциями

$$\mathbf{x} \textcircled{\cdot} \mathbf{y} = [\mathbf{x} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{y}]_{l,\sigma,k}$$

Так как $\sigma^{l-1}(j) = j$ для любого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, то полагая

$$\mathbf{x} = (x_{11}, \dots, x_{1k}), \mathbf{y} = (x_{l1}, \dots, x_{lk}),$$

получим

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \textcircled{\cdot} \mathbf{y} &= [\mathbf{x} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{y}]_{l,\sigma,k} = \\ &= [(x_{11}, \dots, x_{1k})(x_{21} = 1, \dots, x_{2k} = 1) \dots (x_{(l-1)1} = 1, \dots, x_{(l-1)k} = 1)(x_{l1}, \dots, x_{lk})]_{l,\sigma,k} = \\ &= (x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)}x_{l\sigma^{l-1}(1)}, \dots, x_{1k}x_{2\sigma(k)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)}x_{l\sigma^{l-1}(k)}) = \\ &= (x_{11} \underbrace{1 \dots 1}_{l-2} x_{l1}, \dots, x_{1k} \underbrace{1 \dots 1}_{l-2} x_{lk}) = (x_{11}x_{l1}, \dots, x_{1k}x_{lk}) = (x_{11}, \dots, x_{1k})(x_{l1}, \dots, x_{lk}) = \mathbf{x}\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbf{x} \textcircled{\cdot} \mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{y}$, то есть операция $\textcircled{\cdot}$ совпадает с операцией в прямом произведении A^k k экземпляров группы A . Предложение доказано.

6.2. Следствие. Если A – группа, $l \geq 3$, $k \geq 2$, то для любых подстановок $\sigma, \tau \in S_k$, удовлетворяющих условиям $\sigma^l = \sigma$, $\tau^l = \tau$, соответствующие группы Поста l -арных групп $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ и $\langle A^k, [\]_{l,\tau,k} \rangle$ являются изоморфными.

Значение предложения 6.1 состоит в том, что с его помощью, используя соответствующие результаты теории полиадических групп, можно получать новую информацию об l -арной группе $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$.

В качестве примера докажем следующее

6.3. Предложение. Если A – группа, $l \geq 3$, $k \geq 2$, σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная группа $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ не является полуциклической.

Доказательство. Полиадическую группу называют полуциклической [8], если ее соответствующая группа Поста циклическая. Так как прямое произведение A^k не является циклической группой, то, ввиду предложения 6.1, соответствующая группа Поста $(A^k)_0$ l -арной группы $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ также не является циклической. Поэтому l -арная группа $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ непочиклическа. Предложение доказано.

Заметим, что нецикличесость l -арной группы $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ следует из предложения 3.9, согласно которому $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ – неабелева.

Из предложений 3.10 и 6.3 вытекает

6.4. Следствие. Если A – абелева группа, $l \geq 3$, $k \geq 2$, σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная группа $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ является полуабелевой, но не является полуциклической.

Так как всякая полуциклическая l -арная группа является полуабелевой, то из следствия 6.4 вытекает, что для любого $l \geq 3$ класс всех полуабелевых l -арных групп шире класса всех полуциклических l -арных групп.

Предложение 6.1 может быть использовано не только для получения новых результатов, но и для упрощения доказательств уже известных результатов. Например, согласно критерию Поста, полуабелевость полиадической группы равносильна абелевости ее соответствующей группы Поста. Поэтому, если A – абелева группа, и $\sigma^l = \sigma$, то из абелевости прямого произведения A^k , ввиду предложения 6.1, следует полуабелевость l -арной группы $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$.

Литература

1. Гальмак А. М. О многместных операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2008. – №2 – 3(30). – С. 134 – 139.
2. Гальмак А. М. Полиадические операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2008. – № 1(9). – С. 112 – 139.
3. Гальмак А. М. Многместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – №3. – С. 28 – 34.
4. Гальмак А. М. Многместные неассоциативные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Вестник ПГУ. – 2008. – № 9. – С. 66 – 72.
5. Dörnte W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1 – 19.
6. Post E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, №2. – P. 208 – 350.
7. Русаков С. А. Алгебраические n -арные системы / С. А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка. – 1992.

