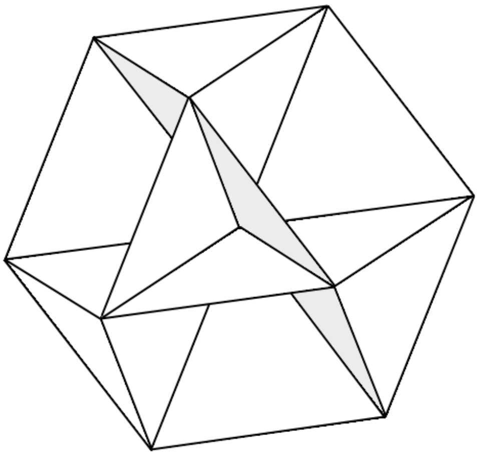
Гиперкомплексные числа в геометрии и физике

№ 1 (7), том 4 (2007)

Научный журнал

Основан в 2003 г.



www.polynumbers.ru

hypercomplex@mail.ru

Оглавление

ГЕОМЕТРИЯ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛИЧИСЕЛ

Г. И. Гарасько

ГУП ВЭИ, Москва, Россия
gri9z@mail.ru

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
geom2004@mail.ru

Показано, что пространства невырожденных поличисел являются метрическими финслеровыми пространствами. Получены выражения для нормы и метрической финслеровой функции. Приводится удобный алгоритм для вычисления скалярных полипроизведений в таких пространствах. Построен базис, в котором имеет место экспоненциальное представление поличисла, и описано все множество таких базисов. Множество унимодулярных поличисел изоморфно непрерывной группе Ли, группе симметрии поличислового пространства.

Ключевые слова: Финслеровы пространства, симметрии, экспоненциальное представление.

1 Введение

Известно, что комплексные числа только тогда получили свое полное признание у математического сообщества, когда была открыта их естественная геометрическая интерпретация как точек и векторов евклидовой плоскости. Это соответствие алгебраических и геометрических объектов оказалось настолько глубоким и продуктивным, что многие математики с большим энтузиазмом приступили к решению похожей задачи, а именно – к поиску алгебры, которой соответствовала бы геометрия уже трехмерного пространства. Проблему блестяще решил Уильям Роуан Гамильтон, который открыл алгебру кватернионов [1]. И хотя умножение кватернионов оказалось некоммутативным, а сами они лучше приспособленными к четырехмерному, чем к трехмерному евклидовому пространству, успех был настолько впечатляющим, что иные варианты алгебраизации реального пространства с тех пор практически перестали рассматриваться.

Одним из серьезных недостатков алгебры кватернионов является то, что множество аналитических функций кватернионной переменной ограничено дробно-линейными функциями. У данного печального обстоятельства есть геометрическая подоплека. Это связано с тем, что группы конформных преобразований евклидовых (да и псевдоевклидовых) пространств с размерностью три и выше в соответствии с теоремой Лиувилля [2] оказываются конечномерными. Исключением из этого правила является двухмерная плоскость, у которой группа конформных отображений имеет мощность большую мощности континуума. Как следствие, аналитические функции комплексной переменной образуют весьма богатое множество, что отчасти и составляет математическую основу теории функций комплексной переменной. Так или иначе, но физики и математики совершенно уверены в евклидовости нашего реального трехмерного пространства, причем эта уверенность настолько велика (римановы обобщения здесь ничего принципиально не меняют), что многие просто перестали замечать несообразность с математической точки зрения данного факта и стали исходить именно из него, разыскивая не новые богатые на аналитические функции структуры, а ограничиваясь различными вариантами обходных путей и мирясь с относительной бедностью, в этом смысле, кватернионов.

Однако, пусть и достаточно формально, остается открытой и прямая дорога, а именно исследование таких трехмерных и четырехмерных алгебр, которые являются метрическим пространствами и которые обладают бесконечно-параметрической группой конформных преобразований. И пусть такие алгебры и соответствующие им пространства, на первый взгляд, совершенно экзотичны – всегда остается шанс на неожиданный оборот. Учитывая же недавно открывшееся обстоятельство, согласно которому у некоторых таких пространств действительно просматриваются почти евклидовы свойства [3], актуальность исследования соответствующих алгебр многократно возрастает.

Среди пространств, обладающих бесконечно-параметрическими группами конформных преобразований, в первую очередь следует выделить те, которым можно поставить в соответствие алгебры с коммутативно-ассоциативным умножением. Интересно отметить, что свойства таких структур (условимся называть их *алгебрами поличисел*) наиболее близки свойствам обычных действительных и комплексных чисел, за исключением наличия в них делителей нуля, то есть объектов, деление на которые не определено в принципе, как и деление на нуль. Поскольку у остальных чисел обратные им существуют, алгебры поличисел следует считать обладающими частичным делением, что хоть и отличает их от числовых полей, все же оставляет вполне интересными. С операцией деления, которая не всегда выполнима, математики давно научились и привыкли работать, так если функция $f(x)$ действительной переменной x обращается в точках $x_1, x_2, ..., x_n$ в нуль, это не запрещает рассматривать функцию $F(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Как правило, поличисла оказывались вне зоны внимания как математиков, так и физиков, а "виновата" в том во многом теорема Фробениуса, согласно которой числовые структуры с делением ограничены полями действительных и комплексных чисел. Однако, учитывая нашу готовность иметь дело с частичным делением и с делителями нуля (которым с геометрической, а главное с физической точки зрения естественным образом ставятся в соответствие точки и вектора световых конусов), – мы выходим за рамки вышеназванной теоремы и имеем перед собой существенно большее разнообразие алгебраических структур. Их перечисление и полную классификацию, равно как и доказательство многих положений помогает осуществить теорема Вейерштрасса [4].

Теорема Вейерштрасса: Любая ассоциативно-коммутативная конечномерная алгебра без нильпотентных элементов над R изоморфна прямой сумме алгебр R и C.

Будем понимать под системами *невырожденных поличисел* P_n такие системы, в которых нет нильпотентных элементов. Тогда теорема Вейерштрасса позволяет доказать многие положения для невырожденных поличисел более просто, а так же провести классификацию всех таких систем.

В настоящей работе будут изучаться только невырожденные поличисла $P_n \ni A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots$, где n – размерность пространства P_n, над полем действительных чисел R.

Любая гиперкомплексная система над полем действительных чисел при задании базиса e_1, e_2, $...e_n$ полностью определяется законом умножения базисных элементов:

$$e_i \cdot e_j = p^l_{ij} \cdot e_l\,, \tag{1}$$

то есть числовым тензором p^l_{ij}.

Если представить, что начало всех переменных векторов $X \in P_n$ находится в одной фиксированной точке, то компоненты таких векторов определяют нам n-мерное координатное пространство:

$$X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + ... + x^n e_n \qquad \leftrightarrow \qquad (x^1, x^2, ...x^n)\,, \tag{2}$$

и тогда в этом координатном пространстве определена бинарная операция:

$$X \cdot Y = Z \qquad \leftrightarrow \qquad x^i x^j p^l_{ij} = z^l\,. \tag{3}$$

Коммутативность поличисел означает, что

$$XY = YX \qquad \Rightarrow \qquad p^l_{ij} = p^l_{ji}\,, \tag{4}$$

а ассоциативность –

$$(XY)Z = X(YZ) \qquad \Rightarrow \qquad p^l_{ij} p^s_{lr} = p^l_{rj} p^s_{li}\,. \tag{5}$$

Пусть ϵ^i – коэффициенты разложения единицы в базисе e_1, e_2, $...e_n$, тогда справедлива следующая формула:

$$\epsilon^i p^l_{ij} = \delta^l_j\,. \tag{6}$$

2 Норма и группа симметрии

Теорема Фробениуса [5]: Любая ассоциативная алгебра с делением изоморфна одной из трех: алгебре действительных чисел, алгебре комплексных чисел или алгебре кватернионов.

Так как алгебра кватернионов не коммутативна, то из теоремы Фробениуса следует, что невырожденные поличисла P_n размерности $n > 2$ всегда содержат делители нуля, то есть найдутся такие числа X, $Y \neq 0$, что

$$XY = YX = 0\,. \tag{7}$$

Поэтому на множестве поличисел размерности больше двух нельзя определить классическое понятие нормы числа, но можно определить близкое понятие, которое следовало бы назвать квазинормой, но мы для краткости будем использовать старый термин.

Если на некотором подмножестве D_n поличисел P_n для любого числа X из этого подмножества задано действительное число $|X|$, причем для любых X, $Y \in D_n$ выполняются следующие три требования:

1. $|X| \geq 0$;
2. если $a > 0$ – действительное число, то $|aX| = a|X|$;
3. $XY \in D_n$ и $|XY| = |X||Y|$

– то будем говорить, что на множестве поличисел P_n задана норма, а D_n – область ее определения.

Непосредственно из теоремы Вейерштрасса следует, что любая система поличисел P_n изоморфна алгебре квадратных диагональных матриц $(k + m) \times (k + m)$, у которых первые k элементов – произвольные действительные числа, а остальные m элементов – комплексные числа, причем

$$k + 2m = n\,. \tag{8}$$

В силу этого неизоморфные системы невырожденных поличисел однозначно определяются (классифицируются) парой действительных чисел, например, k и m, в этом случае размерность пространства определяется формулой (8). Чтобы не изобретать новое обозначение для невырожденных поличисел предлагается использовать старое обозначение для поличисел, но записывать размерность пространства в виде формулы P_{k+2m}, например, $P_{3+2\cdot 4}$, где $k = 3$, $m = 4$, а размерность пространства $n = 11$.

Таким образом, для любой системы невырожденных поличисел существует базис e_1, e_2, $...e_n$, в котором:

$$p^l_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } \ i = j = l = 1, 2, ..., k, k+1, k+3, ..., n-1\,, \\ 1, \text{ если } \ j = l = i + 1 = k+2, k+4, ..., n\,, \\ 1, \text{ если } \ i = l = j + 1 = k+2, k+4, ..., n\,, \\ -1, \text{ если } \ i = j = l + 1 = k+2, k+4, ..., n\,, \\ 0, \text{ во всех остальных случаях}\,. \end{cases} \tag{9}$$

Такой базис будем называть *изотропным.* При алгебраических вычислениях (преобразованиях) удобнее пользоваться именно этим базисом.

Используя числовой тензор p^l_{ij} (1), можно построить много других числовых тензоров, например,

$$q_{ij} = p^l_{is} \cdot p^s_{lj}\,. \tag{10}$$

Для поличисел тензор q_{ij} является симметрическим, так как

$$q_{ij} = q_{ji}\,. \tag{11}$$

Построим этот тензор в базисе (9):

$$(q_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & -2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 2 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

то есть в базисе (9) компоненты тензора q_{ij} образуют диагональную матрицу, у которой первые k элементов равны 1, а остальные $2m$ элементов заполняют главную диагональ парами $\{2, -2\}$. Отсюда следует, что в любой системе координат в алгебре невырожденных поличисел $P_{k+2\cdot m}$

$$det(q_{ij}) \neq 0\,, \tag{13}$$

а значит можно построить дважды контравариантный тензор q^{ij} такой, что

$$q^{il} q_{lj} = q_{jl} q^{li} = \delta^i_j\,. \tag{14}$$

Ранее [6] именно условие (13) мы использовали в качестве определения невырожденности поличисел.

Итак, справедливо следующее утверждение: если алгебра поличисел P_n не имеет нильпотентных элементов, то $det(q_{ij}) \neq 0$.

Введем обозначение

$$H_r \equiv P_{r+2\cdot 0}\,. \tag{15}$$

Алгебра поличисел H_r изоморфна алгебре действительных квадратных диагональных матриц $r \times r$. Если мы рассмотрим H_r над полем комплексных чисел, то получим алгебру H_r^C, которая изоморфна алгебре комплексных квадратных диагональных матриц $r \times r$, поэтому

$$P_{k+2m} = H_k \oplus H_m^C \,. \tag{16}$$

Очевидно, что норма на множестве P_{k+2m} определяется формулой

$$|X| = \sqrt[n]{x^1 ... x^k \, [(x^{k+1})^2 + (x^{k+2})^2] ... [(x^{n-1})^2 + (x^n)^2]} \,, \tag{17}$$

а область, где норма определена, задается неравенством

$$x^1 x^2 ... x^k \geq 0 \,. \tag{18}$$

В ковариантной форме записи норма приобретает вид

$$|X| = \sqrt[n]{g_{i_1 i_2 ... i_n} x^{i_1} x^{i_2} ... x^{i_n}} \,, \tag{19}$$

где метрический тензор $g_{i_1 i_2 ... i_n}$ не меняется при любой перестановке индексов, то есть является симметрическим.

Учитывая, что в изотропном базисе тензор p^l_{ij} определяется формулой (9), получим в этом базисе

$$|X|^n = det(x^i p^l_{ij}) \,, \tag{20}$$

но справа в этой формуле стоит величина, которая не изменяется при переходе от одного базиса к другому, поэтому формула (20) верна в любом базисе.

Группой симметрии $G_1(P_{k+2m})$ пространства P_{k+2m} будем называть непрерывную группу линейных преобразований этого пространства, которые не меняют норму любого числа, для которого норма существует. Индекс "1" имеет важный смысл, ниже будет показано, что группа симметрии изоморфна множеству унимодулярных поличисел.

Непосредственно из формулы (17) следует, что группа $G_1(P_{k+2m})$ состоит из двух видов преобразований: эллиптических поворотов и гиперболических поворотов, под последними мы понимаем одновременное растяжение по одним координатам и обязательно сжатие по другим, при выполнении некоторого специального условия.

Эллиптические повороты осуществляются матрицами вида:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & \sin\varphi_i & \cos\varphi_i & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \,. \tag{21}$$

Здесь матрица поворота

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix} \tag{22}$$

осуществляет правый эллиптический поворот в плоскости (x^i, x^{i+1}), где $i = k+1$, $k+3, ..., n-1$, на действительный угол φ_i. Всего таких коммутирующих между собой поворотов равно m.

Гиперболические повороты осуществляются матрицами вида

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} e^{\varepsilon_1} & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & e^{\varepsilon_i} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & e^{\varepsilon_{i+1}} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & e^{\varepsilon_{n-1}} & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & e^{\varepsilon_n} \end{pmatrix} . \qquad (23)$$

где ε_j – действительные числа, при $i = k+1, k+3, ..., n-1 \quad \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$, причем

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k+2} + ... + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n = 0 . \qquad (24)$$

Последнее условие как раз и превращает совокупность растяжений и сжатий в гиперболические повороты. Итак, число независимых гиперболических поворотов (23) равно $k+m-1$, все они коммутируют между собой и с эллиптическими поворотами (21).

Таким образом, группа симметрии $G_1(P_{k+2m})$ является абелевой непрерывной $(n-1)$ параметрической группой Ли, поскольку

$$m + (k+m-1) = k + 2m - 1 = n - 1 .$$

3 Скалярное полипроизведение

Определим в пространстве P_{k+2m} скалярное полипроизведение от $n \equiv k+2m$ аргументов следующим образом:

$$(A, B, ..., C) = g_{ij...l} a^i b^j ... c^l . \qquad (25)$$

Здесь $g_{ij...l}$ – метрический тензор, который фигурирует в формуле (19), $A, B, ..., C$ – произвольные поличисла. Такое скалярное полипроизведение не изменяется при любой перестановке аргументов; по каждому из аргументов оно линейно, то есть, например для первого аргумента справедлива формула

$$(\alpha A + \delta D, B, ..., C) = \alpha(A, B, ..., C) + \delta(D, B, ..., C) , \qquad (26)$$

где α, δ – произвольные действительные числа. Если

$$(X, X, ..., X) \geq 0 , \qquad (27)$$

то для поличисла X определена норма $|X|^n$, причем

$$|X|^n = (X, X, ..., X) . \qquad (28)$$

Для того, чтобы поличисло $A \neq 0$ являлось делителем нуля, то есть существовало такое поличисло $B \neq 0$, что $A \cdot B = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$(A, A, ..., A) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |A|^n = 0 . \qquad (29)$$

Последнее утверждение очевидно выполняется в базисе (9), а так как значение скалярного полипроизведения не зависит от выбора базиса, то оно справедливо всегда.

Рассмотрим в координатном пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$ прямую, которая проходит через некоторую точку A, не проходит через начало координат и имеет направляющий вектор B, тогда вектор $X = A + B\tau$, где τ – некий действительный параметр, соединяет начало координат с переменной точкой X на прямой. Потребуем, чтобы

$$\frac{d}{d\tau}|X|^n = 0\,, \tag{30}$$

и найдем вектор X_*, для которого выполняется это необходимое условие экстремума. Из (30) получим

$$(X_*, X_*, ..., X_*, B) = 0\,. \tag{31}$$

В евклидовой геометрии вектор X_*, для которого выполняется условие (30), является ортогональным направляющему вектору B, то есть прямой.

Будем говорить, что поличисло (вектор) B *трансверсально* поличислу (вектору) A, если

$$(A, A, ..., A, B) = 0\,. \tag{32}$$

Если поличисло B трансверсально поличислу A, то, вообще говоря, из этого не следует, что поличисло A трансверсально поличислу B. Взаимность трансверсальности автоматически следует только для невырожденных поличисел размерности два, то есть только для комплексных и гиперболических (двойных) чисел.

Если в пространстве P_{k+2m} существует базис, каждый элемент которого трасверсален всем остальным и имеет норму равную 1, то такой базис будем называть "ортонормированным".

Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ – "ортонормированный" базис, а A – произвольное поличисло, то есть

$$A = a^1 e_1 + a^2 e_2 + ... a^n e_n\,. \tag{33}$$

Рассмотрим скалярное произведение $(e_i, e_{i_-}, ..., e_{i_-}, A)$ ($i_- \equiv i$, но по этим индексам не ведется суммирование), используя свойство (26) и определение "ортонормированного" базиса, получим

$$a^i = (e_i, e_{i_-}, ..., e_{i_-}, A)\,. \tag{34}$$

Как видим, эта формула аналогична формуле для получения координат вектора через скалярное произведение в ортонормированном базисе евклидовых пространств.

4 Перманенты

Число аргументов в скалярном полипроизведении равно размерности пространства n, поэтому при $n > 3$ вычисление таких величин представляет определенные трудности. В данном разделе мы опишем удобный алгоритм вычисления скалярных полипроизведений.

Пусть

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} x^1_{(1)} & x^1_{(2)} & \cdots & x^1_{(n)} \\ x^2_{(1)} & x^2_{(2)} & \cdots & x^2_{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^n_{(1)} & x^n_{(2)} & \cdots & x^n_{(n)} \end{pmatrix} \tag{35}$$

– некоторая числовая матрица, элементами которой являются действительные или комплексные числа. Такая индексация элементов матрицы введена специально, чтобы легче было в дальнейшем строить такие матрицы из координат поличисел.

Под перманентом [7] $per(\hat{A})$ матрицы A будем понимать число, полученное следующим образом:

$$per(x^i_{(j)}) \equiv \begin{vmatrix} x^1_{(1)} & x^1_{(2)} & \cdots & x^1_{(n)} \\ x^2_{(1)} & x^2_{(2)} & \cdots & x^2_{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^n_{(1)} & x^n_{(2)} & \cdots & x^n_{(n)} \end{vmatrix}_+ = \sum_{(1,2,...,n)} x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} ... x^{i_n}_{(n)}\,, \qquad (36)$$

где суммирование идёт по всевозможным подстановкам $(1, 2, ..., n)$ вместо индексов $(i_1, i_2, ..., i_n)$.

Свойства перманентов и алгоритм их вычисления сформулируем аналогично свойствам и алгоритму вычисления определителей.

1. Перманент квадратной $n \times n$ матрицы $\hat{X} = (x_{ij})$ есть сумма $n!$ произведений элементов матрицы $\hat{X}$, причём в каждом таком произведении присутствует один и только один элемент из каждой строки и каждого столбца.

Из этого свойства непосредственно следуют ряд других свойств перманентов.

2. Перманент от транспонированной матрицы равен перманенту от исходной матрицы,

$$per(\hat{X}^T) = per(\hat{X})\,. \qquad (37)$$

То же самое можно переформулировать по-другому.

3. Если какое-то утверждение или свойство справедливо для столбцов перманента, то оно справедливо и для его строк, и наоборот.

Это позволяет формулировать многие утверждения или свойства только в одном экземпляре – только для столбцов, что мы и сделаем.

4. Если у матрицы имеется столбец, состоящий из одних нулей, то перманент этой матрицы равен нулю.

5. Если какой-нибудь столбец матрицы имеет общий множитель, то его можно вынести за знак перманента.

6. Если какой-нибудь столбец с номером j матрицы $\hat{X}$ можно представить как сумму двух столбцов, то перманент матрицы есть сумма двух перманентов:

$$per(\hat{X}) = per(\hat{X}_1) + per(\hat{X}_2)\,, \qquad (38)$$

где матрица $\hat{X}_1$ получается из матрицы $\hat{X}$ заменой j-го столбца на первый столбец, а матрица $\hat{X}_2$ получается из матрицы $\hat{X}$ заменой j-го столбца на второй столбец.

Из последних двух свойств следует более общее утверждение.

7. Пусть столбец с номером j матрицы $\hat{X}$ есть линейная комбинация любого количества столбцов:

$$x_i = \alpha \cdot a_i + \beta \cdot b_i + ... + \gamma \cdot c_i + ...\,, \qquad (39)$$

где α, β, ..., γ, ... – действительные числа. Тогда

$$per(\hat{X}) = \alpha \cdot per(\hat{X}_a) + \beta \cdot per(\hat{X}_b) + ... + \gamma \cdot per(\hat{X}_c) + ... \,. \qquad (40)$$

Матрицы $\hat{X}_a$, $\hat{X}_b$, ... , $\hat{X}_c$, ... получаются из матрицы $\hat{X}$ заменой j-го столбца на столбцы a, b, ... , c, ... соответственно.

Обратимся опять к определению перманента:

$$per(\hat{X}) \equiv \sum_{(1,2,...,n)} x_{i_1 1} x_{i_2 2} ... x_{i_n n}\,. \qquad (41)$$

Выделим в сумме, стоящей справа, все слагаемые, содержащие некоторый элемент x_{ij} матрицы $\hat{X}$, и вынесем его за скобки. В скобках останется сумма из $(n-1)!$ слагаемых, каждое из которых будет содержать по одному элементу из каждой строки, кроме строки i, и каждого столбца, кроме столбца j, матрицы $\hat{X}$, то есть это будет перманент, обозначим его X_{ij}, матрицы $(n-1)\times(n-1)$, которая получается из матрицы $\hat{X}$ вычёркиванием i-ой строки и j-го столбца. Будем называть X_{ij} алгебраическим дополнением элемента x_{ij}. Проделаем описанную выше процедуру для каждого элемента некоторого выделенного столбца и получим алгоритм вычисления перманента n-го порядка через перманенты $(n-1)$-го порядка.

8. Формула разложения перманента по фиксированному столбцу:

$$per(\hat{X}) = x_{1j}X_{1j_-} + x_{2j}X_{2j_-} + ... + x_{nj}X_{nj_-}\,. \tag{42}$$

Здесь индекс $j_- \equiv j$, но по этим индексам нет суммирования.

9. С помощью процедуры разложения перманента по столбцу вычисление любого перманента n-го порядка всегда можно свести к вычислению перманентов второго или третьего порядка, которые вычисляются аналогично тому, как вычисляются обыкновенные определители, но без знаков минус:

$$\left|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right|_+ = ad + cb\,, \tag{43}$$

$$\left|\begin{matrix} a & \alpha & d \\ \beta & b & \gamma \\ e & \delta & c \end{matrix}\right|_+ = abc + \alpha\gamma e + \beta\delta d + ebd + \beta\alpha c + \delta\gamma a\,. \tag{44}$$

Формула разложения перманента по столбцу является частным случаем более общей формулы разложения перманента по нескольким столбцам. Обозначим через $M_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}$ перманент матрицы, элементами которой являются элементы матрицы $\hat{X}$, стоящие на пересечении строк $i_1 < i_2 < ... < i_k$ и столбцов $j_1 < j_2 < ... < j_k$, причём $1 \le k \le (n-1)$. Будем называть $M_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}$ минором, а дополнительным минором $\bar{M}_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}$ к $M_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}$ будем называть перманент от матрицы, полученной из матрицы $\hat{X}$ вычеркиванием тех же самых строк $i_1 < i_2 < ... < i_k$ и столбцов $j_1 < j_2 < ... < j_k$.

10. Справедлива следующая формула разложения перманента по k столбцам, $1 \le k \le (n-1)$:

$$per(\hat{X}) = \sum_{i_1<i_2<...<i_k} M_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}\bar{M}_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}\,, \tag{45}$$

где суммирование идёт по всевозможным выборкам k строк из n при обязательном выполнении неравенств $i_1 < i_2 < ... < i_k$, номера столбцов $j_1, j_2, ..., j_k$ фиксированы и по ним суммирование не ведётся.

Приведём пример такого разложения перманента четвертого порядка по двум первым столбцам:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 & u^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & u^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & u^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 & u^4 \end{vmatrix}_+ &= \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix}_+ \cdot \begin{vmatrix} z^3 & u^3 \\ z^4 & u^4 \end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^3 & y^3 \end{vmatrix}_+ \cdot \begin{vmatrix} z^2 & u^2 \\ z^4 & u^4 \end{vmatrix}_+ + \\ &+ \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^4 & y^4 \end{vmatrix}_+ \cdot \begin{vmatrix} z^2 & u^2 \\ z^3 & u^3 \end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix} x^2 & y^2 \\ x^3 & y^3 \end{vmatrix}_+ \cdot \begin{vmatrix} z^1 & u^1 \\ z^4 & u^4 \end{vmatrix}_+ + \\ &+ \begin{vmatrix} x^2 & y^2 \\ x^4 & y^4 \end{vmatrix}_+ \cdot \begin{vmatrix} z^1 & u^1 \\ z^3 & u^3 \end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix} x^3 & y^3 \\ x^4 & y^4 \end{vmatrix}_+ \cdot \begin{vmatrix} z^1 & u^1 \\ z^2 & u^2 \end{vmatrix}_+ .\end{aligned} \tag{46}$$

Следующие три свойства 11 – 13 являются следствиями свойства 8, формулы разложения перманента по столбцу или строке.

11. Перманент от диагональной матрицы равен произведению её элементов на главной диагонали.

12. Перманент от матрицы, у которой отличные от нуля элементы стоят на побочной диагонали, равен произведению этих элементов.

