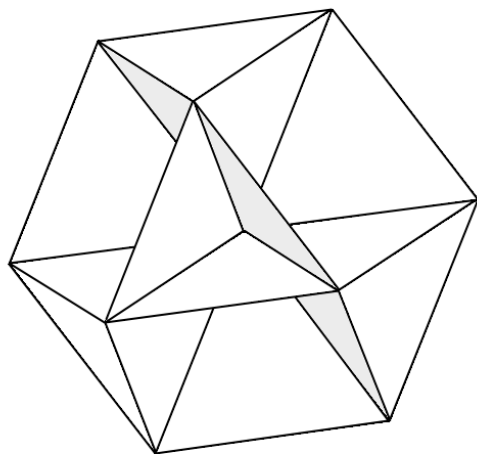


ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

№ 1 (9), том 5 (2008)

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 2003 г.



www.polynumbers.ru

hypercomplex@mail.ru

Оглавление

Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Группа Лоренца как подгруппа комплексифицированных групп конформных преобразований пространств с метрикой Бервальда-Моора...	3
Гарасько Г. И. Нарушение гиперкомплексного потенциала в четырёхмерном пространстве Бервальда-Моора	12
Богословский Г. Ю. О процедуре определения наблюдаемых 3-скоростей в полностью анизотропном Финслеровом пространстве событий.....	18
Тришин В. Н. Геометрические и топологические структуры физики.....	42
Степаньянц К. В. Современная физика высоких энергий	84
Гальмак А. М. Полиадические операции на декартовых степенях	112
Долгарев А. И., Долгарев И. А. 3-мерное галилеево одулярное нильпотентное пространство с 2-мерным временем	140
Петухов С. В., Петухова Е. С. Поличисла (матрионы) в биологической и компьютерной информатике.....	153
Информация для авторов	196

ГРУППА ЛОРЕНЦА КАК ПОДГРУППА КОМПЛЕКСИФИЦИРОВАННЫХ ГРУПП КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВ С МЕТРИКОЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Д. Г. Павлов

*Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
geom2004@mail.ru*

Г. И. Гарасько

*ГУП ВЭИ, Россия, Москва
gri9z@mail.ru*

Показано, что группа Лоренца является подгруппой комплексифицированной группы конформных преобразований пространств поличисел H_n с $n \geq 2$, которым соответствуют финслеровы геометрии с метрической функцией Бервальда-Моора.

Ключевые слова: группа Лоренца, метрика Бервальда-Моора, Финслеровы пространства, конформные преобразования.

"Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерные связи между ними, которые дадут нам ключ к пониманию явлений природы."

Альберт Эйнштейн

"Важны не вещи, а принципы симметрии."

Стивен Вайнберг

1 Введение

Группы симметрии играют в математике и физике исключительно важную роль [1] – [4]. Особое место среди всех симметрий современной физики занимает группа Лоренца [5]. Обычно группа Лоренца ассоциируется у физиков с преобразованиями, оставляющими инвариантными интервалы. Роль этой ассоциации трудно переоценить, ведь именно благодаря ей многочисленные эксперименты и наблюдения, в которых природа демонстрирует нам свою явную предрасположенность к лоренц-инвариантности, трактуются как указания на непосредственную связь реального пространства-времени с псевдоевклидовыми геометриями, поскольку именно в таких пространствах группа Лоренца выступает как подгруппа движений. Однако класс изометрических преобразований не является единственным в геометриях с метрическими функциями. Даже в пространствах с квадратичным типом метрики, кроме изометрий фигурируют еще и конформные преобразования, при которых инвариантами оказываются уже не интервалы, а углы. В финслеровых же пространствах набор инвариантов, а, следовательно, и групп фундаментальных непрерывных симметрий, похоже, еще более разнообразен [6].

По этой причине регистрируемая в экспериментах лоренц-инвариантность вполне может оказаться связанной (по крайней мере, гипотетически) не только с изометрическими симметриями пространства-времени, но и с его более сложными преобразованиями, в частности, с конформными. Таким образом, чисто математический вопрос: "Может ли группа Лоренца вне всякой связи с движениями некоторых пространств, являться подгруппой их более сложных групп симметрий?" – становится весьма интересным для возможных физических приложений. В настоящей работе авторы показывают, что плоское финслерово пространство с метрической функцией Бервальда-Моора (поличисловое пространство H_4) как раз и относится к такому типу геометрий, для которых группа Лоренца оказывается столь же "родной", как для пространства Минковского, и содержится в качестве подгруппы комплексифицированной конформной группы этого пространства. При этом подгруппой группы движений пространства H_4 группа Лоренца не является [7].

Итак, в математике и физике важную роль играют не только группы изометрических симметрии, но и конформных. Первый класс симметрий связан с инвариантностью элемента длины метрического пространства, а второй класс симметрий – с инвариантностью углов. Часто, но далеко не всегда, эти группы однозначно определяют саму геометрию. В физике особое место занимает группа Лоренца как группа изометрической симметрии пространства Минковского x^0, x^1, x^2, x^3 с элементом длины

$$ds_{Min} = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}. \quad (1)$$

В работах [8] была выдвинута гипотеза о том, что каждой точке четырехмерного пространства событий можно сопоставить гиперкомплексное число

$$X = x^0 \cdot 1 + x^1 \cdot j + x^2 \cdot k + x^3 \cdot jk \in H_4, \quad (2)$$

где символьные элементы $1, j, k, jk$ образуют базис, который будем называть "ортонормированным", или физическим. Для этих базисных элементов имеют место следующие правила умножения:

$\times$	1	j	k	jk
1	1	j	k	jk
j	j	1	jk	k
k	k	jk	1	j
jk	jk	k	j	1

(3)

Система гиперкомплексных чисел H_4 ассоциативна, коммутативна и изоморфна алгебре действительных диагональных матриц четыре на четыре, то есть

$$H_4 = R \oplus R \oplus R \oplus R.$$

Пространство H_4 является метрическим, а именно финслеровым с метрикой Бервальда-Моора. Аналогично определяются [7] пространства поличисел H_n с произвольным $n \geq 2$ как прямая сумма n множеств действительных чисел. При $n \neq 4$ пространства $H_{n \geq 2}$ также являются финслеровыми пространствами с метрическими функциями, имеющими вид аналогичный виду метрической функции пространства Бервальда-Моора, поэтому для краткости ниже мы будем говорить, что пространства $H_{n \geq 2}$ обладают метрикой Бервальда-Моора.

Многие формулы и рассуждения упрощаются, если работать не в "ортонормированном", а так называемом изотропном базисе, для пространства H_4 это базис e^1, e^2, e^3, e^4 :

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{4}(1 + j + k + jk), & e_2 &= \frac{1}{4}(1 + j - k - jk), \\
e_3 &= \frac{1}{4}(1 - j + k - jk), & e_4 &= \frac{1}{4}(1 - j - k + jk).
\end{aligned} \tag{4}$$

Координаты в таком базисе будем обозначать $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$. Элемент длины в этих координатах в пространстве H_4 имеет вид:

$$ds_{H_4} = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}. \tag{5}$$

Для базисных элементов e^1, e^2, e^3, e^4 имеют место следующие правила умножения:

$\times$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$
$\mathbf{e}_1$	e_1	0	0	0
$\mathbf{e}_2$	0	e_2	0	0
$\mathbf{e}_3$	0	0	e_3	0
$\mathbf{e}_4$	0	0	0	e_4

$$\tag{6}$$

Никаким преобразованием координат элемент длины ds_{H_4} (5) нельзя перевести в элемент длины ds_{Min} (1). Группой изометрической симметрии пространства Минковского является 6-ти параметрической, в то время как группой изометрической симметрии пространства H_4 является 3-х параметрической абелевой группой.

Произвольная аналитическая функция $F(X)$ переменной H_4 однозначно определяется четырьмя произвольными действительными гладкими функциями $f^i(\xi)$ одной действительной переменной ξ следующим образом:

$$F(X) = f^1(\xi^1) e_1 + f^2(\xi^2) e_2 + f^3(\xi^3) e_3 + f^4(\xi^4) e_4. \tag{7}$$

Если якобиан

$$\frac{D(f^1, f^2, f^3, f^4)}{D(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)} \equiv \frac{\partial f^1}{\partial \xi^1} \frac{\partial f^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial f^3}{\partial \xi^3} \frac{\partial f^4}{\partial \xi^4} > 0, \tag{8}$$

то преобразование

$$\xi^{i'} = f^i(\xi^{i-}), \tag{9}$$

$i \equiv i_-$, но по ним не идет суммирование, является конформным в обычном смысле, то есть при таком преобразовании

$$ds_{H_4} \rightarrow \kappa(\xi) ds_{H_4}, \tag{10}$$

где $\kappa(\xi)$ – действительная положительная функция координат,

$$\kappa(\xi) \equiv \sqrt[4]{\frac{\partial f^1}{\partial \xi^1} \frac{\partial f^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial f^3}{\partial \xi^3} \frac{\partial f^4}{\partial \xi^4}}. \tag{11}$$

Из неравенства (8) следует знакопостоянство всех четырех производных и четность числа производных, сохраняющих отрицательное значение. Полная группа конформных преобразований пространства H_4 включает в себя также подстановки координат и изменение знака сразу у пары координат. Таким образом, представление однопараметрического непрерывного конформного преобразования $\hat{T}(\alpha)$ в пространстве бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ в рамках теории представлений групп Ли возможно в виде:

$$\hat{T}(\alpha)\varphi = \exp(\alpha\hat{g})\varphi, \tag{12}$$

где генератор $\hat{g}$ однопараметрического преобразования $\hat{T}(\alpha)$ определяется формулой

$$\hat{g} = g^1(\xi^1) \frac{\partial}{\partial \xi^1} + g^2(\xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi^2} + g^3(\xi^3) \frac{\partial}{\partial \xi^3} + g^4(\xi^4) \frac{\partial}{\partial \xi^4}, \quad (13)$$

g^i – четыре произвольные бесконечно дифференцируемые функции одной действительной переменной, а α – действительный параметр.

Если известны четыре функции g^i , то есть генератор (13), то функции f^i в конформном преобразовании (9) формально записываются следующим образом:

$$f^i = \exp(\alpha \cdot \hat{g}) \cdot \xi^i, \quad (14)$$

причем

$$\frac{\partial f^i}{\partial \alpha} = \hat{g} f^i. \quad (15)$$

Понятие конформных преобразований будем понимать ниже в более широком смысле: либо позволим коэффициенту κ в формуле (10) принимать любые комплексные значения; либо перейдем от элемента длины ds_{H_4} к элементу длины $ds_{|H_4|_C}$, то есть

$$ds_{|H_4|_C} = \sqrt[4]{|d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4|_C}, \quad (16)$$

где $|z|_C$ означает модуль комплексного числа. Тогда функции f^i в формулах (9) и функции g^i в формуле (13) будут уже комплексными функциями одной действительной переменной, а условие (8) заменится требованием

$$\frac{D(f^1, f^2, f^3, f^4)}{D(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)} \equiv \frac{\partial f^1}{\partial \xi^1} \frac{\partial f^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial f^3}{\partial \xi^3} \frac{\partial f^4}{\partial \xi^4} \neq 0. \quad (17)$$

При некоторых дополнительных условиях такую более широкую группу естественно назвать комплексифицированной группой конформных преобразований. Эта группа более естественно вводится, если работать не с метрической функцией, а с формами [9], через которые выражаются метрические функции. В этом случае вместо формулы (10) приходится рассматривать переход

$$(ds_{H_4})^4 \rightarrow \Lambda(\xi) (ds_{H_4})^4, \quad (18)$$

где

$$\Lambda(\xi) = \frac{\partial f^1}{\partial \xi^1} \frac{\partial f^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial f^3}{\partial \xi^3} \frac{\partial f^4}{\partial \xi^4}. \quad (19)$$

Алгебра Ли точного представления группы Лоренца в пространстве бесконечно дифференцируемых функций на четырехмерном пространстве Минковского состоит из 6 генераторов:

$$\left. \begin{aligned} \hat{B}_i &= x^i \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^i}, \\ \hat{L}_1 &= x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad \hat{L}_2 = -x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad \hat{L}_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

которые подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$[\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}]$	$\hat{\mathbf{B}}_1$	$\hat{\mathbf{B}}_2$	$\hat{\mathbf{B}}_3$	$\hat{\mathbf{L}}_1$	$\hat{\mathbf{L}}_2$	$\hat{\mathbf{L}}_3$
$\hat{\mathbf{B}}_1$	0	$-\hat{L}_3$	$\hat{L}_2$	0	$\hat{B}_3$	$-\hat{B}_2$
$\hat{\mathbf{B}}_2$	$\hat{L}_3$	0	$-\hat{L}_1$	$-\hat{B}_3$	0	$\hat{B}_1$
$\hat{\mathbf{B}}_3$	$-\hat{L}_2$	$\hat{L}_1$	0	$\hat{B}_2$	$-\hat{B}_1$	0
$\hat{\mathbf{L}}_1$	0	$\hat{B}_3$	$-\hat{B}_2$	0	$\hat{L}_3$	$-\hat{L}_2$
$\hat{\mathbf{L}}_2$	$-\hat{B}_3$	0	$\hat{B}_1$	$-\hat{L}_3$	0	$\hat{L}_1$
$\hat{\mathbf{L}}_3$	$\hat{B}_2$	$-\hat{B}_1$	0	$\hat{L}_2$	$-\hat{L}_1$	0

(21)

Если найдутся 6 генераторов вида (13), образующие алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли 6-ти генераторов (20), то тем самым будет доказано существование подгруппы комплексифицированной группы конформных преобразований четырехмерного пространства Бервальда-Моора, изоморфной непрерывной группе Лоренца.

2 Точные представления алгебр Ли в пространстве бесконечно дифференцируемых функций одной действительной переменной

Любой генератор $\hat{g}$ представления алгебры Ли в пространстве бесконечно дифференцируемых функций $\mathfrak{F}_1 \ni \varphi(\xi)$, вообще говоря, комплексных одной действительной переменной $\xi \in R$ имеет вид:

$$\hat{g} = g(\xi) \frac{d}{d\xi}, \quad (22)$$

где $g(\xi)$ – действительная или комплексная функция одной действительной переменной. Соответствующее преобразование определяется следующим образом:

$$\hat{T}(\alpha)\varphi(\xi) = e^{\alpha\hat{g}}\varphi(\xi). \quad (23)$$

Подчеркнём: достаточным условием того, чтобы оставаться в рамках понятия комплексификации групп Ли, есть требование – комплексные функции $g(\xi)$ в формуле (22) должны являться произведением комплексного числа на действительную функцию действительной переменной.

Преобразование единственной координаты ξ определяется формулами

$$\xi' = f(\xi) \quad \Rightarrow \quad f(\xi) = e^{\alpha\hat{g}}\xi \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = g \frac{\partial f}{\partial \xi}. \quad (24)$$

Откуда следует, что

$$f(\xi; \alpha) = \Psi \left(\alpha + \int^{\xi} \frac{d\xi}{g(\xi)} \right), \quad (25)$$

где функция Ψ находится из условия

$$\Psi \left(\alpha + \int^{\xi} \frac{d\xi}{g(\xi)} \right) \Big|_{\alpha=0} = \xi. \quad (26)$$

Пространство $R \ni \xi$ будем считать метрическим с элементом длины

$$ds = |d\xi|_C. \quad (27)$$

Тогда все преобразования (24) являются конформными, так как

$$|d\xi'|_C = \left| \frac{\partial f}{\partial \xi} \right|_C |d\xi|_C. \quad (28)$$

• Пусть в рассматриваемой алгебре Ли имеются два коммутирующих генератора, в этом случае точное представление такой алгебры Ли в пространстве $\mathfrak{F}_1$ невозможно.

Докажем это утверждение. Если $[\hat{g}_1, \hat{g}_2] = 0$, то

$$g_1(\xi) \frac{dg_2}{d\xi} - g_2(\xi) \frac{dg_1}{d\xi} = 0. \quad (29)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$g_2(\xi) = \text{const} \cdot g_1(\xi), \quad (30)$$

то есть генераторы линейно зависимы. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим алгебру Ли группы непрерывных преобразований, сохраняющих элемент длины

$$ds = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2}. \quad (31)$$

Такая алгебра, является подалгеброй алгебры Ли непрерывной группы Лоренца и содержит три генератора $\hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{L}_3$ (20), которые коммутируют (21) следующим образом:

$$[\hat{B}_1, \hat{B}_2] = -\hat{L}_3, \quad [\hat{B}_1, \hat{L}_3] = -\hat{B}_2, \quad [\hat{B}_2, \hat{L}_3] = \hat{B}_1. \quad (32)$$

Согласно выше изложенному представление рассматриваемой алгебры Ли будем искать в виде трех операторов вида:

$$\hat{b}_1 = b_1(\xi) \frac{d}{d\xi}, \quad \hat{b}_2 = b_2(\xi) \frac{d}{d\xi}, \quad \hat{l}_3 = l_3(\xi) \frac{d}{d\xi}, \quad (33)$$

где b_1, b_2, l_3 – три неизвестные функции одной действительной переменной. Для этих функций из коммутационных соотношений (32) получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$b_1 \frac{db_2}{d\xi} - b_2 \frac{db_1}{d\xi} = -l_3, \quad b_1 \frac{dl_3}{d\xi} - l_3 \frac{db_1}{d\xi} = -b_2, \quad b_2 \frac{dl_3}{d\xi} - l_3 \frac{db_2}{d\xi} = b_1. \quad (34)$$

Эта система уравнений решается в квадратурах, общее решение содержит одну произвольную функцию одной действительной переменной. Приведем частное решение:

$$b_1 = -\sqrt{a^2 + \xi^2}, \quad b_2 = \frac{\xi \sqrt{a^2 + \xi^2}}{a}, \quad l_3 = \frac{a^2 + \xi^2}{a}, \quad (35)$$

где a – постоянная. При таких функциях b_1, b_2, l_3 коммутационные соотношения (32) выполняются, и генераторы (33) линейно независимы.

Итак, в конформных группах пространств $R \equiv H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ содержится в качестве подгруппы группа $SO(1, 2)$.

Рассмотрим алгебру Ли группы непрерывных преобразований $SO(3)$, сохраняющих элемент длины

$$ds = \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}. \quad (36)$$

Такая алгебра является подалгеброй алгебры Ли группы Лоренца и содержит три генератора $\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3$ (20), которые коммутируют (21) следующим образом:

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = \hat{L}_3, \quad [\hat{L}_1, \hat{L}_3] = -\hat{L}_2, \quad [\hat{L}_2, \hat{L}_3] = \hat{L}_1. \quad (37)$$

Представление рассматриваемой алгебры Ли будем искать в виде трех операторов вида:

$$\hat{l}_1 = l_1(\xi) \frac{d}{d\xi}, \quad \hat{l}_2 = l_2(\xi) \frac{d}{d\xi}, \quad \hat{l}_3 = l_3(\xi) \frac{d}{d\xi}, \quad (38)$$

где l_1, l_2, l_3 – три неизвестные функции одной действительной переменной. Для этих функций из коммутационных соотношений (37) получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$l_1 \frac{dl_2}{d\xi} - l_2 \frac{dl_1}{d\xi} = l_3, \quad l_1 \frac{dl_3}{d\xi} - l_3 \frac{dl_1}{d\xi} = -l_2, \quad l_2 \frac{dl_3}{d\xi} - l_3 \frac{dl_2}{d\xi} = l_1. \quad (39)$$

Эта система уравнений решается в квадратурах, общее решение содержит одну произвольную функцию одной действительной переменной. Приведем одно из частных решений:

$$l_1 = i \frac{\xi \sqrt{a^2 + \xi^2}}{a}, \quad l_2 = i \sqrt{a^2 + \xi^2}, \quad l_3 = \frac{a^2 + \xi^2}{a}, \quad (40)$$

где a – постоянная. При таких функциях l_1, l_2, l_3 коммутационные соотношения (37) выполняются, и генераторы (38) линейно не зависимы. Генератор l_3 – действительный дифференциальный оператор, а генераторы l_1, l_2 представляют собой действительные дифференциальные операторы, умноженные на комплексную мнимую единицу i .

Итак, в комплексифицированных конформных группах пространств $R \equiv H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ содержится в качестве подгруппы группа $SO(3)$.

3 Группа Лоренца

Группа Лоренца не может быть подгруппой в комплексифицированной конформной группе пространства $R \equiv H_1$, так как в соответствующей алгебре Ли содержится три пары коммутирующих генераторов:

$$[\hat{B}_1, \hat{L}_1] = 0, \quad [\hat{B}_2, \hat{L}_2] = 0, \quad [\hat{B}_3, \hat{L}_3] = 0. \quad (41)$$

Поэтому попытаемся реализовать группу Лоренца в качестве подгруппы в комплексифицированной конформной группе пространства H_2 . Если это удастся, то в этом случае можно будет утверждать, что группа Лоренца содержится в качестве подгруппы в комплексифицированных конформных группах пространств H_n , если $n \geq 2$.

Любой генератор $\hat{g}$ представления алгебры Ли в пространстве комплексных бесконечно дифференцируемых функций $\mathfrak{F}_2 \ni \varphi(\xi^1, \xi^2)$ двух действительных переменных $\xi^1, \xi^2 \in R$, определяющий представление однопараметрического преобразования Ли в комплексифицированной группе конформных преобразований пространства H_2 , имеет вид:

$$\hat{g} = g^1(\xi^1) \frac{\partial}{\partial \xi^1} + g^2(\xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi^2}, \quad (42)$$

где $g^a(\xi)$ – действительные или комплексные функции одной действительной переменной. Для того, чтобы генераторы (42) определяли преобразования из некоторой комплексифицированной группы Ли, достаточно, если они будут либо действительными дифференциальными операторами, либо действительными дифференциальными операторами, умноженными на комплексную мнимую единицу i .

Исходя из результатов предыдущего раздела и учитывая, что в двумерном векторном пространстве векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

линейно независимы, сконструируем точное представление алгебры Ли группы Лоренца:

$$\left. \begin{aligned} \hat{L}_1 &= i\sqrt{a^2 + (\xi^1)^2} \frac{\partial}{\partial \xi^1} + i\sqrt{a^2 + (\xi^2)^2} \frac{\partial}{\partial \xi^2}, \\ \hat{L}_2 &= i \frac{\xi^1 \sqrt{a^2 + (\xi^1)^2}}{a} \frac{\partial}{\partial \xi^1} + i \frac{\xi^2 \sqrt{a^2 + (\xi^2)^2}}{a} \frac{\partial}{\partial \xi^2}, \\ \hat{L}_3 &= -\frac{a^2 + (\xi^1)^2}{a} \frac{\partial}{\partial \xi^1} - \frac{a^2 + (\xi^2)^2}{a} \frac{\partial}{\partial \xi^2}, \\ \hat{B}_1 &= \sqrt{a^2 + (\xi^1)^2} \frac{\partial}{\partial \xi^1} - \sqrt{a^2 + (\xi^2)^2} \frac{\partial}{\partial \xi^2}, \\ \hat{B}_2 &= \frac{\xi^1 \sqrt{a^2 + (\xi^1)^2}}{a} \frac{\partial}{\partial \xi^1} - \frac{\xi^2 \sqrt{a^2 + (\xi^2)^2}}{a} \frac{\partial}{\partial \xi^2}, \\ \hat{B}_3 &= i \frac{a^2 + (\xi^1)^2}{a} \frac{\partial}{\partial \xi^1} - i \frac{a^2 + (\xi^2)^2}{a} \frac{\partial}{\partial \xi^2}, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

где a – постоянная. Эти генераторы подчиняются коммутационным соотношениям (21), являются линейно не зависимыми, и каждый из них либо действительный дифференциальный оператор, либо действительный дифференциальный оператор, умноженный на комплексную мнимую единицу i .

Итак, группа Лоренца содержится в качестве подгруппы в комплексифицированных конформных группах пространств H_n , если $n \geq 2$.

То, что группа Лоренца содержится в качестве подгруппы именно в комплексифицированных конформных группах пространств $H_{n \geq 2}$, по-видимому, говорит о том, что важную роль в физике может играть не только пространство H_4 , которое является четырехмерным поличисловым пространством над полем действительных чисел, но и аналогичное поличисловое пространство над полем комплексных чисел, то есть

$$H_{4,4} \equiv C \oplus C \oplus C \oplus C$$

– восьмимерное поличисловое пространство над полем действительных чисел.

Заключение

В свое время Герман Вейль, приступая к решению задачи геометризации гравитационного и электромагнитного полей, воспользовался принципом, который, по его мнению, должен лежать в основе выбора физиками конкретной фундаментальной метрической функции. Этот принцип провозглашал преимущество геометрий, обладающих максимальным разнообразием симметрий при одной и той же размерности пространства [10]. Следуя этой идее, Вейль сформулировал теоретико-групповую постановку проблемы и получил ее решение в одном простом частном случае. Из этого следовал вывод, что самые богатые группы движений присутствуют в геометриях с квадратичным типом метрической функции и именно на них физик должен остановить свое внимание в первую очередь. Поразительно, но если бы великий математик не стал ограничиваться

лишь изометрическими преобразованиями, а расширил список симметрий хотя бы до конформных, его выбор мог оказаться иным. В частности, обсуждавшиеся выше плоские финслеровы пространства с метрической функцией Бервальда-Моора (при $n > 2$), явно уступая в плане группы движений квадратичным пространствам, на уровне преобразований сохраняющих углы, оставляют их далеко позади, так как вместо конечнопараметрического множества конформных симметрий конформные преобразования в пространствах Бервальда-Моора образуют бесконечнопараметрическую группу. Еще более поразительно, что за год до смерти, выступая с докладом в Лозанне [11], Вейль обмолвился о своих серьезных сомнениях в правильности выбора метрики, некогда сделанного им в пользу пифагорейства. Думал ли он тогда о конформных симметриях, как естественных обобщениях групп движений, или имел в виду нечто иное, скорее всего, для нас так и останется тайной.

Литература

- [1] Г. Вейль. Симметрия. М.: Наука, 1968.
- [2] Ф. Бахман. Построение геометрии на основе понятия симметрии. Пер. с нем. Р.И. Пименова под ред. И.М. Яглома. - М.: Наука, 1969.
- [3] Е. Вигнер. Инвариантность и законы сохранения. Этюды о симметрии: Пер. с англ. Под ред. Я.А. Смородинского. - М.: Едиториал УРСС, 2002.
- [4] В.Д. Ляховский, А.А. Болохов. Группы симметрии и элементарные частицы: Учебное пособие. - Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983.
- [5] Ф.И. Федоров. Группа Лоренца. М.: Едиториал УРСС, 2003.
- [6] Д.Г. Павлов. Метафизика симметрий. В сборнике: Метафизика. Под ред. Ю.С. Владимиров. М.: БИНОМ, 2007.
- [7] Д.Г. Павлов, Г.И. Гарасько: Геометрия невырожденных поличисел, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (7)**, том 4 (2005), 3–25.
- [8] Д.Г. Павлов: Хронометрия трёхмерного времени, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 20–32. Четырёхмерное время, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 33–42.
- [9] Д.Г. Павлов: Обобщение аксиом скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 5–19.
- [10] Г. Вейль. Пространство, время, материя. Лекции по общей теории относительности. - М.: "Янус", 1996.
- [11] Г. Вейль. Математическое мышление. Пер. с англ. и нем./ Под ред. Б.В. Бирюкова и А.Н. Паршина. - М.: Наука, 1989.

The Lorentz group as a subgroup of the complexified group of conformal transformations on spaces endowed with Berwald-Moor metric

G. I. Garas'ko, D. G. Pavlov

*Electrotechnical institute of Russia, MSTU n. a. N. E. Bauman
gri9z@mail.ru, hypercomplex@mail.ru*

It is shown, that the Lorentz group is a subgroup of the complexified group of conformal transformations on the space of poly-numbers H_n with $n \geq 2$, to which correspond the Finsler geometries with Berwald-Moor metric function.

Key-words: Lorentz group, Berwald-Moor metric, Finsler space, conformal transformations.

MSC: 53B40, 53B50, 30C35, 22E43.

Статья поступила 19 апреля 2008 г.

НАРУШЕНИЕ ГИПЕРКОМПЛЕКСНОГО ПОТЕНЦИАЛА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Г. И. Гарасько

ГУП ВЭИ, Россия, Москва

gri9z@mail.ru

В работе показано, что действительная часть гиперкомплексного потенциала в четырёхмерном пространстве Бервальда-Моора вместе с малой аддитивной добавкой, учитываемой в первом приближении, только тогда является конформным потенциалом, когда аддитивная добавка есть решение волнового уравнения, инвариантного относительно группы Пуанкаре.

Ключевые слова: гиперкомплексный потенциал, конформный потенциал, пространство Бервальда-Моора, группа Пуанкаре.

Введение

Элемент длины в произвольном невырожденном поличисловом пространстве $P_n \equiv P_{k+2 \cdot m}$ над полем действительных чисел [1] имеет вид

$$ds = \sqrt[n]{g_{i_1 i_2 \dots i_n}} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n}. \quad (1)$$

Элемент длины в пространстве, конформно связанном с пространством P_n , по определению записывается следующим образом:

$$d\tilde{s} = \kappa(x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_n}) \sqrt[n]{g_{i_1 i_2 \dots i_n}} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n}, \quad (2)$$

то есть при $\kappa(x) \equiv 1$, мы получим элемент длины в исходном поличисловом пространстве:

$$ds \equiv d\tilde{s}|_{\kappa(x) \equiv 1}.$$

Компоненты обобщённого импульса в невырожденном поличисловом пространстве определяются по формуле

$$p_i = \frac{g_{ii_1 \dots i_{n-1}} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_{n-1}}}{\sqrt[n]{g_{j_1 j_2 \dots j_n}} dx^{j_1} dx^{j_2} \dots dx^{j_n}}, \quad (3)$$

а в конформно связанном с P_n пространстве, компоненты обобщённого импульса $\tilde{p}_i$ вычисляются через компоненты p_i :

$$\tilde{p}_i = \kappa(x) p_i. \quad (4)$$

Соответствующие тангенциальные уравнения индикатрисы выражаются через одну и ту же однородную функцию $\Phi_n(q_1, q_2, \dots, q_n)$ n -го порядка по всем своим n аргументам:

$$\Phi_n(p_1, p_2, \dots, p_n) - 1 = 0, \quad \Phi_n(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n) - \kappa^n(x) = 0. \quad (5)$$

Для всех пространств невырожденных поличисел функция $\Phi_n(q)$ в ковариантной форме записи имеет вид:

$$\Phi_n(q_1, q_2, \dots, q_n) = g^{i_1 i_2 \dots i_n} q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_n}. \quad (6)$$

Всегда существует, так называемый, изотропный базис [1], в котором матрица метрического тензора $g_{i_1 i_2 \dots i_n}$, фигурирующего в формуле (1), матрица тензора $g^{i_1 i_2 \dots i_n}$, фигурирующего в тангенциальных уравнениях индикатрисы (5), (6), совпадают с точностью до постоянного коэффициента

$$(g_{i_1 i_2 \dots i_n}) = \text{const} \cdot (g^{i_1 i_2 \dots i_n}) . \quad (7)$$

Будем обозначать финслерово пространство, конформно связанное с пространством невырожденных поличисел $P_n \equiv P_{k+2 \cdot m}$, следующим образом: $\tilde{P}_n \equiv \tilde{P}_{k+2 \cdot m}$.

В пространстве $\tilde{P}_n$, коэффициент растяжения-сжатия связан с Мировой функцией $S_W(x)$, или *конформным потенциалом* соотношением

$$g^{i_1 i_2 \dots i_n} \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_n}} = \kappa^n(x) , \quad (8)$$

что приводит к полемому лагранжиану

$$\mathfrak{L} = g^{i_1 i_2 \dots i_n} \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_n}} , \quad (9)$$

и уравнению поля, которому должен удовлетворять конформный потенциал,

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{i i_1 i_2 \dots i_{n-1}} \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_{n-1}}} \right) = 0 . \quad (10)$$

Любая компонента произвольной аналитической функции переменной P_n удовлетворяет [1] уравнению (10).

При $n > 2$ уравнение (10) содержит решения, отличающиеся от компонент аналитических функций поличисловой переменной, поэтому гиперкомплексный потенциал [2] при $n > 2$ является частным случаем конформного потенциала.

1 Гиперкомплексный потенциал

Для каждой системы гиперкомплексных чисел существует базис с координатами, наиболее близкими к тем, к которым мы привыкли в повседневной жизни, которые фигурируют в классической нерелятивистской механике и СТО. Сформулируем требования, которые предъявляются такому физическому базису $1, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}$,

$$P_n \ni X = x^0 1 + x^1 j_1 + x^2 j_2 + \dots + x^{n-1} j_{n-1} . \quad (11)$$

1. Такой базис должен содержать единицу алгебры поличисел, именно коэффициент при этом базисном элементе отождествляется с реальным физическим временем, а компонента аналитической функции при этом базисном элементе – с гиперкомплексным потенциалом.
2. В этом базисе при выполнении некоторых дополнительных условий для поличисел, принадлежащих области D , имеет место экспоненциальное представление поличисел

$$P_n \supset D \ni X = |X| e^{\alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + \dots + \alpha_{n-1} j_{n-1}} , \quad (12)$$

где $|X|$ – норма поличисла, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ – угловые переменные, а D – область определения ненулевой нормы поличисла.

3. При

$$|dx^\mu| \ll dx^0 , \quad dx^0 > 0 \quad (13)$$

элемент длины в пространстве P_n приобретает вид элемента длины пространства Галилея, в котором координата x^0 может считаться абсолютным ньютоновским временем, а пространство $x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$ – евклидовым или псевдоевклидовым пространством.

Итак, пусть $U(x) \equiv S_W(x)$ – гиперкомплексный потенциал. Это означает, что $U(x)$ – компонента аналитической функции поличисловой переменной при единице в физическом базисе, то есть функция $U(x)$ является решением уравнения поля (10), поле обобщённых импульсов определяется формулой

$$\tilde{p}_i(x) = \frac{\partial U}{\partial x^i}, \quad (14)$$

а поле скоростей – формулой

$$\dot{x}^i = g^{ii_1 i_2 \dots i_{n-1}} \tilde{p}_{i_1}(x) \tilde{p}_{i_2}(x) \dots \tilde{p}_{i_{n-1}}(x), \quad (15)$$

причём поле скоростей определяет нормальную конгруэнцию мировых линий.

Проанализируем последнюю формулу. Только при $n = 2$ компоненты скорости есть линейные комбинации компонент обобщённого импульса. Двумерные невырожденные поличисла исчерпываются двумя алгебрами: комплексные числа и двойные числа, или H_2 . Для всех остальных невырожденных поличисел $P_{n>2}$ компоненты скорости являются однородными полиномами $(n-1)$ -ой степени компонент обобщённого импульса, или более сложными функциями последних (компонент). Формулу (15) можно рассматривать как формулу поднятия индекса, но не с помощью тензора с двумя верхними индексами, а с помощью тензора с n верхними индексами.

2 Интерпретация

Поле обобщённых импульсов $\tilde{p}(x)$ (14) и поле скоростей $\dot{x}$ (15) определяют некий физический Мир, который можно попытаться интерпретировать непосредственно, но существуют и другие возможности, одну из которых [3], [4] мы рассмотрим в данном разделе.

Используя поле обобщённых импульсов $\tilde{p}(x)$ (14), построим тензор

$$g^{ij}(x) = \frac{1}{\kappa^n(x)} g^{iji_1 i_2 \dots i_{n-2}} \tilde{p}_{i_1}(x) \tilde{p}_{i_2}(x) \dots \tilde{p}_{i_{n-2}}(x). \quad (16)$$

Предположим, что $\det(g^{ij}(x)) \neq 0$, это является условием только на функцию $U(x)$ [1]. Тогда можно построить тензор с двумя нижними индексами $g_{ij}(x)$:

$$(g_{ij}(x)) = (g^{ij}(x))^{-1}. \quad (17)$$

С помощью этого тензора в том же самом координатном пространстве определим ещё одну геометрию с элементом длины вида:

$$ds = \sqrt{g_{ij}(x) dx^i dx^j}, \quad (18)$$

то есть квадратичную геометрию.

Докажем, что такая геометрия имеет нормальную конгруэнцию экстремалей и поле обобщённых импульсов, которые совпадают с нормальной конгруэнцией экстремалей и полем обобщённых импульсов, определяемых гиперкомплексным потенциалом $U(x)$.

Для метрической функции, которая стоит в правой части формулы (18), вычислим компоненты обобщённого импульса

$$\check{p}_i = \frac{g_{ij} dx^j}{\sqrt{g_{km}(x) dx^k dx^m}}. \quad (19)$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы тогда запишется следующим образом:

$$g^{ij}\check{p}_i\check{p}_j - 1 = 0, \quad (20)$$

или

$$g^{ij i_1 i_2 \dots i_{n-2}} \check{p}_i \check{p}_j \check{p}_{i_1}(x) \check{p}_{i_2}(x) \dots \check{p}_{i_{n-2}}(x) - \kappa^n(x) = 0. \quad (21)$$

Пусть функция $S(x)$ определяет некоторую нормальную конгруэнцию "геодезических" (экстремалей) в квадратичной геометрии (18), тогда она должна удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби

$$g^{ij i_1 i_2 \dots i_{n-2}} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} \check{p}_{i_1}(x) \check{p}_{i_2}(x) \dots \check{p}_{i_{n-2}}(x) - \kappa^n(x) = 0. \quad (22)$$

Очевидно, что $S(x) = U(x)$ является решением этого уравнения, так как превращает его в тождество.

Таким образом, нормальная конгруэнция "геодезических" (15) в финслеровом пространстве $\tilde{P}_n$ вместе с полем импульсов (14) совпадают с нормальной конгруэнцией "геодезических" в квадратичном (римановом или псевдоримановом) пространстве с элементом длины (18) и тем же самым полем импульсов, так как $S(x) = U(x)$.

Итак, вместо того, чтобы интерпретировать результаты полученные в пространстве $\tilde{P}_n$, можно это делать в n -мерном квадратичном пространстве V_n . Пространство V_n будет представлять собой евклидовое или псевдоевклидовое пространство, в котором введены криволинейные координаты, возможно, с особыми точками, линиями, кривыми и даже "вырезанными" областями. Конечно, вне особых объектов пространство (18) является плоским, то есть тензор кривизны вне особенностей тождественно равен нулю

$$R_{ijkl} \equiv 0. \quad (23)$$

3 Нарушение гиперкомплексного потенциала в пространстве H_4

Предположим, что конформный S_W потенциал отличается от действительной части U гиперкомплексного потенциала на малую аддитивную добавку:

$$S_W(x) = U(x) + \varepsilon \Psi(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (24)$$

где $\Psi(x)$ – некоторая функция координат. Функция $U(x)$ есть решение уравнения поля (10). Потребуем, чтобы функция $S_W(x)$ удовлетворяла тому же уравнению поля с точностью до ε^1 включительно. Тем самым вместо нелинейного дифференциального уравнения в частных производных для функции $S_W(x)$, получим линейное дифференциальное уравнение в частных производных для функции $\Psi(x)$, которую будем называть *нарушением гиперкомплексного потенциала*.

Конкретизируем предложенный алгоритм на примере исходного пространства H_4 . Уравнение поля для конформного потенциала $S_W(\xi)$ в пространстве, конформно связанном с пространством H_4 , в изотропных координатах $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ имеет вид [5], [6]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^4} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^4} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^4} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^4} \left(\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Любая функция S_W , зависящая не от всех координат $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ удовлетворяет этому уравнению. Любая компонента аналитической функции переменной H_4 также является

решением уравнения (25), поэтому в самом общем случае действительная часть гиперкомплексного потенциала в данной ситуации [1] запишется следующим образом:

$$U(\xi) = f_1(\xi^1) + f_2(\xi^2) + f_3(\xi^3) + f_4(\xi^4). \quad (26)$$

Будем считать, что функции f_i гладкие и

$$\frac{\partial f_1}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_2}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_3}{\partial \xi^3} \frac{\partial f_4}{\partial \xi^4} \neq 0. \quad (27)$$

Подставим в уравнение (25) $S_W(\xi) = U(\xi) + \varepsilon \Psi(\xi)$ и сохраним лишь члены, содержащие ε в нулевой и первой степени. Так как функция $U(\xi)$ является решением уравнения (25), получим в результате уравнение для функции $\Psi(\xi)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_3}{\partial \xi^3} \frac{\partial f_4}{\partial \xi^4} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_4}{\partial \xi^4} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_3}{\partial \xi^3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^1 \partial \xi^4} + \\ & + \frac{\partial f_1}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_4}{\partial \xi^4} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} + \frac{\partial f_1}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_3}{\partial \xi^3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2 \partial \xi^4} + \frac{\partial f_1}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^3 \partial \xi^4} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Условие (27) позволяет перейти в последнем уравнении к новым переменным:

$$\zeta^i = f_{i-}(\xi^i). \quad (29)$$

В результате получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^1 \partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^1 \partial \zeta^3} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^1 \partial \zeta^4} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2 \partial \zeta^3} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2 \partial \zeta^4} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^3 \partial \zeta^4} = 0. \quad (30)$$

Наконец перейдём к координатам x^0, x^1, x^2, x^3 , которые можно назвать физическими и которые связаны с координатами $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$ следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \zeta^1 &= x^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} (x^1 + x^2 + x^3), \\ \zeta^2 &= x^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} (x^1 - x^2 - x^3), \\ \zeta^3 &= x^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} (-x^1 + x^2 - x^3), \\ \zeta^4 &= x^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} (-x^1 - x^2 + x^3). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Тогда уравнение (30) приобретёт вид:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^2)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^3)^2} \right] \Psi = 0. \quad (32)$$

Это ничто иное, как волновое уравнение, которое инвариантно относительно группы Пуанкаре.

Таким образом, нарушение гиперкомплексного потенциала H_4 , то есть малая добавка $\varepsilon \Psi$ к действительной части U аналитической функции поличисловой переменной H_4 , должна быть решением волнового уравнения, если потребовать, чтобы функция $S = U + \varepsilon \Psi$ являлась конформным потенциалом, то есть удовлетворяла уравнению поля (25). Волновое уравнение (32) инвариантно относительно группы Пуанкаре, а уравнение (25) является фундаментальным уравнением поля для пространства поличисел H_4 , которые суть финслерово пространство с метрикой Бервальда-Моора.

Заклучение

Можно утверждать, что найдено ещё одно подтверждение тому, что пространство Бервальда-Моора, поличисловое пространство H_4 , кроме изометрической трёхпараметрической группы симметрии $G_1(H_4)$ [1], обладает и другими, "скрытыми" группами симметрии, например группой Пуанкаре. Эту группу можно рассматривать как группу переходов на множестве решений фундаментального уравнения поля в пространстве H_4 , которые бесконечно мало отличаются от действительной части аналитической функции поличисловой переменной.

Литература

- [1] Гарасько Г.И., Павлов Д.Г.: Геометрия невырожденных поличисел. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (7)**, т. 4 (2007), стр. 3–25.
- [2] Гарасько Г.И., Павлов Д.Г.: Об аналоге решения Фридмана в финслеровом пространстве-времени с анизотропной метрикой Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (7)**, т. 4 (2007), стр. 52–62.
- [3] Гарасько Г.И.: О Мировой функции и связи между геометриями, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (5)** (2006), 3–18.
- [4] Гарасько Г.И., Павлов Д.Г.: Конструирование псевдоримановой геометрии на основе геометрии Бервальда-Моора, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (5)**, т. 3 (2006), 19–27.
- [5] Гарасько Г.И., Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2 (6)**, т. 3 (2006), стр. 6–20.
- [6] Гарасько Г.И., Пространство, конформно связанное с пространством Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (7)**, т. 4 (2007), стр. 38–51.

The breaking of the hyper-complex potential in the fourth-dimensional Berwald-Moor space

G. I. Garas'ko

*Electrotechnical institute of Russia
gri9z@mail.ru*

In this work it is shown that the real part of the hyper-complex potential in the fourth-dimensional Berwald-Moor space with a small additive correction considered in its first approximation, is a conformal potential only when the additive complement satisfies the wave equation, which is invariant relative to the Poincare group.

Key-words: hyper-complex potential, conformal potential, Berwald-Moore space, Poincare group.
MSC: 53B40, 81T40, 35L05.

О ПРОЦЕДУРЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАБЛЮДАЕМЫХ 3-СКОРОСТЕЙ В ПОЛНОСТЬЮ АНИЗОТРОПНОМ ФИНСЛЕРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБЫТИЙ*

Г. Ю. Богословский

НИИ ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, МГУ им. М. В. Ломоносова
bogoslov@theory.sinp.msu.ru

Мы продолжаем изучение геометрических фазовых переходов, сопровождающих динамическую перестройку вакуума при спонтанном нарушении исходной калибровочной симметрии. В результате такой перестройки могут возникать три типа конденсатов, а именно – скалярный, аксиально симметричный и полностью анизотропный конденсат. Только в случае скалярного конденсата плоское пространство-время остается пространством Минковского. В случае образования анизотропного конденсата, соответствующая анизотропия появляется и у пространства-времени; при этом пространство-время, заполненное аксиально симметричным конденсатом, оказывается плоским релятивистски инвариантным финслеровым пространством с частично нарушенной 3D изотропией, а пространство-время, заполненное полностью анизотропным конденсатом, проявляет себя как плоское релятивистски инвариантное финслерово пространство с полностью нарушенной 3D изотропией. Эти два типа финслеровых пространств кратко описаны в расширенной вводной части работы, а оригинальная её часть посвящена определению наблюдаемых 3-скоростей в полностью анизотропном финслеровом пространстве событий. Основные трудности, которые удалось преодолеть при решении данной задачи, связаны с нестандартным видом уравнения светового конуса и с корректным введением нормы в векторном пространстве быстрой.

Ключевые слова: Финслерово пространство, анизотропия, конденсат, пространство событий, скорости.

1 Введение

В последние годы в литературе широко дебатировается проблема нарушения лоренцевой симметрии. Такой интерес к этой проблеме во многом связан с построением струнно-мотивированной феноменологической теории, известной как the Standard Model Extension (SME) [1–3].

На фоне исследований, проводимых в рамках SME, всё более и более популярным становится другой, так называемый финслеров подход к нарушению лоренцевой симметрии (см., в частности, [4]– [18]). В основе этого подхода лежит не псевдоевклидова, а финслерова геометрическая модель плоского пространства событий. Большим достоинством финслеровой модели, которое предопределяет её роль в развитии теории фундаментальных взаимодействий и релятивистской астрофизики, является то, что она приводит к нарушению лоренцевой симметрии без нарушения релятивистской симметрии.

Как оказалось, помимо пространства Минковского существуют только два типа плоских финслеровых пространств, обладающих релятивистской симметрией, т. е. симметрией, соответствующей лоренцевым бустам. Финслерово пространство первого типа

* Русская версия статьи, опубликованной в журнале SIGMA 4 (2008), 045.

является пространством с частично нарушенной 3D изотропией, а финслерово пространство второго типа является пространством с полностью нарушенной 3D изотропией. Опишем кратко их основные свойства (детали см. в [8, 19]).

1.1 Плоское релятивистски симметричное финслерово пространство с частично нарушенной 3D изотропией

Метрика такого пространства событий, полученная в [20], имеет следующий вид

$$ds^2 = \left[\frac{(dx_0 - \boldsymbol{\nu} d\mathbf{x})^2}{dx_0^2 - d\mathbf{x}^2} \right]^r (dx_0^2 - d\mathbf{x}^2). \quad (1)$$

Эта метрика зависит от двух постоянных параметров r и $\boldsymbol{\nu}$ и обобщает метрику Минковского, причем r определяет величину пространственной анизотропии, характеризуя тем самым степень отклонения метрики (1) от метрики Минковского. Вместо 3-параметрической группы вращений пространства Минковского, данное плоское финслерово пространство событий допускает только 1-параметрическую группу вращений вокруг единичного вектора $\boldsymbol{\nu}$, который указывает физически выделенное направление в 3D пространстве. С трансляционной симметрией никаких изменений не происходит: пространственно-временные трансляции оставляют метрику (1) инвариантной. Что касается преобразований, связывающих различные инерциальные системы отсчета, обычные лоренцевы бусты конформно видоизменяют метрику (1). Поэтому они не принадлежат группе изометрий пространства-времени (1). Однако, используя их, можно построить такие преобразования [4], которые входят в группу изометрий пространства-времени (1). Соответствующие обобщённые преобразования Лоренца (обобщенные лоренцевы бусты) можно представить в следующей форме

$$x'^i = D(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}) R_j^i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}) L_k^j(\mathbf{v}) x^k, \quad (2)$$

где $\mathbf{v}$ обозначает скорости движущихся (штрихованных) систем отсчёта, матрицы $L_k^j(\mathbf{v})$ представляют обычные лоренцевы бусты, матрицы $R_j^i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu})$ — дополнительные повороты пространственных осей движущихся систем вокруг векторов $[\mathbf{v} \boldsymbol{\nu}]$ на углы

$$\varphi = \arccos \left\{ 1 - \frac{(1 - \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2})[\mathbf{v} \boldsymbol{\nu}]^2}{(1 - \mathbf{v} \boldsymbol{\nu}/c) \mathbf{v}^2} \right\}$$

релятивистской абберации вектора $\boldsymbol{\nu}$ и, наконец, диагональные матрицы

$$D(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}) = \left(\frac{1 - \mathbf{v} \boldsymbol{\nu}/c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right)^r I$$

представляют дополнительные дилатационные преобразования координат событий.

В отличие от обычных лоренцевых бустов, обобщённые бусты (2) составляют 3-параметрическую некомпактную группу с генераторами X_1, X_2, X_3 . Таким образом, с включением 1-параметрической группы вращений вокруг выделенного направления $\boldsymbol{\nu}$ и 4-параметрической группы трансляций, неоднородная группа изометрий пространства событий (1) оказывается 8-параметрической. Чтобы получить простейшее представление для её генераторов, достаточно направить третью пространственную ось вдоль $\boldsymbol{\nu}$ и переписать преобразования (2) в инфинитезимальной форме. В результате мы приходим к следующим восьми генераторам

$$\begin{aligned} X_1 &= -(x^1 p_0 + x^0 p_1) - (x^1 p_3 - x^3 p_1), \\ X_2 &= -(x^2 p_0 + x^0 p_2) + (x^3 p_2 - x^2 p_3), \\ X_3 &= -r x^i p_i - (x^3 p_0 + x^0 p_3), \\ R_3 &= x^2 p_1 - x^1 p_2; \end{aligned} \quad p_i = \partial/\partial x^i. \quad (3)$$

Согласно [4], эти генераторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}
 [X_1 X_2] &= 0, & [R_3 X_3] &= 0, \\
 [X_3 X_1] &= X_1, & [R_3 X_1] &= X_2, \\
 [X_3 X_2] &= X_2, & [R_3 X_2] &= -X_1; \\
 [p_i p_j] &= 0; \\
 [X_1 p_0] &= p_1, & [X_2 p_0] &= p_2, & [X_3 p_0] &= r p_0 + p_3, & [R_3 p_0] &= 0, \\
 [X_1 p_1] &= p_0 + p_3, & [X_2 p_1] &= 0, & [X_3 p_1] &= r p_1, & [R_3 p_1] &= p_2, \\
 [X_1 p_2] &= 0, & [X_2 p_2] &= p_0 + p_3, & [X_3 p_2] &= r p_2, & [R_3 p_2] &= -p_1, \\
 [X_1 p_3] &= -p_1, & [X_2 p_3] &= -p_2, & [X_3 p_3] &= r p_3 + p_0, & [R_3 p_3] &= 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Отсюда видно, что однородная группа изометрий аксиально симметричного финслерова пространства (1) содержит четыре параметра (генераторы X_1 , X_2 , X_3 и R_3). Являясь подгруппой 11-параметрической группы Вейля [21], она изоморфна соответствующей 4-параметрической подгруппе (с генераторами X_1 , X_2 , $X_3|_{r=0}$ и R_3) однородной группы Лоренца. Так как 6-параметрическая однородная группа Лоренца не имеет ни одной 5-параметрической подгруппы, в то время как её 4-параметрическая подгруппа является с точностью до изоморфизмов единственной [22], переход от пространства Минковского к аксиально симметричному финслерову пространству (1) подразумевает минимально возможное нарушение лоренцевой симметрии. При этом релятивистская симметрия, представленная теперь обобщёнными лоренцевыми бустами (2), остается в силе.

Благодаря тому, что в финслеровом пространстве событий (1) распространение световых сигналов происходит точно так же, как и в пространстве Минковского, применение [23] эйнштейновской процедуры обмена световыми сигналами позволяет сделать вывод, что координаты x_0 и $\mathbf{x}$, в которых задана метрика (1), имеют смысл наблюдаемых галилеевых координат событий. Соответственно, координатная скорость $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dx_0$ является наблюдаемой величиной и для неё остаётся в силе эйнштейновский закон сложения 3-скоростей. С формальной точки зрения это означает, что переход от пространства Минковского к финслерову пространству (1) не приводит к изменению геометрических свойств пространства 3-скоростей: оно по-прежнему является пространством Лобачевского с метрикой

$$dl^2 = \frac{(d\mathbf{v})^2 - [\mathbf{v} d\mathbf{v}]^2}{(1 - \mathbf{v}^2)^2},$$

причем ортогональные компоненты 3-скорости $\mathbf{v}$ служат в нём координатами Бельтрами.

Важную информацию о физических проявлениях анизотропии пространства можно получить, рассмотрев функцию Лагранжа [4], соответствующую финслеровой метрике (1). Такая функция описывает специфическое несепарабельное взаимодействие частицы с постоянным (r и ν фиксированы) полем, характеризующим пространственную анизотропию. В результате мы приходим к выводу, что, несмотря на анизотропию пространства, свободное инерциальное движение частицы остаётся по-прежнему прямолинейным и равномерным. Однако, в отличие от ситуации в пространстве Минковского, направление импульса частицы не совпадает с направлением её скорости. В частности, помимо энергии покоя $E = mc^2$, частица имеет ещё и импульс покоя $\mathbf{p} = r m c \nu$, а инертная масса нерелятивистской частицы (входящая во второй закон Ньютона) оказывается [24, 25] не скаляром, а тензором

$$m_{ik} = m(1 - r)(\delta_{ik} + r \nu_i \nu_k). \tag{5}$$

Что касается влияния анизотропии пространства на поведение фундаментальных полей, то корректный учёт такого влияния связан с финслеровым обобщением известных полевых уравнений. При этом, поскольку финслерово пространство (1) является трансляционно инвариантным, соответствующие обобщённые полевые уравнения должны допускать решения в виде плоских волн типа $\exp(ip_k x^k)$, где p_k — канонический 4-импульс (волновой вектор) частицы в анизотропном пространстве (1), удовлетворяющий, как показано в [4], релятивистски инвариантному дисперсионному соотношению

$$\left[\frac{(p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\nu})^2}{p_0^2 - \mathbf{p}^2} \right]^{-r} (p_0^2 - \mathbf{p}^2) = m^2(1-r)^{(1-r)}(1+r)^{(1+r)}. \quad (6)$$

Здесь и в дальнейшем мы положили $c = \hbar = 1$. Уже из соотношения (6) видно, что анизотропия пространства событий (1) никак не влияет на динамику безмассовых полей и, в частности, электромагнитного поля. Поэтому, в соответствующем обобщении нуждаются только фундаментальные уравнения для массивных полей.

Если начать с уравнения Клейна-Гордона и попытаться его обобщить, используя обобщённое дисперсионное соотношение (6) и подстановку $p_k \rightarrow i\partial/\partial x^k$, то мы получим обобщённое уравнение Клейна-Гордона либо в форме линейного интегрального уравнения [25, 26], либо — интегродифференциального уравнения [16]. Вместе с тем, с точки зрения локальной квантовой теории поля, более адекватным представляется другой, а именно, лагранжев подход к проблеме финслерова обобщения полевых уравнений. Исходные руководящие принципы для построения соответствующих обобщённых лагранжианов были сформулированы в работе [27]. С их помощью удалось, в частности, показать, что действительное массивное поле не существует как свободное поле в финслеровом пространстве-времени (1), но зато оно существует как нейтральная компонента φ_2 изотопического триплета $\boldsymbol{\varphi}(x) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), -\varphi_1^*(x)\}$, обобщённый лагранжиан для которого имеет следующий вид

$$\mathcal{L} = \varphi_{1;n}^* \varphi_1^n + \frac{1}{2} \varphi_{2;n} \varphi_2^n - \frac{m^2}{2} (1-r^2) \left[\frac{\nu^k j_k}{(1-r)m(2\varphi_1^* \varphi_1 + \varphi_2^2)} \right]^{\left(\frac{2r}{1+r}\right)} (2\varphi_1^* \varphi_1 + \varphi_2^2),$$

где $j_k = i(\varphi_1^* \varphi_{1;k} - \varphi_1 \varphi_{1;k}^*)$.

Что касается влияния пространственной анизотропии на динамику массивного фермионного поля, то оно описывается следующим обобщённым дираковским лагранжианом [9]

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m \left[\left(\frac{\nu_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi}{\bar{\psi} \psi} \right)^2 \right]^{r/2} \bar{\psi} \psi, \quad (7)$$

где $\nu_\mu = (1, -\boldsymbol{\nu})$.

В отличие от стандартного лагранжиана Дирака, обобщённый лагранжиан (7) приводит к нелинейным спинорным уравнениям, которые допускают решение в виде аксиально симметричного фермион-антифермионного конденсата. Появление такого конденсата в качестве физического источника анизотропии плоского пространства-времени (1) реализует один из возможных механизмов перестройки вакуума при спонтанном нарушении исходной калибровочной симметрии.

Заканчивая краткое описание релятивистски инвариантной модели плоского финслерова пространства событий (1), нельзя не отметить один из последних и наиболее впечатляющих результатов в этой области, который получили G.W. Gibbons, Joaquim Gomis и C.N. Pope. Мы имеем в виду предложенный в [16] оператор СРТ преобразования. Интересно также отметить, что, по большей части, представленные выше результаты были воспроизведены в [16] с помощью методов непрерывных деформаций алгебр Ли

и нелинейных реализаций. При этом, однако, в [16] были использованы другие обозначения. В частности, для обозначения параметра, характеризующего величину пространственной анизотропии, была использована буква b вместо r , а 8-параметрическая группа финслеровых изометрий получила название $\text{DISIM}_b(2)$, т. е. Deformed Inhomogeneous SIMilitude группа, включающая 2-параметрическую абелеву однородную некомпактную подгруппу. В нашем базисе её генераторы и алгебра Ли имеют соответственно вид (3) и (4). Что касается конечных преобразований, составляющих однородные некомпактные подгруппы группы $\text{DISIM}_b(2)$, то их можно найти в [10].

1.2 Плоское релятивистски симметричное финслерово пространство с полностью нарушенной 3D изотропией

В наиболее общей форме, а именно, в виде

$$ds = (dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)^{(1+r_1+r_2+r_3)/4} (dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)^{(1+r_1-r_2-r_3)/4} \times (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)^{(1-r_1+r_2-r_3)/4} (dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)^{(1-r_1-r_2+r_3)/4} \quad (8)$$

метрика плоского полностью анизотропного финслерова пространства событий была найдена в [19]. Три параметра (r_1 , r_2 и r_3) характеризуют анизотропию пространства (8) и ограничены условиями

$$\begin{aligned} 1 + r_1 + r_2 + r_3 &\geq 0, \quad 1 + r_1 - r_2 - r_3 \geq 0, \\ 1 - r_1 + r_2 - r_3 &\geq 0, \quad 1 - r_1 - r_2 + r_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Стоит отметить, что, при $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, метрика (8) сводится к корню четвёртой степени из произведения четырёх 1-форм

$$ds_{B-M} = [(dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)(dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3) \times (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)]^{1/4}.$$

Таким образом, в данном частом случае мы получаем хорошо известную метрику Бервальда-Моора [28, 29], но записанную в базисе, который был введён в [19]. Что касается ненулевых значений параметров r_i , с физической точки зрения особый интерес представляют следующие их значения

$$\begin{aligned} (r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = -1); \quad (r_1 = -1, r_2 = -1, r_3 = 1); \\ (r_1 = -1, r_2 = 1, r_3 = -1); \quad (r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 1). \end{aligned}$$

Дело в том, что, когда параметры r_i достигают данных значений, метрика (8), которая описывает плоское пространство-время с полностью нарушенной 3D изотропией, вырождается в соответствующие 1-формы, т. е. — в полный дифференциал абсолютного времени:

$$\begin{aligned} ds|_{(r_1=1, r_2=-1, r_3=-1)} &= dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3; \quad ds|_{(r_1=-1, r_2=-1, r_3=1)} = dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3; \\ ds|_{(r_1=-1, r_2=1, r_3=-1)} &= dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3; \quad ds|_{(r_1=1, r_2=1, r_3=1)} = dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3. \end{aligned}$$

Поскольку аналогичная ситуация имеет место и для метрики (1) (она тоже вырождается, при $r = 1$, в полный дифференциал абсолютного времени), то отсюда мы заключаем [19], что абсолютное время не является стабильным вырожденным состоянием пространства-времени. Под этим подразумевается, что абсолютное время может

перейти как в частично анизотропное пространство-время (1), так и в полностью анизотропное пространство-время (8). В любом случае соответствующий геометрический фазовый переход от абсолютного времени к 4D пространству-времени может рассматриваться как Акт Творения 3D пространства. Это явление сопровождается перестройкой вакуумного состояния системы первоначально безмассовых взаимодействующих фундаментальных полей, в результате чего элементарные частицы приобретают массы. В случае пространства-времени (1) приобретённая масса определяется тензором (5). Что касается пространства-времени (8), приобретённая масса определяется тензором

$$m_{ik} = m \begin{pmatrix} (1 - r_1^2) & (r_3 - r_1 r_2) & (r_2 - r_1 r_3) \\ (r_3 - r_1 r_2) & (1 - r_2^2) & (r_1 - r_2 r_3) \\ (r_2 - r_1 r_3) & (r_1 - r_2 r_3) & (1 - r_3^2) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Только после завершения описанного выше процесса такие понятия, как пространственная протяжённость и система отсчёта, становятся физически осмысленными (в безмассовом мире бессмысленно говорить о пространственной протяжённости чего-либо, равно как и о какой-либо системе отсчёта). В связи с этим стоит отметить, что уже в одной из первых единых калибровочных теорий (а именно, в конформной теории Вейля [30]) само понятие пространственно-временного интервала приобретает физический смысл лишь после нарушения локальной конформной симметрии, в результате чего первоначально безмассовое абелево векторное калибровочное поле приобретает массу [31]. В дополнение к сказанному, нужно иметь в виду и тот факт, что с формальной точки зрения абсолютное время служит связующим звеном, посредством которого реализуется принцип соответствия для финслеровых пространств с частично и полностью нарушенной 3D изотропией.

Рассмотрим теперь группу изометрий полностью анизотропного финслерова пространства (8). Как оказалось [19], однородная 3-параметрическая некомпактная группа изометрий пространства-времени (8) является абелевой, а составляющие её преобразования, которые имеют тот же смысл, что и обычные лоренцевы бусты, можно записать в следующем виде

$$x'_i = D L_{ik} x_k, \quad (10)$$

где

$$D = e^{-(r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + r_3 \alpha_3)},$$

матрицы L_{ik} — унимодулярны, причем

$$L_{ik} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & -\mathcal{B} & -\mathcal{C} & -\mathcal{D} \\ -\mathcal{B} & \mathcal{A} & \mathcal{D} & \mathcal{C} \\ -\mathcal{C} & \mathcal{D} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ -\mathcal{D} & \mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathcal{A} = \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \sinh \alpha_3,$$

$$\mathcal{B} = \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \sinh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_3,$$

$$\mathcal{C} = \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cosh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_3,$$

$$\mathcal{D} = \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cosh \alpha_3,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — групповые параметры. Ниже, наряду с α_i , мы будем использовать в качестве групповых параметров компоненты $v_i = dx_i/dx_0$ координатной скорости штрихо-

ванной системы отсчета. Параметры v_i и α_i связаны соотношениями

$$\begin{aligned} v_1 &= (\tanh \alpha_1 - \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3) / (1 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3), \\ v_2 &= (\tanh \alpha_2 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_3) / (1 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3), \\ v_3 &= (\tanh \alpha_3 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2) / (1 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3). \end{aligned} \quad (12)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{4} \ln \frac{(1 + v_1 - v_2 + v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 - v_1 + v_2 + v_3)}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{4} \ln \frac{(1 - v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 + v_1 - v_2 + v_3)}, \\ \alpha_3 &= \frac{1}{4} \ln \frac{(1 - v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 - v_2 + v_3)}{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Что касается генераторов X_i абелевой однородной 3-параметрической группы изометрий (10), они могут быть представлены следующим образом

$$\begin{aligned} X_1 &= -r_1 x_\alpha p_\alpha - (x_1 p_0 + x_0 p_1) + (x_2 p_3 + x_3 p_2), \\ X_2 &= -r_2 x_\alpha p_\alpha - (x_2 p_0 + x_0 p_2) + (x_1 p_3 + x_3 p_1), \\ X_3 &= -r_3 x_\alpha p_\alpha - (x_3 p_0 + x_0 p_3) + (x_1 p_2 + x_2 p_1), \end{aligned}$$

где $p_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$ — генераторы 4-параметрической группы трансляций. Таким образом, с включением последней, неоднородная группа изометрий полностью анизотропного финслерова пространства событий (8) оказывается 7-параметрической, а её генераторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [X_i X_j] &= 0; & [p_\alpha p_\beta] &= 0; \\ [X_1 p_0] &= r_1 p_0 + p_1, & [X_2 p_0] &= r_2 p_0 + p_2, & [X_3 p_0] &= r_3 p_0 + p_3, \\ [X_1 p_1] &= r_1 p_1 + p_0, & [X_2 p_1] &= r_2 p_1 - p_3, & [X_3 p_1] &= r_3 p_1 - p_2, \\ [X_1 p_2] &= r_1 p_2 - p_3, & [X_2 p_2] &= r_2 p_2 + p_0, & [X_3 p_2] &= r_3 p_2 - p_1, \\ [X_1 p_3] &= r_1 p_3 - p_2, & [X_2 p_3] &= r_2 p_3 - p_1, & [X_3 p_3] &= r_3 p_3 + p_0. \end{aligned}$$

Заканчивая на этом вводную часть данной работы, отметим, что её следующая, оригинальная часть посвящена дальнейшему изучению плоского релятивистски инвариантного финслерова пространства с полностью нарушенной 3D изотропией (выражение (8)). Дело в том, что, в противоположность метрике (1), координаты x_0, x_i , в которых задана метрика (8), не являются ортогональными галилеевыми координатами событий. Соответственно, 3-скорость $v_i = dx_i/dx_0$ не является наблюдаемой величиной, а имеет смысл только как координатная 3-скорость в пространстве событий (8). Заметим кстати, что в рамках обычной СТО координатная 3-скорость, которая соответствует неортогональным координатам, тоже не является наблюдаемой 3-скоростью и для определения последней существует хорошо известный алгоритм. Из сказанного ясно, что физическая идентификация различных величин и соотношений, возникающих в рамках модели плоского финслерова пространства событий (8), требует особого внимания и порой превращается в самостоятельную задачу. Ниже будет решена одна из таких задач, позволяющая по-новому подойти к интерпретации ряда астрофизических наблюдений и, в частности, данных, относящихся к температурной анизотропии реликтового излучения. Мы имеем в виду проблему определения наблюдаемых 3-скоростей в рамках

модели плоского анизотропного пространства событий (8). Построение соответствующего алгоритма, с помощью которого величина наблюдаемой 3-скорости может быть выражена через её компоненты, мы начнем с рассмотрения пространства координатных 3-скоростей.

2 Компоненты относительной координатной 3-скорости двух частиц

Очевидно, что группа обобщённых лоренцевых бустов (10), действующая в полностью анизотропном пространстве событий (8), индуцирует группу соответствующих преобразований в пространстве координатных 3-скоростей $v_i = dx_i/dx_0$. Для того, чтобы получить такие преобразования, давайте перепишем (10) в терминах дифференциалов координат:

$$\begin{aligned} dx'_0 &= D (\mathcal{A} dx_0 - \mathcal{B} dx_1 - \mathcal{C} dx_2 - \mathcal{D} dx_3) , \\ dx'_1 &= D (-\mathcal{B} dx_0 + \mathcal{A} dx_1 + \mathcal{D} dx_2 + \mathcal{C} dx_3) , \\ dx'_2 &= D (-\mathcal{C} dx_0 + \mathcal{D} dx_1 + \mathcal{A} dx_2 + \mathcal{B} dx_3) , \\ dx'_3 &= D (-\mathcal{D} dx_0 + \mathcal{C} dx_1 + \mathcal{B} dx_2 + \mathcal{A} dx_3) . \end{aligned}$$

Деля теперь второе, третье и четвёртое на первое из этих соотношений и используя тот факт, что $v_i = dx_i/dx_0$ является компонентами координатной 3-скорости, мы получаем

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{-\mathcal{B} + \mathcal{A} v_1 + \mathcal{D} v_2 + \mathcal{C} v_3}{\mathcal{A} - \mathcal{B} v_1 - \mathcal{C} v_2 - \mathcal{D} v_3} , \\ v'_2 &= \frac{-\mathcal{C} + \mathcal{D} v_1 + \mathcal{A} v_2 + \mathcal{B} v_3}{\mathcal{A} - \mathcal{B} v_1 - \mathcal{C} v_2 - \mathcal{D} v_3} , \\ v'_3 &= \frac{-\mathcal{D} + \mathcal{C} v_1 + \mathcal{B} v_2 + \mathcal{A} v_3}{\mathcal{A} - \mathcal{B} v_1 - \mathcal{C} v_2 - \mathcal{D} v_3} . \end{aligned} \quad (14)$$

Данные формулы связывают компоненты v_i и v'_i координатной 3-скорости частицы в исходной и штрихованной инерциальных системах соответственно, причём зависимость фигурирующих здесь матричных элементов $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ от координатной 3-скорости штрихованной системы определяется соотношениями (11) и (13). С формальной точки зрения преобразования (14) являют собой нелинейное представление линейной группы (10). Кроме того следует отметить, что это представление оказалось независимым от параметров r_i . Поэтому оно в равной мере справедливо для метрики Бервальда-Моора, чем мы в дальнейшем и воспользуемся.

Рассмотрим теперь две частицы. Пусть $v_i^{(2)}$ — координатная 3-скорость второй частицы в исходной системе отсчёта, а $v_i^{(1)}$ — координатная 3-скорость первой частицы в той же системе. Вдобавок, идентифицируем $v_i^{(1)}$ с координатной 3-скоростью штрихованной системы. В результате штрихованная система приобретает смысл системы покоя первой частицы. Наконец, обозначим посредством $v_i^{(1 \rightarrow 2)}$ компоненты координатной 3-скорости второй частицы в системе покоя первой частицы или, другими словами, — относительную скорость второй частицы по отношению к первой. Используя данные обозначения и формулы (11), (13), мы с помощью (14) получаем

$$v_1^{(1 \rightarrow 2)} = \frac{-\mathcal{B}^{(1)} + \mathcal{A}^{(1)} v_1^{(2)} + \mathcal{D}^{(1)} v_2^{(2)} + \mathcal{C}^{(1)} v_3^{(2)}}{\mathcal{A}^{(1)} - \mathcal{B}^{(1)} v_1^{(2)} - \mathcal{C}^{(1)} v_2^{(2)} - \mathcal{D}^{(1)} v_3^{(2)}} ,$$

$$\begin{aligned}
v_2^{(1 \rightarrow 2)} &= \frac{-\overset{(1)}{\mathcal{C}} + \overset{(1)}{\mathcal{D}} \overset{(2)}{v}_1 + \overset{(1)}{\mathcal{A}} \overset{(2)}{v}_2 + \overset{(1)}{\mathcal{B}} \overset{(2)}{v}_3}{\overset{(1)}{\mathcal{A}} - \overset{(1)}{\mathcal{B}} \overset{(2)}{v}_1 - \overset{(1)}{\mathcal{C}} \overset{(2)}{v}_2 - \overset{(1)}{\mathcal{D}} \overset{(2)}{v}_3}, \\
v_3^{(1 \rightarrow 2)} &= \frac{-\overset{(1)}{\mathcal{D}} + \overset{(1)}{\mathcal{C}} \overset{(2)}{v}_1 + \overset{(1)}{\mathcal{B}} \overset{(2)}{v}_2 + \overset{(1)}{\mathcal{A}} \overset{(2)}{v}_3}{\overset{(1)}{\mathcal{A}} - \overset{(1)}{\mathcal{B}} \overset{(2)}{v}_1 - \overset{(1)}{\mathcal{C}} \overset{(2)}{v}_2 - \overset{(1)}{\mathcal{D}} \overset{(2)}{v}_3},
\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
\overset{(1)}{\mathcal{A}} &= \frac{1 - \overset{(1)}{v}_1^2 - \overset{(1)}{v}_2^2 - \overset{(1)}{v}_3^2 - 2 \overset{(1)}{v}_1 \overset{(1)}{v}_2 \overset{(1)}{v}_3}{\left[\left(1 - \overset{(1)}{v}_1 - \overset{(1)}{v}_2 - \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 - \overset{(1)}{v}_1 + \overset{(1)}{v}_2 + \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(1)}{v}_1 - \overset{(1)}{v}_2 + \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(1)}{v}_1 + \overset{(1)}{v}_2 - \overset{(1)}{v}_3\right) \right]^{3/4}}, \\
\overset{(1)}{\mathcal{B}} &= \frac{\overset{(1)}{v}_1 + 2 \overset{(1)}{v}_2 \overset{(1)}{v}_3 - \overset{(1)}{v}_1 \left(\overset{(1)}{v}_1^2 - \overset{(1)}{v}_2^2 - \overset{(1)}{v}_3^2 \right)}{\left[\left(1 - \overset{(1)}{v}_1 - \overset{(1)}{v}_2 - \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 - \overset{(1)}{v}_1 + \overset{(1)}{v}_2 + \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(1)}{v}_1 - \overset{(1)}{v}_2 + \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(1)}{v}_1 + \overset{(1)}{v}_2 - \overset{(1)}{v}_3\right) \right]^{3/4}}, \\
\overset{(1)}{\mathcal{C}} &= \frac{\overset{(1)}{v}_2 + 2 \overset{(1)}{v}_1 \overset{(1)}{v}_3 - \overset{(1)}{v}_2 \left(\overset{(1)}{v}_2^2 - \overset{(1)}{v}_1^2 - \overset{(1)}{v}_3^2 \right)}{\left[\left(1 - \overset{(1)}{v}_1 - \overset{(1)}{v}_2 - \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 - \overset{(1)}{v}_1 + \overset{(1)}{v}_2 + \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(1)}{v}_1 - \overset{(1)}{v}_2 + \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(1)}{v}_1 + \overset{(1)}{v}_2 - \overset{(1)}{v}_3\right) \right]^{3/4}}, \\
\overset{(1)}{\mathcal{D}} &= \frac{\overset{(1)}{v}_3 + 2 \overset{(1)}{v}_1 \overset{(1)}{v}_2 - \overset{(1)}{v}_3 \left(\overset{(1)}{v}_3^2 - \overset{(1)}{v}_1^2 - \overset{(1)}{v}_2^2 \right)}{\left[\left(1 - \overset{(1)}{v}_1 - \overset{(1)}{v}_2 - \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 - \overset{(1)}{v}_1 + \overset{(1)}{v}_2 + \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(1)}{v}_1 - \overset{(1)}{v}_2 + \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(1)}{v}_1 + \overset{(1)}{v}_2 - \overset{(1)}{v}_3\right) \right]^{3/4}}.
\end{aligned}$$

Эти громоздкие формулы выражают компоненты относительной координатной 3-скорости двух частиц через компоненты координатных 3-скоростей каждой из частиц. Если теперь обратить внимание на то, что данные формулы являются прямым следствием преобразований (10), составляющих абелеву группу с параметрами α_i , а сами α_i можно рассматривать как компоненты быстроты, связанные с v_i соотношениями (12) и (13), то напрашивается вывод, что в терминах α_i формулы (15) должны значительно упрощаться и принимать вид

$$\alpha_i^{(1 \rightarrow 2)} = \overset{(2)}{\alpha}_i - \overset{(1)}{\alpha}_i. \tag{16}$$

То, что такой вывод является действительно правильным, доказывается следующим образом. Сначала, исходя из (15), путём непосредственных вычислений мы приходим к трём уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(1 + \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_1 - \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_2 + \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_1 + \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_2 - \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_3\right)}{\left(1 - \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_1 - \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_2 - \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_3\right) \left(1 - \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_1 + \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_2 + \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_3\right)} = \\
&= \frac{\left(1 - \overset{(1)}{v}_1 - \overset{(1)}{v}_2 - \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 - \overset{(1)}{v}_1 + \overset{(1)}{v}_2 + \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(2)}{v}_1 - \overset{(2)}{v}_2 + \overset{(2)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(2)}{v}_1 + \overset{(2)}{v}_2 - \overset{(2)}{v}_3\right)}{\left(1 + \overset{(1)}{v}_1 - \overset{(1)}{v}_2 + \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(1)}{v}_1 + \overset{(1)}{v}_2 - \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 - \overset{(2)}{v}_1 - \overset{(2)}{v}_2 - \overset{(2)}{v}_3\right) \left(1 - \overset{(2)}{v}_1 + \overset{(2)}{v}_2 + \overset{(2)}{v}_3\right)}, \\
&\frac{\left(1 - \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_1 + \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_2 + \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_1 + \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_2 - \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_3\right)}{\left(1 - \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_1 - \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_2 - \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_1 - \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_2 + \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_3\right)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left(1 - \overset{(1)}{v}_1 - \overset{(1)}{v}_2 - \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(1)}{v}_1 - \overset{(1)}{v}_2 + \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 - \overset{(2)}{v}_1 + \overset{(2)}{v}_2 + \overset{(2)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(2)}{v}_1 + \overset{(2)}{v}_2 - \overset{(2)}{v}_3\right)}{\left(1 - \overset{(1)}{v}_1 + \overset{(1)}{v}_2 + \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(1)}{v}_1 + \overset{(1)}{v}_2 - \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 - \overset{(2)}{v}_1 - \overset{(2)}{v}_2 - \overset{(2)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(2)}{v}_1 - \overset{(2)}{v}_2 + \overset{(2)}{v}_3\right)}, \\
 &\quad \frac{\left(1 - \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_1 + \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_2 + \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_1 - \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_2 + \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_3\right)}{\left(1 - \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_1 - \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_2 - \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_1 + \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_2 - \overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_3\right)} = \\
 &= \frac{\left(1 - \overset{(1)}{v}_1 - \overset{(1)}{v}_2 - \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(1)}{v}_1 + \overset{(1)}{v}_2 - \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 - \overset{(2)}{v}_1 + \overset{(2)}{v}_2 + \overset{(2)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(2)}{v}_1 - \overset{(2)}{v}_2 + \overset{(2)}{v}_3\right)}{\left(1 - \overset{(1)}{v}_1 + \overset{(1)}{v}_2 + \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(1)}{v}_1 - \overset{(1)}{v}_2 + \overset{(1)}{v}_3\right) \left(1 - \overset{(2)}{v}_1 - \overset{(2)}{v}_2 - \overset{(2)}{v}_3\right) \left(1 + \overset{(2)}{v}_1 + \overset{(2)}{v}_2 - \overset{(2)}{v}_3\right)}.
 \end{aligned}$$

Теперь остаётся только прологарифмировать каждое из этих уравнений и воспользоваться формулами (13). Результатом такой операции как раз и являются соотношения (16).

Согласно (16), быстроты α_i образуют линейное векторное пространство. Отсюда возникает проблема введения нормы $|\alpha_i|$ в таком векторном пространстве.

3 Введение нормы в векторном пространстве быстрот

Чтобы найти $|\alpha_i|$ в виде явной функции от α_i , обратим внимание на соотношение

$$\overset{(1 \rightarrow 2)}{\alpha}_i = - \overset{(2 \rightarrow 1)}{\alpha}_i, \quad (17)$$

которое означает, что компоненты быстроты второй частицы по отношению к первой отличаются знаком от компонент быстроты первой частицы по отношению ко второй. Отмеченный факт является тривиальным следствием абелевой структуры группы релятивистской симметрии (10) и подталкивает к тому, чтобы написать $|\alpha_i| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$. Однако такое введение нормы в пространстве быстрот α_i было бы некорректным с физической точки зрения, поскольку оно не приводит к сколько-нибудь разумному соотношению между компонентами наблюдаемой 3-скорости и её величиной. Поэтому мы поступим следующим образом.