8. Гальмак А. М. n -Арные группы. Часть 1 / А. М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины. – 2003.
9. Гальмак А. М. n -Арные группы. Часть 2 / А. М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ. – 2007.

Multiposition operations on Cartesian powers

A. M. Galmák

Mogilev, Belarus

mti@mogilev.by

For any three integers $k \geq 2$, $l \geq 2$ and $m \geq 1$, and any permutation $\sigma \in S_k$ on the Cartesian power B^{mk} of the set B , is defined an l -nary relation $[]_{l,\sigma,m,mk}$, and its properties are examined. The case $m = 1$ is especially emphasized, i.e., the operation $[]_{l,\sigma,1,k}$. As a particular cases of this latter operation - and hence of the operation $[]_{l,\sigma,m,mk}$ as well, are evidentiated the operations $[]_{n,n-1}$, $[]_{n,s(n-1)+1}$ and $[]_{l,k}$, which were formerly investigated by the author.

Key-words: operations, n -ary relations.

MSC: 17A42.

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АНИЗОТРОПИИ ВСЕЛЕННОЙ НА ФЛУКТУАЦИИ ПОДВИЖНОСТИ ИОНОВ

А. Н. Морозов

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

amor@mx.bmstu.ru

Проведены измерения флуктуаций подвижности ионов в малых объемах электролита, заключенного в тонких каналах диаметром 0,2...0,4 мкм, сделанных в лавсановой пленке толщиной 6 мкм. Приводятся результаты усреднения экспериментальных данных на периодах 1436 минут и показано наличие зависимости флуктуаций подвижности ионов от ориентации экспериментальной установки в пространстве. Сделан вывод об одноосной анизотропии пространства в направлении, близком к направлению на центр Галактики. Полученное значение относительной анизотропии составляет $2...3 \cdot 10^{-6}$ относительных единиц, что в 2...3 раза превышает ожидаемое значение, связанное с искривлением пространства гравитационным полем Галактики.

Ключевые слова: анизотропия, флуктуации, подвижность, космология.

Пространственная анизотропия Вселенной является следствием искривления пространства-времени, которое в общей теории относительности описывается с помощью метрического тензора второго ранга g_{ik} [1]. В инерциальной системе отсчета при отсутствии гравитационного поля метрический тензор становится галилеевым и имеет компоненты:

$$g_{00}^{(0)} = 1, \quad g_{11}^{(0)} = g_{22}^{(0)} = g_{33}^{(0)} = -1, \quad g_{ik}^{(0)} \Big|_{i \neq k} = 0. \quad (1)$$

Для моделей финслеровой геометрии искривление пространства-времени задается метрическими тензорами более высокого ранга, что позволяет описывать более сложный характер искривления пространства-времени, чем в случае общей теории относительности [2].

При описании центрально-симметричного гравитационного поля пространственно-временная метрика имеет вид метрики Шварцшильда [1, 3]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}} - r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2), \quad (2)$$

где r, θ, φ – координаты сферической системы координат, γ – гравитационная постоянная, M – масса создающего гравитационное поле тела, c – скорость света.

Из формулы (1) следует, что при наличии тела, создающего гравитационное поле, наблюдается искривление пространства-времени, приводящее к отличию его метрики от галилеевой. В случае, если гравитационное поле создается не центрально-симметричным телом или системой движущихся тел, то отличие метрики пространства-времени от галилеевой может быть еще более ярко выраженным. Глобальная анизотропия Вселенной может описываться еще более сложной зависимостью метрики от пространственно-временных координат.

Очевидно, что экспериментальное определение искривления пространства-времени и соответствующего ему вида метрики возможно путем регистрации особенностей распространения света во Вселенной. Такой метод может быть реализован, в частности, при

измерениях глобальной анизотропии реликтового излучения [3]. При этом должны наблюдаться области небесной сферы, имеющие повышенную или пониженную температуру реликтового фона.