13. Перманент от треугольной матрицы, то есть матрицы, у которой выше или ниже главной диагонали (или побочной диагонали) все элементы нули, равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали (или побочной диагонали).

14. Если у перманента поменять местами два столбца, то перманент не изменит своё значение.

Из этого свойства следует более общее правило.

15. При любой перестановке столбцов перманента его значение не меняется.

16. Перманент от матрицы $n \times n$, у которой все элементы единицы, равен $n!$.

17. Перманент от матрицы $n \times n$, у которой все столбцы одинаковые, равен произведению $n!$ на произведение всех элементов одного столбца.

18. Перманент от матрицы $\hat{X}$ $(n \times n)$, которая состоит из $(n-1)$ одинаковых столбцов с элементами $x_1, x_2, ..., x_n$ и одного, вообще говоря, другого столбца с элементами $x'_1, x'_2, ..., x'_n$, вычисляется по формуле

$$per(\hat{X}) = (n-1)! \cdot (x'_1 x_2 ... x_n + x_1 x'_2 ... x_n + ... + x_1 ... x_{n-1} x'_n) \,, \tag{47}$$

или, если все $x_i \neq 0$, эту формулу можно переписать следующим образом:

$$per(\hat{X}) = (n-1)! \cdot x_1 x_2 ... x_n \left(\frac{x'_1}{x_1} + \frac{x'_2}{x_2} + ... + \frac{x'_n}{x_n} \right) . \tag{48}$$

19. Если n – нечётно, то перманент от антисимметрической матрицы равен нулю.

20. Пусть числа $X_1, X_2, ..., X_n \in H_n \equiv P_{n+2\cdot 0}$, тогда скалярное полипроизведение векторов, соответствующих этим поличислам, вычисляется по формуле

$$(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}) = \frac{1}{n!} \cdot per(\hat{A}) \,, \tag{49}$$

где матрица $\hat{A}$ строится из координат $x^i_{(j)}$, указанных векторов в изотропном базисе по формуле (35), так как справа стоит симметрическая полилинейная форма от координат n векторов, причем, если все эти векторы равны между собой, то

$$\frac{1}{n!} \cdot per(\hat{A}) = x^1 x^2 ... x^n \,. \tag{50}$$

Если числа $X_1, X_2, ..., X_n \in P_{n+2\cdot m}$, $m \neq 0$, то формула (49) также имеет место, но матрицу $\hat{A}$ следует строить следующим образом:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} x^1_{(1)} & x^1_{(2)} & ... & x^1_{(n)} \\ x^2_{(1)} & x^2_{(2)} & ... & x^2_{(n)} \\ ... & ... & ... & ... \\ x^k_{(1)} & x^k_{(2)} & ... & x^k_{(n)} \\ x^{k+1}_{(1)} + ix^{k+2}_{(1)} & x^{k+1}_{(2)} + ix^{k+2}_{(2)} & ... & x^{k+1}_{(n)} + ix^{k+2}_{(n)} \\ x^{k+1}_{(1)} - ix^{k+2}_{(1)} & x^{k+1}_{(2)} - ix^{k+2}_{(2)} & ... & x^{k+1}_{(n)} - ix^{k+2}_{(n)} \\ ... & ... & ... & ... \\ x^{n-1}_{(1)} + ix^{n}_{(1)} & x^{n-1}_{(2)} + ix^{n}_{(2)} & ... & x^{n-1}_{(n)} + ix^{n}_{(n)} \\ x^{n-1}_{(1)} - ix^{n}_{(1)} & x^{n-1}_{(2)} - ix^{n}_{(2)} & ... & x^{n-1}_{(n)} - ix^{n}_{(n)} \end{pmatrix}, \tag{51}$$

где $i \cdot i = -1$. Перманент от такой матрицы $\hat{A}$ является действительным числом, так как при комплексном сопряжении у матрицы $\hat{A}$ (51) меняются местами m пар строк, а как мы знаем, перманент при этом не изменяет своего значения. Таким образом, $R \ni per(\hat{A})$ – это полилинейная форма от действительных координат n векторов $X_1, X_2, ..., X_n \in P_{n+2\cdot m}$, $m \neq 0$, причем, если все векторы одинаковы и равны X, то

$$per(\hat{A}) = n! \cdot x^1 x^2 ... x^k \cdot \left[(x^{k+1})^2 + (x^{k+2})^2\right] ... \left[(x^{n-1})^2 + (x^n)^2\right] , \tag{52}$$

поэтому скалярное полипроизведение произвольных векторов $X_1, X_2, ..., X_n \in P_{n+2\cdot m}$ можно вычислить по формуле

$$(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{1}{n!} \cdot per(\hat{A}) , \tag{53}$$

где матрица $\hat{A}$ составляется по формуле (51).

Подчеркнем, что все приведенные выше соотношения между скалярными полипроизведениями и перманентами имеют место только в изотропном базисе (9).

5 Длина отрезка кривой в пространстве $P_{k+2\cdot m}$

Зададим в координатном пространстве $P_{k+2\cdot m}$ в базисе (9) некоторую кривую

$$x^i = x^i(\tau), \qquad \tau \in [\tau_1, \, \tau_2] , \tag{54}$$

при $\tau = \tau_1$ кривая проходит через точку A, а при $\tau = \tau_2$ – через точку B, причем все бесконечно малые векторы смещения вдоль кривой с координатами

$$dx^i = \dot{x}^i(\tau) d\tau \tag{55}$$

измеримы, то есть для них определена норма. Тогда естественно определить длину отрезка кривой между двумя точками A и B как интеграл

$$l_{AB} = \int\limits_A^B \sqrt[n]{dx^1 ... dx^k \, [(dx^{k+1})^2 + (dx^{k+2})^2] ... [(dx^{n-1})^2 + (dx^n)^2]} , \tag{56}$$

или

$$l_{AB} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt[n]{\dot{x}^1 ... \dot{x}^k \left[(\dot{x}^{k+1})^2 + (\dot{x}^{k+2})^2\right] ... \left[(\dot{x}^{n-1})^2 + (\dot{x}^n)^2\right]} \cdot d\tau \,. \qquad (57)$$

Таким образом, если $n = k + 2 \cdot m > 2$, то пространство $P_{k+2\cdot m}$ не является ни евклидовым, ни псевдоевклидовым. Это метрическое плоское финслерово пространство [8] с метрической функцией

$$L(dx) = \sqrt[n]{dx^1 ... dx^k \left[(dx^{k+1})^2 + (dx^{k+2})^2\right] ... \left[(dx^{n-1})^2 + (dx^n)^2\right]} \,, \qquad (58)$$

где $L(dx) \equiv L(dx^1, dx^2, ..., dx^n)$, инвариантной относительно группы $G_1(P_{k+2\cdot m})$.

Определим величины p_i (обобщенные импульсы) следующим образом:

$$p_i = \frac{\partial L(dx)}{\partial (dx^i)} \equiv \frac{\partial L(\dot{x})}{\partial (\dot{x}^i)} \,. \qquad (59)$$

Эти величины связаны функциональным соотношением

$$\Phi(p_1, p_2, ..., p_n) = 0 \,, \qquad \text{или} \qquad \Phi(p) = 0 \,, \qquad (60)$$

которое принято называть тангенциальным уравнением индикатрисы. Для метрической функции (58) тангенциальное уравнение индикатрисы имеет вид:

$$p_1 p_2 ... p_k (p_{k+1}^2 + p_{k+2}^2)(p_{k+3}^2 + p_{k+4}^2) ... (p_{n-1}^2 + p_n^2) - \frac{4^m}{n^n} = 0 \,. \qquad (61)$$

Пусть в координатном пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$ заданы две финслеровы геометрии, причём между метрическими функциями $L(dx; x)$ и $L'(dx; x)$ этих геометрий имеет место соотношение

$$L'(dx; x) = \kappa(x) \cdot L(dx; x) \,, \qquad (62)$$

где $\kappa(x) > 0$ – некоторая функция, коэффициент растяжения-сжатия, зависящий от точки пространства. Тогда такие геометрии называются конформно связанными [9].

Финслерова геометрия, конформно связанная с геометрией (58), в каждой точке имеет касательное пространство изоморфное поличисловому пространству $P_{k+2\cdot m}$, а тангенциальное уравнение индикатрисы в таком пространстве имеет вид:

$$p_1 p_2 ... p_k (p_{k+1}^2 + p_{k+2}^2)(p_{k+3}^2 + p_{k+4}^2) ... (p_{n-1}^2 + p_n^2) - \frac{4^m}{n^n} \kappa^n(x) = 0 \,. \qquad (63)$$

Напомним [8], что если известно тангенциальное уравнение индикатрисы

$$\Phi(p; x) = 0 \,, \qquad (64)$$

то каноническая система дифференциальных уравнений для определения экстремалей (геодезических) записывается следующим образом:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \lambda(p; x) \,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \cdot \lambda(p; x) \,, \qquad (65)$$

где $\lambda(p; x) > 0$ – произвольная скалярная функция.

Для финслерова пространства, конформно связанного с пространством $P_{k+2\cdot m}$ с тангенциальным уравнением индикатрисы (63), частные производные от функции $\Phi(p;x)$ определяются формулами:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}=\begin{cases}\dfrac{4^m}{n^n}\cdot\dfrac{\kappa^n}{p_i}\,, & i=1,2,...,k\,,\\[2ex] \dfrac{4^m}{n^n}\cdot\kappa^n\dfrac{2p_i}{p_i^2+p_{i+1}^2}\,, & i=k+1,k+3,...,n-1\,,\\[2ex] \dfrac{4^m}{n^n}\cdot\kappa^n\dfrac{2p_i}{p_{i-1}^2+p_i^2}\,, & i=k+2,k+2,...,n\,;\end{cases} \tag{66}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}=-\frac{4^m}{n^{n-1}}\cdot\kappa^{n-1}\frac{\partial\kappa}{\partial x^i}\,. \tag{67}$$

Подставив эти производные в уравнения (65), получим систему дифференциальных уравнений для определения экстремалей в пространстве $P_{k+2\cdot m}$.

6 Экспоненциальное представление чисел $P_{k+2\cdot m}$

Под экспоненциальной функцией $\exp(X)$ от поличисла $X\in P_{k+2\cdot m}$ будем понимать ряд

$$\exp(X)=1+X+\frac{1}{2!}X^2+...+\frac{1}{s!}X^s+...\,, \tag{68}$$

а под экспоненциальным представлением числа $X\in P_{k+2\cdot m}$, если у этого числа имеется норма $|X|$ – запись этого числа в виде

$$X=|X|\cdot\exp(\varphi_2E_2+\varphi_3E_3+...+\varphi_nE_n)\,, \tag{69}$$

где $\varphi_2,\varphi_3,...\varphi_n$ – действительные числа, а $E_1\equiv 1,E_2,E_3,...,E_n$ – некий специальный базис, в котором такая запись возможна.

Только в единственной алгебре поличисел, алгебре комплексных чисел любое неравное нулю число имеет экспоненциальное представление. В общем случае для алгебры $P_{k+2\cdot m}$ экспоненциальное представление возможно только при выполнении некоторых условий, одним из которых является условие

$$(X,X,...,X)>0\,. \tag{70}$$

Докажем это утверждение, предположив, что мы уже построили такой базис, а затем явно его построим. Рассмотрим множество унимодулярных чисел, то есть чисел $A\in P_{k+2\cdot m}$, у которых $|A|=1$. Такие числа имеют вид

$$A=\exp(\alpha_2E_2+\alpha_3E_3+...+\alpha_nE_n)\,. \tag{71}$$

Тогда множество преобразований пространства $P_{k+2\cdot m}$ вида

$$X\to X'\,,\qquad X'=A\cdot X \tag{72}$$

образуют группу линейных преобразований пространства $P_{k+2\cdot m}$, сохраняющих модули всех чисел, у которых модуль определен, так как

$$|X'|=|A|\cdot|X|\qquad\Rightarrow\qquad|X'|=|X|\,. \tag{73}$$

Кроме того, эта группа $n-1$ параметрическая. Выше мы построили преобразования этой группы в координатном пространстве и обозначили ее символом $G_1(P_{k+2\cdot m})$. Таким образом, эта группа есть группа унимодулярных поличисел.

Все эти рассуждения дают нам алгоритм построения базисных элементов E_2, E_3, ... , E_n: они должны быть генераторами данной абелевой группы Ли. Это позволяет нам построить базис $E_1 \equiv 1, E_2, E_3, ..., E_n$ из изотропного базиса (9), если $k \neq 0$, например, так:

$$\left.\begin{aligned}
&E_1 = e_1 + e_2 + ... + e_k + e_{k+1} + e_{k+3} + ... + e_{n-1}\,,\\
&E_2 = e_1 - e_2\,,\\
&E_3 = e_1 - e_3\,,\\
&\qquad . \quad . \quad .\\
&E_k = e_1 - e_k\,,\\
&E_{k+1} = 2e_1 - e_{k+1}\,,\\
&E_{k+2} = e_{k+2}\,,\\
&E_{k+3} = 2e_1 - e_{k+3}\,,\\
&E_{k+4} = e_{k+4}\,,\\
&\qquad . \quad . \quad .\\
&E_{n-1} = 2e_1 - e_{n-1}\,,\\
&E_{k+2} = e_n\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (74)$$

Используя числа E_2, E_3, ... , E_n в качестве генераторов группы, получим все преобразования (21), (23).

Базис $E_1 \equiv 1, E_2, E_3, ..., E_n$ (74) не единственный, в котором имеет место экспоненциальное представление (69). Любой другой такой базис получается из базиса (74) произвольным линейным невырожденным преобразование элементов $E_2, E_3, ..., E_n$.

Таким образом, при выборе базиса, который допускает экспоненциальное представление числа, имеется $(n-1)^2$ параметрический произвол, который можно использовать, например, чтобы сделать базис "ортонормированным" или чтобы добиться выполнения какого либо другого необходимого свойства.

Выясним, в каком случае поличисло X (2) может быть представлено в экспоненциальном виде (69). Для этого внесём $|X|$ под экспоненту, тогда под экспонентой окажется некоторое поличисло Y. Запишем число Y в изотропном базисе, координаты этого числа в изотропном базисе обозначим y^i. Тогда, используя свойства изотропного базиса, получим

$$\begin{aligned}
X = \exp(Y) = {} & \exp(y_1)e_1 + \exp(y_2)e_2 + ... + \exp(y_k)e_k + \\
+ {} & \exp(y_{k+1})\cos(y_{k+2})e_{k+1} + \exp(y_{k+1})\sin(y_{k+2})e_{k+2} + ... \\
+ {} & \exp(y_{n-1})\cos(y_n)e_{n-1} + \exp(y_{n-1})\sin(y_n)e_n\,.
\end{aligned} \qquad (75)$$

Таким образом, для того чтобы поличисло $X \in P_{k+2\cdot m}$, имело экспоненциальное представление, необходимо и достаточно, чтобы его координаты x^i в изотропном базисе удовлетворяли следующим условиям:

$$\left.\begin{gathered}
x^1 > 0,\ x^2 > 0,\ \dots,\ x^k > 0,\\
(x^{k+1})^2 + (x^{k+2})^2 \neq 0,\ (x^{k+3})^2 + (x^{k+4})^2 \neq 0,\ \dots,\ (x^{n-1})^2 + (x^n)^2 \neq 0\,.
\end{gathered}\right\} \qquad (76)$$

7 Функции переменной $P_{k+2\cdot m}$

Пусть пока $e_1, e_2, ..., e_n$ – произвольный базис в пространстве $P_{k+2\cdot m}$. Функцией переменной $X = x^1 e_1 + ... + x^n e_n \in P_{k+2\cdot m}$ называется функция $F(X) \in P_{k+2\cdot m}$, такая, что

$$F(X) = f^1(x^1, ..., x^n)e_1 + f^2(x^1, ..., x^n)e_2 + ... + f^n(x^1, ..., x^n)e_n\,, \tag{77}$$

где $f^i(x) \in R - n$ произвольных функций (в дальнейшем мы будем считать их гладкими) от n действительных аргументов.

Рассмотрим дифференциал $dF(X) \equiv F(X + dX) - F(X)$, где $dX \in P_{k+2\cdot m}$ – произвольное бесконечно малое полічисло. Тогда

$$dF(X) = \frac{\partial f^l}{\partial x^i} \cdot dx^i \cdot e_l\,. \tag{78}$$

Если дифференциал $dF(X)$ функции $F(X)$ можно представить в виде

$$dF(X) = F'(X) \cdot dX\,, \tag{79}$$

где $F'(X)$ – некоторая функция переменной $P_{k+2\cdot m}$, то функцию $F(X)$ принято называть аналитической функций [10] полічисловой $P_{k+2\cdot m}$ переменной, а $F'(X)$ – производной этой аналитической функции по той же переменной.

Подставив в эту формулу выражение (78), получим

$$\frac{\partial f^l}{\partial x^i} = p^l_{ji} f'^j\,. \tag{80}$$

Воспользуемся соотношением (6), тогда из предыдущей формулы следует

$$f'^l = \epsilon^i \frac{\partial f^l}{\partial x^i}\,. \tag{81}$$

Подставив полученное выражение в (80), имеем n^2 соотношений

$$\frac{\partial f^l}{\partial x^i} = \epsilon^s p^l_{ji} \frac{\partial f^j}{\partial x^s}\,, \tag{82}$$

из которых независимых не более $n^2 - n$, так как свертка левой и правой части с ϵ^i (компоненты единичного элемента в данном базисе) приводит к n тождествам. Соотношения (82) для функций комплексной переменной принято называть соотношениями Коши-Римана. Сохраним этот термин для функций полічисловой переменной. Если эти соотношения выполняются, то, определив функцию $F'(X)$ с помощью формул (81), приходим к выполнению формулы (79).

Таким образом, мы пришли к следующему результату: для того, чтобы функция $F(X)$ полічисловой переменной была аналитической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения Коши-Римана (82).

Непосредственно из определения аналитической функции полічисловой переменной следует:

1) линейная комбинация аналитических функций полічисловой переменной с действительными коэффициентами α и β есть аналитическая функция той же переменной, причем

$$\left[\alpha F_{(1)}(X) + \beta F_{(2)}(X)\right]' = \alpha F'_{(1)}(X) + \beta F'_{(2)}(X)\,;$$

2) полічисловое произведение двух аналитических функций полічисловой переменной есть аналитическая функция той же переменной, причем

$$\left[F_{(1)}(X) \cdot F_{(2)}(X)\right]' = F'_{(1)}(X) F_{(2)}(X) + F_{(1)}(X) F'_{(2)}(X)\,;$$

3) аналитическая функция поличисловой переменной от аналитической функции той же поличисловой переменной есть аналитическая функция все той же поличисловой переменной, причем

$$\left[F_{(1)}(X)\left(F_{(2)}(X)\right)\right]' = F'_{(1)}(Y)\Big|_{Y=F_{(2)}(X)} F'_{(2)}(X)\,.$$

Общий вид аналитических функций переменной $P_{k+2\cdot m}$ можно найти, работая в изотропном базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ с тензором p^l_{ij} (9), но выполнить эту задачу еще проще, если вспомнить, что невырожденные поличисла $P_{k+2\cdot m}$ изоморфны прямой сумме (16) алгебр H_k и H^C_m, то есть алгебре квадратных диагональных комплексных матриц. В этой алгебре любой элемент $\hat{X}$ может быть представлен в виде

$$\hat{X} = x^1\hat{\Psi}_1 + x^2\hat{\Psi}_2 + ... + x^m\hat{\Psi}_{k+m}\,, \tag{83}$$

где $\hat{\Psi}_i$ – действительная квадратная диагональная матрица, у которой единственным отличным от нуля элементом, является i-й, равный единице; x^i $(i = 1, 2, ..., k)$ – k действительных чисел, а x^j $(j = k+1, k+2, ..., k+m)$ – m комплексных чисел. Можно рассматривать матрицы $\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, ..., \hat{\Psi}_{k+m}$ как базис. Тогда

$$\hat{\Psi}_i\hat{\Psi}_j = \tilde{p}^l_{ij}\hat{\Psi}_l\,, \qquad \tilde{p}^l_{ij} = \begin{cases} 1\,, & \text{если } i = j = l\,, \\ 0\,, & \text{во всех остальных случаях}\,, \end{cases} \tag{84}$$

а функции поличисловой переменной в таком представлении имеют вид

$$F(\hat{X}) = f^1(x^1, ..., x^{k+m})\hat{\Psi}_1 + ... + f^{k+m}(x^1, ..., x^{k+m})\hat{\Psi}_{k+m}\,, \tag{85}$$

$f^i \in R$, если $i = 1, 2, ..., k$, и $f^j \in C$, если $j = k+1, k+2, ..., k+m$. Подставим $\tilde{p}^l_{ij}$ в соотношения (80), получим

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^{i-}} = f'^i\,, \tag{86}$$

а все остальные частные производные $\dfrac{\partial f^l}{\partial x^i}$ при $i \neq j$ равны нулю.

Перейдем опять изотропному базису $e_1, e_2, ..., e_n$ (9), в котором поличисловая переменная X имеет n действительных координат $x^1, x^2, ..., x^n$. Тогда произвольная аналитическая функция переменной $P_{k+2\cdot m}$ в изотропном базисе (9) имеет вид

$$\begin{aligned} F(X) = f^1(x^1)e_1 + ... + f^k(x^k)e_k + f^{k+1}(x^{k+1}, x^{k+2})e_{k+1} + \\ + f^{k+2}(x^{k+1}, x^{k+2})e_{k+2} + ... + f^{n-1}(x^{n-1}, x^n)e_{n-1} + f^n(x^{n-1}, x^n)e_n\,, \end{aligned} \tag{87}$$

где $f^1(x^1), ..., f^k(x^k)$ – произвольные гладкие функции одной действительной переменной, а пары функций

$$\{f^{j_-}(x^{j_-}, x^{j+1}), f^{(j_-+1)}(x^{j_-}, x^{j+1})\}\,, \qquad j \equiv j_- = k+1, k+3, ..., n-1 \tag{88}$$

являются компонентами аналитических функций комплексных переменных $z^j = x^j + i \cdot x^{j+1}$.

Так как аналитические функции комплексной переменной бесконечное число раз дифференцируемы, то аналитическая функция $F(X)$ переменной $P_{k+2\cdot m}$ столько раз дифференцируема, сколько раз дифференцируемы все компоненты $f^1(x^1), ..., f^k(x^k)$.

Итак, в общем случае аналитическая функция $P_{k+2\cdot m}$ переменной однозначно определяется, если заданы k гладких функций одной действительной переменной и m аналитических функций комплексной переменной. В то же время идея сопоставления каждой точке физического координатного пространства взаимно однозначно единственного гиперкомплексного числа входит в противоречие с тем, что при этом физическим процессам будут сопоставляться k гладких функций одной действительной переменной и m аналитических функций комплексной переменной. Как известно [12], аналитическая функция комплексной переменной однозначно определяется заданием на некотором множестве точек в области ее определения, например, на отрезке некоторой кривой, но никак не двумя функциями одной действительной переменной. Для всех элементарных функций одной действительной переменной можно с помощью аналитического продолжения построить однозначно аналитическую функцию комплексной переменной. Последнее свойство выполняется и для аналитических функций $P_{k+2\cdot m}$ переменной. Множество аналитических функций поличисловой переменной, которые получены аналитическим продолжением элементарных функций одной действительной переменной, образуют особый класс, функции из которого можно было бы назвать физическими, так как существуют серьезные основания считать, что именно такие аналитические функции поличисловой переменной будут играть особую роль в физических приложениях.

Используем компоненты аналитической функции $F(X)$ для перехода от системы координат $x^{i'}$, в которой элемент длины в пространстве $P_{k+2\cdot m}$ не зависит от точки пространства, к некоторой криволинейной системе координат x^i, в которой элемент длины финслерова пространства будет зависеть не только от дифференциалов координат, но и от самих координат. Пусть

$$x^{i'} = f^i(x^1, x^2, ..., x^n)\,, \tag{89}$$

где f^i – компоненты аналитической функции $F(X)$, штрих у индекса указывает на принадлежность к другой системе координат. Необходимо, чтобы якобиан такого преобразования был конечен и отличен от нуля. Достаточно это проверить в каком-то одном базисе, например, в изотропном. Тогда согласно формулам (80) и (20), получим:

$$\frac{D(f^1, f^2, ..., f^n)}{D(x^1, x^2, ..., x^n)} = (F', F', ..., F') \neq 0\,, \tag{90}$$

где $F'(X)$ – производная аналитической функции $F(X)$ переменной $X \in P_{k+2\cdot m}$. Здесь мы не написали $|F'|^n$ вместо $(F', F', ..., F')$, так как функция $F'(X)$ при этом может не иметь нормы.

Таким образом, преобразование координат (89) или отображение одной области пространства $P_{k+2\cdot m}$ на другую область того же пространства, осуществляемое с помощью компонент аналитической функции $F(X)$, взаимно однозначно в некоторой области, если в этой области скалярное полипроизведение с одним и тем же аргументом, производной $F'(X)$, имеет конечное значение и не равно нулю.

Последнее утверждение и формула (90) показывают, что понятие скалярного полипроизведения, впервые введенного в работе [11], естественным образом возникает при рассмотрении преобразований пространства $P_{k+2\cdot m}$ с помощью аналитических функций $P_{k+2\cdot m}$ переменной и не сводится к понятию нормы и метрики.

Посмотрим как изменится метрическая функция $L(dx^1, dx^2, ..., dx^n)$ (58) при таком преобразовании координат или преобразовании самого пространства. Для этого вначале потребуем выполнения условия

$$(F', F', ..., F') > 0\,, \tag{91}$$

тогда у функции F' существует норма

$$|F'| = \sqrt[n]{(F', F', ..., F')}\,.$$

Подставим (89) в (58) и получим ту же метрическую функцию в координатах x^i:

$$L(dx^{1'}, dx^{2'}, ..., dx^{n'}) = |F'(X)| \cdot L(dx^1, dx^2, ..., dx^n)\,, \tag{92}$$

где слева и справа стоит одна и та же метрическая функция L.

Таким образом, аналитическая функция невырожденной поличисловой переменной осуществляет в финслеровом поличисловом пространстве конформное преобразование координат или конформное преобразование самого пространства, если ее производная имеет отличную от нуля норму. То же самое можно сказать о некоторой области поличислового пространства.

Это же утверждение можно сформулировать несколько иначе.