Сначала, исходя из физических соображений, выразим квадрат величины наблюдаемой 3-скорости V^2 в виде явной функции от компонент координатной 3-скорости v_i . После чего, с помощью соотношений (12) представим V^2 как явную функцию от компонент быстроты α_i . Тем самым мы фактически завершим процедуру введения нормы, поскольку величина V наблюдаемой 3-скорости и величина $|\alpha_i|$ быстроты по определению связаны друг с другом соотношением

$$V^2 = \tanh^2 |\alpha_i|. \quad (18)$$

Итак, прежде всего найдем явный вид функции $V^2 = V^2(v_i)$. В соответствии с ее физическим смыслом эта функция, равно как и $V(v_i)$, должна удовлетворять условию

$$V^2(\overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_i) = V^2(\overset{(2 \rightarrow 1)}{v}_i), \quad (19)$$

где $\overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_i$ — компоненты координатной 3-скорости второй частицы по отношению к первой, а $\overset{(2 \rightarrow 1)}{v}_i$ — компоненты координатной 3-скорости первой частицы по отношению ко

второй. Рассматривая v_i в качестве групповых параметров, альтернативных параметров α_i , мы видим, что $\overset{(1 \rightarrow 2)}{v_i}$ и $\overset{(2 \rightarrow 1)}{v_i}$ представляют взаимно обратные элементы g и g^{-1} группы (10). При этом, в терминах α_i , переход $g \rightarrow g^{-1}$ соответствует (см. (17)) преобразованию $\alpha_i \rightarrow \tilde{\alpha}_i = -\alpha_i$, тогда как, в терминах v_i , тот же переход соответствует (в силу (12) и (13)) преобразованию

$$\begin{aligned} v_1 \rightarrow \tilde{v}_1 &= -\frac{v_1(1 - v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + 2v_2v_3}{1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3}, \\ v_2 \rightarrow \tilde{v}_2 &= -\frac{v_2(1 + v_1^2 - v_2^2 + v_3^2) + 2v_1v_3}{1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3}, \\ v_3 \rightarrow \tilde{v}_3 &= -\frac{v_3(1 + v_1^2 + v_2^2 - v_3^2) + 2v_1v_2}{1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3}. \end{aligned} \quad (20)$$

Что касается обратных преобразований, то $-\alpha_i = \tilde{\alpha}_i \rightarrow \alpha_i$ и

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 \rightarrow v_1 &= -\frac{\tilde{v}_1(1 - \tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2 + \tilde{v}_3^2) + 2\tilde{v}_2\tilde{v}_3}{1 - \tilde{v}_1^2 - \tilde{v}_2^2 - \tilde{v}_3^2 - 2\tilde{v}_1\tilde{v}_2\tilde{v}_3}, \\ \tilde{v}_2 \rightarrow v_2 &= -\frac{\tilde{v}_2(1 + \tilde{v}_1^2 - \tilde{v}_2^2 + \tilde{v}_3^2) + 2\tilde{v}_1\tilde{v}_3}{1 - \tilde{v}_1^2 - \tilde{v}_2^2 - \tilde{v}_3^2 - 2\tilde{v}_1\tilde{v}_2\tilde{v}_3}, \\ \tilde{v}_3 \rightarrow v_3 &= -\frac{\tilde{v}_3(1 + \tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2 - \tilde{v}_3^2) + 2\tilde{v}_1\tilde{v}_2}{1 - \tilde{v}_1^2 - \tilde{v}_2^2 - \tilde{v}_3^2 - 2\tilde{v}_1\tilde{v}_2\tilde{v}_3}. \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь уравнение (19), т. е. первое и наиболее важное условие на искомую функцию V^2 , мы можем переписать в виде

$$V^2(v_i) = V^2(\tilde{v}_i). \quad (22)$$

Таким образом, функция $V^2(v_i)$ должна являться инвариантом преобразований (20) и (21).

Поскольку при рассмотрении движения частицы мы имеем дело с причинно связанными событиями, физически допустимая область значений квадрата наблюдаемой 3-скорости ограничена условием $0 \leq V^2(v_i) \leq 1$, где, в соответствии с определением координатной 3-скорости v_i ,

$$V^2(0, 0, 0) = 0. \quad (23)$$

Что касается физически допустимой области значений координатных 3-скоростей v_i , то эта область, как мы выясним в следующем разделе, ограничена поверхностью правильного тетраэдра, показанного на Рис. 6. На самой поверхности тетраэдра координатные 3-скорости, представляющие собой все возможные координатные 3-скорости фотона, удовлетворяют соотношению

$$(ds_{B-M}/dx_0)^4 = (1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 - v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 - v_2 + v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3) = 0. \quad (24)$$

Поскольку, с другой стороны, $V^2 = 1$ при любом направлении наблюдаемой 3-скорости фотона, то, исходя из (24), мы заключаем, что искомая функция $V^2(v_i)$ должна удовлетворять условию

$$V^2|_{(ds_{B-M}/dx_0=0)} = 1. \quad (25)$$

Помимо сформулированных условий (22), (23) и (25), обратим внимание ещё на тот факт, что в двумерном случае, когда (например) $dx_0 \neq 0$, $dx_1 \neq 0$, $dx_2 = dx_3 = 0$, пространство Бервальда-Моора совпадает с пространством Минковского, т. е. $ds_{B-M}^2 = dx_0^2 - dx_1^2$. Соответственно, в этом случае координатная скорость v_1

совпадает с наблюдаемой скоростью V . В результате мы приходим к выводу, что для искомой функции $V^2(v_i)$ должны также выполняться соотношения

$$V^2(v_1, 0, 0) = v_1^2, \quad V^2(0, v_2, 0) = v_2^2, \quad V^2(0, 0, v_3) = v_3^2. \quad (26)$$

Чтобы найти функцию $V^2(v_i)$, удовлетворяющую условиям (22), (23), (25) и (26), мы сначала попытаемся построить некую вспомогательную функцию $f(v_i)$, которую преобразования (20) и (21) оставляли бы инвариантной. Для этого рассмотрим две характерные функции, уже встречавшиеся ранее в соотношениях (20), (24), а именно

$$f_1(v_i) = 1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3, \quad (27)$$

$$f_2(v_i) = (1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 - v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 - v_2 + v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3). \quad (28)$$

Используя подстановку (20), можно убедиться, что $f_1(\tilde{v}_i) = f_2^2(v_i)/f_1^3(v_i)$. Аналогично можно проверить, что $f_2(\tilde{v}_i) = f_2^3(v_i)/f_1^4(v_i)$. Поэтому, определив функцию $f(v_i)$ посредством соотношения $f(v_i) = f_2(v_i)/f_1(v_i)$, мы приходим к равенству $f(\tilde{v}_i) = f(v_i)$, которое означает, что введенная данным образом функция $f(v_i)$ действительно является инвариантом преобразований (20) и (21). Отсюда ясно, что искомая функция $V^2(v_i)$, удовлетворяющая условиям (22), (23), (25) и (26), задается соотношением $V^2(v_i) = 1 - f(v_i) = 1 - f_2(v_i)/f_1(v_i)$ и, с учетом (27) и (28), оказывается следующей

$$V^2(v_i) = 1 - \frac{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 - v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 - v_2 + v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}{1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3}. \quad (29)$$

Представляя теперь (с помощью (29) и (12)) V^2 в виде явной функции от α_i и принимая во внимание соотношение (18), мы получаем окончательно

$$\tanh^2|\alpha_i| = \frac{\tanh^2\alpha_1(1 - \tanh^2\alpha_2) + \tanh^2\alpha_2(1 - \tanh^2\alpha_3) + \tanh^2\alpha_3(1 - \tanh^2\alpha_1)}{1 - \tanh^2\alpha_1 \tanh^2\alpha_2 \tanh^2\alpha_3}. \quad (30)$$

Согласно данной формуле, $|\alpha_i|$ является выпуклой функцией своих аргументов α_i , инвариантной относительно их отражения $\alpha_i \leftrightarrow -\alpha_i$. Вместе с тем, указанная функция не обладает свойством однородности первой степени по α_i . Строго говоря, это означает, что посредством (30) в векторном пространстве быстрот α_i введена не норма, а квазинорма $|\alpha_i|$.

Легко проверить, что, при малых значениях $|\alpha_i|$,

$$|\alpha_i| \approx \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}. \quad (31)$$

С увеличением $|\alpha_i|$, сферы (31) деформируются и, при $|\alpha_i| \rightarrow \infty$, трансформируются в правильный ромбический додекаэдр, изображённый на Рис. 1.

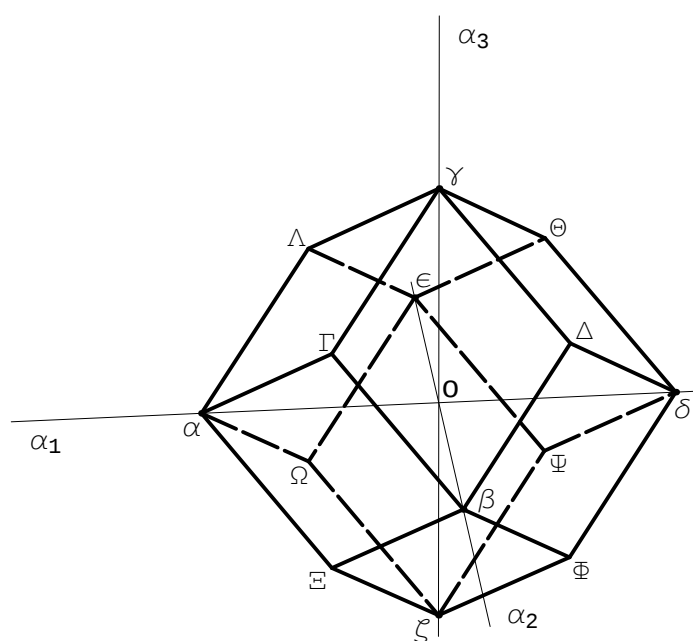


Рис. 1: Правильный ромбический додекаэдр в пространстве быстрот α_i как образ, при $\tanh|\alpha_i| = 1$, поверхности светового фронта.

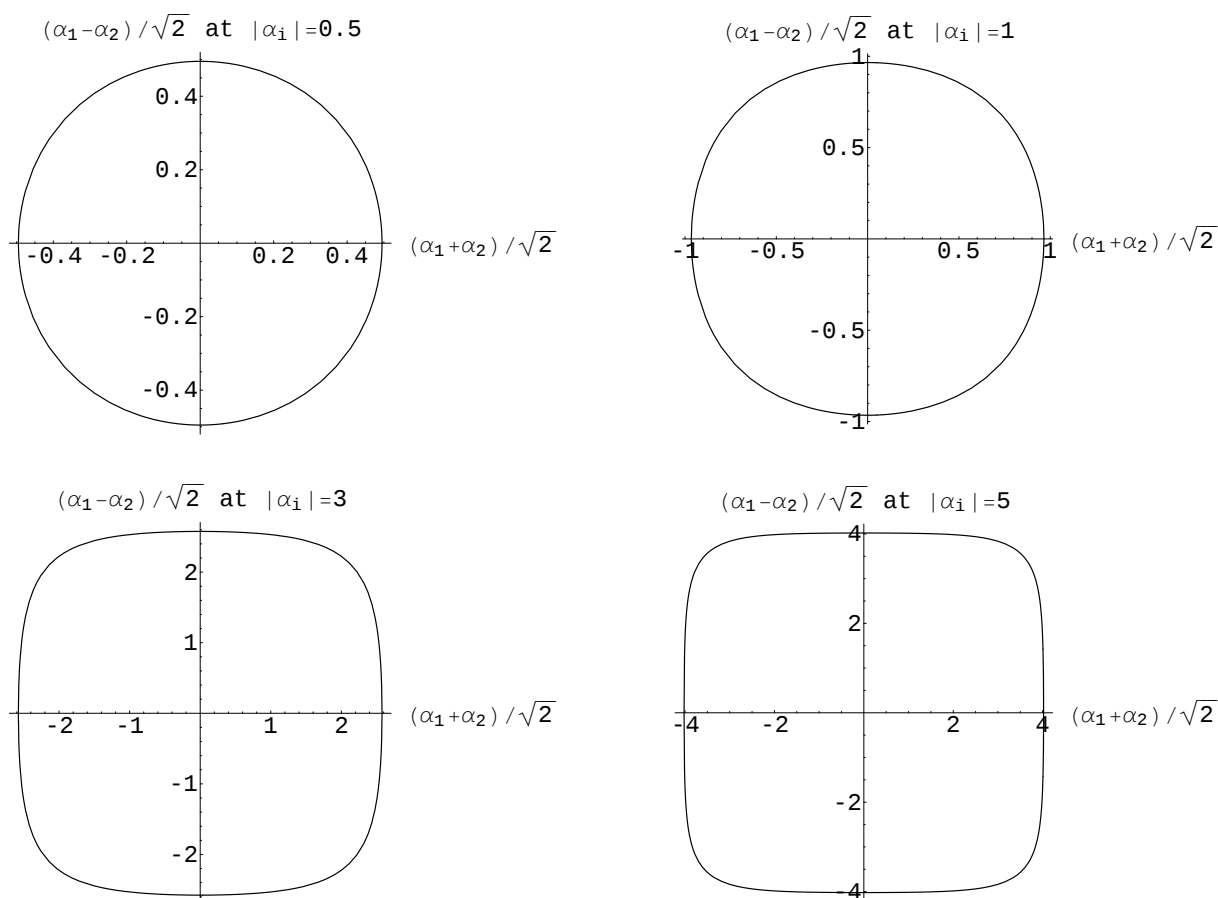


Рис. 2: Сечения поверхностей $|\alpha_i| = 0.5$, $|\alpha_i| = 1$, $|\alpha_i| = 3$ и $|\alpha_i| = 5$ плоскостью $\alpha_3 = 0$, демонстрирующие тот факт, что, при $|\alpha_i| \rightarrow \infty$, сечение поверхности $|\alpha_i| = \text{const}$ той же плоскостью стремится к сечению поверхности светового фронта, показанному на Рис. 3.

Чтобы проиллюстрировать процесс трансформации сфер в правильный ромбический додекаэдр, рассмотрим сначала поведение сечения поверхности $|\alpha_i| = \text{const}$ плоскостью $\alpha_3 = 0$. Уравнение, описывающее такое сечение имеет вид

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left\{ 2 \cosh |\alpha_i| - \cosh \sqrt{2} \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{2}} \right) + \left[\left(2 \cosh |\alpha_i| - \cosh \sqrt{2} \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\}, \quad (32)$$

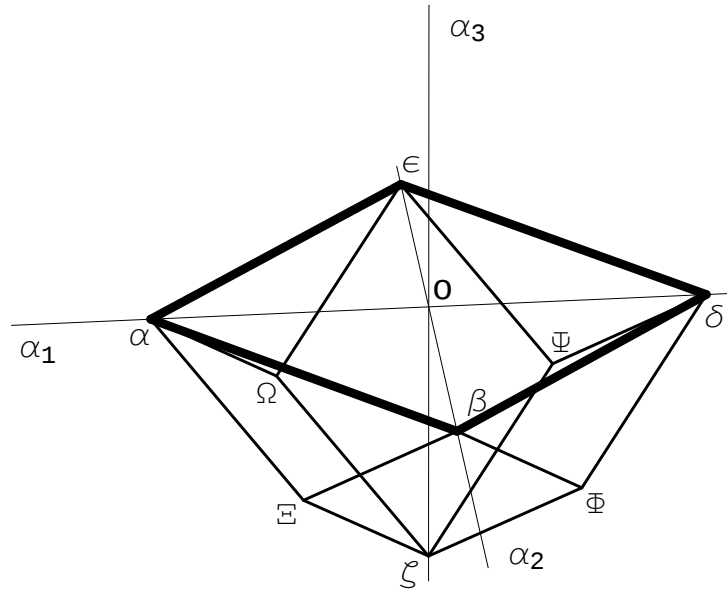


Рис. 3: Квадрат $\beta\alpha\epsilon\delta$ как сечение поверхности светового фронта (правильного ромбического додекаэдра) плоскостью $\alpha_3 = 0$.

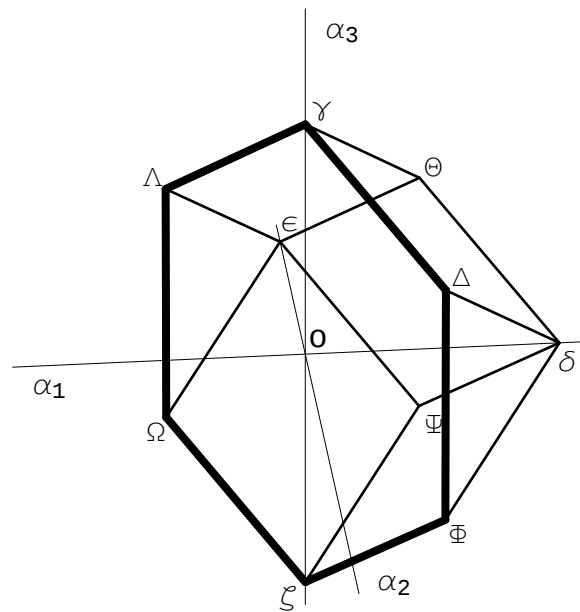


Рис. 4: Шестиугольник $\Lambda\gamma\Delta\Phi\zeta\Omega$ как сечение поверхности светового фронта (правильного ромбического додекаэдра) плоскостью $(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$.

причём пределы изменения аргумента функции (32) оказываются следующими

$$\left. \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{2}} \right|_{\alpha_1 + \alpha_2 = 0} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left\{ 2 \cosh |\alpha_i| - 1 + [(2 \cosh |\alpha_i| - 1)^2 - 1]^{1/2} \right\}.$$

Отметим кстати, что при выводе формулы (32) мы в исходном уравнении (30) положили $\alpha_3 = 0$ и, кроме того, ввели новые переменные $(\alpha_1 + \alpha_2)/\sqrt{2}$ и $(\alpha_1 - \alpha_2)/\sqrt{2}$ вместо α_1 и α_2 .

Графики функции (32) при $|\alpha_i| = 0.5$, $|\alpha_i| = 1$, $|\alpha_i| = 3$ и $|\alpha_i| = 5$ изображены на Рис. 2. Таким образом, мы видим, как с ростом $|\alpha_i|$, окружность постепенно переходит в квадрат $\beta\alpha\epsilon\delta$, показанный на Рис. 3.

Рассмотрим, наконец, поведение сечения поверхности $|\alpha_i| = \text{const}$ плоскостью $(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$. Уравнение, описывающее такое сечение имеет вид

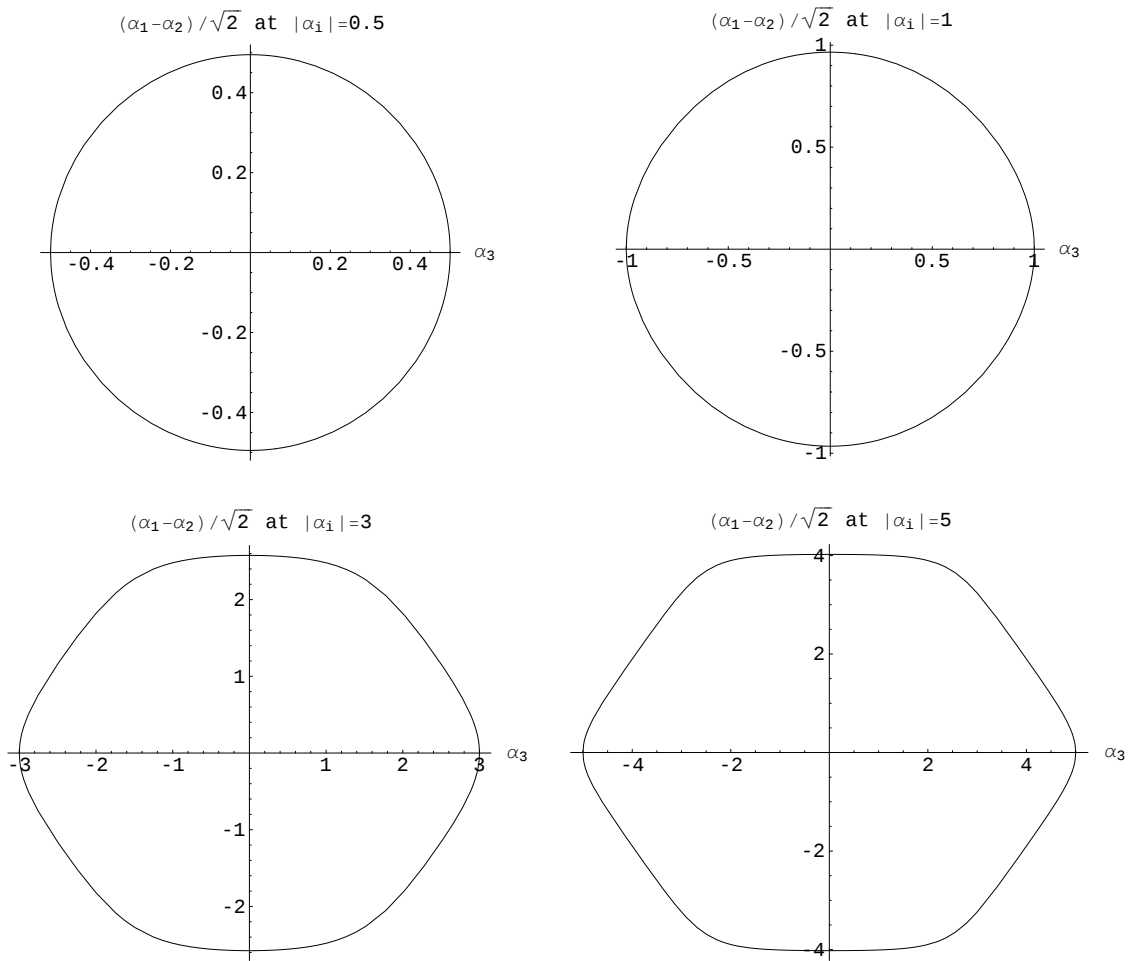


Рис. 5: Сечения поверхностей $|\alpha_i| = 0.5$, $|\alpha_i| = 1$, $|\alpha_i| = 3$ и $|\alpha_i| = 5$ плоскостью $(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, демонстрирующие тот факт, что при $|\alpha_i| \rightarrow \infty$ сечение поверхности $|\alpha_i| = \text{const}$ той же плоскостью стремится к сечению поверхности светового фронта, показанному на Рис. 4.

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left\{ (\cosh^2 2\alpha_3 + 2 \cosh 2|\alpha_i| + 1)^{1/2} - \cosh 2\alpha_3 + \right. \\ \left. + \left[\left((\cosh^2 2\alpha_3 + 2 \cosh 2|\alpha_i| + 1)^{1/2} - \cosh 2\alpha_3 \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\}, \quad (33)$$

причём аргумент функции (33) изменяется в пределах $\alpha_3|_{\alpha_1 - \alpha_2 = 0} = \mp |\alpha_i|$. Что касается вывода формулы (33), то сначала мы в исходном уравнении (30) сделали замену переменных α_1 и α_2 на $(\alpha_1 + \alpha_2)/\sqrt{2}$ и $(\alpha_1 - \alpha_2)/\sqrt{2}$. После чего, положили $(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$.

Графики функции (33) при $|\alpha_i| = 0.5$, $|\alpha_i| = 1$, $|\alpha_i| = 3$ и $|\alpha_i| = 5$ изображены на Рис. 5. Из этих графиков мы видим, как с ростом $|\alpha_i|$ окружность постепенно переходит в шестиугольник $\Lambda\gamma\Delta\Phi\zeta\Omega$, показанный на Рис. 4.

4 Соотношение между компонентами наблюдаемой 3-скорости и её величиной в финслеровом пространстве событий с полностью нарушенной 3D изотропией

Хорошо известно, что в пространстве Минковского область причинно связанных событий, соответствующих движению классической частицы, ограничена поверхностью светового конуса. При этом, поскольку уравнение светового конуса в ортогональных галилеевых координатах имеет простейший, канонический вид, применение эйнштейновской процедуры обмена световыми сигналами приводит к тривиальному результату, согласно которому величина наблюдаемой 3-скорости выражается через её компоненты посредством формулы $V^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$. Кроме того, поскольку в данном случае компоненты v_i наблюдаемой 3-скорости совпадают с соответствующими компонентами координатной 3-скорости, область физически допустимых значений координатной 3-скорости классической частицы ограничена условием $0 \leq V^2 \leq 1$, т. е. – сферой единичного радиуса. Отметим, что такая же ситуация имеет место и в случае частично анизотропного финслерова пространства (1). Однако, при переходе к полностью анизотропному финслерову пространству (8), область физически допустимых значений координатной 3-скорости v_i существенно изменяется.

Чтобы получить ограничения на допустимые значения v_i , мы в работах [19] исходили из того, что движению частицы соответствуют такие события в пространстве (8), для которых, помимо условия $dx_0 > 0$, выполняется также система неравенств

$$\begin{aligned} dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3 &\geq 0, \\ dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3 &\geq 0, \\ dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3 &\geq 0, \\ dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3 &\geq 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Отсюда были получены следующие ограничения на v_i :

$$1 - v_1 - v_2 - v_3 \geq 0, \quad (35)$$

$$1 - v_1 + v_2 + v_3 \geq 0, \quad (36)$$

$$1 + v_1 - v_2 + v_3 \geq 0, \quad (37)$$

$$1 + v_1 + v_2 - v_3 \geq 0. \quad (38)$$

Согласно (35)–(38), область допустимых значений v_i ограничена поверхностью правильного тетраэдра, воспроизведенного на Рис. 6. Ниже мы убедимся, что для любой координатной 3-скорости v_i , принадлежащей этой области, квадрат величины соответствующей наблюдаемой 3-скорости (29) не превосходит значения равного единице, причём $V^2 = 1$ только на поверхности тетраэдра. Именно данный факт позволяет утверждать, что область, ограниченная поверхностью тетраэдра, служит областью физически допустимых значений координатной 3-скорости классической частицы. В дополнение к сказанному следует отметить, что условия (35)–(38), определяющие эту область, являются (при $dx_0 > 0$) необходимыми и достаточными условиями выполнения соотношений (34). Поэтому мы приходим к выводу, что, с физической точки зрения, соотношения (34) выделяют в пространстве событий (8) область причинно связанных событий, в пределах которой лежит мировая линия любой классической частицы. Что касается границы этой области, то она определяется уравнениями, уже включенными в систему соотношений (34) и для нее (по аналогии с пространством Минковского) естественно использовать название световой конус.

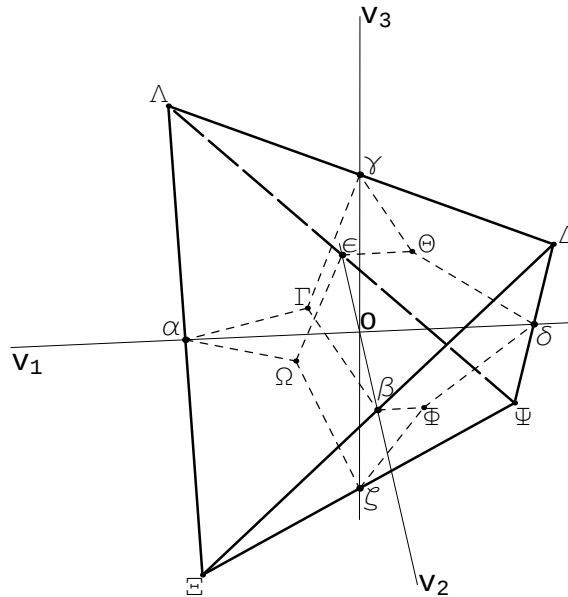


Рис. 6: Поверхность правильного тетраэдра в пространстве координатных скоростей v_i как образ поверхности светового фронта.

Легко показать, что, пересекая световой конус, мы попадаем в область причинно несвязанных событий. Для этого, как ясно из предыдущего анализа, достаточно убедиться, что, пересекая в пространстве координатных 3-скоростей v_i поверхность правильного тетраэдра, мы попадаем область сверхсветовых скоростей, т. е. получаем для квадрата величины наблюдаемой 3-скорости $V^2(v_i)$ значения, превышающие единицу.

Интересующее нас поведение функции $V^2(v_i)$ можно выяснить, рассмотрев ее поведение на множестве всех прямых линий, проходящих через начало o декартовой системы координат v_i и, следовательно, пересекающих поверхность правильного тетраэдра.

В качестве типичного примера рассмотрим поведение функции $V^2(v_i)$ на прямой линии, пересекающей поверхность тетраэдра точках Ψ и Γ (см. Рис. 6). Согласно (36)–(38), точка Ψ (вершина тетраэдра) принадлежит граням $\Psi\Xi\Lambda$, $\Psi\Delta\Xi$ и $\Psi\Lambda\Delta$ и имеет координаты $v_1 = -1$, $v_2 = -1$, $v_3 = -1$, тогда как, согласно (35), точка Γ имеет координаты $v_1 = 1/3$, $v_2 = 1/3$, $v_3 = 1/3$ и расположена в центре грани $\Delta\Xi\Lambda$. Следовательно, уравнения, описывающие выбранную прямую, имеют вид

$$v_1 = t, \quad v_2 = t, \quad v_3 = t, \quad (39)$$

где t — параметр, характеризующий положение точек на данной линии. В частности, точке Ψ соответствует значение $t = -1$, точке o — значение $t = 0$, а точке Γ — значение $t = 1/3$. Подставляя (39) в (29), мы получаем V^2 в виде следующей явной функции от текущего значения параметра t

$$V^2(t) = 3t^2/(1 - 2t).$$

Теперь становится очевидным, что:

- i) при $t = 0$, т. е. в центре o тетраэдра, $V^2(0) = 0$;
- ii) с ростом t , т. е. по мере нашего приближения к поверхности тетраэдра, $V^2(t)$ монотонно растёт и при $t = 1/3$, т. е. в точке Γ на поверхности тетраэдра, $V^2(t)$ достигает значения $V^2(1/3) = 1$;

- iii) при дальнейшем росте t , т. е. по мере нашего удаления от тетраэдра, $V^2(t)$ продолжает монотонно расти, причем $\lim_{t \rightarrow 1/2} V^2(t) = \infty$;
- iv) при $t > 1/2$ мы попадаем в область, где квадрат величины наблюдаемой 3-скорости принимает отрицательные значения, т. е. $V^2(t) < 0$;
- v) с уменьшением t (от значения $t = 0$), т. е. по мере нашего удаления от точки o (в которой $V^2 = 0$) и, соответственно, приближения к поверхности тетраэдра, $V^2(t)$ снова монотонно растёт и при $t = -1$, т. е. в точке Ψ на поверхности тетраэдра, $V^2(t)$ достигает прежнего значения $V^2(-1) = V^2(1/3) = 1$;
- vi) при дальнейшем уменьшении t , т. е. по мере нашего удаления от тетраэдра, $V^2(t)$ продолжает монотонно расти, причем $V^2(t) \approx -3t/2$ при $t \ll -1$.

Предложенным способом можно исследовать поведение функции $V^2(v_i)$ во всем пространстве координатных скоростей v_i и, что особенно важно для квантовой теории, точно определить те области в пространстве v_i , в которых $V^2 > 1$ или $V^2 < 0$. Обе эти области соответствуют распространению только виртуальных частиц, причем первая из них соответствует причинно несвязанным (тахинным) событиям в пространстве (8). В рамках настоящей работы мы, однако, ограничимся анализом, проведенным выше. Дело в том, что поведение функции $V^2(v_i)$ на прямой линии (39) хорошо иллюстрирует как специфические особенности её поведения во всей внешней (по отношению к тетраэдру) области, так и тот факт, что $0 \leq V^2 \leq 1$ во внутренней области тетраэдра, т. е. как раз в той области значений v_i , которая интересует нас в данной работе.

Обратимся теперь снова к Рис. 6. Поскольку поверхность правильного тетраэдра является образом поверхности светового фронта в пространстве v_i , исходные и соответствующие им отражённые световые лучи разделяют тетраэдр на шесть пар взаимно сопряжённых секторов:

$$\begin{aligned}
 \Gamma\gamma\Delta\beta o &\longleftrightarrow \Psi\zeta\Omega\epsilon o \\
 \Gamma\beta\Xi\alpha o &\longleftrightarrow \Psi\epsilon\Theta\delta o \\
 \Gamma\alpha\Lambda\gamma o &\longleftrightarrow \Psi\delta\Phi\zeta o \\
 \Omega\epsilon\Lambda\alpha o &\longleftrightarrow \Delta\beta\Phi\delta o \\
 \Omega\alpha\Xi\zeta o &\longleftrightarrow \Delta\delta\Theta\gamma o \\
 \Theta\gamma\Lambda\epsilon o &\longleftrightarrow \Xi\zeta\Phi\beta o.
 \end{aligned}$$

Поэтому эйнштейновская процедура обмена световыми сигналами позволяет получить (см. [19]) лишь соответствующие секториальные компоненты наблюдаемой 3-скорости

$$\begin{aligned}
 v_{\Gamma\gamma\Delta\beta o} &= (v_3 + v_2)/(1 - v_1), & v_{\Psi\zeta\Omega\epsilon o} &= -(v_3 + v_2)/(1 - v_1); \\
 v_{\Gamma\beta\Xi\alpha o} &= (v_1 + v_2)/(1 - v_3), & v_{\Psi\epsilon\Theta\delta o} &= -(v_1 + v_2)/(1 - v_3); \\
 v_{\Gamma\alpha\Lambda\gamma o} &= (v_1 + v_3)/(1 - v_2), & v_{\Psi\delta\Phi\zeta o} &= -(v_1 + v_3)/(1 - v_2); \\
 v_{\Omega\epsilon\Lambda\alpha o} &= (v_1 - v_2)/(1 + v_3), & v_{\Delta\beta\Phi\delta o} &= -(v_1 - v_2)/(1 + v_3); \\
 v_{\Omega\alpha\Xi\zeta o} &= (v_1 - v_3)/(1 + v_2), & v_{\Delta\delta\Theta\gamma o} &= -(v_1 - v_3)/(1 + v_2); \\
 v_{\Theta\gamma\Lambda\epsilon o} &= (v_3 - v_2)/(1 + v_1), & v_{\Xi\zeta\Phi\beta o} &= -(v_3 - v_2)/(1 + v_1),
 \end{aligned}$$

где v_i — компоненты координатной 3-скорости. Что касается соотношения между величиной наблюдаемой 3-скорости и её секториальными компонентами, то чтобы его вывести, мы поступим следующим образом.

Сначала, используя (12) и очевидным образом упрощая обозначения, представим двенадцать (фактически — шесть) секториальных компонент наблюдаемой 3-скорости

в виде явных функций от α_i :

$$\begin{aligned} v_{\Gamma\gamma\Delta\beta o} &\equiv v_{3+2} = \tanh(\alpha_3 + \alpha_2), \\ v_{\Gamma\beta\Xi\alpha o} &\equiv v_{1+2} = \tanh(\alpha_1 + \alpha_2), \\ v_{\Gamma\alpha\Lambda\gamma o} &\equiv v_{1+3} = \tanh(\alpha_1 + \alpha_3), \\ v_{\Omega\epsilon\Lambda\alpha o} &\equiv v_{1-2} = \tanh(\alpha_1 - \alpha_2), \\ v_{\Omega\alpha\Xi\zeta o} &\equiv v_{1-3} = \tanh(\alpha_1 - \alpha_3), \\ v_{\Theta\gamma\Lambda\epsilon o} &\equiv v_{3-2} = \tanh(\alpha_3 - \alpha_2). \end{aligned} \quad (40)$$

Кроме того, целесообразно представить (30) в виде

$$\tanh^2|\alpha_i| = 1 - 8 [2 + \cosh 2(\alpha_1 + \alpha_2) + \cosh 2(\alpha_1 - \alpha_2) + \cosh 2(\alpha_3 + \alpha_2) + \cosh 2(\alpha_3 - \alpha_2) + \cosh 2(\alpha_1 + \alpha_3) + \cosh 2(\alpha_1 - \alpha_3)]^{-1}. \quad (41)$$

Принимая во внимание (18) и используя (41) и (40), мы в результате получаем

$$V^2 = 1 - 8 \left[2 + \frac{1+v_{1+2}^2}{1-v_{1+2}^2} + \frac{1+v_{1+3}^2}{1-v_{1+3}^2} + \frac{1+v_{3+2}^2}{1-v_{3+2}^2} + \frac{1+v_{1-2}^2}{1-v_{1-2}^2} + \frac{1+v_{1-3}^2}{1-v_{1-3}^2} + \frac{1+v_{3-2}^2}{1-v_{3-2}^2} \right]^{-1}. \quad (42)$$

Согласно (42), квадрат наблюдаемой 3-скорости V^2 зависит от квадратов её шести наблюдаемых секториальных компонент (40) симметричным образом. Заметим теперь, что эти шесть компонент не являются независимыми, а связаны тремя соотношениями. Легко проверить, что, например,

$$v_{1-2} = \frac{v_{1+3} - v_{3+2}}{1 - v_{1+3}v_{3+2}}, \quad v_{1-3} = \frac{v_{1+2} - v_{3+2}}{1 - v_{1+2}v_{3+2}}, \quad v_{3-2} = \frac{v_{1+3} - v_{1+2}}{1 - v_{1+3}v_{1+2}}. \quad (43)$$

Поэтому любые три секториальные компоненты наблюдаемой 3-скорости, взятые из набора (40), играют роль одного из возможных неортогональных базисов. Например, выбрав в качестве конкретного базиса наблюдаемые секториальные компоненты v_{1+2} , v_{1+3} и v_{3+2} , мы с помощью (42) и (43) получаем для квадрата наблюдаемой 3-скорости следующее выражение

$$V^2 = 1 - \frac{(1 + v_{1+2}v_{1+3} + v_{1+2}v_{3+2} + v_{1+3}v_{3+2})^2 - (v_{1+2} + v_{1+3} + v_{3+2} + v_{1+2}v_{1+3}v_{3+2})^2}{1 - (v_{1+2} + v_{1+3} + v_{3+2} - v_{1+2}v_{1+3}v_{3+2})^2/4}. \quad (44)$$

Если, в частности, $v_{1+3} \neq 0$, а $v_{1+2} = v_{3+2} = 0$, то отсюда следует, что

$$V^2 = \frac{3v_{1+3}^2}{4 - v_{1+3}^2}. \quad (45)$$

То, что квадрат наблюдаемой 3-скорости V^2 не совпадает (в силу (45)) с квадратом её единственной отличной от нуля компоненты v_{1+3} , ещё раз свидетельствует, что данный базис является неортогональным. Перейдя, например, к другому неортогональному базису v_{1-2} , v_{1+3} , v_{3-2} с помощью (43), мы получаем $v_{1-2} = v_{1+3}$, $v_{1+3} = v_{1+3}$, $v_{3-2} = v_{1+3}$. В этом случае $v_{1+2} = v_{1-3} = v_{3+2} = 0$, и, благодаря (42), мы снова приходим к (45). Наконец отметим, что, так как v_{1+3} есть наблюдаемая секториальная скорость, то максимальным значением её квадрата является $v_{1+3}^2 = 1$. При этом, как и должно быть, формула (45) даёт $V^2 = 1$.

Чтобы окончательно прояснить ситуацию с наблюдаемыми 3-скоростями в финслеровом пространстве (8), целесообразно рассмотреть 3-скорости в нерелятивистском пределе, когда

$$|v_{1+2}| \ll 1, \quad |v_{1+3}| \ll 1, \quad |v_{3+2}| \ll 1. \quad (46)$$

В этом случае (44) принимает вид

$$V^2 = [3(v_{1+2}^2 + v_{1+3}^2 + v_{3+2}^2)/2 - v_{1+2}v_{1+3} - v_{1+2}v_{3+2} - v_{1+3}v_{3+2}]/2. \quad (47)$$

Квадратичная форма (47), по самому её смыслу, является положительно определённой и, следовательно, может быть приведена к сумме квадратов. Для этого, в силу (46), достаточно использовать первые три соотношения (40) и соотношения (12). В результате мы получаем

$$v_{1+2} = v_1 + v_2, \quad v_{1+3} = v_1 + v_3, \quad v_{3+2} = v_3 + v_2. \quad (48)$$

Соответственно, обратные формулы, посредством которых в нерелятивистском пределе компоненты v_i координатной 3-скорости выражаются через секториальные компоненты v_{1+2} , v_{1+3} , v_{3+2} наблюдаемой 3-скорости, оказываются следующими

$$v_1 = (v_{1+3} + v_{1+2} - v_{3+2})/2, \quad v_2 = (v_{1+2} + v_{3+2} - v_{1+3})/2, \quad v_3 = (v_{1+3} + v_{3+2} - v_{1+2})/2.$$

Подставляя (48) в (47), мы видим, что в нерелятивистском пределе квадрат наблюдаемой 3-скорости равен сумме квадратов компонент координатной 3-скорости, т.е. $V^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$.

5 Заключение

Уже в первых работах [19], посвященных исследованию полностью анизотропного финслерова пространства событий (8), мы столкнулись с необычной ситуацией, когда эйнштейновская процедура обмена световыми сигналами не позволила определить величину наблюдаемой 3-скорости, а лишь позволила определить ее компоненты. В результате возникла необходимость построения алгоритма, с помощью которого можно было бы определить величину наблюдаемой 3-скорости и тем самым формализовать условие, выделяющее в пространстве (8) область причинно связанных событий. Такие события характеризует то, что соответствующая им величина наблюдаемой 3-скорости не превосходит скорости света.

Хотя построение вышеупомянутого алгоритма, реализованное в настоящей работе, явилось отчасти эвристическим (имеется в виду идентификация функций (27) и (28) как функций, обладающих специальными трансформационными свойствами), тем не менее, всесторонний анализ окончательной формулы (29) показал, что она правильно определяет величину наблюдаемой 3-скорости. К тому же, согласно (42), формула (29) привела к вполне разумному соотношению между величиной наблюдаемой 3-скорости и ее компонентами. Итак, в дополнение к группе изометрий (10), мы теперь располагаем еще одним важным инструментом для исследования поведения фундаментальных полей в полностью анизотропном финслеровом пространстве (8). Детали такого исследования, равно как и явный вид фундаментальных полевых уравнений, обобщённых в соответствии с требованием инвариантности по отношению к группе (10), будут опубликованы в другой работе. Что касается настоящей работы, то, во избежание возможных недоразумений, целесообразно отметить следующее.

Общеизвестно, что в обычной релятивистской квантовой теории поля 4-импульс $(p_0, \mathbf{p})$, канонически сопряжённый к ортогональным галилеевым координатам $(x_0, \mathbf{x})$, является более фундаментальной величиной чем 3-скорость $\mathbf{v}$. Вместе с тем, для свободного одночастичного состояния с определенным 4-импульсом $|p_0, \mathbf{p}\rangle$, 3-скорость, как квантовая наблюдаемая, имеет определенное значение $\mathbf{v} = \mathbf{p}/p_0$, которое совпадает с классической наблюдаемой 3-скоростью. Однако, в случае нарушения лоренцевой симметрии, связь импульса со скоростью может оказаться в высшей степени нетривиальной,

что впервые отметили Don Colladay и Alan Kostelecký в их оригинальной статье [2], посвящённой расширению Стандартной Модели. Обратим внимание на то, что похожий эффект имеет место и в рамках релятивистски инвариантного финслерова подхода к проблеме нарушения лоренцевой симметрии. Например, в случае плоского частично анизотропного финслерова пространства (1), для свободного одночастичного состояния с определенным 4-импульсом $|p_0, \mathbf{p} \rangle$, 3-скорость, как квантовая наблюдаемая, имеет определенное значение

$$\mathbf{v} = \frac{(1+r)(p_0 - \mathbf{p}\nu)\mathbf{p} - r(p_0^2 - \mathbf{p}^2)\nu}{(1+r)(p_0 - \mathbf{p}\nu)p_0 - r(p_0^2 - \mathbf{p}^2)},$$

которое совпадает с классической наблюдаемой 3-скоростью (см. оригинальную статью [4]).

В случае плоского полностью анизотропного финслерова пространства (8), само понятие скорости включает дополнительные тонкости, связанные с тем фактом, что 4-импульс (p_0, p_i) является канонически сопряженным к неортогональным галилеевым координатам (x_0, x_i) , использованным при определении метрики (8). В результате, для свободного одночастичного состояния с определенным 4-импульсом $|p_0, p_i \rangle$, 3-скорость v_i , как квантовая наблюдаемая, имеет определенное значение, которое является решением системы алгебраических уравнений

$$a_{qi}v_i = b_q,$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{12} = (p_0 + p_3)(1 + r_3) - (p_1 + p_2)(r_1 + r_2), \\ a_{13} &= b_1 = (p_1 + p_2)(1 + r_3) - (p_0 + p_3)(r_2 + r_3), \\ a_{21} &= -b_2 = (p_0 - p_1)(r_2 - r_3) - (p_2 - p_3)(1 - r_1), \\ a_{22} &= -a_{23} = (p_0 - p_1)(1 - r_1) - (p_2 - p_3)(r_2 - r_3), \\ a_{31} &= b_3 = (p_2 + p_3)(1 + r_1) - (p_0 + p_1)(r_2 + r_3), \\ a_{32} &= a_{33} = (p_0 + p_1)(1 + r_1) - (p_2 + p_3)(r_2 + r_3). \end{aligned}$$

Таким образом, в данном случае, определенное значение v_i , как квантовой наблюдаемой, совпадает с классической *координатной* 3-скоростью (см. [32]). Это подразумевает, что для определения величины и компонент *наблюдаемой* 3-скорости, которая соответствовала бы свободному одночастичному состоянию с определенным 4-импульсом $|p_0, p_i \rangle$, необходимо ещё воспользоваться соотношениями (29) и (40).

Тот факт, что в любом из двух типов плоских анизотропных финслеровых пространств существуют одночастичные состояния с определенным 4-импульсом, причем из этого импульса принципиально нельзя выделить его кинетическую часть, говорит о том, что взаимодействие, вызванное анизотропией однородной среды, заполняющей пространство (1) или (8), является несепарабельным, а вышеупомянутые одночастичные состояния являются коллективными возбуждениями (квазичастицами), существующими в такой среде.

В качестве наиболее вероятного кандидата на роль полностью анизотропной среды, порождающей анизотропию пространства (8), служит трёхглюонный конденсат. Возможность образования такого конденсата следует из работы [33], в которой рассмотрена спонтанная генерация эффективного трёхглюонного калибровочно инвариантного взаимодействия. Кстати отметим, что для нерелятивистских квазичастиц в полностью анизотропной кристаллической среде тензор инертной массы определяется формулой (9).

Что касается аксиально симметричной анизотропной среды, порождающей анизотропию пространства (1), то моделью такой кристаллической среды является аксиально симметричный фермион-антифермионный конденсат. Он возникает в качестве вакуумного решения в финслеровой фермионной теории, Лагранжиан которой (7) построен, исходя из требования инвариантности по отношению к группе $DISIM_b(2)$. После соответствующего сдвига и разложения, теория (7) становится вполне определенной и в её рамках может быть рассмотрена проблема устойчивости конденсата. Решение этой проблемы важно уже потому, что существующие в настоящее время жёсткие ограничения на величину пространственной анизотропии могут служить указанием на возможность испарения аксиально симметричного фермион-антифермионного конденсата как источника пространственной анизотропии. Если предположение об испарении конденсата окажется верным, то тогда это могло бы служить ответом на вопрос, поставленный в работе [16], а именно, почему в настоящее время анизотропия пространства столь мала.

Строго говоря, проблема устойчивости конденсата должна решаться на основе такого расширения теории (7), которое включало бы взаимодействие поля анизотропии с другими полями и, в частности, с гравитационным полем. Хотя в рамках финслерова подхода к проблеме нарушения лоренцевой симметрии возможность соответствующего расширения теории (7) в принципе существует, реализация подобной программы является предметом дальнейших исследований. Тем не менее отметим в заключение, что одна из первых попыток описать взаимодействие анизотропии и гравитации в рамках финслеровой модели искривленного пространства-времени была предпринята в работе [8]. Нельзя не отметить также работу [11], в которой Alan Kostelecký показал, что явное нарушение лоренцевой симметрии в теории гравитации не может быть описано геометрией Римана (или даже Римана-Картана) и предложил использовать для этой цели финслерову геометрию.

* * *

Автор признателен Борису Арбузову за идеи, связанные с возможностью образования трёхглюонного конденсата. Очень полезной для автора была также дискуссия с Гари Гиббонсом, посвящённая статусу существующих экспериментальных ограничений на величину анизотропии пространства и возможностям новых экспериментов в этой области. Автор считает своим долгом выразить благодарность Дмитрию Павлову и Григорию Гарасько за вдохновляющие дискуссии по проблемам финслеровой геометрии.

Отдельно автор хотел бы поблагодарить Хуберта Гённера за многолетнее плодотворное сотрудничество, а также рецензентов, особенно Алана Костелеского, за конструктивные замечания, позволившие заметно улучшить представленную работу.

Данная работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант RFBR-07-01-91681-RA_a) и Некоммерческим фондом развития исследований по финслеровой геометрии.

Литература

- [1] Kostelecký A., Samuel S., Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory, *Phys. Rev. D*, 1989, V. 39, N 2, 683–685.
- [2] Colladay D., Kostelecký A., CPT violation and the standard model, *Phys. Rev. D*, 1997, V. 55, N 11, 6760–6774, arXiv:hep-ph/9703464; Lorentz-violating extension of the standard model, *Phys. Rev. D*, 1998, V. 58, N 116002, arXiv:hep-ph/9809521.
- [3] CPT and Lorentz symmetry III, Editor A. Kostelecký, Singapore, World Scientific, 2005; CPT and Lorentz symmetry IV, Editor A. Kostelecký, Singapore, World Scientific, 2008.

- [4] Bogoslovsky G. Yu., A special relativistic theory of the locally anisotropic space-time, *Nuovo Cim. B*, 1977, V. 40, N 1, 99–134; *Nuovo Cim. B*, 1978, V. 43, N 2, 377–378.
- [5] Tavakol R., van den Bergh N., Finsler spaces and the underlying geometry of space-time, *Phys. Lett. A*, 1985, V. 112, 23–25.
- [6] Tavakol R., van den Bergh N., Viability criteria for the theories of gravity and Finsler spaces, *Gen. Relativ. Gravit.*, 1986, V. 18, 849–859.
- [7] Богословский Г. Ю., Теория локально анизотропного пространства-времени, Москва, Изд-во МГУ, 1992.
- [8] Bogoslovsky G. Yu., Finsler model of space-time, *Phys. Part. Nucl.*, 1993, V. 24, 354–379; A viable model of locally anisotropic space-time and the Finslerian generalization of the relativity theory, *Fortschr. Phys.*, 1994, V. 42, N 2, 143–193.
- [9] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., Concerning the generalized Lorentz symmetry and the generalization of the Dirac equation, *Phys. Lett. A*, 2004, V. 323, 40–47, arXiv:hep-th/0402172.
- [10] Bogoslovsky G. Yu., Subgroups of the group of generalized Lorentz transformations and their geometric invariants, *SIGMA*, 2005, V. 1, 017, arXiv:math-ph/0511077; Lorentz symmetry violation without violation of relativistic symmetry, *Phys. Lett. A*, 2006, V. 350, 5–10, arXiv:hep-th/0511151.
- [11] Kostelecký A., Gravity, Lorentz violation, and the Standard Model, *Phys. Rev. D*, 2004, V. 69, N 105009, arXiv:hep-th/0312310.
- [12] Bailey Q. G., Kostelecký A., Signals for Lorentz violation in post-Newtonian gravity, *Phys. Rev. D*, 2006, V. 74, N 045001, arXiv:gr-qc/0603030.
- [13] Girelly F., Liberati S., Sindoni L., Planck-scale modified dispersion relations and Finsler geometry, *Phys. Rev. D*, 2007, V. 75, N 064015, arXiv:gr-qc/0611024.
- [14] Ghosh S., Pal P., Deformed special relativity and deformed symmetries in a canonical framework, *Phys. Rev. D*, 2007, V. 75, N 105021, arXiv:hep-th/0702159.
- [15] Bogoslovsky G. Yu., Some physical displays of the space anisotropy relevant to the feasibility of its being detected at a laboratory, arXiv:0706.2621 [gr-qc].
- [16] Gibbons G. W., Gomis Joaquim, Pope C. N., General very special relativity is Finsler geometry, *Phys. Rev. D*, 2007, V. 76, N 081701(R), arXiv:0707.2174 [hep-th]; see also Cohen A. G., Glashow S. L., Very special relativity, *Phys. Rev. Lett.*, 2006, V. 97, N 021601, arXiv:hep-ph/0601236.
- [17] Mavromatos N. E., Lorentz invariance violation from string theory, arXiv:0708.2250 [hep-th].
- [18] Sindoni L., The Higgs mechanism in Finsler spacetimes, arXiv:0712.3518 [gr-qc].
- [19] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., On the possibility of phase transitions in the geometric structure of space-time, *Phys. Lett. A*, 1998, V. 244, 222–228, arXiv:gr-qc/9804082; Finslerian spaces possessing local relativistic symmetry, *Gen. Relativ. Gravit.*, 1999, V. 31, N 10, 1565–1603, arXiv:gr-qc/9904081.
- [20] Богословский Г. Ю., О специальной релятивистской теории анизотропного пространства-времени, *ДАН СССР*, 1973, V. 213, 1055–1058.
- [21] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group, *J. Math. Phys.*, 1975, V. 16, N 8, 1615–1624.
- [22] Winternitz P., Friš I., Invariant expansions of relativistic amplitudes and subgroups of the proper Lorentz group, *Yadern. Fiz.*, 1965, V. 1, N 5, 889–901.
- [23] Bogoslovsky G. Yu., The proper time, spatial distances and clock synchronization in the locally anisotropic space-time, *JINR Communication E2-82-779*, Dubna, JINR, 1982.
- [24] Богословский Г. Ю., Релятивистский тензор инертной массы, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон.*, 1983, V. 24, N 1, 70–71.
- [25] Bogoslovsky G. Yu., On the local anisotropy of space-time, inertia and force fields, *Nuovo Cimento B*, 1983, V. 77, 181–190.
- [26] Богословский Г. Ю., Обобщённое уравнение Клейна-Гордона и принцип Маха, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон.*, 1983, V. 24, N 3, 59–61.

- [27] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., On the generalization of the fundamental field equations for locally anisotropic space-time, in Proceedings of XXIV International Workshop "Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory" (27–29 June, 2001, Protvino, Russia), Editor V. A. Petrov, Protvino, Institute for High Energy Physics, 2001, 113–125, <http://dbserv.ihep.su/~pubs/tconf01/c2-5.htm>
- [28] Berwald L., Projective Krümmung allgemeiner affiner Räume und Finslersche Räume skalarer Krümmung, *Ann. Math.*, 1947, V. 48, 755–781; und die Literaturhinweise darin.
- [29] Moór A., Ergänzung, *Acta. math.*, 1954, V. 91, 187–188.
- [30] Weyl H., Gravitation und Elektrizität, *Sitzber. preuss Akad. Wiss., Physik-math. Kl.*, 1918, 465–480; Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie, *Ann. d. Phys.*, 1919, V. 59, 101–133.
- [31] Bogoslovsky G. Yu., From the Weyl theory to a theory of locally anisotropic space-time, *Class. Quantum Grav.*, 1992, V. 9, 569–575.
- [32] Bogoslovsky G. Yu., 4-momentum of a particle and the mass shell equation in the entirely anisotropic space-time, in: Space-Time Structure/Algebra and Geometry/, Editors D. G. Pavlov, Gh. Atanasiu, V. Balan, Moscow, Lilia Print, 2007, 156–173.
- [33] Arbuzov B. A., Infrared non-perturbative QCD running coupling from Bogolubov approach, *Phys. Lett. B*, 2007, V. 656, 67–73, arXiv:hep-ph/0703237.

On the method of determining observed 3-velocities in a totally anisotropic Finsler space of events

G. Yu. Bogoslovsky

*Research Institute of nuclear physics, MSU n. a. M. V. Lomonosov
bogoslov@theory.sinp.msu.ru*

We continue the study of geometrical phase transitions which are associated to the dynamical reconstruction of the vacuum in the case of spontaneous breaking of the initial gauge symmetry. As a result of the reconstruction, there might appear three condensates, of the following types: scalar, axially symmetric, and completely anisotropic condensates. Only in the case of the scalar condensate, the flat Space-Time is still the Minkowski space. In the case that the anisotropic condensate emerges, a corresponding anisotropy appears in the Space-Time as well; the Space-Time filled in with the axially-symmetric condensate, appears as a flat relativistically invariant Finsler space with partially broken 3D isotropy. These two types of Finsler spaces are briefly described in the extended introductory part of the paper, and the original part is devoted to the determination of 3-velocities in the completely anisotropic Finsler space of events. The main difficulties, which had to be overruled while solving the main goal, are related to the non-standard shape of the equations of the light-cone and with the appropriate definition of the norm in the vector space of velocities.

Key-words: Finsler space, velocities, condensates, space of events, anisotropy.

MSC: 53B40, 81R10, 53B50.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ФИЗИКИ

Тришин В. Н.

vtrishin@mtu-net.ru

Статья содержит обзор и краткое введение в дифференциально-геометрические и топологические структуры, которые находят приложения в физике. Основное внимание уделяется изложению идей и методов, лежащих в основе описываемых геометрических и топологических объектов.

MSC2000: 51-02, 51H25, 51P05, 53Z05, 54-02, 00A69, 20K45

Ключевые слова: структуры, дифференциальная геометрия, топология.

1 Введение

Развитие физики и математики в последние десятилетия XX века показало, что между этими внешне различными науками существует очень тесная связь. Физические теории не только используют язык математики для своей формулировки. Многие физические теории развивают по сути те же самые идеи, что и теории математические. Теория калибровочных полей, являющаяся классической теорией Стандартной модели взаимодействия элементарных частиц, с математической точки зрения представляет собой теорию связностей в векторных расслоениях. Сечения этих расслоений над пространством-временем интерпретируются (на классическом уровне) как поля материи, а поля – переносчики взаимодействий – как линейные связности на этих расслоениях. В Общей теории относительности, представляющей собой классическую теорию гравитации, гравитационное поле описывается метрическим тензором пространства-времени, кривизна которого соответствует напряженности гравитационного поля.

Кроме того, постановка задач и методы решения в одной области часто приводят к лучшему пониманию задач и способов их решения в другой. Например, проблема классификации инстантонов в уравнениях Янга-Миллса была решена методами алгебраической геометрии, а экзотические гладкие структуры на четырехмерных многообразиях исследовались с помощью уравнений Янга-Миллса. Многие современные геометрические и топологические структуры возникают как физические объекты в квантовых полевых моделях и струнных теориях.

Предлагаемая статья ориентирована на студентов-физиков, приступающих к самостоятельной работе в области математической физики. Основное внимание уделено не формулировкам и доказательствам теорем (которые в тексте явно, как правило, даже не формулируются), а изложению сути базовых математических конструкций, идей и методов, нашедших свое применение в теоретической физике. Таким образом, первая цель работы – это введение физика в стандартные геометро-топологические концепции с помощью наводящих интуитивных примеров. Вторая цель статьи заключается в описании карты-схемы современной геометрии, которая позволила бы начинающему физику-теоретику ориентироваться в столь разнообразных математических структурах, которые возникают в современной физике. Поэтому статью можно рассматривать как своего рода взгляд на ландшафт геометрии с “высоты птичьего полета”.

Проникновение геометрии в современную теорию поля чрезвычайно широко, и рассмотреть, даже кратко, в одном обзоре все аспекты этого взаимодействия физики и

математики невозможно. Мы ограничимся только теми структурами, которые связаны с классической теорией поля, оставляя в стороне практически все темы, связанные с подходами к геометризации квантовых полей. Основное внимание уделено геометрическому аппарату калибровочных теорий – главным и присоединенным расслоениям, линейным связностям на этих расслоениях и характеристическим классам. Описаны такие базовые понятия как топологическое пространство, многообразие, дифференциальные формы и векторные поля, группы гомологий. Разобраны также другие геометрические объекты, такие как метрика, симплектическая структура, комплексная структура и др.

О соотношении топологии, геометрии и физики

Обычный путь построения физической теории заключается в выборе исходного многообразия (например, пространства-времени) и записи лагранжиана для полей, заданных на этом многообразии. Уравнения поля, полученные при варьировании функционала действия, описывают динамику соответствующей физической системы. Вообще говоря, понятие многообразия возникает всегда, когда приходится сталкиваться с пространствами, которые локально могут быть описаны набором из n вещественных чисел. Можно представлять себе многообразие как составленное из кусков пространства $\mathbb{R}^n$, склеенных друг с другом посредством гомеоморфизмов (непрерывных обратимых отображений). Как правило, это многообразие несет на себе некоторую дополнительную структуру: риманову метрику, динамическую систему и т. д. Обычно эта структура и оказывается объектом изучения, а многообразие играет роль фона. В этом случае мы имеем дело с (локальной) дифференциальной геометрией, которая представляет собой по сути обобщение обычного математического анализа.

Но многообразие является далеко не самым элементарным объектом. Оно несет в себе определенную глобальную информацию, которую можно извлекать, используя дополнительные структуры в качестве инструментов исследования. Исследование этих глобальных свойств, не меняющихся при непрерывных деформациях, составляет основную задачу топологии.

Поскольку многообразие (связное, без края) устроено одинаково во всех своих точках (группа диффеоморфизмов действует транзитивно, то есть одну точку многообразия может перевести в любую другую), то для извлечения внутренних свойств многообразия на нем необходимо искусственно ввести неоднородную структуру, по свойствам которой можно было бы судить о топологических свойствах пространства. Таким образом, структуры на многообразии (в том числе и те, которые используются в физике) несут как свою собственную “индивидуальную” информацию, так и информацию, которую они наследуют от пространства, на котором они заданы.

Например, в дифференциальной топологии основным инструментом исследования является дифференцируемое (гладкое) отображение исследуемого многообразия в некоторое известное. Так в теории Морса исследуются линии уровня $f^{-1}(y)$ гладкой функции $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, особенности которой устроены простейшим образом. В алгебраической топологии с каждым пространством связываются объекты алгебраической природы: группы гомотопии, группы гомологий и т. д. Основная задача топологии в этом случае заключается в характеристизации пространства посредством алгебраических инвариантов. Простейший пример: ориентируемые замкнутые связные двумерные многообразия полностью (с точностью до диффеоморфизма) характеризуются родом g (количеством ручек, вклеенных в сферу).

2 Топологические пространства

Простейшей структурой, которую можно задать на множестве, является топологическая структура. Она определяет отношение близости между элементами множества. Существенно, что эта структура не позволяет дифференцировать функции, заданные на множестве, а также, вообще говоря, не определяет такие геометрические понятия как расстояние или угол. Для вычисления производных, векторов и т. п. необходимо определить структуру многообразия, которое можно представлять себе как пространство, склеенное из областей $\mathbb{R}^n$. В топологическом пространстве (то есть множестве с топологической структурой) по сути можно только определить принадлежность точки к окрестности любой другой точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Топологическое пространство** – это пара $\{X, \tau\}$, где X – произвольное множество, а τ – набор подмножеств $\tau_i \subset X$, причем τ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$.
- 2) Объединение произвольного семейства множеств, принадлежащих τ , принадлежит τ . То есть, если $U_a \in \tau \forall a \in A$, где A множество произвольного индекса (принимającego конечное или бесконечное число значений), то $\bigcup U_a \in \tau$.
- 3) Пересечение конечного семейства множеств, принадлежащих τ , принадлежит τ . То есть, если $U_i \in \tau \ i = 1, \dots, n$, то $\bigcap U_i \in \tau$.

Подмножества, принадлежащие набору τ , называются *открытыми множествами*, а набор τ – *топологией* в X .

Отображение $f : X \mapsto Y$ топологических пространств называется *непрерывным*, если прообраз $f^{-1}(U)$ каждого открытого подмножества $U \subset Y$ является открытым множеством в X . Если отображение $f : X \mapsto Y$ непрерывно, взаимно однозначно и обратное к нему отображение $f^{-1} : Y \mapsto X$ тоже непрерывно, то отображение f называется *гомеоморфизмом*, а пространства X и Y – *гомеоморфными*. Заметим, что непрерывное взаимно-однозначное отображение может не иметь непрерывного обратного, например отображение $[0, 1) \ni x \rightarrow y = \exp(2\pi i x)$, не являющееся гомеоморфизмом. В этом примере отображение является *инъекцией* (injection) отрезка $[0, 1)$ в плоскость $\mathbb{R}^2$. Инъекция, являющаяся гомеоморфизмом, называется *вложением* (embedding).

Гомеоморфные пространства эквивалентны с топологической точки зрения. Можно сказать, что в топологии исследуются свойства пространств, сохраняющиеся при непрерывных отображениях. Существенно, что эти отображения могут быть даже не дифференцируемы.

Некоторые классы топологических пространств:

1. Пространство называется *хаусдорфовым*, если любую пару его точек можно окружить непересекающимися друг с другом открытыми множествами.
2. Пространство X называется *компактным*, если из любого счетного числа открытых областей, покрывающих X , можно выбрать *конечное* число покрывающих X . Например, дискретное пространство компактно тогда, и только тогда, когда оно конечно (в качестве покрывающих областей возьмем области, состоящие из одной точки). В компактном пространстве любая бесконечная последовательность имеет предельную точку.
3. Топологическое пространство *локально компактно*, если каждая точка имеет компактную окрестность. Очевидно, что все дискретные пространства локально компактны. Локально компактны также пространства $\mathbb{R}^n$, а бесконечномерные гильбертовы пространства не локально компактны.

4. Пространство называется *связным*, если оно не является объединением двух открытых непересекающихся множеств. Компонента связности точки пространства – это максимальное связное множество, содержащее эту точку. Пространство называется *линейно связным*, если любые две точки в нем можно соединить непрерывной кривой.

Для описания топологии пространство обычно снабжается некоторой дополнительной структурой.

ПРИМЕР. Важный класс топологических пространств образуют *метрические пространства*. Для любых двух точек x и y метрического пространства определена функция расстояния $\rho(x, y)$ такая, что

- 1) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- 2) $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) > 0$ при $x \neq y$;
- 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ ("неравенство треугольника").

Открытыми множествами являются объединения произвольных семейств открытых шаров, где открытый шар с центром в точке x_0 радиуса ε есть совокупность таких точек x , что $\rho(x_0, x) < \varepsilon$. Такая топология называется *метрической топологией*, причем метрика здесь нужна только для того, чтобы определить близость точек. Заметим, что все метрические пространства хаусдорфовы. Кроме того, метрическое пространство компактно тогда, и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено (то есть принадлежит шару конечного радиуса).

Другой важной структурой на топологическом пространстве является *дифференциальная структура* и различные дифференциально-геометрические объекты, построенные на ее основе. Описание топологии пространств с их помощью составляет предмет дифференциальной топологии, и будет обсуждаться в следующей части статьи, а в этой главе мы рассмотрим средства, позволяющие различать негомеоморфные пространства и не требующие для своего определения операции дифференцирования. Эти инструменты являются по сути алгебраическими.

2.1 Алгебраическая топология. Гомотопические группы

Применение алгебраических методов в топологии основывается на том соображении, что, грубо говоря, с алгебраическими структурами работать проще, чем с топологическими. Подходящий выбор таких структур позволяет описывать изменения в топологии с помощью алгебры. Топологический инвариант является алгебраическим объектом (числом, группой, линейным пространством и т. д.), который ассоциирован с топологическим пространством и сохраняется при гомеоморфизмах. Два пространства с различными алгебраическими структурами будут не гомеоморфны. Обратное, вообще говоря, не верно, то есть могут существовать пространства с одинаковыми алгебраическими (топологическими) инвариантами не гомеоморфные друг другу.

Для построения алгебраических инвариантов топологического пространства можно использовать непрерывные отображения некоторого "пробного" пространства в данное. Таким образом строятся *гомотопические группы*, где в качестве "пробного" пространства выступают сферы S^n . Определим понятие гомотопии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Непрерывные отображения f и g между топологическими пространствами X и Y называются **гомотопными**, если существует такое непрерывное отображение $F : [0, 1] \times X \rightarrow Y$, что $F(0, x) = f(x)$ и $F(1, x) = g(x)$ для всех $x \in X$.

Гомотопные отображения можно представлять себе как такие, образы которых могут быть совмещены друг с другом непрерывной деформацией. Отношение гомотопии

является отношением эквивалентности, поэтому множество всех непрерывных отображений пространства X в Y можно разбить на классы эквивалентности, называемые *гомотопическими классами* $\pi(X, Y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. n -мерная **гомотопическая группа** $\pi_n(X, x_0)$ – это множество (снабженное групповой операцией) гомотопических классов отображений сферы S^n с выделенной точкой в пространство X с выделенной точкой x_0 . Первая гомотопическая группа $\pi_1(X, x_0)$ (группа гомотопически эквивалентных петель) называется *фундаментальной группой* пространства. Групповую операцию на множестве гомотопических классов отображений можно определить как композицию двух петель, то есть двум петлям ставится в соответствие петля, получающаяся при последовательном прохождении обеих петель. Единицей группы будет класс стягиваемых петель, а обратным элементом – петля, проходимая в обратном направлении.

Заметим, что гомотопические группы $\pi_n(X, x_0)$ зависят от выделенной точки x_0 , хотя в случае линейно связных пространств эти группы изоморфны. Далее зависимость группы от выбора точки в обозначениях мы будем опускать и писать просто $\pi_n(X)$.

Некоторые свойства гомотопических групп:

1. Высшие гомотопические группы $\pi_n(X)$ при $n > 1$ всегда абелевы (коммутативны). Фундаментальная группа может быть некоммутативной, например $\pi_1(M^2)$, где M^2 – сфера с двумя и более ручками.
2. Для сфер $\pi_n(S^m) = 0$ при $n < m$, а $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.
3. Гомотопические группы прямых произведений: $\pi_n(X \times Y) = \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$.

ПРИМЕР. Фундаментальная группа плоскости тривиальна, $\pi_1(\mathbb{R}^2) = 0$, так как любая петля может быть стянута в точку. Напротив, для плоскости с выколотой точкой $\pi_1(\mathbb{R}^2/0) = \mathbb{Z}$. Здесь целые числа, образующие группу, нумеруют количество обходов петли вокруг выколотого нуля на плоскости. Очевидно, что такие петли не гомотопны. Таким образом, мы доказали, что плоскость негомеоморфна плоскости без точки, так как эти пространства имеют различные фундаментальные группы.

С помощью фундаментальной группы легко доказать “интуитивно ясное” утверждение, что сфера не гомеоморфна тору. Действительно, на сфере любую петлю можно стянуть в точку, поэтому $\pi_1(S^2) = 0$. Для тора $T = S^1 \times S^1$ получаем $\pi_1(T) = \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Понятие фундаментальной группы ведет к определению *односвязного* пространства, для которого $\pi_1(X) = 0$. Так окружность S^1 связна, но не односвязна, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Важным средством для изучения неодносвязных пространств является понятие *накрывающего пространства*. Пространство $\tilde{X}$ называется *накрывающим* для X , если $\tilde{X}$ односвязно, и существует непрерывное отображение $f: \tilde{X} \rightarrow X$, такое что для любой точки $x \in X$ существует окрестность $U(x)$, прообраз которой есть объединение открытых в $\tilde{X}$ множеств, гомеоморфных $U(x)$. Число областей в прообразе $f^{-1}(U)$ называется числом листов накрытия. Например, для S^1 накрывающим пространством будет прямая $\mathbb{R}$ с бесконечным числом листов.

2.2 Гомологии

Гомотопические группы представляют собой одно из средств описания топологии с помощью непрерывных отображений. Другой аппарат для характеристики топологических свойств дает теория гомологий. Она основана на разбиении исходного пространства на более простые составляющие. Этому разбиению ставится в соответствие некоторая алгебраическая структура, например, клеточный комплекс, который будет описан ниже.

Алгебраические характеристики этого комплекса, независимые от разбиения и сохраняющиеся при гомеоморфизмах, несут информацию о топологии пространства.

Существуют несколько различных способов для введения гомологий (заметим, что их строгое определение, в отличие от теории гомотопий, связано со значительными формальными трудностями), но все они основаны на семействе $C = \{C_n, \partial_n\}$, $n = 0, \pm 1, \dots$, где C_n – некоторые абелевы группы, а гомоморфизмы $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ по определению таковы, что $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Семейство C можно представить в виде последовательности (цепного комплекса)

$$\dots \xleftarrow{\partial_{n-1}} C_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} C_{n+1} \xleftarrow{\partial_{n+2}} \dots$$

в которой композиция любых двух последовательных гомоморфизмов равна нулю, поэтому всегда $\text{Im } \partial_{n+1} \subseteq \text{Ker } \partial_n$. Если образ предыдущего отображения совпадает с ядром последующего: $\text{Im } \partial_{n+1} = \text{Ker } \partial_n$, то последовательность называется *точной*.

Элементы группы C_n называются n -мерными *цепями*, из них элементы из $\text{Ker } \partial_n$ называются n -мерными *циклами*, а элементы из $\text{Im } \partial_{n+1}$ – n -мерными *границами*. Фактор-группа

$$H_n(C) := \frac{\text{Ker } \partial_n}{\text{Im } \partial_{n+1}}$$

называется n -мерной *группой гомологий* комплекса C , а ее элементы (смежные классы) называются классами гомологий. Цикл, являющийся границей, называется гомологичным нулю. Если все циклы являются границами, то последовательность цепного комплекса является точной, а группы гомологий тривиальны. В противном случае гомологии измеряют величину “неточности” последовательности – “количество” циклов, не являющихся границами.

Рассмотрим более подробно клеточное разбиение, соответствующее *сингулярным гомологиям*. Для этого введем *стандартный k -мерный симплекс*

$$\Delta^k := \{x = \sum_{i=0}^k x^i e_i \mid \sum_{i=0}^k x^i = 1, 0 \leq x_i \leq 1\}$$

определенный в пространстве $\mathbb{R}^{k+1}$ с базисом e_i . Геометрически он представляет собой пересечение гиперплоскости $x^0 + \dots + x^k = 1$ с положительным ортантом $\{x^i \geq 0\}$, или, другими словами, выпуклую оболочку точек $\{p_0, \dots, p_k\}$. Например $\Delta^0 = [p_0]$ – это точка, $\Delta^1 = [p_0, p_1]$ – отрезок, $\Delta^2 = [p_0, p_1, p_2]$ – треугольник.

Определим *сингулярный k -мерный симплекс* с помощью непрерывного отображения стандартного симплекса в пространство X

$$\sigma : \Delta^k \rightarrow X$$

Слово “сингулярный” означает, что отображение может быть вырожденным, например, треугольник может стягиваться в отрезок. Возьмем множество всех сингулярных k -симплексов и некоторое коммутативное кольцо R , например целые числа $\mathbb{Z}$, действительные $\mathbb{R}$ или комплексные $\mathbb{C}$ числа. Определим $C_k(X, R)$ – множество всевозможных формальных сумм вида $\sigma = \sum_i a^i \sigma_i$, где a^i – элемент кольца R , а σ_i – сингулярный k -симплекс. $C_k(X, R)$ является модулем над кольцом R и называется *сингулярной цепью* размерности k . Это бесконечномерное пространство, и для того, чтобы получить конечные величины, необходимо ввести на нем некоторое соотношение эквивалентности.

Для этого введем оператор границы

$$\partial : C_k(X, R) \rightarrow C_{k-1}(X, R)$$

Граница стандартного симплекса $\Delta^k = [p_0, \dots, p_k]$ образована $(k-1)$ -мерными гранями – симплексами $\Delta_i^{k-1} = [p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_k]$, где $\hat{p}_i$ означает, что вершина p_i удалена. Эти грани должны быть ориентированы, чтобы их замыкание образовывало петлю, являющуюся геометрической границей исходного симплекса. В результате получаем

$$\partial \Delta^k = \sum_i (-1)^i \Delta_i^{k-1}$$

Для сингулярного k -симплекса определим грань как $\sigma^{(i)} = \sigma \circ \Delta_i^k$. Тогда границей k -симплекса будет формальная сумма $\partial \sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma^{(i)}$. Действие оператора границы можно продолжить по линейности на любую сингулярную цепь, то есть, если $\sigma = \sum a^k \sigma_k$, то $\partial \sigma = \sum a^k \partial \sigma_k$. Можно проверить, что $\partial^2 := \partial \circ \partial = 0$ (“граница границы равна нулю”). Фактор-пространства (для переменного k)

$$H_k(X, R) = \frac{\text{Ker } \partial_k}{\text{Im } \partial_{k+1}}$$

называются группами сингулярных гомологий с коэффициентами в R . Если в качестве кольца R берут множество целых чисел, то группу гомологий $H_k(X, \mathbb{Z})$ обозначают просто $H_k(X)$.

ПРИМЕР. Вычислим группы гомологий для сферы S^2 . Клеточное разбиение сферы состоит из 0-мерной клетки (точки a) и 2-мерной клетки (диска d). Все цепи σ_i , $i = 0, 1, 2$ являются циклами: $\partial \sigma_i = 0$ ($\partial \sigma_2 = 0$ в силу того, что граница 2-мерной клетки является одномерной, а они отсутствуют в разбиении). Найдем группу $H_0(S^2) = \text{Ker } \partial_0 / \text{Im } \partial_1$. В силу того, что одномерных клеток нет, $\text{Im } \partial_1$ состоит из одного элемента, равного 0. Кроме того, каждая 0-мерная клетка является циклом ($\partial a = 0$), и 0-мерная цепь имеет вид $\sigma_0 = \alpha a$, $\alpha \in \mathbb{Z}$. Поэтому $H_0(S^2) = \text{Ker } \partial_0 = \mathbb{Z}$. Для $H_1(S^2) = \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2 = 0$ (нет одномерных клеток). Для $H_2(S^2) = \text{Ker } \partial_2 / \text{Im } \partial_3$, где $\text{Ker } \partial_2 = \beta d$ (любая 2-цепь – цикл), а $\text{Im } \partial_3$ состоит только из 0 (отличных от нуля 3-мерных клеток нет), таким образом $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$. Все группы $H_n(S^2) = 0$ при $n > 2$.

Группы гомологий, которые используются в приложениях, являются конечно-порожденными группами, то есть имеют конечное число образующих. Такие группы изоморфны прямой сумме циклических и свободных групп. Если группа гомологий содержит циклическую подгруппу, то говорят, что она содержит *кручение*, например для бутылки Клейна K^2 имеем $H_1(K^2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$.

Если в качестве коэффициентов берут множество действительных чисел, $R = \mathbb{R}$, то группы гомологий являются векторными пространствами над $\mathbb{R}$, и можно определить *числа Бетти* по формуле $b_k(X) := \dim H_k(X, \mathbb{R})$. Эти числа, грубо говоря, подсчитывают количество дырок в различных измерениях, в частности $b_0(X)$ – это число компонент связности пространства X . С помощью чисел Бетти можно определить важный топологический инвариант – *эйлерову характеристику*

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k b_k$$

В заключение заметим, что группы гомологий формально зависят от выбора кольца коэффициентов R , хотя, например, имеются простые соотношения $H_k(X, \mathbb{R}) = H_k(X) \otimes \mathbb{R}$ или $H_k(X, \mathbb{C}) = H_k(X) \otimes \mathbb{C}$. Можно сказать, что группы $H_k(X)$, $H_k(X, \mathbb{R})$ и $H_k(X, \mathbb{C})$ совпадают по модулю конечных групп (кручения). В частности группы $H_k(X, \mathbb{R})$ кручения не содержат.

3 Гладкие многообразия

В физике используются поля и полевые уравнения, поэтому только топологии на множестве недостаточно – необходимо уметь производить дифференцирования функций, заданных на топологическом пространстве. Для этого необходимо задать на нем *дифференциальную (гладкую) структуру*, превратив его тем самым в *дифференцируемое (гладкое) многообразие*.

3.1 Определение многообразия. Гладкая структура

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство, покрытое счетным семейством открытых множеств $\mathcal{U}$ с гомеоморфизмами $\phi_U : U \in \mathcal{U} \rightarrow U_R$, где U_R – открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Если числовые функции (*функции перехода*) $f_{UV} := \phi_U \cdot \phi_V^{-1}$, отображающие $\phi_V(U \cap V)$ в $\phi_U(U \cap V)$, являются гладкими в $\mathbb{R}^n$ (принадлежат классу C^∞), то пара (U, ϕ_U) называется (гладкой) *картой*. Семейство $A = \{\mathcal{U}, \phi_U\}$ попарно гладко согласованных карт называется (гладким) *атласом*, или *гладкой структурой*. Два атласа многообразия называются эквивалентными, если их объединение – тоже атлас. Пространство M наделенное семейством эквивалентных атласов называется n -мерным вещественным **гладким многообразием**.

Если функции перехода f_{UV} дифференцируемы (класса C^1), то многообразие называется дифференцируемым. Если f_{UV} аналитичны* (класса C^ω), то многообразие называется аналитическим. Формально можно рассмотреть случай, когда f_{UV} только непрерывны (класса C^0), но не обязательно дифференцируемы. Тогда многообразие называется топологическим. Можно доказать, что структура топологического многообразия определяется единственным способом, поэтому топологические многообразия – это просто подкласс топологических пространств. Заметим, что на топологическом пространстве может вообще не существовать гладкой структуры, такие пространства называются негладкими.

Далее под словом многообразие, если не оговорено другое, мы всегда будем понимать именно гладкое многообразие.

Можно рассматривать гомеоморфизмы $\phi_U : U \in \mathcal{U} \rightarrow U_C$ в открытые множества в $\mathbb{C}^n$ (M очевидно должно иметь четную размерность). Тогда, если функции f_{UV} голоморфны, многообразие M называется *комплексным*. На таком многообразии можно ввести комплексные координаты.

ПРИМЕР. Сфера S^2 является гладким многообразием, атлас которого состоит из двух карт – (U, ϕ_U) и (V, ϕ_V) , где ϕ_U (ϕ_V) – стереографическая проекция сферы U без южного полюса (соответственно сферы V без северного полюса) на плоскость $\mathbb{R}^2$. Если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответствующие координаты в этих картах, то функции перехода имеют вид

$$x_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y_2 = \frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

Если использовать комплексную координату $z = x_1 + iy_1$, то функция перехода (голоморфная на пересечении карт) имеет вид $w = 1/z$, где $w = x_2 + iy_2$. Голоморфность функции перехода означает, что сфера является комплексным многообразием.

ПРИМЕР. Проективные пространства. Для ненулевых векторов в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ определим соотношение эквивалентности, считая, что векторы v и λv , $\lambda \neq 0$ задают одну и ту же точку. Пространство классов эквивалентности называется (действительным) *проективным пространством* $\mathbb{R}P^n$. Оно обладает структурой n -мерного много-

* т. е. могут быть представлены сходящимся рядом Тейлора на всей области определения

образия, атлас которого состоит из $n + 1$ карт U_k , $k = 0, \dots, n$ с координатами

$$x_{(k)}^\mu = \left(\frac{y^0}{y^k}, \dots, \frac{y^{k-1}}{y^k}, \frac{y^{k+1}}{y^k}, \dots, \frac{y^n}{y^k} \right), \quad \mu = 1, \dots, n$$

Числа $y^i \in \mathbb{R}^{n+1}$ называют *однородными координатами* и записывают в виде $[y^0 : \dots : y^n]$. Функции перехода, например, на пересечении карт U_0 и U_1 , где $y^0 \neq 0$ и $y^1 \neq 0$, имеют вид

$$x_{(1)}^\mu = \left(\frac{1}{x_{(0)}^1}, \frac{x_{(0)}^2}{x_{(0)}^1}, \frac{x_{(0)}^3}{x_{(0)}^1}, \dots, \frac{x_{(0)}^n}{x_{(0)}^1} \right)$$

и являются гладкими дробно-линейными функциями ($x_{(0)}^1 = y^1/y^0 \neq 0$). Все проективные пространства компактны, а нечетномерные $\mathbb{R}P^{2n-1}$ – ориентируемы, в частности $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$ и $\mathbb{R}P^3 \approx SO(3)$. Геометрия проективных пространств устроена проще, чем аффинных. Например, все прямые в проективном пространстве пересекаются.