Но отличие метрики пространства-времени от галилеевой должны наблюдаться не только в глобальном масштабе, но и локально, в каждой точке пространства. В терминах теории относительности это означает отличие метрического тензора g_{ik} от галилеева $g_{ik}^{(0)}$, описываемого выражениями (1). Поэтому задачей экспериментальных исследований может быть измерение локальных значений метрического тензора в лабораторных условиях.

Проведем оценку ожидаемой величины отличия значений метрического тензора g_{ik} от галилеева $g_{ik}^{(0)}$. Будем считать, что это отличие мало, и тогда метрический тензор g_{ik} можно представить в виде

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}, \quad (3)$$

где $h_{ik} \ll 1$.

Для оценки величины h_{ik} предположим, что для условий Земли основным источником искривления пространства-времени выступает притяжение центра нашей Галактики, имеющего экваториальные координаты $\alpha = 17^h 42^m$ и $\delta = -29^\circ$ [4]. Считая в первом приближении, что гравитационное поле Галактики описывается метрикой Шварцшильда (2) и учитывая соотношение между величиной гравитационного потенциала

$$\varphi = -\frac{\gamma M}{r} \quad (4)$$

и скоростью v движения солнечной системы, имеем

$$\frac{\gamma M}{r} = \frac{v^2}{r}. \quad (5)$$

Тогда для направления на центр Галактики величину h , описывающую отличие компоненты $g_{11} = g_{rr}$ метрического тензора от величины $g_{11}^{(0)} = -1$:

$$g_{rr} = -1 + h \quad (6)$$

для модели Шварцшильда (2) можно представить в виде

$$h = \frac{2v^2}{c^2}. \quad (7)$$

Считая скорость движения солнечной системы относительно центра Галактики $v = 220$ км/с [4], имеем оценку величины h :

$$h = 1,08 \cdot 10^{-6}. \quad (8)$$

Измерение анизотропии пространства в лабораторных условиях может быть осуществлено путем организации необратимого процесса, имеющего ось чувствительности, то есть такого процесса, протекание которого имеет определенное направление в пространстве. Например, необратимого процесса, представляющего собой протекание электрического тока в выбранном пространственном направлении. Тогда при изменении направления протекания необратимого процесса по отношению к направлению на центр Галактики должны изменяться его параметры, в частности, статистические характеристики его флуктуаций.

Отметим, что проблема описания необратимых процессов в искривленном пространстве-времени до настоящего момента не имеет однозначного решения. Даже для случая релятивистской термодинамики, описывающей состояния равновесных систем в рамках специальной теории относительности, на сегодня нет общепринятого

закона преобразования температуры и теплоты. Существует несколько вариантов релятивистского описания равновесных термодинамических состояний, удовлетворяющих преобразованиям Лоренца [5].

Экспериментальное измерение анизотропии пространства основывалось на предположении об изменении дисперсии флуктуаций подвижности ионов (токового шума) в электролите в зависимости от направления вектора плотности тока в пространстве. При проведении измерений в качестве детектора использовалась электролитическая ячейка, разделенная на два сосуда с помощью лавсановой пленки толщиной $l = 6$ мкм, имеющей отверстия (тонкие каналы) диаметром $0,2...0,4$ мкм [6]. В каждом из сосудов размещалось по графитовому электроду, которые обеспечивали подвод электрического тока к электролиту. Схема детектора показана на рис. 1. Использовались две установки (№ 1 и № 2), имеющие одинаковое устройство.

