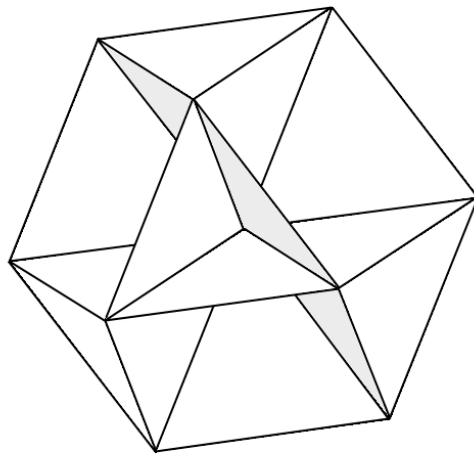


ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

№ 2 (8), том 4 (2007)

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 2003 г.



www.polynumbers.ru

hypercomplex@mail.ru

Оглавление

Гарасько Г. И. Слабые поля	3
Лебедев С. В. Пространства, конформно связанные с трехмерным пространством Бервальда-Моора	13
Зарипов Р. Г. Физическое время и расстояние в пространстве-времени Бервальда-Моора	24
Brinzei N., Siparov S. V. On the possibility of the OMPR effect in the space with Finsler geometry. Part 1.	41
Atanasiu Gh., Brinzei N. Einstein Equations for the Homogeneous Finsler Prolongation to TM , with Berwald-Moor Metric	53
Munteanu Gh. An extension of electrodynamics theory to complex Lagrange geometry	65
Фильченков М. Л., Лаптев Ю. П. Параметры анизотропии пространства-времени, выведенные из наблюдательной космологии	71
Гальмак А. М. N -арные группы	77
Людковский С. В. Квазиконформные функции октонионных переменных и их некоммутативные преобразования типа Лапласа и Меллина	97
Турбин А. Ф., Жданова, Ю. Д. GL_n -пространства	136
Урусовский И. А. Камни преткновения стандартной космологии в свете шестимерной космологии	146
Гладышев В. О. Машина времени в пространстве с дипольной анизотропией	167
Информация для авторов	177

СЛАБЫЕ ПОЛЯ

Г. И. Гарасько

ГУП ВЭИ, Россия, Москва
gri9z@mail.ru

Показано, что в приближении малых полей новый геометрический подход в теории поля в первом приближении может приводить к линейным уравнениям поля для нескольких независимых полей. При усилении полей и при переходе ко второму приближению полевые уравнения становятся, вообще говоря, нелинейными, а поля перестают быть независимыми, что приводит к отсутствию закона суперпозиции для каждого отдельного поля и к взаимодействию между разными полями. Объединение в единой теории гравитационного и электромагнитного полей проведено именно в рамках такого геометрического подхода в теории поля в псевдоримановом пространстве и искривленном пространстве Бервальда-Моора.

Ключевые слова: слабые поля, пространство Бервальда-Моора, псевдориманово пространство, теория поля.

1 Введение

В работе [1] был предложен новый (геометрический) подход в теории поля, который применим к любому финслеровому пространству [2], для которого в каждой точке основного пространства x^1, x^2, \dots, x^n может быть определен объем индикатрисы $(V_{ind}(x^1, x^2, \dots, x^n))_{ev}$ в предположении, что касательное пространство является евклидовым. Тогда действие I для полей, входящих в метрическую функцию финслерова пространства, определяется с точностью до постоянного множителя как объем по некоторой n -мерной области V :

$$I = const \cdot \int_V^{(n)} \frac{dx^1 dx^2 \dots dx^n}{(V_{ind}(x^1, x^2, \dots, x^n))_{ev}}. \quad (1)$$

Таким образом, полевой лагранжиан определяется следующим образом:

$$\mathcal{L} = const \cdot \frac{1}{(V_{ind}(x^1, x^2, \dots, x^n))_{ev}}. \quad (2)$$

В работах [3], [4] рассматривались пространства, конформно связанные с пространством Минковского и пространством Бервальда-Моора соответственно. Такие пространства обладают одним скалярным полем, для которого записывалось уравнение поля и находились частные решения в предположении пространственной сферической и "ромбододекаэдрной" симметрии соответственно.

Настоящая работа является продолжением упомянутой серии работ по изучению и развитию геометрической теории поля.

2 Псевдоримановое пространство с сигнатурой $(+, -, -, -)$

Рассмотрим псевдориманово пространство с сигнатурой $(+, -, -, -)$, явно выделив в метрическом тензоре $g_{ij}(x)$ этого пространства метрический тензор $\overset{o}{g}_{ij}$ пространства Минковского,

$$g_{ij}(x) = \overset{o}{g}_{ij} + h_{ij}(x). \quad (3)$$

Будем предполагать, что поле $h_{ij}(x)$ слабое, то есть

$$|h_{ij}(x)| \ll 1. \quad (4)$$

Согласно [1] лагранжиан псевдориманового пространства с сигнатурой $(+, -, -, -)$ равен

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\det(g_{ij})}. \quad (5)$$

Вычислим величину $[-\det(g_{ij})]$ до членов $|h_{ij}(x)|^2$ включительно:

$$-\det(g_{ij}) \simeq 1 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \quad (6)$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \overset{o}{g}{}^{ij} h_{ij} \equiv h_{00} - h_{11} - h_{22} - h_{33}, \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_2 = -h_{00}(h_{11} + h_{22} + h_{33}) + h_{11}h_{22} + h_{11}h_{33} + h_{22}h_{33} - h_{12}^2 - h_{13}^2 - h_{23}^2 + h_{03}^2 + h_{02}^2 + h_{01}^2. \quad (8)$$

Последнюю формулу можно переписать в более удобной форме:

$$\mathcal{L}_2 = - \begin{vmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{01} & h_{11} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h_{00} & h_{02} \\ h_{02} & h_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h_{00} & h_{03} \\ h_{03} & h_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_{11} & h_{13} \\ h_{13} & h_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_{22} & h_{23} \\ h_{23} & h_{33} \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Тогда

$$\mathcal{L} \simeq 1 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 + \frac{1}{2} \left[\mathcal{L}_2 - \frac{1}{4} \mathcal{L}_1^2 \right], \quad (10)$$

Чтобы получить уравнения для слабого поля в первом приближении надо использовать лагранжиан \mathcal{L}_1 , а во втором приближении – лагранжиан $(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - \frac{1}{4} \mathcal{L}_1^2)$.

3 Скалярное поле

Для единственного скалярного поля $\varphi(x)$ наиболее простое представление тензора $h_{ij}(x)$ имеет вид

$$h_{ij}(x) \equiv h_{ij}^{(\varphi)}(x) = \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}, \quad (11)$$

поэтому

$$\mathcal{L}_\varphi = \sqrt{-\det(g_{ij})} = \sqrt{1 \pm \mathcal{L}_1} \simeq 1 \pm \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 - \frac{1}{8} \mathcal{L}_1^2, \quad (12)$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \right)^2. \quad (13)$$

В первом приближении используя лагранжиан \mathcal{L}_1 , получим следующее полевое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^3 \partial x^3} = 0, \quad (14)$$

которое является волновым уравнением. Стационарное поле, зависящее только от радиуса

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \quad (15)$$

будет соответственно удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0, \quad (16)$$

интегрируя которое, получим

$$\frac{d\varphi}{dr} = -C_1 \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi(r) = C_0 + C_1 \frac{1}{r}. \quad (17)$$

Во втором приближении надо использовать лагранжиан $(\mathcal{L}_1 - \frac{1}{4} \mathcal{L}_1^2)$, при этом получаем уравнение поля во втором приближении:

$${}^o g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\left(\pm 1 - \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right] = 0. \quad (18)$$

Это уравнение уже является нелинейным.

Точное уравнение поля для тензора $h_{ij}(x)$ (11):

$${}^o g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}}{\sqrt{1 \pm \mathcal{L}_1}} \right) = 0. \quad (19)$$

Тогда стационарное поле, зависящее только от радиуса, должно соответственно удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\frac{d\varphi}{dr}}{\sqrt{1 \mp \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2}} \right) = 0, \quad (20)$$

интегрируя которое, получим

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{C_1}{\sqrt{r^4 \pm C_1^2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi(r) = C_0 + \int_r^\infty \frac{C_1}{\sqrt{r^4 \pm C_1^2}} dr. \quad (21)$$

Поля с верхним знаком и нижним знаком качественно различаются: верхний знак ("+" в формуле (11)) дает поле конечное без особенностей во всем пространстве, нижний знак ("−" в (11)) дает поле, определенное везде, кроме сферической области

$$0 \leq r \leq \sqrt{|C_1|}, \quad (22)$$

в которой поле отсутствует, причем при

$$r > \sqrt{|C_1|}, \quad r \rightarrow \sqrt{|C_1|} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dr} \rightarrow -C_1 \cdot \infty. \quad (23)$$

В то же время на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) оба решения $\varphi_\pm(r)$ ведут себя как решение (17) волнового уравнения.

Зная лагранжиан, можно записать тензор энергии импульса T_j^i для полученных решений и попытаться вычислить энергию системы, деленную на скорость света c :

$$P_0 = const \int^{(3)} T_0^0 dV. \quad (24)$$

Для полученных стационарных сферически симметричных решений имеем

$$T_0^0 = -\frac{r^2}{\sqrt{r^4 \pm C_1^2}}, \quad (25)$$

поэтому и для верхнего, и для нижнего знака $P_0 \rightarrow \infty$.

Метрический тензор (3), (11) – простейший способ "включения" гравитационного поля в пространстве Минковского – исходном плоском пространстве, не содержащем полей. Аддитивно добавляя еще несколько таких слагаемых (11) в метрический тензор, мы сможем описывать все более сложные гравитационные поля с тензором $h_{ij} = h_{ij}^{(grav)}$.

4 Ковариантное векторное поле

Для того, чтобы из ковариантного поля $A_i(x)$ построить симметрический дважды ковариантный тензор $h_{ij}(x)$, не прибегая к использованию объектов связности, вспомним, что альтернированная частная производная от тензора есть тензор,

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}, \quad (26)$$

но антисимметрический. Построим на основе тензора F_{ij} симметрический тензор. Для этого вначале запишем скаляр

$$\mathcal{L}_A = \overset{o}{g}{}^{ij} \overset{o}{g}{}^{km} F_{ik} F_{jm} = 2 \overset{o}{g}{}^{ij} \overset{o}{g}{}^{km} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \right), \quad (27)$$

откуда следуют выражения для двух симметрических тензоров

$$h_{ij}^{(1)} = \overset{o}{g}{}^{km} \left(2 \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{\partial A_k}{\partial x^j} \frac{\partial A_i}{\partial x^m} \right), \quad (28)$$

$$h_{ij}^{(2)} = \overset{o}{g}{}^{km} \left(2 \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k} \frac{\partial A_m}{\partial x^i} \right). \quad (29)$$

Заметим, что не только F_{ij} и \mathcal{L}_A , но и тензоры $h_{ij}^{(1)}$, $h_{ij}^{(2)}$ являются градиентно инвариантными, то есть не изменяются при преобразовании

$$A_i \rightarrow A_i + \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}, \quad (30)$$

где $f(x)$ – произвольная скалярная функция.

Пусть

$$h_{ij} \equiv h_{ij}^{(A_k)} = \chi(x) h_{ij}^{(1)} + [1 - \chi(x)] h_{ij}^{(2)}, \quad (31)$$

где $\chi(x)$ – некоторая скалярная функция. Тогда в первом приближении получим

$$\mathcal{L}_1 = 2 \overset{o}{g}{}^{ij} \overset{o}{g}{}^{km} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \right) \equiv \mathcal{L}_A, \quad (32)$$

т. е. в первом приближении для поля $A_i(x)$ следует выполнение уравнений Максвелла:

$$\overset{o}{g}{}^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} A_k - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\overset{o}{g}{}^{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right) = 0. \quad (33)$$

Если принять лоренцевскую калибровку

$$\overset{o}{g}{}^{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} = 0, \quad (34)$$

то уравнения (33) принимают вид

$$\square A_k = 0. \quad (35)$$

Вполне возможно, (31) не самая общая запись тензора h_{ij} , который в первом приближении дает уравнения поля, совпадающие с уравнениями Максвелла.

Для того, чтобы получить уравнения Максвелла не для свободного поля, а с источниками $j_i(x)$, надо аддитивно добавить к $h_{ij}^{(A_k)}$ (31) еще тензор

$$h_{ij}^{(jk)} = \left(\frac{16\pi}{c} \right) \cdot \frac{1}{2} (A_i j_j + A_j j_i), \quad (36)$$

то есть метрический тензор (3) с тензором

$$h_{ij} = h_{ij}^{(Max)} \equiv h_{ij}^{(A_k)} + h_{ij}^{(j_k)} \quad (37)$$

описывает слабое электромагнитное поле с источниками поля $j_k(x)$. При этом следует отдавать себе отчет в том, что мы выходим за рамки геометрического подхода в теории поля, так как приходится считать поле $j_k(x)$ заранее заданным, а не полученным из уравнений поля.

Таким образом, метрический тензор (3) с тензором

$$h_{ij} = \mu h_{ij}^{(A_k)} + \gamma h_{ij}^{(grav)}, \quad (38)$$

где μ, γ – фундаментальные постоянные, в рамках единой псевдоримановой геометрии описывает одновременно свободное электромагнитное и свободное гравитационное поле. Для того, чтобы такая теория включала в себя еще и источники электромагнитного поля $j_k(x)$, необходимо, чтобы метрический тензор, кроме $j_k(x)$, содержал и частные производные этого поля или чтобы поле $j_k(x)$ выражалось через другие поля, например, как показано ниже.

Если гравитационное поле "включено" простейшим образом, как это показано в предыдущем разделе, источники электромагнитного поля можно связать со скалярным полем следующим образом:

$$j_i(x) = q \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}. \quad (39)$$

В этом случае в первом приближении в случае лоренцевской калибровки имеем

$$\square A_k = \frac{4\pi}{c} j_k, \quad (40)$$

$$\square \varphi = 0. \quad (41)$$

А так как плотность тока имеет вид (39), то из уравнения (41) следует уравнение непрерывности

$$g^{ij} \frac{\partial j_i}{\partial x^j} = 0. \quad (42)$$

5 Несколько слабых полей

Переход от слабых к более сильным полям может приводить к переходу от линейных уравнений поля для независимых полей к нелинейным уравнениям поля для взаимосвязанных взаимодействующих полей. Покажем это на примере двух слабых скалярных полей $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, "включающих" гравитационное поле в пространстве Минковского.

Пусть

$$h_{ij} = \varepsilon_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + \varepsilon_\psi \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^j}, \quad (43)$$

где $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\psi$ – независимые знаковые коэффициенты. Тогда точный лагранжиан может быть записан следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\varphi,\psi} = \sqrt{1 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}, \quad (44)$$

где

$$\mathcal{L}_1 = g^{ij} \left(\varepsilon_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + \varepsilon_\psi \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right), \quad (45)$$

$$\mathcal{L}_2 = \varepsilon_\varphi \varepsilon_\psi \left[- \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \frac{\partial \psi}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \frac{\partial \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \frac{\partial \psi}{\partial x^0} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \frac{\partial \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} \right)^2 \right]. \quad (46)$$

Формула (46) проще всего получается из формулы (9), если использовать следующую упрощающую формулу:

$$\left| \begin{array}{cc} h_{ii-} & h_{i-j-} \\ h_{i-j-} & h_{jj-} \end{array} \right| = \pm \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} & \frac{\partial \psi}{\partial x^{i-}} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x^{j-}} & \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \end{array} \right|^2 = \pm \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^j} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right)^2. \quad (47)$$

В первом приближении в качестве лагранжиана следует использовать \mathcal{L}_1 , тогда уравнения поля суть система двух независимых волновых уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^3 \partial x^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^3 \partial x^3} = 0. \end{array} \right\} \quad (48)$$

При этом поля $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ независимы и для них выполняется закон суперпозиции.

Используя точный лагранжиан для двух скалярных полей (44), получим систему двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{{}^o g^{ij}}{g} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \left(1 \pm {}^o g^{rs} \frac{\partial \psi}{\partial x^r} \frac{\partial \psi}{\partial x^s} \right) \mp \frac{\partial \psi}{\partial x^j} {}^o g^{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial x^r} \frac{\partial \psi}{\partial x^s}}{\sqrt{1 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}} \right] = 0, \\ \frac{{}^o g^{ij}}{g} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x^j} \left(1 + {}^o g^{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial x^r} \frac{\partial \varphi}{\partial x^s} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} {}^o g^{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial x^r} \frac{\partial \psi}{\partial x^s}}{\sqrt{1 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}} \right] = 0. \end{array} \right\} \quad (49)$$

При этом поля $\varphi(x)$, $\psi(x)$ зависят друг от друга и принцип суперпозиции для них не выполняется. Переход от уравнений (48) к уравнениям (49) можно рассматривать как переход от слабых полей к более сильным полям.

6 Невырожденные поличисла P_n

Рассмотрим некоторую систему невырожденных поличисел P_n [5], то есть n -мерных ассоциативно-коммутативных невырожденных гиперкомплексных чисел. Соответствующее координатное пространство x^1, x^2, \dots, x^n является финслеровым метрическим плоским пространством с элементом длины вида

$$ds = \sqrt{{}^o g_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n}}, \quad (50)$$

${}^o g_{i_1 i_2 \dots i_n}$ – метрический тензор, не зависящий от точки пространства. Такого рода финслеровы пространства встречаются в математической литературе (см., например, [6] – [9]),

но то, что все невырожденные поличисловые пространства относятся именно к такому типу финслеровых пространств было установлено, начиная с работ [10], [11] и в последующих работах тех же авторов, особо следует выделить работу [5].

Компоненты обобщенного импульса в геометрии (50) вычисляются по формулам:

$$p_i = \frac{{}^o g_{ij_2 \dots j_n} dx^{j_2} \dots dx^{j_n}}{\left({}^o g_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n} \right)^{\frac{n-1}{n}}}. \quad (51)$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы в пространстве невырожденных поличисел P_n всегда можно записать [5] в виде

$${}^o g^{i_1 i_2 \dots i_n} p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_n} - \mu^n = 0, \quad (52)$$

где $\mu > 0$ – некоторая постоянная, причем всегда найдется такой специальный базис (и, вообще говоря, не один) и такое $\mu > 0$, что

$$\left({}^o g^{i_1 i_2 \dots i_n} \right) = \left({}^o g_{i_1 i_2 \dots i_n} \right). \quad (53)$$

Перейдем к новой финслеровой геометрии на основе пространства невырожденных поличисел P_n , которая (новая геометрия) уже не является плоской, но отличие новой геометрии от исходной бесконечно мало, причем элемент длины в такой геометрии пусть имеет вид

$$ds = \sqrt[n]{\left[{}^o g_{i_1 i_2 \dots i_n} + \varepsilon h_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) \right] dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n}}, \quad (54)$$

где ε – бесконечно малая величина. Если в исходном плоском пространстве элемент объема определялся формулой

$$dV = dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n}, \quad (55)$$

то в новом пространстве с точностью до ε в первой степени имеем

$$dV_h \simeq \left[1 + \varepsilon \cdot C_0 {}^o g^{i_1 i_2 \dots i_n} h_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) \right] dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n}, \quad (56)$$

то есть согласно [1] лагранжиан слабого поля в пространстве с элементом длины (54) в первом приближении суть

$$\mathcal{L}_1 = {}^o g^{i_1 i_2 \dots i_n} h_{i_1 i_2 \dots i_n}(x). \quad (57)$$

Эта формула является обобщением формулы (7).

7 Гиперкомплексное пространство H_4

В физическом ("ортонормированном" [5]) базисе, в котором каждая точка этого пространства характеризуется четырьмя действительными координатами x^0, x^1, x^2, x^3 , четвертая степень элемента длины ds_{H_4} определяется формулой

$$\begin{aligned} (ds_{H_4})^4 &\equiv {}^o g_{ijkl} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= (dx^0 + dx^1 + dx^2 + dx^3)(dx^0 + dx^1 - dx^2 - dx^3) \times \\ &\times (dx^0 - dx^1 + dx^2 - dx^3)(dx^0 - dx^1 - dx^2 + dx^3) = \\ &= (dx^0)^4 + (dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 + 8dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 - \\ &- 2(dx^0)^2 (dx^1)^2 - 2(dx^0)^2 (dx^2)^2 - 2(dx^0)^2 (dx^3)^2 - \\ &- 2(dx^1)^2 (dx^2)^2 - 2(dx^1)^2 (dx^3)^2 - 2(dx^2)^2 (dx^3)^2. \end{aligned} \quad (58)$$

Сравним четвертую степень элемента длины ds_{H_4} в пространстве поличисел H_4 с четвертой степенью элемента длины ds_{Min} в пространстве Минковского:

$$(ds_{Min})^4 = (dx^0)^4 + (dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 - 2(dx^0)^2(dx^1)^2 - 2(dx^0)^2(dx^2)^2 - 2(dx^0)^2(dx^3)^2 + 2(dx^1)^2(dx^2)^2 + 2(dx^1)^2(dx^3)^2 + 2(dx^2)^2(dx^3)^2. \quad (59)$$

Таким образом,

$$(ds_{H_4})^4 = (ds_{Min})^4 + 8dx^0dx^1dx^2dx^3 - 4(dx^1)^2(dx^2)^2 - 4(dx^1)^2(dx^3)^2 - 4(dx^2)^2(dx^3)^2, \quad (60)$$

а в ковариантной записи имеем

$$(ds_{H_4})^4 = \left(\overset{\circ}{g}_{ij}\overset{\circ}{g}_{kl} + \frac{1}{3} \overset{\circ}{g}'_{ijkl} - \overset{\circ}{G}_{ijkl} \right) dx^i dx^j dx^k dx^l, \quad (61)$$

где

$$\overset{\circ}{g}'_{ijkl} = \begin{cases} 1, & \text{если индексы } i, j, k, l \text{ все разные,} \\ 0, & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases} \quad (62)$$

$$\overset{\circ}{G}_{ijkl} = \begin{cases} 1, & \text{если } i, j, k, l \neq 0 \text{ и } i = j \neq k = l, \\ & \text{или } i = k \neq j = l, \\ & \text{или } i = l \neq j = k; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (63)$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы в пространстве H_4 в физическом базисе можно записать следующим образом [5]:

$$(p_0 + p_1 + p_2 + p_3)(p_0 + p_1 - p_2 - p_3)(p_0 - p_1 + p_2 - p_3)(p_0 - p_1 - p_2 + p_3) - 1 = 0, \quad (64)$$

где p_i – обобщенные импульсы,

$$p_i = \frac{\partial ds_{H_4}}{\partial(dx^i)}. \quad (65)$$

Сравнивая формулу (64) с формулой (58), имеем

$$\overset{\circ}{g}^{ijkl} p_i p_j p_k p_l - 1 = 0. \quad (66)$$

Здесь

$$\overset{\circ}{g}^{ijkl} = \overset{\circ}{g}^{ij} \overset{\circ}{g}^{kl} + \frac{1}{3} \overset{\circ}{g}'^{ijkl} - \overset{\circ}{G}^{ijkl}, \quad (67)$$

причем

$$\left(\overset{\circ}{g}^{ijkl} \right) = \left(\overset{\circ}{g}_{ijkl} \right), \quad \left(\overset{\circ}{g}'^{ijkl} \right) = \left(\overset{\circ}{g}'_{ijkl} \right), \quad \left(\overset{\circ}{G}^{ijkl} \right) = \left(\overset{\circ}{G}_{ijkl} \right). \quad (68)$$

Для того, чтобы задать лагранжиан для слабых полей в первом приближении, надо задать тензор h_{ijkl} в формуле (57). В упрощенном варианте его можно разделить на две аддитивные составляющие: гравитационную часть и электромагнитную часть. Гравитационная часть может быть построена аналогично тому, как это делалось в разделах 3 и 5, с учетом того, что возможно использование еще и двухиндексных числовых тензоров, так как теперь тензоры $\overset{\circ}{g}^{ijkl}$ и h_{ijkl} имеют четыре индекса, а вот на том, как построить электромагнитную часть следует остановиться подробнее.

Так как хотелось бы, сохранив градиентную инвариантность лагранжиана, получить и в пространстве H_4 для свободного поля уравнения Максвелла, запишем электромагнитную часть тензора h_{ijkl} для свободного поля следующим образом:

$$h_{ijkl}^{A_k} = \chi(x) h_{ijkl}^{(1)} + [1 - \chi(x)] h_{ijkl}^{(2)}, \quad (69)$$

где тензоры $h_{ijkl}^{(1)}, h_{ijkl}^{(2)}$ – это тензоры, стоящие в круглых скобках в правых частях формул (28), (29). Тогда

$$\mathcal{L}_A = \overset{\circ}{g}{}^{ijkl} h_{ijkl}^{A_k} \equiv 2 \overset{\circ}{g}{}^{ij} \overset{\circ}{g}{}^{km} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \right). \quad (70)$$

Чтобы получить уравнения Максвелла не для свободного поля, а с источниками $j_i(x)$, надо аддитивно добавить к $h_{ijkl}^{(A_k)}$ (69) еще тензор

$$h_{ijkl}^{(j_k)} = \left(\frac{16\pi}{c} \right) \cdot \frac{1}{6} \left(2A_i j_j \overset{\circ}{g}{}_{kl} - A_i \overset{\circ}{g}{}_{jk} j_l - j_i \overset{\circ}{g}{}_{jk} A_l \right), \quad (71)$$

симметризованный по всем индексам, то есть тензор

$$h_{ijkl} = h_{ijkl}^{Max} \equiv h_{ijkl}^{(A_k)} + h_{ijkl}^{(j_k)}$$

описывает слабое электромагнитное поле с источниками $j_i(x)$, где, например,

$$j_i = \sum_b q_{(a)} \frac{\partial \psi_{(b)}}{\partial x^i}, \quad (72)$$

а $\psi_{(b)}$ – скалярные составляющие гравитационного поля.

Чтобы получить единую теорию электромагнитного и гравитационного полей, следует взять линейную комбинацию тензора $h_{ijkl}^{(Max)}$, отвечающего в первом приближении за электромагнитное поле, и тензора $h_{ijkl}^{(grav)}$, отвечающего в первом приближении за гравитационное поле:

$$h_{ijkl} = \mu h_{ijkl}^{(Max)} + \gamma h_{ijkl}^{(grav)}, \quad (73)$$

где μ, γ – постоянные. Тензор $h_{ijkl}^{(grav)}$ можно построить, например, так

$$h_{ijkl}^{grav} = \sum_{a=1}^N \varepsilon_{(a)} \frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial x^l} + \sum_{b=1}^M \epsilon_{(b)} \frac{\partial \psi_{(b)}}{\partial x^{(i}} \frac{\partial \psi_{(b)}}{\partial x^{j)}} \overset{\circ}{g}{}_{kl}, \quad (74)$$

где $\varepsilon_{(a)}, \epsilon_{(b)}$ – знаковые множители, а $\varphi_{(a)}, \psi_{(b)}$ – скалярные поля. Общее количество скалярных полей равно $(N + M)$.

Заключение

В данной работе показано, что геометрический подход [1] в теории поля, который обычно дает нелинейные неразделяющиеся уравнения поля, для слабых полей в первом приближении может дать систему независимых линейных уравнений. При усилении полей принцип суперпозиции (линейности) полей нарушается, уравнения поля становятся нелинейными и поля начинают взаимодействовать между собой. Можно считать, что эти изменения уравнений поля при переходе от слабых к более сильным полям происходят за счет двух механизмов: во-первых, качественное изменение уравнений поля для свободных полей в первом приближении; во-вторых, появление дополнительных источников поля, то есть порождение данного поля другими полями.

В рамках геометрического подхода в теории поля [1] произведено объединение электромагнитного и гравитационного полей как в четырехмерном псевдоримановом пространстве с метрическим тензором $g_{ij}(x)$, так и в четырехмерном кривом пространстве Бервальда-Моора с метрическим тензором $g_{ijkl}(x)$.

Литература

- [1] Г. И. Гарасько, Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (6), Т. 3 (2006), стр. 6–20.
- [2] П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
- [3] Г. И. Гарасько, Частное стационарное решение уравнения поля для пространства, конформно связанного с пространством Минковского. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (7), Т. 4 (2007).
- [4] Г. И. Гарасько, Пространство, конформно связанное с пространством Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (7), Т. 4 (2007).
- [5] Д. Г. Павлов, Г. И. Гарасько: Геометрия невырожденных поличисел. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (7), Т. 4 (2007).
- [6] M. Matsumoto, S. Numata: On Finsler spaces with 1-form metric. Tensor, N. S., Vol. 32 (1978), 161.
- [7] M. Matsumoto, S. Numata: On Finsler spaces with 1-form metric II. Berwald-Moor's metric., Tensor, N. S., Vol. 32 (1978), 275.
- [8] M. Matsumoto, S. Numata: On Finsler spaces with a cubic metric, Tensor, N. S., Vol. 33 (1979), 153.
- [9] H. Shimada: On Finsler spaces with the metric L of m -th root metric, Tensor, N. S., Vol. 33 (1979), 365–372.
- [10] Д. Г. Павлов: Обобщенные аксиомы скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (1) (2004), 5–19.
- [11] Г. И. Гарасько: Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (1) (2004), 75–88.

Weak fields

G. I. Garas'ko

Electrotechnical institute of Russia
gri9z@mail.ru

It is shown, that in the process of approximating weak fields, the geometric approach in field theory can lead to linear field equations for several independent fields. In case of field amplification, or for passing to the second-order approximation, the field equations generally become nonlinear, and the fields cease to be independent. This leads to the absence of the superposition law for each field in part, and to interaction between different fields. The unification within a unitary theory of gravitational and electro-magnetic fields is performed exactly within the framework of such a geometric approach in field theory in pseudo-Riemannian space and in the curved Berwald-Moor space.

Key-words: weak field, Berwald-Moor space, pseudo-Riemannian space, fields theory.

MSC: 53B40, 83C25, 81V15, 81V17, 81V22.

ПРОСТРАНСТВА, КОНФОРМНО СВЯЗАННЫЕ С ТРЕХМЕРНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ БЕРВАЛЬДА-МООРА

С. В. Лебедев

НИИ прикладной математики и механики МГТУ им. Н. Э. Баумана
serleb@rambler.ru

Г. И. Гарасько в начале 2007 г. был предложен новый подход в теории поля. Этот подход является геометрическим и использует концепцию экстремальности объема финслерова пространства, так что финслерова геометрия "сама себе" задает уравнение поля; кроме того, он использует формализм финслеровых пространств, разработанный П. К. Рашевским в 40-х годах 20 в. В данной работе этот геометрический подход в теории поля применен к трехмерному пространству с метрикой Бервальда-Моора. Представляется уравнение для "мировой функции", через которую выражается скалярное поле конформного фактора; находятся частные специальные решения этого уравнения в двух задачах: в задаче с экспоненциально расширяющейся во времени индикатрисой и в задаче со стационарным полем конформного фактора. Для второй задачи сформулирована квантово-механическая задача на собственные значения.

Ключевые слова: финслеровы пространства, конформные преобразования, индикатриса.

1 Введение

Трехмерная алгебра H_3 принадлежит к гиперболическим коммутативно-ассоциативным алгебрам H_n , которые, в свою очередь, составляют основную часть класса невырожденных поличисел [1]. С этими гиперболическими алгебрами ассоциированы финслеровы пространства, обладающие метрикой Бервальда-Моора; существуют философские и математические основания считать данные пространства составным элементом финслеровых расширений теории относительности [2]. Как уже отмечалось в [3], алгебра H_3 имеет одно явное преимущество: в ассоциированном с этой алгеброй 3-мерном метрическом пространстве в полной мере возможно применение компьютерной визуализации и анимации поверхностей, линий и фигур, что придает наглядность геометрическим построениям. С другой стороны, применяемый для исследования трехмерного финслерова пространства математический аппарат несколько проще, чем тот, который разработан в [4–6] для размерности $n = 4$. Поэтому возникает необходимость, следуя подходу, изложенному в [6], рассмотреть пространство, конформно сопряженное к трехмерному пространству с метрикой Бервальда-Моора.

Алгебра H_3 изоморфна алгебре трехмерных квадратных диагональных матриц; элемент этой алгебры в специальном базисе ψ_1, ψ_2, ψ_3 , ($\psi_i^2 = \psi_i$, $\psi_i \cdot \psi_j = 0$, $i \neq j$), который принято называть изотропным, имеет вид: $A = A^1\psi_1 + A^2\psi_2 + A^3\psi_3$. В изотропном базисе все соотношения алгебры наиболее просты, чем и обусловлена его применимость при выкладках. В "физическом" базисе [3] $1 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$, $j = 2 (s_1 \psi_1 + s_2 \psi_2 + s_3 \psi_3)$, $k = 2 (c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + c_3 \psi_3)$, где $c_1 = \cos \varphi$, $c_2 = \cos(\varphi + 2\pi/3)$, $c_3 = \cos(\varphi + 4\pi/3)$, $s_1 = \sin \varphi$, $s_2 = \sin(\varphi + 2\pi/3)$, $s_3 = \sin(\varphi + 4\pi/3)$ и где φ произвольно, норма числа данной алгебры (как детерминант матрицы, компоненты которой определяются тензором алгебры [7]) приобретает следующее выражение:

$$|A|^3 = (x^0)^3 - 3x^0(x^2 + y^2) + 2(\cos 3\varphi y^3 - \sin 3\varphi x^3) + 6xy(\sin 3\varphi y - \cos 3\varphi x). \quad (1)$$

Тогда с точностью до малых второго порядка включительно метрика приобретает псевдоевклидов вид:

$$ds = \sqrt[3]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3} \cong dx^0 - \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{dx^0}, \quad (2)$$

где $dx^0 = c dt$. Таким образом, выполнен принцип соответствия физических теорий, что и позволяет при обобщении релятивистского подхода рассматривать 3-мерное пространство с метрикой Бервальда-Моора.

Финслерово пространство ξ^1, ξ^2, ξ^3 , конформно связанное с пространством Бервальда-Моора, в изотропном базисе имеет метрическую функцию вида:

$$L(d\xi; \xi) = \kappa(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \sqrt[3]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3}, \quad (3)$$

где $\kappa(\xi) > 0$ – поле конформного фактора, которое определяется единственным образом. Длина отрезка кривой $\xi^i = \xi^i(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ – параметр вдоль кривой, определяется с помощью интеграла вдоль этой кривой:

$$l_{1,2} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \kappa(\xi) \sqrt[3]{\dot{\xi}^1 \dot{\xi}^2 \dot{\xi}^3} d\tau, \quad (4)$$

где $\dot{\xi}^i \equiv d\xi^i/d\tau$. Тогда компоненты обобщенного импульса можно определить в соответствии с их определением по формулам:

$$p_i = \frac{1}{3} \kappa(\xi) \frac{\sqrt[3]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3}}{d\xi^i}. \quad (5)$$

Эти компоненты не являются независимыми, поскольку они связаны так называемым тангенциальным уравнением индикатрисы:

$$\Phi(p; \xi) = 0, \quad (6)$$

где функция $\Phi(p; \xi)$ – функция Финслера – определена неоднозначно. Для конформно связанного с H_3 пространства тангенциальное уравнение индикатрисы имеет вид:

$$p_1 p_2 p_3 - \frac{\kappa^3(\xi)}{3^3} = 0. \quad (7)$$

При известной зависимости конформного фактора от координат $\kappa(\xi)$ метрическая функция $L(d\xi; \xi)$ и функция Финслера $\Phi(p; \xi)$ определены, а для нахождения действия как функции координат $S(\xi)$ необходимо использовать уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\Phi\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}; \xi\right) = 0. \quad (8)$$

Тогда возможны три различных формы уравнений для нахождения экстремалей ("геодезических"): во-первых, они записываются как уравнения Лагранжа-Эйлера

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L(\dot{\xi}; \xi)}{\partial \dot{\xi}^i} - \frac{\partial L(\dot{\xi}; \xi)}{\partial \xi^i} = 0; \quad (9)$$

во-вторых, в каноническом виде

$$\dot{\xi}^i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \chi'(p; \xi), \quad p_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i} \cdot \chi'(p; \xi), \quad (10)$$

где $\lambda(p; \xi) > 0$ – произвольная функция; в-третьих, возможна еще одна форма этих уравнений

$$\dot{\xi}^i = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \right|_{p_i = \frac{\partial S}{\partial \xi^i}} \cdot \lambda(\xi), \quad (11)$$

где $\lambda(\xi) > 0$ – некоторая функция.

Согласно подходу П. К. Рашевского [8], формулы (8)–(11) справедливы для любого финслерова пространства. Для пространства ξ^1, ξ^2, ξ^3 , конформно связанного с 3-мерным пространством Бервальда-Моора, уравнение Гамильтона-Якоби (8) нелинейно и имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} = \frac{\kappa^3(\xi)}{3^3}, \quad (12)$$

в то время как уравнения (11) для нахождения экстремалей таковы:

$$\dot{\xi}^i = \frac{\frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^3}}{\frac{\partial S}{\partial \xi^i}} \cdot \lambda(\xi). \quad (13)$$

Поскольку экстремали ("геодезические") являются мировыми линиями некоторых объектов (или частиц), то в рассматриваемом пространстве ξ^1, ξ^2, ξ^3 для этих материальных частиц определен как лагранжев формализм (9), так и аналог гамильтонова формализма (10) (с заменой функции Гамильтона на функцию Финслера и методом Гамильтона-Якоби (8), (11)).

В соответствие с гипотезой *самодостаточности геометрии* [4] все входящие в метрическую функцию поля должны удовлетворять принципу экстремальности произвольного объема, – и поэтому поле конформного фактора $\kappa(\xi)$ должно быть вполне определенным.

Это скалярное поле конформного фактора будем выражать через скалярное поле $S_W(\xi)$ с помощью соотношения:

$$\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3} = \frac{\kappa^3(\xi)}{3^3}. \quad (14)$$

Тогда лагранжиан, необходимый для получения уравнения поля, допускает следующую запись [4]:

$$\mathcal{L} = const \cdot \kappa^3(\xi) \equiv const \cdot 3^3 \cdot \frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}, \quad (15)$$

и уравнение скалярного поля S_W приобретает вид:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left[\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left[\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left[\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \right] = 0. \quad (16)$$

Функцию $S_W(\xi)$, являющуюся решением этого уравнения, можно (условно) называть "мировой функцией". Поле конформного фактора $\kappa(\xi)$ может быть найдено по известной "мировой функции" с помощью соотношения (14):

$$\kappa(\xi) = 3 \sqrt[3]{\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}}. \quad (17)$$

Таким образом, "мировая функция" $S_W(\xi)$ – это решение полевого уравнения (16), и это решение определяет зависимость конформного фактора $\kappa(\xi)$ от координат с помощью (17), в то время как функция действия $S(\xi)$ – это решение уравнения

Гамильтона-Якоби (12), причем при его решении функция конформного фактора $\kappa(\xi)$ считается известной по (17).

По известной "мировой функции" $S_W(\xi)$ в пространстве ξ^1, ξ^2, ξ^3 определяется нормальная конгруэнция экстремалей ("геодезических"), уравнение которых таково:

$$\xi^i = \frac{\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}}{\frac{\partial S_W}{\partial \xi^i}} \cdot \lambda(\xi), \quad (18)$$

где $\lambda(\xi) > 0$ – произвольна, $\xi^i \equiv d\xi^i/d\tau$, τ – параметр вдоль кривой. Условно считаем, что именно по этим экстремалам движутся частицы самого скалярного поля $S_W(\xi)$ (или поля конформного фактора $\kappa(\xi)$) – частицы "эфира" или "вакуума". Т. о., в соответствии с (17), (18) поле конформного фактора $\kappa(\xi)$ и конгруэнция геодезических определяются одной и той же "мировой функцией" и поэтому самосогласованы.

При использовании формализма П. К. Ращевского и квантово-механической идеи о соответствии физических величин и эрмитовых операторов, в любом финслеровом пространстве определима не только классическая механика материальных частиц, но и основные квантово-механические представления [6].

Так как величины ξ^i и p_i канонически сопряжены, при введении скобок Пуассона в финслеровом пространстве заменим функцию Гамильтона на функцию Финслера. Дальнейшая замена скобок Пуассона коммутаторами даст представление координат и импульсов в пространстве функций состояния $\Psi(\xi)$ как эрмитовых операторов. При этом учитывается возможная зависимость элемента объема от точки пространства.

Поскольку элемент объема в пространстве ξ^1, ξ^2, ξ^3 имеет вид:

$$dV = \kappa^3 d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3, \quad (19)$$

то в конформно сопряженном с H_3 пространстве в координатном представлении операторы компонент импульса таковы:

$$p_i \rightarrow \hat{p}_i = i\hbar \frac{1}{\kappa^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \kappa^{3/2} \quad \Rightarrow \quad [\hat{p}_i, \xi^j] = i\hbar \delta_j^i. \quad (20)$$

После перехода от классической механики к квантовой механике тангенциальное уравнение индикатрисы по сути есть или аналог уравнения Шредингера (для нерелятивистских частиц) или аналог уравнения Клейна-Гордона (для релятивистских частиц); общий вид этого уравнения через функцию Финслера таков [6]:

$$\Phi(\hat{p}; \xi) \Psi(\xi) = 0, \quad (21)$$

где $\Psi(\xi)$ – функция состояния физической системы. Это уравнение есть линейное уравнение в частных производных, а в конформно связанном с H_3 пространстве уравнение (21) имеет вид:

$$\frac{\partial^3}{\partial \xi^1 \partial \xi^2 \partial \xi^3} \kappa^{3/2} \Psi = \frac{i \kappa^{9/2}}{3^3 \hbar^3} \Psi. \quad (22)$$

2 Определение специального класса решений уравнения поля для пространства, конформно связанного с H_3

Уравнение (16) является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка. Поскольку неизвестны методы нахождения общих решений уравнений такого типа, ищем специальные, физически значимые классы решений.

Известно, что наиболее простые классы решений задач ОТО – решения, зависящие от временной и только от одной пространственной (радиальной) переменной. Поэтому требуем, чтобы "мировая функция" зависела только от этих двух независимых переменных: одной временной и одной пространственной, псевдорадиальной. В качестве псевдорадиальной координаты принимаем расстояние между параллельными мировыми линиями, определяемое хроногеометрическим способом – посылкой светового сигнала на другую бесконечно близкую линию и приемом обратного сигнала. Кроме того, конкретизируем вид такой зависимости "мировой функции" от пространственной и временной координат аналогично тому, как это сделано в [4] и [5] для пространства, конформно связанного с пространством Минковского. Тогда имеем 2 варианта записи "мировой функции":

$$1) \quad S_W = \exp(-\gamma x^0) \psi(r), \quad (23)$$

где γ – постоянная;

$$2) \quad S_W = p_0 x^0 - \psi(r), \quad (24)$$

где p_0 – постоянная, а $\psi(r)$ – неизвестная функция одной действительной переменной.

По виду требования, налагаемого на вид "мировой функции", первая задача характеризуется как задача с расширяющейся по времени индикатрисой, а вторая – как задача со стационарным конформным фактором (см. два следующих раздела).

Учитывается, что световые лучи распространяются по изотропным плоскостям, так что по ходу лучей выполняется соотношение $ds = 0$. Поэтому удобно ввести в геометрическое рассмотрение куб, который построен так, что точки посылки сигнала и приема обратного сигнала являются его вершинами, а мировая линия соединяет эти точки и является главной диагональю куба (см. рис. 1). Прием сигнала на другой мировой линии и отправка обратного сигнала происходят на одном из 6 ребер куба. Каждому из ребер припишем индекс l , равный индексу параллельной этому ребру оси изотропного базиса. Упомянутые выше 6 ребер куба образуют замкнутую пространственную ломаную линию, являющуюся индикатрисой некоторого финслерова пространства, расстояния в котором определяются хроногеометрическим образом. Для различения разных точек индикатрисы введем координату λ , которую назовем псевдоокружной. Эта координата на каждом из 6 ребер меняется линейным образом (по мере удаления от одной вершины и приближения к другой) от 0 до 1, так что $\lambda \in [0, 1)$. Для упрощения исследования не будем рассматривать 6 точек излома индикатрисы (6 "боковых" вершин куба), в которых индикатриса не является гладкой и где координата λ принимает нулевое значение.

Тогда расстояние между двумя близкими и покоящимися относительно друг друга наблюдателями (параллельными прямыми мировыми линиями) в 2-мерном пространстве наблюдателей x, y ("истинном" пространстве) имеет вид:

$$dr = \sqrt{3}(c_l dx - s_l dy), \quad (25)$$

где l – индекс упомянутого выше ребра куба, которого касается испущенный луч.

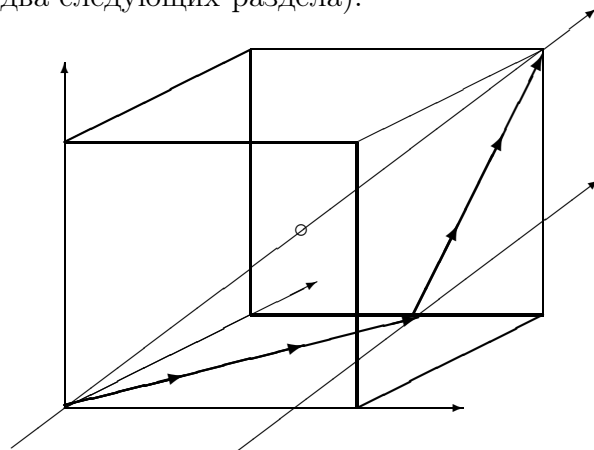


Рис. 1

В каждом из 6 ребер индикатрисы связь между "пространственными" координатами x, y и координатами r, λ имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot \frac{2}{3}(s_j + s_l \cdot \lambda), \\ y &= r \cdot \frac{2}{3}(c_j + c_l \cdot \lambda), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где $j \neq l$, а луч в направлении "вперед" движется в изотропной плоскости (ξ_j, ξ_l) .

Вычисляя модуль якобиана соответствующего преобразования координат, получим следующее выражение:

$$\left| \frac{D(x, y)}{D(r, \lambda)} \right| = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot r. \quad (27)$$

Тогда выражение для произведения дифференциалов координат принимает вид:

$$dx^0 dx dy = \left| \frac{D(x, y)}{D(r, \lambda)} \right| dx^0 dr d\lambda = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot r dx^0 dr d\lambda. \quad (28)$$

Лагранжиан (15) в координатах x^0, x, y запишется следующим образом (постоянный множитель опускаем):

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^3 - \frac{3}{4} \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right) \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x} \right)^3 s_1 s_2 s_3 + \\ &+ \left(\frac{\partial S_W}{\partial y} \right)^3 c_1 c_2 c_3 - \frac{3}{4} \left(\frac{\partial S_W}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial S_W}{\partial y} \right) \cos 3\varphi + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial S_W}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial S_W}{\partial y} \right)^2 \sin 3\varphi. \end{aligned} \quad (29)$$

Учет (25) и того, что в соответствие с (23) и (24) $S_w = S_w(x_0, r)$, дает следующее выражение для лагранжиана:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^3 - \frac{9}{4} \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right) \left(\frac{\partial S_W}{\partial r} \right)^2 + 3\sqrt{3} \left(\frac{\partial S_W}{\partial r} \right)^3 (s_l^3 s_1 s_2 s_3 + c_l^3 c_1 c_2 c_3) + \\ &+ \frac{9\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\partial S_W}{\partial r} \right)^3 (-c_l^2 s_l \cos 3\varphi + s_l^2 c_l \sin 3\varphi). \end{aligned} \quad (30)$$

Тогда с учетом (28) элемент объема есть:

$$dV = \mathfrak{L} \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot r dx^0 dr d\lambda. \quad (31)$$

После интегрирования по переменной λ в пределах ребра и суммирования по всем 6 ребрам полученный элемент объема в двумерном пространстве x^0, r имеет вид:

$$dV_r = const \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^3 - \frac{9}{4} \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right) \left(\frac{\partial S_W}{\partial r} \right)^2 \right] \cdot r \cdot dx^0 dr$$

Тогда уравнение поля для "мировой функции" $S_W = S_W(x^0, r)$ таково:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \left[4 \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^2 - 3 \left(\frac{\partial S_W}{\partial r} \right)^2 \right] r \right\} - 6 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial S_W}{\partial x^0} \frac{\partial S_W}{\partial r} \cdot r \right\} = 0. \quad (32)$$

Если мы знаем решение этого уравнения, поле конформного фактора находится из соотношения (15) таким образом:

$$\kappa(x^0, r) = \sqrt[3]{\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^3 - \frac{9}{4}\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)\left(\frac{\partial S_W}{\partial r}\right)^2}. \quad (33)$$

Когда мы вводим соответствующие координатам x^0, r обобщенные импульсы p_0, p_r , тангенциальное уравнение индикатрисы (6) согласно формуле (33) приобретает следующий вид:

$$p_0^3 - \frac{9}{4}p_0p_r^2 - \kappa^3(x^0, r) = 0. \quad (34)$$

3 Модельное решение с индикатрисой, расширяющейся во времени

Запишем уравнение (32) в предположении, что функция S_W имеет вид:

$$S_W(x^0, r) = S_0 e^{-\gamma x^0} \psi(r), \quad (35)$$

где γ и S_0 – постоянные. Подставляя функцию $S(x^0, r)$ (35) в уравнение (32), получим:

$$r \left[4\gamma^2 \psi^2 - 3 \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \right] + 6 \frac{d}{dr} \left[r\psi \frac{d\psi}{dr} \right] = 0. \quad (36)$$

После ввода безразмерной переменной $\xi \equiv \gamma r$ уравнение приобретает следующий вид:

$$\xi \left[4\psi^2 - 3 \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)^2 \right] + 6 \frac{d}{d\xi} \left[\xi\psi \frac{d\psi}{d\xi} \right] = 0. \quad (37)$$

В силу однородности уравнения по искомой функции сделаем замену вида:

$$\psi(\xi) = \psi_0 \exp \left(\int_0^\xi \varphi(\xi) d\xi \right). \quad (38)$$

Для искомой функции $\varphi(\xi)$ получается уравнение Риккати:

$$\xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \varphi + \frac{3}{2}\xi\varphi^2 + \frac{2}{3}\xi = 0. \quad (39)$$

Если $\xi \ll 1$, то после разложения в ряд в окрестности нуля находится приближенное решение вида:

$$\varphi(\xi) \simeq -\frac{\xi}{3} - \frac{\xi^3}{24} + \mathcal{O}(\xi^5). \quad (40)$$

Конформный фактор вычисляется по следующей формуле:

$$\kappa = \gamma \sqrt[4]{1 - \frac{9}{4}\varphi^2(\xi)} \cdot S_W. \quad (41)$$

Закон движения материальных объектов, формирующих рассматриваемое поле, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^0}{d\tau} &= 3 \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{\partial S_W}{\partial r} \right)^2 \right] \lambda(x^0, r_d), \\ \frac{dr_d}{d\tau} &= -\frac{9}{2} \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right) \left(\frac{\partial S_W}{\partial r} \right) \lambda(x^0, r_d), \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

или после подстановки S_W

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^0}{d\tau} &= 3\gamma^2 \left[1 - \frac{3}{4}\varphi^2(\xi) \right] S_W^2 \lambda(x^0, r), \\ \frac{dr}{d\tau} &= -\frac{9}{2}\gamma^2 \varphi(\xi) S_W^2 \lambda(x^0, r), \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

но тогда, разделив одно на другое, получаем выражение для скорости разбегания частиц следующего вида:

$$\frac{dr}{dx^0} = -\frac{3}{2} \frac{\varphi(\xi)}{1 - 3/4 \cdot \varphi^2(\xi)}. \quad (44)$$

Эта формула при $\xi \ll 1$ упрощается и принимает вид:

$$\frac{dr}{dt} = H_0 \left[1 + \frac{5}{24} \left(\frac{H_0}{c} \right)^2 r^2 \right] \cdot r, \quad H_0 \equiv \gamma c. \quad (45)$$

Таким образом, в отличие от [5, 6] коэффициент Хаббла увеличивается с увеличением расстояния между частицами. Заметим также, что, поскольку радиальная переменная r неевклидова ($r \neq \sqrt{x^2 + y^2}$), то формула (45) отражает анизотропию пространства.

4 Модельное решение со стационарным полем конформного фактора

Стационарное поле конформного фактора $\kappa(x)$ получим при задании "мировой функции" как решения уравнения (32) в виде:

$$S_W = p_0 x^0 - \psi(r), \quad (46)$$

где $p_0 > 0$ – постоянная. Тогда для неизвестной функции ψ получим уравнение вида:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} \right) = 0. \quad (47)$$

Интегрируя, получаем следующее соотношение:

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{C}{r}, \quad (48)$$

где C – постоянная интегрирования. Тогда конформный фактор есть:

$$\kappa(r) = p_0 \sqrt[3]{1 - \frac{9C^2}{4p_0^2 r^2}}. \quad (49)$$

Положительность подкоренного выражения предполагает выполнение следующего условия:

$$\frac{9C^2}{4p_0^2 r^2} < 1 \quad \Rightarrow \quad r > r^* \equiv \frac{3|C|}{2p_0}. \quad (50)$$

Следовательно, внутри некоторой области при достаточно малых r скалярные поля $\kappa(r)$ и $S_W(x^0, r)$ отсутствуют.

Движение материальных объектов (частиц) рассматриваемого поля определяется уравнениями вида :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^0}{d\tau} &= 3p_0^2 \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{C}{p_0 r} \right)^2 \right] \cdot \lambda(x^0, r), \\ \frac{dr}{d\tau} &= \frac{9}{2} p_0^2 \left(\frac{C}{p_0 r} \right) \cdot \lambda(x^0, r), \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

что дает следующее выражение для скорости "сбегания" или "разбегания" материальных объектов:

$$\frac{dr}{dx^0} = \frac{3}{2} \frac{\left(\frac{C}{p_0 r} \right)}{1 - \frac{3}{4} \left(\frac{C}{p_0 r} \right)^2}. \quad (52)$$

Если $C < 0$, то из (52) следует, что поле $\kappa(r)$ соответствует полю притяжения; при $r = r^*$ скорость достигает значения $dr/dx^0 = 3/2 c$. Потребовав, чтобы правая часть соотношения (52) по модулю была строго больше единицы, получим:

$$\frac{C}{p_0 r} > \sqrt{\frac{7}{3}} - 1 \quad \Rightarrow \quad r < r_0 \equiv \frac{|C|}{p_0 \left(\sqrt{\frac{7}{3}} - 1 \right)} \approx 1.90 \frac{|C|}{p_0}, \quad (53)$$

откуда также следует, что $r_0 > r^*$. Из соотношения (53) следует факт существования аналога *черной дыры* при $r < r_0$.

В соответствии с (51) материальные частицы в поле притяжения $\kappa(r)$ движутся по радиальным лучам; как следует из (52), при $r \rightarrow \infty$ их скорость стремится к нулю. При приближении к началу координат эта скорость увеличивается, в то время как конформный фактор уменьшается; и при $r = r_0$ (где $k_{max}/k \simeq 1.4$) скорость "сбегания" достигает скорости света.

5 Постановка задачи на собственные значения (для стационарного поля $k(\xi)$)

Воспользуемся первой формулой (20) для записи координат импульса в операторной форме в координатном представлении:

$$\hat{p}_0 = i\hbar \frac{1}{r\kappa^{3/2}} \frac{\partial}{\partial x^0} r\kappa^{3/2}, \quad \hat{p}_r = i\hbar \frac{1}{r\kappa^{3/2}} \frac{\partial}{\partial r} r\kappa^{3/2}, \quad (54)$$

что позволяет записать уравнение (22) при условии, что момент количества движения $l = 0$, в виде:

$$\hbar^3 \left[\frac{\partial^3}{(\partial x^0)^3} - \frac{9}{4} \frac{\partial}{(\partial x^0)} \frac{\partial^2}{(\partial r)^2} \right] r\kappa^{3/2} \Psi(x^0, r) = r\kappa^{9/2} i \Psi(x^0, r), \quad (55)$$

где $\Psi(x^0, r)$ – функция состояния физической системы (волновая функция). Приняв, что поле $\kappa(r)$ задается выражением (49), волновую функцию будем искать в виде:

$$\Psi = \frac{1}{r\kappa^{3/2}} \exp\left(-\frac{i E}{\hbar c} x^0\right) y(r). \quad (56)$$

После подстановки (56) в (55) получим уравнение вида:

$$\frac{9}{4} \left(\frac{E}{\hbar c} \right) \frac{d^2 y}{dr^2} + \left[\left(\frac{E}{\hbar c} \right)^3 - \frac{p_0^3}{\hbar^3} + \frac{p_0^3}{\hbar^3} \left(\frac{r^*}{r} \right)^2 \right] y = 0. \quad (57)$$

Введением следующих безразмерных величин

$$\varrho \equiv \frac{r}{r^*}, \quad \mathcal{E} \equiv \mu_0 \frac{\left(\frac{E}{p_0 c}\right)^3 - 1}{\frac{9}{4} \left(\frac{E}{p_0 c}\right)}, \quad \mu \equiv \frac{4}{9} \mu_0 \left(\frac{p_0 c}{E}\right), \quad \mu_0 \equiv \left(\frac{p_0}{\hbar}\right)^2 \quad (58)$$

уравнение приводится к безразмерному виду:

$$\frac{d^2 y}{d\varrho^2} + \left\{ \mathcal{E} + \mu \frac{1}{\varrho^2} \right\} y = 0. \quad (59)$$

Уравнение (59) по форме совпадает с одномерным уравнением Шредингера для нерелятивистской частицы, находящейся в поле притяжения с потенциалом, который равен

$$U = -\frac{\mu}{\varrho^2}. \quad (60)$$

Отсутствие поля при $\varrho < 1$ интерпретируем как наличие бесконечно глубокой потенциальной ямы, что дает следующее граничное условие:

$$y(1) = 0. \quad (61)$$

Известно, что существует конечное число локализованных (связанных) состояний квантовой частицы с дискретным спектром отрицательных значений параметра \mathcal{E} . Пусть из решения задачи на собственные значения (59), (61) этот спектр уже известен, введем для него следующие обозначения:

$$\mathcal{E} = -\sigma_0^2, -\sigma_1^2, \dots, -\sigma_{k-1}^2, \quad \sigma_i \in \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}\}. \quad (62)$$

Тогда значения энергии в соответствии со вторым выражением (58) находятся по формуле:

$$\frac{E}{c p_0} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{3\sigma_i^2}{4\mu_0}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{3\sigma_i^2}{4\mu_0}\right)^3}}. \quad (63)$$

6 Заключение

В данной работе получены два модельных решения уравнения поля для пространства, конформно связанного с трехмерным пространством Бервальда-Моора (пространством поличисел H_3). Первое решение – с расширяющейся во времени индикатрисой – дает эффект ускорения разбегания материальных объектов. Второе решение – со стационарным полем конформного фактора – приводит к потенциальному полю притяжения с потенциалом, убывающим как $1/r^2$, где r – аналог радиуса цилиндрической системы координат трехмерного евклидова пространства в пространстве Бервальда-Моора. Кроме того, в этом решении конформный фактор монотонно уменьшается от конечного значения (на бесконечности) до минимального значения на границе "черной дыры" (минимальное значение конформного фактора на $\sim 40\%$ меньше его максимального значения). Для такого стационарного поля сформулирована квантово-механическая задача на собственные значения.

Литература

- [1] Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов: *Геометрия невырожденных поличисел*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 3 (7), Vol. 3, 2007.
- [2] Д. Г. Павлов: *Философские и математические основания финслеровых расширений теории относительности*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (4), 2005, 12–18.
- [3] С. В. Лебедев: *Свойства пространств, ассоциированных с коммутативно-ассоциативными алгебрами H_3 и H_4* , Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (1), 2004, 68–74.
- [4] Г. И. Гарасько: *Теория поля и финслеровы пространства*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (6), Vol. 3, 2007.
- [5] Г. И. Гарасько: *Частное стационарное решение уравнения поля для пространства, конформно связанного с пространством Минковского*. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 3 (7), Vol. 3, 2007.
- [6] Г. И. Гарасько: *Пространства, конформно связанные с пространством Бервальда-Моора*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 3 (7), Vol. 3, 2007.
- [7] А. И. Кострикин: *Введение в алгебру*, М.: Наука, 1977, 496 с.
- [8] П. К. Рашевский: *Геометрическая теория уравнений с частными производными*, М.-Л.: ОГИЗ, 1947. Гл. 10.

Spaces which are conformally connected with the 3-dimensional Berwald-Moor space

S. V. Lebedev

MSTU n. a. N. E. Bauman
serleb@rambler.ru

G.I. Garas'ko proposed in 2007 a new approach in field theory. This approach is geometric and is based on the extremization of volume in the Finsler space, and hence the Finsler geometry intrinsically provides the field equation. Moreover, this approach uses the Finslerian formalism developed by P.K. Rashevski in the 40's. In the present work this geometric approach to field theory is applied in the 3-dimesional space endowed with the Berwald-Moor metric. There is presented the equation for the "Universal function", which is involved in the scalar field of the conformal factor; particular special solutions for this equation are determined in two cases: in the case of exponentially expanding in time indicatrix, and in the case of stationary field with conformal factor. For the second case is stated the quantum-mechanical eigenvalues problem.

Key-words: Finslerian formalism, conformal transformation, indicatrix.

MSC: 53B40, 30C35, 81T10, 81T40, 70S99.

ФИЗИЧЕСКОЕ ВРЕМЯ И РАССТОЯНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Р. Г. Зарипов

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия

zaripov@mail.knc.ru

Приводится разбиение интервала между событиями в глобальном четырехмерном пространстве-времени Бервальда-Моора, из которого вытекает интервал физического времени, нелинейно зависящий от координатного времени и координат событий. Дается определение расстояния в виде полунормы в векторной форме для собственного трехмерного пространства как множества одновременных событий при сигнальном методе синхронизации разноместных часов. Рассматривается алгебра квадратов в скалярно-векторной форме и приводятся элементы векторной алгебры в геометрии собственного трехмерного пространства. Новые векторные операции связаны с перманентами третьего порядка. Определяется трехмерная физическая скорость и ее полунорма в собственном пространстве.

Ключевые слова: геометрия Бервальда-Моора, расстояния, синхронизация часов, квадратура.

1. Введение

Известно, что координация событий во времени в трехмерном пространстве Евклида устанавливается сигнальным методом, впервые введенным А. Пуанкаре в своей знаменитой работе [1] при определении отношения одновременности разноместных событий в инерциальной системе отсчета. В итоге базисом современной физической теории (в случае специальной теории относительности) является локальное изотропное четырехмерное псевдоевклидово пространство-время Минковского [2] в галилеевых координатах $\mathbf{x} = (x, y, z)$, являющееся подпространством в геометрии с метрической функцией

$$F = ds = \left[(c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)^2 \right]^{1/4} = [(cdt - |\mathbf{dx}|)^2 (cdt + |\mathbf{dx}|)^2]^{1/4}, \quad (1.1)$$

которая при $dT_0 = F/c = 0$ для собственного времени T_0 имеет две характеристики для сигнала кратности два.

В настоящее время приобретают все большую значимость исследования в области финслеровой геометрии. Это объясняется и новизной возникающих здесь теоретических проблем и важностью приложений для ряда новых экспериментальных данных. Одним из перспективных подходов является модель известного локального полностью анизотропного четырехмерного финслерова пространства-времени с метрической функцией Бервальда-Моора

$$\begin{aligned} F = ds &= [c^4 dt^4 + dx^4 + dy^4 + dz^4 - \\ &- 2(c^2 dt^2 dx^2 + c^2 dt^2 dy^2 + c^2 dt^2 dz^2 + dx^2 dy^2 + dy^2 dz^2 + dz^2 dx^2) + 8cdtdxdydz]^{1/4} = \\ &= [(cdt + dx + dy + dz)(cdt - dx + dy - dz)(cdt + dx - dy - dz)(cdt - dx - dy + dz)]^{1/4}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

имеющих четыре различные характеристики для сигнала.

В работе [3] рассматривается пространство-время с (1.2) и дается новое определение отношения одновременности разноместных событий при сигнальном методе в инерциальной системе отсчета. Сигнал распространяется в собственном трехмерном пространстве с четырьмя выделенными направлениями. Однако вопрос о геометрии собственного

трехмерного пространства, не являющейся геометрией Евклида, как в случае с (1.1), остается открытым. Известен интересный вариант определения расстояния в таком трехмерном пространстве [4], основанный на методе равноудаленности разноместных событий от начала координат, что приводит к зависимости расстояния от произвольного временного параметра. Это затрудняет физическую интерпретацию такого метода. Представляется необходимым восполнить это пробел и применить традиционный подход определения собственного трехмерного пространства, как множества одновременных (причинно-несвязных) событий, что и является целью настоящей работы. В отличие от четырехмерной псевдоевклидовой геометрии Минковского, здесь определяется множество одновременных событий по интервалу физического времени, не совпадающему с интервалом координатного времени, а включающему в себя нелинейно координатное время и пространственные координаты. Из соответствующего разбиения интервала между событиями, приводится функция в виде полунормы, равная расстоянию в собственном трехмерном пространстве. Элементы векторной алгебры в собственном трехмерном пространстве даются на основе алгебры квадратов, представляемых в скалярно-векторной форме, и теории перманентов. Определяется трехмерная физическая скорость, нелинейно зависящая от координатной скорости в собственном пространстве, и ее полунорма.

2. Определения интервала физического времени и расстояния в собственном трехмерном пространстве

В релятивистской теории (в случае специальной теории относительности) собственным трехмерным пространством является множество одновременных (причинно-несвязанных) событий по координатному времени. Так, для глобального псевдоевклидового пространства-времени при равенстве интервала физического времени $T_{12}(t_2 - t_1) = (t_2 - t_1) = 0$ для метрической функции (1.1) в форме разбиения

$$s_{12} = \left\{ [c^2 T_{12}^2 (t_2 - t_1) - \rho^2 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]^2 \right\}^{1/4} \quad (2.1)$$

имеем собственное трехмерное пространство с расстоянием, равным длине вектора $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$

$$\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \rho(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \geq 0 \quad (2.2)$$

для геометрии пространства Евклида с известной векторной алгеброй. Данное собственное трехмерное пространство определяется для причинно-несвязанных событий в пространственноподобных интервалах с $s_{12}^2 < 0$.

Рассмотрим релятивистскую теорию для глобального четырехмерного пространства-времени Бервальда-Моора с интервалом между событиями

$$\begin{aligned} s_{12} &= \left\{ \prod_m^4 [c(t_2 - t_1) + \varepsilon^m (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] \right\}^{1/4} = \\ &= \left\{ c^4 (t_2 - t_1)^4 - 2c^2 (t_2 - t_1)^2 [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] + \right. \\ &+ 8c (t_2 - t_1) (x_2 - x_1) (y_2 - y_1) (z_2 - z_1) + (x_2 - x_1)^4 + (y_2 - y_1)^4 + (z_2 - z_1)^4 \\ &\left. - 2(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^2 - 2(y_2 - y_1)^2 (z_2 - z_1)^2 - 2(z_2 - z_1)^2 (x_2 - x_1)^2 \right\}^{1/4} \end{aligned} \quad (2.3)$$

и известными значениями компонентов векторов $\varepsilon^1 = (1, 1, 1)$, $\varepsilon^2 = (-1, 1, -1)$, $\varepsilon^3 = (1, -1, -1)$, $\varepsilon^4 = (-1, -1, 1)$ выделенных направлений в трехмерном пространстве,

которые удовлетворяют равенствам [3]

$$\begin{aligned} \sum_m^4 \varepsilon_\alpha^m &= 0, & \frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon_\alpha^m \varepsilon_\beta^m &= \delta_{\alpha\beta}, & \frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon_\alpha^m \varepsilon_\beta^m \varepsilon_\gamma^m &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}, \\ 1 + (\varepsilon^m)^2 &= 4, & 1 + (\varepsilon^m \varepsilon^r) &= 0 & (m \neq r). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера и $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ есть трехмерный абсолютно симметричный символ со свойством $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 1$ при $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, а остальные значения являются нулевыми, m – номер вектора и α, β имеют значения 1, 2, 3.

Неравенство $s_{12}^4 > 0$ определяет область причинно-связанных событий в пространстве-времени с элементом собственного времени $(T_0)_{12} = s_{12}/c$, являющимся средней геометрической величиной от положительных интервалов времен, $s_{12}^4 < 0$ – область причинно-несвязанных событий со значением расстояния для собственного трехмерного пространства и равенство $s_{12}^4 = 0$ дает четыре характеристики (или гиперповерхности) для сигнала, движущегося с максимальной скоростью при установлении отношения одновременности разноместных событий [3].

Определим интервал физического времени. Для чего представим интервал (2.3) в форме следующего разбиения

$$s_{12} = [c^4 T_{12}^4 (t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) - \rho^4 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]^{1/4}. \quad (2.5)$$

Из (2.5) следует, что при $s_{12}^4 < 0$ собственное 3-мерное пространство с расстоянием

$$\begin{aligned} \rho (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \rho (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \left\{ - \prod_m^4 [\varepsilon^m (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] \right\}^{1/4} = \\ &= \left\{ - \frac{1}{4!} \varepsilon_{mnlk} [\varepsilon^m (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] [\varepsilon^n (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] [\varepsilon^k (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] [\varepsilon^l (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] \right\}^{1/4} = \\ &= \left\{ - (x_2 - x_1)^4 - (y_2 - y_1)^4 - (z_2 - z_1)^4 + \right. \\ &+ 2 [(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 (z_2 - z_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 (x_2 - x_1)^2] \left. \right\}^{1/4} = \\ &= \left\{ - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^2 + \right. \\ &+ 4 [(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 (z_2 - z_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 (x_2 - x_1)^2] \left. \right\}^{1/4} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

для соответствующей геометрии определяется для одновременных (причинно-несвязанных) событий с равенством

$$\begin{aligned} cT_{12} (t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) &= \{c^4 (t_2 - t_1)^4 + \\ &+ c^2 (t_2 - t_1)^2 \frac{1}{2!} \varepsilon_{mn} [\varepsilon^m (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] [\varepsilon^n (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] + \\ &+ c (t_2 - t_1) \frac{1}{3!} \varepsilon_{mnk} [\varepsilon^m (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] [\varepsilon^n (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] [\varepsilon^k (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] \}^{1/4} = \\ &= \{c^4 (t_2 - t_1)^4 - 2c^2 (t_2 - t_1)^2 [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] + \\ &+ 8c (t_2 - t_1) (x_2 - x_1) (y_2 - y_1) (z_2 - z_1) \}^{1/4} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

по следующему интервалу физического времени

$$\begin{aligned} T_{12} (t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) &= \\ &= \{(t_2 - t_1)^4 - 2(t_2 - t_1)^2 [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] / c^2 + \\ &+ 8(t_2 - t_1) (x_2 - x_1) (y_2 - y_1) (z_2 - z_1) / c^3 \}^{1/4}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где введены четырехмерные абсолютно симметричные символы со свойствами $\varepsilon_{mn} = \varepsilon_{mnk} = \varepsilon_{mnlk} = 1$, если $m \neq n \neq k \neq l$, а остальные значения нулевые.

Используя первоначальные обозначения для векторов трехмерного пространства $\boldsymbol{\varepsilon}^n \rightarrow (-\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^n)$ ($n = 1, 2, 3$) из работы [3] с разложением по трем независимым векторам выделенных направлений $\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_n^3 \boldsymbol{\varepsilon}^n$ запишем расстояние с независимыми выделенными направлениями

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \rho(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \{[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] [\boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] [\boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] [\boldsymbol{\varepsilon}^3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]\}^{1/4} = \\ &= \left\{ [\boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]^2 [\boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] [\boldsymbol{\varepsilon}^3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] + [\boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] [\boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]^2 [\boldsymbol{\varepsilon}^3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] + \right. \\ &\quad \left. + [\boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] [\boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] [\boldsymbol{\varepsilon}^3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]^2 \right\}^{1/4} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Определение. Расстояние в собственном трехмерном пространстве, определяемом множеством одновременных событий по физическому времени, есть среднее геометрическое от положительных путей, пройденных сигналом вдоль четырех выделенных направлений при синхронизации разноместных часов, и является полунормой.

Из (2.9) также следует, что расстояние является симметричной формой относительно перестановок трех скалярных произведений $\boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$, которые являются путями. Причем функция (2.9) является положительной и определяется в виде полунормы в отличие от нормы для пространства Евклида.

Важный вывод следует из определения интервала физического времени (2.7). Равенство $T_{12}(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = 0$ имеет место не только для одновременных событий по координатному времени с $t_1 = t_2$ на гиперповерхности $t = 0$, но и при равенстве

$$\begin{aligned} (t_2 - t_1)^3 - 2(t_2 - t_1) [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] / c^2 + \\ + 8(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) / c^3 = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

с неодновременными событиями, которые лежат на гиперповерхности в пространстве-времени Бервальда-Моора, представляемой следующим уравнением

$$t^3 - 2tx^2/c^2 + 8xyz/c^3 = 0. \quad (2.11)$$

3. Представление квадратов в скалярно-векторной форме

Векторная алгебра в глобальном трехмерном собственном пространстве естественным образом вытекает из алгебры гиперкомплексных чисел.

Напомним, что для кватернионов, которые образуют тело в алгебре, из закона композиции в известной скалярно-векторной форме

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (a_0, \mathbf{a}) \circ (b_0, \mathbf{b}) = (a_0 b_0 - (\mathbf{a}\mathbf{b}), b_0 \mathbf{a} + a_0 \mathbf{b} + [\mathbf{a}\mathbf{b}]) \quad (3.1)$$

и линейных операций имеем операции сложения векторов $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, умножения вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ на число $\lambda \mathbf{a}$, скалярное произведение $(\mathbf{a}\mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \delta_{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta$, векторное произведение $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$ с компонентами $[\mathbf{a}\mathbf{b}]_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma$, где $e_{\alpha\beta\gamma}$ – трехмерный абсолютно антисимметричный символ Леви-Чивита. Композиция трех кватернионов $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{C}$ добавляет к этим операциям смешанное произведение $([\mathbf{a}\mathbf{b}]\mathbf{c})$ и двойное векторное произведение $[[\mathbf{a}\mathbf{b}]\mathbf{c}]$. Тело кватернионов имеет известное матричное представление

$$(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & -a_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

с суммой и произведением матриц.

Используем определение обратного кватерниона $\mathbf{A} \circ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ с $\mathbf{E} = (1, 0)$ и закон композиции $\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{A}}$ с нулевой векторной частью, где $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{a}_0, \bar{\mathbf{a}})$. Тогда получим равенства

$$\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{A}} = a_0 \bar{a}_0 - (\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}), \quad \bar{a}_0 \mathbf{a} + a_0 \bar{\mathbf{a}} + [\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}] = 0, \quad (3.3)$$

второе из которых удовлетворяется однозначно при $\bar{a}_0 = a_0$ и $\bar{\mathbf{a}} = -\mathbf{a}$. В итоге получим сопряженный кватернион $\bar{\mathbf{A}} = (a_0, -\mathbf{a})$, модуль числа $|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{A}}} = \sqrt{a_0^2 + \mathbf{a}^2}$ и обратный кватернион $\mathbf{A}^{-1} = \bar{\mathbf{A}} / |\mathbf{A}|^2$.

Рассмотрим квадрачисла [5], которые образуют поле в алгебре, и коммутативный закон композиции в скалярно-векторной форме [6, 7]

$$(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) = (a_0, \mathbf{a}) \circ (b_0, \mathbf{b}) = [a_0 b_0 + (\mathbf{a}\mathbf{b}), b_0 \mathbf{a} + a_0 \mathbf{b} + \{\mathbf{a}\mathbf{b}\}]. \quad (3.4)$$

Наряду с известными операциями сложения векторов $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, умножения вектора на число $\lambda \mathbf{a}$, скалярного произведения $(\mathbf{a}\mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \delta_{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta$ возникает новое векторное произведение $\{\mathbf{a}\mathbf{b}\} = \frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{a}) (\varepsilon^m \mathbf{b})$ с компонентами $\{\mathbf{a}\mathbf{b}\}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma$. Поле квадрачисел имеет матричное представление [6]

$$(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

с суммой и коммутативным произведением симметричных матриц.

Композиции трех и четырех квадрачисел

$$(\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{C}) = (a_0, \mathbf{a}) \circ (b_0, \mathbf{b}) \circ (c_0, \mathbf{c}) = [a_0 b_0 c_0 + a_0 (\mathbf{b}\mathbf{c}) + b_0 (\mathbf{c}\mathbf{a}) + c_0 (\mathbf{a}\mathbf{b}) + (\{\mathbf{a}\mathbf{b}\} \mathbf{c}), \quad (3.6)$$

$$a b_0 c_0 + \mathbf{b} c_0 a_0 + \mathbf{c} a_0 b_0 + a_0 \{\mathbf{b}\mathbf{c}\} + b_0 \{\mathbf{c}\mathbf{a}\} + c_0 \{\mathbf{a}\mathbf{b}\} + \{\{\mathbf{a}\mathbf{b}\} \mathbf{c}\} + (\mathbf{a}\mathbf{b}) \mathbf{c}],$$

$$(\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{D}) = (a_0, \mathbf{a}) \circ (b_0, \mathbf{b}) \circ (c_0, \mathbf{c}) \circ (d_0, \mathbf{d}) =$$

$$= [a_0 b_0 c_0 d_0 + a_0 b_0 (\mathbf{c}\mathbf{d}) + b_0 c_0 (\mathbf{d}\mathbf{a}) + d_0 a_0 (\mathbf{b}\mathbf{c}) + b_0 d_0 (\mathbf{a}\mathbf{c}) + a_0 c_0 (\mathbf{b}\mathbf{d}) + c_0 d_0 (\mathbf{a}\mathbf{b}) +$$

$$+ (\{\mathbf{a}\mathbf{b}\} \mathbf{c}) d_0 + (\{\mathbf{b}\mathbf{c}\} \mathbf{d}) a_0 + (\{\mathbf{c}\mathbf{d}\} \mathbf{a}) b_0 + (\{\mathbf{d}\mathbf{a}\} \mathbf{b}) c_0 + (\{\{\mathbf{a}\mathbf{b}\} \mathbf{c}\} \mathbf{d}) + (\mathbf{a}\mathbf{b}) (\mathbf{c}\mathbf{d}), \quad (3.7)$$

$$a b_0 c_0 d_0 + \mathbf{b} c_0 d_0 a_0 + \mathbf{c} d_0 a_0 b_0 + \mathbf{d} a_0 b_0 c_0 + \{\mathbf{a}\mathbf{b}\} c_0 d_0 + \{\mathbf{b}\mathbf{c}\} d_0 a_0 +$$

$$+ \{\mathbf{c}\mathbf{d}\} a_0 b_0 + \{\mathbf{d}\mathbf{a}\} b_0 c_0 + \{\mathbf{b}\mathbf{d}\} a_0 c_0 + \{\mathbf{a}\mathbf{c}\} b_0 d_0 + a_0 ((\mathbf{b}\mathbf{c}) \mathbf{d} + \{\{\mathbf{b}\mathbf{c}\} \mathbf{d}\}) +$$

$$+ b_0 ((\mathbf{c}\mathbf{a}) \mathbf{d} + \{\{\mathbf{c}\mathbf{a}\} \mathbf{d}\}) + c_0 ((\mathbf{a}\mathbf{b}) \mathbf{d} + \{\{\mathbf{a}\mathbf{b}\} \mathbf{d}\}) +$$

$$+ d_0 ((\mathbf{a}\mathbf{b}) \mathbf{c} + \{\{\mathbf{a}\mathbf{b}\} \mathbf{c}\}) + \{\{\{\mathbf{a}\mathbf{b}\} \mathbf{c}\} \mathbf{d}\} + (\mathbf{a}\mathbf{b}) \{\mathbf{c}\mathbf{d}\} + (\{\mathbf{a}\mathbf{b}\} \mathbf{c}) \mathbf{d}]$$

дают новые смешанное произведение $(\{\mathbf{a}\mathbf{b}\} \mathbf{c})$, двойное векторное произведение $\{\{\mathbf{a}\mathbf{b}\} \mathbf{c}\}$ и другие операции. Некоторые свойства этих операций для векторов собственного трехмерного пространства представляются соотношениями

$$\{\mathbf{a}\mathbf{b}\} = \{\mathbf{b}\mathbf{a}\}, \quad \{\mathbf{a}\mathbf{b}\} + \{\mathbf{a}\mathbf{c}\} = \{\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})\},$$

$$(\{\mathbf{a}\mathbf{b}\} \mathbf{c}) = (\{\mathbf{a}\mathbf{c}\} \mathbf{b}) = (\{\mathbf{b}\mathbf{a}\} \mathbf{c}) = (\{\mathbf{b}\mathbf{c}\} \mathbf{a}) = (\{\mathbf{c}\mathbf{a}\} \mathbf{b}) = (\{\mathbf{c}\mathbf{b}\} \mathbf{a}) = \varepsilon_{kij} a_k b_i c_j,$$

$$\{\mathbf{a}\{\mathbf{b}\mathbf{c}\}\} - \{\mathbf{c}\{\mathbf{b}\mathbf{a}\}\} = \mathbf{c}(\mathbf{b}\mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c}), \quad (3.8)$$

$$\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 + (\{\mathbf{a}\mathbf{a}\} \{\mathbf{b}\mathbf{b}\}) = (\mathbf{a}\mathbf{b})^2 + \{\mathbf{a}\mathbf{b}\}^2,$$

$$\{\mathbf{a}\mathbf{a}\}_i = 2a_k a_j, \quad \{\mathbf{a}\{\mathbf{a}\mathbf{a}\}\}_i = 2a_i (a_k^2 + a_j^2), \quad (\mathbf{a}\{\mathbf{a}\mathbf{a}\}) = 6a_i a_j a_k, \quad (i \neq j \neq k),$$

$$\{\mathbf{a}\{\mathbf{a}\{\mathbf{a}\mathbf{a}\}\}\} = \{\mathbf{a}\mathbf{a}\}(\mathbf{a}\mathbf{a}) - \frac{1}{3}\mathbf{a}(\mathbf{a}\{\mathbf{a}\mathbf{a}\}).$$

При $a_0 = b_0 = c_0 = d_0$ и $a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = 0$ из (3.7) вытекают, соответственно, следующие квадрaчисла

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{D}) = & \left[a_0^4 + a_0^2((\mathbf{ab}) + (\mathbf{ac}) + (\mathbf{ad}) + (\mathbf{bc}) + (\mathbf{cd}) + (\mathbf{da})) + \right. \\
 & + a_0((\{\mathbf{ab}\} \mathbf{c}) + (\{\mathbf{bc}\} \mathbf{d}) + (\{\mathbf{cd}\} \mathbf{a}) + (\{\mathbf{da}\} \mathbf{b})) + (\{\mathbf{ab}\} \{\mathbf{cd}\}) + (\mathbf{ab}) (\mathbf{cd}), \\
 & a_0^3((\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) + a_0^2(\{\mathbf{ab}\} + \{\mathbf{ac}\} + \{\mathbf{ad}\} + \{\mathbf{bc}\} + \{\mathbf{cd}\} + \{\mathbf{db}\})) + \\
 & + a_0((\mathbf{ab}) \mathbf{d} + \{\{\mathbf{ab}\} \mathbf{d}\} + (\mathbf{bc}) \mathbf{d} + \{\{\mathbf{bc}\} \mathbf{d}\} + (\mathbf{ca}) \mathbf{d} + \{\{\mathbf{ca}\} \mathbf{d}\} + (\mathbf{ab}) \mathbf{c} + \{\{\mathbf{ab}\} \mathbf{c}\}) + \\
 & \left. + \{\{\{\mathbf{ab}\} \mathbf{c}\} \mathbf{d}\} + (\mathbf{ab}) \{\mathbf{cd}\} + (\{\mathbf{ab}\} \mathbf{c}) \mathbf{d} \right], \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{D}) = [(\{\mathbf{ab}\} \{\mathbf{cd}\}) + (\mathbf{ab}) (\mathbf{cd})], [\{\{\{\mathbf{ab}\} \mathbf{c}\} \mathbf{d}\} + (\mathbf{ab}) \{\mathbf{cd}\} + (\{\mathbf{ab}\} \mathbf{c}) \mathbf{d}]. \tag{3.10}$$

Рассмотрим некоторые результаты, вытекающие из приведенных соотношений и дополняющие формулы из работы [6]. Обозначим векторы $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{c} = \mathbf{a}_2$, $\mathbf{d} = \mathbf{a}_3$ и соответствующие квадрaчисла $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 = (a_0, \mathbf{a}_1)$, $\mathbf{C} = \mathbf{A}_2 = (a_0, \mathbf{a}_2)$, $\mathbf{D} = \mathbf{A}_3 = (a_0, \mathbf{a}_3)$.

Лемма 1. Имеются четыре вектора

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3), \\
 \mathbf{a}_1 &= (-a_1, a_2, -a_3), \\
 \mathbf{a}_2 &= (a_1, -a_2, -a_3), \\
 \mathbf{a}_3 &= (-a_1, -a_2, a_3),
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

компоненты которых отличаются знаком ± 1 , для которых композиция квадрaчисел (3.9) в виде однородной симметричной формы четвертого порядка равняется действительному числу.