Понятие проективного пространства можно обобщить, введя *проективную структуру* на многообразии M . Проективная структура – это класс эквивалентности проективных атласов, то есть атласов с дробно-линейными функциями перехода на пересечении областей U_i и U_j вида

$$x_{(i)}^\mu = \frac{a_0^\mu + a_1^\mu x_{(j)}^1 + \dots + a_n^\mu x_{(j)}^n}{a_0^0 + a_1^0 x_{(j)}^1 + \dots + a_n^0 x_{(j)}^n}$$

где $(n+1) \times (n+1)$ матрица $\|a\|_\nu^\mu$ невырождена. Грубо говоря, многообразие с проективной структурой локально выглядит так же, как $\mathbb{R}P^n$.

Из определения многообразия естественно вытекает определение гладкого отображения многообразий. $f : M \rightarrow N$ является гладким, если его выражение в терминах локальных координат принадлежит классу C^∞ . Если это отображение является гомеоморфизмом, и обратное к нему тоже гладко, то f называется *диффеоморфизмом*. С физической точки зрения диффеоморфизм представляет собой глобальную замену координат (общековариантные преобразования). Множество всех диффеоморфизмов образует (бесконечномерную) группу Ли – *группу диффеоморфизмов* многообразия.

Важно заметить, что не все гомеоморфные многообразия являются диффеоморфными. Другими словами, на топологическом пространстве могут быть *различные* дифференциальные (гладкие) структуры, которые нельзя перевести друг в друга с помощью диффеоморфизма. Так на пространствах $\mathbb{R}^n$, рассматриваемых как многообразия, существует единственная, с точностью до диффеоморфизма, гладкая структура для всех n , кроме 4. На пространстве $\mathbb{R}^4$ существует бесконечно много (континуум) гладких структур! Такие $\mathbb{R}^4$ с нестандартной гладкой структурой называются экзотическими, или фальшивыми, $\mathbb{R}^4$. Они были открыты в начале 80-х годов в работах Фридмана и Дональдсона.

3.2 Векторные поля и дифференциальные формы. Когомологии де Рама

Для дифференцирования функций на многообразии необходимо ввести понятие векторного поля. На современном языке векторное поле – это, грубо говоря, “дифференцирование по направлению”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Касательный вектор** v_x в точке x многообразия M – это оператор, который каждой дифференцируемой функции f на M ставит в соответствие действительное число $v_x(f)$, при этом должны выполняться условия:

- 1) линейность: $v_x(af + bg) = av_x(f) + bv_x(g)$, где a, b – константы, f, g – функции;
- 2) правило Лейбница: $v_x(fg) = f(x)v_x(g) + g(x)v_x(f)$.

Касательные векторы к n -мерному многообразию M в точке x образуют n -мерное векторное пространство $T_x M$, которое называется *касательным пространством*. Если в качестве базисных векторов этого пространства взять касательные векторы к координатным линиям на M через точку x , то полученный базис называется *голономным* (координатным) и обозначается $\{\partial_\mu\}$. Любой вектор v_x можно записать в виде

$$v_x = v^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} := v^\mu \partial_\mu$$

откуда видно, что локально вектор соответствует контравариантному тензору 1-го ранга.

Множество TM всех касательных пространств к многообразию M также можно наделить структурой $2n$ -мерного многообразия, задав на нем голономную систему координат $(x^\mu, \dot{x}^\mu)$ с условиями перехода

$$x'^\mu = x'^\mu(x^\nu), \quad \dot{x}'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \dot{x}^\nu$$

где x^μ – координаты на M , а $\dot{x}^\mu$ – координаты на касательных пространствах к M относительно голономных базисов.

В касательном пространстве можно определить *коммутатор* двух векторных полей $[u, v](f) := u(v(f)) - v(u(f))$. Соответствующее векторное поле имеет вид

$$[u, v] = (u^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} - v^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}) \partial_\mu$$

Антисимметричная операция коммутирования удовлетворяет тождеству Якоби

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$$

поэтому векторные поля образуют (бесконечномерную) алгебру Ли $\mathfrak{a}M$ относительно коммутатора. Она является алгеброй Ли группы Ли $Diff(M)$ всех диффеоморфизмов многообразия M .

Используя тензорное произведение $T_x M \times \dots \times T_x M$ можно определить поливекторное поле w , которое локально представимо контравариантным тензором ранга k : $w = w^{\mu_1 \dots \mu_k} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k}$.

Дифференциальные формы

Алгебраически двойственным объектом к касательному вектору v является дифференциальная 1-форма α . Она осуществляет отображение вектора v в действительное число посредством свертки (внутреннего произведения) $v \lrcorner \alpha$. Свертка часто обозначается $\iota_v \alpha = \alpha(v)$. Это отображение обладает свойством линейности $(au + bv) \lrcorner \alpha = a \iota_u \alpha + b \iota_v \alpha$.

В локальных координатах 1-форма в точке x имеет вид $\alpha = \alpha_\mu(x) dx^\mu$, причем координатный базис 1-форм $dx^1, \dots, dx^n$ по определению связан с базисом векторных полей соотношением $\langle \partial_\mu, dx^\nu \rangle = \delta_\mu^\nu$. Локально 1-форма соответствует ковариантному тензору 1-го ранга. В точке p многообразия M 1-формы образуют *кокасательное* пространство $T_x^* M$.

Используя линейную алгебру, можно определить полилинейные функции $T_x M \times \dots \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$. Среди них выделим класс антисимметричных линейных k -форм, определенных соотношением

$$\omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k) = -\omega(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k)$$

где $X_i \in T_x M$. Множество дифференцируемых функций, удовлетворяющих этому соотношению, обозначим $\Lambda^k(T_x M)$. Элементы $\omega_x \in \Lambda^k(T_x M)$ называются *дифференциальными (внешними) k -формами*. Множество всех k -форм на многообразии обозначим через $\Omega^k(M)$. Пространство всех форм $\Omega(M) = \bigoplus \Omega^k(M)$ обладает структурой градуированной грассмановой алгебры, где операция произведения между элементами алгебры определена с помощью ассоциативного, антикоммутативного и дистрибутивного *внешнего умножения* $\wedge$ по формуле

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$$

где $\omega \in \Omega^p(M)$, а $\eta \in \Omega^q(M)$. В локальных координатах любая k -форма $\omega \in \Omega^k(M)$ может быть записана в виде

$$\omega = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} f_{\mu_1 \dots \mu_k}(x) dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}$$

Функции по определению являются 0-формами. Если размерность многообразия равна n , то все k -формы при $k > n$ равны нулю, а n -форма $\omega = f(x) dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}$ состоит из одного слагаемого, причем $f(x)$ не является числовой функцией, так как при координатном преобразовании делится на якобиан перехода.

Алгебру дифференциальных k -форм можно превратить в дифференциальный комплекс (частный случай цепного комплекса), называемый *комплексом де Рама*. Для этого определим операцию *внешнего дифференцирования* d . Внешний дифференциал d переводит k -форму в $(k+1)$ -форму и обладает свойствами:

- 1) $dd = 0$;
- 2) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$, $\omega \in \Omega^k(M)$.

В голономных координатах имеем

$$d\omega = \sum \frac{\partial f_{\mu_1 \dots \mu_k}(x)}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}$$

ПРИМЕР. Для многообразия $M = \mathbb{R}^3$ комплекс де Рама имеет вид

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{\text{grad}} \Omega^1(M) \xrightarrow{\text{rot}} \Omega^2(M) \xrightarrow{\text{div}} \Omega^3(M) \rightarrow 0$$

где над стрелками приведены обычные операции векторного анализа, соответствующие внешнему дифференцированию d . Например, в голономных координатах имеем следующие представления

$$\begin{aligned} \Omega^0(M) &\xrightarrow{d} \Omega^1(M) : d(f(x)) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu \\ \Omega^1(M) &\xrightarrow{d} \Omega^2(M) : d(f_\mu(x) dx^\mu) = \frac{\partial f_\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^\mu \\ \Omega^2(M) &\xrightarrow{d} \Omega^3(M) : d(f_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu) = \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned}$$

Форма ω называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$, то есть $\omega \in Z^k(M) := \text{Ker} \{d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)\}$. Если существует $(k-1)$ -форма η такая, что $\omega = d\eta$, то есть $\omega \in B^k(M) := \text{Im} \{d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)\}$, то форма ω называется *точной*.

Фактор-пространство замкнутых k -форм по точным называется *k -группой когомологий де Рама*

$$H_{dR}^k(M) = \frac{\text{Ker } d^k}{\text{Im } d^{k-1}}$$

Оно образовано классами эквивалентности замкнутых форм, разность которых является точной формой. Эти группы являются линейными пространствами, причем размерность группы $H_{dR}^0(M)$, состоящей из постоянных функций, равна числу компонент связности многообразия M . При $k > n$, где n – размерность многообразия M , $H_{dR}^k(M) = 0$.

ПРИМЕР. Для пространства $\mathbb{R}^n$ все группы кохомологий $H_{dR}^k(\mathbb{R}^n) = 0$ при $k > 0$, $H_{dR}^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ (пространство постоянных функций). Можно доказать, что для любого стягиваемого многообразия $H_{dR}^k(M) = 0$ при $k > 0$. Для нестягиваемых многообразий группы кохомологий могут быть нетривиальными, в частности на таких многообразиях могут существовать неградиентные векторные поля, ротор которых равен 0. Например, на плоскости без точки $M = \mathbb{R}^2/0$ можно определить замкнутую, но не точную 1-форму $\omega = \frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{-x}{x^2 + y^2} dy$.

Группы кохомологий де Рама $H_{dR}^k(M)$ изоморфны группам сингулярных кохомологий $H^k(M, \mathbb{R})$ и поэтому двойственны группам сингулярных гомологий $H_k(M, \mathbb{R})$ (теорема де Рама). Эта двойственность устанавливается билинейной формой

$$\langle \omega^k | c_k \rangle = \int_{c_k} \omega^k \quad (1)$$

определяющей интегрирование замкнутых k -форм ω^k по k -мерным циклам c_k , реализуемым подмногообразиями M .

Производная Ли

Производная Ли $\mathcal{L}_v T$ тензорного поля T по направлению векторного поля v – это главная линейная часть приращения тензорного поля T при его преобразовании, которое индуцировано локальной однопараметрической группой диффеоморфизмов Φ_t многообразия, порожденной полем v . Например, если при диффеоморфизме точка с координатами $x^\mu(t)$ переходит в точку x_0^μ (векторное поле v является касательным к линии $x(t)$), то закон преобразования тензора T_ν^μ при переносе из $x(t)$ в x_0 имеет вид

$$(\Phi_t T)_\nu^\mu = T_\beta^\alpha \frac{\partial x_0^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x_0^\nu}$$

и для производной Ли по определению получаем выражение

$$\mathcal{L}_v T_\nu^\mu = \left. \frac{d(\Phi_t T)_\nu^\mu}{dt} \right|_{t=0}$$

Можно сказать, что производная Ли измеряет скорость изменения тензора T при деформации многообразия, вызванного диффеоморфизмом Φ_t . Отметим, что производная Ли (как и внешнее дифференцирование форм) представляет собой операцию, определенную на многообразии без введения дополнительных структур, в частности, она не зависит от связности или метрики.

Для функции $f(x)$ производная Ли совпадает с обычной производной по направлению векторного поля v , то есть в голономных координатах $\mathcal{L}_v f = v^\mu \partial_\mu f$. Производная Ли от векторного поля u есть коммутатор полей $\mathcal{L}_v u = [v, u] = (v^\alpha \partial_\alpha u^\mu - u^\alpha \partial_\alpha v^\mu) \partial_\mu$. Для тензорного поля произвольного ранга имеем

$$\mathcal{L}_v T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} = v^\alpha \partial_\alpha T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} + (\partial_{\nu_1} v^\alpha) T_{\alpha \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} + (\partial_{\nu_m} v^\alpha) T_{\nu_1 \dots \alpha}^{\mu_1 \dots \mu_n} - (\partial_\alpha v^{\mu_1}) T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\alpha \dots \mu_n} - (\partial_\alpha v^{\mu_n}) T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \alpha}$$

Производная Ли используется для описания симметрий, а именно, если мы хотим исследовать инвариантность какого-либо объекта, заданного на M , относительно действия

некоторой группы диффеоморфизмов, то достаточно рассмотреть соответствующие производные Ли. Например, векторное поле v определяет *изометрию** многообразия тогда, и только тогда, когда производная Ли метрического тензора g вдоль этого поля равна нулю, то есть $\mathcal{L}_v g = 0$. Заметим, что в приложениях, например, в общей теории относительности, это уравнение обычно записывают через ковариантные производные ∇_μ относительно связности Леви-Чивита (см. главу 5) в виде $\nabla_{(\mu} v_{\nu)} = 0$ (уравнения Киллинга), а векторное поле v , являющееся решением этого уравнения, называют *полем Киллинга*.

Конформные преобразования метрики описываются векторным полем v , удовлетворяющим уравнению $\mathcal{L}_v g = \phi(x)g$, где $\phi(x)$ – произвольная функция на M .

На дифференциальных формах производная Ли и внешнее дифференцирование связаны следующим соотношением:

$$\mathcal{L}_v \omega = v \lrcorner d\omega + d(v \lrcorner \omega)$$

Оператор Ходжа

На пространстве форм $\Omega(M)$ можно определить линейный оператор *дуальности Ходжа* $\star : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$. В голономных координатах он имеет вид

$$\star(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}) = \frac{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}}{(n-k)!} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_{k+1} \dots \nu_n} dx^{\nu_{k+1}} \dots dx^{\nu_n}$$

где $\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_{k+1} \dots \nu_n}$ – полностью антисимметричный тензор, а $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор. В частности, оператор $\star$ переводит функции в n -формы, например $\star 1 = \nu_M$, где $\nu_M = \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ – инвариантная (относительно диффеоморфизмов) форма объема. Очевидно, оператор Ходжа зависит от выбора метрики и ориентации на M .

Действие оператора Ходжа можно расширить на группы когомологий $H_{dR}^k(M)$. Для гладких компактных многообразий это приводит к изоморфизму групп $H_{dR}^k(M)$ и $H_{dR}^{(n-k)}(M)$, что с учетом двойственности групп гомологий и когомологий ведет к *двойственности Пуанкаре*: изоморфизму групп гомологий над $\mathbb{R}$ $H_k(M, \mathbb{R})$ и групп когомологий де Рама $H_{dR}^{(n-k)}(M)$. Это соответствие позволяет использовать на компактных многообразиях билинейную форму (1), чтобы ввести скалярное произведение на пространстве $\Omega(M)$ по формуле

$$\langle \omega, \eta \rangle = \int_M \omega \wedge \star \eta$$

Используя оператор $\star$, можно определить *кодифференциал* $\delta = (-1)^{k(n-k)+1} \star d \star$. Он понижает степень формы на единицу $\delta : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ и сопряжен к оператору d :

$$\langle d\omega, \eta \rangle = \langle \omega, \delta\eta \rangle, \quad \omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^{k+1}(M)$$

Для него также справедливо свойство $\delta\delta = 0$. Группы когомологий, индуцированные δ , совпадают с когомологиями де Рама, определенными с помощью d .

Из операторов d и δ можно получить инвариантный (топологический) *лапласиан* (оператор Лапласа-Бельтрами) $\Delta_k = (d + \delta)^2 = d\delta + \delta d$ – самосопряженный оператор второго порядка $\Delta_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$. Решения уравнения $\Delta_k \omega = 0$ называются *гармоническими* формами. Они обобщают обычные гармонические функции математического

* преобразование, сохраняющее расстояние между точками

анализа. Используя их, можно записать для компактных многообразий следующее “разложение Ходжа”:

$$\Omega^k = \mathcal{H}^k \oplus \text{Im } d \oplus \text{Im } \delta,$$

где $\mathcal{H}^k = \text{Ker } \Delta_k$ – пространство всех гармонических k -форм.

Из этого разложения следует важное следствие о конечномерности групп когомологий компактных многообразий, а именно, векторное пространство гармонических k -форм изоморфно k -ой группе когомологий де Рама: $\mathcal{H}^k \simeq H_{dR}^k(M)$ (теорема Ходжа). Таким образом, мы имеем интерпретацию когомологий в терминах пространства решений дифференциального уравнения.

3.3 Группы Ли

Важным примером многообразий, часто встречающихся в физике, являются группы Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Группа Ли** – это гладкое многообразие G , являющееся одновременно группой, причем групповые операции умножения $G \times G \rightarrow G : (g, h) \rightarrow gh$ и взятия обратного элемента $G \rightarrow G : g \rightarrow g^{-1}$ являются гладкими отображениями.

В действительности справедлив глубокий результат, что функции перехода, задающие атлас группы Ли, достаточно выбрать непрерывными (C^0), чтобы в результате получить гладкое (C^∞) и даже аналитическое (C^ω) многообразие.

ПРИМЕР. Группой Ли является пространство $\mathbb{R}^n$ с обычной операцией сложения между векторами. Другой пример – группа невырожденных матриц $GL(n, \mathbb{R})$. Подгруппы Ли групп $GL(n, \mathbb{R})$ называются *матричными* группами Ли. Заметим, что не каждая группа Ли является матричной.

Группа G *действует** на многообразии M , если для любого ее элемента $g \in G$ задан диффеоморфизм $T_g(x)$ такой, что $T_g T_h = T_{gh}$, $T_1 = Id$ и $T_g(x)$ гладко зависит от пары (g, x) . Группа действует на M *транзитивно*, если для любых точек $x, y \in M$ существует такой элемент $g \in G$, что $T_g(x) = y$. Многообразие, на котором задано транзитивное действие группы G , называется *однородным*. Подгруппа H группы G , оставляющая точку $x \in M$ на месте, называется группой *изотропии*. Однородное пространство является фактор-пространством G/H .

ПРИМЕРЫ. Следующие пространства однородны:

- 1) сфера $S^n = O(n+1)/O(n) = SO(n+1)/SO(n)$, а также $S^{2n-1} = U(n)/U(n-1)$;
- 2) проективное пространство $\mathbb{R}P^n = O(n+1)/(O(n) \times O(1))$;
- 3) комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n = U(n+1)/(U(n) \times U(1)) = S^{2n+1}/S^1$.

Каждая группа Ли является группой преобразований самой себя. Это преобразование Φ дается правыми (левыми) сдвигами $R_g : h' \rightarrow h'g$ ($L_g : h' \rightarrow gh'$), а сама группа называется *главным* правым (левым) однородным пространством. Отображение Φ естественным образом индуцирует отображение Φ^* действительных функций f на G по формуле $\Phi^* f(p) = f(\Phi(p))$. Индуцированное отображение векторных полей имеет вид $\Phi_* : v \in T_p G \rightarrow \Phi_* v \in T_{\Phi(p)} G$ и определяется соотношением

$$\Phi_* v(f)|_{\Phi(p)} = v(\Phi^* f)|_p$$

Алгебра векторных полей на группе Ли, будучи бесконечномерной, мало связана с групповой операцией на самой группе G . Если рассматривать только *правоинвариантные* векторные поля v , удовлетворяющие условию $(R_g)_* v = v$, то значение $v(p)$ такого

* Это обобщение понятия линейного представления группы на векторном пространстве.

поля в точке p определяется его значением в точке I – единичного элемента группы:

$$v(p) = (R_g)_* v(I), \quad v(I) = (R_{g^{-1}})_* v(p)$$

Таким образом пространство всех правоинвариантных векторных полей в группе Ли образует конечномерное пространство, изоморфное касательному пространству $T_I G$.

Это векторное пространство, снабженное билинейной антисимметричной операцией (коммутатором $[v, u]$), удовлетворяющей тождеству Якоби, называется **алгеброй Ли $\mathfrak{g}$** .

Для задания структуры алгебры Ли на n -мерном линейном пространстве, достаточно определить попарные коммутаторы базисных векторов e_i , то есть коэффициенты c_{ij}^k в разложении $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$. Эти коэффициенты называются *структурными константами** алгебры Ли. Они должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} c_{ij}^k + c_{ji}^k &= 0 & (\text{антисимметричность}) \\ c_{is}^p c_{jk}^s + c_{js}^p c_{ki}^s + c_{ks}^p c_{ij}^s &= 0 & (\text{тождество Якоби}) \end{aligned}$$

Подпространство L алгебры $\mathfrak{g}$ является *подалгеброй*, если $[L, L] \subset L$, и *идеалом*, если $[L, \mathfrak{g}] \subset L$. Существование подалгебр и идеалов в $\mathfrak{g}$ выражается в определенных ограничениях на структурные константы. Например, если $e_1, \dots, e_k$ – базис идеала, то $c_{ij}^s = 0$ при $i \leq j, s > k$ и произвольном j .

ПРИМЕРЫ.

- 1) Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ группы $GL(n, \mathbb{R})$ – это пространство всех матриц порядка n .
- 2) Алгебра Ли $\mathfrak{o}(n)$ ортогональной группы $O(n)$ состоит из всех антисимметричных матриц $\{a \mid a^T = -a\}$. Она совпадает с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(n)$ для группы $SO(n)$.
- 3) Алгебра Ли $\mathfrak{u}(n)$ унитарной группы $U(n)$ состоит из всех антиэрмитовых матриц $\{a \mid a^\dagger = -a\}$. Алгебра Ли $\mathfrak{su}(n)$ для группы $SU(n)$ определяется дополнительным условием бесследовости $\text{Tr } a = 0$.

Композиция сдвига в группе G на элемент g слева и на g^{-1} справа,

$$h \rightarrow ghg^{-1}, \quad h, g \in G$$

называемая внутренним автоморфизмом группы $\text{Int } G : G \rightarrow G$, задает автоморфизм касательного пространства (алгебры Ли) $\text{Ad } g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ по формуле $\text{Ad } g(v) = gvg^{-1}$. Это отображение является представлением $\text{Ad} : G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ группы Ли G в n -мерном линейном пространстве алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Оно называется *присоединенным представлением*. Для абелевых групп представление Ad тривиально, то есть $\text{Ad } g = 1$ для $\forall g \in G$.

Дифференциал отображения Ad является отображением $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, которое задает представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Его можно явно записать в виде линейного оператора ad_v , действующего в $\mathbb{R}^n$:

$$\text{ad}_v w = [v, w], \quad v, w \in \mathfrak{g}$$

В базисе e_i присоединенное представление имеет вид $\text{ad}_{e_i} e_j = c_{ij}^k e_k$. Пространство всех операторов ad_v является подалгеброй и идеалом алгебры Ли $\text{Der } \mathfrak{g}$ всех дифференцирований* $\mathfrak{g}$ и называется *присоединенной алгеброй*.

На алгебре Ли можно определить скалярное произведение по формуле

$$(v, w)_K = \text{Tr}(\text{ad}_v \cdot \text{ad}_w), \quad v, w \in \mathfrak{g}$$

* Эти величины не являются постоянными, несмотря на название, а преобразуются как тензор третьего ранга при замене базиса в алгебре $\mathfrak{g}$.

* Дифференцирование D алгебры $\mathfrak{g}$ – это линейное отображение $\mathfrak{g}$ в себя, удовлетворяющее правилу Лейбница: $D([v, w]) = [D(v), w] + [v, D(w)]$ для любых $v, w \in \mathfrak{g}$.

которая задает на $\mathfrak{g}$ инвариантную (относительно группы всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$) метрику Киллинга (функционал Киллинга)

$$g_{ij}^K = c_{ik}^l c_{jl}^k$$

Метрика Киллинга невырождена тогда и только тогда, когда алгебра Ли полупроста. Если G – компактная группа, то форма Киллинга является отрицательно определенной и существует базис алгебры Ли, к которому она принимает вид $g_{ij}^K = -2\delta_{ij}$. В теориях калибровочных полей как правило используют компактные группы, поскольку отрицательная определенность формы Киллинга приводит к положительной определенности энергии калибровочного поля в таких моделях.

ПРИМЕР. Метрика Киллинга на алгебре Ли общей линейной группы $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ имеет вид

$$(v, w)_K = 2n \operatorname{Tr}(vw) - 2 \operatorname{Tr}(v) \operatorname{Tr}(w)$$

где vw – обычное матричное умножение, а $\operatorname{Tr}(v)$ обозначает след матрицы v .

4 Геометрия расслоений и калибровочные теории

4.1 Расслоения. Векторные и главные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гладкое расслоенное многообразие (fiber bundle), или расслоение, – это тройка объектов (E, π, M) , состоящая из многообразия E (тотального пространства расслоения), многообразия M (базы расслоения) и проекции $E \xrightarrow{\pi} M$, причем для любой точки $x \in M$ существует открытая окрестность U такая, что имеет место локальное расщепление, описываемое коммутативной диаграммой*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ \pi \downarrow & \swarrow pr_1 & \\ U & & \end{array}$$

Гомеоморфизм $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ локально задает на E структуру прямого произведения, а прообраз $\pi^{-1}(x)$, $\forall x \in M$ гомеоморфен многообразию F и называется (типичным) слоем (standard fiber) расслоения.

Таким образом, расслоение E над M со слоем F можно представлять себе как многообразие, которое локально является прямым произведением M и F . На E можно смотреть также как на семейство многообразий F , параметризованное точками многообразия M .

Если многообразие разбито на (погруженные) подмногообразия, то оно называется слоением (foliation). Пространство слоев слоения, в отличие от пространства слоев расслоения, вообще говоря, не является многообразием.

Множество всех $\{U_i, \varphi_i\}$ таких, что $\varphi_i : E|_{U_i} \simeq U_i \times F$, называется локальными тривиализациями, или калибровками (gauge). Эти тривиализации составляют атлас расслоения $A = \{U_i, \varphi_i, f_{ij}\}$ с функциями перехода (склейки) между слоями

$$f_{ij}(x) := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F \rightarrow (U_i \cap U_j) \times F$$

которые осуществляют гомеоморфизм слоя F и удовлетворяют условиям

$$f_{ii}(x) = \operatorname{Id}, \quad f_{ij}(x) = (f_{ji}(x))^{-1}, \quad f_{ij}f_{jk} = f_{ik}$$

* Коммутативная диаграмма — это ориентированный граф, в вершинах которого находятся объекты, а стрелками являются морфизмы (отображения), причём результат композиции стрелок не зависит от выбранного пути.

Функции перехода можно представлять себе как матричнозначные функции $T_{ij}(x)$, действующие на координаты расслоения $x \in U_j$, $y \in F$ по правилу

$$f_{ij} : (x, y) \rightarrow (x, T_{ij}(x)y)$$

Набор отображений f_{ij} называется *склеивающим коциклом*. Смена тривиализации расслоения называется также *калибровочным преобразованием* (пример расслоения для поля Максвелла мы рассмотрим в следующем параграфе).

Сечением (section) расслоения E называется такое непрерывное отображение $s : M \rightarrow E$, что $\pi \circ s(x) = x$ для $\forall x \in M$. Множество всех сечений E над M обозначается $\Gamma(M, E)$. В физических приложениях сечение – это просто физическое поле на многообразии M . Существенно, что хотя локальные сечения $s : U_i \rightarrow E$ существуют всегда, глобальное сечение $s : M \rightarrow E$ есть не у каждого расслоения.

Если расслоение E является прямым произведением $E = M \times F$, то оно называется *тривиальным*. Заметим, что любое расслоение по определению локально-тривиально. У тривиального расслоения всегда существует глобальное сечение. Таким образом, существование (нетривиального) глобального сечения является важной топологической характеристикой многообразия.

ПРИМЕР. *Лист Мебиуса* представляет собой простейший пример нетривиального расслоения над базой – окружностью S^1 со слоем $F = [-1, 1]$. Структура расслоения определяется атласом, состоящим из двух карт $U_1 \times F$ и $U_2 \times F$, над покрытием

$$U_1 = \{-\varepsilon < \alpha < \pi + \varepsilon\}, \quad U_2 = \{\pi - \varepsilon < \alpha < 2\pi + \varepsilon\}$$

$$U_1 \cap U_2 = W_1 \cup W_2, \quad W_1 = [-\varepsilon, \varepsilon], \quad W_2 = [\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon]$$

с функциями перехода

$$\varphi(\alpha) : v \mapsto -v, \quad \alpha \in W_1, v \in F$$

$$\varphi(\alpha) : v \mapsto v, \quad \alpha \in W_2, v \in F$$

Для цилиндра (тривиального расслоения над окружностью) функция перехода имеет вид

$$\varphi(\alpha) : v \mapsto v$$

Лист Мебиуса имеет глобальное сечение $(v \circ s)\alpha = 0$.

ПРИМЕР. *Касательное расслоение* (tangent bundle) TM – это $(2n)$ -мерное многообразие касательных пространств к n -мерному многообразию M . Здесь базой расслоения является многообразие M , слоем – пространство $\mathbb{R}^n$. В качестве атласа расслоения можно взять голономный атлас с координатами $(x_i^\mu, \dot{x}_i^\mu)$ и функциями перехода

$$\|f_{ij}(x)\|_\nu^\mu = \frac{\partial x_i^\mu}{\partial x_j^\nu}, \quad \dot{x}_i^\mu = \|f_{ij}(x)\|_\nu^\mu \dot{x}_j^\nu$$

Сечения касательного расслоения TM – это векторные поля на многообразии M . Заметим, что над M существуют и другие расслоения со слоем $\mathbb{R}^n$, не эквивалентные касательному TM .

Многообразие, касательное расслоение которого тривиально, называется *параллелизуемым*. Многообразие размерности n параллелизуемо тогда и только тогда, когда на нем имеется n линейно независимых в каждой точке непрерывных векторных полей. Отметим, что все группы Ли являются параллелизуемыми многообразиями.

Примером тривиального касательного расслоения служит касательное расслоение $TM = S^1 \times \mathbb{R}$ над окружностью $M = S^1$ – двумерное многообразие, диффеоморфное

бесконечному цилиндру. В качестве примера касательного расслоения, не являющегося тривиальным, можно привести касательное расслоение TM над сферой $M = S^2$. Это четырехмерное многообразие, которое локально имеет структуру $U_i \times \mathbb{R}^2$, $U_i \in S^2$, но глобально $TM \neq S^2 \times \mathbb{R}^2$. Как следствие, на сфере нельзя построить векторного поля, которое нигде не обращалось бы в ноль (“нельзя причесать ежа”).

Дифференциальные 1-формы являются сечениями *кокасательного* расслоения (cotangent bundle) T^*M с голономными координатами $(x^\mu, \dot{x}_\mu)$ и с функциями перехода

$$\|f_{ij}(x)\|_\nu^\mu = \frac{\partial x_i^\mu}{\partial x_j^\nu}, \quad (\dot{x}_i)_\nu = \|f_{ij}(x)\|_\nu^\mu (\dot{x}_j)_\mu$$

Дифференциальные формы старших порядков определяются как сечения внешнего произведения кокасательного расслоения $\bigwedge^k T^*M = T^*M \wedge \dots \wedge T^*M$ со слоем $-k$ -кратным антисимметризованным тензорным произведением слоя $\mathbb{R}^n$ расслоения T^*M .

Векторные и главные расслоения

Расслоения, как правило, наделяют некоторой алгебраической структурой. Это может быть структура линейного пространства (над полем действительных $\mathbb{R}$ или комплексных чисел $\mathbb{C}$), и тогда мы получаем *векторное расслоение*, частным случаем которого является касательное расслоение. Слой векторного расслоения изоморфен линейному пространству $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), и гомеоморфизмы тривиализации линейны на этих слоях, по сути можно считать, что на слой действуют линейные преобразования из $GL(n, \mathbb{R})$ ($GL(n, \mathbb{C})$).

Векторное расслоение с одномерным слоем (действительным или комплексным) называется *линейным*. Комплексное расслоение с голоморфными функциями перехода называется *голоморфным* расслоением.

ПРИМЕР. Построим все *линейные голоморфные расслоения* над сферой S^2 . Для этого удобно рассматривать S^2 как компактифицированную комплексную плоскость, то есть сферу Римана $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Покроем S^2 двумя картами $\{U_0, z\}$ и $\{U_\infty, w\}$, где z – это стандартная комплексная координата в окрестности $U_0 = S^2/\{\infty\} \approx \mathbb{C}$, а $w = 1/z$ – координата на $U_\infty = S^2/\{0\} \approx \mathbb{C}$. Соответствующие сечения обозначим $s_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ и $s_\infty : U_\infty \rightarrow \mathbb{C}$. Структура расслоения будет определена с помощью функции перехода $f_{\infty 0} : U_0 \cap U_\infty \rightarrow GL(1, \mathbb{C})$

$$s_\infty = f_{\infty 0} s_0, \quad \text{где выберем } f(z) = \frac{1}{z^n}$$

Такая функция перехода определяет для каждого целого n некоторое голоморфное расслоение над S^2 , которое обозначается $\mathcal{O}(n)$. Можно доказать, что любое голоморфное линейное расслоение изоморфно $\mathcal{O}(n)$ при некотором n . Тривиальное расслоение $S^2 \times \mathbb{C}$ будет соответствовать $\mathcal{O}(0)$. Касательное расслоение TS^2 также должно быть изоморфно $\mathcal{O}(n)$ при определенном n . Поскольку $dw = -(1/z^2)dz$, то функция перехода для касательного расслоения должна иметь вид $f_{\infty 0} = dw/dz = -1/z^2$, откуда следует, что $TS^2 \cong \mathcal{O}(2)$. Аналогично для кокасательного расслоения получаем $T^*S^2 \cong \mathcal{O}(-2)$.

Отметим важный факт, что любое голоморфное векторное расслоение E над S^2 эквивалентно прямой сумме линейных расслоений $E \cong \mathcal{O}(n_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(n_k)$ (теорема Биркгофа-Гротендика).

Векторное расслоение всегда допускает глобальное сечение, например нулевое сечение $s(x) = 0$, которое сохраняется линейными преобразованиями. Так же можно выбрать ненулевое локальное сечение внутри некоторой окрестности U . Если около границы U

это сечение обращается в ноль, то его можно продолжить непрерывно как нулевое сечение за границу U и таким образом получить глобальное ненулевое сечение. Заметим, что нетривиальное глобальное сечение расслоения, которое в каждой точке многообразия отлично от нуля, существует не всегда. Пример – касательное расслоение к сфере. Вообще, среди всех двумерных замкнутых ориентируемых поверхностей только касательное расслоение над тором имеет нетривиальное сечение.

Набор $s = (s_1, \dots, s_n)$ из n гладких (непрерывных, аналитических в зависимости от типа расслоения) сечений векторного расслоения над окрестностью U n -мерного многообразия M называется *репером*, если вектора $\{s_1(x), \dots, s_n(x)\}$ образуют базис в слое для каждой точки $x \in U$. Выбор репера эквивалентен локальным тривиализациям расслоения.

Векторное расслоение тривиально тогда и только тогда, когда оно имеет глобально определенный над каждой точкой базы репер.

Важным классом расслоений являются *главные* расслоения (principal bundle), слоем которых является группа Ли, причем определено действие группы на себя левыми сдвигами $g : G \rightarrow gG$, $g \in G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Расслоение $P \xrightarrow{\pi} M$ называется **главным расслоением** со *структурной* (калибровочной) группой Ли G , если задано послойное свободное и транзитивное действие группы G на P справа $R_g : p \mapsto pg$, где $p \in P$, $g \in G$. База главного расслоения M диффеоморфна фактор-пространству P/G , а проекция π совпадает с каноническим отображением $P \rightarrow P/G$.

Любое главное расслоение однозначно задается выбором базы M , структурной группы G и атласом $A = \{U_i, \varphi_i, f_{ij}\}$, где функции перехода $f_{ij} - G$ -значные гладкие функции на $U_i \cap U_j$. Функции перехода определяются расслоением неоднозначно. Если рассмотреть различные тривиализации $\{U_i, \varphi_i\}$ и $\{U_i, \psi_i\}$ и определить отображение

$$\lambda_i(x) := \varphi_i(x) \circ \psi_i^{-1}(x) : U_i \times F \rightarrow U_i \times F$$

так, чтобы оно принадлежало структурной группе G , то функции перехода $f_{ij}(x)$ и

$$f'_{ij}(x) = \lambda_i^{-1}(x) f_{ij}(x) \lambda_j(x)$$

будут определять эквивалентные расслоения, а сами коциклы $\{f_{ij}\}$ и $\{f'_{ij}\}$ называются эквивалентными.

Глобальное сечение главного расслоения P существует тогда и только тогда, когда расслоение тривиально, то есть $P = M \times G$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы функции перехода имели вид

$$f_{ij}(x) = \lambda_i^{-1}(x) \lambda_j(x)$$

где $\lambda_i(x)$ – гомеоморфизмы слоя, принадлежащие структурной группе G .

С главным расслоением P со структурной группой G связаны так называемые *ассоциированные расслоения* (associated bundle), которые отличаются только слоем V , которой является в этом случае пространством представления группы G . Это часто обозначают как $P \times_G V \rightarrow M$.

ПРИМЕР. Ленту Мебиуса можно рассматривать как ассоциированное расслоение над окружностью со структурной группой $\mathbb{Z}_2 = \{e, g\}$. Функции перехода имеют вид

$$f_{12}(\alpha) = \begin{cases} e, & \alpha \in W_2 \\ g, & \alpha \in W_1 \end{cases}$$

ПРИМЕР. Векторное расслоение (в частности, касательное) называется ориентируемым, если все функции перехода f_{ij} могут быть выбраны так что $f_{ij} \in GL^+(n, \mathbb{R}) := \{f \in GL(n, \mathbb{R}) | \det(f) > 0\}$. Например, из функций перехода для расслоения, определяющего лист Мебиуса, видно ($f = -1$, $\alpha \in W_1$), что оно неориентируемо.

В физических приложениях сечения ассоциированных расслоений могут описывать поля материи в некотором представлении структурной (калибровочной) группы G . Обычно используется фундаментальное представление. Например, для $G = SU(n)$ сечение $\phi = s(x)$ в точке x будет иметь вид n -компонентного столбца-вектора, преобразующегося под действием матрицы $g \in SU(n)$ как $\phi \mapsto g\phi$.

Часто используется также присоединенное представление $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{g})$ группы Ли G в ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$ – здесь роль алгебры $\mathfrak{g}$ (как линейного пространства) играет слой *присоединенного* расслоения $\text{ad}P = P \times_G \mathfrak{g}$ главного расслоения P . Для группы $SU(n)$ сечение ϕ представляет антиэрмитову бесследовую матрицу размера $n \times n$, преобразующуюся как $\phi \mapsto g\phi g^{-1}$.

ПРИМЕР. Слой присоединенного расслоения с калибровочной группой $SU(2)$ изоморфен алгебре $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$. В качестве базиса в нем можно взять матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР. Касательное расслоение TM ассоциировано с главным расслоением со структурной группой $GL(n, \mathbb{R})$, которое также называют главным реперным расслоением LM .

Редукция структурной группы

Возможна ситуация, когда структурная группа G *редуцирована* к некоторой своей подгруппе $G_0 \subset G$. Это означает, что локальные тривиализации могут быть выбраны так, что все функции перехода принадлежат группе G_0 . В частности, главное расслоение будет тривиальным тогда и только тогда, когда его структурная группа может быть редуцирована к тривиальной подгруппе, состоящей из единицы.

Расслоения с редуцируемой структурной группой играют важную роль в физике, где они описывают системы со *спонтанным нарушением симметрии*, например, явление Хиггса в теории элементарных частиц или эффект Мейснера в теории сверхпроводимости. В геометрии главные расслоения, у которых структурная группа редуцирована от $GL(n, \mathbb{R})$ к некоторой подгруппе Ли G , называются G -структурами.

Существуют топологические препятствия для редукции структурной группы. Укажем необходимое и достаточное условие редуцируемости G .

Структурная группа G расслоения $P \rightarrow M$ редуцируема к своей замкнутой подгруппе G_0 тогда и только тогда, когда ассоциированное расслоение $P/G_0 \rightarrow M$ со слоем G/G_0 , на который группа G действует слева, допускает глобальное сечение.

ПРИМЕР. Структурная группа $GL(n, \mathbb{R})$ реперного расслоения и касательного расслоения TM всегда редуцируема к своей максимальной компактной подгруппе $O(n)$, то есть всегда существует атлас касательного расслоения с функциями перехода, принимающими значения в $O(n)$. В следствие этой редукции на любом многообразии можно определить риманову метрику. Отметим, что для ориентируемых многообразий структурная группа касательного расслоения всегда редуцируема к $SO(n)$.

Индукированные расслоения

Пусть задано расслоение $E \xrightarrow{\pi} M$ со слоем F и структурной группой G и отображение $f : M' \rightarrow M$. С помощью этого отображения можно построить новое расслоение $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ с тем же слоем F и той же группой G , которое будем называть *индуцированным* расслоением (pullback bundle). Если расслоение E задано атласом $A = \{U_i, \varphi_i, f_{ij}\}$, то структура индуцированного (с помощью отображения f) расслоения с базой M' , слоем F и группой G задается так:

- 1) покрытие $M' = \cup U'_i$, где $U'_i = f^{-1}(U_i)$;
- 2) функции перехода $f'_{ij} : (U'_i \cap U'_j) \times F \rightarrow (U'_i \cap U'_j) \times F$ определяются правилом

$$f'_{ij} : (x, y) \rightarrow (x, T'_{ij}(x)y), \quad \text{где} \quad T'_{ij}(x) = T_{ij}(f(x))$$

Справедлива коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ M' & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

При индуцировании сохраняются многие важные свойства расслоений. В частности, если пространство M может быть непрерывно стянуто в точку x_0 , то расслоение $E \rightarrow M$, индуцированное отображением $f : M \rightarrow x_0$, эквивалентно прямому произведению.

Касательное и кокасательное расслоения над $E \rightarrow M$

В геометрии и физических приложениях важную роль играют касательные TE и кокасательные T^*E расслоения над многообразиями, которые сами являются расслоениями $E \xrightarrow{\pi} M$.

Если на E ввести координаты (x^μ, y^i) с законом преобразования

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x^\nu), \quad y^i \rightarrow y'^i(x^\nu, y^j),$$

то голономными координатами на касательном расслоении $TE \xrightarrow{\pi_E} E$ будут величины $(x^\mu, y^i, \dot{x}^\mu, \dot{y}^i)$, где $(\dot{x}^\mu, \dot{y}^i)$ – координаты на касательных пространствах к E , заданные относительно голономного репера $(\partial_\mu, \partial_i)$. Функции перехода для расслоения TE имеют вид

$$\dot{x}'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \dot{x}^\nu, \quad \dot{y}'^i = \frac{\partial y'^i}{\partial y^j} \dot{y}^j + \frac{\partial y'^i}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu$$

Кроме того, справедлива следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{T\pi} & TM \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ E & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

где $T\pi : (x^\mu, y^i, \dot{x}^\mu, \dot{y}^i) \rightarrow (x^\mu, \dot{x}^\mu)$ определяет TE также как расслоение над TM . Ядро этого отображения $\text{Ker } T\pi$, определяет вложенное подрасслоение, называемое *вертикальным* касательным расслоением VE , состоящее только из векторов, касательных к слоям E . Координатами на VE будут $(x^\mu, y^i, \dot{y}^i)$.

Голономными координатами на кокасательном расслоении $T^*E \xrightarrow{\pi_E} E$ будут величины $(x^\mu, y^i, \dot{x}_\mu, \dot{y}_i)$, где $(\dot{x}_\mu, \dot{y}_i)$ – координаты на кокасательных пространствах к E , заданные относительно голономного репера (dx^μ, dy^i) . В отличие от TE кокасательное

расслоение T^*E не образует расслоения над T^*M , что видно из закона преобразования координат

$$\dot{x}'_\mu = \frac{\partial y^i}{\partial x'^\mu} \dot{y}_i + \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \dot{x}_\nu$$

где первая группа слагаемых дает “лишнюю” зависимость функций перехода от координат $\dot{y}_i$. Таким образом справедлива только следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T^*E & & \\ \pi_E \downarrow & \searrow & \\ E & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

Формы на расслоениях

Прежде чем рассматривать дифференциальные формы на расслоениях, введем формы, принимающие значения в касательном пространстве многообразия, то есть определим *тангенциально-значную* форму ω как сечение расслоения

$$\bigwedge^k T^*M \otimes TM \rightarrow M$$

которое в голономных координатах имеет вид $\phi = \phi_{\nu_1 \dots \nu_k}^\mu(x) dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_k} \otimes \partial_\mu$. В этих терминах векторное поле на многообразии – это тангенциально-значная 0-форма.

Из дифференциальных форм на расслоениях наиболее часто используются следующие.

1. Горизонтальные формы $\phi : E \rightarrow \bigwedge^k T^*M$ – все формы на E , ограниченные на подрасслоение $T^*M \subset T^*E$. В координатах они имеют вид

$$\phi = \phi_{\nu_1 \dots \nu_k}(y) dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_k}$$

2. Тангенциально-значные горизонтальные формы $\phi : E \rightarrow \bigwedge^k T^*M \otimes TE$ имеют вид

$$\phi = dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_k} \otimes (\phi_{\nu_1 \dots \nu_k}^\mu(y) \partial_\mu + \phi_{\nu_1 \dots \nu_k}^i(y) \partial_i)$$

3. Тангенциально-значные проектируемые горизонтальные формы имеют вид

$$\phi = dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_k} \otimes (\phi_{\nu_1 \dots \nu_k}^\mu(x) \partial_\mu + \phi_{\nu_1 \dots \nu_k}^i(y) \partial_i)$$

4. Вертикально-значные горизонтальные формы $\phi : E \rightarrow \bigwedge^k T^*M \otimes VE$ имеют вид

$$\phi = \phi_{\nu_1 \dots \nu_k}^i(y) dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_k} \otimes \partial_i$$

ПРИМЕР. Вертикально-значная горизонтальная 1-форма на E $\sigma : E \rightarrow T^*M \otimes VM$, или в компонентах

$$\sigma = \sigma_\mu^i(y) dx^\mu \otimes \partial_i$$

называется *припавивающей* формой. Если $E = TM$, то существует каноническая припавивающая форма $\sigma = dx^\mu \otimes \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

4.2 Связности на расслоениях

Сечения расслоений можно складывать между собой и умножать на функции на M . Можно также задать дифференцирование сечений таким образом, чтобы оно не зависело от выбора локальных тривиализаций. Таким образом получается простейшее определение *линейной связности* как *ковариантного дифференцирования*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ковариантной производной ∇ на векторном расслоении $E \xrightarrow{\pi} M$ называется дифференциальный оператор 1-го порядка $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \times E)$, удовлетворяющий правилу Лейбница $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$, где s – гладкое сечение $E \rightarrow M$, а f – гладкая функция на M .

С общей точки зрения, связность на расслоении E является дополнительной геометрической структурой, которая определяет правило *параллельного переноса* – сопоставление всякому пути γ в базе M семейства отображений слоев F_γ расслоения E над точками этого пути. В инфинитезимальной форме задание связности можно наглядно представить себе как задание в каждой точке расслоения $y \in E$ направления, в котором она будет переноситься в многообразии E , если ее проекция $x = \pi(y)$ переносится в некотором направлении в базе M . Например, для главного расслоения $P \rightarrow M$ объект связности будет 1-формой на M со значениями в алгебре $\mathfrak{g}$.

С другой стороны, если говорить на языке касательных пространств, то для каждой точки y расслоения E определяется поднятие касательного пространства $T_x M$ к базе M в касательное пространство $T_y E$ к расслоению E , то есть связность определяет *горизонтальное расщепление* касательного расслоения $TE = HE \oplus VE$, что можно записать как послойное отображение

$$\dot{x}^\mu \partial_\mu + \dot{y}^i \partial_i \mapsto \dot{x}^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu^i \partial_i)$$

Таким образом, получаем геометрическое определение **связности** как тангенциально-значной проектируемой горизонтальной 1-формы Γ на E такой, что свертка $\Gamma \lrcorner \phi = \phi$ для всех горизонтальных форм ϕ . В голономных координатах на E связность имеет вид

$$\Gamma = dx^\mu \otimes (\partial_\mu + \Gamma_\mu^i(y) \partial_i)$$

с законом преобразования

$$\Gamma_\mu^i = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial y'^i}{\partial y^j} \Gamma_\nu^j + \frac{\partial y'^i}{\partial x^\nu} \right)$$

Приведенное выше определение линейной связности можно получить из общего определения, если потребовать, чтобы коэффициенты $\Gamma_\mu^i(y)$ линейно зависели от координат слоя y^i . Таким образом, **линейная связность** на векторном расслоении $E \rightarrow M$ – это 1-форма

$$\Gamma = dx^\mu \otimes (\partial_\mu - \Gamma_{\mu j}^i(x) y^j \partial_i)$$

Далее, если не оговорено противное, мы будем под связностью понимать именно линейную связность.

В физических приложениях связности на векторном расслоении $E \rightarrow M$ часто рассматривают как 1-формы на M со значениями в E . Такие формы будем обозначать как $A(x)$. Заметим, что форма связности A не имеет глобального описания на M . Ковариантное дифференцирование, определяемой этой связностью, есть просто линейное отображение $\nabla : \Omega^0(M, E) \rightarrow \Omega^1(M, E)$. Если выбрать локальные тривиализации, то есть над каждой окрестностью $U \subset M$ фиксировать репер $f = (e_1, \dots, e_r)$, то мы получим локальное представление связности

$$\nabla e_i = A_i^j e_j$$

где $A_i^j = A_i^j(f, \nabla) - r \times r$ -матричнозначная 1-форма над U . Если $s \in \Omega^0(M, E)$, то мы получаем локальное представление ковариантной производной

$$\nabla s = (ds + A \cdot s)^i e_i$$

При замене репера $f \mapsto f' = f \cdot g$, где $g : U \rightarrow GL(n)$, мы получим

$$A \mapsto A' = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$$

Можно расширить определение дифференцирования на формы произвольного порядка и ввести (единственный) оператор $\nabla : \Omega^p(M, E) \rightarrow \Omega^{p+1}(M, E)$, удовлетворяющий условию

$$\nabla(\omega s) = d\omega \wedge s + (-1)^q \omega \wedge \nabla s, \quad \omega \in \Omega^q(M), s \in \Omega^p(M, E)$$

В локальном представлении

$$\nabla s = ds + A \wedge s, \quad s \in \Omega^p(M, E)$$

Последовательность отображений

$$\Omega^0(M, E) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(M, E) \xrightarrow{\nabla} \Omega^2(M, E) \xrightarrow{\nabla} \dots$$

будет образовывать цепной комплекс (обобщенный комплекс де Рама), только в том случае, если оператор **кривизны** связности $F := \nabla \circ \nabla = \nabla^2 : \Omega^0(M, E) \rightarrow \Omega^2(M, E)$ обращается в ноль (связность в этом случае называется *плоской*). Легко проверить, что локально

$$Fs = (dA + A \wedge A) \wedge s, \quad s \in \Omega^p(M, E)$$

Производные сечений расслоения E не входят в 2-форму кривизны, в следствие этого кривизну можно рассматривать как $\text{End}(E)$ -значную 2-форму, где $\text{End}(E)$ – эндоморфизмы слоя.

Кривизна удовлетворяет важному дифференциальному *тождеству Бианки*

$$\nabla F = 0$$

Если на многообразии M задать векторное поле X , то по связности ∇ можно построить оператор $\nabla_X(s) := X \lrcorner \nabla(s) : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E)$, определяющий ковариантное дифференцирование вдоль поля X . Этот оператор является обобщением обычной производной по направлению. Будучи дифференциальной 2-формой, F_∇ является антисимметричной билинейной формой, действующей на касательном расслоении, поэтому свертка $F(X, Y)$ определяет линейный оператор $F(X, Y) : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E)$, и мы получаем классическое выражение для кривизны как коммутатора ковариантных дифференциальных операторов:

$$F(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$$

Связности на главных расслоениях

Опишем более подробно связности на главных расслоениях $P \rightarrow M$, где слой и функции перехода принадлежат некоторой группе Ли G . Для простоты изложения будем считать, что эта группа матричная.

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли структурной группы G . Введем $\mathfrak{g}$ -значную 1-форму $g^{-1}dg$ ($g \in G$), которая называется формой Маурера-Картана. Она инвариантна относительно левых сдвигов на постоянный элемент $g_0 \in G$ и ее можно разложить по базису $\{\Phi^a\}$

левоинвариантных 1-форм: $g^{-1}dg = \Phi^a \lambda_a$, где λ_a – постоянные элементы (матрицы) алгебры $\mathfrak{g}$. Базис $\{\Phi^a\}$ удовлетворяет уравнениям Маурера-Картана

$$d\Phi^a + \frac{1}{2}c^a_{bc}\Phi^b \wedge \Phi^c = 0$$

где c^a_{bc} – структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$. Аналогично можно работать с базисом левоинвариантных векторных полей

$$e_a = \text{Tr} \left(g \lambda_a \frac{\partial}{\partial g^T} \right) = g^k_j \|\lambda_a\|_k^l \frac{\partial}{\partial g^l_j}$$

который двойственен базису 1-форм: $e_a \lrcorner \Phi^b = \delta_a^b$.

Параллельный перенос будет определяться связностью $A(x) = A_\mu^a(x) \lambda_a dx^\mu$ – матричнозначной формой на базовом многообразии M . Эта связность задает инвариантное относительно правых сдвигов расщепление касательного пространства TP к расслоению P на горизонтальную компоненту HP с базисом

$$\nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A_\mu^a \bar{e}_a$$

и вертикальную компоненту VP с базисом $\bar{e}_a$:

$$TP = HP \oplus VP$$

где $\bar{e}_a = \text{Tr} \left(\lambda_a g \frac{\partial}{\partial g^T} \right)$ – базис правоинвариантных векторных полей на G . Кривизна связности определяется как коммутатор

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = -F_{\mu\nu}^a \bar{e}_a, \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + c_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c$$

откуда видно, что кривизна имеет только вертикальные компоненты.

При калибровочном преобразовании (автоморфизме главного расслоения), когда координата слоя g над окрестностью U связана с координатой g' над окрестностью U' функцией перехода $\varphi: g' = \varphi g$, связность на M преобразуется нетензорным образом

$$A' = \varphi A \varphi^{-1} + \varphi d\varphi^{-1}$$

Кривизна, напротив, имеет тензорный закон преобразования $F' = \varphi F \varphi^{-1}$.

В случае, когда структурной группой G является группа $O(n)$, связность называют *ортогональной*, и локально A представима 1-формой со значениями в алгебре $\mathfrak{o}(n)$ антисимметричных матриц $n \times n$. Если же G является группой $U(n)$, то связность называют *унитарной*, и локально A представима 1-формой со значениями в алгебре $\mathfrak{u}(n)$ антиэрмитовых матриц $n \times n$.

Если работать со связностью как с проектируемой формой ω , заданной на кокасательном расслоении T^*P к расслоению P , то связность имеет вид

$$\omega = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$$

где форма Маурера-Картана описывает вертикальную компоненту связности. Эта форма преобразуется тензорным образом $\omega \rightarrow g_0^{-1}\omega g_0$ при правых сдвигах $g \rightarrow gg_0$ (форма A является инвариантной), постоянна на векторах вертикального базиса $e_a \lrcorner \omega = \lambda_a$ и обращается в ноль на векторах горизонтального базиса $\nabla_\mu \lrcorner \omega = 0$.

Кривизна $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ связности ω имеет вид

$$\Omega = g^{-1}Fg, \quad F = dA + A \wedge A = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a \lambda_a dx^\mu \wedge dx^\nu$$

При калибровочном преобразовании $g' = \varphi g$ 1-форма связности ω и 2-форма кривизны Ω сохраняют свой вид в новых координатах слоя:

$$\begin{aligned}\omega &= g^{-1}Ag + g^{-1}dg = g'^{-1}Ag' + g'^{-1}dg' \\ \Omega &= g^{-1}Fg = g'^{-1}F'g'\end{aligned}$$

являясь объектами, глобально определенными на T^*P .

Связности в калибровочных теориях

В калибровочных теориях элементарных частиц обычно работают не с главными расслоениями $P \rightarrow M$, а с ассоциированными с ними расслоениями $E = P \times_G V \rightarrow M$. Структурная (калибровочная) группа G расслоения описывает внутренние симметрии частиц, а поля материи, принадлежащие некоторому представлению G , соответствуют сечениям $\phi(x) \in V$ этого расслоения. Линейная связность на расслоении E представляет калибровочное поле, точнее его калибровочный потенциал A .

Обычно используют присоединенное представление группы G , а связность записывают как дифференциальную форму, принимающую значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то есть $A(x) \in \Gamma(T^*M \otimes \mathfrak{g})$.

Компоненты ковариантной производной, определяемой связностью, в присоединенном представлении имеют вид

$$\nabla_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} + [A_\mu, \phi]$$

а для коммутаторов получаем выражение $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\phi = [F_{\mu\nu}, \phi]$, где

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

Здесь $F_{\mu\nu}$ – компоненты $\mathfrak{g}$ -значной 2-формы на M , которая описывает напряженность калибровочного поля.

Электромагнитное поле (поле Максвелла) описывают связностью на расслоении с калибровочной группой $U(1)$, а слабые и сильные ядерные взаимодействия (поля Янга-Миллса) соответствуют группам $SU(2)$ и $SU(3)$.

В слое присоединенного расслоения $P \times_G \mathfrak{g}$ обычно дополнительно вводят скалярное произведение с помощью билинейной симметрической формы Киллинга $(X, Y) = \text{Tr}(\text{ad}_X \cdot \text{ad}_Y)$ на алгебре $\mathfrak{g}$. Для групп $SU(n)$ метрика Киллинга имеет простой вид

$$(X, Y) = \text{Tr}(XY)$$

где $X, Y \in \mathfrak{su}(n)$ – бесследовые антиэрмитовы матрицы.

С помощью метрики $g_{\mu\nu}$ на базе(пространстве-времени) M и (невырожденной) метрики Киллинга в слое $\mathfrak{g}$ можно ввести лагранжиан $\mathcal{L}_{YM} := \frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(F_{\mu\nu}, F_{\alpha\beta})$ для функционала действия Янга-Миллса $S_{YM} = \int \mathcal{L}_{YM} \nu_M$. Функция $\mathcal{L}_{YM} := \frac{1}{4}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ корректно определена на всем M в силу ее инвариантности при калибровочных преобразованиях 2-формы кривизны $F \mapsto \varphi F \varphi^{-1}$.

Калибровочное поле F автоматически удовлетворяет тождеству Бианки

$$\nabla F = 0, \quad \text{или} \quad \nabla_{[\alpha} F_{\mu\nu]} = 0$$

в то время как уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала S_{YM} дают уравнения Янга-Миллса

$$\nabla \star F = 0, \quad \text{или} \quad \nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0$$

где в присоединенном представлении $\nabla_\alpha F_{\mu\nu} = \partial_\alpha F_{\mu\nu} + [A_\alpha, F_{\mu\nu}]$.

ПРИМЕР. Монополь Дирака.

Монополь Дирака представляет собой пример простейшего калибровочного поля, в данном случае поля Максвелла, на топологически нетривиальном многообразии $\mathbb{R}^3/0$. Такое многообразие стягиваемо к S^2 , поэтому для описания монополя необходимо классифицировать все $U(1)$ расслоения над сферой. Группы гомологий сферы имеют вид

$$H_0(S^2) = \mathbb{Z}, \quad H_1(S^2) = 0, \quad H_2(S^2) = \mathbb{Z}$$

В силу нетривиальности группы $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$ можно ожидать, что мы получим различные неэквивалентные расслоения.

Покроем базу расслоения S^2 двумя картами H_+ (верхняя полусфера) и H_- (нижняя полусфера) с угловыми координатами (θ, α) : $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Слоем расслоения является групповое пространство $U(1) \approx S^1$ с координатой $\exp(i\psi)$. Полусферы, пересекающиеся по экватору, являются областями тривиализации расслоения. Над верхней полусферой $U(1)$ расслоение является произведением $H_+ \times U(1)$ с координатами $(\theta, \alpha, \exp(i\psi_+))$, а над нижней – произведением $H_- \times U(1)$ с координатами $(\theta, \alpha, \exp(i\psi_-))$. Функция перехода (склейки слоев) φ : $\exp(i\psi_-) = \varphi \exp(i\psi_+)$ должна принадлежать группе $U(1)$, зависеть только от α и быть по α периодичной. Эти требования приводят к следующим функциям:

$$e^{i\psi_-} = e^{in\alpha} e^{i\psi_+}$$

где целое число n является топологическим инвариантом и позволяет классифицировать неэквивалентные расслоения. При $n = 0$ мы имеем тривиальное расслоение $P_{n=0} = S^2 \times S^1$. При $n \neq 0$ все расслоения только локально-тривиальны, в частности, при $n = 1$ мы получаем известное расслоение Хопфа $P_{n=1} = S^3 \rightarrow S^2$.

Введем теперь на этом расслоении линейную связность – дифференциальную 1-форму A со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$ группы $U(1)$. Локальные формы связности над соответствующими областями тривиализации связаны соотношением $A_- = \varphi A_+ \varphi^{-1} + \varphi d\varphi^{-1}$, что после подстановки $\varphi = \exp(in\alpha)$ дает

$$A_- = A_+ - in d\alpha$$

Здесь слагаемое $in d\alpha$ описывает калибровочное преобразование связности (электромагнитного потенциала) при смене тривиализации над пересечением карт H_+ и H_- . Алгебра мнимых чисел $i\mathbb{R}$, очевидно, изоморфна алгебре действительных чисел $\mathbb{R}$, поэтому для удобства мы далее будем считать, что формы $A_\pm$ принимают значения в $\mathbb{R}$, то есть являются обычными вещественными дифференциальными формами.

Мы ищем связности (калибровочные потенциалы), которые удовлетворяют уравнениям Максвелла в пространстве $\mathbb{R}^3/0$ и описывают поле магнитного монополя Дирака. Такое калибровочное поле соответствует связностям, которые локально задаются формами

$$A_\pm = \frac{n}{2}(\pm 1 - \cos(\theta))d\alpha = \frac{n}{2r} \frac{xdy - ydx}{z \pm r}$$

Эти формы связаны полученным выше калибровочным преобразованием и регулярны над своей областью тривиализации. Заметим также, что форму A_+ нельзя регулярно продолжить в область нижней полусферы H_- , где она становится сингулярной на струне $z < 0, x = y = 0$ (“дираковская струна”).

Калибровочное поле (2-форма кривизны связности) имеет вид

$$F = dA_\pm = \frac{n}{2} \sin(\theta) d\theta \wedge d\alpha = \frac{n}{2r^3} (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$$

Оно удовлетворяет уравнениям Максвелла $dF = 0$, $\delta F = 0$ в $\mathbb{R}^3/0$ и описывает поле точечного магнитного заряда величины n . Сделаем несколько замечаний.

- 1) В силу коммутативности калибровочной группы $U(1)$ форма кривизны остается инвариантной при калибровочных преобразованиях: $F_- = \varphi F_+ \varphi^{-1} = F_+ = F$.
- 2) 2-форма кривизны F является замкнутой ($dF = 0$), но не является точной, так как не существует глобально определенной на $\mathbb{R}^3/0$ 1-формы A такой, что $F = dA$. Это следствие нетривиальности группы гомологий $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$.
- 3) Квантование магнитного заряда n связано с нетривиальной топологической структурой самого расслоения P_n , что в свою очередь обусловлено топологией базы S^2 .

4.3 Характеристические классы

При изучении расслоений естественным образом возникает два вопроса. Во-первых, сколько неэквивалентных расслоений E можно построить для заданных многообразий базы M и слоя F ? Во-вторых, существуют ли какие-либо критерии, которые говорили бы нам, насколько сильно данное расслоение E отличается от тривиального $M \times F$?

Для ответа на второй вопрос заметим, что топология расслоения фактически определяется топологией базового многообразия. Например, любое расслоение над стягиваемой базой всегда тривиально. Можно сказать, что для того, чтобы получить нетривиальное векторное расслоение, нужно иметь нетривиальную топологию базового многообразия. В свою очередь, расслоение можно использовать как инструмент для исследования и описания топологических свойств базы. Такими топологическими инвариантами, определенными с помощью расслоений, являются характеристические классы. Можно сказать, что характеристический класс измеряет отклонение структуры локального произведения от структуры глобального произведения слоя и базы.

Характеристические классы – это алгебраические конструкции, элементы групп когомологий базового многообразия M , заданные с помощью расслоения $E \rightarrow M$. Такие конструкции сопоставляют расслоению замкнутую форму в базе, интегралы от которой по циклам являются топологическими инвариантами.

Общий подход к построению характеристических классов для главного $P \rightarrow M$ или ассоциированного $P \times_G V$ расслоения основан на изучении так называемого универсального расслоения EG . Для фиксированной размерности n и группы G универсальное расслоение – это, грубо говоря, такое расслоение, к которое можно вложить любое другое расслоение над многообразием размерности n и с группой G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Главное расслоение $EG \rightarrow M$ с группой G называется **универсальным** для данной группы G , если EG стягиваемо (или все гомотопические группы $\pi_i(EG) = 0$).

Справедлива следующая *классификационная теорема*: множество $S(M, G)$ расслоений с данной базой M и группой G (с точностью до эквивалентности) совпадает с множеством гомотопических классов отображений базы M в базу BG универсального расслоения, которая называется *классифицирующим пространством*.

Таким образом для заданной группы G множество $S(M, G)$ зависит только от гомотопического типа пространства M и является гомотопическим инвариантом. Фактически все расслоения получаются из отображений $f : M \rightarrow BG$ в классифицирующее пространство как индуцированные расслоения.

Характеристические классы для расслоения $E \rightarrow M$ представляют собой элементы когомологий $c(E) \in H^*(M, R)$ с коэффициентами в кольце R . Можно доказать, что на самом деле они однозначно определяются классами $c(EG) \in H^*(BG)$ универсального расслоения $EG \rightarrow BG$. Построение этих классов основывается на следующих рассуждениях.

Неэквивалентные расслоения с группой G могут быть классифицированы гомотопическими классами отображений $f : M \rightarrow BG$. Далее, гомотопические группы $\pi_{k+1}(BG)$ и $\pi_k(G)$ изоморфны в силу стягиваемости EG . Теорема Гуревича устанавливает связь между когомологиями $H^*(BG)$ и $H^*(G)$. Поскольку когомологии группы Ли определяются когомологиями ее алгебры Ли, то нам необходимо найти отображение " $H^*(\mathfrak{g}) \rightarrow H^*(M)$ ", соответствующее $f^* : H^*(BG) \rightarrow H^*(M)$.

Обозначим через $I^k(G)$ множество симметричных полилинейных отображений

$$f : \underbrace{\mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g}}_k \rightarrow \mathbb{R}$$

и определим однородный полином $p(X) = f(X, \dots, X)$ степени k от элементов $X \in \mathfrak{g}$. Функции $f(X_1, \dots, X_k)$ называются поляризациями для полинома $p(X)$. Значения этих функций могут быть восстановлены по значениям полинома p , например при $k = 2$: $f(X, Y) = \frac{1}{2}(p(X+Y) - p(X) - p(Y))$. Далее будем рассматривать только инвариантные полиномы и, соответственно, поляризации, для которых

$$p(gXg^{-1}) = p(X), \quad g \in G$$

Введем на расслоении $E \rightarrow M$ связность, и пусть 2-форма F – кривизна этой связности. Эта форма не определена глобально на M , так как при калибровочных преобразованиях она изменяется по закону $F \mapsto gFg^{-1}$. Напротив, если p – определенный выше инвариантный полином, то $p(F) \in \Omega^{2k}(M)$ – глобально определенная $(2k)$ -форма на M . Эта форма обладает двумя важными свойствами:

- 1) $p(F)$ – замкнутая форма, то есть $dp(F) = 0$;
- 2) если F_1 и F_2 – две формы кривизны, соответствующие двум различным связностям, то существует $(2k-1)$ -форма χ на M такая, что $p(F_1) - p(F_2) = d\chi$.

Таким образом *характеристическая форма* $p(F)$ определяет класс когомологий де Рама, независимый от связности на M . Это дает нам алгебраический *гомоморфизм Вейля* $I(G) = \sum I^k(G) \rightarrow H^*(M, \mathbb{R})$.

Классы Чженя

Классы Чженя являются характеристическими классами для комплексных расслоений с группой $GL(n, \mathbb{C})$. Инвариантный полином $p(X)$ можно построить следующим образом. Пусть матрица $X \in \mathfrak{g}$ имеет собственные значения $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, тогда полином $p(X)$ является симметричной функцией от λ_i . Если ввести симметричные однородные полиномы

$$S_j(\lambda) = \sum_{i_1 < \dots < i_j} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_j}$$

то инвариантный полином можно записать в виде следующего разложения

$$p(X) = a + bS_1(\lambda) + cS_2(\lambda) + \dots$$

Примером инвариантного полинома будет

$$\det(I + X) = 1 + S_1(\lambda) + \dots + S_n(\lambda)$$

Используя $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ -значную форму кривизны F на расслоении, определим *полную форму Чженя* (инвариантный полином) как

$$c(F) = \det(I + \frac{i}{2\pi} F) = 1 + c_1(F) + c_2(F) + \dots$$

где $(2j)$ -формы $c_j(F)$ (полиномы степени j по F) называются *формами Чжэня*. Классы когомологий этих форм являются характеристическими классами Чжэня расслоения E и не зависят от выбора связности.

Для форм Чжэня можно получить явные формулы, если использовать разложение по однородным полиномам для $X = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$:

$$\det(I + \frac{i}{2\pi}X) = (1 + \frac{i}{2\pi}\lambda_1) \dots (1 + \frac{i}{2\pi}\lambda_k) = 1 + \frac{i}{2\pi}S_1(\lambda) + \dots$$

где, например, $S_1(\lambda) = \text{Tr } X$, $S_2(\lambda) = \sum_{i < j}^n \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}((\text{Tr } X)^2 - \text{Tr } (X^2))$ и т. д. Таким образом, получаем следующие выражения

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{i}{2\pi} \text{Tr } F \\ c_2 &= \frac{1}{8\pi^2} (\text{Tr } (F \wedge F) - \text{Tr } F \wedge \text{Tr } F) \\ &\dots \end{aligned}$$

Поскольку $c_i(F) \in \Omega^{2i}(M)$, то все $c_j = 0$ при $(2j) > n = \dim M$.

Заметим, что для групп $GL(n, \mathbb{C})$ и $U(n)$ инвариантные полиномы могут быть отождествлены, и характеристические классы таких расслоений совпадают. Для $SU(n)$ расслоений $c_1 = 0$, поэтому если для комплексного векторного расслоения $c_1 \neq 0$, то не существует ассоциированного ему главного $SU(n)$ расслоения. Обратное утверждение неверно, так как существуют расслоения с $c_1 = 0$, которые не допускают $SU(n)$ структуру.

Классы когомологий, к которым принадлежат классы Чжэня, в действительности являются элементами целочисленных групп когомологий, поэтому можно проинтегрировать $(2i)$ -форму $c_i(F)$ по $(2i)$ -циклу на M с целыми коэффициентами и получить целое число, не зависящее от выбора связности. В случае компактной базы расслоения можно определить *числа Чжэня*, как результат интегрирования инвариантных полиномов по всему многообразию M . Например, для 4-мерного пространства получается два числа Чжэня

$$C_2(E) = \int_M c_2(F) \quad \text{и} \quad C_1^2(E) = \int_M c_1(F) \wedge c_1(F)$$

ПРИМЕР. Построим полную форму Чжэня $c(F)$ и найдем числа Чжэня для $U(1)$ расслоения над сферой S^2 , описывающего магнитный монополю Дирака. База расслоения двумерна, поэтому отлична от нуля только 2-форма Чжэня $c_1(F)$. Используя форму кривизны $F = i \frac{n}{2} \sin(\theta) d\theta \wedge d\alpha$ получаем

$$c(F) = 1 + c_1(F), \quad c_1(F) = \frac{i}{2\pi} \text{Tr } F = -\frac{n}{4\pi} \sin \theta d\theta \wedge d\alpha$$

Число Чжэня

$$C_1 = \int_{S^2} c_1 = -\frac{n}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\alpha = -n$$

В этом примере число Чжэня $C_1 = -n$ параметризует неэквивалентные $U(1)$ расслоения над S^2 , причем для тривиального расслоения $E = S^2 \times U(1)$ число Чжэня $C_1 = 0$. С физической точки зрения число Чжэня здесь – магнитный заряд монополя.

5 Дополнительные структуры на многообразиях

В этом разделе будут перечислены некоторые дополнительные геометрические структуры, которые находят приложения в физике. Список их, безусловно, далеко не полон. Каждая из этих структур подробно описана в доступной учебной литературе, примерный список которой приведен в конце обзора.

5.1 Риманова метрика в теории гравитации

Пусть задано многообразие M , и в каждой его точке определена билинейная форма $g(v, w) : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$, то есть определено скалярное произведение с помощью симметричного невырожденного тензора $g_{\mu\nu}(x)$. Тогда M называется *римановым многообразием*, а $g_{\mu\nu}(x)$ – римановой метрикой. Она определяет расстояние ds между двумя бесконечно-близкими точками с координатами x^μ и $x^\mu + dx^\mu$ по формуле

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

Компоненты метрики $g_{\mu\nu}$ заданы относительно голономного (координатного) базиса $\{\partial_\mu\} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Часто используют общий неголономный базис касательного пространства

$$e_a(x) = h_a^\mu(x) \partial_\mu$$

где невырожденные матрицы (компоненты приращивающих форм) $h_a^\mu(x)$ называются тетрадными функциями. Неголономный базис кокасательного пространства обозначают

$$\omega^a(x) = \tilde{h}_\mu^a(x) dx^\mu$$

где $h_a^\mu \tilde{h}_\nu^a = \delta_\nu^\mu$ и $h_a^\mu \tilde{h}_\mu^b = \delta_a^b$. Тетрады связаны с метрикой соотношениями

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h_\mu^a h_\nu^b, \quad \eta^{ab} = g^{\mu\nu} h_\mu^a h_\nu^b$$

где матрица $g^{\mu\nu}$ обратна матрице $g_{\mu\nu}$. Для собственно римановых пространств с положительно определенной метрикой обычно используют ортонормированный базис, в котором $\eta_{ab} = \delta_{ab}$. Для пространства-времени с псевдоевклидовой метрикой $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ (метрика Минковского).

В точке x_0 метрика $g_{\mu\nu}(x_0)$ всегда может быть приведена к диагональному виду с помощью диффеоморфизма многообразия. В окрестности точки этого сделать в общем случае невозможно, препятствием является кривизна многообразия.

Формы $\omega^a(x)$ должны удовлетворять *структурным уравнениям Кармана*

$$\begin{aligned} d\omega^a + \omega_b^a \wedge \omega^b &= T^a \\ d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c &= R_b^a \end{aligned}$$

где $\omega_b^a = \Gamma_{bc}^a \omega^c$ – 1-форма связности на касательном расслоении, $T^a = \frac{1}{2} T_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c$ – 2-форма *кручения*, $R_b^a = \frac{1}{2} R_{bcd}^a \omega^c \wedge \omega^d$ – 2-форма кривизны на многообразии.

Связность ω_b^a в общем случае не зависит от метрики. Если потребовать, чтобы связность была без кручения,

$$T_{\alpha\beta}^\mu = \Gamma_{[\alpha\beta]}^\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d\omega^a + \omega_b^a \wedge \omega^b = 0$$

и метрической, то есть ковариантная производная метрики обращалась бы в ноль

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\alpha}^\gamma g_{\gamma\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\gamma g_{\mu\gamma} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{(ab)} = 0$$

то можно доказать, что такая связность существует и притом единственная. Она называется *связностью Леви-Чивита* и ее компоненты в голономном базисе (символы Кристоффеля) $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$ однозначно определяются метрикой:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu})$$

Общая линейная связность в голономных координатах допускает следующее разложение

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} + T^\alpha_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}{}^\alpha + T_{\nu\mu}{}^\alpha + C^\alpha_{\mu\nu} + C_\nu{}^\alpha{}_\mu - C_{\nu\mu}{}^\alpha$$

где тензор неметричности $C_{\mu\nu\alpha} = -\frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\gamma_{\mu\alpha} g_{\gamma\nu} - \Gamma^\gamma_{\nu\alpha} g_{\mu\gamma})$. В этом (общем) случае геометрия многообразия определяется метрикой, ее ковариантной производной и тензором кручения.

В *общей теории относительности* используется связность Леви-Чивита, поэтому в ОТО 1-форма связности всегда удовлетворяет условиям

$$d\omega^a = -\omega^a_b \wedge \omega^b, \quad \omega_{(ab)} = 0, \quad d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = R^a_b$$

Используя тензор кривизны R^a_{bcd} , определим тензор Риччи $R_{ab} = R^c_{acb}$ и скалярную кривизну $R = R^a_a$.

Метрика $g_{\mu\nu}(x)$, описывающая гравитационное поле, должна удовлетворять *уравнениям Эйнштейна*

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = T_{ab}$$

где Λ – космологическая постоянная, а T_{ab} – тензор энергии-импульса материи. Уравнения Эйнштейна инвариантны относительно диффеоморфизмов (общеквариантных преобразований) многообразия M .

5.2 Финслеровы многообразия

Длина элемента дуги $ds = F(x^1, \dots, x^n; dx^1, \dots, dx^n)$ в римановой геометрии описывается функцией $F^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Если отказаться от требования квадратичности и рассматривать на расслоении $TM \setminus M = \{(x, y) \in TM \mid x \in M, y \in T_x M \setminus \{0\}\}$ произвольные гладкие функции $F(x, y)$, однородные степени 1 по y : $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, то мы получим *финслерову метрику* на M . Часто к условию однородности добавляют еще условие положительности гессиана $\frac{1}{2} \partial^2(F^2)/(\partial y^\mu \partial y^\nu)$.

Тензор $g_{\mu\nu}(x, y) := \frac{1}{2} (F^2)_{y^\mu y^\nu} = F F_{y^\mu y^\nu} + F_{y^\mu} F_{y^\nu}$, где $F_{y^\mu} := \partial F / \partial y^\mu$, называется *фундаментальным тензором* финслерова пространства. Он однороден по y^μ и, следовательно, определен на проективном касательном расслоении PTM . Очевидно, что если $F^2(x, y) = g_{\mu\nu}(x) y^\mu y^\nu$, то мы имеем обычную риманову метрику, заданную на M :

$$g_{\mu\nu}(x, y) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2(F^2)}{\partial y^\mu \partial y^\nu} = g_{\mu\nu}(x)$$

Фундаментальный тензор определяет скалярное произведение векторов касательного пространства $T_x M$, так как в силу условия однородности $F^2(x, y) = g_{\mu\nu}(x, y) y^\mu y^\nu$. Гиперповерхность в $T_x M$, определяемая при фиксированном x уравнением $F^2(x, y) = 1$, называется *индикатрисой*. В случае собственно римановой метрики индикатриса – это $(n - 1)$ -мерная единичная сфера евклидовой геометрии.

ПРИМЕР. Рассмотрим функцию $F(x, y) = \sqrt[n]{(h_\mu^1 y^\mu) \dots (h_\mu^n y^\mu)}$, где $\omega^a = h_\mu^a(x) dx^\mu$ – базис 1-форм в кокасательном пространстве T_x^*M . Она определяет метрическую функцию Бервальда-Моора в касательном пространстве $T_x M$ по формуле $F(y) = \sqrt[n]{y^1 \dots y^n}$.

Над $TM \setminus M$ строится индуцированное расслоение $\pi^* TM$ в соответствии с диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \pi^* TM & \longrightarrow & TM \\ \downarrow & & \downarrow \\ TM \setminus M & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

Его слоем над точкой (x, y) , $y \neq 0$ является копия n -мерного пространства $T_x M$. Заметим, что в силу однородности по y , часто удобно работать не с индуцированным расслоением над $2n$ -мерным расслоением $TM \setminus M$, а над $(2n - 1)$ -мерным проективным расслоением PTM .

Индикатриса определяет выделенное сечение $\pi^* TM$ – векторное поле $v = \frac{y^\mu}{F(x, y)} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, на котором фундаментальный тензор $g(v, v) = 1$. Дуальным объектом к v (сечением расслоения $\pi^* T^* M$) является гильбертова форма $\Omega = \Omega_\mu dx^\mu$ такая, что $\Omega(v) = 1$, где $\Omega_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu = \partial F / \partial y^\mu$. Если на M взять гладкую кривую $\sigma : [a, b] \rightarrow M$, то ее длина $L(\sigma)$ в финслеровой метрике будет определяться интегралом $L(\sigma) := \int_a^b F(\sigma, \frac{d\sigma}{dt}) dt$, который равен интегралу от гильбертовой формы:

$$L(\sigma) = \int_\sigma \Omega$$

В случае римановой метрики, когда $F = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) y^\mu y^\nu}$, $\Omega = \frac{1}{F} g_{\mu\nu}(x) y^\mu dx^\nu$, и мы получаем обычную длину

$$L(\sigma) = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu}(x(t)) \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt$$

На касательном расслоении к $TM \setminus M$ можно стандартным способом определить связность через расщепление

$$T(TM \setminus M) = V(TM \setminus M) \oplus H(TM \setminus M)$$

с вертикальным касательным расслоением $V(TM \setminus M) = \text{Ker } \pi^*$. Слои $V_{(x,y)}$ вертикального подрасслоения имеют базис вертикальных векторов $\partial_{y^\mu} := \partial / \partial y^\mu$, а слои горизонтального подрасслоения $H_{(x,y)}$ имеют базис $D_\mu = \partial_{x^\mu} - \Gamma_\mu^\nu \partial_{y^\nu}$, где $\Gamma_\mu^\nu(x, y)$ – коэффициенты нелинейной связности. Вектора $\partial / \partial y^\mu$ и D_μ образуют базис касательного пространства $T_{(x,y)}(TM \setminus M)$.

Используя финслерову функцию $F(x, y)$, можно определить каноническую нелинейную связность

$$\Gamma_\mu^\nu = \frac{1}{2} \frac{\partial G^\mu}{\partial y^\nu}$$

где коэффициенты пульверизации $G^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} ((F^2)_{y^\nu x^\alpha} y^\alpha - (F^2)_{x^\nu})$.