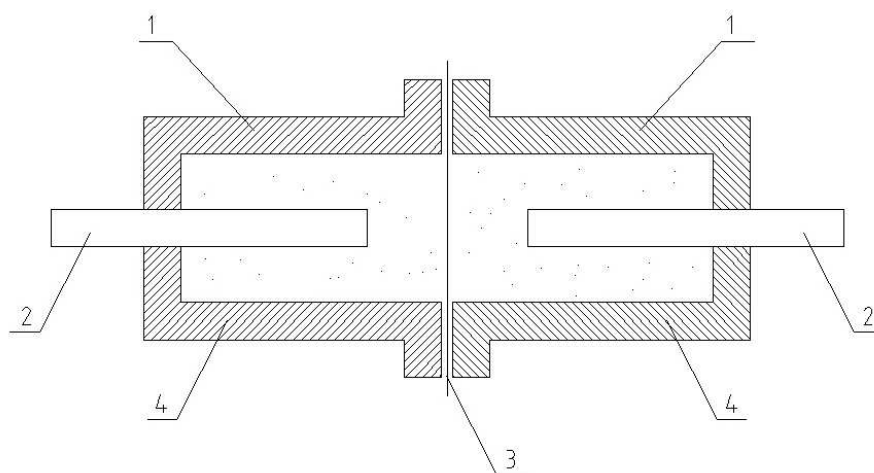


Рис. 1: Электролитическая ячейка. 1 – сосуды с электролитом, 2 – электроды, 3 – тонкая пленка с отверстиями, 4 – электролит

Электролитом являлся слабый раствор серной кислоты. Сопротивление электролитической ячейки определялось величиной отверстий в лавсановой пленке и равнялось примерно $50...100$ кОм. При приложении внешнего напряжения величиной $2...5$ В через электролит, находящийся в отверстиях пленки, протекал электрический ток, флуктуации которого вызывались случайными изменениями подвижности ионов в электролите. Возникающие при этом флуктуации напряжения на электролитической ячейке усиливались в 10^5 раз в полосе $5...15$ кГц и с частотой опроса 30 кГц считывались в ПЭВМ. Возведенные в квадрат значения флуктуаций напряжения δU_i усреднялись за период времени, равный одной минуте

$$X = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} \delta U_i^2, \quad (9)$$

где $N_0 = 1800000$ – число измерений за одну минуту. Значения X записывались в долговременную память ПЭВМ. Указанная процедура обработки сигнала обеспечивала регистрацию низкочастотных изменений дисперсии флуктуаций напряжения X на электролитической ячейке, что позволяло исследовать влияние внешних процессов на характер флуктуаций подвижности ионов в электролите.

Для подавления возможных мешающих факторов детекторы были размещены в подвальном помещении, термически изолированы и экранированы от электромагнитных наводок. С целью устранения влияния атмосферного давления и испарения электролита

сосуды электролитических ячеек герметизировались. Одновременно с записью сигналов с детекторов выполнялась со скважностью в одну минуту регистрация их температуры и наружной атмосферной температуры. Измерения на установках осуществлялись непрерывно с длительностью до двух лет.

Для уменьшения влияния поляризации электродов на электролитическую ячейку подавалось не постоянное напряжение, а переменное синусоидальное напряжение с частотой 1 Гц и амплитудой A_U от 2 до 5 В.

Диаграмма направленности установки обеспечивалась тем, что измерения флуктуаций подвижности ионов осуществлялась при их движении внутри тонкого канала в пленке. Это гарантировало наличие у установки диаграммы направленности, близкой к одноосной

$$\Theta(\varphi) = \cos^2(\varphi), \quad (10)$$

где угол φ отсчитывается от оси установки (оси графитовых электродов), совпадающей с осью тонких каналов в пленке.

Вследствие вращения Земли вокруг своей оси со звездным периодом 1436 минут установка в пассивном режиме осуществляла естественное сканирование различных пространственных направлений с целью выявления пространственной анизотропии Вселенной. Усреднение результатов измерений за период непрерывных измерений, продолжительностью до двух лет, позволяло повысить отношение сигнал/шум.