Для доказательства приравняем векторную часть в (3.9) нулю и при произвольных значениях a_0 получим четыре векторных уравнения

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 &= \mathbf{0}, \\
 \{\mathbf{aa}_1\} + \{\mathbf{aa}_2\} + \{\mathbf{aa}_3\} + \{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\} + \{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\} + \{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1\} &= \mathbf{0}, \\
 (\mathbf{aa}_1) \mathbf{a}_3 + \{\{\mathbf{aa}_1\} \mathbf{a}_3\} + (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2) \mathbf{a}_3 + \{\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\} \mathbf{a}_3\} + \\
 + (\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3) \mathbf{a}_3 + \{\{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\} \mathbf{a}_3\} + (\mathbf{aa}_1) \mathbf{a}_2 + \{\{\mathbf{aa}_1\} \mathbf{a}_2\} &= \mathbf{0}, \\
 \{\{\{\mathbf{aa}_1\} \mathbf{a}_2\} \mathbf{a}_3\} + (\mathbf{aa}_1) \{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\} + (\{\mathbf{aa}_1\} \mathbf{a}_2) \mathbf{a}_3 &= \mathbf{0},
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

однозначным решением которых являются векторы (3.11). В итоге из (3.9) вытекает равенство с одним вектором \mathbf{a}

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 = a_0^4 - 2a_0^2\mathbf{a}^2 + 4a_0(\mathbf{a} \{\mathbf{aa}\}) / \mathbf{3} + (\mathbf{aa}) (\mathbf{aa}) - (\{\mathbf{aa}\} \{\mathbf{aa}\}), \tag{3.13}$$

где для векторов (3.11) имеют место также следующие соотношения

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{aa}_1) (\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3) + (\{\mathbf{aa}_1\} \{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\}) &= (\mathbf{aa}) (\mathbf{aa}) - (\{\mathbf{aa}\} \{\mathbf{aa}\}), \\
 \mathbf{a}^2 = \mathbf{a}_1^2 = \mathbf{a}_2^2 = \mathbf{a}_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{aa})} &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \\
 \frac{1}{2} [(\mathbf{aa}_1) + (\mathbf{aa}_2) + (\mathbf{aa}_3) + (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2) + (\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3) + (\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1)] &= -\mathbf{a}^2 = -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2), \\
 \{\mathbf{aa}\}^2 = \{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1\}^2 = \{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2\}^2 = \{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3\}^2 &= 4(a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2), \\
 (\mathbf{a} \{\mathbf{aa}\}) = (\mathbf{a}_1 \{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1\}) = (\mathbf{a}_2 \{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2\}) = (\mathbf{a}_3 \{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3\}) &= 6a_1 a_2 a_3, \\
 (\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\} \mathbf{a}_3) = (\{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\} \mathbf{a}_1) = (\{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1\} \mathbf{a}_2) &= \\
 = (\{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1\} \mathbf{a}_3) = (\{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_2\} \mathbf{a}_1) = (\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\} \mathbf{a}_2) &= 2a_1 a_2 a_3
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

с обозначением $\{\mathbf{aa}\}^2 = (\{\mathbf{aa}\} \{\mathbf{aa}\})$, а векторные произведения имеют компоненты

$$\begin{aligned} \{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\} &= (0, 0, 2a_1a_2), & \{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\} &= (0, 2a_3a_1, 0), & \{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1\} &= (2a_2a_3, 0, 0), \\ \{\mathbf{aa}_1\} &= (0, -2a_3a_1, 0), & \{\mathbf{aa}_2\} &= (-2a_2a_3, 0, 0), & \{\mathbf{aa}_3\} &= (0, 0, -2a_1a_2). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Лемма 2. Уравнение в виде композиции квадратов \mathbf{X}

$$\mathbf{X} \circ \mathbf{X} = 4\mathbf{X} \quad (3.16)$$

имеет решением четыре квадрата $\mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ при $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$.

Для доказательства из (3.16), согласно (3.4), получим равенства

$$1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m)^2 = 4, \quad 2\boldsymbol{\varepsilon}^m = \{\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{\varepsilon}^m\}, \quad (3.17)$$

из которых вытекает набор известных векторов $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^3, \boldsymbol{\varepsilon}^4$ с $a_0 = 1$ и, соответственно, имеем набор квадратов $\mathbf{A}_m = (1, \boldsymbol{\varepsilon}^m)$, которые отождествляются с $(\mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$. Из (3.17) вытекает соотношение $(\boldsymbol{\varepsilon}^m \{\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{\varepsilon}^m\}) = 6$.

Лемма 3. Произвольные однородные симметричные формы разных порядков для набора чисел \mathbf{A}_m есть действительные числа.

Например, рассмотрим однородные формы в скалярно-векторной форме с $\varepsilon_m = 1$

$$\begin{aligned} S_1 &= \varepsilon_m \mathbf{A}_m = \mathbf{A} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 = 4a_0, \\ S_2 &= \frac{1}{2!} \varepsilon_{mn} \mathbf{A}_m \circ \mathbf{A}_n = \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 = 6a_0^2 - 2\mathbf{a}^2, \\ S_3 &= \frac{1}{3!} \varepsilon_{mnk} \mathbf{A}_m \circ \mathbf{A}_n \circ \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 = \\ &= 4a_0 (\mathbf{a}_0^2 - \mathbf{a}^2) + \frac{4}{3} (\mathbf{a} \{\mathbf{aa}\}), \\ S_4 &= \frac{1}{4!} \varepsilon_{mnlk} \mathbf{A}_m \circ \mathbf{A}_n \circ \mathbf{A}_k \circ \mathbf{A}_l = \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 = \\ &= a_0^4 - 2a_0^2 \mathbf{a}^2 + \frac{4}{3} a_0 (\mathbf{a} \{\mathbf{aa}\}) + \mathbf{a}^2 \mathbf{a}^2 - (\{\mathbf{aa}\} \{\mathbf{aa}\}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

вытекающие из **Определения** характеристического уравнения для квадрата [6, 7]

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda|^4 &= (\mathbf{A} - \lambda) \circ (\mathbf{A}_1 - \lambda) \circ (\mathbf{A}_2 - \lambda) \circ (\mathbf{A}_3 - \lambda) = \\ &= (-\lambda)^4 + S_1 (-\lambda)^3 + S_2 (-\lambda)^2 + S_3 (-\lambda) + S_4 = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Эти формы связаны с формами в виде суммы различных степеней набора чисел

$$\begin{aligned} p_1 &= \sum_m^4 \mathbf{A}_m = \mathbf{A} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 = 4a_0, \\ p_2 &= \sum_m^4 \mathbf{A}_m^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^2 = 4(a_0^2 + \mathbf{a}^2), \\ p_3 &= \sum_m^4 \mathbf{A}_m^3 = \mathbf{A}^3 + \mathbf{A}_1^3 + \mathbf{A}_2^3 + \mathbf{A}_3^3 = 4[a_0^3 + 3a_0 \mathbf{a}^2 + (\mathbf{a} \{\mathbf{aa}\})], \\ p_4 &= \sum_m^4 \mathbf{A}_m^4 = \mathbf{A}^4 + \mathbf{A}_1^4 + \mathbf{A}_2^4 + \mathbf{A}_3^4 = 4[a_0^4 + 4a_0^2 \mathbf{a}^2 + 4a_0 (\mathbf{a} \{\mathbf{aa}\}) + \mathbf{a}^2 \mathbf{a}^2 + (\{\mathbf{aa}\} \{\mathbf{aa}\})] \end{aligned} \quad (3.20)$$

аналогом известных формул Ньютона из теории симметричных многочленов для действительных чисел

$$\begin{aligned} p_1 - S_1 &= 0, \\ p_2 - p_1 S_1 + 2S_2 &= 0, \\ p_3 - p_2 S_1 + p_1 S_2 - 3S_3 &= 0, \\ p_4 - p_3 S_1 + p_2 S_2 - p_1 S_3 + 4S_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Лемма 4. Однородная антисимметричная форма

$$\begin{aligned} W &= \prod_{1 \leq n < m \leq 4} (\mathbf{A}_m - \mathbf{A}_n) = \\ &= (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}) \circ (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}) \circ (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \circ (\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}) \circ (\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_1) \circ (\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_2) = \\ &= 4^3 (a_1^2 - a_2^2) (a_2^2 - a_3^2) (a_3^2 - a_1^2) \end{aligned} \quad (3.22)$$

представляет собой действительное число и выражается только через компоненты вектора \mathbf{a} .

Выражение $W^2 = Disc(S_1, S_2, S_3, S_4)$ есть аналог дискриминанта многочлена для квадрата \mathbf{X}

$$\mathbf{X}^4 - S_1 \mathbf{X}^3 + S_2 \mathbf{X}^2 - S_3 \mathbf{X} + S_4 = (\mathbf{X} - \mathbf{A}) \circ (\mathbf{X} - \mathbf{A}_1) \circ (\mathbf{X} - \mathbf{A}_2) \circ (\mathbf{X} - \mathbf{A}_3) \quad (3.23)$$

и равен нулю в том и только в том случае, если многочлен имеет кратный корень. Согласно **Определению** характеристического уравнения для квадрата (3.19), многочлен (3.23) есть характеристический многочлен и тождественно равен нулю

$$\mathbf{X}^4 - S_1 \mathbf{X}^3 + S_2 \mathbf{X}^2 - S_3 \mathbf{X} + S_4 = 0 \quad (3.24)$$

для набора известных квадратов, что следует из (3.23).

Наконец, из определения обратного квадрата $\mathbf{A} \circ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ с $\mathbf{E} = (1, 0)$ и закона композиции $\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{A}}$ с нулевой векторной частью, где $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{a}_0, \bar{\mathbf{a}})$ имеем равенства

$$\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{A}} = a_0 \bar{a}_0 + (\mathbf{a} \bar{\mathbf{a}}), \quad \bar{a}_0 \mathbf{a} + a_0 \bar{\mathbf{a}} + \{\mathbf{a} \bar{\mathbf{a}}\} = 0. \quad (3.25)$$

С учетом соотношений (3.8) решением второго равенства являются следующие значения для \bar{a}_0 и вектора $\bar{\mathbf{a}}$

$$\begin{aligned} \bar{a}_0 &= a_0 (a_0^2 - \mathbf{a}^2) + \frac{1}{3} (\mathbf{a} \{\mathbf{a} \mathbf{a}\}), \\ \bar{\mathbf{a}} &= -\mathbf{a} (a_0^2 - \mathbf{a}^2) + a_0 \{\mathbf{a} \mathbf{a}\} - \{\mathbf{a} \{\mathbf{a} \mathbf{a}\}\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Таким образом, находим сопряженное квадратное число

$$\bar{\mathbf{A}} = (\bar{a}_0, \bar{\mathbf{a}}) = \left(a_0 (a_0^2 - \mathbf{a}^2) + \frac{1}{3} (\mathbf{a} \{\mathbf{a} \mathbf{a}\}), -\mathbf{a} (a_0^2 - \mathbf{a}^2) + a_0 \{\mathbf{a} \mathbf{a}\} - \{\mathbf{a} \{\mathbf{a} \mathbf{a}\}\} \right), \quad (3.27)$$

модуль квадрата

$$\begin{aligned} |A| &= \sqrt[4]{\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{A}}} = \sqrt[4]{a_0 \bar{a}_0 + \mathbf{a} \bar{\mathbf{a}}} = \\ &= \left\{ a_0 \left[a_0 (a_0^2 - \mathbf{a}^2) + \frac{1}{3} (\mathbf{a} \{\mathbf{a} \mathbf{a}\}) \right] + \mathbf{a} \left[-\mathbf{a} (a_0^2 - \mathbf{a}^2) + a_0 \{\mathbf{a} \mathbf{a}\} - \{\mathbf{a} \{\mathbf{a} \mathbf{a}\}\} \right] \right\}^{1/4} = \\ &= \left[a_0^4 - 2a_0^2 \mathbf{a}^2 + \frac{4}{3} a_0 (\mathbf{a} \{\mathbf{a} \mathbf{a}\}) + (\mathbf{a} \mathbf{a}) (\mathbf{a} \mathbf{a}) - (\{\mathbf{a} \mathbf{a}\} \{\mathbf{a} \mathbf{a}\}) \right]^{1/4} \end{aligned} \quad (3.28)$$

и обратное квадратное число

$$\mathbf{A}^{-1} = (a_0, \mathbf{a})^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{A}}}{|\mathbf{A}|^4} = \frac{1}{|\mathbf{A}|^4} \left[a_0 (a_0^2 - \mathbf{a}^2) + \frac{1}{3} (\mathbf{a} \{\mathbf{a} \mathbf{a}\}), -\mathbf{a} (a_0^2 - \mathbf{a}^2) + a_0 \{\mathbf{a} \mathbf{a}\} - \{\mathbf{a} \{\mathbf{a} \mathbf{a}\}\} \right]. \quad (3.29)$$

В отличие от алгебры кватернионов в данной алгебре имеют место неравенства $\bar{a}_0 \neq a_0$ и $\bar{\mathbf{a}} \neq -\mathbf{a}$ и при определении модуля извлекается корень четвертой степени, чтобы было соответствие для размерных величин $a_0 = c(t_2 - t_1)$ и $\mathbf{a} = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ в случае релятивистской теории. В итоге, согласно (3.13), сопряженное квадратное число имеет известное значение $\bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3)$, а модуль равняется $|\mathbf{A}| = (\mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3)^{1/4}$.

В матричном представлении имеет место равенство $(\mathbf{A})(\bar{\mathbf{A}}) = (\mathbf{E}) \det(\mathbf{A})$ с единичной матрицей (\mathbf{E}) , из которого вытекают значения сопряженных компонент квадратичисла в форме [6]

$$\bar{a}_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_0 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}, \quad \bar{a}_1 = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_0 \end{vmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}, \quad \bar{a}_3 = - \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}. \quad (3.30)$$

Отметим, что многие теоремы, леммы и определения теории симметричных многочленов для действительных чисел имеют соответствующие аналоги в теории квадратичисел, что представляет собой отдельный предмет для дальнейшего рассмотрения.

4. Геометрия собственного трехмерного пространства

Рассмотрим собственное трехмерное векторное пространство, в котором любой вектор a имеет разложение

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3. \quad (4.1)$$

Для векторов базиса данного трехмерного пространства $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1^2 = 1, & \quad (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2^2 = 1, & \quad (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3^2 = 1, \\ (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) = 0, & \quad (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) = 0, & \quad (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3) = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

со скалярными произведениями $(\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ и, соответственно, формула скалярного произведения векторов $(\mathbf{ab}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \delta_{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta$.

Новое векторное произведение имеет обозначение для вектора $\mathbf{c} = \{\mathbf{ab}\}$. Векторы базиса удовлетворяют также векторным соотношениям

$$\begin{aligned} \{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1\} = 0, \quad \{\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2\} = 0, \quad \{\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3\} = 0, \\ \{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2\} = \{\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1\} = \mathbf{e}_3, \quad \{\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3\} = \{\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2\} = \mathbf{e}_1, \quad \{\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1\} = \{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3\} = \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В итоге получим формулу

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = \{\mathbf{ab}\} = \text{per}(C) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}_+ = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}_+ \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}_+ \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}_+ \mathbf{e}_3 = \\ = (a_2 b_3 + a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 + a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \mathbf{e}_3 = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\alpha b_\beta \mathbf{e}_\gamma \end{aligned} \quad (4.4)$$

с выражением произведения векторов через их компоненты и соответствующее определение $c_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma$. Здесь приводится символическая запись с использованием известного понятия перманента третьего порядка $\text{per}(C)$ для матрицы (C) [8]. Компонентами вектора c являются перманенты второго порядка при разложении $\text{per}(C)$ по первой строке. Перманент определяется как аналог детерминанта, у которого все знаки в выражениях миноров положительные и поэтому он известен также под названием "плюс-определитель". В рассматриваемом базисе скалярное произведение (\mathbf{ab}) и векторное произведение $\{\mathbf{ab}\}$ коммутативны, дистрибутивны относительно сложения векторов, сочетательны относительно умножения на число и равны нулю, если только $\mathbf{a} = 0$ или $\mathbf{b} = 0$.

Три независимых вектора выделенных направлений в собственном трехмерном пространстве связаны с векторами базиса разложениями

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^1 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^2 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^3 &= -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.\end{aligned}\tag{4.5}$$

К соотношениям (2.4) и (4.3) добавим следующие равенства

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{\varepsilon}^k \boldsymbol{\varepsilon}^n\} &= 2\mathbf{e}_r, \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}^k \boldsymbol{\varepsilon}^k\} = 2\boldsymbol{\varepsilon}^k, \quad (k \neq n \neq r) \\ \{\mathbf{e}_k \mathbf{e}_n\} &= \mathbf{e}_r, \quad \{\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k\} = 0, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^1 + \boldsymbol{\varepsilon}^2 &= -2\mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^2 + \boldsymbol{\varepsilon}^3 = -2\mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^3 + \boldsymbol{\varepsilon}^1 = -2\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{a} &= \{\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{a}\} + (\boldsymbol{\varepsilon}^2 \mathbf{a}) \mathbf{e}_1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^1 \mathbf{a}) \mathbf{e}_2 + (\boldsymbol{\varepsilon}^3 \mathbf{a}) \mathbf{e}_3.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Согласно (2.6) и (2.8) и первого соотношения в (3.14) запишем расстояние от центра координат до конца вектора \mathbf{a} и при $a_0 = ct$ соответствующее физическое время со значением перманента третьего порядка для нового смешанного произведения

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{a}) &= [(\{\mathbf{a}\mathbf{a}\} \{\mathbf{a}\mathbf{a}\}) - (\mathbf{a}\mathbf{a})(\mathbf{a}\mathbf{a})]^{1/4} = [-(\mathbf{a}\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3) - (\{\mathbf{a}\mathbf{a}_1\} \{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\})]^{1/4} = \\ &= \left[-(-a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)^2 + 4a_1^2 a_2^2 \right]^{1/4} = \\ &= [(-a_1 - a_2 - a_3)(-a_1 + a_2 - a_3)(a_1 - a_2 - a_3)(-a_1 - a_2 + a_3)]^{1/4} = \\ &= [-a_1^4 - a_2^4 - a_3^4 + 2(a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2)]^{1/4}, \\ T(t, \mathbf{a}) &= [t^4 - 2t^2 \mathbf{a}^2 / c^2 + \frac{4}{3}t(\mathbf{a} \{\mathbf{a}\mathbf{a}\}) / c^3]^{1/4} = \\ &= [t^4 - 2t^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) / c^2 + 8ta_1 a_2 a_3 / c^3]^{1/4}, \\ (\mathbf{a} \{\mathbf{a}\mathbf{a}\}) &= \text{per}(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}_+ = 3!a_1 a_2 a_3 = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\alpha a_\beta a_\gamma.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Взаимосвязь модуля или длины вектора $|\mathbf{a}|$ и расстояния $\rho(\mathbf{a})$ дается равенством

$$|\mathbf{a}|^2 = \sqrt{\{\mathbf{a}\mathbf{a}\}^2 - \rho^4(\mathbf{a})}.\tag{4.8}$$

Напомним, что расстояние $\rho(\mathbf{a})$, как полунорма, определяется между одновременными событиями по физическому времени $T(t, \mathbf{a})$ в центре координат и концом вектора \mathbf{a} в анизотропном пространстве-времени Бервальда-Моора.

При $\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon}^m ct$ с учетом (4.6) получим равные величины $\rho^4(\boldsymbol{\varepsilon}^m ct) = c^4 T^4(t, \boldsymbol{\varepsilon}^m ct) = 3c^4 t^4$.

Если $a_0 = 0$, то из (3.27)–(3.29) получим сопряженный, обратный векторы и расстояние

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}} &= -\{\mathbf{a} \{\mathbf{a}\mathbf{a}\}\} + \mathbf{a}(\mathbf{a}\mathbf{a}), \\ \mathbf{a}^{-1} &= -\frac{\bar{\mathbf{a}}}{[\rho(\mathbf{a})]^4} = \frac{\{\mathbf{a} \{\mathbf{a}\mathbf{a}\}\} - \mathbf{a}(\mathbf{a}\mathbf{a})}{\rho(\mathbf{a})^4}, \\ \rho(\mathbf{a}) &= [-(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}})]^{1/4}\end{aligned}\tag{4.9}$$

для собственного трехмерного пространства.

Заметим, что в собственном евклидовом пространстве в системе кватернионов с (3.1) сопряженный вектор, в отличие от (4.9), равен противоположному ($\bar{\mathbf{a}} = -\mathbf{a}$), обратный вектор имеет значение $\mathbf{a}^{-1} = -\bar{\mathbf{a}}/|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|^2$ и расстояние есть длина вектора $\rho(\mathbf{a}) = [-(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}})]^{1/2} = [(\mathbf{a}\mathbf{a})]^{1/2}$.

Дифференциальная геометрия локального пространства-времени Бервальда-Моора с (1.2) основывается на дифференциальной форме

$$(ds)^4 = g_{ijkl}dx^i dx^j dx^k dx^l = g_{0000} (dx_0)^4 + g_{00\alpha\beta} (dx_0)^2 dx^\alpha dx^\beta + g_{0\alpha\beta\gamma} dx_0 dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma + g_{\alpha\beta\gamma r} dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma dx^r = c^4 (dT)^4 - (d\rho)^4 \quad (4.10)$$

при следующем разбиении

$$c^4 (dT)^4 = g_{0000} (dx_0)^4 + g_{00\alpha\beta} (dx_0)^2 dx^\alpha dx^\beta + g_{0\alpha\beta\gamma} dx_0 dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma, \quad (d\rho)^4 = \gamma_{\alpha\beta\gamma r} dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma dx^r \quad (4.11)$$

с $g_{0000} = 1$, $g_{00\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$, $g_{0\alpha\beta\gamma} = 4\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}/3$, $\gamma_{\alpha\beta\gamma r} = -g_{\alpha\beta\gamma r} = \frac{1}{2!} [\varepsilon_{m\alpha(\beta} \varepsilon_{\gamma)r}^m - \delta_{\alpha(\beta} \delta_{\gamma)r}]$.

Тогда компоненты сопряженного вектора $d\bar{x}_\alpha$ и расстояние с пространственными индексами имеют вид

$$d\bar{x}_\alpha = -\gamma_{\alpha\beta\gamma r} dx^\beta dx^\gamma dx^r, \quad d\rho = (-d\bar{x}_\alpha dx^\alpha)^{1/4}. \quad (4.12)$$

Здесь тензор $\gamma_{\alpha\beta\gamma r}$ определяет геометрию собственного трехмерного пространства. Опускание и поднимание индексов осуществляется символами Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$ и δ_α^β . Длина касательного вектора равняется

$$dl = (\delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}. \quad (4.13)$$

Выражение (4.7), как скалярная часть модуля квадрата в степени четыре с $a_0 = 0$ представляется с учетом первого соотношения в (3.18) также в следующей симметричной форме для набора квадратов

$$\begin{aligned} \rho^4(\mathbf{a}) &= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3) \circ (\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3) = \\ &= \mathbf{A}_1^2 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2^2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

В общем случае, согласно (3.10), имеет место функция "расстояния", вычисляемая для четырех квадратов

$$\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = [-(\{\mathbf{ab}\} \{\mathbf{cd}\}) - (\mathbf{ab})(\mathbf{cd})]^{1/4}. \quad (4.15)$$

При $\rho(\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ с $\mathbf{a} + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = 0$ из (4.10) вытекает формула (4.7).

5. Физическая скорость

Используя приведенные результаты, запишем трехмерное расстояние и элемент физического времени в векторных формах

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \rho(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = [\{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\}^2 - ((\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1))^2]^{1/4}, \\ T_{12}(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) &= [(t_2 - t_1)^4 - 2(t_2 - t_1)^2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2/c^2 + \\ &+ 4(t_2 - t_1)((\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\})/3c^3]^{1/4}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Введем вектор физической скорости в собственном трехмерном пространстве

$$\mathbf{u}_F = \frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{T_{12}(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} = M(\mathbf{u}) \mathbf{u} \quad (5.2)$$

по физическому времени, зависящей нелинейно от координатной скорости $\mathbf{u} = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) / (t_2 - t_1)$ с коэффициентом

$$M(\mathbf{u}) = \frac{t_2 - t_1}{T_{12}(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} = \frac{1}{[1 - 2\mathbf{u}^2/c^2 + 4(\mathbf{u}\{\mathbf{u}\mathbf{u}\})/3c^3]^{1/4}} \quad (5.3)$$

и его модуль (или длину)

$$|\mathbf{u}_F| = M(\mathbf{u}) |\mathbf{u}| = \frac{|\mathbf{u}|}{[1 - 2\mathbf{u}^2/c^2 + 4(\mathbf{u}\{\mathbf{u}\mathbf{u}\})/3c^3]^{1/4}}. \quad (5.4)$$

Тогда из (5.1) вытекают выражения для расстояния

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) &= (t_2 - t_1) [(\{\mathbf{u}\mathbf{u}\}\{\mathbf{u}\mathbf{u}\}) - (\mathbf{u}\mathbf{u})(\mathbf{u}\mathbf{u})]^{1/4} = \\ &= T_{12}(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) [(\{\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F\}\{\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F\}) - (\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F)(\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F)]^{1/4} \end{aligned} \quad (5.5)$$

и полунорма физической скорости

$$\begin{aligned} u &= \frac{\rho(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{T_{12}(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} = [(\{\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F\}\{\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F\}) - (\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F)(\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F)]^{1/4} = \\ &= \left[\frac{(\{\mathbf{u}\mathbf{u}\}\{\mathbf{u}\mathbf{u}\}) - (\mathbf{u}\mathbf{u})(\mathbf{u}\mathbf{u})}{1 - 2\mathbf{u}^2/c^2 + 4(\mathbf{u}\{\mathbf{u}\mathbf{u}\})/3c^3} \right]^{1/4}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

При $\mathbf{u} = \varepsilon^m c$ получим из (5.6) формулу для постоянной скорости сигнала

$$c = \frac{\rho(\varepsilon^m c (t_2 - t_1))}{T_{12}(t_2 - t_1, \varepsilon^m c (t_2 - t_1))} \quad (5.7)$$

по любому выделенному направлению в собственном трехмерном пространстве, что и следовало ожидать.

Для модуля и полунормы физической скорости справедливо равенство

$$|\mathbf{u}_F|^2 = \sqrt{(\{\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F\}\{\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F\}) - u^4}. \quad (5.8)$$

Далее, согласно (2.5), получим следующие соотношения

$$\begin{aligned} s_{12} &= (t_2 - t_1) N(\mathbf{u}), \quad s_{12} = T_{12}(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \sqrt[4]{1 - u^4/c^4}, \\ N(\mathbf{u}) &= \left\{ \prod_m^4 [1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})/c] \right\}^{1/4} = \\ &= [1 - 2\mathbf{u}^2/c^2 + 4(\mathbf{u}\{\mathbf{u}\mathbf{u}\})/3c^3 + (\mathbf{u}\mathbf{u})(\mathbf{u}\mathbf{u})/c^4 - (\{\mathbf{u}\mathbf{u}\}\{\mathbf{u}\mathbf{u}\})/c^4]^{1/4}, \\ \sqrt[4]{1 - u^4/c^4} &= M(\mathbf{u}) N(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Выразим координатную скорость посредством равенства $u = K^{-1}(\mathbf{u}_F) \mathbf{u}_F$ с коэффициентом $K(\mathbf{u}_F)$, удовлетворяющим, согласно (5.3), уравнению

$$1 = K^4(\mathbf{u}_F) - 2K^2(\mathbf{u}_F)/A^2 + 4K(\mathbf{u}_F)(\mathbf{u}_F\{\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F\})/3c^3. \quad (5.10)$$

Тогда получим тождество

$$\frac{\mathbf{u}_F}{\sqrt[4]{1 - u^4/c^4}} = \frac{\mathbf{u}}{N(\mathbf{u})}, \quad (5.11)$$

которое позволяет получить, согласно закону композиции координатных скоростей в векторной форме [6]

$$\mathbf{u}' = \mathbf{v}' \circ \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{u} + \frac{1}{4} \sum_m \varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{v}') (\varepsilon^m \mathbf{u}) / c}{1 + (\mathbf{v}' \mathbf{u}) / c^2} = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{u} + \{\mathbf{v}' \mathbf{u}\} / c}{1 + (\mathbf{v}' \mathbf{u}) / c^2} \quad (5.12)$$

и равенства

$$N(\mathbf{u}') = \frac{N(\mathbf{v}') N(\mathbf{u})}{1 + (\mathbf{v}' \mathbf{u})}, \quad (5.13)$$

преобразования физической скорости и ее полунормы

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}_F}{\sqrt[4]{1 - (u')^4/c^4}} &= \frac{\mathbf{v}'_F}{\sqrt[4]{1 - (v')^4/c^4}} + \frac{\mathbf{u}_F}{\sqrt[4]{1 - u^4/c^4}}, \\ \frac{K(\mathbf{u}'_F)}{\sqrt[4]{1 - (u')^4/c^4}} &= \frac{K(\mathbf{v}'_F) K(\mathbf{u}_F) + (\mathbf{v}'_F \mathbf{u})}{\sqrt[4]{1 - (v')^4/c^4} \sqrt[4]{1 - u^4/c^4}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

при переходе к инерциальной системе отсчета (K'). Система отсчета (K') движется относительно исходной системы отсчета (K) с физической скоростью \mathbf{v}'_F не равной противоположной ($-\mathbf{v}_F$).

Наконец отметим, что область причинно-несвязанных событий с $s_{12}^4 < 0$ и $\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) > 0$ в пространстве-времени Бервальда-Моора, которая дает одновременные события по физическому времени, определяется неравенством

$$\{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\}^2 > ((\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1))^2. \quad (5.15)$$

Область причинно-связанных событий с $s_{12}^4 > 0$ соответствует неравенству $T_{12}^4(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) > \rho^4(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)/c^4$. Характеристики сигнала для $s_{12}^4 = 0$ находятся из равенства $T_{12}^4(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \rho^4(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)/c^4$, которое удовлетворяется, согласно (5.7), для четырех векторов выделенных направлений в собственном трехмерном пространстве.

Уравнения гиперповерхностей в области $s_{12}^4 < 0$ при определении собственного трехмерного пространства запишутся так

$$t = 0, \quad t^3 - 2t\mathbf{x}^2/c^2 + 4(\mathbf{x}\{\mathbf{x}\mathbf{x}\})/3c^3 = 0. \quad (5.16)$$

5. Обсуждение

Вопрос о необходимости определения расстояния в собственном трехмерном пространстве является спорным, поскольку четырехмерная финслерова геометрия Бервальда-Моора описывается методами проективной геометрии, в которой отсутствует понятие расстояния, а есть лишь некоторые аналоги. Однако при физической интерпретации метрической функции Бервальда-Моора (1.2), получаемой при сигнальном методе взаимосвязи разноместных событий [3], появляется некоторая возможность распространения традиционного определения собственного трехмерного пространства, как

множества одновременных событий. Для чего в работе представлено разбиение интервала, из которого вытекает элемент физического времени и функция, равная расстоянию в собственном трехмерном пространстве. В разбиении физическое время является нелинейной функцией от координатного времени и пространственных координат, а расстояние есть полунорма. Вводится вектор физической скорости, ее полунорма, нелинейно зависящие от вектора координатной скорости и приводятся преобразования физических скоростей при переходе между инерциальными системами отсчетов. Геометрия собственного трехмерного пространства отличается от геометрии Евклида и в настоящей работе указаны лишь некоторые элементы соответствующей векторной алгебры, в которой новые векторные операции связаны с перманентами третьего порядка.

Сделаем ряд замечаний по определению собственного трехмерного пространства в финслеровых геометриях.

Метрическая функция рассматриваемого пространства-времени Бервальда-Моора, записанная в форме

$$F = \left[(a_0^2 - \mathbf{a}^2)^2 + \frac{4}{3} a_0 (\mathbf{a} \{ \mathbf{a} \mathbf{a} \}) - (\{ \mathbf{a} \mathbf{a} \} \{ \mathbf{a} \mathbf{a} \}) \right]^{1/4}, \quad (6.1)$$

включает в себя интервал пространства-времени Минковского и дополнительные величины с новыми векторными произведениями. Эти величины в выражении собственного времени $T_0 = F/c$ являются величинами, порядок которых выше, чем \mathbf{v}^2/c^2 , что, соответственно можно было бы рассматривать метрическую функцию пространства-времени Минковского в специальной теории относительности как некоторое приближение в геометрии Бервальда-Моора. Однако такое приближение не имеет место, поскольку известные преобразования пространственных координат и времени в векторной форме для полностью анизотропного пространства-времени Бервальда-Моора не переходят в преобразования Лоренца в векторной форме, что и следовало ожидать. Все сказанное относится также и к результатам теории для частично анизотропного пространства-времени [10]. Таким образом, существуют различные альтернативные релятивистские теории, имеющие только нерелятивистский предел к галилеевой геометрии. Вопрос о реализации указанных геометрий, по-видимому, остается пока открытым.

Используя результаты работы [6], представим метрическую функцию в эквивалентных формах

$$\begin{aligned} F &= |\mathbf{A}| = [\det(\mathbf{A})]^{1/4} = [\det(\mathbf{D})]^{1/4} = \left[\frac{1}{4!} \text{per}(L_4) \right]^{1/4} = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)^{1/4} = \\ &= (\mathbf{H}_{1i} \mathbf{H}_{2j} \mathbf{H}_{3r} \mathbf{H}_{4t} a_i a_j a_r a_t)^{1/4} = \frac{1}{4!} \varepsilon_{mnlk} \lambda_m \lambda_n \lambda_k \lambda_l = \left(\frac{1}{4!} \varepsilon_{mnlk} \mathbf{H}_{mi} \mathbf{H}_{nj} \mathbf{H}_{kr} \mathbf{H}_{lt} a_i a_j a_r a_t \right)^{1/4} = \\ &= \left[a_0^4 - 2a_0^2 a^2 + \frac{4}{3} a_0 (\mathbf{a} \{ \mathbf{a} \mathbf{a} \}) + (\mathbf{a} \mathbf{a}) (\mathbf{a} \mathbf{a}) - (\{ \mathbf{a} \mathbf{a} \} \{ \mathbf{a} \mathbf{a} \}) \right]^{1/4}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где a_r отождествляется с (a_0, a_1, a_2, a_3) , введены матрицы и перманент

$$(L_4) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad \text{per}(L_4) = 4! S_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{vmatrix}_+. \quad (6.3)$$

Поскольку матрица (\mathbf{A}) имеет четыре различных характеристических числа, то она подобна диагональной матрице $(\mathbf{D}) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ и имеет вид $(\mathbf{A}) = (\mathbf{U})(\mathbf{D})(\mathbf{U})^{-1}$ с невырожденной матрицей (\mathbf{U}) и ее обратной $(\mathbf{U})^{-1}$. Матрица

(L_4) и характеристические числа квадрата (либо матрицы (3.5))

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \\ \lambda_2 &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3, \\ \lambda_3 &= a_0 + a_1 - a_2 - a_3, \\ \lambda_4 &= a_0 - a_1 - a_2 + a_3,\end{aligned}\tag{6.4}$$

записанные в виде $\lambda_m = \mathbf{H}_{mi}a_i$, с матрицей Адамара

$$\mathbf{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & -\mathbf{H}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & -\mathbf{H}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = 1 \tag{6.5}$$

являются основой перманента четвертого порядка $\text{per}(L_4)$. Отметим, что в работе [9] рассматривались перманенты четвертого порядка для скалярного полипроизведения векторов в изотропном базисе.

Для финслерова пространства-времени с метрической функцией

$$\begin{aligned}F &= (\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2)^{1/3} = \left[\frac{1}{3!} \text{per}(L_3) \right]^{1/3} \\ &= \left[\frac{1}{3!} \varepsilon_{mnk} \lambda_m \lambda_n \lambda_k \right]^{1/3} = \left[\frac{1}{3!} \varepsilon_{mnk} \mathbf{H}_{mi} \mathbf{H}_{nj} \mathbf{H}_{kp} a_i a_j a_p \right]^{1/3} = \left[4a_0 (a_0^2 - \mathbf{a}^2) + \frac{4}{3} (\mathbf{a} \{ \mathbf{a} \mathbf{a} \}) \right]^{1/3},\end{aligned}\tag{6.6}$$

выраженной через сумму всех перманентов третьего порядка в матрице (L)

$$\begin{aligned}\text{per}(L_3) &= 3!S_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{vmatrix}_+ = \\ &= \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_4 \end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{vmatrix}_+, \end{aligned}\tag{6.7}$$

расстояние в собственном трехмерном пространстве для множества одновременных событий при интервале физического времени

$$T_{12}(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \left\{ 4(t_2 - t_1) \left[(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 \right] \right\}^{1/3} = 0, \tag{6.8}$$

равным нулю, определяется функцией

$$\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = [8(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)]^{1/3} = [4((\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \{ (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \}) / 3]^{1/3}, \tag{6.9}$$

в следующем разбиении интервала

$$s_{12} = \left[c^3 T_{12}^3(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \rho^3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \right]^{1/3}. \tag{6.10}$$

Аксиома симметрии в этом случае не выполняется, а имеет место равенство $\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\rho(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$. Это затрудняет применение метрической функции (6.6) в релятивистских теориях. Величина $\rho^3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ определяется, согласно (4.8), перманентом третьего порядка с равными строками в матрице из компонента вектора $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$.

Наиболее подходящим для релятивистской теории является финслерово пространство-время с метрической функцией

$$F = (\mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3)^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{1}{2!} \text{per}(L_2) \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{2!} \varepsilon_{mn} \lambda_m \lambda_n \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{2!} \varepsilon_{mn} \mathbf{H}_{mi} \mathbf{H}_{nj} a_i a_j \right]^{1/2} = (6a_0^2 - 2\mathbf{a}^2)^{1/2}, \quad (6.11)$$

выраженной через сумму всех перманентов второго порядка в матрице (L)

$$\text{per}(L_2) = 2!S_2 = \left| \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{array} \right|_+ =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{array} \right|_+ + \left| \begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_3 \end{array} \right|_+ + \left| \begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_4 \end{array} \right|_+ + \left| \begin{array}{cc} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \right|_+ + \left| \begin{array}{cc} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{array} \right|_+ + \left| \begin{array}{cc} \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{array} \right|_+ \quad (6.12)$$

и которая, по сути, есть пространство время Минковского с $T_{12} = \sqrt{6}(t_2 - t_1)$ и $\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\sqrt{2}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)|$ в интервале (2.1).

Заметим, что метрическая функция финслерова пространства-времени

$$F = \mathbf{A} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 = \text{per}(L_1) = \varepsilon_m \lambda_m = 4a_0 \quad (6.13)$$

определяется в виде суммы перманентов первого порядка

$$\text{per}(L_1) = S_1 = \left| \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{array} \right|_+ = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4. \quad (6.14)$$

Интересным вариантом является финслерово пространство-время с метрической функцией

$$F = \left[\frac{1}{4} (\mathbf{A}^4 + \mathbf{A}_1^4 + \mathbf{A}_2^4 + \mathbf{A}_3^4) \right]^{1/4} = [a_0^4 + 4a_0^2 \mathbf{a}^2 + 4a_0 (\mathbf{a} \{ \mathbf{a} \mathbf{a} \}) + \mathbf{a}^2 \mathbf{a}^2 + (\{ \mathbf{a} \mathbf{a} \} \{ \mathbf{a} \mathbf{a} \})]^{1/4} \quad (6.15)$$

и разбиением интервала в форме

$$s_{12} = [c^4 T_{12}^4 (t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \rho^4 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]^{1/4}. \quad (6.16)$$

Здесь имеют место выражения

$$T_{12}(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = [(t_2 - t_1)^4 + 4(t_2 - t_1)^2 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 / c^2 +$$

$$+ 4(t_2 - t_1) \{ (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \{ (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \} \} / c^3]^{1/4}, \quad (6.17)$$

$$\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \rho(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = [\{ (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \}^2 + ((\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1))^2]^{1/4}.$$

Финслерово пространство-время с метрической функцией

$$F = \left[\frac{1}{4} (\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^2) \right]^{1/2} = (a_0^2 + \mathbf{a}^2)^{1/2} \quad (6.18)$$

есть четырехмерное евклидово пространство-время с $T_{12}(t_2 - t_1) = (t_2 - t_1)$ и $\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$ для интервала

$$s_{12} = [c^2 T_{12}^2 (t_2 - t_1) + \rho^2 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]^{1/2}. \quad (6.19)$$

По-видимому, требуются еще дальнейшие усилия в прояснении задач по разбиению интервалов финслеровых пространств-времен на элемент физического времени и расстояние в собственном трехмерном пространстве, а также в широком использовании теории перманентов в релятивистских теориях.

Литература

- [1] Poincare H. La mesure du temps. Rev. Metaphys. Morale, 1898. V. 6. P. 1–13.
- [2] Minkowski H.I. "Raum und Zeit", 80. Versammlung Deutscher Naturforscher (Köln, 1908). Published in Physikalische Zeitschrift 10, 104–111 (1909) and Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 18, 75–88 (1909).
- [3] Зарипов Р.Г. Отношение одновременности в финслеровом пространстве-времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2006. № 1 (5). Т. 3. С. 28–47.
- [4] Гарасько Г.И., Павлов Д.Г. Понятие расстояния и модуля скорости в линейных финслеровых пространствах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. Т. 1 (3). С. 1–15.
- [5] Pavlov D. G. Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid. arXiv: gr-gc/0206004. 2002. V. 1. P. 1–16.
- [6] Зарипов Р.Г. К релятивистской теории в гиперкомплексных системах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. № 1 (7). Т. 4. С. 63–81.
- [7] Зарипов Р.Г. О релятивистских уравнениях в пространстве-времени Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. №1 (7). Т. 4. С. 82–92.
- [8] Минк Х. Перманенты. Москва: Мир, 1982. 213 с.
- [9] Гарасько Г.И., Павлов Д.Г. Геометрия невырожденных поличисел. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. № 1 (7). Т. 4. С. 3–25.
- [10] Bogoslovsky G. Yu. A Special Relativistic Theory of the Locally Anisotropic Space-Time, I: The Metric and Group of Motion of the Anisotropic Space of Events. Nuovo Cimento, 1977. V. 40B. P. 99–115.

Physical time and distance in the Berwald-Moor Space-Time

R. G. Zarypov

Institute of mechanics and mechanical engineering, Kazan, Russia
 zarypov@mail.knc.ru

The splitting between events of the interval is provided, in the global 4-dimensional Berwald-Moor Space-Time, from which emerges the interval of physical time, which depends on the time coordinate and on the coordinates of events. The definition of distance, in the vectorial framework, is provided as a semi-norm defined in the proper 3-dimensional space - considered as the set of simultaneous events under the method of signals synchronization of multi-disposed clocks. The algebra of quadri-numbers represented in scalar-vectorial form is studied and elements of vector algebra in the geometry of proper 3-dimensional space, are provided. The 3-dimensional physical velocity and its semi-norm in the proper space are defined as well.

Key-words: Berwald-Moor geometry, distance, signals synchronization, quadri-numbers.

MSC: 53B40, 51K99.

ON THE POSSIBILITY OF THE OMPR EFFECT IN THE SPACE WITH FINSLER GEOMETRY. PART 1.

N. Brinzei

"Transilvania" University, Brasov, Romania
nico.brinzei@rdslink.ro

S. V. Siparov

State University of Civil Aviation, Sankt-Petersburg, Russia
sergey@siparov.ru

The effect of the optic-metrical parametric resonance could provide the possibility to obtain the experimental evidence of the gravitational waves existence. The effect might change, if the geometry of the physical space-time is not Riemannian but Finslerian one. The investigation of this situation is undertaken.

Key-words: Finsler geometry, Berwald-Moor metric, anisotropic spaces, OMPR effect.

1 Introduction

Let us regard a two-level atom in the strong monochromatic quasi-resonant field. The system of Bloch's equations for the components of the density matrix components is

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_{22} &= -\gamma\rho_{22} + 2i\alpha_1 \cos(\Omega t - k_1 y)(\rho_{21} - \rho_{12}), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\rho_{12} &= -(\gamma_{12} + i\omega)\rho_{12} - 2i\alpha_1 \cos(\Omega t - k_1 y)(\rho_{22} - \rho_{11}), \\ \rho_{22} + \rho_{11} &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Here ρ_{22} and ρ_{11} are the populations of the levels, ρ_{12} and ρ_{21} are the polarization terms, γ and γ_{12} are the longitudinal and transversal decay rates of the atom (since level 1 is the ground level, $\gamma_{12} = \gamma/2$); $\alpha_1 = \frac{\mu E}{\hbar}$ is the Rabi parameter (Rabi frequency) proportional to the intensity of the electromagnetic wave (EMW), μ is the dipole momentum, E is the electric stress, k_1 is the wave vector of the EMW, v is the atom velocity along the Oy -axis pointing at the Earth, $\gamma \ll \alpha_1$ is the condition of strong field.

Let this atom belong to the saturated space maser that is located in the field of the periodic gravitational wave (GW) emitted by a pulsar or a short-period binary star and propagating anti-parallel to the Ox -axis pointing at the GW-source. The GW acts on the atomic levels, on the maser radiation and on the geometrical location of the atom. In [1] it was shown that the first effect is much smaller than the other two effects. The action of the GW on the monochromatic EMW could be accounted for by the solution of the eikonal equation

$$g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} = 0. \tag{2}$$

The motion of the atom could be obtained from the solution of the geodesic equation

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0 \tag{3}$$

(and not from the solution of the geodesic deviation equation as in the calculations of the displacements of the parts of the laboratory setups, designed for the detection of the GW).

The equations (1–3) are basic for the theory of the optic-metrical parametric resonance (OMPR) effect which could provide the possibility to detect the GW in a principally new way. This new way differs from the 18 ones known before [2] by the fact that it is the zero-order and not the first-order effect in the non-dimensional amplitude of the GW. In papers [3], [4], [5], the interpretation of the possible results of the investigation of the geometrical properties of the physical space-time with the help of the OMPR effect is given. The regular case of the isotropic space-time described in terms of Riemannian geometry is described quantitatively and completely, while the case of an anisotropic space-time described by Finsler geometry is described only qualitatively.

Let us give the result corresponding to Riemann geometry. The weak gravitational field in empty space (far from masses) is described by the linearized Einstein equations. Then, for the corrections to the flat space metric tensor, it suffices the wave equation. In the simplest case of plane waves, it has the form

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) h^k{}_i = 0. \quad (4)$$

The solution is the expression [6]

$$h^k{}_i = \text{Re}[A^k{}_i \exp(ik_\alpha x^\alpha)] \quad (5)$$

that satisfies the equation if $k_\alpha k^\alpha = 0$, i. e. k^α is the light-like vector. Then the metric tensor can be written as

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 + h \cos \frac{D}{c}(x^0 - x^1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - h \cos \frac{D}{c}(x^0 - x^1) \end{pmatrix} \quad (6)$$

where h is the dimensionless amplitude of the GW, D is the frequency of the GW.

The solution of (2) with regard to (6) shows that the action of the GW causes the phase modulation of the EMW. Since h is very small, the phase modulated EMW can be presented as a superposition [7]

$$E(t) = E \cos(\Omega t - ky) + E \frac{\omega}{4D} h [\cos((\Omega - D)t - ky) - \cos((\Omega + D)t - ky)]. \quad (7)$$

The solution of (3) with regard to (6) gives [1]

$$y(t) \sim h \frac{c}{D} \sin(Dt + k_g x) \quad (8)$$

where k_g is the GW wave vector. The expression (8) makes it possible to get the component of the atom velocity directed towards the Earth

$$\begin{aligned} v &= v_0 + v_1 \cos Dt, \\ v_1 &= hc. \end{aligned} \quad (9)$$

By substituting (9) and (7) into (1), one gets

$$\frac{d}{dt}\rho_{22} = -\gamma\rho_{22} + 2i[\alpha_1 \cos(\Omega t - ky) + \alpha_2 \cos((\Omega - D)t - ky)] \quad (10)$$

$$- \alpha_2 \cos((\Omega + D)t - ky)](\rho_{21} - \rho_{12}), \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{12} = -(\gamma_{12} + i\omega)\rho_{12} - 2i[\alpha_1 \cos(\Omega t - ky) + \alpha_2 \cos((\Omega - D)t - ky)] \quad (12)$$

$$- \alpha_2 \cos((\Omega + D)t - ky)](\rho_{22} - \rho_{11}),$$

$$\rho_{22} + \rho_{11} = 1,$$

where $\alpha_2 = \frac{\omega h}{4D}\alpha_1$, and (9) was used in the the expression for the full derivative $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + kv$. The solution of the system (10) is performed by the asymptotical extension method, the small parameter being $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha_1}$ (notice, that $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \sim \varepsilon$ too). If the OMPR conditions

$$\frac{\gamma}{\alpha_1} = \Gamma\varepsilon; \quad \Gamma = O(1); \quad \varepsilon \ll 1, \quad (13)$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\omega h}{4D} = a\varepsilon; \quad a = O(1); \quad \varepsilon \ll 1, \quad (14)$$

$$\frac{kv_1}{\alpha_1} = \frac{\omega h}{\alpha_1} = \kappa\varepsilon; \quad \kappa = O(1); \quad \varepsilon \ll 1, \quad (15)$$

$$(\omega - \Omega + kv_0)^2 + 4\alpha_1^2 = D^2 + O(\varepsilon) \Rightarrow D \sim 2\alpha_1 \quad (16)$$

are fulfilled, then the principal term of the asymptotic expansion for $Im(\rho_{21})$ which characterizes the scattered radiation energy flow can be calculated explicitly. The effect of the OMPR is that at the frequency shifted by D from the central peak of the EMW (that is from the signal of the space maser), the energy flow has the zero order in the powers of the small parameter of the expansion, i. e. is proportional to ε^0 , and has the form

$$Im(\rho_{21}) \sim \frac{\alpha_1}{D} \cos 2Dt + O(\varepsilon) \quad (17)$$

It means that the energy flow is periodically amplified and attenuated with the frequency of the GW. The OMPR signal (17) may be absent while the regular observations due to the time averaging, but it can be registered either with the help of a gate detector checking only the subsequent half-periods, or with the help of the special statistical processing of the radio telescope signal.

One of the assumptions of the qualitative analysis in [3], [4], [5] was that the Einstein equations in empty space in case of the anisotropic space-time still have the form of the wave equation (4) though its solution might become dependent on the direction. In order to prove this assumption and to obtain the generalized model for the OMPR effect in Finsler space the approach developed in [9], [8] will be used. What is actually to be done in this paper (Part 1) is to find some suitable and simple expressions for the metric in the anisotropic case and use them in the eikonal equation and in the geodesic equation. Besides, in the anisotropic case the classical Riemannian forms of the both mentioned equations might need revising. In the subsequent paper (Part 2), we expect to obtain the solutions of these equations and use them for the calculation of the OMPR effect in Finsler case.

2 The weakly deformed model ($\gamma + \varepsilon, v$)

Let M be a 4-dimensional manifold, and TM its tangent bundle. We denote by (x^i, y^i) the coordinates in a local chart on M and by $\left(\delta_i = \frac{\delta}{\delta x^i}, \dot{\partial}_i = \frac{\partial}{\partial y^i}\right)$ the local adapted basis

on TM , adapted to a given nonlinear connection N . In the following Sections y^i will be used for $\frac{\partial x^i}{\partial t}$, where t denotes an arbitrary parameter and it must not be mixed with the physical coordinate mentioned in the Introduction.

In the following, by "metric", we shall always mean a *generalized Lagrange metric*, [8], this is, a (0,2)-type tensor $\eta = \eta(x, y)$ with the property $\det(\eta_{ij}) \neq 0, \quad \forall(x, y) \in TM$.

In the following, we shall use (h, v) -metric structures on TM in the form

$$G = g_{ij}(x, y)dx^i \otimes dx^j + v_{ab}(y)\delta y^i \otimes \delta y^j, \quad (18)$$

where the (0,2)-type tensors (g_{ij}) and (v_{ab}) have the property

$$\det(g_{ij}(x, y)) \neq 0, \quad \det(v_{ab}(y)) \neq 0, \quad \forall y \neq 0.$$

If, in some local chart, g_{ij} or v_{ab} do not depend on the positional variables x^i , then they are called *locally Minkowskian*.

Let:

- $v = v(y)$ be a locally Minkowskian metric (which can be specialized, for instance, as a small deformation $\tilde{\varepsilon}$, as in [12]– [14];
- $g_{ij}(x, y) = \gamma_{ij}(y) + \varepsilon_{ij}(x, y)$, where
- $\gamma = \gamma(y)$ is a 0-homogeneous locally Minkowskian metric tensor, which shall be called in the following, the *undeformed metric*;
- $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ a small deformation of γ (which is not necessarily invertible as a matrix);

By the supposition that γ and ε are 0-homogeneous w.r.t. y , we get that

$$F^2(x, y) = (\gamma_{ij} + \varepsilon_{ij})y^i y^j$$

defines a Finslerian function. The Finslerian metric defined by F^2 is, in this case,

$$g_{ij}^* = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j};$$

We should notice that g^* does not necessarily coincide with g_{ij} , but we still have

$$g_{ij}^* y^i y^j = g_{ij} y^i y^j = F^2.$$

In order to prove the above equality, let us remark that $\phi_{ij} = g_{ij} - g_{ij}^*$ generally depends also on y , but being contracted two times with y , it vanishes: $\phi_{ij} y^i y^j = 0$. We have

$$2g_{kl}^* = (F^2)_{\cdot k \cdot l} = 2\phi_{kl} \underbrace{(g_{ij \cdot k \cdot l} y^i y^j + 2g_{lj \cdot k} y^j + 2g_{kj \cdot l} y^j)} + 2g_{kl}.$$

From the 0-homogeneity of $g = \gamma + \varepsilon$ as supposed above, we have $g_{ij \cdot k} y^k = 0, g_{kj \cdot l} y^l = 0$ etc. This implies $\phi_{kl} y^k y^l = 0$.

In the following, we shall mean by " , ", partial derivation w.r.t. x and by " · ", partial derivative w.r.t. y .

Assumption: We shall neglect all nonlinear terms in ε and its derivatives: $\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \simeq 0, \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl \cdot m} \simeq 0, \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl \cdot a} \simeq 0$.

Let

$$\varepsilon^i_{\cdot j} = \gamma^{il} \varepsilon_{lj}, \quad \varepsilon^{ij} = \gamma^{jk} \varepsilon^i_{\cdot k}.$$

Then, obviously, we have

Proposition 2.1 *If the metric γ is nondegenerate, then the deformed metric $g = \gamma + \varepsilon$ is also nondegenerate and its inverse is given by*

$$g^{ij} = \gamma^{ij} - \varepsilon^{ij}.$$

Indeed, by taking into account the previous assumption, we have $g^{ij}g_{jk} = (\gamma^{ij} - \varepsilon^{ij})(\gamma_{jk} + \varepsilon_{jk}) = \delta^i_k - \varepsilon^i_k + \varepsilon^i_k = \delta^i_k$.

As a remark, (ε^{ij}) defined above does **not** denote the inverse of (ε_{ij}) , while, by (g^{ij}) , (γ^{ij}) , (v^{ab}) we mean the inverses of the respective matrices.

Let $g = g(x, y)$ and $v = v(x, y)$ be arbitrary metrics. If $\det(v_{ab}^*)$ does not vanish anywhere, where

$$v_{ab}^* = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^a \partial y^b} (v_{de} y^d y^e),$$

then the vertical component v_{ab} defines a *canonical* nonlinear connection on TM , [8]:

$$N^a_i = \frac{\partial \mathcal{G}^a}{\partial y^b} \delta_i^b, \quad \mathcal{G}^a = \frac{1}{2} v^{*ab} \left(\frac{\partial v_{00}}{\partial y^b \partial x^k} \delta_c^k y^c - \frac{\partial v_{00}}{\partial x^k} \delta_b^k \right),$$

where the index 0 means transvection by y ; in this case, the *canonical metrical linear connection* is given by:

$$\begin{aligned} L^i_{jk} &= \frac{1}{2} g^{ih} \left(\frac{\delta g_{hj}}{\delta x^k} + \frac{\delta g_{hk}}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^h} \right), \\ L^a_{bk} &= \frac{\partial N^a_k}{\partial y^b} + \frac{1}{2} v^{ac} \left(\frac{\delta v_{bc}}{\delta x^k} - \frac{\partial N^d_k}{\partial y^b} v_{dc} - \frac{\partial N^d_k}{\partial y^c} v_{db} \right), \\ C^i_{jc} &= \frac{1}{2} g^{ih} \frac{\partial g_{jh}}{\partial y^c}, \\ C^a_{bc} &= \frac{1}{2} v^{ad} \left(\frac{\partial v_{db}}{\partial y^c} + \frac{\partial v_{dc}}{\partial y^b} - \frac{\partial v_{bc}}{\partial y^d} \right). \end{aligned}$$

In the case when $v_{ab} = v_{ab}(y)$ is a locally Minkowski metric, then the above expressions are much simpler, together with those of the local expressions of torsion and curvature:

Proposition 2.2 [8]: *If the vertical part v_{ab} of the metric (1) is locally Minkowski, then:*

- 1) $N^a_j = 0$, $L^i_{jk} = \gamma^i_{jk}$, $L^a_{bk} = 0$;
- 2) $T^i_{jk} = 0$, $R^a_{ij} = 0$, $P^a_{jb} = 0$, $S^a_{bc} = 0$;
- 3) $R^a_{b\ jk} = 0$, $P^a_{b\ kc} = 0$,

where $\gamma^i_{jk}(x, y)$ denote the Christoffel symbols of g .

Now, we are able to determine the coefficients of the canonical linear connection.

By a straightforward computation, taking Proposition (2.2) into account, we get:

$$\begin{cases} N^j_a = 0 \\ L^i_{jk} = \gamma^{il}(\varepsilon_{lj,k} + \varepsilon_{lk,j} - \varepsilon_{jk,l}) =: \gamma^i_{jk} \\ L^a_{bk} = 0 \\ C^a_{bc} = \frac{1}{2} v^{ad}(v_{db,c} + v_{dc,b} - v_{bc,d}) \\ C^i_{jc} = C^i_{jc} - \varepsilon^i_l C^l_{jc} + \frac{1}{2} \gamma^{il} \varepsilon_{lj,c}, \end{cases}$$

The only nonvanishing components of the torsion tensor are:

$$P^i_{jc} = C^i_{jc}.$$

By a direct computation, we obtain the components of the curvature which appear in the expressions of the Ricci tensors:

$$R_j^i{}_{kl} = r_j^i{}_{kl} = \gamma_{jk,l}^i - \gamma_{jl,k}^i + \gamma_{jk}^h \gamma_{hl}^i - \gamma_{jl}^h \gamma_{hk}^i, \quad (19)$$

$$P_j^i{}_{kc} = \frac{1}{2}(\delta_s^i \delta_j^l - \gamma^{il} \gamma_{sj}) \gamma_{lk,c}^s, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} P_b^a{}_{kc} &= 0, \\ S_b^a{}_{cd} &= S_b^a{}_{cd}(v) \end{aligned}$$

where $S_b^a{}_{cd}$ depends only on the vertical part (v_{ab}) of the metric.

Consequently, the Ricci tensors and the Ricci scalars are

$$\begin{aligned} R_{jk} &= r_{jk}, \quad R = r, \\ \overset{1}{P}_{bj} &= P_b^a{}_{ja} = 0, \\ \overset{2}{P}_{jb} &= P_j^i{}_{ib} = \frac{1}{2}(\delta_s^i \delta_j^l - \gamma^{il} \gamma_{sj}) \gamma_{li,b}^s, \\ S_{bc} &= S_{bc}(v), \quad S = v^{ac} S_{ac}. \end{aligned}$$

In vacuum, the second set of equations for our linearized model consists of identities. We get

Theorem 1. *The Einstein equations in vacuum for the linearized model $(\gamma + \varepsilon, v)$ are:*

$$\begin{cases} r_{ij} - \frac{1}{2}r\gamma_{ij} = \frac{1}{2}S(\gamma_{ij} + \varepsilon_{ij}) \\ (\delta_s^i \delta_j^l - \gamma^{il} \gamma_{sj}) \gamma_{li,b}^s = 0 \\ S_{ab} - \frac{1}{2}(r + S)v_{ab} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Here $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(y)$; $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x, y)$; $v_{ab} = v_{ab}(y)$. Thus, we see that in Finsler space the Einstein equations have become more complicated.

3 The case of small vertical component v

In the following, we shall assume for simplicity, that the vertical part v of the metric structure G has vanishing Ricci curvature S_{ab} , and it is small enough such that we can neglect terms in the form rv_{ab} :

$$S_{ab} = 0, \quad rv_{ab} \simeq 0.$$

In this case, the Einstein equations (21) become simply:

$$r_{ij} - \frac{1}{2}r\gamma_{ij} = 0 \quad (22)$$

$$(\delta_s^i \delta_j^l - \gamma^{il} \gamma_{sj}) \gamma_{li,b}^s = 0 \quad (23)$$

As we easily notice, the first set of equations (22) involves only the x -derivatives of the deformation ε , while the second ones, (23), contain mixed derivatives of second order of ε .

In order to integrate the first equations (22), we apply the same procedure as in the classical Riemannian case: namely, we look for solutions satisfying the *harmonicity conditions*

$$\gamma^{ij} \gamma_{ij}^h = 0,$$

which are actually

$$\varepsilon_{j,i}^i - \frac{1}{2}\varepsilon_{,j} = 0. \quad (24)$$

(There is no loss of generality by the above assumption: if ε does not satisfy (24), then, by taking $\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}v_{ij}\varepsilon$, the new unknown functions $\bar{\varepsilon}$ will obey them).

Consequently, the first set of equations (22) becomes

$$\square\varepsilon_{ij} = 0; \quad (25)$$

this gives a wave solution

$$\varepsilon_{jh} = \text{Re}(a_{jh}(y)e^{ik_m(y)x^m}), \quad (26)$$

where i denotes the imaginary unit. Thus, it turned out that the intuitive assumption made in [5] is right, moreover, it also turned out that the wave vector is no longer isotropic, but also depends on direction.

By (22) and (24), we infer that the quantities $a_{jh}(y)$ and $k_m(y)$ should obey the algebraic system

$$\begin{cases} \gamma^{hl}k_hk_l = 0 \\ a^i_jk_i = \frac{1}{2}a^i_ik_j \end{cases} \quad (27)$$

Remark 3.1 *In the Riemannian case $\varepsilon = \varepsilon(x)$, the quantities a_{jh} and k_j are constants. Still, if γ depends on the directional variables y^i , then, from the first equations above, we deduce that both a and k depend on y . Really, for the equation*

$$\square\varepsilon_{ij} = 0;$$

we look for a wave solution

$$\varepsilon_{jh} = \text{Re}(a_{jh}(y)e^{ik_m(y)x^m}). \quad (28)$$

We have

$$\square\varepsilon_{ij} = \gamma^{hl}\varepsilon_{ij,hl} = -(\gamma^{hl}k_hk_l)(\underbrace{\varepsilon a_{ij}(y) \cos(k_mx^m)}),$$

and this has to identically vanish. So, either ε itself is zero, or we must have $\gamma^{hl}k_hk_l = 0$.

By taking into account equations (23), we infer that

Proposition 3.1 *The harmonic wave solutions (28) of the Einstein equations (22, 23) are given by the solutions of the system:*

$$\begin{cases} \gamma^{hl}k_hk_l = 0 \\ a^i_jk_i = \frac{1}{2}a^i_ik_j \\ (\frac{1}{2}a^i_ik_j)_{,b} = \overset{0}{C}{}^i_{lb} \{2a^l_jk_i - a^l_ik_j\}. \end{cases} \quad (29)$$

We see that the amplitude a^i_j and the wave vector k_i now depend on each other.

4 Weak Finslerian perturbations of flat Minkowskian metric

Let us suppose that the dimension of $M = \mathbb{R}^4$ and

- the initial metric is the flat Minkowskian one $\gamma = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$;
- the vertical metric v is as in Section 3.

In this case, we have $C^i{}_{ib} = 0$, so the system (29) becomes

$$\begin{cases} \gamma^{hl}k_hk_l = 0 \\ a^i{}_jk_i = \frac{1}{2}a^i{}_ik_j \\ (\frac{1}{2}a^i{}_ik_j)_{.b} = 0. \end{cases} \quad (30)$$

We can easily see that, if we choose

$$k_2 = -k_1 = \frac{D}{c}, \quad k_3 = k_4 = 0$$

(where D and c are constants with physical meaning), and

$$a_3^3 = -a(y), \quad a_4^4 = a(y), \quad a^i{}_j = 0 \quad \text{for all other } (i, j),$$

then (30) is identically satisfied. We have thus obtained the solution

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 + a(y) \cos(\frac{D}{c}(x^1 - x^2)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - a(y) \cos(\frac{D}{c}(x^1 - x^2)) \end{pmatrix}, \quad (31)$$

where $a(y)$ is (any) scalar 0-homogeneous function, small enough such that $a^2 \simeq 0$.

Remark 4.1 *When $a(y)$ is a constant, this metric reduces to the perturbed Minkowski metric for the empty space. In this case the solutions of the geodesics equation and of the eikonal equation are the known ones, (Section 1).*

5 Weak perturbations of Berwald-Moor metric

Let, again the vertical part (v_{ab}) of the metric G be small, as in Section 3.

For the sake of simplicity of computations, we shall use in the following the *flag Berwald-Moor metric*, [2], [11]:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{12F^2} \frac{\partial^2 F^4}{\partial y^i \partial y^j}, \quad F = \sqrt[4]{y^1 y^2 y^3 y^4} \quad (32)$$

More precisely, we shall consider as unperturbed metric tensor the following:

$$\gamma = \frac{1}{12F^2} \begin{pmatrix} 0 & y^3 y^4 & y^2 y^4 & y^2 y^3 \\ y^3 y^4 & 0 & y^1 y^4 & y^1 y^3 \\ y^2 y^4 & y^1 y^4 & 0 & y^1 y^2 \\ y^2 y^3 & y^1 y^3 & y^1 y^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

The system (29), which gives the harmonic solutions of the Einstein equations, is equivalent to:

$$\begin{cases} \gamma_{hl}k^h k^l = 0 \\ a^i{}_jk^j = \frac{1}{2}a^j{}_jk^i \\ \gamma^{lp}(\frac{1}{2}a^i{}_ik_l)_{.b} = C^i{}_{ib} \{2a^p{}_ik^l - a^l{}_ik^p\}. \end{cases} \quad (34)$$

Let us choose

$$\begin{cases} k^1 = \eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, & k^2 = k^3 = k^4 = 0, \\ a^{ij} = \lambda k^i k^j, & \lambda \in (0, \delta) \subset \mathbb{R}. \end{cases}$$

This is, the coefficients k_i in the expression $k_m x^m$ are

$$k_1 = 0, \quad k_j(y) = \gamma_{1j} k^1, \quad j \neq 1;$$

The condition $k_1 = 0$ comes from $k_1 = \gamma_{11} k^1 = \gamma_{11} k^1 = 0$ (and, in this case, it does not imply $k^1 = 0$).

We remark that

$$\begin{cases} a^{11} \neq 0, & a^{ij} = 0, \quad \forall (i, j) \neq (1, 1) \\ k^i k_i = 0. \end{cases}$$

We have:

$$a^i_j = \lambda k^i k_j, \quad a_{ij} = \lambda k_i k_j = \lambda \gamma_{1i} \gamma_{1j} \eta^2.$$

By a direct computation, and having in view the equalities:

$$C_{11b}^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial y^b} = 0, \quad b = 1, \dots, 4,$$

it follows that the system (34) is identically satisfied, and, taking into account the considerations in Section 2, the Einstein equations in vacuum are also satisfied by the perturbed metric $\gamma + \varepsilon$.

We have thus obtained

Theorem 2. *The following perturbation*

$$\varepsilon_{jh}(x, y) = \lambda \gamma_{1j} \gamma_{1h} \eta^2 \cos\{\eta(\gamma_{12} x^2 + \gamma_{13} x^3 + \gamma_{14} x^4)\}, \quad (35)$$

where λ and η are real constants, with $\lambda \in (0, \delta)$, and γ_{ij} are the coefficients of the flag Berwald-Moor metric (32), gives a wave solution of the linearized Einstein equations (21).

Remark 5.1 *The contravariant perturbation (35) has only one nonvanishing component, namely, ε^{11} :*

$$\varepsilon^{11} = \lambda \eta^2 \cos\{\eta(\gamma_{12} x^2 + \gamma_{13} x^3 + \gamma_{14} x^4)\} \neq 0, \quad \varepsilon^{ij} = 0, \quad \forall (i, j) \neq (1, 1).$$

*This property is very useful when dealing with the eikonal equation we are going to obtain in the next Section; also, it suggests that it would be advantageous to work on the dual space T^*M .*

6 Eikonal equation

Let us suppose that a plane wave is described by

$$f = a e^{-i\psi(x,y)}.$$

In the first approximation, the eikonal ψ can be written as

$$\psi = \psi_0 + \frac{\partial \psi}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial \psi}{\partial y^a} dy^a.$$

In terms of adapted basis $\left(\delta_i = \frac{\delta}{\delta x^i}, \dot{\partial}_a = \frac{\partial}{\partial y^a}\right)$, it gives

$$\psi = \psi_0 + \frac{\delta\psi}{\delta x^i} dx^i + \frac{\partial\psi}{\partial y^a} \delta y^a.$$

By denoting

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{\delta\psi}{\delta x^i}, & K_a &= \frac{\partial\psi}{\partial y^a}, & i, a &= 1, \dots, 4, \\ k^i &= g^{ij} k_j, & K^a &= v^{ab} K_b, \end{aligned}$$

we obtain the following *wave vector*, which is globally defined on the tangent bundle TM :

$$K = k^i \delta_i + K^a \dot{\partial}_a.$$

As a remark, the differential $d\psi$ can be written as $d\psi = k_i dx^i + K_a \delta y^a$.

We can formally state the condition that the wave vector should be light-like, namely, $\|K\| = 0$. This has the form

$$g_{ij} k^i k^j + v_{ab} K^a K^b = 0,$$

equivalently,

$$g^{ij} k_i k_j + v^{ab} K_a K_b = 0. \quad (36)$$

The last expression will be called in the following, the *generalized (extended) eikonal equation*.

In the Riemannian case, when $\psi = \psi(x)$, the vertical part K_a of the wave vector vanishes, and the eikonal equation reduces to the classical one:

$$g^{ij} \frac{\partial\psi}{\partial x^i} \frac{\partial\psi}{\partial x^j} = 0.$$

For the (35) the light-like vectors $\|K\| = 0$, are described by the equation

$$\gamma_{ij} k^i k^j + \lambda \eta^2 \cos\{\eta(\gamma_{12} x^2 + \gamma_{13} x^3 + \gamma_{14} x^4)\} (k_1)^2 + v_{ij} K^i K^j = 0,$$

where $k_1 = \gamma_{1j} k^j$.

The associated generalized eikonal equation has the form

$$\gamma^{ij} \frac{\partial\psi}{\partial x^i} \frac{\partial\psi}{\partial x^j} = \varepsilon^{11}(x) \left(\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right)^2 - v^{ij}(y) \frac{\partial\psi}{\partial y^i} \frac{\partial\psi}{\partial y^j}.$$

7 Geodesics of perturbed locally Minkovsian metric $g = \gamma + \varepsilon$

The Finslerian function F corresponding to the perturbed B-M metric, namely

$$F^2 = (\gamma_{hl}(y) + \varepsilon_{hl}(x, y)) y^h y^l$$

leads to the Euler-Lagrange equations

$$\frac{\partial F^2}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^2}{\partial y^i} \right) = 0, \quad (37)$$

which are equivalent to

$$g_{ij}^* \frac{dy^j}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial x^j} y^j - \frac{\partial F^2}{\partial x^i} \right) = 0,$$

where t is the arclength $t = \int_0^t F(x(\tau), y(\tau)) d\tau$, $y^i = \dot{x}^i$ and g_{ij}^* is the usual Finsler metric $g_{ij}^* = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$. As shown in Section 1, we have $g_{ij}^* = \phi_{ij} + g_{ij}$, with

$$\phi_{ij} = \frac{1}{2}(g_{hl \cdot i \cdot j} y^h y^l + 2g_{il \cdot j} y^l + 2g_{jl \cdot i} y^l) \quad (38)$$

The second term, namely, $G_i := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial x^j} y^j - \frac{\partial F^2}{\partial x^i} \right)$ is actually

$$G_i = \gamma_{ilh} y^l y^h + \frac{1}{2} \varepsilon_{hl \cdot i \cdot j} y^h y^l y^j,$$

where $\gamma_{ilh} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{il \cdot h} + \varepsilon_{ih \cdot l} - \varepsilon_{lh \cdot i})$.

The equations of geodesics have the form

$$g_{ij}^* \frac{dy^j}{dt} + \gamma_{i00} + \frac{1}{2} \varepsilon_{hl \cdot i \cdot j} y^h y^l y^j = 0, \quad (39)$$

where:

- $\gamma_{i00} = \gamma_{ijk} y^j y^k$;
- $g_{ij}^* = \frac{1}{2} \frac{\partial F^2}{\partial y^i \partial y^j}$ is the (usual) Finsler metric generated by F ;
- the third term originates from the anisotropic deformation of the metric.

8 Discussion

The goal of this paper was to adjust the ideas underlying the theory of the OMPR effect to the case when the geometry used for the description of the space-time is not Riemannian but the Finslerian one. To do this we had first of all to make sure that the linearized Einstein equations in empty space preserve the form of the wave equation for the metrics depending on the direction. Such metric being found had to be used in the eikonal equation and in the geodesic equation. Besides, the very forms of these equations might appear different from those known for the Riemannian case.

The obtained results are the following. The Einstein equations in vacuum for the linearized model (21) were constructed. They do produce the wave equation (25) with the solution given by (28). The last expression differs from the regular plane wave: its amplitude and wave vector are no longer isotropic and depend on each other. If the unperturbed metric tensor is the Minkowski one, then the anisotropic perturbation leads to (31) whose structure is the same as that of (6) common for the GW investigations in Riemannian geometry. If the unperturbed metric is the Berwald-Moor one (33), the structure of the wave solution originating from the linear perturbation of the metric is more complicated and has the form (35). In both these cases the eikonal equation should be generalized and take the form (36), while the geodesic equation has the form (39). It should be also mentioned here that dealing with Finsler geometry, one should consider the revision of Maxwell equations [9] and the testable physical consequences of this. It is very interesting but separate question, because the Bloch's equations needed for the discussion of the OMPR and containing the EMW are one-dimensional, that is they deal only with one direction connecting the space maser and the Earth.

References

- [1] Siparov, S. 2004, *Astronomy & Astrophysics*, v. 416, p. 815
- [2] Gladyshev, V. 2000, *Irreversible electromagnetic processes in the astrophysical problems*. Bauman University, Moscow.
- [3] Siparov, S. 2006, Theory of the zero-order effect suitable to investigate the space-time geometrical structure, *Hypercomplex numbers in Geometry and Physics*, 2006, v. 6, p. 155–172
- [4] Siparov, S. 2007, in *Space-time structure. Algebra and Geometry*, Moscow, Lilia Print, p. 495–514
- [5] Siparov, S. 2007, Proc. Conf. PIRT-07, Moscow
- [6] Amaldi E. & Pizzella G. 1979, in *Astrofisika e Cosmologia Gravitazione Quanti e Relativita*, (Firenze, Guinti Barbera), (Rus. trans. 1982, Mir, Moscow, p. 241)
- [7] Siparov, S. 2006, Proc. Conf. PIRT-06, London
- [8] Miron, R., Anastasiei, M., *The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and Applications*, Kluwer Acad. Publ. FTPH no. 59, (1994).
- [9] Miron, R., Anastasiei, M., *Vector bundles. Lagrange Spaces. Applications to the Theory of Relativity* (in Romanian), Ed. Acad. Române, Bucuresti, 1987.
- [10] Balan, V., Brinzei, N.: Einstein equations for (h, v) -Berwald-Moor relativistic models, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 11 (2), 2006, 20–26.
- [11] Balan, V., Brinzei, N.: Berwald-Moor-type (h, v) -metric physical models, *Hypercomplex numbers in Geometry and Physics*, 2005, v. 4, p. 114
- [12] Balan, V., Stavrinou, P. C., Weak gravitational fields in generalized metric spaces, Proc. of The Int. Conf. of Geometry and Its Applications, Thessaloniki, Greece 1999, BSG Proc. 6, Geometry Balkan Press, Bucharest, 2002, 27–37.
- [13] Balan, V., Stavrinou, P. C., Trencovski, K., Weak gravitational models based on Beil metrics, Proc. of the Conference of Applied Differential Geometry – General Relativity, Workshop "Applied Differential Geometry, Lie Algebras and General Relativity", August 27 – September 2, 2000, Thessaloniki, Greece.
- [14] Balan, V., Stavrinou, P. C., Weak Linearized Gravitational Models Based on Finslerian (α, β) -Metrics, Proc. of The Conference of Applied Differential Geometry – General Relativity – June 26 – July 1, 2001, Thessaloniki, Greece.

О возможности ОМПП-эффекта в пространствах с финслеровой геометрией. Часть I

Н. Бринзей, С. Сипаров

*Университет Трансильвании, Брасов, Румыния,
Академия гражданской авиации, Петербург, Россия
nico.brinzei@rdslink.ro, sergey@siparov.ru*

Эффект оптико-метрического параметрического резонанса может обеспечить возможность получить экспериментальные свидетельства существования гравитационных волн. Эффект может измениться, если геометрия физического пространства-времени не риманова, а финслерова. Предпринято исследование такой ситуации.

Ключевые слова: финслерова геометрия, метрика Бервальда-Моора, анизотропные пространства, ОМПП-эффект.

MSC2000: 53B40, 53C60.

EINSTEIN EQUATIONS FOR THE HOMOGENEOUS FINSLER PROLONGATION TO TM , WITH BERWALD-MOOR METRIC

Gh. Atanasiu, N. Brinzei

"Transilvania" University, Brasov, Romania
gh_atanasiu@yahoo.com, nico.brinzei@rdslink.ro

Within the geometrical framework provided by (h,v)-metric structures, an important case is that of the homogeneous prolongation (lift) of a Finsler metric to the tangent bundle TM , constructed by R. Miron. In this case, we perform a study of Einstein equations. A special attention is paid to the Berwald-Moor metric, and to metrics conformally related to it.

Keywords: nonlinear (Ehresmann) connection, d-connection, homogeneous prolongation (lift), Einstein equations, Berwald-Moor metric

MSC2000: 53B40, 53C60

1 Introduction

In the paper, we apply Miron's theory of Einstein equations on general metric spaces, for h-v models provided by the homogenous prolongation of a Finsler metric. In this context, we show that Einstein's equations in vacuum are satisfied by the homogeneous prolongation of the Berwald-Moor Finslerian metric tensor.

We also investigate the homogeneous lift of conformally deformed Berwald-Moor metrics.

In Sections 2 and 3, we present the mathematical formalism of h-v metrics, [8], [9], which lies at the base of a theory of gravitational and electromagnetic fields in Finsler spaces.

Finslerian metric tensors $g(x, y)$ on a manifold M , by their dependence on directional variables, actually live on the tangent bundle TM of the respective manifold. Once M is a Finsler manifold, then the Finslerian metric tensor endows TM with a Riemannian structure (which is called a *lift* or *prolongation* of the original Finslerian one on M), and the specific instruments of Riemannian geometry can be applied on TM . This idea, applied to Einstein equations, lies at the base of Miron's formalism, which extends classical Einstein equations, and which is presented in Section 4.

In Finsler spaces, the tangent space $T_{x_0}M$ at a point $x_0 \in M$ is itself a Riemannian manifold, and, generally, it is curved. The geometry of the fibre $T_{x_0}M$ influences on the energy-momentum tensor, and this influence is pointed out by Einstein's equations on TM .

Section 5 is devoted to the homogeneous prolongation (or lift) of a Finsler metric, which was also introduced by R. Miron. Homogeneity and homogeneous prolongations are needed in a theory of geodesics and Jacobi fields on TM , in order to ensure the independence of the distance Lagrangian to (at least a group of) reparametrizations.

In Section 6, we apply the above theories for the 4-dimensional Berwald-Moor space; here, the homogeneous lift provides a much simpler model than the usual Sasaki lift. More precisely, we show that, if we use the idea of homogeneous prolongation together with Berwald-Moor metric and a conveniently chosen linear connection, the energy-momentum tensor on TM identically vanishes (even though the curvature tensor \mathbb{R} on TM is not identically zero). As shown in [2], if we used the Sasaki lift instead the homogeneous one, the vertical Ricci tensor S_{ab} would no longer vanish.

The last section is devoted to deformations by a conformal factor $\sigma(x)$ of the above model.

2 Nonlinear and linear connections on TM

Let M be a differentiable manifold of dimension n and class C^∞ , (TM, π, M) , its tangent bundle and (x^i, y^a) the coordinates of a point $u \in TM$ in a local chart. We denote by $\cdot_{,i}$ partial (usual) derivation with respect to x^i and by $\cdot_{,a}$, partial derivation with respect to y^a .

Let TM be endowed with a nonlinear (Ehresmann) connection N , [5], [1], [9], and $(\delta_i, \dot{\partial}_a)$ be the corresponding adapted basis on TM :

$$\delta_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - N^a_i \frac{\partial}{\partial y^a}, \quad \dot{\partial}_a = \frac{\partial}{\partial y^a};$$

analogously, let $(dx^i, \delta y^a)$ be its dual basis,

$$\delta y^a = dy^a + N^a_i dx^i.$$

If the nonlinear connection N is given, then any vector field $X \in \mathcal{X}(TM)$ is locally represented as

$$X = X^{(0)i} \frac{\delta}{\delta x^i} + X^{(1)i} \frac{\partial}{\partial y^i},$$

with $X^{(0)i}$, $X^{(1)i}$ - *distinguished* (or *d-*) *vector fields*. In the same manner, a 1-form ω on TM can be uniquely written as

$$\omega = \omega_{(0)i} dx^i + \omega_{(1)i} \delta y^i,$$

where $\omega_{(0)i}$, $\omega_{(1)i}$ are *distinguished 1-forms*.

We adopt the following convention: if no elsewhere specified, indices i, j, k, \dots will denote the quantities corresponding to horizontal geometrical objects, while a, b, c will index quantities corresponding to the vertical distribution.

A *distinguished linear connection* (or, simply, a *d-connection*), [9], [8], is a linear connection D which preserves by parallelism the distributions generated by the nonlinear connection N , i.e., the covariant derivative of any horizontal vector field remains horizontal, while the covariant derivative of any vertical vector field remains vertical. In local coordinates, a d-connection is characterized by its coefficients $(L^i_{jk}, L^a_{bk}, C^i_{jc}, C^a_{bc})$, where:

$$\begin{aligned} D_{\delta_k} \delta_j &= L^i_{jk} \delta_i, & D_{\delta_k} \dot{\partial}_b &= L^a_{bk} \dot{\partial}_a \\ D_{\dot{\partial}_c} \delta_j &= C^i_{jc} \delta_i, & D_{\dot{\partial}_c} \dot{\partial}_b &= C^a_{bc} \dot{\partial}_a. \end{aligned}$$

We shall denote the local components of the torsion tensor of such a linear connection \mathbb{T} by $T^i_{jk}, R^a_{jk}, P^i_{jc}, P^a_{kb}, S^i_{bc}, S^a_{bc}$ (as in [1], [5], [8]): $h\mathbb{T}\left(\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) = T^i_{jk} \frac{\delta}{\delta x^i}$, $h\mathbb{T}\left(\frac{\partial}{\partial y^c}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) = P^i_{jc} \frac{\delta}{\delta x^i}$ etc. Then:

$$\begin{aligned} T^i_{jk} &= L^i_{jk} - L^i_{kj}, & R^a_{jk} &= \frac{\delta N^a_j}{\delta x^k} - \frac{\delta N^a_k}{\delta x^j}, & P^i_{jc} &= C^i_{jc}, \\ P^a_{jb} &= \frac{\partial N^a_j}{\partial y^b} - L^a_{bj}, & S^i_{bc} &= 0, & S^a_{bc} &= C^a_{bc} - C^a_{cb}. \end{aligned}$$

With the same convention of notations of indices, the local components of the curvature are, [1], [5], [8]:

$$\left\{ \begin{aligned} R^i_{jkl} &= \frac{\delta L^i_{jk}}{\delta x^l} - \frac{\delta L^i_{jl}}{\delta x^k} + L^h_{jk} L^i_{hl} - L^h_{jl} L^i_{hk} + C^i_{ja} R^a_{kl}, \\ R^a_{bkl} &= \frac{\delta L^a_{bk}}{\delta x^l} - \frac{\delta L^a_{bl}}{\delta x^k} + L^c_{bk} L^a_{cl} - L^c_{bl} L^a_{ck} + C^a_{bc} R^c_{kl}, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} P_j^i{}_{kc} = \frac{\partial L^i{}_{jk}}{\partial y^c} - C^i{}_{jc|k} + C^i{}_{jb}P^b{}_{kc} \\ P_b^a{}_{kc} = \frac{\partial L^a{}_{bk}}{\partial y^c} - C^a{}_{bc|k} + C^a{}_{bd}P^d{}_{kc}, \\ \begin{cases} S_j^i{}_{bc} = \frac{\partial C^i{}_{jb}}{\partial y^c} - \frac{\partial C^i{}_{jc}}{\partial y^b} + C^h{}_{jb}C^i{}_{hc} - C^h{}_{jc}C^i{}_{hb}, \\ S_b^a{}_{cd} = \frac{\partial C^a{}_{bc}}{\partial y^d} - \frac{\partial C^a{}_{bd}}{\partial y^c} + C^f{}_{bc}C^a{}_{fd} - C^f{}_{bd}C^a{}_{fc}, \end{cases} \end{cases}$$

where $|$ denotes the horizontal covariant derivative associated to D .

The associated Ricci tensors are, [8]:

$$R_{jk} = R_j^i{}_{ki}, \quad \overset{1}{P}_{bj} = P_b^a{}_{ja}, \quad \overset{2}{P}_{jb} = P_j^i{}_{ib}, \quad S_{bc} = S_b^a{}_{ca}.$$

3 $h-v$ metric structures; metrical d-connections

Definition 1. ([8]): An $h-v$ metric on TM is a structure of the form

$$G = g_{ij}(x, y)dx^i \otimes dx^j + v_{ab}(x, y)\delta y^a \otimes \delta y^b, \quad (1)$$

where g_{ij} and v_{ab} are $(0,2)$ -type symmetric nondegenerate tensor fields on M .

Let G be an $h-v$ metric on TM .

A d -connection D is *metrical* if $D_X G(Y, Z) = 0$, for any vector fields X, Y, Z on TM .

The *canonical metrical linear connection*, [8], is locally given by

$$\begin{aligned} \overset{c}{L}{}^i{}_{jk} &= \frac{1}{2}g^{ih} \left(\frac{\delta g_{hj}}{\delta x^k} + \frac{\delta g_{hk}}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^h} \right), \\ \overset{c}{L}{}^a{}_{bk} &= \frac{\partial N_k^a}{\partial y^b} + \frac{1}{2}v^{ac} \left(\frac{\delta v_{bc}}{\delta x^k} - \frac{\partial N_k^d}{\partial y^b} v_{dc} - \frac{\partial N_k^d}{\partial y^c} v_{db} \right), \\ \overset{c}{C}{}^i{}_{jc} &= \frac{1}{2}g^{ih} \frac{\partial g_{jh}}{\partial y^c}, \\ \overset{c}{C}{}^a{}_{bc} &= \frac{1}{2}v^{ad} \left(\frac{\partial v_{db}}{\partial y^c} + \frac{\partial v_{dc}}{\partial y^b} - \frac{\partial v_{bc}}{\partial y^d} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

The importance of the above connection is given by:

Theorem 2. ([8]): The set of all distinguished connections compatible to G is given by

$$\begin{aligned} \bar{L}^i{}_{jk} &= \overset{c}{L}{}^i{}_{jk} + \Omega_{rj}^{ih} X_{hk}^r, \quad \bar{C}^i{}_{jc} = \overset{c}{C}{}^i{}_{jc} + \Omega_{rj}^{ih} Y_{hc}^r \\ \bar{L}^a{}_{bk} &= \overset{c}{L}{}^a{}_{bk} + \Omega_{db}^{ac} X_{ck}^d, \quad \bar{C}^a{}_{bc} = \overset{c}{C}{}^a{}_{bc} + \Omega_{db}^{af} X_{fc}^d \end{aligned}$$

where $\Omega_{rj}^{ih} = \frac{1}{2}(\delta_r^i \delta_j^h - g_{rj} g^{ih})$, $\Omega_{cd}^{ab} = \frac{1}{2}(\delta_c^a \delta_d^b - v_{cd} v^{ab})$ and $X^i{}_{jk}$, $X^a{}_{bk}$, $Y^i{}_{jc}$, $Y^a{}_{bc}$ are arbitrary d -tensor fields.