Несмотря на то, что на $\pi^* TM$ не существует канонической линейной связности, часто удобно ввести такую связность, исходя из различных дополнительных требований. Например, известная связность Чжэня $\omega_b^a(x, y)$ определяется условиями, аналогичными условиям для связности Леви-Чивита в римановой геометрии:

1) отсутствие кручения: $d\omega^a + \omega_b^a \wedge \omega^b = 0$, что в координатном базисе эквивалентно

отсутствию dy^α в разложении $\omega^\mu_\nu(x, y) = \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x, y)dx^\alpha$ и симметричности $\Gamma^\mu_{\nu\alpha} = \Gamma^\mu_{\alpha\nu}$;
 2) $dg_{\mu\nu} - \omega^\alpha_\mu g_{\alpha\nu} - \omega^\alpha_\nu g_{\mu\alpha} = 2C_{\mu\nu\alpha}\delta y^\alpha$, где введен тензор Картана $C_{\mu\nu\alpha}(x, y) = \frac{1}{4}(F^2)_{y^\mu y^\nu y^\alpha}$ и $\delta y^\alpha = dy^\alpha + \Gamma^\alpha_\nu dx^\nu$.

5.3 Симплектическая и пуассонова структуры

Симплектическая структура – это замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма Ω , заданная на четномерном многообразии, которое в этом случае называется симплектическим многообразием.

ПРИМЕР. Кокасательное расслоение T^*M с координатами $(x^\mu, \dot{x}_\mu)$ над многообразием M является симплектическим многообразием с канонической 2-формой

$$\Omega = d\dot{x}_\mu \wedge dx^\mu$$

В механике M называется конфигурационным пространством, а T^*M – фазовым пространством. Локальные координаты x^μ на M называются каноническими координатами, а координаты $\dot{x}_\mu$ в кокасательном пространстве относительно голономного базиса dx^μ – обобщенными импульсами. Симплектические многообразия описывают геометрию автономной механики консервативных систем.

Диффеоморфизм симплектических многообразий, переводящий симплектическую структуру одного в симплектическую структуру другого, называется *симплектоморфизмом* (каноническим преобразованием).

Условие замкнутости ($d\Omega = 0$) в определении Ω связывает кососкалярные произведения $(\dot{x}, \dot{y}) = \Omega_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{y}^\nu$ в касательных пространствах к соседним точкам таким образом, что локальная геометрия симплектических многообразий оказывается универсальной, а именно стандартной геометрией евклидова пространства. Все симплектические многообразия одинаковой размерности локально симплектоморфны (теорема Дарбу). Другими словами, на $(2n)$ -мерном многообразии всегда существуют такие координаты (q^i, p_i) , $q^i = x^i, p_i = x_{n+i}$, $i = 1, \dots, n$, что симплектическая структура в окрестности любой точки имеет вид

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i$$

Таким образом, в симплектической геометрии не существует локальных инвариантов, как это имеет место в геометрии римановой, где локальным инвариантом является тензор кривизны, который ограничивает группу изометрий и приводит к существованию бесконечномерного множества неэквивалентных римановых метрик. В симплектической геометрии вместо этого мы имеем бесконечномерную группу симплектоморфизмов и дискретный набор неэквивалентных *глобальных* симплектических структур.

В пространстве гладких функций на многообразии можно ввести структуру алгебры Ли – скобку Пуассона. В общем случае **скобка Пуассона** определяется как $\mathbb{R}$ -билинейное отображение на $C^\infty(M)$ такое, что для любых функций $f, g, h \in C^\infty(M)$ выполняются условия

- 1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (антисимметричность)
- 2) $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$ (тождество Якоби)
- 3) $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$ (правило Лейбница).

Локально скобка Пуассона задается антисимметричным тензором 2-го ранга $w^{\mu\nu}(x)$, удовлетворяющим условию

$$w^{\mu\alpha}\partial_\mu w^{\beta\gamma} + w^{\mu\beta}\partial_\mu w^{\gamma\alpha} + w^{\mu\gamma}\partial_\mu w^{\alpha\beta} = 0$$

Бивекторное поле $w = \frac{1}{2}w^{\mu\nu}\partial_\mu \wedge \partial_\nu$ называется *пуассоновой структурой*. Скобка Пуассона имеет вид

$$\{f, g\} = w^{\mu\nu}(x)\partial_\mu f \partial_\nu g$$

На многообразии тензор Пуассона определяет скалярное произведение ковекторов, например, градиентов функций.

Если тензор Пуассона невырожден ($\det w^{\mu\nu} \neq 0$) в каждой точке многообразия, то обратная матрица $\|w_{\mu\nu}\| = \|w^{\mu\nu}\|^{-1}$ будет определять симплектическую структуру, так как тождество Якоби для w эквивалентно условию замкнутости $d\Omega = 0$, где теперь $\Omega_{\mu\nu} = w_{\mu\nu}$. Таким образом, симплектические многообразия – это частный случай пуассоновых многообразий, когда тензор Пуассона невырожден.

ПРИМЕР. На симплектическом многообразии с координатами Дарбу (q^i, p_i) , когда $\Omega = dp_i \wedge dq^i$, скобка Пуассона имеет вид

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i}$$

Пусть $f(x)$ – некоторая функция на пуассоновом многообразии, тогда векторное поле

$$v = w^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \partial_\nu$$

называется гамильтоновым векторным полем, ассоциированным с $f(x)$.

ПРИМЕР. Пусть $H(x)$ – гамильтониан механической системы на многообразии M . Если на кокасательном расслоении T^*M ввести канонические координаты Дарбу, то траектории гамильтонова векторного поля, ассоциированного с $H(x)$,

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

определяют эволюцию системы.

5.4 Комплексные многообразия

Пусть M – многообразие размерности $2n$. Определим изоморфизм касательных расслоений $J : TM \rightarrow TM$ такой, что в каждой точке $x \in M$ $J_x^2 = -I$, где I – тождественный изоморфизм, действующий на TM . Тогда J называется **почти комплексной структурой** на многообразии M . Почти комплексная структура вводит в касательном пространстве $T_x M$, являющемся $2n$ -мерным действительным линейным пространством, структуру n -мерного комплексного пространства, определяя правило умножения вектора v на комплексные числа по формуле

$$(a + ib)v = av + bJv, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad i = \sqrt{-1}$$

Почти комплексная структура существует на любом четномерном ориентируемом многообразии.

ПРИМЕР. Определим в $M = \mathbb{R}^{2n}$ с координатами (x^i, y^i) , $i = 1, \dots, n$ почти комплексную структуру J по правилу

$$J(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = (-y^1, \dots, -y^n, x^1, \dots, x^n)$$

Тогда отображение $J : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ будет эквивалентно умножению на i в $\mathbb{C}^n$ с координатами $z^i = x^i + iy^i$. Тензор почти комплексной структуры J_ν^μ в этом примере имеет вид

$$J_\nu^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

где $I = \delta_j^i$ – единичная матрица $n \times n$; очевидно, что $J_\mu^\alpha J_\beta^\mu = -\delta_\beta^\alpha$. Такая структура называется стандартной комплексной структурой на $\mathbb{R}^{2n}$.

Выберем в качестве базиса касательного пространства $T_x M$ координатный базис $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\}$, тогда над полем $\mathbb{C}$ мы получим комплексифицированное касательное пространство $T_x^{\mathbb{C}} M$ с базисом

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - i \frac{\partial}{\partial y^i} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + i \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$$

Если коммутатор любых двух комплексных касательных векторов вида $v = v^i \frac{\partial}{\partial z^i}$ в любой точке многообразия есть тоже комплексный вектор, то почти комплексная структура называется интегрируемой. В общем случае произвольного почти комплексного многообразия коммутатор может давать комплексно-сопряженные векторы вида $w = \bar{w}^i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}$. Условие интегрируемости эквивалентно обращению в ноль тензора кручения почти комплексной структуры (тензора Нейенхейса)

$$N_{\beta\gamma}^\alpha = J_\beta^\mu (\partial_\mu J_\gamma^\alpha - \partial_\gamma J_\mu^\alpha) - J_\gamma^\mu (\partial_\mu J_\beta^\alpha - \partial_\beta J_\mu^\alpha)$$

Для интегрируемости почти комплексной структуры необходимо и достаточно, чтобы многообразие M было комплексным многообразием, то есть на нем существовал атлас с голоморфными функциями перехода (теорема Ньюлендера-Ниренберга).

Для любой комплекснозначной p -формы ω возможно разложение

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_r \bar{j}_1 \dots \bar{j}_s} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_r} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_s}$$

Такие формы $\omega_{r,s} \in \Omega^{r,s}(M)$ называются формами (r, s) типа. На комплексном многообразии внешний дифференциал раскладывается в сумму $d = \partial + \bar{\partial}$, где $\partial : \Omega^{r,s} \rightarrow \Omega^{r+1,s}$, $\bar{\partial} : \Omega^{r,s} \rightarrow \Omega^{r,s+1}$. Эти операторы удовлетворяют соотношениям

$$\partial^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = \bar{\partial}^2 = 0$$

Соответствующие им группы когомологий называются когомологиями Дольбо:

$$H_\partial^{r,s} = \frac{\text{Ker } \partial}{\text{Im } \partial}, \quad H_{\bar{\partial}}^{r,s} = \frac{\text{Ker } \bar{\partial}}{\text{Im } \bar{\partial}}$$

На комплексном многообразии можно ввести эрмитову метрику $h(v, w) \in \mathbb{C}$, инвариантную относительно комплексной структуры: $h(v, w) = h(Jv, Jw)$. В комплексных координатах $(z^1, \dots, z^n)$ эрмитова метрика $h = h_{i\bar{k}} dz^i \otimes d\bar{z}^{\bar{k}}$ задается тензором $h_{i\bar{k}}$, который определяет эрмитово скалярное произведение касательных векторов:

$$h(v, w) = h_{i\bar{k}} v^i \bar{w}^{\bar{k}}$$

Матрица тензора $h_{i\bar{k}}$ является эрмитовой: $h_{i\bar{k}} = \overline{h_{k\bar{i}}}$. Ее вещественная часть симметрична и определяет риманову метрику $g = \frac{1}{2}(h + \bar{h})$ на касательном пространстве, а мнимая часть антисимметрична и определяет $(1, 1)$ -форму

$$\omega = \frac{i}{2} h_{i\bar{k}} dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{k}}$$

Риманова метрика g и форма ω инвариантны относительно комплексной структуры J и связаны с ней соотношениями

$$g(v, w) = \omega(v, Jw), \quad \omega(v, w) = g(Jv, w)$$

Если форма ω замкнута $-d\omega = 0$, то комплексное многообразие называется *кэлеровым*, а форма ω – кэлеровой. Условие $d\omega = 0$ эквивалентно ковариантному постоянству комплексной структуры $\nabla J = 0$ относительно связности Леви-Чивита, построенной по римановой метрике $g = \frac{1}{2}(h + \bar{h})$, то есть параллельный перенос индуцирует комплексно-линейное отображение на касательных пространствах. На кэлеровом многообразии форма ω определяет также симплектическую структуру, поэтому каждое кэлерово многообразие является симплектическим. Обратное неверно, существуют симплектические многообразия не являющиеся кэлеровыми.

ПРИМЕР. На комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$ с однородными координатами $[z^0 : \dots : z^n]$ определим эрмитову метрику Фубини-Штуди $h = h_{i\bar{k}} dw^i \otimes d\bar{w}^{\bar{k}}$ в координатах аффинной карты $w^i = z^i/z^0$ соотношением

$$h_{i\bar{k}} = \frac{(1 + |w|^2)\delta_{i\bar{k}} - w_i \bar{w}_{\bar{k}}}{(1 + |w|^2)^2}$$

Поскольку форма $\omega = \frac{i}{2} h_{i\bar{k}} dw^i \wedge d\bar{w}^{\bar{k}}$ замкнута, то $\mathbb{C}P^n$ является кэлеровым. В частности, для комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1 \approx S^2$ получаем обычную сферическую метрику $g = (1 + |w|^2)^{-2} dw d\bar{w} = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ и

$$\omega = \frac{i}{2} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{(1 + w\bar{w})^2}$$

6 Современные геометрические структуры

В заключение рассмотрим некоторые современные геометрические структуры, которые привлекли внимание физиков-теоретиков в последние десятилетия. Изложение по необходимости будет крайне сжатым и неполным.

6.1 Некоммутативная геометрия

Некоммутативная геометрия представляет собой достаточно разветвленный раздел современной математики, главной целью которого является описание геометрии пространства в терминах алгебры функций, определенной на нем, и обобщение соответствующих результатов дифференциальной геометрии на некоммутативные алгебры функций. Главной чертой перехода от коммутативных алгебр к некоммутативным является отсутствие обычного понятия точки пространства. В классической геометрии, которая может быть описана в терминах коммутативных ассоциативных алгебр, пространство понимается как множество точек, снабженное дополнительной структурой, например, топология задается набором открытых множеств, а гладкая структура – соответствующим атласом. Пространства некоммутативной геометрии, которые иногда называют квантовыми пространствами, не могут быть интерпретированы таким же образом, в частности, они могут вообще не содержать точек. Это дает потенциальные возможности для описания геометрии физического пространства на микроуровне, где должны быть существенными “квантовые флуктуации” геометрии, приводящие к “квантовой неопределенности” понятия точки пространства.

Для обобщения классической геометрии на некоммутативный случай, необходимо два основных этапа. Во-первых, необходимо перевести все понятия геометрии на язык коммутативной алгебры, а во-вторых, сделать некоммутативное обобщение алгебраических конструкций, получив в результате так называемое квантовое пространство. Заметим, что квантовое пространство, в отличие от обычных пространств классической геометрии, является вторичным понятием, которое возникает в формализме некоммутативной геометрии через соответствующие $*$ -алгебры.

Для иллюстрации первого шага, рассмотрим множество V конечного числа элементов. Множество всех комплекснозначных функций на V образует конечномерную коммутативную ассоциативную алгебру. Если определить норму $\|f\| := \max|f|$, то для нее будет выполняться условия $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$ и $\|ff^*\| = \|f\|^2$, где f^* означает комплексное сопряжение функции f . Нормированная алгебра с инволюцией $f \rightarrow f^*$, удовлетворяющая этим двум требованиям, называется C^* -алгеброй. Обратное утверждение заключается в том, что любую конечномерную коммутативную алгебру, являющуюся C^* -алгеброй, можно рассматривать как алгебру функций на конечном числе точек. Здесь число точек определяется размерностью алгебры. Этот пример можно расширить на пространства с топологией. А именно, можно показать что любая коммутативная C^* -алгебра с единицей является алгеброй функций над компактным пространством, то есть теория компактных топологических пространств эквивалентна теории коммутативных C^* -алгебр с единицей.

Дифференциально-геометрические объекты также допускают описание на алгебраическом языке. Преобразования симметрии пространства, например, диффеоморфизмам многообразия, соответствуют автоморфизмы C^* -алгебры гладких функций $\mathfrak{A}$. Векторные поля (действительные) эквивалентны эрмитовым дифференцированиям алгебры $\mathfrak{A}$, а все возможные дифференцирования $\text{Der } \mathfrak{A}$ алгебры соответствуют комплексным векторным полям на многообразии. Векторное расслоение является конечным проективным модулем над $\mathfrak{A}$.

Все функции, принадлежащие алгебре $\mathfrak{A}$ и обращающиеся в ноль в некоторой точке x , образуют идеал алгебры функций. Можно показать, что они являются максимальными идеалами. Таким образом, можно не вводить исходное пространство точек и функции над ними, а работать сразу с дифференциальной алгеброй, и пространство определять как множество всех максимальных идеалов алгебры.

Некоммутативное обобщение конструкций классической геометрии не является однозначным, и может быть проведено многими существенно различными способами. Мы рассмотрим только два примера.

Простейшим вариантом некоммутативной геометрии является так называемая *матричная геометрия*, где $*$ -алгеброй является конечномерная алгебра комплексных матриц $M_n(\mathbb{C})$. Эта алгебра состоит из n^2 комплексных функций, а “многообразие” содержит только две точки: алгебру $M_n(\mathbb{C})$ и 0. Заметим, что в силу конечного числа измерений все вычисления сводятся к чистой алгебре, и во многих отношениях матричная геометрия аналогична классической геометрии компактных групп Ли. Алгебра векторных полей ∂_i – это алгебра дифференцирований $\text{Der } M_n(\mathbb{C})$, которые все являются внутренними, то есть образованы коммутаторами с элементами $M_n(\mathbb{C})$. Всего есть $n^2 - 1$ независимых дифференцирований, которые можно выбрать в виде

$$\partial_k E_j = \text{ad}_{iE_k} E_j = i[E_k, E_j] = 2C_{kj}^l E_l, \quad \partial_k I_n = 0$$

где iE_k – стандартные генераторы алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ с константами C_{kj}^l , а I_n – единичная матрица. Эти векторные поля образуют алгебру Ли с коммутатором $[\partial_k, \partial_j] = 2C_{kj}^l \partial_l$, но в отличие от классического случая они не образуют модуль над алгеброй функций, то есть производные нельзя умножать на функции, так как $(E_k \partial_j) E_l = E_k (\partial_j E_l)$ не является производной $M_n(\mathbb{C})$. Это характерная черта некоммутативной геометрии.

Внешняя алгебра дифференциальных форм вводится аналогично классическому случаю по формуле $\theta^k \partial_j = \delta_j^k I_n$. 1-формы образуют модуль над алгеброй. Внешнее произведение определяется обычным соотношением

$$(\theta^k \wedge \theta^j)(\partial_l, \partial_m) = \frac{1}{2}(\theta^k(\partial_l)\theta^j(\partial_m) - \theta^j(\partial_l)\theta^k(\partial_m))$$

Внешний дифференциал определяется на функциях (0-формах) как $df(X) = Xf$, где $X \in \text{Der}(M_n)$, так что $dI_n = 0$, $dE_k = 2C_{kj}^l E_l \theta^j$. 1-формы dE_k не коммутируют с функциями E_j . Дифференциалы 1-форм θ^k удовлетворяют тождеству

$$d\theta^k = -C_{jl}^k \theta^j \wedge \theta^l$$

Далее можно определить метрику, оператор дуальности Ходжа и оператор Лапласа, причем спектр лапласиана получается конечным. Также можно ввести симплектическую структуру, используя алгебру функций. Скобка Пуассона двух матричных функций оказывается их коммутатором, поэтому в некоммутативной геометрии нет разницы между классической и квантовой механикой.

Вторым примером может служить некоммутативная геометрия А. Кона, которая позволяет описать Стандартную Модель элементарных частиц на языке геометрии. В этом случае переход к некоммутативным структурам аналогичен переходу от классической механики к квантовой.

Рассмотрим пример классического одномерного гармонического осциллятора. Его фазовое пространство $\mathbb{R}^2$ с координатами x и p . Полная энергия $E = p^2/(2m) + kx^2/2$ образует алгебру $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ коммутативных ассоциативных дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^2$ (алгебру классических наблюдаемых). В квантовой механике мы имеем ассоциативную инволютивную алгебру $\mathfrak{A}$ с единицей (алгебру квантовых наблюдаемых), причем больше нет классического пространства, на котором $\mathfrak{A}$ была бы алгеброй функций. Действительно, координаты исходного фазового пространства теперь подчиняются соотношению неопределенности Гейзенберга $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$. Для вычисления наблюдаемой $a \in \mathfrak{A}$ необходимо построить точное представление $\mathfrak{A}$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ волновых функций. Для осциллятора $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, его элементы – это функции $\psi(x)$ интегрируемые с квадратом на конфигурационном пространстве. Время здесь является внешним параметром, и динамика определяется гамильтонианом $H \in \mathfrak{A}$ посредством уравнения Шредингера $(i\hbar\partial_t - \hat{H})\psi(t, x) = 0$, где $\hat{H}$ – оператор представления H . В релятивистской квантовой механике уравнение Шредингера заменяется уравнением Дирака $\hat{D}\psi = 0$, где $\psi(x)$ – четырехкомпонентный дираковский спинор. В отличие от гамильтониана, оператор Дирака не принадлежит представлению $\mathfrak{A}$, но является оператором в $\mathcal{H}$.

В подходе Кона некоммутативная геометрия над компактным римановым спинорным многообразием строится аналогично квантовой механике над фазовым пространством. Некоммутативная структура задается тремя чисто алгебраическими объектами $(\mathfrak{A}, \mathcal{H}, \hat{D})$, которые называются спектральной тройкой. Здесь $\mathfrak{A}$ – ассоциативная инволютивная алгебра с единицей, $\mathcal{H}$ – комплексное гильбертово пространство представления $\mathfrak{A}$, $\hat{D}$ – самосопряженный оператор на $\mathcal{H}$. Аксиомы, связывающие элементы этой тройки, и которые здесь не приводятся, мотивированы релятивистской квантовой механикой.

В “почти коммутативной” геометрии, которая описывает Стандартную Модель, используется прямое произведение четырехмерной обычной геометрии (пространства-времени) и нольмерной некоммутативной геометрии (внутреннего пространства). Если в качестве последней взять коммутативную структуру, например двухточечное пространство, тогда прямое произведение будет описывать двулистную вселенную, то есть пространство Калуцы-Клейна с дискретным пятым измерением. Оператор Дирака из спектральной тройки для внутреннего пространства в этой модели есть в точности массовая матрица фермионов, что позволяет описать поколения кварков и лептонов.

Некоммутативная геометрия возникает также и в связи с другими разделами математики. В качестве первого примера приведем теорию слоений. При расслаивании некоторого многообразия на подмногообразия-слои, пространство слоев уже может не

обладать структурой многообразия. Например, это имеет место в эргодических слоениях, описывающих пространство орбит эргодической динамической системы. В подобном случае естественно использовать некоммутативную $*$ -алгебру для описания пространства слоев.

Другим примером служит теория квантовых групп. С их помощью можно построить квантовые главные расслоения по аналогии главными расслоениями классической теории. Все основные ингредиенты: дифференциальное исчисление, формализм связностей, теория характеристических классов и т. д. могут быть естественным образом обобщены в некоммутативном контексте.

6.2 Многообразия Фробениуса

Многообразия Фробениуса были введены в начале 90-х годов в работах Б. Дубровина в связи с исследованиями по двумерной квантовой топологической теории поля. Неожиданным образом эта геометрическая структура оказалась тесно связана с самыми различными областями математики, в частности, с теорией интегрируемых систем и методом изомонодромной деформации, с теорией особенностей, с теорией дискретных групп, с алгебраической геометрией (топология пространства модулей алгебраических кривых). Геометрия многообразий Фробениуса играет важную роль в создаваемой сейчас теории квантовых когомологий.

Многообразие Фробениуса представляет собой многообразие M со структурой алгебры Фробениуса на касательных пространствах $T_x M$, зависящей (гладко, аналитично и т. п.) от точки $x \in M$. Эта конструкция должна удовлетворять ряду аксиом, но прежде, чем их перечислять, напомним определение алгебры Фробениуса.

Алгебра Фробениуса – это коммутативная ассоциативная алгебра $\mathfrak{A}$ над $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) с единицей $e \in \mathfrak{A}$ и билинейной симметричной невырожденной формой

$$\langle a, b \rangle: \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathfrak{A}$$

такой что

$$\langle ab, c \rangle = \langle a, bc \rangle$$

Если определить линейный функционал $\omega \in \mathfrak{A}^*$ по формуле $\omega(a) := \langle e, a \rangle$, то форма $\langle a, b \rangle = \omega(ab)$. В координатах алгебры Фробениуса можно задать с помощью структурных констант c_{ij}^k , удовлетворяющих условиям ассоциативности и коммутативности, и ковектора (линейного функционала) ω_i такого, что симметричный тензор $g_{ij} = \omega_k c_{ij}^k$ невырожден.

Структура Фробениуса на многообразии соответствует решениям *уравнений ассоциативности* $WDVV$ (Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde), описывающих пространство модулей топологических конформных теорий поля. Уравнения $WDVV$ представляют собой следующие условия на функцию $F(v^1, \dots, v^n)$ от n переменных.

1. Матрица $\eta_{ij} := \frac{\partial^3 F(v)}{\partial v^1 \partial v^i \partial v^j}$ является постоянной, симметричной и невырожденной.
2. Функции $c_{ij}^k = \eta^{ks} \frac{\partial^3 F(v)}{\partial v^s \partial v^i \partial v^j}$, где $\eta^{ks} = (\eta_{ks})^{-1}$, должны быть структурными константами некоторой ассоциативной алгебры, поэтому функция $F(v)$ должна удовлетворять переопределенной системе нелинейных дифференциальных уравнений ассоциативности

$$\frac{\partial^3 F(v)}{\partial v^i \partial v^j \partial v^k} \eta^{ks} \frac{\partial^3 F(v)}{\partial v^s \partial v^p \partial v^q} = \frac{\partial^3 F(v)}{\partial v^q \partial v^j \partial v^k} \eta^{ks} \frac{\partial^3 F(v)}{\partial v^s \partial v^p \partial v^i}$$

3. Условие квазиоднородности

$$E^i \partial_i F = (3 - d)F + \frac{1}{2} A_{ij} v^i v^j + B_i v^i + C$$

где векторное поле $E = (a_j^i v^j + b^i) \partial_i$ для постоянных a_j^i, b^i , удовлетворяющих условиям $a_1^1 = \delta_1^1, b^1 = 0$. Поле E называется эйлеровым полем, а величина d – зарядом фробениусовой структуры.

Инвариантная формулировка этих условий приводит к следующим аксиомам *структуры Фробениуса* $(M, e, \langle \cdot, \cdot \rangle, E, d)$ на n -мерном многообразии M .

1. Метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$ является плоской. Векторное поле e (единица алгебры Фробениуса) должно быть ковариантно постоянным относительно связности Ливи-Чивита для метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
2. Тензоры $c(u, v, w) := \langle uv, w \rangle$ и $\nabla_t c(u, v, w)$ являются симметричными для всех $t, u, v, w \in T_x M$.
3. Эйлерово векторное поле E удовлетворяет условию $\nabla \nabla E = 0$. Соответствующая однопараметрическая группа диффеоморфизмов действует конформными преобразованиями метрики: $\mathcal{L}_E \langle \cdot, \cdot \rangle = (2 - d) \langle \cdot, \cdot \rangle$ и

$$\mathcal{L}_E(v \cdot w) = v \cdot w + \mathcal{L}_E v \cdot w + v \cdot \mathcal{L}_E w$$

Эту конструкцию можно обобщить, отказавшись от существования плоской инвариантной метрики. Такие многообразия называются F -многообразиями.

* * *

В заключение необходимо отметить, что многие важные темы остались за пределами предлагаемого обзора. В первую очередь, это модели супергеометрии, обобщающие обычные геометрические конструкции на случай пространств с антикоммутирующими координатами. Отдельного рассмотрения требуют также геометрические вопросы многомерного комплексного анализа. Здесь ключевым средством является понятие пучка, которое можно рассматривать как обобщение понятия расслоения, на случай, когда, грубо говоря, размерность слоев может меняться. Не рассматривались теория слоений и тесно связанная с ней теория алгеброидов и группоидов Ли, теория узлов и алгебраическая геометрия. Из геометрических задач математической физики, не упомянутых в статье, необходимо в первую очередь отметить описание пространства модулей связностей на расслоениях, $Spin^C$ -структур и уравнений Зайберга-Виттена, а также теорию твисторов. Все это заинтересованный читатель может найти в имеющейся современной литературе.

Автор благодарен Д. Г. Павлову за предложение написать этот обзор и поддержку; А. А. Элиовичу за обсуждение представленного материала.

Литература

- [1] Атья М. *Геометрия полей Янга-Миллса* // в *Геометрия и физика узлов* - М.: Мир, 1995
- [2] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия: Методы и приложения*. - М.: Наука, 1986
- [3] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии*: в 2-х т. - М.: Наука, 1981
- [4] Монастырский М. И. *Топология калибровочных полей и конденсированных сред*. - М.: ПА-ИМС, 1995
- [5] Новиков С. П., Тайманов И. А. *Современные геометрические структуры и поля*. - М.: МЦНМО, 2005

- [6] Сарданашвили Г. А. *Современные методы теории поля. т. 1: Геометрия и классические поля.* - М.: УРСС, 1996
- [7] Шапиро И. С., Ольшанецкий М. А. *Лекции по топологии для физиков.* - Ижевск: НИЦ РХД, 2001
- [8] Asselmeyer-Maluga T., Brans C. *Exotic smoothness and physics. Differential topology and spacetime models.* - Singapore: World Scientific, 2007
- [9] Bao D., Chern S.-S., Shen Z. *An introduction to Riemann-Finsler geometry.* - New-York: Springer, 2000
- [10] Dubrovin B. *Geometry of 2D topological field theories* // в Springer *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1620, p. 120 (1993)
- [11] Eguchi T., Gilkey P. B., Hanson A. J. *Gravitation, gauge theories and differential geometry* // Physics Reports, v. 66 (1980), p. 213-393
- [12] Nash C., Sen S. *Topology and geometry for physicists.* - London: Academic Press, 1983
- [13] Madore J. *An introduction to noncommutative differential geometry and its physical applications.* - Cambridge: CUP, 1995
- [14] Marathe K. B., Martucci G. *The mathematical foundations of gauge theories.* - Amsterdam: North-Holland, 1992
- [15] Ward R. S., Wells R. O. *Twistor geometry and field theory.* - Cambridge: CUP, 1990

Geometric and topological structures in Physics

V. N. Trishin

vtrishin@mtu-net.ru

The paper contains an overview and a short introduction in the field of differential-geometric and topological structures which have applications to in Physics. A special attention is given to the presentation of ideas and methods, which lay at the basis of the described geometric and topological objects.

Key-words: structures, differential geometry, topology.

MSC: 51-02, 51H25, 51P05, 53Z05, 54-02, 00A69, 20K45.

СОВРЕМЕННАЯ ФИЗИКА ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

К. В. Степаньянц

Московский Государственный Университет, физический факультет, кафедра
теоретической физики, Москва, Россия

stepan@phys.msu.ru

В обзоре кратко описывается современное состояние физики высоких энергий. Затрагиваются такие вопросы, как описание сильных и электрослабых взаимодействий как в рамках Стандартной модели, так и в теориях Великого объединения. Обсуждаются вопросы о появлении малой массы нейтрино и необходимости введения суперсимметрии. Также рассматривается описание гравитационного взаимодействия, современные космологические экспериментальные данные, теории супергравитации, а также связь гравитации с другими взаимодействиями. Обращается внимание на проблемы, возникающие при описании гравитации и возможные пути методы их решения. В частности, обсуждаются достижения и недостатки теории суперструн.

Ключевые слова: физика высоких энергий, Стандартная модель, Великое объединение, суперсимметрии, теория суперструн.

1 Введение. Масштабы физики высоких энергий

В этой статье я хотел бы дать краткий обзор основных достижений а также нерешенных проблем современной физики высоких энергий. При этом прежде всего необходимо объяснить, что будет пониматься под термином "физика высоких энергий". Большие энергии выделяются, например, при взрывах бомб. Но при этом характерная энергия химической связи имеет порядок около 1 эВ. Значительно большие энергии выделяются при взрывах ядерных бомб. Это связано с тем, что энергия связи в ядрах имеет порядок 1 МэВ и примерно в 10^6 раз превышает энергию химической связи. Однако с точки зрения физики элементарных частиц эти энергии все же являются достаточно малыми. Например, характерный масштаб, на котором электромагнитное и слабое взаимодействие соединяются в некоторую единую теорию, имеет порядок 10^2 ГэВ и примерно в 10^5 раз превышает энергию связи в атомных ядрах. Максимальные экспериментально достижимые энергии в настоящее время составляют около 10^5 ГэВ. По сравнению с той же энергией химической связи эта величина громадна. Однако в физике элементарных частиц существует и еще один масштаб, величина которого просто поражает воображение – это т. н. масса Планка, которая является характерной энергией гравитационного взаимодействия и по порядку величины равна 10^{19} ГэВ. Как ни странно бы это не казалось на первый взгляд, но тщательное исследование сильного и электрослабого взаимодействия также указывает на существование близкого энергетического масштаба – 10^{16} ГэВ. По-видимому при таких энергиях мы должны встретиться с интереснейшими и нетривиальными явлениями, суть которых до сих пор не вполне понятна.

По мере увеличения энергии меняется вся картина мира, который нас окружает. Так, находясь в лесу, мы видим вокруг себя отдельные кусты, деревья, траву. Но если подняться выше, то можно увидеть весь лес целиком, поля вокруг него, соседние леса. Поднимаясь еще выше можно увидеть очертания океанов и материков, понять, что Земля является шаром и т. д. В физике высоких энергий картина во многом сходна. При увеличении энергии нам удастся в каком-то смысле более широко взглянуть на окружающий мир. Все кажущееся многообразие элементарных частиц и их совершенно

различные свойства, которые мы видим при низких энергиях, по мере повышения энергии начинают подчиняться определенным закономерностям. Прежде всего, начинают появляться определенные симметрии, которые их связывают. При этом, чем большие энергии рассматриваются, тем более симметричным представляется мир элементарных частиц. Сейчас мы можем уверенно говорить о том, что физика элементарных частиц – это физика симметрий. Это понятие играет наиболее важную роль при описании всех взаимодействий. В настоящее время известен целый ряд симметрий – калибровочная, общекоординатная, суперсимметрия, каждая из которых ведет к интереснейшим и нетривиальным следствиям. Но все же многое еще не ясно и, возможно, следует ожидать появления каких-либо явлений, других симметрий, а также описывающих их математических конструкций.

В этой статье я хотел бы показать, как меняется картина мира в зависимости от доступного исследователю уровня энергии и как выявляются симметрии, лежащие в основе современного описания физики. При этом становятся понятными многие явления, которые на первый взгляд казались совершенно случайными. Кроме того, я постараюсь перечислить те нерешенные проблемы, которые представляются наиболее актуальными, а также возможные пути их решения.

Заметим, что далее будет использоваться система единиц $\hbar = c = 1$, которая наиболее удобна для физики высоких энергий, поскольку все величины в ней имеют размерность массы, что существенно облегчает анализ размерности, а также исследование порядков различных величин.

2 Квантовая теория поля как инструмент для описания физики высоких энергий

Основным инструментом для описания физики высоких энергий является квантовая теория поля [1]. Перечислим кратко, какие экспериментальные данные свидетельствуют в пользу этого.

В качестве исходной точки мы возьмем квантовую механику частицы со спином, которая описывается уравнением Паули. При этом в соответствии с экспериментальными данными, величина магнитного момента электрона связана с его спином соотношением

$$\mu = g \frac{q}{2m} S, \quad (1)$$

где через g обозначен т. н. g -фактор Ланде, который оказывается приблизительно равным 2. Это значение может быть получено [2] при рассмотрении низкоэнергетического предела классической электродинамики, которая представляет собой теорию взаимодействующих электромагнитного и спинорного полей, описываемую функцией Лагранжа [3]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (2)$$

При этом полевыми переменными являются калибровочное поле $A_\mu = (\varphi, -\vec{A})$ и антикоммутирующий дираковский спинор ψ , который представляет собой столбец из четырех комплексных компонент и некоторым специальным образом меняется под действием группы Лоренца. Тензор поля $F_{\mu\nu}$ и ковариантная производная $\mathcal{D}_\mu$ определяются равенствами

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \quad \mathcal{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi - ieA_\mu \psi. \quad (3)$$

Дираковски сопряженный спинор определяется при этом равенством $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. Уравнением движения для поля ψ будет уравнение Дирака

$$(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi = 0, \quad (4)$$

из которого при низких энергиях как раз и получается уравнение Паули с $g = 2$.

Таким образом, квантовая механика фактически соответствует классической теории поля, а переход от классической механики к классической теории поля иногда называют "первичным квантованием". Тем не менее, оказывается, что теория должна быть проквантована еще один раз. Об этом наиболее ярко свидетельствуют прежде всего 2 следующих экспериментальных факта:

Во-первых, экспериментальное значение магнитного момента электрона отличается от величины $\mu_B = e/2m$, которая соответствует $g = 2$ в формуле (1). Добавок к магнитному моменту называется аномальным магнитным моментом электрона. Экспериментальное значение магнитного момента электрона [4] в настоящее время составляет

$$\mu = 1.0011596521859 \pm 0.0000000000038\mu_B. \quad (5)$$

Эта величина не может быть объяснена в рамках классической теории поля, но ее можно вычислить в рамках квантовой теории поля. При этом современное теоретическое предсказание для этой величины (полученное с учетом вкладов других взаимодействий) составляет [5]

$$\mu = 1.001159652178 \pm 0.0000000000008\mu_B. \quad (6)$$

Таким образом, теоретическое и экспериментальное значения в этом случае согласуются с точностью до 11 знаков, что является рекордным совпадением для всей физики.

Второй эксперимент, свидетельствующий о необходимости квантования классической теории поля, – это измерение разности энергий уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ в атоме водорода. Решая уравнение Дирака во внешнем кулоновском поле, можно получить точный спектр атома водорода в рамках классической теории поля. Он имеет следующий вид (в системе единиц, в которой $\hbar = c = 1$):

$$E_{nj} = m \left(1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{(n - j - 1/2 + \sqrt{(j + 1/2)^2 - Z^2 \alpha^2})^2} \right)^{-1/2}. \quad (7)$$

Как следствие, энергии уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$, которые имеют одни и те же значения квантовых чисел n и j , должны оказаться равными. Однако эксперимент свидетельствует об обратном [6]: оказывается, что уровень $2s_{1/2}$ имеет большую энергию, чем уровень $2p_{1/2}$. Их разность соответствует частоте излучения 1057,85 МГц (что соответствует длине волны около 28 см). Это явление называется лэмбовским сдвигом. Оно может быть объяснено только в рамках квантовой теории поля [3, 7]. При этом предсказания теории достаточно точно согласуются с экспериментальными данными.

Два описанные выше эксперимента особенно ярко свидетельствуют о том, что необходимо квантовать классическую теорию поля. Это квантование обычно называется "вторичным", поскольку, как мы уже говорили, "первичное" квантование – это переход от классической механики к классической теории поля. Поэтому квантовая теория поля является основой всей современной физики высоких энергий.

3 Калибровочная инвариантность

В предыдущей части мы уже упоминали, что электромагнитное взаимодействие хорошо описывается моделью (2). С учетом необходимости ее квантования, она называется квантовой электродинамикой. Одно из наиболее важных наблюдений заключается в

том, что лагранжиан (2) является инвариантным относительно локальных калибровочных преобразований

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha; \quad \psi \rightarrow e^{-i\alpha} \psi; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\alpha}, \quad (8)$$

где α – произвольная функция пространственных координат и времени. Эти преобразования образуют компактную абелеву группу $U(1)$.

Калибровочная инвариантность является основой всей современной квантовой теории поля. Это как раз и есть одна из тех симметрий, которые лежат в основе современной физики высоких энергий. Для того, чтобы понять ее роль необходимо отметить одну из важнейших проблем квантовой теории поля – проблему расходимостей. Дело в том, что в квантовой теории поля можно построить некоторую величину, которая является квантовым аналогом обычного действия и называется эффективным действием. При вычислении эффективного действия получают вклады, которые формально равны бесконечности. Такие вклады и называются расходимостями. Наличие расходимостей указывает на неполноту теории. Их существование, в частности, в квантовой электродинамике, указывает на то, что эта теория не является окончательной, а представляет собой только некоторый предел более общей теории.

Важнейшая роль калибровочной симметрии заключается в том, что она существенно ограничивает структуру расходящихся вкладов. Ее следствием являются некоторые соотношения, т. н. тождества Славнова–Тейлора [8], которым удовлетворяет эффективное действие. С их помощью можно доказать, что расходимости в квантовой электродинамике имеют ту же самую структуру, что и исходное классическое действие. Теории, в которых справедливо такое свойство, называют перенормируемыми. Перенормируемость позволяет удалять расходимости с помощью некоторого переопределения полей и констант взаимодействия (в случае электродинамики константой взаимодействия является заряд электрона.) Например, если M – некоторый масштаб энергий, на котором сокращаются расходимости, а e_0 – значение константы связи на этом масштабе, то наблюдаемый при низких энергиях заряд будет равен

$$\frac{1}{e^2} = \frac{1}{e_0^2} + c \ln \frac{M}{p} + O(e^2), \quad (9)$$

где p – масштаб энергий, на котором вычисляется константа связи (здесь предполагается, что он существенно превышает значения масс частиц), а c – некоторая постоянная, которая может быть вычислена из первых принципов.

Таким образом, существование калибровочной симметрии приводит к перенормируемости квантовой электродинамики, которая существенно ограничивает структуру расходящихся вкладов в эффективное действие.

4 Поля Янга–Миллса. Квантовая хромодинамика

Калибровочная инвариантность квантовой электродинамики представляет собой наиболее простой вид симметрии. Мы уже говорили о том, что калибровочные преобразования образуют абелеву группу $U(1)$. Оказывается [9], что можно построить теорию, которая во многих отношениях похожа на электродинамику, но является инвариантной относительно некоторой неабелевой компактной калибровочной группы G . В качестве примера можно записать функцию Лагранжа для поля Янга–Миллса A_μ , которое взаимодействует со скалярным полем ϕ , лежащем в некотором представлении группы G :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2e^2} \text{tr} F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{D}^\mu \phi^\dagger \mathcal{D}_\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi). \quad (10)$$

В данном случае калибровочное поле A_μ является элементом алгебры Ли калибровочной группы G , также как и соответствующий тензор поля, который определяется равенством

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (11)$$

Поле A_μ можно разложить по базису в алгебре Ли калибровочной группы как $A_\mu = -ieA_\mu^a t^a$, где t^a – эрмитовы генераторы, а A_μ^a – вещественные векторные поля, которые и являются неабелевыми аналогами четырехвектора потенциала электромагнитного поля.

Теория Янга–Миллса оказывается инвариантной относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}; & F_{\mu\nu} &\rightarrow \omega F_{\mu\nu} \omega^{-1}; \\ \phi &\rightarrow \omega \phi; & \phi^+ &\rightarrow \phi^+ \omega^+ = \phi^+ \omega^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Одним из наиболее ярких приложений теории Янга–Миллса является описание теории сильных взаимодействий, которые удерживают протоны и нейтроны в атомных ядрах. В соответствии с современными представлениями мезоны и барионы не являются точечными элементарными частицами, а состоят из кварков. Мезоны состоят из кварка и антикварка, а барионы – из трех кварков. Каждый кварк имеет квантовое число – цвет [10], который может принимать значения от 1 до 3. Составим столбец ψ , компоненты которого нумеруются значением цвета, а каждая из этих компонент представляет собой дираковский спинор. Тогда квантовая хромодинамика [11] описывается теорией Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(3)$ и является применимой при энергиях вплоть до 1 – 10 ГэВ. Ее функция Лагранжа записывается в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2e^2} \text{tr} F_{\mu\nu}^2 + \sum_q \left(i\bar{\psi}_q \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_q - m_q \bar{\psi}_q \psi_q \right), \quad (13)$$

где суммирование производится по всем типам кварков. Калибровочные бозоны, которые соответствуют группе $SU(3)$ называются глюонами. Справедливость такого описания теории сильных взаимодействий была подтверждена экспериментами по глубоконеупругому рассеянию. Их суть состоит в том, что при рассеянии высокоэнергетических электронов на мезонах и барионах сечение рассеяния ведет себя как будто рассеяние происходит на двух или трех точечных частицах соответственно. Тем не менее, описание низкоэнергетического предела теории оказывается неожиданно сложным. Дело в том, что при низких энергиях очень существенными оказываются квантовые эффекты. Это связано с тем, что в квантовой теории поля существует фактически единственный способ вычисления квантовых поправок – разложение в ряд по теории возмущений. Фактически разложение производится в ряд по константе связи, которая на самом деле является некоторой функцией энергии. При низких энергиях константа связи в КХД оказывается большой (постоянная s в формуле (9) является отрицательной [12]) и разложение в ряд становится неприменимым. Благодаря этому описать поведение квантовой хромодинамики при низких энергиях крайне сложно. Более того, квантовые эффекты приводят к новым явлениям, наиболее интересным из которых является т. н. конфайнмент кварков [13]. Суть этого явления состоит в том, что кварки никогда не наблюдаются в свободном виде, а все мезоны и барионы являются бесцветными, т. е. являются синглетами по отношению к цветовой группе $SU(3)$. До сих пор удовлетворительное объяснение конфайнмента кварков исходя из первых принципов квантовой теории поля еще не найдено. Решеточные вычисления показывают, что в случае, когда кварки удаляются друг от друга линии цветового электрического поля стягиваются в длинные узкие трубки, которые часто называют КХД-струной.

5 Стандартная модель

Важным достижением физики высоких энергий явилось построение теории, которая на основе теории Янга–Миллса описывает единообразным образом сильные и электро-слабые взаимодействия [14] вплоть до энергий порядка $10^2 - 10^3$. Такая теория называется Стандартной моделью.

Слабые взаимодействия [15] ответственны за некоторые реакции и распады, например, распад свободного нейтрона

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}. \quad (14)$$

Оказалось, что слабые взаимодействия необходимо соединять с электромагнитными. При этом получившаяся теория, которая будет описывать сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия представляет собой теорию Янга–Миллса, которая основана на калибровочной группе $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Все известные в настоящее время частицы можно классифицировать по представлениям этой группы. При этом оказывается, что правые и левые частицы взаимодействуют по-разному [16]. Левые частицы преобразуются по фундаментальному представлению группы $SU(2)$, а правые – по ее тривиальному представлению. Заряды по отношению к группе $U(1)$ можно получить, анализируя известные из эксперимента электрические заряды. В результате оказывается, что в природе существует 3 поколения фермионов, каждое из которых устроено следующим образом:

1. Левые лептоны и соответствующие им левые нейтрино образуют столбец, который преобразуется по фундаментальному представлению группы $SU(2)$ и не меняется при преобразованиях группы $SU(3)$ (т. е. соответствует ее тривиальному представлению). Для первого поколения этот столбец состоит из спинора, описывающего левый электрон, (далее, для краткости, – просто левого электрона) и левого электронного нейтрино:

$$L_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}. \quad (15)$$

(Поскольку в Стандартной модели достаточно много различных частиц, то, для удобства, спинор, который соответствует той или иной частице, мы будем обозначать также как и саму эту частицу. Например, теперь волновую функцию электрона мы обозначаем через e .) Для второго поколения аналогичный столбец образован μ -мезоном и мюонным нейтрино, а для третьего – τ -мезоном и τ -нейтрино.

2. Правые лептоны, например, правый электрон

$$e_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)e \quad (16)$$

являются скалярами относительно групп $SU(2)$ и $SU(3)$. В минимальном варианте Стандартной модели правого нейтрино нет. Тем не менее, как будет показано далее, для объяснения экспериментально обнаруженных осцилляций нейтрино, его все же необходимо добавить в теорию. Кроме того, как мы увидим, наличие правого нейтрино позволяет легко объяснить, почему нейтрино имеет очень малую массу. Правое нейтрино

$$\nu_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\nu \quad (17)$$

никак не меняется при калибровочных преобразованиях группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

3. Левые кварки преобразуются по фундаментальному представлению группы $SU(2)$ и фундаментальному представлению группы $SU(3)$. Первое поколение включает в себя кварки u и d . Их можно записывать в виде столбца

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Каждый его элемент вновь представляет собой столбец, на который действует группа $SU(3)$:

$$u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}; \quad d = \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Таким образом, по сравнению с лептонами кварки несут дополнительный цветовой индекс $a = 1, 2, 3$. Для второго поколения столбец, аналогичный (18), образуется s и c кварками, а для третьего – t и b кварками.

4. Правые кварки являются скалярами относительно группы $SU(2)$ и преобразуются по фундаментальному представлению группы $SU(3)$. Например, для первого поколения

$$u_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}; \quad d_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Часто удобно нумеровать поколения дополнительным индексом I , который пробегает значения от 1 до 3. Тогда, например,

$$\nu^I = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau); \quad e^I = (e, \mu, \tau). \quad (21)$$

В кратком виде приведенная выше информация о составе частиц (за исключением калибровочных бозонов) Стандартной модели собрана в таблице 1.

Кроме того, в Стандартной модели имеется скалярное поле, которое преобразуется по фундаментальному представлению группы $SU(2)$ и имеет нетривиальный заряд по отношению к группе $U(1)$. Оно играет ключевую роль при переходе к низкоэнергетическому пределу Стандартной модели. Дело в том, что при низких энергиях безмассовыми калибровочными бозонами должны быть только фотон и глюоны. Но, помимо них, в Стандартной модели имеется еще 3 калибровочных бозона, поскольку размерность группы $SU(2) \times U(1)$ равна 4 и на 3 превышает размерность группы $U(1)$. Для того, чтобы дать массу этим трем частицам и при этом не нарушить калибровочную инвариантность используется механизм т. н. спонтанного нарушения симметрии. Его суть заключается в том, что потенциал скалярного поля устроен таким образом, что в вакуумном состоянии значение скалярного поля отлично от 0. Тогда ряд калибровочных бозонов приобретает массы, причем локальная калибровочная инвариантность по-прежнему имеет место. В низкоэнергетическом пределе можно положить все поля, имеющие большие массы равными 0. Тогда можно доказать, что получившаяся теория будет инвариантна относительно группы симметрий, которая оставляет инвариантным вакуумное состояние. В частности, в Стандартной модели такой симметрией оказывается группа симметрии квантовой электродинамики $U(1)_{em}$. Из вакуумного среднего скалярного поля также появляются массовые матрицы для кварков и лептонов, причем существенно, что часть из них оказываются недиагональными [17].

Название частиц	Обозначения	$SU(3)$	$SU(2)$	Заряд $U(1)$
Скалярные поля	$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$	1	фунд.	1/2
Левые лептоны	$\begin{pmatrix} \nu_L^I \\ e_L^I \end{pmatrix}$	1	фунд.	-1/2
Левые кварки	$\begin{pmatrix} u_L^{iI} \\ d_L^{iI} \end{pmatrix}$	фунд.	фунд.	1/6
Правые лептоны	e_R^I	1	1	-1
Правые нейтрино	ν_R^I	1	1	0
Правый верхний кварк	u_R^{iI}	фунд.	1	2/3
Правый нижний кварк	d_R^{iI}	фунд.	1	-1/3

Таблица 1: Состав частиц Стандартной модели.

Как мы уже говорили, помимо фотона и 8 глюонов в Стандартной модели имеются еще 3 массивных векторных бозона. В 1983 году они были обнаружены экспериментально [18]. Два из них (т. н. W -бозоны) имеют равные массы и электрические заряды ± 1 . Еще один векторный бозон (т. н. Z -бозон) является электрически нейтральным. Отношение масс Z и W -бозонов связано с некоторым параметром теории, который называется углом Вайнберга θ_W :

$$\frac{m_W}{m_Z} = \cos \theta_W. \quad (22)$$

Существование неизвестной величины θ_W (экспериментальное значение равно $\sin^2 \theta_W \approx 0.2314$) тесно связано с тем, что калибровочная группа Стандартной модели не является простой. Дело в том, что существуют 3 инвариантна, составленные из различных компонент тензора поля, которые входят в функцию Лагранжа. Это

$$\text{tr} F_{\mu\nu SU(3)}^2; \quad \text{tr} F_{\mu\nu SU(2)}^2; \quad F_{\mu\nu U(1)}^2. \quad (23)$$

Каждый из них является неизменным относительно преобразований всей калибровочной группы, а константа связи, которая стоит перед каждым из них, никак не фиксируется. Поэтому в Стандартной модели на самом деле имеются 3 неизвестных константы связи e_1 , e_2 и e_3 для компонент $U(1)$, $SU(2)$ и $SU(3)$ калибровочной группы. В частности, угол Вайнберга определяется равенством

$$e_1 \cos \theta_W = e_2 \sin \theta_W. \quad (24)$$

6 Общая теория относительности

Особое место среди фундаментальных взаимодействий занимает гравитация [19]. Уже при построении релятивистской теории гравитационного взаимодействия удалось выявить фундаментальные свойства окружающего нас мира [20]. Хорошо известно, что для описания тяготения необходимо считать пространство-время не плоским, а искривленным. Тогда гравитационное взаимодействие можно описывать действием [20–22]

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}(R + 2\Lambda) + \text{действие полей материи.} \quad (25)$$

При этом динамической переменной является поле метрического тензора $g_{\mu\nu}$, а через R обозначена скалярная кривизна пространства-времени. Постоянная Λ , которая присутствует в действии (25), впервые была введена в работе [22] и называется космологической постоянной. В течение долгого времени она считалась равной 0, однако, недавние исследования, о которых мы будем говорить несколько далее, свидетельствуют о том, что она отлична от 0, хотя и является крайне малой.

Крайне важно, что теория относительности Эйнштейна приводит необходимости существования новой локальной симметрии. Действие любой теории в искривленном пространстве должно быть инвариантно относительно группы общекоординатных преобразований. В определенном смысле, эти преобразования являются аналогом калибровочных преобразований в теории Янга–Миллса.

Уравнениями движения, которые следуют из действия (25), называются уравнениями Эйнштейна. Они имеют вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\Theta_{\mu\nu}, \quad (26)$$

где $\Theta_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса материальных полей, которые создают гравитационное поле.

Одним из основных доказательств того, что действие (25) правильно описывает гравитационное взаимодействие является предсказание правильной величины смещения перигелия планет (и прежде всего Меркурия). Кроме того, общая теория относительности предсказывает отклонение лучей света в поле тяжести, которое было экспериментально подтверждено наблюдениями звезд во время солнечного затмения. Еще одним подтверждением справедливости общей теории относительности является существование гравитационного красного смещения. Существуют и более сложные эффекты. Например, можно измерять запаздывание отраженного радиосигнала от поверхности Меркурия в момент, когда он находится за Солнцем. В этом случае общая теория относительности предсказывает увеличение времени распространения сигнала, которое было зарегистрировано экспериментально.

Несомненно, стоит отметить еще один эксперимент по проверке общей теории относительности – косвенное подтверждение существования гравитационного излучения [23]. Оно было получено при астрономических наблюдениях за двойными пульсарами. Пульсары испускают периодические импульсы на различных частотах, с периодом от 0.0015 до 8 с и представляют собой нейтронные звезды, которые с огромной скоростью вращаются вокруг своей оси. Один из наиболее известных пульсаров находится в центре Крабовидной туманности. Однако наиболее интересными оказываются двойные пульсары, например, пульсар Халсе–Тейлора PSR 1513+16. Он состоит из двух нейтронных звезд, причем расстояние между ними является очень малым. Поэтому гравитационное излучение в этой системе оказывается очень сильным и приводит к заметным потерям энергии. Как следствие, обе звезды сближаются, а период вращения системы уменьшается. Сравнение экспериментально зарегистрированного уменьшения периода вращения с

предсказаниями общей теории относительности полностью подтвердило справедливость ее предсказаний и может рассматриваться как косвенное экспериментальное доказательство существования гравитационного излучения.

Тем не менее, с точки зрения квантовой теории поля общая теория относительности оказывается очень плохой теорией [24]. Дело в том, что наличие размерной константы связи G приводит к тому, что в n -м порядке теории возмущений расходящиеся вклады в эффективное действие оказываются пропорциональными тензору кривизны в степени $n + 1$. В частности, их структура уже существенно отличается от вида исходного действия. Это означает, что теория гравитации Эйнштейна не является перенормируемой.

Кроме того, действие теории гравитации существенно отличается от действия теории Янга–Миллса, которая описывает все остальные взаимодействия. Поэтому среди фундаментальных взаимодействий гравитация занимает особое место.

7 Великое объединение и его предсказания

Теорию Янга–Миллса можно также попытаться использовать для того, чтобы объединить сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия в некоторую единую теорию. В этом случае говорят о построении т. н. теорий Великого объединения [25]. Наиболее простая модель [26], объединяющая эти взаимодействия, основана на калибровочной группе $SU(5)$, которая состоит из унитарных матриц и единичным определителем. Группа $SU(5)$ содержит калибровочную группу Стандартной модели $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ в качестве максимальной подгруппы. При этом вложение $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5)$ может быть осуществлено следующим образом:

$$\begin{pmatrix} e^{2i\alpha_1\omega_3} & 0 \\ 0 & e^{-3i\alpha_1\omega_2} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где $\omega_3 \in SU(3)$, а $\omega_2 \in SU(2)$. Ключевым наблюдением, которое лежит в основе $SU(5)$ модели, является то, что элементарные частицы одного поколения Стандартной модели (включая правое нейтрино) могут быть размещены в трех неприводимых представлениях группы $SU(5)$ следующим образом:

$$1 = (\nu^C)_L; \quad (\bar{5})^i = \begin{pmatrix} d^{1C} & d^{2C} & d^{3C} & e & -\nu \end{pmatrix}_L$$

$$(10)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & u^{3C} & -u^{2C} & u_1 & d_1 \\ -u^{3C} & 0 & u^{1C} & u_2 & d_2 \\ u^{2C} & -u^{1C} & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^C \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^C & 0 \end{pmatrix}_L, \quad (28)$$

где C обозначает зарядово сопряженный спинор. При этом через 1 обозначено тривиальное представление группы $SU(5)$. То, что правое нейтрино преобразуется по этому представлению, означает, что оно никак не меняется при этих преобразованиях. Через $(\bar{5})^i$ и $(10)_{ij}$ обозначены соответственно антифундаментальное и антисимметричное тензорное представления, при которых эти поля изменяются по закону

$$(\bar{5})^i \rightarrow (\omega^*)^i_j (\bar{5})^j; \quad (10)_{ij} \rightarrow \omega_i^k \omega_j^l (10)_{kl}. \quad (29)$$

Несложно убедиться, что под действием подгруппы $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5)$ поля, входящие в представления (28), преобразуются точно также как и в Стандартной модели. В частности, это означает, что из указанных представлений группы $SU(5)$ следуют

правильные значения электрических зарядов всех элементарных частиц. Все всякого сомнения, что этот факт заведомо не является случайным.

Стандартная модель с калибровочной группой $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ получается при спонтанном нарушении $SU(5)$ симметрии. Это происходит, если некоторое скалярное поле (которое может принадлежать, например, присоединенному представлению калибровочной группы 24) приобретает вакуумное среднее. Для этого потенциал этого хиггсовского поля необходимо подобрать специальным образом. Кроме того, необходимо добавить еще одно хиггсовское поле, которое обеспечивает спонтанное нарушение электрослабой калибровочной группы до электродинамики. Такое поле должно принадлежать, как минимум, представлению 5 группы $SU(5)$, поскольку нетривиальные представления меньшей размерности у группы $SU(5)$ просто отсутствуют. При этом три верхние компоненты хиггсовского поля должны иметь большие массы и приобретать нулевое вакуумное среднее. Этого, действительно, можно добиться специальным выбором параметров хиггсовского потенциала. Однако такой выбор является крайне неестественным, поскольку даже на классическом уровне требует подстроить некоторые константы с точностью примерно до 15 знаков. Это представляется крайне неестественным. Возникновение такой неестественной ситуации называется "проблема точной подстройки". Ее возникновение свидетельствует о том, что рассматриваемая теория все еще не является окончательно верной. Заметим, что подобная проблема является характерной практически для всех теорий Великого объединения. Несмотря на существование ряда подходов к построению реалистичного способа расщепления хиггсовского поля на триплет и дуплет [27, 28], окончательного варианта до сих пор не найдено.

Выясним теперь, какие калибровочные бозоны будут присутствовать в спектре $SU(5)$ теории. Число таких бозонов равно размерности калибровочной группы. А поскольку размерность группы $SU(5)$ равна 24, а размерность группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1) = 12$, то в теории, основанной на группе $SU(5)$ должны существовать $24 - 12 = 12$ дополнительных тяжелых калибровочных бозонов X_μ и Y_μ . Они имеют цветовой индекс, образуют дуплет по отношению к подгруппе $SU(2)$ в группе Стандартной модели, а также имеют электрические заряды $\pm 4/3$ и $\pm 1/3$. Однако, эти бозоны приобретают большие массы в результате спонтанного нарушения $SU(5)$ симметрии на некотором большом энергетическом масштабе M_X и практически не сказываются на физике фундаментальных взаимодействий при энергиях около 10^3 ГэВ.

Однако, все же имеется одно интересное следствие возможного существования таких калибровочных бозонов, которое может быть проверено экспериментально уже в относительно недалеком будущем. Речь идет о распаде протона и связанного нейтрона (под связанными мы понимаем нейтроны в атомных ядрах). Дело в том, что тяжелые калибровочные бозоны присутствуют в вершинах взаимодействия, которые содержат одновременно кварковые и лептонные поля. Существование таких вершин приводит к тому, что нарушаются законы сохранения барионного и лептонного чисел. Как следствие, оказывается возможным распад протона

$$p \rightarrow \pi^+ + \tilde{\nu}; \quad p \rightarrow \pi^0 + e^+; \quad \text{и т. д.} \quad (30)$$

Также возможным оказывается распад связанного нейтрона. Напомним, что свободный нейтрон распадается за время порядка 887 с по схеме

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e. \quad (31)$$

Однако разность масс нейтрона и протона невелика и в ядрах нейтрон является стабильным, поскольку при переходе нейтрона в протон увеличение энергии связи компенсирует

уменьшение массы. Однако за счет тяжелых калибровочных бозонов оказываются возможными распады вида

$$n \rightarrow \pi^0 + \tilde{\nu}_e; \quad \text{и т. д.} \quad (32)$$

В таких распадах энергетический выигрыш очень велик и уже не может быть скомпенсирован изменением энергии связи ядра. Поэтому распадаться может даже связанный нейтрон.

Характерное время жизни протона (или связанного нейтрона) может быть легко оценено с использованием стандартного математического аппарата квантовой теории поля. По порядку величины оно оказывается равным

$$t_p = \frac{M_p^5}{M_X^4}. \quad (33)$$

Как следствие, эта величина очень сильно зависит от масштаба, на котором происходит объединение бегущих констант связи. В Стандартной модели величина M_X составляет около 10^{15} ГэВ. Поэтому характерная величина времени жизни протона оказывается равным около 10^{31} лет. Это время очень велико и даже на много порядков превышает возраст Вселенной. Однако, протонов очень много, благодаря чему зарегистрировать такой распад возможно. Аккуратный анализ показывает, что современные экспериментальные возможности позволяют уверенно зарегистрировать такой распад. Однако до сих пор распад протона не был обнаружен. Несколько далее мы поймем, что, на самом деле, Стандартная модель должна быть существенно модифицирована, причем в результате такой модификации отсутствие экспериментального обнаружения распада протона вполне закономерно.

Еще одним, наверное, наиболее интересным следствием теории Великого объединения, основанной на калибровочной группе $SU(5)$, является предсказание величины угла Вайнберга, который должен оказаться равным

$$\sin^2 \theta_W = \frac{3}{8} = 0.375. \quad (34)$$

Заметим, что, на первый взгляд, это значение не согласуется с экспериментально наблюдаемой величиной

$$\sin^2 \theta_W \approx 0.2314. \quad (35)$$

Однако необходимо помнить, что предсказываемое значение угла Вайнберга относится к тому масштабу энергии, на котором четко видна $SU(5)$ -симметрия. Более строго, это значение должно быть справедливо при энергиях больших, чем массы тяжелых калибровочных бозонов X_μ и Y_μ . Дело в том, что квантовые поправки устроены таким образом, что вклады тех или иных частиц в наклон бегущей константы связи проявляются только при энергиях, больших чем масса соответствующей частицы. (В этом случае величину массы частицы часто называют ее порогом рождения.) Поэтому ниже порога рождения тяжелых калибровочных бозонов вклады в константы связи e_1 , e_2 и e_3 дают различные калибровочные бозоны. Но выше порога рождения тяжелых калибровочных бозонов вклады в различные константы связи будут одинаковы. Очевидно, что только в этом случае и могут быть справедливы те или иные соотношения между константами связи. Таким образом, предсказание величины угла Вайнберга относится к энергетическому масштабу M_X . Несколько далее мы выясним, насколько хорошо предсказание угла Вайнберга согласуется с экспериментальными данными.

Отметим еще некоторые интересные предсказания теорий Великого объединения:

Прежде всего необходимо заметить, что поскольку кварки и лептоны соединяются вместе в неприводимые представления группы $SU(5)$ (или некоторой другой калибровочной группы), то на масштабе Великого объединения должны также существовать некоторые соотношения между массами элементарных частиц. Поэтому число свободных параметров теории существенно уменьшается при переходе к все более и более симметричным теориям.

Еще одним интересным предсказанием теорий Великого объединения является возможность существования магнитных зарядов. Дело в том, что, как мы уже выяснили, электродинамика является эффективной теорией, которая возникает как низкоэнергетический предел более сложной модели. Магнитный заряд [29]

$$\vec{H} = \frac{g\vec{r}}{4\pi r^3} \quad (36)$$

нарушает уравнение Максвелла $\text{div} \vec{H} = 0$ только при $\vec{r} = 0$. Но точка в силу соотношения неопределенностей Гейзенберга соответствует очень большим значениям энергии, при которых становятся существенными эффекты других взаимодействий. В частности, возможны [30] классические решения уравнений движения, которые при небольших энергиях ведут себя как магнитные заряды. Известно [31], что в Стандартной модели магнитные монополи отсутствуют. Однако в теориях Великого объединения их появление становится практически неизбежным. При этом масса магнитных монополей (т.е. магнитных зарядов) оказывается порядка M_X , что исключает их рождение на современных ускорителях.

Группа $SU(5)$ не является единственным кандидатом на роль группы Великого объединения. Еще одним, даже более предпочтительным, вариантом [32] является группа $SO(10)$. Группа $SO(10)$ "чуть шире", чем $SU(5)$, в том смысле, что у нее есть максимальная подгруппа $SU(5) \times U(1)$. При этом все элементарные частицы одного поколения, которые в $SU(5)$ модели лежали в трех неприводимых представлениях, можно соединить в одно неприводимое спинорное представление группы $SO(10)$. Это связано с тем, что спинорное представление, которое имеет размерность 16, раскладывается по подгруппе $SU(5)$ как [33]

$$16 = 1 + \bar{5} + 10. \quad (37)$$

Поэтому все элементарные частицы одного поколения в такой теории Великого объединения будут описываться максимально простым единым образом. При этом все случайные на первый взгляд величины, такие как электрические заряды, представления по группам $SU(3)$ и $SU(2)$ в Стандартной модели, автоматически следуют из определенных групповых соотношений. Несомненно, то это очень красивый и выдающийся результат квантовой теории поля.

Еще одним интересным кандидатом на роль калибровочной группы в моделях Великого объединения является исключительная группа E_6 [34]. Она "чуть шире", чем $SO(10)$ и имеет минимальное нетривиальное представление размерности 27. По подгруппе $SO(10)$ это представление раскладывается как

$$27 = 16 + 10 + 1, \quad (38)$$

благодаря чему такая теория также может быть использована для построения единых теорий. Тем не менее, теория, основанная на группе E_6 должна с неизбежностью приводить к появлению новых еще не открытых частиц, которые по-видимому имеют достаточно большие массы. Убедительно и однозначно объяснить, как они возникают, а также дать конкретные предсказания спектра частиц и их масс в настоящее время не удается.

8 Современная физика нейтрино

Важные заключения об описании физики при энергиях порядка массы Великого объединения M_X дает исследование физики нейтрино. Первое, что обращает на себя внимание при исследовании этой частицы, является ее аномально малая масса. Долгое время считалось, что масса нейтрино равна 0. Однако, на самом деле, нейтрино все же имеет хотя и очень малую, но отличную от 0 массу. В настоящее время в прямых экспериментах масса нейтрино еще не измерена. Тем не менее, все же имеются экспериментальные данные, которые свидетельствуют о том, что нейтрино имеет малую недиагональную массовую матрицу. При этом необходимо прежде всего отметить т. н. проблему солнечных нейтрино [35].

Солнце излучает энергию благодаря идущим внутри него ядерным реакциям, главным образом, реакциям протон-протонного цикла, который приводит к слиянию водорода в гелий. Он состоит из цепочки различных ядерных реакций, которая эффективно сводится к превращению

$$4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e + 26.73 \text{ МэВ} - E_\nu, \quad (39)$$

где E_ν – энергия, уносимая электронным нейтрино, которая в среднем оказывается равной 0.6 МэВ. На основании имеющихся данных о Солнце можно получить достаточно надежное предсказание для величины потока солнечных нейтрино. Однако, детектируемый поток солнечных нейтрино оказывается существенно меньше предсказываемого. Проблема может быть решена, если предположить, что у нейтрино имеется недиагональная массовая матрица, которая, как оказывается, приводит к ослаблению исходного потока электронных нейтрино. Дело в том, что в теории с недиагональной массовой матрицей может происходить периодическое во времени превращение первой и второй частиц друг в друга. Такое явление получило название осцилляции [36]. Наиболее простой случай получается, когда смешивание происходит между нейтрино двух типов, причем массовая матрица приводится к диагональному виду ортогональным преобразованием

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Тогда можно показать [25], что если исходно была рождена частица первого типа, то вероятности обнаружить первую и вторую частицы на расстоянии x от источника частиц оказываются равными

$$\begin{aligned} P_{1 \rightarrow 1} &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L_{12}}\right); \\ P_{1 \rightarrow 2} &= \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L_{12}}\right), \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$L_{12} \equiv \frac{2\pi}{E_1 - E_2} \approx \frac{4\pi k}{m_1^2 - m_2^2} \approx 2,5 \text{ м} \frac{k(\text{МэВ})}{\Delta m^2(\text{эВ})^2} \quad (42)$$

– т. н. длина осцилляций. Если область источника или детектора значительно превышает длину осцилляций, то при измерениях числа частиц будут получаться средние значения

$$\langle P_{1 \rightarrow 1} \rangle = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\theta); \quad \langle P_{1 \rightarrow 2} \rangle = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta), \quad (43)$$

которые уже зависят только от вида массовой матрицы. Минимальное значение $P_{1 \rightarrow 1}$ с очевидностью достигается при $\sin^2(2\theta) = 1$ и равно 1/2. Поэтому в модели с двумя

стабильными частицами поток исходных частиц не может уменьшиться более чем в два раза. Аналогичным образом рассматривается случай, когда в теории имеется n частиц. При этом оказывается, что за счет осцилляций поток исходных частиц может быть ослаблен не более чем в n раз.

Осцилляции между электронным, мюонным и τ -нейтрино в Стандартной модели позволяют естественным образом решить проблему солнечными нейтрино: Внутри Солнца происходит рождение электронных нейтрино, которые за время своего движения к Земле частично переходят в мюонные и τ -нейтрино за счет осцилляций. В результате этого и получается наблюдаемое в эксперименте ослабление потока электронных нейтрино, которое определяется параметрами массовой матрицы. Измерение же потока мюонных и τ -нейтрино крайне затруднительно, поскольку они детектируются значительно тяжелее, чем электронные. Осцилляции нейтрино также были обнаружены и в земных экспериментах [37]. Наконец, эксперименты, в которых измерялся поток всех типов нейтрино [38] показали полное соответствие с теоретическими предсказаниями, сделанными на основе исследования строения Солнца.

Проведенные эксперименты свидетельствуют [4], что разность квадратов масс нейтрино различных типов оказываются равными

$$\Delta m_{21}^2 = 8.0 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2; \quad \Delta m_{31}^2 \approx \Delta m_{32}^2 = 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2. \quad (44)$$

Также известны экспериментальные значения большинства углов, которые характеризуют форму массовой матрицы.

Таким образом, необходимо объяснить почему нейтрино приобретает столь малую, но все же отличную от 0 массу. Оказывается, что для этого необходимо ввести в теорию правое нейтрино, которое никак не преобразуется по отношению к калибровочной группе Стандартной модели $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Как следствие, оказывается возможным включить в лагранжиан калибровочно и лоренц инвариантное слагаемое

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} M \overline{(\nu_R)^C} \nu_R - \frac{1}{2} M^+ \bar{\nu}_R (\nu_R)^C, \quad (45)$$

где через ν^C обозначено зарядово сопряженное правое нейтрино, а элементы массовой матрицы M_{IJ} имеют порядок 10^{16} ГэВ. Построенное таким образом массовое слагаемое называется майорановским. Оно является калибровочно инвариантным только благодаря тому, что правое нейтрино не меняется при калибровочных преобразованиях $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Можно доказать, что после добавления такого слагаемого [27] массовая матрица будет иметь структуру

$$\begin{pmatrix} 0 & m \\ m & M \end{pmatrix}. \quad (46)$$

(Первая строка и первый столбец соответствуют левому нейтрино, а вторые – правому.) В предельном случае $M \gg m$ собственные значения этой матрицы оказываются приблизительно равными M и $-m^2/M$. Как следствие, одна из получившихся частиц будет иметь массу порядка $M \sim 10^{16}$ ГэВ. Современные технические возможности не позволяют наблюдать такую частицу экспериментально. Однако масса другой частицы, равная m^2/M , оказывается аномально малой. Действительно, если считать, что масса m имеет порядок 100 ГэВ (ранее было показано, что величина вакуумного среднего $v = 174$ ГэВ), а масса $M \sim 10^{16}$ ГэВ, то $m^2/M \sim 10^{-3}$ эВ. Именно эта частица и должна быть отождествлена с экспериментально наблюдаемым нейтрино. Тем самым удастся объяснить происхождение аномально малой массы нейтрино по сравнению с массами других элементарных частиц Стандартной модели. Описанный выше механизм возникновения такой массы называется качельным механизмом [39].

9 Почему мир суперсимметричен?

Как мы уже выяснили, важнейшую роль в теории поля играют симметрии. При этом до сих пор были рассмотрены только калибровочные и общесоординатные преобразования. Однако, в теории поля по-видимому существует и еще одна крайне нетривиальная симметрия, которая перемешивает между собой бозонные и фермионные поля – так называемая суперсимметрия. Впервые она была предложена в работах [40] как некоторая чисто теоретическая конструкция. Дальнейшие исследования [41] показали, что в суперсимметричных моделях теории поля значительно улучшается ультрафиолетовое поведение, например, полностью сокращаются квадратичные расходимости. Поэтому существование преобразований суперсимметрии оказалось крайне привлекательным с теоретической точки зрения. Тем не менее, в течение длительного времени они оставались чисто абстрактным понятием, достаточно далеким от физики элементарных частиц. Во многом это связано с тем, что число бозонных и фермионных степеней свободы в суперсимметричных теориях совпадают. Кроме того, в случае ненарушенной суперсимметрии массы бозонов и фермионов также оказываются равными, что явно противоречит имеющимся экспериментальным данным.

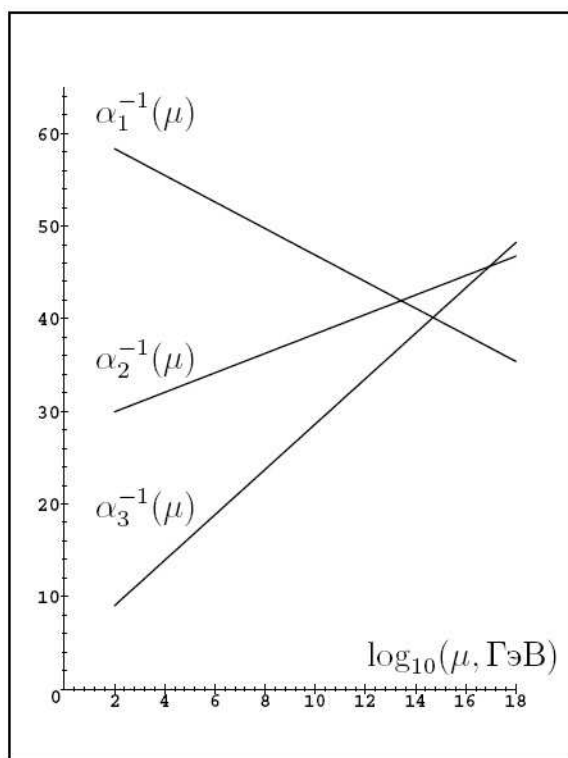


Рис. 1:

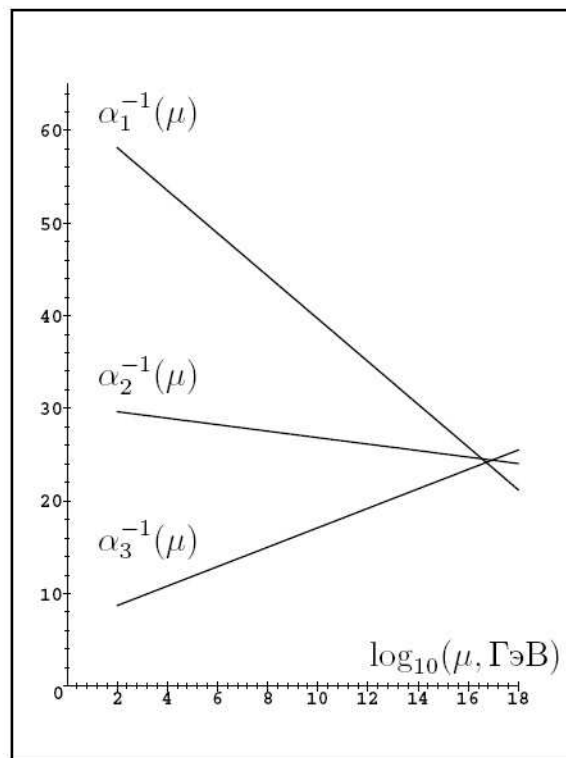


Рис. 2:

Однако относительно недавно было установлено, что суперсимметрия скорее всего существует в Стандартной модели. Дело в том, что если верно предположение о существовании некоторой теории Великого объединения, то, как мы говорили выше, при энергии равной масштабу Великого объединения все три бегущие константы связи* в Стандартной модели должны оказаться равными. Зная экспериментальные значения констант связи при низких энергиях, можно попытаться найти их высокоэнергетическое поведение из ренормгруппового исследования. Заметим, что при этом уравнения ренормгруппы существенно зависят от набора частиц теории. В течение длительного

* с учетом множителя $3/5$ для константы, соответствующей группе $U(1)$.

времени подобное исследование для Стандартной модели свидетельствовало о том, что бегущие константы связи действительно сливаются в точку при энергии около 10^{15} ГэВ. Однако, последние экспериментальные данные значительно уменьшили ошибку в измерениях значений констант при низких энергиях. При подстановке данных величин в уравнения ренормгруппы оказалось, что слияние бегущих констант в пределах ошибки уже не происходит (см. Рис. 1). При попытках модификации Стандартной модели обнаружилось, что бегущие константы объединяются в ее суперсимметричном аналоге – так называемой Минимальной Суперсимметричной Стандартной модели (МССМ) (Рис. 2). Данный факт и является крайне нетривиальным косвенным экспериментальным подтверждением существования суперсимметрии в физике элементарных частиц.

В спектре МССМ каждому бозону соответствует фермионный суперпартнер и наоборот. Массы дополнительных частиц (которые и приводят к изменению уравнений ренормгруппы) предполагаются достаточно большими, благодаря чему они пока не наблюдаются экспериментально. Для этого суперсимметрия должна быть некоторым образом нарушена, поскольку в противном случае массы бозонов и фермионов будут равны друг другу. Проблема построения конкретного механизма нарушения суперсимметрии в Стандартной модели до сих пор окончательно не решена и в настоящее время активно исследуется. Тем не менее, преимущества МССМ перед Стандартной моделью оказались настолько существенны, что существование суперсимметрии признано большинством специалистов. Заметим, что эти преимущества не исчерпываются объединением бегущих констант связи. Например, как мы видели ранее, теории Великого объединения предсказывают распад протона, причем его время жизни оказывается пропорциональным четвертой степени массы объединения M_X . Если $M_X \approx 10^{15}$ ГэВ (Стандартная модель), то распад протона должен быть уверенно наблюдаем экспериментально. Однако, это не так. Проблема вновь решается при переходе к Минимальной Суперсимметричной Стандартной модели, поскольку слияние констант связи в МССМ происходит при $M_X \approx 2 \cdot 10^{16}$ ГэВ и предсказываемое время жизни протона увеличивается в 20^4 раз, что оказывается вне рамок современных экспериментальных возможностей.

Кроме того, в МССМ решается проблема "тонкой подстройки" массы хиггсовского бозона. Дело в том, что в Стандартной модели к массе хиггсовского бозона существуют квадратичные поправки. Они приводят к тому, что на масштабе Великого объединения данная масса по порядку величины становится равной M_X и уменьшается до величин ~ 100 ГэВ при низких энергиях за счет радиационных поправок. Это представляется достаточно неестественным. В МССМ существуют только логарифмические расходимости, благодаря чему масса хиггсовских бозонов на масштабе Великого объединения имеет тот же порядок, что и при низких энергиях.

Таким образом, суперсимметрия по-видимому является реальностью физики элементарных частиц и косвенно подтверждается экспериментальными данными. Прямым доказательством существования суперсимметрии будет обнаружение суперпартнеров известных частиц. В данном направлении в настоящее время также ведутся активные исследования.

Тем не менее, далеко не все проблемы пока еще решены. Мы уже упоминали о том, что до сих пор еще не найден механизм реалистичного нарушения суперсимметрии. По-видимому, для его построения необходимо рассматривать теории, которые взаимодействуют с супергравитацией [42]. Такие теории являются инвариантными относительно локальных преобразований суперсимметрии и включают в себя мультиплет супергравитации, который на массовой поверхности состоит из гравитона и суперпартнера – гравитино [43]. Гравитон имеет спин 2, а гравитино – $3/2$. При нарушении суперсимметрии гравитино по-видимому должно приобрести некоторую массу. Тем не менее, это – одно из пока еще не понятных мест современной квантовой теории поля, поскольку

масса гравитино обычно получается из требования крайней малости величины космологической постоянной (см. далее), объяснить которую в настоящее время не удастся.

Кроме того, несмотря на улучшение ультрафиолетового поведения, в большинстве суперсимметричных теориях по-прежнему присутствуют расходимости. При этом супергравитация, также как и обычная теория гравитации, оказывается неперенормируемой. Поэтому проблемы, связанные с ультрафиолетовыми расходимостями, суперсимметрия все же полностью решить не может.

10 Современная космология

Одна из основных проблем физики высоких энергий заключается в том, что мы имеем очень мало экспериментальных данных о явлениях, которые соответствуют энергиям порядка 10^{19} ГэВ. Строительство ускорителей, которые могли бы достичь таких энергий, невозможно по-видимому даже в очень отдаленном будущем. Тем не менее некоторую информацию о физике высоких энергий можно извлечь из астрономических наблюдений. В первую очередь речь, конечно, идет о космологических подтверждениях общей теории относительности, т. е. классической теории гравитации [44].