На рис. 2 приведен график зависимости дисперсии флуктуаций напряжения в эксперименте с 18.10.02 по 17.10.03 на установке № 2. Точки даны с усреднением за 1 час. Всего за год было проведено около 10^{12} измерений значений флуктуаций напряжения на электролитической ячейке. Чувствительность установки достигала 10^{-20} Вм при периоде усреднения несколько месяцев. Точность регистрации относительных флуктуаций напряжения на электролитической ячейке находилась на уровне 10^{-7} относительных единиц.

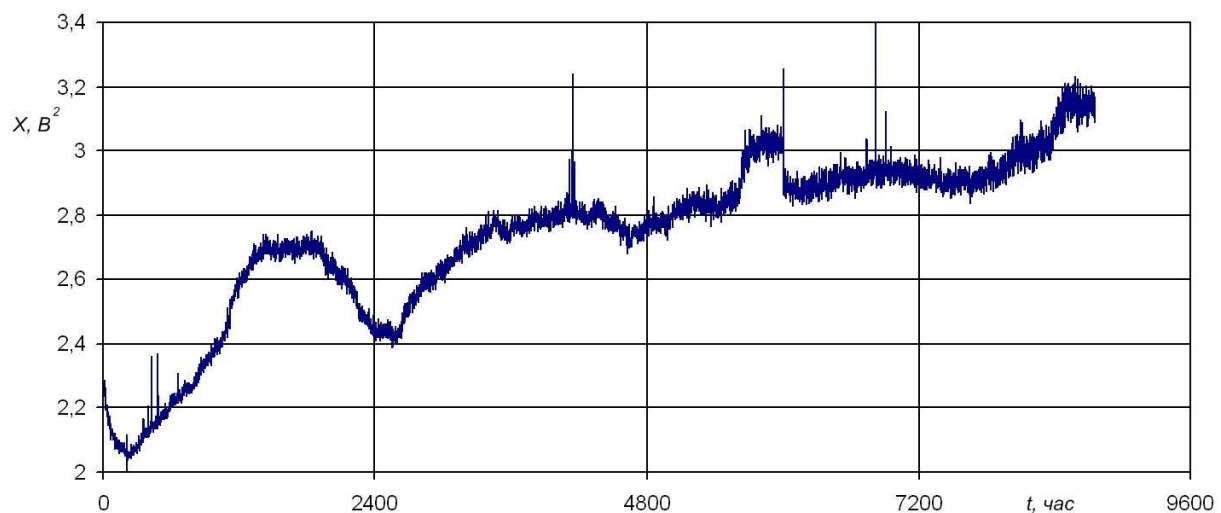


Рис. 2: График дисперсии флуктуаций напряжения в эксперименте с 18.10.02 по 17.10.03

Запись дисперсии флуктуаций подвергалась фильтрации с помощью прямоугольного окна с периодом 721 минуту (0,5 суток) с целью исключения суточного ритма, связанного с суточными изменениями температуры установки. Вычисления производились по формуле (случай записи через 1 минуту)

$$\tilde{X}_i = \frac{X_i - \langle X \rangle_i}{\langle X \rangle_i}, \quad (11)$$

где

$$\langle X \rangle_i = \frac{1}{721} \sum_{j=i-360}^{j=i+360} X_j. \quad (12)$$

Далее значения $\tilde{X}_i$ усреднялись за 361 минуту для исключения высокочастотного шума

$$\langle \tilde{X} \rangle_i = \frac{1}{361} \sum_{j=i-180}^{j=i+180} \tilde{X}_j. \quad (13)$$

Для более надежного исключения суточного ритма проводилась дополнительная фильтрация с периодом 1440 минут по формуле

$$\langle \tilde{Z} \rangle_i = \langle \tilde{X} \rangle_i - \frac{1}{720} \sum_{j=i-1440}^{j=i+1440} \left(\frac{\cos(\pi \cdot j/720) \sin(\pi \cdot j/1440) \langle \tilde{X} \rangle_j}{\pi \cdot j/1440} \right). \quad (14)$$

После этого значения $\langle \tilde{Z} \rangle_i$ суммировались со скважностью 1436 минуты

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \tilde{Z} \rangle_{1436(i+k-1)}, \quad (15)$$

где N – число суток.