Пусть финслерова геометрия $L(dx; x)$ конформно связана с финслеровой геометрией $L(dx)$ плоского поличислового пространства $P_{k+2\cdot m}$, то есть

$$L(dx; x) = \kappa(x) L(dx)\,, \tag{93}$$

причем

$$\kappa(x) = |F'(X)| \neq 0\,, \tag{94}$$

где $F'(X)$ – производная, имеющая конечную норму, аналитической функции $F(X)$ поличисловой переменной $P_{k+2\cdot m}$. Тогда геометрия $L(dx; x)$ получается из плоской геометрии $L(dx)$ пространства $P_{k+2\cdot m}$ введением криволинейных координат с помощью компонент аналитической функции $F(X)$, а значит, геометрия $L(dx; x)$ также является плоской.

Итак, в любом поличисловом пространстве P_n размерности $n \geq 3$ имеется бесконечно-параметрическая непрерывная группа конформных преобразований, в то время как в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах размерности $n \geq 3$ непрерывная конформная группа всегда конечно-параметрическая.

8 Пространство гиперкомплексных чисел H_4

Числа $H_4 \equiv P_{4+2\cdot 0}$ изоморфны алгебре действительных квадратных диагональных матриц 4×4. На их примере конкретизируем формулы и результаты, полученные выше. Координаты в изотропном базисе (9) пространства H_4 будем обозначать $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, а сам базис – $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$, то есть любое число можно представить в виде разложения

$$X = \xi^1\psi_1 + \xi^2\psi_2 + \xi^3\psi_3 + \xi^4\psi_4\,, \tag{95}$$

или четверки действительных чисел $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$. Бинарная операция поличислового умножения на множестве базисных векторов $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ определяется Таб. 1.

Если $\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4 > 0$, то для числа $X \in H_4$ определена норма

$$|X| = \sqrt[4]{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4} > 0\,. \tag{96}$$

Пространство H_4 является метрическим финслеровым пространством с метрической функцией

$$L(d\xi) = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,. \tag{97}$$

Таблица 1:

$\psi_i\cdot\psi_j$	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
ψ_1	ψ_1	0	0	0
ψ_2	0	ψ_2	0	0
ψ_3	0	0	ψ_3	0
ψ_4	0	0	0	ψ_4

Таблица 2:

$\times$	1	j	k	jk
1	1	j	k	jk
j	j	1	jk	k
k	k	jk	1	j
jk	jk	k	j	1

Никакими преобразованиями координат подкоренное выражение в правой части нельзя привести к квадратичному виду, то есть такое финслерово пространство качественно отличается от евклидова и псевдоевклидовых пространств размерности четыре. Метрику, определяемую метрической функцией (97), называют иногда метрикой Бервальда-Моора.

В пространстве H_4 существует базис $1, j, k, jk$,

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \psi_1+\psi_2+\psi_3+\psi_4\,,\\ j &= \psi_1+\psi_2-\psi_3-\psi_4\,,\\ k &= \psi_1-\psi_2+\psi_3-\psi_4\,,\\ jk &= \psi_1-\psi_2-\psi_3+\psi_4\,, \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

закон умножения базисных элементов которого определен Таб. 2. Координаты x^0, x^1, x^2, x^3 числа X в этом базисе связаны с координатами $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ того же числа в изотропном базисе формулами:

$$\left.\begin{aligned} \xi^1 &= x^0+x^1+x^2+x^3\,,\\ \xi^2 &= x^0+x^1-x^2-x^3\,,\\ \xi^3 &= x^0-x^1+x^2-x^3\,,\\ \xi^4 &= x^0-x^1-x^2+x^3\,. \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

Базис $1, j, k, jk$ является "ортонормированным" и в нем имеет место экспоненциальное представление чисел.

Для того, чтобы проверить первое утверждение, достаточно вычислить всевозможные скалярные полипроизведения вида (A, B, B, B), где A, B – любые базисные элементы 1, j, k, jk. Покажем, как происходит вычисление таких скалярных полипроизведений на одном примере, а затем приведем результаты вычислений.

Вычислим скалярное полипроизведение (j, k, k, k). Для этого воспользуемся формулой (49) и формулами (98), получим

$$(j,k,k,k) = \frac{1}{4!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{+} . \tag{100}$$

Так как из любой строки можно вынести общий числовой множитель, за знак перманента, вынесем (-1) из второй и третьей строки

$$(j,k,k,k) = \frac{1}{4!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{+} \tag{101}$$

и воспользуемся формулой (48):

$$(j,k,k,k) = 0 . \tag{102}$$

Действуя аналогичным образом, вычислим скалярные полипроизведения (A, B, B, B), где A, B любые базисные элементы $1, j, k, jk$. Приведем результаты вычислений:

$$\left.\begin{aligned} &(1,1,1,1) = (j,j,j,j) = (k,k,k,k) = (jk,jk,jk,jk) = 1\,, \\ &(1,j,j,j) = (1,k,k,k) = (1,jk,jk,jk) = 0\,, \\ &(j,1,1,1) = (k,1,1,1) = (jk,1,1,1) = 0\,, \\ &(j,k,k,k) = (k,j,j,j) = (j,jk,jk,jk) = 0\,, \\ &(jk,j,j,j) = (k,jk,jk,jk) = (jk,k,k,k) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Таким образом, базис $1, j, k, jk$ является "ортонормированным", а значит коэффициенты разложения числа X в этом базисе могут быть выражены через скалярные полипроизведения следующим образом:

$$X = (X,1,1,1)\cdot 1 + (X,j,j,j)\cdot j + (X,k,k,k)\cdot k + (X,jk,jk,jk)\cdot jk\,. \tag{104}$$

Базисные элементы j, k, jk получаются из базисных элементов E_2, E_3, E_4 (74) с помощью невырожденного линейного преобразования:

$$j = -E_2 + E_3 + E_4\,, \quad k = E_2 - E_3 + E_4\,, \quad jk = E_2 + E_3 - E_4\,. \tag{105}$$

Матрица этого преобразования имеет определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0\,, \tag{106}$$

поэтому в базисе $1, j, k, jk$ для чисел $X \in H_4$, имеющих отличную от нуля норму $|X| \neq 0$, возможно экспоненциальное представление:

$$X = |X| \cdot \exp(\alpha j + \beta k + \gamma jk)\,, \tag{107}$$

где α, β, γ – действительные числа, угловые переменные.

Если функция $F(x)$ одной действительной переменной x представима как полином или сходящийся ряд переменной x, то функция $F(X)$ переменной $X \in H_4$ в изотропном базисе также определена

$$F(X) = F(\xi^1)\psi_1 + F(\xi^2)\psi_2 + F(\xi^3)\psi_3 + F(\xi^4)\psi_4 \tag{108}$$

и является аналитической функцией H_4 переменной. Применяя эту формулу к экспоненциальному представлению (107), имеем

$$X = \xi^1\psi_1 + \xi^2\psi_2 + \xi^3\psi_3 + \xi^4\psi_4 = e^{\alpha+\beta+\gamma}\psi_1 + e^{\alpha-\beta-\gamma}\psi_2 + e^{-\alpha+\beta-\gamma}\psi_3 + e^{-\alpha-\beta+\gamma}\psi_4\,, \tag{109}$$

откуда находим выражения угловых переменных через координаты числа X в изотропном базисе:

$$\alpha = \ln\left(\frac{\xi^1\xi^2}{\xi^3\xi^4}\right)\,, \quad \beta = \ln\left(\frac{\xi^1\xi^3}{\xi^2\xi^4}\right)\,, \quad \gamma = \ln\left(\frac{\xi^1\xi^4}{\xi^2\xi^3}\right)\,. \tag{110}$$

Формула (109) дает и условия, при выполнении которых число X может быть представлено в экспоненциальном виде:

$$\xi^1 > 0, \quad \xi^2 > 0, \quad \xi^3 > 0, \quad \xi^4 > 0\,.$$

Область, выделяемая в пространстве H_4 этими неравенствами, отождествляется с конусом будущего, если интерпретировать пространство H_4 как четырехмерное пространство-время.

Из формулы (108) следует, что произвольная элементарная функция одной действительной переменной однозначно определяет аналитическую функцию H_4 переменной. Как было отмечено выше, по-видимому, именно такие аналитические функции H_4 переменной будут важны для физических приложений.

Любая аналитическая функция переменной H_4 в изотропном базисе $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ имеет вид

$$F(X) = f^1(\xi^1)\psi_1 + f^2(\xi^2)\psi_2 + f^3(\xi^3)\psi_3 + f^4(\xi^4)\psi_4\,, \tag{111}$$

где f^i – произвольные дифференцируемые функции одной действительной переменной. Если все функции f^i дифференцируемы $r+1$ раз, то все производные функции $F(X)$ переменной H_4 вплоть до r-ой также являются аналитическими функциями. Запись произвольной аналитической функции (111) в "ортонормированном" базисе $1, j, k, jk$ (98) имеет более громоздкий вид:

$$\begin{aligned}
F(X) = \ & \frac{1}{4}[f^1(x^0+x^1+x^2+x^3) + f^2(x^0+x^1-x^2-x^3)+ \\
& +f^3(x^0-x^1+x^2-x^3) + f^4(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot 1+ \\
& +\frac{1}{4}[f^1(x^0+x^1+x^2+x^3) + f^2(x^0+x^1-x^2-x^3)- \\
& -f^3(x^0-x^1+x^2-x^3) - f^4(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot j+ \\
& +\frac{1}{4}[f^1(x^0+x^1+x^2+x^3) - f^2(x^0+x^1-x^2-x^3)+ \\
& +f^3(x^0-x^1+x^2-x^3) - f^4(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot k+ \\
& +\frac{1}{4}[f^1(x^0+x^1+x^2+x^3) - f^2(x^0+x^1-x^2-x^3)- \\
& -f^3(x^0-x^1+x^2-x^3) + f^4(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot jk\,.
\end{aligned} \tag{112}$$

В "ортонормированных" координатах x^0, x^1, x^2, x^3 метрическая функция (97) финслерова пространства H_4 принимает вид

$$L(dx) = [(dx^0 + dx^1 + dx^2 + dx^3)(dx^0 + dx^1 - dx^2 - dx^3)\times \\ \times(dx^0 - dx^1 + dx^2 - dx^3)(dx^0 - dx^1 - dx^2 + dx^3)]^{1/4}\,. \tag{113}$$

Разложим выражение в квадратных скобках по степеням dx^0:

$$L^4(dx) = (dx^0)^4 - 2\,(dx^0)^2\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] + 8\,dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 + \\ +\ (dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 - 2\left[(dx^1)^2 (dx^2)^2 + (dx^1)^2 (dx^3)^2 + (dx^2)^2 (dx^3)^2\right]\,. \tag{114}$$

Предположим, что

$$dx^\alpha = \varepsilon dx^0\,, \quad \varepsilon \ll 1\,, \tag{115}$$

тогда, если пренебречь членами ε^3 по сравнению с 1, что соответствует в механике пренебрежению членами $\left(\dfrac{v}{c}\right)^3$, где v – скорость частицы, а c – скорость света (нерелятивистское приближение), по сравнению с единицей, для элемента длины $L(dx)$ (113) в пространстве H_4 получим приближенную формулу:

$$L_{H_4}(dx) \simeq \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}\,. \tag{116}$$

Справа в этой формуле стоит элемент длины в пространстве Минковского, поэтому справедливо следующее утверждение.

Координаты x^0, x^1, x^2, x^3 в "ортонормированном" базисе пространства H_4 в нерелятивистском приближении в геометрическом (метрическом) плане ведут себя также как общепринятые координаты четырехмерного пространства-времени Минковского.

Заключение

В предлагаемой работе авторы сознательно пошли на существенное сокращение излагаемого материала по сравнению с имеющимся у них, ограничиваясь только теми моментами, смысл, строгость и приложения которых стали для них достаточно прозрачными. Поэтому вне рамок статьи оказались многие интересные, но, к сожалению, не до конца прочувствованные результаты, среди которых обобщение аналитических функций и тесно с ними связанных преобразований. Подобные обобщения, по-видимому, совершенно необходимы, так как претензии при помощи поличисел научиться решать вполне конкретные и достаточно сложные физические задачи смогут реализоваться в полной мере лишь тогда, когда, кроме изометрических и конформных преобразований, будут задействованы преобразования, которые должны быть следующими в цепочке: изометрические, конформные, ...

Авторы искренне благодарят В. М. Чернова за то, что он обратил их внимание на важное значение теоремы Вейерштрасса при классификации и изучении поличисел [13].

Литература

[1] Hamilton W. R. "Lectures on Quaternions", Dublin, 1853

[2] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. Наука. М., 1966.

[3] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Понятия расстояния и модуля скорости в линейных финслеровых пространствах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (3), 2005, 3 – 15.

[4] Allenby, R. B. J. T., Rings, Fields and Groups: An Introduction to Abstract Algebra, 2nd edition, 1991.

[5] Кантор И. Л., Солодовников А. С., Гиперкомплексные числа, М., "Наука", 1973.

[6] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г., Нормальное сопряжение на множестве поличисел, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (2), 2004, 6 – 14.

[7] Минк Х. Перманенты. Пер. с англ., М., 1982.

[8] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.-Л.: ОГИЗ, 1947.

[9] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ. М., "Наука", 1967.

[10] Лаврентьев М. А., Шабат Б. О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., "Наука", 1977.

[11] Павлов Д. Г., Обобщение аксиом скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (1), 2004, 5 – 19.

[12] Свешников А. Г., Тихонов А. Н., Теория функций комплексной переменной. М., "Наука", 1967.

[13] Чернов В. М., Об определяющих уравнениях для элементов ассоциативно-коммутативных конечномерных алгебр и ассоциированных метрических формах, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (4), 2005, 57 – 74.

The geometry of non-degenerate polynumbers

G. I. Garas'ko, D. G. Pavlov

Electrotechnical institute of Russia, MSTU n. a. N. E. Bauman
gri9z@mail.ru, geom2004@mail.ru

It is shown, that the spaces of non-degenerate polynumbers are metric Finsler spaces. The expressions for the norm and for the Finsler metric function are obtained. A convenient algorithm for computing scalar poly-products in such spaces, is designed. A basis in which takes place the exponential representation of polynumbers is built, and the whole set of such bases, is described. The set of unimodular polynumbers is isomorphic with the continuous Lie group, the group of symmeries of the space of polynumbers.

Key-words: Finsler spaces, symmetries, exponential representation.
MSC: 53B40, 58D19.

ЧАСТНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА, КОНФОРМНО СВЯЗАННОГО С ПРОСТРАНСТВОМ МИНКОВСКОГО

Г. И. Гарасько

ГУП ВЭИ, Москва, Россия
gri9z@mail.ru

Пространство, конформно связанное с пространством Минковского, обладает единственным скалярным полем, для которого записывается уравнение поля и находится частное специальное решение: стационарное пространственно сферически симметричное с "силой" притяжения к центру. Решение определено только вне области радиуса r_0. На границе этой области материальные частицы, двигающиеся из бесконечности с нулевой начальной скоростью и нулевым моментом количества движения, достигают $\frac{1}{\sqrt{3}}$ скорости света, то есть эту область можно назвать "аналогом черной дыры". Для полученного самосогласованного поля сформулирована квантово-механическая задача на собственные значения. При некоторых предположениях несколько собственных значений найдены численно квазиклассическим методом.

Ключевые слова: конформное преобразование, пространство Минковского.

1 Введение

Пространство x^0, x^1, x^2, x^3, конформно связанное с пространством Минковского, будучи псевдоримановым пространством, является также частным случаем финслерового пространства [1] и по определению имеет метрическую функцию следующего вида:

$$L(dx;x) = \kappa(x^0, x^1, x^2, x^3)\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} \equiv \kappa(x)\sqrt{\overset{o}{g}_{ij}\ dx^i dx^j}\,, \qquad (1)$$

где $\kappa(x) > 0$ – единственное действительное скалярное поле в этом пространстве. Длина отрезка кривой $x^i = x^i(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ – параметр вдоль кривой, вычисляется в таком пространстве с помощью интеграла вдоль кривой

$$l_{1,2} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \kappa(x)\sqrt{\overset{o}{g}_{ij}\ \dot{x}^i \dot{x}^j}\ d\tau\,, \qquad (2)$$

где $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$. Компоненты обобщенного импульса находятся по формулам:

$$p_i = \kappa(x)\frac{\overset{o}{g}_{ij}\ dx^j}{\sqrt{\overset{o}{g}_{km}\ dx^k dx^m}} \equiv \kappa(x)\frac{\overset{o}{g}_{ij}\ \dot{x}^j}{\sqrt{\overset{o}{g}_{km}\ \dot{x}^k \dot{x}^m}}\,. \qquad (3)$$

Они связаны между собой соотношением

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\ p_i p_j = \kappa^2(x)\,, \qquad (4)$$

которое принято называть тангенциальным уравнением индикатрисы [1] и записывать следующим образом:

$$\Phi(p;x) = 0\,. \qquad (5)$$

Функцию $\Phi(p;x)$ будем называть *функцией Финслера.* Функция Финслера определяется неоднозначно – с точностью до перехода от одного тангенциального уравнения индикатрисы к любому другому эквивалентному уравнению, записанному в виде (5).

Если функция $\kappa(x)$ известна, то определены метрическая функция $L(dx;x)$ и функция Финслера $\Phi(p;x)$, а действие как функция координат $S(x)$ может быть найдено как решение уравнения Гамильтона-Якоби

$$\Phi\left(\frac{\partial S}{\partial x};x\right)=0\,. \tag{6}$$

Тогда уравнения для нахождения экстремалей ("геодезических") записываются или как уравнения Лагранжа-Эйлера

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L(\dot x;x)}{\partial \dot x^i}-\frac{\partial L(\dot x;x)}{\partial x^i}=0\,, \tag{7}$$

или в каноническом виде

$$\dot x^i=\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\cdot\lambda'(p;x)\,,\qquad p_i=-\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\cdot\lambda'(p;x)\,, \tag{8}$$

где $\lambda'(p;x)>0$ – произвольная функция, или в виде

$$\dot x^i=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\right|_{p_i=\frac{\partial S}{\partial x^i}}\cdot\lambda(x)\,, \tag{9}$$

где $\lambda(x)>0$ – некоторая функция.

Формулы (6) – (9) справедливы для любого финслерова пространства. В нашем конкретном случае пространства x^0,x^1,x^2,x^3, конформно связанного с пространством Минковского, уравнение Гамильтона-Якоби (6) есть

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2=\kappa^2(x)\,, \tag{10}$$

а уравнения (9) для нахождения экстремалей ("геодезических") запишутся как

$$\dot x^i=\ \overset{o}{g}{}^{ij}\ \frac{\partial S}{\partial x^j}\cdot\lambda(x)\,. \tag{11}$$

Можно считать, что экстремали ("геодезические") являются траекториями движения некоторых материальных частиц. Таким образом, в любом финслеровом пространстве (в частности, нашем пространстве x^0,x^1,x^2,x^3) определена классическая механика неких материальных объектов вместе с лагранжевым формализмом (7), аналогом гамильтонового формализма (8) с заменой функции Гамильтона на функцию Финслера и методом Гамильтона-Якоби (6), (9).

Если следовать гипотезе *самодостаточности геометрии* [2]: все поля, входящие в метрическую функцию, должны удовлетворять принципу стационарности любого объема – то поле $\kappa(x)$ не может быть произвольным.

Скалярное действительное поле $\kappa(x)$ всегда можно выразить через другое действительное скалярное поле $S_W(x)$, которое связано с полем $\kappa(x)$ соотношением

$$\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^2=\kappa^2(x)\,, \tag{12}$$

поэтому лагранжиан для получения уравнения поля [2] будет иметь вид

$$\mathcal{L} = \kappa^4(x) \equiv \left(\overset{o}{g}{}^{ij} \, \frac{\partial S_W}{\partial x^i}\frac{\partial S_W}{\partial x^j} \right)^2 , \tag{13}$$

а само уравнение поля запишется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\overset{o}{g}{}^{ij} \, \frac{\partial S_W}{\partial x^j} \left(\overset{o}{g}{}^{km} \, \frac{\partial S_W}{\partial x^k}\frac{\partial S_W}{\partial x^m} \right) \right] = 0 \,. \tag{14}$$

Решение уравнения (14) $S_W(x)$ будем называть *Мировой функцией.* Если Мировая функция известна, воспользуемся соотношением (12) для получения поля коэффициента расширения-сжатия $\kappa(x)$:

$$\kappa(x) = \sqrt{\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^2} \,. \tag{15}$$

В работах [3], [4] и [2] не было сформулировано различие между действием как функцией координат $S(x)$ и Мировой функцией $S_W(x)$. Сделаем это для нашей конкретной задачи: действие как функция координат $S(x)$ – это решение уравнения Гамильтона-Якоби (10) при заданной функции $\kappa(x)$, а Мировая функция $S_W(x)$ – это решение полевого уравнения (14), причем скалярное поле $\kappa(x)$ теперь определяется с помощью полученного решения $S_W(x)$ полевого уравнения по формуле (15).

Мировая функция $S_W(x)$ определяет в пространстве x^0, x^1, x^2, x^3 нормальную конгруенцию экстремалей ("геодезических"), которые находятся из уравнений

$$\dot{x}^i = \ \overset{o}{g}{}^{ij} \, \frac{\partial S_W}{\partial x^j} \cdot \lambda(x) \,, \tag{16}$$

где $\lambda(x) > 0$ – произвольная функция, $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$, τ – параметр вдоль кривой, параметр эволюции. В каком-то смысле можно считать, что именно по этим экстремалям движутся частицы самого поля $S_W(x)$, или поля $\kappa(x)$. Таким образом, поле $\kappa(x)$ и конгруэнция геодезических (16) являются самосогласованными.

В любом финслеровом пространстве не только определена классическая механика неких частиц, но и начальные квантово-механические представления.

Обычным образом с заменой функции Гамильтона на функцию Финслера в финслеровом пространстве можно ввести скобки Пуассона, а затем перейти к представлению координат и импульсов в пространстве функций состояния $\Psi(x)$ (волновых функций) как эрмитовых операторов (наблюдаемых), заменив скобки Пуассона коммутаторами, но при этом надо учитывать зависимость элемента объема от точки пространства, если таковая имеется. В нашем конкретном случае в координатном представлении

$$p_i \to \hat{p}_i = i\hbar \frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial}{\partial x^i}\kappa^2 \qquad \Rightarrow \qquad [\hat{p}_i, x^j] = i\hbar\delta^i_j \,, \tag{17}$$

так как элемент объема в пространстве x^0, x^1, x^2, x^3 имеет вид

$$dV = \kappa^4 \, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \,. \tag{18}$$

При таком подходе возникает ряд проблем, связанных с интерпретацией самой волновой функции $\Psi(x)$ и величины $\overline{\Psi}(x)\Psi(x)$, а также с тем, что энергия и время становятся наблюдаемыми. Эти проблемы в данной работе обсуждаться не будут, так как нас будет интересовать только задача на собственные значения.

При переходе от классической механики к квантовой механике тангенциальное уравнение индикатрисы для нерелятивистских частиц переходит в уравнение Шредингера, а для релятивистских частиц – в аналог уравнения Клейна-Гордона

$$\Phi(\hat{p};x)\Psi(x)=0\,, \tag{19}$$

где $\Psi(x)$ – функция состояния физической системы. Это уравнение является линейным уравнением в частных производных в том смысле, что любая линейная комбинация решений опять же является решением уравнения (19). В нашем конкретном случае пространства, конформно связанного с пространством Минковского, уравнение (19) принимает вид

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\kappa^2\,\Psi=-\frac{\kappa^4}{\hbar^2}\,\Psi\,. \tag{20}$$

2 Частное решение

Стационарное пространственно сферически симметричное поле $\kappa(x)$ можно получить, если искать решение уравнения (14) в виде

$$S_W=p_0x^0-\psi(r)\,, \tag{21}$$

где $p_0>0$, а

$$r\equiv\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}\,; \tag{22}$$

тогда для неизвестной функции ψ получим уравнение

$$\frac{d}{dr}\left\{r^2\frac{d\psi}{dr}\left[p_0^2-\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2\right]\right\}=0\,. \tag{23}$$

Интегрирование по r приводит к соотношению

$$\xi^2\frac{d\psi}{d\xi}\left[1-\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2\right]=\pm\,\alpha^2\,, \tag{24}$$

$\xi\equiv p_0r$, $\alpha>0$ – постоянная, а знак выберем из неких дополнительных требований.

Отметим, что из условия

$$\kappa^2=p_0^2-\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2>0\qquad\Rightarrow\qquad\left|\frac{d\psi}{d\xi}\right|<1\,. \tag{25}$$

Уравнения, которые определяют нормальную конгруэнцию экстремалей, соответствующую функции $S_W(x)$, имеют следующий вид:

$$\dot{x}^0=p_0\cdot\lambda\,,\qquad \dot{x}^\mu=\frac{d\psi}{dr}\frac{x^\mu}{r}\cdot\lambda\,, \tag{26}$$

$\mu=1,2,3$; а для радиуса –

$$\frac{dr}{dx^0}=\frac{1}{p_0}\frac{d\psi}{dr}\,. \tag{27}$$

Кривые, определяемые этими уравнениями, можно рассматривать как траектории движения неких частиц, "формирующих" (определяющих) поле $\kappa(x)$ и движущихся по лучам, исходящих из начала координат. Условие (25) дает ограничение на скорость таких частиц: их скорость всегда меньше скорости света. Продифференцируем последнюю формулу по x^0, получим

$$\frac{d^2\,r}{(dx^0)^2} = \frac{1}{p_0^2}\,\frac{d\psi}{dr}\,\frac{d^2\psi}{dr^2}\,. \tag{28}$$

Таким образом, для того, чтобы поле $\kappa(x)$ носило характер притяжения к началу координат с увеличением модуля скорости при приближении к центру, необходимо, начиная хотя бы с r_* $(r > r_*)$, выполнение условий:

$$-1 < \frac{d\psi}{dr} < 0\,, \qquad\qquad \frac{d^2\psi}{dr^2} > 0\,. \tag{29}$$

Из анализа уравнения (24), следует, что реализовать условия (29) возможно только при выборе нижнего знака в формуле (24). Решая кубическое уравнение, получим

$$\frac{d\psi}{d\xi} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)\right]\,. \tag{30}$$

Области определения и значений функции (14) задаются следующими неравенствами:

$$0 \;<\; \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\xi^2} \;\leq\; 1\,, \qquad -\frac{1}{\sqrt{3}} \;\leq\; \frac{d\psi}{d\xi} \;<\; 0\,, \tag{31}$$

причем при изменении ξ от $\xi_0 \equiv \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\cdot\alpha$ до $+\infty$ функция $\dfrac{d\psi}{d\xi}$ монотонно возрастает от $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ до -0. Таким образом, максимально большая скорость, которой достигают частицы, "формирующие" поле $\kappa(x)$, равна $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot c = 0.57735027\cdot c$, а значит и другие (пробные) частицы в нашей геометрии могут достигать, вообще говоря, таких скоростей, то есть механика частиц в нашем пространстве является релятивистской. Эта максимально большая скорость частиц, "формирующих" поле, достигается именно на границе "дыры", радиус которой равен

$$r_0 \equiv \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\frac{\alpha}{p_0}}$$

и внутри которой поля $\kappa(x)$, $S_W(x)$ отсутствуют.