Уравнения общей теории относительности могут быть применены к исследованию динамики всей Вселенной [45]. При этом предполагается, что Вселенная описывается действием, которое представляет собой сумму стандартного гравитационного действия (в которое мы также включается и космологическую постоянную) и некоторого действия, которое описывает поведение вещества во Вселенной. Тогда уравнения Эйнштейна запишутся в виде

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \Lambda g_{\mu\nu} + 8\pi G\Theta_{\mu\nu}, \quad (47)$$

где $\Theta_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса вещества. Вид этого тензора определяет вид метрики $g_{\mu\nu}$, а, следовательно, и динамику развития Вселенной. В свою очередь, вид тензора энергии-импульса определяется состоянием вещества во Вселенной: составом частиц, их плотностью, средними скоростями и т. д. Поэтому построение выражения для $\Theta_{\mu\nu}$ представляет собой сложную и нетривиальную задачу, тесно связанную с теорией фундаментальных взаимодействий.

Однако, можно рассмотреть некоторый модельный пример, который достаточно неплохо аппроксимирует поведение вещества во Вселенной на различных стадиях ее развития. Дело в том, что в соответствии с экспериментальными данными, полученными из астрономических наблюдений, с хорошей точностью на больших масштабах Вселенная является однородной и изотропной. Это означает, что ее свойства приблизительно одинаковы во всех точках и по всем направлениям (в заданный момент времени). Поэтому разумно предположить, что и в произвольный момент времени Вселенная является однородной и изотропной. Другими словами, в заданный момент времени Вселенная представляет собой максимально симметричное пространство. В зависимости от знака кривизны это может быть трехмерная сфера S^3 , гиперboloид (который вкладывается в четырехмерное пространство) или плоское пространство. В этом случае метрика Вселенной может быть записана в виде [45, 46]

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right), \quad (48)$$

где $a(t)$ – некоторая неизвестная функция, а

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{в случае сферы} \\ 0 & \text{в случае плоского пространства} \\ -1 & \text{в случае гиперboloида} \end{cases} \quad (49)$$

Величина $a(t)$ фактически представляет собой радиус Вселенной. Метрика (48) называется метрикой Фридмана–Робертсона–Уокера. В силу однородности и изотропности Вселенной можно считать, что тензор энергии-импульса вещества во Вселенной имеет следующие нетривиальные компоненты

$$\Theta_0^0 = \rho; \quad \Theta_i^j = -p \delta_i^j, \quad (50)$$

где ρ – плотность энергии вещества во Вселенной, а p – его давление. Поскольку во Вселенной могут присутствовать различные типы вещества, то эти величины можно представить как

$$p = \sum_i p_i; \quad \rho = \sum_i \rho_i, \quad (51)$$

где i нумерует различные типы вещества, которые присутствуют во Вселенной. Заметим, что в эту сумму также можно включить и слагаемое с космологической постоянной, если положить

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}; \quad p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (52)$$

Из уравнений Эйнштейна можно найти зависимость радиуса Вселенной a от времени. Эксперимент показал, что в настоящее время Вселенная расширяется. Это было обнаружено при исследовании спектральных линий далеких объектов [47], которые, как оказалось, смещены в красную сторону, причем величина смещения увеличивается с увеличением расстояния до объекта. Удобно определить красное смещение z формулой

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \equiv \frac{1}{1+z}, \quad (53)$$

где ω_1 и ω_2 – частоты соответственно излученного и принятого сигналов. Тогда при сравнительно небольших расстояниях красное смещение прямо пропорционально расстоянию до источника [48]

$$z \approx H(t_0)d = 100 h \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпс}} d(\text{Мпс}), \quad (54)$$

где h – численная постоянная, которая по современным оценкам есть 0.73 ± 0.03 . Коэффициент пропорциональности, который называется параметром Хаббла, связан с темпом расширения Вселенной формулой

$$H(t) \equiv \dot{a}/a, \quad (55)$$

в которую нужно подставить величину t_0 – современное значение координаты t .

Из уравнений Эйнштейна также следует, что кривизна Вселенной связана с величиной плотности энергии вещества. Если определить величину

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (56)$$

которая называется критической плотностью, то при $\rho > \rho_c$ в произвольный фиксированный момент времени Вселенная представляет собой сферу S^3 , при $\rho < \rho_c$ – гиперboloид,

а при $\rho = \rho_c$ – плоское пространство. Подставляя численные значения гравитационной постоянной и постоянной Хаббла, получаем, что в настоящий момент

$$\rho_c = 1.87 h^2 \cdot 10^{-26} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 11 \cdot h^2 \frac{\text{протон}}{\text{м}^3} = h^2 (3.01 \cdot 10^{-3} \text{эВ})^4. \quad (57)$$

Обращает на себя внимание сходство этой величины с характерной величиной массы нейтрино, которая, как мы уже говорили ранее имеет порядок m^2/M , где m – масштаб энергий, при котором нарушается электрослабая группа, а M – масштаб Великого объединения.

Важным вопросом является определение состава вещества Вселенной. Анализ астрономических наблюдений позволяет это сделать [4]. При этом оказывается, что во-первых плотность вещества во Вселенной является по крайней мере с точностью до 1 – 2 процентов равной критической. Как следствие, Вселенная (в фиксированный момент времени) оказывается достаточно плоской. Кроме того, удается определить доли основных компонент, которые составляют вещество во Вселенной. Оказывается, что обычное вещество составляет только около 4% вещества Вселенной. Еще около 25% составляет т. н. темная материя, которая состоит из некоторых нерелятивистских частиц, которые не участвуют в электромагнитном взаимодействии. Природа этих частиц пока еще не ясна. Несколько далее мы вернемся к вопросу о том, что это могут быть за частицы с точки зрения современной квантовой теории поля. Доля релятивистского вещества во Вселенной оказывается очень малой и составляет около процента или его долей. Основную же часть плотности вещества во Вселенной (около 70%), как оказалось, составляет космологическая постоянная. Можно показать, что следствием этого является увеличение скорости расширения Вселенной в настоящее время.

С помощью уравнений Эйнштейна можно как проанализировать прошлое Вселенной, так и предсказать ее будущее. Наиболее интересным оказывается то, что примерно 13 миллиардов лет назад Вселенная имела очень малые размеры и была очень горячей. Поэтому часто говорят, что Вселенная образовалась в результате т. н. Большого взрыва. На самом деле исследование процессов, происходящих при огромных плотностях и температурах представляет собой крайне сложную и нетривиальную задачу, которая тесно связана с теорией фундаментальных взаимодействий. Поэтому, что было на начальных стадиях развития Вселенной в настоящее время неизвестно. В частности, неизвестен и истинный ее возраст. (То, что обычно понимается под возрастом Вселенной есть время, прошедшее от момента, когда Вселенная была очень маленькой до настоящего времени.) Анализ ранних этапов развития Вселенной представляет большой интерес с точки зрения физики элементарных частиц, поскольку на этих этапах температуры были столь высоки, что энергии тепловых столкновений оказывались очень большими. Как следствие, на этих стадиях могли проявляться эффекты, которые относятся к еще не исследованной в настоящее время области энергий.

11 Ранняя Вселенная

В процессе расширения Вселенной меняются ее термодинамические характеристики и, в частности, ее температура. Это оказывает существенное влияние на происходящие в ней процессы. Если температуры являются настолько высокими, что отсутствуют стабильные частицы, массы которых существенно превышают значения температуры, то можно приближенно считать все частицы релятивистскими. Другими словами, на некотором этапе развития Вселенной, который соответствует большим температурам, доминирующий вклад в правую часть уравнений Эйнштейна дает релятивистское вещество. Эту стадию часто называют эпохой радиационного доминирования. Можно доказать, что на стадии радиационного доминирования расширение Вселенной происходит

адиабатически, причем температура Вселенной приближенно обратно пропорциональна ее радиусу:

$$T \sim \frac{1}{a}. \quad (58)$$

Связь возраста и температуры Вселенной можно приближенно представить в виде

$$t(\text{с}) \sim \frac{2.5}{T^2(\text{МэВ})g(T)}, \quad (59)$$

где $g(T)$ – некоторая функция температуры, которая меняется достаточно медленно от величин порядка 1 до нескольких сотен. Это означает, что на ранних стадиях развития Вселенная была очень горячая. Как следствие, при тепловых столкновениях частиц, которые имели большие энергии, могли происходить достаточно сложные процессы. Поэтому физика частиц имеет самое непосредственное отношение к описанию динамики Вселенной на ранних стадиях ее развития.

Имеет смысл отметить, что важнейшим доказательством справедливости этой картины является существование т. н. реликтового излучения. Его появление связано с тем, что при температурах больших 4000 К активно шли процессы рассеяния фотонов на свободных электронах и протонах, благодаря которым излучение и вещество находились в состоянии термодинамического равновесия. Однако по мере расширения Вселенной ее температура уменьшалась и энергия фотонов уже перестала быть достаточной для того, чтобы разрушить связанное состояние протона и электрона. В результате образовались атомы водорода, и вещество стало прозрачным для излучения, поскольку указанные выше процессы рассеяния практически прекратились. После этого вещество и излучение стали существовать практически по-отдельности. При расширении Вселенной температура излучения постепенно падала и в настоящее время она составляет примерно 2.7 К. Такое излучение было предсказано в работах [49] и обнаружено в 1965 году [50]. Распределение фотонов реликтового излучения по энергиям с очень хорошей точностью описывается формулой излучения абсолютно черного тела.

Аналогичным образом можно пытаться анализировать более далекое прошлое Вселенной, используя известные из эксперимента сведения о ядерных силах или динамике элементарных частиц при тех или иных энергиях. В частности, можно понять, что перед образованием реликтовых фотонов должны были образоваться реликтовые нейтрино. Действительно, в Стандартной модели нейтрино взаимодействует с другими частицами главным образом через $W^\pm$ и Z бозоны. Поэтому если температура оказывается существенно меньшей, чем M_Z , то W и Z бозонам становится все труднее рождаться в тепловых столкновениях. Поэтому по мере уменьшения температуры нейтрино будут все слабее взаимодействовать с веществом. Аккуратная оценка показывает, что при температурах около 1 МэВ взаимодействие нейтрино с другими частицами практически прекращается. Следовательно, помимо реликтовых фотонов должны также существовать и реликтовые нейтрино. В настоящее время они еще не обнаружены экспериментально. Однако, зная температуру реликтовых фотонов, можно легко вычислить температуру реликтовых нейтрино. Она должна оказаться равной приблизительно 1.9 К. Обнаружение реликтовых нейтрино должно стать подтверждением современных представлений о развитии Вселенной.

В более ранние моменты времени при более высоких энергиях также происходят сложные и интересные явления. Однако детальное рассмотрение эволюции Вселенной выходит далеко за рамки этой статьи. Тем не менее, нужно заметить, что в настоящее время достаточно хорошо изучено поведение элементарных частиц вплоть до энергий порядка $10^2 - 10^3$ ГэВ. При исследовании более ранних стадий развития Вселенной,

которые соответствуют температурам большим, чем эти значения, уже необходимо учитывать физику, которая выходит за пределы современных экспериментальных данных и описывается теориями, отличными от Стандартной модели. Но все же, можно сказать достаточно уверенно, что в какой-то момент времени Вселенная имела очень маленький размер и столь большую температуру, что в настоящее время невозможно сказать ничего определенного о физике элементарных частиц при этих энергиях. Тем не менее, о некоторых явлениях, которые происходят в этот период все же можно сделать некоторые предположения. Для этого необходимо отметить ряд вопросов, которые не находят своего объяснения в рамках космологии Фридмана:

1. Вселенная является очень большой. Из современных наблюдательных данных следует, что даже ее видимая часть содержит порядка 10^{90} частиц. В космологии Фридмана фактически постулируется, что такое (или большее) число частиц было во Вселенной изначально. Однако хотелось бы все же понять, откуда же оно получается.

2. Современные наблюдательные данные свидетельствуют, что с огромной точностью Вселенная является однородной и изотропной. С точки зрения космологии Фридмана это оказывается очень неестественным, поскольку, например, реликтовое излучение оказывается абсолютно одинаковым даже для областей, которые не являются причинно связанными.

3. Вселенная является с плоской с хорошей степенью точности. Астрономические наблюдения показывают, что отношение плотности вещества во Вселенной к критической плотности в настоящее время составляет

$$\Omega = \sum_i \Omega_i = 1.00 \pm 0.02. \quad (60)$$

Можно показать, что следствием этого равенства является то, что, например, при $t \sim 1$ с с момента Большого взрыва (в это время температура равна нескольким МэВ, что соответствует началу периода ядерного синтеза) Ω должна быть равна 1 с точностью, по крайней мере, до 14 знаков. С точки зрения космологии Фридмана также это представляется крайне неестественным и желательно найти естественное объяснение того, почему Вселенная в тот момент была настолько плоской.

Для того, чтобы решить указанные проблемы была предложена инфляционная модель [51, 52]. Ее основная идея заключается в том, что на некотором раннем этапе эволюции Вселенная прошла через стадию экспоненциального расширения, которая называется инфляцией. Можно показать, что экспоненциальное расширение происходит в случае, если доминирующий вклад в тензор энергии-импульса дает космологическая постоянная или некоторое вещество с уравнением состояния $\rho = -p$ (т. е. $w = -1$). Тогда размер Вселенной экспоненциально растет с течением времени:

$$a(t) = a_0 e^{H(t-t_0)}, \quad (61)$$

где через H обозначена величина параметра Хаббла на инфляционной стадии. Таким образом за время инфляции размер Вселенной увеличивается в e^N раз, где

$$N = H(t_2 - t_1) = \ln \frac{a_2}{a_1}, \quad (62)$$

а t_1 и t_2 есть моменты времени, которые соответствуют началу и концу инфляционной стадии. Если число N оказывается достаточно большим (например около 100), то в течение инфляционной стадии размер Вселенной увеличится в огромное число раз. Тем самым решается проблема большого размера Вселенной. Аналогичным образом можно

получить естественное объяснение того, почему Вселенная является плоской: Можно доказать, что на инфляционной стадии

$$\Omega - 1 \sim e^{-2Ht}. \quad (63)$$

Поэтому за время инфляции величина $\Omega - 1$ уменьшится в e^{2N} раз и окажется ничтожно малой.

Заметим, что в отличие от стадии горячей Вселенной, в период инфляции расширение Вселенной происходит с примерно постоянной плотностью энергии. Этот процесс является существенно не адиабатическим, и за его время энтропия Вселенной увеличивается в огромное количество раз. Поэтому в рамках инфляционных моделей можно понять почему Вселенная является большой. Кроме того, с помощью инфляции легко объясняется однородность и изотропность Вселенной. Она возникает в начале инфляции за счет установления обычного термодинамического равновесия, а уже затем инфляция растягивает однородные и изотропные участки до громадных размеров, делая их причинно несвязанными.

Космологическая постоянная, ответственная за появление инфляции, может возникать эффективно, если некоторое скалярное поле приобретает такое вакуумное среднее, что его потенциал оказывается отличным от 0. Рассмотрим наиболее простую модель, которая иллюстрирует эту ситуацию: Предположим, что в течение какого-то времени доминирующий вклад в уравнение Фридмана дает некоторое вещественное скалярное поле, которое описывается действием

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2k^2} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right). \quad (64)$$

В случае, если скалярное поле не зависит от координат и времени, слагаемое с производными не дает вклад в действие. Если же при этом потенциал $V(\phi)$ отличен от 0, то действие для скалярного поля эффективно сводится к космологическому слагаемому, причем

$$\frac{1}{k^2} \Lambda = V(\phi). \quad (65)$$

Можно доказать, что в теории со скалярным полем инфляция возникает в случае, если потенциал скалярного поля является очень медленно изменяющимся. Существование такого потенциала по-видимому должно следовать из теории, которая должна описывать физику элементарных частиц при энергиях порядка массы Планка. Тем самым, исходя из космологических предположений удастся также сделать некоторые выводы динамике фундаментальных взаимодействий при сверхвысоких энергиях.

12 Суперсимметрия и космология

Суперсимметрия предлагает определенные пути объяснения экспериментальных данных, которые получены из современных астрономических наблюдений. Прежде всего это относится к объяснению происхождения темной материи. Одним из наиболее вероятных кандидатов на роль темной энергии является легчайшая суперсимметричная частица. Дело в том, что в Минимальной суперсимметричной Стандартной модели имеется дополнительный закон сохранения. Ее действие является инвариантным относительно преобразований группы Z_2 , которая оставляет все частицы Стандартной модели неизменными, а у их суперпартнеров меняет знак. Другими словами, некоторое поле при таких преобразованиях приобретает дополнительный множитель R_p , который связан с барионным числом B , лептонным числом L и спином S равенством

$$R_p = (-1)^{3B+L+2S}. \quad (66)$$

Величина R_p называется R -четностью. Ее сохранение означает, что в любой вершине присутствует только четное число суперпартнеров. Как следствие, при распаде любого суперпартнера обязательно должен появляться другой суперпартнер. В результате легчайший из суперпартнеров должен оказаться стабильной частицей. Именно он и является одним из главных кандидатов на роль темной материи. Тем не менее, можно модифицировать лагранжиан суперсимметричной версии Стандартной модели, вводя в него дополнительные слагаемые, которые нарушают сохранение R -четности. В этом случае легчайший суперпартнер уже не будет являться стабильной частицей и вопрос о происхождении темной материи должен быть решен каким-либо другим способом. В теории Великого объединения, основанной на группе $SU(5)$ добавление таких слагаемых также возможно. Однако, при использовании калибровочной группы $SO(10)$ добавлять слагаемые, которые нарушают R -четность, уже нельзя. Как следствие, в этом случае легчайший суперпартнер оказывается стабильной частицей.

Вопрос о существовании темной энергии также по-видимому связан с суперсимметрией. В обычной теории поля нет никаких ограничений на вакуумное значение потенциальной энергии скалярного поля. Однако если в теории имеется ненарушенная глобальная суперсимметрия, то вакуумное значение потенциальной энергии должно быть равно 0. В случае нарушенной суперсимметрии оно уже будет отличным от 0, но по масштабу примерно равно характерной величине разности масс суперпартнеров, т. е. около 10^3 ГэВ. Именно такую величину космологической постоянной было бы естественно ожидать исходя из современных представлений о теории поля. Однако характерная величина вакуумной энергии скалярного поля, вычисленная исходя из экспериментального значения космологической постоянной оказывается на много порядков меньше и оказывается около $(10^{-3}\text{ЭВ})^4$. Первый шаг к решению этой проблемы заключается в рассмотрении теорий, которые инвариантны относительно локальных преобразований суперсимметрии. В четырех измерениях такие теории допускают добавление слагаемого с космологической постоянной, величина которой связана с массой суперпартнера гравитона, который имеет спин $3/2$ и называется гравитино. Космологический член складывается с вакуумным значением потенциала скалярного поля и дает наблюдаемое значение космологической постоянной. Однако при этом необходимо подстроить две большие величины (порядка $(10^3\text{ГэВ})^4$) так чтобы их разность, оказалась бы равной около $(m^2/M)^4 \sim (10^{-3}\text{ЭВ})^4$. Необходимость такой неестественной процедуры составляет суть т. н. проблемы точной подстройки, которая аналогична аналогичным проблемам, уже упоминавшимся ранее. Таким образом, объяснение малой величины космологической постоянной все же остается одной из нерешенных проблем современной физики высоких энергий.

13 Объединение взаимодействий и суперструны

До сих пор наш анализ физики фундаментальных взаимодействий базировался прежде всего на экспериментальных данных о физике частиц и их тщательном анализе. Однако существует и несколько другой подход [28], который исторически возник при попытках объяснить закономерности динамики сильных взаимодействий при низких энергиях. Это – т. н. теория струн. В ней исследуется динамика одномерного протяженного объекта – струны, который в значительной степени напоминает струну, которая образуется цветовым электрическим полем между двумя достаточно далеко разделенными кварками. Однако попытки построить теорию, альтернативную квантовой хромодинамике, оказались несостоятельными. Тем не менее, теория струн нашла применение в совершенно другой области исследований. Обнаружилось, что в спектре теории струн имеется безмассовая частица спина 2, которая в значительной степени

напоминает гравитон. Поэтому было высказано предположение [53], что теория струн может являться кандидатом на роль единой теории поля. Важным аргументом в пользу этого заключения стало доказательство того, что в 10 измерениях (с сигнатурой $1+9$) в суперсимметричных теориях струн происходит сокращение аномалий [54]. В этом же случае полностью сокращаются все однопетлевые расходимости. Существуют аргументы в пользу того, что в теориях суперструн вообще отсутствуют расходимости. А учитывая, насколько сложно построить квантовую теорию гравитации, этот аргумент приобретает огромное значение. Более того, в теориях суперструн естественным образом возникают как гравитационное взаимодействие, так и суперсимметрия. Поэтому с точки зрения теории суперструны являются крайне привлекательными.

С точки зрения теории поля теория суперструн может рассматриваться как 10-мерная модель, в которой присутствует бесконечное число частиц с возрастающими массами и спинами. При этом квадраты масс оказываются кратными некоторой размерной постоянной. При каждом фиксированном значении массы количество частиц является конечным. Если ограничиться только безмассовыми частицами, то теория струн будет эффективно сводиться к некоторым супергравитационным теориям в 10-и измерениях. При этом низкоэнергетический предел одной из 5 теорий суперструн, – теории гетеротических струн НО с группой $E_8 \times E_8$, является весьма привлекательной с точки зрения физики элементарных частиц. Дело в том, что несмотря на то, что теория суперструн существует в 10 измерениях, можно предположить, что 6 лишних измерений имеют очень малый размер и представляют собой некоторое компактное многообразие. Если наложить на него некоторые требования (оно должно быть многообразием Калаби–Яу, т. е. кэлеровым многообразием с группой голономии $SU(3)$), то при низких энергиях получается теория с калибровочной группой E_6 . Тем не менее, свойства низкоэнергетической теории очень сильно зависят от вида этого многообразия. Фактически, выбирая то или иное многообразие Калаби–Яу можно получить огромное разнообразие низкоэнергетических теорий. Фактически, вопрос о построении низкоэнергетической теории эквивалентно переформулируется как вопрос о выборе некоторого многообразия Калаби–Яу. В настоящее время неизвестно из каких соображений необходимо осуществлять этот выбор.

Кроме того, существуют 5 различных теорий суперструн: I, IIa, IIb, HE и HO. До недавнего времени считалось, что эти теории являются различными, однако относительно недавние исследования показали, что на самом деле они взаимосвязаны и являются различными пределами одной и той же теории. Кроме того, существует еще одна теория, которая существует в 11 измерениях и в низкоэнергетическом пределе сводится к 11-мерной супергравитации [55]. Она получила название "М-теория". Развитие представлений о ней и других теории струн составляет важную часть современных научных исследований [56] прежде всего благодаря свойствам, весьма привлекательным с точки зрения теории. Тем не менее, в теориях струн отсутствует главное: переход к низкоэнергетической теории и однозначное предсказание физики относительно небольших энергий. Поэтому, до тех пор пока не получены экспериментальные подтверждения в ее пользу, теория суперструн будет оставаться только очень красивой гипотезой.

Заключение

В этой статье я постарался описать основные достижения и нерешенные проблемы современной физики высоких энергий. Несомненно, что уже достигнуто понимание очень многих явлений, прежде всего при энергиях около $10^2 - 10^3$ ГэВ. Но даже и в этом случае остается ряд нерешенных вопросов. На многие из них ответ будет по-видимому получен в ближайшем будущем после ввода в строй ускорителя LHC, на котором пред-

полагается открытие хиггсовских бозонов и суперпартнеров других частиц Стандартной модели. Это должно стать решающим подтверждением того, что те идеи, которые лежат в основе современного понимания физики фундаментальных взаимодействий являются правильными. Но все же основные нерешенные вопросы относятся прежде всего к энергиям порядка $10^{16} - 10^{19}$ ГэВ. Несмотря на огромную величину этого масштаба, который по-видимому не будет достижим в прямых экспериментах даже в достаточно далеком будущем, современные достижения науки позволяют делать предположения о том как устроен мир при таких энергиях. Уже сейчас ряд экспериментов подтверждает идею о необходимости построения единой теории фундаментальных взаимодействий, контуры которой уже начинают проявляться. Тем не менее, ее построение до сих пор не закончено. Во многом это связано с отсутствием экспериментальных данных о тех или иных эффектах физики сверхвысоких энергий. Я постарался показать, что некоторые экспериментальные свидетельства все же могут быть получены в обозримом будущем. Несомненно, что важную роль будут играть эксперименты по обнаружению распада протона, сверхточные измерения масс элементарных частиц и констант связи фундаментальных взаимодействий, исследование осцилляций нейтрино и, конечно, определение параметров новых элементарных частиц, обнаружение которых предполагается а ускорителе ЛНС. Поэтому задача построения единой теории поля уже не представляется делом далекого будущего. Будет ли это теория струн или какая-либо другая теория – должно показать время. Формирование картины мира происходит на наших глазах и возможно, что вскоре мы столкнемся со столь интересными теоретическими предсказаниями и новыми явлениями, которые пока еще даже невозможно вообразить.

Литература

- [1] М. Пескин, Д. Шредер, *Введение в квантовую теорию поля*, Москва, Ижевск, 2001.
- [2] А. С. Давыдов, *Квантовая механика*, Москва, Физматлит, (1962).
- [3] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Москва, Наука, (1969).
- [4] W.-M. Yao et al., *The Review of Particle Physics*, Journal of Physics, **G33**, (2006), 1.
- [5] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, M. Nio, arXiv:0712.2607 [hep-ph].
- [6] W. A. Lamb, R. C. Retherford, Phys. Rev. **72**, (1947), 241; **81**, (1951), 222; **86**, (1952), 1014.
- [7] Е. Е. Солпитер, УФН **51**, (1953), 115.
- [8] A. A. Slavnov, ТМФ, **10**, (1972), 99;
J. C. Taylor, Nucl. Phys. **B 33**, (1971), 436.
- [9] C. N. Yang, R. L. Mills, Phys. Rev. **96**, (1954), 191.
R. Utiyama, Phys. Rev. **101**, (1956), 1597;
S. L. Glashow, M. Gell-Mann, Ann. of Phys. **15**, (1961), 437.
- [10] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **13**, (1964), 598.
Н. Н. Боголюбов, Б. В. Струминский, А. Н. Тавхелидзе, ОИЯИ, 1965, препринт Д-1968.
M. Y. Han, Y. Nambu, Phys. Rev. **B 139**, (1965), 1006.
- [11] J. Pati, A. Salam, Phys. Rev. **D8**, (1973), 1240;
- [12] D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett., **30**, (1973), 1343;
H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett., **30**, (1973), 1346.
- [13] Ю. А. Симонов, УФН, **166**, (1996), 337.
- [14] S. L. Glashow, Nucl. Phys., **22**, (1961), 579;
A. Salam, In: Elementary Particle Theory, ed. N. Svartholm, Almquist and Wiksells, Stockholm, 367.
S. Weinberg, Phys. Rev. Lett., **19**, (1967), 1264.
S. L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani, Phys. Rev. **D2**, (1970), 1285.
- [15] E. Fermi, Z. Phys. **88**, (1934), 161.

- [16] T. D. Lee, C. N. Yang, Phys. Rev. **104**, (1956), 254;
C. S. Wu et al., Phys. Rev., **105**, (1957), 1413.
- [17] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10**, (1963), 531;
M. Kobayashi, M. Maskawa, Prog. Theor. Phys., **49**, (1973), 652.
- [18] G. Arnison et al., Phys. Lett. **B122**, (1983), 103;
M. Banner et al., Phys. Lett. **B122**, (1983), 476;
Bagnaia et al., Phys. Lett. **B129**, (1983), 130.
- [19] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика: Учеб. пособие. т. 2. Теория поля*, 7-е изд., М.: Наука, 1988.
- [20] A. Einstein, Ann. Phys. (Leipzig), **49**, (1916), 769.
- [21] D. Hilbert, Konigl. Gessell. d. Wiss. Göttingen Nachr., Math.-Phys., Kl. (1915), 295.
- [22] A. Einstein, Sitz. Preuss. Akad. Wiss., **142**, (1917).
- [23] R. A. Hulse, Rev. Mod. Phys. **66**, (1994), 699;
J. H. Taylor, Rev. Mod. Phys. **66**, (1994), 711.
- [24] G. 'tHooft, M. Veltman, Ann. Inst. Henri Poincaré **20**, (1974), 69.
- [25] Т.-П. Ченг, Л.-Ф. Ли, *Калибровочные теории в физике элементарных частиц*, М.: Мир, 1987.
- [26] H. Georgi, S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **32**, (1974), 438.
- [27] R. Mohapatra *Unification and supersymmetry: the frontiers of quark-lepton physics*.
- [28] М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен, *Теория суперструн*, Москва, Мир, 1990.
- [29] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A 133** (1931), 60.
- [30] G. 'tHooft, Nucl. Phys. **B 79**, (1974), 276;
А. М. Поляков, Письма ЖЭТФ, **20**, (1974), 430.
- [31] К. Хуанг, *Кварки, лептоны и калибровочные поля*, Москва, Мир, 1985;
- [32] H. Fritzsch, P. Minkowski, Ann. Phys. (NY), **93**, (1975), 193;
H. Georgi, In: Particles and fields (Ed. C. E. Carlson), New York: American Institute of Physics, (1974).
- [33] R. Slansky, Phys. Rept. **79**, (1981), 1.
- [34] F. Gurse, P. Ramond, P. Sikivie, Phys. Lett., **60 B**, (1975), 177.
- [35] R. Davis, D. S. Harmer, K. C. Hoffman, Phys. Rev. Lett., **20**, (1968), 1205;
J. Bahcall et al., Phys. Rev. Lett., **45**, (1980), 945.
- [36] Б. М. Понтекорво, ЖЭТФ, **33**, (1957), 549;
Б. М. Понтекорво, ЖЭТФ, **34**, (1958), 247;
Б. М. Понтекорво, ЖЭТФ, **53**, (1967), 1717;
V. N. Gribov, B. Pontecorvo, Phys. Lett., **28B**, (1969), 495;
S. M. Bilenky, B. Pontecorvo, Phys. Rept., **41C**, (1978), 225;
- [37] Y. Fukuda et al. (Super-Kamiokande Collaboration), Phys. Rev. Lett., **81**, (1998), 1562.
- [38] Q. R. Ahmad et al. (SNO Collaboration), Phys. Rev. Lett., **89**, (2002), 011301.
- [39] R. Mohapatra, G. Senjanovich, Phys. Rev. Lett. **44**, (1980), 912.
- [40] Ю. А. Гольфанд, Е. П. Лихтман, Письма ЖЭТФ, **13**, (1971), 452;
Д. В. Волков, В. П. Акулов, Письма ЖЭТФ, **16**, (1972), 621.
- [41] П. Уэст *Введение в суперсимметрию и супергравитацию*, Москва, Мир, 1989.
Ю. Весс, Дж. Беггер *Суперсимметрия*, Новокузнецкий физ.-мат. институт, 1998.
M. Sohnius, Phys. Rept. **128**, (1985), 3.
J. Gates, M. Grisaru, M. Rocek, W. Siegel *Superspace or one thousand and one lessons in supersymmetry*.
- [42] H. Nilles, Phys. Rept. **110**, (1984), 1.
- [43] P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rept. **68**, (1981), 189.
- [44] С. Вейнберг, *Гравитация и космология*, Волгоград, Платон, 2000.
- [45] A. Friedmann, Zs. Phys. **10**, (1922), 377; **21**, (1924), 326.

- [46] H. P. Robertson, Ap. J. **82**, (1935), 284; **83**, (1936), 187; **83**, (1936), 257.
A. G. Walker, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **42**, (1936), 90.
- [47] C. Wirtz, Astr. Nachr. **206**, (1918), 109; **215**, (1921), 349; **216**, (1922), 451; **222**, (1924), 21;
Scientia, **38**, (1925), 303;
K. Lundmark, Stock. Acad. Hand., **50**, N8, (1920); Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **84**, (1924),
747; **85**, (1925), 865.
- [48] E. P. Hubble, Proc. Nat. Acad. Sci., **15**, (1929), 168;
- [49] G. Gamov, Phys. Rev., **D70**, (1946), 572;
R. A. Alpher, R. C. Herman, Nature, **162**, (1948), 774.
- [50] A. A. Penzias, R. W. Wilson, Ap. J., **142**, (1965), 419.
- [51] A. H. Guth, Phys. Rev. **D 23**, (1981), 347;
A. D. Linde, Phys. Lett. **B 108**, (1982), 389;
A. Albrecht, P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **48**, (1982), 1220.
- [52] A. D. Linde, *Particle physics and inflationary cosmology*, Harwood Academic, Switzerland,
(1990);
A. R. Liddle, D. H. Lyth, Phys. Rept. **231**, (1993), 1;
D. H. Lyth, A. Riotto, hep-ph/9807278.
- [53] J. Scherk, J. Y. Schwarz, Nucl. Phys. **81**, (1974), 118;
- [54] M. B. Green, J. H. Schwarz, Phys. Lett. **B 243**, (1984), 475.
- [55] E. Cremmer, B. Julia, J. Scherk, Phys. Lett. **76 B**, (1978), 409.
- [56] K. Becker, M. Becker, J. H. Schwarz, *String theory and M-theory. A modern introduction*.
Cambridge University Press, 2007.

Modern higher energy physics

K. V. Stepanyantz

*Russia, Moscow State University, physical faculty,
department of theoretical physic
sstepan@phys.msu.ru*

We briefly review the modern higher energy physics. Description of the strong and electroweak interactions is considered both in the Standard model and in Grand Unification theories. We discuss the origin of the small neutrino mass and the necessity of supersymmetry. We also consider description of the gravity, modern cosmological experimental data, supergravity theories, and a relation of gravity with other interactions. We draw attention to problems, which appear describing the gravity, and possible ways of their solution. In particular, achievements and drawbacks of superstrings theories are discussed.

Key-words: higher energy physics, Standard model, Grand Unification, supersymmetry, superstring theory.

MSC: 81V17, 81T30, 81T60, 81V15, 81V22.

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НА ДЕКАРТОВЫХ СТЕПЕНЯХ

А. М. Гальмак

Могилевский государственный университет продовольствия
mti@mogilev.by

Для любых $n \geq 3$, $s \geq 1$, $m \geq 2$ на декартовых степенях A^{n-1} и $A^{m(n-1)}$ полугруппы A определяются соответственно $(s(n-1)+1)$ -арная операция $[]_{s(n-1)+1, n-1}$ и n -арная операция $[]_{n, m, m(n-1)}$. Изучаются свойства таких операций.

УДК 512.548

Ключевые слова: полугруппы, полиадические операции.

1. Введение

Простейшим примером операции на декартовой степени может служить операция, определенная покомпонентно на k -ой декартовой степени A^k группоиды A . К числу таких операций относятся, например, сложение комплексных чисел и покомпонентное сложение векторов, заданных своими координатами, и не относятся произведение комплексных чисел, произведение кватернионов и произведение октонионов, которые определены соответственно на 2-ой, 4-ой и 8-ой декартовой степени множества действительных чисел. Все перечисленные выше операции являются бинарными. Полиадические операции арности больше 2, определенные на декартовых степенях множеств, появляются, прежде всего, при изучении прямых произведений универсальных алгебр, в сигнатуру которых входят многоместные операции арности больше 2. При этом n -арные операции, определенные на прямых сомножителях, индуцируют в прямом произведении соответствующие n -арные операции. Другие n -арные операции на декартовых степенях при $n > 2$, как правило, не рассматриваются, и по этой причине о них мало что известно. Частичному устранению указанного пробела будет способствовать данная работа, в которой для любых целых $n \geq 3$, $s \geq 1$, $m \geq 2$ определяются и изучаются $(s(n-1)+1)$ -арная операция $[]_{s(n-1)+1, n-1}$ и n -арная операция $[]_{n, m, m(n-1)}$, определенные соответственно на декартовых степенях A^{n-1} и $A^{m(n-1)}$ полугруппы A .

Определение понятий, используемых в данной работе, можно найти в [1–6]. Здесь же напомним только, что n -арная операция $[]$, определенная на множестве A , называется ассоциативной, если в A выполняются тождества

$$[[x_1 x_2 \dots x_n] x_{n+1} \dots x_{2n-1}] = [x_1 [x_2 \dots x_n x_{n+1}] \dots x_{2n-1}] = \dots = [x_1 x_2 \dots x_{n-1} [x_n \dots x_{2n-1}]].$$

2. Тернарная алгебра $\langle \mathbb{R}^2, +, [] \rangle$

Пусть $\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ – арифметическое линейное пространство размерности два над полем действительных чисел с обычными операциями сложения элементов в $\mathbb{R}^2$ и умножения их на действительные числа. Определим на $\mathbb{R}^2$ тернарную операцию

$$[\mathbf{xyz}] = [(x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)] = (x_1 y_1 z_1, x_2 y_1 z_2), \quad (2.1)$$

где в правой части присутствует операция умножения действительных чисел.

Соответствующие вычисления показывают, что в $\mathbb{R}^2$ выполняются тождества

$$[(x + y)zu] = [xzu] + [yzu], [x(y + z)u] = [xyu] + [xzu], [xy(z + u)] = [xyz] + [xyu], \quad (2.2)$$

которые называются тождествами дистрибутивности.

Если в универсальной алгебре $\langle A, +, [\] \rangle$ с бинарной операцией $+$ и тернарной операцией $[\]$ выполняются последние три тождества, и при этом $\langle A, + \rangle$ – абелева группа, то $\langle A, +, [\] \rangle$ называют $(2, 3)$ -кольцом.

Таким образом, $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$ – $(2, 3)$ -кольцо.

Легко проверяется, что в $\mathbb{R}^2$ выполняются тождества

$$[[xyz]uv] = [x[yzu]v] = [xy[zuv]]. \quad (2.3)$$

Приведенные выше тождества называются тождествами ассоциативности, а $(2, 3)$ -кольцо $\langle A, +, [\] \rangle$ с ассоциативной тернарной операцией $[\]$ называют *ассоциативным*.

Таким образом, $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$ – ассоциативное $(2, 3)$ -кольцо.

Так как для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ верно

$$\begin{aligned} \lambda[xyz] &= [\lambda x_1 y_2 z_1, \lambda x_2 y_1 z_2], [(\lambda x)yz] = (\lambda x_1 y_2 z_1, \lambda x_2 y_1 z_2), \\ [x(\lambda y)z] &= (x_1(\lambda y_2)z_1, x_2(y_1)z_2) = (\lambda x_1 y_2 z_1, \lambda x_2 y_1 z_2), \\ [xy(\lambda z)] &= (x_1 y_2(\lambda z_1), x_2 y_1(\lambda z_2)) = (\lambda x_1 y_2 z_1, \lambda x_2 y_1 z_2), \end{aligned}$$

то

$$\lambda[xyz] = [(\lambda x)yz] = [x(\lambda y)z] = [xy(\lambda z)]. \quad (2.4)$$

Если линейное пространство A над полем P является $(2, 3)$ -кольцом, и при этом для всех λ из поля P выполняются равенства (2.4), то A называют *линейной $(2, 3)$ -алгеброй над P* или просто *тернарной алгеброй над P* .

Таким образом, $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$ – ассоциативная тернарная алгебра над $\mathbb{R}$.

$(2, 3)$ -Кольцо $\langle A, +, [\] \rangle$ называют *абелевым*, если в нем выполняются тождества

$$[x_1 x_2 x_3] = [x_1 x_3 x_2] = [x_2 x_1 x_3] = [x_2 x_3 x_1] = [x_3 x_1 x_2] = [x_3 x_2 x_1].$$

Если же в $\langle A, +, [\] \rangle$ выполняется тождество $[x_1 x_2 x_3] = [x_3 x_2 x_1]$, то $\langle A, +, [\] \rangle$ называют *полуабелевым $(2, 3)$ -кольцом*.

Так как для $x_1 = x_3 = (1, 1)$, $x_2 = (1, 0)$ имеем

$$[x_1 x_2 x_3] = (0, 1), [x_2 x_1 x_3] = (1, 0),$$

то $[x_1 x_2 x_3] \neq [x_2 x_1 x_3]$. Таким образом, тернарная алгебра $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$ не является абелевой.

Так как

$$[xyz] = (x_1 y_2 z_1, x_2 y_1 z_2), [zyx] = (z_1 y_2 x_1, z_2 y_1 x_2) = (x_1 y_2 z_1, x_2 y_1 z_2),$$

то в $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$ выполняется тождество

$$[xyz] = [zyx]. \quad (2.5)$$

Таким образом, $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$ – полуабелева тернарная алгебра.

Так как

$$[(x - y)zu] = [(x + (-y))zu] = [xzu] + [(-y)zu] = [xzu] - [yzu],$$

$$[\mathbf{x}(\mathbf{y} - \mathbf{z})\mathbf{u}] = [\mathbf{x}(\mathbf{y} + (-\mathbf{z}))\mathbf{u}] = [\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{u}] + [\mathbf{x}(-\mathbf{z})\mathbf{u}] = [\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{u}] - [\mathbf{x}\mathbf{z}\mathbf{u}],$$

$$[\mathbf{x}\mathbf{y}(\mathbf{z} - \mathbf{u})] = [\mathbf{x}\mathbf{y}(\mathbf{z} + (-\mathbf{u}))] = [\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}] + [\mathbf{x}\mathbf{y}(-\mathbf{u})] = [\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}] - [\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{u}],$$

то в $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$ выполняются тождества

$$[(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbf{z}\mathbf{u}] = [\mathbf{x}\mathbf{z}\mathbf{u}] - [\mathbf{y}\mathbf{z}\mathbf{u}], [\mathbf{x}(\mathbf{y} - \mathbf{z})\mathbf{u}] = [\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{u}] - [\mathbf{x}\mathbf{z}\mathbf{u}], [\mathbf{x}\mathbf{y}(\mathbf{z} - \mathbf{u})] = [\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}] - [\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{u}]. \quad (2.6)$$

Из определения операции $[\]$ следует

$$[(0, 0)\mathbf{y}\mathbf{z}] = (0, 0), [\mathbf{x}(0, 0)\mathbf{z}] = [0, 0], [\mathbf{x}\mathbf{y}(0, 0)] = [0, 0]$$

для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$. Это означает, что элемент $\mathbf{0} = (0, 0)$ является не только аддитивным, но и мультипликативным нулем в $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$.

Если $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, то

$$[\mathbf{x}(a, 0)(a, 0)] = (0, 0), [(0, a)\mathbf{x}(a, 0)] = (0, 0), [(0, a)(0, a)\mathbf{x}] = (0, 0),$$

то есть для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ существуют $\mathbf{u} = (a, 0), \mathbf{v} = (0, a) \in \mathbb{R}^2$, отличные от нуля $(0, 0)$ $(2, 3)$ -алгебры $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$, такие, что

$$[\mathbf{x}\mathbf{u}\mathbf{u}] = 0, [\mathbf{v}\mathbf{x}\mathbf{u}] = 0, [\mathbf{v}\mathbf{v}\mathbf{x}] = 0.$$

Поэтому все элементы тернарной алгебры $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$ являются делителями её нуля $(0, 0)$.

Для любого $a \in \mathbb{R}$ справедливы также следующие равенства

$$[(0, a)(0, a)(0, a)] = (0, 0), [(a, 0)(a, 0)(a, 0)] = (0, 0).$$

Элемент e тернарного группоида $\langle A, [\] \rangle$ называют его *единицей*, если для любого $x \in A$ верно

$$[xee] = [exe] = [eex] = x.$$

Предположим, что $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ – единица в $\mathbb{R}^2, a \in \mathbb{R}$. Так как

$$[\mathbf{e}\mathbf{e}(a, e_2)] = (a, e_2), [\mathbf{e}\mathbf{e}(a, e_2)] = (e_1e_2a, e_2e_1e_2),$$

то из равенства левых частей последних двух равенств следует $e_1e_2a = a$ для любого $a \in \mathbb{R}$, в частности, $e_1e_2e_1 = e_1$.

Кроме того,

$$[\mathbf{e}(a, e_2)\mathbf{e}] = (a, e_2), [\mathbf{e}(a, e_2)\mathbf{e}] = (e_1e_2e_1, e_2ae_2).$$

Из равенства левых частей последних двух равенств следует $a = e_1e_2e_1$, откуда, учитывая полученное выше равенство $e_1e_2e_1 = e_1$, получаем $a = e_1$, что невозможно, если выбрать $a \neq e_1$.

Таким образом, в $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$ нет единиц. В частности, пара $(1, 1)$ не является единицей. Например, если $a \neq b$, то

$$[(1, 1)(a, b)(1, 1)] = (b, a) \neq (a, b).$$

Элемент e тернарного группоида $\langle A, [\] \rangle$ называют его *мультипликативным идемпотентом*, если $[eee] = e$.

Предположим, что $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ является мультипликативным идемпотентом в $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle, e_1 \neq 0, e_2 \neq 0$. Так как

$$[\mathbf{e}\mathbf{e}\mathbf{e}] = \mathbf{e} = (e_1, e_2), [\mathbf{e}\mathbf{e}\mathbf{e}] = [e_1e_2e_1, e_2e_1e_2],$$

то $e_1 = e_1 e_2 e_1$, откуда $e_1 e_2 = 1$, $e_2 = e_1^{-1}$.

Обратно, если $e_2 = e_1^{-1}$, то

$$[(e_1, e_1^{-1})(e_1, e_1^{-1})(e_1, e_1^{-1})] = (e_1 e_1^{-1} e_1, e_1^{-1} e_1 e_1^{-1}) = (e_1, e_1^{-1}),$$

то есть (e_1, e_1^{-1}) – мультипликативный идемпотент в $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$.

Ясно, что элемент $(0, 0)$ также является мультипликативным идемпотентом в $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$. Таким образом, множество всех мультипликативных идемпотентов в $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$ имеет вид:

$$I(\mathbb{R}^2) = \{(a, a^{-1}) | a \in \mathbb{R}, a \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Если

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2), \mathbf{c} = (c_1, c_2), \mathbf{d} = (d_1, d_2) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2,$$

то

$$\begin{aligned} [(b_2^{-1} c_1^{-1} d_1, b_1^{-1} c_2^{-1} d_2)(b_1, b_2)(c_1, c_2)] &= (d_1, d_2), \\ [(a_1, a_2)(a_2^{-1} c_2^{-1} d_2, a_1^{-1} c_1^{-1} d_1)(c_1, c_2)] &= (d_1, d_2), \\ [(a_1, a_2)(b_1, b_2)(a_1^{-1} b_2^{-1} d_1, a_2^{-1} b_1^{-1} d_2)] &= (d_1, d_2), \end{aligned}$$

то есть в $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$ разрешимы уравнения

$$[\mathbf{xbc}] = \mathbf{d}, [\mathbf{ayc}] = \mathbf{d}, [\mathbf{abz}] = \mathbf{d},$$

при этом указанные решения

$$\mathbf{x} = (b_2^{-1} c_1^{-1} d_1, b_1^{-1} c_2^{-1} d_2), \mathbf{y} = (a_2^{-1} c_2^{-1} d_2, a_1^{-1} c_1^{-1} d_1), \mathbf{z} = (a_1^{-1} b_2^{-1} d_1, a_2^{-1} b_1^{-1} d_2)$$

единственные.

Как обычно, символом $\bar{\mathbf{x}}$ обозначим элемент $(x_1, -x_2)$, сопряженный к элементу $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Так как

$$\overline{[\mathbf{xyz}]} = (x_1 y_2 z_1, -x_2 y_1 z_2),$$

$$\begin{aligned} [\bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{z}}] &= [(x_1, -x_2)(y_1, -y_2)(z_1, -z_2)] = (x_1(-y_2)z_1, -x_2 y_1(-z_2)) = \\ &= (-x_1 y_2 z_1, x_2 y_1 z_2) = - (x_1 y_2 z_1, -x_2 y_1 z_2), \end{aligned}$$

то $\overline{[\mathbf{xyz}]} = -[\bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{z}}]$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$.

Теперь все вышесказанное можно сформулировать в виде теоремы.

2.1. Теорема. Определим на линейном пространстве $\mathbb{R}^2$ размерности два над полем действительных чисел с обычными операциями сложения элементов в $\mathbb{R}^2$ и умножения их на действительные числа еще одну – тернарную операцию (2.1). Тогда:

1) $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$ является ассоциативной, неабелевой, полуабелевой тернарной алгеброй над $\mathbb{R}$, то есть в $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$ выполняются тождества (2.2) – (2.5), но не выполняются тождества абелевости;

2) в $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$ выполняются тождества (2.6);

3) для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ верно

$$[(0, 0)\mathbf{yz}] = [\mathbf{x}(0, 0)\mathbf{z}] = [\mathbf{xy}(0, 0)] = (0, 0),$$

то есть $(0, 0)$ – мультипликативный нуль в $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$;

4) в $\langle \mathbb{R}^2, +, [\] \rangle$ все элементы являются делителями нуля;

Так как

$$\begin{aligned} & [[(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)](u_1, u_2, u_3)(v_1, v_2, v_3)] = \\ & = (x_1 y_2 z_3 u_2 v_3, x_2 y_3 z_1 u_3 v_1, x_3 y_1 z_2 u_1 v_2), \\ & [(x_1, x_2, x_3)[(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)(u_1, u_2, u_3)](v_1, v_2, v_3)] = \\ & = (x_1 y_2 z_3 u_1 v_3, x_2 y_3 z_1 u_2 v_1, x_3 y_1 z_2 u_3 v_2), \end{aligned}$$

то тернарная операция $[\]$ не является ассоциативной.

Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в неассоциативности тернарной

$$[(x_1, x_2, x_3, x_4)(y_1, y_2, y_3, y_4)(z_1, z_2, z_3, z_4)] = (x_1 y_2 z_3, x_2 y_3 z_4, x_3 y_4 z_1, x_4 y_1 z_2)$$

и 4-арной

$$\begin{aligned} & [(x_1, x_2, x_3, x_4)(y_1, y_2, y_3, y_4)(z_1, z_2, z_3, z_4)(u_1, u_2, u_3, u_4)] = \\ & = (x_1 y_2 z_3 u_4, x_2 y_3 z_4 u_1, x_3 y_4 z_1 u_2, x_4 y_1 z_2 u_3) \end{aligned}$$

операций, определенных на $\mathbb{R}^4$.

Дистрибутивность операции $[\]_{s(n-1)+1, n-1}$

Напомним, что если в универсальной алгебре $\langle A, +, [\] \rangle$ с бинарной операцией $+$ и n -арной операцией $[\]$ для любого $i = 1, \dots, n$ выполняется тождество

$$[a_1 \dots a_{i-1}(b_1 + b_2)a_{i+1} \dots a_n] = [a_1 \dots a_{i-1}b_1a_{i+1} \dots a_n] + [a_1 \dots a_{i-1}b_2a_{i+1} \dots a_n], \quad (3.3)$$

то n -арную операцию $[\]$ называют *дистрибутивной* относительно операции $+$. Само тождество (3.3) называют тождеством дистрибутивности. Если к тому же $\langle A, + \rangle$ – абелева группа, то $\langle A, +, [\] \rangle$ называют $(2, n)$ -кольцом. Если операция $[\]$ – ассоциативна, то $(2, n)$ -кольцо $\langle A, +, [\] \rangle$ называют *ассоциативным* [7, 8].

Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в дистрибутивности всех многоместных операций из примера 3.6 относительно операции $+$, определенной на соответствующих декартовых степенях покомпонентно.

3.7. Предложение. Пусть на множестве A определены бинарная операция $+$ и дистрибутивная относительно нее ассоциативная бинарная операция $\times$. Тогда операция $[\]_{s(n-1)+1, n-1}$, определенная на A^{n-1} с помощью операции $\times$, является ассоциативной, дистрибутивной относительно операции $+$, определенной на A^{n-1} покомпонентно.

Далее в работе операция $+$ определяется на декартовых степенях всегда покомпонентно.

3.8. Следствие. Если $\langle A, +, \times \rangle$ – ассоциативное кольцо, то универсальная алгебра $\langle A^{n-1}, +, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$ является ассоциативным $(2, s(n-1)+1)$ -кольцом. В частности, $\langle A^{n-1}, +, [\]_{n, n-1} \rangle$ – ассоциативное $(2, n)$ -кольцо.

Пусть в линейном пространстве A над полем P определена n -арная операция $[\]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) для любого $\lambda \in P$ верно

$$\lambda[a_1 \dots a_n] = [(\lambda a_1)a_2 \dots a_n] = [a_1(\lambda a_2)a_3 \dots a_n] = \dots = [a_1 \dots a_{n-1}(\lambda a_n)];$$

2) n -арная операция $[\]$ дистрибутивна относительно операции $+$ сложения элементов в A , то есть в A для любого $i = 1, \dots, n$ выполняется тождество (3.3).

Приведенную выше конструкцию называют $(2, n)$ -алгеброй над полем P , так как при $n = 2$ она превращается в обычную бинарную алгебру над P .

Понятно, что $(2, n)$ -алгебру можно определить как $(2, n)$ -кольцо $\langle A, +, [] \rangle$, в котором определена операция умножения скаляров поля P на элементы из A , удовлетворяющая предыдущему условию 1), а также следующим условиям:

- 3) $\lambda(\tau a) = (\lambda\tau)a$ для всех $\lambda, \tau \in P, a \in A$;
- 4) $(\lambda + \tau)a = \lambda a + \tau a$ для всех $\lambda, \tau \in P, a \in A$;
- 5) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ для всех $\lambda \in P, a, b \in A$;
- 6) $1a = a$ для всех $a \in A$;

Если n -арная операция $[]$ ассоциативна (абелева, полуабелева), то $(2, n)$ -алгебру $\langle A, +, [] \rangle$ называют ассоциативной (абелевой, полуабелевой).

Полную прямую сумму $\underbrace{A \oplus \dots \oplus A}_k$ линейного пространства A над полем P будем обозначать тем же символом A^k , что и k -ую декартову степень множества A . При этом операции сложения векторов в линейном пространстве A^k и умножения скаляров из P на векторы из A^k определены покомпонентно.

3.9. Предложение. Если $\langle A, +, \times \rangle$ – ассоциативная алгебра над полем P , то универсальная алгебра $\langle A^{n-1}, +, []_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$ является ассоциативной $(2, s(n-1) + 1)$ -алгеброй над P . В частности, $\langle A^{n-1}, +, []_{n, n-1} \rangle$ – ассоциативная $(2, n)$ -алгебра над P .

Доказательство. Сразу же заметим, что A^{n-1} – линейное пространство.

Согласно теореме 3.3, $[]_{s(n-1)+1, n-1}$ – ассоциативная операция, а по предложению 3.7. операция $[]_{s(n-1)+1, n-1}$ дистрибутивна относительно операции $+$.

Положим

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{i(n-1)}) \in A^{n-1}, i = 1, \dots, n,$$

$$[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]_{n, n-1} = (y_1, \dots, y_{n-1}), [(\lambda \mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n]_{n, n-1} = (z_1, \dots, z_{n-1}), \lambda \in P.$$

Так как $\lambda \mathbf{x}_1 = (\lambda x_{11}, \dots, \lambda x_{1(n-1)})$, то

$$z_j = (\lambda x_{1j}) x_{2(j+1)} \dots x_{(n-j)(n-1)} x_{(n-j+1)1} \dots x_{(n-1)(j-1)} x_{nj} = \lambda y_j, j = 1, \dots, n-1.$$

Поэтому

$$[(\lambda \mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n]_{n, n-1} = (\lambda y_1, \dots, \lambda y_{n-1}) = \lambda (y_1, \dots, y_{n-1}) = \lambda [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]_{n, n-1}.$$

Аналогично доказываются равенства

$$[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{i-1} (\lambda \mathbf{x}_i) \mathbf{x}_{i+1} \dots \mathbf{x}_n]_{n, n-1} = \lambda [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]_{n, n-1}, i = 2, \dots, n.$$

Таким образом, для операции $[]_{n, n-1}$ выполняются все равенства из условия 1) определения $(2, n)$ -алгебры над P . Следовательно, $\langle A^{n-1}, []_{n, n-1} \rangle$ – $(2, n)$ -алгебра.

Доказательство выполнимости условия 1) для случая $s > 1$ принципиально ничем не отличается от приведенного выше доказательства для случая $s = 1$. Предложение доказано.

Перестановочность элементов в $\langle A^{n-1}, []_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$

3.10. Предложение. Если A – полугруппа с единицей 1, содержащая более одного элемента, то $(s(n-1) + 1)$ -арная полугруппа $\langle A^{n-1}, []_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$ не является абелевой.

Доказательство. Положим

$$\mathbf{e} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}), \quad \mathbf{a} = (a, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-2}), \quad a \neq 1.$$

Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{a} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)}]_{s(n-1)+1, n-1} = \mathbf{a} = (a, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-2}), \quad [\mathbf{e} \mathbf{a} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)-1}]_{s(n-1)+1, n-1} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n-2}, a).$$

Следовательно,

$$[\underbrace{\mathbf{a} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)}]_{s(n-1)+1, n-1} \neq [\mathbf{e} \mathbf{a} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)-1}]_{s(n-1)+1, n-1},$$

то есть $\langle A^{n-1}, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$ не является абелевой. Предложение доказано.

3.11. Предложение. Если полугруппа A – абелева, то $(s(n-1)+1)$ -арная полугруппа $\langle A^{n-1}, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$ полуабелева. В частности, полуабелева n -арная полугруппа $\langle A^{n-1}, [\]_{n, n-1} \rangle$.

Доказательство. Ввиду замечания 3.5, достаточно привести доказательство для случая $s = 1$.

Так как полугруппа A – абелева, то

$$\begin{aligned} & [(a_{11}, \dots, a_{1(n-1)})(a_{21}, \dots, a_{2(n-1)}) \dots (a_{(n-1)1}, \dots, a_{(n-1)(n-1)})(a_{n1}, \dots, a_{n(n-1)})]_{n, n-1} = \\ & = (a_{11}a_{22} \dots a_{(n-1)(n-1)}a_{n1}, a_{12}a_{23} \dots a_{(n-2)(n-1)}a_{(n-1)1}a_{n2}, \dots \\ & \dots, a_{1(n-2)}a_{2(n-1)}a_{31} \dots a_{(n-1)(n-3)}a_{n(n-2)}, a_{1(n-1)}a_{21} \dots a_{(n-1)(n-2)}a_{n(n-1)}) = \\ & = (a_{n1}a_{22} \dots a_{(n-1)(n-1)}a_{11}, a_{n2}a_{23} \dots a_{(n-2)(n-1)}a_{(n-1)1}a_{12}, \dots \\ & \dots, a_{n(n-2)}a_{2(n-1)}a_{31} \dots a_{(n-1)(n-3)}a_{1(n-2)}, a_{n(n-1)}a_{21} \dots a_{(n-1)(n-2)}a_{1(n-1)}) = \\ & = [(a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{n(n-2)}, a_{n(n-1)})(a_{21}, \dots, a_{2(n-1)}) \dots \\ & \dots (a_{(n-1)1}, \dots, a_{(n-1)(n-1)})(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1(n-2)}, a_{1(n-1)})]_{n, n-1}, \end{aligned}$$

то есть

$$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_{n-1} \mathbf{a}_n]_{n, n-1} = [\mathbf{a}_n \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_{n-1} \mathbf{a}_1]_{n, n-1}$$

для любых $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{i(n-1)}) \in A^{n-1}$, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $\langle A^{n-1}, [\]_{n, n-1} \rangle$ – полуабелева n -арная полугруппа. Предложение доказано.

Разрешимость уравнений в $\langle A^{n-1}, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$

Имеет место

3.12. Предложение. Если A – группа, то $\langle A^{n-1}, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle = (s(n-1)+1)$ -арная группа. В частности, $\langle A^{n-1}, [\]_{n, n-1} \rangle = n$ -арная группа.

3.13. Пример. Выпишем в явном виде решения уравнений

$$[(x_1, x_2)(a_1, a_2)(b_1, b_2)]_{3,2} = (c_1, c_2),$$

$$[(a_1, a_2)(y_1, y_2)(b_1, b_2)]_{3,2} = (c_1, c_2),$$

$$[(a_1, a_2)(b_1, b_2)(z_1, z_2)]_{3,2} = (c_1, c_2).$$

в $\langle A^2, [\]_{3,2} \rangle$:

$$(u_1 = c_1 b_1^{-1} a_2^{-1}, u_2 = c_2 b_2^{-1} a_1^{-1}),$$

$$\begin{aligned}(v_1 &= a_2^{-1}c_2b_2^{-1}, v_2 = a_1^{-1}c_1b_1^{-1}), \\ (w_1 &= b_2^{-1}a_1^{-1}c_2, w_2 = b_1^{-1}a_2^{-1}c_1), .\end{aligned}$$

Сопряженность элементов в $\langle A^{n-1}, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$

Если $\langle A, +, \times \rangle$ – алгебра над полем P , $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in A^{n-1}$, то положим

$$\bar{\mathbf{a}} = (a_1, -a_2, \dots, -a_{n-1}).$$

3.14. Предложение. Пусть $\langle A, +, \times \rangle$ – ассоциативная алгебра над полем P . Тогда:

$$\overline{[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1}]_{s(n-1)+1, n-1}} = [\overline{\mathbf{x}_1} \dots \overline{\mathbf{x}_{s(n-1)+1}}]_{s(n-1)+1, n-1}, \quad (3.4)$$

если s – четное или s – нечетное и n – четное;

$$\overline{[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1}]_{s(n-1)+1, n-1}} = -[\overline{\mathbf{x}_1} \dots \overline{\mathbf{x}_{s(n-1)+1}}]_{s(n-1)+1, n-1}, \quad (3.5)$$

если s – нечетное и n – нечетное.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1}$, $y_1, \dots, y_{n-1}$ – те же, что и в определении 3.1. Положим также

$$[\overline{\mathbf{x}_1} \dots \overline{\mathbf{x}_{s(n-1)+1}}]_{s(n-1)+1, n-1} = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}).$$

Так как

$$\overline{\mathbf{x}_i} = (x_{i1}, -x_{i2}, \dots, -x_{i(n-1)}), \quad i = 1, \dots, s(n-1) + 1,$$

то, согласно (3.1), и ввиду верных в любом кольце тождеств $(-x)y = x(-y) = -xy$, имеем

$$\begin{aligned}z_1 &= x_{11}(-x_{22}) \dots (-x_{(n-1)(n-1)})x_{n1}(-x_{(n+1)2}) \dots (-x_{(2(n-1))(n-1)}) \dots \\ &\dots x_{((s-1)(n-1)+1)1}(-x_{((s-1)(n-1)+2)2}) \dots (-x_{(s(n-1))(n-1)})x_{(s(n-1)+1)1} = \\ &= (-1)^{s(n-2)}x_{11}x_{22} \dots x_{(n-1)(n-1)}x_{n1}x_{(n+1)2} \dots x_{(2(n-1))(n-1)} \dots \\ &\dots x_{((s-1)(n-1)+1)1}x_{((s-1)(n-1)+2)2} \dots x_{(s(n-1))(n-1)}x_{(s(n-1)+1)1} = (-1)^{s(n-2)}y_1; \\ z_j &= (-x_{1j}) \dots (-x_{(n-j)(n-1)})x_{(n-j+1)1}(-x_{(n-j+2)2}) \dots (-x_{(n-1)(j-1)}) \\ &(-x_{nj}) \dots (-x_{(2(n-1)-j+1)(n-1)})x_{(2(n-1)-j+2)1}(-x_{(2(n-1)-j+3)2}) \dots (-x_{(2(n-1))(j-1)}) \dots \\ &\dots (-x_{((s-1)(n-1)+1)j}) \dots (-x_{(s(n-1)-j+1)(n-1)})x_{(s(n-1)-j+2)1}(-x_{(s(n-1)-j+3)2}) \dots (-x_{(s(n-1)+1)j}) = \\ &= (-1)^{s(n-1)+1-s}y_j = (-1)^{s(n-2)+1}y_j\end{aligned}$$

для любого $j = 2, \dots, n-1$. Таким образом,

$$z_1 = (-1)^{s(n-2)}y_1, \quad z_2 = (-1)^{s(n-2)+1}y_2, \dots, z_{n-2} = (-1)^{s(n-2)+1}y_{n-1}. \quad (3.6)$$

Если s – четное, то, согласно (3.6), $z_1 = y_1$, $z_2 = -y_2$, $\dots$, $z_{n-1} = -y_{n-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\overline{[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1}]_{s(n-1)+1, n-1}} &= \overline{(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})} = \\ &= (y_1, -y_2, \dots, -y_{n-1}) = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = [\overline{\mathbf{x}_1} \dots \overline{\mathbf{x}_{s(n-1)+1}}]_{s(n-1)+1, n-1},\end{aligned}$$

то есть верно (3.4).

Если s – нечетное и n – четное, то $z_1 = y_1$, $z_2 = -y_2$, $\dots$, $z_{n-1} = -y_{n-1}$, и снова верно (3.4).

Если s и n – нечетные, то согласно (3.6), $z_1 = -y_1$, $z_2 = y_2$, $\dots$, $z_{n-1} = y_{n-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\overline{[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1}]_{s(n-1)+1, n-1}} &= \overline{(-y_1, y_2, \dots, y_{n-1})} = \\ &= (y_1, -y_2, \dots, -y_{n-1}) = -(-y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = -[\overline{\mathbf{x}_1} \dots \overline{\mathbf{x}_{s(n-1)+1}}]_{s(n-1)+1, n-1},\end{aligned}$$

то есть верно (3.5). Предложение доказано.

4. Нуль и делители нуля в $\langle A^{n-1}, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$

Элемент a n -арного группоида $\langle A, [\] \rangle$ называется его *нулем*, если для всех $x_1, \dots, x_{n-1} \in A$ верно

$$[ax_1 \dots x_{n-1}] = [x_1 ax_2 \dots x_{n-1}] = \dots = [x_1 \dots x_{n-1}a] = a.$$

Понятно, что n -арный группоид не может иметь более одного нуля.

Элемент a n -арного группоида $\langle A, [\] \rangle$ с нулем 0 называется его i -ым делителем нуля, где $i \in \{1, \dots, n\}$, если существуют отличные от нуля $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n \in A$ такие, что

$$[b_1 \dots b_{i-1} ab_{i+1} \dots b_n] = 0.$$

Если элемент a является i -ым делителем нуля для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$, то a называют делителем нуля в $\langle A, [\] \rangle$ [8]. Понятно, что сам нуль является делителем нуля.

4.1. Предложение. Пусть A – полугруппа с нулем 0 . Тогда $\mathbf{0} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-1}$ – нуль

$(s(n-1)+1)$ -арной полугруппы $\langle A^{n-1}, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$, в которой все элементы являются делителями ее нуля.

Доказательство. Ввиду замечания 3.5, достаточно привести доказательство для случая $s = 1$.

То, что $\mathbf{0} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-1}$ – нуль n -арной полугруппы $\langle A^{n-1}, [\]_{n, n-1} \rangle$, следует из определения операции $[\]_{n, n-1}$.

Покажем, что для любого $\mathbf{a} \in A^{n-1}$ и любого $i \in \{1, \dots, n\}$ существуют

$$\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_{i+1}, \dots, \mathbf{b}_n \in A^{n-1},$$

отличные от $\underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-1}$, такие, что

$$[\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{i-1} \mathbf{a} \mathbf{b}_{i+1} \dots \mathbf{b}_n]_{n, n-1} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-1}.$$

Если $i = 1$, то $\mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_{n-1}$ можно выбрать любыми, отличными от нуля n -арной полугруппы $\langle A^{n-1}, [\]_{n, n-1} \rangle$, а $\mathbf{b}_2$ и $\mathbf{b}_n$ положить равными

$$\mathbf{b}_2 = (c_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}), \quad \mathbf{b}_n = (c_2, \dots, c_{n-1}, 0),$$

где $c_1, \dots, c_{n-1}$ могут быть любыми из A , отличными от нуля. Тогда

$$[\mathbf{a}(c_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}) \mathbf{b}_3 \dots \mathbf{b}_{n-1} (c_2, \dots, c_{n-1}, 0)]_{n, n-1} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-1}.$$

Если $2 \leq i \leq n-1$, то $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_{i+1}, \dots, \mathbf{b}_{n-1}$ можно выбрать любыми, отличными от нуля из $\langle A^{n-1}, [\]_{n, n-1} \rangle$, а $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_n$ положить равными

$$\mathbf{b}_1 = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, c_1), \quad \mathbf{b}_n = (c_2, \dots, c_{n-1}, 0),$$

где $c_1, \dots, c_{n-1}$ могут быть любыми из A , отличными от нуля. Тогда

$$[(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, c_1) \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_{i-1} \mathbf{a} \mathbf{b}_{i+1} \dots \mathbf{b}_{n-1} (c_2, \dots, c_{n-1}, 0)]_{n, n-1} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-1}.$$

Если $i = n$, то $\mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_{n-1}$ можно выбрать любыми, отличными от нуля n -арной полугруппы $\langle A^{n-1}, [\]_{n,n-1} \rangle$, а $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ положить равными

$$\mathbf{b}_1 = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, c_1), \quad \mathbf{b}_2 = (0, c_2, \dots, c_{n-1}),$$

где $c_1, \dots, c_{n-1}$ могут быть любыми из A , отличными от нуля. Тогда

$$[(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, c_1)(0, c_2, \dots, c_{n-1})\mathbf{b}_3 \dots \mathbf{b}_{n-1}\mathbf{a}]_{n,n-1} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}).$$

Предложение доказано.

4.2. Замечание. Можно показать, что в доказательстве предыдущего предложения для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ все элементы $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_{i+1}, \dots, \mathbf{b}_n$ можно выбрать так, что в каждом из них только одна компонента равна нулю, а все остальные компоненты отличны от нуля.

Например, если $n = 4$, (a, b, c) – произвольный элемент из A^3 , где $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, то

$$\begin{aligned} [(a, b, c)(x, 0, y)(0, z, u)(v, w, 0)]_{4,3} &= (0, 0, 0), \\ [(0, x, y)(a, b, c)(0, z, u)(v, w, 0)]_{4,3} &= (0, 0, 0), \\ [(0, x, y)(z, u, 0)(a, b, c)(v, w, 0)]_{4,3} &= (0, 0, 0), \\ [(0, x, y)(z, u, 0)(v, 0, w)(a, b, c)]_{4,3} &= (0, 0, 0), \end{aligned}$$

где x, y, z, u, v, w могут быть любыми из A , отличными от 0. Таким образом, (a, b, c) – делитель нуля в $\langle A^3, [\]_{4,3} \rangle$.

4.3. Предложение. Пусть A – полугруппа с нулем 0, $j \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_{n-1} \in A, \quad \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{j-1}, a_j = 0, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}) \in A^{n-1}.$$

Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{s(n-1)+1}]_{s(n-1)+1, n-1} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}).$$

Доказательство. Ввиду замечания 3.5, достаточно привести доказательство для случая $s = 1$.

Положим

$$[\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_n]_{n, n-1} = (g_1, \dots, g_{n-1}).$$

Тогда, согласно определению операции $[\]_{n, n-1}$,

$$g_k = a_k a_{k+1} \dots a_{n-1} a_1 \dots a_{k-1} a_k, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Так как в правой части последнего равенства присутствуют все $a_1, \dots, a_{n-1}$, то среди них обязательно встретится $a_j = 0$. Поэтому $g_k = 0$, для любого $k = 1, \dots, n-1$. Следовательно, верно равенство из условия предложения. Предложение доказано.

4.4. Замечание. Из предложения 4.3 вытекает, что если A – полугруппа с нулем 0, то в $\langle A^{n-1}, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$ существуют ненулевые элементы $\mathbf{a}$, удовлетворяющие условию

$$[\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{s(n-1)+1}]_{s(n-1)+1, n-1} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}).$$

Таковым будет любой элемент $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{j-1}, 0, a_{j+1}, \dots, a_{n-1})$, в котором, по крайней мере, одна из компонент $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}$ отлична от нуля.

5. Идемпотенты в $\langle A^{n-1}, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$

5.1. Предложение. Если полугруппа A содержит не менее двух элементов, то в $(s(n-1)+1)$ -арной полугруппе $\langle A^{n-1}, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$ нет единиц.

Доказательство. Предположим, что элемент $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ является единицей в $\langle A^{n-1}, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$, и пусть a – произвольный элемент из A . Так как $\mathbf{e}$ – единица в $\langle A^{n-1}, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$, то

$$[(a, e_2, \dots, e_{n-1}) \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)}]_{s(n-1)+1, n-1} = (a, e_2, \dots, e_{n-1}). \quad (5.1)$$

Тогда, положив

$$[(a, e_2, \dots, e_{n-1}) \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)}]_{s(n-1)+1, n-1} = (u_1, \dots, u_{n-1}), \quad (5.2)$$

получим

$$u_1 = ae_2e_1, \text{ если } n = 3; \quad u_1 = ae_2e_3, \text{ если } n > 3.$$

Из (5.1) и (5.2) следует $a = u_1$. Поэтому $a = ae_2e_1$, если $n = 3$; $a = ae_2e_3$, если $n > 3$ для любого $a \in A$. В частности,

$$e_1 = e_1e_2e_1, \text{ если } n = 3; \quad e_1 = e_1e_2e_3, \text{ если } n > 3. \quad (5.3)$$

Так как $\mathbf{e}$ – единица в $\langle A^{n-1}, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$, то

$$[\mathbf{e}(a, e_2, \dots, e_{n-1}) \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)-1}]_{s(n-1)+1, n-1} = (a, e_2, \dots, e_{n-1}) \quad (5.4)$$

Тогда, положив

$$[\mathbf{e}(a, e_2, \dots, e_{n-1}) \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)-1}]_{s(n-1)+1, n-1} = (w_1, \dots, w_{n-1}), \quad (5.5)$$

получим

$$w_1 = e_1e_2e_1, \text{ если } n = 3; \quad w_1 = e_1e_2e_3, \text{ если } n > 3.$$

Из (5.4) и (5.5) следует $a = w_1$. Поэтому $a = e_1e_2e_1$, если $n = 3$; $a = e_1e_2e_3$, если $n > 3$, откуда и из (5.3) вытекает $a = e_1$ для любого $a \in A$. Последнее равенство возможно не всегда, так как в A имеются элементы, отличные от e_1 . Предложение доказано.

Множество всех идемпотентов универсальной алгебры $\langle A, \Omega \rangle$ обозначим через $I(A, \Omega)$.

5.2. Лемма. Если A – группа, 1 – её единица, $a_1, \dots, a_{n-1} \in A$, $s \geq 1$, то

$$(a_1 \dots a_{n-1})^s = 1 \quad (5.6)$$

тогда и только тогда, когда

$$(a_j \dots a_{n-1} a_1 \dots a_{j-1})^s = 1. \quad (5.7)$$

Доказательство. Перепишем (5.6)

$$a_1 \dots a_{j-1} (a_j \dots a_{n-1} a_1 \dots a_{j-1})^{s-1} a_j \dots a_{n-1} = 1.$$

Тогда

$$(a_1 \dots a_{j-1})^{-1} a_1 \dots a_{j-1} (a_j \dots a_{n-1} a_1 \dots a_{j-1})^{s-1} a_j \dots a_{n-1} a_1 \dots a_{j-1} = (a_1 \dots a_{j-1})^{-1} a_1 \dots a_{j-1},$$

откуда

$$(a_j \dots a_{n-1} a_1 \dots a_{j-1})^{s-1} a_j \dots a_{n-1} a_1 \dots a_{j-1} = 1,$$

то есть верно (5.7).

Если верно (5.7), то, рассуждая в обратном порядке, получим (5.6). Лемма доказана.

5.3. Теорема. Пусть A – группа, 1 – ее единица. Тогда

$$I(A^{n-1}, []_{s(n-1)+1, n-1}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in A^{n-1} | (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})^s = 1\},$$

$$I(A^{n-1}, []_{s(n-1)+1, n-1}) = \bigcup_{c \in A, c^s = 1} \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) | \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2} \in A, \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{n-2}^{-1} \dots \varepsilon_1^{-1} c\}.$$

Если A – конечная порядка r , t – число элементов c группы A , удовлетворяющих условию $c^s = 1$, то в $\langle A^{n-1}, []_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$ ровно tr^{n-2} идемпотентов и ровно $r^{n-2}(r-t)$ элементов, не являющихся идемпотентами.

Доказательство. Если $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in I(A^{n-1}, []_{s(n-1)+1, n-1})$, то есть

$$\underbrace{[(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \dots (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})]_{s(n-1)+1, n-1}}_{s(n-1)+1} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}),$$

то

$$\underbrace{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} \dots \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}}_s \varepsilon_1 = \varepsilon_1,$$

откуда $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1})^s = 1$. Таким образом, доказано включение

$$I(A^{n-1}, []_{s(n-1)+1, n-1}) \subseteq \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in A^{n-1} | (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})^s = 1\}. \quad (5.8)$$

Если теперь $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \in A$, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})^s = 1$, то

$$\underbrace{[(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \dots (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})]_{s(n-1)+1, n-1}}_{s(n-1)+1} = (y_1, \dots, y_{n-1}),$$

где

$$y_j = \underbrace{\varepsilon_j \varepsilon_{j+1} \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{j-1} \dots \varepsilon_j \varepsilon_{j+1} \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{j-1}}_s \varepsilon_j$$

Применяя к правой части полученного равенства лемму 5.2, получаем $y_j = \varepsilon_j$. Следовательно,

$$\underbrace{[(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \dots (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})]_{s(n-1)+1, n-1}}_{s(n-1)+1} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}),$$

и доказано включение

$$\{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in A^{n-1} | (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})^s = 1\} \subseteq I(A^{n-1}, []_{s(n-1)+1, n-1}). \quad (5.9)$$

Из (5.8) и (5.9) следует первое равенство из формулировки теоремы.

Второе равенство из формулировки теоремы следует из первого равенства, так как правые части в обоих равенствах равны.

Если A – конечная группа порядка r , то по доказанному, мощность множества $I(A^{n-1}, []_{s(n-1)+1, n-1})$ совпадает с мощностью множества, являющегося объединением t непересекающихся множеств, каждое из которых имеет мощность r^{n-2} , то есть

$$|I(A^{n-1}, []_{s(n-1)+1, n-1})| = tr^{n-2}$$

Тогда число элементов в $\langle A_{n-1}, []_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$, которые не являются идемпотентами равно

$$|A^{n-1}| - |I(A^{n-1}, []_{s(n-1)+1, n-1})| = r^{n-1} - tr^{n-2} = r^{n-2}(r - t).$$

Теорема доказана.

5.4. Следствие. Пусть A – полугруппа с нулем 0, причем $A^* = A \setminus \{0\}$ – группа с единицей 1. Тогда

$$\begin{aligned} I(A^{n-1}, []_{s(n-1)+1, n-1}) &= \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in A^{*n-1} | (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1})^s = 1\} \bigcup \underbrace{\{(0, \dots, 0)\}}_{n-1} = \\ &= \bigcup_{c \in A, c^s=1} \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) | \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2} \in A^*, \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{n-2}^{-1} \dots \varepsilon_1^{-1} c\} \bigcup \underbrace{\{(0, \dots, 0)\}}_{n-1}. \end{aligned}$$

Если A – конечная порядка r , t – число элементов c группы A , удовлетворяющих условию $c^s = 1$, то в $\langle A^{n-1}, []_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$ имеется ровно $t(r-1)^{n-2} + 1$ идемпотентов и ровно $r^{n-1} - t(r-1)^{n-2} - 1$ элементов, не являющихся идемпотентами.

5.5. Следствие. Имеют место формулы:

$$I(\mathbb{R}^{n-1}, []_{s(n-1)+1, n-1}) = \{(a_1, \dots, a_{n-2}, \frac{1}{a_1 \dots a_{n-2}}) | a_1, \dots, a_{n-2} \in \mathbb{R}^*\} \bigcup \underbrace{\{(0, \dots, 0)\}}_{n-1},$$

если s – нечетное;

$$\begin{aligned} I(\mathbb{R}^{n-1}, []_{s(n-1)+1, n-1}) &= \{(a_1, \dots, a_{n-2}, \frac{1}{a_1 \dots a_{n-2}}) | a_1, \dots, a_{n-2} \in \mathbb{R}^*\} \bigcup \\ &\bigcup \{(a_1, \dots, a_{n-2}, -\frac{1}{a_1 \dots a_{n-2}}) | a_1, \dots, a_{n-2} \in \mathbb{R}^*\} \bigcup \underbrace{\{(0, \dots, 0)\}}_{n-1} = \end{aligned}$$

если s – четное;

Полагая в теореме 5.3 и следствиях 5.4 и 5.5 $s = 1$, получим соответственно следующие три утверждения.

5.6. Теорема. Пусть A – группа, $n \geq 3$. Тогда

$$I(A^{n-1}, []_{n, n-1}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) | \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2} \in A, \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{n-2}^{-1} \dots \varepsilon_1^{-1}\}.$$

Если A – конечная группа порядка r , то в $\langle A^{n-1}, []_{n-1, n} \rangle$ ровно r^{n-2} идемпотентов и ровно $r^{n-2}(r-1)$ элементов, не являющихся идемпотентами.

5.7. Следствие. Пусть A – полугруппа с нулем 0, причем $A^* = A \setminus \{0\}$ – группа с единицей 1. Тогда:

$$I(A^{n-1}, []_{n, n-1}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) | \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2} \in A^*, \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{n-2}^{-1} \dots \varepsilon_1^{-1}\} \bigcup \underbrace{\{(0, \dots, 0)\}}_{n-1}.$$

Если A – конечная порядка r , то в $\langle A^{n-1}, []_{n, n-1} \rangle$ имеется ровно $(r-1)^{n-2} + 1$ идемпотентов и ровно $r^{n-1} - (r-1)^{n-2} - 1$ элементов, не являющихся идемпотентами.