In particular, if we want to a priori give the torsion tensors $T^i{}_{jk}$ and $S^a{}_{bc}$, then there holds

Theorem 3. ([8]): There uniquely exists a d -connection $D\Gamma(N) = (L^i{}_{jk}, L^a{}_{bk}, C^i{}_{jc}, C^a{}_{bc})$ such that:

1. D is compatible to G .

2. $L^a_{bk} = \overset{c}{L}^a_{bk}$, $C^i_{jc} = \overset{c}{C}^i_{jc}$.
3. The torsion tensors T^i_{jk} and S^a_{bc} of D are a priori given.

(a) This connection is given by (2) and

$$\begin{cases} L^i_{jk} = \overset{c}{L}^i_{jk} + \frac{1}{2}g^{ir}(g_{rh}T^h_{jk} - g_{jh}T^h_{rk} + g_{kh}T^h_{jr}) \\ C^a_{bc} = \overset{c}{C}^a_{bc} + \frac{1}{2}v^{af}(v_{fd}S^d_{bc} - v_{bd}S^d_{fc} + v_{cd}S^d_{bf}). \end{cases} \quad (3)$$

We shall use, in the following, the notations

$$\begin{aligned} \tau^i_{jk} &= \frac{1}{2}g^{ir}(g_{rh}T^h_{jk} - g_{jh}T^h_{rk} + g_{kh}T^h_{jr}), \\ \bar{\tau}^a_{bk} &= \frac{1}{2}v^{af}(v_{fd}S^d_{bc} - v_{bd}S^d_{fc} + v_{cd}S^d_{bf}). \end{aligned}$$

4 Einstein equations on TM

Let TM be endowed with: a nonlinear connection N , an h-v metric structure G and a metrical d-connection D with a priori given torsions T^i_{jk} and S^a_{bc} , as in (3).

Once given an h-v metric G on TM , (TM, G) becomes a Riemannian manifold of dimension $2n$. One can formally state the Einstein equations on TM :

$$Ric(D) - \frac{1}{2}Sc(D)G = \kappa\mathcal{T}.$$

In local coordinates, the above relation becomes:

Theorem 4. ([8]) *The Einstein equations of (TM, G) have the following form:*

$$\begin{aligned} R_{ij} - \frac{1}{2}(R + S)g_{ij} &= \kappa\mathbb{T}_{ij} \\ P_{ai} &= \kappa\mathbb{T}_{ai}, \quad \overset{2}{P}_{ia} = -\kappa\mathbb{T}_{ia} \\ S_{ab} - \frac{1}{2}(R + S)v_{ab} &= \kappa\mathbb{T}_{ab}, \end{aligned}$$

where \mathbb{T}_{ij} , \mathbb{T}_{ai} , \mathbb{T}_{ia} and \mathbb{T}_{ab} are the local adapted components of the energy momentum tensor.

Comment: in the above equations, the unknowns are not only the components g_{ij} , v_{ab} of the metric tensor, but also the coefficients N^a_i and the torsions T^i_{jk} , S^a_{bc} , this is, in the most general case, one has

$$n(n+1) + n^2 + n^2(n-1) = n^3 + n^2 + n$$

unknowns. Once we fix the nonlinear connection N , their number decreases with n^2 , this is, we still have $n^3 + n$ unknown functions ($n = 4 \Rightarrow 68$ unknown functions!).

If we also choose T^i_{jk} , S^a_{bc} as being 0, this is, if we work with the canonical d-connection $D\Gamma(N)$, the remaining unknown functions are only the components of the metric, this is, $n(n+1) \stackrel{n=4}{=} 20$ unknowns depending both on x and y . If we also establish a link between g_{ij} and v_{ab} , the remaining unknown functions are only 10, just as in the classical Riemannian case. Also, we can work with a given (known) metric and infer nonlinear connections/torsions out of Einstein equations.

The equations are in number of $4n^2$, this is, for $n = 4$, we have 64 equations. Still, in particular cases, as we shall see, this number can drastically reduce.

Remark 5. g_{ij} , v_{ab} and N^a_i appear in the equations with their second order derivatives, while, for T^i_{jk} and S^a_{bc} , the above system is a PDE system of order one.

The energy conservation law, [8],

$$\operatorname{div} \mathbb{T} = 0,$$

in local coordinates takes the following form:

$$\begin{aligned} \{R^i_j - \frac{1}{2}(R + S)\delta^i_j\}_{|i} + P^a_j|_a &= 0 \\ \{S^a_b - \frac{1}{2}(R + S)\delta^a_b\}_{|a} - P^i_{b|i} &= 0. \end{aligned}$$

5 Einstein equations for the homogeneous prolongation (lift) of a Finsler metric

The notion of homogeneous lift is defined by R. Miron, [7], for Finsler metrics.

Its usefulness is the following: the use of the homogeneous lift insures the invariance of the distance Lagrangian $\int \sqrt{G(x, \dot{x})} dt$ on TM to reparametrizations of the form $t \mapsto \lambda t$, and consequently, the possibility of building an exponential map on TM .

Let g define a Finslerian metric tensor on M .

Definition 6. *The homogeneous prolongation (lift) of the Finsler metric g to the tangent bundle TM is the following (h, v) -metric:*

$$G^H = g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j + \alpha \frac{g_{ab}(x, y)}{F^2}(x, y) \delta y^a \otimes \delta y^b, \quad (4)$$

where

- $F^2 = \|y\|^2 = g_{ij}y^i y^j$, and $\alpha > 0$ is a constant;
- $g_{ab} = \delta^i_a \delta^j_b g_{ij}$;
- (δy^a) are computed w.r.t. the canonical nonlinear connection

$$N^a_j = \frac{\partial G^a}{\partial y^j}, \quad \mathcal{G}^a = \frac{1}{2} g^{ab} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial y^b \partial x^k} y^k - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^k} \delta^k_b \right) \quad (5)$$

Definition 7. *The Sasaki lift of the generalized Lagrange metric g to TM is*

$$G = g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j + g_{ij}(x, y) \delta y^i \otimes \delta y^j, \quad (6)$$

With respect to the Sasaki lift, let us take into account the Cartan connection $CT(N)$:

$$\begin{aligned} L^i_{jk} &= \frac{1}{2} g^{ih} \left(\frac{\delta g_{hj}}{\delta x^k} + \frac{\delta g_{hk}}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^h} \right); \\ C^i_{jk} &= \frac{1}{2} g^{ih} \left(\frac{\partial g_{hj}}{\partial y^k} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial y^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^h} \right) = \frac{1}{2} g^{ih} \frac{\partial g_{hj}}{\partial y^k}. \end{aligned}$$

Now, having in view the homogeneous prolongation (4), let us consider the canonical (Cartan) nonlinear connection N determined by the Finslerian fundamental function F , and the following d-connection $MT(N)$:

$$\begin{aligned}
 L^i_{jk} &= \frac{1}{2}g^{ih} \left(\frac{\delta g_{hj}}{\delta x^k} + \frac{\delta g_{hk}}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^h} \right); \\
 L^a_{bk} &= \frac{1}{2}v^{ad} \left(\frac{\delta v_{db}}{\delta x^k} + \frac{\delta v_{dk}}{\delta x^b} - \frac{\delta v_{bk}}{\delta x^d} \right); \\
 C^i_{jc} &= \frac{1}{2}g^{ih} \frac{\partial g_{hj}}{\partial y^c}; \\
 C^i_{jk} &= \frac{1}{2}v^{ih} \left(\frac{\partial v_{hj}}{\partial y^k} + \frac{\partial v_{hk}}{\partial y^j} - \frac{\partial v_{jk}}{\partial y^h} \right).
 \end{aligned}$$

Remark 8. 1. In the expression of the coefficients L^a_{bk} we denoted, for simplicity:

$$v_{dk} = v_{de}\delta^e_k, \quad x^d = \delta^d_j x^j.$$

2. The above connection is a metrical d -connection on TM .
3. Its coefficients L^i_{jk} and C^i_{jc} coincide with those of the Cartan connection.

Moreover, taking into account that, with respect to the canonical nonlinear connection N we have $\frac{\delta F}{\delta x^i} = 0$, $i = 1, \dots, 4$, we get:

Proposition 9. The coefficients of the canonical metrical d -connection $M\Gamma(N)$ are given by:

$$\begin{aligned}
 L^i_{jk} &= L^a_{bk} \delta^b_j \delta^i_a \\
 C^a_{bc} &= C^a_{bc} + B^a_{bc},
 \end{aligned}$$

where L^i_{jk} and C^i_{jk} are the coefficients of the Cartan connection $C\Gamma(N)$, $C^a_{bc} = C^i_{jk} \delta^b_j \delta^i_a \delta^k_c$ and

$$B^a_{bc} = \frac{-1}{F^2} (\delta^a_b y_c + \delta^a_c y_b - y^a g_{bc}).$$

Obviously, B^i_{jk} are d -tensors of rank $(1,2)$, and their horizontal covariant derivatives with respect to $M\Gamma(N)$ are:

$$B^a_{bc|l} = 0, \quad B^a_{bc}|_e = \delta^a_b g_{ce} + \delta^a_c g_{be} - \delta^a_e g_{bc}. \tag{7}$$

The torsion tensors of $M\Gamma(N)$ are:

$$T^i_{jk} = 0, \quad R^a_{jc}, \quad C^i_{jk}, \quad P^a_{jb} = N^a_{j\cdot b} - L^a_{bj}, \quad S^a_{bc} = 0.$$

In the following, we shall also use the property, [1], [8]:

$$P^a_{jb} y^b = 0, \quad P^a_{jb} y^j = 0.$$

The curvature tensors are:

$$\begin{aligned}
 R^i_{jkl}, \quad R^a_{bkl} &= R^a_{bkl} + B^a_{be} R^e_{kl}, \\
 P^i_{jkc}, \quad P^a_{bkc} &= P^a_{bkc} + B^a_{bd} P^d_{kc}, \\
 S^i_{jbc}, \quad S^a_{bcd} &= C^a_{bc\cdot d} - C^a_{bd\cdot c} + C^{*f}_{bc} C^a_{fd} - C^{*f}_{bd} C^a_{fde},
 \end{aligned}$$

where $R_b^a{}_{kl} = R_j^i{}_{kl}\delta_i^a\delta_b^j$, $P_b^a{}_{kc} = P_j^i{}_{kc}\delta_i^a\delta_b^j$.

Consequently, the Einstein equations for the homogeneous lift G^H are:

$$\begin{aligned} R_{ij} - \frac{1}{2}(R + S)g_{ij} &= \kappa\mathbb{T}_{ij} \\ P_{ai} &= \kappa\mathbb{T}_{ai}, \quad P_{ia} = -\kappa\mathbb{T}_{ia} \\ S_{ab} - \frac{1}{2}(R + S)v_{ab} &= \kappa\mathbb{T}_{ab}, \end{aligned}$$

where the Ricci tensors: $R_{ij} = R_i^h{}_{jh}$, $P_{ai} = P_a^c{}_{ic}$, $P_{ia} = P_i^h{}_{ah}$, $S_{ab} = S_a^d{}_{bd}$ are computed by means of the above.

6 The homogeneous prolongation of the Finslerian Berwald-Moor Metric

Let, again, $\dim M = 4$ and g_{ij} denote the flag Berwald-Moor metric, [2], [3]:

$$g_{ij}(y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}, \quad F = \sqrt[4]{y^1 y^2 y^3 y^4}, \quad (8)$$

this is,

$$(g_{ij}) = \frac{1}{8F^2} \begin{pmatrix} -\frac{y^2 y^3 y^4}{y^1} & y^3 y^4 & y^2 y^4 & y^2 y^3 \\ y^3 y^4 & -\frac{y^1 y^3 y^4}{y^2} & y^1 y^4 & y^1 y^3 \\ y^2 y^4 & y^1 y^4 & -\frac{y^1 y^2 y^4}{y^3} & y^1 y^2 \\ y^2 y^3 & y^1 y^3 & y^1 y^2 & -\frac{y^1 y^2 y^3}{y^4} \end{pmatrix}.$$

Its inverse is given by

$$(g^{ij}) = \frac{2}{F^2} \begin{pmatrix} -(y^1)^2 & y^1 y^2 & y^1 y^3 & y^1 y^4 \\ y^1 y^2 & -(y^2)^2 & y^2 y^3 & y^2 y^4 \\ y^1 y^3 & y^2 y^3 & -(y^3)^2 & y^3 y^4 \\ y^1 y^4 & y^2 y^4 & y^3 y^4 & -(y^4)^2 \end{pmatrix},$$

The canonical nonlinear connection (5) has vanishing coefficients:

$$N_i^a = 0, \quad a, i = 1, \dots, 4$$

and the homogeneous lift of the above looks this way:

$$G = g_{ij}(y)dx^i \otimes dx^j + v_{ab}(y)dy^a \otimes dy^b, \quad (9)$$

where the vertical part of the metric is

$$v_{ab} = \frac{\alpha}{2F^2} g_{ij} \delta_a^i \delta_b^j, \quad \alpha > 0. \quad (10)$$

We should mention the simplicity of v_{ab} , since their expressions are rational functions of y^i .

By using the expressions of g_{ij} and v_{ab} in (2), we get

Proposition 10. 1. The coefficients of the canonical d -connection of the homogeneous lift of the Berwald-Moor flag metric have the form

$${}^*L^i_{jk} = {}^*L^a_{bk} = 0, \quad (11)$$

$${}^0C^i_{jc} = \frac{p}{8} \frac{y^i}{y^j y^c}, \quad p = \begin{cases} -\frac{3}{8}, & \text{if } i = j = c; \\ \frac{1}{8}, & \text{if } i = j \neq c \text{ or } i \neq j = c \text{ or } i = c \neq j; \\ -\frac{1}{8}, & \text{if } i \neq j \neq c \neq i. \end{cases} \quad (12)$$

2. The only nonvanishing coefficients ${}^*C^a_{bc}$ are

$$C^a_{aa} = -\frac{1}{y^a}, \quad a = 1, \dots, 4. \quad (13)$$

3. The torsion tensor \mathbb{T} has only one nonvanishing component, namely

$$P^i_{jc} = {}^*C^i_{jc} = C^i_{jc}.$$

By using the above result in order to compute the curvature tensor of the canonical d -connection, we obtain

Proposition 11. The curvature tensor of the canonical d -connection attached to the homogeneous prolongation of the Finslerian Berwald-Moor metric has as only nonvanishing components:

$$S_j^i{}_{bc} = dx^i(\mathbb{R}(\dot{\partial}_b, \dot{\partial}_c)\delta_j).$$

Since $S_j^i{}_{bc}$ do not appear in the construction of the Ricci tensor on TM , the Ricci tensors and Ricci scalars identically vanish.

Thus, we have proven

Proposition 12. The homogeneous prolongation of the Finslerian Berwald-Moor metric,

$$G = g_{ij}(y)dx^i \otimes dx^j + v_{ab}(y)dy^a \otimes dy^b, \quad (14)$$

with

$$g_{ij}(y) = \frac{1}{2} (F^2)_{.ij}, \quad v_{ab}(y) = \frac{1}{2F^2} (F^2)_{.ab}, \quad F^4 = y^1 y^2 y^3 y^4,$$

is a solution for the Einstein equations in vacuum on the tangent bundle TM :

$$\begin{aligned} R_{ij} - \frac{1}{2}(R + S)g_{ij} &= 0 \\ {}^*P_{ai} &= 0, \quad P_{ia} = 0 \\ S_{ab} - \frac{1}{2}(R + S)v_{ab} &= 0. \end{aligned}$$

Remark 13. By applying a similar procedure, it follows that the **homogeneous lift of the flag BM metric**, namely:

$$\tilde{G} = \tilde{g}_{ij}(y)dx^i \otimes dx^j + \tilde{v}_{ab}(y)\delta y^a \otimes \delta y^b, \quad (15)$$

where $\tilde{g}_{ij}(y) = \frac{1}{12F^2} \frac{\partial^2 F^4}{\partial y^i \partial y^j}$, $F = \sqrt[4]{y^1 y^2 y^3 y^4}$, $v_{ab} = \frac{\alpha}{12F^4} \frac{\partial^2 F^4}{\partial y^a \partial y^b}$, $\alpha > 0$, is also a solution for the Einstein equations in vacuum on TM .

Remark 14. 1. *The above results are obtained by using the canonical nonlinear connection and the canonical metrical d-connection. By using a different nonlinear connection N , or a metrical d-connection with torsion, we can also obtain nonvanishing values of the energy-momentum tensor.*

2. *If, instead of the homogeneous lift we would have used the Sasaki lift (g, g) of the Finslerian Berwald-Moor metric, i.e.,*

$$G = g_{ij}(y) dx^i \otimes dx^j + g_{ab}(y) dy^a \otimes dy^b, \quad (16)$$

then, the vertical Ricci tensor $\overset{}{S}_{ab}$ would have not vanished, hence the Sasaki lift of the BM flag metric (together with the canonical connections N and D) does **not** give a solution for Einstein's equations in vacuum.*

7 Homogeneous lifts of metrics conformally related to Berwald-Moor one

Let, for the beginning, (M, F) denote an arbitrary Finsler space. Finsler spaces which are conformally related to (M, F) , in the sense of ([1]) (angle-preserving), are described by fundamental functions of the form

$$\tilde{F} = e^{\frac{1}{2}\sigma(x)} F,$$

where σ is a real valued smooth function.

This is, the corresponding metric tensors $g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$ and $\tilde{g}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{F}^2}{\partial y^i \partial y^j}$ are related by

$$\tilde{g}_{ij} = e^\sigma g_{ij}.$$

It follows that the homogenized versions

$$v_{ab} = \frac{g_{ab}}{F^2}, \quad \tilde{v}_{ab} = \frac{\tilde{g}_{ab}}{\tilde{F}^2}$$

coincide:

$$v_{ab} = \tilde{v}_{ab}.$$

Hence, there holds:

Proposition 15. *The homogeneous lift of any conformally deformed Finslerian metric $\tilde{F} = e^{\frac{1}{2}\sigma(x)} F$, is given by:*

$$\tilde{G} = e^{\sigma(x)} g_{ij} dx^i \otimes dx^j + \frac{g_{ab}}{F^2} \delta y^a \otimes \delta y^b, \quad (17)$$

where g_{ij} is the metric tensor associated to the "undeformed" Finsler function F .

This is, a conformal factor $\sigma(x)$ actually affects only the horizontal part of the metric.

As a remark, if we had used the Sasaki lift instead of the homogeneous one, the vertical part v_{ab} of the metric would have also been multiplied by e^σ .

Let now g_{ij} denote the Berwald-Moor Finslerian metric:

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}, \quad F = \sqrt[4]{y^1 y^2 y^3 y^4}.$$

Then, geodesics of the conformally deformed model (M, \tilde{F}) are described by

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2G^i(x, \dot{x}) = 0,$$

where $2G^i(x, y) = \gamma^i_{jk} y^j y^k$ and

$$\gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{ih} (\tilde{g}_{hj,k} + \tilde{g}_{hk,j} - \tilde{g}_{jk,h}).$$

By a direct computation, we get:

$$\gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} (\delta_j^i \sigma_{,k} + \delta_k^i \sigma_{,j} - g^{ih} g_{jk} \sigma_{,h}).$$

Remark 16. *With the notations in the previous sections, we have, actually,*

$$\gamma^i_{jk} = A_{jk}^{ih} \sigma_{,h},$$

where A_{jk}^{ih} depend only on y and $\sigma_{,h}$ only on x .

It follows that

$$2G^i = (2y^i y^h - g^{ih} F^2) \sigma_{,h}.$$

Taking into account the form of the BM contravariant metric tensor, we get that

$$2G^i = 2(y^i)^2 \sigma_{,i}, \quad i = 1, \dots, 4,$$

where, in the above, there is no summation over i . We have thus proven:

Proposition 17. *Geodesics of the conformally deformed Berwald-Moor Finsler space $(M, e^{\frac{\sigma(x)}{2}} F)$ are given by:*

$$\begin{aligned} \ddot{x}^1 + 2(\dot{x}^1)^2 \sigma_{,1} &= 0, & \ddot{x}^2 + 2(\dot{x}^2)^2 \sigma_{,2} &= 0, \\ \ddot{x}^3 + 2(\dot{x}^3)^2 \sigma_{,3} &= 0, & \ddot{x}^4 + 2(\dot{x}^4)^2 \sigma_{,4} &= 0. \end{aligned}$$

Corollary 18. *The only nonvanishing coefficients of the canonical nonlinear connection (5) given by the conformally deformed Berwald-Moor metric $e^{\sigma(x)} g_{ij}$ are*

$$N_i^i = 2y^i \sigma_{,i}, \quad i = 1, \dots, 4$$

(where, again, there is no summation over i).

Then, the coefficients of the canonical connection $M\tilde{\Gamma}(N)$ are given by:

$$\begin{aligned} \tilde{L}^i_{jk} &= \tilde{L}^*_{bk}{}^a \delta_a^i \delta_j^b = \frac{1}{2} \tilde{g}^{ih} (\tilde{g}_{hj;k} + \tilde{g}_{hk;l} - \tilde{g}_{jk;h}); \\ \tilde{C}^i_{jk} &= C^i_{jk}, \quad \tilde{C}^a_{bc} = C^*_{bc}, \end{aligned}$$

where C^i_{jk}, C^*_{bc} denote the coefficients of the canonical d-connection attached to the undeformed homogeneous prolongation of the BM metric.

The nonvanishing components of the torsion tensor are $R^a_{jk}, P^i_{jc} = C^i_{jc}, P^a_{jb}$.

The curvature components which appear in the expressions of the Ricci tensors are:

$$\begin{aligned} R_{j\ kl}^i &= \frac{\delta \tilde{L}^i_{jk}}{\delta x^l} - \frac{\delta \tilde{L}^i_{jl}}{\delta x^k} + \tilde{L}^h_{jk} \tilde{L}^i_{hl} - \tilde{L}^h_{jl} \tilde{L}^i_{hk} + C^i_{ja} R^a_{kl}, \\ P_{j\ kc}^i &= \frac{\partial \tilde{L}^i_{jk}}{\partial y^c} - C^i_{jc|k} + C^i_{jb} P^b_{kc}, \quad \overset{*}{P}_{b\ kc}^a = P_{j\ kc}^i \delta_i^a \delta_b^j + B^a_{bd} P^d_{kc}, \\ \overset{*}{S}_{b\ cd}^a &= 0 \Rightarrow \overset{*}{S}_{bc} = 0. \end{aligned}$$

We notice the following properties:

$$\tilde{L}^i_{ji} = 2\sigma_{,i}, \quad C^i_{ic} = 0, \quad B^a_{bd} P^d_{ka} = 0.$$

This is, the mixed Ricci tensors are:

$$\begin{aligned} P_{jc} &= -C^i_{jc|i} + C^i_{jb} P^b_{ic}, \\ \overset{*}{P}_{cj} &= \tilde{L}^a_{cj\cdot a} + C^a_{cd} P^d_{ja}, \end{aligned}$$

where $\tilde{L}^a_{cj} = \delta_i^a \delta_c^h \tilde{L}^i_{hj}$, $C^a_{cd} = \delta_i^a \delta_c^h C^i_{hd}$.

Hence, from the Einstein equations on TM , for the conformally deformed model (M, \tilde{G}) there remain:

$$\begin{aligned} R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} &= \kappa \mathbb{T}_{ij} \\ -C^i_{jc|i} + C^i_{jb} P^b_{ic} &= \kappa \mathbb{T}_{ai}, \quad \tilde{L}^a_{cj\cdot a} + C^a_{cd} P^d_{ja} = -\kappa \mathbb{T}_{ia}, \\ \frac{1}{2} R v_{ab} &= \kappa \mathbb{T}_{ab}. \end{aligned}$$

In vacuum, from $\mathbb{T} = 0$, we get $R = 0$. By replacing into the above equations, we get:

Proposition 19. *The Einstein equations in vacuum for the conformally deformed model (M, \tilde{G}) are:*

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{ij} = 0 \\ C^i_{jc|i} = C^i_{jb} P^b_{ic} \\ \tilde{L}^a_{cj\cdot a} = -C^a_{cd} P^d_{ja}. \end{array} \right.$$

The first set of equations above involves second order derivatives of σ , while the last two of them are PDE's of order 1, linear in $\sigma = \sigma(x)$.

References

- [1] Antonelli, P. L., Ingarden, R. S., Matsumoto, M., *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology*, Kluwer Acad. Publ., 1993.
- [2] Balan, V., Brinzei, N.: *Einstein equations for (h,v) -Berwald-Moor relativistic models*, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, 11 (2), 2006, 20–26.
- [3] Balan, V., Brinzei, N.: *Berwald-Moor-type (h,v) -relativistic models*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, 2 (4)/2005, 107–113.
- [4] Balan, V., Brinzei, N., Lebedev, S., *Geodesics, Paths and Jacobi Fields for Berwald-Moor Quartic Metrics*, to appear.

- [5] Bao, D., Chern, S. S., Shen, Z, *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry* (Graduate Texts in Mathematics; 200), Springer Verlag, 2000.
- [6] Lebedev, S. V., *The Generalized Finslerian Metric Tensors*, to appear.
- [7] Miron, R., *The homogeneous lift to the tangent bundle of a Finsler metric*, Per. Math. Hungarica, 1999.
- [8] R. Miron, M. Anastasiei, *Vector Bundles. Lagrange Spaces. Applications in Relativity Theory*, (in Romanian), Ed. Acad., Bucharest, 1987.
- [9] Miron, R., Anastasiei, M., *The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and Applications*, Kluwer Acad. Publ. FTPH no. 59, (1994).
- [10] Miron R., Atanasiu Gh., *Prolongations of the Riemannian, Finslerian and Lagrangian structures*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 41, 3–4, 1996, 237–249.

Уравнения Эйнштейна для однородного финслерова продолжения TM с метрикой Бервальда-Моора

Г. Атанасиу, Н. Бринзей

*Университет "Трансильвания", Брашов, Румыния
gh_atanasiu@yahoo.com, nico.brinzei@rdslink.ro*

Среди геометрических объектов, снабженных (h, v) -метрическими структурами, важным случаем является однородное продолжение (подъем) финслеровой метрики на касательное расслоение TM , построенное Р. Мироном. Для этого случая мы выполняем исследование уравнений Эйнштейна. Особое внимание обращено на метрику Бервальда-Моора и метрики, конформно связанные с нею.

Key-words: нелинейная (Эресманова) связность, d -связность, однородное продолжение (подъем), уравнения Эйнштейна, метрика Бервальда-Моора.

MSC: 53B40, 53C60.

AN EXTENSION OF ELECTRODYNAMICS THEORY TO THE COMPLEX LAGRANGE GEOMETRY

Gh. Munteanu

Transilvania Univ., Faculty of Mathematics and Informatics, Braşov, Romania

gh.munteanu@unitbv.ro

In this note our purpose is to introduce the Maxwell type equations in a complex Lagrange space, particularly in a complex Finsler space.

The electromagnetic tensor fields are defined as the sum between the differential of the complex Liouville 1-form and the symplectic 2-form of the space relative to the adapted frame of Chern-Lagrange complex nonlinear connection.

Is proved that the (1,1)-type electromagnetic field of a complex Finsler space vanish and the differential of the (2,0)-type electromagnetic field yields the generalized Maxwell equations. The complex electromagnetic currents are also introduced and the conditions when they are conservative are deduced.

Finally we apply the results to the electrodynamics Lagrangian considered in [Mu] and to the case of complex Randers spaces.

Keywords: Complex Lagrange spaces, Maxwell equations.

MSC2000: 53B40, 53C60.

1 The basics of complex Lagrange geometry

The notion of complex Lagrange space was introduced by us ([Mu]), hankering to obtain some geometric models for quantum physics theories. It is a natural extension of complex Finsler notion, for which already exists a large reference ([A-P, Ai, Wo], ...). Here we only briefly set the basic notions needed for our purpose.

Let M be a complex manifold, $(z^k)_{k=\overline{1,n}}$ complex coordinates in a local chart, and $T'M$ be its holomorphic tangent bundle in which, as a complex manifold, we consider the complex induced coordinates $u = (z^k, \eta^k)_{k=\overline{1,n}}$.

The complexified tangent bundle $T_C(T'M)$ admits a vertical distribution $V'T'M$, locally spanned by $\{\dot{\partial}_k := \frac{\partial}{\partial \eta^k}\}_{k=\overline{1,n}}$ and its conjugate $V''T'M$, locally spanned by $\{\dot{\partial}_{\bar{k}} := \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^k}\}_{k=\overline{1,n}}$. A supplementary distribution in $T'(T'M)$ to $V'T'M$ is called a complex nonlinear connection, in brief (*c.n.c.*), and it is determined by a set of complex functions $N_j^i(z, \eta)$ in respect to with $\{\delta_k := \frac{\partial}{\partial z^k} - N_k^j \frac{\partial}{\partial \eta^j}\}_{k=\overline{1,n}}$ are change like vectors on the underline manifold M . The distribution spanned by $\{\delta_k\}_{k=\overline{1,n}}$ will be called horizontal adapted to the (*c.n.c.*) and will be denoted by $HT'M$. Its conjugate distribution $H''T'M$ is locally spanned by $\{\delta_{\bar{k}} := \overline{\delta_k}\}_{k=\overline{1,n}}$.

A *complex Lagrange space* is a pair (M, L) , where $L : T'M \rightarrow R$ is a regular Lagrangian in sense that the Hermitian metric tensor $g_{i\bar{j}} = \partial^2 L / \partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j$ is nondegenerated. Particularly, if L is a positive function, smooth excepting the zero sections, (1,1)-homogeneous, i. e. $L(z, \lambda \eta) = |\lambda|^2 L(z, \eta)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, and the quadratic form $g_{i\bar{j}} \eta^i \bar{\eta}^j$ is positive defined, then (M, L) is a complex Finsler space with fundamental function $F = \sqrt{L}$. It is obvious that the class of complex Lagrange spaces include that of complex Finsler spaces, but some properties of the last are lose in the first class.

The Lagrange function L defines a (*c.n.c.*), called by us the Chern-Lagrange (*c.n.c.*), with the following coefficients:

$$N_k^j = g^{\bar{m}j} \frac{\partial^2 L}{\partial z^k \partial \bar{\eta}^m} \quad (1.1)$$

and its adapted frames have a remarkable property concerning the brackets: $[\delta_j, \delta_k] = 0$ and the others are

$$\begin{aligned} [\delta_j, \delta_{\bar{k}}] &= (\delta_{\bar{k}} N_j^i) \dot{\partial}_i - (\delta_j N_{\bar{k}}^i) \dot{\partial}_{\bar{i}}; \\ [\delta_j, \dot{\partial}_k] &= (\dot{\partial}_k N_j^i) \dot{\partial}_i; \quad [\delta_j, \dot{\partial}_{\bar{k}}] = (\dot{\partial}_{\bar{k}} N_j^i) \dot{\partial}_i; \\ [\dot{\partial}_j, \dot{\partial}_k] &= 0; \quad [\dot{\partial}_j, \dot{\partial}_{\bar{k}}] = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

With respect to the adapted frames of (1.1) (*c.n.c.*) a notable derivative law of $(1, 0)$ -type is the so called Chern-Lagrange N -complex linear connection, which in notations from [Mu] has the coefficients

$$D\Gamma(N) = \left(L_{jk}^i = g^{\bar{m}i} \delta_k g_{j\bar{m}}; L_{j\bar{k}}^i = 0; C_{jk}^i = g^{\bar{m}i} \dot{\partial}_k g_{j\bar{m}}; C_{j\bar{k}}^i = 0 \right), \quad (1.3)$$

where $D_{\delta_k} \delta_j = L_{jk}^i \delta_i$; $D_{\delta_{\bar{k}}} \delta_j = L_{j\bar{k}}^i \delta_i$; $D_{\dot{\partial}_k} \dot{\partial}_j = C_{jk}^i \dot{\partial}_i$; $D_{\dot{\partial}_{\bar{k}}} \dot{\partial}_j = C_{j\bar{k}}^i \dot{\partial}_i$, etc.

D is a metrical connection, that is $D_{\delta_k} G = D_{\delta_{\bar{k}}} G = D_{\dot{\partial}_k} G = D_{\dot{\partial}_{\bar{k}}} G = 0$, where $G = g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j + g_{i\bar{j}} \delta\eta^i \otimes \delta\bar{\eta}^j$ is the N -lift of the metric tensor $g_{i\bar{j}}$.

Also, with respect to the adapted frames of (1.1) (*c.n.c.*), two well defined forms can be considered

$$\omega = \omega' + \omega'' := \frac{\partial L}{\partial \eta^i} dz^i + \frac{\partial L}{\partial \bar{\eta}^i} d\bar{z}^i \quad (1.4)$$

$$\theta = g_{i\bar{j}} \delta\eta^i \wedge d\bar{z}^j. \quad (1.5)$$

ω is the Liouville form of the complex Lagrange space and θ is the Hermitian symplectic 2-form associated to the (M, L) space.

The complex Lagrange geometry is one Hermitian but in its applications appear sometimes non-Hermitian quantities. For instance, if we consider the non-Hermitian tensor $g_{ij} = \partial^2 L / \partial \eta^i \partial \eta^j$ (without the request of its nondegenerating) and $g_{i\bar{j}} = \overline{g_{i\bar{j}}}$, a well defined 2-form is given by

$$\varphi = g_{i\bar{j}} \delta\eta^i \wedge dz^j. \quad (1.6)$$

Subsequently we shall use also this 2-form and its conjugate.

2 Maxwell equations on a complex Lagrange space

In [Mu], p. 99, we consider the following Lagrangian inspired from complex electrodynamic:

$$L_q = m_0 c \gamma_{i\bar{j}}(z) \eta^i \bar{\eta}^j - \frac{q}{c} \left(A_i(z) \eta^i + \overline{A_i(z) \eta^i} \right) \quad (2.1)$$

where $\gamma_{i\bar{j}}$ is a Hermitian metric on the complex universe M , eventually it could be constant, and the other quantities have the well-known physics meaning. $A_i(z) \eta^i$ is a 1-form which defines a complex potential.

(M, L_q) is a complex Lagrange space, with $g_{i\bar{j}} = m_0 c \gamma_{i\bar{j}}(z)$ the metric tensor, and it reduces to one complex Finsler space iff $Re A_i(z) \eta^i = 0$.

In [Mu] we contented to make a gravitational approach relative to this Lagrangian, without taking in account some electrodynamic purport of the complex potential. Actually the main difficulty in obtain a consistent theory for complex electrodynamic which we have then was the definition of complex electromagnetic fields which obey the covariance principle with respect to Chern-Lagrange complex linear connection D .

We try first time to fit at our framework one nice idea used by R. Miron ([M-A]) in real Lagrange model for electrodynamic theory. In large, it consist in define first the vertical

and horizontal tensors $D_j^i = D_{\delta_j} y^i$ and $d_j^i = D_{\dot{\partial}_j} y^i$ and then the electromagnetic tensors are $\mathcal{F}_{ij} = \frac{1}{2}(D_{ij} - D_{ji})$ and $f_{ij} = \frac{1}{2}(d_{ij} - d_{ji})$, where $D_{ij} = g_{ik} D_j^k$ and $d_{ij} = g_{ik} d_j^k$. Here we use real notations with respect to canonical connection ([M-A]). The data concerning the Lagrangian expression send of to the electromagnetic tensors by means of metric tensor and connection coefficients. When we attempt to follow an analogous idea in our theory, the first remark is that from the particular case of complex Finsler spaces (M, L) the (1.3) Chern-Finsler linear connection performs, as we easy can see from the homogeneity of the fundamental function, the following conditions: $D_j^i = D_{\delta_j} \eta^i = 0$, $D_{\bar{j}}^i = D_{\delta_{\bar{j}}} \eta^i = 0$, $d_j^i = D_{\dot{\partial}_j} \eta^i = \delta_j^i - C_{0j}^i$, $d_{\bar{j}}^i = D_{\dot{\partial}_{\bar{j}}} \eta^i = 0$, and consequently the corresponding electromagnetic tensor field which could be introduced such away all vanish identically.

Neither in the more general case of complex Lagrange space such way do not offers more because D_{ij} and d_{ij} vanish and however the mixed tensors could be non zero they do not generate consistent Hermitian electromagnetic tensors. Hence this theory does not present much interest and then another approach needs follow. Such comely idea for us is also inspired by a paper of R. Miron used for an electromagnetic theory of Ingarden space ([Mi]), whose fundamental function is just of the Randers, but its geometry is not of one real Finsler space. R. Miron prove that in a Ingarden space the differential of the Liouville 1-form is the difference between its electromagnetic tensor and the symplectic 2-form of the space. This remark could be a motivation for the definitions which will come bellow.

Let (M, L) be a complex Lagrange space, ω, θ and φ the (1.4), (1.5), (1.6) forms, with respect to adapted frames of Chern-Lagrange (*c.n.c.*). The differential operator on $T_C T' M$ has the components $d = d' + d''$, with

$$d' = \delta_k dz^k + \dot{\partial}_k \delta \eta^k \quad \text{and} \quad d'' = \delta_{\bar{k}} d\bar{z}^k + \dot{\partial}_{\bar{k}} \delta \bar{\eta}^k \quad (2.2)$$

and hence for the (1.4) Liouville 1-form we have the differential

$$d\omega = d'\omega' + d'\omega'' + d''\omega' + d''\omega''.$$

Definition 2.1 We call the complex electromagnetic fields of the (M, L) space, the tensors

$$\mathcal{F}_{ij} = \frac{1}{2} \{ \delta_j (\dot{\partial}_i L) - \delta_i (\dot{\partial}_j L) \}; \quad \mathcal{F}_{i\bar{j}} = -\delta_i (\dot{\partial}_{\bar{j}} L) \quad (2.3)$$

and their conjugates $\mathcal{F}_{\bar{i}\bar{j}} = \overline{\mathcal{F}_{ij}}$, $\mathcal{F}_{ij} = \overline{\mathcal{F}_{\bar{i}\bar{j}}}$.

Let be $\mathcal{F}^{(2,0)} = \mathcal{F}_{ij} dz^i \wedge dz^j$ and $\mathcal{F}^{(1,1)} = \mathcal{F}_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$.

Theorem 2.1 We have

$$\begin{aligned} d'\omega' &= -\mathcal{F}^{(2,0)} + \varphi; & d''\omega'' &= -\overline{\mathcal{F}^{(2,0)}} + \bar{\varphi} = \overline{d'\omega'} \\ d'\omega'' &= -\mathcal{F}^{(1,1)} + \theta; & d''\omega' &= -\overline{\mathcal{F}^{(1,1)}} - \bar{\theta} = -\overline{d'\omega''}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

The proof follows directly from (2.2) and (2.3).

An immediate result is

Proposition 2.1 If (M, L) is a complex Finsler space, then $\mathcal{F}^{(1,1)} = 0$.

Proof. From the homogeneity condition of the Finsler function is obtain that $\dot{\partial}_i L = g_{i\bar{j}} \bar{\eta}^j$ and $\dot{\partial}_{\bar{j}} L = g_{i\bar{j}} \eta^i$. Taking in account that Chern-Finsler connection D is one metrical, we have:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i\bar{j}} &= -\delta_i (\dot{\partial}_{\bar{j}} L) = -\delta_i (g_{k\bar{j}} \eta^k) = -D_{\delta_i} (g_{k\bar{j}} \eta^k) + (g_{k\bar{m}} \eta^k) L_{\bar{j}m}^{\bar{m}} \\ &= -g_{k\bar{j}} D_{\delta_i} \eta^k = g_{k\bar{j}} (N_i^k - L_{hi}^k \eta^h) = 0. \end{aligned}$$

Here we use the fact that $L_{hi}^k \eta^h = \dot{\partial}_h(N_i^k) \eta^h = N_i^k$, in view of one property of Chern-Finsler linear connection. \square

Hence, in a complex Finsler space the non zero electromagnetic tensors are only \mathcal{F}_{ij} and its conjugate.

Further, from $dd\omega = 0$, it deduces that $d(\mathcal{F}^{(2,0)} + \overline{\mathcal{F}^{(2,0)}} + \mathcal{F}^{(1,1)} + \overline{\mathcal{F}^{(1,1)}}) = d(\varphi + \bar{\varphi} + \theta - \bar{\theta})$. Now writing this last formula with respect to adapted frames of Chern-Finsler (*c.n.c.*) and taking into account the (1.2) components of the Lie brackets, we have

Theorem 2.2 *In a complex Lagrange space we have the following generalized Maxwell equations*

$$\begin{aligned} \sum \{D_{\delta_k} \mathcal{F}_{ij}\} &= 0; & \sum \{D_{\dot{\partial}_k} \mathcal{F}_{ij}\} &= 0; \\ \sum \{D_{\delta_{\bar{k}}} \mathcal{F}_{ij}\} &= 0; & \sum \{D_{\dot{\partial}_{\bar{k}}} \mathcal{F}_{ij}\} &= 0; \\ \sum \{D_{\delta_k} \mathcal{F}_{i\bar{j}}\} &= \sum \{\delta_{\bar{j}}(N_i^h) g_{hk}\}; & \sum \{D_{\dot{\partial}_k} \mathcal{F}_{i\bar{j}}\} &= 0; \\ \sum \{D_{\delta_{\bar{k}}} \mathcal{F}_{i\bar{j}}\} &= \sum \{\delta_{\bar{j}}(N_i^h) g_{h\bar{k}}\}; & \sum \{D_{\dot{\partial}_{\bar{k}}} \mathcal{F}_{i\bar{j}}\} &= 0. \end{aligned}$$

Moreover, the following identities are fulfilled

$$\begin{aligned} \sum \{D_{\delta_k} g_{ij} + \dot{\partial}_j(N_i^h) g_{hk}\} &= 0; & \sum \{D_{\dot{\partial}_k} g_{ij}\} &= 0; \\ \sum \{D_{\delta_{\bar{k}}} g_{ij} + \dot{\partial}_j(N_i^h) g_{h\bar{k}}\} &= 0; & \sum \{D_{\dot{\partial}_{\bar{k}}} g_{ij}\} &= 0. \end{aligned}$$

All these sums are cyclic by (i, j, k) , the bar indices being an abbreviation for $\delta/\delta z^k$ or $\partial/\partial \bar{\eta}^k$.

We note that these Maxwell equations become homogeneous if the complexified horizontal distribution is integrable, i.e. $[\delta_i, \delta_{\bar{j}}] = 0$. Taking into account that in a complex Finsler space $\mathcal{F}_{i\bar{j}} = 0$, another set of identities is obtain for the Chern-Finsler (*c.n.c.*), which are consequences of the Bianchi identities ([Al]).

Next, by help of the metric tensor we can lowing or raising the indices for the complex electromagnetic tensors,

$$\mathcal{F}^{ij} = g^{\bar{k}i} g^{\bar{j}l} \mathcal{F}_{\bar{k}\bar{l}} \quad \text{and} \quad \mathcal{F}^{\bar{i}\bar{j}} = g^{\bar{i}k} g^{\bar{j}l} \mathcal{F}_{k\bar{l}}.$$

With these the electromagnetic currents $J^h, J^{\bar{h}}, J^v, J^{\bar{v}}$ can be given by

$$\begin{aligned} \sum_j D_{\delta_j} \mathcal{F}^{ij} &= 4\pi J^i; & \sum_j D_{\dot{\partial}_j} \mathcal{F}^{ij} &= 4\pi J^i; \\ \sum_j D_{\delta_j} \mathcal{F}^{\bar{i}\bar{j}} &= 4\pi J^{\bar{i}}; & \sum_j D_{\dot{\partial}_j} \mathcal{F}^{\bar{i}\bar{j}} &= 4\pi J^{\bar{i}}. \end{aligned}$$

It is obvious that in complex Finsler space $J^{\bar{h}} = J^{\bar{v}} = 0$. The currents will be conservative iff $DJ = 0$, that is they satisfies the conditions: $D_{\delta_j} J^i = D_{\delta_{\bar{j}}} J^i = D_{\dot{\partial}_j} J^i = D_{\dot{\partial}_{\bar{j}}} J^i = 0$ and analogous for others.

Further, let us come back to the (2.1) expression of the electrodynamic Lagrangian. It can be rewritten as $L_q = L_0 - \frac{q}{c} \{A_i(z) \eta^i + A_{\bar{i}}(z) \bar{\eta}^{\bar{i}}\}$, where $L_0 = m_0 c \gamma_{i\bar{j}}(z) \eta^i \bar{\eta}^{\bar{j}}$ contains specific

data about the energy of the space but also about its geometry by means of $\gamma_{i\bar{j}}$. Without upper point let us denoting the classical partial derivative, $\partial_i := \frac{\partial}{\partial z^i}$. Then we have:

$$\mathcal{F}_{ij} = -T_{ij} + \frac{q}{c}F_{ij} \quad \text{and} \quad \mathcal{F}_{i\bar{j}} = -T_{i\bar{j}} + \frac{q}{c}F_{i\bar{j}}, \quad (2.5)$$

where

$$T_{ij} = \frac{1}{2}m_0c\{\partial_i\gamma_{j\bar{k}} - \partial_j\gamma_{i\bar{k}}\}\eta^k; \quad T_{i\bar{j}} = m_0c\partial_i\gamma_{k\bar{j}}\eta^k$$

are the *stress-energy tensors* of the space and

$$F_{ij} = \frac{1}{2}\{\partial_i A_j - \partial_j A_i\}; \quad F_{i\bar{j}} = \partial_i \bar{A}_j$$

are the *exterior electromagnetic tensors* of the space.

Let be $T^{\bar{h}\bar{k}} = g^{\bar{h}i}g^{\bar{k}j}T_{ij}$ and $T^{\bar{h}k} = g^{\bar{h}i}g^{\bar{k}j}T_{i\bar{j}}$. Since D is a metrical connection, the law of conservative energy $D_{\delta_{\bar{h}}}T^{\bar{h}\bar{k}} = D_{\delta_{\bar{j}}}T^{\bar{h}k} = D_{\dot{\partial}_{\bar{h}}}T^{\bar{h}\bar{k}} = D_{\dot{\partial}_{\bar{h}}}T^{\bar{h}k} = 0$, implies

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{h}} g^{\bar{h}i}D_{\delta_{\bar{h}}}\mathcal{F}_{ij} &= \frac{q}{c}\sum_{\bar{h}} g^{\bar{h}i}\partial_{\bar{h}}F_{ij}; & \sum_{\bar{h}} g^{\bar{h}i}D_{\dot{\partial}_{\bar{h}}}\mathcal{F}_{ij} &= 0; \\ \sum_{\bar{h}} g^{\bar{h}i}D_{\delta_{\bar{h}}}\mathcal{F}_{i\bar{j}} &= \frac{q}{c}\sum_{\bar{h}} g^{\bar{h}i}\partial_{\bar{h}}F_{i\bar{j}}; & \sum_{\bar{h}} g^{\bar{h}i}D_{\dot{\partial}_{\bar{h}}}\mathcal{F}_{i\bar{j}} &= 0. \end{aligned}$$

As we say, L_q is a complex Finsler space only in a particular case and then it reduces to one trivial with purely Hermitian metric. Recently we make with N. Aldea ([A-M]) a study of complex Randers spaces. An immediate example of such space is (M, F) with $F = \alpha + |\beta|$, where

$$\alpha^2 = \gamma_{i\bar{j}}(z)\eta^i\bar{\eta}^j \quad \text{and} \quad \beta = A_i(z)\eta^i$$

and $|\beta| = \sqrt{\beta \cdot \beta}$ is the complex norm.

Indeed (M, F) is a complex Finsler space in some smoothness assumptions, and $L = F^2$ define a complex homogeneous Lagrangian for which we can make similar reasonings like above.

The metric tensor and the Chern-Finsler (*c.n.c.*) of the complex Randers space were determined in the general setting in [A-M]. In our notations we have:

$$g_{i\bar{j}} = \frac{F}{\alpha}h_{i\bar{j}} + \frac{F}{2|\beta|}A_i A_{\bar{j}} + \frac{1}{2L}\eta_i\eta_{\bar{j}}$$

where $h_{i\bar{j}} := \gamma_{i\bar{j}} - \frac{1}{2\alpha^2}\gamma_{i\bar{k}}\gamma_{h\bar{j}}\eta^h\bar{\eta}^k$ and

$$N_j^i = N_j^i + \frac{1}{\gamma} \left(\gamma_{k\bar{r}} \frac{\partial A_{\bar{r}}}{\partial z^j} \eta^k - \frac{\beta^2}{|\beta|^2} \frac{\partial A_{\bar{r}}}{\partial z^j} \bar{\eta}^r \right) \xi^i + \frac{\beta}{2|\beta|} k_{\bar{r}i} \frac{\partial A_{\bar{r}}}{\partial z^j}$$

where $N_j^i := \gamma^{\bar{m}i} \frac{\partial \gamma_{\bar{m}j}}{\partial z^j} \eta^l$, $\xi^i := \bar{\beta}\eta^i + \alpha^2 A^i$, $A^i = \gamma^{\bar{m}i} A_{\bar{m}}$ and $k_{i\bar{j}} = \frac{1}{2\alpha}h_{i\bar{j}} + \frac{1}{4|\beta|}A_i A_{\bar{j}}$. Thus we

can consider the adapted frames $\{\delta_k\}$ of N_j^i nonlinear connection.

For the complex electromagnetic fields, first we have $\mathcal{F}_{i\bar{j}} = 0$ and

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ij} &= \frac{1}{2}\{\delta_j(\dot{\partial}_i L) - \delta_i(\dot{\partial}_j L)\} = \frac{1}{2}\{\delta_j(g_{i\bar{k}}\eta^k) - \delta_i(g_{j\bar{k}}\eta^k)\} \\ &= \frac{1}{2}\{D_{\delta_j}(g_{i\bar{k}}\eta^k) - g_{m\bar{k}}\eta^k L_{ji}^m - D_{\delta_i}(g_{j\bar{k}}\eta^k) + g_{m\bar{k}}\eta^k L_{ij}^m\}. \end{aligned}$$

Since $D_{\delta_j} g_{i\bar{k}} = 0$ and $D_{\delta_j} \bar{\eta}^k = 0$, is obtain

$$\mathcal{F}_{ij} = \frac{1}{2} g_{m\bar{k}} \{L_{ij}^m - L_{ji}^m\} \bar{\eta}^k = \frac{1}{2} \{\delta_j g_{i\bar{k}} - \delta_i g_{j\bar{k}}\} \bar{\eta}^k.$$

In a strongly Kähler Finsler space the torsion $T_{jk}^i = L_{jk}^i - L_{kj}^i = 0$ and consequently $\mathcal{F}_{ij} = 0$. If the Finsler space is weakly Kähler (see these notions in [A-P]) then $\mathcal{F}_{ij} \eta^j = \mathcal{F}_{ij} \eta^i = 0$.

The generalized Maxwell equations are homogeneous for this example.

References

- [A-P] M. Abate, G. Patrizio, *Finsler Metrics – A Global Approach*, Lecture Notes in Math., **1591**, Springer-Verlag, 1994.
- [Ai] T. Aikou, *Finsler geometry of complex vector bundles*, in *Riemannian-Finsler Geometry*, MSRI Publication, **50** (2004), Cambridge Univ. Press.
- [Al] N. Aldea, *Complex Finsler spaces of constant holomorphic curvature*, Diff. Geom. and its Appl., Proc. Conf. Prague 2004, Charles Univ. Prague (Czech Republic) 2005, 179–190.
- [A-M] N. Aldea, G. Munteanu, *On complex Finsler spaces with Randers metric*, submitted to Nonlinear Analysis.
- [As] G.S. Asanov, *Finsleroid – relativistic time-asymmetric space and quantized fields*, Rep. on Math. Physics, **57** (2006), 199–231.
- [Mi] R. Miron, *The geometry of Ingarden spaces*, Rep. on Math. Physics, **54** (2004), 131–147.
- [M-A] R. Miron, M. Anastasiei, *The Geometry of Lagrange Spaces; Theory and Applications*, Kluwer Acad. Publ., FTPH **59**, 1994.
- [Mu] G. Munteanu, *Complex Spaces in Finsler, Lagrange and Hamilton Geometries*, Kluwer Acad. Publ., FTPH **141**, 2004.
- [V-S] S. Vacaru, P. Stavrinou, E. Gaburov, D. Gonta, *Clifford and Riemann-Finsler structures in geometric mechanics and gravity*, Geometry Balkan Press, 2005.
- [Wo] P.-Mann Wong, *A survey of complex Finsler geometry*, Advanced Studied in Pure Math., to appear.

Расширение электродинамики на комплексную лагранжеву геометрию

Г. Мунтеану

Университет Трансилвании, Брашов, Румыния
gh.munteanu@unitbv.ro

Цель данной заметки состоит в том, чтобы ввести уравнения Максвелловского типа в комплексном лагранжевом пространстве, в частности, в комплексном финслеровом пространстве.

Электромагнитные тензорные поля определены как сумма дифференциала комплексной лиувиллевской 1-формы и симплектической 2-формы пространства относительно адаптированного репера комплексной нелинейной связности Черна-Лагранжа.

Доказано, что электромагнитное поле (1, 1)-типа комплексного финслерового пространства обращается в нуль, а дифференциал электромагнитного поля (2, 0)-типа приводит к обобщенным уравнениям Максвелла. Введены также комплексные электромагнитные токи и определены условия, когда они сохраняются.

В завершение мы применяем полученные результаты к электродинамическому лагранжиану, рассмотренному ранее в [Mu] и к случаю комплексных пространств Рандерса.

Ключевые слова: комплексные лагранжевы пространства, уравнения Максвелла.

MSC2000: 53B40, 53C60.

ПАРАМЕТРЫ АНИЗОТРОПИИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ, ВЫВЕДЕННЫЕ ИЗ НАБЛЮДАТЕЛЬНОЙ КОСМОЛОГИИ

М. Л. Фильченков¹, Ю. П. Лаптев²

Космологические модели описываются с помощью уравнения Райчаудури, зависящего от расширения θ , сдвига σ , вращения ω и ускорения A^i идеальной жидкости. Параметр замедления q наблюдательной космологии оказывается зависящим не только от средней плотности вещества Ω , параметра w уравнения состояния, но и от параметра Хаббла H и параметров анизотропии, а именно отклонения $1 - g^{00}$ от фридмановской модели, сдвига и вращения. Поэтому, измеряя параметры наблюдательной космологии H , q и Ω , мы можем получить информацию о параметрах анизотропии Вселенной. Измерения параметра замедления с целью определения параметра уравнения состояния могут быть реинтерпретированы в терминах сдвига, вращения, параметра Хаббла в нефридмановской геометрии. Результаты сравниваются с полученными недавно верхними пределами на вращение Вселенной и анизотропию параметра Хаббла.

Ключевые слова: уравнение Райчаудури, фридмановская модель, параметр Хаббла.

Введение

Последние наблюдательные данные позволяют рассматривать не только однородные изотропные космологические модели, удовлетворяющие принципу Коперника (фридмановская и де Ситтеровская модели), но и модели, учитывающие пространственную неоднородность и анизотропию. Ограничимся однородными анизотропными космологическими моделями. Существует два подхода к проблеме анизотропии. Один использует чисто геометрическую классификацию по типам Бьянки, учитывающую различные пространственные симметрии, а другой является гидродинамическим подходом, который мы рассмотрим в следующем разделе.

Крупномасштабная анизотропия, выведенная из реликтового излучения, связана с мультиполями низших порядков автокорреляционной температурной функции. Имеются данные о т. н. “оси зла”, возможно обусловленной глобальным вращением Вселенной. Эти данные получены исходя из преимущественной ориентации квазаров и спиральных галактик. Кроме того, измерения постоянной Хаббла указывают на значительную анизотропию.

1 Космологическая жидкость

Мы будем следовать гидродинамическому подходу, в котором вещество во Вселенной считается идеальной жидкостью.

Движение космологической жидкости описывается в общей теории относительности с помощью уравнения Райчаудури [1]

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 - A^i_{;i} + 2(\sigma^2 - \omega^2) = -\frac{4\pi G}{c^2}(\varepsilon + 3p), \quad (1)$$

¹ Институт гравитации и космологии, Российский университет дружбы народов, Москва; fmichael@mail.ru

² Кафедра физики, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана; yrlaptev@rambler.ru

где θ – скаляр расширения, A^i – 4-ускорение, σ – скаляр сдвига, ω – скаляр вращения, ε – плотность энергии, p – давление.

Метрика пространства-времени имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - 2g_{0\alpha} dx^\alpha c dt - dl^2, \quad (2)$$

где элемент длины

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \quad (3)$$

и перекрёстный член метрики $g_{0\alpha}$ удовлетворяет соотношению

$$g^{00} = 1 - g_{0\alpha} g^{0\alpha}. \quad (4)$$

4-скорость

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}, \quad u^i u_i = 1 \quad (i = 0, 1, 2, 3). \quad (5)$$

Величины θ , A^i , σ , ω запишутся как

$$\theta = u^i_{;i}, \quad (6)$$

$$A^i = u^i_{;k} u^k, \quad (7)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ik} \sigma^{ik}, \quad (8)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega_{ik} \omega^{ik}, \quad (9)$$

где ковариантные и контравариантные тензоры сдвига и вращения равны

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i;n} P_k^n + u_{k;n} P_i^n) - \frac{1}{3} \theta P_{ik}, \quad (10)$$

$$\sigma^{ik} = \frac{1}{2} (u^i_{;n} P^{nk} + u^k_{;n} P^{ni}) - \frac{1}{3} \theta P^{ik}, \quad (11)$$

$$\omega_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i;n} P_k^n - u_{k;n} P_i^n), \quad (12)$$

$$\omega^{ik} = \frac{1}{2} (u^i_{;n} P^{nk} - u^k_{;n} P^{ni}). \quad (13)$$

Проекционные тензоры даются формулами

$$P_k^i = -\delta_k^i + u^i u_k, \quad (14)$$

$$P^{ik} = -g^{ik} + u^i u^k. \quad (15)$$

Условия ортогональности имеют вид

$$u_i \omega_{ik} = 0, \quad (16)$$

$$u^i \sigma_{ik} = 0, \quad (17)$$

$$u^i A_i = 0. \quad (18)$$

Из закона сохранения

$$T^{ik}_{;k} = 0 \quad (19)$$

тензора энергии-импульса

$$T^{ik} = (p + \varepsilon) u^i u^k - p g^{ik} \quad (20)$$

получаем следующее выражение для скаляра дивергенции 4-ускорения

$$A^i_{;i} = w(1 - g^{00})(\dot{\theta} + \theta^2), \quad g^{00} = \text{const}, \quad (21)$$

где $1 - g^{00}$ характеризует отклонение от фридмановской геометрии.

Уравнение состояния идеальной жидкости имеет вид

$$p = w\varepsilon, \quad w = \text{const}. \quad (22)$$

Поведение космологической идеальной жидкости может быть описано в терминах космологических параметров.

2 Космологические параметры

Существует три основных параметра [2] в наблюдательной космологии: параметр Хаббла, средняя плотность вещества и параметр замедления.

Параметр Хаббла

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (23)$$

определяется из зависимости $z(m)$, где z – красное смещение, m – звездная величина галактики.

Средняя плотность вещества в единицах критической плотности

$$\Omega = \frac{8\pi G\varepsilon}{3c^2 H^2} \quad (24)$$

определяется из автокорреляционной функции $l(l+1)C_l$ реликтового излучения, где l – номер мультиполя.

Параметр замедления

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (25)$$

определяется из зависимости $z(m)$.

Здесь $a(t)$ является в первом приближении масштабным фактором модели близкой к фридмановской. Рассмотрим космологические параметры в рамках двухкомпонентной модели.

3 Двухкомпонентная модель

Считаем, что космологическое вещество является двухкомпонентной средой, состоящей из деситтеровского вакуума с уравнением состояния $p = -\varepsilon$, плотность энергии которого ε_Λ связана с космологической постоянной Λ формулой

$$\Lambda = \frac{8\pi G\varepsilon_\Lambda}{c^4}, \quad (26)$$

и компоненты с $p \neq \varepsilon$.

Для деситтеровского вакуума имеем $w = -1$, $\sigma = \omega = A^i = 0$, $g^{00} = 1$.

Тогда полная средняя плотность

$$\Omega = \Omega_\Lambda + \Omega_m, \quad (27)$$

где

$$\Omega_\Lambda = \frac{H_\Lambda^2}{H^2}, \quad \Omega_m = \frac{8\pi G\varepsilon_m}{3c^2 H^2}, \quad H_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3}.$$

Уравнение Райчаудури в терминах космологических параметров H, Ω, q , параметра w_m уравнения состояния $p_m = w_m \varepsilon_m$ и геометрического параметра g^{00} запишется как

$$q = \frac{-\frac{H_\Lambda^2}{H^2} + \frac{\Omega - \frac{H_\Lambda^2}{H^2}}{2}(1 + 3w_m) + \frac{2}{3} \frac{\sigma^2 - \omega^2}{H^2} - 2w_m(1 - g^{00})}{1 - w_m(1 - g^{00})}. \quad (28)$$

Мы видим, что анизотропия постоянной Хаббла влияет на погрешности измерения параметра замедления.

В случае, когда вещество является пылью, мы имеем $w_m = 0$.

Существует барионная и тёмная материя

$$\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{dm}. \quad (29)$$

Из наблюдений реликтового излучения следует, что $\Omega_\Lambda = 0.7, \Omega_{dm} = 0.25, \Omega_b = 0.05$.

Барионная компонента светится и наблюдается в виде звёзд, межзвёздного газа в галактиках и межгалактического вещества в скоплениях галактик. Тёмная материя локализована в гравитационно-связанных системах. Она скручивается вокруг видимого вещества галактик, в их гало с размером порядка 200 кпк. Среди кандидатов на роль составляющих тёмную материю – элементарные частицы (аксионы, нейтрино, суперпартнеры, X-, Y-лептокварки), монополи, первичные чёрные дыры и т. д.

Параметр замедления в этом случае принимает вид

$$q = \frac{\Omega}{2} - \frac{3}{2} \frac{H_\Lambda^2}{H^2} + \frac{2}{3} \frac{\sigma^2 - \omega^2}{H^2}. \quad (30)$$

Так как $\frac{\sigma}{H} < \frac{\omega}{H} < \frac{\Delta T}{T} < 10^{-5}$, анизотропия, связанная со сдвигом и вращением, почти не влияет на параметр замедления

$$q = -\Omega + \frac{3\Omega_m}{2}. \quad (31)$$

Отсюда $q = -0.55$ при $\Omega = 1, \Omega_m = 0.3$, что хорошо согласуется с наблюдениями [3, 4].

Ошибка в определении параметра замедления может быть оценена исходя из анизотропии постоянной Хаббла следующим образом

$$\Delta q = 3(\Omega - \Omega_m) \frac{\Delta H}{H_0}. \quad (32)$$

Так как $\Omega = 1$ за счёт инфляции, то $\Delta \Omega_\Lambda = -\Delta \Omega_m$ и

$$\Delta \Omega_m = 2(\Omega - \Omega_m) \frac{\Delta H}{H_0}. \quad (33)$$

Отсюда

$$\frac{\Delta H}{H_0} = \frac{\Delta \Omega_m}{2(\Omega - \Omega_m)}. \quad (34)$$

Анизотропия постоянной Хаббла (см. рис. 1) обусловлена вариациями плотности вещества (войды и скопления галактик).

Таким образом,

$$\frac{\Delta H}{H_0} < \frac{\Omega_m}{2(\Omega - \Omega_m)} \quad \text{и} \quad \Delta q < \frac{3}{2} \Omega_m. \quad (35)$$

Тогда $\frac{\Delta H}{H_0} < 0.2$ [5] и $\Delta q < 0.45$, что согласуется с наблюдениями [3].

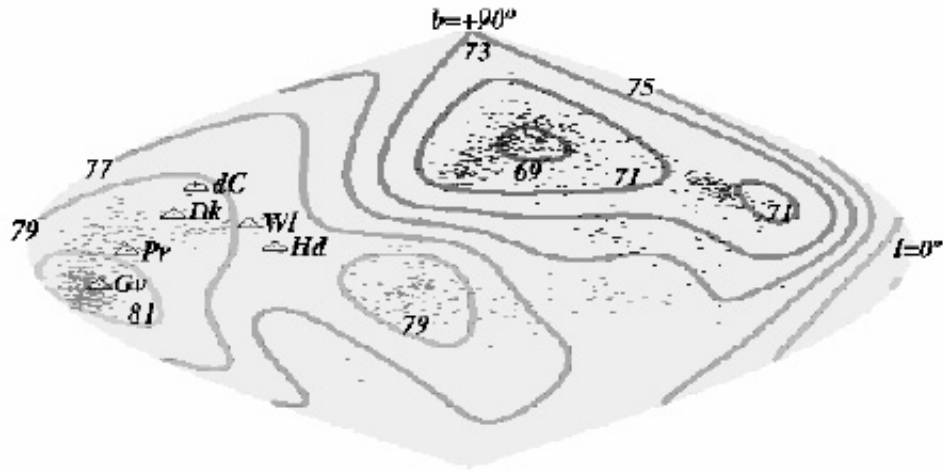


Рис. 1: Контурная карта постоянной Хаббла в единицах $\frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}}$ [5]

Следовательно, вариации параметра Хаббла согласуются с наблюдаемыми вариациями параметра замедления. Анизотропия пространства-времени скорее всего обусловлена зависимостью войдов и скоплений галактик от направления наблюдения, а не от глобального вращения Вселенной. Ниже приведена контурная карта постоянной Хаббла, взятая из работы [5].

Отметим, что существует альтернативная интерпретация анизотропии пространства-времени, основанная на финслеровой геометрии (включая работы Д. Г. Павлова и его группы), которая будет предметом нашей следующей работы.

Заключение

Последние наблюдательные данные, реинтерпретированные в рамках анизотропных космологических моделей, позволяют найти некоторые параметры пространственной анизотропии. В двухкомпонентной модели с деситтеровским вакуумом и пылью ошибки в определении параметра замедления могут быть обусловлены анизотропией постоянной Хаббла. В свою очередь, анизотропия постоянной Хаббла является следствием вариаций плотности вещества (войды и скопления галактик). Сдвиг и вращение почти не влияют на параметр замедления, хотя могут быть связаны с “осью зла”. Отклонение от фридмановской геометрии не вносит вклада в параметр замедления для пыли. Дальнейшие исследования будут посвящены интерпретации параметров анизотропии в рамках финслеровой геометрии.

Литература

- [1] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis. “The Large Scale Structure of Space-Time”, Cambridge University Press, Cambridge (UK) 1973.
- [2] M. Rees, R. Ruffini, J. A. Wheeler. “Black Holes, Gravitational Waves and Cosmology: an Introduction to Current Research”, Gordon and Breach Science Publishers, N. Y. 1974.
- [3] G. Hütsi. “Power Spectrum of the SDSS Luminous Red Galaxies: Constrains on Cosmological Parameters”, astro-ph/0604129v2 (13 Dec 2006).
- [4] В. В. Лукаш. “Крупномасштабная структура Вселенной и тёмная материя”, Труды Российской школы-семинара GRACOS-2007 (Казань) с. 109–113.
- [5] M. L. McClure, C. C. Dyer. “Anisotropy in the Hubble Constant as Observed in the HST Extragalactic Distance Scale Key Project Results”, astro-ph/0703556v1 (21 Mar 2007).

Anisotropy parameters of Space-Time existent in observational Cosmology

M. L. Filchenkov, Yu. P. Laptev

Institute of gravitation and cosmology PFUR, MSTU n. a. N. E. Bauman

fmichael@mail.ru, yplaptev@rambler.ru

The cosmological models are described by means of the Raychaudhuri equation which depends on the parameter θ , the shift σ , the rotation ω and the acceleration A^i of the ideal fluid. The delay parameter q of the observational cosmology is shown to depend not only on the mean density of the medium Ω and on the parameter w of the state equation, but on the Hubble parameter H and on the isotropy parameters, namely on the deviation $1 - g^{00}$ from the Friedmann model, on the shift and on the rotation. For this reason, by measuring the parameters of the observational cosmology H , q and Ω , we can obtain information on the anisotropy parameters of the Universe. The measurement of the delay parameter, for determining the parameter of the state equation, can be rephrased in terms of shift, rotation, and the Hubble parameter from the non-Friedmann geometry. The results are compared with the recent acquirement of the upper bounds of the rotation of Universe and with the anisotropy of the Hubble parameter.

Key-words: Raychaudhuri equation, observational cosmology, delay parameter.

MSC: 83F05, 83B05.

N-АРНЫЕ ГРУППЫ

А. М. Гальмак

МГУП, Могилёв, Беларусь

mti@mogilev.by

Исследователи, занимающиеся изучением геометрии пространства-времени, нередко сталкиваются с необходимостью конструировать и изучать n -арные, в частности, тернарные операции (см., например, [1]). При этом обращается внимание на важность изучения n -арных операций, похожих на групповые операции, то есть n -арных операций, являющихся n -арными аналогами бинарных операций в группах. Именно такие n -арные операции являются предметом изучения теории n -арных групп, для первоначального знакомства с которой и предназначена настоящая статья.

Ключевые слова: n -арные операции, n -группы.

1. Введение

Начало развитию теории n -арных групп положила опубликованная в 1928 году в журнале "Mathematische Zeitschrift" статья В. Дёрнте "Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff" [2], в которой впервые было введено понятие n -группы, называемой также n -арной или полиадической группой. Уже из названия статьи видно, что истоки теории n -арных групп лежат в теории групп. Непосредственное отношение к возникновению новой теории имела также Эмми Нётер, по инициативе которой Дёрнте и занялся реализацией лежащей почти на поверхности идеи, которую, по-видимому, впервые озвучил Е. Каснер [3], о замене в определении группы ассоциативной и однозначно обратимой слева и справа бинарной операции на ассоциативную и однозначно обратимую на каждом месте n -арную операцию. До Дёрнте такие тернарные, то есть 3-арные операции, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям, изучал Х. Прюфер, опубликовавший в 1924 году в том же "Mathematische Zeitschrift" статью [4], в которой он применял введенные им тернарные операции для исследования бесконечных абелевых групп. Впоследствии алгебры с такими операциями стали называть грусами Прюфера. Дёрнте установил, что груссы Прюфера являются частным случаем n -арных групп, а именно, полуабелевыми тернарными группами, все элементы которых являются идемпотентами.

Первым, кто обратил серьезное внимание на статью В. Дёрнте, был Э. Пост, сумевший разглядеть в небольшой статье зачатки многообещающей теории. В 1940 году Э. Пост опубликовал в "Trans. Amer. Math. Soc." объемную статью "Polyadic groups" [5], которая по важности полученных результатов и предложенных идей является одним из краеугольных камней теории n -арных групп и во многом предопределила тематику современных исследований по n -арным группам. К основополагающим работам по n -арным группам относится также статья С. А. Чунихина [6]. После Поста наиболее активно изучением n -арных групп занимались В. А. Артамонов, С. А. Русаков, К. Глазек и их ученики.

К настоящему времени теория n -арных групп, несмотря на свой довольно почтенный возраст, остается для широкой математической общественности малоизвестной областью современной алгебры, значительно уступающей в своем развитии теории групп. Одной из причин сложившегося положения является широко распространенное заблуждение об отсутствии принципиальных различий между теорией групп и теорией n -арных

групп при $n \geq 3$. На самом деле это не так. В теории n -арных групп наряду со свойствами, общими для групп и n -арных групп, систематически изучаются и свойства n -арных групп, отсутствующие у групп. Изучение таких специфических свойств, среди которых встречаются и довольно экзотические, является одной из главных задач теории n -арных групп, причем не менее важной, чем получение n -арных аналогов известных групповых результатов.

Информация по n -арным группам имеется в книгах [7–11], а также в обзорах [12, 13]. Собственно n -арным группам посвящены книги [14–20].

2. Определения n -арной группы

Классические определения

К числу классических определений n -арной группы относятся определение В. Дёрнте из [2] и два определения Э. Поста из [5]. Эти определения являются обобщениями определения группы как полугруппы, в которой разрешимы уравнения $xa = b$ и $ay = b$.

2.1. Определение [2, В. Дёрнте]. Универсальная алгебра $\langle A, [] \rangle$ с одной n -арной ($n \geq 2$) операцией $[]: A^n \rightarrow A$ называется *n -арной группой*, если выполняются следующие условия:

1) n -арная операция $[]$ на множестве A ассоциативна, то есть

$$[[a_1 \dots a_n]a_{n+1} \dots a_{2n-1}] = [a_1 \dots a_i[a_{i+1} \dots a_{i+n}]a_{i+n+1} \dots a_{2n-1}]$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n-1$ и всех $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1} \in A$;

2) каждое из уравнений

$$[a_1 \dots a_{i-1}x_i a_{i+1} \dots a_n] = b, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

однозначно разрешимо в A относительно x_i для всех $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in A$.

Полагая в определении 2.1 $n = 2$, получаем определение обычной группы.

Если алгебра $\langle A, [] \rangle$ удовлетворяет условию 1) определения 2.1, то она называется *n -арной полугруппой*. Алгебра $\langle A, [] \rangle$, удовлетворяющая условию 2) того же определения, называется *n -арной квазигруппой*.

Пост заметил, что требование однозначной разрешимости уравнений в определении Дёрнте можно ослабить, потребовав только их разрешимость, а число уравнений уменьшить с n до двух, а при $n \geq 3$ даже до одного.

2.2. Определение [5, Э. Пост]. n -арная полугруппа $\langle A, [] \rangle$ называется *n -арной группой*, если в A разрешимы уравнения

$$[xa_2 \dots a_n] = b, \quad [a_1 \dots a_{n-1}y] = b$$

для всех $a_1, \dots, a_n, b \in A$.

2.3. Определение [5, Э. Пост]. n -арная полугруппа $\langle A, [] \rangle$ называется *n -арной группой* ($n \geq 3$), если в A разрешимо уравнение

$$[a_1 \dots a_{i-1}x a_{i+1} \dots a_n] = b$$

для всех $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in A$ и некоторого $i \in \{2, \dots, n-1\}$.

Для всякого $m = k(n-1) + 1$, где $k \geq 1$, полагают

$$[a_1 \dots a_m] = [a_1 \dots a_{k(n-1)+1}] = [[\dots [[a_1 \dots a_n]a_{n+1} \dots a_{2n-1}] \dots] a_{(k-1)(n-1)+2} \dots a_{k(n-1)+1}].$$

Тогда, если $m = k(n - 1) + 1$, $r = t(n - 1) + 1$, $1 \leq t \leq k$, то в m -арной полугруппе $\langle A, [] \rangle$ выполняется равенство

$$[a_1 \dots a_m] = [a_1 \dots a_j [a_{j+1} \dots a_{j+r}] a_{j+r+1} \dots a_m]$$

для всех $a_1, \dots, a_m \in A$, где $j = 0, 1, \dots, m - r$.

Определения, связанные с разрешимостью уравнений

Автором установлено [21], что n -арную группу можно определить как n -арную полугруппу, в которой для любых ее элементов a, b и некоторых $i, j \in \{1, \dots, n - 1\}$ разрешимы уравнения

$$[x \underbrace{b \dots b}_{n-1-i} \underbrace{a \dots a}_i] = b, \quad [\underbrace{a \dots a}_j \underbrace{b \dots b}_{n-1-j}] = b,$$

или же как n -арную полугруппу, в которой для любых ее элементов a, b и некоторых $i \in \{2, \dots, n - 1\}$, $k \in \{1, \dots, i - 1\}$, $m \in \{1, \dots, n - 1\}$ разрешимо уравнение

$$[\underbrace{a \dots a}_{k-1} \underbrace{b \dots b}_{i-k-1} x \underbrace{b \dots b}_{n-i-m} \underbrace{a \dots a}_m] = b.$$

Полагая в приведенных определениях $i = j = n - 1$ в первом случае и $k = i - 1$, $m = n - i$ во втором случае, получим результат А. Н. Скибы и В. И. Тютютина [22], согласно которому n -арную группу можно определить как n -арную полугруппу, в которой для любых ее элементов a и b , разрешимы уравнения

$$[x \underbrace{a \dots a}_{n-1}] = b, \quad [\underbrace{a \dots a}_{n-1} y] = b,$$

или же как n -арную полугруппу, в которой для любых ее элементов a, b и фиксированного $i \in \{2, \dots, n - 1\}$ разрешимо уравнение

$$[\underbrace{a \dots a}_{i-1} x \underbrace{a \dots a}_{n-i}] = b.$$

До 1991 года во всех определениях n -арной группы, связанных с разрешимостью уравнений, присутствовали только уравнения с одним неизвестным. Уравнения с числом неизвестных большим единицы не рассматривались до тех пор, пока не было установлено, что класс всех n -арных групп совпадает с классом всех n -арных полугрупп, в которых для любых элементов a и b разрешимы уравнения

$$[x_1 \dots x_{n-1} a] = b, \quad [a y_1 \dots y_{n-1}] = b$$

с $n - 1$ неизвестными [23], а также с классом всех n -арных полугрупп, в которых для любых элементов a и b разрешимо уравнение

$$[a x_1 \dots x_{n-2} a] = b$$

с $n - 2$ неизвестными [24].

Позже было установлено, что в определении n -арной группы могут присутствовать уравнения с любым числом неизвестных. Это вытекает из следующих двух теорем.

2.4. Теорема [25]. Для n -арной полугруппы $\langle A, [] \rangle$ справедливы следующие утверждения:

1) если в A для некоторого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ и любых $a_{i+1}, \dots, a_n, b \in A$ разрешимо уравнение

$$[x_1 \dots x_i a_{i+1} \dots a_n] = b, \quad (1)$$

то в A разрешимо каждое из уравнений

$$[x_1 a_2 \dots a_n] = b, \quad [x_1 x_2 a_3 \dots a_n] = b, \quad \dots, \quad [x_1 \dots x_{n-1} a_n] = b \quad (2)$$

для всех $a_2, \dots, a_n, b \in A$;

2) если в A для некоторого $j \in \{1, \dots, n-1\}$ и любых $a_1, \dots, a_{n-j}, b \in A$ разрешимо уравнение

$$[a_1 \dots a_{n-j} y_1 \dots y_j] = b, \quad (3)$$

то в A разрешимо каждое из уравнений

$$[a_1 \dots a_{n-1} y_1] = b, \quad [a_1 \dots a_{n-2} y_1 y_2] = b, \quad \dots, \quad [a_1 y_1 \dots y_{n-1}] = b \quad (4)$$

для всех $a_1, \dots, a_{n-1}, b \in A$.

Условия теоремы 2.4 можно ослабить, сохранив ее утверждения.

2.5. Теорема [25]. Для n -арной полугруппы $\langle A, [] \rangle$ справедливы следующие утверждения:

1) если в A для некоторого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ и любых $a, b \in A$ разрешимо уравнение

$$[x_1 \dots x_i \underbrace{a \dots a}_{n-i}] = b, \quad (5)$$

то в A разрешимо каждое из уравнений (2) для любых $a_2, \dots, a_n, b \in A$;

2) если в A для некоторого $j \in \{1, \dots, n-1\}$ и любых $a, b \in A$ разрешимо уравнение

$$[\underbrace{a \dots a}_{n-j} y_1 \dots y_j] = b, \quad (6)$$

то в A разрешимо каждое из уравнений (4) для любых $a_1, \dots, a_{n-1}, b \in A$.

Из теорем 2.4 и 2.5 вытекает, что n -арную группу можно определить как n -арную полугруппу, в которой разрешимы уравнения (1) и (3) или же как n -арную полугруппу, в которой разрешимы уравнения (5) и (6).

Определения, не связанные с разрешимостью уравнений

Помимо определений n -арной группы, в которых постулируется разрешимость тех или иных уравнений, существуют также определения n -арной группы, являющиеся n -арным обобщением определения группы как полугруппы, основные операции которой связаны тождеством

$$y^{-1}(yx) = x = (xy)y^{-1},$$

где y^{-1} – результат применения n -арной операции. К числу таких определений относятся определения Н. Целокоского [26], В. Дудека, К. Глазека и Б. Гляйхгевихта [27], С. А. Русакова [28]. В качестве примера одного из таких определений можно указать определение из [27], согласно которому n -арную группу можно определить как универсальную алгебру $\langle A, [], ^{-} \rangle$ с ассоциативной n -арной $[]$ и унарной $^{-}$ операциями, в которой выполняется тождество

$$[\underbrace{\bar{y} y \dots y x}_{n-2}] = x = [x \underbrace{y \dots y \bar{y}}_{n-2}].$$

Представляет интерес определение Г. Монка и Ф. Сиосона [29], согласно которому n -арную группу можно определить как n -арную полугруппу $\langle A, [] \rangle$, в которой для любых $a_1, \dots, a_{n-2} \in A$ существует единственный элемент $(a_1, \dots, a_{n-2})^{-1} \in A$ такой, что для любого $b \in A$ верно

$$\begin{aligned} [(a_1, \dots, a_{n-2})^{-1} a_1 \dots a_{n-2} b] &= b, & [b(a_1, \dots, a_{n-2})^{-1} a_1 \dots a_{n-2}] &= b, \\ [a_1 \dots a_{n-2} (a_1, \dots, a_{n-2})^{-1} b] &= b, & [ba_1 \dots a_{n-2} (a_1, \dots, a_{n-2})^{-1}] &= b. \end{aligned}$$

Фактически в определении Монка и Сиосона на множестве A определена $(n - 2)$ -арная операция. Поэтому естественным выглядит определение Н. Целаковского [26], доказавшего, что класс всех n -арных групп совпадает с классом всех таких n -арных полугрупп $\langle A, [] \rangle$, для которых на A существует $(n - 2)$ -арная операция $^{-1}$, удовлетворяющая условию

$$[(a_1, \dots, a_{n-2})^{-1} a_1 \dots a_{n-2} b] = b, \quad [ba_1 \dots a_{n-2} (a_1, \dots, a_{n-2})^{-1}] = b.$$

для любых $a_1, \dots, a_{n-2}, b \in A$.

Еще дальше пошел Я. Ушан [16], определив на множестве A с одной n -арной операцией $[]$ еще две операции: $(n - 2)$ -арную операцию \mathbf{e} , удовлетворяющую условию

$$[\mathbf{e}(a_1, \dots, a_{n-2}) a_1 \dots a_{n-2} b] = b = [ba_1 \dots a_{n-2} \mathbf{e}(a_1, \dots, a_{n-2})]$$

для любого $b \in A$; $(n - 1)$ -арную операцию $^{-1}$, удовлетворяющую условию

$$\begin{aligned} [(a_1, \dots, a_{n-2}, a)^{-1} a_1 \dots a_{n-2} a] &= \mathbf{e}(a_1, \dots, a_{n-2}), \\ [aa_1 \dots a_{n-2} (a_1, \dots, a_{n-2}, a)^{-1}] &= \mathbf{e}(a_1, \dots, a_{n-2}). \end{aligned}$$

Операции \mathbf{e} и $^{-1}$ позволили Я. Ушану получить ряд определений n -арной группы в терминах операций \mathbf{e} и $^{-1}$.

Интересующимся аксиоматикой n -арных групп, можно посоветовать обратиться к препринту [30], в котором приведено более шестидесяти определений n -арной группы.

Заметим, что помимо n -арной ассоциативности, фигурирующей в определениях n -арной группы и n -арной полугруппы, возможны и другие виды ассоциативных n -арных операций. Значительный вклад в изучение обобщенной ассоциативности внес Л. М. Глушкин [31]. Из современных авторов, изучающих обобщенную ассоциативность, можно выделить Ф. Н. Сохацкого [32, 33].

3. Примеры n -арных групп

3.1. Пример. Определим на группе A n -арную операцию

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = a_1 a_2 \dots a_n a,$$

где a – элемент из центра $Z(A)$ группы A . Так как

$$\begin{aligned} [[a_1 \dots a_n] a_{n+1} \dots a_{2n-1}] &= (a_1 \dots a_n a) a_{n+1} \dots a_{2n-1} a = \\ &= a_1 \dots a_i (a_{i+1} \dots a_{i+n} a) a_{i+n+1} \dots a_{2n-1} a = [a_1 \dots a_i [a_{i+1} \dots a_{i+n}] a_{i+n+1} \dots a_{2n-1}] \end{aligned}$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n - 1$ и всех $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1} \in A$, то $\langle A, [] \rangle$ – n -арная полугруппа.

Разрешимость в A уравнений

$$[xa_2 \dots a_n] = b, \quad [a_1 \dots a_{n-1}y] = b$$

вытекает из разрешимости в A уравнений

$$xa_2 \dots a_n a = b \quad \text{и} \quad a_1 \dots a_{n-1} ya = b.$$

Следовательно, $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа.

3.2. Пример. Положив в примере 3.1 $a = 1$, получим n -арную группу $\langle A, [] \rangle$ с n -арной операцией

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = a_1 a_2 \dots a_n,$$

которая называется *производной* n -арной группой от группы A .

В предыдущих примерах мы строили n -арную групповую операцию при помощи групповой операции на множестве, которое относительно групповой операции было группой. Следующие примеры показывают, что n -арную групповую операцию можно построить при помощи групповой операции на множестве, которое относительно групповой операции не является группой.