Если $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\dfrac{\alpha^2}{\xi^2} \ll 1}$, то функцию (30) можно заменить простым выражением

$$\frac{d\psi}{d\xi} \simeq -\frac{\alpha^2}{\xi^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha^4}{\xi^4}\right)\,. \tag{32}$$

Это выражение качественно работает и в остальной области определения функции (30), причем самое большое отклонение имеет место в точке $\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\xi^2} = 1$: точное значение равно $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, а приближенная формула (32) дает $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Правда, производная от правой части (30) на границе "дыры" обращается в $+\infty$, а производная от правой части (32) на границе "дыры" имеет конечное значение.

Если $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\dfrac{\alpha^2}{\xi^2} \simeq 1}$, то функцию (30) можно заменить простым выражением

$$\frac{d\psi}{d\xi} \simeq -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\xi^2}} + \mathcal{O}\left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)\,. \tag{33}$$

Итак, найдено стационарное сферически симметричное поле $\kappa(x)$,

$$\kappa(r) = p_0\sqrt{1-\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2}\,, \tag{34}$$

где производная $\frac{d\psi}{d\xi}$ определяется формулой (30). Это поле является полем притяжения. Оно определено во всем пространстве, кроме области $r < r_0$.

В выше приведенных формулах явно выделяется удобная переменная ϱ,

$$\varrho \equiv \frac{r}{r_0}\,, \qquad \text{где} \qquad r_0 \equiv \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha}{p_0}}\,, \qquad 1 \le \varrho < +\infty\,. \tag{35}$$

Используя эту переменную, перепишем ряд последних формул:

$$1 \le \varrho < +\infty\,, \qquad \frac{d\psi}{d\xi} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left[\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)\right]\,, \tag{36}$$

$$1 \ll \varrho\,, \qquad \frac{d\psi}{d\xi} \simeq -\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{1}{\varrho^2}\,, \tag{37}$$

$$\varrho \simeq 1\,, \qquad \frac{d\psi}{d\xi} \simeq -\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{1}{\varrho^2}}\,. \tag{38}$$

3 Постановка задачи на собственные значения

Запишем уравнение (20) в сферических координатах r, ϑ, φ, приняв, что поле $\kappa(x)$ задается выражением (34), а волновую функцию будем искать в виде [5]:

$$\Psi = \frac{1}{\kappa^2}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{E}{c}x^0\right)R(r)\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\,, \tag{39}$$

$l = 0, 1, 2...,\quad m = -l, ..., l$ – квантовые числа момента количества движения. Подставим (39) в уравнение (20), получим

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left[\frac{E^2}{\hbar^2c^2}-\frac{p_0^2}{\hbar^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{p_0^2}{\hbar^2}\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2\right]R = 0\,. \tag{40}$$

Перейдем к безразмерному радиусу ϱ (35), тогда уравнение для радиальной части функции состояния запишется следующим образом:

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2}+\frac{2}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho}+\left[\frac{E^2r_0^2}{\hbar^2c^2}-\frac{p_0^2r_0^2}{\hbar^2}-\frac{l(l+1)}{\varrho^2}+\frac{p_0^2r_0^2}{\hbar^2}\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2\right]R = 0\,. \tag{41}$$

Введем обозначения для двух безразмерных величин:

$$\mathcal{E} \equiv \frac{E^2r_0^2}{\hbar^2c^2}-\frac{p_0^2r_0^2}{\hbar^2} \equiv \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\hbar^2}\right)\cdot\left(\frac{E^2}{c^2p_0^2}-1\right)\,, \qquad \mu \equiv \frac{4}{3}\frac{p_0^2r_0^2}{\hbar^2} \equiv \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\hbar^2}\right)\,. \tag{42}$$

Тогда

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2}+\frac{2}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho}+\left\{\mathcal{E}-\frac{l(l+1)}{\varrho^2}+\mu\cos^2\left[\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)\right]\right\}R = 0\,. \tag{43}$$

Это уравнение, по форме совпадающее с уравнением Шредингера [5] для радиальной части волновой функции нерелятивистской частицы, находящейся в центрально-симметричном поле притяжения с потенциалом, который (с точностью до постоянного множителя) на бесконечности ведет себя как

$$U \simeq -\frac{\mu}{9}\frac{1}{\varrho^4} \tag{44}$$

и монотонно убывает до значения

$$U_{min} = -\frac{\mu}{4} \qquad \text{при} \qquad \varrho = 1\,, \tag{45}$$

то есть на границе "дыры". Так как при $\varrho < 1$ никакого поля нет, что в каком-то смысле соответствует бесконечно глубокой потенциальной яме, то для всех волновых функций необходимо выполнение граничного условия

$$R(1) = 0\,. \tag{46}$$

Таким образом, можно ожидать (это следует из общей теории [5]) конечного числа (или ни одного) локализованных (связанных) состояний, которые обязательно должны иметь дискретный спектр отрицательных значений параметра $\mathcal{E}$.

Так как все неквантовые частицы, которые в каком-то смысле порождают поле $\kappa(x)$, двигаются по траекториям с нулевым моментом количества движения, то волновые функции с $l = 0$, на наш взгляд, будут отвечать квантово-механической задаче в самосогласованном поле. Решения с $l \neq 0$ и $\mathcal{E} < 0$ можно рассматривать как захват самосогласованным полем некой "внешней" пробной частицы или как локализованное возмущение самосогласованного поля.

Если искать решение уравнения (43) в виде

$$R(\varrho) = \frac{y(\varrho)}{\varrho}\,, \tag{47}$$

то получим для неизвестной функции $y(\varrho)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{d\varrho^2} + \left\{\mathcal{E} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} + \mu\cos^2\left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)\right]\right\} y = 0\,. \tag{48}$$

Из этого уравнения для $\mathcal{E} < 0$ с учетом формулы (44) следует, что при $\varrho \to \infty$ функция $y(\varrho)$ связанного состояния ведет себя следующим образом:

$$y = const' \cdot \rho^{const} \exp\left(-\sqrt{-\mathcal{E}}\,\varrho\right)\,, \tag{49}$$

то есть стремится экспоненциально к нулю при $\varrho \to \infty$. Граничное же условие (46) заменяется условием

$$y(1) = 0\,. \tag{50}$$

Предположим, что задача на собственные значения (48) – (50) решена и найден спектр собственных значений:

$$\mathcal{E} = -\sigma_0^2,\ -\sigma_1^2,\ \ldots\ -\sigma_{k-1}^2\,, \qquad \sigma_i \in \{\sigma_0,\ \sigma_1,\ \ldots\ \sigma_{k-1}\}\,. \tag{51}$$

Тогда из формул (42) получим значения величины

$$\frac{E_i}{cp_0} = \sqrt{1 - \frac{4\sigma_i^2}{3\mu}}\,. \tag{52}$$

Воспользовавшись формулой (37), можно заменить точный потенциал на качественно похожий, тогда уравнение (48) несколько упростится:

$$\frac{d^2y}{d\varrho^2} + \left\{ \mathcal{E} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} + \frac{\mu_{eff}}{\varrho^4} \right\} y = 0\,, \tag{53}$$

где

$$\mu_{eff} = \frac{1}{4}\mu\,, \tag{54}$$

если мы хотим получить точную глубину потенциала на границе "дыры" $\varrho = 1$, и

$$\mu_{eff} = \frac{1}{9}\mu\,, \tag{55}$$

если мы хотим получить точное поведение потенциала на бесконечности. В общем случае аналитическое решение уравнения (53) не известно, при $\mathcal{E} = 0$ и $l = 0$ такое решение есть

$$y = C\,\rho\,\sin\left(\frac{\sqrt{\mu_{eff}}}{\varrho} + \varphi_0 \right)\,, \tag{56}$$

где C, φ_0 – постоянные интегрирования. Это решение не является локальным ни при каких значениях параметров, но если все же формально потребовать выполнение граничных условий

$$R(1) = 0\,, \qquad R(+\infty) = 0\,, \tag{57}$$

то получим

$$\varphi_0 = 0\,, \qquad \mu_{eff} = \pi^2 m^2\,; \qquad m = 1, 2, 3, ... \tag{58}$$

Даже при $l = 0$ не удалось точно решить задачу (48) – (50) на собственные значения σ_i, и поэтому пришлось применять приближенный и численный методы.

4 Квазиклассика

Так как формально уравнение (43) совпадает с уравнением Шредингера [5] для радиальной части волновой функции нерелятивистской частицы, находящейся в центрально-симметричном поле притяжения, то для решения задачи (48) – (50) на собственные значения σ_i могут быть применены те же методы, в частности, квазиклассический подход, хотя бы для качественного описания ожидаемых точных собственных значений.

С учетом того, что точка $\varrho = 1$ не является точкой поворота и нас интересуют собственные значения самосогласованной задачи, правило квантования Бора для

$$\frac{E^2}{c^2} - p_0^2 < 0 \qquad \text{и} \qquad l = 0 \tag{59}$$

записывается следующим образом:

$$\frac{1}{\hbar}\int\limits_{r_0}^{r_*} \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - p_0^2 + p_0^2\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2}\,dr = \pi\left(n + \frac{3}{4}\right)\,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, ... \tag{60}$$

Здесь r_0 (35) – границы "дыры", а r_* – корень уравнения

$$\frac{E^2}{c^2} - p_0^2 + p_0^2\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2 = 0\,. \tag{61}$$

Перейдем в формуле (60) от интегрирования по переменной r к интегрированию по переменной ϱ (35), получим

$$\int\limits_1^{\varrho_*} \sqrt{\mathcal{E} + \mu \cos^2 \left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{1}{\varrho^2} \right) \right]} \; d\varrho = \pi \left(n + \frac{3}{4} \right) , \qquad n = 0, 1, 2, 3, ... \tag{62}$$

Разделим левую и правую части на $\sqrt{\mu}$, введем обозначение

$$-\frac{\mathcal{E}}{\mu} \equiv \lambda^2 \tag{63}$$

и перепишем формулу (62)

$$\int\limits_1^{\varrho_*} \sqrt{-\lambda^2 + \cos^2 \left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{1}{\varrho^2} \right) \right]} \; d\varrho = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \left(n + \frac{3}{4} \right) , \qquad n = 0, 1, 2, 3, ... , \tag{64}$$

где

$$\varrho_* = \frac{1}{\sqrt{\cos(3 \arccos \lambda - \pi)}} , \qquad 1 < \varrho_* < +\infty . \tag{65}$$

Безразмерные энергии связанных состояний будут выражаться через собственные значения $\lambda_i \in \{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{k-1}\}$ следующим образом:

$$\frac{E_i}{c p_0} = \sqrt{1 - \frac{4}{3} \lambda_i^2} . \tag{66}$$

Так как $1 < \varrho_* < \infty$ находится как корень уравнения

$$-\lambda^2 + \cos^2 \left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{1}{\varrho^2} \right) \right] = 0 ,$$

из этого следует, что

$$0 < \lambda_i < \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 1 > \frac{E_i}{c p_0} > \sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 0.81649658 . \tag{67}$$

Обозначим интеграл в левой части формулы (64) как $F(\lambda)$, тогда формула (64) перепишется следующим образом:

$$F(\lambda) = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \left(n + \frac{3}{4} \right) , \qquad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Заметим, что при $\lambda \neq 0$, $F(\lambda) < F(0)$, причем интеграл $F(0)$ сходится и равен $F(0) \simeq 0,34843550$, поэтому, если параметр μ задан (фиксирован), то для связанных состояний

$$F(0) > \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \left(n + \frac{3}{4} \right) , \qquad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

и число связанных состояний k определяется неравенством

$$k < b \equiv \frac{F(0)\sqrt{\mu}}{\pi} + \frac{1}{4} , \tag{68}$$

то есть, если b – целое, тогда $k = b - 1$, если b – не целое, то k – целая часть числа b. Если же

$$\frac{3}{4} \geq \frac{F(0)\sqrt{\mu}}{\pi} \qquad \Rightarrow \qquad \mu \leq \left[\frac{3\pi}{4F(0)}\right]^2 \simeq 45,7275 \ ,$$

локализованные состояния отсутствуют. Можно сказать, что чем больше μ, тем более плотно располагаются значения $\frac{E_i}{cp_0}$, относящиеся к локализованным состояниям, на отрезке $\left[1; \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$.

Так как задача самосогласованная, то должен существовать способ каким-то образам определить параметр μ в рамках задачи на собственные значения. Можно предложить минимум две гипотезы:

1) возникновение нового связанного (локализованного) состояния;

2) состояние $\lambda = 0$ является квазисвязанным и квазиклассическим без точек поворота.

4.1 Возникновение нового локализованного состояния

Будем предполагать, что параметр μ имеет дискретный спектр значений, причем каждое значение соответствует возникновению нового локализованного состояния, тогда из формулы (64) получим этот спектр значений:

$$\mu_k = \left[\frac{\pi\left(k + \frac{3}{4}\right)}{F(0)}\right]^2 , \qquad k = 1, 2, 3, \ldots . \tag{69}$$

Уравнение (64) для определения λ_i в этом случае принимает вид

$$\frac{F(\lambda)}{F(0)} = \frac{n + \frac{3}{4}}{k + \frac{3}{4}} < 1 \,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, ..., (k-1)\,; \quad k = 1, 2, 3 \ldots . \tag{70}$$

Число связанных (локализованных) состояний равно k.

В случае $k = 1$ существует только одно локализованное состояние $n = 0$, при этом $\frac{n + \frac{3}{4}}{k + \frac{3}{4}} = \frac{3}{7}$, численный расчет дает

$$\lambda_0 \simeq 0,0871\,, \qquad \frac{E_0}{cp_0} \simeq 0,9949\,. \tag{71}$$

При $k = 2$ существует два локализованных состояния $n = 0$ с $\frac{n + \frac{3}{4}}{k + \frac{3}{4}} = \frac{3}{11}$ и $n = 1$ с $\frac{n + \frac{3}{4}}{k + \frac{3}{4}} = \frac{7}{11}$, при этом численный расчет дает

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_0 \simeq 0,1499\,, & \dfrac{E_0}{cp_0} \simeq 0,9849\,, \\ \lambda_1 \simeq 0,003397\,, & \dfrac{E_1}{cp_0} \simeq 0,9992\,, \end{array}\right\} \quad \frac{E_0}{E_1} \simeq 0.9857\,. \tag{72}$$

4.2 Квазисвязанное квазиклассическое состояние $\lambda = 0$ без точек поворота

Выше было показано, что для упрощенного потенциала, который качественно описывает точный потенциал, имеет место уравнение (53). Требуя существования квазилокального состояние $\mathcal{E} = 0$, $l = 0$ с граничными условиями (57), был получен спектр значений (58) для параметра μ_{eff}. Для того, чтобы получить такой спектр значений с помощью квантования Бора, отметим отсутствие точек поворота для такого состояния, поэтому

$$\sqrt{\mu_{eff}}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{\varrho^2}\,d\varrho=\pi m\,,\qquad m=1,2,3,... \tag{73}$$

А так как

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{\varrho^2}\,d\varrho=1,$$

квантование по правилу Бора без точек поворота совпадает с точным квантованием (58). Поэтому в случае точного потенциала, имеем

$$\sqrt{\mu_k}=\frac{\pi k}{F(0)}\,,\qquad k=1,2,3,... \tag{74}$$

и

$$\frac{F(\lambda)}{F(0)}=\frac{n+\frac{3}{4}}{k}<1\,,\qquad n=0,1,2,3,...,(k-1)\,;\quad k=1,2,3.... \tag{75}$$

При этом k – число связанных состояний.

В случае $k=1$ существует только одно локализованное состояние $n=0$, при этом $\dfrac{n+\frac{3}{4}}{k}=\dfrac{3}{4}$, численный расчет дает

$$\lambda_0\simeq0,015923\,,\qquad \frac{E_0}{cp_0}\simeq0,99987\,. \tag{76}$$

При $k=2$ существует два локализованных состояния $n=0$ с $\dfrac{n+\frac{3}{4}}{k}=\dfrac{3}{8}$ и $n=1$ с $\dfrac{n+\frac{3}{4}}{k}=\dfrac{7}{8}$, при этом численный расчет дает

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda_0\simeq0,10592\,, & \dfrac{E_0}{cp_0}\simeq0,99249\,,\\[2ex] \lambda_1\simeq0,003966\,, & \dfrac{E_1}{cp_0}\simeq0,9999895\,,\end{array}\right\}\quad \frac{E_0}{E_1}\simeq0,992503\,. \tag{77}$$

5 Заключение

Результаты данной работы показывают насколько богатой является теория поля, предложенная в статье [2] даже для таких "простых" римановых пространств, как пространства, конформно связанные с пространством Минковского. Из условий: стационарности поля коэффициента растяжения-сжатия, его пространственной сферической симметрии и наличия при достаточно больших r "сил" притяжения – однозначно получается решение с вырезанной "дырой" $(r<r_0)$, в которой поле отсутствует и которая является аналогом понятия черной дыры в ОТО. Для такого поля возможна постановка квантово-механической задачи на собственные значения.

Интересно применить теорию поля [2] не только к различным римановым пространствам, но и к финслеровым неквадратичным, например, пространствам, конформно связанным с пространством H_4, которое обладает метрикой Бервальда-Моора.

Литература

[1] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.-Л.: ОГИЗ, 1947.

[2] Гарасько Г. И., Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (6), т. 3 (2006), стр. 6 – 20.

[3] Гарасько Г. И., О Мировой функции и связи между геометриями. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (5), т. 3 (2006), стр. 3 – 18.

[4] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г., Конструирование псевдоримановой геометрии на основе геометрии Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (5), т. 3 (2006), стр. 19 – 27.

[5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика. Часть I (Нерелятивистская теория), М.-Л., ОГИЗ, 1948.

On a particular stationary solution of the field equation in the space conformally related to the Minkowski space

G. I. Garas'ko

Electrotechnical institute of Russia
gri9z@mail.ru

The space conformally related to the Minkowski space admits a unique scalar field, for which we write the field equation and we find a particular special solution: the spherically symmetric stationary space with the "force"of gravity oriented towards the center. The solution is defined only outside a spherical domain of radius r_0. On the border of this domain, the material particles which are moving from infinity with zero emerging speed and null momentum of movement reach $\frac{1}{\sqrt{3}}$ of the speed of light, i.e., this domain might be called as the analogue of a "black hole". For obtaining the correspondent field, are formulated a quantum mechanics problem on the eigenvalues. Under several assumptions, are obtained several eigenvalues, by means of the quasi-classical numerical method.

Key-words: conformal transformation, Minkowski space.
MSC: 51B20, 53A30, 34L15, 35Q40.

ПРОСТРАНСТВО, КОНФОРМНО СВЯЗАННОЕ С ПРОСТРАНСТВОМ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Г. И. Гарасько

ГУП ВЭИ, Россия, Москва
gri9z@mail.ru

Пространство, конформно связанное с пространством Бервальда-Моора, обладает единственным скалярным полем, для которого записывается двумерные уравнение поля и находится частные специальные решения: 1) с индикатрисой, экспоненциально расширяющейся во времени, 2) со стационарным полем коэффициента расширения-сжатия и "силой" притяжения к центру. Для второго решения сформулирована квантово-механическая задача на собственные значения. В качестве второй, дополнительной к временной, переменной используется негладкая переменная – аналог радиуса сферической системы координат в трехмерном евклидовом пространстве.

Ключевые слова: метрика Бервальда-Моора, Финслеровы пространства.

1 Введение

Пространство ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел H_4 является метрическим пространством с метрикой Бервальда-Моора, поэтому все изложенное в этой работе в той же мере относится к пространству поличисел H_4, которые изоморфны алгебре квадратных диагональных действительных матриц 4×4.

Пространство Минковского x^0, x^1, x^2, x^3 и пространство Бервальда-Моора в координатах, соответствующих специальному "ортонормированному" базису, экспериментально неразличимы, если измерения производятся с точностью до вторых степеней (включительно) отношений компонент пространственных скоростей к скорости света. В силу этого вопрос о том, какова геометрия микромира, где работает квантовая механика, и какова геометрия мегамира, где, как считается, работает ОТО, остается, вообще говоря, открытым. Вполне возможно, что микромир и мегамир ближе к пространству Бервальда-Моора, а макромир остается за пространством Минковского с группой симметрии Лоренца. Это вполне соответствует гипотезе Д. Павлова [1] о физической значимости алгебры поличисел H_4.

Пространство $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, конформно связанное с пространством Бервальда-Моора, является финслеровым пространством [2] и по определению имеет метрическую функцию следующего вида:

$$L(d\xi;\xi) = \kappa(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,, \tag{1}$$

где $\kappa(\xi) > 0$ – единственное независимое действительное скалярное поле в этом пространстве. Длина отрезка кривой $\xi^i = \xi^i(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ – параметр вдоль кривой, вычисляется в таком пространстве с помощью интеграла вдоль кривой

$$l_{1,2} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \kappa(\xi)\sqrt[4]{\dot{\xi}^1\dot{\xi}^2\dot{\xi}^3\dot{\xi}^4}\ d\tau\,, \tag{2}$$

где $\dot{\xi}^i \equiv \dfrac{d\xi^i}{d\tau}$. Компоненты обобщенного импульса находятся по формулам:

$$p_i = \frac{1}{4}\kappa(\xi)\frac{\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}}{d\xi^i}\,. \tag{3}$$

Они связаны между собой соотношением

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4}\,, \tag{4}$$

которое принято называть тангенциальным уравнением индикатрисы [2] и записывать следующим образом:

$$\Phi(p;\xi) = 0\,. \tag{5}$$

Функцию $\Phi(p;\xi)$ будем называть *функцией Финслера,* она определяется не однозначно, а с точностью до перехода от одного тангенциального уравнения индикатрисы к любому другому эквивалентному уравнению, записанному в виде (5).

Формулы (1) – (4) имеют такой вид только в специальном базисе, который принято называть изотропным. Эти же формулы можно записать в ковариантном виде, для этого необходимо использовать метрический тензор с четырьмя нижними индексами в формулах (1) – (3) и соответствующий тензор с четырьмя верхними индексами для формулы (4). В данной работе такие тензоры использоваться не будут.

Если функция $\kappa(\xi)$ известна, то определены метрическая функция $L(d\xi;\xi)$ и функция Финслера $\Phi(p;\xi)$, а действие как функция координат $S(\xi)$ может быть найдено как решение уравнения Гамильтона-Якоби

$$\Phi\left(\frac{\partial S}{\partial \xi};\xi\right) = 0\,. \tag{6}$$

Тогда уравнения для нахождения экстремалей ("геодезических") записываются или как уравнения Лагранжа-Эйлера

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L(\dot{\xi};\xi)}{\partial \dot{\xi}^i} - \frac{\partial L(\dot{\xi};\xi)}{\partial \xi^i} = 0\,, \tag{7}$$

или в каноническом виде

$$\dot{\xi}^i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\cdot\lambda'(p;\xi)\,, \qquad p_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i}\cdot\lambda'(p;\xi)\,, \tag{8}$$

где $\lambda'(p;\xi) > 0$ – произвольная функция, или в виде

$$\dot{\xi}^i = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\right|_{p_i = \frac{\partial S}{\partial \xi^i}}\cdot\lambda(\xi)\,, \tag{9}$$

где $\lambda(\xi) > 0$ – некоторая функция.

Формулы (6) – (9) справедливы для любого финслерова пространства. В нашем конкретном случае пространства $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, конформно связанного с пространством Бервальда-Моора, уравнение Гамильтона-Якоби (6) есть

$$\frac{\partial S}{\partial \xi^1}\frac{\partial S}{\partial \xi^2}\frac{\partial S}{\partial \xi^3}\frac{\partial S}{\partial \xi^4} = \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4}\,, \tag{10}$$

а уравнения (9) для нахождения экстремалей ("геодезических") запишутся как

$$\dot{\xi}^i = \frac{\dfrac{\partial S}{\partial \xi^1}\dfrac{\partial S}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial S}{\partial \xi^3}\dfrac{\partial S}{\partial \xi^4}}{\dfrac{\partial S}{\partial \xi^i}} \cdot \lambda(\xi)\,. \tag{11}$$

Можно считать, что экстремали ("геодезические") являются траекториями движения некоторых материальных объектов (частиц). Таким образом, в любом финслеровом пространстве (в частности, нашем пространстве $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$) определена классическая механика неких материальных частиц вместе с лагранжевым формализмом (7), аналогом гамильтонового формализма (8) с заменой функции Гамильтона на функцию Финслера и методом Гамильтона-Якоби (6), (9).

Если следовать гипотезе *самодостаточности геометрии* [3]: все поля, входящие в метрическую функцию, должны удовлетворять принципу экстремальности любого объема – то поле $\kappa(\xi)$ не может быть произвольным.

Скалярное действительное поле $\kappa(\xi)$ всегда можно выразить через другое действительное скалярное поле $S_W(\xi)$, которое связано с полем $\kappa(\xi)$ соотношением

$$\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4} = \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4}\,, \tag{12}$$

поэтому лагранжиан для получения уравнения поля [3] будет иметь вид

$$\mathfrak{L} = const \cdot \kappa^4(\xi) \equiv const \cdot 4^4 \cdot \frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}\,, \tag{13}$$

а само уравнение поля запишется следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left[\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}\right] + \frac{\partial}{\partial \xi^2}\left[\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial \xi^3}\left[\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}\right] + \frac{\partial}{\partial \xi^4}\left[\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\right] = 0\,.\end{gathered} \tag{14}$$

Решение уравнения (14) $S_W(\xi)$ будем называть *Мировой функцией.* Если Мировая функция известна, то всегда можно воспользоваться соотношением (12) для получения поля коэффициента расширения-сжатия $\kappa(\xi)$:

$$\kappa(\xi) = 4\sqrt[4]{\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}}\,. \tag{15}$$

Действие как функция координат $S(\xi)$ – это решение уравнения Гамильтона-Якоби (10) при заданной функции $\kappa(\xi)$, а Мировая функция $S_W(\xi)$ – это решение полевого уравнения (14), причем скалярное поле $\kappa(\xi)$ в этом случае определяется с помощью полученного решения $S_W(\xi)$ полевого уравнения по формуле (15).