5.8. Следствие. Имеет место формула:

$$I(\mathbb{R}^{n-1}, []_{n,n-1}) = \{(a_1, \dots, a_{n-2}, \frac{1}{a_1 \dots a_{n-2}}) | a_1, \dots, a_{n-2} \in \mathbb{R}^*\} \bigcup \underbrace{\{(0, \dots, 0)\}}_{n-1}.$$

Если в следствии 5.4 положить $\mathbb{C}$ – поле всех комплексных чисел и учесть, что

$$z_{n-2}^{-1} \dots z_1^{-1} = (z_1 \dots z_{n-2})^{-1} = \frac{\overline{z_1 \dots z_{n-2}}}{|z_1 \dots z_{n-2}|^2}$$

для любых $z_1, \dots, z_{n-2}$ из $\mathbb{C}$, отличных от нуля 0 поля $\mathbb{C}$, где $\bar{z} = a - bi$, $|z| = a^2 + b^2$ для $z = a + ib \in \mathbb{C}$, то получим

5.9. Следствие. Имеют место формулы

$$I(\mathbb{C}^{n-1}, []_{s(n-1)+1, n-1}) = \bigcup_{i=1}^s \{(z_1, \dots, z_{n-2}, \frac{\overline{z_1 \dots z_{n-2}}}{|z_1 \dots z_{n-2}|^2} u_i) | z_1, \dots, z_{n-2} \in \mathbb{C}^*\} \bigcup \underbrace{\{(0, \dots, 0)\}}_{n-1},$$

где $u_i = \cos \frac{2k\pi}{s} + i \sin \frac{2k\pi}{s}$, $i = 0, 1, \dots, s-1$ – все корни s -ой степени из единицы. В частности,

$$I(\mathbb{C}^{n-1}, []_{n, n-1}) = \{(z_1, \dots, z_{n-2}, \frac{\overline{z_1 \dots z_{n-2}}}{|z_1 \dots z_{n-2}|^2}) | z_1, \dots, z_{n-2} \in \mathbb{C}^*\} \bigcup \underbrace{\{(0, \dots, 0)\}}_{n-1}.$$

5.10. Пример. Полагая в следствии 5.9 $n = 3, s = 1, 2, 3, 4$, получим:

$$I(\mathbb{C}^2, []_{3,2}) = \{(a + ib, \frac{a - ib}{a^2 + b^2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup \{(0, 0)\};$$

$$I(\mathbb{C}^2, []_{5,2}) = \{(a + ib, \frac{a - ib}{a^2 + b^2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup$$

$$\bigcup \{(a + ib, \frac{-a + ib}{a^2 + b^2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup \{(0, 0)\};$$

$$I(\mathbb{C}^2, []_{7,2}) = \{(a + ib, \frac{a - ib}{a^2 + b^2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup$$

$$\bigcup \{a + ib, \frac{a - ib}{a^2 + b^2} (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup$$

$$\bigcup \{a + ib, \frac{a - ib}{a^2 + b^2} (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup \{(0, 0)\};$$

$$I(\mathbb{C}^2, []_{9,2}) = \{(a + ib, \frac{a - ib}{a^2 + b^2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup$$

$$\bigcup \{(a + ib, \frac{-a + ib}{a^2 + b^2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup$$

$$\bigcup \{(a + ib, \frac{b + ia}{a^2 + b^2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup$$

$$\bigcup \{(a + ib, \frac{-b - ia}{a^2 + b^2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup \{(0, 0)\}.$$

Если в следствии 5.4 положить $\mathbb{H}$ – тело всех кватернионов и учесть, что

$$q_{n-2}^{-1} \dots q_1^{-1} = (q_1 \dots q_{n-2})^{-1} = \frac{\overline{q_1 \dots q_{n-2}}}{|q_1 \dots q_{n-2}|^2}$$

для любых $q_1, \dots, q_{n-2} \in \mathbb{H}$, отличных от нуля 0 тела $\mathbb{H}$, где

$$\bar{q} = a - ib - jc - kd, \quad |q| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

для $q = a + ib + jc + kd \in \mathbb{H}$, то получим

5.11. Следствие. Имеют место формулы

$$I(\mathbb{H}^{n-1}, [\]_{s(n-1)+1, n-1}) = \bigcup_{u \in \mathbb{H}, u^s=1} \{(q_1, \dots, q_{n-2}, \frac{\overline{q_1 \dots q_{n-2}}}{|q_1 \dots q_{n-2}|^2} u) | q_1, \dots, q_{n-2} \in \mathbb{H}^*\} \bigcup \underbrace{\{(0, \dots, 0)\}}_{n-1}.$$

В частности,

$$I(\mathbb{H}^{n-1}, [\]_{n, n-1}) = \{(q_1, \dots, q_{n-2}, \frac{\overline{q_1 \dots q_{n-2}}}{|q_1 \dots q_{n-2}|^2}) | q_1, \dots, q_{n-2} \in \mathbb{H}^*\} \bigcup \underbrace{\{(0, \dots, 0)\}}_{n-1}.$$

5.12. Пример. Полагая в следствии 5.11 $n = 3$, $s = 1$, получим:

$$I(\mathbb{H}^2, [\]_{3,2}) = \{(a + ib + jc + kd, \frac{a - ib - jc - kd}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}) | a, b, c, d \in \mathbb{R}^*\} \bigcup \{(0, 0)\}.$$

5.13. Замечание. Если $c_1, \dots, c_t$ – все элементы группы A , удовлетворяющие условию $c_k^s = 1$, то второе равенство из формулировки теоремы 5.3 можно переписать следующим образом

$$I(A^{n-1}, [\]_{s(n-1)+1, n-1}) = \bigcup_{k=1}^t \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) | \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2} \in A, \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{n-2}^{-1} \dots \varepsilon_1^{-1} c_k\}.$$

5.14. Замечание. Из первого равенства формулировки теоремы 5.3 для любого $j \in \{1, \dots, n-1\}$ вытекает равенство

$$\begin{aligned} I(A^{n-1}, [\]_{s(n-1)+1, n-1}) &= \\ &= \bigcup_{c \in A, c^s=1} \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) | \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \varepsilon_{n-1} \in A, \varepsilon_j = \varepsilon_{j-1}^{-1} \dots \varepsilon_1^{-1} c \varepsilon_{n-1}^{-1} \dots \varepsilon_{j+1}^{-1}\}, \end{aligned}$$

в частности,

$$I(A^{n-1}, [\]_{n, n-1}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) | \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \varepsilon_{n-1} \in A, \varepsilon_j = \varepsilon_{j-1}^{-1} \dots \varepsilon_1^{-1} \varepsilon_{n-1}^{-1} \dots \varepsilon_{j+1}^{-1}\}.$$

При $j = n-1$ из этого равенства получаются равенства из формулировок теорем 5.3 и 5.6.

Утверждения 5.4 – 5.12 могут быть переписаны с учетом последних двух равенств.

6. Основная теорема

Предложения 3.9 – 3.12, 3.14, 4.1, 4.3, 5.1, и теорема 5.3 позволяют сформулировать следующую теорему, которая обобщает теорему 2.1.

6.1. Теорема. Пусть $\langle A, +, \times \rangle$ – ассоциативная алгебра над полем P , 0 – ее нуль. Тогда:

1) $\langle A^{n-1}, +, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$ – ассоциативная $(2, s(n-1) + 1)$ -алгебра над P , в которой все элементы являются делителями ее нуля $\underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-1}$;

- 2) если $\langle A, +, \times \rangle$ – коммутативна, то $\langle A^{n-1}, +, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$ – полуабелева;
 3) если $\langle A \setminus \{0\}, \times \rangle$ – группа, то $\langle (A \setminus \{0\})^{n-1}, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$ – $(s(n-1)+1)$ -арная группа;

4) для любого $j \in \{1, \dots, n-1\}$ и любого $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{j-1}, a_j = 0, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}) \in A^{n-1}$ верно

$$[\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{s(n-1)+1}]_{s(n-1)+1, n-1} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1});$$

5) если алгебра $\langle A, +, \times \rangle$ содержит более одного элемента и в ней есть единица, то $\langle A^{n-1}, +, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$ – неабелева;

6) если $\langle A, +, \times \rangle$ содержит более одного элемента, то в $\langle A^{n-1}, +, [\]_{s(n-1)+1, n-1} \rangle$ нет единиц;

7) если $\langle A \setminus \{0\}, \times \rangle$ – группа, 1 – ее единица, то

$$\begin{aligned} I(A^{n-1}, +, [\]_{s(n-1)+1, n-1}) &= \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in A^{n-1} | (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1})^s = 1\} = \\ &= \bigcup_{c \in A, c^s=1} \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) | \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2} \in A, \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{n-2}^{-1} \dots \varepsilon_1^{-1} c\} \bigcup \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{n-1}; \end{aligned}$$

8) если s – четное либо s – нечетное и n – четное, то верно (3.4); в случае, если s – нечетное и n – нечетное, то верно (3.5).

Полагая в теореме 6.1 $s = 1$, получим

6.2. Следствие. Пусть $\langle A, +, \times \rangle$ – ассоциативная алгебра над полем P , 0 – ее нуль. Тогда:

1) $\langle A^{n-1}, +, [\]_{n, n-1} \rangle$ – ассоциативная $(2, n)$ -алгебра над P , в которой все элементы являются делителями ее нуля $(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$;

2) если $\langle A, +, \times \rangle$ – коммутативна, то $\langle A^{n-1}, +, [\]_{n, n-1} \rangle$ – полуабелева;

3) если $\langle A \setminus \{0\}, \times \rangle$ – группа, то $\langle (A \setminus \{0\})^{n-1}, [\]_{n, n-1} \rangle$ – n -арная группа;

4) для любого $j \in \{1, \dots, n-1\}$ и любого $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{j-1}, a_j = 0, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}) \in A^{n-1}$ верно

$$[\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_n]_{n, n-1} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1});$$

5) если алгебра $\langle A, +, \times \rangle$ содержит более одного элемента и в ней есть единица, то $\langle A^{n-1}, +, [\]_{n, n-1} \rangle$ – неабелева;

6) если $\langle A, +, \times \rangle$ содержит более одного элемента, то в $\langle A^{n-1}, +, [\]_{n, n-1} \rangle$ нет единиц;

7) если $\langle A \setminus \{0\}, \times \rangle$ – группа, 1 – ее единица, то

$$I(A^{n-1}, +, [\]_{n, n-1}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) | \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2} \in A, \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{n-2}^{-1} \dots \varepsilon_1^{-1}\} \bigcup \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{n-1};$$

8) если n – четное, то верно (3.4); если же n – нечетное, то верно (3.5).

7. N-арная операция $[\]_{n, m, m(n-1)}$

Пусть B – множество, $m \geq 2$, $n \geq 3$, $A = B^m$ – m -ая декартова степень множества A , $\langle A, \times \rangle$ – полугруппа, операцию которой в некоторых случаях для сокращения записей указывать не будем.

Заметим, что если B – полугруппа, то в качестве $\times$ можно взять операцию, определенную на $A = B^m$ покомпонентно.

Определим на $B^{m(n-1)}$ n -арную операцию $[\]_{n,m,m(n-1)}$ следующим образом. Если

$$\alpha_i = (\alpha_{i1}^{(1)}, \dots, \alpha_{im}^{(1)}, \alpha_{i1}^{(2)}, \dots, \alpha_{im}^{(2)}, \dots, \alpha_{i1}^{(n-1)}, \dots, \alpha_{im}^{(n-1)}) \in B^{m(n-1)}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

то

$$[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n]_{n,m,m(n-1)} = (y_{11}, \dots, y_{1m}, y_{21}, \dots, y_{2m}, \dots, y_{(n-1)1}, \dots, y_{(n-1)m}) \in B^{m(n-1)},$$

где y_{ij} определяются следующим образом

$$\begin{aligned} (y_{j1}, \dots, y_{jm}) &= (\alpha_{11}^{(j)}, \dots, \alpha_{1m}^{(j)}) \times (\alpha_{21}^{(j+1)}, \dots, \alpha_{2m}^{(j+1)}) \times \dots \\ &\dots (\alpha_{(n-j)1}^{(n-1)}, \dots, \alpha_{(n-j)m}^{(n-1)}) \times (\alpha_{(n-j+1)1}^{(1)}, \dots, \alpha_{(n-j+1)m}^{(1)}) \times \dots \\ &\dots (\alpha_{(n-1)1}^{(j-1)}, \dots, \alpha_{(n-1)m}^{(j-1)}) \times (\alpha_{n1}^{(j)}, \dots, \alpha_{nm}^{(j)}) \in B^m, \quad j = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Если положить

$$\alpha_{ij} = (\alpha_{i1}^{(j)}, \dots, \alpha_{im}^{(j)}) \in B^m, \quad \mathbf{y}_i = (y_{i1}, \dots, y_{im}) \in B^m, \quad j \in \{1, \dots, n-1\},$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_j &= (y_{j1}, \dots, y_{jm}) = \alpha_{1j} \times \alpha_{2(j+1)} \times \dots \times \alpha_{(n-j)(n-1)} \times \\ &\times \alpha_{(n-j+1)1} \times \dots \times \alpha_{(n-1)(j-1)} \times \alpha_{nj} \in B^m. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Понятно, что при $m = 1$ n -арная операция $[\]_{n,m,m(n-1)}$ совпадает с n -арной операцией $[\]_{n,n-1}$.

Рассмотрим на $A^{n-1} = \underbrace{B^m \times \dots \times B^m}_{n-1}$ n -арную операцию $[\]_{n,n-1}$, определенную с помощью операции $\times$, и запишем явный вид операции $[\]_{n,n-1}$. Для этого для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ положим

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{i(n-1)}) \in A^{n-1}, \quad \mathbf{x}_{ij} = (x_{i1}^{(j)}, \dots, x_{im}^{(j)}) \in B^m, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

то есть

$$\mathbf{x}_i = ((x_{i1}^{(1)}, \dots, x_{im}^{(1)}), (x_{i1}^{(2)}, \dots, x_{im}^{(2)}), \dots, (x_{i1}^{(n-1)}, \dots, x_{im}^{(n-1)})) \in A^{n-1}.$$

Применяя определение операции $[\]_{n,n-1}$, получим $[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n]_{n,n-1} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{n-1})$, где

$$\mathbf{z}_j = \mathbf{x}_{1j} \times \mathbf{x}_{2(j+1)} \times \dots \times \mathbf{x}_{(n-j)(n-1)} \times \mathbf{x}_{(n-j+1)1} \times \dots \times \mathbf{x}_{(n-1)(j-1)} \times \mathbf{x}_{nj} \in B^m \quad (7.2)$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_j &= (x_{11}^{(j)}, \dots, x_{1m}^{(j)}) \times (x_{21}^{(j+1)}, \dots, x_{2m}^{(j+1)}) \times \dots \times (x_{(n-j)1}^{(n-1)}, \dots, x_{(n-j)m}^{(n-1)}) \times \\ &\times (x_{(n-j+1)1}^{(1)}, \dots, x_{(n-j+1)m}^{(1)}) \times \dots \times (x_{(n-1)1}^{(j-1)}, \dots, x_{(n-1)m}^{(j-1)}) \times (x_{n1}^{(j)}, \dots, x_{nm}^{(j)}). \end{aligned}$$

7.1. Пример. Если $m = 2$, $n = 3$, то

$$\alpha_1 = (\alpha_{11}^{(1)}, \alpha_{12}^{(1)}, \alpha_{11}^{(2)}, \alpha_{12}^{(2)}), \quad \alpha_2 = (\alpha_{21}^{(1)}, \alpha_{22}^{(1)}, \alpha_{21}^{(2)}, \alpha_{22}^{(2)}), \quad \alpha_3 = (\alpha_{31}^{(1)}, \alpha_{32}^{(1)}, \alpha_{31}^{(2)}, \alpha_{32}^{(2)}),$$

$$[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]_{3,2,4} = (y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}),$$

где

$$(y_{11}, y_{12}) = (\alpha_{11}^{(1)}, \alpha_{12}^{(1)})(\alpha_{21}^{(2)}, \alpha_{22}^{(2)})(\alpha_{31}^{(1)}, \alpha_{32}^{(1)}),$$

$$(y_{21}, y_{22}) = (\alpha_{11}^{(2)}, \alpha_{12}^{(2)})(\alpha_{21}^{(1)}, \alpha_{22}^{(1)})(\alpha_{31}^{(2)}, \alpha_{32}^{(2)}).$$

Кроме того,

$$\mathbf{x}_1 = (\mathbf{x}_{11} = (x_{11}^{(1)}, x_{12}^{(1)}), \mathbf{x}_{12} = (x_{11}^{(2)}, x_{12}^{(2)})), \quad \mathbf{x}_2 = (\mathbf{x}_{21} = (x_{21}^{(1)}, x_{22}^{(1)}), \mathbf{x}_{22} = (x_{21}^{(2)}, x_{22}^{(2)})),$$

$$\mathbf{x}_3 = (\mathbf{x}_{31} = (x_{31}^{(1)}, x_{32}^{(1)}), \mathbf{x}_{32} = (x_{31}^{(2)}, x_{32}^{(2)})), \quad [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3]_{3,2} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2],$$

где

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_{11} \mathbf{x}_{22} \mathbf{x}_{31} = (x_{11}^{(1)}, x_{12}^{(1)})(x_{21}^{(2)}, x_{22}^{(2)})(x_{31}^{(1)}, x_{32}^{(1)}),$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_{12} \mathbf{x}_{21} \mathbf{x}_{32} = (x_{11}^{(2)}, x_{12}^{(2)})(x_{21}^{(1)}, x_{22}^{(1)})(x_{31}^{(2)}, x_{32}^{(2)}).$$

Пусть по-прежнему B – множество, $m \geq 2$, $n \geq 3$, $A = B^m$ – m -ая декартова степень множества A , и пусть, кроме того, $\langle A, + \rangle$ – группоид. Определим на $B^{m(n-1)}$ бинарную операцию $\tilde{+}$ следующим образом. Если

$$\alpha = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}, \dots, \alpha_{(n-1)1}, \dots, \alpha_{(n-1)m}),$$

$$\beta = (\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}, \dots, \beta_{(n-1)1}, \dots, \beta_{(n-1)m}) \in B^{m(n-1)},$$

то

$$\alpha \tilde{+} \beta = (u_{11}, \dots, u_{1m}, \dots, u_{(n-1)1}, \dots, u_{(n-1)m}) \in B^{m(n-1)},$$

где

$$(u_{j1}, \dots, u_{jm}) = (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}) + (\beta_{j1}, \dots, \beta_{jm}) \in B^{m(n-1)}$$

для любого $j \in \{1, \dots, n-1\}$.

7.2. Замечание. Если на множестве B определена операция $+$, с помощью которой на множестве $A = B^m$ покомпонентна определена операция $+$, то

$$\alpha \tilde{+} \beta = (\alpha_{11} + \beta_{11}, \dots, \alpha_{1m} + \beta_{1m}, \dots, \alpha_{(n-1)1} + \beta_{(n-1)1}, \dots, \alpha_{(n-1)m} + \beta_{(n-1)m}),$$

то есть, в этом случае, операция $\tilde{+}$ совпадает с операцией $+$, определенной на $B^{m(n-1)}$ покомпонентно.

Пусть при тех же предположениях о m , n , B и A определено произведение элементов поля P на элементы из $A = B^m$:

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda(a_1, \dots, a_m) = (u_1, \dots, u_m).$$

Определим произведение $\circ$ элементов $\lambda \in P$ на элементы из $B^{m(n-1)}$ следующим образом. Если

$$\alpha = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}, \dots, \alpha_{(n-1)1}, \dots, \alpha_{(n-1)m}) \in B^{m(n-1)},$$

то

$$\lambda \circ \alpha = (u_{11}, \dots, u_{1m}, \dots, u_{(n-1)1}, \dots, u_{(n-1)m}),$$

где

$$(u_{j1}, \dots, u_{jm}) = \lambda(\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm})$$

для любого $j \in \{1, \dots, n-1\}$.

7.3. Замечание. Если

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda(a_1, \dots, a_m) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_m),$$

то

$$\lambda \circ \alpha = (\lambda \alpha_{11}, \dots, \lambda \alpha_{1m}, \dots, \lambda \alpha_{(n-1)1}, \dots, \lambda \alpha_{(n-1)m}).$$

7.4. Теорема. Пусть B – множество, $m \geq 2$, $n \geq 3$, $\langle A = B^m, +, \times \rangle$ – ассоциативная алгебра над полем P , $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ – ее нуль. Тогда:

1) $\langle B^{m(n-1)}, \tilde{+}, [\]_{n,m,m(n-1)} \rangle$ – ассоциативная $(2, n)$ -алгебра над P , изоморфная $(2, n)$ -алгебре $\langle A^{n-1}, +, [\]_{n,n-1} \rangle$;

2) в $\langle B^{m(n-1)}, \tilde{+}, [\]_{n,m,m(n-1)} \rangle$ все элементы являются делителями ее нуля

$$(\underbrace{\theta_1, \dots, \theta_m, \dots, \theta_1, \dots, \theta_m}_{n-1});$$

3) если $\langle A, +, \times \rangle$ – коммутативна, то $\langle B^{m(n-1)}, \tilde{+}, [\]_{n,m,m(n-1)} \rangle$ – полуабелева;

4) если $\{A^* = A \setminus \{\theta\}, \times\}$ – группа, то $\langle \tilde{B}, [\]_{n,m,m(n-1)} \rangle$ – n -арная группа, где $\tilde{B}$ – множество всех элементов

$$(b_{11}, \dots, b_{1m}, \dots, b_{(n-1)1}, \dots, b_{(n-1)m}) \in B^{m(n-1)}$$

таких, что $(b_{j1}, \dots, b_{jm}) \neq (\theta_1, \dots, \theta_m)$ для любого $j \in \{1, \dots, n-1\}$;

5) для любого

$$\mathbf{b} = (b_{11}, \dots, b_{1m}, \dots, b_{(n-1)1}, \dots, b_{(n-1)m}) \in B^{m(n-1)}$$

такого, что $(b_{j1}, \dots, b_{jm}) = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ для некоторого $j \in \{1, \dots, n-1\}$, верно

$$[\underbrace{\mathbf{b} \dots \mathbf{b}}_n]_{n,m,m(n-1)} = (\underbrace{\theta_1, \dots, \theta_m, \dots, \theta_1, \dots, \theta_m}_{n-1});$$

6) если множество B содержит более одного элемента, и в $\langle A, +, \times \rangle$ есть единица, то $\langle B^{m(n-1)}, \tilde{+}, [\]_{n,m,m(n-1)} \rangle$ – неабелева;

7) если множество B содержит более одного элемента, то в $\langle B^{m(n-1)}, \tilde{+}, [\]_{n,m,m(n-1)} \rangle$ нет единиц;

8) если $\langle A^*, \times \rangle$ – группа, то

$$I(B^{m(n-1)}, \tilde{+}, [\]_{n,m,m(n-1)}) = J \bigcup \{(\underbrace{\theta_1, \dots, \theta_m, \dots, \theta_1, \dots, \theta_m}_{n-1})\},$$

где J – множество всех элементов

$$(\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{1m}, \dots, \varepsilon_{(n-2)1}, \dots, \varepsilon_{(n-2)m}, \varepsilon_{(n-1)1}, \dots, \varepsilon_{(n-1)m}) \in B^{m(n-1)},$$

в которых компоненты $\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{1m}, \dots, \varepsilon_{(n-2)1}, \dots, \varepsilon_{(n-2)m}$ выбираются произвольными из B , а компоненты $\varepsilon_{(n-1)1}, \dots, \varepsilon_{(n-1)m}$ удовлетворяют условию

$$(\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{1m}) \times \dots \times (\varepsilon_{(n-2)1}, \dots, \varepsilon_{(n-2)m}) \times (\varepsilon_{(n-1)1}, \dots, \varepsilon_{(n-1)m}) = (e_1, \dots, e_m),$$

где $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_m)$ – единица группы $\langle A^*, \times \rangle$ или условию

$$(\varepsilon_{(n-1)1}, \dots, \varepsilon_{(n-1)m}) = (\varepsilon_{(n-2)1}, \dots, \varepsilon_{(n-2)m})^{-1} \times \dots \times (\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{1m})^{-1}.$$

Доказательство. 1) Сразу же заметим, что по следствию 6.2 $\langle A^{n-1}, +, [\]_{n,n-1} \rangle$ – ассоциативная $(2, n)$ -алгебра над P .

Ясно, что отображение φ , ставящее в соответствие элементу

$$((\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(1)}), (\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(2)}), \dots, (\alpha_1^{(n-1)}, \dots, \alpha_m^{(n-1)})) \in A^{n-1}$$

элемент

$$(\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(2)}, \dots, \alpha_1^{(n-1)}, \dots, \alpha_m^{(n-1)}) \in B^{m(n-1)}$$

является биекцией A^{n-1} на $B^{m(n-1)}$.

Пусть

$$\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{i(n-1)}) = ((\alpha_{i1}^{(1)}, \dots, \alpha_{im}^{(1)}), \dots, (\alpha_{i1}^{(n-1)}, \dots, \alpha_{im}^{(n-1)}))$$

– произвольные элементы из A^{n-1} , $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned} [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n]_{n,n-1}^\varphi &= (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{n-1})^\varphi = \\ &= ((z_{11}, \dots, z_{1m}), (z_{21}, \dots, z_{2m}), \dots, (z_{(n-1)1}, \dots, z_{(n-1)m}))^\varphi = \\ &= (z_{11}, \dots, z_{1m}, z_{21}, \dots, z_{2m}, \dots, z_{(n-1)1}, \dots, z_{(n-1)m}), \end{aligned}$$

где, ввиду (7.2),

$$\mathbf{z}_j = (z_{j1}, \dots, z_{jm}) = \alpha_{1j} \times \alpha_{2(j+1)} \times \dots \times \alpha_{(n-j)(n-1)} \times \alpha_{(n-j+1)1} \times \dots \times \alpha_{(n-1)(j-1)} \times \alpha_{nj}. \quad (7.3)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} [\alpha_1^\varphi \alpha_2^\varphi \dots \alpha_n^\varphi]_{n,m,m(n-1)} &= \\ &= [((\alpha_{11}^{(1)}, \dots, \alpha_{1m}^{(1)}), (\alpha_{11}^{(2)}, \dots, \alpha_{1m}^{(2)}), \dots, (\alpha_{11}^{(n-1)}, \dots, \alpha_{1m}^{(n-1)}))^\varphi \\ &\quad ((\alpha_{21}^{(1)}, \dots, \alpha_{2m}^{(1)}), (\alpha_{21}^{(2)}, \dots, \alpha_{2m}^{(2)}), \dots, (\alpha_{21}^{(n-1)}, \dots, \alpha_{2m}^{(n-1)}))^\varphi \dots \\ &\quad \dots ((\alpha_{n1}^{(1)}, \dots, \alpha_{nm}^{(1)}), (\alpha_{n1}^{(2)}, \dots, \alpha_{nm}^{(2)}), \dots, (\alpha_{n1}^{(n-1)}, \dots, \alpha_{nm}^{(n-1)}))^\varphi]_{n,m,m(n-1)} = \\ &= [(\alpha_{11}^{(1)}, \dots, \alpha_{1m}^{(1)}, \alpha_{11}^{(2)}, \dots, \alpha_{1m}^{(2)}, \dots, \alpha_{11}^{(n-1)}, \dots, \alpha_{1m}^{(n-1)}) \\ &\quad (\alpha_{21}^{(1)}, \dots, \alpha_{2m}^{(1)}, \alpha_{21}^{(2)}, \dots, \alpha_{2m}^{(2)}, \dots, \alpha_{21}^{(n-1)}, \dots, \alpha_{2m}^{(n-1)}) \dots \\ &\quad \dots, (\alpha_{n1}^{(1)}, \dots, \alpha_{nm}^{(1)}, \alpha_{n1}^{(2)}, \dots, \alpha_{nm}^{(2)}, \dots, \alpha_{n1}^{(n-1)}, \dots, \alpha_{nm}^{(n-1)})]_{n,m,m(n-1)} = \\ &= (y_{11}, \dots, y_{1m}, \dots, y_{21}, \dots, y_{2m}, \dots, y_{(n-1)1}, \dots, y_{(n-1)m}), \end{aligned}$$

где, согласно определению операции $[]_{n,m,m(n-1)}$, все y_{jk} определяются равенством (7.1).

Так как правые части в (7.1) и (7.3) равны, то

$$[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n]_{n,n-1}^\varphi = [\alpha_1^\varphi \alpha_2^\varphi \dots \alpha_n^\varphi]_{n,m,m(n-1)} \quad (7.4)$$

Пусть

$$\alpha = ((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{(n-1)1}, \dots, \alpha_{(n-1)m})), \quad \beta = ((\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}), \dots, (\beta_{(n-1)1}, \dots, \beta_{(n-1)m}))$$

произвольные элементы из A^{n-1} . Тогда

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^\varphi &= (((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{(n-1)1}, \dots, \alpha_{(n-1)m})) + \\ &\quad + ((\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}), \dots, (\beta_{(n-1)1}, \dots, \beta_{(n-1)m})))^\varphi = \\ &= ((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}) + (\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}), \dots, (\alpha_{(n-1)1}, \dots, \alpha_{(n-1)m}) + (\beta_{(n-1)1}, \dots, \beta_{(n-1)m}))^\varphi = \\ &= ((v_{11}, \dots, v_{1m}), \dots, (v_{(n-1)1}, \dots, v_{(n-1)m}))^\varphi = (v_{11}, \dots, v_{1m}, \dots, v_{(n-1)1}, \dots, v_{(n-1)m}), \end{aligned}$$

где для любого $j = 1, \dots, n-1$ положено

$$(v_{j1}, \dots, v_{jm}) = (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}) + (\beta_{j1}, \dots, \beta_{jm}). \quad (7.5)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\alpha^\varphi \widetilde{+} \beta^\varphi &= ((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{(n-1)1}, \dots, \alpha_{(n-1)m}))^\varphi \widetilde{+} \\ &\quad \widetilde{+} ((\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}), \dots, (\beta_{(n-1)1}, \dots, \beta_{(n-1)m}))^\varphi = \\ &= (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}, \dots, \alpha_{(n-1)1}, \dots, \alpha_{(n-1)m}) \widetilde{+} (\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}, \dots, \beta_{(n-1)1}, \dots, \beta_{(n-1)m}) = \\ &= (u_{11}, \dots, u_{1m}, \dots, u_{(n-1)1}, \dots, u_{(n-1)m}),\end{aligned}$$

где, согласно определению операции $\widetilde{+}$,

$$(u_{j1}, \dots, u_{jm}) = (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}) + (\beta_{j1}, \dots, \beta_{jm}). \quad (7.6)$$

для любого $j = \{1, \dots, n-1\}$. Так как правые части в (7.5) и (7.6) равны, то

$$(\alpha + \beta)^\varphi = \alpha^\varphi \widetilde{+} \beta^\varphi \quad (7.7)$$

Пусть

$$\alpha = ((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{(n-1)1}, \dots, \alpha_{(n-1)m}))$$

– произвольный элемент из A^{n-1} . Тогда

$$\begin{aligned}(\lambda\alpha)^\varphi &= (\lambda((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{(n-1)1}, \dots, \alpha_{(n-1)m})))^\varphi = \\ &= (\lambda(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, \lambda(\alpha_{(n-1)1}, \dots, \alpha_{(n-1)m}))^\varphi = \\ &= ((v_{11}, \dots, v_{1m}), \dots, (v_{(n-1)1}, \dots, v_{(n-1)m}))^\varphi = \\ &= (v_{11}, \dots, v_{1m}, \dots, v_{(n-1)1}, \dots, v_{(n-1)m}),\end{aligned}$$

где положено

$$(v_{j1}, \dots, v_{jm}) = \lambda(\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}). \quad (7.8)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\lambda \circ \alpha^\varphi &= \lambda \circ ((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{(n-1)1}, \dots, \alpha_{(n-1)m}))^\varphi = \\ &= \lambda \circ (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}, \dots, \alpha_{(n-1)1}, \dots, \alpha_{(n-1)m}) = \\ &= (u_{11}, \dots, u_{1m}, \dots, u_{(n-1)1}, \dots, u_{(n-1)m}),\end{aligned}$$

где, согласно определению произведения $\circ$,

$$(u_{j1}, \dots, u_{jm}) = \lambda(\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}). \quad (7.9)$$

для любого $j = \{1, \dots, n-1\}$. Так как правые части в (7.8) и (7.9) равны, то

$$(\lambda\alpha)^\varphi = \lambda \circ \alpha^\varphi \quad (7.10)$$

Из (7.4), (7.7) и (7.10) следует, что φ является изоморфизмом $\langle A^{n-1}, +, [\]_{n,n-1} \rangle$ на $\langle B^{m(n-1)}, \widetilde{+}, [\]_{n,m,m(n-1)} \rangle$. А так как $\langle A^{n-1}, +, [\]_{n,n-1} \rangle$ – ассоциативная $(2, n)$ -алгебра над P , то $\langle B^{m(n-1)}, \widetilde{+}, [\]_{n,m,m(n-1)} \rangle$ – ассоциативная $(2, n)$ -алгебра над P .

2) согласно утверждению 1) следствия 6.2, в $(2, n)$ -алгебре $\langle A^{n-1}, +, [\]_{n,n-1} \rangle$ все элементы являются делителями ее нуля

$$\underbrace{(\theta \dots \theta)}_{n-1} = \underbrace{((\theta_1, \dots, \theta_m), \dots, (\theta_1, \dots, \theta_m))}_{n-1}.$$

Далее используется установленный в 1) изоморфизм φ .

3) Используются утверждение 2) следствия 6.2 и изоморфизм φ .

4) Используются утверждение 3) следствия 6.2 и равенство

$$((A \setminus \{(\theta_1, \dots, \theta_m)\})^{n-1})^\varphi = \widetilde{B}.$$

5) Используются утверждение 4) следствия 6.2 и изоморфизм φ .

6) Используются утверждение 5) следствия 6.2 и изоморфизм φ .

7) Используются утверждение 6) следствия 6.2 и изоморфизм φ .

8) Ясно, что

$$(I(A^{n-1}, +, [\]_{n,n-1}))^\varphi = J \bigcup \underbrace{\{(\theta_1, \dots, \theta_m, \dots, \theta_1, \dots, \theta_m)\}}_{n-1}.$$

Кроме того, по доказанному в (1),

$$(I(A^{n-1}, +, [\]_{n,n-1}))^\varphi = I(B^{m(n-1)}, \widetilde{+}, [\]_{n,m,m(n-1)}).$$

Поэтому

$$I(B^{m(n-1)}, \widetilde{+}, [\]_{n,m,m(n-1)}) = J \bigcup \underbrace{\{(\theta_1, \dots, \theta_m, \dots, \theta_1, \dots, \theta_m)\}}_{n-1}.$$

Теорема доказана.

Если в теореме 7.4 положить $m = 2$, то получим

7.5. Теорема. Пусть B – множество, $n \geq 3$, $\langle A = B^2, +, \times \rangle$ – ассоциативная алгебра над полем P , $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ – ее нуль. Тогда:

1) $\langle B^{2(n-1)}, \widetilde{+}, [\]_{n,2,2(n-1)} \rangle$ – ассоциативная $(2, n)$ -алгебра над P , изоморфная $(2, n)$ -алгебре $\langle A^{n-1}, +, [\]_{n,n-1} \rangle$;

2) в $\langle B^{2(n-1)}, \widetilde{+}, [\]_{n,2,2(n-1)} \rangle$ все элементы являются делителями ее нуля

$$\underbrace{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_1, \theta_2)}_{n-1};$$

3) если $\langle A, +, \times \rangle$ – коммутативна, то $\langle B^{2(n-1)}, \widetilde{+}, [\]_{n,2,2(n-1)} \rangle$ – полуабелева;

4) если $\{A^* = A \setminus \{\theta\}, \times\}$ – группа, то $\langle \widetilde{B}, [\]_{n,2,2(n-1)} \rangle$ – n -арная группа, где $\widetilde{B}$ – множество всех элементов

$$(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{(n-1)1}, b_{(n-1)2}) \in B^{2(n-1)}$$

таких, что $(b_{j1}, b_{j2}) \neq (\theta_1, \theta_2)$ для любого $j \in \{1, \dots, n-1\}$;

5) для любого $\mathbf{b} = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{(n-1)1}, b_{(n-1)2}) \in B^{2(n-1)}$ такого, что $(b_{j1}, b_{j2}) = (\theta_1, \theta_2)$ для некоторого $j \in \{1, \dots, n-1\}$, верно

$$\underbrace{[\mathbf{b} \dots \mathbf{b}]_n}_{n,2,2(n-1)} = \underbrace{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_1, \theta_2)}_{n-1};$$

6) если множество B содержит более одного элемента, и в $\langle A, +, \times \rangle$ есть единица, то $\langle B^{2(n-1)}, \widetilde{+}, [\]_{n,2,2(n-1)} \rangle$ – неабелева;

7) если множество B содержит более одного элемента, то в $\langle B^{2(n-1)}, \widetilde{+}, [\]_{n,2,2(n-1)} \rangle$ нет единиц;

8) если $\langle A^*, \times \rangle$ – группа, то

$$I(B^{2(n-1)}, \widetilde{+}, [\]_{n,2,2(n-1)}) = J \bigcup \underbrace{\{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_1, \theta_2)\}}_{n-1},$$

где J – множество всех элементов

$$(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{(n-2)1}, \varepsilon_{(n-2)2}, \varepsilon_{(n-1)1}, \varepsilon_{(n-1)2}) \in B^{2(n-1)},$$

в которых компоненты $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{(n-2)1}, \varepsilon_{(n-2)2}$ выбираются произвольными из B , а компоненты $\varepsilon_{(n-1)1}, \varepsilon_{(n-1)2}$ удовлетворяют условию

$$(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}) \times \dots \times (\varepsilon_{(n-2)1}, \varepsilon_{(n-2)2}) \times (\varepsilon_{(n-1)1}, \varepsilon_{(n-1)2}) = (e_1, e_2),$$

где $e = (e_1, e_2)$ – единица группы $\langle A^*, \times \rangle$ или условию

$$(\varepsilon_{(n-1)1}, \varepsilon_{(n-1)2}) = (\varepsilon_{(n-2)1}, \varepsilon_{(n-2)2})^{-1} \times \dots \times (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12})^{-1}.$$

При формулировке следующих следствий будем учитывать замечания 7.2 и 7.3.

Если в теореме 7.5 положить $n = 3$, $B = \mathbb{R}$, $\langle A = \mathbb{R}^2, +, \times \rangle$ – алгебра комплексных чисел с операцией $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, то получим

7.6. Следствие. Определим на $\mathbb{R}^4$ тернарную операцию

$$[(x_1, x_2, x_3, x_4)(y_1, y_2, y_3, y_4)(z_1, z_2, z_3, z_4)]_{3,2,4} = (r_1, r_2, r_3, r_4),$$

где

$$r_1 = x_1 y_3 z_1 - x_2 y_4 z_1 - x_1 y_4 z_2 - x_2 y_3 z_2, \quad r_2 = x_1 y_3 z_2 - x_2 y_4 z_2 + x_1 y_4 z_1 + x_2 y_3 z_1,$$

$$r_3 = x_3 y_1 z_3 - x_4 y_2 z_3 - x_3 y_2 z_4 - x_4 y_1 z_4, \quad r_4 = x_3 y_1 z_4 - x_4 y_2 z_4 + x_3 y_2 z_3 + x_4 y_1 z_3.$$

Тогда:

1) $\langle \mathbb{R}^4, +, [\]_{3,2,4} \rangle$ – ассоциативная, неабелева, полуабелева $(2, 3)$ -алгебра, в которой все элементы являются делителями ее нуля $(0, 0, 0, 0)$, и в которой нет единиц;

2) $\langle \widetilde{\mathbb{R}}, [\]_{3,2,4} \rangle$ – тернарная группа, где

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^4 \setminus (\{(0, 0, a, b) | a, b \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(a, b, 0, 0) | a, b \in \mathbb{R}\});$$

3) множество всех мультипликативных идемпотентов в $\langle \mathbb{R}^4, +, [\]_{3,2,4} \rangle$ имеет следующий вид

$$I(\mathbb{R}^4, +, [\]_{3,2,4}) = \{(a, b, \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup \{(0, 0, 0, 0)\}.$$

Если в теореме 7.5 положить $n = 3$, $B = \mathbb{R}$, $\langle A = \mathbb{R}^2, +, \times \rangle$ – алгебра двойных чисел с операцией $(a, b) \times (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$, то получим

7.7. Следствие. Определим на $\mathbb{R}^4$ тернарную операцию

$$[(x_1, x_2, x_3, x_4)(y_1, y_2, y_3, y_4)(z_1, z_2, z_3, z_4)]_{3,2,4} = (r_1, r_2, r_3, r_4),$$

где

$$r_1 = x_1 y_3 z_1 + x_2 y_4 z_1 + x_1 y_4 z_2 + x_2 y_3 z_2, \quad r_2 = x_1 y_3 z_2 + x_2 y_4 z_2 + x_1 y_4 z_1 + x_2 y_3 z_1,$$

$$r_3 = x_3y_1z_3 + x_4y_2z_3 + x_3y_2z_4 + x_4y_1z_4, \quad r_4 = x_3y_1z_4 + x_4y_2z_4 + x_3y_2z_3 + x_4y_1z_3.$$

Тогда $\langle \mathbb{R}^4, +, [\]_{3,2,4} \rangle$ – ассоциативная неабелева, полуабелева $(2, 3)$ -алгебра, в которой все элементы являются делителями ее нуля $(0, 0, 0, 0)$, и в которой нет единиц.

Если в теореме 7.5 положить $n = 3$, $B = \mathbb{R}$, $\langle A = \mathbb{R}^2, +, \times \rangle$ – алгебра дуальных чисел с операцией $(a, b) \times (c, d) = (ac, ad + bc)$, то получим

7.8. Следствие. Определим на $\mathbb{R}^4$ тернарную операцию

$$[(x_1, x_2, x_3, x_4)(y_1, y_2, y_3, y_4)(z_1, z_2, z_3, z_4)]_{3,2,4} = (r_1, r_2, r_3, r_4),$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= x_1y_3z_1, \quad r_2 = x_1y_3z_2 + x_1y_4z_1 + x_2y_3z_1, \\ r_3 &= x_3y_1z_3, \quad r_4 = x_3y_1z_4 + x_3y_2z_3 + x_4y_1z_3. \end{aligned}$$

Тогда $\langle \mathbb{R}^4, +, [\]_{3,2,4} \rangle$ – ассоциативная неабелева, полуабелева $(2, 3)$ -алгебра, в которой все элементы являются делителями ее нуля $(0, 0, 0, 0)$, и в которой нет единиц.

Если в теореме 7.5 положить $n = 4$, $B = \mathbb{R}$, $\langle A = \mathbb{R}^2, +, \times \rangle$ – алгебра комплексных чисел, то получим

7.9. Следствие. Определим на $\mathbb{R}^6$ 4-арную операцию

$$\begin{aligned} &[(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \\ &(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)]_{4,2,6} = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= x_1y_3z_5u_1 - x_2y_4z_5u_1 - x_1y_4z_6u_1 - x_2y_3z_6u_1 - x_1y_3z_6u_2 + x_2y_4z_6u_2 - x_1y_4z_5u_2 - x_2y_3z_5u_2, \\ r_2 &= x_1y_3z_5u_2 - x_2y_4z_5u_2 - x_1y_4z_6u_2 - x_2y_3z_6u_2 + x_1y_3z_6u_1 - x_2y_4z_6u_1 + x_1y_4z_5u_1 + x_2y_3z_5u_1, \\ r_3 &= x_3y_5z_1u_3 - x_4y_6z_1u_3 - x_3y_6z_2u_3 - x_4y_5z_2u_3 - x_3y_5z_2u_4 + x_4y_6z_2u_4 - x_3y_6z_1u_4 - x_4y_5z_1u_4, \\ r_4 &= x_3y_5z_1u_4 - x_4y_6z_1u_4 - x_3y_6z_2u_4 - x_4y_5z_2u_4 + x_3y_5z_2u_3 - x_4y_6z_2u_3 + x_3y_6z_1u_3 + x_4y_5z_1u_3, \\ r_5 &= x_5y_1z_3u_5 - x_6y_2z_3u_5 - x_5y_2z_4u_5 - x_6y_1z_4u_5 - x_5y_1z_4u_6 + x_6y_2z_4u_6 - x_5y_2z_3u_6 - x_6y_1z_3u_6, \\ r_6 &= x_5y_1z_3u_6 - x_6y_2z_3u_6 - x_5y_2z_4u_6 - x_6y_1z_4u_6 + x_5y_1z_4u_5 - x_6y_2z_4u_5 + x_5y_2z_3u_5 + x_6y_1z_3u_5. \end{aligned}$$

Тогда:

1) $\langle \mathbb{R}^6, +, [\]_{4,2,6} \rangle$ – ассоциативная неабелева, полуабелева $(2, 4)$ -алгебра, в которой все элементы являются делителями ее нуля $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$, и в которой нет единиц;

2) $\langle \tilde{\mathbb{R}}, [\]_{4,2,6} \rangle$ – 4-арная группа, где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{R}} &= \mathbb{R}^6 \setminus (\{(0, 0, a, b, c, d) | a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \cup \\ &\cup \{(a, b, 0, 0, c, d) | a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, b, c, d, 0, 0) | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}); \end{aligned}$$

3) множество всех мультипликативных идемпотентов в $\langle \mathbb{R}^6, +, [\]_{4,2,6} \rangle$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned} &I(\mathbb{R}^6, +, [\]_{4,2,6}) = \\ &= \{(a, b, c, d, \frac{ac - bd}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}, \frac{-ad - bc}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}) | a, b, c, d \in \mathbb{R}, \\ &a^2 + b^2 \neq 0, c^2 + d^2 \neq 0\} \cup \{(0, 0, 0, 0, 0, 0)\}. \end{aligned}$$

Если в теореме 7.4 положить $m = 4$, $n = 3$, $B = \mathbb{R}$, $\langle A = \mathbb{R}^4, +, \times \rangle$ – алгебра кватернионов с операцией

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \times (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2, \\ a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2, a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2),$$

то получим

7.10. Следствие. Определим на $\mathbb{R}^8$ тернарную операцию

$$[(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8)]_{3,4,8} = \\ = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8),$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= x_1y_5z_1 - x_2y_6z_1 - x_3y_7z_1 - x_4y_8z_1 - x_1y_6z_2 - x_2y_5z_2 - x_3y_8z_2 + x_4y_7z_2 - \\ &\quad - x_1y_7z_3 - x_3y_5z_3 - x_4y_6z_3 + x_2y_8z_3 - x_1y_8z_4 - x_4y_5z_4 - x_2y_7z_4 + x_3y_6z_4, \\ r_2 &= x_1y_5z_2 - x_2y_6z_2 - x_3y_7z_2 - x_4y_8z_2 + x_1y_6z_1 + x_2y_5z_1 + x_3y_8z_1 - x_4y_7z_1 + \\ &\quad + x_1y_7z_4 + x_3y_5z_4 + x_4y_6z_4 - x_2y_8z_4 - x_1y_8z_3 - x_4y_5z_3 - x_2y_7z_3 + x_3y_6z_3, \\ r_3 &= x_1y_5z_3 - x_2y_6z_3 - x_3y_7z_3 - x_4y_8z_3 + x_1y_7z_1 + x_3y_5z_1 + x_4y_6z_1 - x_2y_8z_1 + \\ &\quad + x_1y_8z_2 + x_4y_5z_2 + x_2y_7z_2 - x_3y_6z_2 - x_1y_6z_4 - x_2y_5z_4 - x_3y_8z_4 + x_4y_7z_4, \\ r_4 &= x_1y_5z_4 - x_2y_6z_4 - x_3y_7z_4 - x_4y_8z_4 + x_1y_8z_1 + x_4y_5z_1 + x_2y_7z_1 - x_3y_6z_1 + \\ &\quad + x_1y_6z_3 + x_2y_5z_3 + x_3y_8z_3 - x_4y_7z_3 - x_1y_7z_2 - x_3y_5z_2 - x_4y_6z_2 + x_2y_8z_2, \\ r_5 &= x_5y_1z_5 - x_6y_2z_5 - x_7y_3z_5 - x_8y_4z_5 - x_5y_2z_6 - x_6y_1z_6 - x_7y_4z_6 + x_8y_3z_6 - \\ &\quad - x_5y_3z_7 - x_6y_1z_7 - x_7y_2z_7 + x_8y_4z_7 - x_5y_4z_8 - x_6y_1z_8 - x_7y_3z_8 + x_8y_2z_8, \\ r_6 &= x_5y_1z_6 - x_6y_2z_6 - x_7y_3z_6 - x_8y_4z_6 + x_5y_2z_5 + x_6y_1z_5 + x_7y_4z_5 - x_8y_3z_5 + \\ &\quad + x_5y_3z_8 + x_6y_1z_8 + x_7y_2z_8 - x_8y_4z_8 - x_5y_4z_7 - x_6y_1z_7 - x_7y_3z_7 + x_8y_2z_7, \\ r_7 &= x_5y_1z_7 - x_6y_2z_7 - x_7y_3z_7 - x_8y_4z_7 + x_5y_3z_5 + x_6y_1z_5 + x_7y_2z_5 - x_8y_4z_5 + \\ &\quad + x_5y_4z_6 + x_6y_1z_6 + x_7y_3z_6 - x_8y_2z_6 - x_5y_2z_8 - x_6y_1z_8 - x_7y_4z_8 + x_8y_3z_8, \\ r_8 &= x_5y_1z_8 - x_6y_2z_8 - x_7y_3z_8 - x_8y_4z_8 + x_5y_4z_5 + x_6y_1z_5 + x_7y_3z_5 - x_8y_2z_5 + \\ &\quad + x_5y_2z_7 + x_6y_1z_7 + x_7y_4z_7 - x_8y_3z_7 - x_5y_3z_6 - x_6y_1z_6 - x_7y_2z_6 + x_8y_4z_6. \end{aligned}$$

Тогда:

1) $\langle \mathbb{R}^8, +, [\]_{3,4,8} \rangle$ – ассоциативная, неполуабелева $(2, 3)$ -алгебра, в которой все элементы являются делителями ее нуля $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, и в которой нет единиц;

2) $\langle \widetilde{\mathbb{R}}, [\]_{3,4,8} \rangle$ – тернарная группа, где

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^8 \setminus (\{(0, 0, 0, 0, a, b, c, d) | a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \cup \\ \cup \{(a, b, c, d, 0, 0, 0, 0) | a, b, c, d \in \mathbb{R}\});$$

3) множество всех мультипликативных идемпотентов в $\langle \mathbb{R}^8, +, [\]_{3,4,8} \rangle$ имеет следующий вид

$$I(\mathbb{R}^8, +, [\]_{3,4,8}) =$$

$$= \{(a, b, c, d, \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{-c}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{-d}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}) | \\ a, b, c, d \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0\} \cup \{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)\}.$$

Заметим, что неполубелевость $\langle \mathbb{R}^8, +, [\]_{3,4,8} \rangle$ не следует из теоремы 7.4. Но в этом можно легко убедиться. Если положить

$$\mathbf{x} = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \quad \mathbf{y} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{z} = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0),$$

то, проделав соответствующие вычисления, получим

$$[\mathbf{xyz}]_{3,4,8} = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), \quad [\mathbf{zyx}]_{3,4,8} = (0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0),$$

то есть $[\mathbf{xyz}]_{3,4,8} \neq [\mathbf{zyx}]_{3,4,8}$. Следовательно, $(2, 3)$ -алгебра $\langle \mathbb{R}^8, +, [\]_{3,4,8} \rangle$ не является полубелевой.

Литература

- [1] Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1 – 19.
- [2] Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208 – 350.
- [3] Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка. – 1992.
- [4] Гальмак, А. М. N -арные группы. Часть 1 / А. М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины. – 2003.
- [5] Гальмак, А. М. N -арные группы. Часть 2 / А. М. Гальмак. – Минск: Изд.центр БГУ. – 2007.
- [6] Гальмак, А. М. N -арные группы / А. М. Гальмак // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2007. – № 2 (8). – С. 76 – 95.
- [7] Џупона, G. On $[m, n]$ -rings / G. Џупона // Bull. Soc. math. phys. Maced. – 1965. – Vol. 16. – P. 5 – 10.
- [8] Crombez, G. On (n, m) -rings / G. Crombez // Abh. Math. Semin. Univ. – Hamburg. – 1972. – Vol. 37. – P. 180 – 199.

Polyadic operations on Cartesian powers

A. M. Galmák

Mogilev, Belarus

mti@mogilev.by

For any numbers $n \geq 3$, $s \geq 1$, $m \geq 2$, on the Cartesian powers A^{n-1} and $A^{m(n-1)}$ of the semigroup A , are respectively defined the $(s(n-1)+1)$ -ary operation $[\]_{s(n-1)+1, n-1}$, and the n -ary operation $[\]_{n, m, m(n-1)}$.

Key-words: semigroup, polyadic operations.

MSC: 08A40.

3-МЕРНОЕ ГАЛИЛЕЕВО ОДУЛЯРНОЕ НИЛЬПОТЕНТНОЕ ПРОСТРАНСТВО С 2-МЕРНЫМ ВРЕМЕНЕМ

А. И. Долгарев и И. А. Долгарев

Пензенский Государственный университет
delivar@yandex.ru

Рассматривается галилеево пространство с 2-мерным временем, имеющее некоммутативную геометрию; пространство строится на одуле Ли галилеевых движений. В работе Д. Г. Павлова РЖМат 04.12A563 обсуждается концепция многомерного времени, определяемого на линейном пространстве посредством введения метрической функции Бервальда-Моора, относящейся к финслеровым метрикам. Линейное пространство есть коммутативная алгебраическая структура, на ней могут быть определены различные метрические функции. Метрическая функция на одуле Ли – некоммутативной структуре, органично связана со строением структуры, и вводится сообразно свойствам структуры. В настоящей работе приводятся первые сведения из одного из некоммутативных одулярных галилеевых пространств с 1-мерным временем, его одулем является одуль Ли галилеевых движений; и на этом же одуле Ли строится галилеево пространство с 2-мерным временем, начато исследование геометрических свойств этого пространства.

УДК 514.7

Ключевые слова: некоммутативная геометрия, Финслерово пространство, Галилеево пространство, одули.

Введение

Многомерное время сейчас вызывает живой интерес, появляются исследования, посвященные этой проблеме, например, работы Д. Г. Павлова [1, 2]. Зреет мнение, что более важно для естествознания создание науки о времени, чем науки о пространстве. В [1, 2] рассматриваются финслеровы векторные пространства, к которым привели обобщения псевдоевклидовых пространств, лежащих в основе теории относительности А. Эйнштейна. Другой принцип относительности, используемый физикой, принцип относительности Г. Галилея, почти не обсуждается в [1], т. к. он предполагает введение дополнительных измерений, трактуемых в качестве временных (времениподобных). В физических исследованиях пытаются "избавиться" от этих дополнительных измерений, к таким попыткам приводит коммутативность галилеева векторного пространства. В настоящее время имеются работы по некоммутативным галилеевым пространствам, см. [3], в исследованиях которых невозможно обойтись без временных направлений. В основе указанных пространств лежат одули Ли (их коммутативным случаем являются векторные пространства); в [3] изучаются 3-мерные одулярные галилеевы пространства с 1-мерным временем. Среди описанных в [3] некоммутативных разрешимых одулей Ли имеются и такие, на которых может быть введено 2-мерное время. Ниже рассматривается сибсон – нильпотентный ступени 2 одуль Ли размерности 3; на котором в [3] введена галилеева норма с 1-мерным временем и получены основные факты геометрии пространства-времени с сибсоном. Мы приводим необходимые сведения из 3 и начинаем построение геометрии пространства-времени с сибсоном с 2-мерным временем. Применяется идея финслеровой метрики из [1]. Финслерова метрика на сибсоне появляется естественно на основе свойств сибсона.

Используются факты, общие для пространств как с 1-мерным временем, так и с 2-мерным временем.

1 Пространство с сибсоном с 1-мерным временем

1.1. Алгебра движений галилеевой плоскости

Рассматривается прямолинейное движение материальной точки с постоянной скоростью v в системе отсчета Otx . В момент времени t положение точки на прямой относительно начала отсчета O определяется ее координатой x . Можно считать, что движется точка (t, x) . Начальные условия движения: в момент времени a точка находится на расстоянии b от начала O . Тогда время t' движения точки определяется равенством

$$t' = t + a,$$

расстояние x' , пройденное точкой, вычисляется по формуле

$$x' = vt + x + b.$$

Точка из положения (t, x) перемещается в положение (t', x') . Зависимость координат точки (t', x') от координат точки (t, x) описывается уже приведенными формулами, которые рассматриваются совместно:

$$\begin{cases} t' = t + a, \\ x' = vt + x + b; \end{cases} \quad (1)$$

Это формулы галилеева движения точки по прямой Ox . Обозначаем галилеево движение δ_d ; в движении δ_d точка (t, x) отображается на точку (t', x') .

$$\delta_d: (t, x) \rightarrow (t', x').$$

Определитель движения, составленный по формулам (1), есть

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{vmatrix} \neq 0;$$

матрица движения δ_d , согласно (1), такова

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & v & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица μ является унитарной. Коэффициенты a, v, b в формулах движения (1) есть действительные числа. Множество действительных чисел обозначается $\mathbf{R}$.

Движению δ_d и унитарной матрице μ соответствует тройка действительных чисел (a, v, b) из $\mathbf{R}^3$. Эту тройку обозначаем

$$\delta = (a, v, b).$$

Всякому прямолинейному галилееву движению (1) и унитарной матрице μ соответствует единственная тройка δ и всякой тройке (a, v, b) из $\mathbf{R}^3$ соответствует единственное галилеево движение δ_d точки по прямой Ox и единственная унитарная матрица μ порядка 3, т. е. установленные соответствия являются биекциями.

Пусть τ_d еще одно галилеево движение по прямой Ox ,

$$\tau_d: (t', x') \rightarrow (t'', x'');$$

Формулы, матрица движения τ_d и соответствующая тройка таковы:

$$\tau_d : \begin{cases} t'' = t' + c, \\ x'' = wt' + x' + d; \end{cases} \quad \nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ d & w & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = (c, w, d).$$

Композиция движений δ_d и τ_d , которую записываем в виде суммы $\delta_d + \tau_d$, отображает точку (t, x) на точку (t'', x'') прямой Ox . Формулы движения $\delta_d + \tau_d$ получаются в результате подстановки формул (1) движения δ_d в формулы движения τ_d :

$$\delta_d + \tau_d : \begin{cases} t'' = t + a + c, \\ x'' = w(t + a) + vt + x + b + d; \end{cases} \quad \begin{cases} t'' = t + a + c, \\ x'' = (w + v)t + x + wa + b + d; \end{cases}$$

Движение $\delta_d + \tau_d$ описывается матрицей $\nu\mu$, являющейся произведением матриц движений τ_d и δ_d (в обратном порядке):

$$\nu\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ d & w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & v & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c + a & 1 & 0 \\ d + wa + b & w + v & 1 \end{pmatrix}.$$

Движению $\delta_d + \tau_d$ соответствует тройка из $\mathbf{R}^3$:

$$\delta_d + \tau_d = (c + a, w + v, d + wa + b).$$

По виду тройки $\delta + \tau$ имеем на $\mathbf{R}^3$ операцию сложения троек:

$$(c, w, d) + (a, v, b) = (c + a, w + v, d + wa + b). \quad (2)$$

Матрицы галилеевых движений по прямой Ox составляют унитарную группу матриц $UT_3(\mathbf{R})$ порядка 3. Это группа Ли, она нильпотентна; степень нильпотентности группы равна 2. Между матрицами группы $UT_3(\mathbf{R})$ и тройками из $\mathbf{R}^3$ установлена биекция:

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & v & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow (a, v, b) = \delta,$$

в которой произведению матриц $\nu\mu$ соответствует сумма троек $\tau + \delta$, заданная равенством (2). Следовательно, операция сложения (2) на многообразии $\mathbf{R}^3$ обладает теми же свойствами, что и умножение матриц из $UT_3(\mathbf{R})$. А это означает, что многообразие $\mathbf{R}^3$ с операцией сложения (2) является группой Ли $(\mathbf{R}^3, +)$, изоморфной группе Ли $UT_3(\mathbf{R})$. Эта группа Ли обозначается $(\mathbf{R}^3, +) = \Sigma^3$. На многообразии $\mathbf{R}^3$ имеются разные виды операций сложения троек; в зависимости от вида операции сложения получаемые группы Ли обладают разными свойствами. Например, относительно сложения

$$(c, w, d) + (a, v, b) = (c + a, w + v, d + b). \quad (3)$$

группа Ли $(\mathbf{R}^3, +) = \mathbf{L}^3$ является абелевой. Другие виды операций на $\mathbf{R}^3$ приведены в [4, 3.]

Точно также множество Σ_d^3 всех прямолинейных движений материальной точки относительно композиции преобразований есть группа Ли, изоморфная группе Ли $UT_3(\mathbf{R})$ и группе Ли троек $(\mathbf{R}^3, +)$.

Нейтральным элементом в группе Σ^3 является

$$\vartheta = (0, 0, 0); \quad \delta + \vartheta = \vartheta + \delta = \delta.$$

Противоположный элемент $-\delta$ для δ равен

$$-\delta = -(a, v, b) = (-a, -v, -b + av).$$

По равенству (2) легко проверяется выполнимость равенства

$$\delta + (-\delta) = (a, v, b) + (-a, -v, -b + av) = (0, 0, 0) = \vartheta.$$

Заменив в (2) тройку (c, w, d) тройкой (a, v, b) , получаем

$$2\delta = (a, v, b) + (a, v, b) = 2(a, v, b) = (2a, 2v, 2b + av).$$

Для суммы $3\delta = 2\delta + \delta$ находим на основании (2): $3\delta = (3a, 3v, 3b + 3av)$ и для $n\delta$, n целое число, по (2) получаем: $n\delta = (na, nv, nb + \frac{n(n-1)}{2}av)$. В случае любого действительного u полагаем по определению:

$$u\delta = (au, vu, bu + av \frac{u(u-1)}{2}). \quad (4)$$

Если $p = 0$, то $0\delta = \vartheta$; если $u = 1$, то $1 \cdot \delta = \delta$; если $u = -1$, то $(-1) \cdot \delta = -\delta$.

Тем самым, на группе Ли $(\Sigma^3, +)$ задана внешняя операция $\omega_R(+)$ умножения троек на действительные числа. Свойства внешней операции (4) связаны со свойствами внутренней операции (2) сложения троек. Получена структура

$$\Sigma^3 = (\Sigma^3, +, \omega_R(+)),$$

которая называется *сибсоном*. Для абелевой группы Ли $\mathbf{L}^3 = (\mathbf{R}^3, +)$ с операцией сложения (3) внешняя операция $\omega_R(+)$ такова

$$u(a, v, b) = (au, vu, bu)$$

и на группе Ли $(\mathbf{R}^3, +)$ определена структура линейного пространства

$$\mathbf{L}^3 = (\mathbf{R}^3, +, \omega_R(+))$$

над полем $\mathbf{R}$ действительных чисел. Структура сибсона обобщает структуру линейного пространства.

По тройке $u(a, v, b)$ (4) получаем формулы u -кратного прямолинейного движения

$$u\delta_d : \begin{cases} t' = t + au, \\ x' = vut + x + bu + a \frac{u(u-1)}{2}. \end{cases}$$

Прямолинейные галилеевы движения составляют сибсон. На основании (4) по тройке $u(a, v, b)$ записываем действительную степень μ^u матрицы μ :

$$\mu^u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ au & 1 & 0 \\ bu + a \frac{u(u-1)}{2} & vu & 1 \end{pmatrix};$$

получен сибсон унитарных матриц.

1.2. Одули Ли

На многообразии $\mathbf{R}^3$ кроме операций (2) и (3) могут быть заданы и другие операции, например,

$$(x^1, x^2, x) + (y^1, y^2, y) = (x^1 + e^x y^1, x^2 + e^x y^2, x + y),$$

см. [3, с. 233], что дает другие группы Ли на $\mathbf{R}^3$. Определяя внешнюю операцию

$$t(x^1, x^2, x) = (x^1 \frac{e^{xt} - 1}{e^x - 1}, x^2 \frac{e^{xt} - 1}{e^x - 1}, xt), \quad \text{при } x \neq 0; \quad t(x^1, x^2, 0) = (x^1 t, x^2 t, 0),$$

получаем алгебраическую структуру, отличную от линейного пространства и сибсона.

Обобщения линейного пространства, называемые одулями, введены Л. В. Сабининым в 1977 году в [5]. В общем случае рассматривается произвольная алгебраическая структура $(\Omega, +)$ с внутренней бинарной операцией, называемой сложением, и кольцо $\mathbf{K}$. Задано отображение

$$\omega_K(+): (\mathbf{K} \times \Omega) \rightarrow \Omega,$$

в котором паре $(t, \varrho) \in \mathbf{K} \times \Omega$ соответствует элемент из Ω , обозначаемый $t\varrho$. Выполняются следующие аксиомы для любых $\varrho \in \Omega$, $t, s \in \mathbf{K}$:

$$(t + s)\varrho = t\varrho + s\varrho,$$

$$s(t\varrho) = (st)\varrho.$$

Алгебраическая структура $\Omega = (\Omega, +, \omega_K(+))$, удовлетворяющая выписанным аксиомам, называется *одулем над кольцом $\mathbf{K}$* или *$\mathbf{K}$ -одулем*, или просто *одулем*. Структура одуля обобщает структуру $\mathbf{K}$ -модуля и, в частности, структуру линейного пространства над полем.

Если структура $(\Omega, +)$ является группой и кольцо $\mathbf{K}$ обладает единицей 1, то выполняются еще аксиомы:

$$0\varrho = \vartheta, \quad 1\varrho = \varrho, \quad (-1)\varrho = -\varrho, \quad t(-v + \varrho + v) = -v + t\varrho + v,$$

где 0 нуль кольца $\mathbf{K}$, ϑ — нулевой элемент группы, $-\varrho$ противоположный элемент для ϱ . Если $(\Omega, +)$ группа Ли и кольцо $\mathbf{K}$ есть поле действительных чисел $\mathbf{R}$ или поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел, то одуль $\Omega = (\Omega, +, \omega_R(+))$, или $\Omega = (\Omega, +, \omega_C(+))$ называется *одулем Ли*. Одули Ли введены в [3], где описаны 3-мерные разрешимые действительные одули Ли и начато изучение галилеевых геометрий с одулями Ли. Методами галилеевой геометрии в [6] получено решение задачи И. Ньютона о получении уравнений траектории движения материальной точки по заданному полю ускорения движения в случае двух степеней свободы.

1.3. Сибсон размерности 3

Приведем общее определение сибсона на многообразии $\mathbf{R}^3$. Сибсонами называются нильпотентные одули Ли. Элементы сибсонов называются *сибсами*.

Тройки из $\mathbf{R}^3$ записываем в виде (x^1, x^2, x) . На $\mathbf{R}^3$ заданы операции

$$(x^1, x^2, x) + (y^1, y^2, y) = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, x + y + x^2 y^1); \quad (5)$$

$$t(x^1, x^2, x) = (x^1 t, x^2 t, xt + \frac{t(t-1)}{2} x^1 x^2), \quad t \in \mathbf{R}. \quad (6)$$

Множество троек $\mathbf{R}^3$ с операцией сложения (5) есть неабелева группа Ли $(\mathbf{R}^3, +)$. Нулевой сибс есть $\vartheta = (0, 0, 0)$, сибс, противоположный сибсу $\sigma = (x^1, x^2, x)$, таков: $-\sigma = -(x^1, x^2, x) = (-x^1, -x^2, -x + x^1 x^2)$.

Несложная проверка показывает, что аксиомы одуля, приведенные в предыдущем п. 1.2, выполняются. Полученный одуль Ли обозначается Σ^3 , элементы сибсона обозначаются $\alpha, \beta, \dots, \sigma, \dots$. Все вычисления на сибсоне производятся на основе операций (5) и (6).

Во внутренней операции (5) компоненты сибсов обладают различными свойствами. В первой компоненте суммы используются только первые компоненты слагаемых, во второй компоненте суммы тоже используются только вторые компоненты слагаемых. А в третьей компоненте суммы кроме третьих компонент слагаемых используются еще первая и вторая компоненты слагаемых. Компоненты слагаемых, используемые в других компонентах суммы, называются *ведущими*. По операции (5) имеем, что первая и вторая компоненты сибсов являются ведущими в операциях на сибсоне.

Обозначим: $(x^1, x^2, x) = \sigma$, $(1, 0, 0) = \alpha$, $(0, 1, 0) = \beta$, $(0, 0, 1) = \gamma$. Имеем однозначное разложение

$$\sigma = (x^1, x^2, x) = x^1\alpha + x^2\beta + x\gamma.$$

Это означает, что сибсы α, β, γ составляют базис $\mathbf{B} = (\alpha, \beta, \gamma)$ сибсона Σ^3 . Коммутатор $[\tau, \sigma]$ сибсов τ и σ вычисляется как коммутатор элементов группы: $[\tau, \sigma] = -\tau - \sigma + \tau + \sigma$. Находим коммутаторы базисных сибсов и записываем генетический код сибсона:

$$\Sigma^3 = \langle \alpha, \beta, \gamma | [\beta, \alpha] = \gamma, [\gamma, \alpha] = [\gamma, \beta] = \vartheta \rangle. \quad (7)$$

Сибсы порождают в сибсоне Σ^3 некоторые подгруппы Ли, являющиеся подсибсонами. 1-параметрический подсибсон $\langle \sigma \rangle$, порожденный сибсом σ , состоит из сибсов $t\sigma, t \in \mathbf{R}$:

$$\langle \sigma \rangle = \{t\sigma, t \in \mathbf{R}\},$$

это оболочка сибса σ , она является 1-мерным линейным пространством. Сибсы σ, τ называются независимыми, если $\tau \notin \langle \sigma \rangle$. Подсибсон $\langle \sigma, \tau \rangle$, т.е. оболочка сибсов σ, τ , есть подгруппа Ли в Σ^3 , порожденная независимыми сибсами σ, τ . Согласно генетическому коду сибсона (7), подсибсоны $\langle \alpha, \gamma \rangle$ и $\langle \beta, \gamma \rangle$ абелевы. Это 2-мерные линейные пространства. Подсибсон $\langle \alpha, \beta \rangle$ содержит и сибс γ , т.к. $[\beta, \alpha] = \gamma$, т.е. сибсы α, β порождают весь сибсон Σ^3 и 3-мерный сибсон Σ^3 является 2-порожденным одулем Ли. (В теории групп элемент γ называется непорождающим элементом группы $(\Sigma^3, +)$, он входит в подгруппу Фраттини группы, см. [7].)

Вообще, оболочка двух перестановочных независимых сибсов является 2-мерным линейным пространством, оболочка двух неперестановочных сибсов является 3-мерным сибсоном.

Подсибсоны $\langle \alpha, \gamma \rangle$ и $\langle \beta, \gamma \rangle$ имеют только один общий сибс – нулевой ϑ и $[\beta, \alpha] = \gamma \in \langle \alpha, \gamma \rangle$. Поэтому сибсон $(\Sigma^3, +)$ есть полупрямая сумма линейных пространств

$$(\Sigma^3, +) = \langle \alpha, \gamma \rangle \dot{+} \langle \beta, \gamma \rangle = \mathbf{L}^2 \dot{+} \mathbf{L}^1.$$

1.4. Галилеева норма на сибсоне (с 1-мерным временем)

В [3] на сибсоне определена галилеева норма сибсов. (Галилееву метрику Б. А. Розенфельд в [8] называет квазиметрикой.) *Галилеевой* нормой $\|\sigma\|$ сибса $\sigma = (x^1, x^2, x)$ называется

$$\begin{aligned} \|\sigma\| &= |x^1|, \text{ если } x^1 \neq 0; \\ \|\sigma\| &= \sqrt{(x^2)^2 + (x)^2}, \text{ если } x^1 = 0. \end{aligned}$$

Сибсон с такой нормой обозначается $\Sigma_{1(1)}^3$. Сибс σ имеет нулевую норму, если и только если $\sigma = \vartheta$, поэтому сибсон не имеет изотропных направлений. Сибс (x^1, x^2, x) при $x^1 \neq 0$

называется галилеевым, сибс $(0, x^2, x)$ называется евклидовым. Евклидовы сибсы в нормированном сибсоне $\Sigma_{1(1)}^3$ составляют 2-мерное евклидово подпространство $\mathbf{V}^2$. Сибсы $(0, x^2, x)$ являются пространственными (пространственноподобными), сибсы $(x^1, 0, 0)$ являются временными (временноподобными). Нормированный сибсон $\Sigma_{1(1)}^3$ есть полупрямая сумма евклидовых пространств $\Sigma_{1(1)}^3 = \mathbf{V}^2 \uplus \mathbf{V}^1$ с 1-мерным временем $\mathbf{V}^1$.

Норма на сибсоне позволяет дифференцировать сибсонные функции и строить дифференциальную геометрию пространства с нормированным сибсоном. Это построение осуществлено в [3].

2 Пространства с сибсоном

2.1. Пространство с ненормированным сибсоном

Сибсон обобщает линейное пространство; пространство с сибсоном, на котором не введена норма сибсов, обобщает аффинное пространство. Последнее строится в аксиоматике Г. Вейля, [9]. Для этого рассматривается линейное пространство $\mathbf{L}^n$, множество $\mathbf{A}$ точек, $\mathbf{A} = \{A, B, \dots, M, \dots\}$ и отображение пар точек в линейное пространство

$$\lambda : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{L}^n.$$

Каждой паре точек (A, B) соответствует единственный вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{v} \in \mathbf{L}^n$; выполняются известные аксиомы Г. Вейля (они сформулированы немного ниже).

Заменяя линейное пространство $\mathbf{L}^3$ сибсоном Σ^3 в аксиоматике Г. Вейля аффинного пространства, см. [3], получаем вейлевское одулярное пространство с сибсоном, которое называется *ЛС-пространством*. Приведем определение ЛС-пространства.

Пусть $\mathbf{S}^3 = \{A, B, \dots, M, \dots\}$ множество, элементы которого называются точками. Задано отображение

$$\lambda : \mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3 \longrightarrow \Sigma^n.$$

Сибс σ , соответствующий паре точек (A, B) , обозначается $AB = \sigma$. Выполняются следующие аксиомы Г. Вейля:

1⁰. Для всякой точки A и всякого сибса σ существует единственная точка B такая, что $AB = \sigma$.

2⁰. Для любых трех точек A, B, C , если $AB = \sigma$, $BC = \tau$, то $AC = \sigma + \tau$.

Множество $\mathbf{S}^3$ называется ЛС-пространством, это пространство с сибсоном Σ^3 , на котором не введена норма сибсов. ЛС-пространство есть некоммутативный аналог аффинного пространства, геометрия обоих пространств строится в одной и той же аксиоматике.

Для трех точек A, B, C выполняется $AB + BC = AC$; если $AB = \sigma$, то $BA = -\sigma$ и $AA = \vartheta$. Геометрия ЛС-пространства излагается в [3]. Приведем первые факты этой геометрии.

В ЛС-пространстве выбирается репер $\mathbf{B} = (O, \alpha, \beta, \gamma)$, где O точка ЛС-пространства, $\mathbf{B} = (\alpha, \beta, \gamma)$ базис сибсона. Точка M ЛС-пространства определяется сибсом $\sigma = OM$. Если $\sigma = (x^1, x^2, x)$ в базисе $\mathbf{B}$, то в репере $\mathbf{B}$ точка M имеет координаты (x^1, x^2, x) , обозначение: $M = (x^1, x^2, x)$. (По аналогии с аффинным пространством.) Пусть $A = (a^1, a^2, a)$ и $B = (b^1, b^2, b)$ две точки ЛС-пространства, сибс AB имеет координаты

$$AB = (b^1 - a^1, b^2 - a^2, b - a - (b^1 - a^1)a^2). \quad (8)$$

Прямая $\langle A, \sigma \rangle$, определяемая точкой A и ненулевым сибсом σ , есть множество точек (как и в аффинном пространстве)

$$\langle A, \sigma \rangle = \{M | AM = t\sigma, t \in \mathbf{R}\}.$$

Через всякие две различные точки проходит единственная прямая. Пусть $M = (x^1, x^2, x)$, $A = (a^1, a^2, a)$, $\sigma = (c^1, c^2, c)$, тогда по (8): $AM = (x^1 - a^1, x^2 - a^2, x - a - (x^1 - a^1)a^2)$ и $t\sigma$ определяется равенством (6): $t\sigma = (c^1t, c^2t, ct + \frac{t(t-1)}{2}c^1c^2)$. Сибсы AM и σ равны только в случае, если равны их соответствующие координаты. Параметрические уравнения прямой $\langle A, \sigma \rangle$ таковы

$$x^1 = c^1t + a^1, \quad x^2 = c^2t + a^2, \quad x = ct + \frac{t(t-1)}{2}c^1c^2 + c^1a^2t + a.$$

В общем случае уравнения нелинейны; при $c^1 = 0$ или $c^2 = 0$ уравнения прямой линейны.

Имеется два вида параллельности прямых в ЛС-пространстве. Прямые $\langle A, \sigma \rangle$ и $\langle B, \sigma \rangle$ с общим ненулевым сибсом σ параллельны. Обозначим $AB = \tau$, $\rho = -\tau + \sigma + \tau$. Если сибсы σ, τ неперестановочны, то σ, τ независимы и имеется еще одна прямая $\langle B, \rho \rangle$, проходящая через точку B вместе с прямой $\langle B, \sigma \rangle$, и параллельная прямой $\langle A, \sigma \rangle$.

Если сибсы σ, τ неперестановочны, то оболочка $\langle \sigma, \tau \rangle$ совпадает с сибсоном Σ^3 , см. п. 2.3, а множество точек $\{M | AM \in \langle \sigma, \tau \rangle\}$ (для фиксированной точки A) совпадает с ЛС-пространством. Если σ, τ перестановочны и независимы, то $\langle \sigma, \tau \rangle$ является 2-мерным линейным пространством и множество точек $\{M | AM \in \langle \sigma, \tau \rangle\}$ не исчерпывает ЛС-пространства. Множество точек, определяемое точкой A и независимыми перестановочными сибсами σ, τ :

$$\langle A, \sigma, \tau \rangle = \{M | AM = u\sigma + v\tau, \quad (u, v) \in \mathbf{R}^2\}$$

называется плоскостью ЛС-пространства. Если $M = (x^1, x^2, x)$, $A = (a^1, a^2, a)$, $\gamma = (0, 0, 1)$, $\sigma = (c^1, c^2, c)$, то параметрические уравнения плоскости $\langle A, \gamma, \sigma \rangle$ таковы

$$x^1 = c^1v + a^1, \quad x^2 = c^2v + a^2, \quad x = cv + c^1c^2\frac{t(t-1)}{2} + c^1a^2 + u + a;$$

уравнения нелинейны.

Одулем всякой плоскости ЛС-пространства является 2-мерное линейное пространство, поэтому всякая плоскость ЛС-пространства является аффинной. Неперестановочные сибсы не порождают никакой плоскости. Если $AB = \sigma$, $AC = \tau$, $\tau \notin \langle \sigma \rangle$, $\sigma + \tau = \tau + \sigma$, то через три неколлинеарные точки A, B, C проходит единственная плоскость. Если $\sigma + \tau \neq \tau + \sigma$, то через неколлинеарные точки A, B, C не проходит плоскости. В последнем случае через точку C в ЛС-пространстве проходит две прямые $\langle C, \sigma \rangle$ и $\langle C, \rho \rangle$, $\rho = -\tau + \sigma + \tau$, параллельные прямой $\langle A, \sigma \rangle$.

Для репера $(O, \alpha, \beta, \gamma)$ ЛС-пространства имеем координатные оси $\langle O, \alpha \rangle$, $\langle O, \beta \rangle$, $\langle O, \gamma \rangle$. Существуют координатные плоскости $\langle \alpha, \gamma \rangle$, $\langle \beta, \gamma \rangle$, но не существует координатной плоскости, порожденной точкой O и сибсами α, β . В плоскости $\langle A, \gamma, \pi \rangle$, $\pi = (1, p, 0)$, $p \neq 0$, (имеем $\gamma + \pi = \pi + \gamma$) лежат прямые $\langle H, \pi \rangle$, $H = (h^1, h^2, h) \in \langle A, \gamma, \pi \rangle$, их параметрические уравнения

$$x^1 = t + h^1, \quad x^2 = pt + h^2, \quad x = p\frac{t(t-1)}{2} + h^2t + h.$$

Из ЛС-пространства прямые $\langle H, \pi \rangle$ выглядят как параболы, это *циклы* галилеевой плоскости (термин из [10]). Кроме циклов, плоскость содержит прямые $\langle H, \gamma \rangle$. Взаимное расположение прямых на плоскости такое же, как на всякой аффинной плоскости. Прямые $\langle A, \pi \rangle$ и $\langle H, \pi \rangle$ параллельны и лежат в плоскости $\langle A, \gamma, \sigma \rangle$. Обозначим $AH = \rho$, $-\rho + \pi + \rho = \tau$, сибсы π, ρ неперестановочны, прямая $\langle H, \tau \rangle$ параллельна прямой $\langle A, \pi \rangle$, но не лежит в плоскости $\langle A, \gamma, \sigma \rangle$.

2.2. Пространство с нормированным сибсоном $\Sigma_{1(1)}^3$

Вводя в сибсон Σ^3 ЛС-пространства норму сибсов, см. п. 2.4, превращаем сибсон Σ^3 в $\Sigma_{1(1)}^3$, ЛС-пространство становится ЕС-пространством-временем – это одулярное галилево пространство с некоммутативной геометрией. Координатная плоскость $\langle O, \beta, \gamma \rangle$ и параллельные ей плоскости $\langle A, \beta, \gamma \rangle$ становятся евклидовыми. Плоскости $\langle O, \alpha, \gamma \rangle, \langle A, \alpha, \gamma \rangle, \langle A, \gamma, \pi \rangle$ становятся галилеевыми плоскостями. Всякая точка $M = (x^1, x^2, x)$ имеет временную координату x^1 и пространственные координаты x^2, x . Пространственноподобная составляющая ЕС-пространства евклидова. Каждая точка ЕС-пространства есть событие в пространстве-времени с сибсоном. Если $A = (a^1, a^2, a)$ начальное положение события, $B = (b^1, b^2, b)$ его конечное положение, то сибс AB , см. (8), описывает это событие. Норма события AB , согласно п. 1.4, есть

$$\begin{aligned} \|AB\| &= |b^1 - a^1|, \quad b^1 \neq a^1, \\ \|AB\| &= \sqrt{(b^2 - a^2)^2 + (b - a)^2} \quad \text{если } b^1 = a^1. \end{aligned}$$

Величина $\|AB\| = |b^1 - a^1|$, есть длительность события AB . При $b^1 = a^1$ величина $\|AB\|$ есть расстояние между точками A и B .