В результате получалась зависимость средней за N суток дисперсии флуктуаций напряжения от времени, прошедшего с начала первых суток. Это обеспечивало постоянство направления на галактические объекты для всех суток с привязкой к началу отсчета времени (началу записи).

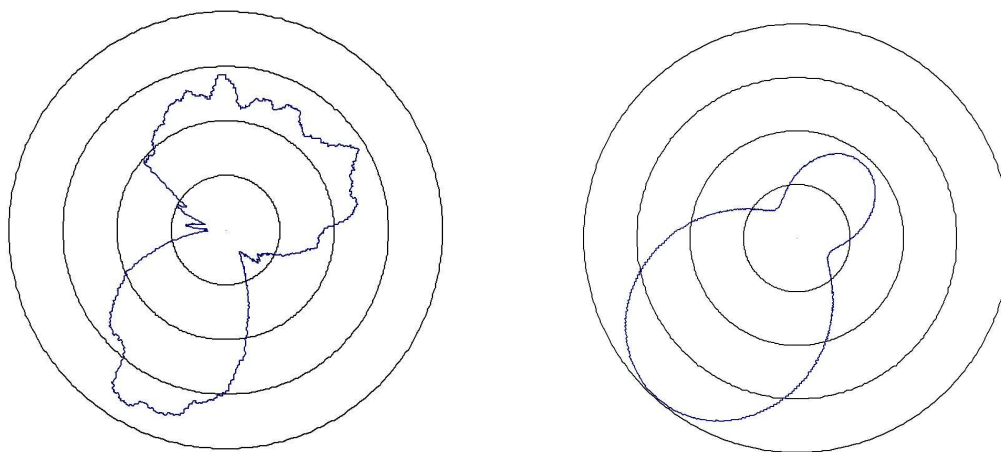


Рис. 3: Диаграммы зарегистрированной в эксперименте с 18.10.02 по 17.10.03 дисперсии флуктуаций напряжения (левая диаграмма) и расчетная диаграмма (правая диаграмма)

На рис. 3 приведены результат усреднения на звездном суточном периоде измерений дисперсии флуктуаций напряжения (левая диаграмма) и сопоставление с расчетной диаграммой (правая диаграмма) в предположении, что пространственная анизотропия имеет одноосный характер с направлением на центр Галактики. График построен по результатам измерений с 18.10.02 по 17.10.03 на установке № 2. Амплитуда переменного напряжения A_U на электролитической ячейке в начале опыта составляла 4,5 В, сопротивление – 115 кОм.

На рис. 4 приведены аналогичные диаграммы, построенные для опытов, проведенных с 09.05.08 по 19.10.08. На левой диаграмме приведен результат усреднения по двум установкам № 1 и № 2. Амплитуда напряжения A_U на обоих электролитических ячейках в начале опыта была 3,0 В, а сопротивление – соответственно 102 кОм (установка № 1) и 34 кОм (установка № 2). В конце опыта сопротивление электролитической ячейки установки № 1 стало равно 113 кОм, а амплитуда напряжения – 3,2 В. Соответствующие параметры установки № 2 стали равны: 24 кОм и 2,5 В. Правая диаграмма иллюстрирует расчетный вид зависимости в предположении, что анизотропия имеет направленность на центр Галактики.