Мировая функция $S_W(\xi)$ определяет в пространстве $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ нормальную конгруэнцию экстремалей ("геодезических"), которые находятся из уравнений

$$\dot{\xi}^i = \frac{\dfrac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\dfrac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\dfrac{\partial S_W}{\partial \xi^4}}{\dfrac{\partial S_W}{\partial \xi^i}} \cdot \lambda(\xi)\,, \tag{16}$$

где $\lambda(\xi) > 0$ – произвольная функция, $\dot{\xi}^i \equiv \dfrac{d\xi^i}{d\tau}$, τ – параметр вдоль кривой, параметр эволюции. В каком-то смысле можно считать, что именно по этим экстремалям движутся частицы самого поля $S_W(\xi)$, то есть поля $\kappa(\xi)$. Таким образом, поле $\kappa(\xi)$ и конгруэнция геодезических (16) являются самосогласованными.

В любом финслеровом пространстве не только определена классическая механика неких частиц, но и начальные квантово-механические представления.

Так как ξ^i и p_i являются канонически сопряженными величинами, то обычным образом с заменой функции Гамильтона на функцию Финслера в финслеровом пространстве можно ввести скобки Пуассона, а затем перейти к представлению координат и импульсов в пространстве функций состояния $\Psi(\xi)$ (волновых функций) как эрмитовых операторов (наблюдаемых), заменив скобки Пуассона коммутаторами, но при этом надо учитывать зависимость элемента объема от точки пространства, если таковая имеется. В нашем конкретном случае в координатном представлении

$$p_i \to \hat{p}_i = i\hbar \frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial}{\partial \xi^i}\kappa^2 \qquad \Rightarrow \qquad [\hat{p}_i, \xi^j] = i\hbar\delta^i_j\,, \tag{17}$$

так как элемент объема в пространстве $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ [3] имеет вид

$$dV = \kappa^4\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4\,. \tag{18}$$

При таком подходе возникает ряд проблем, связанных с интерпретацией самой волновой функции $\Psi(\xi)$ и величины $\overline{\Psi}(\xi)\Psi(\xi)$, а также с тем, что энергия и время становятся наблюдаемыми. Эти проблемы в данной работе обсуждаться не будут, так как нас будет интересовать только задача на собственные значения.

При переходе от классической механики к квантовой механике тангенциальное уравнение индикатрисы для нерелятивистских частиц переходит в уравнение Шредингера, а для релятивистских частиц – в аналог уравнения Клейна-Гордона; в общем виде с использованием функции Финслера такое уравнение имеет вид

$$\Phi(\hat{p};\xi)\Psi(\xi) = 0\,, \tag{19}$$

где $\Psi(\xi)$ – функция состояния физической системы. Это уравнение является линейным уравнением в частных производных в том смысле, что любая линейная комбинация решений опять же является решением уравнения (19). В нашем конкретном случае пространства, конформно связанного с пространством Минковского, уравнение (19) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^4}{\partial\xi^1\partial x^2\partial\xi^3\partial\xi^4}\kappa^2\,\Psi = \frac{\kappa^6}{4^4\hbar^4}\,\Psi\,. \tag{20}$$

2 Специальные переменные в пространстве Бервальда-Моора

Уравнение (14) является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка. Для пространства, конформно связанного с пространством Минковского, аналогичные уравнения поля были решены в работах [3] и [4] в предположении, что Мировая функция зависит только от времени x^0 и радиуса $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а также при дополнительном требовании на сам вид Мировой функции:

1)

$$S_W = \exp(-\gamma x^0)\psi(r)\,, \tag{21}$$

где γ – постоянная;

2)

$$S_W = p_0 x^0 - \psi(r)\,, \tag{22}$$

где p_0 – постоянная, а $\psi(r)$ – неизвестная функция одной действительной переменной.

В группу симметрии пространства Бервальда-Моора не входит в качестве подгруппы группа трехмерных вращений $SO(3)$, поэтому автоматически перенести подход к решению уравнению поля, используемый в работах [3], [4], нельзя.

Изотропный базис, в котором записаны формулы (1) – (4), (10) – (16) и (20), удобен для расчетов, но для физических приложений следует использовать "ортонормированный" базис (или аналогичный ему), в котором координаты x^0, x^1, x^2, x^3 связаны с координатами $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ в изотропном базисе формулами

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= \tfrac{1}{4}\left(\xi^1+\xi^2+\xi^3+\xi^4\right)\,,\\ x^1 &= \tfrac{1}{4}\left(\xi^1+\xi^2-\xi^3-\xi^4\right)\,,\\ x^2 &= \tfrac{1}{4}\left(\xi^1-\xi^2+\xi^3+\xi^4\right)\,,\\ x^3 &= \tfrac{1}{4}\left(\xi^1-\xi^2-\xi^3+\xi^4\right)\,,\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \xi^1 &= x^0+x^1+x^2+x^3\,,\\ \xi^2 &= x^0+x^1-x^2-x^3\,,\\ \xi^3 &= x^0-x^1+x^2+x^3\,,\\ \xi^4 &= x^0-x^1-x^2+x^3\,,\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

и в котором принимается, что $x^0 \equiv ct$, где c – скорость света, t – время, а x^1, x^2, x^3 – пространственные координаты. Классический алгоритм ОТО [5] получения пространственного расстояния между двумя близкими и покоящимися относительно друг друга наблюдателями (параллельными прямыми мировыми линиями) для метрики Бервальда-Моора в координатах x^0, x^1, x^2, x^3 (23) дает метрику Богословского-Геннера [6] в пространстве наблюдателей x^1, x^2, x^3 (в "истинном" трехмерном пространстве):

$$dl = |dx^\alpha| + |dx^\beta|\,; \qquad \text{причем} \qquad |dx^\gamma| \le |dx^\alpha|, |dx^\beta|\,; \tag{24}$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$; $\alpha \ne \beta$, $\alpha \ne \gamma$, $\beta \ne \gamma$. Уравнение индикатрисы в касательном пространстве такого метрического пространства определяет негладкую гиперповерхность, которая является ромбододекаэдром [7]. Это пространство x^1, x^2, x^3 является финслеровым в некотором расширенном смысле, так как первые производные от метрической функции по dx^α не являются непрерывными, а вторые не везде существуют, что не вписывается в классическое определение финслерова пространства [2].

В связи с этим в пространстве Бервальда-Моора, как и в пространстве, конформно с ним связанном, в качестве аналога радиуса сферической системы координат можно попытаться использовать следующую величину:

$$r_d = |x^\alpha| + |x^\beta|\,; \qquad \text{причем} \qquad |x^\gamma| \le |x^\alpha|, |x^\beta|\,. \tag{25}$$

Здесь приняты те же соглашения: $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$; $\alpha \ne \beta$, $\alpha \ne \gamma$, $\beta \ne \gamma$. С переменной r_d трудно работать, поэтому проще работать с областями непрерывности – конусами, в каждый из которых попадает одна и только одна грань ромбододекаэдра. Каждому такому конусу удобно сопоставить элемент матрицы 3 × 4:

$$r_d \equiv \hat{X} \equiv (X_{ab}) \equiv \begin{pmatrix} x^2+x^3 & -x^2+x^3 & -x^2-x^3 & x^2-x^3 \\ x^1+x^3 & x^1-x^3 & -x^1-x^3 & -x^1+x^3 \\ x^1+x^2 & -x^1+x^2 & -x^1-x^2 & x^1-x^2 \end{pmatrix}\,, \tag{26}$$

$a \equiv \gamma = 1,2,3$; а индекс $b = 1,2,3,4$ – нумерует квадранты в плоскости (x^α, x^β) при положительном вращении вокруг оси x^γ, начиная с квадранта $(+,+)$. Нам надо так построить рассуждения и преобразования нужных величин, чтобы работать только с первыми производными переменной r_d (и аналогичным негладким переменным) по x^α до тех пор, пока они не будут выражены только через x^0 и r_d.

Введем обозначения еще для четырех матриц того же типа, что и матрица $\hat{X}$:

$$\hat{E} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{E}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{E}_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{E}_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Матрицы $\hat{X}$, $\hat{E}$, $\hat{E}_1$, $\hat{E}_2$, $\hat{E}_3$ и им подобные складываются и умножаются на число, как обычные матрицы, а умножение матрицы на матрицу происходит покомпонентно:

$$\hat{X} \cdot \hat{Y} = \hat{Z} \qquad \Rightarrow \qquad Z_{ab} = X_{ab} Y_{a_- b_-}\,, \tag{28}$$

где $a = a_-$, $b = b_-$, но по ним не происходит суммирования.

Выпишем ряд формул, которые нам понадобятся ниже:

$$\hat{E}_1^3 = \hat{E}_1\,, \qquad \hat{E}_2^3 = \hat{E}_2\,, \qquad \hat{E}_3^3 = \hat{E}_3\,, \tag{29}$$

$$\hat{E}_1^2 + \hat{E}_2^2 + \hat{E}_3^2 = 2\hat{E}\,, \qquad \hat{E}_1 \hat{E}_2 \hat{E}_3 = 0\,, \qquad \left(\hat{E}_1 \hat{E}_2\right)^2 + \left(\hat{E}_1 \hat{E}_3\right)^2 + \left(\hat{E}_2 \hat{E}_3\right)^2 = \hat{E}\,, \tag{30}$$

$$\hat{E} \cdot \frac{\partial F(r_d)}{\partial x^1} = \hat{E}_1 \cdot \frac{dF}{dr_d}\,, \qquad \hat{E} \cdot \frac{\partial F(r_d)}{\partial x^2} = \hat{E}_2 \cdot \frac{dF}{dr_d}\,, \qquad \hat{E} \cdot \frac{\partial F(r_d)}{\partial x^3} = \hat{E}_3 \cdot \frac{dF}{dr_d}\,. \tag{31}$$

В каждом конусе, в котором содержится одна и только одна из граней ромбододекаэдра, вместо координат x^1, x^2, x^3 можно ввести три новые координаты r_d, ϑ, φ, причем r_d – это одна и та же переменная для всех конусов (25), (26), а углы ϑ, φ для каждого конуса свои, например, для $\gamma = 1,\ \ \alpha = 2,\ \ \beta = 3$ и квадранта $(+,+)$ плоскости (x^α, x^β):

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= r_d \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\vartheta\,, \\ x^2 &= r_d \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\vartheta\right), \\ x^2 &= r_d \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\vartheta\right), \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

причем область изменения углов ϑ и φ ограничена неравенствами:

$$0 \le \operatorname{tg}\vartheta \le \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}|\cos\varphi| \cdot \operatorname{tg}\vartheta \ \le \ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\vartheta\,,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\vartheta\,. \tag{33}$$

Вычисляя якобиан такого преобразования координат

$$\frac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(r_d,\ \varphi,\ \vartheta)} = -\frac{r_d^2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\vartheta}{\cos^3\vartheta}\,, \tag{34}$$

получим

$$dx^0dx^1dx^2dx^3 = \left|\frac{D(x^1,x^2,x^3)}{D(r_d,\ \varphi,\ \vartheta)}\right| dx^0dr_d d\vartheta d\varphi = \frac{r_d^2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\vartheta}{\cos^3\vartheta} \cdot dx^0dr_d d\vartheta d\varphi\,. \tag{35}$$

Перепишем лагранжиан (13), опуская постоянный множитель, в координатах x^0, x^1, x^2, x^3 (23):

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} = &\left(\frac{\partial \mathbf{S_W}}{\partial \mathbf{x^0}}\right)^{\mathbf{4}} - 2\left(\frac{\partial \mathbf{S_W}}{\partial \mathbf{x^0}}\right)^{\mathbf{2}} \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^2\right] + \\ &+8\left(\frac{\partial \mathbf{S_W}}{\partial \mathbf{x^0}}\right)\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right) + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^4 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^4 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^4 - \\ &-2\left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

Будем считать, что Мировая функция зависит только от переменных x^0, r_d, то есть $S_W = S_W(x^0, r_d)$. Подставим в формулу (36) производные (31) и воспользуемся свойствами (29) – (30) матриц $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3$, получим

$$\mathfrak{L} = \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^4 - 4\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right)^2. \tag{37}$$

Тогда, учитывая формулу (35), приходим к выражению для элемента объема

$$dV = \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^4 - 4\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right)^2\right] \cdot \frac{r_d^2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\vartheta}{\cos^3\vartheta} \cdot dx^0dr_d d\vartheta d\varphi\,. \tag{38}$$

Интегрируя левую и правую часть этого выражения по углам ϑ, φ в пределах конуса, содержащего одну и только одну грань ромбододекаэдра, и суммируя по всем двенадцати конусам, получим элемент объема в двумерном пространстве x^0, r_d:

$$dV_{r_d} = const \cdot \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^4 - 4\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right)^2\right] \cdot r_d^2 \cdot dx^0dr_d\,. \tag{39}$$

Теперь мы можем записать уравнение поля для Мировой функции $S_W = S_W(x^0, r_d)$ в двумерном пространстве x^0, r_d:

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\left\{\left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^3 - 2\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right)^2\right] r_d^2\right\} - \frac{\partial}{\partial r_d}\left\{2\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right) r_d^2\right\} = 0. \tag{40}$$

Зная решение этого уравнения, получим выражение для коэффициента расширения-сжатия (15):

$$\kappa(x^0, r_d) = \sqrt[4]{\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^4 - 4\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right)^2}\,. \tag{41}$$

Если ввести обобщенные импульсы p_0, p_{r_d}, соответствующие координатам x^0, r_d двумерного пространства, то тангенциальное уравнение индикатрисы (4) согласно формуле (41) следует записать в виде:

$$p_0^4 - 4p_0^2p_{r_d}^2 = \kappa^4(x^0, r_d)\,. \tag{42}$$

3 Модельное космологическое решение с индикатрисой, расширяющейся во времени

Запишем уравнение (40) в предположении, что функция S_W имеет вид

$$S_W(x^0, r_d) = S_0 e^{-\gamma x^0} \psi(r)\,, \tag{43}$$

где γ и S_0 – постоянные. Подставляя функцию $S(x^0, r)$ (43) в уравнение (40), получим

$$3r_d^2 \left[\gamma^2\psi^3 - 2\psi\left(\frac{d\psi}{dr_d}\right)^2\right] - 2\frac{d}{dr_d}\left[r_d^2\psi^2\frac{d\psi}{dr_d}\right] = 0\,. \tag{44}$$

Введем безразмерную переменную $\xi \equiv \gamma r$, тогда данное уравнение перепишется следующим образом:

$$3\xi^2\psi\left[\psi^2 - 2\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2\right] - 2\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2\psi^2\frac{d\psi}{d\xi}\right] = 0\,. \tag{45}$$

Так как это уравнение однородно по искомой функции, то будем ее искать в виде

$$\psi(\xi) = \psi_0 \exp\left(\int\limits_0^\xi \varphi(\xi)d\xi\right)\,, \tag{46}$$

ψ_0 – постоянная, которая при составлении функции S_W перемножается с постоянной S_0, поэтому положим ее равной единице, $\psi_0 = 1$. Для искомой функции $\varphi(\xi)$ получаем уравнение Риккати

$$\xi\frac{d\varphi}{d\xi} + 2\varphi + 6\,\xi\varphi^2 - \frac{3}{2}\,\xi = 0\,. \tag{47}$$

Выберем решение, которое не имеет особенности в точке $\xi = 0$:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{cth}(3\xi) - \frac{1}{3\xi}\right]\,. \tag{48}$$

При $\xi \ll 1$

$$\varphi(\xi) \simeq \frac{1}{2}\xi - \frac{3}{10}\xi^3 + \mathcal{O}\left(\xi^5\right)\,, \tag{49}$$

а при $\xi \to \infty$

$$\varphi(\xi) \to \frac{1}{2}\,. \tag{50}$$

Коэффициент растяжения-сжатия вычисляется по формуле

$$\kappa = \gamma\sqrt[4]{1 - 4\varphi^2(\xi)} \cdot S_W\,. \tag{51}$$

Найдем закон движения материальных объектов, формирующих рассматриваемое поле:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^0}{d\tau} &= 4\left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^3 - 2\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right)^2\right]\lambda(x^0, r_d)\,,\\ \frac{dr_d}{d\tau} &= -8\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right)\lambda(x^0, r_d)\,, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

или

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx^0}{d\tau} = -4\gamma\left[\gamma^2 - 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_d}\right)^2\right] S_W^3 \lambda(x^0, r_d)\,,\\
&\frac{dr_d}{d\tau} = -8\gamma^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_d}\right) S_W^3 \lambda(x^0, r_d)\,,
\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx^0}{d\tau} = -4\gamma^3\left[1 - 2\varphi^2(\xi)\right] S_W^3 \lambda(x^0, r_d)\,,\\
&\frac{dr_d}{d\tau} = -8\gamma^3\varphi(\xi) S_W^3 \lambda(x^0, r_d)\,,
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

тогда

$$\frac{dr_d}{dx^0} = \frac{2\varphi(\xi)}{1 - 2\varphi^2(\xi)}\,. \tag{54}$$

Запишем последнюю формулу для $\xi \ll 1$:

$$\frac{dr_d}{dt} = H_0\left[1 - \frac{1}{10}\left(\frac{H_0}{c}\right)^2 r_d^2\right] \cdot r_d\,, \qquad H_0 \equiv \gamma c\,. \tag{55}$$

Таким образом, при достаточно малых расстояниях до космологических объектов $r_d \ll \dfrac{c}{H_0}$ выполняется закон Хаббла с постоянной Хаббла $H_0 \equiv \gamma c$, а при увеличении расстояния коэффициент, определяющий скорость удаления объекта уменьшаемся, причем уменьшается медленнее, чем для пространства, конформно связанного с пространством Минковского [3]. В силу этого изучение поведения "постоянной" Хаббла на расстояниях сравнимых с размерами Вселенной может ответить на вопрос: каким метрическим пространством является наше четырехмерное пространство-время на мегарасстояниях.

Выясним, каким образом в данной модели размеры Вселенной связаны с постоянной Хаббла $H_0 \equiv \gamma c$. При $\xi \to \infty$

$$\frac{dr_d}{dt} \to 2c\,. \tag{56}$$

Естественно связать радиус Вселенной $(r_d)_W$ с расстоянием, где производная $\dfrac{dr_d}{dt}$ достигает c (скорости света). Тогда

$$(r_d)_W \simeq 1,23854 \cdot \frac{c}{H_0}\,. \tag{57}$$

4 Стационарное поле коэффициента растяжения-сжатия

Стационарное пространственно "ромбододекаэдрно симметричное" поле $\kappa(x)$ можно получить, если искать решение уравнения (40) в виде

$$S_W = p_0 x^0 - \psi(r_d)\,, \tag{58}$$

где $p_0 > 0$ – постоянная. Тогда для неизвестной функции ψ получим уравнение

$$\frac{d}{dr_d}\left(r^2 \frac{d\psi}{dr_d}\right) = 0\,. \tag{59}$$

Интегрирование по r_d приводит к соотношению

$$\frac{d\psi}{dr_d}=\frac{C}{r_d^2}\,, \tag{60}$$

C – постоянная интегрирования. Тогда

$$\kappa(r_d)=p_0\sqrt[4]{1-\frac{4C^2}{p_0^2r_d^4}}\,. \tag{61}$$

Для того, чтобы подкоренное выражение было строго больше нуля, необходимо выполнение условия

$$\frac{4C^2}{p_0^2r_d^4}<1 \qquad \Rightarrow \qquad r_d>\sqrt{\frac{2|C|}{p_0}}\,. \tag{62}$$

Таким образом, поля $\kappa(r_d)$ и $S_W(x^0,r_d)$ существуют не во всей области изменения переменной $0\le r_d<\infty$, внутри некой области при достаточно малых r_d поля отсутствуют – аналог "черной дыры".

Движение материальных объектов рассматриваемого поля определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx^0}{d\tau}&=4p_0^3\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{2C}{p_0r_d^2}\right)^2\right]\cdot\lambda(x^0,r_d)\,,\\ \frac{dr_d}{d\tau}&=-4p_0^3\left(\frac{2C}{p_0r_d}\right)\cdot\lambda(x^0,r_d)\,,\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

или

$$\frac{dr_d}{dx^0}=-\frac{\left(\dfrac{2C}{p_0r_d}\right)}{1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2C}{p_0r_d^2}\right)^2}\,. \tag{64}$$

Из последней формулы следует, что поле $\kappa(r_d)$ будет соответствовать полю притяжения, если $C>0$, и что при $r_d=\sqrt{\frac{2|C|}{p_0}}$ величина скорости достигает $2c$, поэтому размеры "дыры" будут больше, чем диктуют неравенства (62). Потребовав, чтобы правая часть соотношения (64) по модулю была строго больше единицы, получим

$$\frac{4C^2}{p_0^2r_d^4}<\sqrt{3}-1 \qquad \Rightarrow \qquad r_d>\sqrt{\frac{2|C|}{p_0\sqrt{\sqrt{3}-1}}}\equiv(r_d)_0 \tag{65}$$

где $(r_d)_0$ – радиус "дыры".

Итак, материальные частицы в самосогласованном поле притяжения $\kappa(r_d)$ движутся по лучам, исходящим из цента координат; при $r_d\to\infty$ их скорость равна нулю, затем при приближении к началу координат их скорость по величине увеличивается и достигает скорости света на границе "дыры" $r_d=(r_d)_0$, внутри которой поле отсутствует. При этом коэффициент растяжения сжатия меняется в пределах:

$$p_0\sqrt[4]{2\sqrt{3}-3} \quad < \quad \kappa(r_d) \quad < \quad p_0\,. \tag{66}$$

5 Постановка задачи на собственные значения

Запишем уравнение (42) в операторной форме в координатном представлении, приняв

$$\hat{p}_0 = i\hbar \frac{1}{r_d \kappa^2} \frac{\partial}{\partial x^0}\, r_d \kappa^2 \,, \qquad \hat{p}_{r_d} = i\hbar \frac{1}{r_d \kappa^2} \frac{\partial}{\partial r_d}\, r_d \kappa^2 \,, \tag{67}$$

получим

$$\hbar^4 \left[\frac{\partial^4}{(\partial x^0)^4} - 4 \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} \frac{\partial^2}{(\partial r_d)^2} \right] r_d \kappa^2 \Psi(x^0, r_d) = r_d \kappa^6 \Psi(x^0, r_d)\,. \tag{68}$$

Здесь $\Psi(x^0, r_d)$ – функция состояния физической системы (волновая функция). Приняв, что поле $\kappa(r_d)$ задается выражением (61), волновую функцию будем искать в виде:

$$\Psi = \frac{1}{r_d \kappa^2} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{E}{c}\, x^0 \right) y(r_d)\,. \tag{69}$$

Подставим (69) в уравнение (68), получим

$$4 \left(\frac{E}{\hbar c} \right)^2 \frac{d^2 y}{d r_d^2} + \left[\left(\frac{E}{\hbar c} \right)^4 - \frac{p_0^4}{\hbar^4} + \frac{p_0^4}{\hbar^4} \left(\frac{(r_d)_0}{r_d} \right)^4 \right] y = 0\,. \tag{70}$$

Перейдем к новой переменной – безразмерному "радиусу" $\varrho \equiv \dfrac{r_d}{(r_d)_0}$ и введем обозначения для трех безразмерных величин:

$$\mathcal{E} \equiv \mu_0 \frac{\left(\dfrac{E}{p_0 c} \right)^4 - 1}{4 \left(\dfrac{E}{p_0 c} \right)^2}\,, \qquad \mu \equiv \frac{\mu_0}{4 \left(\dfrac{E}{p_0 c} \right)^2} \qquad \mu_0 \equiv \left(\frac{p_0 r_d}{\hbar} \right)^2 . \tag{71}$$

Тогда

$$\frac{d^2 y}{d \varrho^2} + \left\{ \mathcal{E} + \mu \frac{1}{\varrho^4} \right\} y = 0\,. \tag{72}$$

Это уравнение по форме совпадает с одномерным уравнением Шредингера нерелятивистской частицы, находящейся в поле притяжения с потенциалом, который (с точностью до постоянного множителя) равен

$$U = -\frac{\mu}{\varrho^4}\,. \tag{73}$$

Так как при $\varrho < 1$ никакого поля нет, что в каком-то смысле соответствует бесконечно глубокой потенциальной яме, то для всех волновых функций необходимо выполнение граничного условия

$$y(1) = 0\,. \tag{74}$$

Таким образом, можно ожидать (это следует из общей теории) конечного числа (или ни одного) локализованных (связанных) состояний, которые обязательно должны иметь дискретный спектр отрицательных значений параметра $\mathcal{E}$.

Из уравнения (72) для $\mathcal{E} < 0$ следует, что при $\varrho \to \infty$ функция $y(\varrho)$ связанного состояния ведет себя следующим образом:

$$y = const' \cdot \rho^{const} \exp\left(-\sqrt{-\mathcal{E}}\, \varrho \right)\,, \tag{75}$$

то есть стремится экспоненциально к нулю при $\varrho \to \infty$.

Предположим, что задача на собственные значения (72), (74), (75) решена и найден спектр собственных значений:

$$\mathcal{E} = -\sigma_0^2,\ -\sigma_1^2,\ \ldots\ -\sigma_{k-1}^2\,, \qquad \sigma_i \in \{\sigma_0,\ \sigma_1,\ \ldots\ \sigma_{k-1}\}\,. \tag{76}$$

Тогда из формул (71) получим значения величины

$$\frac{E}{cp_0} = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{2\sigma_i^2}{\mu}\right)^2 + 1} - \frac{2\sigma_i^2}{\mu}}\,. \tag{77}$$

В общем случае аналитическое решение уравнения (72) нам неизвестно, но при $\mathcal{E} = 0$ такое аналитическое решение существует

$$y = C_0\, \rho\, \sin\left(\frac{\sqrt{\mu_0}}{\varrho} + \varphi_0\right)\,, \tag{78}$$

где C_0, φ_0 – постоянные интегрирования. Это решение не является локальным ни при каких значениях параметров, но если все же формально потребовать выполнение граничных условий

$$\left.\frac{y(\varrho)}{\varrho}\right|_{\varrho=1} = 0\,, \qquad \left.\frac{y(\varrho)}{\varrho}\right|_{\varrho\to+\infty} = 0\,, \tag{79}$$

то получим

$$\varphi_0 = 0\,, \qquad \mu_0 = 4\pi^2 m^2\,; \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{80}$$

Нам не удалось точно решить задачу на собственные значения, и поэтому пришлось применять приближенный метод.