3 2-мерное время в пространстве с сибсоном

3.1. Сибсон с 2-мерным временем

В п. 1.3 отмечено, что в операциях на сибсоне имеются две ведущие компоненты: у сибса (x^1, x^2, x) ведущими компонентами являются x^1, x^2 – первая и вторая. Построена геометрия ЕС-пространства-времени с сибсоном с 1-мерным временем, [3]. Некоторые факты этой геометрии приведены выше. В качестве временной компоненты взята первая ведущая компонента сибсов. Аналогичная геометрия получается, если за временную компоненту взять вторую ведущую компоненту сибсов. Теперь мы считаем **обе ведущие компоненты сибсов временными**. Галилеевой нормой $\|\sigma\|_2$ сибса $\sigma = (x^1, x^2, x)$ называется

$$\begin{aligned} \|\sigma\|_2^2 &= x^1 x^2, \quad \text{если } x^1 \neq 0 \text{ или } x^2 \neq 0; \\ \|\sigma\|_2^2 &= |x|, \quad \text{если } x^1 = x^2 = 0. \end{aligned}$$

Третью компоненту сибсов считаем пространственной. Сибсон с этой нормой обозначаем Σ_2^3 . Аналогичная норма на 2-мерном векторном пространстве вводится в [1] при рассмотрении 2-мерного времени. Это финслерова норма на сибсоне.

Структура из [1] принципиально отличается от рассматриваемой нами.

Галилеевы сибсы $(x^1, x^2, 0)$ не составляют подсибсона в Σ_2^3 , т.е. 2-мерное время на сибсоне не алгебраическая структура. Многообразие галилеевых сибсов $(x^1, x^2, 0)$ обозначим $\mathbf{T}^2$. На основании операций над сибсами (1) и (2) имеем

$$(x^1, x^2, 0) + (y^1, y^2, 0) = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, x^2 y^1),$$

$$t(x^1, x^2, 0) = (x^1 t, x^2 t, \frac{t(t-1)}{2} x^1 x^2).$$

В частности, при $t = 2$:

$$2(x^1, x^2, 0) = (2x^1, 2x^2, x^1 x^2).$$

Удвоенный галилеев сибс из $\mathbf{T}^2$ есть сибс, третья т.е. пространственная компонента которого равна произведению первых двух временных компонент; это квадрат продолжительности исходного сибса. Операции на сибсах мы записываем аддитивно. Однако, групповая операция на группах Ли есть умножение, см. работы по теории групп Ли.

Поэтому 2σ в наших обозначениях является квадратом σ^2 в распространенных обозначениях.

Сибсы $(0, 0, x)$ составляют 1-мерное евклидово пространство $\mathbf{V}^1$. Третья компонента сибсов порождается первыми двумя компонентами, – пространственная компонента порождается временными компонентами. 3-мерный сибсон с 2-мерным временем есть неразделимая алгебраическая структура времени и пространства, из которой выделяется 1-мерная пространственная структура. В исследованиях свойств сибсона Σ_2^3 нельзя избавиться ни от временных, ни от пространственной компонент.

Направления в сибсоне Σ_2^3 , определяемые базисными сибсами α и β , являются изотропными: временные интервалы на этих направлениях равны нулю. Для сибсов $\sigma = (x^1, 0, x)$, $x^1 \neq 0$, и $\tau = (0, x^2, x)$, $x^2 \neq 0$, нормы равны соответственно $\|\sigma\|_2 = x^1 \cdot 0 = 0$ и $\|\tau\|_2 = 0 \cdot x^2 = 0$.

Многообразие $\mathbf{T}^2$ можно изобразить в виде точек (x^1, x^2) плоскости $\mathbf{R}^2$. Линия, заполненная точками $(x^1, 0)$, где x^1 изменяется, и линия, заполненная точками $(0, x^2)$, где x^2 изменяется; изображают изотропные направления. Их уравнения соответственно: $x^2 = 0$ и $x^1 = 0$. Возьмем симметричные относительно нулевой точки $(0, 0)$ две точки $T_0 = (a^1, a^2)$ и $T_{-1} = (-a^1, -a^2)$. Найдем множество точек $M(x^1, x^2)$ составляющих линию относительной одновременности (как в [1]), уравнение этой линии в многообразии $\mathbf{T}^2$:

$$x^2 = \frac{a^2}{a^1} x^1.$$

Многообразие $\mathbf{T}^2$ разбивается прямыми $x^1 = 0$ и $x^2 = 0$ на 4 квадранта:

- в (I) лежат точки (x^1, x^2) с $x^1 > 0$, $x^2 > 0$;
- в (II) – точки (x^1, x^2) с $x^1 < 0$, $x^2 > 0$;
- в (III) – точки (x^1, x^2) с $x^1 < 0$, $x^2 < 0$;
- в (IV) – точки (x^1, x^2) с $x^1 > 0$, $x^2 < 0$.

Для длительностей $\|OT\|$, где $T = (x^1, x^2)$ имеем:

в (I) и (III): $\|OT\|^2 > 0$, Существуют $\|OT\| = \sqrt{x^1 x^2}$;

в (II) и (IV): $\|OT\|^2 < 0$. Длительность события OT определяется как $\|OT\| = \sqrt{x^1 x^2}$, $x^1 x^2 < 0$, поэтому длительность $\|OT\|$ не существует.

3.2. Пространство с сибсоном Σ_2^3 .

Указанное пространство есть одулярное пространство-время с сибсоном с 2-мерным временем. Это пространство получается из ЛС-пространства в результате введения в сибсон Σ^3 финслеровой нормы, см. п. 3.1; называем пространство с сибсоном Σ_2^3 *ФС-пространством*. Прямые и плоскости ФС-пространства от нормы на сибсоне не зависят, они имеют те же свойства, и те же уравнения, что и в ЛС-пространстве.

Событие $M = (a^1, a^2, a)$ из ФС-пространства обладает *собственной* мировой линией, состоящей из событий $t(a^1, a^2, a)$, $t \in \mathbf{R}$. Параметрические уравнения собственной мировой линии

$$x^1 = a^1 t, \quad x^2 = a^2 t, \quad x = at + a^1 a^2 \frac{t(t-1)}{2}.$$

Это уравнения прямой с сибсом (a^1, a^2, a) , см. п. 3.1, на события не действуют внешние силы, происходит прямолинейное движение. События $M = (a^1, a^2, 0)$ не составляют плоскости в ФС-пространстве, мировые линии таких событий:

$$x^1 = a^1 t, \quad x^2 = a^2 t, \quad x = \frac{t(t-1)}{2} a^1 a^2.$$

Длительность события $\eta = (h^1, h^2, h)$ при $h^1 h^2 > 0$ равна

$$\|\eta\| = \sqrt{h^1 h^2},$$

при $h^1 h^2 < 0$ длительность не существует. Протяженность события $\eta = (0, 0, h)$ равна $\|\eta\| = |h|$. События $M(x^1, x^2, x)$, составляющие в ЕС-пространстве множество относительной одновременности для симметричных событий $T_0 = (a^1, a^2, 0)$ и $T_{-1} = (-a^1, -a^2, a^1 a^2)$, см. п. 4.1, описывается уравнением

$$x^2 = \frac{a^2}{a^1} x^1.$$

Это цилиндрическая поверхность в ФС-пространстве с направляющей $x^2 = \frac{a^2}{a^1} x^1$, лежащей в многообразии $\mathbf{T}^2$, и образующей, параллельной координатной оси $< O, \gamma >$, – пространственной оси. Указанная цилиндрическая поверхность является плоскостью $< O, \sigma, \gamma >$, где $\sigma = (1, -\frac{a^2}{a^1}, 0)$. Параметрические уравнения плоскости:

$$x^1 = v, \quad x^2 = \frac{a^2}{a^1} v, \quad x = u.$$

События $T = (x^1, x^2, 0)$, отстоящие от начала отсчета $O(0, 0, 0)$ на интервал постоянной длительности d , лежат в многообразии $\mathbf{T}^2$ на линии – изохроне

$$x^1 x^2 = d^2$$

или

$$x^2 = \frac{d^2}{x^1}.$$

Это гипербола с изотропными асимптотами, ветви которой расположены в квадрантах (I) и (III). Для событий $M = (x^1, x^2, x)$, находящихся в длительности d от начала отсчета в ФС-пространстве имеем те же уравнения, но это гиперболические цилиндры. События $M = (x^1, x^2, x)$, отстоящие на интервал времени d от события $A = (a^1, a^2, a)$, заполняют в ФС-пространстве гиперболический цилиндр

$$x^2 = \frac{d^2}{x^1 - a^1}.$$

Для событий $A = (a^1, a^2, a)$, и $B = (b^1, b^2, b)$, определен сибс

$$AB = (b^1 - a^1, b^2 - a^2, b - a - (b^1 - a^1)a^2),$$

см. (8), п. 2.1. Длительность $d = \|AB\|$ события AB вычисляется на основе равенства

$$d^2 = \|AB\|^2 = (b^1 - a^1)(b^2 - a^2), \quad (b^1 - a^1)(b^2 - a^2) > 0;$$

не существует при

$$(b^1 - a^1)(b^2 - a^2) < 0.$$

Расстояние $r = \|AB\|$ между событиями A и B равно

$$r = \|AB\| = |b - a|,$$

оно существует при условиях $b^1 = a^1, b^2 = a^2$.

Прямые $< A, \sigma >$ где $\sigma = (x^1, x^2, x), x^1 \neq 0, x^2 \neq 0$, имеют направление σ , обладающее ненулевой длительностью при $x^1 x^2 > 0$. Если $x^1 = 0, x^2 \neq 0$ или $x^2 = 0, x^1 \neq 0$, то это

изотропные прямые. Если $x^1 = x^2 = 0$, то прямая $\langle A, \sigma \rangle$ пространственна, сибс $\sigma = (0, 0, x)$, задающий прямую, обладает длиной. Если $x^1 x^2 < 0$, то между событиями, принадлежащими прямой $\langle A, \sigma \rangle$, не существует ни длительности, ни расстояния.

Все плоскости ФС-пространства являются галилеевыми. Это классические 2-мерные галилеевы пространства с коммутативной геометрией.

Продолжением настоящей работы может служить дифференциальная геометрия ФС-пространства, в которой изучается влияние длительности событий на их физические характеристики.

4 Заключение

Выше рассмотрен сибсон Σ^3 – некоммутативный одуль Ли, на котором в [3] в аксиоматике Г. Вейля определено 3-мерное галилеево пространство-время с 1-мерным временем. Геометрия пространства с сибсоном без нормы есть некоммутативный аналог 3-мерной аффинной геометрии. (В [3] построены геометрии с разными одулями Ли, другие аналоги аффинной геометрии.) Вводя нормы в сибсон, получаем разные геометрии (аналогично тому, как на основе аффинной геометрии получаются евклидовы геометрии). Свойства нормы сибсов и метрические функции в геометриях с сибсоном обусловлены свойствами сибсона. Ведущие компоненты в операциях над сибсами целесообразно принимать за временные (времениподобные). В [3] в качестве временной была взята одна ведущая компонента сибсов; при этом определялась стандартная галилеева норма, как в галилеевом векторном пространстве. В настоящей работе обе ведущие компоненты сибсов считаются временными. Метрические функции индуцируются операциями над сибсами, квадрат длительности временного интервала события $\sigma = (a^1, a^2, a)$ задается равенством

$$\|\sigma\|^2 = a^1 a^2,$$

произведение ведущих компонент сибсов появляется в формулах операций

$$(a^1, a^2, 0) + (a^1, a^2, 0) = (2a^1, 2a^2, a^1 a^2).$$

Заметим, что внутренняя операция на некоммутативной структуре обычно называется умножением. В этом случае элемент 2σ должен восприниматься как σ^2 , что близко к скалярному квадрату элемента и имеет отношение к вводимой на структуре метрике. Метрическая функция возникла естественно в третьей компоненте в процессе оперирования с событиями. А норма векторов в векторное пространство вносится по желанию исследователя – евклидова, псевдоевклидова и т. д., в зависимости от того, какое пространство хочется исследовать. Однако, так же как с векторным пространством, можно поступить и с сибсоном, см. многообразие Nil в [11, с. 121–127]. Вместе с тем, при изучении сибсона Σ_2^3 с 2-мерным временем использована галилеева норма более общая, чем в [3].

Заметим еще, что пространство с сибсоном не плоское, оно имеет ненулевую кривизну, [12].

Сибсон моделируется движениями классической галилеевой плоскости.

Литература

1. Павлов Д. Г. Хронометрия трехмерного времени // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, N 1, 2004, с. 20–32.
2. Павлов Д. Г. Четырехмерное время // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, N 1, 2004, с. 33–42.

3. Долгарев А.И. Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств. Монография. - Пенза: ИИЦ ПГУ, 2005. - 306 с.
4. Левичев А.В. Однородная хроногеометрия. - Новосибирск: НГУ, 1991 - 57 с.
5. Долгарев А.И. Методы одулярной галилеевой геометрии в описании механических движений.// Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, Пенза: ИИЦ ПГУ, 2007, N 3, с. 12–24.
6. Сабинин Л.В. Одули как новый подход к геометрии со связностью// ДАН СССР, 1977, N 5, с. 800–803.
7. Холл М. Теория групп. - М.: ИЛ, 1962, - 468 с.
8. Розенфельд Б. А., Замаховский М. П. Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства. - М.: МЦНМО, 2003. - 560 с.
9. Вейль Г. Пространство. Время. Материя. Лекции по общей теории относительности. М.: Едиториал УРСС, 2004. - 456 с.
10. Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. - М.: Наука, 1969. - 309 с.
11. Скотт П. Геометрии на трехмерных многообразиях. - М.: Мир, 1986, 168 с.
12. Долгарев А.И. 2-параметрические кривизна и кручение 3-мерных галилеевых одулярных пространств.// Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, Пенза: ИИЦ ПГУ, 2007, N 4, С. 3–17.

The 3-dimensional Galilean odular nilpotent space with 2-dimensional time

A. I. Dolgarev, I. A. Dolgarev

*Penza State University, Penza, Russia
delivar@yandex.ru*

We study the Galilean space with 2-dimensional time, whose geometry is non-commutative; the space is constructed on the Lie odule of Galilean motions. The D. G. Pavlov's work RMat 04.12A563 examines the concept of multi-time defined on the linear space by means of the Berwald-Moor function - related to Finsler metrics. The linear space is endowed with a commutative algebraic structure, and can carry different metric functions. The metric function of a Lie odule - a non-commutative structure, is intrinsically related to the construction of the structure, and is introduced according to the properties of the structure. In our work we obtain preliminary results for one of the the non-commutative odular Galilean spaces with 1-dimensional time, its odule is the Lie odule of Galilean motions; on the same Lie odule is built the Galilean space with 2-dimensional time, and is provided primary research on the geometric properties of this space.

Key-words: Galilean space, non-commutative geometry, Finsler space, odule.

MSC: 53B40, 53B50.

ПОЛИЧИСЛА (МАТРИОНЫ) В БИОЛОГИЧЕСКОЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ИНФОРМАТИКЕ

С. В. Петухов, Е. С. Петухова

Институт машиноведения РАН, Москва

petoukhov@hotmail.com

Статья посвящена 2^n -мерным поличислам, обобщающим комплексные и двойные числа на основе блочно-фрактального (или кронекеровского) алгоритма. Эти поличисла, названные круговыми и гиперболическими матрионами соответственно, сконструированы в ходе авторских исследований систем генетического кода с позиций матричных методов информатики. Представляются данные об алгебрах этих поличисел. Обсуждается значение матрионов для теоретической биологии и информатики.

Ключевые слова: поличисла, теоретическая генетика.

1 Введение

Представляемые исследования по поличислам тесно связаны с главной задачей журнала "Гиперкомплексные числа в геометрии и физике", сформулированной в редакционной статье его первого номера (2004 год): "Своей главной задачей журнал ставит обоснование возможности расширения приведенной классификации чисел на числа больших размерностей, в первую очередь, обладающих коммутативно-ассоциативным умножением.... Двойные числа в основной классификации числовых структур должны стоять рядом с комплексными.... Признание за делителями нуля права на звание обычных чисел, приводит к возможности построения гиперкомплексных систем, наделенных коммутативно-ассоциативным произведением. Подчеркивая особый статус подобных структур, их предлагается рассматривать под общим именем поличисел... Пространства, стоящие за поличислами, как правило, являются финслеровыми". Поличислам посвящен сайт <http://www.polynumbers.ru>.

В настоящей статье представляются два вида поличисел, то есть числовых систем с коммутативно-ассоциативным произведением, обобщающих именно комплексные и двойные числа. Эти поличисла построены в ходе авторского исследования систем генетического кодирования и оказываются применимыми к математическому моделированию в теоретической биологии и информатике.

Известен алгоритм удвоения Грассмана-Клиффорда, порождающий огромное, трудно обозримое множество 2^n -мерных обобщений комплексных, двойных и дуальных чисел в виде гиперкомплексных чисел, квадраты базисных элементов которых равны -1 , $+1$ или 0 [1]. К настоящему времени хорошо изучена только незначительная часть из этого множества в виде чисел, называемых зачастую по имени изучавших их авторов: числа Клиффорда, числа Грассмана, числа Паули, числа Дирака, числа Калуцы и др. Для этих чисел построена теория, аналогичная теории функций комплексного переменного, благодаря чему они нашли широкое применение в математике и различных областях науки: неевклидовой геометрии, теории непрерывных групп, квантовой теории поля, теории упругости и т. д. [1]. Большинство из так построенных гиперкомплексных обобщений комплексных, двойных и дуальных чисел, например, числа Паули, Дирака, Калуцы не обладают свойством коммутативности по умножению.

Авторов данной статьи интересуют именно гиперкомплексные числа, наделенные коммутативно-ассоциативным умножением (то есть являющиеся поличислами) и отражающие те особенности иерархических систем генетического кодирования, которые выявляются при матричном анализе этих структурированных систем. Такие 2^n -мерные поличисла (матрионы) были построены в ходе данных исследований с помощью особого блочно-фрактального алгоритма, который, как выяснилось позже, можно трактовать, как частный случай общего алгоритма удвоения Грассмана-Клиффорда. Достоинством предложенного блочно-фрактального алгоритма является его наглядность и относительная простота, а также содержательность получаемых с его помощью результатов. Авторам не удалось найти в литературе углубленного изучения этих матрионных видов поличисел. Поэтому им пришлось самостоятельно разрабатывать излагаемые в статье теоретические и прикладные материалы по матрионам. Изучение данных поличисел в их матричной форме представления ведется уже ряд лет, начиная с работ [2–4].

Опишем особенности этих поличисел и алгоритм их построения, связанные с (2×2) -матрицами (1):

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ -x_1 & x_0 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} \quad (1)$$

где x_0 и x_1 – действительные числа.

Левая матрица в (1) является матричной формой представления комплексных чисел. Именно в такой матричной форме комплексные числа фигурируют в компьютерных программах. Эта матрица при ее нормировании к матрице с единичным детерминантом совпадает с матрицей кругового поворота в плоскости.

Правая матрица в (1) является матричной формой представления двойных чисел, введенных Клиффордом в 1872 году: $x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot e_1$, где $e_1^2 = +1$. С геометрической точки зрения она задает преобразование масштабирования и гиперболического поворота. При ее нормировании к матрице с единичным детерминантом она совпадает с матрицей гиперболического поворота. С этим преобразованием связаны гиперболические функции, специальная теория относительности, геометрическая теория логарифмов, теория солитонов синус-Гордона (о биологическом значении солитонов синус-Гордона см. [5]). Ряд геометрических приложений двойных чисел описан в книге [6]. Двойные числа имеют отношение к преобразованиям Лоренца и потому иногда называются числами Лоренца. Их другие известные названия: гиперболические комплексные числа; моторы, каунтеркомплексные или гиперболические числа; аномальные комплексные числа; перплексные числа; сплит-комплексные числа (подробности представлены на сайте http://en.wikipedia.org/wiki/Split-complex_number).

Обобщения (2×2) -матриц из (1) с помощью названного блочно-фрактального (или кронекевского) алгоритма ведет к $(2^n \times 2^n)$ -матрицам, которые в силу их свойств являются 2^n -мерными поличислами ($n = 1, 2, 3, \dots$). Данные поличисла названы матрионами, поскольку они возникли из рассмотрения блочных матриц специальных видов. 2^n -мерные матрионы, алгоритмически порождаемые из левой матрицы в (1), условно именуются круговыми, а порождаемые из правой матрицы в (1) – гиперболическими. Базисными единицами в многомерных матрионах выступают не только действительная и мнимые единицы i_k ($i_k^2 = -1$), но и такие единицы e_k , для которых $e_k^2 = +1$. Эти базисные единицы e_k в рамках теории матрионов условно именуются *полумнимыми* единицами, поскольку в таблицах умножения базисных единиц матрионов они частично обладают свойствами как действительной, так и мнимой единиц, занимая некоторое промежуточное положение между ними.

Множества каждого из двух названных видов 2^n -мерных матрионов, определяемые над полем действительных чисел, включают в себя единичные матрицы в качестве своих

единиц и образуют кольца и алгебры со специфическими таблицами умножения базисных единиц. Поскольку матрионы отражают структурные свойства общебиологических систем генетического кодирования, то давно известные в математике комплексные и двойные числа обретают новые грани своей значимости в области биологии, физиологии, психофизики и других областях. Например, двойные числа через свои матрионные обобщения оказываются связанными с пифагорейским музыкальным строем (см. Приложение 1) и с древнекитайской табличной системой "Книги перемен", написанной несколько тысяч лет назад (<http://lah.ru/text/petoukhov/kp.htm>).

2 Круговые матрионы

Построение 2^n -мерных круговых матрионов как обобщений комплексных чисел основано на предложенном блочно-фрактальном (или кронекеровском) алгоритме (Рис. 1). В этом алгоритме на этапе конструирования матрицы с удвоенной размерностью каждый действительный элемент x_0 и x_1 (2×2) -матрицы комплексного числа $[x_0 \ x_1; -x_1 \ x_0]$ сам рассматривается как (2×2) -матрица некоторого комплексного числа: $x_0 = [y_0 \ y_1; -y_1 \ y_0]$, $x_1 = [y_2 \ y_3; -y_3 \ y_2]$. Данная процедура повторяется на следующем шаге ($y_0 = [z_0 \ z_1; -z_1 \ z_0]$, $y_1 = [z_2 \ z_3; -z_3 \ z_2]$, $y_2 = [z_4 \ z_5; -z_5 \ z_4]$, $y_3 = [z_6 \ z_7; -z_7 \ z_6]$) и т. д. (Применяемая нами линейная форма записи матриц существует наряду с традиционной табличной формой; она используется, например, в компьютерной программе MatLab).

$$\left\| \begin{array}{cc} x_0 & x_1 \\ -x_1 & x_0 \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{cc|cc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ -y_1 & y_0 & -y_3 & y_2 \\ \hline -y_2 & -y_3 & y_0 & y_1 \\ y_3 & -y_2 & -y_1 & y_0 \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{cc|cc|cc|cc} z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \\ -z_1 & z_0 & -z_3 & z_2 & -z_5 & z_4 & -z_7 & z_6 \\ \hline -z_2 & -z_3 & z_0 & z_1 & -z_6 & -z_7 & z_4 & z_5 \\ z_3 & -z_2 & -z_1 & z_0 & z_7 & -z_6 & -z_5 & z_4 \\ \hline -z_4 & -z_5 & -z_6 & -z_7 & z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ z_5 & -z_4 & z_7 & -z_6 & -z_1 & z_0 & -z_3 & z_2 \\ \hline z_6 & z_7 & -z_4 & -z_5 & -z_2 & -z_3 & z_0 & z_1 \\ -z_7 & z_6 & z_5 & -z_4 & z_3 & -z_2 & -z_1 & z_0 \end{array} \right\| \Rightarrow \dots$$

Рис. 1. Построение 2^n -мерных круговых матрионов на основе блочно-фрактального алгоритма

$(2^n \times 2^n)$ -матрицы, построенные такой локальной заменой каждого элемента матричным блоком, обладают глобально блочным характером фрактального типа. Их $(2^{n-1} \times 2^{n-1})$ -квадранты, расположенные вдоль главной диагонали, тождественны друг другу, а расположенные вдоль побочной диагонали – отличаются только знаком. Поэтому, обозначив эти квадранты через A_1 и A_2 , получаем, что при любом n вся блочная матрица имеет вид матрицы комплексного числа: $[A_1 \ A_2; -A_2 \ A_1]$. Это свойство тождественности вдоль диагоналей в равной степени относится к структурам самих квадрантов, субквадрантов, субсубквадрантов и т. д. В этом смысле имеет место блочная фрактальность, в силу которой использованный нами алгоритм порождения матрионов назван блочно-фрактальным.

Знакомые с кронекеровским произведением матриц, которое в теоретической физике зачастую называется тензорным произведением, легко увидят, что блочно-фрактальный алгоритм по результатам его применения совпадает с кронекеровским произведением соответствующих (2×2) -матриц. Здесь можно отметить, что кронекеровское произведение квадратных матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ не коммутативно: $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$. Однако, применяя кронекеровское произведение к матричным формам представления, например, двойных и комплексных чисел, мы получаем 2^n -мерные числовые системы с коммутативно-ассоциативным умножением, поскольку $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}) = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$.

В свете сказанного предложенный алгоритм построения обобщенных чисел вполне можно было бы назвать тензорным или кронекеровским. Однако, большинство потенциальных читателей, интересующихся математической и теоретической биологией, не владеет понятием тензорного или кронекеровского умножения, но знакомо с представлением о фракталах, которое к тому же вызывает много эвристических ассоциаций. Поэтому авторы предпочитают называть предложенный алгоритм блочно-фрактальным.

Набор элементов первой строки матрицы кругового матриона повторяется в каждой ее строке, но в переставленном порядке и с разными знаками так, что круговые $(2^n \times 2^n)$ -матрионы, как правило, не являются вырожденными при любом n . Но, начиная с $n = 2$, в их множестве имеются делители нуля, то есть ненулевые члены множества, которые при перемножении друг с другом производят нулевой матрион. Для делителей нуля нельзя ввести операцию деления. В случае круговых тетраметрионов делители нуля имеют вид $(a, b - \text{действительные числа})$:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & a & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \\ -a & 0 & 0 & a \\ 0 & -a & -a & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & b \\ 0 & b & -b & 0 \\ 0 & -b & b & 0 \\ b & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2)$$

Каждую матрионную $(2^n \times 2^n)$ -матрицу можно представить в виде суммы базисных матриц того же порядка, состоящих из нулей и единиц. Для получения такой базисной матрицы, соответствующей координате x_k , надо в матрионной матрице все элементы x_k заменить на "1", а все остальные элементы заменить на "0". Например, круговой тетраметрион C_2 раскладывается на базисные матрицы следующим образом:

$$C_2 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 \\ -x_2 & -x_3 & x_0 & x_1 \\ x_3 & -x_2 & -x_1 & x_0 \end{vmatrix} =$$

$$= x_0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + x_1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + x_2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3)$$

В правой части выражения (3) первая базисная матрица представляет собой единичную матрицу, обозначаемую символом 1. Последующие три базисных матрицы обозначим символами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{e}_3$ соответственно. Базисные матрицы $\mathbf{i}_1$ и $\mathbf{i}_2$ представляют собой мнимые единицы, поскольку $\mathbf{i}_1^2 = \mathbf{i}_2^2 = -1$. Четвертая базисная матрица является полумнимой единицей, поскольку $\mathbf{e}_3^2 = +1$. Оказывается, что 2^n -мерные круговые матрионы, начиная с $n = 2$, базируются на трех видах математических единиц: действительной единице, мнимых единицах и полумнимых единицах. Поэтому данные поличисла можно называть триедиными поличислами.

На протяжении всей статьи мнимые единицы будут обозначаться символами $\mathbf{i}_k$, а полумнимые единицы – символами $\mathbf{e}_k$. При замене базисных матриц подобными символами любой 2^n -мерный круговой матрион приобретает полилинейную или векторную форму своего представления (Рис. 2).

Размерность	Вид кругового матриона
2^1	$x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{i}_1$
2^2	$x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{i}_1 + x_2 \cdot \mathbf{i}_2 + x_3 \cdot \mathbf{e}_3$
2^3	$x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{i}_1 + x_2 \cdot \mathbf{i}_2 + x_3 \cdot \mathbf{e}_3 + x_4 \cdot \mathbf{i}_4 + x_5 \cdot \mathbf{e}_5 + x_6 \cdot \mathbf{e}_6 + x_7 \cdot \mathbf{i}_7$

Рис. 2. Полилинейные или векторные представления круговых матрионов для случаев 2-, 4- и 8-мерного пространств

Для круговых матрионов любой размерности существует общее правило вложения векторных форм матрионов меньшей размерности в векторные формы матрионов более высокой размерности. Оно заключается в том, что упорядоченный набор первых $2^n/2$ слагаемых в векторной форме каждого 2^n -мерного кругового матриона представляет собой полный упорядоченный набор слагаемых векторной формы 2^{n-1} -мерного кругового матриона. Другими словами, матрион меньшей размерности вложен в матрион удвоенной размерности, образуя его начальную половину. Выполнение этого правила можно видеть на примерах Рис. 2. Тем самым, круговой матрион, как многомерное число, объединяет в себе множество аналогичных чисел меньшей размерности в виде иерархического ансамбля.

Аналогичное правило вложения выполняется для таблицы умножения базисных единиц круговых матрионов. Рис. 3 представляет такую таблицу умножения для 8-мерных гиперболических матрионов. В каждой ячейке этой таблицы показан результат перемножения соответствующих базисных единиц из ее верхней строки и левого столбца (таблица Кэли). Данная таблица умножения полностью определяет алгебру этих матрионов.

	1	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{i}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{i}_7$
1	1	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{i}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{i}_7$
$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_1$	-1	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{i}_4$	$\mathbf{i}_7$	$-\mathbf{e}_6$
$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{e}_3$	-1	$-\mathbf{i}_1$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{i}_7$	$-\mathbf{i}_4$	$-\mathbf{e}_5$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	+1	$\mathbf{i}_7$	$-\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_5$	$\mathbf{i}_4$
$\mathbf{i}_4$	$\mathbf{i}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{i}_7$	-1	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{i}_4$	$\mathbf{i}_7$	$-\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{i}_1$	+1	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{i}_2$
$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{i}_7$	$-\mathbf{i}_4$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{e}_3$	+1	$\mathbf{i}_1$
$\mathbf{i}_7$	$\mathbf{i}_7$	$-\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_5$	$\mathbf{i}_4$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_1$	-1

Рис. 3. Таблица умножения базисных единиц круговых октоматрионов

В левом верхнем углу этой октоматрионной таблицы умножения выделены матрица (2×2) , которая воспроизводит таблицу умножения базисных единиц у круговых $(2^1 \times 2^1)$ -матрионов, и матрица (4×4) , воспроизводящая таблицу умножения у круговых $(2^2 \times 2^2)$ -матрионов. Сама таблица умножения круговых октоматрионов аналогичным образом вложена в таблицу умножения 16-мерных круговых матрионов и т. д. Тем самым, имеет место иерархия вложения соответствующих алгебр.

Таблица умножения базисных единиц круговых матрионов всегда симметрична относительно главной диагонали, что отражает их коммутативность.

Очередность следования антимнимых и мнимых единиц в 2^n -мерных круговых матрионах носит закономерный характер. Она совпадает с очередностью следования "+1"

и -1 на главной диагонали матрицы Адамара $H_n = [1 \ 1; 1 \ -1]^{(n)}$, играющей важную роль в теории дискретных сигналов и квантовых компьютеров. Кроме того, расположение всех знаков плюс и минус в таблицах умножения для 2^n -мерных круговых матрионов эквивалентно расположению знаков плюс и минус в этих матрицах Адамара.

Но расположение знаков плюс и минус в самих 2^n -мерных круговых матрионах совпадает с расположением этих же знаков в матрице Адамара другого вида: $[1 \ 1; -1 \ 1]^{(n)}$. Если значения всех координат $x_0, x_1, \dots, 2^n$ -мерного кругового матриона равны 1, то его матрица совпадает с этим видом матрицы Адамара.

Половина количества координат круговых матрионов всегда является мнимой, а вторая половина – "антимнимой", основанной на действительной и полумнимых базисных единицах. Образно говоря, процесс дихотомического увеличения размерности матрионов сопровождается реализацией в их составе бинарно-оппозиционных половин в виде антимнимой и мнимой половин. При этом сумма порядковых номеров антимнимых координат равна сумме порядковых номеров мнимых координат для каждого 2^n -мерного кругового матриона, начиная с $n = 2$. Например, для 4-мерного кругового матриона $x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot \mathbf{i}_1 + x_2 \cdot \mathbf{i}_2 + x_3 \cdot \mathbf{e}_3$ сумма порядковых номеров его антимнимых координат составляет $0+3 = 3$, как и сумма порядковых номеров мнимых координат: $1+2 = 3$. Для 8-мерного кругового матриона $x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot \mathbf{i}_1 + x_2 \cdot \mathbf{i}_2 + x_3 \cdot \mathbf{e}_3 + x_4 \cdot \mathbf{i}_4 + x_5 \cdot \mathbf{e}_5 + x_6 \cdot \mathbf{e}_6 + x_7 \cdot \mathbf{i}_7$ сумма порядковых номеров его антимнимых координат составляет $0 + 3 + 5 + 6 = 14$, как и сумма порядковых номеров его мнимых координат: $1 + 2 + 2 + 7 = 14$.

Закономерности собственных значений матриц круговых матрионов

У круговых матрионов это разделение на мнимые и антимнимые наборы прослеживается также в характере собственных значений их матричных форм представления. В этих собственных значениях, являющихся комплексными числами, мнимые и антимнимые координаты круговых матрионов выступают обособленными наборами, которые собраны в мнимой и действительной частях этих комплексных чисел. Например, у тетраматриона $m_2 = x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot \mathbf{i}_1 + x_2 \cdot \mathbf{i}_2 + x_3 \cdot \mathbf{e}_3$ собственные значения равны комплексным числам $x_0 + x_3 + j \cdot (-x_1 + x_2)$, $x_0 + x_3 - j \cdot (-x_1 + x_2)$, $-x_3 + x_0 + j \cdot (x_1 + x_2)$, $-x_3 + x_0 - j \cdot (x_1 + x_2)$ (здесь j – мнимая единица комплексного числа). Видно, что все мнимые координаты x_1 и x_2 фигурируют только в мнимой части этих собственных чисел, а все антимнимые координаты x_0 и x_3 – только в действительной части этих собственных чисел. Для случая кругового октоматриона $m_3 = x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot \mathbf{i}_1 + x_2 \cdot \mathbf{i}_2 + x_3 \cdot \mathbf{e}_3 + x_4 \cdot \mathbf{i}_4 + x_5 \cdot \mathbf{e}_5 + x_6 \cdot \mathbf{e}_6 + x_7 \cdot \mathbf{i}_7$ аналогичное правило группировки мнимых координат x_1, x_2, x_4, x_7 в мнимой части его собственных чисел, а антимнимых x_0, x_3, x_5, x_6 – в действительной части, реализуется в следующем виде: $x_5 - x_3 + x_6 + x_0 + j \cdot (-x_1 - x_2 - x_7 + x_4)$; $x_5 - x_3 + x_6 + x_0 - j \cdot (-x_1 - x_2 - x_7 + x_4)$; $-x_5 - x_3 - x_6 + x_0 + j \cdot (x_1 + x_2 - x_7 + x_4)$; $-x_5 - x_3 - x_6 + x_0 - j \cdot (x_1 + x_2 - x_7 + x_4)$; $x_5 + x_3 - x_6 + x_0 + j \cdot (-x_1 + x_2 + x_7 + x_4)$; $x_5 + x_3 - x_6 + x_0 - j \cdot (-x_1 + x_2 + x_7 + x_4)$; $-x_5 + x_3 + x_6 + x_0 + j \cdot (x_1 - x_2 + x_7 + x_4)$; $-x_5 + x_3 + x_6 + x_0 - j \cdot (x_1 - x_2 + x_7 + x_4)$.

Наборы собственных значений в 2^n -мерных круговых матрионах характеризуются дополнительной закономерностью: сумма всех собственных значений матриона равна действительному числу $2^n \cdot x_0$, то есть размерности матриона, умноженной на координату при действительной базисной единице. Например, сумма собственных значений круговых тетраматриона и октоматриона равна $4 \cdot x_0$ и $8 \cdot x_0$ соответственно, что можно проверить на приведенных примерах.

Молекулярные системы генетического кодирования принадлежат микромиру, подчиняющемуся законам квантовой механики. Для квантовой механики одним из важных является понятие унитарных преобразований и унитарных матриц. Отметим существование во множествах 2^n -мерных круговых матрионов подмножества матрионов,

Образовавшиеся матрицы по своей черно-белой мозаике являются бисимметрическими, т. е. симметричными относительно обеих диагоналей. Их левая и правая половина (а также верхняя и нижняя половины) зеркально антисимметричны друг другу. Составляющие их квадранты и субквадранты обладают этими же свойствами. Видно, что черно-белая мозаика матрицы (2×2) повторяется в тех квадрантах очередной матрицы (4×4) данного семейства, которые расположены вдоль главной диагонали. А в ее квадрантах, расположенных вдоль побочной диагонали, эта же мозаика повторяется в антисимметричном по цвету виде. Аналогично, вся мозаика матрицы (4×4) повторяется в точном виде в квадрантах вдоль главной диагонали очередной (8×8) -матрицы и в антисимметричном виде в ее квадрантах вдоль побочной диагонали. То есть глобальная мозаика матрицы предыдущего поколения из данного семейства наследуется в качестве локальной мозаики квадрантов матрицы следующего поколения. Подобное семейство $(2^n \times 2^n)$ -матриц с наследованием мозаик при переходе к матрице очередного поколения играет видную роль в структуризации генетического кода, исследуемого средствами матричной генетики.

Описанный графический алгоритм позволяет определять, какие из целых чисел являются антимнимыми, а какие субмнимыми. При этом можно ничего не знать о правилах матричного умножения. Достаточно запомнить представленную мозаику простейшей (2×2) -матрицы с нумерованными ячейками и вписать ее по данному алгоритму в квадранты (4×4) -матрицы с нумерованными ячейками. Затем повторить это с глобальной мозаикой (4×4) -матрицы, вписывая ее в квадранты (8×8) -матрицы, и т. д.

Отметим также, что для каждой из строк этих мозаичных матриц на Рис. 4 сумма чисел в ее белых ячейках равна сумме чисел в ее черных ячейках. Это же справедливо для каждого из столбцов данных матриц, начиная с (4×4) -матрицы.

Бинарно-мозаичные $(2^n \times 2^n)$ -матрицы, примеры из семейства которых представлены на Рис. 4, обладают интересным общим свойством самовоспроизводства. Если в этих бинарных по мозаике матрицах заменить черные ячейки элементами $+1$, а белые ячейки – элементами -1 , то так образованные бинарные матрицы демонстрируют свойство своего размножения при их возведении в целую положительную степень. Например, если обозначить через S так образованную бинарную (4×4) -матрицу, соответствующую (4×4) -матрице на Рис. 4, то при ее возведении во вторую степень получаем две таких матрицы S . И вообще оказывается справедливым соотношение: $S^k = 2^{k-1} \cdot S$, где k – целое положительное число. Аналогичное, но с другим множителем, равным 8, а не 2, справедливо в случае бинарной матрицы, соответствующей мозаичной (8×8) -матрице на Рис. 4, и т. д.

Насколько можно установить по начальным фрагментам рядов антимнимых и субмнимых натуральных чисел, для них выполняется следующее правило замыкания каждого из этих рядов относительно операции умножения: произведение двух антимнимых (субмнимых) натуральных чисел всегда равно антимнимому (соответственно субмнимому) натуральному числу. Доказательство верности этого утверждения для данных числовых рядов в общем виде авторами не проводилось.

Разбиение множества натуральных чисел на подмножества антимнимых и субмнимых чисел ставит много интересных вопросов, подлежащих углубленному изучению в дальнейшем. Например, возникает задача о распределении простых субмнимых чисел и простых антимнимых чисел. Речь идет, прежде всего, о взаимоотношениях чисел внутри каждого из этих двух подмножеств. Простым субмнимым числом (или субмнимо-простым числом) естественно называть такое, которое не разложимо на произведения никаких других субмнимых чисел, кроме себя самого и единицы (которая является субмнимым числом). Простым антимнимым числом (или антимнимо-простым числом) естественно называть такое, которое не разложимо на произведения никаких

других антимнимых чисел. Классическая задача о распределении простых чисел в ряду натуральных чисел породила большое количество принципиально важных исследований, методов и теорем, однако своего полного решения так и не получила. По нашему мнению, новая задача о распределении простых антимнимых и простых субмнимых натуральных чисел также способна лечь в основу перспективных исследований и породить новые методы и теоремы, которые, в частности, будут иметь отношение к названной классической задаче. Не может ли эта новая задача, возникшая в теории круговых матрионов, способствовать полному решению классической задачи о распределении простых чисел? Этот вопрос на сегодня является открытым.

Другим примером интересных вопросов, возникающих в связи с теорией рассматриваемых поличисел, является вопрос о рациональных числах. Их множество разбивается на несколько подмножеств по критерию того, к какому типу натуральных чисел – антимнимому или субмнимому – принадлежат в отдельности их числитель и знаменатель. Эти подмножества имеют особый характер распределения во множестве рациональных чисел, специфику перехода членов одного подмножества в другое при различных операциях и пр.

Перейдем теперь к другим бисимметрическим матрицам, представляющим гиперболические матрионы.

3 Гиперболические матрионы

Построение 2^n -мерных гиперболических матрионов как обобщений двойных чисел ведется на основе блочно-фрактального (или кронекеровского) аналогично рассмотренному выше случаю круговых матрионов. Каждый действительный элемент x_0 и x_1 (2×2) -матрицы двойного числа из (1) на этапе конструирования матрицы с удвоенной размерностью сам рассматривается как (2×2) -матрица некоторого двойного числа: $x_0 = [y_0 \ y_1; y_1 \ y_0]$, $x_1 = [y_2 \ y_3; y_3 \ y_2]$. При вложении этих (2×2) -матриц двойных чисел в исходную (2×2) -матрицу, последняя становится $(2^2 \times 2^2)$ -матрицей, являющейся матричной формой представления четырехмерного гиперболического матриона. Вновь трактуя каждый элемент новой $(2^2 \times 2^2)$ -матрицы как (2×2) -матрицу некоторого двойного числа ($y_0 = [z_0 \ z_1; z_1 \ z_0]$, $y_1 = [z_2 \ z_3; z_3 \ z_2]$, $y_2 = [z_4 \ z_5; z_5 \ z_6]$, $y_3 = [z_6 \ z_7; z_7 \ z_6]$) и вставляя их как блоки, получаем $(2^3 \times 2^3)$ -матрицу, представляющую 8-мерный гиперболический матрион и т. д. (Рис. 4).

$$\left\| \begin{array}{cc} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_0 \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{cc|cc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 & y_0 & y_3 & y_2 \\ \hline y_2 & y_3 & y_0 & y_1 \\ y_3 & y_2 & y_1 & y_0 \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{cc|cc|cc|cc} z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \\ z_1 & z_0 & z_3 & z_2 & z_5 & z_4 & z_7 & z_6 \\ \hline z_2 & z_3 & z_0 & z_1 & z_6 & z_7 & z_4 & z_5 \\ z_3 & z_2 & z_1 & z_0 & z_7 & z_6 & z_5 & z_4 \\ \hline z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ z_5 & z_4 & z_7 & z_6 & z_1 & z_0 & z_3 & z_2 \\ \hline z_6 & z_7 & z_4 & z_5 & z_2 & z_3 & z_0 & z_1 \\ z_7 & z_6 & z_5 & z_4 & z_3 & z_2 & z_1 & z_0 \end{array} \right\| \Rightarrow \dots$$

Рис. 4. Построение 2^n -мерных гиперболических матрионов

Все $(2^n \times 2^n)$ -матрицы гиперболических матрионов являются бисимметрическими, то есть симметрическими относительно обеих диагоналей. Эти $(2^n \times 2^n)$ -матрицы, построенные такой локальной заменой каждого элемента матричным блоком, также обладают

глобально блочным характером фрактального типа. Их $(2^{n-1} \times 2^{n-1})$ -квадранты, расположенные вдоль каждой диагонали, тождественны друг другу. Поэтому, обозначив эти квадранты через A_1 и A_2 , получаем, что при любом n вся блочная матрица имеет вид матрицы двойного числа: $[A_1 \ A_2; A_2 \ A_1]$. Это свойство тождественности вдоль диагоналей в равной степени относится к структурам самих квадрантов, субквадрантов, субсубквадрантов и т. д. В этом смысле имеет место блочная фрактальность. Этот же алгоритм построения гиперболических матрионов можно представить в форме кронекеровского произведения (2×2) -матриц двойных чисел (Рис. 5).

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} x_4 & x_5 \\ x_5 & x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \\ z_1 & z_0 & z_3 & z_2 & z_5 & z_4 & z_7 & z_6 \\ z_2 & z_3 & z_0 & z_1 & z_6 & z_7 & z_4 & z_5 \\ z_3 & z_2 & z_1 & z_0 & z_7 & z_6 & z_5 & z_4 \\ z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ z_5 & z_4 & z_7 & z_6 & z_1 & z_0 & z_3 & z_2 \\ z_6 & z_7 & z_4 & z_5 & z_2 & z_3 & z_0 & z_1 \\ z_7 & z_6 & z_5 & z_4 & z_3 & z_2 & z_1 & z_0 \end{vmatrix}$$

Рис. 5. Кронекерская форма блочно-фрактального алгоритма для гиперболических матрионов

Каждую $(2^n \times 2^n)$ -матрицу гиперболического матрионов можно представить в виде суммы базисных матриц, действуя аналогично описанному случаю круговых матрионов. Например, гиперболический тетраметрион G_2 раскладывается на базисные матрицы следующим образом:

$$G_2 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_0 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_0 & x_1 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = x_0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + x_1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + x_2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4)$$

В правой части (4) первая базисная матрица представляет собой единичную матрицу, поэтому обозначим ее символом $\mathbf{1}$. Последующие три базисных матрицы обозначим символами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, поскольку они являются полумнимыми единицами, квадрат которых равен $+1$.

При замене базисных матриц подобными символами любой 2^n -мерный гиперболический матрион приобретает полилинейную или векторную форму своего представления (Рис. 6).

Размерность	Вид гиперболического матриона
2^1	$x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{e}_1$
2^2	$x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + x_3 \cdot \mathbf{e}_3$
2^3	$x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + x_3 \cdot \mathbf{e}_3 + x_4 \cdot \mathbf{e}_4 + x_5 \cdot \mathbf{e}_5 + x_6 \cdot \mathbf{e}_6 + x_7 \cdot \mathbf{e}_7$

Рис. 6. Полилинейные или векторные представления гиперболических матрионов для случаев 2-, 4- и 8-мерного пространств

Для гиперболических матрионов любой размерности существует общее правило вложения векторных форм матрионов меньшей размерности в векторные формы матрионов более высокой размерности. Оно заключается в том, что упорядоченный набор

первых $2^n/2$ слагаемых в векторной форме каждого 2^n -мерного гиперболического матриона представляет собой полный упорядоченный набор слагаемых векторной формы 2^{n-1} -мерного гиперболического матриона. Другими словами, матрион меньшей размерности вложен в матрион удвоенной размерности, образуя его начальную половину. Выполнение этого правила можно видеть на примерах Рис. 6. Тем самым, гиперболический матрион, как многомерное число, объединяет в себе множество аналогичных чисел меньшей размерности в виде иерархического ансамбля.

Аналогичное правило вложения выполняется для таблицы умножения базисных единиц гиперболических матрионов. Рис. 7 представляет такую таблицу умножения для 8-мерных гиперболических матрионов.

	1	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇
1	1	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇
e ₁	e ₁	1	e ₃	e ₂	e ₅	e ₄	e ₇	e ₆
e ₂	e ₂	e ₃	1	e ₁	e ₆	e ₇	e ₄	e ₅
e ₃	e ₃	e ₂	e ₁	1	e ₇	e ₆	e ₅	e ₄
e ₄	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇	1	e ₁	e ₂	e ₃
e ₅	e ₅	e ₄	e ₇	e ₆	e ₁	1	e ₃	e ₂
e ₆	e ₆	e ₇	e ₄	e ₅	e ₂	e ₃	1	e ₁
e ₇	e ₇	e ₆	e ₅	e ₄	e ₃	e ₂	e ₁	1

Рис. 7. Таблица умножения базисных единиц гиперболических октоматрионов

В левом верхнем углу таблицы умножения на Рис. 7 выделены матрицы порядка (2×2) и (4×4) , представляющие собой вложенные в нее таблицы умножения базисных единиц 2-мерных и 4-мерных гиперболических матрионов соответственно. Сама таблица умножения гиперболических октоматрионов аналогичным образом вложена в таблицу умножения 16-мерных гиперболических матрионов и т. д. Тем самым, имеет место иерархия вложения соответствующих алгебр.

Уникальной особенностью гиперболических матрионов является то, что структура их таблицы умножения всегда совпадает с их собственной матричной структурой. Действительно, если символы в таблице умножения на Рис. 7 трактовать как вещественные числа, то таблица умножения сама оказывается гиперболическим матрионом (сравни с Рис. 5).

Характерной особенностью гиперболических матрионов как матриц является идентичность набора координат в каждой строке и столбце. Любая строка матрионной матрицы отличается от ее первой строки только перестановкой тех же самых значений элементов по специфическому алгоритму, определяющему ее как функцию первой строки. Расположение каждой координаты в $(2^n \times 2^n)$ -матрице гиперболического матриона создает определенную мозаику, которую можно дополнительно визуализировать маркировкой ячеек с этой координатой цветом. Поскольку эта мозаика связана с базисными матрицами данных матрионов, то она является наглядным признаком, характерным для 2^n -мерного матриона. При переходе к 2^{n+1} -мерному матриону она передается ему "по наследству", алгоритмически воспроизводясь в его квадрантах в качестве локальной мозаики. При этом глобальная мозаика матриона увеличенной размерности имеет существенно иной вид. Поскольку матрионы связаны со структурами генетического кода и биоинформатикой, данные мозаики и их варианты могут рассматриваться как определенные генетические архетипы и использоваться в дизайне, культурологии, арт-терапии и других областях.

Матрица 2^n -мерного гиперболического матриона с ненулевыми элементами, в которой все элементы равны друг другу, является вырожденной. Такие матрицы не имеют обратных к ним матриц, и для них операция деления не определена.

Невырожденные гиперболические матрионы удовлетворяют определению метрических тензоров римановой геометрии, что позволяет использовать их при анализе внутренней геометрии поверхностей биологических тел и при математическом моделировании в биологической проблеме морфологического наследования. В живой природе формообразовательные процессы тесно связаны с "анизотропией биологического пространства", которая отражает их анизотропный характер. Подобная анизотропия биологических пространств выступает одним из ключевых моментов самоорганизации живой материи. Загадки биологического формообразования в науке давно связывают с идеей существования некоторого анизотропного морфогенетического поля, геометрическую теорию которого предстоит создать, например, с использованием финслеровой геометрии. Поверхности биологических тел криволинейны, и к ним как нельзя более применимы понятия внутренней геометрии поверхностей, характерные для римановой геометрии и ее обобщений.

Таблицы умножения 2^n -мерных гиперболических матрионов симметричны относительно главной диагонали, что отражает коммутативность данных матрионов по умножению. Коммутативность и ассоциативность гиперболических и круговых матрионов легко доказывается через использование их блочного строения.

Докажем для примера коммутативность 2^n -мерных гиперболических матрионов, исходя из блочного характера их структуры и коммутативности двойных чисел. Для этого сравним произведения, отличающиеся порядком сомножителей, двух 2^n -мерных гиперболических матрионов $A = [A_1, A_2; A_2, A_1]$ и $B = [B_1, B_2; B_2, B_1]$, где A_1, A_2, B_1, B_2 являются 2^{n-1} -мерными гиперболическими матрионами:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= [A_1, A_2; A_2, A_1] \cdot [B_1, B_2; B_2, B_1] = \\ &= [A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2, A_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_1; A_2 \cdot B_1 + A_1 \cdot B_2, A_2 \cdot B_2 + A_1 \cdot B_1] \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \cdot A &= [B_1, B_2; B_2, B_1] \cdot [A_1, A_2; A_2, A_1] = \\ &= [B_1 \cdot A_1 + B_2 \cdot A_2, B_1 \cdot A_2 + B_2 \cdot A_1; B_2 \cdot A_1 + B_1 \cdot A_2, B_2 \cdot A_2 + B_1 \cdot A_1] \quad (6) \end{aligned}$$

Коммутативность матрионов A и B по умножению реализуется тогда, когда правые части матричных тождеств (4.2/2) и (4.2/3) равны, т.е. когда их соответственные элементы равны:

$$\begin{aligned} A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2 &= B_1 \cdot A_1 + B_2 \cdot A_2; \quad A_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_1 = B_1 \cdot A_2 + B_2 \cdot A_1; \\ A_2 \cdot B_1 + A_1 \cdot B_2 &= B_2 \cdot A_1 + B_1 \cdot A_2; \quad A_2 \cdot B_2 + A_1 \cdot B_1 = B_2 \cdot A_2 + B_1 \cdot A_1 \end{aligned} \quad (7)$$

В левой и правой частях каждого из этих равенств (7) стоят одинаковые произведения, но взятые с разным порядком сомножителей. Эти равенства (7) выполняются, если каждое из данных произведений перестановочно, что имеет место тогда, когда каждая из матриц A_1 и A_2 перестановочна по умножению с каждой из матриц B_1 и B_2 . То есть для коммутативности этих блочных $(2^n \times 2^n)$ -матриц достаточно коммутативности составляющих их матриц-блоков вдвое меньшего порядка $(2^{n-1} \times 2^{n-1})$. Другими словами, коммутативность этих $(2^{n-1} \times 2^{n-1})$ -матриц влечет за собой коммутативность $(2^n \times 2^n)$ -матриц. Но $(2^1 \times 2^1)$ -матрицы коммутативны, поскольку являются двойными числами. Значит, $(2^2 \times 2^2)$ -матрицы также коммутативны, как и все последующие $(2^n \times 2^n)$ -матрицы, представляющие гиперболические матрионы.

Ассоциативность по умножению $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ для гиперболических и круговых матрионов A, B, C доказывается аналогично.

О применимости блочно-фрактального алгоритма к другим видам чисел

Значение использованного блочно-фрактального алгоритма конструирования обобщенных числовых систем вовсе не исчерпывается названными матрионами. Он применим для обобщения любых многомерных чисел, представимых в матричной форме. В такой матрице по данному алгоритму каждый элемент рассматривается как блочная матрица исходного типа для автоматического увеличения порядка матрицы. Этим алгоритмом мы получаем многомерные обобщения дуальных чисел, кватернионов Гамильтона и др.

Например, полученное с помощью такого алгоритма четырехмерное обобщение дуальных чисел $x_1 \cdot \mathbf{1} + x_2 \cdot \mathbf{e}_1$, где $e_1^2 = 0$, имеет следующий вид (слева) и таблицу умножения его базисных единиц (справа):

$$\begin{vmatrix} x_0 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} y_0 & 0 & 0 & 0 \\ y_2 & y_1 & 0 & 0 \\ y_3 & 0 & y_1 & 0 \\ y_4 & y_3 & y_2 & y_1 \end{vmatrix}$$

	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	0	e_3	0
e_2	e_2	e_3	0	0
e_3	e_3	0	0	0

Обратимся теперь к изложению некоторых материалов о связи 2^n -мерных матрионов с иерархическими системами генетического кодирования. При этом дополнительно проиллюстрируем содержательность матричного подхода в генетике лишь несколькими примерами из представительного числа полученных результатов.

4 О генетическом коде

Молекулярная генетика открыла, что все живые организмы имеют одни и те же основы генетического кодирования и в этом отношении неотличимы друг от друга. Другими словами, в науке произошло великое объединение живых организмов. С этими основами связана удивительная помехоустойчивость передачи наследственной информации от поколения к поколению.

Базис языка наследственной информации поразительно прост. Для записи генетических посланий дискретного характера, кодирующих белки, в рибонуклеиновых кислотах любых организмов используется "алфавит", состоящий всего из четырех "букв" или азотистых оснований (рис. 1): аденин (А), цитозин (С), гуанин (G), урацил (U) (в ДНК вместо урацила используется родственный ему тимин (Т)). Именно строчная последовательность этих четырех букв (или моноплетов) на нитях нуклеиновых кислот содержит генетическую информацию для синтеза белков. Как говорят, энциклопедия жизни написана четырьмя буквами. Эти буквы образуют между собой комплементарные пары С-G и А-U, поскольку в молекулах наследственности стоят напротив друг друга и связаны соответственно тремя и двумя водородными связями (к этим числам 3 и 2 мы вернемся ниже).

Данный набор четырех букв обычно считается элементарным алфавитом генетического кода. Генетическая информация, передаваемая молекулами наследственности (ДНК и РНК), определяет первичное строение белков живого организма. Каждый кодируемый белок представляет собой цепь из 20 видов аминокислот. Последовательность аминокислот в белковой цепи определяется последовательностью триплетов (трехбуквенных "слов"). Триплетом или кодоном называется блок из трех соседних азотистых оснований, расположенных вдоль нити ДНК (или РНК). Триплеты, стоящие напротив

друг друга на двух нитях ДНК, называются кодоном и антикодоном. Из четырехбуквенного алфавита можно составить всего $4^3 = 64$ вида триплетов. Каждый из них имеет кодовое значение, кодируя ту или иную из 20 аминокислот или знаки начала и остановки белкового синтеза. Генетический код называется вырожденным, поскольку 64 триплета кодируют всего 20 аминокислот, и каждая аминокислота может кодироваться разным количеством триплетов.

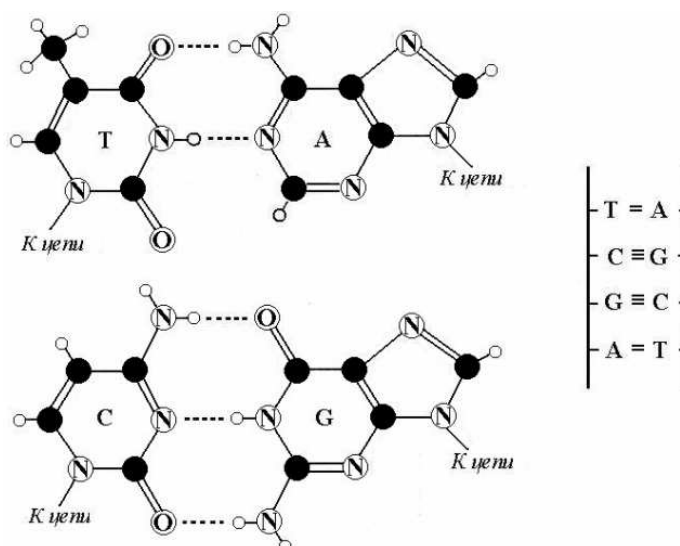


Рис. 8. Комплементарные пары четырех азотистых оснований в ДНК: А – Т (аденин и тимин), С – G (цитозин и гуанин). Пунктиром даны водородные связи 2 и 3 в этих парах. Черные кружки – атомы углерода, маленькие белые кружки – водорода, кружки с буквой N – азота, кружки с буквой O – кислорода

Современной науке не известны причины того, почему алфавит генетического языка именно четырехбуквенный (а не из тридцати букв, например); почему из миллиардов возможных химических соединений именно эти четыре азотистые основания выбраны в качестве элементов алфавита; почему генетически кодируются именно 20 аминокислот. И почему код наделен именно такой системой вырожденности, которая давно связывается в генетике с идеей его помехоустойчивости. Проводимые авторами исследования направлены на поиск адекватного подхода к этой проблематике и к пониманию генетической помехоустойчивости. Проблема наследуемой помехоустойчивости является общей для всех многоканальных взаимосвязанных систем информатики организма, который сам является информационной сущностью и живет для передачи наследственной информации от предков к потомкам. С генетическими молекулами связано много прикладных задач нанотехнологий и биотехнологий, например, по созданию компьютеров на ДНК [7]. Необходимо выявлять те особенности ансамблей генетических молекул, которые напоминают формализмы цифровой информатики, активно использующей математику матриц.

В силу дискретного характера генетического кода естественно исследовать его с позиций современной теории дискретных сигналов. Она, в частности, эффективно решает проблемы помехоустойчивости передачи цифровой информации за счет так называемых помехоустойчивых кодов, то есть кодов, способных к выявлению и исправлению ошибок. Важная особенность ситуации в современной микроэлектронной технике цифровой связи заключается в том, что даже при самом совершенном исполнении аппаратуры связи с наилучшими электрическими контактами и прочее существуют неустраняемые помехи для передачи информации, вызванные, например, тепловыми шумами. Бороться с этим глубинным фактором ненадежности информации удастся программными методами за

счет так называемых помехоустойчивых кодов, то есть кодов, способных к обнаружению и исправлению ошибок. Математика помехоустойчивых кодов применяет представление множества сигналов и кодов в виде матриц и их кронекеровских степеней. В том числе для обеспечения надежности передачи информации широко используется кронекеровское семейство матриц Адамара, представленное в выражении (8) слева, где (n) – кронекеровская степень.

$$H^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}^{(n)}; \quad P^{(n)} = \begin{vmatrix} C & A \\ U & G \end{vmatrix}^{(n)} \quad (8)$$

Опираясь на достижения теории цифровой связи, авторы по аналогии представляют систему четырех букв генетического алфавита в виде базовой матрицы P порядка (2×2) и исследуют семейство $P^{(n)} = [C \ A; U \ G]^{(n)}$ генетических матриц (кратко, геноматриц), возникающее при ее возведении в кронекеровскую степень (n) , как это показано в выражении (8) справа.

Системы генетического кода белков состоят из 4^n мультиплетов: алфавит – из 4^1 моноплетов, система триплетов – из 4^3 триплетов, белки одинаковой длины k кодируются набором из 4^{3k} мультиплетов. Данное семейство геноматриц $P^{(n)}$ при достаточно большом " n " унифицированным образом представляет всю систему кодовых мультиплетов от моноплетов до самых длинных мультиплетов, кодирующих самые длинные белки. В каждом из четырех квадрантов геноматрицы $P^{(n)}$ собраны все n -плеты, начинающиеся с одной из четырех букв C, A, U, G . Если не обращать внимания на эту первую букву в n -плетах квадранта, то легко видеть, что квадрант матрицы $P^{(n)}$ полностью воспроизводит матрицу $P^{(n-1)}$ предыдущего поколения (это обусловлено свойствами кронекеровского возведения в степень). Если процесс образования в этом семействе очередных геноматриц $P^{(n)}$ с ростом " n " условно назвать эволюционным порождением очередного поколения геноматриц, то геноматрица каждого нового поколения в силу описанной особенности содержит в себе в скрытом виде информацию о всех предыдущих поколениях (геноматрицы с "памятью поколений").

Выбранный природой набор четырех азотистых оснований A, C, G, U является носителем системы бинарно-оппозиционных признаков. Из четырех букв кода две буквы C и U являются пиримидинами (содержат одно кольцо в молекуле, как показано на Рис. 8), а две другие буквы A и G – пуринами (содержат два кольца). Поэтому можно на объективной основе ввести бинарную систему обозначений (первый бинарный субалфавит), в которой пиримидины C и U характеризуются символом 1 , а пурины A и G – символом 0 . По другой паре оппозиционных признаков (наличию или отсутствию свойства аминотируемости, или признакам кето-амино [8, с. 173]) – эквивалентными оказываются другие пары букв, что позволяет ввести другую бинарную систему обозначений (второй бинарный субалфавит): эквивалентные по наличию данного свойства буквы C и A обозначаются символом $\underline{1}$, а другая пара букв, лишенная этого свойства, – символом $\underline{0}$ (для отличия данных двух бинарных систем бинарные символы второй системы наклонены и подчеркнуты).

В матрицах на Рис. 9 указаны бинарные номера всех столбцов и строк. Эти номера образуются автоматически при чтении мультиплетов каждого столбца с точки зрения первого бинарного субалфавита, а мультиплетов каждой строки – с точки зрения второго бинарного субалфавита. Например, триплет CAU в первом субалфавите имеет бинарное побуквенное обозначение 101 (оно совпадает с бинарными обозначениями всех триплетов его столбца, а потому используется как номер данного столбца), а во втором субалфавите – бинарное обозначение $\underline{110}$ (оно совпадает с бинарными обозначениями всех триплетов его строки, а потому используется как ее номер).

$P =$		1	0
		<u>I</u>	<u>0</u>
		C	U
		A	G

$; P^{(2)} = P \otimes P =$

	11	10	01	00
<u>11</u>	CC 1111 15	CA 1110 14	AC 1101 13	AA 1100 12
<u>10</u>	CU 1011 11	CG 1010 10	AU 1001 9	AG 1000 8
<u>01</u>	UC 0111 7	UA 0110 6	GC 0101 5	GA 0100 4
<u>00</u>	UU 0011 3	UG 1110 2	GU 0001 1	GG 0000 0

$P^{(3)} =$

	111	110	101	100	011	010	001	000
<u>111</u>	CCC 111111 63	CCA 111110 62	CAC 111101 61	CAA 111100 60	ACC 111011 59	ACA 111010 58	AAC 111001 57	AAA 111000 56
<u>110</u>	CCU 110111 55	CCG 110110 54	CAU 110101 53	CAG 110100 52	ACU 110011 51	ACG 110010 50	AAU 110001 49	AAG 110000 48
<u>101</u>	CUC 101111 47	CUA 101110 46	CGC 101101 45	CGA 101100 44	AUC 101011 43	AUA 101010 42	AGC 101001 41	AGA 101000 40
<u>100</u>	CUU 100111 39	CUG 100110 38	CGU 100101 37	CGG 100100 36	AUU 100011 35	AUG 100010 34	AGU 100001 33	AGG 100000 32
<u>011</u>	UCC 011111 31	UCA 011110 30	UAC 011101 29	UAA 011100 28	GCC 011011 27	GCA 011010 26	GAC 011001 25	GAA 011000 24
<u>010</u>	UCU 010111 23	UCG 010110 22	UAU 010101 21	UAG 010100 20	GCU 010011 19	GCG 010010 18	GAU 010001 17	GAG 010000 16
<u>001</u>	UUC 001111 15	UUA 001110 14	UGC 001101 13	UGA 001100 12	GUC 001011 11	GUA 001010 10	GGC 001001 9	GGA 001000 8
<u>000</u>	UUU 000111 7	UUG 000110 6	UGU 000101 5	UGG 000100 4	GUU 000011 3	GUG 000010 2	GGU 000001 1	GGG 000000 0

Рис. 9. Начальные представители семейства геноматриц $P^{(n)}$ для случаев моноплетов, дуплетов и триплетов ($n = 1, 2, 3$). $\otimes$ – символ кронекеровского умножения

Тем самым, в матрицах $P^{(n)}$ все мультиплеты оказываются автоматически перенумерованными, сгруппированными в однородные по составу столбцы и строки и упорядоченно расположенными по объективным признакам генобуков. Эта упорядоченность выражается, в частности, в том, что, например, в геноматрице $P^{(3)}$ для 64 триплетов каждый триплет имеет индивидуальный номер, состоящий из объединения бинарных номеров его строки и столбца (например, триплет CAU имеет бинарный номер 110101, равный 53 в десятичной системе счисления). Вся система генов переводится таким образом на язык геометрии в пространствах сообщений по аналогии с теорией дискретных сигналов. При этом геноматрица отражает реальные взаимосвязи элементов в системе генетического кода. Так, каждая пара кодон-антикодон (и только такая пара) имеет сумму их номеров равную 63. Все это свидетельствует в пользу того, что матричный

подход на основе алфавитно-кронекевского семейства матриц адекватен структурным законам системы генетического кодирования.

Именно эта бинарная матрица на Рис. 9 (только без буквенных триплетов) в свое время поразила изобретателя первого компьютера (механического калькулятора) Лейбница. Лейбниц считал себя создателем двоичной системы счисления до тех пор, пока через христианских миссионеров не познакомился с этой бинарной таблицей 64 гексаграмм из древнекитайской "Книги Перемен" (I-Ching), написанной несколько тысяч лет назад и утверждавшейся древними китайцами в качестве всеобщего природного архетипа. Китайцы ничего не знали о генетическом коде, который оказывается структурированным в соответствии с их утверждениями. Лейбниц увидел в особенностях данной древней матрицы многие черты сходства с волновавшими его идеями универсального языка. "Лейбниц усмотрел в этом подобии ... свидетельство предустановленной гармонии и единства божьего промысла для всех времен и народов" [9, с. 12]. Таким образом, введенная нами естественная система нумерации триплетов и ячеек октетной таблицы известна уже несколько тысяч лет и вполне может называться древнекитайской системой. Матричный подход к генетическому коду, помимо фундаментальности объекта исследования и применяемой матричной математики, неожиданно выводит на исторические аналогии и проблему связи времен. Полученные на этом пути многочисленные результаты даны в работах [2–4, 10–13]. Упомянем также, что эта древнекитайская таблица 64 гексаграмм допускает содержательное рассмотрение с позиции гиперболических матрионов, то есть с позиции поличисел.

Подчеркнем, что имеется астрономическое число $64! \approx 10^{89}$ вариантов расположения 64 триплетов в октетной матрице. Современная физика оценивает время существования Вселенной в 10^{17} секунд. Получается, что если на рассмотрение каждого из этих вариантов затрачивать всего одну секунду, то за все время существования Вселенной мы успеем рассмотреть лишь ничтожную часть из этих 10^{89} вариантов. Заведомо ясно, что случайная расстановка 20 аминокислот и их подсемейств триплетов в октетных матрицах этого необозримого множества вариантов почти никогда не даст никакой симметрии в их расположении.

Однако природа по какой-то причине выбрала такой вариант вырожденности генетического кода, который соответствует симметрическому, а значит закономерному заполнению данной октетной матрицы. Отметим, что скрытые отношения симметрии между этими двумя подмножествами по 32 триплета выявлены именно в рассматриваемом нами эксклюзивном – алфавитно-кронекевском – варианте расположения 64 триплетов в октетной матрице, который является одним из 10^{89} вариантов их расположения. Все описываемые ниже результаты по матричной генетике получены в связи именно с этим найденным особым вариантом расположения триплетов, а также с несколькими его модификациями, определяемыми перестановками позиций и букв в триплетах. Эта совокупность взаимосвязанных симметрических геноматриц составляет ничтожную часть от общего количества 10^{89} матриц с различным расположением триплетов.

Симметрии вырожденности генетического кода в его матричном представлении

Построенная матрица $P^{(3)}$ для 64 триплетов структурирована так, что каждый из ее 16 субквадрантов (2×2) содержит полное семейство NN-триплетов, т. е. набор всех тех четырех триплетов, которые начинаются с двух одинаковых первых букв. Отражает ли эта матрица и сгруппированные в ней семейства NN-триплетов симметрическим образом структуру вырожденности генетического кода? Исходно нет никаких оснований надеяться на то, что эта формально построенная матрица отражает симметрии

вырожденности кода (при ее построении аминокислоты даже не упоминались). Если же вдруг окажется, что специфика вырожденности множества 20 аминокислот вписывается в нее упорядоченным, симметрическим образом, то этот феноменологический факт будет сильным аргументом в пользу адекватности матричного представления системы генетического кодирования.

Оказывается, что именно закономерное, симметрическое расположение видов аминокислот с различной кодовой вырожденностью реализуется в данной матрице $P^{(3)}$ [2–4]. Обратимся к данным о вырожденности генетического кода и расположению 20 аминокислот в этой геноматрице 64 триплетов в случае генетического кода митохондрий позвоночных, который в генетике называется наиболее древним и "идеальным" [14]. Вырожденность этого кода оказывается связанной именно с 16 семействами NN-триплетов, каждое из которых занимает один из 16 субквадрантов (2×2) геноматрицы $P^{(3)}$ (Рис. 2.1). Множество 16 таких семейств состоит из двух равных подмножеств по 8 семейств в каждом по свойствам вырожденности кода. В первый набор входят 8 семейств "двухпозиционных" NN-триплетов, кодовое значение которых не зависит от буквы на третьей позиции в них, а потому все четыре ячейки соответствующих субквадрантов заняты одной и той же аминокислотой. Эти ячейки обозначены на рисунке черным цветом (заштрихованы). Во второй набор входят 8 семейств с "трехпозиционными" NN-триплетами, кодовое значение которых зависит от буквы на третьей позиции в них, а потому обозначенные белым цветом четыре ячейки каждого из таких субквадрантов неодинаковы по аминокислотам и стоп-сигналам в них. Такие геноматрицы с черно-белой мозаикой, отражающей характер вырожденности генетического кода, будем называть геноматрицами вырожденности кода. Наряду с триплетами в них представлены 20 кодируемых ими аминокислот с их стандартными сокращенными названиями: Ala, Arg, Asn, Asp, Cys, Gln, Glu, Gly, His, Ile, Leu, Lys, Met, Phe, Pro, Ser, Thr, Trp, Tyr, Val.

CCC Pro	CCA Pro	CAC His	CAA Gln	ACC Thr	ACA Thr	AAC Asn	AAA Lys
CCU Pro	CCG Pro	CAU His	CAG Gln	ACU Thr	ACG Thr	AAU Asn	AAG Lys
CUC Leu	CUA Leu	CGC Arg	CGA Arg	AUC Ile	AUA Met	AGC Ser	AGA Stop
CUU Leu	CUG Leu	CGU Arg	CGG Arg	AUU Ile	AUG Met	AGU Ser	AGG Stop
UCC Ser	UCA Ser	UAC Tyr	UAA Stop	GCC Ala	GCA Ala	GAC Asp	GAA Glu
UCU Ser	UCG Ser	UAU Tyr	UAG Stop	GCU Ala	GCG Ala	GAU Asp	GAG Glu
UUC Phe	UUA Leu	UGC Cys	UGA Trp	GUC Val	GUA Val	GGC Gly	GGA Gly
UUU Phe	UUG Leu	UGU Cys	UGG Trp	GUU Val	GUG Val	GGU Gly	GGG Gly

Рис. 10. Геноматрица $P^{(3)}$ вырожденности генетического кода митохондрий позвоночных. В каждой ячейке указан триплет и кодируемая им аминокислота или стоп-сигнал (Stop) белкового синтеза

Геноматрица $P^{(3)}$ вырожденности кода на Рис. 10 оказывается симметрологической мозаикой из черных и белых ячеек:

1) Левая и правая половины матрицы зеркально-антисимметричны по мозаике (ячейке одного цвета в левой половине матрицы соответствует зеркально расположенная ячейка противоположного цвета в ее правой половине);

2) Пары квадрантов, расположенные вдоль любой диагонали, тождественны друг другу по мозаике;

3) Мозаика всех строк носит меандровый характер и соответствует функциям Радемахера (описывается функциями, нечетными относительно средней линии).

4) Четыре пары соседних строк 1 – 2, 3 – 4, 5 – 6, 7 – 8 эквивалентны между собой по расположению в них идентичных аминокислот.

5) Если свернуть рисунок этой матрицы в цилиндр, срастив ее верхний и нижний края друг с другом, то в данной мозаике проявится симметрия циклического сдвига. Нагляднее всего ее можно продемонстрировать, замостив плоскость этой мозаичной матрицей как модульной единицей (Рис. 11, слева).

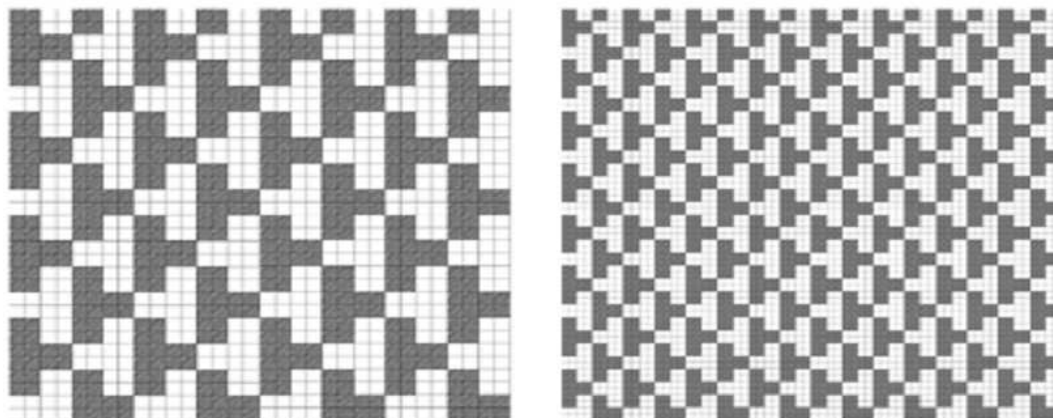


Рис. 11. Слева: замощение плоскости мозаикой геноматрицы $P^{(3)}$ вырожденности кода (из Рис. 10). Справа: замощение плоскости мозаикой геноматрицы из Рис. 12, полученной из $P^{(3)}$ циклическим сдвигом позиций в триплетах на один шаг влево

В данном замощении проявляется наличие двух мотивных единиц черного и белого цвета (по типу инь-ян), имеющих одинаковую форму "летающей совы" (название условное), но различающихся цветом и противоположной ориентацией. Этот мозаичный орнамент связан с матрицами Адамара [15, 16].

Мозаичная геноматрица $P^{(3)}$ обладает многими интересными свойствами в связи с особенностями генетического кода и теорией дискретных сигналов. Например, циклически сдвинем во всех триплетах буквы на одну позицию влево (при этом триплет CAG заменяется триплетом AGC и т. д.). В результате получится матрица с иным распределением триплетов и аминокислот в ней (Рис. 12).

CCC Pro	CAC His	ACC Thr	AAC Asn	CCA Pro	CAA Gln	ACA Thr	AAA Lys
CUC Leu	CGC Arg	AUC Ile	AGC Ser	CUA Leu	CGA Arg	AUA Met	AGA Stop
UCC Ser	UAC Tyr	GCC Ala	GAC Asp	UCA Ser	UAA Stop	GCA Ala	GAA Glu
UUC Phe	UGC Cys	GUC Val	GGC Gly	UUA Leu	UGA Trp	GUA Val	GGA Gly
CCU Pro	CAU His	ACU Thr	AAU Asn	CCG Pro	CAG Gln	ACG Thr	AAG Lys
CUU Leu	CGU Arg	AUU Ile	AGU Ser	CUG Leu	CGG Arg	AUG Met	AGG Stop
UCU Ser	UAU Tyr	GCU Ala	GAU Asp	UCG Ser	UAG Stop	GCG Ala	GAG Glu
UUU Phe	UGU Cys	GUU Val	GGU Gly	UUG Leu	UGG Trp	GUG Val	GGG Gly

Рис. 12. Геноматрица, полученная из геноматрицы $P^{(3)}$ (Рис. 11) циклическим изменением порядка (1,2,3) в триплетах на (2,3,1)

Но в этой циклопорожденной геноматрице симметричность не уменьшилась и оказалась связанной с симметричностью исходной геноматрицы:

1) все ее квадранты одинаковы не только по черно-белой мозаике трех- и двухпозиционных триплетов, т. е. по мозаике вырожденности кода, но и по аминокислотам, кодируемым черными триплетами;

2) верхняя и нижняя половины матрицы, наряду с тождественностью их мозаики, идентичны по расстановке всех аминокислот и стоп-сигналов;

3) все строки (8 × 8)-матрицы и ее (4 × 4)-квадрантов имеют меандровый характер мозаики, который соответствует нечетным функциям относительно их середины (зеркальная антисимметрия).

4) сохранилась попарная идентичность строк по составу и порядку аминокислот, только пары таких строк стали иными: 1 – 5, 2 – 6, 3 – 7, 4 – 8.

Интересно также то, что в этой циклопорожденной геноматрице на Рис. 12 в черно-белой мозаике каждого ее (4×4) -квадранта воспроизводится мозаика исходной (8×8) -матрицы. Другими словами, имеет место фрактальное воспроизведение мозаики с масштабированием по площади в четыре раза. Эта фрактальность соответствия мозаик у данных геноматриц особенно наглядно видна при сравнении замощений ими плоскости (Рис. 11). Действительно, каждая из больших "летающих сов" на Рис. 11 слева распадается на четыре малых "летающих сов" на Рис. 11 справа, что учетверяет количество "летающих сов".

Это очень напоминает тетра-размножение половых клеток в общебиологическом акте мейоза, при котором исходная половая клетка делится на четыре новых половых клетки. Такое тетра-деление половых клеток, обеспечивающее передачу генетической информации, почему-то реализуется в живой природе для всех живых организмов, что отмечал еще Э. Шредингер в своей книге "Что такое жизнь с точки зрения физики?". Ниже мы вернемся к этому в связи с принципом переупаковки молекулярных элементов как гипотетическим принципом мейоза.

Но тетра-феномены в рассматриваемых черно-белых геноматрицах не исчерпываются этим фрактальным тетра-масштабированием. Они сопровождаются свойством тетра-размножения бинарных матриц подобного типа, которое опишем.

Всего возможно шесть вариантов перестановок позиций 1, 2, 3 в триплетах: 123, 231, 312, 132, 213, 321. Этим шести вариантам соответствуют шесть геноматриц $B_{123}, B_{231}, B_{312}, B_{132}, B_{213}, B_{321}$ с существенно различными, но также симметрическими мозаиками вырожденности кода. Рис. 13 представляет бинарные мозаики всех этих шести геноматриц.