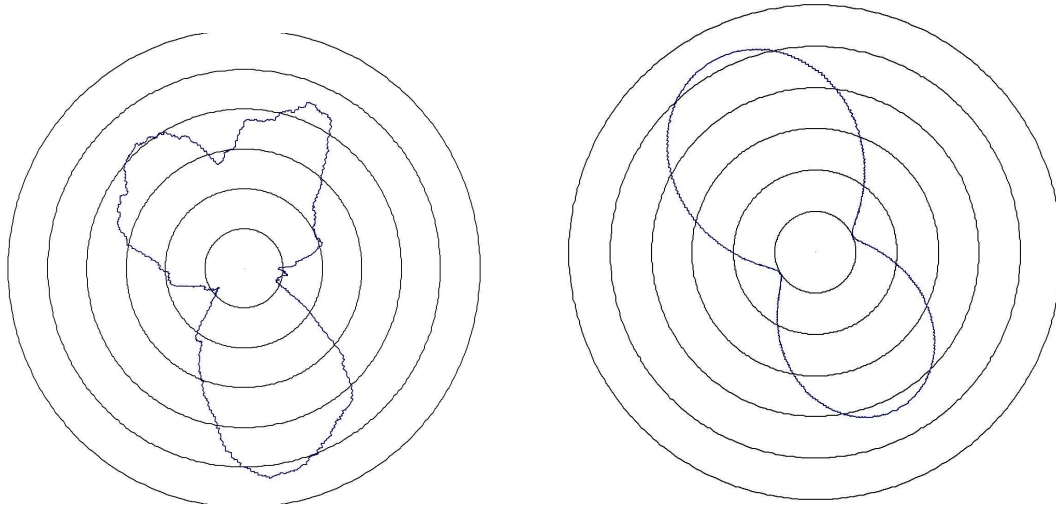


Рис. 4: Диаграммы зарегистрированной в эксперименте с 09.05.08 по 19.10.08 дисперсии флуктуаций напряжения (левая диаграмма) и расчетная диаграмма (правая диаграмма)

Как видно из приведенных диаграмм, наблюдается качественное соответствие полученных экспериментальных кривых расчетным зависимостям. Теоретическое объяснение результатов опытов может быть связано с наличием анизотропии пространства, вызванной гравитационным притяжением центра Галактики. Как было показано выше, оценки, основанные на общей теории относительности, показывают, что притяжение к центру Галактики должно вызывать одноосную деформацию пространства на уровне 10^{-6} относительных единиц.

Проведем оценку измеренного искривления пространства исходя из предположения, что связанные с ним дополнительные флуктуации напряжения на электролитической ячейке (а, следовательно, и подвижности ионов) имеют характер фликкер-шума и описываются выражением:

$$\frac{\delta U^2}{U_0^2} = \frac{\alpha_h}{f N_\mu}, \quad (16)$$

где U_0 – напряжение на электролитической ячейке, α_h – параметр Хоуге, характеризующий интенсивность фликкер-шума, N_μ – число ионов в электролите, находящихся в отверстиях лавсановой пленки, f – частота.

Измеренную величину параметра α_h можно оценить по формуле [7]

$$\alpha_h = \frac{4\beta l^2 k T \Delta f}{\mu e U_0^2}, \quad (17)$$

где: β – относительное изменение дисперсии флуктуаций напряжения в зависимости от ориентации электролитической ячейки в пространстве, $l = 6$ мкм – толщина лавсановой пленки, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, $T = 300$ К – температура

электролита, $\Delta f = 10^4 \Gamma_{\text{ц}}$ – полоса регистрации флуктуаций напряжения на электролитической ячейке, $\mu = 3,26 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ – подвижность ионов водорода в электролите, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ – заряд электрона, а квадрат напряжения на электролитической ячейке в среднем равен

$$U_0^2 = \frac{A_U^2}{2}. \quad (18)$$

Тогда окончательно имеем формулу для расчета параметра α_h :

$$\alpha_h = \frac{8\beta l^2 k T \Delta f}{\mu e A_U^2}. \quad (19)$$

При подстановке в неё указанных выше параметров получим

$$\alpha_h = 0,2 \frac{\beta}{A_U^2}. \quad (20)$$

Проведем оценку параметра α_h на основе результатов проведенных измерений флуктуаций напряжения на электролитической ячейке. В таблице представлены результаты экспериментов, выполненных в период с 2002 по 2008 год.