6 Квазиклассическое приближение

Так как формально уравнение (72) совпадает с одномерным уравнением Шредингера для волновой функции нерелятивистской частицы, находящейся в потенциальной яме, то для решения задачи (72), (74), (75) на собственные значения может быть применен квазиклассический подход, хотя бы для качественного описания ожидаемых точных собственных значений.

С учетом того, что точка $\varrho = 1$ не является точкой поворота, правило квантования Бора для рассматриваемой задачи, можно записать [4] следующим образом:

$$\int\limits_1^{\varrho_*} \sqrt{\mathcal{E} + \mu\frac{1}{\varrho^4}}\ d\varrho = \pi\left(n + \frac{3}{4}\right)\,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{81}$$

Разделим левую и правую части на $\sqrt{\mu}$, введем обозначение

$$-\frac{\mathcal{E}}{\mu} \equiv \lambda^2 \tag{82}$$

и перепишем формулу (81)

$$\int\limits_1^{\varrho_*} \sqrt{-\lambda^2 + \frac{1}{\varrho^4}}\ d\varrho = \frac{2\pi\sqrt[4]{1-\lambda^2}}{\sqrt{\mu_0}}\left(n + \frac{3}{4}\right)\,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots\,, \tag{83}$$

где

$$\varrho_* = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,, \qquad 1 < \varrho_* < +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \lambda < 1\,. \tag{84}$$

Безразмерные энергии связанных состояний будут выражаться через собственные значения $\lambda_i \in \{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{k-1}\}$ следующим образом:

$$\frac{E_i}{cp_0} = \sqrt[4]{1-\lambda_i^2}\,. \tag{85}$$

С учетом (80) и (84) перепишем формулу (83)

$$\int\limits_1^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \sqrt{-\lambda^2 + \frac{1}{\varrho^4}}\; d\varrho = \sqrt[4]{1-\lambda^2}\;\frac{n+\frac{3}{4}}{m}\,, \qquad n = 0,1,2,3,...\,, \qquad m = 1,2,3,... \tag{86}$$

При $m = 1$ существует только одно локализованное состояние $n = 0$, численный расчет дает

$$\lambda_0 \simeq 0,043875\,, \qquad \frac{E_0}{cp_0} \simeq 0,999518\,. \tag{87}$$

При $m = 2$ существует два локализованных состояния $n = 0$ и $n = 1$, при этом численный расчет дает

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_0 \simeq 0,292175\,, & \dfrac{E_0}{cp_0} \simeq 0,977939\,, \\[2ex] \lambda_1 \simeq 0,0108925\,, & \dfrac{E_1}{cp_0} \simeq 0,9999703\,, \end{array}\right\} \quad \frac{E_0}{E_1} \simeq 0,977968\,. \tag{88}$$

7 Заключение

В данной работе в четырехмерном анизотропном пространстве событий предложено использовать негладкие переменные, связанные с метрикой в "истинном" трехмерном пространстве мировых линий (наблюдателей). В рамках такого подхода получены два решения уравнения поля для пространства, конформно связанного с четырехмерным пространством Бервальда-Моора, то есть пространства поличисел H_4. Первое решение с расширяющейся во времени индикатрисой, рассматриваемое как космологическое, приводит к выполнению закона Хаббла для расстояний r_d много меньше размеров Вселенной и уменьшению переменной Хаббла при бóльших расстояниях. Причем это уменьшение более медленное, чем полученное в работе [3] в пространстве, конформно связанном с пространством Минковского, если, конечно, при этом отождествлять r_d с евклидовым расстоянием. Такое отождествление r_d с евклидовым расстоянием приводит и к другому эффекту: зависимости коэффициента Хаббла от пространственных направлений. В силу этого изучение поведения коэффициента Хаббла при расстояниях, сравнимых с размерами Вселенной, может привести к ответу на вопрос: каким метрическим пространством является четырехмерное пространство-время на мегамасштабах. Второе решение с полем коэффициента расширения-сжатия, не зависящим от времени, приводит к потенциальному полю притяжения с потенциалом, убывающим как $\frac{1}{r_d^4}$, где r_d – в пространстве Бервальда-Моора является аналогом радиуса сферической системы координат в трехмерном евклидовом пространстве, причем при $r_d < r_0$ поле отсутствует – аналог "черной дыры" ОТО. На границе "дыры" $(r_d = r_0)$ скорость материальных объектов, формирующих данное поле, равна скорости света. Для такого стационарного поля сформулирована квантово-механическая задача и в квазиклассическом приближении численно найдены три "первых" значения относительной энергии связанных (локализованных) состояний.

В ближайшее время мы надеемся применить теорию поля [3] и методы, предложенные в настоящей работе, к пространству, конформно связанному с пространством поличисел H_3, которое является трехмерным метрическим финслеровым пространством, с метрикой Бервальда-Моора.

Литература

[1] Павлов Д. Г., Обобщение аксиом скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (1), т. 1 (2004), стр. 5 – 19; Четырехмерное время, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (1), т. 1 (2004), стр. 33 – 42.

[2] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.-Л.: ОГИЗ, 1947.

[3] Гарасько Г. И., Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (6), т. 3 (2006), стр. 6 – 20.

[4] Гарасько Г. И., Частное стационарное решение уравнения поля для пространства, конформно связанного с пространством Минковского. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (7), т. 4 (2006).

[5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля. М., "Наука", 1967.

[6] G. Yu Bogoslovsky, H. F. Goenner, On the possibility of phase transitions in the geometric structure of space-time, Phys. Lett. A 244 (1998) 222 – 228.

[7] G. Yu Bogoslovsky, H. F. Goenner, Finslerian spaces possessing local relativistic symmetry, Gen. Relativ. Gravit. 31 (1999) 1565 – 1603.

The space conformally related to the Berwald-Moor space

G. I. Garas'ko

Electrotechnical institute of Russia
gri9z@mail.ru

The space conformally related to the Berwald-Moor space admits a unique scalar field, for which we write the 2-dimensional field equation and we find particular special solutions: 1) for the case of exponentially expanding in time indicatrix; 2) for the case of stationary field of the coefficient of expansion/shrinking and the "force"oriented towards the center. In the latter case, for the solution is formulated the quantum mechanics problem of eigenvalues. Here, the second variable, supplement to the first one - assimilated to time, is a non-smooth variable, an analogue of the radius of the spherical system of coordinates of the 3-dimensional Euclidean space.

Key-words: Berwald-Moor metric, Finsler space.
MSC: 53B40, 37C10.

ОБ АНАЛОГЕ РЕШЕНИЯ ФРИДМАНА В ФИНСЛЕРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ С АНИЗОТРОПНОЙ МЕТРИКОЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Д. Г. Павлов, Г. И. Гарасько

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана,
ГУП ВЭИ, Москва, Россия
geom2004@mail.ru, gri9z@mail.ru

Гиперболические (двойные) числа H_2 двойственны обычным комплексным числам C, однако в отличие от последних, естественным обобщением которых до четырехкомпонентной алгебры исторически принято считать некоммутативную алгебру кватернионов Q, H_2 имеют естественное расширение на коммутативную алгебру H_4. Пространство, соответствующее числам H_4, четырехмерно и ему может быть сопоставлено пространство событий, только вместо изотропной по пространственным координатам геометрии Минковского оно обладает анизотропной финслеровой геометрией Бервальда-Моора. Оказывается, что для пространств H_2 и H_4 справедливы построения, аналогичные методу комплексного потенциала, когда каждой аналитической функции $F(z)$ ставится в соответствие та или иная физическая интерпретация. На примере элементарной функции натурального логарифма показывается, что для любых аналитических функций $F(h_n)$ также удается ввести естественную физическую интерпретацию в виде конформно выделенных нелинейных полей в пространстве-времени с финслеровой геометрией. Для четырех измерений поле, которое сопоставляется логарифмической функции $\ln(h_4)$, можно считать обобщением фридмановской модели Вселенной, однако получающийся в данном случае аналог закона расширения Хаббла оказывается существенно анизотропным и имеет тесную связь с симметриями ромбододекаэдра.

Ключевые слова: метрика Бервальда-Моора, Финслеровы пространства, модель Фридмана, анизотропия.

1 Введение

Линейные финслеровы пространства с метрической функцией Бервальда-Моора [1] обладают бесконечномерной группой конформных преобразований [2]. В этом плане они весьма схожи с евклидовой плоскостью. Причем аналогично тому, как конформным преобразованиям евклидовой плоскости сопоставляются алгебра и аналитические функции комплексной переменной z [3], конформным преобразованиям n-мерного пространства с метрикой Бервальда-Моора можно сопоставить алгебру и аналитические функции гиперкомплексной переменной h_n [4]. Поскольку у всех аналитических функций комплексной переменной имеются физические интерпретации (такой метод получил название *метода комплексного потенциала*), возникает закономерный вопрос: нет ли возможности дать физическую интерпретацию и H-аналитическим функциям? В случае положительного ответа на данный вопрос, соответствующий подход обобщился бы до *метода гиперкомплексного потенциала*, причем его можно было бы применять не только к многомерным, но и к нестационарным задачам.

Так как физическое пространство четырехмерно, в качестве основного объекта настоящего исследования взяты гиперкомплексные числа H_4 [5], а в качестве аналитической функции – нелинейная аналитическая функция натуральный логарифм от переменной h_4. Выбор именно такой H_4-аналитической функции обусловлен центральной ролью ее аналога в теории комплексного потенциала, которой, как известно, ставится в соответствие стационарное поле точечного источника на евклидовой плоскости [6].

В физико-математической литературе существует довольно распространенное заблуждение, что максимальная размерность пространства, которому можно естественным образом сопоставить алгебру невырожденных коммутативно-ассоциативных гиперкомплексных чисел (поличисел) P_n и теорию аналитических функций p_n переменной, равняется двум. В связи с этим обычно обращаются к теореме Фробениуса, утверждающей, что единственными представителями числовых множеств, обладающими коммутативно-ассоциативными алгебрами с делением, – являются поля действительных и комплексных чисел. Одним из следствий данной теоремы является то, что множества чисел H_n, начиная с $n = 2$, обладают алгебрами не с полным, а с частичным делением, то есть содержат в себе так называемые *делители нуля* – объекты, не равные нулю, деление на которые не определено, как и на сам нуль. Однако из факта наличия в коммутативно-ассоциативных алгебрах H_n делителей нуля вовсе не следует отсутствие у них аналитических функций, а у тех – естественных физических интерпретаций. Более того, делители нуля не мешают, а способствуют таким интерпретациям, поскольку им можно сопоставить точки и вектора светового конуса, являющегося, как известно, одним из важнейших объектов релятивистской физики.

Теорема Фробениуса в весьма значительной степени способствовала сегодняшней ситуации, когда у физиков редко возникает желание искать геометрические и физические интерпретации H_4-аналитических функций. Так в [6] утверждается: "Возможности обобщения алгебры векторов на размерность выше двух чрезвычайно ограничены. В алгебре есть теорема Фробениуса, согласно которой система эллиптических комплексных чисел является единственным (с точностью до изоморфизма) расширением поля действительных чисел с сохранением всех законов сложения и умножения. Если отказаться от переместительного закона, то появляется еще одна возможность – четырехмерные векторы (система кватернионов), а если пожертвовать и сочетательным, то еще одна возможность – восьмимерные векторы (октавы Кели). Других возможностей построить умножение векторов, хорошо сочетающееся со сложением, нет. В частности, нельзя построить и хорошей алгебраической системы для трехмерных векторов." Ясно, что авторы имели ввиду исключительно пространства с квадратичными метриками и совсем не принимали в расчет существование линейных финслеровых пространств с n-арными метрическими формами. Однако, является фактом существование векторных пространств коммутативно-ассоциативных гиперкомплексных чисел, обладающих финслеровыми метриками. А значит и вопросы геометрической и физической интерпретации таких чисел и аналитических функций от них становятся достаточно важными.

2 Некоторые математические элементы теории гиперкомплексного потенциала

Пусть $x^1, x^2, ..., x^n$ – финслерово пространство [7] с метрической функцией

$$L(\xi; x) \equiv L(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n; x^1, x^2, ..., x^n)\,, \tag{1}$$

где $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ – касательное пространство в точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ основного пространства. Тогда элемент длины определяется формулой

$$ds = L(dx^1, dx^2, ..., dx^n; x^1, x^2, ..., x^n)\,, \tag{2}$$

а обобщенные импульсы

$$p_i = \frac{\partial L(dx; x)}{\partial (dx^i)} \tag{3}$$

связаны соотношением

$$\Phi(p; x) = 0\,, \tag{4}$$

которое принято называть тангенциальным уравнением индикатрисы. Функцию $\Phi(p; x)$ будем называть *функцией Финслера,* она, как известно, определяется неоднозначно: с точностью до перехода от тангенциального уравнения (4) к эквивалентному уравнению в той же форме записи. В классических финслеровых пространствах [7] тангенциальному уравнению индикатрисы всегда можно придать некоторую специальную форму

$$\Phi_m(p; x) - 1 = 0\,, \tag{5}$$

где $\Phi_m(p; x)$ – однородная функция m-го порядка ($m > 0$) по первым n аргументам. Если функция $S(x)$ определяет в рассматриваемом финслеровом пространстве нормальную конгруэнцию геодезических, то она должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\Phi\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}, \dots \frac{\partial S}{\partial x^n}; x\right) = 0\,. \tag{6}$$

Функцию $S(x)$ в классической механике называют действием как функцией координат, а уравнение, соответствующее уравнению (6), – уравнением Гамильтона-Якоби. Если функция $S(x)$ известна, то поле обобщенных импульсов находится как

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}\,, \tag{7}$$

а траектории движения (мировые линии, линии тока) находятся из системы уравнений

$$\dot{x}^i = \left.\frac{\partial \Phi(p; x)}{\partial p_i}\right|_{p_k = \frac{\partial S}{\partial x^k}} \cdot \lambda(x)\,, \tag{8}$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$, а τ – параметр вдоль мировой линии, параметр эволюции.

Финслерово пространство, конформно связанное с исходным, имеет метрическую функцию вида

$$\tilde{L}(\xi; x) = \kappa(x) L(\xi; x)\,, \tag{9}$$

где $\kappa(x) > 0$ – некая скалярная функция. Элемент длины в таком пространстве определяется формулой

$$d\tilde{s} = \kappa(x) L(dx; x)\,. \tag{10}$$

Обобщенные импульсы

$$\tilde{p}_i = \kappa(x) \frac{\partial L(dx; x)}{\partial (dx^i)} \tag{11}$$

связаны соотношением

$$\Phi_m(\tilde{p}; x) - \kappa^m = 0\,, \tag{12}$$

то есть функция Финслера конформно связанного пространства определяется следующим образом:

$$\tilde{\Phi}(\tilde{p}; x) = \Phi_m(\tilde{p}; x) - \kappa^m\,. \tag{13}$$

Пусть $S_W(x)$ – произвольная скалярная функция, тогда в области, где выполняется неравенство

$$\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, \dots \frac{\partial S_W}{\partial x^n}; x\right) > 0\,, \tag{14}$$

определена финслерова геометрия, конформно связанная с исходной, и поле коэффициента растяжения-сжатия

$$\kappa(x) = \sqrt[m]{\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, ... \frac{\partial S_W}{\partial x^n}; x\right)}\,, \tag{15}$$

причем в этой же области функция $S_W(x)$ определяет нормальную конгруэнцию геодезических

$$\dot{x}^i = \left.\frac{\partial \Phi_m(\tilde{p}; x)}{\partial \tilde{p}_i}\right|_{\tilde{p}_k = \frac{\partial S_W}{\partial x^k}} \cdot \tilde{\lambda}(x)\,, \tag{16}$$

где $\tilde{\lambda}(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$, а τ – параметр эволюции. Таким образом, функция $S_W(x)$ является действием как функцией координат в конформно связанном пространстве.

Если функция $S_W(x)$ удовлетворяет уравнению поля [8], однозначно определенному для такой функции в любом финслеровом пространстве, то функцию $S_W(x)$ будем называть *Мировой функцией* [9]. Во всяком финслеровом пространстве Мировой функции соответствует лагранжиан, а значит могут быть получены и тензор энергии-импульса, и законы сохранения.

Любое невырожденное поличисловое пространство $P_n \ni X$ является финслеровым, причем любая компонента произвольной аналитической функции $F(X)$ в нем удовлетворяет уравнению поля для Мировой функции $S_W(x)$. Аналитические функции можно перемножать, брать их линейные комбинации, строить функцию от функции, при этом опять будут получаться аналитические функции. Если не оговорено другое, в качестве Мировой функции в поличисловом пространстве будем брать компоненту $U(x^1, ..., x^2)$ при единице

$$F(X) = U(x) \cdot 1 + V^1(x) \cdot j_1 + ... + V^{n-1}(x) \cdot j_{n-1} \tag{17}$$

в базисе $1, j_1, ..., j_{n-1}$, в котором имеет место экспоненциальное представление поличисел, то есть

$$X = |X| \exp(\alpha^1 \cdot j_1 + ... + \alpha^{n-1} \cdot j_{n-1})\,, \tag{18}$$

тогда в этом базисе

$$\ln(X/b) = \ln(|X|/b) \cdot 1 + ...\,, \tag{19}$$

где b – действительное число, а $|X|$ – модуль поличисла [4].

3 Пространство двойных чисел H_2

Двойные, или гиперболические числа H_2, определяются как двумерная линейная алгебра, в которой существует базис 1, j со следующими свойствами:

$$H_2 \ni X = x^0 + x^1 \cdot j\,, \qquad 1 \cdot 1 = 1\,, \quad 1 \cdot j = j \cdot 1 = j\,, \quad j^2 = 1\,, \tag{20}$$

где x^0, x^1 – действительные числа.

В качестве потенциала выберем действительную компоненту аналитической функции

$$F(X) \equiv U + j \cdot V = a \cdot \ln(X/b) \equiv \frac{a}{2} \ln\left[\frac{(x^0)^2 - (x^1)^2}{b}\right] + j \cdot \frac{a}{2} \ln\left[\frac{x^0 + x^1}{x^0 - x^1}\right]\,, \tag{21}$$

a, b – действительные числа, то есть

$$U(x^0, x^1) = \frac{a}{2} \ln\left[\frac{(x^0)^2 - (x^1)^2}{b}\right]\,. \tag{22}$$

Аналитическая функция (21), а значит и потенциал (22), определены в конусе будущего:

$$x^0 > |x^1| \,. \tag{23}$$

Чтобы записать уравнения (16), которым подчиняются мировые линии материальных объектов, надо определиться с выбором функции Финслера и функции $\widetilde{\lambda}(x)$. И хотя наблюдаемые величины не зависят от этого выбора, от него зависит конкретный вид уравнений (16).

Если мы хотим, чтобы формулы (16) напоминали формулы теории комплексного потенциала, то следует выбрать

$$\tilde{\Phi}(p;x) = p_0^2 - p_1^2 - \kappa^2(x^0,x^1)\,, \qquad \lambda(x^0,x^1) = \frac{1}{2} \tag{24}$$

тогда

$$\acute{x}^0 = \frac{\partial U}{\partial x^0}\,, \qquad \acute{x}^1 = -\frac{\partial U}{\partial x^1}\,, \tag{25}$$

где $\acute{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\acute{\tau}}$, а $\acute{\tau}$ – некий параметр вдоль мировой линии, параметр эволюции. В этом случае

$$\sqrt{(\acute{x}^0)^2 - (\acute{x}^1)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2} \equiv \kappa(x^0,x^1)\,, \tag{26}$$

где $\kappa(x^0,x^1)$ – коэффициент растяжения-сжатия конформного преобразования в пространстве H_2, которое (преобразование) определяется аналитической функцией (21). Таким образом, вдоль мировой линии в данном случае

$$\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2} = \kappa(x^0,x^1)\,d\acute{\tau}\,.$$

Если мы хотим, чтобы уравнения (16) по форме и физической интерпретации соответствовали формулам СТО, то следует выбрать

$$\tilde{\Phi}(p;x) = \sqrt{p_0^2 - p_1^2} - \kappa(x^0,x^1)\,, \qquad \lambda(x^0,x^1) = 1\,, \tag{27}$$

тогда

$$\dot{x}^0 = \frac{\frac{\partial U}{\partial x^0}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2}}\,, \qquad \dot{x}^1 = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x^1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2}}\,, \tag{28}$$

где $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$, а τ – некий параметр вдоль мировой линии. В этом случае

$$\sqrt{(\dot{x}^0)^2 - (\dot{x}^1)^2} = 1\,, \tag{29}$$

то есть в этом случае параметр эволюции суть собственное время, соответствующее мировой линии в пространстве H_2, умноженное на скорость света. Таким образом, вдоль мировой линии в данном случае

$$\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2} = d\tau\,.$$

Выбирая формулы (27), для потенциала (22) получим дифференциальные уравнения для определения мировых линий, по которым двигаются материальные объекты:

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{x^0}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2}}\,, \qquad \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{x^1}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx^1}{dx^0} = \frac{x^1}{x^0}\,. \tag{30}$$

Решениями этой системы уравнений являются мировые линии:

$$(x^0, x^1) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) \cdot \tau \,, \qquad x^1 = \frac{v}{c} \cdot x^0 \,, \tag{31}$$

где c – скорость света, а v – скорость материального объекта, соответствующего данной мировой линии, конечно, $|v| < c$. Все такие мировые линии являются лучами, исходят из начала отсчета, особой точки потенциала, и расположены в конусе будущего.

Совместим себя с наблюдателем (мировой линией) $v = 0$ и будем вести отсчет времени начиная с некоторого значения t_0. Тогда мы будем наблюдать *удаление* материальных объектов от нас с различными скоростями, зависящими от расстояния до этих объектов. Модуль координаты x^1 будет характеризовать нам истинное пространственное расстояние [10] r до других объектов. Тогда из формул (30) и (31) получим

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r}{t_0 + t} = |v| \,, \quad t \ll t_0 \qquad \Rightarrow \qquad |v| \simeq \frac{1}{t_0} \cdot r \,. \tag{32}$$

Таким образом, мы получили закон Хаббла с коэффициентом Хаббла $H = \frac{1}{t_0}$, что вполне согласуется с формулой, которая получается для этого закона в космологической модели Эйнштейна – де Ситтера [11], где $H = \frac{2}{3t_0}$.

4 Поличисловое пространство H_4

Гиперкомплексные числа H_4 [4] изоморфны алгебре действительных квадратных диагональных матриц 4×4. Координаты в изотропном базисе пространства H_4 будем обозначать $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, а сам базис – $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$, то есть любое число можно представить в виде разложения

$$X = \xi^1\psi_1 + \xi^2\psi_2 + \xi^3\psi_3 + \xi^4\psi_4 \,, \tag{33}$$

или четверки действительных чисел $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$. Бинарная операция поличислового умножения определяется заданием правила умножения для базисных векторов:

$$\psi_i\psi_j = \begin{cases} \psi_i \,, & \text{если} \quad i = j \\ 0 \,, & \text{если} \quad i \neq j \,. \end{cases} \tag{34}$$

Если $\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4 > 0$, то для числа $X \in H_4$ определена норма

$$|X| = \sqrt[4]{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4} > 0 \,. \tag{35}$$

Пространство H_4 является метрическим финслеровым пространством с метрической функцией

$$L(d\xi) = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4} \,, \tag{36}$$

которую никакими преобразованиями координат нельзя привести к квадратному корню из дифференциальной квадратичной формы, то есть такое финслерово пространство качественно отличается от евклидова и псевдоевклидовых пространств размерности четыре. Метрику, которая определяется метрической функцией (36), называют иногда метрикой Бервальда-Моора [1].

Таблица 1:

$\times$	1	j	k	jk
1	1	j	k	jk
j	j	1	jk	k
k	k	jk	1	j
jk	jk	k	j	1

В пространстве H_4 существует базис $1, j, k, jk$,

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4\,, \\ j &= \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 - \psi_4\,, \\ k &= \psi_1 - \psi_2 + \psi_3 - \psi_4\,, \\ jk &= \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 + \psi_4\,, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

закон умножения базисных элементов которого определен Таб. 1.

Координаты x^0, x^1, x^2, x^3 числа X в этом базисе связаны с координатами $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ того же числа в изотропном базисе формулами:

$$\left.\begin{aligned} \xi^1 &= x^0 + x^1 + x^2 + x^3\,, \\ \xi^2 &= x^0 + x^1 - x^2 - x^3\,, \\ \xi^3 &= x^0 - x^1 + x^2 - x^3\,, \\ \xi^4 &= x^0 - x^1 - x^2 + x^3\,. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Базис $1, j, k, jk$ будем называть "ортонормированным", именно в нем в конусе $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4 > 0$ определено экспоненциальное представление чисел $X \in H_4$.