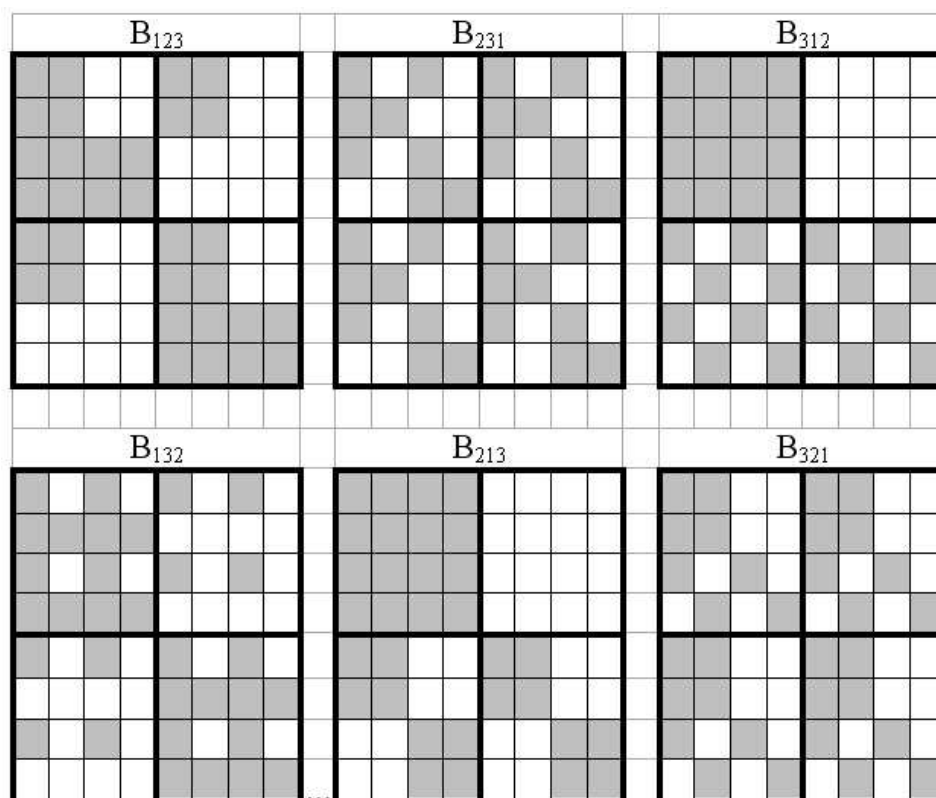


Рис. 13. Бинарные числовые геноматрицы, в которых черные ячейки соответствуют элементам "+1", а белые – "-1"

Если в ячейках этих шести геноматриц заменить черный цвет элементом $+1$, а белый цвет – элементом -1 , то оказывается, что все эти шесть бинарных геноматриц обладают неожиданным общим свойством тетра-размножения. Речь идет о том, что при перемножении каждой из этих матриц с самой собой порождается та же самая бинарная матрица, но в учетверенном количестве, то есть с множителем 4. Соответственно имеют место формулы (9):

$$\begin{aligned}(B_{123})^K &= 4^{K-1} \cdot B_{123}; & (B_{231})^K &= 4^{K-1} \cdot B_{231}; \\ (B_{312})^K &= 4^{K-1} \cdot B_{312}; & (B_{132})^K &= 4^{K-1} \cdot B_{132}; \\ (B_{213})^K &= 4^{K-1} \cdot B_{213}; & (B_{321})^K &= 4^{K-1} \cdot B_{321}\end{aligned}\tag{9}$$

Это свойство является вовсе не тривиальным, что показывает сравнение с произвольной октетной матрицей, в которой 32 элемента $+1$ и 32 элемента -1 расставлены случайным образом. Возведение такой матрицы в квадрат практически всегда приводит к матрице, в которой не только не сохраняется расстановка знаков плюс и минус во всех ячейках, но и утрачивается бинарный характер из-за появления в ней многих разных чисел в качестве ее элементов.

Данное свойство тетра-размножения у мозаичной матрицы вырожденности кода, видимо, отражает причины того, почему природой избран именно такой характер вырожденности генетического кода, а не какой-то другой. Например, вполне можно представить себе гипотетический характер его вырожденности, при котором все 32 черные ячейки матрицы 64 триплетов занимали бы всю ее левую половину, а белые – всю ее правую половину. Однако, соответствующая более простая бинарная матрица, как и ее триплето-перестановочные аналоги, лишена данного свойства тетра-размножения. Более подробное рассмотрение ансамбля геноматриц $B_{123}, B_{231}, B_{312}, B_{132}, B_{132}, B_{321}$ обнаруживает еще ряд его содержательных свойств, например, при попарном перемножении данных матриц, но не будем задерживаться на этом.

Можно добавить, что на другом краю сферы биологических феноменов – при изучении архетипов человеческого сознания – мы вновь сталкиваемся с феноменом тетра-членения. Уже упоминавшийся создатель аналитической психологии К. Юнг обнаружил существование аналогичного универсального архетипа: "Четверичность (также кватерность). Универсальный архетип, являющий собой логическую предпосылку всякого целостного суждения, часто имеет структуру $3+1$, в которой один из элементов занимает особое положение, или обладает несхожей с остальными природой. Именно "четвертый", дополняя три других, делает их чем-то единым, символизирующим универсум" (цитируется по [17, с. 202]). И в связи с этим: "Мандала – изображение психического процесса, воссоздание нового центра личности. Символически выражается при помощи круга, симметричного расположения некоего четырехкратного количества. В ламаизме и тантра-йоге является инструментом созерцания (янтра), местом рождения и пребывания божества" [там же, с. 201].

Выявление содержательной симметрологической группы из шести триплето-перестановочных геноматриц интересно еще и потому, что вызывает эвристические ассоциации с теорией дискретных сигналов и кодирования, где подобные перестановки давно известны и играют полезную роль.

Принцип переупаковки молекулярных элементов

Занимаясь матричной математикой в молекулярной генетике, мы выходим на биологически значимые вопросы. Действительно, мы неожиданно обнаружили, что в системе генетического кода простой алгоритмической перестановки элементов в триплетах на основе циклического сдвига достаточно для получения новых содержательных геноматриц

с тетра-размножением мозаик вырожденности кода и со свойствами тетра-размножения их бинарных матричных аналогов (Рис. 10–13). Значит, видимо, и в биологических процессах простой переупаковки молекулярных элементов в объекте может быть достаточно для получения в итоге четверки новых аналогичных объектов, то есть для тетра-размножения.

Это напомнило нам о тетра-размножении половых клеток в загадочном акте мейоза. Современная наука не располагает общепринятым пониманием механизмов самоорганизации, обеспечивающих этот удивительный биологический акт самовоспроизводства, хотя предположений о его вибрационной или иной природе различными авторами высказывалось немало. Как известно, циклические процессы пронизывают организацию живого вещества на всех уровнях. Пошаговые циклически организованные процессы типа считывания информации от элемента к элементу вдоль цепи очень характерны для молекулярной генетики, например, для считывания информации с ДНК.

По совокупности этих и других фактов мы выдвигаем гипотезу о том, что в основе акта мейозного тетра-размножения лежит механизм алгоритмической переупаковки молекулярных элементов половых клеток с участием алгоритмов циклических сдвигов. По нашим представлениям, переупаковка биологических молекул и их ансамблей с участием циклических и диадических сдвигов является важным механизмом и принципом биологической самоорганизации и саморазвития на разных уровнях. Значение этого принципа молекулярной переупаковки будет со временем раскрываться все более и более.

Кроме того, циклические коды, основанные на циклических сдвигах, играют важную роль в теории дискретных сигналов и помехоустойчивых кодах. Циклическим кодом называется линейный код, который вместе с любым своим вектором содержит также и его циклический сдвиг. Сформулированная гипотеза, предполагающая то, что организм наделен алгоритмами циклических сдвигов и использует их при молекулярных переупаковках, одновременно затрагивает вопрос о молекулярной экономии при кодировании генетической информации. Действительно, подобные алгоритмы позволяют организму не содержать для каждого кодового слова отдельный молекулярный объект, а за счет повторяющейся циклической переупаковки одной исходной молекулы обеспечивать целый набор кодовых слов при резкой экономии молекулярного материала. Тем самым, принцип молекулярной переупаковки распространяется нами не только на мейоз и ему подобные акты конструирования новых биологических тел, но и на эффективную передачу информации кодовыми словами в условиях минимизации необходимого количества молекул.

Эволюция генетического кода и матричная генетика

Алфавитно-кронекеровская геноматрица на Рис. 10 позволила установить неизвестные ранее правила эволюции генетического кода [3, 4, 11, 12]. Кратко расскажем об этом.

Отметим по матрице на Рис. 10 следующую особенность рассматриваемого древнейшего кода митохондрий позвоночных. В ней 8 семейств черных (двухпозиционных) триплетов кодируют 8 видов высоковырожденных аминокислот, каждая из которых кодируется четырьмя и более триплетами: Ala, Arg, Gly, Leu, Pro, Ser, Thr, Val. В геноматрице $P^{(3)}$ эта группа представлена симметричным образом в том смысле, что четыре ее аминокислоты Arg, Leu, Pro, Ser расположены в левой половине таблицы, а четыре других – Ala, Gly, Thr, Val – в правой половине.

Оставшиеся 12 видов аминокислот кодируются белыми (трехпозиционными) триплетами и являются низковырожденными, поскольку каждая из них кодируется тремя и

менее триплетами: Asn, Asp, Cys, Gln, Glu, His, Ile, Lys, Met, Phe, Trp, Tyr. Эта группа также расположена в $P^{(3)}$ симметричным образом: шесть ее аминокислот – Cys, Gln, His, Tyr, Phe, Trp – расположены в левой половине таблицы, а шесть других – Asn, Lys, Ile, Met, Asp, Glu – в правой половине.

Тем самым, в данном коде множество 20 аминокислот состоит из двух канонических подмножеств: 8 высоковырожденных и 12 низковырожденных аминокислот.

Начиная с уровня кодового соответствия 64 триплетов 20 аминокислотам, наблюдаются эволюционные изменения в генетическом коде. Сегодня известно 17 вариантов (диалектов) генетического кода, отличающихся по своим числам вырожденности, т. е. по количеству триплетов, кодирующих отдельные аминокислоты (подробности даны на сайте <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/Taxonomy/Utils/wprintgc.cgi>). Например, аминокислота Thr в одном коде кодируется четырьмя триплетами, т. е. имеет число вырожденности 4, а в другом коде она почему-то кодируется 8 триплетами и т. д. Рис. 14 представляет результат анализа чисел вырожденности у всех 17 кодов.

Номер кода	Распределение 20 АК по числам вырожденности от 1 до 8								Σ АК с ЧВ от 1 до 3	Σ АК с ЧВ от 4 до 8
	1	2	3	4	5	6	7	8		
1		12		6		2			<u>12</u>	<u>8</u>
2	2	9	1	5		3			<u>12</u>	<u>8</u>
3	1	10	1	5		3			<u>12</u>	<u>8</u>
4		12		6		1		1	<u>12</u>	<u>8</u>
5	2	8	2	6		1		1	<u>12</u>	<u>8</u>
6	2	8	2	5		3			<u>12</u>	<u>8</u>
7	2	9	1	5		3			<u>12</u>	<u>8</u>
8		12		5		3			<u>12</u>	<u>8</u>
9	2	7	3	6		1		1	<u>12</u>	<u>8</u>
10	2	8	2	5		3			<u>12</u>	<u>8</u>
11	2	9	1	5		2	1		<u>12</u>	<u>8</u>
12	1	10	1	6		1		1	<u>12</u>	<u>8</u>
13	2	9	1	5	1	1	1		<u>12</u>	<u>8</u>
14	2	9	1	5	1	2			<u>12</u>	<u>8</u>
15	2	9	1	5	1	1	1		<u>12</u>	<u>8</u>
16		13		5		1		1	<u>13</u>	<u>7</u>
17	2	8	1	6		3			<u>11</u>	<u>9</u>

Рис. 14. Феномен разделения в генетических кодах множества 20 аминокислот на два типовых подмножества – высоковырожденных и низковырожденных – аминокислот. В двух правых столбцах показаны количества Σ низковырожденных аминокислот (с числом вырожденности от 1 до 3) и высоковырожденных аминокислот (с числом вырожденности от 4 до 8). АК означает аминокислоты, ЧВ – число вырожденности аминокислоты

Номера в таблице на Рис. 14 соответствуют следующим кодам: 1) The Vertebrate Mitochondrial Code; 2) The Standard Code; 3) The Mold, Protozoan, and Coelenterate Mitochondrial Code and the Mycoplasma /Spiroplasma Code; 4) The Invertebrate Mitochondrial Code; 5) The Echinoderm and Flatworm Mitochondrial Code; 6) The Euplotid Nuclear Code; 7) The Bacterial and Plant Plastid Code; 8) The Ascidian Mitochondrial Code; 9) The Alternative Flatworm Mitochondrial Code; 10) Blepharisma Nuclear Code; 11) Chlorophycean Mitochondrial Code; 12) Trematode Mitochondrial Code;

13) Scenedesmus obliquus mitochondrial Code; 14) Thraustochytrium Mitochondrial Code; 15) The Alternative Yeast Nuclear Code; 16) The Yeast Mitochondrial Code; 17) The Ciliate, Dasycladacean and Hexamita Nuclear Code.

Первое знакомство с набором чисел вырожденности аминокислот в 17 известных кодах производит впечатление нерегулярности этого набора, отсутствия в нем содержательной закономерности. Однако, это впечатление исчезает, если только предпринять, как это сделано на Рис. 14, разделение всех 20 аминокислот на две типовые категории аминокислот – низковырожденных (с числами вырожденности от 1 до 3) и высоковырожденных (с числами вырожденности от 4 до 8). Отметим, что с разделением 20 аминокислот на две категории из 12 и 8 аминокислот мы уже встречались в связи с черно-белой мозаикой геноматрицы $P^{(3)}$ на Рис. 10, которая и подсказала возможность такого группирования во множестве всех 17 кодов. Другие варианты группирования аминокислот по их числам вырожденности не выявляют скрытых закономерностей

Этот сравнительный анализ 17 генетических кодов позволил сформулировать три феноменологических правила (более подробно они представлены в работах [3, 4, 11, 12]).

Правило № 1: в генетических кодах множество 20 аминокислот содержит два оппозиционных подмножества: одно – из 12 низковырожденных аминокислот (с числами вырожденности от 1 до 3), и второе – из 8 высоковырожденных аминокислот (с числами вырожденности от 4 до 8).

Это правило выполняется, видимо, на 100% для ауотрофных организмов, которые продуцируют живое вещество, добывая углерод для своего тела благодаря механизмам фотосинтеза. Для гетеротрофных организмов, которые питаются другими организмами, существует малое исключение из этого правила: два кода из семнадцати имеют соотношение количества низковырожденных и высоковырожденных аминокислот, равное 11:9 и 13:7. Эти нестандартные отношения – минимально возможные отклонения от канонического отношения 12:8 (для чисел, дающих в сумме 20); они окружают его с обеих сторон на числовой оси, подчеркивая его центральную роль.

Правило № 2: если какой-то триплет кодирует разные аминокислоты в разных генетических кодах, то все эти аминокислоты относятся к одному и тому же каноническому набору аминокислот (высокой или низкой вырожденности). Другими словами, в ходе биологической эволюции генетических кодов триплетам, кодирующим аминокислоты из одного канонического набора вырожденности, практически запрещено переходить в группу триплетов, кодирующих аминокислоты другого канонического набора.

Единственным исключением из этого правила является триплет UAG, который в разных кодах может кодировать аминокислоты Leu или Gln, относящиеся к разным категориям. В этом Правиле № 2 не фигурируют стоп-кодона, а потому оно не относится к тем эволюционным случаям, когда триплеты, кодировавшие в коде на Рис. 10 стоп-кодона (или аминокислоты), начинают кодировать аминокислоты (или стоп-кодона). Оказывается, что эволюция генетических кодов в отношении стоп-кодонов подчиняется отдельному поличисловому правилу №3, связанному с гиперболическими матрионами.

Правило №3: все стоп-кодона во всех 17 кодах расположены в геноматрице 64 триплетов только в тех ячейках, которые в матрице гиперболического октоматриона (Рис. 5) заняты координатами x_4, x_5, x_6, x_7 , дополняющими тетрамастрион до октоматриона. Другими словами, функция стоп-кодона оказывается функцией октоматриона, не представленной в координатах тетрамастриона.

Описанные эволюционные факты существования двух категорий аминокислот, отличающихся своей вырожденностью и почти полной обособленностью на всем множестве 17 генетических кодов по наборам кодирующих их триплетов, свидетельствуют в пользу следующего. В природе представлены две самостоятельные ветви эволюции генетиче-

ского кода у миллионов видов живых организмов: одна – для канонического набора высоковырожденных аминокислот, а вторая – для канонического набора низковырожденных аминокислот. Эти две ветви эволюции внутри единой кодовой системы можно образно сравнить, например, с параллельной эволюцией женского и мужского организмов в рамках одного биологического вида, или с эволюцией гласных и согласных звуков в языке.

Одновременно обнаруживается, что вместо единого множества 20 аминокислот природа реализует объединение двух весьма разных подмножеств из 8 и 12 аминокислот. Тем самым, матричная генетика выявляет существование внутренней структуры у множества 20 аминокислот. Отметим еще две математические особенности природной системы чисел вырожденности у аминокислот:

- 1) наименьшим общим делимым чисел 8 и 12 является число 24;
- 2) основные числа вырожденности аминокислот во всех кодах – 1, 2, 3, 4, 6, 8 – являются делителями числа 24 (в четырех кодах есть по одной аминокислоте, у которой число вырожденности равно 5 или 7; встречаемость каждого из этих экстраординарных чисел вырожденности в 17 кодах составляет всего 0,88 %).

В связи с этим число 24 может рассматриваться как скрытая константа согласования чисел вырожденности в генетических кодах. Число 24 давно известно в биологии в связи с хрономедициной, имеющей тысячелетнюю историю и говорящей о том, что в течение суток системы организма претерпевают закономерные смены физиологической активности и пассивности в рамках определенных интервалов времени, связанных с делением суток на 24 равные части. Положения восточной хрономедицины, опирающиеся на представление о делении суточного цикла "день-ночь" поступления солнечной энергии на поверхность земли на 24 равные части, являются составной частью акупунктуры, тибетской диагностики по пульсу, учений об оптимальном времени фармакологических и терапевтических воздействий на организм и пр. В хронобиологии число 24 представляет собой не произвольное членение суток на части, а феноменологическое сопряжение длительности физиологических циклов с суточным циклом и его равными долями. Данные представления отражены в системе древнекитайской "Книги перемен", считающейся основой этих восточных медико-биологических учений и практик.

Механизмы фотосинтеза, посредством которых за счет потребления солнечной энергии производится само первичное живое вещество автотрофных организмов, связывают это биологическое производство с суточными циклами поступления животворной солнечной энергии к организмам. Выявление скрытой константы 24 в описанных особенностях эволюции генетических кодов позволило выдвинуть следующую рабочую хронобиологическую гипотезу [3, 4, 11, 12]: структуры генетического кода имеют через механизмы фотосинтеза (выступающих в роли первичных механизмов) связь с суточными 24-часовыми циклами поступления солнечной энергии на поверхность земли. С этой точки зрения древняя привязка функционирования белковых систем организма к фазам суток, признаваемая современной западной медициной, имеет предшественников в аналогичных привязках на уровне генетического кода. И секреты структур генетических кодов надо искать с учетом особенностей биологического феномена фотосинтеза, который до сих пор не воспроизводим в современных лабораториях. Именно благодаря фотосинтезу продуцируется исходное живое вещество, существующее в циклических формах и подлежащее после своего производства наследственному кодированию в адекватных циклических формах. Одним из аргументов в пользу хронобиологической зависимости (или природы) структур генетического кода является совпадение матричных структур генетического кода с матрицами "Книги перемен", на которых базируется восточная хрономедицина.

5 Гиперболические матрионы, числовые геноматрицы и золотое сечение

В предыдущих разделах были приведены некоторые из примеров плодотворности подхода на основе кронекеровского семейства матриц к системам генетического кода. Важной отличительной особенностью кронекеровского произведения является то, что собственные значения кронекеровского произведения $A \otimes B$ матриц A и B , имеющих собственные значения α_i и β_k , равны произведениям $\alpha_i \cdot \beta_k$ этих собственных значений. Через это свойство само понятие кронекеровского произведения матриц может быть введено в математику [18]. Коль скоро собственные значения столь важны для темы кронекеровских произведений, то естественно обратиться к изучению числовых геноматриц, которые в отличие от символьных матриц имеют собственные числа.

Кроме того, в теории цифровых сигналов сигналы представляются последовательностью числовых значений их амплитуды в точках отсчета. При этом данная теория строится на представлении дискретных сигналов в виде векторов многомерных пространств: значение сигнала на каждом такте трактуется как значение одной из координат многомерного пространства сигналов. Теория дискретных сигналов оказывается во многом наукой о геометриях многомерных пространств. Размерность такого пространства равна количеству моментов отсчета у сигнала. Для этих многомерных векторных пространств вводятся метрические понятия и вообще все необходимое для тех или иных задач обеспечения надежности, скорости, экономичности при передаче сигнальной информации. Например, важные для информатики понятия энергии и мощности дискретного сигнала оказываются в многомерной геометрии пространства сигналов не чем иным, как квадратом длины многомерного вектора-сигнала и квадратом длины вектора-сигнала, деленным на размерность пространства. Различные передаваемые и принимаемые сигналы и их ансамбли сравниваются в цифровых технологиях как геометрические объекты таких метрических многомерных пространств. На этом построены методы и алгоритмы распознавания сигналов и образов, выявления и исправления информационных ошибок, искусственного интеллекта и обучения роботов, и пр. Если мы хотим использовать разнообразие методов теории сигналов в анализе системы генетического кодирования, то нам надо научиться переходить от символьных геноматриц и секвенций к их числовым аналогам.

Используемый авторами метод обеспечения такого перехода заключается в замене буквенных символов А, С, G, U(T) азотистых оснований теми или иными количественными параметрами этих молекулярных букв, которые определяют их физико-химическую роль. Например, в замене этих букв числами их атомов, водородных связей и пр. При этом символьные геноматрицы и последовательности мультиплетов трансформируются в соответствующие числовые геноматрицы и последовательности.

В качестве конкретного примера рассмотрим матрицы водородных связей азотистых оснований кода. Комплементарные водородные связи букв кода давно подозреваются на особую информационную значимость. Речь идет о двух и трех водородных связях (по которым $C = G = 3, A = U = 2$), соединяющих комплементарные пары азотистых оснований в молекулах наследственности (Рис. 8). Заменяем каждый полиплет во всех матрицах $P^{(n)}$ (Рис. 9) произведением чисел водородных связей его азотистых оснований. При этом, например, триплет CGA в октетной матрице $P^{(3)}$ заменяется на произведение $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$. В результате получаем мультипликативные числовые невырожденные матрицы $P_{MULT}^{(n)}$ (Рис. 15).

$$P_{mult}^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad P_{mult}^{(2)} = \begin{vmatrix} 9 & 6 & 6 & 4 \\ 6 & 9 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 9 \end{vmatrix}; \quad P_{mult}^{(3)} = \begin{vmatrix} 27 & 18 & 18 & 12 & 18 & 12 & 12 & 8 \\ 18 & 27 & 12 & 18 & 12 & 18 & 8 & 12 \\ 18 & 12 & 27 & 18 & 12 & 8 & 18 & 27 \\ 12 & 18 & 18 & 27 & 8 & 12 & 12 & 18 \\ 18 & 12 & 12 & 8 & 27 & 18 & 18 & 12 \\ 12 & 18 & 8 & 12 & 18 & 12 & 27 & 18 \\ 12 & 8 & 18 & 12 & 18 & 12 & 27 & 18 \\ 8 & 12 & 12 & 18 & 12 & 18 & 18 & 27 \end{vmatrix}$$

Рис. 15. Начало семейства квинтовых мультипликативных геноматриц $P_{MULT}^{(n)}$, основанного на произведениях чисел водородных связей для триплетов ($C = G = 3$, $A = U = 2$)

Все матрицы $P_{MULT}^{(n)}$ являются гиперболическими матрионами. Каждая строка (столбец) матрицы $P_{MULT}^{(n)}$ отличается от других ее строк (столбцов) только порядком расположения стандартного набора чисел. В любой из матриц $P_{MULT}^{(n)}$ суммы чисел в каждой ее строке и каждом ее столбце равны 5^n , а общая сумма чисел в матрице равна 10^n . Например, в матрице $P_{MULT}^{(3)}$ суммы в строке и столбце равны 125, а общая сумма чисел равна 1000. Эти геноматрицы или гиперболические геноматрионы называются квинтовыми, потому что отношение $3/2$, именуемое в теории музыкальной гармонии квинтой, пронизывает эти матрицы на разных уровнях (см. Приложение 1). Гиперболические геноматрионы $P_{MULT}^{(n)}$ являются невырожденными. Детерминант матрицы $P_{MULT}(1)$ равен 5, матрицы $P_{MULT}(2) - 5^4$, матрицы $P_{MULT}^{(3)} - 5^{12}$ и т. д.

Собственные значения матрицы-ядра $P_{MULT}^{(1)}$ данного кронекеровского семейства матриц равны 1 и 5. Зная собственные значения этой матрицы-ядра, легко установить собственные значения для остальных матриц данного семейства, поскольку при кронекеровском перемножении двух матриц A и B собственные значения итоговой матрицы $A \otimes B$ равны попарным произведениям собственных значений исходных матриц. Соответственно, собственные значения матрицы $P_{MULT}^{(2)}$ равны 1, 5, 5, 5^2 ; матрицы $P_{MULT}^{(3)} - 1, 5, 5, 5, 5^2, 5^2, 5^2, 5^3$, и т. д.

В биологии генетическая система отвечает за самовоспроизведение организмов. В математике, по крайней мере, со времен Возрождения математическим символом самовоспроизведения было так называемое золотое сечение или "божественная пропорция" (обширные сведения по этой теме представлены на сайте "Музея гармонии и золотого сечения" А. П. Стахова: www.goldenmuseum.com). Золотым сечением называется величина $\varphi = (1 + 5^{0.5})/2 = 1,618...$. Интересно, что семейство квинтовых геноматрионов $P_{MULT}^{(n)}$ оказывается тесно связанным с этим самым золотым сечением. Данная связь заключается в том, что при извлечении квадратного корня из любой геноматрицы $P_{MULT}^{(n)}$ образуется "золотая" матрица или "золотой" гиперболический матрион $\Phi_{MULT}^{(n)} = (P_{MULT}^{(n)})^{1/2}$, все элементы которого равны золотому сечению в целой степени. Образно говоря, квинтовые геноматрицы имеют скрытую подложку из золотых матриц [3, 4, 11, 12]). Рис. 16 представляет примеры такого извлечения корня из геноматриц $P_{MULT}^{(1)}, P_{MULT}^{(2)}, P_{MULT}^{(3)}$. Степени золотых сечений у элементов каждой матрицы соотносятся друг с другом симметричным образом. Например, для случая октетной матрицы показатели степени в ее элементах при φ образуют пары из противоположных по знаку чисел +1 и -1, +3 и -3. Произведение всех чисел в любой строке и любом столбце этих золотых матриц равно единице.

$$\begin{aligned}
 (P_{\text{МУЛЬТ}})^{1/2} &= \begin{bmatrix} \varphi & \varphi^{-1} \\ \varphi^{-1} & \varphi \end{bmatrix}; & (P_{\text{МУЛЬТ}}^{(2)})^{1/2} &= \begin{bmatrix} \varphi^2 & \varphi^0 & \varphi^0 & \varphi^{-2} \\ \varphi^0 & \varphi^2 & \varphi^{-2} & \varphi^0 \\ \varphi^0 & \varphi^{-2} & \varphi^2 & \varphi^0 \\ \varphi^{-2} & \varphi^0 & \varphi^0 & \varphi^2 \end{bmatrix} \\
 = \Phi_{\text{МУЛЬТ}} &= & = \Phi_{\text{МУЛЬТ}}^{(2)} &= \\
 \\
 \Phi_{\text{МУЛЬТ}}^{(3)} &= & & \\
 = (P_{\text{МУЛЬТ}}^{(3)})^{1/2} &= & & \\
 &= \begin{bmatrix} \varphi^3 & \varphi^1 & \varphi^1 & \varphi^{-1} & \varphi^1 & \varphi^{-1} & \varphi^{-1} & \varphi^{-3} \\ \varphi^1 & \varphi^3 & \varphi^{-1} & \varphi^1 & \varphi^{-1} & \varphi^1 & \varphi^{-3} & \varphi^{-1} \\ \varphi^1 & \varphi^{-1} & \varphi^3 & \varphi^1 & \varphi^{-1} & \varphi^{-3} & \varphi^1 & \varphi^{-1} \\ \varphi^{-1} & \varphi^1 & \varphi^1 & \varphi^3 & \varphi^{-3} & \varphi^{-1} & \varphi^{-1} & \varphi^1 \\ \varphi^1 & \varphi^{-1} & \varphi^{-1} & \varphi^{-3} & \varphi^3 & \varphi^1 & \varphi^1 & \varphi^{-1} \\ \varphi^{-1} & \varphi^1 & \varphi^{-3} & \varphi^{-1} & \varphi^1 & \varphi^3 & \varphi^{-1} & \varphi^1 \\ \varphi^{-1} & \varphi^{-3} & \varphi^1 & \varphi^{-1} & \varphi^1 & \varphi^{-1} & \varphi^3 & \varphi^1 \\ \varphi^{-3} & \varphi^{-1} & \varphi^{-1} & \varphi^1 & \varphi^{-1} & \varphi^1 & \varphi^1 & \varphi^3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 16. Начало семейства золотых гиперболических геноматрионов $(P_{\text{mult}}^{(n)})^{1/2} = \Phi_{\text{mult}}^{(n)}$; φ – золотое сечение

Отношения между соседними по величине видами чисел во всех золотых геноматрицах равны φ^2 . В геометрии этот коэффициент φ^2 реализуется в отношениях сторон вписанных друг в друга пятиконечных звезд (пентаграмм, являющихся древним символом здоровья).

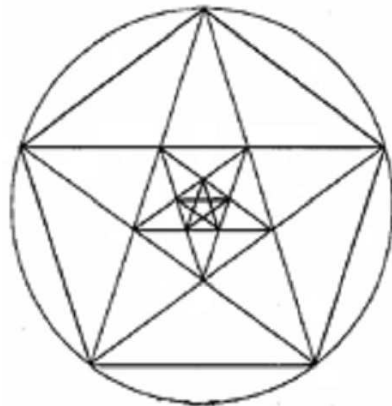


Рис. 17. Все размеры пентаграмм, вписанных друг в друга, масштабируются с коэффициентом φ^2

Золотое сечение реализуется в пентасимметричных фигурах, широко представленных в живой природе и запрещенной в классической кристаллографии. Оно также представлено во многих фигурах современной обобщенной кристаллографии: квазикристаллах Шехтмана, мозаиках Пенроуза, додекаэдрах ансамблей молекул воды, фуллеренах, икосаэдрических формах некоторых вирусов и пр. Это дает дополнительные материалы для поиска причин связи золотого сечения с параметрами генетического кода.

Выявленная связь золотого сечения с системой параметров генетического кода интересна потому, что множество авторов публикует данные о проявлении золотого сечения в биологических законах филлотаксиса [28] и в различных физиологических системах: сердечно-сосудистых, дыхательных, локомоторных, электрической активности мозга, психофизиологических и пр. (см., например, сайт музея золотого сечения <http://www.goldenmuseum.com/>). Они же описаны и изучаются в феноменах эстетического восприятия. В свете этого золотое сечение выступает кандидатом на роль одного из базовых элементов в феномене наследуемой сопряженности физиологических

подсистем, обеспечивающей единство организма. Возможности применения золотых гиперболических матрионов для моделирования биологических систем весьма разнообразны. Оправданием такого применения служит то, что все физиологические системы обязательным образом структурно согласуются с системой генетического кода для генетической передачи по наследству потомкам. Такое согласование является условием эволюционного выживания любых физиологических систем и внутренним камертоном согласования между ними. Оно выступает в роли внутреннего критерия естественного отбора физиологических систем. Поэтому каждая из этих систем может нести на себе печать структурных особенностей системы генетического кода, которую матричная генетика помогает увидеть.

Неожиданное проявление золотого сечения в связи с генетическим кодом и его матрицами позволяет предложить новое – матрично-генетическое – определение золотого сечения: золотое сечение и его обратная величина (φ и φ^{-1}) представляют собой единственные матричные элементы бисимметрической матрицы Φ , являющейся корнем квадратным из такой бисимметрической числовой матрицы P_{MULT} второго порядка, элементами которой являются генетические числа водородных связей ($C = G = 3$, $A = U = 2$) и которая имеет положительный детерминант.

Это определение не использует элементов классических определений золотого сечения: отрезков прямой, квадратного уравнения, предельного отношения в специальных числовых рядах. Кроме того, оно носит бинарный характер, определяя сразу системную пару взаимобратных величин φ и φ^{-1} (в разных литературных источниках золотым сечением называют или величину φ или обратную величину φ^{-1}).

Имеется огромный литературный материал о применении золотого сечения для анализа и моделирования множества природных явлений и систем – от астрономии до биологии и физики элементарных частиц. Выдвинутое положение о матричном определении и матричной (или матрионной) сущности золотого сечения дает эвристическую возможность рассмотреть весь этот материал на предмет его содержательной интерпретации с принципиально новой – матричной (матрионной) – точки зрения. Авторы полагают, что многие реализации золотого сечения в живой и неживой природе связаны именно с матрионной сущностью и матрионным представлением золотого сечения. Математика золотых гиперболических матрионов – новая математическая веточка, изучающая, в частности, рекуррентные соотношения между рядами золотых матрионов, а также моделирование с их помощью природных систем и процессов [3, 4, 11, 12, 19].

Кронекерovo семейство золотых геноматриц, как и квинтовых геноматриц, связано с известным треугольником Паскаля через количества одинаковых чисел, фигурирующих в последовательности матриц возрастающего размера. Действительно, как видно из Рис. 16, в золотой (2×2) -матрице содержится по одному числу φ^1 и φ^{-1} ; в $(2^2 \times 2^2)$ -матрице – по одному числу φ^2 и φ^{-2} и два числа φ^0 ; в $(2^3 \times 2^3)$ -матрице – по одному числу φ^3 и φ^{-3} , а также по три числа φ и φ^{-1} , и т. д. При их надлежащем расположении, показанном на Рис. 18, образуется треугольник Паскаля, сам связанный с числами Фибоначчи [20, 21].

Квинтовые гиперболические геноматрионы выводят на связь параметров генетической системы с пифагорейским музыкальным строем, известным еще в Древнем Китае и сопряженным с квадратными таблицами "Книги перемен" [13, 15]. На этом пути разрабатываются вопросы музыкальной гармонии в генетической системе и натуральной геномузыки. В настоящее время эта разработка ведется совместно с группой специалистов Московской государственной консерватории под руководством декана композиторского отделения проф. А. А. Кобляковым (см. Приложение 1).

Размер матрицы	Треугольник Паскаля
$2^1 \times 2^1$	$1(\varphi^1) \quad 1(\varphi^{-1})$
$2^2 \times 2^2$	$1(\varphi^2) \quad 2(\varphi^0) \quad 1(\varphi^{-2})$
$2^3 \times 2^3$	$1(\varphi^3) \quad 3(\varphi^1) \quad 3(\varphi^{-1}) \quad 1(\varphi^{-3})$
$2^4 \times 2^4$	$1(\varphi^4) \quad 4(\varphi^2) \quad 6(\varphi^0) \quad 4(\varphi^{-2}) \quad 1(\varphi^{-4})$
.....	

Рис. 18. Треугольник Паскаля для количеств повторяющихся видов чисел в кронекеровом семействе золотых геноматриц из Рис. 16. В скобках указано, какие именно виды чисел повторяются данное количество раз в матрице соответствующего размера

6 Гиперболические матрионы и матрицы диадических сдвигов в информатике

Молекулярно-генетическая система последовательно исследуется нами с позиций теории дискретных сигналов и помехоустойчивого кодирования. Но известны ли в самой теории дискретных сигналов бисимметрические матрицы типа гиперболических матрионов? Да, наш целенаправленный поиск выявил их. Подобные матрицы в этой теории существуют и используются в связи с их полезными свойствами. Они лежат в основе ряда специфических методов анализа и синтеза сигналов и носят название матриц диадического сдвига (см., например, [22, с. 109]). Данные матрицы в компьютерной информатике строятся с помощью специфической для нее операции логического сложения по модулю 2 (без применения операции кронекеровского умножения матриц). На Рис. 19 представлен пример $(2^3 \times 2^3)$ -матрицы диадического сдвига, в каждой строке которой повторяются числа-номера ячеек в ее первой строке, но в очередности, индивидуальной для каждой строки. Именно алгоритм построения $(2^n \times 2^n)$ -матрицы диадического сдвига обуславливает эту специфическую нумерацию всех ее $(2^n \times 2^n)$ ячеек номерами из ряда чисел $0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$.

	111 (7)	110 (6)	101 (5)	100 (4)	011 (3)	010 (2)	001 (1)	000 (0)
111 (7)	0	1	2	3	4	5	6	7
110 (6)	1	0	3	2	5	4	7	6
101 (5)	2	3	0	1	6	7	4	5
100 (4)	3	2	1	0	7	6	5	4
011 (3)	4	5	6	7	0	1	2	3
010 (2)	5	4	7	6	1	0	3	2
001 (1)	6	7	4	5	2	3	0	1
000 (0)	7	6	5	4	3	2	1	0

Рис. 19. Октетная матрица диадических сдвигов из теории цифровых сигналов

При сравнении Рис. 5 и 19 видно, что эта матрица диадических сдвигов является 8-мерным гиперболическим матрионом. Алгоритм построения $(2^n \times 2^n)$ -матриц диадических сдвигов в теории цифровых сигналов заключается в следующем. Все строки и столбцы такой матрицы упорядоченно нумеруются в двоичной системе счисления так, как это показано на Рис. 19. Затем в каждую ячейку матрицы вставляется сумма номеров тех строки и столбца, на пересечении которых она находится, причем сумма вычисляется логическим поразрядным сложением этих бинарных номеров по модулю 2 с соблюдением правил: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$. Например, на

пересечении столбца 3 ($= 011$) и строки 2 ($= 010$) стоит ячейка 1 ($= 001$) как результат поразрядного сложения этих чисел по модулю 2.

Как и положено для гиперболических матрионов, матрица диадических сдвигов имеет блочное строение, представляя собой фракталоподобную структуру блочных (2×2) -матриц циклического сдвига. Одинаковые блоки размещены в ней вдоль обеих диагоналей как самой матрицы, так и ее квадрантов, субквадрантов и т. д., что придает ей крестообразный характер.

Но генетически наследуемое устройство наших физиологических информационных систем также демонстрирует аналогичные крестообразные структуры. Например, такой крестообразной структурой наделены зрительные нервные пути из двух глаз: эти пути передают информацию о правой половине поля зрения в левое полушарие мозга, а информацию о левой половине поля зрения – в правое полушарие. Аналогичное верно для слуховой системы. Сопряжение полушарий головного мозга с половинами нашего тела также имеет крестообразный характер: левое полушарие обслуживает правую половину тела, а правое полушарие – левую половину. По совокупности наработанных результатов можно полагать, что эти наследуемые физиологические феномены связаны с гиперболическими матрионами и основанными на них крестообразными структурами помехоустойчивых кодов систем генетического кодирования. Приведенный пример с матрицами диадических сдвигов только один из многих, подтверждающих адекватность и перспективность сращения теории матрионов с компьютерной и биологической информатикой.

7 Круговые матрионы и матрицы Адамара в матричной генетике

В молекулярном строении букв генетического кода есть характерное нарушение симметрии: три азотистых основания А, С, G имеют по одной аминогруппе NH_2 , а четвертое – Т (или U в РНК) не имеет ее (Рис. 20). Аминогруппы играют особо важную роль в организации всей молекулярно-генетической системы, и особенность их распределения в генетических буквах необходимо принимать во внимание.

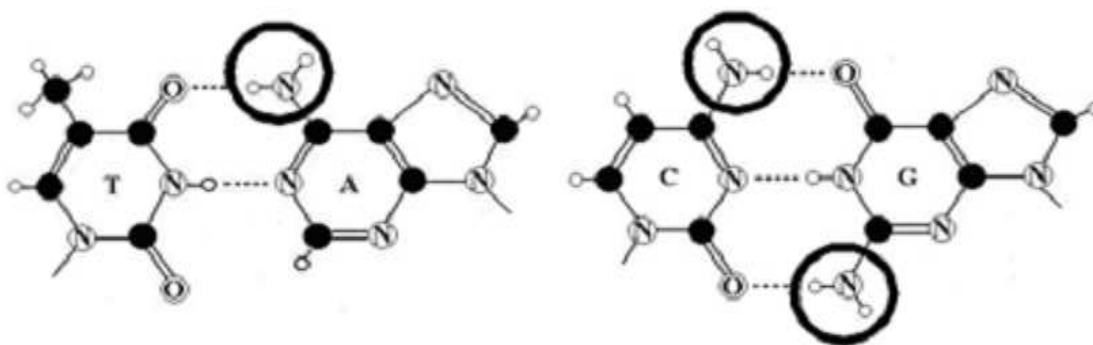


Рис. 20. Азотистые основания ДНК. Кругами выделены аминогруппы NH_2

Учет названного нарушения симметрии позволяет в алфавитной геноматрице $P = [C \ A; U \ G]$, являющейся ядром кронекеровского семейства геноматриц $P^{(n)}$, букву U/T противопоставить остальным трем буквам С, А, G, выделив ее противоположным знаком. При этом алфавитная геноматрица и все кронекеровское семейство приобретают вид $[C \ A; -U \ G]^{(n)}$. При подстановке вместо символов букв в алфавитную геноматрицу чисел водородных связей 3 и 2 ($C = G = 3$, $A = U/T = 2$) образуется кронекерово семейство круговых геноматрионов (Рис. 21).

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 9 & 6 & 6 & 4 \\ -6 & 9 & -4 & 6 \\ -6 & -4 & 9 & 6 \\ 4 & -6 & -6 & 9 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 27 & 18 & 18 & 12 & 18 & 12 & 12 & 8 \\ -18 & 27 & -12 & 18 & -12 & 18 & -8 & 12 \\ -18 & -12 & 27 & 18 & -12 & -8 & 18 & 12 \\ 12 & -18 & -18 & 27 & 8 & -12 & -12 & 18 \\ -18 & -12 & -12 & -8 & 27 & 18 & 18 & 12 \\ 12 & -18 & 8 & -12 & -18 & 27 & -12 & 18 \\ 12 & 8 & -18 & -12 & -18 & -12 & 27 & 18 \\ -8 & 12 & 12 & -18 & 12 & -18 & -18 & 27 \end{vmatrix}$$

Рис. 21. Начальные представители кронекеровского семейства круговых геноматриц, отражающего параметры водородных связей в системах генетических мультиплетов.

Заметим, что по признаку отсутствия аминокислотной группы природой выделены именно те два родственные азотистых основания U и T, которые в природе почему-то взаимно заменяются при переходе от РНК к ДНК (остальные основания в РНК и ДНК одинаковы). Даже не зная об отличии молекулярного состава букв генетического алфавита по аминокислоте, можно уже по этому характерному признаку взаимного замещения генобуков U и T в РНК и ДНК сопоставить геноматрицам $P^{(n)} = [C \ A; \ U \ G]^{(n)}$ матрицы $[C \ A; \ -U \ G]^{(n)}$, в которых элемент U противопоставлен по знаку остальным трем элементам. При подстановке в них чисел водородных связей ($A = U = 2$, $C = G = 3$) эти матрицы оказываются круговыми матрицами.

Если в алфавитной геноматрице $P = [C \ A; \ U \ G]$ каждую из названных трех генобуков A, C, G заменить символом "+1", обозначающим наличие в них аминокислотной группы, а четвертую генобукву – символом "-1", обозначающим ее отсутствие, то все кронекеровское семейство рассматриваемых символьных геноматриц $P^{(n)}$ трансформируются в кронекеровское семейство числовых геноматриц Адамара $H^{(n)}$ из выражения (8). Так образованные матрицы Адамара являются частным случаем 2^n -мерных круговых матриц. Эти матрицы Адамара играют особую роль в теориях дискретных сигналов, ортогональных преобразований, ортогональных и биортогональных кодов и других областях, имеющих обширные приложения в цифровой технике, связи, кодировании, управлении, распознавании образов, диагностике, фильтрации, теории квантовых компьютеров и пр. Причиной этого являются математические свойства этих матриц, сопряженные с ортогональными преобразованиями и ортогональными системами функций и потому востребованные современной цифровой техникой связи и управления. Свойствам и применениям матриц Адамара и разных частных видов функций Адамара, отвечающих этим матрицам (например, функций Уолша, которыми являются строки матриц Адамара), посвящены десятки тысяч публикаций. Интересно, что ортогональные системы функций Уолша отслеживаются рядом авторов в макрофизиологических системах (см. обзор в [23, с. 416–418]).

Это обнаружение естественной реализации геноматриц Адамара (и связанных с ними ортогональных систем функций) на основе природных параметров дискретной молекулярно-генетической системы свидетельствует в пользу следующего. Все те преимущества, которые дает использование матриц Адамара в математической теории дискретных сигналов и управлении, могут использоваться в биоинформатике и самоорганизации живого вещества (включая те преимущества, которые еще будут открыты в будущем, поскольку теория дискретных сигналов и матриц Адамара в ней продолжает интенсивно развиваться). Предлагаемый и развиваемый авторами анализ генетических

структур с позиций теории дискретных сигналов связан с рассмотрением генетических секвенций как решетчатых функций, для которых существует содержательный класс дискретных логических операций. К ним относятся логическое сложение, логическое вычитание, логическое умножение, логический сдвиг, логическая свертка и, наконец, логическое дифференцирование. Все эти логические операции в той или иной мере приложимы к анализу проблем хранения и передачи наследственной информации в живом веществе.

По мнению авторов, на пути описанного в статье матричного подхода к генетической системе найдена та математика, которая адекватна ее природному строению. В настоящей статье приведена лишь часть материалов о полезности круговых и гиперболических матрионов в генетических и иных прикладных исследованиях. За ее рамками остались важные вопросы теории функций матрионного переменного, а также многомерных геометрий, соответствующих 2^n -мерным матрионам. Введение в 2^n -мерные пространства соответствующих матрионных систем координат позволяет работать с многомерными векторами этих матрионных пространств, складывая, вычитая и перемножая их. Для невырожденных матрионов-векторов этих многомерных матрионных пространств определено понятие обратного матриона, через которое вводится операция деления на невырожденный матрион, эквивалентная операции умножения на обратный к нему матрион.

В силу блочного характера своей матричной формы представления 2^n -мерные матрионы применимы во многих прикладных областях, где уже давно применяются блочные матрицы. Напомним, что свойства блочных матриц обеспечивают наглядность представления сложных взаимосвязей и делают матрицу удобным инструментом логического анализа сложных структур, где включены одновременно, например, технологический, организационно-производственный и экономический аспекты деятельности хозяйственных объектов. Блочные "информационные матрицы", отображающие движение документов и показателей, давно служат для анализа рациональности структуры, организации труда и загрузки отделов в производственных и других организациях, и пр.

Интересные возможности матрионы предоставляют для биологии, например, для биомеханики движений. Так, возможно создание матрионной теории локомоций для сравнительного анализа и классификации походок у организмов разных видов. Речь идет об интерпретации многозвенного локомоторного аппарата как такого многомерного функционального матриона, синхронизированное во времени изменение отдельных координат которого в матрионном пространстве моделирует движение звеньев опорно-двигательного аппарата при локомоциях. Управление такими матрионными многозвенными системами строится на специфических алгоритмах, отражающих целостную природу матриона как единого многомерного числа. Эти алгоритмы, как и все матрионное исчисление, будут полезны не только для биомеханики движений, но и для робототехники, где стоят задачи программирования движений для роботов, создания искусственного интеллекта и т.п. Данные задачи интересны, в частности, для отдела биомеханики Института машиноведения РАН, где описываемые матричные подходы к биоинформационным системам активно поддерживаются (см., например, [24]).

8 О познавательном значении матричной генетики и матрионов

История науки свидетельствует об особой важности поиска познавательных форм представления феноменологических данных, то есть свернутых и удобных для анализа форм представления бесчисленных единиц информации о природе. Все развитие математического естествознания базируется во многом на нахождении таких форм. Классическим примером служит работа Кеплера, который, не проводя собственных астрономических наблюдений, сумел найти особую форму представления трудно обозримого

множества астрономических данных о движении планет из grossбухов Тихо Браге. Эта открытая им когнитивная форма, связанная с обобщающей идеей движения по эллипсам, позволила ему сформулировать законы движения планет относительно Солнца, вошедшие в историю под именем законов Кеплера. Во многом благодаря открытию этой когнитивной формы уже другой человек – Ньютон – сформулировал много лет спустя закон всемирного тяготения.

Сложная ситуация в современной молекулярной генетике недаром сравнивается специалистами мирового банка генетических данных Genbank с положением Кеплера: "Что дают нам миллионы нуклеотидов в последовательностях, известных на сегодняшний день? Мы находимся в положении Иоганна Кеплера, впервые приступающего к поиску закономерностей среди тех томов данных, которые всю жизнь собирал Тихо Браге. Мы знаем программу, запускающую клеточную механику, но мы почти ничего не знаем о том, как ее "прочитать". ... мы все еще понимаем удручающе мало" [8, с. 14]. В молекулярной генетике назрела задача поиска познавательной формы представления трудно обозримого множества единиц экспериментальной информации.

Авторами предложена и развивается результативная познавательная форма представления данных о системе генетического кодирования, связанная с математикой помехоустойчивого кодирования и теорией матрионов как специальных видов поличисел. Она составляет основу развиваемого направления: матричной генетики. Уже полученные результаты этого направления позволяют моделировать генетические секвенции в цифровой форме: например, последовательность триплетов – в форме последовательности их естественных бинарных номеров, получая "цифровые" гены, цифровые экзоны и интроны, и т. п. В матричной генетике находят неожиданные применения многие понятия теории дискретных сигналов: ортогональные системы сигналов; унитарные преобразования; матрицы Адамара; спектры сигналов; свертки; преобразования Гильберта; комплексные (квадратурные) сигналы; цифровые фильтры; поразрядные операции по модулю; циклические коды и др.

Информационный подход к живой материи в последние десятилетия после открытия генетического кода постепенно занял ведущие позиции. Его значимость отражает цитата из статьи "Проблема происхождения жизни и мышления с точки зрения современной физики" [25], опубликованной в "Успехах физических наук": "В физике неживой природы понятия "информации" и "ценной информации" практически не используются, поскольку они там не нужны. В биологии, напротив, понятие "информация" и особенно "ценная информация" являются основными, и без них ни понять, ни описать явления в живой природе невозможно. В этом собственно и заключается специфика "живого" ". Именно с позиций биоинформатики современная наука надеется получить более глубокое понимание того, что такое жизнь и каково ее происхождение. И именно в биоинформатике закладываются сейчас основы теоретической биологии будущего.

Авторы верят в то, что в силу единства живого организма на разных физиологических уровнях используются одни и те же (или очень близкие) виды кодов для обеспечения помехоустойчивости биологической информации. Помехоустойчивость кажется ключевым словом в рассматриваемой проблематике, а также удивительным биоинформационным феноменом, позволяющим организму сохранять свои функциональные способности в условиях постоянных внешних воздействий на него. Полученные данные свидетельствуют в пользу того, что структура систем генетического кода определена во многом требованием помехоустойчивости передачи генетической информации и связана с матрионами.

Поскольку теоретическая физика и теория кодирования дискретных сигналов зачастую используют одни и те же формализмы (например, комплексные числа, унитарные операторы, спектры сигналов), то это направление исследований сближает теорию гене-

тического кодирования не только с теорией дискретных сигналов, но и с теоретической физикой, включая квантовую механику. Это сближение очень важно, поскольку генетические молекулы являются квантовомеханическими системами, анализ которых требует привлечения квантовой механики. Оно, в частности, способствует выявлению параллелей между молекулярно-генетическими структурами и квантовыми компьютерами.

Уже после публикации своей книги 2001 года [2] и ряда статей по матричной генетике авторы с удовольствием обнаружили небольшую статью Конопельченко Б. Г. и Ю. Б. Румера 1975 года [26]. В этой небольшой статье, посвященной исследованию симметрий в генетическом коде, ее авторы впервые представили генетический алфавит в форме (2×2) -матрицы и возвели ее во вторую кронекеровскую степень. Остается сожалеть, что эта пионерская для матричной генетики публикация оставалась без продолжения и должной оценки в течение более чем четверти века. Наши работы в области матричной генетики, произведенные совершенно независимо от нее, могут, тем не менее, считаться продолжением и развитием этой замечательной публикации. Добавим, что ее инициатором был крупный отечественный физик Ю. Б. Румер, соавтор Л. Д. Ландау и автор ряда известных книг по теоретической физике. Рекомендуем читателям знакомство с этой публикацией Конопельченко и Румера, в частности, для ее сравнения с нашей работой в постановке задачи и других деталях.

Матричная генетика способна улучшить текущую ситуацию с теорией генетического кодирования, которая описана директором Института молекулярной генетики РАН Е. Д. Свердловым [27] так: "Главный вопрос, на который хотела бы ответить молекулярная генетика, это вопрос, задаваемый всеми поколениями мыслителей: "Что такое жизнь?"... Мы не знаем, как гены и их ансамбли формируют фенотип. Наше знание о функциях генов сегодня обычно останавливается на информации типа "ген X кодирует (или вовлечен в кодирование) признак Y"... Отсутствие информации о том, что происходит в интервале между генами и фенотипом, касается всех генов и всех признаков. Хуже всего то, что неясно, как его заполнять. Нужна новая научная революция, подобная той, которую совершила структура ДНК в генетике".

В заключение авторы выражают благодарность академику К. В. Фролову за многолетнюю поддержку, а также академикам Ю. С. Осипову и В. А. Садовничему за внимание к работе на отдельных ее этапах. Авторы благодарны также профессорам и коллегам К. И. Бахтиярову, В. В. Величенко, Ю. С. Владимирову, Д. Дарвашу, И. А. Евину, В. В. Кассандрову, А. А. Коблякову, В. А. Копцику, П. П. Лахтунову, Д. Г. Павлову, В. В. Смолянинову, М. Хи за обсуждение работы и поддержку. Авторы признательны организаторам международной конференции FERT-2007 за возможность квалифицированного и активного обсуждения ее участниками представленных в статье материалов.

Приложение 1. Связь системы генетического кодирования с пифагорейским музыкальным строем

Мысль о связи мироустройства с принципами музыкальной гармонии относится к числу древнейших идей человечества. Представители современной науки продолжают искать следы музыкальной гармонии в устройстве природных систем. Например, когда современная атомная физика нашла музыкальные отношения в спектральной серии Лаймана у атома водорода, то А. Эйнштейн и А. Зоммерфельд ввели в обиход характерный термин: "музыка атомных сфер" [29]. Значимость пифагорейских идей о роли музыкальной гармонии подчеркивал также нобелевский лауреат по физике Р. Фейнман

[30]. Классики кристаллографии Х. С. Вейсс, Ю. Грассман, В. Гольдшмидт и другие давно отмечали выраженное совпадение количественных отношений в строении кристаллов с отношениями музыкальной гармонией (см. обзор в книге [31]).

Поскольку живое вещество часто сравнивают с кристаллами (так, Шредингер называл его аperiодическим кристаллом), то естественно пытаться найти следы музыкальной гармонии также в живом веществе. Эта мысль о возможном участии музыкальной гармонии в организации живого вещества не является новой для современной биофизики. Так, С. Э. Шноль пишет: "Из возможных следствий взаимодействия макромолекул ферментов, осуществляющих [циклические] конформационные колебания, рассмотрим пульсации давления – звуковые волны. Диапазон чисел оборотов большинства ферментов соответствует слышимым звуковым частотам. Некую, пока еще фантастическую картину "музыкальных взаимодействий" (!) биохимических систем, клеток, органов, и возможную роль этих взаимодействий в жизнедеятельности мы рассмотрим подробнее... Это наводит на приятные размышления о природе слуха, происхождении музыкального восприятия и о многом другом, что уже принадлежит области биохимической эстетики" [32]. Какой вклад развиваемая нами матричная генетика может внести в становление, по выражению Шноля, "биохимической эстетики"? Можно ли увидеть связь матричной системы параметров генетического кода с музыкальной гармонией? Представим полученные данные к положительному ответу на этот вопрос.

Напомним некоторые основные понятия теории музыкальной гармонии. Каждая музыкальная нота характеризуется определенной частотой звучания, обычно выражаемой в герцах. Для музыкальной мелодии важно отношение частот соседних нот в ней, а не абсолютные значения частот отдельных нот. С этим связано то, что мелодия легко распознается, независимо от того, в каком акустическом диапазоне частот она воспроизводится; например, напевают ли ее басом зрелый мужчина или высоким голосом женщина или ребенок. Математическим строем в музыке называется совокупность частотных отношений между звуками в музыкальной системе.

Одна и та же нота, например, нота "до" распознается человеком как та же самая, если ее частота увеличена или уменьшена в два раза, т.е. если она принадлежит другой октаве. Октавой называется интервал частот от некоторой ноты f_0 (принято считать началом октавы частоту ноты "до") до частоты $2 \cdot f_0$ (то есть до частоты ноты "до" следующей октавы). Так, первая октава простирается от частоты примерно 260 гц ("до" первой октавы) до удвоенной частоты 520 гц ("до" второй октавы).

Для музыкальных нот традиционно используются не все бесконечное множество частот октавы, а лишь небольшое их число. Ноты, соответствующие этим частотам, образуют определенную последовательность в порядке возрастания частоты. Музыкальный строй представляет собой последовательность числовых отношений ("интервальных отношений") между частотами соседних нот (музыкальных тонов).

Часто говорят о гармонии в живой природе. Слово "гармония" возникло в Древней Греции в связи с пифагорейским музыкальным строем, совпадающим в основных чертах с древнекитайским музыкальным строем. Именно в античной теории музыки слово "гармония" обрело свое современное значение – согласие разногласного. Семь нот пифагорейского строя носят знакомые всем названия: до, ре, ми, фа, соль, ля, си. Эти семь нот соотносятся между собой по частотам вовсе не случайным образом, а закономерно взаимосвязаны в единый ансамбль. Действительно, семь нот пифагорейского строя, разнесенные в разные октавы, выстраиваются в единый ряд геометрической прогрессии на основе отношения квинты 3:2 между их частотами (отношения третьей и второй гармоник колеблющейся струны), что иллюстрирует Рис. 22. Тем самым, ноты пифагорейского строя образуют единый ансамбль на основе квинты 3:2 как коэффициента геометрической прогрессии. В этом ансамбле на Рис. 22 отношения частот отдельных

нот к средней частоте ноты "ре" первой октавы в 293 Гц образуют симметрический ряд по знакам и величинам целочисленных степеней квинты: от степени -3 до степени $+3$.

Фа	До	Соль	Ре	Ля	Ми	Си
87	130	196	293	440	660	990
$(3/2)^{-3}$	$(3/2)^{-2}$	$(3/2)^{-1}$	$(3/2)^0$	$(3/2)^1$	$(3/2)^2$	$(3/2)^3$

Рис. 22. Согласование частот семи нот пифагорейского музыкального строя на основе отношения квинты. Два верхних ряда показывают ноты вместе с их частотами в герцах: "фа" большой октавы, "до" и "соль" малой октавы, "ре" и "ля" первой октавы, "ми" и "си" второй октавы. Нижний ряд показывает отношение частоты каждой ноты к средней частоте этого ряда: частоте 293 Гц ноты "ре" первой октавы

Квинтовая система музыкального строя иногда полагается древнейшей из вообще известных в истории систем музыкального строя (http://www.arbuz.uz/t_octava.html).

Древние греки, как и древние китайцы, приписывали музыкальной гармонии ключевую роль в устройстве мира. Поэтому они придавали чрезвычайное значение поиску отношений квинты $3/2$ в природных системах, считая 3 и 2 мужским и женским числами, которые своим взаимодействием порождают новые музыкальные тоны и пр. Так, великий математик и механик Архимед, совершивший множество открытий и изобретений, считал высшим достижением своей жизни обнаружение квинты $3/2$ в соотношении объемов (и площадей) цилиндра и сферы, вписанной в него [29]. Именно эти фигуры он завещал выгравировать на его могильном камне, и именно по их чертежу Цицерон обнаружил могилу Архимеда через 100 с лишним лет после смерти Архимеда.

Рассмотренное выше кронекеровское семейство квинтовых геноматриц $P_{MULT}^{(n)} = [3\ 2; 2\ 3]^{(n)}$, которое является поличисловым семейством гиперболических матрионов, имеет выраженную связь с пифагорейским музыкальным строем. Оно пронизано отношениями квинты $3:2$ на разных уровнях: в отношениях сумм чисел в рядом расположенных по вертикали квадрантах, субквадрантах, субсубквадрантах и т. д., включая отношения квинты между соседними по величине числами в этих матрицах. Каждая из квинтовых геноматриц $[3\ 2; 2\ 3]^{(n)}$ (см. Рис. 15) содержит индивидуальный набор из $(n+1)$ видов чисел, образующих квинтовую геометрическую прогрессию. Так, $[3\ 2; 2\ 3]^{(1)}$ содержит два вида чисел: 2 и 3. $[3\ 2; 2\ 3]^{(2)}$ – три вида чисел: 4, 6, 9. $[3\ 2; 2\ 3]^{(3)}$ – четыре вида чисел: 8, 12, 18, 27. Геноматрица $[3\ 2; 2\ 3]^{(6)}$ содержит семь видов чисел: 64, 96, 144, 216, 324, 486, 729; отношения этих чисел к среднему из них числу 216 дают тот самый фрагмент квинтовой геометрической прогрессии от $(3/2)^{-3}$ до $(3/2)^3$, который рассматривался нами на Рис. 22.

Выпишем эти наборы видов чисел для первых квинтовых геноматриц кронекеровского семейства $P_{MULT}^{(n)} = [3\ 2; 2\ 3]^{(n)}$ в столбики (см. (10, слева)):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & \dots & 1 & 3 & 9 & 27 \\
 2 & 6 & 18 & 54 & 162 & \dots & 2 & & & \\
 & 4 & 12 & 36 & 108 & \dots & & 4 & & \\
 & & 8 & 24 & 72 & \dots & & & 8 & \\
 & & & 16 & 48 & \dots & & & & \\
 & & & & 32 & \dots & & & &
 \end{array} \quad (10)$$

Справа в (10) показан исторически известный числовой треугольник Платона или тетрада пифагорейцев, использованный древними греками при создании музыкального – пифагорова – строя на основе базовых пропорций из этого треугольника. Легко заметить аналогию между "генетическим" треугольником, отражающим систему генетических параметров, и числовым треугольником Платона (тетрадой пифагорейцев). Эта аналогия позволяет развивать представления о генетической основе эстетического восприятия музыки как последовательности "слаженных звуков".

Оказалось также, что "генетический" треугольник чисел (10, слева), полученный нами из семейства геноматриц, известен уже 2000 лет под названием числового треугольника древнегреческого математика Никомаха из Гераса. Он опубликован в его книге "Введение в арифметику" как основа пифагорейской теории музыкальной гармонии и эстетики пропорции. Этому треугольнику Никомаха посвящена статья [33]. Как утверждают искусствоведы, по этому числовому треугольнику, в частности, строился Парфенон и другие великие творения зодчества с их гармонией пропорций, поскольку архитектура трактовалась как застывшая музыка, а музыка – как динамическая архитектура. Ряд таких сведений содержится в названной статье [33].

Это совпадение треугольника Никомаха с треугольником чисел семейства квинтовых геноматриц первыми отметили и сообщили о нем авторам в частном письме профессора J. Kappraff и G. Adamson (США), познакомившись с авторскими публикациями о геноматрицах. С их любезного разрешения данный факт совпадения освещается в данной статье. Об этом Kappraff рассказал также на международной конференции "Symmetry Festival 2006" (12–18 августа 2006, Будапешт, Венгрия). Данная неожиданная связь времен дополнительно подтверждает правильность излагаемого пути исследования генетической системы и ее связь с пифагорейским музыкальным строем, отраженным в треугольнике Никомаха. Добавим, что Никомах из Гераса является одним из классиков теории музыкальной гармонии. В библиотеке Кембриджа имеется гравюра, изображающая его вместе с тремя другими классиками этой теории: Пифагором, Платоном и Боэцием. Она воспроизведена на сайте <http://www.jcsparks.com/painted/boethius.html>.

Очевидно, что каждая из квинтовых последовательностей видов чисел в семействе геноматриц $[3\ 2; 2\ 3]^{(n)}$ при $n = 1, 2, \dots, 6$ может быть сопоставлена части или всей квинтовой последовательности частот музыкальных нот на Рис. 22. Если, например, наименьшее число из числового набора в любой из названных геноматриц сопоставить частоте 87 гц ноты "фа" большой октавы (Рис. 22), то все остальные числа геноматрицы автоматически сопоставятся частотам других нот, указанных на данном рисунке. Так, последовательность чисел 8, 12, 18, 27 матрицы $[3\ 2; 2\ 3]^{(3)}$ будет сопоставлена последовательности частот 87, 130, 196, 293 гц соответствующих нот из таблицы на Рис. 22.

Геноматрица $[3\ 2; 2\ 3]^{(6)}$ содержит семь видов чисел: 64, 96, 144, 216, 324, 486, 729. При указанном сопоставлении числа 64, как меньшего из них, с наименьшей нотной частотой 87 из Рис. 22 этим семи видам чисел соответствуют все семь частот нот из этого рисунка: 87, 130, 196, 293, 440, 660, 990 гц.

В этой связи каждая геноматрица $[3\ 2; 2\ 3]^{(n)}$ при $n = 1, 2, \dots, 6$ может быть представлена в форме музыкальной матрицы $P_{MUSIC}^{(n)}$, в которой каждое число, представляющее n -плет, заменяется частотой соответствующей ноты. Например, геноматрица $[3\ 2; 2\ 3]^{(3)}$ триплетов представима в форме музыкальной матрицы $P_{MUSIC}^{(3)}$, где каждое исходное число заменено по описанному алгоритму соответствующей частотой ноты. В этом случае всю геноматрицу 64 триплетов можно изобразить с помощью нотного стана в виде последовательности 64 нот, в которой повторяются в нужном порядке (строка за строкой) ноты с частотами 87, 130, 196, 293 гц, указанные на Рис. 22. Эту последовательность нот можно прослушать как единую мелодию.

Описанные исследования обращают внимание, в частности, на то, что каждый ген и каждая часть ДНК как последовательности триплетов имеют собственные числовые квинтовые последовательности в виде специфической для них очередности четырех чисел 8, 12, 18, 27. Каждое из этих чисел представляет собой произведение количества водородных связей трех букв триплета: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Отношение любых двух из этих четырех чисел равно квинте $3/2$ в той или иной целой степени. Последовательности этих четырех "водородных" чисел в каждом гене или молекуле ДНК можно сопоставить последовательность из четырех видов нот, то есть некоторую музыкальную мелодию. Другими словами, каждая генетическая последовательность характеризуется своей собственной музыкальной мелодией, определяемой в рассматриваемом случае на параметрах водородных связей.

Но в пифагорейском музыкальном строе содержится семь нот. Музыкальные мелодии на основе этих семи видов нот образуются для последовательностей триплетов описанным алгоритмом тогда, когда эти последовательности рассматриваются (интерпретируются) как состоящие из парного объединения соседних триплетов. При этом перемножаются числа водородных связей не у трех букв одного триплета, а сразу у шести букв двух соседних триплетов, что дает следующую квинтовую последовательность из семи чисел: $2^6 = 64$, $2^5 \cdot 3 = 96$, $2^4 \cdot 3^2 = 144$, $2^3 \cdot 3^3 = 216$, $2^2 \cdot 3^4 = 324$, $2 \cdot 3^5 = 486$, $3^6 = 729$. Эта квинтовая последовательность соответствует набору видов чисел в геноматрице $P^{(6)}$ и представлена в соответствующем столбце генетического треугольника (2.3/1) и треугольника Никомаха. Тем самым, данная связь ДНК с пифагорейским музыкальным строем подсказывает оригинальный аналитический подход к генетическим последовательностям триплетов как последовательностям пар соседних триплетов. Возможные следствия из такого подхода, который рассматривает пару соседних триплетов как важную функциональную единицу (шестиплет), кодирующую сразу пару аминокислот, надлежит внимательно исследовать в будущем.

Молекулярная систем генетического алфавита выбрана природой так, что многие символьные геноматрицы и их кронекевские семейства при подстановке в них тех или иных видов числовых параметров азотистых оснований А, С, G, U(T) становятся квинтовыми геноматрицами. К числу таких параметров относятся не только рассмотренные сейчас числа водородных связей, при которых $A = U(T) = 2$ и $C = G = 3$. Но к ним относятся также числа атомов в кольцах азотистых оснований ($C = U(T) = 6$, $A = G = 9$) и числа протонов в совокупности протонированных атомов этих колец ($C = U(T) = 40$, $A = G = 60$). По каждому из этих видов параметров символьная последовательность триплетов может быть представлена в форме числовой квинтовой последовательности, которая может интерпретироваться, как музыкальная мелодия на основе пифагорейского музыкального строя по аналогии с вышеописанным случаем чисел водородных связей. Как и в описанном случае параметров водородных связей, квинтовые последовательности для каждого из этих видов параметров могут состоять из четырех видов чисел при вычислении их членов по каждому триплету в отдельности. Или эти квинтовые последовательности могут состоять из семи видов чисел, сопоставляемых указанным образом всем семи нотам пифагорейского строя, при вычислении их членов сразу для пар соседних триплетов последовательности. Отметим, что одна и та же последовательность триплетов характеризуется разными мелодиями в зависимости от вида названных параметров. Это обусловлено тем, что разные виды названных параметров определяют разные квинтовые последовательности из-за разных вариантов разделения четверки букв генетического алфавита на пары эквивалентных букв, а также из-за разных числовых значений у разных видов параметров.

Цепевидная молекула ДНК может рассматриваться как полиатомная конструкция типа косички, сплетенной из многих нитей или цепочек. Одна из этих цепочек, входящих

в общую косу ДНК, является цепью водородных связей, другая – цепью колец азотистых оснований, третья – цепью отдельных видов атомов и т. п. Поскольку с некоторыми из ее отдельных цепочек связаны разные квинтовые последовательности параметров, то есть разные "мелодии", то вся молекула ДНК с излагаемой "музыкально-пифагорейской" точки зрения предстает как носитель этих параллельно существующих квинтовых последовательностей или "мелодий". Их совокупность образует некоторую общую полифоническую мелодию (квинтовое многоголосье), которую при желании можно воспроизвести на музыкальных инструментах или посредством многоголосого пения и которая специфична для каждого гена.

Не может ли такая "натуральная генетическая музыка" обладать физиологической активностью и полезностью при воспроизведении генетических квинтовых последовательностей в виде музыкальных звуков, цветомузыкальных композиций, электрических стимулов, модуляций лазерного луча, вибрационных тактильных сигналов и пр.? Например, в случае больных диабетом не будет ли наблюдаться лечебный эффект для них от сеансов музыкальных мелодий, соответствующих квинтовым последовательностям гена инсулина? Ответ могут дать только будущие эксперименты.

Подчеркнем, что эти генетические мелодии не образованы авторами волевым образом, а определены природными последовательностями параметров в цепевидных генетических молекулах. Они условно называются авторами "натуральной генетической музыкой" с тем, чтобы отличить их от вариантов "генетической музыки", иногда предлагаемых другими авторами на основе явно волевых подходов без достаточной опоры на молекулярные особенности генетических последовательностей. Речь идет об использовании этими авторами того обстоятельства, что в принципе можно волевым образом сопоставить, например, каждую из десяти цифр от 0 до 9 той или иной ноте, и затем любое многоразрядное десятичное число, например, телефонный номер заменить последовательностью этих нот, назвав ее "музыкой". Подобным образом названные авторы произвольно привязывают ноты к отдельным буквам генетического кода, что дает возможность переложения последовательности триплетов в последовательность звуков, называемую ими генетической музыкой.

Описанная феноменологическая связь генов с пифагорейским музыкальным строем и мелодиями на его основе интересна по многим обстоятельствам. Одним из них является существование с древних времен музыкальной терапии. В наши дни популярность музыкальной терапии демонстрирует, например, тот факт, что только "Американская ассоциация музыкальных терапевтов" объединяет свыше 5000 членов, из которых 2700 членов сертифицированы в качестве музыкальных терапевтов. В мире также существует целое направление "цифровой фармакологии" ("digital-pharmacy"). Но современные музыкальные терапевты не знают о натуральной геномузыке, которая может предоставить дополнительные возможности. Наши прикладные исследования натуральной геномузыки ориентированы, прежде всего, не на создание приятной уху музыки, а на поиск основ целебной и физиологически действенной музыки. Эта геномузыка и композиции на ее основе должны адресоваться тем архетипам сознания и видам коллективного бессознательного, которые введены в современную науку К. Юнгом.

В свете полученных данных о музыкальной гармонии в молекулярной системе генетического кода можно думать о том, что музыка является не только инструментом вызова эмоций и наслаждения, но и принципом организации и языком живой материи. При этом выдающиеся композиторы предстают по существу как исследователи структурных принципов организации живого вещества на основе их сильно развитой интуиции, способности слышать свой организм. Как писал Лейбниц в письме Гольбаху от 17 апреля 1712 г., "музыка есть таинственная арифметика души, которая вычисляет себя, сама того не сознавая". Можно думать, что именно с музыкально-пифагорейскими

асpekтами молекулярно-генетической системы связана загадочная способность Моцарта и других гениальных композиторов слышать рождающееся у них новое музыкальное произведение целиком. Р. Фейнман отметил существование проблемы физиологических основ эстетики, когда писал о неясных корнях чувства музыкальной гармонии: "Но далеко ли мы ушли от Пифагора в понимании того, почему только некоторые звуки приятны для слуха? Общая теория эстетики, по-видимому, ненамного продвинулась со времен Пифагора" [30, т. 4, с. 201].

Изложенные выше материалы и другие результаты авторских исследований дают основания считать, что эстетические чувства и предпочтения имеют генетическую основу и связаны с общей проблемой помехоустойчивости информационных систем. Это направление исследований, развиваемое совместно с Московской государственной консерваторией (группа декана композиторского отделения проф. А. А. Коблякова), дало ряд содержательных материалов в области математической теории музыкальной гармонии. Речь идет, прежде всего, о полученном из семейства золотых гиперболических геноматрион $\Phi_{MULT}^{(n)}$ (Рис. 16) "строе золотого вурфа", базирующемся на геометрической прогрессии с иррациональным отношением; выявлении в пифагорейских алгоритмах размножения нот музыкальных строев обобщения классической задачи Фибоначчи о размножении кроликов, и пр. Эти материалы, выходящие за рамки статьи, представлены в [34].

Добавим, что кронекеровское семейство геноматриц $P_{MULT}^{(n)} = [3\ 2; 2\ 3]^{(n)}$ алгоритмически связано с семействами генетических "бисексных" алгебр (или чет-нечет-алгебр, или инь-ян-алгебр) и матрицами Адамара. Это показано в работах [34–38]. Изложенные материалы по генетическим алгебрам доложены на XX Международном конгрессе генетики (Берлин, 12–17 июля 2008 года).

Литература

- [1] Сильвестров В. В. Системы чисел. - Соросовский образовательный журнал, №8, 1998, с. 121–127.
- [2] Петухов С. В. Бипериодическая таблица генетического кода и число протонов. М., 2001.
- [3] Petoukhov S. V. Genetic Codes I: Binary Sub-Alphabets, Bi-Symmetric Matrices and Golden Section; Genetic Codes II: Numeric Rules of Degeneracy and a Chronocyclic Theory. - Symmetry in Genetic Information, ISBN 963216 242 0, special double issue of the journal "Symmetry: Culture and Science", Budapest, 2001, 255–274 p.
- [4] Petoukhov S. V. Genetic Codes II: Numeric Rules of Degeneracy and a Chronocyclic Theory. - Symmetry in Genetic Information, ISBN 963216 242 0, special double issue of the journal "Symmetry: Culture and Science", Budapest, 2001, 275–306 p.
- [5] Петухов С. В. Биосолитоны. Основы солитонной биологии. - М., 1999.
- [6] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М., Наука, 1966.
- [7] Бененсон Я., Шапиро Э. Компьютеры из ДНК. - В мире науки, №9, 2006, с. 34–41
- [8] Уотермен М. С., редактор. Математические методы для анализа последовательностей ДНК, М., Мир, 1999.
- [9] Щуцкий Ю. К. Китайская классическая "Книга перемен" - М., 1997, 605 с.
- [10] Петухов С. В. Симметрии в биологии.- Приложение к книге: А. В. Шубников, В. А. Копчик "Симметрия в науке и искусстве", 3-е изд., М., 2004, с. 489–546.
- [11] Петухов С. В. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и золотое сечение.- Метафизика. XXI век. (под ред. Ю. С. Владимирова). - М., Бином, 2006, с. 216–250.
- [12] Petoukhov S. V. The rules of degeneracy and segregations in genetic codes. The chrono cyclic conception and parallels with Mendel's laws.- "Advances in Bioinformatics and its Applications"

(editors - M. He, G. Narasimhan, S. Petoukhov), Proceedings of the International Conference (Florida, USA, 16–19 December 2004), Series in Mathematical Biology and Medicine, v. 8, 2005, pp. 512–532, New Jersey-London-Singapore-Beijing, World Scientific.

[13] Петухов С. В., Петухова Е. С. Матрично-тензорная интерпретация таблиц древнекитайской "Книги перемен" и генетического кода. Геноарт. - Ежегодник "Дельфис", М., 2006, часть 2, с. 89–95.

[14] Франк-Каменецкий М. Д. Самая главная молекула. - М, Наука, 1988

[15] Petoukhov S. V. Hadamard matrices and quint matrices in matrix presentations of molecular genetic systems. - Symmetry: Culture and Science, Vol. 16, No. 3, 2005, p. 247–266.

[16] Петухов С. В. Матричная генетика и теоретическая биология. - М., 2007 (в печати).

[17] Вер Г. "Карл Густав Юнг", Свердловск, Урал Лтд, 1998.

[18] Беллман Р. Введение в теорию матриц. - М., Наука, 1976.

[19] Petoukhov S. V. Attributive conception of genetic code, its bi-periodic tables and a problem of unification bases of biological languages. - "Symmetry: Culture and Science", 2003, #1–4, p. 40–59

[20] Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. - М., Наука, 1969.

[21] Успенский В. А. Треугольник Паскаля. - М., Наука, 1966.

[22] Ахмед Н., Рао К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. - М., 1980

[23] Залманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других системах. - М, Наука, 1989

[24] Смолянинов В. В., Петухов С. В. Симметрии генетических триплетов. - Симметрии: теоретический и методологический аспекты. Сборник научных трудов 1-го Международного семинара, Астрахань, 2005. Издательский дом "Астраханский университет", 2005, с. 42–47.

[25] Чернавский Д. С. Проблема происхождения жизни и мышления с точки зрения современной физики. - Успехи физических наук, т. 170, №2, с. 157–183, 2000.

[26] Конопельченко Б. Г., Ю. Б. Румер. Классификация кодонов в генетическом коде. - ДАН СССР, т. 223, №2, 471–474, 1975.

[27] Свердлов Е. Д. Великое открытие: революция, канонизация, догмы и ересь. - Вестник РАН, т. 73, №6, 2003.

[28] Джан Р. Филлотаксис: системное исследование морфогенеза растений (под ред. С. В. Петухова), М, РХД, 2006.

[29] Волошинов А. В. Математика и искусство. М., Просвещение, 2000.

[30] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике, т. 4, М., Мир, 1965.

[31] Бергер Л. Г. Эпистемология искусства. М., Просвещение, 2001

[32] Шноль С. Э. Физико-химические факторы биологической эволюции. - М., Наука, 1989.

[33] Kappraff J. The arithmetic of Nichomachus of Gerasa and its applications to systems of proportions. - Nexus Network Journal, v. 2, № 4 (October 2000), <http://www.nexusjournal.com/Kappraff.html>

[34] Петухов С. В. Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость. - (Предисловие акад. К. В. Фролова). - М., РХД, 2008.

[35] Petoukhov S. The degeneracy of the genetic code and Hadamard matrices, arXiv:0802.3366

[36] Petoukhov S. Matrix genetics, part 1: permutations of positions in triplets and symmetries of genetic matrices, arXiv:0803.0888

[37] Petoukhov S. Matrix genetics, part 2: the degeneracy of the genetic code and the octave algebra with two quasi-real units (the "Yin-Yang octave algebra"), arXiv:0803.3330

[38] Petoukhov S. Matrix genetics, part 3: the evolution of the genetic code from the viewpoint of the genetic octave Yin-Yang-algebra, arXiv:0805.4692

Poly-numbers (matrions) in biological and computer informatics**Sergey Petoukhov, Elena Petoukhova***Mechanical Engineering Research Institute RAS, Moscow**petoukhov@hotmail.com*

The article is devoted to 2^n -dimensional poly-numbers, which generalize complex and double numbers on the basis of a block-fractal (or Kronecker) algorithm. These poly-numbers were named *circular* and *hyperbolic matrions* correspondingly. They were constructed in a course of investigations of genetic code systems from the viewpoint of matrix methods of informatics. Data about algebras of these poly-numbers are presented. A meaning of these poly-numbers for theoretical biology and information science is under discussion.

Key-words: poly-numbers, matrix methods.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных алгебр в физике, е) Экспериментальные исследования возможной анизотропии пространства-времени и иных проявлений финслеровой геометрии.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.
2. Объем статьи не должен превышать 1 печ. листа (24 усл. маш. стр.)
3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате $\text{\LaTeX}$ (версия $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$, для набора формул используется $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$) и файл статьи в формате PostScript или PDF.
4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).
5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок), ключевые слова, классификацию по PACS или MSC2000. Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.
6. Название статьи, аннотация, ключевые слова, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.
7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.
8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи.
9. Публикация бесплатна для всех авторов.

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

Научный журнал. Основан в 2003 г.

№ 1 (9), том 5, 2008

Главный редактор Павлов Д. Г.

Ответственный секретарь Элиович А. А.

www.polynumbers.ru

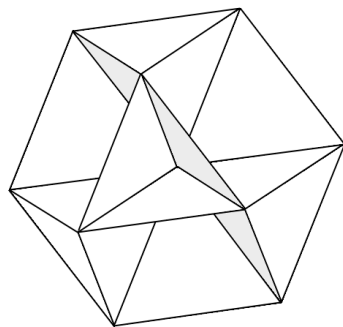
hypercomplex@mail.ru

Свидетельство о регистрации

ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.

ISSN 1814-3946

© "МОЗЭТ", Российское Гиперкомплексное Общество



Типографские данные