Таблица

Период времени эксперимента	Номер установки	$A_U, \text{В}$	β	α_h
с 18.10.02 по 17.10.03	№ 2	4,5	$3,0 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-6}$
с 04.03.07 по 10.09.07	№ 1	2,8	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-6}$
с 09.05.08 по 19.10.08	№ 1	3,1	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-6}$
–/–	№ 2	2,7	$0,6 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$

Как следует из приведенной таблицы, получившиеся значения параметра α_h превышают в 2...3 раза значение величины h , полученной выше (см. выражение (8)). Такое завышение может быть вызвано неточностью оценки по простой модели Шварцшильда, а также наличием анизотропии пространства не связанной с гравитационным полем Галактики. Для подтверждения (или опровержения) полученных результатов необходимо создание новых экспериментальных установок, толщина пленок в электролитической ячейке которых должна быть не более 1...2 мкм, а приложенное напряжение – не менее 5 В. Это позволит поднять чувствительность установок примерно в 10...20 раз, что, в свою очередь, даст возможность сделать обоснованные выводы о наличии глобальной пространственной анизотропии Вселенной.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. - М.: Наука, 1973..
2. Space-Time Structure. Collected papers / Ed. D. G. Pavlov. - М.: TETRU, 2006.
3. Точные решения уравнений Эйнштейна / Под ред. Э. Шмутцера. - М.: Энергоиздат, 1982.
4. Физическая энциклопедия. Том 1. - М.: Советская энциклопедия, 1988.
5. Базаров И. П. Термодинамика. - М.: Высшая школа, 1991.
6. Коротаев С. М., Морозов А. Н., Сердюк В. О., Сорокин М. О. Проявление макроскопической нелокальности в некоторых естественных диссипативных процессах // Изв. Вузов, Физика. - 2002. - № 5. - С. 3–14.
7. Морозов А. Н. Необратимые процессы и броуновское движение: Физико-технические проблемы. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. - 332 с.

The influence of the spatial anisotropy of the Universe on the ions displacement fluctuations

A. N. Morozov

MSTU n. a. N. E. Bauman

amor@mx.bmstu.ru

We present the measurements of the fluctuations of the displacements of ions in small electrolyte volumes, included in thin channels of diameter $0.2...0.4 \mu m$, built in a 6 mm width lavsan film. The results of averaging the experimental data for durations of 1436 minutes are obtained, and it is pointed out the dependence of the ions displacement fluctuations on the orientation of the experimental setting in space. It is concluded that the space exhibits a mono-axial anisotropy in a direction which is close to the direction towards the center of the Galaxy. The obtained result of relative anisotropy represents $2...3 \cdot 10^{-6}$ relative units, which exceeds 2...3 times the expected value, which is associated to the bending of the space due to the gravitational field of the Galaxy.

Key-words: anisotropy, fluctuations, displacements, Cosmology.

MSC: 74E10, 70J35, 83D05.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных чисел в физике.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.
2. Объем статьи не должен превышать 1 печ. листа (24 усл. маш. стр.)
3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате $\text{\LaTeX}$ (версия $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$, для набора формул используется $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$) и файл статьи в формате PostScript или PDF.
4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).
5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок), ключевые слова, классификацию по PACS или MSC2000. Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.
6. Название статьи, аннотация, ключевые слова, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.
7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.
8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи.
9. Публикация бесплатна для всех авторов.

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

Научный журнал. Основан в 2003 г.

№ 2 (10), том 5, 2008

Главный редактор Павлов Д. Г.

Ответственный секретарь Элиович А. А.

www.polynumbers.ru

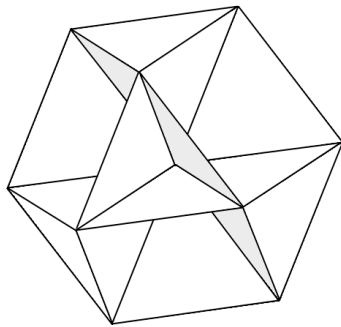
hypercomplex@mail.ru

Свидетельство о регистрации

ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.

ISSN 1814-3946

© "МОЗЭТ", Российское Гиперкомплексное Общество



Типографские данные