Если гладкая функция $F(x)$ одной действительной переменной x представима как полином или сходящийся ряд переменной x, то функция $F(X)$ переменной $X \in H_4$ также определена и является аналитической, в изотропном базисе она запишется следующим образом:

$$F(X) = F(\xi^1)\psi_1 + F(\xi^2)\psi_2 + F(\xi^3)\psi_3 + F(\xi^4)\psi_4\,. \tag{39}$$

В "ортонормированном" базисе $1, j, k, jk$ та же функция имеет вид:

$$\begin{aligned} &F(X) = \\ &= \frac{1}{4}\big[F(x^0 + x^1 + x^2 + x^3) + F(x^0 + x^1 - x^2 - x^3) + F(x^0 - x^1 + x^2 - x^3) + F(x^0 - x^1 - x^2 + x^3)\big]\cdot 1 + \\ &+ \frac{1}{4}\big[F(x^0 + x^1 + x^2 + x^3) + F(x^0 + x^1 - x^2 - x^3) - F(x^0 - x^1 + x^2 - x^3) - F(x^0 - x^1 - x^2 + x^3)\big]\cdot j + \\ &+ \frac{1}{4}\big[F(x^0 + x^1 + x^2 + x^3) - F(x^0 + x^1 - x^2 - x^3) + F(x^0 - x^1 + x^2 - x^3) - F(x^0 - x^1 - x^2 + x^3)\big]\cdot k + \\ &+ \frac{1}{4}\big[F(x^0 + x^1 + x^2 + x^3) - F(x^0 + x^1 - x^2 - x^3) - F(x^0 - x^1 + x^2 - x^3) + F(x^0 - x^1 - x^2 + x^3)\big]\cdot jk\,. \end{aligned} \tag{40}$$

В "ортонормированных" координатах x^0, x^1, x^2, x^3 метрическая функция (36) финслерова пространства H_4 принимает вид

$$\begin{aligned} L(dx) = \big[&(dx^0 + dx^1 + dx^2 + dx^3)(dx^0 + dx^1 - dx^2 - dx^3)\times \\ &\times(dx^0 - dx^1 + dx^2 - dx^3)(dx^0 - dx^1 - dx^2 + dx^3)\big]^{1/4}\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Разложим выражение в квадратных скобках по степеням dx^0:

$$\begin{aligned} L^4(dx) = (dx^0)^4 - 2\,(dx^0)^2 \left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] + 8\,dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 + \\ + \ (dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 - 2\left[(dx^1)^2\,(dx^2)^2 + (x^1)^2\,(x^3)^2 + (x^2)^2\,(dx^3)^2\right] . \end{aligned} \tag{42}$$

Предположим, что

$$dx^\alpha = \varepsilon dx^0\,, \quad \varepsilon \ll 1\,, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{43}$$

тогда с точностью до членов ε^2 включительно по сравнению с 1 для элемента длины $L_{H_4}(dx)$ в пространстве H_4 получим следующую формулу:

$$L_{H_4}(dx) \simeq \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}\,. \tag{44}$$

Справа здесь стоит элемент длины в пространстве Минковского, поэтому справедливо следующее утверждение: координаты x^0, x^1, x^2, x^3 в "ортонормированном" базисе пространства H_4 в нерелятивистском приближении в геометрическом (метрическом) плане ведут себя также как общепринятые координаты четырехмерного пространства-времени Минковского.

Элемент длины в пространстве, конформно связанном с пространством H_4, в изотропном базисе имеет вид

$$ds = \kappa(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)\,\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,. \tag{45}$$

Обобщенные импульсы находятся по формулам

$$p_i = \frac{1}{4}\kappa(\xi)\frac{\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}}{d\xi^i}\,, \tag{46}$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать, например, так

$$p_1 p_2 p_3 p_4 - \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4} = 0\,. \tag{47}$$

Выберем в качестве функции $F(x)$ в формуле (39) функцию

$$F(x) = a\ln(x/b)\,, \tag{48}$$

где a, $b > 0$ – действительные параметры. Потенциал – это действительная часть аналитической функции $F(X)$ (40), поэтому

$$U(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) = \frac{a}{4}\ln\left(\frac{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4}{b^4}\right)\,. \tag{49}$$

Для нахождения мировых линий [8], которые порождает потенциал (49), необходимо решить систему уравнений (16), которая в нашем конкретном случае принимает вид

$$\dot{\xi}^i = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial \xi^1}\dfrac{\partial U}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial U}{\partial \xi^3}\dfrac{\partial U}{\partial \xi^4}}{\dfrac{\partial U}{\partial \xi^i}}\lambda(\xi)\,, \tag{50}$$

где $\lambda(\xi) \neq 0$ – некоторая скалярная функция. При соответствующем выборе $\lambda(\xi)$, уравнения принимают более простой вид

$$\dot{\xi}^i = \xi^i\,. \tag{51}$$

Введем переменную

$$x^0 = \frac{1}{4}(\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4)\,, \tag{52}$$

которая в четырехмерном пространстве Бервальда-Моора играет ту же роль, что и координата x^0 в пространстве Минковского, тогда

$$\dot{x}^0 = x^0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\xi^i}{dx^0} = \frac{\xi^i}{x^0} \qquad \Rightarrow \qquad \xi^i = \xi^i_0 \cdot x^0\,, \tag{53}$$

где ξ^i_0 – постоянные. Таким образом, все мировые линии – лучи, исходящие из начала координат (особой точки потенциала), причем движение материальных тел является равномерным и прямолинейным, поэтому для координат в "ортонормированном" базисе имеют место следующие формулы:

$$x^\mu = v^\mu x^0\,, \qquad \frac{dx^\mu}{dx^0} = \frac{x^\mu}{x^0}\,, \tag{54}$$

где $\mu = 1, 2, 3$, а v^μ – действительные постоянные.

Совместим себя с наблюдателем (мировой линией) $v^\mu = 0$ и будем вести отсчет времени начиная с некоторого момента t_0. Далее можно повторить те же рассуждения, что и в предыдущем разделе, считая, что скорость удаления материальных объектов $|v| = \frac{dr}{dt}$, где r – истинное пространственное расстояние. Тогда мы будем наблюдать *удаление* от нас материальных объектов с различными скоростями, зависящими от истинного пространственного расстояния до объекта. При достаточно малых расстояниях по сравнению с радиусом Вселенной можно предположить, что

$$r \simeq r_{ev} \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^2)^2}\,, \tag{55}$$

и тогда из формул (53) следует обычный закон Хаббла

$$\frac{dr}{dt} \simeq \frac{1}{t_0} \cdot r\,, \tag{56}$$

и этот закон не зависит от пространственных направлений.

Если истинное пространственное расстояние в H_4 искать тем же способом, как это обычно делается в СТО и ОТО [10], то в результате получим [12]:

$$r \simeq r_d = |x^\alpha| + |x^\beta|\,; \qquad \text{причем} \qquad |x^\gamma| \le |x^\alpha|, |x^\beta|\,. \tag{57}$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$; $\alpha \ne \beta$, $\alpha \ne \gamma$, $\beta \ne \gamma$. В евклидовом пространстве гиперповерхность, определяемая уравнением

$$r_d = const\,, \tag{58}$$

является ромбододекаэдром [13]. Есть некоторые основания считать, что, по-видимому, истинное пространственное расстояние при приближении к границам Вселенной, может иметь вид (57). В этом случае закон Хаббла принимает вид

$$|v| \simeq \frac{1}{t_0} \cdot r_d\,. \tag{59}$$

Если наши представления о пространстве остались евклидовыми, теоретически полученную формулу для закона Хаббла следует переписать следующим образом:

$$|v| \simeq \frac{r_d}{t_0 r_{ev}} \cdot r_{ev}\,. \tag{60}$$

Тогда коэффициент Хаббла определяется формулой

$$H = \frac{r_d}{t_0 r_{ev}}\,, \tag{61}$$

и он зависит от пространственных направлений, имея 12 максимумов, 6 минимумов и 8 локальных минимумов, причём

$$\frac{H_{max}}{H_{min}} = \sqrt{2}\,, \qquad \frac{H^{loc}_{max}}{H_{min}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\,. \tag{62}$$

Каждый минимум окружен четырьмя максимумами, а каждый локальный минимум – тремя максимумами.

Таким образом, при изменении расстояния до галактик от самых малых до самых больших можно ожидать изменения коэффициента Хаббла в пределах

$$\frac{1}{t_0} \quad \xrightarrow{\quad H \quad} \quad \frac{r_d}{t_0 r_{ev}}\,, \tag{63}$$

и появление зависимости этого коэффициента от пространственных направлений.

Заключение

Самым существенным результатом данной работы авторы считают позитивное решение проблемы распространения методов комплексного потенциала на случай многих пространственно-временных измерений. У физиков и математиков до сих пор бытует устоявшееся мнение, которое сформулировано Лаврентьевым и Шабатом [6]: "Основным математическим аппаратом решения плоских задач и задач с осевой симметрией является теория конформных и квазиконформных отображений. К великому сожалению, в пространстве конформные отображения составляют очень узкий класс (согласно классической теореме Лиувилля они сводятся к сдвигу, растяжению с поворотом и инверсиям относительно сферы), а квазиконформные, хотя их запас и довольно велик – еще сравнительно мало изучены". Это мнение переносится на все пространства размерности больше двух. Оказывается, переход от классических квадратичных геометрий к финслеровым и связанным с ними n-арным формам позволяет не только обойти запреты, накладываемые теоремой Лиувиля, но и обобщить сам метод комплексного потенциала, сделав его действительно многомерным, то есть гиперкомплексным.

С другой стороны, тот факт, что многообразия с метрической функцией Бервальда-Моора наравне с чисто пространственными измерениями включают в себя еще и время, позволяет надеяться на решение не только задач статики, но и существенно нестационарных. Рассмотренные примеры с логарифмическим гиперкомплексным потенциалом в двумерном и четырехмерном пространствах с метрикой Бервальда-Моора подтверждают эту надежду, так как, по сути, представляют собой финслеровы аналоги модели нестационарной Вселенной Фридмана; только теперь в пространстве-времени четырех измерений космологическое решение в плане его восприятия наблюдателем оказывается существенно анизотропным. Это связано с тем, что пространства невырожденных поличисел P_n при $n > 2$ всегда обладают дополнительной анизотропией по сравнению с квадратичными пространствами той же размерности. Учитывая недавно полученные астрономические данные [14], указывающие на наличие сложной анизотропии коэффициента Хаббла, можно иначе взглянуть и на другое устоявшееся и по-видимому ошибочное убеждение, а именно, на уверенность большинства физиков в применимости к релятивистским моделям реального мира исключительно квадратичных геометрий.

Литература

[1] Богословский Г. Ю. 4-импульс частицы и уравнение массовой поверхности в полностью анизотропном пространстве-времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (4), т. 2, 2005.

[2] Гарасько Г. И. Обобщение понятия конформных преобразований. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (3), т. 2, 2005.

[3] Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексной переменной. М., "Наука", 1977.

[4] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Геометрия невырожденных поличисел. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (7), т. 4, 2007.

[5] Павлов Д. Г. Обобщение аксиом скалярного произведения. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (1), т. 1, 2004.

[6] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., "Наука", 1973.

[7] Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.-Л., ОГИЗ, 1947.

[8] Гарасько Г. И. Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (6), т. 3, 2006.

[9] Гарасько Г. И. О Мировой функции и связи между геометриями. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (5), т. 3, 2006.

[10] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., "Наука", 1967.

[11] Меллер К. Теория относительности. М., Атомиздат, 1975.

[12] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F. On the possibility of phase transitions in the geometric structure of space-time, Phys. Lett. A 244 (1998) 222–228.

[13] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., Finslerian spaces possessing local relativistic symmetry, Gen. Relativ. Gravit. 31 (1999) 1565–1603.

[14] McClure M. L., Dyer C. C. Anisotropy in the Hubble constant as jbserved in the HST Extragalactic Distance Scale Key Project results. arXiv:astro-po/0703556 v1

About an analogue of the Friedman solution in the Finslerian Space-Time with anisotropic Berwald-Moor metric

G. I. Garas'ko, D. G. Pavlov

Electrotechnical institute of Russia, MSTU n. a. N. E. Bauman,
gri9z@mail.ru, geom2004@mail.ru

The hyperbolic (dual) numbers H_2 are dual to the complex numbers $\mathbb{C}$, but compared to the latter, whose natural generalization to a 4-component algebra is historically admitted to be the non-commutative quaternionic algebra Q, the former one, H_2, admits as natural extension the commutative algebra H_4. The space which corresponds to the numbers H_4 is 4-dimensional and it corresponds to the space of events, which instead of being endowed with the isotropic Minkowski geometry – isotropic w.r.t. spatial coordinates, admits the anisotropic Finslerian Berwald-Moor geometry. Actually, for the spaces H_2 and H_4, there are valid constructions similar to the method of complex potential, in which to each analytic function $F(z)$ corresponds a certain physical interpretation. For the example of elementary function provided by the natural logarithm, it can be shown that for any analytic functions $F(h_n)$ we still can introduce a natural physical interpretation as conformally outstanding non-linear fields in the Space-Time endowed with Finsler structure. In four dimensions, the field which corresponds to the logarithmic function $\ln(h_4)$ can be considered as being the generalized Friedman model, but in this case the Hubble expansion law is considerably anisotropic and is tightly related to the symmetries of the rombo-dodecahedron.

Key-words: Berwald-Moor metric, Finsler space, Friedman's model, anisotropy.
MSC: 53B40, 74E10, 31C45.

К РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ В ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ СИСТЕМАХ

Р. Г. Зарипов

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия
zaripov@mail.knc.ru

Рассматриваются новые свойства гиперкомплексных систем и их связь с матрицей Адамара. Приводится характеристическое уравнение для гиперкомплексных чисел. Даются преобразования координат и времени в релятивистских теориях для различных гиперкомплексных систем. В системе квадрачисел вводится новая операция векторного произведения, а также даются преобразования частичного отражения. Изучено матричное представление кватернионов и квадрачисел для элементов группы трехмерных скоростей и определена обратная скорость в двух новых формах.

Ключевые слова: гиперкомплексные системы, матрицы Адамара.

1. Введение

Рассмотрим четырех-компонентное гиперкомплексное число

$$\mathbf{A} = (a_0, \mathbf{a}) = a_0 + a_i \mathbf{e}_i \tag{1.1}$$

с вещественными числами a_0 и a_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ и базисными элементами $\mathbf{e}_0 = 1$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Закон композиции базисных элементов определяется в общем виде

$$\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j = C_i \delta_{ij} \mathbf{e}_0 + C_{kij} \mathbf{e}_k \tag{1.2}$$

и имеет следующие свойства

$$\mathbf{e}_i^2 = \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_i = C_i, \quad \mathbf{e}_0 \circ \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j = C_{kij} \mathbf{e}_k \quad (k \neq i \neq j)\,. \tag{1.3}$$

Здесь δ_{ij} – трёхмерный символ Кронекера, C_i и C_{kij} с $C_{kii} = 0$ есть числа равные ± 1. Тогда закон композиции числа (1.1) и $\mathbf{B} = b_0 + b_i \mathbf{e}_i$ дается соотношением

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (a_0 b_0 + C_i a_i b_i) + (a_0 b_k + b_0 a_k + C_{kij} a_i b_j)\, \mathbf{e}_k, \tag{1.4}$$

где имеем значения компонент

$$\begin{gathered} c_0 = a_0 b_0 + C_i a_i b_i, \\ c_k = a_0 b_k + b_0 a_k + C_{kij} a_i b_j \end{gathered} \tag{1.5}$$

и по повторяющимся индексам проводится суммирование. Равенства (1.5) определяются также в матричном виде $(\mathbf{C}) = (\mathbf{A})\,(\mathbf{B})$ со столбцами $(\mathbf{C})$ и $(\mathbf{B})$

$$(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_0 & C_1 a_1 & C_2 a_2 & C_3 a_3 \\ a_1 & a_0 & C_{132} a_3 & C_{123} a_2 \\ a_2 & C_{231} a_3 & a_0 & C_{213} a_1 \\ a_3 & C_{321} a_2 & C_{312} a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

либо с матрицами ($\mathbf{C}$) и ($\mathbf{B}$)

$$(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} c_0 & C_1c_1 & C_2c_2 & C_3c_3 \\ c_1 & c_0 & C_{132}c_3 & C_{123}c_2 \\ c_2 & C_{231}c_3 & c_0 & C_{213}c_1 \\ c_3 & C_{321}c_2 & C_{312}c_1 & c_0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} b_0 & C_1b_1 & C_2b_2 & C_3b_3 \\ b_1 & b_0 & C_{132}b_3 & C_{123}b_2 \\ b_2 & C_{231}b_3 & b_0 & C_{213}b_1 \\ b_3 & C_{321}b_2 & C_{312}b_1 & b_0 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

В случае матричного представления гиперкомплексных чисел в виде (1.7) выполняются следующие соотношения

$$\begin{aligned} &C_{231}C_{321} = C_{213}C_{312} = C_1, \quad C_{231}C_{123} = C_{213}C_{132}, \\ &C_{312}C_{132} = C_{321}C_{123} = C_2, \quad C_{312}C_{231} = C_{321}C_{213}, \\ &C_{123}C_{213} = C_{132}C_{231} = C_3, \quad C_{123}C_{312} = C_{132}C_{321}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Множество матриц образует группу матриц с законом композиции в виде произведения матриц. Умножение ассоциативно, единичный элемент группы соответствует единичной матрице и обратный элемент в виде обратной матрицы соответствует обратному гиперкомплексному числу.

Представляет интерес ассоциативная система гиперкомплексных чисел со свойством $(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) \circ \mathbf{C} = \mathbf{A} \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{C})$, для которых закон композиции базисных элементов $\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j$ является антикоммутативным либо коммутативным.

Лемма. Имеется лишь четыре принципиально различные системы тогда и только тогда, когда заданы C_1, C_2 со значениями ± 1 и равенство $\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ для главных элементов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$.

Тип I. Система кватернионов с $C_1 = -1$, $C_2 = -1$, $C_3 = -1$ и законом композиции [1]

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = -1, \qquad \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3, \\ &\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Символ $C_{kij} = e_{kij}$ есть трехмерный абсолютно антисимметричный символ Леви-Чивита.

Тип II. Система антикватернионов с $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = -1$ и законом композиции [2]

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_1^2 = 1, \ \mathbf{e}_2^2 = 1, \ \mathbf{e}_3^2 = -1, \qquad \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3, \\ &\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Тип III. Система квадрачисел с $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1$ и законом композиции [3]

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1, \qquad \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3, \\ &\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Символ $C_{kij} = \varepsilon_{kij}$ есть трехмерный абсолютно симметричный символ со свойством $\varepsilon_{kij} = 1$ при $i \neq j \neq k$, а остальные значения являются нулевыми. При перестановке любых двух индексов составляющие символа не меняются и справедливы равенства

$$\begin{gathered} \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{kji} = \varepsilon_{ikj} = \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{jik}, \\ \mathbf{e}_{ij} = \varepsilon_{kij}\mathbf{e}_k = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \circ \mathbf{e}_i\right), \ \ \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \circ \mathbf{e}_i = 0, \\ \mathbf{e}_m \circ \mathbf{e}_{ij} = \varepsilon_{mij} + \delta_{mi}\mathbf{e}_j + \delta_{mj}\mathbf{e}_i, \\ \mathbf{e}_{ij} \circ \mathbf{e}_m = \varepsilon_{mij} + \delta_{mj}\mathbf{e}_i + \delta_{mi}\mathbf{e}_j. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Тип IV. Система скалярных кватернионов (бикомплексных чисел) с $C_1 = -1$, $C_2 = -1$, $C_3 = 1$ и законом композиции [4]

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_1^2 = -1,\ \mathbf{e}_2^2 = -1,\ \mathbf{e}_3^2 = 1, \qquad &\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3, \\ &\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \qquad &\mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Характеристическое уравнение $\det\left[(\mathbf{A}) - \lambda\,(\mathbf{E})\right] = 0$ при условии разложения уравнения для λ степени четыре на два уравнения степени два имеет только следующие корни: $(\lambda_1, \lambda_1^*, \lambda_1, \lambda_1^*)$, $(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2)$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, $(\lambda_1, \lambda_1^*, \lambda_2, \lambda_2^*)$. Эти четыре типа собственных значений матрицы $(\mathbf{A})$ соответствуют рассмотренным четырем Типам гиперкомплексных чисел, что и является доказательством **Леммы**. Для систем кватернионов и антикватернионов имеют место кратные комплексные и действительные корни, соответственно. Определитель матрицы равен произведению собственных значений и модулю числа в степени четыре, то есть выполняется равенство $\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|^4$, которое для четырех Типов чисел принимает действительное значение: $(\lambda_1, \lambda_1^*)^2$, $(\lambda_1)^2\,(\lambda_2)^2$, $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$, $(\lambda_1, \lambda_1^*)\,(\lambda_2, \lambda_2^*)$.

Для Типов **I** и **II** имеет место свойство антикоммутативности элементов $\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \circ \mathbf{e}_i$ $(i \neq j)$, а для Типов **III** и **IV** – коммутативности с $\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \circ \mathbf{e}_i$.

Целью работы является рассмотрение некоторых новых свойств таких гиперкомплексных. Остановимся подробно на системах Типа **I** и Типа **III**, поскольку именно они в отличие от других типов имеют отношение к релятивистским теориям. Это связано с тем, что только при равных значениях C_i величина $C_i a_i b_i$ в (1.4) равняется скалярному произведению векторов $\pm(\mathbf{ab})$ с точностью до знака в соответствующих трехмерных пространствах и определяется в преобразовании времени при переходе между инерциальными системами отсчетов. Также представляется необходимым дать матричное представление элементов группы трехмерных скоростей в релятивистских теориях.

2. Удвоение гиперкомплексной системы и матрица Адамара

Рассмотрим отличительные свойства систем Типа **I** и **II** с системами Типа **III** и **IV**. Запишем произвольное гиперкомплексное число в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2\mathbf{e}_2 \tag{2.1}$$

при процедуре удвоения Кэли-Диксона, где $\mathbf{z}_1 = a_0 + a_1\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{z}_2 = a_2 + a_3\mathbf{e}_1$ есть бинарные числа со свойством $\mathbf{zw} = \mathbf{wz}$. Сопряженные числа даются выражениями $\bar{\mathbf{z}}_1 = a_0 - a_1\mathbf{e}_1$, $\bar{\mathbf{z}}_2 = a_2 - a_3\mathbf{e}_1$ и модули чисел равняются $|\mathbf{z}_1| = \sqrt{\mathbf{z}_1\bar{\mathbf{z}}_1} = \sqrt{a_0^2 - C_1a_1^2}$, $|\mathbf{z}_2| = \sqrt{\mathbf{z}_2\bar{\mathbf{z}}_2} = \sqrt{a_2^2 - C_1a_3^2}$.

Для систем Типа **I** и **II**, а также Типа **III** и **IV** справедливы соответствующие равенства $\mathbf{z}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\bar{\mathbf{z}}$, $\mathbf{z}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{z}$ и законы композиции

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (\mathbf{z}_1\mathbf{w}_1 + C_2\bar{\mathbf{w}}_2\mathbf{z}_2) + (\mathbf{w}_2\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2\bar{\mathbf{w}}_1)\,\mathbf{e}_2, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (\mathbf{z}_1\mathbf{w}_1 + C_2\mathbf{w}_2\mathbf{z}_2) + (\mathbf{w}_2\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2\mathbf{w}_1)\,\mathbf{e}_2. \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{B} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{w}_1 = b_0 + b_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{w}_2 = b_2 + b_3\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{z}$ с $\mathbf{w}$ в (2.2) есть комплексное $(C_1 = -1)$ либо в (2.3) двойное число $(C_1 = 1)$.

Наряду с исходным числом $\mathbf{A}$ определяются еще три числа $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2\mathbf{e}_2 = a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{A}_1 &= \bar{\mathbf{z}}_1 + \bar{\mathbf{z}}_2\mathbf{e}_2 = a_0 - a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 - a_3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\mathbf{e}_2 = a_0 + a_1\mathbf{e}_1 - a_2\mathbf{e}_2 - a_3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{A}_3 &= \bar{\mathbf{z}}_1 - \bar{\mathbf{z}}_2\mathbf{e}_2 = a_0 - a_1\mathbf{e}_1 - a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{2.4}$$

и их сопряженные значения

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{A}} &= \bar{\mathbf{z}}_1 - \mathbf{z}_2\mathbf{e}_2 = a_0 - a_1\mathbf{e}_1 - a_2\mathbf{e}_2 - a_3\mathbf{e}_3,\\
\bar{\mathbf{A}}_1 &= \mathbf{z}_1 - \bar{\mathbf{z}}_2\mathbf{e}_2 = a_0 + a_1\mathbf{e}_1 - a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3,\\
\bar{\mathbf{A}}_2 &= \bar{\mathbf{z}}_1 + \mathbf{z}_2\mathbf{e}_2 = a_0 - a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3,\\
\bar{\mathbf{A}}_3 &= \mathbf{z}_1 + \bar{\mathbf{z}}_2\mathbf{e}_2 = a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 - a_3\mathbf{e}_3.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) вытекают зависимости для компонент числа

$$\begin{aligned}
a_0 &= \tfrac{1}{4}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3\right) = \tfrac{1}{4}\left(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_2 + \bar{\mathbf{A}}_3\right),\\
a_1\mathbf{e}_1 &= \tfrac{1}{4}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3\right) = -\tfrac{1}{4}\left(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{A}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_2 - \bar{\mathbf{A}}_3\right),\\
a_2\mathbf{e}_2 &= \tfrac{1}{4}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3\right) = -\tfrac{1}{4}\left(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}_1 - \bar{\mathbf{A}}_2 - \bar{\mathbf{A}}_3\right),\\
a_3\mathbf{e}_3 &= \tfrac{1}{4}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3\right) = -\tfrac{1}{4}\left(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{A}}_1 - \bar{\mathbf{A}}_2 + \bar{\mathbf{A}}_3\right)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

и следующие соотношения

$$\begin{gathered}
\bar{\mathbf{A}} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3\right), \quad \mathbf{A} = -\frac{1}{2}\left(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{A}}_1 - \bar{\mathbf{A}}_2 - \bar{\mathbf{A}}_3\right),\\
a_0 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \bar{\mathbf{A}}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_1 + \bar{\mathbf{A}}_1\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_2 + \bar{\mathbf{A}}_2\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_3 + \bar{\mathbf{A}}_3\right),\\
a_0b_0 + C_1a_1b_1 + C_2a_2b_2 + C_3a_3b_3 = \frac{1}{4}\left[\mathbf{A}\circ\mathbf{B} + \mathbf{A}_1\circ\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{B}_3\right],\\
a_0^2 - C_1a_1^2 - C_2a_2^2 - C_3a_3^2 = \frac{1}{4}\left[\mathbf{A}\circ\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}_1\circ\bar{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{A}_2\circ\bar{\mathbf{A}}_2 + \mathbf{A}_3\circ\bar{\mathbf{A}}_3\right],\\
a_0^2 + C_1a_1^2 + C_2a_2^2 + C_3a_3^2 = \frac{1}{4}\left[\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^2\right], \qquad (2.7)\\
3a_0^2 - C_1a_1^2 - C_2a_2^2 - C_3a_3^2 = \frac{1}{4}\big[(\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{A}) +\\
+(\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_1) + (\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{A}_1) + (\mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{A}_2)\big],\\
\overline{(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})} = \bar{\mathbf{B}}\circ\bar{\mathbf{A}}, \quad (\mathbf{A}\circ\mathbf{B})_1 = \mathbf{A}_1\circ\mathbf{B}_1, \quad (\mathbf{A}\circ\mathbf{B})_2 = \mathbf{A}_2\circ\mathbf{B}_2, \quad (\mathbf{A}\circ\mathbf{B})_3 = \mathbf{A}_3\circ\mathbf{B}_3,\\
\bar{\bar{\mathbf{A}}} = (\mathbf{A}_1)_1 = (\mathbf{A}_2)_2 = (\mathbf{A}_3)_3 = \mathbf{A}\\
(\mathbf{A}_1)_2 = (\mathbf{A}_2)_1 = \mathbf{A}_3, \quad (\mathbf{A}_2)_3 = (\mathbf{A}_3)_2 = \mathbf{A}_1, \quad (\mathbf{A}_3)_1 = (\mathbf{A}_1)_3 = \mathbf{A}_2.
\end{gathered}$$

Рассмотрим системы Типа **I** и **II**.