3.3. Пример. Пусть $1 + (n - 1)Z$ – класс вычетов по модулю $n - 1$, где $n \geq 3$. Так как для любых

$$a_1 = 1 + (n - 1)z_1, \quad a_2 = 1 + (n - 1)z_2, \quad \dots, \quad a_n = 1 + (n - 1)z_n \in 1 + (n - 1)Z$$

верно

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &= 1 + (n - 1)z_1 + 1 + (n - 1)z_2 + \dots + 1 + (n - 1)z_n = \\ &= 1 + n - 1 + (n - 1)z_1 + (n - 1)z_2 + \dots + (n - 1)z_n = \\ &= 1 + (n - 1)(1 + z_1 + z_2 + \dots + z_n) \in 1 + (n - 1)Z, \end{aligned}$$

то класс вычетов $1 + (n - 1)Z$ замкнут относительно n -арной операции

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Ассоциативность n -арной операции $[]$ является следствием ассоциативности операции в группе Z . Легко убедиться, что

$$x = y = 1 + (n - 1)(z_n - z_1 - \dots - z_{n-1} - 1) \in 1 + (n - 1)Z$$

является решением уравнений

$$[xa_1 \dots a_{n-1}] = a_n \quad \text{и} \quad [a_1 \dots a_{n-1}y] = a_n.$$

Таким образом, $\langle 1 + (n - 1)Z, [] \rangle$ – n -арная группа.

3.4. Пример. Определим на множестве T_n всех нечетных подстановок степени n тернарную операцию $[\alpha\beta\gamma] = \alpha * \beta * \gamma$, где $*$ – умножение подстановок. Так как произведение трех нечетных подстановок является нечетной подстановкой, то множество T_n замкнуто относительно тернарной операции $[]$. Ассоциативность тернарной операции $[]$ следует из ассоциативности бинарной операции $*$ в S_n . Ясно, что в T_n однозначно разрешимы уравнения

$$[x\alpha_2\alpha_3] = \alpha, \quad [\alpha_1 y\alpha_3] = \alpha, \quad [\alpha_1\alpha_2 z] = \alpha.$$

Следовательно, $\langle T_n, [] \rangle$ – тернарная группа.

Пример 3.4 обобщается следующим предложением.

3.5. Предложение. Пусть B – подмножество группы A , удовлетворяющее следующим условиям:

1) если $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$, то $b_1 b_2 \dots b_n \in B$;

2) если $b \in B$, то $b^{-1} \in B$.

Тогда $\langle B, [] \rangle$ – n -арная группа с n -арной операцией

$$[b_1 b_2 \dots b_n] = b_1 b_2 \dots b_n.$$

Доказательство. Если $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$, то

$$[b_1 b_2 \dots b_n] = b_1 b_2 \dots b_n \in B.$$

Ассоциативность n -арной операции $[]$ является следствием ассоциативности операции в группе A .

Для произвольных $b_1, \dots, b_{n-1}, b \in B$ положим

$$c = b b_{n-1}^{-1} \dots b_1^{-1}, \quad d = b_{n-1}^{-1} \dots b_1^{-1} b.$$

Согласно 2) $b_1^{-1}, \dots, b_{n-1}^{-1} \in B$, а согласно 1) $c, d \in B$. Так как

$$[c b_1 \dots b_{n-1}] = c b_1 \dots b_{n-1} = b b_{n-1}^{-1} \dots b_1^{-1} b_1 \dots b_{n-1} = b,$$

$$[b_1 \dots b_{n-1} d] = b_1 \dots b_{n-1} d = b_1 \dots b_{n-1} b_{n-1}^{-1} \dots b_1^{-1} b = b,$$

то в B разрешимы уравнения

$$[x b_1 \dots b_{n-1}] = b \quad \text{и} \quad [b_1 \dots b_{n-1} y] = b.$$

Следовательно, $\langle B, [] \rangle$ – n -арная группа. Предложение доказано.

3.6. Следствие. Если B – подмножество группы A , удовлетворяющее условиям 1) и 2) предложения 3.5, и n – четное, то n -арная группа $\langle B, [] \rangle$ – производная от группы.

Так как $b = b^{-1}$ для всякой инволюции b группы A , то справедливо

3.7. Следствие. Если B – множество инволюций группы A , удовлетворяющее условию 1) предложения 3.5, то $\langle B, [] \rangle$ – n -арная группа с n -арной операцией из того же предложения.

3.8. Пример. Пусть b – элемент группы A , удовлетворяющий условию $b^{n-1} = 1$, $[]$ – n -арная операция, производная от операции в группе. Так как $\underbrace{[b \dots b]}_n = b^{n-1} b = b$, то

$\langle \{b\}, [] \rangle$ – n -арная группа.

3.9. Пример. Если b – инволюция группы A , то есть $b^2 = 1$, то $\langle \{b\}, [] \rangle$ – тернарная группа с тернарной операцией, производной от операции в группе.

Большое число примеров тернарных групп доставляют группы движений.

3.10. Пример. Любое движение плоскости является либо параллельным переносом $T_{\vec{a}}$ на некоторый вектор \vec{a} , либо поворотом R_O^α вокруг некоторой точки O на угол α , либо скользящим отражением $S_l^a = T_{\vec{a}} S_l = S_l T_{\vec{a}}$ относительно некоторого вектора \vec{a} и некоторой прямой l , где S_l – отражение относительно прямой l . Ясно, что $S_l^a = S_l$ при $\vec{a} = 0$. Параллельные переносы и повороты называют движениями первого рода, а

скользящие отражения – движениями второго рода. Известно также, что: произведение двух движений первого рода является движением первого рода; произведение движений первого и второго рода – движением второго рода; произведение двух движений второго рода – движением первого рода. Обозначим через $E_2(2)$ – множество всех движений второго рода плоскости и определим на $E_2(2)$ тернарную операцию $[s_1s_2s_3] = s_1s_2s_3$. Используя приведенные свойства произведений движений и рассуждая так же, как в примере 3.4, можно показать, что $\langle E_2(2), [] \rangle$ – тернарная группа.

Аналогично устанавливается, что множество $E_2(3)$ всех движений второго рода пространства также является тернарной группой.

3.11. Пример. Всякий поворот прямой в некоторой плоскости на угол 180° вокруг любой точки этой прямой является инволюцией в группе всех самосовмещений прямой в выбранной плоскости. Кроме того, произведение трех таких поворотов снова является поворотом на 180° . Поэтому, согласно следствию 3.7, множество всех поворотов прямой на 180° в фиксированной плоскости является тернарной группой с тернарной операцией, производной от операции в группе.

3.12. Пример. Известно, что для любых трех прямых a, b, c , лежащих в одной плоскости и проходящих через точку O , существует прямая d , лежащая в той же плоскости и проходящая через точку O , и такая, что $S_aS_bS_c = S_d$. А так как, кроме того, всякое отражение вида S_a является инволюцией в группе всех движений плоскости, то, согласно следствию 3.7, множество всех отражений вида S_a относительно прямых, лежащих в выбранной плоскости и проходящих через общую точку, является тернарной группой с тернарной операцией, производной от операции в группе.

В следующем примере все прямые также лежат в одной плоскости.

3.13. Пример. Известно, что если прямые a, b, c перпендикулярны прямой l , то существует прямая d , перпендикулярная l , и такая, что $S_aS_bS_c = S_d$. Таким образом, снова, согласно следствию 3.7, заключаем, что множество всех отражений вида S_a относительно прямых, перпендикулярных одной прямой, является тернарной группой с тернарной операцией, производной от операции в группе.

3.14. Пример. Пусть D_n – диэдральная группа, то есть полная группа преобразований симметрии правильного n -угольника. Поворот с n -угольника в его плоскости на угол $2\pi/n$ вокруг центра n -угольника порождает циклическую подгруппу

$$C_n = \langle c \rangle = \{e, c, c^2, \dots, c^{n-1}\}$$

поворотов. Диэдральная группа содержит еще n отражений. Если b – отражение, то

$$B_n = \{b, bc, \dots, bc^{n-1}\} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

есть множество всех отражений.

Определим на B_n тернарную операцию $[\varphi\psi\theta] = \varphi\psi\theta$. Так как произведение двух отражений является поворотом, то $\varphi\psi$ – поворот. А так как произведение поворота на отражение является отражением, то $[\varphi\psi\theta] = \varphi\psi\theta$ – отражение. Следовательно, множество B_n замкнуто относительно тернарной операции $[]$.

Ассоциативность тернарной операции $[]$ вытекает из ассоциативности бинарной операции в диэдральной группе.

Рассмотрим в B_n уравнение $[x\psi\theta] = \tau$, которое равносильно уравнению $x\psi\theta = \tau$. Последнее уравнение имеет в D_n решение $x = \varphi$. Если φ – поворот, то $\varphi\psi\theta = \tau$ – поворот, что противоречит выбору $\tau \in B_n$. Аналогично доказывается разрешимость в B_n уравнений

$$[\varphi y \theta] = \tau, \quad [\varphi \psi z] = \tau.$$

Таким образом, $\langle B_n, [] \rangle$ – тернарная группа.

В n -арных группах сплошь и рядом возникают ситуации, невозможные в группах. Например, группа, из-за наличия в каждой ее подгруппе единичного элемента, не может быть объединением своих непересекающихся подгрупп. Иная картина наблюдается в теории n -арных групп. Здесь n -арная группа может быть объединением своих непересекающихся n -арных подгрупп.

3.15. Пример. Тернарная группа, производная от унимодулярной группы всех матриц порядка n с определителем, равным ± 1 , и элементами из некоторого поля, является объединением своих непересекающихся тернарных подгрупп: тернарной группы, производной от специальной линейной группы степени n над тем же полем и тернарной подгруппы всех матриц с определителем, равным -1 .

Аналогично, тернарная группа $\langle S_n, [] \rangle$, производная от симметрической группы S_n , является объединением тернарной группы $\langle A_n, [] \rangle$, производной от знакопеременной группы A_n , и тернарной группы $\langle T_n, [] \rangle$ из примера 3.4. Ясно, что множества A_n и T_n не имеют общих элементов.

Не имеют общих элементов также тернарная группа $\langle C_n, [] \rangle$, производная от циклической группы C_n поворотов правильного n -угольника и тернарная группа отражений $\langle B_n, [] \rangle$ из примера 3.14. Объединение тернарных групп $\langle C_n, [] \rangle$ и $\langle B_n, [] \rangle$ совпадает с тернарной группой $\langle D_n, [] \rangle$, производной от диэдральной группы D_n .

Для построения дальнейших примеров нам понадобится следующее утверждение.

3.16. Предложение [17]. Если $a^{n-1} = 1$ для некоторого элемента a тела T , где $n \geq 2$, то $\langle T, [] \rangle$ – n -арная группа с n -арной операцией

$$[x_1 x_2 \dots x_n] = x_1 + ax_2 + \dots + a^{n-2}x_{n-1} + x_n.$$

3.17. Пример [2]. Пусть $T = C$ – поле всех комплексных чисел,

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n-1} + i \sin \frac{2\pi}{n-1} \in C.$$

Так как $\varepsilon^{n-1} = 1$, то, по предыдущему предложению $\langle C, [] \rangle$ – n -арная группа с n -арной операцией

$$[z_1 z_2 \dots z_n] = z_1 + \varepsilon z_2 + \dots + \varepsilon^{n-2} z_{n-1} + z_n.$$

3.18. Пример. Пусть снова $T = C$. Так как $i^4 = 1$, то, согласно предложению 3.16, $\langle C, [] \rangle$ – 5-арная группа с 5-арной операцией

$$[z_1 z_2 z_3 z_4 z_5] = z_1 + iz_2 - z_3 - iz_4 + z_5.$$

3.19. Пример. Пусть H – тело кватернионов. Так как

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \quad i^3 = -i, \quad j^3 = -j, \quad k^3 = -k; \quad i^4 = j^4 = k^4 = 1,$$

то, согласно предложению 3.16, $\langle H, []_i \rangle$, $\langle H, []_j \rangle$ и $\langle H, []_k \rangle$ – 5-арные группы с 5-арными операциями

$$[x_1 x_2 x_3 x_4 x_5]_i = x_1 + ix_2 - x_3 - ix_4 + x_5,$$

$$[x_1 x_2 x_3 x_4 x_5]_j = x_1 + jx_2 - x_3 - jx_4 + x_5,$$

$$[x_1 x_2 x_3 x_4 x_5]_k = x_1 + kx_2 - x_3 - kx_4 + x_5.$$

4. n -арные аналоги единицы и обратного элемента

Следующие три определения обобщают на n -арный случай определение единицы группы A , как элемента $e \in A$ такого, что $ea = ae = a$ для любого $a \in A$.

4.1. Определение [5]. Элемент $e \in A$ n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ называется *единицей* этой n -арной группы, если для любого $a \in A$ и любого $i = 1, 2, \dots, n$ верно

$$[\underbrace{e \dots e}_{i-1} a \underbrace{e \dots e}_{n-i}] = a.$$

4.2. Определение [5]. Элемент $\varepsilon \in A$ n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ называется её *идемпотентом*, если $[\underbrace{\varepsilon \dots \varepsilon}_n] = \varepsilon$.

Легко проверяется, что элемент ε является идемпотентом тогда и только тогда, когда выполняется условие $[\underbrace{\varepsilon \dots \varepsilon}_{n-1} a] = [a \underbrace{\varepsilon \dots \varepsilon}_{n-1}] = a$ для некоторого $a \in A$. Ясно, что единица n -арной группы является и её идемпотентом.

4.3. Определение [5]. Последовательность $e_1 \dots e_{k(n-1)}$, где $k \geq 1$, элементов n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ называется *нейтральной*, если $[e_1 \dots e_{k(n-1)} a] = [a e_1 \dots e_{k(n-1)}] = a$ для любого $a \in A$.

Ясно, что если ε – идемпотент, в частности, единица n -арной группы, то последовательности

$$\underbrace{\varepsilon \dots \varepsilon}_{n-1}, \underbrace{\varepsilon \dots \varepsilon}_{2(n-1)}, \dots, \underbrace{\varepsilon \dots \varepsilon}_{k(n-1)}, \dots$$

являются нейтральными.

4.4. Пример. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, производная от бинарной группы A (пример 3.2). Если e – единица группы, то для любого $a \in A$ и любого $i = 1, 2, \dots, n$ верно

$$[\underbrace{e \dots e}_{i-1} a \underbrace{e \dots e}_{n-i}] = e^{i-1} a e^{n-i} = a,$$

то есть e – единица n -арной группы $\langle A, [] \rangle$.

В. Дернте установил [2], что верно и обратное утверждение: n -арная группа, обладающая единицей, является производной от группы.

В n -арной группе при $n > 2$, в отличие от групп, может быть несколько единиц. Более того, существуют n -арные группы, в которых все элементы являются единицами. Из следующего примера вытекает, что существуют n -арные группы ($n > 2$) любого конечного порядка, в которых вообще нет единиц.

4.5. Пример. Покажем, что в тернарной группе $\langle B_n, [] \rangle$ из примера 3.14 все элементы являются идемпотентами, среди которых нет единиц.

Так как произведение любого отражения на себя является тождественным преобразованием, то $[\varphi\varphi\varphi] = \varphi\varphi\varphi = \varphi$ для любого $\varphi \in B_n$, то есть все элементы в $\langle B_n, [] \rangle$ являются идемпотентами.

Для того, чтобы установить, что в $\langle B_n, [] \rangle$ нет единицы, покажем, что для любого $\varphi \in B_n$ ($n > 2$) существует $\psi \in B_n$ такой, что $[\varphi\psi\varphi] \neq \psi$. Если $\varphi = b$, то, положив $\psi = bc$ и используя равенство $bc^i = c^{n-i}b$, получим

$$[\varphi\psi\varphi] = \varphi\psi\varphi = bcbcb = cb = bc^{n-1} \neq bc = \psi$$

Если же $\varphi = bc^i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), то, положив $\psi = bc^{i+1}$, получим

$$[\varphi\psi\varphi] = \varphi\psi\varphi = bc^i bc^{i+1} bc^i = bc^i c^{n-i-1} b bc^i = bc^{n-1} c^i = bc^{i-1} \neq bc^{i+1} = \psi.$$

Следовательно, в $\langle B_n, [] \rangle$ нет единиц.

Существуют n -арные группы, в которых нет не только единиц, но и идемпотентов.

4.6. Пример. Пусть $R = \{1, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$ – группа кватернионов. На множестве R определим 5-арную операцию $[]$ через бинарную операцию группы R следующим образом:

$$[x_1 x_2 \dots x_5] = x_1 x_2 \dots x_5 a^2.$$

Так как $Z(R) = \{1, a^2\}$ – центр группы R , то $\langle R, [] \rangle$ – 5-арная группа (см. пример 3.1).

Используя выполняющиеся в группе кватернионов тождества $a^4 = 1, a^2 = b^2, ab = ba^3$, можно показать, что 5-арная группа $\langle R, [] \rangle$ не обладает идемпотентами. Отметим, что 5-арная группа $\langle R, [] \rangle$ была построена С. А. Русаковым [14]. Он первым установил существование гамильтоновых n -арных групп без единицы, где $n = 4k + 1$.

Пример 4.6 можно обобщить.

4.7. Пример. Пусть A – группа экспоненты $n-1$, $a \in Z(A)$, $a \neq 1$. В примере 3.1 установлено, что $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа с n -арной операцией

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = a_1 a_2 \dots a_n a.$$

Если x – произвольный элемент из A , то

$$\underbrace{[x \dots x]}_n = \underbrace{x \dots x}_n a = x^{n-1} x a = x a \neq x,$$

так как $a \neq 1$. Таким образом, $\underbrace{[x \dots x]}_n \neq x$ для любого $x \in A$ и, следовательно, $\langle A, [] \rangle$ не содержит идемпотентов. Отметим, что в предыдущем примере $\text{Exp } R = 4 = 5 - 1$.

4.8. Предложение. Для элемента e n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ следующие утверждения эквивалентны:

- 1) e – единица в $\langle A, [] \rangle$;
- 2) $\underbrace{[a e \dots e]}_{n-1} = \underbrace{[e a e \dots e]}_{n-2} = a$ для любого $a \in A$;
- 3) $\underbrace{[e \dots e a]}_{n-1} = \underbrace{[e \dots e a e]}_{n-2} = a$ для любого $a \in A$.

4.9. Предложение. Если $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, $e_1, \dots, e_{k(n-1)} \in A$, $k \geq 1$, то следующие утверждения эквивалентны:

- 1) последовательность $e_1 \dots e_{k(n-1)}$ – нейтральная;
- 2) существует элемент $a \in A$ такой, что $[e_1 \dots e_{k(n-1)} a] = a$;
- 3) существует элемент $a \in A$ такой, что $[a e_1 \dots e_{k(n-1)}] = a$.

В любой n -арной группе существуют нейтральные последовательности, но определяются они неоднозначно.

Иногда, для сокращения записей, последовательности элементов будем обозначать малыми греческими буквами: $a_1 \dots a_i = \alpha$.

4.10. Предложение. Справедливы следующие утверждения:

- 1) если $\alpha\beta$ – нейтральная последовательность n -арной группы, то $\beta\alpha$ – также нейтральная последовательность этой же n -арной группы;

2) если α и β – нейтральные последовательности n -арной группы, то $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ – также нейтральные последовательности этой же n -арной группы.

Понятия нейтральной последовательности и единицы n -арной группы являются частными случаями следующего определения.

4.11. Определение [20]. Последовательность $e_1 \dots e_{m-1}$ элементов n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ называется m -нейтральной ($n = k(m - 1) + 1, k \geq 1$), если

$$\underbrace{[e_1 \dots e_{m-1} \dots e_1 \dots e_{m-1} x]_{i-1}}_{i-1} \underbrace{[e_1 \dots e_{m-1} \dots e_1 \dots e_{m-1}]_{k-i+1}}_{k-i+1} = x$$

для любого $x \in A$ и любого $i = 1, \dots, k + 1$.

Если в этом определении положить $m = n$, то $k = 1, i = 1$ или 2 ,

$$[e_1 \dots e_{n-1} x] = x, \quad [x e_1 \dots e_{n-1}] = x.$$

Следовательно, n -нейтральные последовательности элементов n -арной группы – это в точности ее нейтральные последовательности.

Если в определении 4.11 положить $m = 2$, то $k = n - 1, i = 1, \dots, k + 1 = n$,

$$\underbrace{[e_1 \dots e_1 x]_{i-1}}_{i-1} \underbrace{[e_1 \dots e_1]_{n-i}}_{n-i} = x.$$

Следовательно, единицы n -арной группы – это в точности ее 2-нейтральные последовательности.

Одним определением можно объединить также понятия идемпотента и единицы n -арной группы.

4.12. Определение [20]. Элемент ε n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, где $n = k(m - 1) + 1, k \geq 1$, называется m -идемпотентом, если

$$\underbrace{[\underbrace{\varepsilon \dots \varepsilon}_{m-1} \dots \underbrace{\varepsilon \dots \varepsilon}_{m-1} x \underbrace{\varepsilon \dots \varepsilon}_{m-1} \dots \underbrace{\varepsilon \dots \varepsilon}_{m-1}]}_{i-1} \underbrace{[\varepsilon \dots \varepsilon]_{k-i+1}}_{k-i+1} = x$$

для любого $x \in A$ и любого $i = 1, \dots, k + 1$.

Легко проверяется, что n -идемпотенты n -арной группы – это в точности ее идемпотенты, а 2-идемпотенты – это в точности ее единицы. Ясно также, что элемент ε n -арной группы является её m -идемпотентом тогда и только тогда, когда последовательность $\underbrace{\varepsilon \dots \varepsilon}_{m-1}$ является m -нейтральной.

Следующее определение обобщает на n -арный случай понятие обратного элемента группы.

4.13. Определение [5]. Последовательность β элементов n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ называется *обратной* к последовательности α элементов из A , если последовательности $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ являются нейтральными.

Ясно, что если β – обратная к α , то α – обратная к β . Для любой последовательности α элементов n -арной группы существует обратная последовательность β . Причем, обратная последовательность, длина которой больше единицы, определяется неоднозначно.

Следствием утверждения 1) предложения 4.10 является

4.14. Предложение. Если α и β – последовательности элементов n -арной группы, то следующие утверждения равносильны:

- 1) β – обратная к α ;
- 2) $\alpha\beta$ – нейтральная;
- 3) $\beta\alpha$ – нейтральная.

4.15. Предложение. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ – последовательности, составленные из элементов n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, и пусть β_1, \dots, β_r – последовательности, обратные соответственно данным. Тогда $\beta_r \dots \beta_1$ – обратная последовательность для последовательности $\alpha_1 \dots \alpha_r$.

Еще одним n -арным аналогом обратного элемента является косой элемент.

4.16. Определение [2]. Элемент b n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ называется *косым* элементом для элемента $a \in A$, если $\underbrace{[a \dots a]_{i-1} b \underbrace{[a \dots a]_{n-i}}_{n-i}} = a$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Если b – косой элемент для a , то употребляют обозначение $b = \bar{a}$. Согласно определению, $\underbrace{[a \dots a]_{i-1} \bar{a} \underbrace{[a \dots a]_{n-i}}_{n-i}} = a$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Легко проверяется, что элемент \bar{a} совпадает с решением уравнения $\underbrace{[a \dots a]_{i-1} x \underbrace{[a \dots a]_{n-i}}_{n-i}} = a$ для фиксированного $i = 1, 2, \dots, n$ и определяется однозначно. Из определения 4.16 и предложения 4.9 вытекает, что последовательность $\underbrace{[a \dots a]_{i-1} \bar{a} \underbrace{[a \dots a]_{n-i-1}}_{n-i-1}}$ является нейтральной для любого $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Понятно, что всякий идемпотент n -арной группы совпадает со своим косым.

4.17. Пример. Укажем косые элементы для каждого элемента 5-арной группы из примера 4.6: $\bar{1} = a^2$, $\bar{a} = a^3$, $\bar{a^2} = 1$, $\bar{a^3} = a$, $\bar{b} = ba^2$, $\bar{ba} = ba^3$, $\bar{ba^2} = b$, $\bar{ba^3} = ba$.

4.18. Предложение [20]. Если $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), то справедливы следующие утверждения:

- 1) для любых $a_1, \dots, a_n \in A$ верно

$$\overline{[a_1, \dots, a_n]} = \underbrace{[\overline{[a_n \dots a_n]_{n-3}} \dots \overline{[a_1 \dots a_1]_{n-3}} \dots \overline{[a_n \dots a_n]_{n-3}} \dots \overline{[a_1 \dots a_1]_{n-3}}]_{n-2}}.$$

В частности, если $n = 3$, то $\overline{[abc]} = [\overline{cba}]$.

- 2) для любого $a \in A$ верно $\bar{\bar{a}} = \underbrace{[a \dots a]_{(n-3)(n-1)+1}}$. В частности, если $n = 3$, то $\bar{\bar{a}} = a$.

5. n -арная подгруппа единиц

Так как в n -арной группе, в отличие от группы, может быть несколько единиц, то возникает задача изучения множества $E(A)$ всех единиц произвольной n -арной группы $\langle A, [] \rangle$.

5.1. Теорема [34, 35]. Если $E(A) \neq \emptyset$, то $\langle E(A), [] \rangle$ – характеристическая n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, лежащая в её центре.

Ясно, что если $e \in E(A)$, то $\langle \{e\}, [] \rangle$ – n -арная подгруппа в $\langle E(A), [] \rangle$. В n -арной подгруппе единиц могут существовать n -арные подгруппы, отличные от одноэлементных и от самой $\langle E(A), [] \rangle$. Например, как установлено в [34, 35], если e_1 и e_2 – единицы тернарной группы $\langle A, [] \rangle$, то $\langle \{e_1, e_2\}, [] \rangle$ – тернарная подгруппа тернарной группы $\langle E(A), [] \rangle$. Отсюда вытекает, что если конечная тернарная группа содержит более одной единицы, то её n -арная подгруппа единиц, её центр и она сама

имеют четные порядки. В [34, 35] также установлено, что если a, b, c – три различные единицы тернарной группы $\langle A, [] \rangle$, то $\langle \{a, b, c, [abc], []\} \rangle$ – тернарная подгруппа четвертого порядка в $\langle E(A), [] \rangle$.

5.2. Теорема [34, 35]. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, производная от группы A , $Z(A)$ – центр группы A , e – единица группы A . Тогда $E(A) = \{z \in Z(A) \mid z^{n-1} = e\}$.

5.3. Следствие. Если $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, производная от абелевой группы A , e – единица группы A , то $E(A) = \{a \in A \mid a^{n-1} = e\}$.

5.4. Пример. Пусть C^* – мультипликативная группа комплексных чисел. Так как она абелева, то, согласно следствию 5.3, n -арная подгруппа единиц n -арной группы $\langle C^*, [] \rangle$, производной от группы C^* , имеет вид

$$E(C^*) = \{z \in C^* \mid z^{n-1} = 1\} = \left\{ \cos \frac{2k\pi}{n-1} + i \sin \frac{2k\pi}{n-1} \mid k = 0, 1, \dots, n-2 \right\},$$

то есть имеет ровно $n - 1$ единиц.

5.5. Пример. Пусть $\langle C_{p^\infty}, [] \rangle$ – $(p^k + 1)$ -арная группа ($k = 1, 2, \dots$), производная от квазициклической группы C_{p^∞} . Так как C_{p^∞} – абелева и содержит единственную циклическую подгруппу Z_{p^k} порядка p^k , то

$$E(C_{p^\infty}) = \{a \in C_{p^\infty} \mid a^{p^k} = 1\} = Z_{p^k},$$

то есть в $\langle C_{p^\infty}, [] \rangle$ ровно p^k единиц.

5.6. Пример. Пусть $\langle Z_k, [] \rangle$ – $(m + 1)$ -арная группа, производная от циклической группы Z_k порядка k , где m делит k . Так как Z_k – абелева и содержит единственную циклическую подгруппу Z_m порядка m , то

$$E(Z_k) = \{a \in Z_k \mid a^m = 1\} = Z_m,$$

то есть в $\langle Z_k, [] \rangle$ ровно m единиц.

5.7. Следствие. В n -арной группе $\langle Z_{n-1}, [] \rangle$, производной от циклической группы Z_{n-1} порядка $n - 1$, все элементы являются единицами.

5.8. Пример. Так как A_3 – циклическая группа третьего порядка, то, согласно следствию 5.7, в 4-арной группе $\langle A_3, [] \rangle$, производной от группы A_3 , все три элемента являются единицами.

5.9. Следствие. Пусть центр $Z(A)$ группы A имеет период $n - 1$, $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, производная от группы A . Тогда $Z(A) = E(A)$.

5.10. Пример. Пусть $\langle R, [] \rangle$ – тернарная группа, производная от группы кватернионов, $R = \{1, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$. Так как $Z(R) = \{1, a^2\}$ – циклическая группа второго порядка, то, согласно следствию 5.9, тернарная группа $\langle R, [] \rangle$ имеет ровно две единицы 1 и a^2 .

5.11. Пример. Так как при четных n , центр $Z(D_n)$ диэдральной группы D_n включает помимо единицы e ещё и поворот на угол π , то, согласно следствию 5.9, тернарная группа $\langle D_n, [] \rangle$ при четном n имеет ровно две единицы.

5.12. Следствие. n -арная группа $\langle A, [] \rangle$, производная от группы A с тривиальным центром $Z(A) = \{e\}$, обладает единственной единицей e .

5.13. Пример. Так как $Z(S_n) = \{e\}$ при $n \geq 3$, то, согласно следствию 5.12, производная m -арная группа $\langle S_n, [] \rangle$ при $n \geq 3, m \geq 3$ обладает единственной единицей.

5.14. Пример. Так как $Z(A_n) = \{e\}$ при $n \geq 4$, то, согласно следствию 5.12, производная m -арная группа $\langle A_n, [\] \rangle$ при $n \geq 4, m \geq 3$ обладает единственной единицей.

5.15. Пример. Так как $Z(D_n) = \{e\}$ при нечетном n , то, согласно следствию 5.12, производная m -арная группа $\langle D_n, [\] \rangle$ при нечетном n и $m \geq 3$ обладает единственной единицей.

Примерами n -арных групп с пустой n -арной подгруппой единиц являются тернарная группа $\langle B_n, [\] \rangle$ из примера 4.5 и, как несложно установить, тернарная группа $\langle T_n, [\] \rangle$ всех нечётных подстановок степени n из примера 3.4.

5.16. Теорема [34]. Если n -арная подгруппа единиц $\langle E(A), [\] \rangle$ n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$ является конечной, m – делитель порядка $|E(A)|$, то $\langle E(A), [\] \rangle$ является объединением непересекающихся инвариантных в $\langle A, [\] \rangle$ n -арных подгрупп порядка m .

Следующая теорема обеспечивает единственность разложения тернарной группы единиц.

5.17. Теорема [34]. Если n -арная подгруппа единиц $\langle E(A), [\] \rangle$ n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$ является конечной порядка km , где $(k, m) = 1$, то в $\langle E(A), [\] \rangle$ существует ровно t n -арных подгрупп $\langle P_1, [\] \rangle, \dots, \langle P_m, [\] \rangle$ порядка k . Причем

$$E(A) = \bigcup_{i=1}^m P_i, P_i \cap P_j = \emptyset (i \neq j). \quad (7)$$

5.18. Следствие [34]. Если n -арная подгруппа единиц $\langle E(A), [\] \rangle$ n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$ является конечной порядка $p^k m$, где $(p, m) = 1$, то в $\langle E(A), [\] \rangle$ существует ровно t p -силовских n -арных подгрупп $\langle P_1, [\] \rangle, \dots, \langle P_m, [\] \rangle$. Причем верно (7).

6. Идемпотенты в n -арной группе

Для всякой n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$ обозначим через $I(A)$ множество всех её идемпотентов. Ясно, что $E(A) \subseteq I(A)$. Если же $\langle A, [\] \rangle$ – абелева, то $E(A) = I(A)$, и, согласно теореме 5.1, $\langle I(A), [\] \rangle$ – n -арная подгруппа абелевой n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$.

6.1. Пример. Так как полиадические группы $\langle C^*, [\] \rangle, \langle C_{p^\infty}, [\] \rangle$ и $\langle Z_k, [\] \rangle$ из примеров 5.4, 5.5 и 5.6 абелевы, то

$$I(C^*) = \left\{ \cos \frac{2k\pi}{n-1} + i \sin \frac{2k\pi}{n-1} \mid k = 0, 1, \dots, n-2 \right\}, I(C_{p^\infty}) = Z_{p^k}, I(Z_k) = Z_m.$$

Приведем примеры, показывающие, что множество всех идемпотентов n -арной группы в общем случае не образует в ней n -арную подгруппу.

6.2. Пример. Пусть $\langle S_3, [\] \rangle$ – тернарная группа, производная от симметрической группы S_3 . Легко проверяется, что $I(S_3) = \{e, \alpha, \beta, \gamma\}$, где e – тождественная подстановка; α, β и γ – нечётные подстановки. Так как $|S_3| = 6, |I(S_3)| = 4$, и 4 не делит 6, то множество $I(S_3)$ не образует в $\langle S_3, [\] \rangle$ тернарную подгруппу.

Пример 6.2 обобщается следующим образом.

6.3. Пример. Пусть $\langle D_n, [\] \rangle$ – тернарная группа, производная от диэдральной группы D_n . Все отражения правильного n -угольника образуют в $\langle D_n, [\] \rangle$ тернарную подгруппу $\langle B_n, [\] \rangle$, все элементы которой, как установлено выше, являются идемпотентами. Следовательно, $B_n \subseteq I(D_n)$.

Предположим, что поворот $\varphi \in C_n$ является идемпотентом в $\langle D_n, [] \rangle$, то есть $[\varphi\varphi\varphi] = \varphi$, откуда $\varphi\varphi\varphi = \varphi$; $\varphi^2 = e$, где e – тождественный поворот. Так как C_n – циклическая группа порядка n , то при нечётном n только единица удовлетворяет последнему равенству, а при чётном n в C_n имеется ещё один поворот $\varphi \neq e$ такой, что $\varphi^2 = e$. Таким образом,

$$I(D_{2k+1}) = \{e\} \cup B_{2k+1}, \quad I(D_{2k}) = \{e, \varphi\} \cup B_{2k}, \quad \text{где } \varphi^2 = e.$$

Так как $|D_n| = 2n$, $|I(D_n)| = n + 1$ при нечётном n , и $|I(D_n)| = n + 2$ при чётном n , то множество всех идемпотентов тернарной группы $\langle D_n, [] \rangle$ при $n > 2$ не образует в ней тернарную подгруппу.

Легко проверяется [36, 37], что n -арная подгруппа единиц $\langle E(A), [] \rangle$ n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, ее центр $\langle Z(A), [] \rangle$ и множество $I(A)$ связаны равенством $E(A) = I(A) \cap Z(A)$.

Прежде чем сформулировать следующую теорему, напомним, что квадратная матрица называется подстановочной над полем F , если в каждой строке и каждом столбце этой матрицы ровно один элемент совпадает с единицей поля F , а все остальные элементы равны нулю этого же поля.

6.4. Теорема [36]. *Справедливы следующие утверждения:*

1) если $\langle GL_n(F), [] \rangle$ – $(n! + 1)$ -арная группа, производная от полной линейной группы $GL_n(F)$, то множество всех подстановочных матриц над F образует в $\langle GL_n(F), [] \rangle$ $(n! + 1)$ -арную подгруппу, лежащую в $I(GL_n(F))$;

2) если $\langle SL_n(F), [] \rangle$ – $(n!/2 + 1)$ -арная группа, производная от специальной линейной группы $SL_n(F)$, то множество всех подстановочных матриц над F с определителем равным единице образует в $\langle SL_n(F), [] \rangle$ $(n!/2 + 1)$ -арную подгруппу, лежащую в $I(SL_n(F))$.

6.5. Предложение [36]. *Если $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, производная от группы A , e – единица группы A , то $I(A) = \{b \in A | b^{n-1} = e\}$.*

6.6. Пример. Пусть $\langle \Gamma, [] \rangle$ – тернарная группа, производная от группы Γ всех движений плоскости. Согласно следствию 6.5, $I(\Gamma) = \{\gamma \in \Gamma | \gamma^2 = e\}$. Поэтому все элементы множества $I(\Gamma)$ исчерпываются всеми отражениями, всеми поворотами на угол π и всеми произведениями отражения на сдвиг, перпендикулярный оси отражения.

6.7. Пример. Пусть $\langle GL_n(q), [] \rangle$ – q -арная группа, где $q > 2$, производная от полной линейной группы $GL_n(q)$ над конечным полем $F(q)$, содержащим q элементов. Так как $|Z(GL_n(q))| = q - 1$, то по теореме 5.2

$$E(GL_n(q)) = Z(GL_n(q)) = \{\alpha E_n | \alpha \in F(q), \alpha \neq 0\},$$

то есть $E(GL_n(q))$ состоит из всех скалярных матриц, содержащихся в $GL_n(q)$.

Покажем, что в $\langle GL_n(q), [] \rangle$ имеются идемпотенты, не являющиеся единицами. Для этого обозначим через \mathbf{D} множество всех диагональных матриц с ненулевыми элементами из $F(q)$ на главной диагонали, то есть

$$\mathbf{D} = \{diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n) | \alpha_i \in F(q), \alpha_i \neq 0\}.$$

Так как

$$(diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n))^{q-1} = diag(\alpha_1^{q-1}, \dots, \alpha_n^{q-1}) = diag(1, \dots, 1) = E_n,$$

то по предложению 6.5, $\mathbf{D} \subseteq I(GL_n(q))$.

Ясно, что $E(GL_n(q)) \subseteq \mathbf{D}$, а при $q > 1$ $E(GL_n(q)) \subset \mathbf{D}$.

Отметим, что в $\langle GL_n(q), [] \rangle$ могут быть идемпотенты, не являющиеся диагональными матрицами. Например, в 4-арной группе $\langle GL_3(4), [] \rangle$ элементы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

являются идемпотентами.

6.8. Пример. Пусть $\langle SL_n(q), [] \rangle$ – m -арная группа, где $m = 1 + (n, q - 1)$, производная от специальной линейной группы $SL_n(q)$ над $F(q)$. Так как $|Z(SL_n(q))| = (n, q - 1) = m - 1$, то по теореме 5.2

$$E(SL_n(q)) = Z(SL_n(q)) = \{\alpha E_n \mid \alpha \in F(q), \alpha^n = 1\}.$$

В частности, если q – нечётное, то

$$E(SL_2(q)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Так как определители матриц из примера 6.7 равны единице поля, то обе они являются идемпотентами в $\langle SL_3(4), [] \rangle$, но не являются в ней единицами. Поэтому в общем случае множества $E(SL_n(q))$ и $I(SL_n(q))$ не совпадают.

Отметим также, что если $q - 1 < n$, то идемпотентами в $\langle SL_n(q), [] \rangle$, отличными от единиц, являются также диагональные матрицы, у которых на главной диагонали $q - 1$ элементов равны $\alpha \in F(q)$, где $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, а остальные элементы на главной диагонали равны единице поля.

Из предложения 6.5 вытекает, что если $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, производная от группы A с тождеством $x^{n-1} = e$, в частности, от конечной группы порядка $n - 1$, то $I(A) = A$.

n -арная группа $\langle A, [] \rangle$, для которой $I(A) = A$, называется *идемпотентной*. Другими словами, идемпотентная n -арная группа – это n -арная группа, в которой все элементы являются идемпотентами.

Идемпотентные n -арные группы могут служить примером того, как далеко иногда могут отстоять друг от друга бинарный прототип и его n -арный аналог. Если при $n = 2$ идемпотентные n -арные группы – это одноэлементные группы, не требующие специального изучения, то при $n > 2$ идемпотентные n -арные группы составляют нетривиальное многообразие, которое в многообразии всех n -арных групп выделяется тождеством

$$\underbrace{[x \dots x]}_n = x.$$

Свойства n -арных групп из этого многообразия подробно изучались в [36 – 38].

В идемпотентной n -арной группе $\langle A, [] \rangle$ n -арная подгруппа единиц и центр совпадают: $E(A) = Z(A)$.

Среди идемпотентных n -арных групп с непустой n -арной подгруппой единиц представляют интерес те из них, для которых $|E(A)| = 1$, то есть содержащие только одну единицу.

6.9. Предложение [36]. n -арная группа $\langle A, [] \rangle$, производная от группы A с тождеством $a^{n-1} = e$ и тривиальным центром, является идемпотентной с единственной единицей.

6.10. Пример. Так как $Z(S_n) = \{e\}$ при $n \geq 3$, то, согласно предложению 6.9, производная $(n! + 1)$ -арная группа $\langle S_n, [] \rangle$ при $n \geq 3$ является идемпотентной с единственной единицей.

6.11. Пример. Так как $Z(A_n) = \{e\}$ при $n \geq 4$, то, согласно предложению 6.9, производная $(n!/2 + 1)$ -арная группа $\langle A_n, [] \rangle$ при $n \geq 4$ является идемпотентной с единственной единицей.

6.12. Пример. Так как $Z(D_n) = \{e\}$ при нечётном n , то, согласно предложению 6.9, производная $(2n + 1)$ -арная группа $\langle D_n, [] \rangle$ при нечётном n является идемпотентной с единственной единицей.

6.13. Пример. Так как $Z(PGL_n(F(q))) = \{e\}$, то, согласно предложению 6.9, производная $(m + 1)$ -арная группа $\langle PGL_n(F(q)), [] \rangle$, где

$$m = |PGL_n(F(q))| = \frac{1}{q-1} \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i),$$

является идемпотентной с единственной единицей.

6.14. Пример. Так как $Z(PSL_n(F(q))) = \{e\}$, то, согласно предложению 6.9, производная $(m + 1)$ -арная группа $\langle PSL_n(F(q)), [] \rangle$, где

$$m = |PSL_n(F(q))| = \frac{1}{(q-1)(n, q-1)} \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i),$$

является идемпотентной с единственной единицей.

Приведём пример бесконечной идемпотентной полиадической группы с единственной единицей.

6.15. Пример. Пусть $B(m, n)$ – бесконечная группа с m порождающими и тождеством $x^n = e$ ($m \geq 1, n \geq 665, n$ – нечётное), построенная С. И. Адяном [39]. По теореме 3.4 [39] центр группы $B(m, n)$ при указанных m и n тривиален. Поэтому согласно предложению 6.9, $(n + 1)$ -арная группа $\langle B(m, n), [] \rangle$, производная от группы $B(m, n)$, при нечётном $n \geq 665, m \geq 1$ является бесконечной идемпотентной с единственной единицей.

В некоторых случаях n -арную группу можно превратить в идемпотентную n -арную группу.

6.16. Теорема [36, 37]. *Если $\langle A, [] \rangle$ – конечная n -арная группа, допускающая автоморфизм порядка $n - 1$, оставляющий неподвижным единственный элемент, то на A можно определить n -арную операцию $[]$ так, что $\langle A, [] \rangle$ – идемпотентная n -арная группа.*

Литература

- [1] Павлов Д. Г. Симметрия и геометрические инварианты // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2006. Vol. 3, № 2. С. 21–32.
- [2] Dörnte W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff // Math. Z. 1928. Bd. 29. S. 1–19.
- [3] Kasner E. An extension of the group concept // Bull. Amer. Mat. Soc. 1904. № 10. P. 290–291.
- [4] Prüfer H. Theorie der abelshen Gruppen. I. Grundeigenschaften // Math. Z. 1924. Bd. 20. S. 165–187.
- [5] Post E. L., Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48, № 2. P. 208–350.

- [6] **Чунихин С.А.** К теории неассоциативных n -групп // Доклады АН СССР. 1945. Т. 48, № 1. С. 7–10.
- [7] **Сушкевич А.К.** Теория обобщенных групп. Харьков; Киев, 1937. 170 с.
- [8] **Курош А.Г.** Общая алгебра: Лекции 1969/70 учебного года. М.: Наука, 1974. 160 с.
- [9] **Bruck R. H.** A survey of binary systems. Berlin-Heldelberg-New York: Springer-Verlad, 1966. 185 p.
- [10] **Бурбаки Н.** Алгебра. Алгебраические структуры, линейная и полилинейная алгебра. М.: Физматгиз, 1962. 516 с.
- [11] **Белоусов В.Д.** n -арные квазигруппы. Кишинев: Штиинца, 1972. 228 с.
- [12] **Артамонов В.А.** Универсальные алгебры //Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. 1976. С. 191–248.
- [13] **Glazek K.** Bibliographi of n -groups (poliadic groups) and same group like n -ary sistems// Proc. of the sympos. n -ary structures. Skopje, 1982. P. 259–289.
- [14] **Русаков С.А.** Алгебраические n -арные системы. Мн.: Навука і тэхніка, 1992. 245 с.
- [15] **Русаков С.А.** Некоторые приложения теории n -арных групп. Мн.: Беларуская навука, 1998. 167 с.
- [16] **Ušan J.** n -Groups in the light of the neutral operations // Matematika Moravica. 2003. Special Vol. 162 p.
- [17] **Гальмак А.М.** Теоремы Поста и Глускина Хоссу. Гомель, 1997. 85 с.
- [18] **Гальмак А.М., Воробьёв Г.Н.** Тернарные группы отражений. Мн.: "Беларуская навука", 1998. 128 с.
- [19] **Гальмак А.М.** Конгруэнции полиадических групп. Мн.: "Беларуская навука", 1999. 182 с.
- [20] **Гальмак А.М.** n -арные группы. Ч.1. Гомель, 2003. 196 с.
- [21] **Гальмак А.М.** Новые определения n -арной группы // Конф. математиков Беларуси. Тез. докл. Гродно, 1992. С. 17.
- [22] **Тютин В.И.** К аксиоматике n -арных групп // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29, № 8. С. 691–693.
- [23] **Гальмак А.М.** Об определении n -арной группы // Междунар. конф. по алгебре. Тез. докл. Новосибирск, 1991. С. 30.
- [24] **Гальмак А.М.** О некоторых новых определениях n -арной группы // Третья междунар. конф. по алгебре. Тез. докл. Красноярск, 1993. С. 33.
- [25] **Гальмак А.М.** О разрешимости уравнений в n -арной полугруппе // Вестник Полоцкого государственного университета, 2006, № 3. С.36–41.
- [26] **Celakoski N.** On some axiom systems for n -groups // Мат. Бил. Союз. друшт. мат. СРМ. 1997. Кн. 1. P. 5–14.
- [27] **Dudek W., Glazek K., Gleichgewicht B.** A note on the axioms of n -groups // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1977. Vol. 29. P. 195–202.
- [28] **Русаков С.А.** К определению n -арной группы // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 965–967.
- [29] **Monk J. D., Sioson F. M.** On the general theory of m -groups // Fund. Math: 1971. № 72. P. 233–244.
- [30] **Гальмак А.М.** Определения n -арной группы // Препринт ГГУ им. Ф. Скорины. 1994. № 16. 43 с.
- [31] **Глускин Л.М.** Позиционные оперативы // Мат. сборник. 1965. Т. 68(110), № 3. С. 444–472.
- [32] **Сохацкий Ф.Н.** Об ассоциативности многоместных операций // Дискретная математика. 1992. № 4. С. 66–84.
- [33] **Сохацкий Ф.Н.** Commutation of operations and its relationship with Menger and Mann superpositions // Discussions Math., General Algebra and Appl. 2004. 24. С. 153–176.
- [34] **Гальмак А.М.** N -арная подгруппа единиц // Препринт ГГУ им. Ф.Скорины. 1998. № 77. 23 с.

- [35] Гальмак А. М. N -арная подгруппа единиц // Весті НАН РБ. 2003. № 2. С. 25–30.
- [36] Гальмак А. М. Идемпотенты в n -арных группах // Препринт ГГУ им. Ф.Скорины. 1998. № 81. 28 с.
- [37] Гальмак А. М. Идемпотентные n -арные группы // Весті НАН РБ. 2000. № 2. С. 42–45.
- [38] Гальмак А. М. Силовское строение идемпотентной n -арной группы // Украинский математический журнал. 2001. Т. 53, № 11. С 1488–1494.
- [39] Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975. 335 с.

N -ary groups

A. M. Gal'mak

University of Mogilev, Belarus

mti@mogilev.by

The researchers which study the Geometry of Space-Time have frequently encountered the need of constructing and studying n -ary, and in particular ternary operations (see, e.g., [1]). In this case, the comprehension of the n -ary operations, which are generalizations of the binary group operations, is essential. The n -ary operations, which are investigated in the theory of n -ary groups, are described in the present paper.

Key-words: n -ary operations, n -groups.

MSC: 17A42, 17A40.

КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ФУНКЦИИ ОКТОНИОННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ НЕКОММУТАТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА ЛАПЛАСА И МЕЛЛИНА

С. В. Людковский

Московский Государственный Технический Университет МИРЭА

sludkowski@mail.ru

Данная статья посвящена голоморфным и мероморфным функциям кватернионных и октонионных переменных. Исследованы различные свойства подобных функций такие как их вычеты и принцип аргумента. Доказано, что семейство всех квазиконформных диффеоморфизмов области является топологической группой относительно композиции отображений. В частности, изучены случаи, когда они являются конечномерными группами Ли над \mathbf{R} . Исследованы соотношения между квазиконформностью функций и интегральными преобразованиями функций над кватернионами и октонионами. Изучены и использованы некоммутативные аналоги преобразования Меллина. Также даются примеры таких функций. В конце обсуждаются приложения к проблемам комплексного анализа.

Ключевые слова: квазиконформные диффеоморфизмы, кватернионы, октонионы, голоморфные функции, мероморфные функции, интегральные преобразования.

1 Введение

Польза кватернионов и октонионов в квантовой механике и квантовой теории поля обсуждается в ряде статей и книг, например, [1, 7, 9, 11, 12, 16, 28]. Некоммутативный анализ становится очень важной частью математики и теоретической физики [2, 4–6, 14, 26], но он остается слабо развитым по сравнению с классическим анализом, особенно его несуперкоммутативная часть. Для абстрактных алгебр широко используются дифференцирование и часто трактовка функций на алгебрах связана с их представлениями словами и фразами [3, 27].

В предшествующих работах автора были исследованы голоморфные (иными словами супердифференцируемые) функции переменных Кэли-Диксона [17–19], так что они обобщают теорию комплексно голоморфных функций. В частном случае комплексных функций понятие супердифференцируемости сводится к обычной комплексной дифференцируемости, но над алгебрами Кэли-Диксона это конечно дает специфические особенности и в некотором смысле их семейство относительно велико. В этих статьях супердифференцируемость была определена как дифференцирование алгебры, и принимая в расчет специфические особенности алгебры Кэли-Диксона. Некоммутативность алгебры Кэли-Диксона \mathcal{A}_r с $2 \leq r$ приводит к тому факту, что теория функций над ними является не только обычной теорией функций, но также она наследует алгебраическую структуру и естественно связана с представлениями функций с помощью слов и фраз переменных Кэли-Диксона.

Необходимо отметить, что существуют естественные вложения θ_k^r алгебры \mathcal{A}_r в \mathcal{A}_k для любого $1 \leq r < k \in \mathbf{N}$ ассоциированные с последовательными процедурами удвоения, хотя имеются другие алгебраические вложения. Это хорошая особенность, что алгебра \mathcal{A}_∞ полученная пополнением строго индуктивного предела $str - ind\{\mathcal{A}_r, \theta_k^r, \mathbf{N}\}$ относительно l_2 нормы не имеет никаких внутренних анти-автоморфизмов $z \mapsto z^*$, так

как он является внешним, где $zz^* = |z|^2$. Естественно рассматривать голоморфные функции \mathcal{A}_r переменных с $2 \leq r < \infty$ как ограничения функций \mathcal{A}_∞ переменных на соответствующие области. Хотя гиперкомплексная алгебра Кэли-Диксона \mathcal{A}_∞ некоммутативна и неассоциативна, но относительно отсутствия внутреннего анти-автоморфизма $z \mapsto z^*$ она напоминает этим свойством поле комплексных чисел \mathbf{C} .

Супер-дифференцируемые функции локально аналитичны по их переменным Кэли-Диксона, но ряды для них более сложны по сравнению с комплексным случаем благодаря некоммутативности для $r \geq 2$ или неассоциативности при $r \geq 3$ алгебры \mathcal{A}_r . Также был изучен некоммутативный аналог преобразования Лапласа [25]. Потом псевдоконформные отображения над кватернионами и октонионами имеющие свойства более тесные к свойствам комплексно голоморфных функций были определены и исследованы в [22, 23]. В общем псевдоконформные функции могут быть неизометрическими отображениями над некоммутативным телом кватернионов \mathbf{H} или над алгеброй октонионов \mathbf{O} и они аналогичны комплексным конформным функциям, но уже в некоммутативной ситуации (смотри определение 2.1).

Данная статья продолжает эти исследования используя предыдущие результаты. Здесь вводятся естественные продолжения комплексно голоморфных функций над кватернионами и октонионами, так что определено понятие квазиконформных отображений. Их семейство образует отличный класс от семейства псевдоконформных отображений. Коротко можно сказать, что квазиконформные отображения на областях U в \mathcal{A}_b образованы из псевдоконформных функций на областях W в подалгебре Кэли-Диксона \mathcal{A}_r , $1 \leq r < b \leq 3$, с помощью операторов, которым соответствует вращение действительной тени \mathbf{R}^{2^b} .

Второй параграф посвящен новым классам квазиконформных и квазимероморфных отображений, где они определяются и исследуются. Изучаются их свойства такие, как вычеты и принцип аргумента. Более того, доказано, что семейство всех квазиконформных диффеоморфизмов области образует топологическую группу относительно композиции отображений. Далее изучены случаи, когда она является конечномерной группой Ли над \mathbf{R} .

В третьем параграфе установлены соотношения между квазиконформностью функций и интегральными преобразованиями функций над кватернионами и октонионами. Для этого, в частности, исследуются и используются некоммутативные аналоги преобразований Меллина. С их помощью даются примеры таких функций. Применимость анализа над кватернионами и октонионами демонстрируется для проблем комплексного анализа.

Многие результаты данной статьи получены впервые.

2 Квазиконформные функции

1. Определения и обозначения. Рассмотрим алгебру Кэли-Диксона \mathcal{A}_r размерности 2^r над \mathbf{R} , где в частности $\mathbf{C} = \mathcal{A}_1$ – это поле комплексных чисел, $\mathbf{H} = \mathcal{A}_2$ – это тело кватернионов, $\mathbf{O} = \mathcal{A}_3$ – это алгебра октонионов. Пусть U является открытым подмножеством в \mathcal{A}_r , $2 \leq r \leq 3$. Функцию f на U мы назовем псевдоконформной в точке ξ в U , если f является \mathcal{A}_r голоморфной (супер-дифференцируемой) в окрестности точки ξ и удовлетворяет условиям (P1 – 3):

$$(P1) \quad \partial f(z)/\partial \bar{z} = 0 \text{ для } z = \xi;$$

$$(P2) \quad \operatorname{Re}\{[(\partial f(z)/\partial z).h_1][(\partial f(z)/\partial z).h_2]^*\} |h_1| |h_2|$$

$$= |(\partial f(z)/\partial z).h_1| |(\partial f(z)/\partial z).h_2| \operatorname{Re}(h_1 \tilde{h}_2) \text{ для } z = \xi \text{ для любых } h_1, h_2 \in \mathcal{A}_r,$$

(P3) $(\partial f(z)/\partial z)|_{z=\xi} \cdot h \neq 0$ для всякого $h \neq 0$ из \mathcal{A}_r , где $\tilde{z} = z^*$ обозначает сопряженное число для $z \in \mathcal{A}_r$, так что $z\tilde{z} = |z|^2$, $Re(z) := (z + \tilde{z})/2$; для f используется или кратчайшая фраза совместимая с этими условиями, или в ниже лежащем действительном пространстве (тени) \mathbf{R}^4 или \mathbf{R}^8 исключены несобственные вращения $[f']$ ассоциированные с f' . То есть, $[f'] \in SO(2^b, \mathbf{R})$, где $b = 2$ или $b = 3$, $SO(n, \mathbf{R})$ обозначает специальную ортогональную группу для \mathbf{R}^n , $[f']$ обозначает оператор в действительной тени соответствующий супер-производной f' над \mathcal{A}_r . Часто кратко пишут $f(z, \tilde{z})$ как $f(z)$ благодаря биективности между $z \in \mathcal{A}_r$ и \tilde{z} .

Если f псевдоконформна в каждой точке $\xi \in U$, то она называется псевдоконформной в области U .

Для отображений комплексных чисел, $r = 1$, каждая голоморфная функция, удовлетворяющая условию (P3) удовлетворяет этому определению, поэтому мы можем включить также этот случай.

Мы скажем, что функция ϕ в точке ζ или на V является p -псевдоконформной, если $\phi(z) = f(z^p)$ и f является псевдоконформной в ξ или на U , где $\zeta^p = \xi$ или $U = \{z^p : z \in V\}$, $p \in \mathbf{N}$. Функция нескольких переменных ${}_1z, \dots, {}_nz$ называется псевдоконформной или (p_1, \dots, p_n) -псевдоконформной, если она псевдоконформной или p_j -псевдоконформна по ${}_jz$ для любых $j = 1, \dots, n$.

Предположим, что U открыто в \mathcal{A}_b , а $W = U \cap \mathcal{A}_r \neq \emptyset$ открыто в \mathcal{A}_r и непустое, где $1 \leq r < b \leq 3$. Рассмотрим естественное вложение \mathcal{A}_r в \mathcal{A}_b ассоциированное со стандартной процедурой удвоения.

Пусть f – это голоморфная функция на U со значениями в \mathcal{A}_b удовлетворяющая следующим условиям:

(Q1) функция $g(z) := f(y_0 + z)$ имеет p -псевдоконформное ограничение $g|_{W-y_0}$ на $W - y_0 := \{z : z = x - y_0, x \in W\}$ для некоторой отмеченной точки $y_0 \in W$ и $g(W - y_0) \subset \mathcal{A}_r$,

(Q2) существует семейство автоморфизмов $\hat{R}_{z,x} = \hat{R}_{z,x}^f : \mathcal{A}_b \rightarrow \mathcal{A}_b$ для любой $z \in U - y_0$ и $x \in W - y_0$ с $Re(z) = Re(x)$, так что каждому $\hat{R}_{z,x}$ соответствует собственное вращение $T = [\hat{R}_{z,x}] \in SO(2^b, \mathbf{R})$ действительной тени \mathbf{R}^{2^b} , так что для любого $z \in U - y_0$ существует $x \in W - y_0$, для которой $z = \hat{R}_{z,x}x$, где $SO(n, \mathbf{R})$ обозначает специальную ортогональную группу Евклидова пространства \mathbf{R}^n ,

(Q3) $\hat{R}_{z,x}|_{\mathbf{R}} = id|_{\mathbf{R}}$ для любого $z \in U - y_0$ и каждого $x \in W - y_0$, то есть, $T = [\hat{R}_{z,x}] \in SO_{\mathbf{R}}(2^b, \mathbf{R})$, где $SO_{\mathbf{R}}(n, \mathbf{R}) := \{T : T \in SO(n, \mathbf{R}); T|_{\mathbf{R}} = I\}$,

(Q4) $\hat{R}_{z,x} = id$ для любого $z \in W - y_0$ и каждого $x \in W - y_0$,

(Q5) $\hat{R}_{z,x}$ зависит \mathcal{A}_b голоморфно от $z \in U - y_0$ и \mathcal{A}_r аналитично от $x \in W - y_0$ в подходящем (z, x) -представлении,

(Q6) $g(z) = \hat{R}_{z,x}g(x)$ для любого $x \in W - y_0$ и каждого $z \in U - y_0$, так что $Re(z) = Re(x)$ и $z = \hat{R}_{z,x}x$,

(Q7) $g'(\hat{R}_{z,y}y) \cdot (\hat{R}_{z,y}h) := g'(\eta) \cdot w|_{(\eta=\hat{R}_{z,y}y, w=\hat{R}_{z,y}h)} = \hat{R}_{z,y}[g'(y) \cdot h]$ для любого $z \in U - y_0$ и $y \in W - y_0$, так что $Re(z) = Re(y)$ и $z = \hat{R}_{z,y}y$ и каждого $h \in \mathcal{A}_r$, где $g'(z)$ – это оператор (супер)дифференцирования над \mathcal{A}_b .

Мы назовем такую функцию (p, r, b) -квазиконформной. Если функция f является \mathcal{A}_b голоморфной на U и удовлетворяет Условиям (Q1 – Q6) на U и f является (p, r, b) -квазиконформной на $U \setminus \mathcal{S}_A$, где $\mathcal{S}_A := \bigcup \{z + y_0 : z = \hat{R}_{z,x}x; x \in A - y_0, z \in U - y_0, Re(z) = Re(x)\}$, причем $A := A_f := \{y + y_0 : y \in W - y_0, g'(y) = 0\}$ является дискретным подмножеством в W состоящим из изолированных точек, так что для любого $y_1 \in A$ существует $\delta > 0$, для которого $\inf_{y \in A, y \neq y_1} |y - y_1| \geq \delta$, тогда мы назовем f (p, r, b) -

квазирегулярной функцией на U . В частном последнем случае $U = \mathcal{A}_b$ мы назовем f (p, r, b) -квазицелой функцией.

Если f является (p, r, b) -квазирегулярной функцией на $U \setminus \mathcal{S}_C$, где C – это дискретное подмножество изолированных точек в W , в которых f имеет полюсы (конечных порядков), тогда мы назовем f (p, r, b) -квазимероморфной функцией на U .

Для $p = 1$ для сокращения обозначений мы будем писать, что f является (r, b) -квазиконформной или (r, b) -квазирегулярной на U или (r, b) -квазицелой соответственно. Функция нескольких переменных z_1, \dots, z_n называется $(p_1, \dots, p_n; r, b)$ -квазиконформной или $(p_1, \dots, p_n; r, b)$ -квазирегулярной на U открытом в \mathcal{A}_b^n или $(p_1, \dots, p_n; r, b)$ -квазицелой, если она (p_j, r, b) -квазиконформна или (p_j, r, b) -квазирегулярна или (p_j, r, b) -квазицелая по z_j для любого $j = 1, \dots, n$. Если M канонически замкнуто, M является замыканием U , тогда f является квазиконформной или квазирегулярной на M , если она такова на U и $f(z)|_{\partial M}$ и $f'(z)|_{\partial M}$ являются непрерывными пределами f и f' в U , где ∂M является границей M , так что $M \cap \mathcal{A}_r^n$ – это псевдоконформное многообразие.

2. Предложение. *Существует семейство автоморфизмов $\hat{R}_{z,x}$ алгебры \mathcal{A}_b , удовлетворяющих условиям 1(Q2 – Q5) для $U = \mathcal{A}_b$ и $W = \mathcal{A}_r$ с $y_0 = 0$, где $1 \leq r < b \leq 3$. Более того для $r = 1$ и $2 \leq b \leq 3$ это семейство можно выбрать удовлетворяющим дополнительным условиям:*

- (i) $R_{vz,wy} = R_{z,y}$ для любого v и $w \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, так что $vw > 0$ и
- (ii) $R_{z,y} = R_{a,x}$ для любого $Im(z) = Im(a)$ и $Im(y) = Im(x)$, где $Im(z) := z - Re(z)$.

Доказательство. Каждое $z \in \mathcal{A}_b$ имеет полярное разложение $z = |z| \exp(Arg(z))$, где $Arg(z) \in \mathcal{I}_b := \{y \in \mathcal{A}_b : Re(y) = 0\}$ (смотри §3 в [17, 18]). Фиксируем ветвь $Arg(z)$, выбирая одну определенную ветвь Ln над \mathcal{A}_b , так что $Arg(z) = Ln(z/|z|)$ и $Arg(z) = 0$ для любого действительного $z \geq 0$. Тогда

(A) $Arg(z) = M\phi = M(z)\phi(z)$, где $M \in \mathcal{I}_b$, $|M| = 1$, $\phi \in \mathbf{R}$, $|\phi| = |Arg(z)|$, $M = M(z)$, $\phi = \phi(z)$.

Возьмем без ограничения общности $y_0 = 0$. Для пары $(\mathbf{C}, \mathcal{A}_b)$ с $2 \leq b \leq 3$, использование полярного разложения $z - Re(z) = |z - Re(z)| \exp(M\psi)$ для $z \in \mathcal{A}_b$, где $Re(M) = 0$, $M = M(z - Re(z)) \in \mathcal{A}_b$, $|M| = 1$, $\psi = \psi(z) = \phi(z - Re(z)) \in \mathbf{R}$, дает семейство автоморфизмов $\hat{R}_{z,x}$ для любого $z \in \mathcal{A}_b$ и любого $x \in \mathbf{C}$ удовлетворяющего равенству

(1) $\hat{R}_{z,x}(i_1) = R_{z,x}(i_1) = M$ с $M = M(z - x - Re(z - x))$ и $\phi = \phi(z - x - Re(z - x))$ даваемого Уравнением (A) и $\hat{R}_{z,x}(u) = R_{z,x}(u) = u$ для любого $u \in \mathbf{R}$ и $R_{z,y}y = y$ для любого $z \in \mathbf{C}$ и каждого $y \in \mathbf{C}$, следовательно,

$$\hat{R}_{z,x}(x) = |x| \exp(M\phi) \text{ для любого } x = |x| \exp(i\phi) \in \mathbf{C},$$

где $\phi = \phi(x) \in \mathbf{R}$, $z \in \mathcal{A}_b \setminus \mathbf{C}$. Это основано на том факте, что алгебра изоморфная \mathcal{A}_b может быть построена последовательной процедурой удвоения начиная с M также вместо $i = i_1$, выбирая генератор M_2 вместо i_2 ортогональный к M и беря $\hat{R}_{z,x}(i_2) = M_2$, $\hat{R}_{z,x}(i_3) = MM_2$, где M_2 голоморфно зависит от z и x (смотри также предложение 3.2 и следствие 3.5 [18] и [12]), где $\{i_0, i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$ – это генераторы \mathcal{A}_r , так что $i_0 = 1$, $i_j^2 = -1$ и $i_j i_k = -i_k i_j$ для любого $1 \leq j \neq k \leq 2^r - 1$. Тогда для $b = 3$ возьмем генератор удвоения $L \in \mathcal{I}_b$ ортогональный M , M_2 и MM_2 , так что L голоморфно зависит от z и x , и положим $R_{z,x}(i_4) = L$. Запишем $z \in \mathcal{A}_b$ в виде

$$(2) z = \sum_{s \in \mathbf{b}} w_s s,$$

где $w_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b} := \{1, i_1, \dots, i_{2^b-1}\}$, \mathbf{b} – это базис генераторов в \mathcal{A}_b , положим $\hat{\mathbf{b}} := \mathbf{b} \setminus \{1\}$, следовательно,

$$(3) z^* = (2^b - 2)^{-1} \{-z + \sum_{s \in \hat{\mathbf{b}}} s(zs^*)\}. \text{ Поэтому,}$$

$$(4) |z| = (zz^*)^{1/2} = [z(2^b - 2)^{-1}\{-z + \sum_{s \in \hat{b}} s(zs^*)\}]^{1/2} \text{ и}$$

(5) $Re(z) = (z + z^*)/2 = \{(1 - (2^b - 2)^{-1})z + (2^b - 2)^{-1} \sum_{s \in \hat{b}} s(zs^*)\}$ являются голоморфными функциями на $\mathcal{A}_b \setminus \{0\}$ в этих z -представлениях (4, 5). Тогда

$$(6) M(z)\phi(z) = Ln(z/|z|) \text{ для } z \neq 0 \text{ и для } \phi(z) > 0 \text{ с } z \in \mathcal{A}_b \setminus \mathbf{R} \text{ мы имеем}$$

$$(7) M(z) = Ln(z/|z|)/|Ln(z/|z|)|$$

предполагается записанной в z -представлении с помощью Формулы (4), полагая $\phi(z) = 0$ для любого действительного неотрицательного z . В силу условия (Q2) достаточно рассматривать $\phi(z) > 0$ в полупространстве $\mathcal{A}_b \setminus \mathbf{R}$. Логарифмическая функция $Ln(z)$ голоморфна на $\mathcal{A}_b \setminus \{0\}$ с некоммутативным неассоциативным аналогом римановой поверхности описанным в разделе 3.7 в [17, 18]. В силу Формул (4, 5) автоморфизм $\hat{R}_{z,x}$ данный уравнением (1) зависящий от параметров (z, x) становится голоморфным по $z \in \mathcal{A}_b$ и аналитическим (голоморфным) по $x \in \mathbf{C}$ в (z, x) -представлении, где \mathbf{C} естественно вложено в \mathcal{A}_b в соответствии с каноническим базисом генераторов.

Для пары $(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_{q+1})$, где $1 \leq q \in \mathbf{N}$, используя итерированную экспоненту, получим

$$(8) \exp({}_3M\phi(\xi)) = \exp\{{}_2M\phi_1(\xi) \exp(-N\phi_2(\xi) \exp(-{}_2M\phi_3(\xi)))\},$$

где $\xi = |\xi| \exp({}_3M\phi(\xi))$, ${}_3M = M(\xi) \in \mathcal{I}_{q+1}$, $\phi_1(\xi), \phi_2(\xi), \phi_3(\xi) \in \mathbf{R}$, $z = z_1 + i_{2^q}z_2$, $z \in \mathcal{A}_{q+1}$, $z_1, z_2 \in \mathcal{A}_q$, $|{}_3M| = |{}_2M| = |N| = 1$, $\xi = z - x - Re(z - x)$, $N = N(\xi) \perp {}_2M = {}_2M(\xi)$, то есть, $Re({}_2MN) = 0$; N и ${}_2M \in \mathcal{I}_{q+1}$, $l = i_{2^q}$. Рассмотрим (8) для $q = 1$ и потом для $q = 2$. Это дает семейство автоморфизмов $\hat{R}_{z,x}$ для любого $z \in \mathbf{O} = \mathcal{A}_3$ и каждого $x \in \mathbf{H} = \mathcal{A}_2$, так что

$$(9) \hat{R}_{z,x}(u) = R_{z,x}(u) = u \text{ для любого } u \in \mathbf{R}, \hat{R}_{z,x}(i_1) = R_{z,x}(i_1) = {}_2M \text{ и } \hat{R}_{z,x}(i_2) = R_{z,x}(i_2) = N \text{ и } \hat{R}_{z,x}(i_3) = R_{z,x}(i_3) = {}_2MN, R_{z,y}y = y \text{ для любого } y \in \mathbf{H} \text{ и каждого } z \in \mathbf{H}.$$

Для этого воспользуемся тем, что алгебра изоморфная с \mathcal{A}_3 может быть построена, стартуя с M, N, MN вместо i_1, i_2, i_3 и используя процедуру удвоения и выбирая $L \perp \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}M \oplus \mathbf{R}N \oplus \mathbf{R}MN$, $|L| = 1$ (смотри также замечание 2.4 [18] и [12]).

Поскольку $e^M = \cos |M| + M(\sin |M|)/|M|$ для любого $M \in \mathcal{I}_b \setminus \{0\}$, $e^0 = 1$, тогда уравнение (8) дает

${}_3M\phi(\xi) = {}_2M\phi_1 \cos \phi_2 + N\phi_1 \sin \phi_2 \sin \phi_3 + N {}_2M\phi_1 \sin \phi_2 \cos \phi_3$, следовательно, можно взять $\phi_1 = \phi(\xi)$. Тогда

$$(10) w_s = (-zi_s + i_s(2^b - 2)^{-1}\{-z + \sum_{k=1}^{2^b-1} i_k(zi_k^*)\})/2 \text{ для любого } s = 1, \dots, 2^b - 1.$$

С начальными условиями ${}_2M(0) = i_1$ и $N(0) = i_3$ это дает семейство решений зависящее \mathcal{A}_3 -голоморфно от z и \mathcal{A}_2 -голоморфно от x с помощью уравнений (3 – 10). Например, возьмем ${}_2M \in i_1\mathbf{R} \oplus i_5\mathbf{R} \oplus i_7\mathbf{R}$, $N \in i_3\mathbf{R} \oplus i_4\mathbf{R} \oplus i_6\mathbf{R}$. Тогда выберем генератор процедуры удвоения $L \in \mathcal{I}_b$ ортогональный к ${}_2M$ и N , и ${}_2MN$, так что L зависит голоморфно от z и x . В силу формул (2 – 7) автоморфизм $\hat{R}_{z,x}$ голоморфен по $z \in \mathbf{O}$ и по $x \in \mathbf{H}$ в (z, x) -представлении.

Это выполняется для любой (r, b) пары, используя последовательность вложений $\mathcal{A}_r \hookrightarrow \mathcal{A}_{r+1} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathcal{A}_b$ и рассматривая с помощью (2 – 7) последовательные голоморфные решения (8) для $\mathcal{A}_q \hookrightarrow \mathcal{A}_{q+1}$ в соответствующем (z, x) -представлении для любого $q = r, \dots, b - 1$. Если $R_{z,x}(i_{2^q})$ выделены для $q = 0, 1, \dots, b - 1$, тогда их умножение в \mathcal{A}_b дает $R_{z,x}(i_j)$ для любого $1 \leq j \leq 2^b - 1$ (смотри также [12]). Это очевидно, так как $\mathcal{A}_b = \{z \in \mathcal{A}_b : \exists x \in \mathcal{A}_{b-1} \text{ и } \exists T \in SO_{\mathbf{R}}(2^b, \mathbf{R}), \text{ так что } [z] = T[x]\}$ и $SO_{\mathbf{R}}(2^b, \mathbf{R})$ – это вещественно аналитическая группа Ли изоморфная с $SO(2^b - 1, \mathbf{R})$, где $[x] \in \mathbf{R}^{2^b}$, $[x] = (x_0, x_1, \dots, x_{2^b-1}, 0, 0, \dots)$, $x = x_0i_0 + x_1i_1 + \dots + x_{2^b-1}i_{2^b-1}$, $[z] = (z_0, \dots, z_{2^b-1})$, $x_j, z_j \in \mathbf{R}$ для любого j , $2 \leq b \in \mathbf{N}$.

Из построения $R_{z,x}$ следует, что для (\mathbf{C}, \mathbf{H}) и (\mathbf{C}, \mathbf{O}) пар, то есть, $r = 1$ и $b = 2, 3$, существует $R_{z,x}$ удовлетворяющий условиям:

(11) $R_{vz,wy} = R_{z,y}$ для любых v и $w \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, так что $vw > 0$ и

(12) $R_{z,y} = R_{a,x}$ для любых $Im(z) = Im(a)$ и $Im(y) = Im(x)$, где $Im(z) := z - Re(z)$.

Поэтому, если $R_{z,y}y = z$, тогда $R_{z,y}\tilde{y} = \tilde{z}$.

2.1. Определение. Для любого $p \in \mathbf{H} = \mathcal{A}_2$ пусть

(1) $E_2(p) := E(p) := p_0 + p_1i_1 \exp(-p_2i_3 \exp(-p_3i_1))$, тогда как для любого $p \in \mathbf{O} = \mathcal{A}_3$ положим

(2) $E_6(p) := E(p) = p_0 + p_1i_1 \exp(-p_2i_3 \exp(-p_3i_1 \exp(-p_4i_7 \exp(p_5i_1 \exp(-p_6i_3 \exp(-p_7i_1))...))$,

где $p = p_0i_0 + p_1i_1 + \dots + p_{2^b-1}i_{2^b-1}$, $p \in \mathcal{A}_b$, $p_0, \dots, p_{2^b-1} \in \mathbf{R}$, $2 \leq b \leq 3$, $i_1i_2 = i_3$, $i_1i_4 = i_5$, $i_2i_4 = i_6$, $i_3i_4 = i_7$, $i_1i_6 = -i_7$, $i_1i_7 = i_6$, $i_2i_5 = i_7$, $i_2i_7 = -i_5$, $i_3i_5 = -i_6$, $i_3i_6 = i_5$, $i_5i_6 = -i_3$, $i_5i_7 = i_2$, $i_6i_7 = -i_1$, $i_ki_l = -i_l i_k$ для любого $1 \leq k < l$, $i_k^2 = -1$ для любого $1 \leq k$, $i_0 = 1$, $z(zu) = (z^2)u$ и $(yz)z = y(z^2)$ для любого $z, u \in \mathcal{A}_3$; i_0, \dots, i_{2^b-1} – это стандартные генераторы алгебры \mathcal{A}_b , \mathbf{R} – это центр \mathcal{A}_b . Предполагается, что $E_2(p)$ и $E_6(p)$ записаны в p -представлении над \mathcal{A}_2 и \mathcal{A}_3 соответственно с помощью формул 2.(2–5).

Если f^s является \mathcal{A}_b -голоморфной функцией в области V и $V = E^{-1}(U)$, где U – это область в \mathcal{A}_b , $f = f^s \circ E^{-1}$ является $(p, 1, b)$ -квазиконформной или квазирегулярной (или квазицелой), или квазимероморфной на U , тогда мы назовем f^s $(p, 1, b)$ -квазиконформной или квазирегулярной (или квазицелой для $V = \mathcal{A}_b$), или квазимероморфной функцией в сферических \mathcal{A}_b -координатах на V соответственно.

2.2. Замечание. Далее с точностью до \mathcal{A}_b -псевдоконформного диффеоморфизма ξ области U будет предполагаться такая конструкция семейства $\hat{R}_{z,x}$ в доказательстве предложения 2 при $1 \leq r < b \leq 3$, $R_{z,x} \mapsto \hat{R}_{\xi(z),\xi(x)}$, где $\xi(U) = U$, $\xi(W) = W$, $\xi(\mathbf{R} \cap W) = \mathbf{R} \cap W$, $R_{z,x}$ – это семейство даваемое уравнениями (1–10).

Каждая \mathcal{A}_r -псевдоконформная (в частности, комплексно голоморфная) функция с действительными коэффициентами разложения в степенной ряд сходящийся по $x \in W - y_0$ очевидно имеет (r, b) -квазиконформное продолжение благодаря условию (Q3).

Пусть функция g является \mathcal{A}_r голоморфной и, следовательно, локально аналитической. Она локально имеет разложение в ряд ограничения $g|_{W-y_0}$ с коэффициентами из \mathcal{A}_r и по переменной $x \in W - y_0$, так что этот ряд сходится в открытом шаре $B(\mathcal{A}_r, \xi, R^-) := \{x \in \mathcal{A}_r : |x - \xi| < R\}$ для любого $\xi \in W - y_0$, где $0 < R = R(\xi) \leq \infty$. Тогда оператор $\hat{R}_{z,x}$ действует на $g(x)$ посредством локального разложения в ряд ограничения $g|_{W-y_0}$ с коэффициентами из \mathcal{A}_r и с переменной $x \in W - y_0$, так как $\hat{R}_{z,x}$ – это автоморфизм алгебры Кэли-Диксона \mathcal{A}_b . Поэтому, g имеет \mathcal{A}_b продолжения по переменной $z \in B(\mathcal{A}_b, \xi, R^-)$, так что $U = \bigcup_{\xi \in W-y_0} B(\mathcal{A}_b, \xi, R^-)$. Хотя это продолжение удовлетворяет условиям (Q1–Q6), но оно не обязано удовлетворять (Q7) в общем случае.

Формулы 2.1(1, 2) дают канонические сферические \mathcal{A}_b -координаты, хотя может быть сделан другой выбор базисных генераторов или другой порядок в итерированной экспоненте. Далее функции E_2 и E_6 даются относительно канонических базисов генераторов, если не предполагается что-либо иное.

2.3. Предложение. Для пары $(\mathbf{C}, \mathcal{A}_b)$, $2 \leq b \leq 3$, существует семейство

$R_{E(t(p-y_0)), E(t(y-y_0))}$ автоморфизмов \mathcal{A}_b (смотри предложение 2) независимо от $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$:

(1) $R_{E(t(p-y_0)), E(t(y-y_0))} = R_{E(p-y_0), E(y-y_0)}$

для любого $p \in \mathcal{A}_b$, every $y \in \mathbf{C}$ и всякого действительного ненулевого $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, где $y_0 \in \mathbf{C}$ – это отмеченная точка, $E = E_2$ для $b = 2$, и $E = E_6$ для $b = 3$.

Доказательство. Поскольку $z \mapsto z - y_0$ – это аффинный псевдоконформный диффеоморфизм алгебры \mathcal{A}_b на \mathcal{A}_b , тогда возьмем без ограничения общности $y_0 = 0$

в предложении 2. Мы имеем $E(\mathcal{A}_b) = \mathcal{A}_b$, так как всякое $z \in \mathcal{A}_b$ имеет полярное разложение. Тогда существует $R_{z,x}$ удовлетворяющее условию (1) этого предложения благодаря дополнительным условиям 2(1, 2), так как $E(y) = y$ для любого $y \in \mathbf{C}$, тогда как $\exp(p_0 + p_S S) = \exp(p_0)(\cos(p_S) + S \sin(p_S))$ для любого $p \in \mathcal{A}_b$ и $\text{sign}(\sin(p_S t) \sin(p_y t)) = \text{sign}(p_S p_y)$ для любого $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, где $p_0 = \text{Re}(p - y_0)$, $p_S S = \text{Im}(p - y_0) := p - y_0 - \text{Re}(p - y_0)$, $p_0, p_S \in \mathbf{R}$, $S \in \mathcal{I}_b$, $|S| = 1$, $\text{sign}(t) = 1$ при $t > 0$, $\text{sign}(t) = -1$ при $t < 0$ и $\text{sign}(0) = 0$. В самом деле, группа $SO_{\mathbf{R}}(2^b, \mathbf{R})$ изоморфна с $SO(2^b - 1, \mathbf{R})$ и $E(t(p - y_0)) \in \mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ для любого $t \in \mathbf{R}$. Поэтому,

$$R_{E(t(p-y_0)), E(t(y-y_0))} = R_{E(p-y_0), E(y-y_0)}$$

для любого $p \in \mathcal{A}_b$, $y \in \mathbf{C}$ и всякого действительного ненулевого $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, где $y_0 \in \mathbf{C}$ – это отмеченная точка.

3. Теорема. *Предположим, что $U \subset \mathcal{A}_r^n$ – это открытое подмножество, также $F = ({}_1f, \dots, {}_mf) : U \rightarrow \mathcal{A}_r^m$ является голоморфным отображением, где либо $2 \leq r \in \mathbf{N}$, либо $r = \Lambda$, $\text{card}(\Lambda) \geq \aleph_0$, $1 \leq m \leq n \in \mathbf{N}$. Если $z_0 \in U$, $F(z_0) = 0$ и оператор $(\partial_{kf}/\partial_{jz})_{1 \leq j, k \leq m}$ обратим в z_0 , где $z = ({}_1z, \dots, {}_nz)$, $jz \in \mathcal{A}_r$ для любого $j = 1, \dots, n$, тогда существует открытая окрестность W точки x_0 в \mathcal{A}_r^m и окрестность V точки $y_0 \in \mathcal{A}_r^{n-m}$ с $W \times V \subset U$ и голоморфное отображение $G = ({}_1g, \dots, {}_mg) : V \rightarrow \mathcal{A}_r^m$, так что $W \cap \{z \in U : F(z) = 0\} = \{z = (G(y), y) : y \in V\}$ и $g(x_0) = y_0$, где $z_0 = (x_0, y_0)$.*

Доказательство. Возьмем отображение $H = ({}_1f, \dots, \dots, {}_mf, {}_{m+1}z, \dots, {}_nz) : U \rightarrow \mathcal{A}_r^n$. Мы имеем, что оператор $L(z) := (\partial_{kh}/\partial_{jz})_{1 \leq j, k \leq n}$ обратим в z_0 , следовательно, он обратим в окрестности U_0 точки z_0 , так как $L(z)$ супердифференцируем, где $({}_1h, \dots, {}_nh) = H$. Поэтому, $L^{-1}(z)$ является супердифференцируемым в U_0 , так как $L^{-1}(z)L(z) = L(z)L^{-1}(z) = I$ для любого $z \in U_0$, где I является единичным оператором. Тогда операторы $A(z) := (\partial_{kf}/\partial_{jz})_{1 \leq j, k \leq m}$ и $A^{-1}(z)$ локально аналитичны в окрестности точки z_0 . Рассмотрим отображение $q_y(x) := x - A^{-1}(z_0)F(x, y)$ в окрестность точки z_0 , где $(x, y) = z$, $x = ({}_1z, \dots, {}_mz)$, $y = ({}_{m+1}z, \dots, {}_nz)$.

Без ограничения общности используя сдвиги, мы можем рассмотреть $z_0 = 0$. Поэтому $q_y(x) = x$ тогда и только тогда, когда $F(x, y) = 0$. Мы имеем тождество: $\partial q_y(x)/\partial x = I - A^{-1}(0)(\partial F(x, y)/\partial x) = A^{-1}(0)(A(0) - \partial F(x, y)/\partial x)$. Из непрерывности $\partial F(x, y)/\partial x$ следует, что существуют $a > 0$ и $b > 0$ такие, что $\|\partial q_y(x)/\partial x\| \leq \|A^{-1}(0)\| \|A(0) - \partial F(x, y)/\partial x\| < 1/2$ для любого $z = (x, y)$ с $\|x\| < a$ и $\|y\| < b$.

Применяя теорему о неподвижной точке к этому сжимающему отображению $q_y(x)$, мы получим решение $G(y)$ в окрестности 0 (смотри также общую теорему о неявной функции в §X.7 [32] и теоремы II.IV.4.2, 5.1 и 6.1 в [10]). Тогда решение является локально аналитическим по (z, \tilde{z}) , так как $f(z)$ и $A^{-1}(z)$ и $L(z)$ локально аналитичны. Таким образом, в окрестности точки $({}_{m+1}z_0, \dots, {}_nz_0)$ выполняются тождества ${}_kf({}_1g, \dots, {}_mg, {}_{m+1}z, \dots, {}_nz) = 0$ для $k = 1, \dots, m$ и они являются (z, \tilde{z}) -дифференцируемыми и дифференцирование по ${}_j\tilde{z}$ дает:

$$\sum_{l=1}^m (\partial_{kf}/\partial_{lz}) \cdot (\partial_{lg}/\partial_{j\tilde{z}}) \cdot h + \sum_{l=1}^m (\partial_{kf}/\partial_{l\tilde{z}}) \cdot (\partial_{lg}/\partial_{jz})^* \cdot h + (\partial_{kf}/\partial_{j\tilde{z}}) \cdot h = 0$$

для любого $h \in \mathcal{A}_r$, но $\partial_{kf}/\partial_{l\tilde{z}} = \partial_{kf}/\partial_{j\tilde{z}} = 0$, так как f является \mathcal{A}_r -голоморфной и $(\partial_{kf}/\partial_{jz})_{1 \leq j, k \leq m}$ обратимо в силу условий этой теоремы, где $z^* = \tilde{z}$ обозначает сопряженное число для z в алгебре Кэли-Диксона \mathcal{A}_r . Поэтому, $\partial_{lg}/\partial_{j\tilde{z}} = 0$ для любого $l = 1, \dots, m$ и $j = m+1, \dots, n$, следовательно, G голоморфно.

4. Следствие. *Предположим, что U – это открытое подмножество в \mathcal{A}_p^n , $1 \leq m \leq n \in \mathbf{N}$, $F = ({}_1f, \dots, {}_mf) : U \rightarrow \mathcal{A}_p^m$ – это (r, p) -квазиконформное отображение, где $1 \leq r < p \leq 3$. Если $z_0 \in U$, $F(z_0) = 0$ и оператор $(\partial_{kf}/\partial_{jz})_{1 \leq j, k \leq m}$ обратим в z_0 , где $z = ({}_1z, \dots, {}_nz)$, $jz \in \mathcal{A}_r$ для любого $j = 1, \dots, n$, тогда существует открытая окрестность W_p точки x_0 в \mathcal{A}_p^m и окрестность $V = V_p$ точки y_0 в \mathcal{A}_p^{n-m} такие, что*

$(W_p \times V_p) \subset U$, и голоморфное отображение $G = ({}_1g, \dots, {}_mg) : V_p \rightarrow \mathcal{A}_p^m$ такое, что $W_p \cap \{z \in U : F(z) = 0\} = \{z = (G(y), y) : y \in V_p\}$ с $g(x_0) = y_0$.

Доказательство. Функция F является (r, p) -квазиконформной, следовательно, она голоморфна на U , удовлетворяя условиям (Q1 – Q7) с $W = U \cap \mathcal{A}_r^n \subset U$, где $\mathcal{A}_r \hookrightarrow \mathcal{A}_p$ – естественное вложение. В силу Теоремы 3 существует голоморфное решение.

5. Следствие. Предположим, что F удовлетворяет условиям следствия 4 и $n = 2$, и $m = 1$. Тогда G является (r, p) -квазиконформной в окрестности точки y_0 в каждой точке $y \in V = V_p$, так что $F(G(y), y) = 0$.

Доказательство. Функция G голоморфна благодаря следствию 4, следовательно, она удовлетворяет условию (P1). Мы имеем, что

(1) $G'(y).h = -(F'_x(x, y))^{-1} \cdot [(F'_y(x, y)).h]$ для всех $x = G(y)$ и всякого $h \in \mathcal{A}_p$, когда $F(G(y), y) = 0$, так как тело кватернионов $\mathbf{H} = \mathcal{A}_2$ ассоциативно, а алгебра октонионов $\mathbf{O} = \mathcal{A}_3$ альтернативна.

Ограничение F на $U \cap \mathcal{A}_r^2$ псевдоконформно, следовательно, $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ для $(x, y) \in U \cap \mathcal{A}_r^2$ удовлетворяют условиям (P2, P3). В силу теоремы 2.4 [23]

$$(2) F'_x(x, y).h = a(x, y)hb(x, y) \text{ и } F'_y(x, y).h = c(x, y)he(x, y)$$

для любого $h \in \mathbf{H}$ и всякого $(x, y) \in U \cap \mathcal{A}_r^2$, при $r = 2$, где $a(x, y), b(x, y), c(x, y), e(x, y)$ – это ненулевые \mathcal{A}_r -голоморфные функции на $U \cap \mathcal{A}_r^2$. Для $r = 1$, над \mathbf{C} , очевидно благодаря коммутативности поля \mathbf{C} мы берем как обычно $b = 1$ и $e = 1$.

Поэтому, из уравнения (1) следует, что ограничение $G'(y)$ на $V \cap \mathcal{A}_r$ удовлетворяет условиям (P2, P3), так как тело кватернионов \mathbf{H} и поле комплексных чисел \mathbf{C} ассоциативны. Но $\hat{R}_{z,x}$ – это автоморфизмы алгебры \mathcal{A}_p , так что выполняются условия (Q1 – Q6). Для простоты обозначений возьмем нулевую отмеченную точку. Мы имеем $\bigcup_{s \in V} \{\hat{R}_{s,y}y : y \in V \cap \mathcal{A}_r\} = V$, следовательно, $\{q \in V : \exists y \in V \cap \mathcal{A}_r, \text{ так что } \hat{R}_{q,y}y = q\} = V$ (смотри также (Q2)). Пусть $q \in V \setminus \mathcal{A}_r$ и $y \in V \cap \mathcal{A}_r$ таковы, что $\hat{R}_{q,y}y = q$, тогда $\hat{R}_{q,y}F(x, y) = F(\hat{R}_{q,y}x, q)$, но $F(\zeta, q) = 0$ в W эквивалентно $(\zeta, q) = (G(q), q)$ и $q \in V$. Поэтому, $\hat{R}_{q,y}F(G(y), y) = F(G(q), q) = 0$ и $\hat{R}_{q,y}G'(y).h = G'(q).(\hat{R}_{q,y}h)$ в силу (1) для любого $h \in \mathcal{A}_r$ и каждого $y \in V \cap \mathcal{A}_r$, и всякого $q \in V$, так что $\hat{R}_{q,y}y = q$ и $Re(y) = Re(q)$, следовательно, $\hat{R}_{q,y}G(y) = G(q)$ для любого $(q, y) \in V \times (V \cap \mathcal{A}_r)$, так что $\hat{R}_{q,y}y = q$ и $Re(y) = Re(q)$, так как $F'_x(x, y)$ обратим для $x = G(y)$ и F является локально аналитической и используя разложение $F(x, y)$ по (x, y) с $x = G(y)$.

Положим $H = G'(y).h$, тогда $h = (G'(y))^{-1}.H$, так как F является псевдоконформной и $ker F'_x(x, y) = 0$, и $ker F'_y(x, y) = 0$ для всяких $(x, y) \in U \cap \mathcal{A}_r^2$, тогда как \mathcal{A}_p является конечномерной алгеброй над \mathbf{R} . Если оператор $F'_x(x, y) : \mathcal{A}_p \rightarrow \mathcal{A}_p$ удовлетворяет условию (Q7) и имеет обратный, тогда его обратный также удовлетворяет (Q7), так как ограничение $F'_x(x, y)|_{\mathcal{A}_r}$ имеет вид (2) и всякое ненулевое число в \mathcal{A}_p обратимо, где $1 \leq p \leq 3$. Так как правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию (Q7), тогда левая часть его также удовлетворяет (Q7).

6. Следствие. Если $f : U \rightarrow \mathcal{A}_p$ является (r, p) -квазиконформной функцией, где U открыто в \mathcal{A}_p и $f(U) = V$ открыто в \mathcal{A}_p , и f биективно на U , тогда обратная функция $f^{-1} : V \rightarrow \mathcal{A}_p$ является (r, p) -квазиконформной.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x, y) = f(x) - y$, тогда она (r, p) -квазиконформна и удовлетворяет условиям следствия 5. Поскольку $f(U) = V$ и $f : U \rightarrow V$ биективно, то существует отображение $g = f^{-1} : V \rightarrow U$, которое (r, p) -квазиконформно в силу следствия 5.

7. Теорема. Предположим, что f и g являются (p, r, b) - и (q, r, b) -квазиконформными отображениями на окрестностях U точки z_0 и V точки y_0

соответственно, так что $f(U) \supset V$ и $f(z_0) = y_0$, где $1 \leq r < b \leq 3$, y_0 и $z_0 \in \mathcal{A}_r$, тогда их композиция $g \circ f$ является (pq, r, b) -квазиконформной на окрестности W точки z_0 .

Доказательство. Композиция псевдоконформных отображений является псевдоконформной, поэтому в соответствии с определением 1 достаточно взять окрестность W точки z_0 , так что $W = f^{-1}(V)$ открыто, так как f непрерывна (смотри [22] и теорему 2.6 [23]). Поэтому, $g \circ f$ является pq -псевдоконформной во всякой точке в $W \cap \mathcal{A}_r$, так как y_0 и $z_0 \in \mathcal{A}_r$. Композиция голоморфных отображений является голоморфной, композиция $T_1 T_2$ собственных элементов $T_1, T_2 \in SO(2^b, \mathbf{R})$ является собственным элементом $T_1 T_2 \in SO(2^b, \mathbf{R})$, так как $SO(2^b, \mathbf{R})$ – это специальная ортогональная группа. Если вращения T_1 и T_2 имеют общую ось, тогда их композиция сохраняет эту ось, следовательно, $SO_{\mathbf{R}}(n, \mathbf{R})$ – это подгруппа в $SO(n, \mathbf{R})$. Возьмем семейства автоморфизмов \hat{R}^g и \hat{R}^f для g и f соответственно в согласно определению 1. Поэтому, композиция $\hat{R}_{z,x}^{g \circ f} := \hat{R}_{z,x}^g$ определена для любого $x \in (W - z_0) \cap \mathcal{A}_r$ и каждого $z \in W - z_0$ и это дает ограничение $\hat{R}_{z,x} = id$ для любых x и $z \in (W - z_0) \cap \mathcal{A}_r$, так как $f(U \cap \mathcal{A}_r) \subset \mathcal{A}_r$. Таким образом, семейство операторов $\hat{R}^{g \circ f}(z, x)$ удовлетворяет условиям (Q2 – Q5). Таким образом, $g \circ f(z + z_0) = \hat{R}_{z,x}^{g \circ f} h \circ f(x + z_0)$ для любого $x \in (W - z_0) \cap \mathcal{A}_r$ и каждого $z \in W - z_0$ с $Re(z) = Re(x)$ и $z = \hat{R}_{z,x} x$, где $h(y) := g(y + y_0)$, следовательно, $g \circ f$ удовлетворяет (Q6). Поскольку $(g \circ f)'(z + z_0) \cdot h = g'(f(z + z_0)) \cdot (f'(z + z_0) \cdot h)$ для всяких $z \in W - z_0$ и $h \in \mathcal{A}_b$, тогда как g и f удовлетворяют (Q6, Q7) с \hat{R}^g и \hat{R}^f соответственно, тогда $(g \circ f)'$ удовлетворяет (Q7) с $\hat{R}^{g \circ f}$ и неизбежно $g \circ f$ является (pq, r, b) -квазиконформной на W .

8. Следствие. *Предположим, что U – это открытая область в \mathcal{A}_b с отмеченной точкой $y_0 \in U \cap \mathcal{A}_r$, $1 \leq r < b \leq 3$, тогда семейство всех (r, b) -квазиконформных диффеоморфизмов f из U на U сохраняющих отмеченную точку y_0 имеет структуру группы.*

Доказательство. В силу теоремы 7 композиции (r, b) -квазиконформных отображений g, f являются (r, b) -квазиконформными, так как $f(y_0) = y_0$ и $g(y_0) = y_0$. Согласно следствию 6 обратное отображение к f также (r, b) -квазиконформно. Очевидно, что тождественное отображение $id(x) = x$ для любого $x \in U$ псевдоконформно, следовательно, оно является (r, b) -квазиконформным. Поскольку $f \circ id = id \circ f = f$ для любого гомеоморфизма $f : U \rightarrow U$, тогда $id = e$ является единичным элементом семейства (r, b) -квазиконформных диффеоморфизмов.

8.1. Замечание. На семействе $H(M, P)$ всех \mathcal{A}_b голоморфных отображений из области M в \mathcal{A}_b^n в область P в \mathcal{A}_b^k рассмотрим компактно-открытую топологию (локально) аналитических отображений как в доказательстве теоремы 3.18 [23], где $n, k \in \mathbf{N}$. Эта топология на $H(M, P)$ индуцирует топологию на группе \mathcal{A}_b голоморфных диффеоморфизмов $Dif H(M)$ многообразия M . Для этого семейства (r, b) -квазиконформных диффеоморфизмов f многообразия M предположим, что $f(M \cap \mathcal{A}_r^n) = M \cap \mathcal{A}_r^n$.

8.2. Теорема. *Семейство всех (r, b) -квазиконформных диффеоморфизмов $Dif Q(M)$ компактной канонической замкнутой области M в \mathcal{A}_b^n сохраняющих отмеченную точку y_0 (смотри 8.1), $1 \leq r < b \leq 3$, $n \in \mathbf{N}$, образует топологическую метризуемую группу, которая полна относительно своей метрики и локально компактна. Группа $Dif Q(M)$ является аналитической группой Ли над \mathbf{R} .*

Доказательство. В соответствии с теоремами 3.24, 25 [23] группа $Dif P(M \cap \mathcal{A}_r^n)$ всех псевдоконформных диффеоморфизмов $M \cap \mathcal{A}_r^n$ является топологической метризуемой локально компактной аналитической группой Ли над \mathbf{R} . Рассмотрим без ограничения общности $y_0 = 0$. С другой стороны, всякое $f \in Dif Q(M)$ получается из соответствующего $q \in Dif P(M \cap \mathcal{A}_r^n)$ с помощью операторов $\hat{R}_{z,x}$ подчиненных условиям (Q1 – Q7)

определения 1. В свою очередь, всякое $\hat{R}_{z,x}$ – это автоморфизм алгебры \mathcal{A}_b , зависящий \mathcal{A}_b и \mathcal{A}_r голоморфно от z и x соответственно (смотри предложение 2). Таким образом, f^{-1} получается из q^{-1} с помощью $\hat{R}_{\zeta,y}$, $\zeta = f(z)$, $y = q(x)$, но q^{-1} псевдоконформна, следовательно, f^{-1} является (r, b) -квазиконформным благодаря условиям (Q6, Q7) для f , так как $(f^{-1})' = (f')^{-1}$ и всякое $\hat{R}_{z,x}$ обратимо. Поскольку для любых $f_1, f_2 \in DifQ(M)$ мы имеем соответствующие $q_1, q_2 \in DifP(M \cap \mathcal{A}_r^n)$ и $DifP(M \cap \mathcal{A}_r^n)$ – это группа, то $f_1 \circ f_2 \in DifQ(M)$ благодаря (Q1 – Q7). Группа $DifP(M \cap \mathcal{A}_r)$ является конечно-мерной локально компактной аналитической группой Ли над \mathbf{R} и семейство $\hat{R}_{z,x}$ также образует конечно-мерное аналитическое семейство над \mathbf{R} , следовательно, $DifQ(M)$ является конечно-мерной аналитической группой Ли над \mathbf{R} и неизбежно она локально компактна, метризуема и полна.

9.1. Предложение. *Если q_1 и q_2 – голоморфные функции области W в \mathbf{C} , q_1 и q_2 имеют $(1, b)$ -квазиконформные продолжения f_1 и f_2 на U , $1 < b \leq 3$, с тем же семейством $\hat{R}_{z,x}$ и той же отмеченной точкой $y_0 \in W$ для f_1 и f_2 (смотри (Q1 – Q7) в определении 1) и $(q_1 q_2)'(x) \neq 0$ во всякой точке $x \in W$, тогда их произведение $q_1 q_2$ имеет $(1, b)$ -квазиконформное продолжение $f_1 f_2$ на U .*

Доказательство. Условия (Q1 – Q6) очевидно удовлетворяются для $f_1 f_2$, так как $\hat{R}_{z,x}$ – это автоморфизм алгебры \mathcal{A}_b для любых $z \in U - y_0$ и $x \in W - y_0$. С другой стороны, произведение комплексно голоморфных функций является комплексно голоморфным, произведение \mathcal{A}_b голоморфных функций является \mathcal{A}_b голоморфным. Условия (Q6, Q7) выполнены для f_1 и f_2 , следовательно,

$$(g_1 g_2)'(\hat{R}_{z,y} y) \cdot (\hat{R}_{z,y} h) := g_1(z) [(g_2)'(\hat{R}_{z,y} y) \cdot (\hat{R}_{z,y} h)] + [(g_1)'(\hat{R}_{z,y} y) \cdot (\hat{R}_{z,y} h)] g_2(z) = \\ = \hat{R}_{z,y} [(g_1 g_2)'(y) \cdot h]$$

для любого $z \in U - y_0$ и $y \in W - y_0$, так что $Re(z) = Re(y)$ и $z = \hat{R}_{z,y} y$ и каждого $h \in \mathcal{A}_r$, где $g'(z)$ является оператором (супер)производной над \mathcal{A}_b , следовательно, (Q7) выполняется для $f_1 f_2$.

9.2. Следствие. *Предположим, что q_1 и q_2 являются голоморфными функциями на область W в \mathbf{C} с изолированными нулями для q_1' и q_2' , q_1 и q_2 имеют $(1, b)$ -квазирегулярные продолжения f_1 и f_2 на U , $1 < b \leq 3$, с одним и тем же семейством $\hat{R}_{z,x}$, и одной и той же точкой $y_0 \in W$ для f_1 и f_2 (смотри (Q1 – Q7) в определении 1), тогда их произведение $q_1 q_2$ имеет $(1, b)$ -квазирегулярное продолжение $f_1 f_2$ на U .*

Доказательство. В силу теоремы 9.1 $f_1 f_2$ является $(1, b)$ -квазиконформным на $U \setminus S_A$, где $S_A = \{z + y_0 : z = \hat{R}_{z,x} x, z \in U - y_0, x \in W - y_0, q_1'(x + y_0) = 0 \text{ или } q_2'(x + y_0) = 0\}$, $S_A \cap W$ является дискретным подмножеством состоящим из изолированных точек в W . Условия (Q1 – Q6) выполняются для $f_1 f_2$, так как всякое $\hat{R}_{z,x}$ является автоморфизмом алгебры \mathcal{A}_b . Таким образом, $f_1 f_2$ является $(1, b)$ -квазирегулярным на U .

9.3. Замечание. Отметим, что в общем теорема 9.1 и следствие 9.2 могут не выполняться для $((a_1 f_1)(a_2 f_2))$ вместо $f_1 f_2$, когда f_j берутся с постоянными недействительными множителями $a_j \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ (смотри также замечания 13).

9.4. Теорема. *Предположим, что q_n – это последовательность комплексно голоморфных функций на открытой связной выпуклой области W в \mathbf{C} , так что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q_n'(y)$ равномерно сходится на W к функции $q'(y)$ с $q'(y) \neq 0$ для любого $y \in W$ (или $y \in W \setminus A$ с дискретным подмножеством A состоящим из изолированных точек в W) и $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(y_0)$ сходится в отмеченной точке в W к $q(y_0)$ тогда как всякое q_n имеет $(1, b)$ -квазиконформное (или $(1, b)$ -квазирегулярное) продолжение f_n на область U в \mathcal{A}_b с одним и тем же семейством $\{\hat{R}_{z,x} : z \in U - y_0, x \in W - y_0\}$. Тогда ряд $\sum_{q=1}^{\infty} q_n(y)$ сходится на W к функции $q(y)$, которая имеет $(1, b)$ -квазиконформное (или*

(1, b)-квазирегулярное соответственно) продолжение f на U .

Доказательство. В силу теоремы XVI.3.4 [32] ряд $\sum_{q=1}^{\infty} q_n(y)$ сходится на W к функции $q(y)$ и эта сходимостъ является равномерной на компактных подмножествах в W . Поскольку $q'(y) = \sum_{n=1}^{\infty} q'_n(y)$ на W , то существует $\partial q(y)/\partial y_1$ и $\partial q(y)/\partial y_2$, где $y = y_1 + \mathbf{i}y_2$, $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$, $\mathbf{i} = (-1)^{1/2}$. Поэтому, существует $\partial q(y)/\partial \bar{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \partial q_n(y)/\partial \bar{y} = 0$ на W , так как всякая q_n голоморфна на W . Мы имеем, что $\hat{R}_{z,x}$ – это автоморфизм алгебры \mathcal{A}_b зависящий голоморфно от $z \in U - y_0$ и аналитически от $x \in W - y_0$, тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(y)$ сходятся на U к $f(y)$ и $f'(y)$ соответственно и эта сходимостъ равномерна на P и $P \times B$ для любого компактного подмножества P в U , где $B = B(\mathcal{A}_b, 0, 1) := \{z \in \mathcal{A}_b : |z| \leq 1\}$. Таким образом, существует $\partial f(y)/\partial \bar{y} = 0$, так как $\partial f_n(y)/\partial \bar{y} = 0$ для всякого $n \in \mathbf{N}$ и неизбежно $f(y)$ является \mathcal{A}_b голоморфной на U . Условия (Q1 – Q6) выполняются для любой f_n на U , а (Q7) на $U \setminus S_{A_n}$, где $S_{A_n} = \emptyset$ в (1, b)-квазиконформном случае, следовательно, (Q1 – Q6) выполнены для $f(y)$ на U и (Q7) на $U \setminus S_A$, где $A = \emptyset$ в (1, b)-квазиконформном случае, так как ряды $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(y)$ сходятся на U к $f(y)$ и $f'(y)$ соответственно, а $f'(y).h \neq 0$ для любого $(y, h) \in (U \setminus S_A) \times (\mathcal{A}_b \setminus \{0\})$.

9.5. Примеры. 1. Возьмем функции $q_n(y) = c_n(y - y_0)^n$, коэффициенты которых действительны $c_n \in \mathbf{R}$, в то время как $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|R^n < \infty$ для любого $n \in \mathbf{N}$, где $0 < R < \infty$, $W = \{y \in \mathbf{C} : |y - y_0| < R\}$, $y_0 \in \mathbf{C}$, так что $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n(y - y_0)^{n-1} \neq 0$ на W , положим $U = \{z \in \mathcal{A}_b : |z - y_0| < R\}$ и возьмем $\{\hat{R}_{z,x}\}$ из предложения 2. Тогда условия теоремы 9.4 выполнены, так как $\hat{R}_{z,x}c_n = c_n$ для любого n . В частности, возьмем $c_n = 1$ для любого n , $0 < R < 1$, $y_0 = 0$, тогда $f(y) = 1/(1 - y)$ и $q'(y) = (1 - y)^{-2} \neq 0$ на W . Если $q(y) = \sin(y)$ или $q(y) = \cos(y)$, тогда q имеет (1, b)-квазицелое продолжение. Очевидно, если $a = \text{const} \neq 0$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(z)$ является (r, b)-квазирегулярной на U или (r, b)-квазицелой, тогда $q(z) = f(az)$ является (r, b)-квазирегулярной на $U/a = \{z/a : z \in U\}$ или (r, b)-квазицелой соответственно.

2. Рассмотрим функции $q_n(y) = c_n \exp(a_n(y - y_0))$, где $c_n \in \mathbf{R}$, $a_n \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$ для любого $n \geq 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n c_n| \exp(|a_n|R) < \infty$, так что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n \exp(a_n(y - y_0)) \neq 0$ на $W := \{y \in \mathbf{C} : |y - y_0| < R\}$, $0 < R < \infty$, $y_0 \in \mathbf{C}$, $U := \{z \in \mathcal{A}_b : |z - y_0| < R\}$ и $\hat{R}_{z,x}$ из предложения 2. Тогда выполнены условия теоремы 9.4, так как $\hat{R}_{z,x}c_n = c_n$ и $\hat{R}_{z,x}a_n = a_n$ для любого n , в то время как $\exp(a(y - y_0))$ является \mathcal{A}_b -псевдоконформной на \mathcal{A}_b для $a \neq 0$ из $\mathcal{A}_b \setminus \{0\}$ (смотри [22, 23]).

В частности, для $c_n = 1$ и $q_n(y) = n^{-y} = \exp(-y \ln n)$ для любого $n \geq 1$, $y_0 = 0$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(y)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} q'_n(y)$ сходятся равномерно на $W_R := \{y \in \mathbf{C} : \text{Re}(y) > R\}$ для $1 < R < \infty$ к голоморфной функции $\zeta(y)$ и положим $U_R := \{z \in \mathcal{A}_b : \text{Re}(z) > R\}$. Поэтому, возьмем $W = \{y \in W_R : \zeta'(y) \neq 0, 1 < R < \infty\}$ и $U = U_1 \setminus \bigcup \{S'_y : y \in W_1 \setminus W\}$, где $S'_y := \{z : z = \hat{R}_{z,y}y; z \in U_1, \text{Re}(z) = \text{Re}(y)\}$ для $y \in W_1 \setminus W$. Таким образом, $\zeta(y)$ имеет (1, b)-квазиконформное продолжение на U с W для $b = 2$ и для $b = 3$. Поскольку производная $\zeta'(y)$ голоморфна на W_1 с изолированными нулями, тогда $\zeta(y)$ имеет (1, b)-квазирегулярное продолжение на U_1 с W_1 для $b = 2$ и для $b = 3$.

Если мы возьмем

$$(1) q_n(y) = c_n \exp(v_n E(t_n(y - y_0)))$$

с $v_n t_n = a_n$, где $v_n, t_n \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, тогда эти примеры поставляют (1, b)-квазиконформные или квазирегулярные продолжения в сферических \mathcal{A}_b -координатах (смотри определение 2.1). Для этого выберем семейство $R_{E(t(p-y_0)), E(t(y-y_0))}$ для $(\mathbf{C}, \mathcal{A}_b)$ пары удовлетворяющей уравнению 2.3(1) в предложении 2.3. Поэтому,

$$(2) R_{E(t(p-y_0)), E(t(y-y_0))} = R_{E(p-y_0), E(y-y_0)}$$

для любого $p \in \mathcal{A}_b$, $y \in \mathbf{C}$ и всякого действительной ненулевого $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, где $y_0 \in \mathbf{C}$ -

это отмеченная точка. Тогда

$$(3) R_{E(p-y_0), E(y-y_0)} \sum_{n=1}^{\infty} q_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} R_{E(t_n(p-y_0)), E(t_n(y-y_0))} \exp(v_n E(t_n(y-y_0))) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(v_n E(t_n(p-y_0))) = f(p)$$

для любого $Re(E(p-y_0)) = Re(E(y-y_0))$ с $R_{E(p-y_0), E(y-y_0)} E(y-y_0) = E(p-y_0)$, так как $R_{z,x}(tx) = tR_{z,x}$ для любого $t \in \mathbf{R}$ и $E(y) = y$ для любого $y \in \mathbf{C}$. Таким образом, $q(y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(y)$ имеет $(1, b)$ -квазиконформное в сферических \mathcal{A}_b -координатах продолжение f с q на V , так что $E(V) = W$ и f на P , так что $E(P) = U$ выбирая соответствующую ветвь Ln .

3. Гамма функция $\Gamma(z)$ голоморфна на $\mathbf{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$, имея полюсы первого порядка в точках $0, -1, -2, -3, \dots$ с вычетами $res_{z=-n} \Gamma(z) = (-1)^n/n!$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Более того,

(1) $1/\Gamma(z+1) = e^{Cz} \prod_{k=1}^{\infty} [(1+z/k)e^{-z/k}]$ и это произведение сходится всюду на \mathbf{C} , где $C = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n 1/k - \ln n) = 0.5772157\dots$ – это постоянная Эйлера (смотри §VII.1 [15]). В произведении в формуле (1) все коэффициенты действительны. Можно рассмотреть для этой функции различные голоморфные продолжения над \mathcal{A}_b (смотри параграф 4 в [18]). Применяя операторы $\hat{R}_{z,y}$ из предложения 2 с $y_0 = 0$ и предложение 9.1 и теорему 9.4 к уравнению (1) дает $(1, b)$ -квазиморфное продолжение $\Gamma(z)$, которое является $(1, b)$ -квазиконформным на $\mathcal{A}_b \setminus \{S_0, S_{-1}, S_{-2}, \dots\}$ для $2 \leq b \leq 3$, где $S_{-n} = S_{-n}^{\Gamma}$. В частности, для $y_0 = 0$ мы имеем $S_{-n}^{\Gamma} = \{-n\}$, так как рассматриваются лишь вращения вокруг действительной оси, $T = \hat{R}_{z,y} \in SO_{\mathbf{R}}(2^b, \mathbf{R})$. Более того, $1/\Gamma(z)$ является $(1, b)$ -квазицелой, следовательно, $\Gamma(z)$ не имеет нулей в \mathcal{A}_b .

10. Определение. Пусть $a_1, \dots, a_n, z \in \mathcal{A}_r$, положим

$$Exp_1(a_1; z) := \exp(a_1 z), Exp_n(a_1, \dots, a_n; z) := Exp_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}; Exp_1(a_n; z))$$

для $n > 1$, где $2 \leq r$. Для $a_1 \neq 0, \dots, a_n \neq 0, z \neq 0$ положим $Ln_1(a_1; z) := a_1^{-1} Ln(z)$, $Ln_n(a_1, \dots, a_n; z) := Ln_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}; Ln_1(a_n; z))$ для $n > 1$, где $Exp_0(z) := id(z) = z$ и $Ln_0(z) := id(z) = z$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$, $1 \leq r$. Здесь a_1, \dots, a_{n-1} могут быть константами, но более общим образом \mathcal{A}_r -псевдоконформными функциями $a_1(z) \neq 0, \dots, a_{n-1}(z) \neq 0, a_n \neq 0$ – это постоянная в \mathcal{A}_r , $2 \leq r$.

Пусть $\gamma(t) := z_0 + \rho Exp_n(a_1, \dots, a_n; \xi(t))$ – это кривая в открытой области U в \mathcal{A}_r и пусть f является голоморфной функцией $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$, где $a_1 = a_1(t) \neq 0, \dots, a_{n-1} = a_{n-1}(t) \neq 0$ – это постоянные или псевдоконформные функции со значениями в \mathcal{A}_r на открытой области $V_a \supset [0, 1]$ или $V_a \supset \mathbf{R}$ в \mathcal{A}_r , $a_n \neq 0$, $\xi(t)$ – это спрямляемая кривая в \mathcal{A}_r , $t \in [0, 1] \subset \mathbf{R}$, $f(z) \neq 0$ для любого $z = \gamma(t)$, где $0 < \rho < \infty$. Тогда положим

$$\Delta_{\gamma} Arg_n f := \Delta_{\gamma} Arg_n(a_1, \dots, a_n; f) := \int_{z \in \gamma} dLn_n(a_1, \dots, a_{n-1}, 1; f(z))$$

с выбранной ветвью Ln .

10.1. Замечание. В частности, для $n = 1$ и $\xi(t) = t$ с $M \in \mathcal{A}_r$, $Re(M) = 0$, $|M| = 1$, $a_n = 2\pi M$, $\{\gamma(t) : t \in [0, 1]\}$ – это окружность. Если $n = 1$ и $a_1 = 2\pi M$, тогда $\Delta_{\gamma} Arg_1(f) = \Delta_{\gamma} Arg(f)$ является обычным изменением аргументом функции f вдоль кривой γ (смотри также параграф 3 в [17, 18] и теорему 2.23 [23]).

10.2. Предложение. Логарифмическая функция Ln на $\mathcal{A}_r \setminus \{0\}$, где $1 \leq r \leq \infty$, имеет счетное число ветвей.

Доказательство. Для $r = 1$ мы имеем $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}$ и в этом случае утверждение этого предложения хорошо известно. Поэтому рассмотрим $2 \leq r \leq \infty$.

Всякое ненулевое $z \in \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$ может быть записано в полярных форме

$$(1) z = |z| \exp(M\phi + 2\pi nM),$$

где $M \in \mathcal{I}_r := \{z \in \mathcal{A}_r : Re(z) = 0\}$, $|M| = 1$, $\phi \in [0, 2\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$, $Arg(z) = M\phi + 2\pi nM$ (смотри параграф 3 в [17, 18]). Если $K \in \mathcal{I}_r$, $|K| = 1$, K не является параллельной

M , то есть, $|Re(MK^*)| < 1$, тогда M и K не коммутируют. Когда $0 < \phi < \pi$, тогда $\exp(M\phi + \pi Ks) \neq \exp(M\phi + \pi nM)$ для любого $s \neq 0$, $s \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, и всякого $n \in \mathbf{Z}$, так как $\exp(M\phi + \pi Ks) = \cos |M\phi + \pi Ks| + (M\phi + \pi Ks)(\sin |M\phi + \pi Ks|)/|M\phi + \pi Ks|$ при этом $\exp(M\phi + \pi nM) = \cos |\phi + \pi n| + M(\phi + \pi n)(\sin |\phi + \pi n|)/|\phi + \pi n|$ и $|M\phi + \pi Ks|^2 = \phi^2 + (\pi s)^2 + 2Re(MK^*)\phi\pi s$ и $(\phi + \pi n) \notin \pi\mathbf{Z}$ и K не параллельно M , где $\mathbf{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. С другой стороны, $Im(z) := z - Re(z)$ параллельно M в уравнении (1), следовательно, единственными решениями (1) являются $Arg(z) = M(\phi + 2\pi n)$, где $\phi \in [0, 2\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$, M параллельно $Im(z)$. Поэтому, Ln имеет только счетное число ветвей, которые могут быть занумерованы $n \in \mathbf{Z}$.

Более детально, можно построить следующий некоммутативный аналог римановой 2^r -мерной поверхности \mathcal{R} для Ln , так что $Ln : \mathcal{A}_r \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{R}$ является однозначным отображением, где $2 \leq r \leq \infty$, $2^\infty = \infty$. Рассмотрим копии (\mathcal{A}_r, ni_1) алгебры \mathcal{A}_r вложенной в \mathcal{A}_r^2 , где $ni_1 \in i_1\mathbf{R}$ принадлежит второму множителю \mathcal{A}_r , $n \in \mathbf{Z}$. Положим $P_j := \{z \in \mathcal{A}_r : z_0 < 0, z_j = 0, z_k \in \mathbf{R} \forall 0 < k \neq j\}$ и рассмотрим сечения \mathcal{A}_r (первого сомножителя) посредством P_j для любого $1 \leq j \in \mathbf{Z}$, где $z = \sum_{j=0}^{2^r-1} z_j i_j$, $z_j \in \mathbf{R}$, i_j являются стандартными генераторами алгебры \mathcal{A}_r . Тогда множество $\{z \in \mathcal{A}_r : z_0 < 0\}$ разбито на подмножества $S(k_1, k_2, \dots)$ соответствующие определенным комбинациям знаков чисел z_j : или $z_j \geq 0$, или $z_j \leq 0$ с $k_j = 1$ и $k_j = -1$ соответственно. Для конечного r число таких частей равно 2^q с $q = 2^r - 1$, так как $j = 1, \dots, 2^r - 1$, для $r = \infty$ это семейство бесконечно и несчетно мощности $c = 2^{\aleph_0}$.

Тогда вложим каждую подразделенную (разбитую) копию (\mathcal{A}_r, ni_1) в \mathcal{A}_r^2 и слегка выгнем всякое подмножество $(\{z \in \mathcal{A}_r : z_0 < 0\}, ni_1)$ в направлениях ν_1, ν_2, \dots перпендикулярных $(i_1, ni_1), (i_2, ni_1), \dots$, используя мнимую часть \mathcal{I}_r второго множителя, так что после этой процедуры $\{({}_1z, {}_2z) \in (S(k_1, k_2, \dots), ni_1) \cap (S(l_1, l_2, \dots), mi_1) : {}_1z_0 < 0\} = \emptyset$ для любого или $n \neq m$ с произвольными k, l , или $n = m$ с $k \neq l$, где $l = (l_1, l_2, \dots)$, $z = ({}_1z, {}_2z) \in \mathcal{A}_r^2$, ${}_1z$ и ${}_2z \in \mathcal{A}_r$. Тогда отождествим грани $Q_j := P_j \setminus (\bigcup_{m, m \neq j} P_m)$ двух копий n и $n+1$ для $(S(k), ni_1)$ и $(S(k - 2e_j), (n+1)i_1)$ посредством соответствующих прямых лучей двух копий (Q_j, ni_1) и $(Q_j, (n+1)i_1)$, где $k = (k_1, k_2, \dots)$, $k_1, k_2, \dots \in \{-1, 1\}$, $k_j = 1$, $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \mathbf{R}^{2^r-1}$, $2^\infty - 1 = c$. Осуществим это отношение эквивалентности для всех $n \in \mathbf{Z}$, всякого $1 \leq j \in \mathbf{Z}$ и любого k с $k_j = 1$. Рассмотрим после такой идентификации Q_j как часть из $(\mathcal{A}_r, (n+1)i_1)$. Обозначает через \mathcal{L} 2^r -мерную поверхность в \mathcal{A}_r^2 полученную такой процедурой.

Для всякого перпендикулярного перехода через грань Q_j из $(S(k), ni_1)$ в $(S(k - 2e_j), (n+1)i_1)$ присвоим изменение $2\pi i_j$ аргумента числа Кэли-Диксона, где $k_j = 1$, $1 \leq j \in \mathbf{Z}$. Перпендикулярному к Q_j переходу в противоположном направлении из $(S(k - 2e_j), (n+1)i_1)$ в $(S(k), ni_1)$ с $k_j = 1$ присвоим противоположное изменение аргумента $-2\pi i_j$.

Рассмотрим сферические координаты $(a, \theta_1, \dots, \theta_m)$ в Евклидовом пространстве \mathbf{R}^{m+1} , которые связаны с декартовыми координатами $x_1, \dots, x_{m+1} \in \mathbf{R}$ вектора $x = (x_1, \dots, x_{m+1}) \in \mathbf{R}^{m+1}$ уравнениями:

$$(2) \quad x_1 = a \cos(\theta_1), \quad x_2 = a \sin(\theta_1) \cos(\theta_2), \dots, x_m = a \sin(\theta_1) \dots \sin(\theta_{m-1}) \cos(\theta_m), \quad x_{m+1} = a \sin(\theta_1) \dots \sin(\theta_m),$$

где $0 \leq a = |x| < \infty$, $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$, $0 \leq \theta_2 \leq \pi, \dots, 0 \leq \theta_m \leq \pi$ (смотри §XII.1 [32]). Тогда это дает сферические координаты в \mathcal{A}_r беря $x_{j+1} = z_j$ для любого $j = 0, 1, 2, \dots, 2^r - 1$ и $m = 2^r - 1$, где $z = \sum_{j=0}^{2^r-1} z_j i_j \in \mathcal{A}_r$. Сравнение уравнений (1) и (2) дает:

$$(3) \quad M = i_1 \cos(\theta_2) + i_2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) + \dots + i_{2^r-2} \sin(\theta_2) \dots \sin(\theta_{2^r-2}) \cos(\theta_{2^r-1}) + i_{2^r-1} \sin(\theta_2) \dots \sin(\theta_{2^r-1}) \quad \text{и} \quad \theta_1 = \phi.$$

Для \mathcal{A}_∞ предел (2) при r стремящемся к бесконечности дает сферические координаты

в \mathcal{A}_∞ , так как для любого $z \in \mathcal{A}_\infty$ норма $|z| := (\sum_{j=0}^\infty z_j^2)^{1/2} < \infty$ конечна. Поэтому, всякое ненулевое $z = |z| \exp(M\phi_1)$ периодически (инвариантно) при замене $\theta_j \mapsto \theta_j + 2\pi m_j$ для любого j , более того, z инвариантно относительно парных замен: $\theta_j \mapsto 2\pi m_j - \theta_j$ и $\theta_{j+1} \mapsto \theta_{j+1} + (2m_{j+1} + 1)\pi$ для любого отмеченного j , где $m_1, \dots, m_{2r-1} \in \mathbf{Z}$.

Всяким сферическим координатам $(\theta_1 + 2\pi m_1, \theta_2 + \pi m_2, \dots, \theta_{2r-1} + \pi m_{2r-1}) =: \psi$ присвоим два вектора $m^+ = (m_1^+, m_2^+, \dots)$ и $m^- = (m_1^-, m_2^-, \dots)$, где $m_j^+ := \max(0, m_j)$, $m_j^- := \min(0, m_j)$, $|\psi|^2 := \sum_j \psi_j^2 < \infty$, множество $\{j : m_j \neq 0\}$ конечно, так как рассматриваются лишь спрямляемые кривые в \mathcal{A}_r . Тогда $m = m^+ + m^-$ и положим $n^+ := \sum_j m_j^+$, $n^- := \sum_j m_j^-$, следовательно, $0 \leq n^+ \in \mathbf{Z}$ и $0 \geq n^- \in \mathbf{Z}$. Поэтому, всякому такому ψ соответствует единственный $Arg(z)$ и z однозначно характеризуемый двумя точками (y_1, y_2) , где y_1 в $(\mathcal{L}, 1)$ принадлежит (\mathcal{A}_r, n^+) , а y_2 в $(\mathcal{L}, 2)$ принадлежит (\mathcal{A}_r, n^-) , чьи сферические координаты равны $(|z|, \psi^+)$ и $(|z|, \psi^-)$ соответственно, где $\psi_1^+ = \theta_1 + 2\pi m_1^+$, $\psi_1^- = \theta_1 + 2\pi m_1^-$, $\psi_j^+ = \theta_j + \pi m_j^+$ и $\psi_j^- = \theta_j + \pi m_j^-$ для любого $j \geq 2$, $(\mathcal{L}, 1)$ и $(\mathcal{L}, 2)$ - это две копии \mathcal{L} . Тогда вложим $\mathcal{R} := \{(y_1, y_2) : y_1 \in (\mathcal{L}, 1) \text{ с } n_1 \geq 0, y_2 \in (\mathcal{L}, 2) \text{ с } n_2 \leq 0\}$ в \mathcal{A}_r^2 , что возможно, так как $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}_r \times \mathcal{I}_r$. Точки y_1 и y_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда $n^+ = n^- = 0$. Тогда \mathcal{R} является некоммутативным для $2 \leq r$ и неассоциативным для $3 \leq r$ аналогом римановой поверхности, так что $Ln : \mathcal{A}_r \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{R}$ - однозначное отображение и Ln имеет счетное число ветвей, так что $Ln(z) = \ln|z| + Arg(z)$, где $ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ - это обычный действительный натуральный логарифм.

11. Лемма. *Предположим, что U и V - это открытые области в \mathcal{A}_r , $2 \leq r \leq 3$, $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$, $\psi : V \rightarrow \mathcal{A}_r$, f - голоморфна на U и ψ - это голоморфный диффеоморфизм из V на U , γ - это спрямляемая кривая в U , где $\gamma(t) = z_0 + Exp_n(a_1, \dots, a_n; t)$ для любого $t \in [0, 1]$, $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$ - это ненулевые постоянные или \mathcal{A}_r псевдоконформные функции, $a_n = const \in \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$, $Re(a_n) = 0$, $|a_n| = 2\pi$, $f(\gamma(t)) \neq 0$ для любого $t \in [0, 1]$. Тогда $\Delta_\gamma Arg_n f = \Delta_\eta Arg_n f \circ \psi$ и $\Delta_\gamma Arg_n f$ не зависит от a_1, \dots, a_{n-1} , когда $n \geq 2$, где $\phi(z) := Ln_n(a_1, \dots, a_n; \psi^{-1}(z))$ на U и $\eta(t) := Exp_n(a_1, \dots, a_n; \phi(\gamma(t)))$ для любого $t \in [0, 1]$.*

Доказательство. Композиции псевдоконформных функций являются псевдоконформными, обратное к псевдоконформному отображению является псевдоконформным (смотри [22] и теорему 2.6 [23]). Поскольку \exp и Ln псевдоконформны, отображения $z \mapsto az$ и $z \mapsto za$ псевдоконформны для $a \neq 0$, тогда Exp_n и Ln_n также псевдоконформны для $a_1 \neq 0, \dots, a_n \neq 0$. Выберем ветвь логарифмической функции (смотри предложение 10.2) и рассмотрим $\phi(z) := Ln_n(a_1, \dots, a_n; \psi^{-1}(z))$ и положим $\eta(t) := Exp_n(a_1, \dots, a_n; \phi(\gamma(t)))$, следовательно, $\psi(\zeta) = \gamma(t) = z$ тогда и только тогда, когда $\zeta = \eta(t)$. С другой стороны, $\phi(z)$ является голоморфным отображением как композиция голоморфных отображений. Поэтому, η является спрямляемой кривой, так как γ является спрямляемой кривой. Спрямляемая кривая γ компактна в \mathcal{A}_r , следовательно, она может быть покрыта конечным числом шаров на всяком из которых f не имеет нулей, так как f непрерывна и не имеет нулей на γ . Поскольку $\int_a^b dg(z) = g(b) - g(a)$ для голоморфной функции на шаре W в \mathcal{A}_r (смотри теорему 2.18 [23]), тогда

$$\Delta_\gamma Arg_n f = \int_\gamma dLn_n(a_1, \dots, a_{n-1}, 1; f(z)) = \int_\eta dLn_n(a_1, \dots, a_{n-1}, 1; f \circ \psi(\zeta)) = \Delta_\eta Arg_n f \circ \psi.$$

Поскольку $Ln_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}; z)$ - это обратная функция к $Exp_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}; y)$, тогда $\Delta_\gamma Arg_n f$ не зависит от a_1, \dots, a_{n-1} , когда $n \geq 2$. Это выполняется для всякой фразы μ представляющей f и для любой ветви криволинейного интеграла, например, описанной с помощью левого или правого алгоритма (смотри лемму 2.16 и теоремы 2.17, 2.18 в [23] и [18]). Фразы соответствующие f согласуются для канонических (аналитических) элементов, которые являются аналитическими продолжениями друг друга в области в силу теоремы о монодромии 2.1.5.4 [24] и 2.45 [23].

12. Лемма. Предположим, что f является (p, r, b) -квазиконформной функцией на открытой связной области U в \mathcal{A}_b с нулем $z_0 \in U \cap \mathcal{A}_r$, $f(z_0) = 0$, где $1 \leq r < b \leq 3$, $0 < p \in \mathbf{Z}$. Тогда f имеет связную поверхность $S = S_{z_0}$ в \mathcal{A}_b нулей функции f , так что $z_0 \in S$ и ее размерность над \mathbf{R} равна $\dim_{\mathbf{R}} S = 2^b - 2^r$.

Доказательство. Поскольку $f(z + y_0) = \hat{R}_{z,x} f(y_0 + x)$ для любых $x \in (U - y_0) \cap \mathcal{A}_r$ и $z \in U - y_0$ таких, что $Re(z) = Re(x)$ и $z = \hat{R}_{z,x} x$, где y_0 – это отмеченная точка в $U \cap \mathcal{A}_r$, тогда $f(z) = \hat{R}_{z-y_0, z_0-y_0} f(z_0) = 0$ для любого $z \in U$, так что $Re(z) = Re(z_0)$ и $z - y_0 = \hat{R}_{z-y_0, z_0-y_0}(z_0 - y_0)$, так как $f(z) = \hat{R}_{z-y_0, z_0-y_0} f(z_0)$ получается из $f(z_0)$ с помощью автоморфизма \hat{R}_{z-y_0, z_0-y_0} алгебры Кэли-Диксона \mathcal{A}_b , которая является телом кватернионов \mathbf{H} для $b = 2$ или алгеброй октонионов \mathbf{O} для $b = 3$ (смотри определение 1). Семейство автоморфизмов $\hat{R}_{z,x}$ голоморфно и удовлетворяет условиям (Q2–Q5), так что когда z стремится к точке ζ в $(U - y_0) \cap \mathcal{A}_r$, тогда $\hat{R}_{z,x}$ стремится к единичному оператору для данного $x \in (U - y_0) \cap \mathcal{A}_r$, следовательно, $S_{z_0} := S := \{z : z - y_0 = \hat{R}_{z-y_0, z_0-y_0}(z_0 - y_0), z \in U, Re(z) = Re(z_0)\}$ является связной. В частности, $\hat{R}_{z_0-y_0, z_0-y_0}(z_0 - y_0) = z_0 - y_0$, так как $z_0 \in U \cap \mathcal{A}_r$, следовательно, $z_0 \in S$. Ее размерность над \mathbf{R} равна: $\dim_{\mathbf{R}} S = 2^b - 2^r$, так как $\dim_{\mathbf{R}} \mathcal{A}_b = 2^b$, $\dim_{\mathbf{R}} \mathcal{A}_b \ominus \mathcal{A}_r = 2^b - 2^r$ для $\mathcal{A}_b \ominus \mathcal{A}_r$ рассматриваемого как \mathbf{R} -линейное пространство.

13. Замечания. В общем случае произведение (r, b) -квазиконформных функций (с данным порядком умножения для $b = 3$) даже при $r = 1$, где $1 \leq r < b \leq 3$ не обязано быть (r, b) -квазиконформным, так как оператор производной произведения является суммой операторов (смотри определение 2.2(11) [17, 18]). В самом деле, сумма псевдоконформных или квазиконформных функций может быть непсевдоконформной или неквазиконформной соответственно даже, когда оператор производной ненулевой, уже при $r = 2$, так как имеются операторы проектирования π_j из \mathcal{A}_b в $i_j \mathbf{R}$ для любых $j = 0, 1, \dots, 2^b - 1$ и каждого $2 \leq b$, где $\pi_0(z) = (z + (2^b - 2)^{-1} \{-z + \sum_{k=1}^{2^b-1} i_k (z i_k)^*\})/2$, $\pi_j(z) = (-z i_j + i_j (2^b - 2)^{-1} \{-z + \sum_{k=1}^{2^b-1} i_k (z i_k)^*\})/2$ для любого $j \in \{1, \dots, 2^b - 1\}$, $\pi_j(z) = z_j$ для всякого $z \in \mathcal{A}_b$, где $z = z_0 i_0 + \dots + z_{2^b-1} i_{2^b-1}$. Это является эффектом некоммутативности алгебр Кэли-Диксона для $2 \leq b$. Более того, старт с комплексных констант $a = a_0 + i a_1$ с $a_0, a_1 \in \mathbf{R}$ дает $\hat{R}_{z,y} a = a_0 + M a_1$, где $M \in \mathcal{A}_b$ зависит от $z \in \mathcal{A}_b$, $y \in \mathcal{A}_r$, как описано формулами 2(4, 6) в z -представлении, следовательно,

$$(1) (\partial \hat{R}_{z,y} a / \partial z) \cdot h = h a_1 \text{ для любого } h \in \mathcal{I}_b, z \in \mathcal{A}_b \setminus \mathcal{A}_r.$$

По аналогичной причине сумма псевдоконформных или квазиконформных отображений может быть непсевдоконформным или неквазиконформным отображением соответственно для $2 \leq b$, даже когда его производная ненулевая, уже для $r = 2$. Всякая комплексно голоморфная функция f на \mathbf{C} (целая функция) может быть разложена в соответствии с теоремой Вейерштрасса V.72 [15] как $f(z) = z^m \exp[g(z)] \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/a_n) \exp(z/a_n + (z/a_n)^2/2 + \dots + (z/a_n)^{p_n}/p_n)$, где p_n – это последовательность натуральных чисел и $g(z)$ – это целая функция, m – кратность $z = 0$ как нуля функции $f(z)$. Но ее продолжение с помощью автоморфизмов удовлетворяющих условиям (Q2 – Q5) может быть неквазиконформной функцией в силу описанных выше препятствий.

Когда семейство $\hat{R}_{z,x}$ дается как $\hat{R}_{\xi(z), \xi(x)} = R_{\xi(z), \xi(x)}$ (смотри предложение 2), тогда фразы соответствующие каноническим (аналитическим) элементам функции f , которые являются аналитическими продолжениями друг друга в области, определены согласованным образом в силу теоремы о монодромии 2.1.5.4 [24] и 2.45 [23], где ξ является псевдоконформным диффеоморфизмом области U . Это в общем проще, когда $\xi = id$ – тождественное отображение. Если f является $(1, b)$ -квазирегулярной, $2 \leq b \leq 3$, тогда $g = g|_{W-y_0}$ является комплексно голоморфной функцией и фразы аналитических

элементов для q коммутируют над \mathbf{C} .

14. Замечания и определения. 1. Нули и полюсы комплексно голоморфных функций определяются классически стандартным образом. Для алгебры \mathcal{A}_r и p -псевдоконформной функции f на открытой области V мы назовем точку $z_0 \in V$ нулем функции f , если $f(z_0) = 0$, где $2 \leq r \leq 3$, $1 \leq p \in \mathbf{Z}$. В силу теоремы 2.5 [23] и §1 его порядок равен p . Для алгебры \mathcal{A}_r p -псевдоконформная функция f на $V \setminus \{z_0\}$, где $2 \leq r \leq 3$, V открыто в \mathcal{A}_r и $z_0 \in \mathcal{A}_r$ – это точка, тогда мы назовем z_0 полюсом функции f , если $g(z) := 1/f(z)$ является \mathcal{A}_r p -псевдоконформной на $V \setminus \{z_0\}$ и z_0 – это нуль функции g .

Определим f голоморфной на окрестности V для ∞ или (p, r) -псевдоконформной, или (p, r, b) -квазиконформной в ∞ тогда и только тогда, когда $g(z) := f(1/z)$ голоморфна в $U := \{z : 1/z \in V\}$ или (p, r) -псевдоконформна, или (p, r, b) -квазиконформна в нуле соответственно. Мы скажем, что $y = \infty$ является нулем или полюсом функции f тогда и только тогда, когда $g(z) = f(1/z)$ имеет нуль или полюс в $z = 0$ соответственно.

2. Рассмотрим естественное вложение алгебры \mathcal{A}_r в \mathcal{A}_b ассоциированное со стандартной процедурой удвоения, где $1 \leq r < b \leq 3$. Пусть U – это открытая связная область в \mathcal{A}_b и $W = U \cap \mathcal{A}_r$ – открытая связная область в \mathcal{A}_r , так что U псевдоконформно диффеоморфна с областью V , где V получается из W с помощью всех тех $\hat{R}_{z,x}$, которым соответствуют вращения во всех плоскостях $\mathbf{R}i_v \oplus \mathbf{R}i_u$ с $v = 1, \dots, 2^r - 1$ и $u = 2^r, \dots, 2^b - 1$ на углы $\phi \in (0, 2\pi)$ с действительной осью вращения в действительной тени, так как всякий оператор $T \in SO(2^b, \mathbf{R})$ может быть представлен как конечное произведение однопараметрических подгрупп и здесь рассматривается ее подгруппа $SO_{\mathbf{R}}(2^b, \mathbf{R})$ операторов ограничения, которых на действительную ось \mathbf{R} являются тождественными.

Предположим, что f является (p, r, b) -квазиконформным или (p, r, b) -квазирегулярным отображением на U , может быть кроме конечного числа поверхностей $S_y := \{y_0 + z : z = \hat{R}_{z,y-y_0}(y - y_0), z \in U - y_0, Re(z) = Re(y - y_0)\}$ полюсов $y \in W$, которые могут быть только в W , где $0 < p \in \mathbf{Z}$.

Положим для любого $z_0 \in S_y$ по определению:

(1) $(2\pi)^{-1} \int_{\gamma} f(z) dz =: res(z_0, f) \cdot N$ – оператор вычета функции f в точке z_0 , где $N \in \mathcal{A}_b$, $Re(N) = 0$, $|N| = 1$, $\gamma(t) = z_0 + \rho \exp(2\pi t N) \subset V$, $t \in [0, 1]$, $\rho > 0$ достаточно мало, так что $f|_{B \setminus \{z_0\}}$ – это локально аналитическая, и γ не охватывает других полюсов функции f в множестве $\{y_0 + z : z \in \hat{R}_{q,y-y_0} \mathcal{A}_r; |z - y| < \rho + \epsilon\}$ для некоторого $0 < \epsilon < \infty$ и некоторого $q \in \mathcal{A}_b$, так что $N \in \hat{R}_{q,y-y_0} \mathcal{A}_r$ с $Re(q) = Re(y - y_0)$, $B = B(\mathbf{R} \oplus N\mathbf{R}, z_0, 2\rho^-)$, $B(X, z, R^-) := \{x \in X : d_X(x, z) < R\}$ обозначает открытый шар в метрическом пространстве X с метрикой d_X . Для $a \in \mathbf{R}$ положим $res(z_0, f) \cdot (aN) := a res(z_0, f) \cdot N$ и $res(z_0, f) \cdot 0 = 0$.

Предположим также, что $z_0 \in W$ – это нуль или полюс функции f и $S = S_{z_0}$ – поверхность соответствующая z_0 из леммы 12, где W может содержать только конечное число нулей или полюсов z_l , которые могут быть только точками. Для подмножества G в \mathcal{A}_r , пусть $\pi_{s,q,t}(G) := \{u : z \in G, z = \sum_{v \in \mathbf{b}} w_v v, u = w_s s + w_q q, w_v \in \mathbf{R} \forall v \in \mathbf{b}\}$ для любого $s \neq q \in \mathbf{b}$, где $t := \sum_{v \in \mathbf{b} \setminus \{s,q\}} w_v v \in \mathcal{A}_{r,s,q} := \{z \in \mathcal{A}_r : z = \sum_{v \in \mathbf{b}} w_v v, w_s = w_q = 0, w_v \in \mathbf{R} \forall v \in \mathbf{b}\}$. То есть, геометрически $\pi_{s,q,t}(G)$ является проекцией на комплексную плоскость $\mathbf{C}_{s,q}$ пересечения G с плоскостью $\tilde{\pi}_{s,q,t} \ni t$, $\mathbf{C}_{s,q} := \{as + bq : a, b \in \mathbf{R}\}$, так как $sq^* \in \hat{b}$, где $\mathbf{b} := \{i_0, i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$ – это семейство стандартных генераторов алгебры Кэли-Диксона \mathcal{A}_r , $\hat{b} := \mathbf{b} \setminus \{i_0\}$, $i_0 = 1$.

Пусть ω – это спрямляемая петля, то есть, замкнутая кривая, $\omega(0) = \omega(1)$, в открытой подобласти J , $z_0 \in J \subset W$ in \mathcal{A}_r , так что ω охватывает z_0 , где J не содержит каких-либо других нулей или полюсов функции f , J является $(2^r - 1)$ -связной и $\pi_{s,q,t}(J)$

односвязна в \mathbf{C} для любого $t \in \mathcal{A}_{r,s,q}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,q}$, $s = i_{2k}$ и $q = i_{2k+1}$, $k = 0, 1, \dots, 2^{r-1} - 1$, для которых существует $\zeta = u + t \in J$. При вычислении некоммутативных криволинейных интегралов выберем их ветви. Для некоммутативных преобразований типа Лапласа или Меллина воспользуемся, например, левым алгоритмом вычисления интегралов вдоль кривых.

15. Теорема. *Предположим, что f – псевдоконформная функция на $V \setminus \{y\}$ с полюсом в точке y в V , также F – это однозначная ветвь ее (r, b) -квазиконформного продолжения в $W \setminus S_y$ относительно отмеченной точки y_0 , где W – это открытое подмножество в \mathcal{A}_b , так что $W \cap \mathcal{A}_r = V$. Тогда операторы вычетов $res(y, f)$ и $res(z, F)$ таковы, что $res(z, F).M = \hat{R}_{z-y_0, y-y_0}[res(y, f).N]$ для любого $z \in S_y \cap W$ и каждого $N \in \mathcal{A}_r$ с $Re(N) = 0$, где $M = \hat{R}_{z-y_0, y-y_0}N$. Более того, $res(z_0, f).N$ является \mathbf{R} гомогенным и \mathcal{A}_b аддитивным по f .*

Доказательство. Если y – это конечная точка, тогда $z \in S_y$ является конечной точкой и

(1) $(2\pi)^{-1} \int_{\gamma} f(z)dz = res(y, f).N$, где $\gamma(t) = y + \rho \exp(2\pi tN)$ и $\rho > 0$ достаточно мало, так что γ не охватывает других полюсов функции f в множестве $\{y_0 + z : z \in \hat{R}_{q, y-y_0}\mathcal{A}_r; |z - y| < \rho + \epsilon\}$ для некоторого $0 < \epsilon < \infty$ и некоторого $q \in \mathcal{A}_b$ с $Re(q) = Re(y - y_0)$, так что $N \in \hat{R}_{q, y-y_0}\mathcal{A}_r$. Используя условия (Q6, Q7) и действуя $\hat{R}_{z-y_0, y-y_0}$ на обе части уравнения (1) дает

$$(2) \hat{R}_{z-y_0, y-y_0}[res(y, f).N] = (2\pi)^{-1} \int_{\eta} F(s)ds \text{ для } Re(z) = Re(y),$$

где $\eta(t) = \hat{R}_{z-y_0, y-y_0}\gamma(t)$ для любого t .

Поскольку всякое $z \in S_y$ является полюсом функции F ограниченной на соответствующую подалгебру $\hat{R}_{z-y_0, y-y_0}(\mathcal{A}_r)$ в \mathcal{A}_b , тогда определен \mathcal{A}_b -аддитивный и \mathbf{R} -гомогенный оператор $res(z, F).M = (2\pi)^{-1} \int_{\eta} F(s)ds$ для $M \in \mathcal{A}_b$, $Re(M) = 0$ (смотри теорему 3.23 [17, 18]).

Поэтому, первое утверждение этой теоремы следует из уравнения (2) и условий (Q6, Q7), §14 выше и теоремы 2.5 [23].

Поскольку $\int_{\gamma}(a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z))dz = a_1 \int_{\gamma} f_1(z) + a_2 \int_{\gamma} f_2(z)dz$ для любых $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ и \mathcal{A}_b голоморфных функций f_1 и f_2 на области U содержащей спрямляемую кривую γ (смотри теорему 2.7 [17, 18]), тогда $res(z_0, f).N$ является \mathbf{R} -гомогенным и \mathcal{A}_b -аддитивным по f : $res(z_0, a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 res(z_0, f_1) + a_2 res(z_0, f_2)$.

Если $y = \infty$, тогда рассмотрим $g(z) = f(1/z)$, и g имеет полюс в $z = 0$, следовательно, в этом случае утверждение этой теоремы следует из первой части доказательства.

15.1. Пример. Если функция f может быть записана в виде $f(z) = (a(z)((b(z)1/(z-y))c(z)))e(z)$ в окрестности точки $y \in \mathcal{A}_r$, где $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ и $e(z)$ являются \mathcal{A}_r -голоморфными и $a(y) \neq 0$, $b(y) \neq 0$, $c(y) \neq 0$ и $e(y) \neq 0$, $2 \leq r \leq 3$. Тогда $res(y, f).N = (2\pi)^{-1} \lim_{0 < \rho \rightarrow 0} \int_{\gamma}(a(z)((b(z)1/(z-y))c(z)))e(z)dz = (a(y)((b(y)N)c(y)))e(y)$. В частности, для γ из определения 10 с $a_n = 2\pi M$, $M \in \mathcal{A}_b$, $Re(M) = 0$, $|M| = 1$, $z_0 = 0$, $\xi(t) = t$ для любого t , мы имеем $\Delta_{\gamma} Arg_n \gamma = 2\pi M$.

16. Теорема. *Предположим, что U – это собственное открытое подмножество в \mathcal{A}_b , также f_1 и f_2 – две непрерывные функции из замыкания $\bar{U} := cl(U)$ для U в $\hat{\mathcal{A}}_b$, так что на топологической границе $Fr(U)$ области U они удовлетворяют неравенствам $|f_1(z)| < |f_2(z)| < \infty$ для любого $z \in Fr(U)$, где $\hat{\mathcal{A}}_b := \mathcal{A}_b \cup \{\infty\}$ – это одно-точечная (Александровская) компактификация \mathcal{A}_b . Пусть $q_2 := f_2$ и $q_1 := f_1 + f_2$ являются (p, r, b) -квазимероморфными функциями в U , а нули и полюсы ограничений $f_j|_W$ изолированные, где $W = U \cap \mathcal{A}_r$, $1 \leq r < b \leq 3$, $j = 1, 2$. Предположим также, что q_j являются (p, r, b) -квазиконформными в окрестности U_{z_0} в U всякого ее нуля z_0*

$1/q_j(z)$ являются (p, r, b) -квазиконформными в $U_{z_0} \setminus \{z_0\}$ для любого полюса z_0 , где $p \in \mathbf{N}$ может зависеть от z_0 , для $j = 1$ и $j = 2$. Пусть также γ из определения 10 является петлей, где $\gamma(0) = \gamma(1)$, не пересекающей какой-либо поверхности $S_y(q_j)$ для нуля или полюса y функции q_j для $j = 1$ и $j = 2$, где $\gamma \subset Fr(U)$, $1 \leq n$. Тогда $\Delta_\gamma Arg_n q_1 = \Delta_\gamma Arg_n q_2$.

Доказательство. Отображения $z \mapsto z - y_0$ и $z \mapsto \rho z$ для $0 < \rho < \infty$ являются псевдоконформными диффеоморфизмами \mathcal{A}_b . Поэтому, положим без ограничения общности $z_0 = 0$ и $\rho = 1$ для тех из определения 10. Если $n > 1$, то рассмотрим $h_j := q_j \circ Exp_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}; z)$ вместо q_j для $j = 1$ и $j = 2$, так как композиции отображений ассоциативны в теоретико-множественном смысле. С другой стороны, $Exp_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}; z)$ – это псевдоконформное отображение для $a_1 \neq 0, \dots, a_{n-1} \neq 0$. В силу теоремы 8.2 h_j удовлетворяют предположениям этой теоремы. Заменяя q_j на h_j , мы можем свести доказательство к случаю $n = 1$, так как $Ln_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}; \gamma(t)) = \xi(t)$ для ветви Ln такой, что $Ln(1) = 0$. Например, можно взять $a_n = 2\pi M$ и $\xi(t) = t$, $t \in [0, 1]$, $M \in \mathcal{A}_b \ominus \mathcal{A}_r$, $|M| = 1$, $Re(M) = 0$ в определении 10. Поэтому, рассмотрим q_j для $n = 1$, где $j = 1, 2$.

Кривая γ спрямляема, следовательно, компактна. Нули и полюсы ограничений $f_j|_W$ изолированные, следовательно, существует последовательность $\{\psi_m : m \in \mathbf{N}\}$ спрямляемой петли в U сходящейся к γ равномерно, когда m стремится к бесконечности и, так что всякое ψ_m не пересекает никакой $S_y(q_j)$ для $j = 1$ и $j = 2$ для нулей или полюсов y функций f_j . Таким образом, рассмотрим интеграл $\int_\gamma dLn(q_j(z))$ вдоль γ как предел интегралов $\int_{\psi_m} dLn(q_j(z))$, когда m стремится к бесконечности, так как f_j непрерывна в окрестности V границы $Fr(U)$ в \bar{U} и $\psi_m \subset U$ для любых m и j , где V не содержит какого-либо нуля или полюса функций q_1 и q_2 . Последнее V существует, так как $|f_1(z)| < |f_2(z)| < \infty$ для любого $z \in Fr(U)$.

Если z_0 – это полюс q_j в z_0 , тогда $1/q_j(z)$ имеет нуль в z_0 . Нет никаких нулей или полюсов функций q_1 и q_2 на $Fr(U)$, так как $|f_1(z)| < |f_2(z)| < \infty$ на $Fr(U)$.

Для любой выбранной ветви логарифмической функции имеется равенство $Ln(1/q_j) = -Ln(q_j)$ (смотри предложение 10.2). Более того, $q_1 = f_1 + f_2 = f_2 + f_2[(1/f_2)f_1] = f_2(1 + (1/f_2)f_1)$, так как $\mathcal{A}_3 = \mathbf{O}$ альтернативна, и $|(1/f_2)f_1| < 1$ на $Fr(U)$. Рассмотрим треугольник образованный векторами $q_1(z)$, $q_2(z)$ и $q_1(z) - q_2(z) = f_1(z)$ для $z \in Fr(U)$, тогда $Arg q_1(z) = Arg q_2(z) + \phi(z)$, так что $|\phi(z)| < \pi/2$ для любого $z \in Fr(U)$ для выбранной ветви Ln , где $Arg q_j$ и $\phi(z) \in \mathcal{I}_b$. Поэтому, $\Delta_\xi Arg q_1 = \Delta_\xi Arg q_2 + \Delta_\xi \phi = \Delta_\xi Arg q_2$, так как $\xi(0) = \xi(1)$ и $|\phi(z)| < \pi/2$ для любого $z \in \xi([0, 1]) \subset Fr(U)$, так что $\Delta_\xi \phi = 0$. В самом деле, точка $w(z) = (1/f_2(z))f_1(z)$ принадлежит единичному открытому шару $B(\mathcal{A}_b, 0, 1^-) := \{w \in \mathcal{A}_b : |w| < 1\}$. Поэтому вектор $v = 1 + w$ не может повернуться на 2π вокруг нуля. Таким образом, числа оборотов для q_1 и q_2 вокруг нуля одинаковы. Из соотношений h_j с q_j для $n > 1$ следует утверждение этой теоремы также при $n > 1$: $\Delta_\gamma Arg_n q_1 = \Delta_\gamma Arg_n q_2$.

16.1. Теорема. Пусть выполнены предположения замечания 14.2, когда $W = B(\mathcal{A}_r, y_0, R^-) \setminus A$, где $A := \{y \in B(\mathcal{A}_r, y_0, R^-) : f'(y) = 0\}$ состоит из изолированных точек, $0 < R < \infty$. Пусть также W содержит либо нули, либо полюсы (q, r, b) -квазирегулярной функции f , но не одновременно нули и полюсы, $1 \leq r < b \leq 3$. Тогда для любой спрямляемой кривой ω в J охватывающей z_0 и всякого $2^r \leq n \leq 2^b - 1$ существует семейство спрямляемых кривых γ в U охватывающих $S = S_{z_0}$, так что $\gamma \cap S_{z_i} = \emptyset$ для любого нуля или полюса z_i функции f в W и, так что γ не содержится в \mathcal{A}_r и

$$\Delta_\gamma Arg_n f = pK \Delta_\omega Arg_1 f$$

для некоторого $K \in \mathcal{A}_b$, $|K| = 1$, $Re(K) = 0$, $K = K(\gamma)$, $1 \leq p \in \mathbf{Q}$.

Доказательство. В силу предположений этой теоремы нули или полюсы z_0 функции f изолированы в W , следовательно, $f(z) \neq 0$ в $Y \setminus \{z_0\}$ для достаточно малой окрестности Y точки z_0 в \mathcal{A}_r . Если z_0 – это полюс функции f , тогда z_0 – это нуль функции $1/f$ и обратно. Если $z \in Y \setminus \{z_0\}$, тогда $f(z) \neq 0$ и применим автоморфизмы $\hat{R}_{\zeta-y_0, z-y_0}$ к $f(z)$ по всем $\zeta \in U$ с $Re(\zeta) = Re(z)$ и $(\zeta - y_0) = \hat{R}_{\zeta-y_0, z-y_0}(z - y_0)$. Возьмем ограничения общности $y_0 = 0$, так как $z \mapsto z + y_0$ – это биективное псевдоконформное отображение из \mathcal{A}_b на \mathcal{A}_b . Это дает замкнутую поверхность $S_{f(z)}$ аналогичную $S = S_{z_0}$. В соответствии с леммой 12 $dim_{\mathbf{R}} S_{z_0} = dim_{\mathbf{R}} S_{f(z)} = 2^b - 2^r$.

Если $z_k \in \mathcal{A}_r$ получается из $z_l \in \mathcal{A}_r$ с $l \neq k$ благодаря вращению вокруг действительной оси в плоскости $\pi^{k,l}$ содержащейся в $\mathcal{A}_b \ominus \mathcal{A}_r$, которой соответствует однопараметрическая над \mathbf{R} подгруппа вращений в $SO_{\mathbf{R}}(2^b, \mathbf{R})$, тогда z_k и z_l одновременно или нули, или полюсы благодаря условиям этой теоремы, так как f является (q, r, b) -квазирегулярной.

Имеются следующие разложения алгебр как \mathbf{R} -линейных пространств благодаря процедуре удвоения: $\mathbf{H} = \mathbf{C} \oplus i_2\mathbf{C}$, $\mathbf{O} = \mathbf{H} \oplus i_4\mathbf{H}$ и $\mathbf{O} = \mathbf{C} \oplus i_2\mathbf{C} \oplus i_4\mathbf{C} \oplus i_6\mathbf{C}$ соответствующие (r, b) парам равным $(1, 2)$, $(2, 3)$ и $(1, 3)$ соответственно, что дает вложение геометрии в \mathcal{A}_r в геометрию в \mathcal{A}_b . Рассмотрим пересечение поверхности S с плоскостью π содержащей z_0 и перпендикулярной действительной оси \mathbf{R} , $\pi = z_0 + i_s\mathbf{R} \oplus i_q\mathbf{R}$, где $2^r \leq s < q \leq 2^b - 1$. Тогда $\eta := S \cap \pi$ – это спрямляемая петля содержащая z_0 и η имеет число поворотов 1 относительно любой внутренней точки в области P_η охватываемой η в π с границей $\partial P_\eta = \eta$.

Рассмотрим спрямляемую петлю γ состоящую из следующих частей: петли γ_+ outside P_η , петли γ_- внутри P_η , ψ , где $\gamma(t) = \gamma_+(3t)$ для $0 \leq t \leq 1/3$, $\gamma(t) = \psi(6t - 2)$ для $1/3 < t < 1/2$, $\gamma(t) = \gamma_-(3t - 3/2)$ для $1/2 \leq t \leq 5/6$, $\gamma(t) = \psi(6 - 6t)$ для $5/6 < t \leq 1$, так что ψ соединяет γ_+ с γ_- , так что ψ обходится дважды в одном и противоположном направлениях, γ_+ и γ_- содержатся в π , для которых $|\gamma_+(t)| > |\eta(t)|$ и $|\gamma_-(1-t)| < |\eta(t)|$, и $|\gamma_+(t) - \eta(t)| < \delta$, и $|\gamma_-(1-t) - \eta(t)| < \delta$ для любого $t \in [0, 1]$, и $\gamma(t) \in U$, и $\gamma(t)$ не нуль или полюс функции f для любого $t \in [0, 1]$, $\delta > 0$ – это достаточно малая постоянная, так что γ_- и η охватывает те же нули и полюсы кроме тех, которые принадлежат S_{z_0} , γ_+ и γ_- имеют противоположные ориентации (смотри также теорему 16 и уравнения (1, 2) ниже более детально). Поскольку множество A в W состоит из изолированных точек, тогда петля γ может быть выбрана так, чтобы $\gamma([0, 1]) \cap (\bigcup \{S_y : y \in A\}) = \emptyset$. Это охватывание подчинено в \mathcal{A}_b свойствам Ln (смотри теоремы 2.23 и 2.24 [23]). Возьмем $0 < \rho_+ - \rho_-$ достаточно малыми и используем приближение $f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0).h + O(h^2)$ и свойства 1.(P1 – P3) в окрестности нуля z_0 функции f в \mathcal{A}_r и свойства 1.(Q1 – Q7) в окрестности точки z_0 в \mathcal{A}_b , где $f(z_0) = 0$ для нуля z_0 функции f (смотри также теоремы 2.4 и 2.5 [23]). Если оператор T на \mathcal{A}_r имеет вид $T(h) = ahb$, где $a = a(z) \neq 0$, $b = b(z) \neq 0$, a и $b \in \mathcal{A}_r$, тогда $T^{-1}(h) = a^{-1}hb^{-1}$, так как $T^{-1} \circ T(h) = h$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$, где $r = 1$ или $r = 2$, возьмем $b = 1$ для $r = 1$. С другой стороны, отображения $\exp(z)$ и $Ln(z)$ являются псевдоконформными для $r = 2$ или голоморфными для $r = 1$ на их областях, так что $Ln \circ \exp(z) = z$ для соответствующей ветви Ln и $(\partial Ln(s)/\partial s).h = (\partial \exp(z)/\partial z)^{-1}.h$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$, где $s = \exp(z)$, $f'(z) = \partial f(z)/\partial z$ и $\partial f(z)/\partial \bar{z} = 0$ для псевдоконформной функции f . В то же время $(\partial(z - z_0)^p/\partial z).h = \rho\alpha h\beta$ для $1 \leq p \in \mathbf{Z}$ и всякого $h \in \mathcal{A}_r$, где $z \neq z_0$, $\alpha = \alpha(z - z_0)$, $\beta = \beta(z - z_0)$, α и $\beta \in \mathcal{A}_r$, $|\alpha\beta| = |z - z_0|^{p-1}$ для $r = 2$, или $\alpha = (z - z_0)^{p-1}$ и $\beta = 1$ для $r = 1$.

Выберем ψ в плоскости π_1 содержащей \mathbf{R} и точку $\zeta' \in \mathcal{A}_b \ominus \mathcal{A}_r$, так что ψ не пересекает никакой S_{z_i} . Следовательно, γ не пересекает никакой S_{z_i} и охватывает $S = S_{z_0}$. Направление γ является естественным, так что в плоскости π петля γ_+ проходит против

часовой стрелке и γ_- проходится по часовой стрелке, если смотреть с положительной оси $M_\pi \mathbf{R}_+$, где $\mathbf{R}_+ := (0, \infty)$, $M_\pi \in \mathcal{I}_b$, $M_\pi \perp \pi$, M_π соответствует вектору, который является векторным произведением в действительной тени базисных векторов плоскости π . Хотя вместо описания ориентации достаточно записать аналитические формулы для кривых, что сделано ниже.

Для $r = 1$ если \bar{z}_0 – это нуль или полюс вместе с z_0 , тогда γ охватывает z_0 и \bar{z}_0 симметрично, так как \bar{z}_0 получается из z_0 вращением на угол π вокруг действительной оси. Для $r = 2$, если $z_j = \sum_{k=0}^3 z_{j,k} i_k$ и $z_l \in S_{z_0}$, тогда z_j и z_l оба или нули или полюсы благодаря условиям наложенным в замечании 14.2 и в этой теореме, например, когда $z_{j,k} = -z_{l,k}$ для некоторого $1 \leq k \leq 3$, где $z_{j,k} \in \mathbf{R}$ для любого j, k .

Используя итерированные экспоненты выберем $\gamma(t)$ с точностью до \mathcal{A}_b -псевдоконформного диффеоморфизма области U в виде

$$(1) \gamma_+(t) = Re(z_0) + \rho_+ Exp_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}; \xi(t)),$$

$$(2) \gamma_-(t) = Re(z_0) + \rho_- Exp_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}; \xi(1-t)),$$

где $0 < \rho_- < \rho_+ < R$, $1 \leq n \leq 2^b - 2^r$, $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathcal{A}_b$ – это ненулевые постоянные, $\xi([0, 1])$ – это петля, например, $\xi(t) = \exp(2\pi Mt)$, $t \in [0, 1]$, $M \in \mathcal{A}_b \ominus \mathcal{A}_r$, $|M| = 1$, $Re(M) = 0$. Поскольку S – это гладкое C^∞ компактное многообразие имеющее C^∞ действительную тень, тогда оно имеет $2^b - 2^r$ локальных координат. Более того, S гомеоморфна поверхности вращения, так что S может быть параметризована углами $\theta_1, \dots, \theta_m$, где $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$ и $0 \leq \theta_j \leq \pi$ для $j = 2, \dots, m$, $m = 2^b - 2^r$, так что $z \in S$ является функцией $z = z(\theta_1, \dots, \theta_m)$ (смотри формулы 10.2(2)).

В силу следствие 3.5 [18] сфера $S(\mathcal{A}_b, y_0, R)$ в \mathcal{A}_b радиуса $0 < R < \infty$ с центром в y_0 может быть параметризована с помощью итерированных экспоненциальных функций. Пусть $\{i_0, i_1, i_2, i_3\}$ – это стандартные генераторы тела кватернионов \mathbf{H} , где $i_0 = 1$, $i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1$, $i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3$, $i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1$, $i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2$, тогда

$$(3) \exp(i_1(p_1 t + \zeta_1) \exp(-i_3(p_2 t + \zeta_2) \exp(-i_1(p_3 t + \zeta_3)))) = \exp(i_1(p_1 t + \zeta_1) \exp(-(p_2 t + \zeta_2)(i_3 \cos(p_3 t + \zeta_3) - i_2 \sin(p_3 t + \zeta_3))))$$

$$= \exp(i_1(p_1 t + \zeta_1)(\cos(p_2 t + \zeta_2) - \sin(p_2 t + \zeta_2)(i_3 \cos(p_3 t + \zeta_3) - i_2 \sin(p_3 t + \zeta_3))))$$

$$= \exp((p_1 t + \zeta_1)(i_1 \cos(p_2 t + \zeta_2) + i_2 \sin(p_2 t + \zeta_2) \cos(p_3 t + \zeta_3) + i_3 \sin(p_2 t + \zeta_2) \sin(p_3 t + \zeta_3))) = \cos(p_1 t + \zeta_1) + i_1 \sin(p_1 t + \zeta_1) \cos(p_2 t + \zeta_2) + i_2 \sin(p_1 t + \zeta_1) \sin(p_2 t + \zeta_2) \cos(p_3 t + \zeta_3) + i_3 \sin(p_1 t + \zeta_1) \sin(p_2 t + \zeta_2) \sin(p_3 t + \zeta_3),$$

где $p_j, \zeta_j \in \mathbf{R}$ для любого j .

Далее по индукции выполнено равенство:

$$(4) \exp({}_{q+1}M(p, t; \zeta)) = \exp\{ {}_qM((i_1 p_1 + \dots + i_{2^q-1} p_{2^q-1}), t; (i_1 \zeta_1 + \dots + i_{2^q-1} \zeta_{2^q-1}) \exp(-i_{(2^q+1-1)}(p_{2^q} t + \zeta_{2^q}) \exp(- {}_qM((i_1 p_{2^q+1} + \dots + i_{2^q-1} p_{2^{q+1}-1}), t; (i_1 \zeta_{2^q+1} + \dots + i_{2^q-1} \zeta_{2^{q+1}-1}))))\},$$

где i_{2^q} – это генератор удвоения алгебры \mathcal{A}_{q+1} из алгебры \mathcal{A}_q , так что $i_j i_{2^q} = i_{2^q+j}$ для любого $j = 0, \dots, 2^q - 1$, функция $M(p, t; \zeta)$ записана с нижним индексом ${}_qM$ и она дается уравнением

$$(5) M(p, t) = M(p, t; \zeta) = (p_1 t + \zeta_1)[i_1 \cos(p_2 t + \zeta_2) + i_2 \sin(p_2 t + \zeta_2) \cos(p_3 t + \zeta_3) + \dots + i_{2^q-2} \sin(p_2 t + \zeta_2) \dots \sin(p_{2^q-2} t + \zeta_{2^q-2}) \cos(p_{2^q-1} t + \zeta_{2^q-1}) + i_{2^q-1} \sin(p_2 t + \zeta_2) \dots \sin(p_{2^q-2} t + \zeta_{2^q-2}) \sin(p_{2^q-1} t + \zeta_{2^q-1})]$$

для алгебры Кэли-Диксона с $2 \leq q < \infty$, где $\zeta = \zeta_1 i_1 + \dots + \zeta_{2^q-1} i_{2^q-1} \in \mathcal{A}_q$ – это параметр начальной фазы, $\zeta_j \in \mathbf{R}$ для любого $j = 0, 1, \dots, 2^q - 1$. Когда $t = 1$ и p_j являются переменными $p_1 \in [0, 2\pi]$ и $p_j \in [0, \pi)$ для всякого $j = 2, \dots, 2^q - 1$, тогда образ итерированной экспоненты даваемой уравнением (4) для $2 \leq q \leq 3$ или, в частности, формулой (3) является единичной сферой в \mathcal{A}_q , где ζ_j фиксировано для любого $j = 1, \dots, 2^q - 1$ и может быть, в частности, взято нулем. Это дает однолистное накрытие

сферы в \mathcal{A}_q . Если p_j и ζ_j , $j = 1, \dots, 2^q - 1$ фиксированы и t – это переменная, тогда формулы (3) от (4, 5) дают кривые в \mathcal{A}_q . Это сводит петлю, когда $p_1 = 2\pi$ и $p_j = 0$ или $p_j = \pi$ для любого $j = 2, \dots, 2^q - 1$, $t \in [0, 1)$. В частности, если $\zeta_j = 0$ для любого $j > n$, $\zeta_1 \neq 0, \dots, \zeta_n \neq 0$ и $p_k = 0$ для любого $k \neq n$, тогда итерированная экспонента в формулах (3) или (4, 5) сводится к Exp_n .

Тогда S диффеоморфна пересечению $S(\mathcal{A}_b, y_0, R) \cap (i_{2^r}\mathbf{R} \oplus i_{2^{r+1}}\mathbf{R} \oplus \dots \oplus i_{2^{b-1}}\mathbf{R})$.

В соответствии с теоремой Римана об отображении 4.12.40 над \mathbf{C} [29] или теоремами 2.1.5.7 и 2.47 [23, 24] над \mathbf{H} и \mathbf{O} , если P – это открытое подмножество в \mathcal{A}_q , $q = 1$ или $q = 2$, или $q = 3$, удовлетворяющие условиям замечания 14 и с границей ∂P состоящей более, чем из одной точки, тогда P псевдоконформно эквивалентна открытому единичному шару в \mathcal{A}_q .

В пределах всякой подобласти P в U в \mathcal{A}_b удовлетворяющей условиям замечания 14 применима теорема о гомотопии 2.11 [17, 18] для интеграла вдоль кривой над \mathcal{A}_b . В силу лемма 11 выше мы можем рассмотреть область U и, следовательно, кривую γ в ней относительно псевдоконформного диффеоморфизма. Поэтому, остаток доказательства относительно псевдоконформного диффеоморфизма сводится к случаю шаров и сфер благодаря условиям ($P1 - P3$).

Поэтому, существуют n , a_1, \dots, a_{n-1} и ξ такие, что γ_+ и γ_- даются формулами (1, 2) и $\Delta Arg_1 \xi \neq 0$, следовательно, $\Delta_\gamma Arg_n \gamma \neq 0$, например, $a_n = 2\pi M$, $M \in \mathcal{A}_b \ominus \mathcal{A}_r$, $|M| = 1$, $Re(M) = 0$. Это применимо к обеим S_{z_0} и $S_{f(z)}$ полученным из z_0 и $f(z)$ семействами автоморфизмов. Если мы возьмем $\chi = \pi \cap S_z$ с $Re(z) = Re(z_0)$, $|Im(z)| > |Im(z_0)|$, $z \neq z_0$, так что S_z не содержит никакого полюса или нуля функции f , тогда всякое $\zeta \in (\pi - z_0 + f(z)) \cap S_{f(z)}$ имеет вид $\zeta = f(\chi(t))$ и отображение $[0, 2\pi) \ni t \mapsto \zeta \in (\pi - z_0 + f(z)) \cap S_{f(z)}$ биективно, следовательно, $\Delta_\chi Arg_n f \neq 0$. Это возможно, так как множество A полюсов или нулей функции f в W состоит из изолированных точек, $\forall z_0 \in A: \min\{|y - z_0| : y \in A \setminus \{z_0\}\} > 0$. В силу условия (Q7) для $a_n = 2\pi M$ и $\xi(t) = \exp(2\pi Mt)$ в формулах (1, 2) мы имеем $\Delta_\chi Arg_n f = 2\pi ukM$, где $|M| = 1$, $Re(M) = 0$, $M \in \mathcal{A}_b$, k – число обходов χ , которое мы возьмем равным 1, u – это сумма порядков всех либо полюсов, либо нулей из W охватываемых S_z (смотри также теорему 16). Для достаточно малого $|Im(z)| - |Im(z_0)| = \epsilon > 0$ число u равно сумме порядков всех либо полюсов, либо нулей принадлежащих $S = S_{z_0}$ и $B(\mathcal{A}_r, Re(z_0), |Im(z_0)|) := \{y \in \mathcal{A}_r : |y - Re(z_0)| \leq |Im(z_0)|\}$.

Тогда $u \neq 0$, так как все z_l принадлежащие S одновременно являются либо нулями, либо полюсами вместе с z_0 (смотри выше). Можно взять $\gamma = \chi$, что дает $u = u_\chi$. Если взять γ состоящую из γ_+ и γ_- , и ψ как выше, тогда $u = u_{\gamma_+} - u_{\gamma_-} > 0$, так как $S_{z_0} \subset B(\mathcal{A}_b, Re(z_0), \rho_+) \setminus B(\mathcal{A}_b, Re(z_0), \rho_-)$. С другой стороны, $\Delta_\omega Arg_1 f = 2\pi vN$, где $|N| = 1$, $Re(N) = 0$, $N \in \mathcal{A}_r$, v – порядок z_0 , $v \geq 1$ для нуля, $v \leq -1$ для полюса. Таким образом, $1 \leq p = u/v \in \mathbf{Q}$, также $M = KN$ для $K = MN^*$ благодаря альтернативности алгебры \mathcal{A}_r для $2 \leq r \leq 3$, так как u и v имеют один и тот же знак, и $|u| \geq |v|$, $|M|^2 = MM^* = M^*M = -M^2$ для чисто мнимой $M \in \mathcal{A}_b$, и неизбежно следует утверждение этой теоремы.

16.2. Замечание. Если выполнены предположения теоремы 16.1, кроме того, что S_{z_0} содержит как нули, так и полюсы, то может случиться, что $p = 0$ благодаря $N - P = 0$, где $N = \sum_k N_k$ – это число нулей, и $P = \sum_k P_k$ – это число полюсов принадлежащих $S \cap \mathcal{A}_r$, где всякий нуль или полюс считается согласно его порядку N_k и P_k соответственно.

17. Теорема. Предположим, что f – это $(1, b)$ -квазицелая функция такая, что $f(\tilde{z}) = \tilde{f}(z)$ для любого $z \in \mathcal{A}_b$, также $f^s(p) = f^s(-p)$ для любого $p \in \mathcal{A}_b$ с $Re(p) \neq 0$, где f^s – это $(1, b)$ -квазицелая функция в сферических \mathcal{A}_b -координатах с $f = f^s \circ E^{-1}$

(смотри определения 2 и 2.1), $2 \leq b \leq 3$, $0 < q < \infty$, каждый нуль z_0 ограничения $f|_{\mathbf{C}}$ может быть только в полосе $\{z \in \mathbf{C} : -q \leq \operatorname{Re}(z) \leq q\}$, $f(z)$ не имеет никакого действительного нуля. Тогда все нули ограничения $f|_{\mathbf{C}}$ функции f на поле комплексных чисел \mathbf{C} являются комплексными и принадлежат прямой $\operatorname{Re}(z) = 0$.

Доказательство. Предположим, что z_0 – это комплексный нуль ограничения $f|_{\mathbf{C}}$, $f(z_0) = 0$, тогда $-q \leq \operatorname{Re}(z_0) \leq q$ и $\operatorname{Im}(z_0) \neq 0$ согласно предположению этой теоремы. Положим $v_0 := \operatorname{Re}(z_0)$. В случае $v_0 = 0$ доказывать нечего. Поэтому рассмотрим $v_0 \neq 0$, тогда $f(-z_0) = 0$, $f(\tilde{z}_0) = 0$ и $f(-\tilde{z}_0) = 0$ благодаря свойствам симметрии функции f , так как $f^s(p) = f^s(-p)$ для любого $p \in \mathcal{A}_b$ с $\operatorname{Re}(p) \neq 0$, $E(y) = y$ для любого $y \in \mathbf{C}$, $f = f^s \circ E^{-1}$. Таким образом, без ограничения общности рассмотрим $0 < v_0 \leq q$. Следовательно, поверхности нулей $(1, b)$ -квазиконформного продолжения функции $f(z)$ таковы: $S_{z_0}^f := S_{z_0}$ и $S_{-z_0}^f := S_{-z_0}$ (смотри лемму 12), так как $z_0, \tilde{z}_0 \in S_{z_0}^f$ и $-z_0, -\tilde{z}_0 \in S_{-z_0}^f$. Эти поверхности S_{z_0} и S_{-z_0} симметричны относительно гиперплоскости $\pi_0 := \{z \in \mathcal{A}_b : \operatorname{Re}(z) = 0\}$. Без ограничения общности положим $\operatorname{im}(z_0) > 0$, где $\operatorname{im}(z_0) = i_1^* \operatorname{Im}(z_0)$, $\operatorname{Im}(z_0) = z_0 - \operatorname{Re}(z_0) = i_1 \operatorname{im}(z_0)$.

Поскольку тело кватернионов $\mathbf{H} = \mathcal{A}_2$ имеет естественное вложение в алгебру октонионов $\mathbf{O} = \mathcal{A}_3$, тогда достаточно доказать эту теорему для $b = 2$. Отметим, что Ln имеет счетное число ветвей с некоммутативной римановой поверхностью \mathcal{R} данной в §10.2. Поэтому, $Ln_n(z_1, \dots, z_{n-1}, 1; z_n)$ имеет некоммутативную риманову поверхность вложенную в \mathcal{R}^n , так как $z \mapsto a^{-1}z$ – это псевдоконформное отображение по z для $a \neq 0$ в \mathcal{A}_b , $z \mapsto 1/z$ является также псевдоконформным для $z \neq 0$ (смотри следствие 2.7 [23]), где $z_j \neq 0$ и $z_j \in \mathcal{A}_b$ для любого $j = 1, \dots, n$, следовательно, E^{-1} имеет некоммутативную риманову поверхность \mathcal{R}_E размерности 2^b над \mathbf{R} вложенную в \mathcal{R}^n (смотри уравнения 2.1(1, 2)).

Возьмем $b = 2$ и рассмотрим петли

$$(1) q_j(t) = v_j + \rho_j \exp(\pi K_j \exp(2\pi N_j t)/2)$$

охватывающую S_{z_j} параметризованную $t \in [0, 1) \subset \mathbf{R}$, где $j = 0$ или $j = 1$, $v_1 = -v_0$, $K = i_1 = \mathbf{i}$, $N = i_3$, $|N| = 1$, N – это отмеченный чисто мнимый кватернион ортогональный K , $\operatorname{Re}(NK^*) = 0$, $0 < \rho_j - |\operatorname{Im}(z_0)|$ достаточно мало, $\rho_0 = \rho_1$ (смотри теорему 16.1). Для $j = 0$ возьмем $K_0 = K$ и $N_0 = N$, и для $j = 1$ возьмем $K_1 = -K$, и $N_1 = -N$. Рассмотрим сферы $S(\mathbf{H}, v_0, |\operatorname{Im}(z_0)|)$ и $S(\mathbf{H}, -v_0, |\operatorname{Im}(z_0)|)$, где $S(\mathcal{A}_b, x, R) := \{y \in \mathcal{A}_b : |y - x| = R\}$, $0 < R < \infty$.

В силу теоремы I.20.2 [15], если D – это открытая связная область в \mathbf{C} и функции f_1 и f_2 голоморфны на D , так что $f_1(x_n) = f_2(x_n)$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и существует предельная точка $x \in D$ последовательности $\{x_n : n \in \mathbf{N}\} \subset D$, тогда $f_1(y) = f_2(y)$ для любого $y \in D$. Функция f голоморфна на \mathbf{C} и $(1, b)$ -квазицелая, следовательно, в силу последней теоремы нули функции f и f' в \mathbf{C} изолированы. Поэтому, существует $0 < \rho < \infty$ и $0 < \delta < |\operatorname{Im}(z_0)|$, так что для любого другого комплексного нуля $z_2 \notin \{z_0, -z_0, \tilde{z}_0, -\tilde{z}_0\}$ не принадлежащего $S(\mathbf{C}, v_0, |\operatorname{Im}(z_0)|) \cup S(\mathbf{C}, -v_0, |\operatorname{Im}(z_0)|)$, либо $\{z_2, -z_2, \tilde{z}_2, -\tilde{z}_2\} \subset B(\mathcal{A}_b, v_0, |\operatorname{Im}(z_0)| - \delta) \cup B(\mathcal{A}_b, -v_0, |\operatorname{Im}(z_0)| - \delta)$ or $\{z_2, -z_2, \tilde{z}_2, -\tilde{z}_2\} \subset \mathcal{A}_b \setminus [B(\mathcal{A}_b, v_0, \rho + \delta) \cup B(\mathcal{A}_b, -v_0, \rho + \delta)]$. Возьмем $\rho_+ = \rho$ и $\rho_- = \rho - \delta$ в формулах 16.1(1, 2) с $v_0 = \operatorname{Re}(z_0)$ и $v_1 = -v_0 = \operatorname{Re}(-z_0)$ как данные вместо $\operatorname{Re}(z_0)$ для γ там и возьмем две петли γ_0 и γ_1 соответствующие петлям даваемых уравнениями (1, 2) для ρ_+ и ρ_- , обозначим их через $\gamma_{j,+}$ и $\gamma_{j,-}$ для $j = 0, 1$ соответственно. Тогда γ_0 и γ_1 соединим спрямляемой кривой η не содержащей никакого нуля функции f , так что η обходится дважды в одном и противоположном направлениях.

Выполняется тождество

$$K \exp(2\pi N t) = K \cos(2\pi t) + K N \sin(2\pi t) = \exp(\pi K \exp(2\pi N t)/2),$$

так как $|K \cos(2\pi t) + KN \sin(2\pi t)| = 1$ и $e^M = \cos(|M|) + M \sin(|M|)/|M|$ для любого $M \in \mathcal{I}_b \setminus \{0\}$, $\sin(\pi/2) = 1$, следовательно, $q_j(t)$ ортогонально \mathbf{R} в \mathbf{H} относительно скалярного произведения $(z, \xi) := \operatorname{Re}(z\xi^*)$, более того, $q_0(0) = z_0 + (\rho_0 - \rho')i_1$, $q_1(0) = -z_0 - (\rho_0 - \rho')i_1$, так как без ограничения общности положим $\operatorname{im}(z_0) = \rho' > 0$, где $z_0 = v_0 + \operatorname{im}(z_0)i_1$. Рассмотрим также окружности $q_{2+j}(t) = v_j + \rho_2 \exp(\pi K_j \exp(2\pi N_j t)/2)$. Предполагается, что γ записано в z -представлении с помощью формул 2(2–5).

Положим $p_w(t) := v_0 + \rho_w i_1 - 2\pi i_2 t$, где $\rho_0 := \rho_+$ и $\rho_2 := \rho_-$, $w = 0$ и $w = 2$, тогда $E_2(p_w(t)) = q_w(t)$ и $E_2(-p_w(t)) = q_{1+w}(t)$ для всякого $t \in [0, 1]$ (смотри определение 2.1 и формулу 2.1(1)), так как $v_1 = -v_0 \neq 0$.

Поэтому,

$$(2) f(q_w(t)) = f(q_{1+w}(t))$$

для любого $t \in [0, 1]$ и для $w = 0, 2$, так как $f^s(p) = f^s(-p)$ для любого $p \in \mathcal{A}_b$ с $\operatorname{Re}(p) \neq 0$, $f = f^s \circ E_2^{-1}$ согласно условиям этой теоремы.

Рассмотрим петлю γ состоящую из $q_j(t)$ и пути соединяющего их дважды проходимо в одном и обратном направлениях, так что γ проходится по часовой стрелке в частях q_1 и q_2^- , и против часовой стрелке в частях q_0 и q_3^- в плоскостях $v_j + K\mathbf{R} \oplus KN\mathbf{R}$, если смотреть с отрицательной оси $((-\infty, 0)N)$ перпендикулярной действительной оси: $\gamma(t) = \gamma_0(4t)$ для $0 \leq t < 1/4$, $\gamma(t) = \gamma_2(4(t-1/4))$ для $1/4 \leq t < 1/2$, $\gamma(t) = \gamma_1(4(t-1/2))$ для $1/2 \leq t < 3/4$ и $\gamma(t) = \gamma_2(1-4(t-3/4))$ для $3/4 \leq t < 1$, где $\gamma_0(t)$ и $\gamma_1(t)$ составлены из q_0, q_2^- и q_1, q_3^- для S_{z_0} , и S_{-z_0} соответственно, и соединяющих их путей проходимых дважды в одном и противоположном направлениях как в доказательстве теоремы 16.1, спрямляемая кривая $\{\gamma_2(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ joins $q_0(1)$ с $q_1(0)$ такая, что $\gamma([0, 1]) \subset V := \{z \in \mathbf{H} : -q \leq \operatorname{Re}(z) \leq q\}$, где $\gamma(0) = \gamma(1)$, $\gamma_{0,+} = q_0$, $\gamma_{1,+} = q_1$, $\gamma_{0,-} = q_2^-$, $\gamma_{1,-} = q_3^-$, так как $K(KN) = -N$. Вместо того, чтобы говорить об ориентациях достаточно записать аналитические формулы для кривых, что сделано в этом разделе.

Поскольку q и $|z|$ конечны, то кривая γ может быть выбрана спрямляемой. Если z_2 – некоторый другой нуль внутри окружностей $S(\mathbf{C}, v_0, |\operatorname{Im}(z_0)|) \cup S(\mathbf{C}, -v_0, |\operatorname{Im}(z_0)|)$, то S_{z_2} и S_{-z_2} охватываются также кривой γ в смысле теоремы 16. Их добавочное значение к p в $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}_2 f$ будет положительным вместе с z_0 и $-z_0$ согласно теореме 16.1. Пусть p_0 – это часть p , которая соответствует $z_2 \in S(\mathbf{C}, v_0, |\operatorname{Im}(z_0)|) \cup S(\mathbf{C}, -v_0, |\operatorname{Im}(z_0)|)$ с $\operatorname{Re}(z_2) = 0$. Обозначим множество таких нулей функции f через Z , $Z := \{z \in S(\mathbf{C}, v_0, |\operatorname{Im}(z_0)|) \cup S(\mathbf{C}, -v_0, |\operatorname{Im}(z_0)|) : \operatorname{Re}(z) = 0, f(z) = 0\}$. Тогда Z конечно и может оказаться пустым, так как $\operatorname{Re}(z_0) = v_0 \neq 0$ по предположению сделанному выше. Если $z \in \mathbf{C}$ и $f(z) = 0$, тогда мнимая часть числа z ненулевая, $\operatorname{Im}(z) \neq 0$, так как f не имеет никакого действительного нуля по предположению этой теоремы.

Нет никакого другого нуля функции f вне полосы $-q \leq \operatorname{Re}(z) \leq q$ в \mathbf{C} , следовательно, нет никаких цепей пересекающихся сфер вокруг нулей функции f рассмотренного выше типа, кроме может быть пар сфер с центрами в v_0 и $-v_0$ с $0 < v_0 \leq q$. В самом деле, для $z_0 \in \mathbf{C}$ с $|\operatorname{Im}(z_0)| > q$ может быть только две такие сферы с данным z_0 , $\operatorname{Re}(z_0) = v_0$. В области $V_q := \{x \in \mathbf{C} : |\operatorname{Re}(x)| \leq q \text{ и } |\operatorname{im}(x)| \leq q\}$ может быть только конечное число нулей функции f и рассмотрение сводится к паре сфер, если существует нуль $z_0 \in V_q$ функции f . Если $z_3 \in \mathbf{C}$ – это нуль функции f , тогда существует открытая окрестность W точки z_3 , так что W может пересекать не более, чем конечное семейство окружностей $S(\mathbf{C}, v_j, |\operatorname{im}(z_0)|)$, где $v_0 = \operatorname{Re}(z_0)$, $v_1 = -v_0$, $j = 0$ или $j = 1$, z_0 – это нуль ограничения $f|_{\mathbf{C}}$ отличный от нулей соответствующих z_3 , $z_0 \notin \{z_3, -z_3, \bar{z}_3, -\bar{z}_3\}$. Поэтому, объявленная петля γ существует для любого комплексного нуля z_0 функции f .

Для любого нуля $z_2 \in S(\mathbf{C}, v_0, |\operatorname{im}(z_0)|) \cup S(\mathbf{C}, -v_0, |\operatorname{im}(z_0)|) \setminus Z$ существует, и для отмеченного z_0 функции f симметрия наложенная на f приводит к противоречию, когда

$Re(z_0) \neq 0$. Для доказательства этого обозначим семейство таких нулей z_2 и z_0 функции f через Y , $Y := \{z \in S(\mathbf{C}, v_0, |im(z_0)|) \cup S(\mathbf{C}, -v_0, |im(z_0)|) : Re(z) \neq 0, f(z) = 0\}$. Для $z \in Y$ пусть $k(z) \in \mathbf{N}$ обозначает его порядок. Тогда Y – конечное множество, так как f – нетривиальная целая функция на \mathbf{C} . Если $z \in Y$, тогда $-z, \bar{z}, -\bar{z} \in Y$ также и $k(z) = k(-z) = k(\bar{z}) = k(-\bar{z})$. Тогда $p = p_0 + p_Y$, где $p_Y \geq 1$ и $p_0 \geq 0$ ($p_0 \geq 1$, когда $Z \neq \emptyset$) отвечает множествам Y и Z соответственно. Применяя теоремы 16 и 16.1 для $r = 1$ и $b = 2$, мы получим для γ , что

$$(3) \Delta_\gamma Arg_2 f = \Delta_{\gamma_0} Arg_2 f + \Delta_{\gamma_1} Arg_2 f = 0,$$

так как $\Delta_{\gamma_0} Arg_2 f$ и $\Delta_{\gamma_1} Arg_2 f$ независимы от $a_1 = K$ и $a_1 = -K$ соответственно, но $N_0 = -N_1$. С другой стороны,

$$(4) \int_{\gamma_0} dLn_2(\pi K_0/2, 1; f(z)) = \int_{\gamma_1} dLn_2(\pi K_1/2, 1; f(z)),$$

так как $\int_{q_j} dLn_2(\pi K_j/2, 1; f(z)) = \int_0^1 dLn_2(\pi K_j/2, 1; f(q_j(t)))$ и выполняется равенство (2). Поэтому, применение теорем 16 и 16.1 только лишь к γ_0 благодаря уравнению (4) дает

$$(5) |\Delta_\gamma Arg_2 f| = k\pi,$$

где $k = k_0 + k_Y$, $k_0 \geq 0$ соответствует нулям из Z , в то время как $k_Y = \sum_{z \in Y} k(z) \geq 4$ соответствует нулям функции f из Y . Это дает противоречие уравнения (3) с (5), следовательно, все комплексные нули функции f могут лежать лишь на прямой $Re(z) = 0$.

17.1. Замечания. Примеры квазирегулярных и квазицелых функций даются с помощью предложения 9.1, следствия 9.2 и теоремы 9.4 и параграфа 9.5. Конечно всякая псевдоконформная функция на $U \setminus A$ или $\mathcal{A}_b \setminus A$, кроме множества A , состоящего из изолированных точек нулей его производных $A := \{z \in U : f'(z) = 0\}$ является в то же время квазирегулярной на U или квазицелой на \mathcal{A}_b соответственно (смотри о псевдоконформных функциях в [22, 23]).

С другой стороны, если $a > 0$, $q > 0$, тогда положим $P(x) = (x - a - qi)(\bar{x} - a + qi)(x + a - qi)(\bar{x} + a + qi)$ для $x \in \mathbf{C}$. Полином P удовлетворяет необходимым свойствам симметрии на \mathbf{C} , но он не имеет квазирегулярного продолжения на U открытое в \mathcal{A}_b с $W = U \cap \mathbf{C}$ открытым в \mathbf{C} для $2 \leq b \leq 3$, так как левые и правые части формулы (Q7) для $\hat{R}_{z,y} P$ отличаются на члены такие, как $-q^2(Mv + vM)(z + a - qM)(\bar{z} + a + qM) - (z - a - qM)(\bar{z} - a + qM)q^2(Mv + vM) + q(zv - v\bar{z})(z + a - qM)(\bar{z} + a + qM) + q(z - a - qM)(\bar{z} - a + qM)(zv - v\bar{z})$, где $z \in \mathcal{A}_b \setminus \mathbf{C}$, $z - Re(z) := Im(z) \neq 0$, $M = Im(z)/|Im(z)|$, $v \neq 0$, $v \parallel M$, $v \in \mathcal{I}_b \setminus \mathbf{C}$, $Re(v) = 0$, что следует из z -представления с помощью формул 2.(1–9). Тогда функции вида $(f_1 P) f_2$ также не обязаны удовлетворять условиям теоремы 17 даже, когда f_1 и f_2 квазицелые. Поэтому, класс функций удовлетворяющих условиям теоремы 17 довольно узок. График $\{(z, f(z)) : z \in \mathcal{A}_b\} \subset \mathcal{A}_b^2$ функции f удовлетворяющей условиям теоремы 17 имеет естественную интерпретацию. С другой стороны, в силу следствия 9.2 степень f^n функции f удовлетворяет условиям теоремы 17 для любого $n = 2, 3, 4, \dots$, если f им удовлетворяет.

Проблема существования функций удовлетворяющих условиям теоремы 17 рассмотрена в следующем параграфе вместе со свойствами их некоммутативных интегральных преобразований типа Лапласа и Меллина.

3 Квазиконформность некоммутативных интегральных преобразований

Рассмотрим сначала предварительные необходимые утверждения и определения.

1. Теорема. *Предположим, что $f(z, t)$ является \mathcal{A}_b значной функцией на $W := U \times [a, \infty)$ и существует $(\partial f(z, t)/\partial z) \cdot h$ непрерывная на $W \times B(\mathcal{A}_b, 0, 1)$, где $U = \{z \in \mathcal{A}_b : z_j \in [a_j, b_j], j = 0, 1, \dots, 2^b - 1\}$, $z = z_0 i_0 + \dots + z_{2^b-1} i_{2^b-1}$, $a_j < b_j$,*

$B(\mathcal{A}_b, y, R) := \{z \in \mathcal{A}_b : |z - y| \leq R\}$. Предположим также, что $x \in U$ таково, что $F(x) := \int_a^\infty f(x, t) dt$ сходится, в то время как несобственный интеграл зависящий от параметра $z \in U$: $G(z, h) := \int_a^\infty (\partial f(z, t)/\partial z).h dt$ сходится равномерно на $U \times B(\mathcal{A}_b, 0, 1)$. Тогда несобственный интеграл $F(z) := \int_a^\infty f(z, t) dt$ зависящий от параметра $z \in U$ сходится равномерно на U и для любого $z \in U$ существует $D_z F(z).h = \int_a^\infty (\partial f(z, t)/\partial z).h dt = G(z, h)$ для любого $h \in B(\mathcal{A}_b, 0, 1)$.

Доказательство. Запишем $(\partial f(z, t)/\partial z).h$ в виде $(\partial f(z, t)/\partial z).h = g_0 i_0 + \dots + g_{2^b-1} i_{2^b-1}$, где $g : W \times \mathcal{A}_b \rightarrow \mathbf{R}$. Поскольку $(\partial f(z, t)/\partial z).h$ непрерывна на $W \times B(\mathcal{A}_b, 0, 1)$ и несобственный интеграл $G(z, h) := \int_a^\infty (\partial f(z, t)/\partial z).h dt$ сходится равномерно на $U \times B(\mathcal{A}_b, 0, 1)$, тогда

$$\int_x^z G(y, h) dy = \int_x^z (\int_a^\infty (\partial f(y, t)/\partial y).h dt) dy = \int_a^\infty dt (\int_x^z (\partial f(y, t)/\partial y).h dy)$$

и несобственный интеграл справа сходится равномерно на $U \times B(\mathcal{A}_b, 0, 1)$, так как t – это действительный параметр и \mathbf{R} – это центр алгебры \mathcal{A}_b . Возьмем $h = w$, $|w| = 1$, так что $z = x + vw$, где $v > 0$. Тогда $\int_a^\infty dt (\int_x^z (\partial f(y, t)/\partial y).w dy) = \int_a^\infty f(z, t) dt - \int_a^\infty f(x, t) dt = F(z) - F(x)$, следовательно, несобственный интеграл $F(z) := \int_a^\infty f(z, t) dt$ сходится равномерно на U и $F(z) - F(x) = \int_x^z G(y, w) dy$. Используя аддитивность интеграла, мы имеем $F(z) - F(\eta) = \int_\eta^z G(y, h) dy$ для любых $z, \eta \in U$, где $z - \eta = vh$, $v > 0$. Таким образом, $\partial z(v)/\partial v = h$ и $\int_\eta^z G(y, h) dy = \int_0^v G(\eta + qh, h) dq$, где $q \in [0, v]$. Поэтому, $D_z F(z).h = G(z, h)$ для любых $z \in U$ и $h \in \mathcal{A}_b$, так как $(\partial f(z, t)/\partial z).(sh) = s(\partial f(z, t)/\partial z).h$ для любого $s \in \mathbf{R}$, каждого $h \in \mathcal{A}_b$ и всякого $t \in [a, \infty)$ (смотри для сравнения коммутативный случай в §IV.2.4 [13]).

2. Определение. Рассмотрим функции-оригиналы для некоммутативных двусторонних преобразований Лапласа, удовлетворяющих условиям (1 – 3) ниже:

(1) $f(t)$ удовлетворяет условию Гёлдера: $|f(t+h) - f(t)| \leq A|h|^\alpha$ для любого $|h| < \delta$ (где $0 < \alpha \leq 1$, $A = \text{const} > 0$, $\delta > 0$ – это постоянные для данного t) всюду на \mathbf{R} может быть кроме точек разрыва первого рода. На всяком конечном интервале в \mathbf{R} функция f может иметь только конечное число точек разрыва и только первого рода;

(2) $|f(t)| < C_1 \exp(-s_1 t)$ для любого $t < 0$, где $C_1 = \text{const} > 0$, $s_1 = s_1(f) = \text{const} \in \mathbf{R}$;

(3) $|f(t)| < C_2 \exp(s_0 t)$ для любого $t \geq 0$, то есть, $f(t)$ растет не быстрее, чем экспоненциальная функция, где $C_2 = \text{const} > 0$, $s_0 = s_0(f) \in \mathbf{R}$.

Двустороннее преобразование Лапласа над алгебрами Кэли-Диксона \mathcal{A}_r с $2 \leq r \leq 3$ определяется по формуле:

$$(4) \mathcal{F}^s(f; p) := \int_{-\infty}^\infty f(t) \exp(-u(p, t; q)) dt$$

для всех чисел $p \in \mathcal{A}_r$, для которых существует интеграл, где $q \in \mathcal{A}_r$ – это параметр, или $u(p, t; q) = pt + q$, или $u(p, t; q) = E(pt + q)$ (смотри определение 2.2.1). Обозначим для краткости $\mathcal{F}^s(f; p)$ через $F^s(p)$. Для базиса генераторов $\{N_0, \dots, N_{2^r-1}\}$ в \mathcal{A}_r мы запишем более детально ${}_N \mathcal{F}^s(f; p)$ или ${}_N F_u^s(p)$ в случае необходимости.

3. Замечание. Естественно, что двусторонний интеграл Лапласа может быть записан как сумма двух односторонних интегралов

$$(1) \int_{-\infty}^\infty f(t) \exp(-u(p, t; q)) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) \exp(-u(p, t; q)) dt + \int_0^\infty f(t) \exp(-u(p, t; q)) dt \\ = \int_0^\infty f(-t) \exp(-u(p, -t; q)) dt + \int_0^\infty f(t) \exp(-u(p, t; q)) dt.$$

Второй интеграл сходится для $\text{Re}(p) > s_0$. Поскольку $u(p, -t; q) = u(-p, t; q)$, тогда первый интеграл сходится для $\text{Re}(-p) > -s_1$, то есть, для $\text{Re}(p) < s_1$. Тогда имеется область сходимости $s_0 < \text{Re}(p) < s_1$ двустороннего интеграла Лапласа. Для $s_1 = s_0$ область сходимости сводится к вертикальной гиперплоскости в \mathcal{A}_r над \mathbf{R} . Для $s_1 < s_0$ нет никакой общей области сходимости и $f(t)$ не может преобразована с помощью дву-

стороннего преобразования 5(4).

4. Замечание. Если f – это функция-оригинал двустороннего преобразования Лапласа над алгеброй Кэли-Диксона \mathcal{A}_r и $g(\tau) = f(\ln \tau)$ для любого $0 < \tau < \infty$, тогда условия 5(1–3) для f эквивалентны следующим условиям M(1–3):

M(1) $g(\tau)$ удовлетворяет условию Гёльдера: $|g(\tau + h) - g(\tau)| \leq A|h|^\alpha$ для любого $|h| < \delta$ (где $0 < \alpha \leq 1$, $A = \text{const} > 0$, $\delta > 0$ – это постоянные для данного τ) везде на \mathbf{R} может быть кроме точек разрывов первого рода. На всяком конечном сегменте $[a, b]$ в $(0, \infty)$ функция g может иметь только конечное число точек разрыва и только первого рода;

M(2) $|g(\tau)| < C_1\tau^{s_0}$ для любого $0 < \tau < 1$, где $C_1 = \text{const} > 0$, $s_0 = s_0(g) = \text{const} \in \mathbf{R}$;

M(3) $|g(\tau)| < C_2\tau^{-s_1}$ для любого $\tau \geq 1$, то есть, $g(\tau)$ растет не быстрее, чем степенная функция, где $C_2 = \text{const} > 0$, $s_1 = s_1(g) \in \mathbf{R}$.

5. Определение. Определим некоммутативное преобразование Меллина по формуле:

$$(1) \mathcal{M}(g; p) := \int_0^\infty f(\ln \tau) \exp(-u(-p, \ln \tau; -q)) \tau^{-1} d\tau$$

всякий раз, когда оно существует, где f – функция-оригинал удовлетворяющая условиям M(1–3), $g(\tau) = f(\ln \tau)$ для любого $0 < \tau < \infty$.

Для специфического базиса $\{N_0, N_1, \dots, N_{2r-1}\}$ генераторов алгебры Кэли-Диксона \mathcal{A}_r мы можем записать обозначения более детально ${}_N\mathcal{M}_u(g; p; q) = {}_N\mathcal{M}(g, u; p; q)$, если это необходимо.

6. Теорема. Если функция-оригинал $g(\tau)$ удовлетворяет условиям 4.M(1-3), где $s_0 < s_1$, тогда его образ $\mathcal{M}(g; p; q)$ является голоморфным по p в области $\{z \in \mathcal{A}_r : s_0 < \text{Re}(z) < s_1\}$, где $2 \leq r \leq 3$.

Доказательство. Доказательство основано на соответствующих свойствах некоммутативного преобразования Лапласа. Интеграл 2(4) абсолютно сходится для $\text{Re}(p) > s_0$, так как он мажорируется сходящимся интегралом

$$|\int_0^\infty f(t) \exp(-u(p, t; q)) dt| \leq \int_0^\infty C \exp(-(s - s_0)t) dt = C(s - s_0)^{-1},$$

так как $|e^z| = \exp(\text{Re}(z))$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$ в силу следствия 3.3 [17, 18], где $s = \text{Re}(p)$, $C > 0$ не зависит от p и t . В то же время интеграл, получаемый дифференцированием интеграла по p (смотри теорему 1) также равномерно сходится:

$$(i) |\int_0^\infty f(t) [\partial \exp(-u(p, t; q)) / \partial p] \cdot h dt| \leq |h| \int_0^\infty C t \exp(-(s - s_0)t) dt = |h| C (s - s_0)^{-2}$$

для любого $h \in \mathcal{A}_r$, так как всякое $z \in \mathcal{A}_r$ может быть записано в виде $z = |z| \exp(M)$ согласно предложению 3.2 [17, 18], где $|z|^2 = z\tilde{z} \in [0, \infty) \subset \mathbf{R}$, $M \in \mathcal{A}_r$, $\text{Re}(M) := (M + \tilde{M})/2 = 0$. Поэтому,

$$[\partial(\int_0^\infty f(t) \exp(-u(p, t; q)) dt) / \partial \tilde{p}] \cdot h = 0$$

для любого $h \in \mathcal{A}_r$, так как $u(p, t; q)$ записано в (p, q) -представлении. В силу сходимости интегралов данных выше $F(p)$ (супер)дифференцируема по p , более того, $\partial F(p) / \partial \tilde{p} = 0$ в рассматриваемом p -представлении, следовательно, $F(p)$ голоморфна по $p \in \mathcal{A}_b$ с $\text{Re}(p) > s_0$ благодаря теореме 4.

Поэтому, применение вышеприведенного доказательства к $\int_0^\infty f(-t) \exp(-u(-p, t; q)) dt$ и $\int_0^\infty f(t) \exp(-u(p, t; q)) dt$ дает, что если оригинал $f(t)$ удовлетворяет условиям 5(1–3), и более того, $s_0 < s_1$, тогда его образ $\mathcal{F}^s(f; p)$ голоморфен по p в области $\{z \in \mathcal{A}_r : s_0 < \text{Re}(z) < s_1\}$, где $2 \leq r \leq 3$. В итоге, замена переменных p на $-p$, q на $-q$ и $g(\tau) = f(\ln \tau)$ дает утверждение этой теоремы.

7. Теорема. Предположим, что $g(\tau)$ – это функция-оригинал, удовлетворяющая 4.M(1–3), так что

${}_N\mathcal{M}(g; p; q) := \sum_{j=0}^{2^r-1} {}_N G_{u,j}(p; q) N_j$ – это его образ, где функция g записана в виде $g(\tau) = \sum_{j=0}^{2^r-1} g_j(\tau) N_j$, $g_j : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ для всякого $j = 0, 1, \dots, 2^r - 1$, $g((0, \infty)) \subset \mathcal{A}_r$ для $2 \leq r \leq 3$,

${}_N G_{u,j}(p; q) := \int_0^\infty g_j(\tau) \exp(-u(-p, \ln \tau; -q)) \tau^{-1} d\tau$. Тогда во всякой точке τ , где $g(\tau)$ удовлетворяет условию Гёльдера выполняется равенство:

(i) $g(\tau) = (2\pi N_1)^{-1} \operatorname{Re}(S \tilde{N}_1) \sum_{j=0}^{2^r-1} \left(\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_N G_{u,j}(p; q) \exp(u(-p, \ln \tau; -q)) dp \right) N_j$ в области $s_0(g) < \operatorname{Re}(p) < s_1(g)$, где или $u(p, t; q) = pt + q$ с $S = N_1$ для $\operatorname{Im}(q) = 0$, или $u(p, t; q) = E(pt + q)$ (смотри §2.2.1) и интеграл берется вдоль прямой линии $p(\theta) = a + S\theta \in \mathcal{A}_r$, $\theta \in \mathbf{R}$, $S \in \mathcal{A}_r$, $\operatorname{Re}(S) = 0$, $|S| = 1$, $\operatorname{Re}(S \tilde{N}_1) \neq 0$ не равно нулю, причем интеграл понимается в смысле главного значения.

Доказательство. Сначала рассмотрим соответствующее некоммутативное преобразование Лапласа. Пусть $f(t)$ дана в виде g заменой переменной $t = \ln(\tau)$ и с ограничением $t \in [0, \infty)$, где $\tau > 0$. В силу разложения функции f в виде $f(t) = \sum_{j=0}^{2^r-1} f_j(t) N_j$ достаточно рассмотреть обратное преобразование действительно значной функции f_j , которая обозначается для простоты через f . Поскольку $t \in \mathbf{R}$, тогда $\int_0^\infty f(\tau) d\tau$ – это интеграл Римана. Если w является голоморфной функцией переменной Кэли-Диксона, тогда локально в односвязной области U во всяком шаре $B(\mathcal{A}_r, z_0, R)$ с центром в z_0 радиуса $R > 0$ содержащемся во внутренности $\operatorname{Int}(U)$ области U выполняется равенство

$$(\partial \int_{z_0}^z w(\zeta) d\zeta / \partial z) \cdot 1 = w(z),$$

где интеграл зависит только от начальной z_0 и конечной z точек спрямляемого пути в $B(\mathcal{A}_r, z_0, R)$. С другой стороны, вдоль прямой линии $a + S\mathbf{R}$ ограничение антипроизводной имеет вид $\int_{\theta_0}^\theta w(a + S\tau) d\tau$, так как

$$\int_{z_0=a+S\theta_0}^{z=a+S\theta} w(\zeta) d\zeta = \int_{\theta_0}^\theta \hat{w}(a + S\tau) \cdot S d\tau,$$

причем $\partial f(z) / \partial \theta = (\partial f(z) / \partial z) \cdot S$ для супердифференцируемой по $z \in U$ функции $f(z)$, более того, антипроизводная единственна с точностью постоянной из \mathcal{A}_r с данными представлением функции и ветвью некоммутативного криволинейного интеграла (например, заданной с помощью левого или правого алгоритма) [17, 18].

Интеграл $g_B(t) := \int_{a-SB}^{a+SB} {}_N F_{u,j}(p; q) \exp(u(p, t; q)) dp$ для любого $0 < B < \infty$ с помощью генераторов алгебры \mathcal{A}_r и теоремы Фубини для действительных компонент функции может быть записан в виде:

$$g_B(t) = (2\pi N_1)^{-1} \operatorname{Re}(S \tilde{N}_1) \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_{a-SB}^{a+SB} \exp(u(p, t; q)) \exp(-u(p, \tau; q)) dp,$$

так как интеграл $\int_0^\infty f(\tau) \exp(-u(p, \tau; q)) d\tau$ равномерно сходится относительно p в полупространстве $\operatorname{Re}(p) > s_0$ в \mathcal{A}_r (смотри предложение 2.18 [25]). В силу альтернативности алгебры \mathcal{A}_r (здесь $2 \leq r \leq 3$) воспользуемся автоморфизмом v из леммы 2.17 [25]. Это дает изменение базиса генераторов, следовательно, вместо ${}_N F_u(p; q)$ рассмотрим ${}_K F_u(p; q)$, где $K_j = v(N_j)$ – это новый базис генераторов алгебры \mathcal{A}_r , $j = 1, \dots, 2^r - 1$, $N_0 = K_0 = 1$. Тогда с такой v функция $u_K(p, t; q) = v(E(pt + q))$ имеет вид даваемый формулой:

$$(1) v(u_N(p, t; q)) = u_K(p, t; q) = (p_0 t + q_0) + (p'_1 t + q'_1) K,$$

$$(2) K = [K_1 \cos(q'_2) + K_2 \sin(q'_2) \cos(q'_3) + K_3 \sin(q'_2) \sin(q'_3)] \text{ для кватернионов;}$$

(3) $K = [K_1 \cos(q'_2) + K_2 \sin(q'_2) \cos(q'_3) + \dots + K_6 \sin(q'_2) \dots \sin(q'_6) \cos(q'_7) + K_7 \sin(q'_2) \dots \sin(q'_6) \sin(q'_7)]$ для октонионов, где $p_0, p'_1, q_0, q'_1, \dots, q'_{2^r-1} \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}$, $K_1, \dots, K_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$ – это новые генераторы с $\operatorname{Re}(K_j) = 0$ для любого $j = 1, \dots, 2^r - 1$, где $K_0 = N_0 = 1$, $p'_0 = p_0$ и $q'_0 = q_0$, $p = p_0 N_0 + p_1 N_1 + \dots + p_{2^r-1} N_{2^r-1} = p_0 K_0 + p'_1 K_1 + \dots + p'_{2^r-1} K_{2^r-1}$, $q = q_0 N_0 + q_1 N_1 + \dots + q_{2^r-1} N_{2^r-1} = q_0 K_0 + q'_1 K_1 + \dots + q'_{2^r-1} K_{2^r-1}$, так как $v(1) = 1$ и, следовательно, $v(t) = t$ для любого $t \in \mathbf{R}$. Формула (i) выполняется тогда и только

тогда, когда она удовлетворяется после применения автоморфизм v к обеим частям равенства, так как $v(z) = v(\zeta)$ для $z, \zeta \in \mathcal{A}_r$ эквивалентно тому, что $z = \zeta$.

Тогда с точностью до автоморфизма алгебры \mathcal{A}_r доказательство сводится к случаю $p = (p_0, p_1, 0, \dots, 0)$, $N = (N_0, N_1, N_2, \dots, N_{2r-1})$, где $N_0 = 1$, так как \mathbf{R} – это центр алгебры \mathcal{A}_r . Но это дает $p_1 = p_1(t) = Re(S\tilde{N}_1)t$ для любого $t \in \mathbf{R}$. Для $u(p, t; q_0) = pt + q_0$ с $Im(q) = 0$ возьмем просто $S = N_1$. Рассмотрим частный случай $c := Re(S\tilde{N}_1) \neq 0$, тогда частный случай $Re(S\tilde{N}_1) = 0$ получается, беря предел когда $Re(S\tilde{N}_1) \neq 0$ стремится к нулю. Таким образом,

$$g_B(t) = (2\pi N_1)^{-1} c \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_{a-SB}^{a+SB} \exp(at + c(q_1 + t)K_1) \exp(-a\tau + c(q_1 + \tau)K_1) dp,$$
 так как $q_0, a \in \mathbf{R}$, где K_1 или дается формулами (2, 3) для $u_N(p, t; q) = E(pt + q)$ или $K_1 = N_1 = S_1$ можно взять для $u_N(p, t; q) = pt + q_0$. Тогда

$$\begin{aligned} g_B(t) &= (\pi N_1)^{-1} c \int_0^\infty f(\tau) e^{a(t-\tau)} [\sin(Bc(t-\tau))] (ct - c\tau)^{-1} \\ &= (\pi)^{-1} e^{at} \int_{-t}^\infty f(\zeta + t) e^{-a(\zeta+t)} [\sin(B\zeta)] \zeta^{-1} d\zeta, \end{aligned}$$

где можно воспользоваться заменой $\tau - t = \zeta$. Положим $w(t) := f(t)e^{-at}$, где $w(t) = 0$ для любого $t < 0$. Поэтому,

$$g_B(t) = (\pi)^{-1} e^{at} \int_{-\infty}^\infty [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(B\zeta) d\zeta + (\pi)^{-1} f(t) \int_{-\infty}^\infty \zeta^{-1} \sin(B\zeta) d\zeta.$$
 Интеграл во втором члене известен как интеграл Эйлера: $\int_{-\infty}^\infty \zeta^{-1} \sin(B\zeta) d\zeta = \pi$ для любого $B > 0$, следовательно, второй член равен $f(t)$. Тогда $\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(B\zeta) d\zeta = 0$ (смотри также лемму 2.20 [25]).

Для данного $\epsilon > 0$ выполняется равенство:

$$\int_{-\infty}^\infty [w(y + t) - w(t)] y^{-1} \sin(By) dy = \int_{-B}^B [w(y + t) - w(t)] y^{-1} \sin(By) dy + \int_{|y| > B} w(y + t) y^{-1} \sin(By) dy - w(t) \int_{|y| > B} \sin(By) y^{-1} dy.$$
 Второй и третий члены являются сходящимися интегралами и поэтому для достаточно большого $B > 0$ они по абсолютной величине меньше, чем $\epsilon/3$. В силу условия Гёльдера $|[w(y + t) - w(t)] y^{-1}| \leq A|y|^{1-c}$, где $c > 0$, $A > 0$, y принадлежит окрестности нуля. Тогда существует $B_0 > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} &|\int_{-B}^B [w(y + t) - w(t)] y^{-1} \sin(By) dy| < \epsilon/3 \text{ для любого } B > B_0. \text{ Таким образом,,} \\ &\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty [w(y + t) - w(t)] y^{-1} \sin(By) dy = 0. \end{aligned}$$

Эта теорема для общих функций $u_N(p, t; q) = E(pt + q)$ в базисе генераторов $\{N_0, \dots, N_{2r-1}\}$ непосредственно следует из вычисления появляющихся интегралов по действительным переменным t и τ с помощью интегралов вычисленных в [25].

Некоммутативное двустороннее преобразование Лапласа в базисе генераторов $N = \{N_0, N_1, \dots, N_{2r-1}\}$ может быть записано в виде

$$\mathcal{F}^s(f; p; q) := \int_{-\infty}^\infty f(t) \exp(-u(p, t; q)) dt = \mathcal{F}^s(fU(t); p; q) + \mathcal{F}^s(f(1 - U)(t); p; q),$$
 где индекс N опущен, $U(t) = 1$ для $t > 0$, $U(0) = 1/2$, $U(t) = 0$ для $t < 0$, также

$$\mathcal{F}^s(f(1 - U)(t); p; q) = \int_0^\infty f(-t)U(t) \exp(-u(-p, t; q)) dt,$$

так как $u(p, -t; q) = u(-p, t; q)$, где $|f(-t)| \leq C_1 \exp(s_1 t)$ для любого $t > 0$. Общая область существования

$\int_0^\infty f(-t)U(t) \exp(-u(-p, t; q)) dt$ и $\int_0^\infty f(t)U(t) \exp(-u(p, t; q)) dt$ такова $s_0(f) < Re(p) < s_1(f)$, так как неравенство $Re(-p) > -s_1(f)$ эквивалентно неравенству $Re(p) < s_1(f)$. Тогда применение данного выше доказательства к $f(t)U(t)$ и к $f(-t)U(t)$ дает формулу обращения. Положим $t = \ln \tau$ и заменяя p на $-p$, мы получим утверждение этой теоремы для некоммутативного преобразования Меллина.

8. Теорема. Пусть функция ${}_N G_u(p)$ аналитична по переменной $p \in \mathcal{A}_r$ в области $W := \{p \in \mathcal{A}_r : s_0 < Re(p) < s_1\}$, где $2 \leq r \leq 3$, $g((0, \infty)) \subset \mathcal{A}_r$, или $u(p, t) = pt$, или $u(p, t) := E(pt)$. Предположим также, что ${}_N G_u(p)$ может быть записана в виде ${}_N G_u(p) = {}_N G_u^0(p) + {}_N G_u^1(p)$, где ${}_N G_u^0(p)$ голоморфна по p в области $s_0 < Re(p)$, также ${}_N G_u^1(p)$ голоморфна по p в области $Re(p) < s_1$, $S \in \mathcal{I}_r$, $|S| = 1$. Более того, для любых

$a > s_0$ и $b < s_1$ существуют постоянные $C_a > 0$, $C_b > 0$ и $\epsilon_a > 0$ и $\epsilon_b > 0$ такие, что

$$(1) |{}_N G_u^0(p)| \leq C_a \exp(-\epsilon_a |p|) \text{ для любого } p \in \mathcal{A}_r \text{ с } \operatorname{Re}(p) \geq a,$$

(2) $|{}_N G_u^1(p)| \leq C_b \exp(-\epsilon_b |p|)$ для любого $p \in \mathcal{A}_r$ с $\operatorname{Re}(p) \leq b$, где s_0 и s_1 фиксированы, причем интеграл

$$(3) \int_{w-S\infty}^{w+S\infty} {}_N G_u^k(p) dp$$

абсолютно сходится для $k = 0$ и $k = 1$ для $s_0 < w < s_1$. Тогда ${}_N G_u(p)$ является образом функции

$$(4) g(\tau) = (2\pi)^{-1} \tilde{S} \int_{w-S\infty}^{w+S\infty} {}_N G_u(p) \exp(u(-p, \ln \tau)) dp.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим соответствующее некоммутативное одностороннее преобразование Лапласа. Случай $u(p, t) = pt$ следует из $u(p, t) := E(pt)$, когда $p = (p_0, p_1, 0, \dots, 0)$, но интеграл вдоль прямой линии $a + St$, $t \in \mathbf{R}$, с таким p в базисе генераторов (N_0, \dots, N_{2r-1}) может быть получен из общего интеграла автоморфизмом v , $z \mapsto v(z)$, алгебры \mathcal{A}_r , $2 \leq r \leq 3$. То есть, достаточно доказать равенство типа (4) после применения автоморфизма v .

Пусть $\operatorname{Re}(p) = a > s_0$, тогда

$$|\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_N F_u(p) \exp(u(p, t)) dp| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |{}_N F_u(a + S\theta)| d\theta.$$

В силу предположения этой теоремы этот интеграл сходится равномерно относительно $t \in \mathbf{R}$. Для $f(t)$ полученной из g заменой переменных $t = \ln(\tau)$ с $\tau > 0$ и ограничением на $t \in [0, \infty)$ для $\operatorname{Re}(\eta) =: \eta_0 > s_0$ и $(\eta - \operatorname{Re}(\eta)) =: \operatorname{Im}(\eta)$ параллельным S , мы получим

$$\int_0^{\infty} f(t) \exp(-\eta t) dt = (2\pi)^{-1} \tilde{S} \sum_{j=0}^{2^r-1} \int_0^{\infty} (\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} N_j {}_N F_{u,j}(p) \exp(u(p, t)) dp) \exp(-\eta t) (dt),$$

в котором можно изменить порядок интегрирования, так как $t \in \mathbf{R}$. Тогда в силу альтернативности алгебр \mathbf{H} и \mathbf{O} , в то время как f действительно значна для $r \geq 4$, мы получим:

$$\int_0^{\infty} f(t) \exp(-\eta t) dt = (2\pi)^{-1} \tilde{S} \sum_{j=0}^{2^r-1} \int_{a-S\infty}^{a+S\infty} (\int_0^{\infty} N_j {}_N F_{u,j}(p) \exp((p - \eta)t) dt) (dp),$$

так как $e^v \in \mathbf{R}$ для любого $v \in \mathbf{R}$, $e^{aM} e^{bM} = e^{(a+b)M}$ для любого $a, b \in \mathbf{R}$. В силу $a < \eta_0$ и

$$\int_0^{\infty} e^{(p-\eta)t} dt = -(p - \eta)^{-1},$$

тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t) \exp(-\eta t) dt &= -(2\pi)^{-1} \tilde{S} \sum_{j=0}^{2^r-1} (\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} N_j {}_N F_{u,j}(p) (p - \eta)^{-1} dp) \\ &= -(2\pi)^{-1} \tilde{S} (\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_N F_u(p) (p - \eta)^{-1} dp). \end{aligned}$$

В силу леммы 2.22 [25]

$$|\int_{\psi_R} F(p) (p - \eta)^{-1} dp| \leq u(R) \pi R / (R - |\eta|),$$

где $0 < u(R) < \infty$ и существует $\lim_{R \rightarrow \infty} u(R) = 0$, причем ψ_R — это дуга окружности $|p| = R$ в плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ с $\operatorname{Re}(p) > a$, следовательно,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\psi_R} F(p) (p - \eta)^{-1} dp = 0,$$

так как $u(R) \leq u_0 \exp(-\delta R)$ для любого $R > R_0$, где $u_0 = \text{const} > 0$.

Тогда прямая линия $a + S\theta$ с $\theta \in \mathbf{R}$ может быть заменена замкнутым контуром ϕ_R , составленным из ψ_R и сегмента $[a + Sb, a - Sb]$ проходимого сверху вниз. Таким образом,

$$\int_0^{\infty} f(t) \exp(-\eta t) dt = (2\pi)^{-1} \tilde{S} \int_{\phi_R} F(p) (p - \eta)^{-1} dp,$$

где знак перед интегралом изменяется благодаря изменению направления обхода петли ϕ_R . Напомним, что в случае алгебры Кэли-Диксона \mathcal{A}_r вычет функции является оператором \mathbf{R} -гомогенным и \mathcal{A}_r -аддитивным по аргументу $L \in \mathcal{A}_r$ с $\operatorname{Re}(L) = 0$, где вычет естественно зависит от функции и точки. В области $\{p \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(p) \geq a, |p| \leq R\}$ аналитическая функция $F(p)$ имеет только одну точку сингулярности $p = \eta$, которая является полюсом первого порядка с вычетом $\operatorname{res}(\eta; F(p)(p - \eta)^{-1}) \cdot L = LF(\eta)$ для любого $L \in \mathcal{A}_r$ с $\operatorname{Re}(L) = 0$ при использовании левого алгоритма вычисления интеграла,

следовательно,

$$\int_0^\infty f(t) \exp(-\eta t) dt = F(\eta), \text{ так как } L = S \text{ в данном случае и } S\tilde{S} = 1.$$

Для $t < 0$ в силу вышеупомянутой \mathcal{A}_r леммы 11 мы получим, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\phi_R} F(p) e^{u(p,t)} dp = 0,$$

так как $Re(p) = a > 0$, следовательно, прямая линия $a + S\theta$, $\theta \in \mathbf{R}$, может быть заменена на петлю ϕ_R как выше. Тогда для $t < 0$ мы получим:

$$f(t) = (2\pi)^{-1} \int_{\phi_R} F(p) e^{u(p,t)} dp = 0,$$

так как $F(p)$ аналитична по p вместе с $e^{u(p,t)}$ во внутренней области $\{p : p \in \mathcal{A}_r; |p| \leq R', Re(p) > s_0\}$, $a > s_0$, $0 < R < R' \leq \infty$. Тогда выполнено условие 2(2) для оригинала. С другой стороны,

$$|f(t)| \leq (2\pi)^{-1} e^{at} \int_{-\infty}^\infty |F(a + S\theta)| d\theta = C e^{at},$$

где $C = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^\infty |F(a + S\theta)| d\theta < \infty$, следовательно, условие 2(3) выполнено. Также $f(t)$ непрерывна, так как функция $F(p)$ в интеграле непрерывна и

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(\theta); |\theta| \geq R} F(p) dp = 0. \text{ Более того, интеграл}$$

$$\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_N F(p) [\partial \exp(u(p,t)) / \partial t] dp$$

сходится благодаря условию (1, 2) и доказательства выше, следовательно, функция $f(t)$ дифференцируема и, следовательно, выполнено условие Липшица. В доказательстве выше можно использовать также аффинное преобразование $p \mapsto p - z$, так чтобы отмеченная η была бы действительный.

Рассмотрим теперь некоммутативное двустороннее преобразование Лапласа ${}_N F_u^s(p)$, которое аналитическое по переменной $p \in \mathcal{A}_r$ в области $W := \{p \in \mathcal{A}_r : s_0 < Re(p) < s_1\}$, где $2 \leq r \leq 3$, $f(\mathbf{R}) \subset \mathcal{A}_r$, или $u(p, t) = pt$, или $u(p, t) := E(pt)$. Запишем ${}_N F_u^s(p)$ в виде ${}_N F_u^s(p) = {}_N F_u^{s,0}(p) + {}_N F_u^{s,1}(p)$, где ${}_N F_u^{s,0}(p)$ голоморфна по p в области $s_0 < Re(p)$, также ${}_N F_u^{s,1}(p)$ голоморфна по p в области $Re(p) < s_1$, $S \in \mathcal{I}_r$, $|S| = 1$. В силу условия этой теоремы для любых $a > s_0$ и $b < s_1$ существуют постоянные $C_a > 0$, $C_b > 0$ и $\epsilon_a > 0$, и $\epsilon_b > 0$ такие, что

$$(i) |{}_N F_u^{s,0}(p)| \leq C_a \exp(-\epsilon_a |p|) \text{ для любого } p \in \mathcal{A}_r \text{ с } Re(p) \geq a,$$

$$(ii) |{}_N F_u^{s,1}(p)| \leq C_b \exp(-\epsilon_b |p|) \text{ для любого } p \in \mathcal{A}_r \text{ с } Re(p) \leq b, \text{ где } s_0 \text{ и } s_1 \text{ фиксированы, также интеграл}$$

$$(iii) \int_{w-S\infty}^{w+S\infty} {}_N F_u^{s,k}(p) dp$$

сходится абсолютно для $k = 0$ и $k = 1$ для $s_0 < w < s_1$.

Для функции ${}_N F_u^{s,1}(p)$ мы рассмотрим замену переменной $p = -g$, $-s_1 < Re(g)$. Тогда из доказательства выше существуют оригиналы f^0 и f^1 для функций ${}_N F_u^{s,0}(p)$ и ${}_N F_u^{s,1}(p)$ при выборе $w \in \mathbf{R}$ в общей области $s_0 < Re(p) < s_1$, то есть, $s_0 < w < s_1$. В то же время носитель функций f^0 и f^1 содержится в $[0, \infty)$ и $(-\infty, 0]$ соответственно. Тогда $f = f^0 + f^1$ – это оригинал для ${}_N F_u^s(p)$ при $q = 0$, так как

$$f(t) = f^0(t) + f^1(t) = (2\pi)^{-1} \tilde{S} \int_{w-S\infty}^{w+S\infty} {}_N F_u^{s,0}(p) \exp(u(p, t)) dp +$$

$$(2\pi)^{-1} \tilde{S} \int_{w-S\infty}^{w+S\infty} {}_N F_u^{s,1}(p) \exp(u(p, t)) dp = (2\pi)^{-1} \tilde{S} \int_{w-S\infty}^{w+S\infty} {}_N F_u^s(p) \exp(u(p, t)) dp$$

благодаря дистрибутивности умножения в алгебре \mathcal{A}_r . Таким образом, ${}_N F_u^s(p)$ – это образ функции

$$(iv) f(t) = (2\pi)^{-1} \tilde{S} \int_{w-S\infty}^{w+S\infty} {}_N F_u^s(p) \exp(u(p, t)) dp.$$

Замена переменной p на $-p$ и замена $t = \ln \tau$ для $\tau > 0$ в (iv) дает утверждение этой теоремы.

9. Теорема. *Оригинал $g(\tau)$ с $g((0, \infty)) \subset \mathcal{A}_r$ для $r = 2, 3$ полностью определяется своим образом ${}_N G_u(p)$ с точностью до значений в точках разрыва.*

Доказательство. В силу теорем 7 и 8 значение $g(\tau)$ во всякой точке τ непрерыв-

ности $g(\tau)$ выражается через ${}_N G_u(p)$ по формулам 7(i) и 8(4). В то же время значения оригинала в точках разрыва не влияют на образ ${}_N G_u(p)$, так как на всяком ограниченном интервале число точек разрыва конечно.

10. Теорема. *Предположим, что f – это функция-оригинал из определения или 2.1, или 2, или 5. Пусть F – это образ некоммутативного или Лапласа, или двустороннего Лапласа, или Меллина преобразований для или $u(p, t) = pt$, или $u(p, t) = E(pt)$ в области $V := \{z \in \mathcal{A}_b : s_0 < \operatorname{Re}(z) < s_1\}$, $b = 2$ или $b = 3$, где $s_1 = \infty$ для некоммутативного одностороннего преобразования Лапласа. Тогда F или $(1, b)$ -квазирегулярна, или $(1, b)$ -квазирегулярна в сферических \mathcal{A}_b -координатах соответственно в V с $y_0 = 0$ тогда и только тогда, когда его оригинал действителен $f(t) \in \mathbf{R}$ для любой точки непрерывности t функции f или в $[0, \infty)$, или \mathbf{R} , или $(0, \infty)$ соответственно.*

Доказательство. Некоммутативное преобразование Меллина получается из двустороннего преобразования Лапласа с помощью гладкой замены действительных переменных $t = \ln(\tau)$ с $\tau > 0$ и одностороннее преобразование Лапласа является частным случаем двустороннего. Поэтому, достаточно доказать эту теорему для двустороннего некоммутативного преобразования Лапласа. Тогда рассмотрим

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-u(p, t)) dt,$$

так как $q = 0$, $y_0 = 0$ согласно условиям этой теоремы. Мы имеем, что $\hat{R}_{p,x} = R_{w(p),w(x)}$, где w – псевдоконформный диффеоморфизм области V , $R_{p,x}$ дается предложениями 2.2 и 2.2.3. Всякому автоморфизму $\hat{R}_{p,x}$ отвечает оператор принадлежащий группе Ли $SO_{\mathbf{R}}(2^b, \mathbf{R})$ действительной тени \mathbf{R}^{2^b} . Поэтому,

(1) $\hat{R}_{p,y} F_u(y) = \int_{-\infty}^{\infty} [R_{w(p),w(y)} f(t)] \exp(-(R_{w(p),w(y)} y) t) dt$ для $u = pt$, для всякого $p \in V$ и каждого $y \in V \cap \mathbf{C}$, так что $\operatorname{Re}(p) = \operatorname{Re}(y)$ и $R_{w(p),w(y)} y = p$, так как $\hat{R}_{p,y}|_{\mathbf{R}} = id$. Тогда

(2) $\hat{R}_{E(p),E(y)} F_u(y) = \int_{-\infty}^{\infty} [R_{w(E(p)),w(E(y))} f(t)] \exp(-R_{w(E(p)),w(E(y))} E(ty)) dt$ для $u(p, t) = E(pt)$ соответственно благодаря формуле 2.2.3(1) для любого $p \in V$ и каждого $y \in V \cap \mathbf{C}$, так что $\operatorname{Re}(E(p)) = \operatorname{Re}(E(y))$ и $R_{w(E(p)),w(E(y))} E(y) = E(p)$. Таким образом,

(3) $F_u(p) = \hat{R}_{p,y} F_u(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{R}_{p,y} f(t)] \exp(-pt) dt$ для $u = pt$, для любого $p \in V$ и каждого $y \in V \cap \mathbf{C}$, так что $\operatorname{Re}(p) = \operatorname{Re}(y)$ и $R_{w(p),w(y)} y = p$. С другой стороны,

(4) $R_{w(E(p)),w(E(y))} \exp(E(ty)) = R_{w(E(tp)),w(E(ty))} \exp(E(ty)) = \exp(E(tp))$ для $u(p, t) = E(pt)$, для любого $\operatorname{Re}(E(p)) = \operatorname{Re}(E(y))$ с $R_{w(E(p)),w(E(y))} E(y) = E(p)$, так как $R_{z,x}(tx) = tR_{z,x}$ для всякого $t \in \mathbf{R}$ и $E(y) = y$ для любого $y \in \mathbf{C}$. Следовательно,

(5) $F_u(p) = \hat{R}_{E(p),E(y)} F_u(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-E(tp)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{R}_{E(p),E(y)} f(t)] \exp(-E(tp)) dt$ для $u(p, t) = E(pt)$. В частности, можно взять $w = id$.

Двустороннее преобразование Лапласа инъективно, так что $\mathcal{F}^s(f_1; z) = \mathcal{F}^s(f_2; z)$ для всякого $z \in V$ тогда и только тогда $f_1(t) = f_2(t)$ для всякой точки t из \mathbf{R} , где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ непрерывны (смотри теоремы 2.19, 2.21, 2.22, 3.15 и 3.16 [25] и 7, 8 и 9 выше). Таким образом, благодаря формулам (3, 4) $F(z)$ или $(1, b)$ -квазирегулярна, или $(1, b)$ -квазирегулярна в сферических \mathcal{A}_b -координатах соответственно тогда и только тогда, когда или $\hat{R}_{p,y} f(t) = f(t)$, или $\hat{R}_{E(p),E(y)} f(t) = f(t)$ соответственно для любой точки непрерывности $t \in \mathbf{R}$ функции f и всякого $p \in V$ и любого $y \in V \cap \mathbf{C}$, так что $\operatorname{Re}(p) = \operatorname{Re}(y)$ и либо $\hat{R}_{p,y}(y) = p$, либо $\hat{R}_{E(p),E(y)}(E(y)) = E(p)$ соответственно. Это означает, что $f(t) \in \mathbf{R}$, так как если $\operatorname{Im}(s) \neq 0$ для некоторого $s \in \mathcal{A}_b$, тогда существует $p \in V \setminus \mathbf{C}$ и $y \in V \cap \mathbf{C}$ такие, что или $(\hat{R}_{p,y}s) \neq s$, или $(\hat{R}_{E(p),E(y)}E(s)) \neq E(s)$ соответственно (смотри 2.1(Q2 – Q5)). Поскольку f непрерывна кроме точек разрывов первого рода, тогда используя пределы слева или справа переопределим f в точках разрывов, так что

f будет действительной всюду на \mathbf{R} .

Если f действительно-значна, тогда F_u удовлетворяет условиям 2.1(Q1 – Q5) по построению F_u . Тогда F_u удовлетворяет 2.1(Q6, Q7) также благодаря теореме 1, так как функция $e^{ap} = v(p)$ псевдоконформна для $a \neq 0$ на \mathcal{A}_b , $p \in \mathcal{A}_b$.

11. Теорема. Пусть выполнены предположения теоремы 10 для некоммутативного преобразования двустороннего Лапласа или Меллина. Если f действительно-значна, тогда

$$(1) F_u(\tilde{p}) = \tilde{F}_u(p) \text{ для } u(p, t) = pt \text{ или}$$

(1') $F_u(p_0 - p_1 i_1 + p_2 i_2 + \dots + p_{2^b-1} i_{2^b-1}) = \tilde{F}_u(p)$ для $u(p, t) = E(pt)$ соответственно для любого $p \in V$. Более того, или $f(t) = f(-t)$ является четной для любого $t \in \mathbf{R}$, или $f(t) = f(1/t)$ для любого $t > 0$ в каждой точке непрерывности функции f тогда и только тогда, когда ее некоммутативное преобразование двустороннее Лапласа или Меллина $F_u(p)$ для $u(p, t) = pt$ или $u(p, t) = E(pt)$ удовлетворяет условию:

$$(2) F_u(-p) = F_u(p) \text{ для любого } p \in V \text{ для обоих типов } u.$$

Доказательство. Если оригинал f действительнзначен, тогда

$$[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-u(p, t)) dt]^* = \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-u(p, t))]^* [f(t)]^* dt \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-[u(p, t)]^*) dt,$$

но $[u(p, t)]^* = u(p^*, t)$ для $u = pt$ и $[u(p, t)]^* = u((p_0 - p_1 i_1 + p_2 i_2 + \dots + p_{2^b-1} i_{2^b-1}), t)$ для $u(p, t) = E(pt)$ (смотри формулы 2.2.1(1, 2) или 2.16.1(3, 5)), где $p = p_0 + p_1 i_1 + \dots + p_{2^b-1} i_{2^b-1}$, $p_j \in \mathbf{R}$ для любого $j = 0, \dots, 2^b - 1$. Поэтому выполняется или (1), или (1') соответственно.

Оригинал f четен на \mathbf{R} тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-u(p, t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) \exp(-u(p, t)) dt \\ = - \int_{\infty}^{-\infty} f(t) \exp(-u(p, -t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-u(-p, t)) dt$$

для обоих вариантов $u(p, t) = pt$ и $u(p, t) = E(pt)$, так как $u(p, -t) = u(-p, t)$, причем двустороннее преобразование Лапласа инъективно, так что $\mathcal{F}^s(f_1; z) = \mathcal{F}^s(f_2; z)$ для любого $z \in V$ тогда и только тогда, когда $f_1(t) = f_2(t)$ во всякой точке t в \mathbf{R} , где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ непрерывны (смотри теоремы 2.19, 2.21, 2.22, 3.15 и 3.16 [25] и 14 выше). Следовательно, условие (2) эквивалентно $f(t) = f(-t)$ для любого $t \in \mathbf{R}$ для некоммутативного преобразования Лапласа.

Заменяя t на $\ln(\tau)$ и p на $-p$ дает, что (2) эквивалентно $f(\tau) = f(1/\tau)$ для любого $\tau > 0$ для некоммутативного преобразования Меллина в силу теорем 7 и 8.

12. Предложение. Предположим, что f или $(1, b)$ -квазирегулярная, или $(1, b)$ -квазирегулярная в сферических \mathcal{A}_b -координатах функция на области V , $f(z) \neq 0$ для любого $z \in V$, где $2 \leq b \leq 3$. Тогда $1/f(z)$ или $(1, b)$ -квазирегулярная, или $(1, b)$ -квазирегулярная в сферических \mathcal{A}_b -координатах функция соответственно на V .

Доказательство. Возьмем без ограничения общности $y_0 = 0$. Поскольку $\hat{R}_{z,x}$ и $\hat{R}_{E(z),E(x)}$ – это автоморфизмы алгебры \mathcal{A}_b , тогда $1/f$ или $1/f \circ E^{-1}$ соответственно удовлетворяют условиям 2.1(Q1–Q6) на V (смотри также определение 2.2.1). Поскольку f является \mathcal{A}_b голоморфной, тогда $1/f$ также \mathcal{A}_b голоморфная, $(\partial(1/f(z))/\partial \bar{z}) \cdot h = 0$ для любого $h \in \mathcal{A}_b$ и всех $z \in V$ (смотри [17, 18]). С другой стороны, $f(z)[1/f(z)] = 1$ для всякого $z \in V$, следовательно,

$$(1) [\partial(1/f(x))/\partial x] \cdot h = -f(x)[(f'(x) \cdot h)(1/f(x))]$$

для любого $h \in \mathcal{A}_b$ и каждого $x \in V$, так как $\mathbf{O} = \mathcal{A}_3$ альтернативна, $\mathbf{H} = \mathcal{A}_2$ ассоциативна, где $f'(z) \cdot h = (\partial f(z)/\partial z) \cdot h$. Тогда действие на обе части уравнения (1) посредством или $\hat{R}_{z,x}$, или $\hat{R}_{E(z),E(x)}$ дает (Q7) для $1/f(z)$ или $1/f \circ E^{-1}$ соответственно, так как $f(z)$ или $f \circ E^{-1}$ соответственно удовлетворяет (Q1 – Q7).

13. Пример. Рассмотрим теперь дзета функцию на \mathcal{A}_b (смотри пример 9.5.2). В силу теоремы 2.1 [31] дзета функция $\zeta(s)$ имеет голоморфное продолжение в $\mathbf{C} \setminus \{1\}$ с полюсом в $s = 1$ с вычетом 1, более того, она удовлетворяет функциональному уравнению $\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(s\pi/2) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$.

Построим для $\zeta(s)$ $(1, b)$ -квазиконформные в примерах 13 и 14, и $(1, b)$ -квазиконформные в сферических \mathcal{A}_b -координатах в примере 15 продолжения в $\mathcal{A}_b \setminus \{1\}$. Для этого положим $z = x + yM$, где $x, y \in \mathbf{R}$, $Re(M) = 0$, $|M| = 1$, $r = 1$, $y_0 = 0$. Тогда z получается из $s = x + iy$ посредством автоморфизма $\hat{R}_{z,s}$, так что $\hat{R}_{z,s}(i) = M$, где $\mathbf{i} = i_1$. Тогда $\mathbf{R} \oplus M\mathbf{R} =: \mathbf{C}_M$ – это подалгебра в \mathcal{A}_b изоморфная с \mathbf{C} . Пусть a и q – это положительные числа, $q > a$, $z \neq 1$, тогда

(1) $\sum_{n=a+1}^q n^{-z} = (q^{1-z} - a^{1-z})/(1-z) - z \int_a^q (x - [x] - 1/2)x^{-z-1} dx + (q^{-z} - a^{-z})/2$, где $[x]$ обозначает наибольшее число не превышающее x . Для $Re(z) =: \sigma > 1$ и $a = 1$ рассмотрим $q \rightarrow \infty$, тогда из формулы (1) мы получим

$$(2) \zeta(z) = z \int_1^\infty ([x] - x + 1/2)x^{-z-1} dx + 1/(z-1) + 1/2.$$

Функция $[x] - x + 1/2$ ограниченная, следовательно, этот интеграл сходится для $\sigma > 0$ и равномерно сходится в области $\sigma > \delta$ в \mathcal{A}_b , где $\delta > 0$ – это постоянная. Поэтому, этот интеграл определяет голоморфную функцию переменной z $(1, b)$ -квазирегулярную для $\sigma > 0$, $z \neq 1$, в силу теоремы 11. Правая часть уравнения (2) таким образом, дает \mathcal{A}_b голоморфное продолжение функции $\zeta(z)$ при $\sigma = 0$, причем имеется простой полюс в $z = 1$ с вычетом 1.

Для $0 < \sigma < 1$ формула (2) может быть записана

$$\zeta(z) = z \int_0^\infty ([x] - x)x^{-z-1} dx,$$

так как $\int_0^1 ([x] - x)x^{-z-1} dx = -\int_0^1 x^{-z} dx = 1/(z-1)$ и $z \int_1^\infty x^{-z-1} dx/2 = 1/2$. Рассмотрим $f(x) = [x] - x + 1/2$, $f_1(x) = \int_1^x f(y) dy$, тогда $f_1(y)$ ограничена, так как $\int_k^{k+1} f(y) dy = 0$ для любого целого числа k . Следовательно, $\int_{x_1}^{x_2} f(x)x^{-z-1} dx = f_1(x)x^{-z-1}|_{x_1}^{x_2} + (z+1) \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)x^{-z-2} dx$, который стремится к нулю при $x_1 \rightarrow \infty$ и $x_2 \rightarrow \infty$, при $\sigma > -1$. Поэтому, интеграл в (2) сходится для $\sigma > -1$, следовательно, (2) дает голоморфное продолжение функции $\zeta(z)$ для $\sigma > -1$. Поскольку $z \int_0^1 ([x] - x + 1/2)x^{-z-1} dx = 1/(z-1) + 1/2$ для $\sigma < 0$. Следовательно,

(3) $\zeta(z) = z \int_0^\infty ([x] - x + 1/2)x^{-z-1} dx$ для $-1 < \sigma < 0$. В силу предложения 2.9.1 и теоремы 10 и формул (2, 3), и используя непрерывное продолжение с $\{z \in \mathcal{A}_b : -1 < Re(z) < 0 \text{ или } 0 < Re(z)\}$ функции $\zeta(z)$ является $(1, b)$ -квазирегулярной в области $\{z \in \mathcal{A}_b : -1 < Re(z), z \neq 1\}$.

Рассмотрим $\int_R^\infty \sin(2\pi nx)x^{-z-1} dx = [-\cos(2\pi nx)/(2\pi nx^{z+1})]_R^\infty - (z+1)(2\pi n)^{-1} \int_R^\infty \cos(2\pi nx)x^{-z-2} dx = O(1/(nR^{\sigma+1})) + O(n^{-1} \int_R^\infty x^{-\sigma-2} dx) = O(1/(nR^{\sigma+1}))$, где $R > 0$, следовательно, $\lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^\infty n^{-1} \int_R^\infty \sin(2\pi nx)x^{-z-1} dx = 0$ для $-1 < \sigma < 0$. Поскольку существует разложение в ряд Фурье: $[x] - x + 1/2 = \sum_{n=1}^\infty \sin(2\pi nx)(\pi n)^{-1}$ для нецелых действительных x , тогда интегрируя в (3) почленно ряд, мы получим

$$(4) \zeta(z) = z(\pi)^{-1} \sum_{n=1}^\infty n^{-1} \int_0^\infty \sin(2\pi nx)x^{-z-1} dx = z\pi^{-1} \sum_{n=1}^\infty (2\pi n)^z n^{-1} \int_0^\infty \sin(y)y^{-z-1} dy = z\pi^{-1} (2\pi)^z \{-\Gamma(-z)\} \sin(z\pi/2) \zeta(1-z),$$

где для $\Gamma(z)$ используется $(1, b)$ -квазиконформное продолжение примера 2.9.5.3. Формула (4) исходно выполняется для $-1 < \sigma < 0$, но правая часть (4) выполняется также для любого $\sigma < 0$, где $\sigma = Re(z)$. Таким образом, это поставляет $(1, b)$ -квазирегулярное продолжение $\zeta(z)$ на $\mathcal{A}_b \setminus \{1\}$ и выполняется следующая формула:

$$(5) \zeta(1-z) = 2^{1-z} \pi^{-z} \cos(z\pi/2) \Gamma(z) \zeta(z).$$

Уравнение (5) преобразуется в

(6) $\zeta(z) = \chi(z)\zeta(1-z)$, где

$$\chi(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin(\pi z/2) \Gamma(1-z)$$

заменой z на $1-z$. Тогда $\chi(z) = \pi^{z-1/2} \Gamma(1/2-z/2) / \Gamma(z/2)$, следовательно, $\chi(z)\chi(1-z) = 1$. Поэтому $\xi(z) = \xi(1-z)$ для любого $Re(z) \neq 1/2$, где $\xi(z) = z(z-1)\pi^{-z/2} \Gamma(z/2)\zeta(z)/2$, следовательно,

(7) $\Upsilon(z) = \Upsilon(-z)$ для любого $Re(z) \neq 0$,

где $\Upsilon(z) = \xi(z+1/2)$. Поскольку $(2^z)^* = 2^{z^*}$, $(\pi^{z-1})^* = \pi^{z^*-1}$, $\sin(\pi z/2) = (\sin(\pi z/2))^*$, $\Gamma(1-z^*) = (\Gamma(1-z))^*$ для любого $z \in \mathcal{A}_b$, тогда

(8) $(\Upsilon(z))^* = \Upsilon(z^*)$ для любого $z \in \mathcal{A}_b$,

где $z^* := \tilde{z}$.

Для $\sigma > 0$ мы имеем $\int_0^\infty x^{z-1} e^{-nx} dx = n^{-z} \int_0^\infty y^{z-1} e^{-y} dy = n^{-z} \Gamma(z)$, так как n и y действительны, и η^{z-1} определена как $Exp((z-1)Ln(\eta))$ с ветвью логарифма $Ln(R)$ действительной для $R > 0$, так что n^{-z} и y^{z-1} коммутируют. Для $\sigma > 1$ мы имеем сходимость ряда $\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{\sigma-1} e^{-nx} dx = \Gamma(\sigma)\zeta(\sigma)$. Поэтому, $\Gamma(z)\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{z-1} e^{-nx} dx = \int_0^\infty x^{z-1} \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} dx = \int_0^\infty x^{z-1} (e^x - 1)^{-1} dx$.

Рассмотрим интеграл $J(z) = \int_C \eta^{z-1} (e^\eta - 1)^{-1} d\eta$, где контур C начинается в бесконечности на положительной действительной оси, охватывает начало системы координат в плоскости $\mathbf{R} \oplus M\mathbf{R}$ в положительном направлении, кроме точек $2\pi Mk$, где $0 \neq k \in \mathbf{Z}$ и возвращается к положительной бесконечности. Поэтому, $Arg(Ln(\eta))$ варьируется от 0 до $2\pi M$ вдоль контура. Поэтому мы возьмем C состоящей из действительной оси от ∞ до $0 < R < 2\pi$, окружности $|z| = R$, и действительной оси от R до ∞ . Таким образом, на окружности $|\eta^{z-1}| = \exp((\sigma-1)\ln|\eta| - t \arg(\eta)) \leq |\eta|^{\sigma-1} \exp(2\pi|t|)$ и $|Exp(\eta) - 1| > A|\eta|$, где $\arg(\eta) = M^* Arg(\eta)$, $z = \sigma + tM$, $\sigma = Re(z)$, $t \in \mathbf{R}$. Следовательно, интеграл вдоль окружности стремится к нулю при $R \rightarrow 0$ для $\sigma > 1$. Взятие предела при $R \rightarrow 0$ дает $J(z) = -\int_0^\infty x^{z-1} (e^x - 1)^{-1} dx + \int_0^\infty (x Exp(2\pi M))^z (e^x - 1)^{-1} dx = (exp(2\pi Mz) - 1)\Gamma(z)\zeta(z) = 2\pi M Exp(\pi z M) (\Gamma(1-z))^{-1} \zeta(z)$, следовательно,

(9) $\zeta(z) = \Gamma(1-z) Exp(-\pi Mz) (2\pi)^{-1} M^* \int_C \eta^{z-1} (Exp(\eta) - 1)^{-1} d\eta$.

Последняя формула была доказана для $\sigma > 1$. Но интеграл $J(z)$ равномерно сходится в G_M для любой ограниченной области G_M в $\mathbf{R} \oplus M\mathbf{R}$ плоскости и равномерно по чисто мнимой составляющей $M \in \mathcal{A}_b$, $Re(M) = 0$, $|M| = 1$, где $G_M = \hat{R}_{M,i} G_i$. Таким образом, формула (9) определяет $(1, b)$ -квазирегулярную функцию на $\mathcal{A}_b \setminus \{1\}$.

Формулы (4, 9) были получены одним и тем же семейством $R_{z,x}$ предложений 2.2 и 2.2.3. Если полюс комплексно мероморфной функции принадлежит действительной оси, тогда для ее квазиконформного продолжения с отмеченной точкой $y_0 = 0$ ее полюс останется тем же действительным полюсом, так как осью вращения является \mathbf{R} . Таким образом, единственными возможными сингулярностями дзета функции $\zeta(z)$ могут быть лишь полюсы функции $\Gamma(1-z)$, $z = 1, 2, 3, \dots$. В силу (4) $\zeta(z)$ регулярна в $z = 2, 3, \dots$, более точно $J(z)$ исчезает в этих точках (смотри [31] и теорему 2.11 [17, 18]). В точке $z = 1$ мы имеем $J(1) = \int_C (Exp(z) - 1)^{-1} dz = 2\pi M$ и $\Gamma(1-z) = -(z-1)^{-1} + \dots$, следовательно, вычет в этом полюсе равен 1.

14. Пример. Для логарифмической производной $\psi(1+z) = dLn\Gamma(1+z)/dz$ гамма функции имеется выражение $\psi(1+z) = -C - \sum_{k=1}^\infty ((z+k)^{-1} - k^{-1})$ (смотри формулу VII.89(9) в [15]). Следовательно, она выполняется для ее $(1, b)$ -квазимероморфного продолжения с операторами $\hat{R}_{z,y}$ как в предложениях 2.2 и 2.2.3, где $y_0 = 0$, $2 \leq b \leq 3$. Возьмем $-1 < a < 0$, тогда в силу некоммутативного \mathcal{A}_b аналога леммы Жордана 11 и замечаний 12 выше, 2.47 [25] с $-W := \{z : Re(z) < s_0\}$ вместо W и с $a < s_0 < 0$ и теоремы 3.9 о вычетах [17, 18] мы имеем

(1) $\zeta(z) = \exp(M\pi z) (2\pi)^{-1} M^* \int_{a-M\infty}^{a+M\infty} \{\psi(1+\eta) - Ln(\eta)\} \eta^{-z} d\eta$ для любого $\sigma > 1$, где

$M \in \mathcal{A}_b$, $Re(M) = 0$, $|M| = 1$, $z \in \mathcal{A}_b$, $\sigma = Re(z)$, $z = \sigma + Mv$, $\sigma, v \in \mathbf{R}$, $-1 < a < 0$.

Функция $\{\psi(1+\eta) - Ln(\eta)\}\eta^{-z}$ асимптотически является $O(|\eta|^{-1-\sigma})$, следовательно, интеграл в (1) сходится и формула (1) выполняется в силу аналитического продолжения для $\sigma > 0$. Снова используя некоммутативный аналог леммы Жордана, мы преобразуем интеграл в (1) к

$$(2) \zeta(z) = -\sin(\pi z)\pi^{-1} \int_0^\infty \{\psi(1+x) - \ln(x)\}x^{-z}dx \text{ для любого } 0 < \sigma < 1.$$

Функция $\{\psi(1+\eta) - Ln(\eta)\}\eta^{-z}$ действительна на $(0, \infty) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x\}$, где ветвь Ln такова, что $Ln|_{\mathbf{R}} = \ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$. В силу теорем о единственности и обращении некоммутативной версии преобразования Меллина (1, b)-квазирегулярное продолжение $\zeta(z)$ совпадает с некоммутативной версией преобразования Меллина (2), когда $z \in \mathcal{A}_b$ с $0 < Re(z) < 1$. Тогда $\hat{R}_{z,y}g(y) = g(z)$ для любого $y \in \mathbf{C}$ и $z \in \mathcal{A}_b$ с $0 < Re(y) = Re(z) < 1$, так что $\hat{R}_{z,y}y = z$, где $g(z) := \int_0^\infty \{\psi(1+x) - \ln(x)\}x^{-z}dx$, $y_0 = 0$. В силу теоремы 1 существует $(\partial \int_0^\infty \{\psi(1+x) - \ln(x)\}x^{-z}dx / \partial z).h = (\int_0^\infty \{\psi(1+x) - \ln(x)\} \ln(x)x^{-z}dx).h$ для всякого $h \in \mathbf{R} \oplus M\mathbf{R}$ и каждого $0 < \sigma < 1$, где $z = \sigma + Mv$. Таким образом, $g(z)$ удовлетворяет (Q1, Q6) и $g'(z)$ удовлетворяет (Q7), когда $g'(z) \neq 0$, следовательно, $g(z)$ является (1, b)-квазирегулярной функцией.

В силу формулы 13(6) имеется соотношение симметрии: $g(z) = -(\sin(\pi z))^{-1}\pi\zeta(z) = -(\sin(\pi(1-z)))^{-1}\pi\chi(z)\zeta(1-z)$, так как $\sin(\pi - \phi) = \sin(\phi)$ для любого $\phi \in \mathcal{A}_b$, где $\chi(z) := 2^z\pi^{z-1}\sin(\pi z/2)\Gamma(1-z)$, $\chi(z)\chi(1-z) = 1$. Но $|2^z| = 2^\sigma$, $|\pi^{z-1}| = \pi^{\sigma-1}$, $\sin(\pi z/2) = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 2k$ с $k \in \mathbf{Z}$, $\sin(\pi z/2)$ не имеет полюсов, $\Gamma(1-z)$ не имеет нулей, $\Gamma(1-z)$ имеет полюс в z тогда и только тогда, когда $z = 1, 2, 3, \dots$, следовательно, $\chi(z)$ не имеет никакого нуля или полюса в области $V := \{z \in \mathcal{A}_b : 0 < Re(z) < 1\}$. В тоже время множитель $(\sin(\pi z))^{-1}\pi|_V$ не имеет ни полюсов, ни нулей в V .

15. Пример. Рассмотрим новый тип продолжения в сферических \mathcal{A}_b -координатах. Пусть

$$(1) \psi(x) := \sum_{n=1}^\infty \exp(-n^2\pi x),$$

где $x > 0$, тогда

$$(2) \zeta(y) = \pi^{y/2}[\Gamma(y/2)]^{-1} \int_0^\infty x^{y/2-1}\psi(x)dx$$

для $\sigma = Re(y) > 1$, $y \in \mathbf{C}$. Известно, что

$$(3) 2\psi(x) + 1 = [2\psi(1/x) + 1]/(x)^{1/2} \text{ для всякого } x > 0. \text{ Поэтому, из (2, 3) следует, что}$$

$$(4) \pi^{-y/2}\Gamma(y/2)\zeta(y) = \int_0^1 x^{y/2-1}\psi(x)dx + \int_1^\infty x^{y/2-1}\psi(x)dx \\ = \int_0^1 x^{y/2-1}[\psi(1/x)(x)^{-1/2} + (x)^{-1/2}/2 - 1/2]dx + \int_1^\infty x^{y/2-1}\psi(x)dx \\ = 1/(y-1) - 1/y + \int_0^1 x^{y/2-3/2}\psi(1/x)dx + \int_1^\infty x^{y/2-1}\psi(x)dx \\ = 1/[y(y-1)] + \int_1^\infty (x^{-y/2-1/2} + x^{y/2-1})\psi(x)dx.$$

Последний интеграл сходится для любых значений $y \in \mathbf{C}$, поэтому формула (4) выполняется для всех значений y за счет аналитического продолжения (смотри формулы 2.6.1-4 в §2.6 [31]). Запишем член $1/[y(y-1)]$ в виде:

$$(5) w(q) := 1/(y-1) - 1/y = -[\int_0^\infty [\exp(-ty) + \exp(-t(1-y))]dt \\ = -[\int_0^\infty \exp(-t/2)[\exp(-tq) + \exp(tq)]dt = -[\int_{-\infty}^\infty \exp(-|t|/2) \exp(-tq)dt,$$

который сходится в полосе $-1/2 < Re(q) < 1/2$, где $q = y-1/2$. Тогда член $\int_1^\infty (x^{-y/2-1/2} + x^{y/2-1})\psi(x)dx$ полагая $q = y-1/2$ и также $x = e^t$, мы запишем в виде:

$$(6) \int_1^\infty (x^{-y/2-1/2} + x^{y/2-1})\psi(x)dx \\ = \int_1^\infty (x^{-3/4-q/2} + x^{-3/4+q/2})\psi(x)dx = \int_0^\infty \exp(-3t/4)[\exp(-tq/2) + \exp(tq/2)]\psi(e^t)e^t dt \\ = \int_0^\infty \exp(t/4)\psi(e^t) \exp(-tq/2)dt + \int_{-\infty}^0 \exp(-t/4)\psi(e^{-t}) \exp(-tq/2)dt \\ = \int_{-\infty}^\infty \exp(|t|/4)\psi(\exp(|t|)) \exp(-tq/2)dt.$$

Поэтому, формулы (4-6) дают:

$$(7) \pi^{-q/2-1/4}\Gamma(q/2 + 1/4)\zeta(q + 1/2) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [-\exp(-|t|/2) + 2 \exp(|t|/2) \psi(\exp(2|t|))] \exp(-tq) dt$$

выполняющуюся на \mathbf{C} за счет аналитического продолжения. Тогда

$$(8) \quad \xi(y) = y(y-1) [\pi^{-y/2} \Gamma(y/2) \zeta(y)] / 2 = [w(y-1/2)]^{-1} [\pi^{-y/2} \Gamma(y/2) \zeta(y)] / 2$$

является целой функцией на \mathbf{C} .

Возьмем семейство $\hat{R}_{E(z), E(x)}$ удовлетворяющее условиям 2.1(Q2 – Q5) и 2.2.3(1). В силу теорем 9 и 10 $w(y)$ имеет $(1, b)$ -квазирегулярное продолжение $w^s(p)$ в сферических \mathcal{A}_b -координатах, где $2 \leq b \leq 3$, $w^s(p) := -[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|t|/2) \exp(-E(tp)) dt]$. В соответствии с предложением 17 функция $1/w^s(p)$ является $(1, b)$ -квазирегулярной в сферических \mathcal{A}_b -координатах в области $-1/2 < Re(p) < 1/2$. В силу следствия 9.2 произведение $(1, b)$ -квазирегулярных функций с одним и тем же семейством $\hat{R}_{z,x}$ является $(1, b)$ -квазирегулярным. Тогда из определения 2.2.1 следует, что произведение $f_1^s f_2^s$ из $(1, b)$ -квазирегулярных функций f_1^s и f_2^s в сферических \mathcal{A}_b -координатах с одним и тем же семейством $\hat{R}_{E(z), E(x)}$ является $(1, b)$ -квазирегулярным в сферических \mathcal{A}_b -координатах, так как $f_1 = f_1^s \circ E^{-1}$ и $f_2 = f_2^s \circ E^{-1}$ являются $(1, b)$ -квазирегулярными.

С другой стороны, правая часть уравнения (8) дает $(1, b)$ -квазимероморфное в сферических \mathcal{A}_b -координатах продолжение

$\int_{-\infty}^{\infty} [-\exp(-|t|/2) + 2 \exp(|t|/2) \psi(\exp(2|t|))] \exp(-E(tp)) dt =: g^s(p)$ согласно теоремам 9, 10. Положим $\Omega(q) := \xi(q + 1/2)$. Тогда $\Omega(q)$ имеет $(1, b)$ -квазицелое в сферических \mathcal{A}_b -координатах продолжение $\Omega^s(p) = [w^s(p)]^{-1} g^s(p)$. Функция $f(t) := -\exp(-|t|/2) + 2 \exp(|t|/2) \psi(\exp(2|t|))$ является действительно-значной и четной на \mathbf{R} . В силу теорем 10 и 11 $\Omega^s(p)$ имеет свойства симметрии 11(1', 2). Это также можно видеть из уравнений (7, 8). Свойство симметрии 11(1') для f^s влечет 11(1) для $f = f^s \circ E^{-1}$, так как если $z = E(p)$, тогда сопряженное число равно $\tilde{z} = E(p_0 - p_1 i_1 + p_2 i_2 + \dots + p_{2^b-1} i_{2^b-1})$ согласно формулам 2.2.1(1, 2).

Известно, что $\zeta(z)$ не имеет никаких полюсов в \mathbf{C} кроме $z = 1$, то есть, $\zeta(z)$ содержит только комплексные нули в области $0 < Re(y) < 1$ in \mathbf{C} . Хорошо известно, что все комплексные нули функции $\zeta(z)$ принадлежат комплексной полосе $0 < \sigma < 1$ и они образуют дискретное множество в \mathbf{C} без конечных предельных точек [31]. Таким образом, функция $f = f^s \circ E^{-1}$ с $f^s(p) = \Omega^s(p)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.17, так как $\xi(z)$ не имеет никаких действительных нулей и все ее комплексные нули принадлежат полосе $0 \leq Re(z) \leq 1$ (смотри страницу 30 [31]). С другой стороны, $\zeta(z)$ и $\xi(z)$ имеют общими все комплексные нули и $E(y)|_{\mathbf{C}} = y$ для любого $y \in \mathbf{C}$. Таким образом, в силу теоремы 2.17 доказано следующее.

16. Теорема. *Все комплексные нули ζ функции лежат на прямой $Re(z) = 1/2$.*

17. Замечание. Это не так удивительно, так как по теореме 2.13 [31] всякая мероморфная функция $f(s) = G(s)/P(s)$, где G – это целая функция конечного порядка и P – это полином на \mathbf{C} , и f удовлетворяет свойствам симметрии 13.1(6) и имеет разложение в ряд $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ абсолютно сходящийся для $\sigma > 1$, тогда $f(s)$ равна $c\zeta(s)$, где $c = const$, $a_n \in \mathbf{C}$ – это константа для любого $n \in \mathbf{N}$. С другой стороны, класс (r, b) -квазиконформных функций более узок и специфичен по сравнению с классом \mathcal{A}_b голоморфных функций, где $1 \leq r < b \leq 3$ (смотри также замечания 2.13 и 2.17.1). Более того, класс $(1, b)$ -квазицелых функций более узок, чем класс $(1, b)$ -квазирегулярных функций, который, в свою очередь, удовлетворяет теореме 10. Отметим, что если $z = z_0 + z_1 i_1 + z_2 i_2 + z_3 i_3 = E_2(p)$, тогда $E_2(-p) = -z_0 - z_1 i_1 + z_2 i_2 - z_3 i_3$ в соответствии с формулой 2.2.1(1) и 2.16.1(3), где $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{R}$, $z, p \in \mathbf{H}$. Следовательно, E_2 и E_6 не являются ни четными, ни нечетными функциями. Более узкий класс удовлетворяет условиям симметрии 11(1', 2), которые должны выполняться для использования теоремы 2.17. Например, функция Дирихле не удовлетворяет условиям

теоремы 2.17 (смотри §10.25 [31]).

Рассмотрим тождество $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(p_0 + ip_1 t) dt = g(p) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp((1-p_0)t - ip_1 t) dt$ для ненулевой функции-оригинала $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ и мероморфной функции g в \mathbf{C} , так что g голоморфна и без нулей в полосе $G := \{p \in \mathbf{C} : s_0 < p_0 < s_1, s_0 < 1 - p_0 < s_1\}$, где g может иметь лишь изолированные полюсы в \mathbf{C} , $p_0, p_1 \in \mathbf{R}$, $p = p_0 + ip_1$, $0 < s_0(f) < s_1(f) < 1$, $|f(t)| < C_1 \exp(-s_1 t)$ для любого $t < 0$, $|f(t)| < C_2 \exp(s_0 t)$ для любого $t \geq 0$, $s_0 = s_0(f)$, $s_1 = s_1(f)$. Тогда $g(p)g(1-p) = 1$ и $\bar{g}(p) = g(\bar{p})$ в G кроме полюсов и $g(1/2) = 1$, и $\bar{F}(p) = F(\bar{p})$ в G , где $F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(pt) dt$. В частности, $g'(1/2 + ip_1) = g'(1/2 - ip_1)$ для любого $p_1 \in \mathbf{R}$ кроме полюсов функции g . Поскольку двустороннее преобразование Лапласа функции $f(t)$ голоморфно в полосе $\{p \in \mathbf{C} : s_0 < p_0 < s_1\}$, тогда дифференцируя это тождество по p в G дает:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)t \exp(pt) dt = g'(p)(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp((1-p)t) dt - g(p) \int_{-\infty}^{\infty} f(t)t \exp((1-p)t) dt)$ (смотри также теорему 1 выше). Поэтому, класс таких функций $F(p)$ узок.

18. Теорема. Пусть $g, g', \dots, g^{(n)}$ – это функции-оригиналы, так что $g(\tau)\tau^{p-1}|_0^\infty = 0, \dots, g^{(n-1)}\tau^{p-n}|_0^\infty = 0$, пусть также g – это действительнзначная для $r \geq 4$ функция, g принимает значения в \mathbf{K} для $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$; тогда

$$(1) \mathcal{M}(g^{(n)}(\tau), u; p; 0) = (-1)^n \mathcal{M}(g(\tau), u; p-n; 0)(p-1)\dots(p-n)$$

в области $s_0 < \text{Re}(p) < s_1$ in \mathcal{A}_r , когда $s_0 < s_1$, где $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$,

$s_0 := \max(s_0(g), s_0(g'), \dots, s_0(g^{(n)}))$, $s_1 := \min(s_1(g), s_1(g'), \dots, s_1(g^{(n)}))$, $u(p, t, 0) = pt$.

If $g(\tau), g'(\tau)\tau, \dots, g^{(n)}(\tau)\tau^n$ – это оригиналы такие, что $g(\tau)\tau^p|_0^\infty = 0, g'(\tau)\tau^{p+1}|_0^\infty = 0, \dots, g^{(n)}(\tau)\tau^{p+n}|_0^\infty = 0$, тогда

(2) $\mathcal{M}(g^{(n)}(\tau)\tau^n, u; p; \zeta) = (-1)^n \mathcal{M}(g(\tau), u; p; \zeta)p(p+1)\dots(p+n-1)$ в области $s_0 < \text{Re}(p) < s_1$ в \mathcal{A}_r , когда $s_0 < s_1$, где $s_0 := \max(s_0(g), s_0(g') - 1, \dots, s_0(g^{(n)} - n))$, $s_1 := \min(s_1(g), s_1(g') - 1, \dots, s_1(g^{(n)} - n))$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, $u(p, t, \zeta) = pt + \zeta$.

Доказательство. Для $s_0 < s_1$ и $n = 1$ в силу теоремы 3.11 [25] интегрирование по частям дает:

$\int_0^\infty g'(\tau)\tau^{p-1} d\tau = g(\tau)\tau^{p-1}|_0^\infty - (\int_0^\infty g(\tau)\tau^{p-2} d\tau)(p-1) = -\mathcal{M}(g(\tau), u, p-1; \zeta)(p-1)$, так как или g действительнзначная для $r \geq 4$, или g принимает значения в \mathbf{K} для $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, но \mathbf{O} – это альтернативная алгебра. Поэтому, $\mathcal{M}(g'(\tau), u; p; 0) = -\mathcal{M}(g(\tau), u; p-1; 0)(p-1)$. Тогда мы применим эту формулу интегрирования по частям по индукции и получим формулу (1).

Если $|g(\tau)| < C_1 \tau^{s_0}$ для любого $0 < \tau \leq 1$, тогда $|g(\tau)\tau^k| < C_1 \tau^{s_0+k} \leq C_1 \tau^{s_0} \leq C_1 \tau^{s_0-k}$ для любого $k \geq 0$ и $0 < \tau \leq 1$, следовательно, $s_0(g(\tau)\tau^k) \leq s_0(g) - k$. Если $|g(\tau)| < C_2 \tau^{-s_1}$ для любого $\tau \geq 1$, тогда $|g(\tau)\tau^k| < C_2 \tau^{-s_1+k}$ для любого $k \geq 0$ и $\tau \geq 1$, следовательно, $s_1(g(\tau)\tau^k) \geq s_1(g) - k$.

19. Теорема. (1). Пусть $g(\tau)$ и $g'(\tau)$ – это функции-оригиналы для \mathcal{A}_r с $2 \leq r < \infty$ такие, что существует

(a) $\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} g(\tau)\tau^{p-1}$ для значений $\tau_0 = 0$ и $\tau_0 = \infty$, тогда

$$(b) \mathcal{M}(g'(\tau), u; p; \zeta) = -(p_0 - 1)\mathcal{M}(g(\tau), u; p-1; \zeta) - p_1 \mathcal{M}(g(\tau), u; p-1; \zeta + i_1 \pi/2) - \dots - p_{2r-1} \mathcal{M}(g(\tau), u; p-1; \zeta + i_{2r-1} \pi/2)$$

в области $s_0 < \text{Re}(p) < s_1$ в \mathcal{A}_r , когда $s_0 < s_1$, где $s_0 := \max(s_0(g), s_0(g'))$, $s_1 := \max(s_1(g), s_1(g'))$, $u(p, t, \zeta) = E(pt + \zeta) = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t, \zeta)$.

(2). Если $g(\tau)$ и $g'(\tau)\tau$ – это оригиналы такие, что существует

(c) $\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} g(\tau)\tau^p = 0$ для любого из значений $\tau_0 = 0$ и $\tau_0 = \infty$, тогда

$$(d) \mathcal{M}(g'(\tau)\tau, u; p; \zeta) = -p_0 \mathcal{M}(g(\tau), u; p; \zeta) - p_1 \mathcal{M}(g(\tau), u; p; \zeta + i_1 \pi/2) - \dots - p_{2r-1} \mathcal{M}(g(\tau), u; p; \zeta + i_{2r-1} \pi/2)$$

в области $s_0 < \text{Re}(p) < s_1$ in \mathcal{A}_r , где $s_0 := \max(s_0(g), s_0(g') - 1)$,

$s_1 := \min(s_1(g), s_1(g') - 1)$, $u(p, t; \zeta) = E(pt + \zeta) = p_0t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$.

Доказательство. Интегрирование по частям дает:

$\int_0^\infty g'(\tau) \exp(-u(-p, \ln \tau; -\zeta)) \tau^{-1} d\tau = g(\tau) e^{-u} \tau^{-1} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty g(\tau) (\partial e^{-u} \tau^{-1} / \partial \tau) d\tau$,
где $\exp(-u(-p, \ln \tau; -\zeta)) \tau^{-1} = \exp(p_0 \ln \tau + \zeta_0) (\cos(p_1 \ln \tau + \zeta_1) - i_1 \sin(p_1 \ln \tau + \zeta_1) \cos(p_2 \ln \tau + \zeta_2) + i_2 \sin(p_1 \ln \tau + \zeta_1) \sin(p_2 \ln \tau + \zeta_2) \cos(p_3 \ln \tau + \zeta_3) - \dots + i_{2r-2} \sin(p_1 \ln \tau + \zeta_1) \dots \cos(p_{2r-1} \ln \tau + \zeta_{2r-1}) - i_{2r-1} \sin(p_1 \ln \tau + \zeta_1) \dots \sin(p_{2r-1} \ln \tau + \zeta_{2r-1})) \tau^{-1}$,
 $\exp(p_0 \ln \tau + \zeta_0) / \tau = \tau^{p_0-1} \exp(\zeta_0)$, где $\exp(\zeta_0) = const$, а $\tau > 0$. Поэтому,

$\partial[\exp(-u(-p, \ln \tau; -\zeta)) \tau^{-1}] / \partial \tau = \partial[\exp(\zeta_0) \tau^{p_0-1} \exp(-M(-p, \ln \tau; -\zeta))] / \partial \tau$
 $= (p_0 - 1) \exp(\zeta_0) \tau^{p_0-2} \exp(-M) + p_1 \exp(-u(-p, \ln \tau; -\zeta - i_1 \pi/2)) / \tau^2 + \dots$
 $+ p_{2r-1} \exp(-u(-p, \ln \tau; -\zeta - i_{2r-1} \pi/2)) / \tau^2$

благодаря формуле 2.31(2) [25], так как $d \ln \tau / d\tau = 1/\tau$, где $\exp(\zeta_0) \tau^{p_0-2} \exp(-M) = \tau^{-1} \exp(-u(-p+1, \ln \tau; -\zeta))$. Отсюда следует формула (b), так как фазовый множитель $\exp(\phi(\tau))$ с $Re(\phi(\tau)) = 0$ для любого $\tau > 0$ не влияет на предел (a).

Рассмотрим теперь $g'(\tau)\tau$, тогда из формулы интегрирования по частям мы получим:

$\int_0^\infty g'(\tau) \tau \exp(-u(-p, \ln \tau; -\zeta)) \tau^{-1} d\tau = g(\tau) \exp(-u(-p, \ln \tau; -\zeta)) \Big|_0^\infty$
 $- p_0 \int_0^\infty g(\tau) \exp(-u(-p, \ln \tau; -\zeta)) \tau^{-1} d\tau - p_1 \int_0^\infty g(\tau) \exp(-u(-p, \ln \tau; -\zeta - i_1 \pi/2)) \tau^{-1} d\tau - \dots$
 $- p_{2r-1} \int_0^\infty g(\tau) \exp(-u(-p, \ln \tau; -\zeta - i_{2r-1} \pi/2)) \tau^{-1} d\tau$,

откуда вытекает формула (d), так как множитель $\exp(\phi(\tau))$ с $Re(\phi(\tau)) = 0$ имеет $|\exp(\phi(\tau))| = 1$ для любого $\tau > 0$ и не влияет на предел (b).

Литература

- [1] J. C. Baez. "The octonions". Bull. Amer. Mathem. Soc. **39: 2** (2002), 145–205.
- [2] F. A. Berezin. "Introduction to superanalysis" (D. Reidel Publish. Comp., Kluwer group: Dordrecht, 1987).
- [3] Н. Бурбаки. "Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра" (Москва: Физматгиз, 1962).
- [4] F. Brackx, R. Delanghe, F. Sommen. "Clifford analysis" (London: Pitman, 1982).
- [5] A. Connes. "Noncommutative geometry" (Academic Press: San Diego, 1994).
- [6] B. DeWitt. "Supermanifolds" 2d ed. (Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1992).
- [7] G. Emch. "Mèchanique quantique quaternionienne et Relativitè restreinte". Helv. Phys. Acta **36**, 739–788 (1963).
- [8] R. Engelking. "General topology" (Heldermann: Berlin, 1989).
- [9] F. Gürsey, C.-H. Tze. "On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics" (World Scientific Publ. Co.: Singapore, 1996).
- [10] Г. Грауэрт, И. Либ, В. Фишер. "Дифференциальное и интегральное исчисление" (Мир: Москва, 1971).
- [11] У. Р. Гамильтон. "Избранные статьи. Оптика. Динамика. Кватернионы" (Наука: Москва, 1994).
- [12] I. L. Kantor, A. S. Solodovnikov. "Hypercomplex numbers" (Berlin: Springer, 1989).
- [13] Л. И. Камынин. "Курс математического анализа" (Изд. МГУ: Москва, 1995).
- [14] A. Khrennikov. "Superanalysis", (Series "Mathem. and its Applic."; V. **470**; Kluwer: Dordrecht, 1999).
- [15] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. "Методы теории функций комплексного переменного" (Москва: Наука, 1987).
- [16] H. B. Lawson, M.-L. Michelson. "Spin geometry" (Princeton: Princ. Univ. Press, 1989).
- [17] S. V. Lüdkovsky, F. van Oystaeyen. "Differentiable functions of quaternion variables". Bull. Sci. Math. (Paris). Ser. 2. **127** (2003), 755–796.

- [18] С. В. Людковский. "Дифференцируемые функции чисел Кэли-Диксона". Гиперкомплексные числа в геометрии и физике **1 (3)** (2005), 93–140 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. *math.NT/0406048*; *math.CV/0406306*; *math.CV/0405471*).
- [19] S. V. Ludkovsky. "Functions of several Cayley-Dickson variables and manifolds over them". J. Mathem. Sci. **141: 3** (2007), 1299–1330 (previous variant: Los Alamos Nat. Lab. *math.CV/0302011*).
- [20] С. В. Людковский. "Неограниченные операторы в банаховых пространствах над телом кватернионов". Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. **4: 1 (7)**, (2007) 154–167 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. *math.OA/0603025*).
- [21] С. В. Людковский. "Алгебры векторных полей над телом кватернионов". Докл. Акад. Наук. **403: 3** (2005), 309–312.
- [22] С. В. Людковский. "Группы псевдоконформных диффеоморфизмов кватернионных переменных". Докл. Акад. Наук. **408: 5** (2006), 587–590.
- [23] С. В. Людковский. "Нормальные семейства функций и группы псевдоконформных диффеоморфизмов кватернионных и октонионных переменных". Современ. Матем. Фундам. Направл. **18** (2006), 101–164 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. *math.DG/0603006*).
- [24] S. V. Ludkovsky. "Stochastic processes on geometric loop groups and diffeomorphism groups of connected manifolds, associated unitary representations". J. Math. Sci. **141: 3** (2007), 1331–1384 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. *math.AG/0407439*, July 2004).
- [25] С. В. Людковский. "Преобразование Лапласа над алгебрами Кэли-Диксона". Гиперкомплексные числа в геометрии и физике **3: 1 (5)** (2007), 67–99 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. *math.CV/0612755*).
- [26] F. van Oystaeyen. "Algebraic geometry for associative algebras" (Series "Lect. Notes in Pure and Appl. Mathem."; V. **232**; Marcel Dekker: New York, 2000).
- [27] Ю. П. Размыслов. "Тождества алгебр и их представлений" (Наука: Москва, 1989).
- [28] H. Rothe. "Systeme Geometrischer Analyse" in: "Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Band 3. Geometrie", 1277–1423 (Leipzig: Teubner, 1914–1931).
- [29] Б. В. Шабат. "Введение в комплексный анализ" (Москва: Наука, 1985).
- [30] E. H. Spanier. "Algebraic topology" (Acad. Press: New York, 1966).
- [31] E. C. Titchmarsh. "The theory of the Riemann zeta-function" (Oxford: Clarendon Press, 1988).
- [32] В. А. Зорич. "Математический анализ" (Наука: Москва, 1984).

Quasi-conformal functions of octonionic variables and their non-commutative transform of Laplace and Mellin types

S. V. Ludkovsky

Moscow State Technical University
sludkowski@mail.ru

The present article is dedicated to holomorphic and meromorphic functions of quaternionic and octonionic variables. We study various properties of such functions, residues and the argument principle. We prove that, the family of all quasi-conformal diffeomorphisms of the domain determine a topological group relative to the composition of mappings. In particular, are investigated the cases when these groups are finite-dimensional real Lie groups. We study the relations which exist between the quasi-conformal mappings and the integral transforms of functions over quaternions and octonions. Non-commutative analogues of the Mellin transforms are studied as well, and are provided examples of such functions. At the end are discussed applications to the problems of complex analysis.

Key-words: quasi-conformal diffeomorphisms, quaternions, octonions, holomorphic functions, meromorphic functions, integral transforms.

MSC: 30C65, 46S10, 44A10, 44A20, 46T25, 58C10, 32A38.

GL_n -ПРОСТРАНСТВА

А. Ф. Турбин

Институт математики НАН Украины, Киев
turbin@imath.kiev.ua

Ю. Д. Жданова

Гос. университет информационно-коммуникационных технологий, Киев
yuzhdanova@yandex.ru

GL_n -пространство определяется как векторизованное аффинное пространство, наделённое симметричной относительно действия группы преобразований А. И. Лобанова [8] нормой. В GL_n -пространстве возможна визуализация многомерных тел (внутреннее многомерное зрение).

Ключевые слова: группы преобразований, симметрии, визуализация.

Мы не можем представить себе вещь, существующую вне трёх пространственных измерений и одномерной временной протяжённости.

Может быть после соответствующей тренировки, когда в результате эволюции ум человеческий превратится в более мощный инструмент, мы и смогли бы научиться мыслить в четырёх пространственных измерениях. Сейчас мы этого не умеем. Мы смотрим на мир сквозь пространственно-временные очки, одно стекло которых позволяет нам воспринять одномерное время, другое – трёхмерное пространство.

Мы не можем представить себе мысленно образ гиперкуба или какой-нибудь другой четырёхмерной структуры.

М. Гарднер "Этот правый, левый мир" [1].

В первой работе И. Канта "Размышления об истинной оценке живых сил" (1747) можно найти замечательные мысли, предвосхитившие появление n -мерной геометрии.

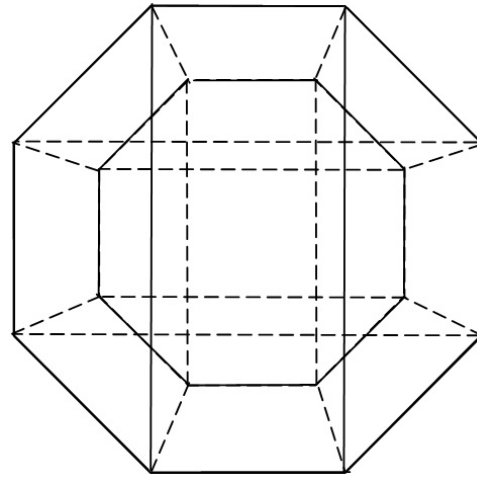
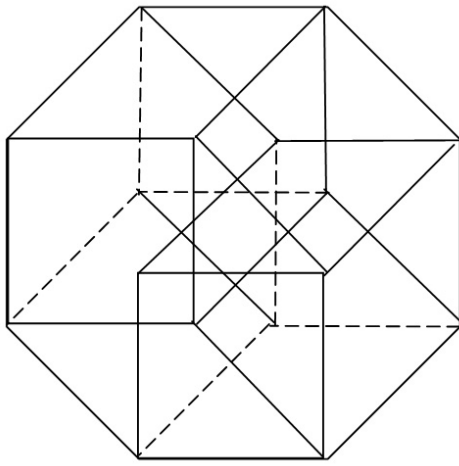
"Почему, – спрашивает он, – наше пространство трёхмерно?" И заключает, что это должно быть как-то связано с тем, что такие силы, как тяготение, распространяются из начальной точки подобно расширяющимся сферам.

"Наука о всевозможных пространствах такого рода (пространствах с числом измерений больше трёх) будет, несомненно, высшим усилием, которое наш ограниченный разум может предпринять в области геометрии".

В "Истории Плэттнера" великий фантаст Герберт Уэллс таинственным образом забрасывает учителя химии по имени Готтшок Плэттнер прямо в четырёхмерное пространство. После девяти дней пребывания в четырёхмерном мире Плэттнер возвращается в привычный евклидовый (?) трёхмерный мир.

Аналог куба – четырёхмерный гиперкуб после возвращения в E^3 Плэттнер мог бы изобразить, например, так¹:

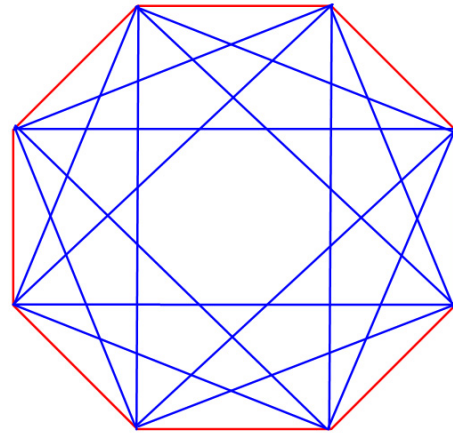
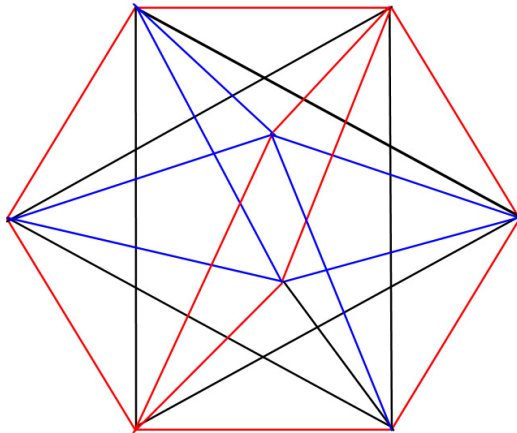
¹ К сожалению, черно-белая печать приводит к потере части информации на рисунках; см. PDF-версию статьи на сайтах www.polygonumbers.ru, www.hypercomplex.info



или так:

Рис. 1: ([2])

Четырёхмерный аналог октаэдра (8,24,32,16) в одной из проективных версий он показал бы нам так:



либо так:

Рис. 2:

Развивая фантазии Г. Уэллса, мы бы узнали от учителя химии, что в формулах

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1; \\ x_3^2 + x_4^2 = 1. \end{cases} \quad (1)$$

в 4-пространстве он увидел тор, который в привычном 3-пространстве мы воспринимаем как обыкновенный бублик (метрическое вложение Клиффорда), что целые кватернионы там столь же привычны, как целые гауссовы числа $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{Z}$, что единичная сфера

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

в E^4 , в отличие от единичной сферы

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

в E^3 , является компактной группой Ли.

Рассмотрим в $V^4(R)$ квадратичную форму

$$\Delta(\vec{x}) = (x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) + (x_3^2 - x_3x_4 + x_4^2).$$

Эта положительно определённая форма порождает в $V^4(R)$ дифференцируемое многообразие

$$Ell_4 = \{ \vec{x} \in V^4(R) : \Delta(\vec{x}) = 1 \}.$$

Это – гиперэллипсоид

$$(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) + (x_3^2 - x_3x_4 + x_4^2) = 1.$$

Теорема. Гиперэллипсоид Ell_4 является компактной группой Ли.

Сечение гиперэллипсоида Ell_4 двумерной плоскостью даёт компактное дифференцируемое многообразие

$$Torell_4 = \{ \vec{x} \in Ell_4; x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 1, x_3^2 - x_3x_4 + x_4^2 = 1 \}.$$

Теорема. $Torell_4$ является компактной абелевой группой Ли (эллиптический тор в E^3).

В этой работе мы хотим показать, как можно изобразить образы выпуклых многогранников с достаточно большой группой симметрий в многомерных пространствах, размерность которых может даже превышать 4.

Четырёхмерный аналог тетраэдра (4,6,4) (т.е. многогранника в E^3 с минимально возможным числом вершин) имеет структуру Эйлера-Пуанкаре (5,10,10,5), т.е. у него 5 0-граней (вершин), 10 1-граней (рёбер), 10 2-граней – треугольников и 5 3-граней – тетраэдров.

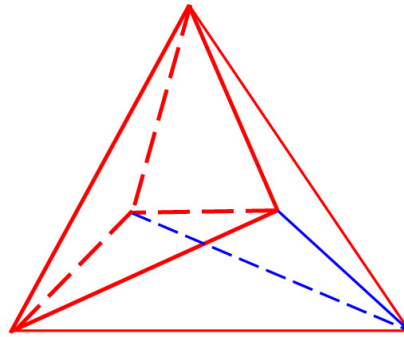


Рис. 3:

Четырёхмерный гиперкуб представлен выше (Рис. 1).

В 1850 году Л. Шлефли показал, что в E^4 имеются в точности шесть типов правильных многогранников:

Симплекс (гипертетраэдр) $\{3, 3, 3\}, (5, 10, 10, 5)$;

Гиперкуб $\{4, 3, 3\}, (16, 32, 24, 8)$;

16-гранник (гипероктаэдр) $\{3, 3, 4\}, (8, 24, 32, 16)$;

24-гранник (мегаоктаэдр) $\{3, 4, 3\}, (24, 96, 96, 24)$;

120-гранник $\{5, 3, 3\}, (600, 1200, 720, 120)$;

600-гранник $\{3, 3, 5\}, (120, 720, 1200, 600)$.

Здесь $\{a, b, c\}$ – символ Шлефли, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ – структура Эйлера-Пуанкаре ($\alpha - \beta + \gamma - \delta = 0$).

Были предприняты многочисленные попытки изобразить эти многогранники в виде проекции каркаса (четырёхмерной замкнутой ломаной, образованной 1-гранями) на плоскость.

Поразительно, но спустя более чем 100 лет после того как были созданы изображения 24-, 120-, и 600-гранников, приводимых например в [1, 2, 3], мы обнаружили, что они содержат ошибки.

На рис. 4 воспроизведено изображение самодвойственного 24-вершинника (24, 96, 96, 24), приведённое в "Геометрии" М. Берже со ссылкой на "Regular Polytopes" Г. Кокстера:

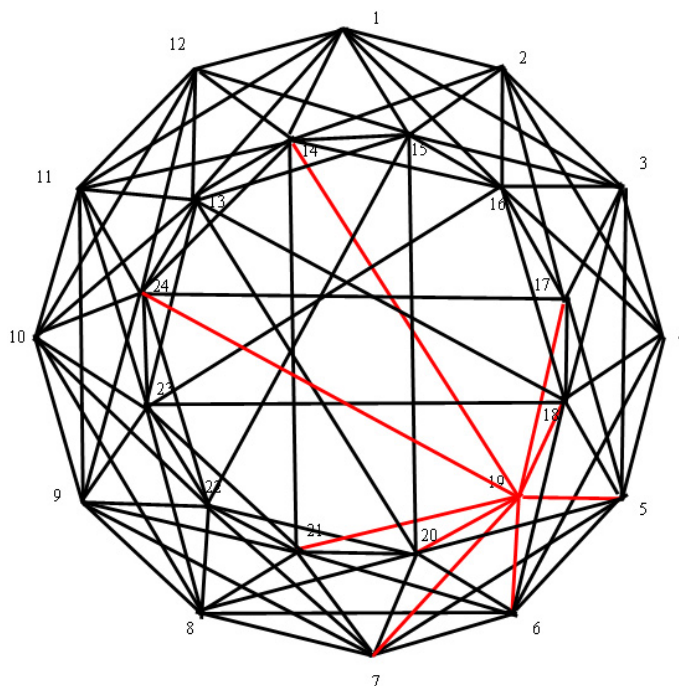


Рис. 4:

Очевидно, что у объекта, проекция каркаса которого представлена на рис. 4, двумерные грани – треугольники. Но легко проверить, что число двумерных граней, которое должно равняться 96, "зашкаливает" за 100! Число двумерных граней, имеющих общую вершину, равно 12 (см. приложение 1).

Определение 1. Степенью вершины $d_n(k)$ n -мерного выпуклого многогранника относительно k -мерной грани назовём число k -граней с общей вершиной.

Утверждение 1. $d_n(k) \geq n$.

Например, степени вершин ромбододекаэдра (14,24,12) равны 3 или 4. (И. Кеплер, Г. Вороной, Дж. Конвей и Н. Слоэн)

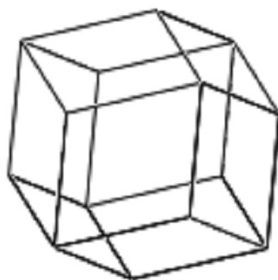


Рис. 5:

У правильного многогранника степени вершин $d_n(k)$ одинаковы для всех вершин. Степень вершины 1 многогранника, изображённого на рис. 4, равна 8; степень вершины 19 равна 9.

У 24-вершинников, заполняющих E^4 ([1], стр.) трёхмерными гранями являются октаэдры. У многогранника на рис. 4 легко различаются трёхмерные грани – тетраэдры.

Анализ изображения четырёхмерного многогранника на рис. 4 делает само его существование проблематичным.

Изображение 24-вершинника (24, 96, 96, 24) (мегаоктаэдра) приведено на рис. 6:

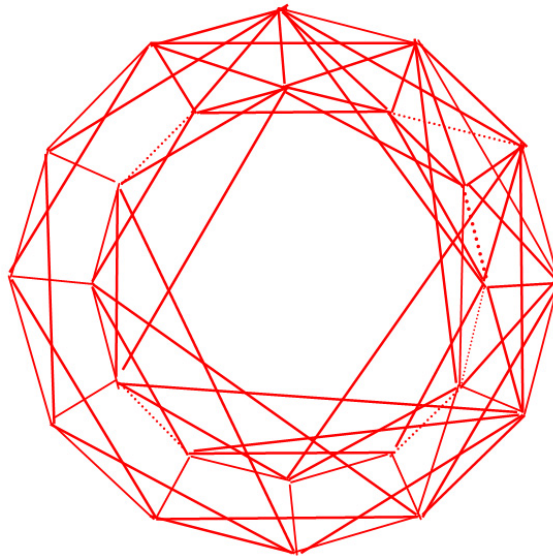


Рис. 6:

Легко видеть, что трёхмерные грани мегаоктаэдра – октаэдры.

Ромбододекаэдр (14,24,12), проекция каркаса которого приведена на рис. 7,

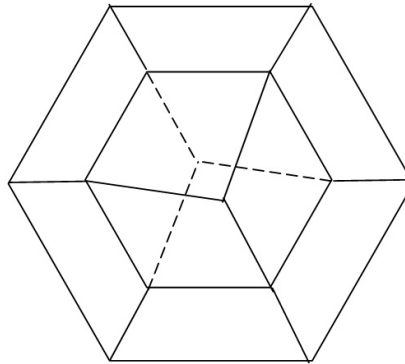


Рис. 7:

– многогранник в E^3 с 14 вершинами, 24 рёбрами и 12 гранями – ромбами, в монографиях по геометрии оказывается изгоем. Он не является правильным и не вписывается в определение полуправильных многогранников (архимедовых тел).

Среди правильных и полуправильных многогранников в E^3 заполняют всё пространство лишь кубы и усечённые октаэдры (рис. 8)

Ромбододекаэдры также заполняют пространство E^3 . Английский физиолог С. Хейлз в 1727 г. провёл интересный эксперимент [6]. Насыпав котёл зелёных горошин, он начал осторожно сдавливать образовавшуюся массу "сфер". При увеличении давления горошины деформируются, заполняя пустоты, превращаясь в конечном итоге в ромбододекаэдры. Тот же эксперимент, но уже со свинцовыми шариками проводил в 1939 г. американский ботаник Э. Мацке. И он давлением превратил свинцовые шарики в ромбододекаэдры.

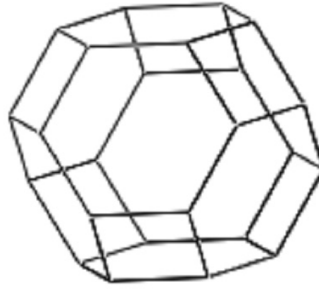


Рис. 8:

Проведём мысленный эксперимент Мацке в четырёхмерном пространстве с четырёхмерными свинцовыми шарами. В результате четырёхмерные шары должны деформироваться в определённые выпуклые многогранники, которыми можно заполнить всё пространство E^4 . Подобный мысленный эксперимент можно провести в пространстве любой размерности.

Многогранники в четырёхмерном пространстве E^4 , которыми можно его заполнить, – это гиперкубы, гипероктаэдры и мегаоктаэдры.

Четырёхмерный вариант эксперимента Мацке даёт многогранник Rmb_4 (30) в E^4 с $30 = 2^5 - 2$ вершинами. В n -мерном варианте мы получаем выпуклые многогранники $Rmb_n(m)$ с $m = 2^{n+1} - 2$ вершинами, которые заполняют всё пространство.

Теорема. *Граниями гиперромбододекаэдра $Rmb_n(2^{n+1} - 2)$ являются гиперромбододекаэдры $Rmb_k(2^{k+1} - 2)$, $k = 3, \dots, n - 1$.*

После исследований Л. Шлефли принято считать, что в пространствах размерности $n \geq 5$ имеются три типа многогранников – симплексы (гипертетраэдры), гиперкубы и многомерные аналоги октаэдров.

Мы сожалением констатируем, что аналогов октаэдра в пространствах размерности 5 и выше не существует. У многомерных правильных многогранников в E^n , $n \geq 5$, которые принято считать аналогами октаэдра, все многомерные грани являются k -мерными симплексами, в частности, трёхмерные грани не октаэдры, как хотелось бы, а правильные тетраэдры.

Пусть x – произвольное действительное число, $|x|$ – модуль этого числа

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$|x| = x - 2 \min \{0, x\}. \tag{2}$$

Представление (2) модуля числа x , интерпретируемого как метрика в одномерном пространстве R , допускает обобщение на многомерные векторные пространства.

Пусть $V^n(R)$ – n -мерное векторное пространство с полем скаляров R ; $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$, – некоторый фиксированный базис пространства $V^n(R)$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{r}_i$ – произвольный вектор из $V^n(R)$.

Определение. *Функционал*

$$\gamma_n(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - (n + 1) \min \{0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \tag{3}$$

назовём модулем А. С. Галицына вектора \vec{x} .

Функционал $\gamma_n(\vec{x})$ был введён в [7] и позволил записать решения обобщённых уравнений Бесселя в явном виде. Модуль А. С. Галицына обладает свойствами псевдометрики [7]:

- а) $\gamma_n(\vec{x}) \geq 0, \gamma_n(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;
- б) $\gamma_n(\vec{x} + \vec{y}) \leq \gamma_n(\vec{x}) + \gamma_n(\vec{y})$;
- в) $\gamma_n(\lambda\vec{x}) = \lambda\gamma_n(\vec{x}), \lambda \geq R$.

В общем случае

$$\gamma_n(\lambda\vec{x}) \neq |\lambda| \gamma_n(\vec{x}) \quad (4)$$

Например, в $V^2(\mathbb{R})$ для $\vec{x} = \vec{\tau}_1 - 3\vec{\tau}_2$ имеем:

$$\gamma_2(\vec{x}) = (1 - 3) - 3 \min\{0, 1, -3\} = -2 - 3(-3) = 7,$$

но

$$\gamma_2(-\vec{x}) = (-1 + 3) - 3 \min\{0, -1, 3\} = 2 - 3(-1) = 5$$

Псевдометрическое пространство $\{V^n(\mathbb{R}), \gamma_n\}$ назовём пространством А. С. Галицына.

Далее под $V^n(\mathbb{R})$ будем понимать векторизованное аффинное пространство.

Введём на $V^n(\mathbb{R})$ норму: $\forall \vec{x} \in V^n(\mathbb{R}) \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{\tau}_i, x_i \in \mathbb{R}$

$$\sigma(\vec{x}) = \max\{0, x_1, \dots, x_n\} + \max\{0, -x_1, \dots, -x_n\} \quad (5)$$

Тот факт, что $\sigma(\cdot)$ является нормой, проверяется непосредственно, доказательство приведено в [7] в общем случае пространств $V^n(\mathbb{R})$. Таким образом, мы имеем новое нормированное пространство $\{V^n(\mathbb{R}), \sigma\}$. Заметим, что σ -норма является результатом симметризации псевдонормы – γ -модуля А. С. Галицына.

Рассмотрим в пространстве $\{V^n(\mathbb{R}), \sigma\}$ преобразования

$$LG_2 = \{L_0, L_1, \dots, L_{(n+1)1-1}\}.$$

где $L_0(\vec{x}) = \vec{x}, \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{\tau}_i, x_i \in \mathbb{R}$ – единичное преобразование.

Например, на плоскости $\{V^2(\mathbb{R}), \sigma\}$ преобразования для $\vec{x} = x_1 \vec{\tau}_1 + x_2 \vec{\tau}_2 \in V^2$

$$L_0(\vec{x}) = \vec{x}.$$

$$L_1(\vec{x}) = -x_1 \vec{\tau}_1 + (x_2 - x_1) \vec{\tau}_2,$$

$$L_2(\vec{x}) = (x_1 - x_2) \vec{\tau}_1 - x_2 \vec{\tau}_2,$$

$$L_3(\vec{x}) = x_2 \vec{\tau}_1 + x_1 \vec{\tau}_2,$$

$$L_4(\vec{x}) = -x_2 \vec{\tau}_1 + x_1 \vec{\tau}_2,$$

$$L_5(\vec{x}) = (x_2 - x_1) \vec{\tau}_1 - x_1 \vec{\tau}_2.$$

Указанные L_j -преобразования пространства $\{V^n(\mathbb{R}), \sigma\}$ являются простейшими представителями преобразования А. И. Лобанова [8]. Они обладают рядом замечательным свойством.

Теорема. [8]

1. Множество $LG_2 = \{L_0, L_1, \dots, L_{(n+1)1-1}\}$ относительно композиции преобразований образует группу, изоморфную симметрической группе S_{n+1} порядка $(n+1)!$.

2.

$$\forall L_j \sigma(L_j(\vec{x})) = \sigma(\vec{x}). \quad (6)$$

Группу LG_2 назовём группой преобразований А. И. Лобанова.

Формула (6) показывает, что σ -норма инвариантна относительно действия группы преобразований А. И. Лобанова.

Определение. Нормированное пространство $\{V^n(R), \sigma\}$ назовём пространством А. Галицына – А. Лобанова или GL_n -пространством.

В отличие от евклидовой метрики, связанной с алгебраическими операциями ($\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$), σ -норма изначально арифметико-геометрична.

В структуре GL_n -пространства оказывается возможным визуализировать многие "семиправильные" многомерные многогранники.

Декаэдр. Правильный выпуклый многогранник в E^4 – декаэдр (10, 30, 30, 10)

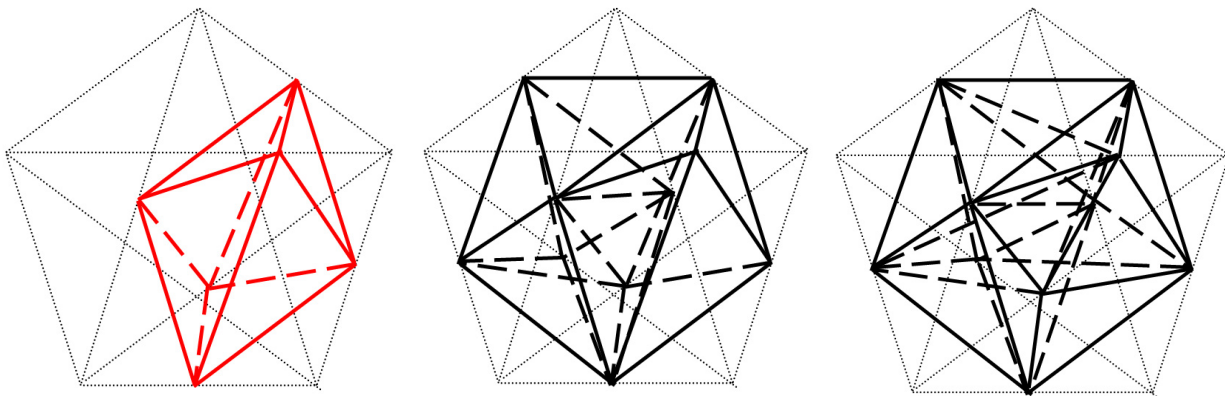


Рис. 9: а), b) , с)

а) – выделена первая 3-мерная грань строящегося декаэдра – правильный октаэдр.
 b), с) – выделены две 3-мерные грани строящегося декаэдра – правильные октаэдры.

Гиперкуб в E^5 (32, 80, 64, 24, 10)

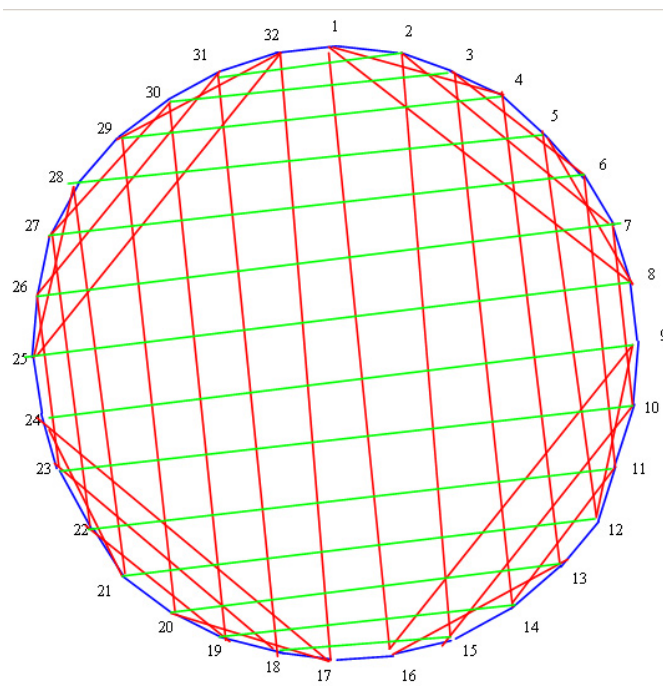


Рис. 10:

На следующих рисунках выделены некоторые 4-мерные грани 5-мерного гиперкуба:

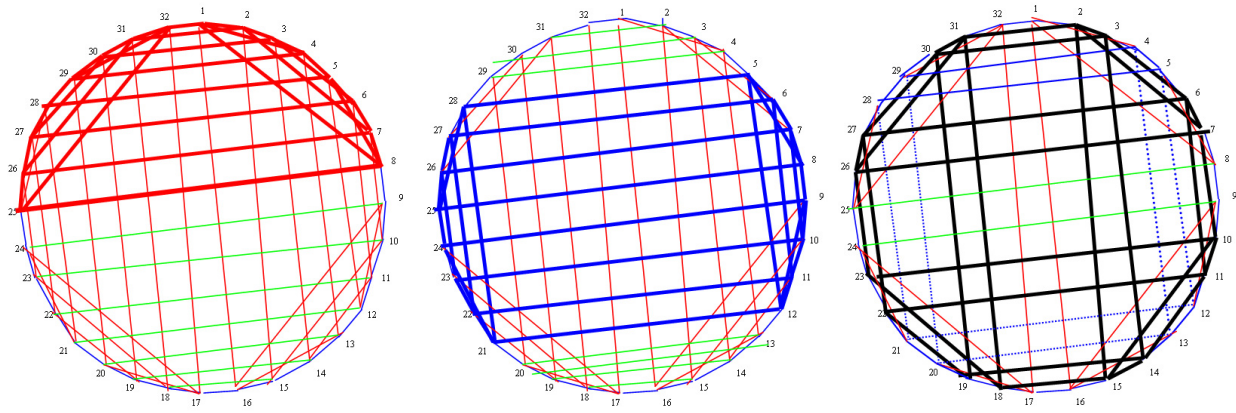


Рис. 11:

Пятимерный гиперкуб можно изобразить ещё так (Рис. 12):

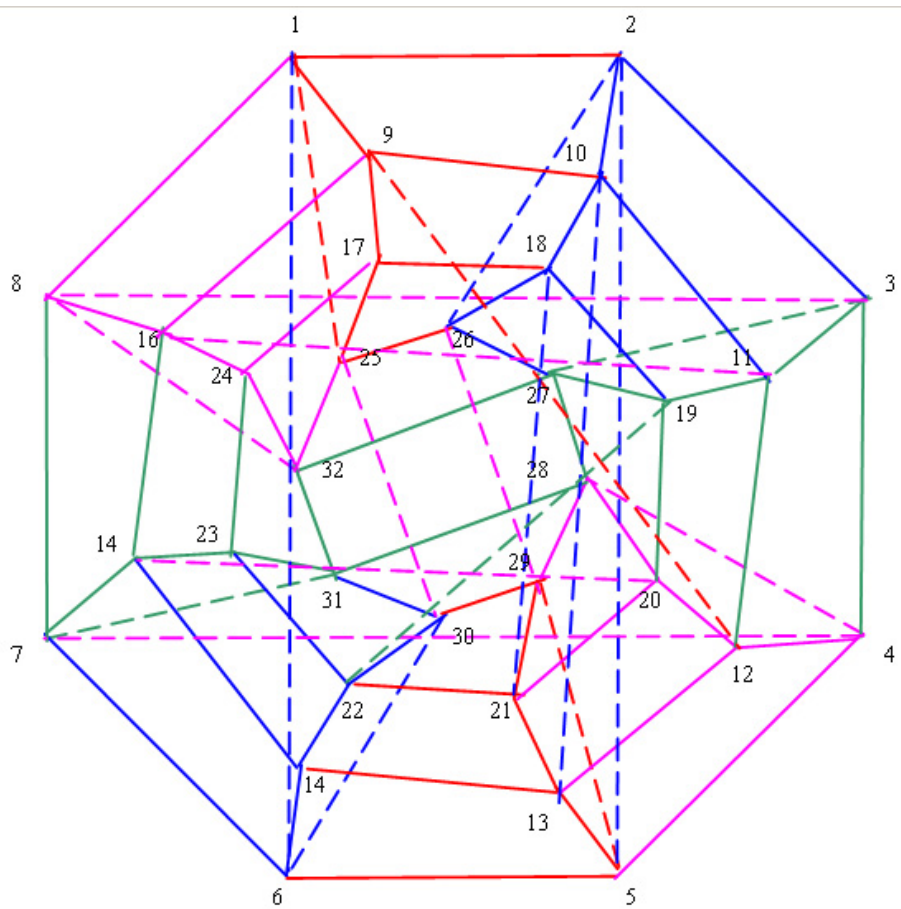


Рис. 12:

Гиперкуб в E^6 (Рис. 13):

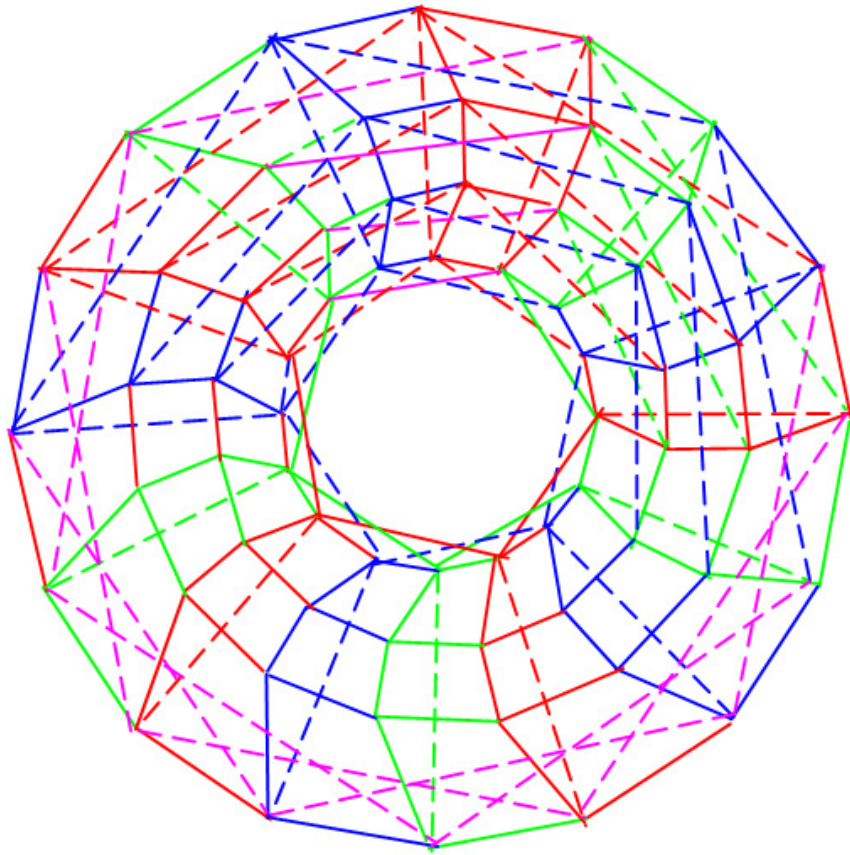


Рис. 13:

Литература

- [1] Гарднер М. Этот правый, левый мир. М.: КомКнига, 2007.
- [2] Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.
- [3] Берже М. Геометрия, т. 1. М.: Мир, 1984.
- [4] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.
- [5] Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решётки и группы: В 2-х т. Т. 1. М.: Мир, 1990.
- [6] Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. М.: Мир, 1971.
- [7] Турбин А. Ф. Матрицы, реализующие транзитивное действие группы S_{n+1} на границе ромбоэдра в R_n // Наукові записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. 1999. 1. С. 234–243.
- [8] Великий А. П., Турбин А. Ф. Преобразования А. И. Лобанова // Кибернетика и системный анализ, 2004, № 5. С. 160–168.

$GL(n)$ –spaces

A. F. Turbin, Yu. D. Zhdanova

*Institute of Mathematics; University of information and communication technology, Kiev, Ukraine;
turbin@imath.kiev.ua, yuzhdanova@yandex.ru*

The $GL(n)$ –space is the vectorized affine space endowed with symmetry relative to group action of the A. I. Lobanova's ([8]) norm transformations. In such a space is possible to visualize the multi-dimensional bodies (inner multi-dimensional visualization).

Key-words: transformations, symmetry, visualization.

MSC: 58D19, 51N25, 54H15, 28D15.

КАМНИ ПРЕТКНОВЕНИЯ СТАНДАРТНОЙ КОСМОЛОГИИ В СВЕТЕ ШЕСТИМЕРНОЙ КОСМОЛОГИИ

И. А. Урусовский

Акустический институт им. академика Н. Н. Андреева, Москва, Россия

В рамках простейшей шестимерной трактовки расширяющейся Вселенной как трёхмерной сферы, являющейся пересечением трёх простейших геометрических объектов конечных размеров в шестимерном евклидовом пространстве – трёх равномерно расширяющихся пятимерных сфер. Рассматривается сценарий, в котором скорость света в шестимерном пространстве постоянна во времени, что соответствует условию сохранения энергии каждой элементарной частицы в этом пространстве. Проводится учёт влияния возрастания скорости света в трёхмерной Вселенной на красное смещение спектра удалённых источников и на теоретические зависимости от красного смещения, сопоставляемые с данными наблюдений. В рамках шестимерной космологии обсуждаются данные астрономических наблюдений, не объясненных стандартной космологией.

Ключевые слова: наблюдательная космология, красное смещение.

Успехи наблюдательной космологии за последние два десятилетия выявили следующие факты, не имеющие объяснения в рамках стандартной космологии.

- В 1997 г. была обнаружена сверхновая SN 1997ff с красным смещением 1.7 и яркостью в 1.5 раза меньше, чем предписывала стандартная космология. Для устранения этого расхождения между экспериментом и теорией пришлось космологическую постоянную положить равной величине, при которой параметр замедления расширения Вселенной q_0 оказался отрицательным, что соответствует расширению Вселенной с ускорением, а не с замедлением, как полагали ранее [1]. Однако по данным Келлермана [2], измерившего зависимость углового размера компактных радиоисточников, линейный размер которых оценивается в 41 пк, от красного смещения z и сравнившего её с соответственными теоретическими кривыми, видно, что удовлетворительное согласие с наблюдениями достигается только при $q_0 = 0.5$. При остальных двух значениях q_0 расхождение теории с наблюдениями неприемлемо велико (см. рис. 1). При $q_0 < 0$ оно ещё больше. Поэтому введение в уравнения теории космологического члена не спасает положения.

Тем не менее, среди специалистов утвердилось мнение, что “Гурвиц исправил эту ошибку Келлермана” и что в последующих совместных публикациях проблема снята. Однако в совместной статье [3] этих авторов, опубликованной через шесть лет после [2], отмечено, что все предыдущие результаты по этой теме сохраняют силу. На самом деле в [3] к прежним данным добавлены новые данные, относящиеся к радиоисточникам меньших линейных размеров (рассмотрены случаи, для которых $\ell h = 9.6$ пк и 22.7 пк, где ℓ – линейный размер, h равно постоянной Хаббла, отнесенной к 100 км в секунду на мегапарсек). В [3] использовано 330 источников против 79 – в [2]. Чем меньше линейный размер, тем больше погрешность измерения углового размера источника. В результате “разбавления” прежних данных новыми доверительные интервалы увеличились настолько, что они зашли нижними краями в область углов, соответствующих отрицательным значениям q_0 . Это создало видимость благополучия. Однако данные

работы [2] статистически самодостаточны, имеют меньшие доверительные интервалы и явно свидетельствуют о невозможности согласования стандартной теории при отрицательных значениях q_0 с наблюдениями.

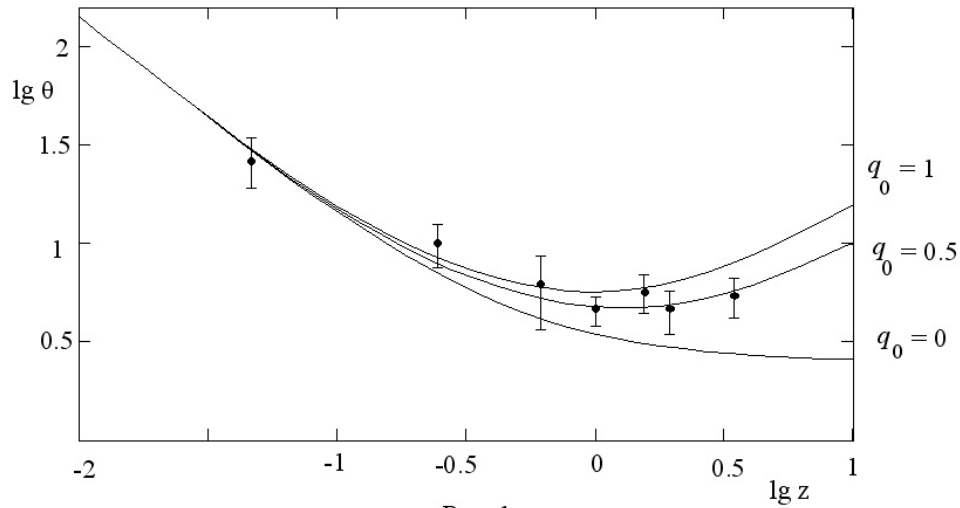


Рис. 1

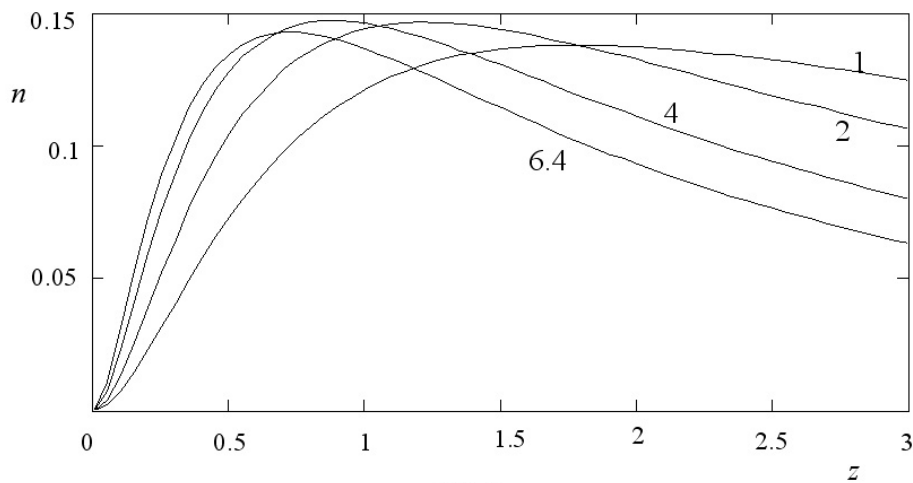


Рис. 2

• Максимум распределения галактик по красному смещению z наблюдается при $z = 0.72$ [4]. В книге [5] дана формула для плотности распределения вещества во Вселенной $n(z, \Omega)$ в зависимости от красного смещения z и отношения Ω плотности вещества к критической плотности,

$$n(z, \Omega) = \left[\Omega z + (\Omega - 2) \left(\sqrt{1 + \Omega z} - 1 \right) \right]^2 \frac{4}{\Omega^3 (1 + z)^3 \sqrt{1 + \Omega z}},$$

но вычисления по ней проведены не были. На рис. 2 рассматриваемая функция представлена для четырёх значений Ω , указанных на рисунке вблизи соответствующих кривых. Видно, что при критической плотности максимум функции расположен при слишком большом значении красного смещения $z = 1.7$ сравнительно с $z = 0.72$, соответствующем наблюдениям. По этой формуле максимум оказывается в нужном месте при относительной плотности $\Omega = 6.4$, неприемлемо большой для стандартной космологии, считающей, что плотность равна критической. Учёт космологической постоянной не спасает положения, поскольку её увеличение (начиная от нуля) действует в направлении, противо-

положном увеличению плотности вещества, так что расхождение теории и наблюдений только увеличится.

- Наблюдения показывают, что при больших красных смещениях металличность галактик и межгалактического газа – относительная плотность химических элементов, более массивных, чем водород и гелий – не зависит от красного смещения [6]. Такие химические элементы образуются при взрывах сверхновых, на образование и разогрев которых нужно время. По стандартной космологии время с момента начала расширения Вселенной до момента, соответствующего данному значению z , стремится к нулю с ростом z . Когда же при этом сверхновые успели возникнуть и подготовиться к взрыву? Без ответа на этот вопрос создается впечатление, что галактики появились во Вселенной уже в готовом виде. Применительно к квазарам прямо указано на такое впечатление [7] уже в 1995 г.

- По данным работы [8], максимум темпа звездообразования наблюдается при $z = 1.1$. Объяснения этому факту стандартная космология не даёт и не содержит никакого механизма, который мог бы быть ответственным за этот факт.

В основе шестимерной физики лежит следующее наблюдение: уравнение дисперсии для акустического волновода, для электромагнитного волновода и для волн де Бройля одно и то же: $v_{ph}v_g = c^2$, где v_{ph} – фазовая скорость волн, v_g – групповая скорость (для волн де Бройля равная скорости соответствующей частицы), c – скорость волн в свободной среде (скорость звука в первом случае и света в двух других). Основной характеристикой любого волновода является то, что он имеет конечные поперечные размеры. Они и обуславливают дисперсию волн. Это указывает на то, что пространство, с которым мы имеем дело в экспериментах, является трёхмерным лишь приближенно и имеет малую (комптоновскую) толщину в дополнительном подпространстве.

Шестимерная физика [9–14] основана на принципе простоты [15], отдающем предпочтение той из конкурирующих гипотез, которая основана на меньшем числе постулатов, т.е. более проста. Она восходит к утверждению Эйнштейна, что "природа экономит на принципах", и к идее Ф. Клейна [16–18] о движении частиц со скоростью света в многомерном пространстве, также вписывающихся в принцип простоты и его конкретизирующих.

В принцип простоты вписывается принцип одинаковости основных свойств вещества и света. Этому принципу соответствует предположение о движении частиц вещества со скоростью света в многомерном пространстве в комптоновской окрестности трёхмерной сферы. Тем самым предполагается, что в дополнительном пространстве на каждую элементарную частицу действует космологическая сила, удерживающая частицу на комптоновском расстоянии от трёхмерной сферы. Если бы таких сил не было, то образование макроскопических тел было бы невозможно. Космологическая сила должна быть ортогональной к трёхмерной сфере.

Как известно, свет и частицы вещества обладают как корпускулярными, так и волновыми свойствами, примерами чего являются дифракция электронов, когда электрон ведёт себя как волна, и фотоэффект, когда свет проявляет себя как частица. Поэтому, следуя принципу простоты, естественно предположить, что некоторые основные свойства света и частиц вещества одинаковы. Основным свойством света является то, что он распространяется с одинаковой скоростью в любой системе отсчёта. Следуя принципу одинаковости основных свойств вещества и света, полагаем, что элементарные частицы вещества движутся с той же скоростью. Это невозможно в трёхмерном пространстве, но возможно в многомерном, если положение частиц регистрируется наблюдателем в проекции на трёхмерное пространство $x_1x_2x_3 (X)$, которое будем полагать однородным и изотропным. При этом ньютоновские представления, распространённые на шести-

мерное евклидово пространство (R_6) , при проецировании событий на трёхмерное подпространство X дают общепринятые релятивистские результаты. Здесь используется малый в космологическом масштабе участок X , касательный к трехмерной Вселенной как трехмерной сфере в R_6 , в пренебрежении кривизной этого участка.

Пространство предполагается шестимерным, поскольку лишь для него возможна простая трактовка спина и изоспина. В шестимерном евклидовом пространстве скорость элементарных частиц предполагается постоянной. Первое обоснование шестимерности пространства дано ди Бартини в [19], где получены теоретические значения фундаментальных физических постоянных.

Частица, неподвижная в проекции на X в инерциальной системе трёхмерного наблюдателя движется со скоростью света в простейшем случае по окружности, расположенной в одной из плоскостей дополнительного трёхмерного подпространства $y_1y_2y_3$ (Y) с центром окружности, расположенным в X (при $y_1 = y_2 = y_3 = 0$). В любой другой инерциальной системе отсчёта рассматриваемая частица движется в R_6 по винтовой линии, расположенной на цилиндрической поверхности, которую для краткости будем называть трубкой движения, с осью, принадлежащей X .

Естественной мерой собственного времени частицы является число её оборотов в дополнительном подпространстве Y вокруг оси трубки. Поэтому будем считать собственное время частицы пропорциональным этому числу или пути, пройденному в Y .

Вообще, число оборотов частицы пропорционально $|\cos \theta|$, где θ – угол наклона винтовой линии к направляющей трубки движения (рис. 3). Поэтому, если частица совершает один оборот за собственное время τ , то по часам неподвижного наблюдателя, относительно которого частица движется вдоль трубки со скоростью $v = c \sin \theta$, где c – скорость света, это произойдёт за время $t = \tau / |\cos \theta|$. Очевидно, что

$$\sin \theta = v/c, \quad \cos \theta = \pm \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad (1)$$

где верхний знак перед квадратным корнем относится к частице, вращающейся вокруг оси трубки в положительном направлении, нижний – к её античастице, вращающейся в противоположном направлении. Такой выбор знака соответствует следующему соотношению между промежутками собственного времени частицы (или античастицы) $d\tau$ и времени неподвижного наблюдателя dt :

$$dt = \pm d\tau / \cos \theta = d\tau / \sqrt{1 - (v/c)^2}. \quad (2)$$

Частица, движущаяся со скоростью света c в неподвижной системе отсчёта (K) под углом θ к направляющей трубки, имеет составляющую скорости по направляющей, равную $v \cos \theta$. Ход собственного времени частицы с точки зрения неподвижного наблюдателя замедляется согласно (2) также пропорционально $\cos \theta$. Поэтому рассматриваемая частица и в собственной системе отсчёта (K') движется по направляющей со скоростью света c . Неподвижная в системе K частица также движется по направляющей со скоростью света c , перемещаясь по направляющей за собственное время $d\tau$ на интервал ds , равный

$$ds = \pm c d\tau. \quad (3)$$

Количество движения частицы есть вектор, направленный по касательной к направляющей в точке, в которой частица в данный момент находится, и по величине равный mc – произведению массы частицы m на её скорость. Эта величина равна импульсу покоя релятивистской механики. Энергия покоя E_0 по определению равна произведению импульса покоя на скорость частицы по направляющей, так что $E_0 = mc^2$. В общем случае полный импульс частицы есть вектор, направленный по касательной к её винтовой

траектории на трубке движения и по величине p равный произведению массы частицы m на отношение пройденного ею пути

$$d\zeta = c dt \tag{4}$$

в полном пространстве к затраченному на этот путь собственному времени $d\tau$: $p = m \frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{mc}{|\cos \theta|} = mc / \sqrt{1 - (v/c)^2}$. Это релятивистская формула для полного импульса частицы [20].

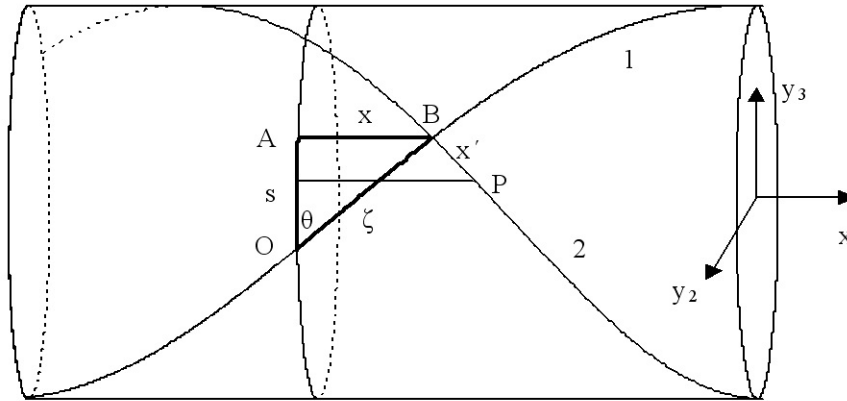


Рис. 3

1 – винтовая траектория частицы, движущейся в шестимерном пространстве со скоростью света c по цилиндрической поверхности комptonовского радиуса $a = \hbar / (mc)$ с осью в подпространстве X и направляющей в подпространстве Y ;

2 – винтовая линия равного собственного времени этой частицы, проходящая через частицу перпендикулярно её винтовой траектории и движущаяся по той же цилиндр. поверхности со скоростью волн де Бройля; шаг этой линии равен длине волны де Бройля.

Проекции p_x и p_y полного импульса на образующую и направляющую трубки равны соответственно координатной и временной компонентам 4-импульса частицы [20]:

$$p_x = \pm mctg \theta = mv / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad p_y = \pm mc. \tag{5}$$

В общем случае $\theta \neq 0$ и полная энергия частицы E равна произведению полного импульса p на скорость движения c по винтовой линии:

$$E = pc = mc^2 / |\cos \theta| = mc^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2}. \tag{6}$$

Этой величине равна полная релятивистская энергия частицы. Заметим, что отношение полной энергии к полному импульсу частицы оказывается таким же, как и для фотона, что является ещё одним общим свойством света и вещества.

Будем считать, что противоположно заряженные частицы вращаются вокруг оси трубки движения в противоположных направлениях. Частицы и античастицы имеют противоположные заряды и вращаются в противоположных направлениях. При обращении времени вспять частица должна будет двигаться вспять по своей траектории – винтовой линии – и поэтому вращаться в противоположном направлении. Значит, и знак её заряда должен будет измениться, так что частица должна будет превратиться в свою

античастицу. При этом движение частицы будет зеркально отражённым. Совокупность всех этих свойств частиц и античастиц составляют содержание СРТ-теоремы.

Перемещение частицы на интервал ds по направляющей трубки движения и соответственный ему поворот на центральный угол $d\phi = ds/a$, где a — радиус поперечного сечения трубки, являются инвариантами. Инвариантность интервала является исходным пунктом теории относительности. Шестимерная трактовка делает эту инвариантность очевидной: угол поворота ϕ частицы вокруг оси трубки не зависит от скорости наблюдателя относительно этой частицы.

Обозначим через dx в системе отсчёта K проекцию перемещения $d\zeta$ частицы по поверхности трубки на её образующую и применим теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику OAB на поверхности трубки, представленному на рисунке. В результате получим выражение для интервала $(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2$. Проецируя стороны этого треугольника на траекторию частицы, находим

$$s \cos \theta + x \sin \theta = \zeta. \quad (7)$$

Выберем начальные условия в виде $t = \tau = 0$ при $x = s = 0$. Им соответствуют в согласии с (3) и (4) соотношения

$$s = \pm c\tau, \quad \zeta = ct. \quad (8)$$

Подставив (1) и (8) в (7), получим преобразование Лоренца во времени

$$\tau = \pm [t - (x/c) \sin \theta] / \cos \theta = [t - (xv/c^2)] / \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Аналогичное рассуждение применительно к системе отсчёта K' с учётом того, что система K движется относительно рассматриваемой частицы со скоростью $-v$, приводит к обратному преобразованию

$$t = \pm [\tau + (x'/c) \sin \theta] / \cos \theta = [\tau + (x'v/c^2)] / \sqrt{1 - (v/c)^2},$$

где x' — координата вдоль образующей в системе K' . Переходу от системы K к системе K' соответствует поворот на угол $-\theta$ вокруг точки $x = s = 0$ координатной сетки x, s на поверхности трубки движения вместе с траекториями частиц на ней, который переводит винтовую траекторию в направляющую трубки.

Для геометрической интерпретации и остальных преобразований Лоренца рассмотрим траекторию частицы, движущейся вдоль трубки с той же скоростью v и пересекающей в момент $t = 0$ перпендикулярную ей винтовую линию $s \cos \theta + x \sin \theta = 0$ в произвольной точке P . В системе отсчёта K траектории, составляющие угол θ с направляющей, являются линиями постоянных значений координаты x' системы K' . Координата $x' = BP$ отсчитывается по винтовой линии, описываемой уравнением (7), от нормального сечения трубки $x = vt = \zeta \sin \theta$ до сечения, которого частица P достигает в момент времени t ; координата x частицы есть её расстояние от направляющей OA . Проецируя отрезки x', x , отрезок ζ траектории частицы и отрезок s на образующую и направляющую трубки, траекторию частицы и перпендикулярное к траектории направление (вдоль x'), получим при $\cos \theta > 0$:

$$x' \cos \theta + \zeta \sin \theta = x, \quad s \cos \theta + x \sin \theta = \zeta, \quad \zeta \cos \theta - x' \sin \theta = s, \quad x \cos \theta - s \sin \theta = x'.$$

Поделив эти равенства на $\cos \theta$ и исключив s, ζ и θ посредством (1) и (8), согласно которым в рассматриваемом случае $s = c\tau$, $\zeta = ct$, $\sin \theta = v/c$, $\cos \theta = \sqrt{1 - (v/c)^2}$, нетрудно получить преобразования Лоренца в их стандартной форме.

Собственная длина движущегося твёрдого масштаба есть разность координат x' его концов и в системе K равна длине отрезка винтовой линии, ортогональной траекториям движущихся с ним частиц, – линии одинакового времени системы отсчёта K' , связанной с частицами, между нормальными сечениями трубки движения, соответствующим этим концам. Длина того же движущегося масштаба в неподвижной системе отсчёта – это разность координат x его концов, равная расстоянию по образующей между указанными сечениями, что в $1/\cos\theta$ раз меньше собственной длины. Таким образом, лоренцово сокращение движущихся масштабов оказывается результатом проецирования длин в многомерном пространстве на трёхмерное пространство.

Данная выше интерпретация формулы (2) сохраняет силу и при криволинейной оси трубки движения, поскольку и тогда все нормальные сечения трубки движения перпендикулярны всем направлениям в подпространстве X , содержащем ось трубки.

Энергия фотона равна $h\nu$, где ν – частота света, h – постоянная Планка. В силу принципа одинаковости основных свойств вещества и света энергия покоя частицы mc^2 также должна представляться в виде кванта энергии $h\nu$. Поэтому $mc^2 = h\nu$. Единственной и естественной частотой для элементарной частицы вещества является частота её оборотов в дополнительном подпространстве Y . А поскольку частица движется в Y со скоростью света c , то частота ν связана с радиусом a поперечного сечения трубки движения соотношением $2\pi a = c/\nu$. Исключив из двух последних формул ν , найдём, что длина направляющей на трубке равна комптоновской длине волны: $2\pi a = h/mc$, откуда $a = \hbar/mc$ [9,10,12].

Расположенная на той же трубке движения винтовая линия, проходящая через частицу и перпендикулярная винтовой траектории частицы, является линией одинакового текущего времени системы отсчёта K' . Эта линия движется вдоль трубки со скоростью волн де Бройля $V_\phi = c/\sin\theta = c^2/v$, где v – скорость частицы в подпространстве X . Шаг ℓ этой винтовой линии равен длине волны де Бройля

$$\ell = 2\pi a |ctg\theta| = \frac{h}{mc} |ctg\theta| = h/p_x = \frac{h}{|mv|} \sqrt{1 - (v/c)^2},$$

как это видно из (5) и рис. 3. Угловая координата s/a винтовой линии, описываемой формулами (7) и (8), равна

$$\frac{s}{a} = \frac{\varsigma}{a \cos\theta} - \frac{x}{a} tg\theta = \frac{ct - x \sin\theta}{\cos\theta} \frac{mc}{\hbar} \quad \text{где} \quad \hbar = h/2\pi.$$

Отсюда и из (5) и (6) видно, что эта угловая координата равна фазе волны де Бройля $\pm[Et - p_x(x/\hbar)]$. Угол поворота самой частицы на трубке движения равен этой фазе. Отметим, что функция $\exp(is/a)$ удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона.

Собственный момент количества движения частицы S равен векторному произведению её собственного импульса и радиус-вектора. Составляющие радиуса-вектора и скорости частицы вдоль оси трубки движения перпендикулярны плоскости вращения частицы в Y . Поэтому они не вносят вклада в S , так что для частицы, движущейся в шестимерном пространстве по винтовой линии, а значит, прямолинейно в проекции на подпространство X , S есть векторное произведение проекций импульса и радиус-вектора частицы на подпространство Y . При этом величина момента количества движения равна

$$S = |S| = |p_y a| = m\hbar/mc = \hbar.$$

Эта формула оставляет известный произвол в ориентации вектора S в шестимерном пространстве: он может быть ориентирован по любым направлениям четырёхмерного подпространства, перпендикулярным плоскости вращения частицы в Y . Момент импульса

S в общем случае имеет четыре ненулевые компоненты по направлениям, перпендикулярным одно другому и плоскости вращения частицы. В случае вращения в плоскости y_2y_3 такими компонентами будут S_1, S_2, S_3, S_4 по осям x_1, x_2, x_3, y_1 соответственно. При этом

$$S = (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2)^{1/2} = \hbar.$$

Компоненты S_1, S_2, S_3 являются компонентами спина частицы, компонента S_4 есть проекция изоспина частицы, поскольку спин есть проекция вектора S на подпространство X , а изоспин – проекция вектора S на подпространство Y . Согласно (5) p_y не зависит от скорости v , поэтому спин и изоспин не зависят от v и преобразованиям Лоренца не подвергаются.

Простейшим геометрическим объектом конечных размеров в шестимерном евклидовом пространстве является пятимерная сфера. Поэтому простейшей шестимерной трактовкой расширяющейся трехмерной сферы является представление её как пересечения трёх расширяющихся в шестимерном евклидовом пространстве пятимерных сфер – трёх пятимерных сферических фронтов возмущений, распространяющихся в этом пространстве. Тем самым предполагается, что эти возмущения (их природа здесь несущественна) произошли в результате трёх самостоятельных "взрывов" в центрах указанных пятимерных сфер. Точка первого соприкосновения всех трёх пятимерных сфер соответствует месту возникновения трёхмерной вселенной в шестимерном пространстве. Неограниченное расширение трёхмерной сферы может происходить лишь при одинаковой скорости расширения всех трёх пятимерных сфер, её образовавших (далее эти скорости полагаем одинаковыми), в противном случае расширение трёхмерной сферы сменится её сжатием, стягиванием в точку и исчезновением.

Указанные пятимерные сферы описываются уравнениями

$$\sum_{\alpha=1}^6 (z_\alpha - z_{\alpha j})^2 = R_{5j}^2, \quad (9)$$

где z_α – декартовы координаты в шестимерном пространстве, $z_{\alpha j}$ – координаты центра j -ой сферы, R_{5j} – её радиус, $j = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Центры этих сфер будем считать расположенными в плоскости z_5z_6 , так что $z_{1j} = z_{2j} = z_{3j} = z_{4j} = 0$. Пересечением любых двух пятимерных сфер является четырехмерная сфера. Её центр расположен на линии, проходящей через центры пятимерных сфер. Пересечением каждой пары четырехмерных сфер является трехмерная сфера с центром, расположенным на линии, проходящей через центры этих четырехмерных сфер. Таким образом, пересечением трёх пятимерных сфер являются три четырехмерные сферы, которые, в свою очередь, пересекаясь, образуют три трёхмерные сферы [9, 13].

Разности выражений (9), соответствующих j -ой и k -ой пятимерным сферам, связывают z_5 и z_6 уравнениями

$$2(z_5 - z_{5j})z_{5kj} + 2(z_6 - z_{6j})z_{6kj} = b_{jk}, \quad \text{где}$$

$$z_{\alpha kj} = z_{\alpha k} - z_{\alpha j}, b_{jk} = R_{5j}^2 - R_{5k}^2 + z_{5k}^2 + z_{6k}^2 - z_{5j}^2 - z_{6j}^2.$$

Решение этой системы уравнений таково:

$$z_5 = (b_{jk}z_{6ij} - b_{ji}z_{6kj})/2D_{jki}, \quad z_6 = (b_{ji}z_{5kj} - b_{jk}z_{5ij})/2D_{jki} \quad (10)$$

где $k \neq i \neq j, k \neq j, D_{jki} = z_{5kj}z_{6ij} - z_{6kj}z_{5ij}, |D_{jki}| = 2S, S$ – площадь треугольника в плоскости z_5z_6 с вершинами в центрах пятимерных сфер. Значения (10) являются координатами центра j -ой трехмерной сферы, образованной пересечением двух четырехмерных сфер, каждая из которых есть пересечение j -ой пятимерной сферы и одной

из остальных пятимерных сфер. Уравнение этой трёхмерной сферы и её радиус R_{3j} описываются формулами

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = R_{3j}^2, \quad R_{3j}^2 = R_{5j}^2 - (z_5 - z_{5j})^2 - (z_6 - z_{6j})^2 \quad \text{и} \quad (10).$$

Ограничимся далее простейшим случаем расширения пятимерных сфер с одинаковой постоянной скоростью c_5 , когда их радиусы R_{5j} представимы в виде $R_{5j} = R_5 + r_j$, где r_j – расстояние между центром j -ой пятимерной сферы и точкой первого пересечения трёх пятимерных сфер, R_5 – разность текущего радиуса какой-либо из пятимерных сфер и его значения в момент первого пересечения. Тем самым равенством $R_5 = c_5 t$ вводится космологическое время t , отсчитываемое от момента первого пересечения всех трёх пятимерных сфер, когда $R_5 = 0$. Без ограничения общности можно выбрать эту точку за начало координат и выбрать ориентацию осей пятой и шестой координат таким образом, чтобы $z_{6i} = z_{6k}$. Тогда

$$\begin{aligned} r_j &= \sqrt{z_{5j}^2 + z_{6j}^2}, \quad R_{3j} = \sqrt{A_j R_5^2 + 2\rho_j R_5}, \quad \text{где} \\ \rho_j &= r_j + z_{5j}\rho_{6j} - z_{6j}\rho_{5j}, \quad A_j = 1 - \rho_{5j}^2 - \rho_{6j}^2, \\ \rho_{6j} &= (r_i - r_k)/z_{5ki} = -(z_{5k} + z_{5i})/(r_i + r_k), \\ \rho_{5j} &= (r_j - r_k - \rho_{6j})z_{5kj}/z_{6jk}, \\ \rho_{\alpha j} &= (r_j z_{\alpha ik} + r_k z_{\alpha ji} + r_i z_{\alpha kj})/D_{jki}, \quad D_{jki} = z_{6jk}z_{5ik}. \end{aligned}$$

Опуская далее в формуле $R_{3j} = \sqrt{A_j R_5^2 + 2\rho_j R_5}$ несущественные для дальнейшего анализа индексы, текущий радиус R' трёхмерной сферы в момент t' космологического времени напомним в виде

$$R' = \sqrt{AR_5'^2 + 2\rho R_5'}, \quad (11)$$

где A и ρ – постоянные, $R_5' = c_5 t'$, откуда следует:

$$dR'/dR_5' = (AR_5' + \rho)/R' = \sqrt{A + (\rho/R_5')^2}. \quad (12)$$

С увеличением R_5 наряду с изменением радиуса каждой трёхмерной сферы происходит и её перемещение как целого. При этом её центр движется по прямой в плоскости $z_5 z_6$. Производная пройденного им пути по R_5 , как следует из (11), (12), равна постоянной $\sqrt{1 - A}$ [9, 13].

Из (11) и (12) видно, что при $A > 0$ радиус R' монотонно возрастает с увеличением R_5' на полуоси $R_5' > 0$ при $\rho > 0$ и на полуоси $R_5' > -2\rho/A$ при $\rho < 0$. Последний случай относится к наблюдаемой Вселенной. Из (11) и (12) следует также, что $\dot{R}/R = (\tau + 1)/[(\tau + 2)t]$ для нынешнего радиуса трёхмерной сферы R и сегодняшнего космологического момента времени t , когда $\tau = AR_5/\rho = Ac_5 t/\rho$. Началу расширения трёхмерной сферы соответствует момент времени $t_1 = (|\rho| - \rho)/(Ac_5)$. Поэтому

$$t_1/t = (1/|\tau|) - (1/\tau), \quad t - t_1 = [1 + (2/\tau)]t \quad \text{при} \quad \tau < 0. \quad (13)$$

При $\tau = -6.1$ $t_1/t = 0.328$, $(\tau + 1)/(\tau + 2) = 1.244$.

Из формул (11) и (12) найдём параметр замедления расширения трёхмерной сферы: $q_0 = -R\ddot{R}/\dot{R}^2 = 1/(1 + \tau)^2$, что при выбранных параметрах равно 0.038 – величине, близкой к $q_0 = 0.04$, полученной в статье [21] по методу EMN (Evrard, Metzler, Navarro), не связанному с постоянной Хаббла.

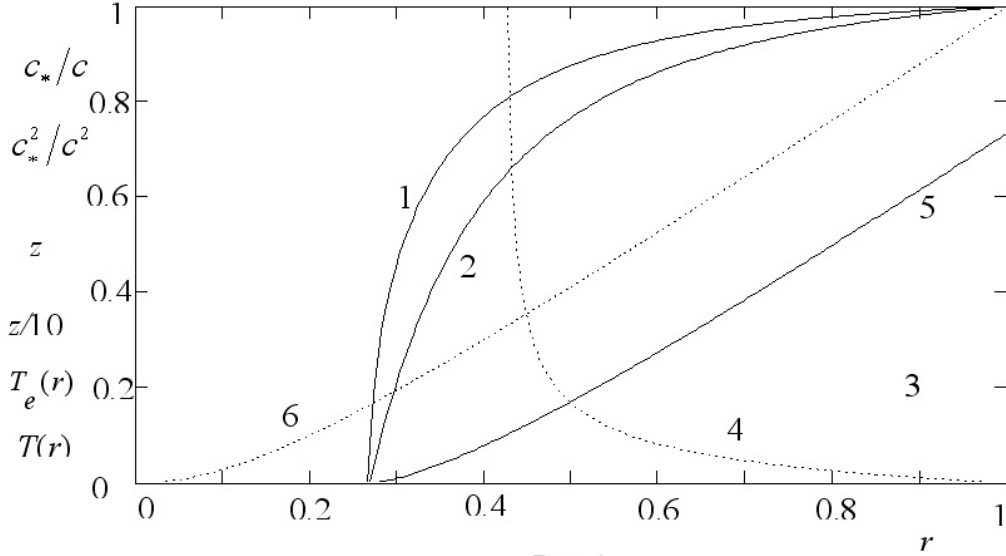


Рис. 4

В простейшем сценарии величина скорости света в шестимерном пространстве c_6 постоянна во времени в системе отсчета, связанной с центром самой трёхмерной сферы. Ограничимся рассмотрением этого случая.

Все направления на трёхмерной сфере в любой её точке перпендикулярны направлению расширения сферы. Поэтому скорость света на трёхмерной сфере $c(R')$ и скорость расширения сферы по радиусу \dot{R}' связаны теоремой Пифагора $c^2(R') + \dot{R}'^2 = const$. Подставив сюда (12) и положив $c_6^2 = c_5^2(A + B)$, где B – произвольная постоянная, найдём

$$c^2(R') = c_5^2 \left[B - (\rho/R')^2 \right]. \quad (14)$$

Скорость света на трёхмерной сфере получилась зависящей от радиуса этой сферы, а значит, и от времени. Однако, будучи вещественной величиной, она удовлетворяет (14) лишь при положительной правой его части. Поэтому следует принять

$$c(R') = c_5 R e \sqrt{B - (\rho/R')^2} = c R e \sqrt{(1 - w r^{-2}) / (1 - w)}, \quad (15)$$

где $c = c(R)$ – скорость света сегодня, $r = R'/R$, $w = q/p$, $q = A/B$, $p = A(R/\rho)^2$, причём согласно (11) $p = (\tau + 2)\tau$. На рис. 4 кривой 1 представлена в зависимости от r скорость света $c_* = c(Rr)$ в месте расположения источника, отнесённая к c , а кривой 2 – квадрат этой функции. Здесь и далее звёздочкой помечается соответственная величина в месте излучения. Все количественные результаты здесь и далее приводятся для $\tau = -6.1$, $q = 1.8$.

Расстояние на трёхмерной сфере радиуса R' от её полюса до точки с угловой координатой χ' будет $R'\chi'$. Пусть в полюсе находится наблюдатель, а в произвольной точке трёхмерной сферы с фиксированными угловыми координатами – источник света, χ – угол между направлениями в точку источника и точку наблюдения, проведёнными из центра сферы. При расширении трёхмерной сферы скорость удаления по ней источника от наблюдателя пропорциональна этому удалению (закон Хаббла) и равна $v = \chi \dot{R} = R \chi \dot{R} / R = s \dot{R} / R$, где $s = R\chi$. Однако наблюдатель видит источник света не там, где этот источник находится (на трёхмерной сфере радиуса R), и не таким, каким он является в момент наблюдения, а там, где он находился (на трёхмерной сфере радиуса R_*) и таким, каким он был в момент излучения. Луч света, вышедший из какой-либо

точки расширяющейся трёхмерной сферы, описывает спираль, раскручивающуюся в плоскости, проходящей через центр этой сферы, точку источника и точку наблюдения. На пути $d\varsigma$ по этой сфере фотон поворачивается в указанной плоскости на угол

$$-d\chi' = d\varsigma/R', \quad (16)$$

откуда следует, что свет от источника, находящегося от наблюдателя на фиксированном угловом расстоянии χ в этой плоскости, проходит по расширяющейся трёхмерной сфере путь

$$\varsigma(\chi) = \int_0^\chi R' d\chi'. \quad (17)$$

Скорость удаления источника от наблюдателя – изменение этого пути в единицу времени $u(\chi) = \dot{\varsigma}(\chi)$ – согласно (16) и (17) будет

$$u(\chi) = \int_0^\chi \dot{R}' d\chi' = \int_{R_*}^R \frac{d\chi'}{dt} dR' = \int_{R_*}^R \frac{c(R')}{R'} dR'. \quad (18)$$

Подставив (15) в (18), после интегрирования получим при соответственном значении R_* :

$$u(R_*)/c_* = 1 - L_w(r) \left(r / \sqrt{r^2 - w} \right) \quad \text{при} \quad r > \sqrt{w}, \quad (19)$$

где

$$L_w(r) = \sqrt{1-w} + \ln \left[\left(r + \sqrt{r^2 - w} \right) / \left(1 + \sqrt{1-w} \right) \right], \quad r = R_*/R.$$

При $1-r \ll 1$ $L_w(r) \approx \sqrt{r^2 - w}$, $u(R_*)/c(R_*) \approx 1 - r$.

Красное смещение, обусловленное только эффектом Допплера (его мы пока обозначим z_d , оставляя обозначение z для общепринятой в космологии величины), удовлетворяет соотношению ([5])

$$u(R_*)/c(R_*) = [(1+z_d)^2 - 1] / [(1+z_d)^2 + 1],$$

откуда и из (19) следует

$$1 + z_d = \sqrt{[2/L_w(r)]\sqrt{1-wr^{-2}} - 1}. \quad (20)$$

Однако энергия каждой элементарной частицы, в том числе фотона, увеличивается пропорционально квадрату скорости света. Этот эффект обусловлен постоянством полной энергии элементарных частиц в шестимерном пространстве и замедлением расширения трехмерной сферы. При этом энергия фотона в момент прихода в точку наблюдения с учётом космологического расширения трёхмерной сферы будет равна

$$h\nu = (c/c_*)^2 h_*\nu_*/(1+z_d), \quad (21)$$

где ν_* – частота излучения в системе источника. В наблюдательной космологии красное смещение z определяют из соотношения

$$\nu = \nu_{lab}/(1+z) \quad (22)$$

между регистрируемой частотой ν характеристического излучения и соответственной частотой ν_{lab} излучения, полученного в лаборатории. Из (21) и (22) следует

$$(c/c_*)^2 h_*\nu_*/(1+z_d) = h\nu_{lab}/(1+z). \quad (23)$$

Для частот характеристического излучения водородоподобного атома при переходе электрона с какого-либо m -го энергетического уровня на n -й имеем:

$$\nu_{lab} = [s(m) - s(n)]m_e c^2 / h, \quad \nu_* = [s_*(m) - s_*(n)]m_e c_*^2 / h_*, \quad (24)$$

где m_e – масса электрона, $s(m) = \sqrt{1 - (Z\alpha/m)^2}$, $s_*(m) = \sqrt{1 - (Z\alpha_*/m)^2}$, Z – зарядовое число ядра атома, $\alpha = e^2/\hbar c$ – постоянная тонкой структуры, $\alpha_* = e_*^2/\hbar_* c_*$. Из (23), (24) найдём

$$1 + z = (1 + z_d) \frac{s(m) - s(n)}{s_*(m) - s_*(n)} = (1 + z_d) \frac{s(m) + s(n)}{s_*(m) + s_*(n)} (\alpha/\alpha_*)^2.$$

Отсюда видно, что если постоянная тонкой структуры не меняется во времени, а это с большой точностью подтверждено наблюдениями, то $z_d = z$, что далее и принято. На рис. 4 кривыми 3 и 4 представлены функции $z(r)$ и $z(r)/10$, рассчитанные по формулам (15), (20).

Для плотности мощности излучения звезды как черного тела U_* с учётом того, что согласно формуле Планка лучеиспускательная способность черного тела зависит от скорости света c_* в месте излучения, имеем [5, 22–25]:

$$U_* = \int_0^\infty 2\pi\nu_*^3 \frac{h_*}{c_*^2} [\exp(h_*\nu_*/kT_*) - 1]^{-1} d\nu_* = \pi^5 \frac{2}{15c_*^2 h_*^3} (kT_*)^4, \quad (25)$$

где T_* – температура фотосферы в системе звезды.

С увеличением скорости света увеличиваются не только скорости частиц вдоль их винтовых траекторий, но и проекций этих скоростей, в той же пропорции. Поэтому температура, будучи пропорциональна среднему квадрату скорости броуновского движения частиц, пропорциональна c_*^2 . Отсюда имеем: $T_* = T (c_*/c)^2$.

Поскольку энергия частицы вещества пропорциональна c_*^2 , то согласно принципу одинаковости основных свойств вещества и света энергия фотона $h_*\nu_*$ также пропорциональна c_*^2 в месте его излучения. Но частота излучения ν_* пропорциональна c_* . Отсюда следует, что

$$h_* = hc_*/c, \quad \nu_* = \nu_{lab} c_*/c, \quad (26)$$

а следовательно,

$$U_* = \pi^5 \frac{2}{15c_*^2 h_*^3} (kT)^4 (c_*/c)^3,$$

где T – температура фотосферы такой же звезды на космологически близком расстоянии, так что светимость L_* далекого источника оказывается меньше светимости L такого же источника на космологически близком расстоянии: $L_* = L (c_*/c)^3$. Однако с точки зрения удаленного наблюдателя гравитационная потенциальная энергия, а следовательно, и гравитационная постоянная G_* тоже пропорциональны c_*^2 . С этой точки зрения давление гравитационного сжатия внешних слоев звезды, где темп времени пропорционален c_* , а следовательно, и противодействующее ему давление света внутри звезды также пропорциональны c_*^2 . С другой стороны, мощность излучения пропорциональна давлению света. Поэтому множитель $(c_*/c)^3$ в формуле для L_* следует заменить на $(c_*/c)^5$, так что будет

$$L_* = L (c_*/c)^5. \quad (27)$$

Из (26) и неизменности во времени постоянной тонкой структуры $\alpha_* = e_*^2/h_*c_*$ следует, что и заряд изменяется во времени вместе со скоростью света: $e_* = ec_*/c$. Подстановка (26) в (21) даёт $\nu = \nu_{lab}/(1+z_d)$, сопоставление чего с формулой (22) вновь приводит к полученному выше результату $z_d = z$.

Исходя из (16), для углового расстояния до источника имеем $\chi = \int_{t_*}^t [c(R')/R'] dt'$. Подставив сюда (12) и (15), найдём при $r \geq \sqrt{w}$ после интегрирования:

$$\chi = \frac{1}{2} \int_{pr^2}^p \frac{Re\sqrt{(x/q)-1}}{x\sqrt{1+x}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q}} \ln \frac{\sqrt{p-q} + \sqrt{p+1}}{\sqrt{pr^2-q} + \sqrt{pr^2+1}} - \frac{1}{2} \left[\arcsin \frac{(1-q)p-2q}{(1+q)p} - \arcsin \frac{(1-q)pr^2-2q}{(1+q)pr^2} \right].$$

Из (19) видно, что на горизонте событий ($z = \infty, r = r_\infty$) $L_w(r) = 0$, откуда следует

$$r_\infty = [\Phi + (w/\Phi)]/2, \quad \text{где} \quad \Phi = (1 + \sqrt{1-w}) \exp(-\sqrt{1-w}).$$

Предельные значения $\chi = \chi_\infty$ соответствуют $r = r_\infty$. При $q = 1.8$ имеем: $r_\infty = 0.423$, $\chi_\infty = 0.549$. Радиус Метагалактики равен $R \sin \chi_\infty$. Доступная наблюдению часть объёма трёхмерной сферы равна $[2\chi_\infty - \sin(2\chi_\infty)]/2\pi$ и при том же q составляет 3.3%. История Вселенной при $r \leq r_\infty$ скрыта от наблюдений. Это согласуется с данными [23–28] о спектре микроволнового фонового излучения, который оказался звёздным, сильно сдвинутым в низкочастотную область.

Видимая светимость S равна

$$S = \frac{L_*}{4\pi (R \sin \chi)^2} \frac{1}{(1+z)^2} (c/c_*)^2.$$

Здесь L_* – абсолютная светимость источника, $4\pi (R \sin \chi)^2$ – площадь поверхности двумерной сферы, по которой растеклось излучение к моменту наблюдения; $(1+z)^{-2}$ учитывает уменьшение энергии кванта из-за эффекта Доплера и уменьшения частоты прихода квантов к наблюдателю [5]; множитель $(c/c_*)^2$ описывает относительное увеличение энергии фотона на пути от источника до наблюдателя вследствие возрастания скорости света за время пути. Отсюда с учётом того, что свет распределяется по поверхности двумерной сферы радиуса $R \sin \chi$, а не $\varsigma(\chi)$ и не $R\chi$, из (27) видно, что

$$S = \frac{L}{4\pi (R \sin \chi)^2} (c_*/c)^3,$$

что меньше соответственной величины при $c_* \equiv c$. При $z = 1.7(c/c_*)^3 = 1.494$. Отсюда видно, что недостаток яркости космологически далёких источников объясняется возрастанием скорости света с течением времени [13,14], так что в космологически далёком прошлом, соответствующем большому z , скорость света была существенно меньше для предпочтительных параметров теории, при которых удовлетворительно согласуются теоретические и наблюдательные данные.

Вместо формулы (17) для функции $\varsigma(\chi)$ можно использовать представление

$$\varsigma(\chi) = \int_{t_*}^t c[R'(t')] dt' = \int_{R_*}^R [c(R')/\dot{R}'] dR',$$

где t_* – момент излучения, R_* – радиус трёхмерной сферы в этот момент. Подставив сюда (15) и (12), найдём

$$\frac{\varsigma}{R} = \frac{1}{2\sqrt{p}} \int_{pr^2}^p Re \sqrt{\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{x}\right) \frac{1}{1+x}} dx. \quad (28)$$

Отсюда и (20) можно видеть, что при $1 - r \ll 1$ $z_d \approx 1 - r$,

$$\varsigma/R \approx (1 - r^2) \sqrt{(p - q)/[(p + 1)q]} / 2 \approx \sqrt{(p - q)/[(p + 1)q]} z_d. \quad (29)$$

С другой стороны, при $z \ll 1$ справедлив закон Хаббла, выражающий расстояние ς через z и постоянную Хаббла H_0 :

$$\varsigma = zc/H_0. \quad (30)$$

Исключив ς и z_d из (29) и (30), найдём:

$$RH_0/c = \sqrt{q(p + 1)/(p - q)}. \quad (31)$$

Отсюда видно, что при $H_0 = 50$ км/сМпк радиус Вселенной – трёхмерной сферы – составляет 8522 Мпк, а радиус Метагалактики равен $R \sin \chi_\infty = 4444$ Мпк. При этом $RH_0/c = 1.42$. При $z \ll 1$ согласно (17) и (18) имеем: $u = \dot{R}\chi = \varsigma \dot{R}/R = cz_d$. Отсюда и из (30), (11) и (13) получим $\dot{R}/R = H_0$,

$$\dot{R} = c\sqrt{q(p + 1)/(p - q)}, \quad H_0(t - t_1) = 1 + (1/\tau). \quad (32)$$

Угол, под которым виден объект, удаленный на расстояние, соответствующее красному смещению z и радиусу трехмерной сферы R' , равен $\theta(z) = \ell/R'\chi(z)$, где ℓ – линейный размер объекта. Это соотношение следует из того, что каждый луч находится в своей меридиональной плоскости, проходящей через точки источника и наблюдения и центр трёхмерной сферы, а угол между меридиональными плоскостями не меняется со временем. При $z \ll 1$ правая часть этого соотношения сводится к виду $\ell H_0/(cz)$. Она не зависит от параметров теории, что удобно для определения постоянной Хаббла H_0 по измерениям $\theta(z)$ и ℓ для космологически близких источников. С этой точки зрения в качестве приемлемой величины положим в расчётах $H_0 = 50$ км/с Мпк. На рис. 5 в двойном логарифмическом масштабе представлена сплошной кривой функция $\theta(z)$ в угловых миллисекундах с учётом соотношения (31) для $\ell = 41$ пк. Эта функция стремится с ростом z к постоянному значению, отличному от нуля, что согласуется с наблюдаемой зависимостью угловых размеров источников заданных линейных размеров [2, 29]. Такая асимптотика объясняется тем, что горизонт событий находится на конечном расстоянии от наблюдателя. Пунктиром представлено $\ell H_0/(cz)$.

Только с момента, когда скорость света становится отличной от нуля и $r \geq \sqrt{w}$, становятся возможными взаимодействия между частицами и начинается рост неоднородностей плотности вещества во вселенной с последующим звёздообразованием. К этому моменту её относительный радиус достиг довольно большого значения 0.268 при $q = 1.8$. Для такого большого радиуса существенное гравитационное взаимодействие неоднородностей возможно лишь внутри сравнительно малых областей Вселенной, так что эволюция неоднородностей в каждой такой области слабо связана с эволюцией в соседних областях. Поэтому в больших объёмах, содержащих много таких областей, распределение вещества по пространству должно быть весьма однородным, что и соответствует

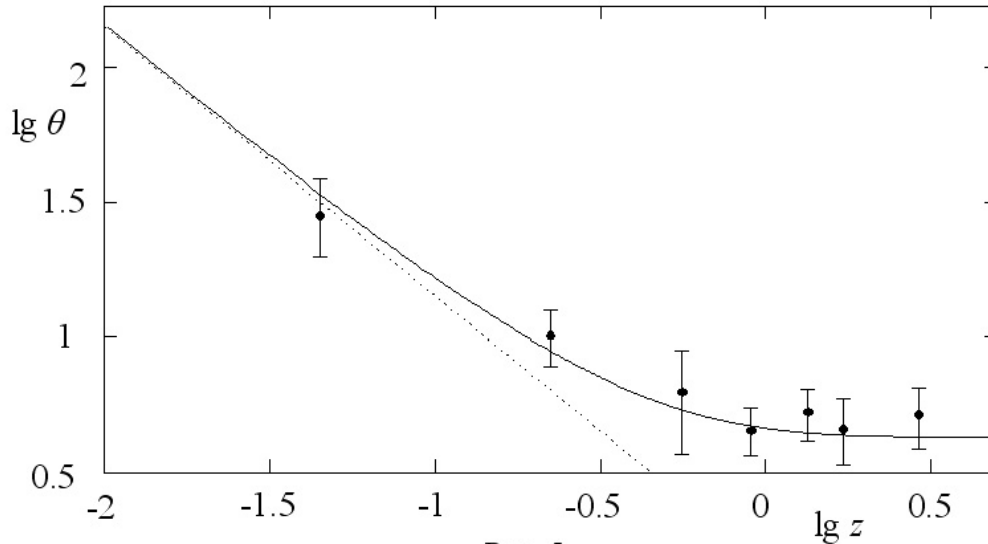


Рис. 5

наблюдаемому распределению галактик. Начало роста неоднородностей скрыто от наблюдений горизонтом событий, так что на горизонте событий они и должны присутствовать, возможно, уже в виде звёзд. В работах [23–27] утверждается, что так оно и есть на самом деле. В инфляционных же сценариях [30–33] приходится задействовать далеко идущие предположения, чтобы ценой модернизации стандартной космологии обеспечить приемлемое малое отношение скорости света к скорости расширения вселенной на его первом этапе, когда вселенная ещё не расширилась настолько, что достаточная однородность крупномасштабного распределения вещества уже не может нарушиться гравитационным взаимодействием его неоднородностей.

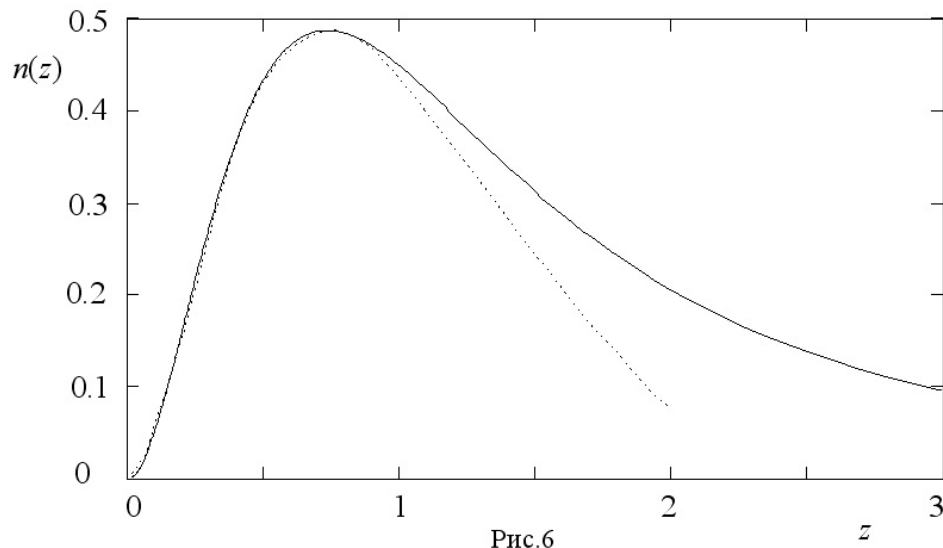


Рис.6

При достаточно равномерном распределении вещества по трёхмерной сфере его количество в малом интервале $d\chi$ угла χ пропорционально $\sin^2 \chi d\chi$, этой же величине пропорционально число галактик в интервале $d\chi$, если их формирование к моменту излучения наблюдаемого света уже завершилось. Относительные плотности распреде-

ления числа источников по r и z даются формулами:

$$n_r(r, q) = \left| \frac{d\chi(r, q)}{dr} \right| \frac{1}{N_\infty} \sin^2 \chi, \quad n(z, q) = n_r(r, q) \left| \frac{dr}{dz} \right|, \quad \text{где}$$

$$\frac{d\chi}{dr} = -\frac{1}{r} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{r^2 - w}{qr^2 + w}}, \quad \frac{dz}{dr} = \frac{(1+z)^2 + 1}{4(1+z)(r^2 - w)} \left\{ \frac{2w}{r} - r[(1+z)^2 + 1] \right\},$$

$N_\infty = N(\infty)$ – предельное значение функции

$$N(z) = \int_0^x \sin^2 \chi d\chi = \{2\chi[r(z)] - \sin 2\chi[r(z)]\} / 4,$$

а $1+z$ выражается через r по формуле (12). Функция $n(z, q)$ представлена на рис. 6 сплошной кривой. Пунктирной кривой воспроизведена полученная из наблюдений в ближнем инфракрасном диапазоне плотность распределения по z десятков тысяч слабосветящихся галактик [4]; она нормирована так, чтобы максимумы обеих кривых совпадали.

Более крутой спад правых ветвей этой кривой при больших z по сравнению с теоретической может быть отнесен к большей вероятности затенения источников более близкими галактиками и пылевыми облаками. Если бы галактики были равномерно распределены по небосводу, то на каждую галактику приходился бы участок небесной сферы, примерно равный одной квадратной угловой секунде. Угловой размер далёких галактик также примерно равен одной угловой секунде, так что примерно половина галактик с большими z затеняется более близкими галактиками. Однако в каталогах нет галактик с одинаковыми угловыми координатами. Этим можно объяснить основную часть расхождений при $z > 1$ между теоретической кривой и данными каталога.

Существенно, что $n(z, q)$ убывает как $(1+z)^{-3}$ с ростом z , в отличие от убывания по закону $(1+z)^{-3/2}$ по стандартной космологии [5]. По наблюдениям двух групп исследователей [7] плотность распределения квазаров по z убывает как z^{-3} [34], либо как $(1+z)^{-2.75}$ [35].

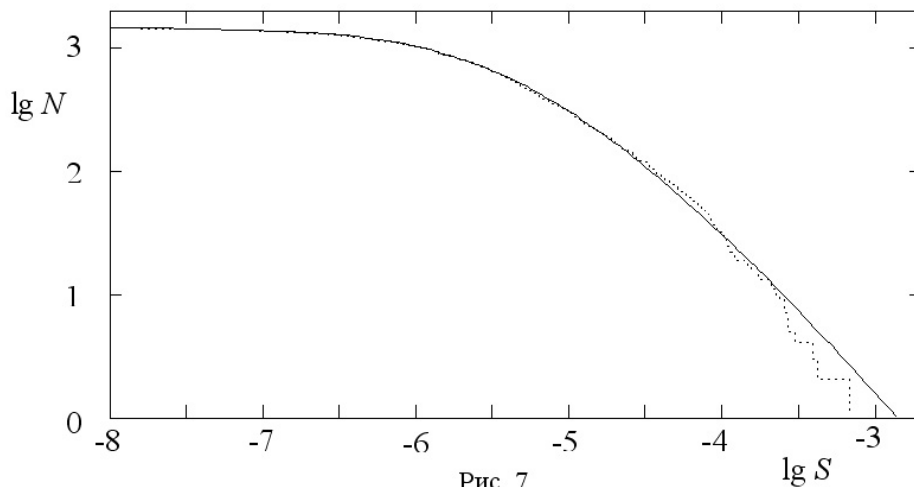


Рис. 7

Источники гамма-всплесков находятся в галактиках, поэтому они также равномерно распределены по трёхмерной сфере с той же функцией распределения N . Очевидно, что для однотипных источников

$$\lg N = \lg [2\chi - \sin 2\chi] + C_N, \quad \lg S = \lg [(c_*/c)^3 (1+z)^{-2} \sin^{-2} \chi] + C_S,$$

где S – регистрируемый поток энергии, C_N и C_S – постоянные. На рис. 7 зависимость $\lg N$ от $\lg S$ (здесь S выражено в единицах эрг/см²) представлена сплошной кривой для $C_N = 4.45$ и $C_S = -5.45$. Пунктирная кривая – данные наблюдений, приведённые в [36]. Заметим, что затенение гамма-всплеска галактиками на пути лучей от него к наблюдателю мало и поэтому существенного расхождения соответственных кривых на рис. 7 при больших z не наблюдается.

Эйнштейновские световые часы начинают отсчитывать время с момента, когда скорость света становится отличной от нуля и $r \geq \sqrt{w}$. Космологическому времени t_* , как видно из (28), соответствует показание световых часов

$$t_e(r) = \varsigma_0(r) R / (2c\sqrt{p}), \quad \text{где} \quad \varsigma_0(r) = \int_q^{pr^2} \sqrt{\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{x}\right) \frac{1}{1+x}} dx. \quad (33)$$

Из (31) и (33) следует

$$H_0 t_e(1) = \frac{1}{2} \varsigma_0(1) \sqrt{\frac{(p+1)q}{(p-q)p}},$$

что составляет 0.615, в то время как по формуле (32) $H_0(t - t_1)$ равно 0.836. Это даёт 12.02 миллиардов лет для возраста Вселенной по световым часам $t_e(1)$ и 16.35 миллиардов лет для космологического её возраста $t - t_1$. На рис. 4 кривой 5 представлено отношение $T_e(r) = t_e(r)/(t - t_1) = |\tau/2| \varsigma_0(r) \sqrt{q/(p-q)p}$. Отношение возраста Вселенной по световым часам к её космологическому возрасту равно $T_e(1) = 0.735$.

Из (12) и (13) найдём $t_*/t = (1 + \sqrt{1 + pr^2}) / (1 + \sqrt{1 + p})$ и для $T(r) = (t_* - t_1)/(t - t_1)$ получим $T(r) = (\sqrt{1 + pr^2} - 1) / (\sqrt{1 + p} - 1)$. Функция $T(r)$ представлена на рис. 4 кривой 6. Кривыми 1–4 представлены соответственно функции c_*/c , c_*^2/c^2 , $z(r)$, $z(r)/10$.

Частицы, составляющие ядро атома, сталкиваются (испытывают взаимодействие) друг с другом в дополнительном подпространстве со световыми скоростями. Радиоактивность и есть следствие таких столкновений. Частота столкновений пропорциональна частоте вращения частицы в дополнительном подпространстве, так что скорость распада пропорциональна скорости света, а время, по которому отсчитывается радиоактивный распад, оказывается равным времени по световым часам.

Оценивая распад изотопов за миллиарды лет методами космохронологии [37], основанными на изучении изменения относительной распространённости изотопов с большими периодами полураспада, следует учитывать зависимость скорости света от времени согласно (15), (13), (20), (33), связывающими $c(R_*)$ с z .

Увеличение кинетической энергии частиц, вызванное возрастанием скорости света, равно как и увеличение потенциальной энергии, вызванное возрастанием гравитационной постоянной, казалось бы, представляет явное нарушение закона сохранения энергии. Однако, при составлении баланса энергии в многомерном пространстве необходимо учитывать энергии всех видов движения, включая движение в дополнительном пространстве по винтовой линии вокруг трёхмерной проекции траектории частицы на комптоновском расстоянии $a = \hbar/mc$ от этой проекции, а также движение в дополнительном пространстве, вызванное расширением в нём трехмерной Вселенной. В шестимерной космологии полная скорость частицы в шестимерном пространстве остается постоянной по величине, независимо от вида траектории в трёхмерном пространстве. Поэтому и закон сохранения энергии в полном пространстве не нарушается. При замедлении расширения трехмерной вселенной скорость света увеличивается, а при ускорении

расширения – уменьшается. Заметим, что недавний вывод стандартной космологии об ускоренном расширении Вселенной сделан в неявном предположении о применимости уравнений Эйнштейна к космологии. В шестимерной трактовке расширения Вселенной это предположение не задействовано.

Рост скорости света ограничен. Предельное значение квадрата скорости света равно $c^2/(1-w) = 1.078 \cdot c^2$. Таким образом, имеется ни с чем не сравнимый запас энергии, которой предстоит ещё поступить во Вселенную. Это 7.8% от всех видов энергии, включая собственную энергию частиц (равную энергии движения со скоростью света $E = mc_*^2$ в дополнительном пространстве вокруг трёхмерной проекции траектории частицы на комптоновском расстоянии $a = \hbar/mc$ от неё [9,10,12]). Соответствующий приток энергии в единицу времени, который в основном и определяет темп наблюдаемого непрерывного звездообразования в галактиках в течение всей их истории, пропорционален

$$\frac{dc_*^2}{dt_e} = c^2 \frac{2H_0q}{r^3(p-q)} \sqrt{\frac{p-q}{pr^2-q} \cdot \frac{pr^2+1}{p+1}}.$$

Значит, когда радиус Вселенной удвоится, приток энергии уменьшится в 8.35 раз. В эпоху, когда радиус был вдвое меньше нынешнего, чему соответствует красное смещение $z = 1.67$, приток был в 9.64 раз больше нынешнего. Значению $z = \infty$ соответствуют $r = 0.423$ и приток в 17.91 в раз больший нынешнего притока.

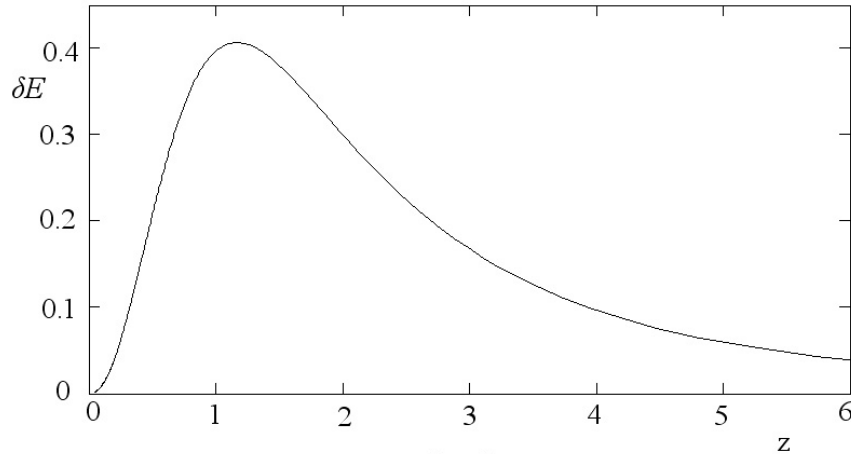


Рис. 8

Плотность распределения по z притока полной энергии во вселенную, включая собственную энергию частиц $E = mc_*^2$, пропорциональна функции ndc_*^2/dt_e . Максимум её достигается при $z = 1.206$. По данным работы [8] максимум темпа звездообразования наблюдается при $z = 1.1$. Функция $\varepsilon E = (ndc_*^2/dt_e)/(H_0c^2)$ представлена на рис. 8. Она спадает с ростом z как $(1+z)^{-3}$ просто потому, что плотность распределения галактик по z также уменьшается в этой пропорции, хотя приток энергии в каждую галактику с ростом z увеличивается.

При накоплении энергии массивная звезда не может расширяться всё время квазистационарно. При возрастании радиуса звезды путешествие фотонов от её центра к периферии (в рассеивающей среде) занимает всё большее время и потому энергия накапливается всё быстрее. Когда из-за возрастания светимости L , соответствующей возрастающей тепловой энергии звезды L/ε при квазистационарном её расширении, градиент давления света на её периферии превысит плотность силы тяготения, вещество будет уноситься с поверхности звезды давлением света. При этом градиент давления света на

обновляющейся периферии звезды растет в соответствии с более высокой температурой более глубоких слоев звезды, и тогда звезда взрывается как новая или как сверхновая. Разреженное в результате взрыва вещество звезды вновь собирается силами тяготения и процесс звездообразования во Вселенной продолжается, пока ещё квадрат скорости света растёт со временем не слишком медленно.

Из рис. 4 видно, что области изменения величин r и $t_e(r)$, приходящиеся на область больших значений красного смещения, относительно малы. За такой малый промежуток времени существенной эволюции металличности и остальных характеристик галактик произойти не успевает. Но от момента $t_e(\sqrt{w}) = 0$, соответствующего значению $r = \sqrt{w} = 0.268$, начиная с которого скорость света начала расти от нуля, до момента, соответствующего $r = r_\infty = 0.423$ и красному смещению $z = \infty$, прошло довольно много времени:

$$t_e(r_\infty) = \varsigma_0(r_\infty) R / (2c\sqrt{p}) = t_e(1) \varsigma_0(r_\infty) / \varsigma_0(1) = t_e(1) \cdot 0.134,$$

т. е., по световым часам, 13.4% от времени существования Вселенной. Этого достаточно для образования галактик, тем более, что к моменту $t_e(r_\infty)$ энергии во Вселенную поступило 64% от нынешней величины.

Заметим, что Метагалактика – доступная наблюдениям часть трёхмерной сферы – расширяется вместе с трёхмерной сферой, хотя лишь с момента, когда скорость света перестала быть равной нулю, и по мере расширения Метагалактика охватывает всё новые и новые объёмы пространства вместе со сформировавшимися за время $t_e(r_\infty)$ галактиками. Таким образом, для глаза наблюдателя галактики появляются в его поле зрения действительно уже в готовом виде, хотя, естественно, формирование галактик происходит не до возникновения Вселенной, а после того, как скорость света перестала быть равной нулю.

Энергия движения частицы в дополнительном подпространстве $E = mc_*^2$ [9, 10, 12] пропорциональна c_*^2 . Её приращение в единицу времени равно

$$dE/dt_e = mdc_*^2/dt_e = E\varepsilon, \quad \text{где} \quad \varepsilon = c_*^{-2}dc_*^2/dt_e.$$

То же относится к энергии фотонов $h_*\nu_*$ и к кинетической энергии, а значит, и к плотности U тепловой энергии. Поэтому имеем $dU/dt_e = \varepsilon U$. Т. о., в единицу объёма в единицу времени накачивается энергия, равная εU . Полагая, что накачка происходит квазистационарно, так что излучаемая поверхностью звезды или планеты энергия почти равна накачиваемой, получим, интегрируя εU по объёму небесного тела радиуса R ,

$$\varepsilon \int_0^R r'^2 U(r') dr' = R^2 w,$$

где r' – расстояние от центра небесного тела, w – плотность мощности излучения его поверхностью,

$$\varepsilon(r) = \frac{2H_0 q}{r(p r^2 - q)} \sqrt{\frac{p - q}{p r^2 - q} \cdot \frac{p r^2 + 1}{p + 1}}.$$

В настоящую эпоху

$$\varepsilon = 2H_0 q / (p - q).$$

При выбранных выше параметрах теории $\varepsilon = 2.51 \cdot 10^{-19} c^{-1}$. В эпоху, соответствующую $z = 1$, ε было больше нынешней величины в 6.85 раз, при $z = 3$ – в 17.1 раз, при $z = 6$ – в 21.9 раз.

Литература

- [1] B. Schwarzschild. Farthest Supernova Strengthens Case for Accelerating Cosmic Expansion // *Physics Today*, June 2001, p. 17–18
- [2] K. I. Kellermann. The Cosmological Deceleration Parameter Estimated from the Angular-Size/Redshift Relation for Compact Radio Sources. // *Nature*, 1993, V. 361, N 6408, p. 134–136.
- [3] L. I. Gurvits, K. I. Kellermann, S. Frey. The angular “size – redshift” relation for compact radio structures in quasars and radio galaxies. // *Astronomy and astrophysics*, 1999. V. 342, N 2, p. 378–388.
- [4] T. E. Broadhurst, R. S. Ellis and K. K. Glasebrook. Faint Galaxies: Evolution and Cosmological Curvature. // *Nature*, 1992. V. 355, N 6355, p. 55–58.
- [5] Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Строение и эволюция Вселенной. М.: "Наука", ГРФ-МЛ, 1975.
- [6] T. Nagao, R. Maiolino, A. Marconi. Metallicity Evolution of Active Galactic Nuclei. <http://arxiv.org/astro-ph/0612570>.
- [7] P. A. Shaver. High Redshift Quasars. / 17-th (1994) Texas Symposium on Relativistic Astrophysics and Cosmology. The N.Y. Acad. Of Sci., 1995, p. 87–109.
- [8] L. Tresse *et al.* The cosmic star formation rate evolution from $z = 0$ to $z = 5$ from VIMOS VLT Deep Survey. <http://arxiv.org/astro-ph/0609005>.
- [9] И. А. Урусовский. Шестимерная трактовка релятивистской механики и спина, метрической теории тяготения и расширения Вселенной. // *Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники*. 1996, № 3, С. 3–21.
- [10] И. А. Урусовский. Шестимерная трактовка кварковой модели нуклонов. // *ibid.*, 1999, № 6, С. 64–74.
- [11] I. A. Urusovskii. Gravity as a projection of the cosmological force/ Proceedings of International Scientific Meeting PIRT-2003. Moscow, Liverpool, Sunderland. Bauman University, 30 June – 03 July 2003. P. 359–367. http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/urusovsky_gravity.pdf
- [12] I. A. Urusovskii. *Six-Dimensional Treatment of CPT-symmetry*// Proc. Int. Sci. Meeting ‘Physical Interpretations of Relativity Theory’. P. 318–326. Moscow: 4–7 July, 2005. Bauman Moscow State Tech. Univ. & Univ. Sanderland, Great Britain. Moscow, Liverpool, Sanderland. http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/urusovsky_six.pdf
- [13] И. А. Урусовский. Шестимерная трактовка расширения Вселенной. // *Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники*. 2000. № 6. С. 66–77.
- [14] И. А. Урусовский. Космологическая подпитка внутриземного тепла в её шестимерной трактовке. / Ежегодник РАО 2006. Сборник трудов семинара научной школы проф. С. А. Рыбака. М., 2006. С. 223–237.
- [15] А. А. Марголин. Принцип простоты // *Химия и жизнь*. 1981. № 9. С. 79.
- [16] F. Klein. Uber neuere englische Arbeiten zur Gesammelte matematische Abhandlungen, B.2, Springer, Berlin, 1922, 601 S// *Zeit. f. Math. u. Phys.* 1901, S. 375.
- [17] Ф. Клейн, Высшая геометрия. М.-Л.: Гостехиздат, 1939. 219 с. Klein F., Vorlezungen über die höhere Geometrie, 3. Aufl. Berlin, 1926.
- [18] Ю. Б. Румер, Исследования по 5-оптике. Гостехиздат, Москва, 1956. 192 с.
- [19] Роберт Орос ди Бартини // *ДАН СССР*. 1965. Т. 163. № 4. С. 861.
- [20] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика, Электродинамика. М.: Наука. 1969. 272 с.
- [21] K. Rines, W. Forman, U. Pen, C. Jones, R. Burg. Constraining q_0 with cluster gas mass fractions. Feasibility study.// *Astrophys. J.*, 1999, May 20, V. 517, N 1. Pt. 1, p. 70–77.
- [22] В. Г. Левич. Курс теоретической физики. Т. 1. М.: "Наука", ГРФ-МЛ. 1969.
- [23] В. С. Троицкий, Наблюдательная проверка космологической теории, состояние и перспективы. // *Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники*. 1996, № 4, С. 21–36; V. S. Troitsky. Observational Test of the Cosmological Theory Testifies to the Static Universe and New Redshift-Distance Relation. // *Astrophys. and Space J.* 1996, V. 240, N 1, p. 89–121.

- [24] В. С. Троицкий, В. И. Алешин. Экспериментальные свидетельства образования микроволнового фона через тепловое излучение. // *Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники*. 1996, № 5, С. 28–39.
- [25] В. С. Троицкий, В. И. Алешин. Наблюдательные свидетельства образования микроволнового фона через тепловое излучение звёзд Метагалактики. // *Изв. Вузов. Сер. Радиофизика*. 1996, Т. 39, № 7, С. 817–843; Troitsky V.S., Aleshin V.I. Observed Evidence of Microwave-Background Formation by Thermal Radiation of Metagalaxy Stars. // *Radiophys. Quantum Electron. (USA)*, 1996, V. 39, N 7, p. 539–557.
- [26] В. С. Троицкий. Экспериментальные свидетельства против космологии Большого взрыва. // *УФН*, 1995, Т. 165, С. 703–707.
- [27] V. S. Troitsky. // *Astrophys. Space Sci.*, 1993, V. 201, p. 89–121.
- [28] В. С. Троицкий, В. С. Горбачёва. Отсутствие зависимости оптических спектров квазаров от их красного смещения. // *Письма в Астрон. Журн.*, 1993, Т. 19, С. 329–333.
- [29] H. L. Ferguson, R. E. Williams and L. L. Cowie. Probing of Faintest Galaxies. // *Phys. Today*, April 1997, p. 24–30.
- [30] А. Д. Линде. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М.: "Наука". 1990; A. D. Linde. Particle Physics and Inflationary Cosmology. N. Y.: Harvard Univ. Press. 1990.
- [31] P. J. E. Peebles. Principle of Physical Cosmology. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
- [32] В. М. Журавлев, С. В. Червон, В. К. Щиголов. Новые классы точных решений в инфляционной космологии. // *ЖЭТФ*, 1988, № 2 (8). С. 406–417.
- [33] A. Linde. Open hybrid inflation. // *Phys. Rev. D.*, 1997, V. 55, N 12, p. 7480–7488.
- [34] M. Schmidt, D. P. Schneider and J. E. Gunn, in: Space Distribution of Quasars (Astron. Soc. Pacific Conf. Series. Ed. D. Crampton), 1991, p. 109.
- [35] P. Möller, S. Warren. // *ibid*, p. 96.
- [36] В. Г. Курт. Экспериментальные методы изучения космических гамма-всплесков. // *Сороковский образовательный журнал*. 1998, № 6, С. 71–76.
- [37] A. Renzini. The Age of the Universe. // *Texas/Pascos' 92: Relativistic Astrophysics and Particle Cosmology*, Annals of the N.Y. Acad. of Sci., 1993, V. 688, P. 124–135.

Stumbling blocks for standard cosmology in the light of six-dimensional one

I. A. Urusovskii

Acoustic institute n. a, acad. N. N. Andreev, Moscow, Russia

An account of an increase of speed of light in the actual three-dimensional Universe and its effect on redshift for distant sources and on theoretical redshift dependencies compared with observed data is given. The investigation is carried out on the basis of the simplest six-dimensional treatment of the expanding Universe in the form a three-dimensional sphere appeared as a result of the intersection of three simplest geometrical objects of finite dimensions in the six-dimensional Euclidean space – of three uniformly expanding five-dimensional spheres. A scenario in which the speed of light (and the energy of each elementary particle) in the six-dimensional space is constant in time is considered. Some difficulties of standard cosmology are discussed on the base of six-dimensional cosmology.

Key-words: observations, cosmology, redshift.

MSC: 83F05, 70S10.

МАШИНА ВРЕМЕНИ В ПРОСТРАНСТВЕ С ДИПОЛЬНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

В. О. Гладышев

Кафедра физики МГТУ им. Н. Э. Баумана

Обсуждаемое в последнее время открытие анизотропии реликтового излучения позволяет по-новому взглянуть на проблему существования устройства, способного изменять ход протекания физических процессов.

В настоящее время известны по крайней мере два принципа управления временем. Первый из них был известен со времени создания СТО и заключается в управляемом замедлении протекания движущегося процесса. Путешествие с большой скоростью позволяет астронавту, вернувшись на Землю, попасть в ее будущее. Замедление времени движущихся часов было экспериментально проверено в экспериментах [1]. Второй метод построен на предположении о существовании топологических особенностей – "кратовых нор", отождествляющих различные пространственно-временные области [2, 3]. Однако, для того, чтобы "кратовая нора" не схлопнулась до нулевого размера, прежде чем астронавт сможет пройти сквозь нее, необходимо чтобы существовала отрицательная плотность энергии, что оправдывает скептическое отношение к подобным построениям [4].

В настоящей работе показано, что в пространственно-временном континууме с анизотропией возможен ускоренный ход циклически движущихся физических процессов. В простейшем случае идея метода заключается в эквивалентности пространства с дипольной анизотропией пространству наблюдателя, движущегося с постоянной скоростью в изотропном физическом пространстве (ФП) распространения фундаментальных взаимодействий. Использование метрического тензора с другими анизотропными свойствами будет изменять ожидаемую величину эффекта ускорения или замедления времени.

Ключевые слова: машина времени, анизотропия, циклические процессы.

Получим метрику с дипольной анизотропией, эквивалентной поступательному движению в плоском пространстве, следуя методу, изложенному в [5]. Будем считать, что переменные \vec{r} , t соответствуют ИСО, покоящейся в ФП, а \vec{r}_i и t_i – произвольным движущимся ИСО.

Согласно методу Мёллера можно записать обратные преобразования для времени

$$t = \gamma_i t_i + \gamma_i \frac{(\vec{r}_i, \vec{V}_i)}{c^2}, \quad (1)$$

где $\alpha_i = \gamma_i - 1$, $\gamma_i^{-2} = 1 - \beta_i^2$, $\beta_i = V_i/c$, $i = 1, 2$.

Здесь \vec{r}_i задает положение часов T_i в i -й ИСО. Вектор \vec{V}_i является скоростью движущейся i -й ИСО, измеренной в исходной ИСО, поэтому скалярные произведения $(\vec{r}_i, \vec{V}_i) > 0$ если i -я ИСО движется в направлении \vec{r}_i . Величины t и t_i , r_i обеспечены процедурой синхронизации, следовательно (1) связывают наблюдаемые величины.

Сравним собственные показания часов T_1 и T_2 , покоящихся в двух движущихся ИСО. Считая неизменными пространственные координаты \vec{r}_i , для частных дифференциалов времени можно записать для $i = 1, 2$

$$\gamma_1 dt_1 = \gamma_2 dt_2. \quad (2)$$

Заметим, что, так как процедура синхронизации не нарушена, соотношения для интервалов собственного времени будут соответствовать наблюдаемым величинам.

Используя формулу преобразования скорости

$$\vec{\beta}_2 = a\vec{\beta}_0 + b\vec{\beta}_1, \quad a = \frac{\sqrt{1 - \beta_1^2}}{1 + (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_0)}, \quad b = \frac{(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_0) (1 - \sqrt{1 - \beta_1^2}) + 1}{1 + (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_0)}, \quad (3)$$

из (2) получим

$$dt_1 = \frac{1 + (\vec{\beta}_0, \vec{\beta}_1)}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} dt_2. \quad (4)$$

Здесь $\vec{\beta}_0$ – относительная скорость 2-й ИСО относительно 1-й.

Данное соотношение имеет форму, отличную от формы $dt = \gamma_i dt_i$, которая следует из (1). Для нахождения преобразований временной координаты запишем искомые преобразования в виде

$$dt_1 = \gamma_0 \left(1 + (\vec{\beta}_0, \vec{\beta}_1) \right) dt_2 + \tilde{\lambda} \frac{\gamma_0}{c} \left(d\vec{r}_2, \vec{\beta}_0 \right), \quad (5)$$

где $\tilde{\lambda}$ – коэффициент, компенсирующий вклад временной координаты в данном преобразовании.

Для того чтобы результат преобразований совпадал с результатом преобразований инвариантной формы должно выполняться условие

$$\left(1 + (\vec{\beta}_0, \vec{\beta}_1) \right) dt_2 + \tilde{\lambda} \frac{1}{c} \left(d\vec{r}_2, \vec{\beta}_0 \right) = dt_2 + \frac{1}{c} \left(d\vec{r}_2, \vec{\beta}_0 \right). \quad (6)$$

Решая относительно $\tilde{\lambda}$, получим

$$\tilde{\lambda} = 1 - \frac{(\vec{\beta}_0, \vec{\beta}_1) c dt_2}{(d\vec{r}_2, \vec{\beta}_0)}. \quad (7)$$

Учтем, что $c dt_2 = |d\vec{r}_2|$ и $\frac{d\vec{r}_2}{|d\vec{r}_2|} = d\vec{r}_2^n$ и подставим (7) в (5).

$$dt_1 = \gamma_0 \left(1 + (\vec{\beta}_0, \vec{\beta}_1) \right) dt_2 + \frac{\gamma_0}{c} \left(1 + \frac{(\vec{\beta}_0, \vec{\beta}_1)}{(d\vec{r}_2^n, \vec{\beta}_0)} \right) (d\vec{r}_2, \vec{\beta}_0), \quad (8)$$

Аналогично можно получить преобразования для радиус-векторов [6].

После преобразований получим

$$dt_1 = \gamma_0 \left(1 + (\vec{\beta}_0, \vec{\beta}_1) \right) dt_2 + \frac{\gamma_0}{c} \frac{1 + \beta_1}{\beta_1} (\vec{\beta}_0, \vec{\beta}_1) dr_2, \quad (9)$$

Можно заметить, что при движении T_1 и T_2 вдоль OX $(\vec{\beta}_0, \vec{\beta}_1) = \beta_0\beta_1$ и тензор преобразований координат будет иметь вид

$$g_\mu^\nu = \begin{vmatrix} \gamma_0 (1 + \beta_1\beta_0) & 0 & 0 & \gamma_0 V_0 (1 - \beta_1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma_0 \frac{V_0}{c^2} (1 - \beta_1) & 0 & 0 & \gamma_0 (1 + \beta_1\beta_0) \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Используя (10) и выражение для квадрата интервала

$$dS_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 - c^2 dt_1^2,$$

можно обнаружить, что даже в частном случае при движении вдоль OX данное выражение не является форминвариантным

$$dS_1^2 = \alpha_0 dx_2^2 + dy_2^2 + dz_2^2 - c^2 \alpha_0 dt_2^2,$$

где $\alpha_0 = \gamma_0 [(1 + \beta_1 \beta_0)^2 - \beta_0^2 (1 - \beta_1)^2]$.

При $\beta_1 = 0$ выражение для интервала переходит в стандартную форму. Однако, при переходе к любой другой паре ИСО будут изменяться только β_1 и β_0 , форма выражения для dS_1^2 изменяться не будет. Данное определение инвариантности можно назвать специальной инвариантностью интервала.

При прямолинейном равноускоренном движении часов, в отсутствие полей тяготения ненулевыми являются только диагональные компоненты метрического тензора и выражение для интервала времени по часам T_2 имеет вид

$$t_2 = \int_0^{t_1} \frac{dt_1}{g_1^1} = \int_0^{t_1} \frac{dt_1}{\gamma_0 (1 + \vec{\beta}_1 \vec{\beta}_0)}. \quad (11)$$

Пусть в ИСО с координатным базисом $X_1 Y_1 Z_1$ покоятся часы T_1 , относительно которых совершают циклическое движение часы T_0 вдоль OX_1 (рис. 1).

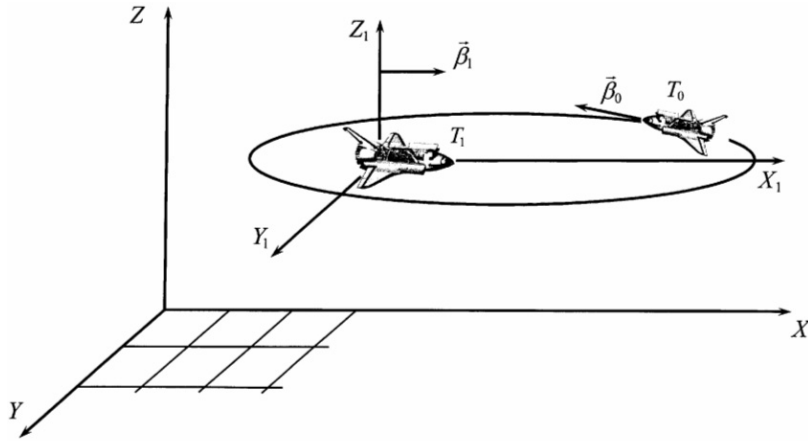


Рис. 1: Часы T_0 совершают циклическое движение вокруг часов T_1 со скоростью \vec{V}_0

Длина протяженного контура, поперечными размерами которого можно пренебречь, равна $2l$. Считаем l достаточно большим, так что временем разворота можно пренебречь в первом приближении. Скорости часов T_0 в направлениях $-OX_1$ и OX_1 соответственно равны V_{01} и V_{02} . Интервал времени движущихся часов T_0 по часам T_1 равен Δt_1 и Δt_2 . Тогда период равен

$$T_1 = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{l}{c} \frac{\beta_{01} + \beta_{02}}{\beta_{01} \beta_{02}}. \quad (12)$$

Интервалы времени, отсчитываемые T_1 и T_0 , при постоянных во времени β_1 и β_0 , связаны соотношением

$$\Delta t_{1i} = \frac{1 + \beta_1 \beta_0 \cos \alpha_i}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \Delta t_{0i}, \quad i = 1, 2 \quad (13)$$

При $i = 1$ часы T_0 совершают движение в направлении $-OX_1$, поэтому $\alpha_1 = \pi$, при $i = 2$, движение в противоположную сторону и $\alpha_2 = 0$. Сравним разность показаний часов T_0 , циклически меняющих направление своего движения на двух участках траектории, и часов T_1 .

За один период разность в показаниях часов будет равна

$$\delta t = \Delta t_{01} - \Delta t_{11} + \Delta t_{02} - \Delta t_{12}. \quad (14)$$

Подставим (13) в (14):

$$\delta t = \Delta t_{01} \left(1 - \frac{1 - \beta_1 \beta_{01}}{\sqrt{1 - \beta_{01}^2}} \right) + \Delta t_{02} \left(1 - \frac{1 + \beta_1 \beta_{02}}{\sqrt{1 - \beta_{02}^2}} \right). \quad (15)$$

Учтем, что $\Delta t_{11} = \frac{l}{\beta_{01}c}$, $\Delta t_{12} = \frac{l}{\beta_{02}c}$, тогда из (13) имеем

$$\Delta t_{01} = \frac{1}{\beta_{01}c} \frac{\sqrt{1 - \beta_{01}^2}}{1 - \beta_1 \beta_{01}}, \quad \Delta t_{02} = \frac{1}{\beta_{02}c} \frac{\sqrt{1 - \beta_{02}^2}}{1 + \beta_1 \beta_{02}}. \quad (16)$$

Тогда из (15) имеем

$$\delta t = \frac{l}{c} \left\{ \frac{1}{\beta_{01}} \left(\frac{\sqrt{1 - \beta_{01}^2}}{1 - \beta_1 \beta_{01}} - 1 \right) + \frac{1}{\beta_{02}} \left(\frac{\sqrt{1 - \beta_{02}^2}}{1 + \beta_1 \beta_{02}} - 1 \right) \right\}. \quad (17)$$

Для максимальной скорости хода часов T_0 нужно, чтобы за период T_1 было максимальное отношение $\frac{\delta t}{T_1}$. Разделив (17) на (12) получим

$$\frac{\delta t}{T_1} = \frac{\beta_{01} (1 - \beta_1 \beta_{01}) \sqrt{1 - \beta_{02}^2} + \beta_{02} (1 + \beta_1 \beta_{02}) \sqrt{1 - \beta_{01}^2}}{(\beta_{01} + \beta_{02}) (1 - \beta_1 \beta_{01}) (1 + \beta_1 \beta_{02})} - 1. \quad (18)$$

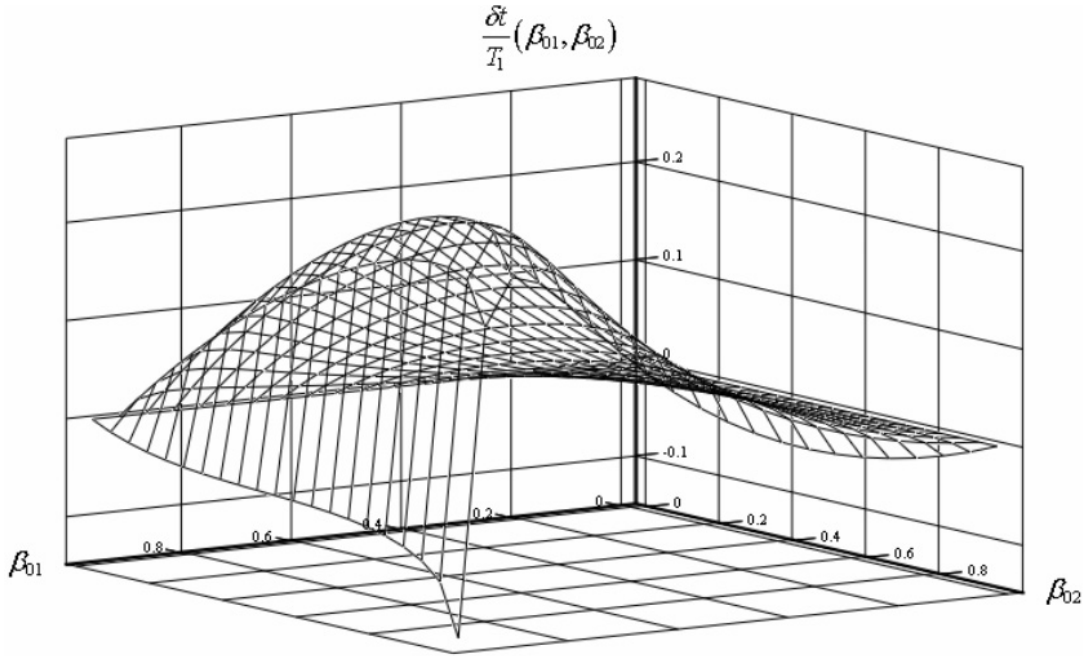


Рис. 2: Максимум функции $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_{01}, \beta_{02})$ находится в области, где β_{01}, β_{02} имеют близкие значения с β_1

На рис. 2 представлена зависимость $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_{01}, \beta_{02})$ для $\beta_1 = 0,9$. Из вида (17) и рис. 2 следует, что величина δt может быть положительной и отрицательной. Так как $T_1 > 0$

всегда, область значений, где $\delta t > 0$ определяет область, где $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_{01}, \beta_{02}) > 0$. Найдем эту область на плоскости β_{01}, β_{02} , для этого положим $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_{01}, \beta_{02}) = 0$, тогда (18) можно привести к виду

$$\beta_{02}^3 + a_1\beta_{02}^2 + a_2\beta_{02} + a_3 = 0, \quad (19)$$

где

$$a_1 = 2\frac{\alpha - \beta_1}{\alpha\beta_1}, \quad a_2 = \frac{1 + \alpha^2 - 4\alpha\beta_1 + \beta_1^2}{\alpha^2\beta_1^2}, \quad a_3 = 2\frac{\beta_1 - \alpha}{\alpha^2\beta_1^2}, \quad \alpha = \frac{1}{\beta_{01}} \left(\frac{\sqrt{1 - \beta_{01}^2}}{1 - \beta_1\beta_{01}} - 1 \right).$$

Уравнение (19) имеет действительное решение, которое представлено на рис. 3 для различных β_1 . Из рис. 3. следует, что при $\beta_1 = 0,71$ основная часть функции находится в отрицательной области.

Найдем минимальное значение β_1 , при котором $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_{01}, \beta_{02})$ может быть большей или равной нуля. Заметим, что при малых β_1 функции δt и $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_{01}, \beta_{02})$ симметричны относительно β_{01}, β_{02} , поэтому можно положить $\beta_{01} = \beta_{02} = \beta_0$, тогда из (18) следует

$$\frac{\delta t}{T_1} = \frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{1 - \beta_1^2\beta_0^2} - 1. \quad (20)$$

Функция $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_0)$ будет положительной, начиная с момента $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_0) = 0$, откуда следует, что

$$\beta_0 = \pm \frac{\sqrt{2\beta_1^2 - 1}}{\beta_1^2}. \quad (21)$$

Следовательно минимальное значение β_1 , при котором $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_0) = 0$ равно $\beta_1 = \sqrt{2}/2$.

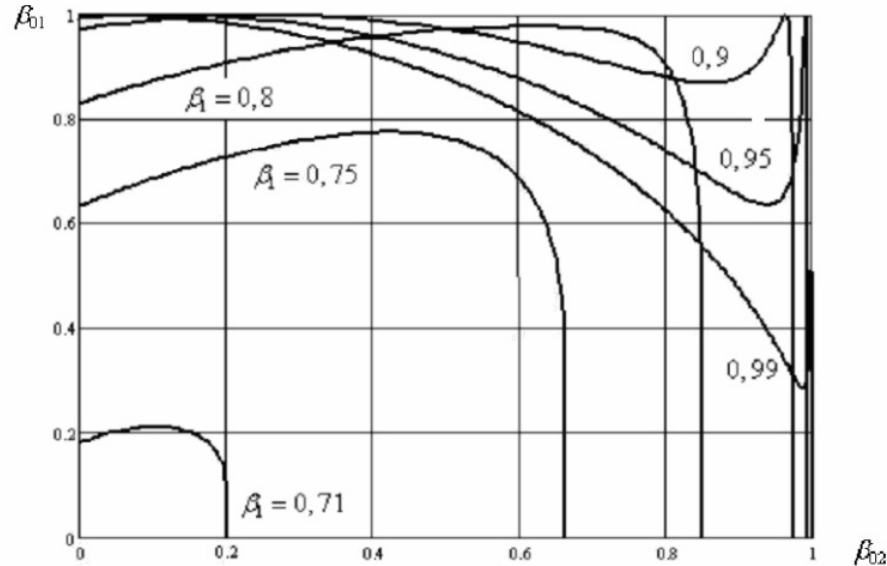


Рис. 3: Зависимость $\beta_{01}(\beta_{02})$ при $\frac{\delta t}{T_1} = 0$ для различных значений β_1

Из рис. 2 следует, что максимум функции $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_{01}, \beta_{02})$ находится в области, где β_{01}, β_{02} имеют близкие значения с β_1 . Из этого следует важный вывод, что эффективная работа машины возможна при движении с постоянной скоростью по замкнутой траектории, например, эллиптической. Наличие нормальных ускорений в этом случае не влияет на результат аналогично тому, как если бы мы проводили описание движения по окружности во вращающейся СО.

Зависимость $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_{02})$ при $\beta_{01} = 0,9$ и $\beta_1 = 0 \dots 1$ представлена на рис. 4.

Для нахождения максимума функции $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_{01}, \beta_{02})$ необходимо решить систему уравнений, полученную путем двукратного дифференцирования (7) по β_{01} и β_{02}

$$\left\{ \begin{array}{l} (\beta_{01} + \beta_{02})(1 - 2\beta_1\beta_{01} - \gamma_{01}\gamma_{02}\beta_{01}\beta_{02}(1 + \beta_1\beta_{02})) + \\ + (1 - \beta_1(2\beta_{01} + \beta_{02})) \left(\beta_{01} + \frac{\gamma_{02}\beta_{02}(1 + \beta_1\beta_{02})}{\gamma_{01}(1 - \beta_1\beta_{01})} \right) = 0, \\ (\beta_{01} + \beta_{02})(1 + 2\beta_1\beta_{02} - \gamma_{01}\gamma_{02}\beta_{01}\beta_{02}(1 - \beta_1\beta_{01})) - \\ - (1 + \beta_1(\beta_{01} + 2\beta_{02})) \left(\beta_{02} + \frac{\gamma_{01}\beta_{01}(1 - \beta_1\beta_{01})}{\gamma_{02}(1 + \beta_1\beta_{02})} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (22)$$

где $\gamma_{0i} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{0i}^2}}$.

Численное решение (22) и (18) показывает, что высокой степенью точности можно записать

$$\beta_{01} = \beta_{02} = \sqrt{2 - \frac{1}{\beta_1^2}}. \quad (23)$$

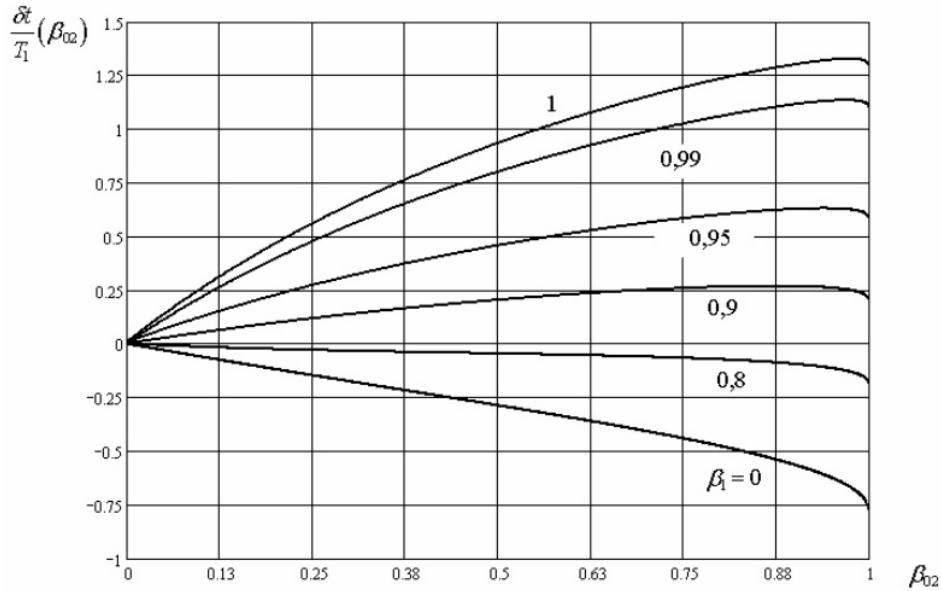


Рис. 4: Зависимость $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_{02})$ при $\beta_{01} = 0,9$ для различных $\beta_1 = 0 \dots 1$.

Из рис. 4 следует, что при $\beta_{01} = 0,9$ и $\beta_1 = 0,9$ максимум функции наблюдается при $\beta_{02} = 0,9$. Из этого можно сделать предположение, что по-крайней мере в области больших β максимум наблюдается при $\beta_{01} \simeq \beta_{02} \simeq \beta_1$.

Сравнивая (23) с (21) можно сделать вывод, что при больших β_1 максимум находится близко с границей $\frac{\delta t}{T_1} = 0$. Тогда максимальные значения $\frac{\delta t}{T_1}$ можно получить из (20)

$$\frac{\delta t}{T_1}(\beta_1) = \frac{1}{2\beta_1\sqrt{1 - \beta_1^2}} - 1. \quad (24)$$

Зависимость максимальных значений $\frac{\delta t}{T_1}$ от β_1 представлена на рис. 5. На графике наблюдается неограниченный рост $\frac{\delta t}{T_1}$ при увеличении β_1 . При зависимости $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_1)$

достигает значения 2,58. Это означает, что по часам T_0 пройдет в 2,58 раза больше времени, чем по часам T_1 . При $\beta_1 = 0,9$ максимальному значению функции соответствует $\frac{\delta t}{T_1} = 0,275$.

Пусть часы T_0 совершают циклическое движение по замкнутой траектории. Возьмем $\beta_{01} = \beta_{02} = \beta_0$ и будем считать угол α непрерывной функцией t_0 , т.е. α измеряется в СО движущихся часов T_0 . Тогда из (13) имеем

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \left(t_0 - \frac{1}{c} \int_{(l_0)} \vec{\beta}_1 d\vec{l} \right), \quad (25)$$

где элемент длины траектории в системе отсчета T_0 равен $d\vec{l}_0 = \vec{V}_0 dt_0$, а интеграл берется по траектории l_0 в СО движущихся часов T_0 .

При движении по эллиптической орбите с постоянной скоростью V_0 в системе T_0 для $\alpha(l_0)$ имеем

$$\cos \alpha(l_0) = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\omega_0 l_0}{V_0} \right)}}, \quad (26)$$

Тогда интегрирование (25) дает

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \left(t_0 - \frac{\beta_1 \beta_0}{\varepsilon \omega_0} \operatorname{arctg} \frac{a \varepsilon}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2(\omega_0 t_0)}} \right), \quad a^2 > b^2. \quad (27)$$

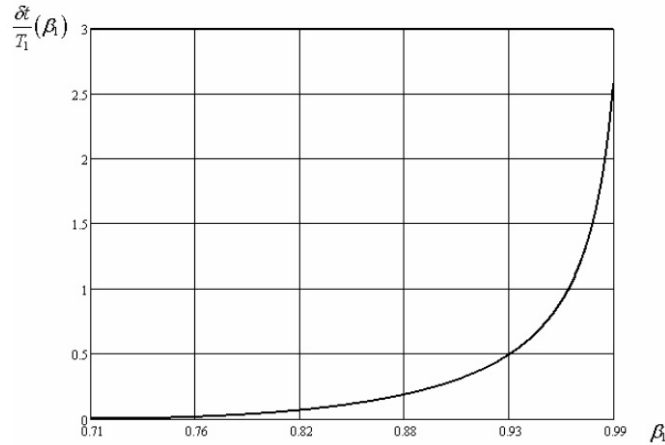


Рис. 5: Зависимость максимальных относительных значений разности в показаниях часов $\frac{\delta t}{T_1}$ от параметра анизотропии β_1 . При $\beta_1 = 0,9$ функция $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_{01}, \beta_{02})$ достигает максимального значения $\frac{\delta t}{T_1} = 0,275$

Более интересной представляется оценка разности в показаниях часов в ИСО наблюдателя, связанного с часами T_1 . Для расчета t_0 по известному t_1 запишем

$$t_0 = \int_0^{t_1} \frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{1 - \beta_1 \beta_0 \cos \alpha(t_1)} dt_1. \quad (28)$$

При движении по эллиптической орбите для $\alpha(t_1)$ имеем

$$\cos \alpha(t_1) = \pm \frac{a \operatorname{tg}(\omega_0 t_1)}{b \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2(\omega_0 t_1)}}, \quad (29)$$

где a, b – полуоси орбиты. Тогда (28) примет вид

$$t_0 = \sqrt{1 - \beta_0^2} \int_0^{t_1} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 + tg^2(\omega_0 t_1)}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 + tg^2(\omega_0 t_1) - \beta_1 \beta_0 t g \omega_0 t_1}} dt_1. \quad (30)$$

Здесь $\varepsilon^2 = 1 - b^2/a^2$ – эксцентриситет.

Интегрирование (30) при условии $\gamma^2 > 0$ и использовании подстановки $\cos(\omega_0 t_1) = \text{ch}(t)$ дает выражение

$$t_0 = \frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{1 - \beta_1^2 \beta_0^2} \left\{ \varepsilon^2 t_1 - \frac{\beta_1^2 \beta_0^2}{\omega_0 \gamma} \text{arctg}(\gamma \text{tg}(\omega_0 t_1)) - \frac{\varepsilon^2 \beta_1 \beta_0}{\omega_0} \times \right. \\ \left. \times [\text{arsh}(\varepsilon \cos(\omega_0 t_1)) - \text{arsh}(\varepsilon) - \lambda I(t_1)] \right\} \quad (31)$$

где $\lambda = \frac{\beta_1 \beta_0}{\sqrt{\gamma^2 \varepsilon^2 - 2\beta_1^2 \beta_0^2}}, \gamma^2 = \frac{1 - \beta_1^2 \beta_0^2}{1 - \varepsilon^2},$

$$I(t_1) = \begin{cases} \text{arctg} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 \cos^2(\omega_0 t_1) - 1}}{\varepsilon \cos(\omega_0 t_1)} \right) - \text{arctg} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\varepsilon} \right), & \frac{\gamma^2 - 1}{\beta_1^2 \beta_0^2} > 1 \\ \text{arth} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 \cos^2(\omega_0 t_1) - 1}}{\varepsilon \cos(\omega_0 t_1)} \right) - \text{arth} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\varepsilon} \right), & 0 < \frac{\gamma^2 - 1}{\beta_1^2 \beta_0^2} < 1 \\ \text{arcctg} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 \cos^2(\omega_0 t_1) - 1}}{\varepsilon \cos(\omega_0 t_1)} \right) - \text{arcctg} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\varepsilon} \right), & \frac{\gamma^2 - 1}{\beta_1^2 \beta_0^2} < 0 \end{cases}$$

Решение представлено в виде $\delta t(t_1) = t_0(t_1) - t_1$ на рис. 6 для следующих параметров: $a/b = 10, \omega_0 = 3 \times 10^8$ рад/с, $\beta_1 = 0,9, \beta_0 = 0,9$.

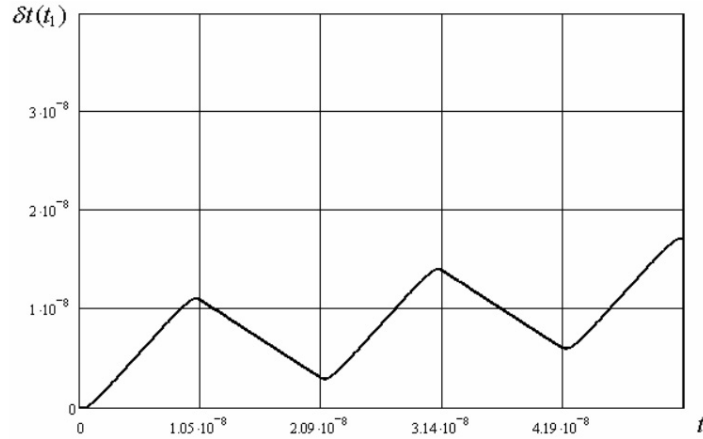


Рис. 6: Разность хода часов T_0 и T_1 в зависимости от t_1

Из рис. 6. следует, что на первой фазе движения часов T_0 в направлении $-OX_1$ они опережают часы T_1 на $\delta t \simeq 1,2 \times 10^{-8}$ с. На второй фазе движения вдоль OX_1 часы T_0 отстают на величину $\delta t \simeq 0,9 \times 10^{-8}$. Всего за один период $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2,09 \times 10^{-8}$ с часы T_0 опережают часы T_1 на величину $\delta t(T_1) = 3 \times 10^{-9}$ с.

Так как в решение (31) частота ω_0 входит только в виде произведения $\omega_0 t_1$, при уменьшении частоты ω_0 произойдет увеличение периода T_1 , и, как следствие, при фиксированном отношении, например $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_1 = 0,9) = 0,3$ (см. рис. 5), величина δt увеличится

пропорционально периоду T_1 . Другими словами, если период T_1 увеличится в 2 раза, то и δt при заданном β_1 увеличится в 2 раза.

В качестве примера рассмотрим движение по эллиптической орбите с большой полуосью равной радиусу облака Оорта ($10^4 - 10^5$ а. е.). Для обеспечения $\beta_0 = 0,9$ необходимо, чтобы период обращения T_0 вокруг земных часов T_1 был равен $T_1 = 3,5 \times 10^7 \dots 10^8$ с, что приблизительно соответствует интервалу от 1 до 10 земных лет. Тогда опережение хода часами T_0 земных часов T_1 составит $0,16 \dots 1,6$ года.

Таким образом, рассмотренный пример свидетельствует о возможности ускоренного хода быстро движущихся часов в анизотропном пространстве с дипольной анизотропией.

Остановимся теперь на влиянии эллиптичности орбиты на разность хода часов δt . На основе численного решения (31) была получена зависимость разности хода часов от отношения полуосей $\delta t(a/b) = t_0(a/b) - T_1$ за один период обращения по орбите T_1 для $\omega_0 = 3 \times 10^8$ рад/с, $\beta_1 = \beta_0 = 0,9$ (рис. 7).

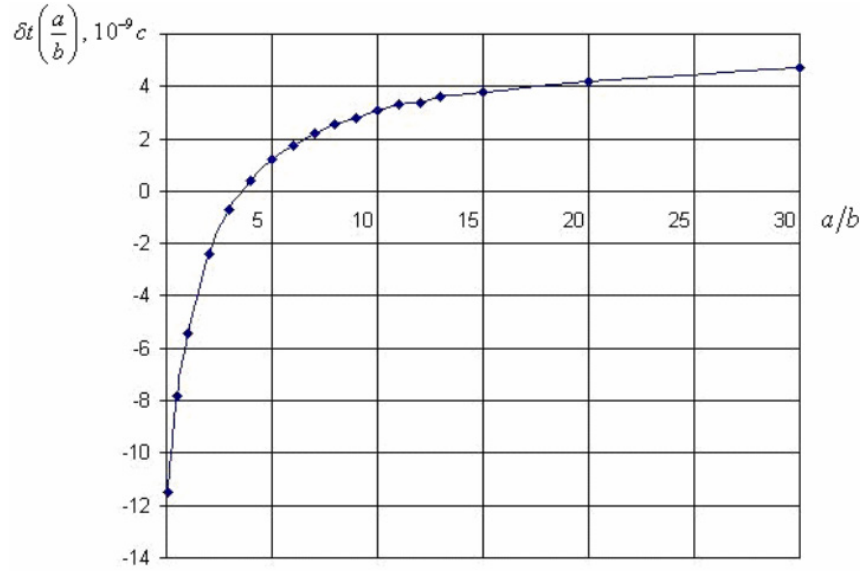


Рис. 7: Зависимость $\delta t(a/b)$ за один период от отношения полуосей a/b при $\beta_1 = 0,9$

Из рис. 7 следует, что опережение часов T_0 при $\beta_1 = 0,9$ и $a/b = 10$ равно $\delta t(10) \cong 3 \times 10^{-9}$ А.

При выбранной частоте ω_0 период равен $T_1 = 2,09 \times 10^{-8}$ с. Тогда отношение $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_1) = \frac{3 \times 10^{-9}}{2,09 \times 10^{-8}} \cong 0,144$, что в два раза меньше значения $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_1 = 0,9) \cong 0,29$ на рис. 5. Однако, как следует из рис. 7, при росте a/b величина $\frac{\delta t}{T_1}(\beta_1) \rightarrow 0,29$, что соответствует предельному переходу.

Таким образом, рассмотренный пример движения часов в анизотропном пространстве в первом приближении указывает на принципиальную возможность ускоренного хода движущихся часов. Рассмотренное в работе приближение, основано на предположении о дипольной анизотропии физического пространства, поэтому эффект ускоренного хода и выполненные расчеты полностью зависят от параметра анизотропии β_1 . Как следует из работы, минимальное значение параметра анизотропии, при котором возможен ускоренный ход часов равен $\sqrt{2}/2$. Несмотря на большое значение этой величины, необходимо признать, что для $\vec{\beta}_1$ существует только одно ограничение $-1 < \beta_1 < 1$ и не существует других принципиальных ограничений. Соответствие использованных анизотропных преобразований пространственно-временных координат привычным лоренцевым преобразованиям или преобразованиям Меллера обеспечивается требованием выполнения инвариантности полного дифференциала (6).

Ранее отмечалось, что использование метрического тензора с другими анизотропными свойствами будет изменять ожидаемую величину эффекта ускорения или замедления времени. Однако, кажется естественным предположить, что дипольный характер метрики должен проявлять в экспериментах превалирующее значение.

В заключение заметим, что при малых значениях $\vec{\beta}_1$ ускоренный ход становится невозможным, однако наличие слабой дипольной анизотропии приведет к возникновению поправок к разности хода движущихся часов при любом ненулевом значении параметра анизотропии. Данный эффект может быть обнаружен в экспериментах по измерению вариаций времени жизни элементарных частиц, движущихся в накопительных кольцах [7]. Можно предположить, что явление зависимости скорости хода часов от векторного поля $\vec{\beta}_1$ может иметь значение при длительных космических перелетах.

Литература

- [1] Hafele J. C., Keating R. E. // *Science*. 1972. V. 177. P. 166.
- [2] Новиков И. Д. Анализ машины времени. // *ЖЭТФ*, 1989. Т. 95. Вып. 3, с. 769–776.
- [3] Thorne K. S. *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy* (W. W. Norton & Company, New York, 1994).
- [4] Пенроуз Р. Путь к реальности, или законы, управляющие Вселенной. Полный путеводитель. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007. 912 с.
- [5] Gladyshev V. O. A possible explanation for the delay in detecting an astrophysical signal by using ground-based detectors // *J. Moscow Phys. Soc.* 1999. V. 9, N 1. P. 23–29.
- [6] Гладышев В. О. Необратимые электромагнитные процессы в задачах астрофизики: физико-технические проблемы. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. 276 с.
- [7] Bailey J., Borer K. e.a. // *Nature*. 1977. V. 268. P. 301–310.

The time-machine in the space with dipole anisotropy

V. O. Gladyshev

MSTU n. a. N. E. Bauman

vgladyshev@mail.ru

The recent discovery of background radiation allows considering from a new point of view the problem of existence of a device, able to change the time evolution of physical processes. At present, there are known at least two ways of dealing with time. The first was acknowledged during the issuing of the STR and resumes to the time-delay for processes which assume displacements. Traveling at high speeds permits to the astronaut which returns to Earth to immerse into its future. The time-delay for moving processes has been experimentally verified ([1]). The second method relies on the assumption that there exist topological singularities, which identify different Space-Time domains ([2,3]). In the present work it is shown that in the anisotropic Space-Time continuum there is possible to have an accelerated motion for cyclic physical processes. In the simplest case, the idea of the method relies on the equivalence between the space which exhibits dipole-anisotropy, with the space of the observer, which moves with constant speed in the isotropic physical space of expansion of fundamental interdependencies. The employment of a metric tensor with different anisotropy properties will change the expected magnitude of the effect of time acceleration/deceleration.

Key-words: time-machine, anisotropy, cyclic processes.

MSC: 70K70, 70K42, 87C75.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных чисел в физике.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.
2. Объем статьи не должен превышать 1 печ. листа (24 усл. маш. стр.)
3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате \LaTeX (версия $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$, для набора формул используется $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$) и файл статьи в формате PostScript или PDF.
4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).
5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок), ключевые слова, классификацию по PACS или MSC2000. Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.
6. Название статьи, аннотация, ключевые слова, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.
7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.
8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи.
9. Публикация бесплатна для всех авторов.

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА
В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

Научный журнал. Основан в 2003 г.

№ 2 (8), том 4, 2007

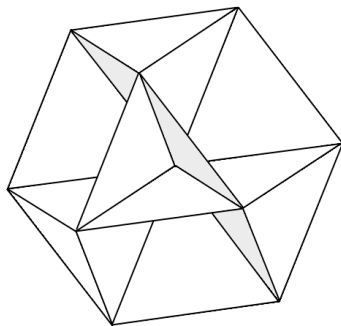
Главный редактор Павлов Д. Г.
Ответственный секретарь Элиович А. А.

www.polynumbers.ru
hypercomplex@mail.ru

Свидетельство о регистрации
ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.

ISSN 1814-3946

© "МОЗЭТ", Российское Гиперкомплексное Общество



Типографские данные