Числа $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ определяются однозначно и имеют свойства

$$\begin{gathered}
\mathbf{e}_2\circ\mathbf{A} = \mathbf{A}_1\circ\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1\circ\mathbf{A} = \mathbf{A}_2\circ\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3\circ\mathbf{A} = \mathbf{A}_3\circ\mathbf{e}_3,\\
\mathbf{e}_1\circ\mathbf{A}_1\circ\mathbf{e}_2 = \mathbf{A}_3\circ\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_3\circ\mathbf{A}_2\circ\mathbf{e}_1 = \mathbf{A}_1\circ\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2\circ\mathbf{A}_3\circ\mathbf{e}_3 = \mathbf{A}_2\circ\mathbf{e}_1,\\
\mathbf{e}_2\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{e}_3 = \mathbf{A}_1\circ\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{e}_2 = \mathbf{A}_2\circ\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_3\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{e}_1 = \mathbf{A}_3\circ\mathbf{e}_2.
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Соотношения (2.8) имеют одинаковый вид для сопряженных чисел (2.5). Определение сопряженного числа (2.5) к $\mathbf{A}$ позволяет получить, согласно (2.2), модуль числа

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A}\circ\bar{\mathbf{A}}} = \sqrt{|\mathbf{z}_1|^2 - C_2\,|\mathbf{z}_2|^2} = \sqrt{a_0^2 - C_1a_1^2 - C_2a_2^2 - C_3a_3^2}, \quad C_1C_2 = -C_3, \tag{2.9}$$

равный модулям $|\mathbf{A}_1| = |\mathbf{A}_2| = |\mathbf{A}_3|$, обратное число $\mathbf{A}^{-1} = \bar{\mathbf{A}}/\,|\mathbf{A}|^2$ с $(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\circ\mathbf{A}^{-1}$ и равенства

$$\begin{gathered}
|\mathbf{A}\circ\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|,\\
\tfrac{1}{2}\left[\mathbf{A}^2 + \overline{(\mathbf{A}^2)}\right] = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{z}_1^2 + \bar{\mathbf{z}}_1^2 + 2C_2\mathbf{z}_2\bar{\mathbf{z}}_2\right) = a_0^2 + C_1a_1^2 + C_2a_2^2 + C_3a_3^2\,.
\end{gathered} \tag{2.10}$$

Справедливы соотношения для кватернионов

$$|\mathbf{A}|^4 = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{vmatrix} = \left(\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}\right)^2 = \left(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^2,$$
$$(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & -a_2 \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

$$a_0^3 - 3a_0\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) = \frac{1}{4}\left[\mathbf{A}^3 + \mathbf{A}_1^3 + \mathbf{A}_2^3 + \mathbf{A}_3^3\right],$$
$$a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 = \frac{1}{4}\left[\mathbf{A}\circ\mathbf{B} + \mathbf{A}_1\circ\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{B}_3\right],$$
$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{1}{4}\left[\mathbf{A}\circ\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}_1\circ\bar{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{A}_2\circ\bar{\mathbf{A}}_2 + \mathbf{A}_3\circ\bar{\mathbf{A}}_3\right],$$
$$a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = \frac{1}{4}\left[\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^2\right] = \frac{1}{2}\left[\mathbf{A}^2 + \overline{(\mathbf{A}^2)}\right],$$
$$3a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{1}{4}\left[(\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{A}) + \right.$$
$$\left.(\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_1) + (\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{A}_1) + (\mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{A}_2)\right]$$

и антикватернионов

$$|\mathbf{A}|^4 = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{vmatrix} = \left(\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}\right)^2 =$$
$$= (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)^2 = \left(a_0 - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}\right)^2 \left(a_0 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}\right)^2,$$
$$(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} a_2 & -a_3 \\ a_3 & -a_2 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

$$a_0^3 + 3a_0\,(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2) = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A}^3 + \mathbf{A}_1^3 + \mathbf{A}_2^3 + \mathbf{A}_3^3\right],$$
$$a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3 = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A}\circ\mathbf{B} + \mathbf{A}_1\circ\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{B}_3\right],$$
$$a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A}\circ\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}_1\circ\bar{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{A}_2\circ\bar{\mathbf{A}}_2 + \mathbf{A}_3\circ\bar{\mathbf{A}}_3\right],$$
$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^2\right] = \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{A}^2 + \overline{(\mathbf{A}^2)}\right],$$
$$3a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = \tfrac{1}{4}\left[(\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{A}) + \right.$$
$$\left.+(\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_1) + (\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{A}_1) + (\mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{A}_2)\right].$$

Причем для кватернионов известный набор чисел $\mathbf{A}_1 = -\mathbf{e}_2\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{e}_2$, $\mathbf{A}_2 = -\mathbf{e}_1\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{e}_1$, $\mathbf{A}_3 = -\mathbf{e}_3\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{e}_3$, согласно (2.8), является необходимым и достаточным в кватернионном анализе (см., например, [5]) для определения a_0, a_1, a_2, a_3 в виде кватернионных полиномов, представленных зависимостями (2.6).

Теперь рассмотрим системы Типа **III** и **IV**. При использовании определения сопряженного числа (2.5) получим, согласно(2.3), модуль $|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A}\circ\bar{\mathbf{A}}}$ не равный действительному числу. В этом случае набор чисел (2.4) только постулируется, а не порождается аналогично (2.8), и определяется, с учетом (2.3), модуль числа [3, 4]

$$|\mathbf{A}| = \sqrt[4]{\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3} = \sqrt[4]{\left(\mathbf{z}_1^2 - C_2\mathbf{z}_2^2\right)\left(\bar{\mathbf{z}}_1^2 - C_2\bar{\mathbf{z}}_2^2\right)}, \quad C_1C_2 = C_3, \tag{2.13}$$

обратное число $\mathbf{A}^{-1}$= $(\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3)\big/|\mathbf{A}|^4$ с $(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\circ\mathbf{A}^{-1}$. В результате выполняется равенство $|\mathbf{A}\circ\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$, а также имеем известные выражения [3, 4] и некоторые новые соотношения для квадрачисел

$$\begin{gathered}
|\mathbf{A}|^4 = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{vmatrix} = \mathbf{A}\circ\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3 = \\
= \left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2\right)^2 - 4\left(a_1a_2 - a_0a_3\right)^2 = \\
= (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)(a_0 - a_1 + a_2 - a_3)(a_0 + a_1 - a_2 - a_3)(a_0 - a_1 - a_2 + a_3) = \\
= a_0^4 + a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 - 2\left(a_0^2a_1^2 + a_0^2a_2^2 + a_0^2a_3^2 + a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2 + a_3^2a_1^2\right) + 8a_0a_1a_2a_3, \\
(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{2.14}$$

$$\begin{gathered}
a_0^3 + 3a_0\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) + 6a_1a_2a_3 = \mathbf{A}^3 + \mathbf{A}_1^3 + \mathbf{A}_2^3 + \mathbf{A}_3^3, \\
\begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_2 \\ a_3 & a_0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_2 \\ a_3 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_0 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} = \\
= 4a_0\left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\right) + 8a_1a_2a_3 = \\
= \mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}\circ\mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}\circ\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}\circ\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_2, \\
2\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix} = \\
= 6a_0^2 - 2a_1^2 - 2a_2^2 - 2a_3^2 = \mathbf{A}\circ\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}\circ\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3, \\
a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A}\circ\mathbf{B} + \mathbf{A}_1\circ\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{B}_3\right], \\
a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A}\circ\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}_1\circ\bar{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{A}_2\circ\bar{\mathbf{A}}_2 + \mathbf{A}_3\circ\bar{\mathbf{A}}_3\right], \\
a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^2\right],
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}^{-1} = \tfrac{1}{|\mathbf{A}|^4}\big\{a_0\left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2\right) + 2a_3\left(a_1a_2 - a_0a_3\right) + \\
+ \left[-a_1\left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2\right) - 2a_2\left(a_1a_2 - a_0a_3\right)\right]\mathbf{e}_1 + \\
+ \left[-a_2\left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2\right) - 2a_1\left(a_1a_2 - a_0a_3\right)\right]\mathbf{e}_2 + \\
+ \left[a_3\left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2\right) + 2a_0\left(a_1a_2 - a_0a_3\right)\right]\mathbf{e}_3\big\}
\end{gathered}$$

и для скалярного кватерниона (бикомплексного числа)

$$|\mathbf{A}|^4 = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{vmatrix} = \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 =$$

$$= \left(a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2\right)^2 + 4\left(a_0 a_1 + a_2 a_3\right)^2 = \tag{2.15}$$

$$= a_0^4 + a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + 2\left(a_0^2 a_1^2 + a_0^2 a_2^2 - a_0^2 a_3^2 - a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2\right) + 8 a_0 a_1 a_2 a_3,$$

$$(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} a_2 & -a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix},$$

$$a_0^3 + 3a_0\left(a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\right) + 6 a_1 a_2 a_3 = \mathbf{A}^3 + \mathbf{A}_1^3 + \mathbf{A}_2^3 + \mathbf{A}_3^3,$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & -a_3 & -a_2 \\ -a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & a_3 \\ a_2 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & -a_1 & a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_2 \\ a_3 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 \\ a_1 & a_0 & -a_3 \\ a_2 & -a_3 & a_0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4a_0\left(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2\right) + 8 a_1 a_2 a_3 =$$

$$= \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2,$$

$$2\begin{vmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a_0 & -a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & -a_3 \\ -a_3 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix} =$$

$$= 6a_0^2 + 2a_1^2 + 2a_2^2 - 2a_3^2 = \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3,$$

$$a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3 = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A} \circ \mathbf{B} + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_3 \circ \mathbf{B}_3\right],$$

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}_1 \circ \bar{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{A}_2 \circ \bar{\mathbf{A}}_2 + \mathbf{A}_3 \circ \bar{\mathbf{A}}_3\right],$$

$$a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^2\right].$$

Перепишем (2.4) и (2.5) в матричном виде

$$\mathbf{A}_m = \sum_r^4 \mathbf{H}_{mr}\left(a_r \mathbf{e}_r\right), \quad \bar{\mathbf{A}}_m = \sum_r^4 \bar{\mathbf{H}}_{mr}\left(a_r \mathbf{e}_r\right). \tag{2.16}$$

Здесь числа $\mathbf{A}_m$ и $a_r\mathbf{e}_r$ отождествляются с $(\mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$ и $(a_0, a_1\mathbf{e}_1, a_2\mathbf{e}_2, a_3\mathbf{e}_3)$. Симметричная матрица $\mathbf{H}_{mr}$ есть матрица Адамара

$$\mathbf{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & -\mathbf{H}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & -\mathbf{H}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = 1 \tag{2.17}$$

порядка четыре с элементами равными числам ±1. Матрица Адамара находится методом Сильвестра рекуррентным вычислением из матриц $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ и широко используется в теории информации. Поскольку первая строка и первый столбец состоят из чисел $+1$, то имеем нормализованную матрицу Адамара. Причём элементы строк матрицы являются дискретными значениями ортогональных функций Уолша. Матрица имеет свойство $\mathbf{H}_4\mathbf{H}_4^T = 4\mathbf{I}$ (где $\mathbf{H}_4^T$ и $\mathbf{I}$ – транспонированная и единичная четырехмерные матрицы).

Ненормализованная матрица Адамара $\bar{\mathbf{H}}_{mr}$ с элементами равными числам ± 1 имеет свойства

$$\begin{gathered}\bar{\mathbf{H}}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{H}}_2 & -\mathbf{H}_2 \\ \bar{\mathbf{H}}_2 & \mathbf{H}_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{H}}_2 = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{H}}_1 & -\mathbf{H}_1 \\ \bar{\mathbf{H}}_1 & \mathbf{H}_1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{H}}_1 = 1, \\ \bar{\mathbf{H}}_4\bar{\mathbf{H}}_4^T = 4\mathbf{I}, \quad \mathbf{H}_4\bar{\mathbf{H}}_4 = 4\mathbf{g}_4, \quad \mathbf{g}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{2.18}$$

Матрица определяется так же, как кронекеровское произведение матриц предыдущего порядка. Порядок матрицы Адамара равняется числу $m = 2^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Рассмотрим Тип **III**. В определении модуля квадрачисла произведем замену $a_0 \to a_0 - \lambda$ и, согласно (2.14), получим равенство

$$\begin{gathered}|\mathbf{A} - \lambda|^4 = \det\left[(\mathbf{A}) - \lambda\,(\mathbf{E})\right] = \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 - \lambda & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 - \lambda & a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 - \lambda \end{vmatrix} = \\ = (\mathbf{A} - \lambda) \circ (\mathbf{A}_1 - \lambda) \circ (\mathbf{A}_2 - \lambda) \circ (\mathbf{A}_3 - \lambda).\end{gathered} \tag{2.19}$$

Используем известное разложение для определителя

$$\det\left[(\mathbf{A}) - \lambda\,(\mathbf{E})\right] = (-\lambda)^4 + S_1\,(-\lambda)^3 + S_2\,(-\lambda)^2 + S_3\,(-\lambda) + S_4, \tag{2.20}$$

где $S_1 = Sp\,(\mathbf{A}) = 4a_0$, $S_4 = \det(\mathbf{A})$ и S_p $(p = 1, 2, 3, 4)$ равны суммам главных миноров p -го порядка матрицы $(\mathbf{A})$. Тогда запишем следующие равенства

$$\begin{gathered}S_1 = \varepsilon_m\mathbf{A}_m, \quad S_2 = \tfrac{1}{2!}\varepsilon_{mr}\mathbf{A}_m \circ \mathbf{A}_r, \quad S_3 = \tfrac{1}{3!}\varepsilon_{mrn}\mathbf{A}_m \circ \mathbf{A}_r \circ \mathbf{A}_n, \\ S_4 = \tfrac{1}{4!}\varepsilon_{mrnl}\mathbf{A}_m \circ \mathbf{A}_r \circ \mathbf{A}_n \circ \mathbf{A}_l\end{gathered} \tag{2.21}$$

с абсолютно симметричными символами $\varepsilon_m = 1$, $\varepsilon_{mr} = \varepsilon_{mrn} = \varepsilon_{mrnl} = 1$, если $m \neq r \neq n \neq l$, а остальные значения нулевые. Выражения (2.21) с симметричными многочленами для гиперкомплексных чисел разных порядков совпадают с соотношениями (2.14). Из (2.20) следует характеристическое уравнение для симметричной матрицы $(\mathbf{A})$

$$\begin{gathered}\det\left[(\mathbf{A}) - \lambda\,(\mathbf{E})\right] = (-\lambda)^4 + S_1\,(-\lambda)^3 + S_2\,(-\lambda)^2 + S_3\,(-\lambda) + S_4 = \\ = (\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\,(\lambda - \lambda_3)\,(\lambda - \lambda_4) = 0,\end{gathered} \tag{2.22}$$

из которого получим формулы

$$S_1 = \varepsilon_m\lambda_m, \quad S_2 = \frac{1}{2!}\varepsilon_{mr}\lambda_m\lambda_r, \quad S_3 = \frac{1}{3!}\varepsilon_{mrn}\lambda_m\lambda_r\lambda_n, \quad S_4 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{mrnl}\lambda_m\lambda_r\lambda_n\lambda_l \tag{2.23}$$

с различными четырьмя характеристическими или собственными числами матрицы

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3,\\ \lambda_2 &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3,\\ \lambda_3 &= a_0 + a_1 - a_2 - a_3,\\ \lambda_4 &= a_0 - a_1 - a_2 + a_3.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Таким образом, симметричные многочлены для квадрачисел выражаются через суммы главных миноров матрицы $(\mathbf{A})$ или равняются симметричным многочленам для характеристических чисел.

Запишем собственные числа посредством матрицы Адамара $\lambda_m = \mathbf{H}_{mr} a_r$, где a_r отождествляется с (a_0, a_1, a_2, a_3). Для определителя матрицы получим значение

$$S_4 = \det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|^4 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = \mathbf{H}_{1i}\mathbf{H}_{2j}\mathbf{H}_{3k}\mathbf{H}_{4t} a_i a_j a_k a_t = \frac{1}{4!}\varepsilon_{mrnl}\mathbf{H}_{mi}\mathbf{H}_{rj}\mathbf{H}_{nk}\mathbf{H}_{lt} a_i a_j a_k a_t. \tag{2.25}$$

Аналогично рассматриваются и другие типы гиперкомплексных систем.

Определение. Для всех типов уравнение $|\mathbf{A} - \lambda| = 0$ представляет собой характеристическое уравнение для гиперкомплексного числа, а соответствующий набор чисел – характеристические или собственные числа.

Матрица $\mathbf{H}_2$ $(n = 1)$ дается для двух бинарных коммутативных и ассоциативных чисел $\mathbf{z} = a_0 + a_1\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{z}_1 = \bar{\mathbf{z}} = a_0 - a_1\mathbf{e}_1$ с законом композиции $\mathbf{zw} = (a_0b_0 + C_1a_1b_1) + (a_0b_1 + a_1b_0)\,\mathbf{e}_1$. Модуль числа и обратное число равняются выражениям $|\mathbf{z}| = \sqrt{\mathbf{z}\mathbf{z}_1} = \sqrt{a^2 - C_1a_1^2}$ и $\mathbf{z}^{-1} = \mathbf{z}_1\big/\,|\mathbf{z}|^2$. В дополнение выпишем некоторые соотношения для бинарных чисел

$$\begin{gathered} a_0 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{z} + \mathbf{z}_1) = \tfrac{1}{2}(\bar{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{z}}_1), \quad a_1\mathbf{e}_1 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_1) = \tfrac{1}{2}(\bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{z}}_1),\\ a_0b_0 + C_1a_1b_1 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{zw} + \mathbf{z}_1\mathbf{w}_1), \quad a_0^2 - C_1a_1^2 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{z}_1\bar{\mathbf{z}}_1),\\ a_0^2 + C_1a_1^2 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{z}^2 + \mathbf{z}_1^2) = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{z}^2 + \overline{(\mathbf{z}^2)}\right),\\ |\mathbf{z}|^2 = \begin{vmatrix} a_0 & C_1a_1\\ a_1 & a_0\end{vmatrix} = (\mathbf{z}\mathbf{z}_1) = (\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}}) = a_0^2 - C_1a_1^2,\\ a_0^3 + 3C_1a_0a_1^2 = \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{z}^3 + \mathbf{z}_1^3\right], \;\; a_0^4 + 6C_1a_0^2a_1^2 + C_1^2a_1^4 = \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{z}^4 + \mathbf{z}_1^4\right]. \end{gathered} \tag{2.26}$$

3. Преобразования координат и времени в релятивистских теориях

Приведем преобразования координат и координатного времени, вытекающих из композиций гиперкомплексных чисел, в различных релятивистских теориях с $a_0 = ct$ и $\mathbf{a} = \mathbf{x}$. Согласно принципу относительности выполняется форм-инвариантность модуля числа $(ct, \mathbf{x})$ и следующее условие

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = 0 &\qquad \text{при} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{v}'t',\\ \mathbf{x}' = 0 &\qquad \text{при} \quad \mathbf{x} = \mathbf{v}t \end{aligned} \tag{3.1}$$

для начал координат инерциальных систем отсчетов (K) с t, $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ и (K') с t', $\mathbf{x}' = \{x', y', z'\}$, движущихся с относительными скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$, соответственно. Взаимосвязь между скоростями определяется из групповых свойств законов композиций гиперкомплексных чисел.

Тип I. Имеет место релятивистская теория евклидового пространства-времени с форм-инвариантным модулем кватерниона

$$\left(c^2t^2+x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}=\left(c^2t'^2+x'^2+y'^2+z'^2\right)^{1/2}. \tag{3.2}$$

Преобразования координат и времени следуют из композиции кватернионов в виде специального ортогонального преобразования

$$(ct',\mathbf{x}')=(k',\mathbf{k}')\circ(ct,\mathbf{x}) \tag{3.3}$$

с модулем кватерниона $\left(k'^2+\mathbf{k}'^2\right)^{1/2}=1$ для выполнения равенства (3.2) и $\mathbf{k}'^2=(\mathbf{k}'\mathbf{k}')$. Согласно (3.1) и (3.2) получим следующие соотношения

$$\begin{gathered}(k',\mathbf{k}')=\frac{(1,\mathbf{v}'/c)}{N(\mathbf{v}'/c)},\quad N(\mathbf{v}'/c)=(1+\mathbf{v}'^2/c^2)^{1/2},\\ k'=\frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)},\quad \mathbf{k}'=\frac{\mathbf{v}'/c}{N(\mathbf{v}'/c)}.\end{gathered} \tag{3.4}$$

В итоге запишем прямые преобразования в векторной форме

$$\begin{gathered}\mathbf{x}'=\frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left\{\mathbf{x}+\mathbf{v}'t+\frac{1}{c}[\mathbf{v}'\mathbf{x}]\right\},\\ t'=\frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left[t-\frac{1}{c^2}(\mathbf{v}'\mathbf{x})\right]\end{gathered} \tag{3.5}$$

и координатном представлении

$$\begin{gathered}x'_i=\frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left[x_i+v'_it+\tfrac{1}{c}e_{ijk}v'_jx_k\right],\\ t'=\frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left[t-\tfrac{1}{c^2}(v'_ix_i)\right]\end{gathered} \tag{3.6}$$

с векторным $[\mathbf{v}'\mathbf{x}]_i=e_{ikl}v'_kx_l$ и скалярным $(\mathbf{v}'\mathbf{x})=\delta_{ij}v'_ix_j$ произведениями.

Из (3.5) вытекает некоммутативный закон композиции элементов группы координатных трехмерных скоростей в евклидовом пространстве

$$\mathbf{u}'=\mathbf{v}'\circ\mathbf{u}=\frac{\mathbf{v}'+\mathbf{u}+[\mathbf{v}'\mathbf{u}]/c}{1-(\mathbf{v}'\mathbf{u})/c^2}, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{u}'=\mathbf{x}'/t'$ и $\mathbf{u}=\mathbf{x}/t$ есть скорости в инерциальных системах отсчетов (K') и (K).

Обратные преобразования следуют из композиции $(ct,\mathbf{x})=(k,\mathbf{k})\circ(ct',\mathbf{x}')$ с условием $(k,\mathbf{k})\circ(k',\mathbf{k}')=1$, где в обратном кватернионе $(k,\mathbf{k})=(1,\mathbf{v}/c)/N(\mathbf{v}/c)$ имеет место противоположная скорость $\mathbf{v}=-\mathbf{v}'$.

В случае общего ортогонального преобразования

$$(ct',\mathbf{x}')=(k',\mathbf{k}')\circ(ct,\mathbf{x})\circ(k',\mathbf{k}') \tag{3.8}$$

с модулем кватерниона $\left(k'^2+\mathbf{k}'^2\right)^{1/2}=1$ получим, согласно (3.1) и (3.2), следующие величины и соотношения

$$\begin{gathered}(k',\mathbf{k}')\circ(k',\mathbf{k}')=\frac{(1,\mathbf{v}'/c)}{N(\mathbf{v}'/c)},\quad N(\mathbf{v}'/c)=(1+\mathbf{v}'^2/c^2)^{1/2},\\ k'=\left[\frac{1+N(\mathbf{v}'/c)}{2N(\mathbf{v}'/c)}\right]^{1/2},\quad \mathbf{k}'=\frac{\mathbf{v}'/c}{\{2N(\mathbf{v}'/c)[1+N(\mathbf{v}'/c)]\}^{1/2}},\end{gathered} \tag{3.9}$$

а также прямые преобразования в векторной форме

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + \frac{1}{\mathbf{v}'^2}\left[\frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)} - 1\right](\mathbf{x}\mathbf{v}')\,\mathbf{v}' + \frac{\mathbf{v}'t}{N(\mathbf{v}'/c)} = \\ &= \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left\{\mathbf{x} + \mathbf{v}'t - \frac{1}{c^2}\frac{[\mathbf{v}'[\mathbf{v}'\mathbf{x}]]}{[1+N(\mathbf{v}'/c)]}\right\}, \\ t' &= \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left[t - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}'\mathbf{x})\right]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

В таком варианте имеем формулы $\mathbf{x}_{\parallel} = (\mathbf{x}\mathbf{v}')\,\mathbf{v}'/\mathbf{v}'^2$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}$, инвариантность компоненты $\mathbf{x}_{\perp}$, преобразования (3.10) в эквивалентном виде

$$\mathbf{x}'_{\parallel} = \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left(\mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{v}'t\right), \quad \mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}, \quad t' = \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left(t - \frac{|\mathbf{v}'|}{c^2}\left|\mathbf{x}_{\parallel}\right|\right) \tag{3.11}$$

и некоммутативный закон композиции элементов группы координатных трехмерных скоростей в евклидовом пространстве

$$\mathbf{u}' = \mathbf{v}' \circ \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{u} - [1 + N(\mathbf{v}'/c)]^{-1}[\mathbf{v}'[\mathbf{v}'\mathbf{u}]]/c^2}{1 - (\mathbf{v}'\mathbf{u})/c^2}. \tag{3.12}$$

Для обратных преобразований имеем композицию $(ct, \mathbf{x}) = (k, \mathbf{k}) \circ (ct', \mathbf{x}') \circ (k, \mathbf{k})$ с условием $(k, \mathbf{k}) \circ (k', \mathbf{k}') = 1$ и, следовательно, получим равенство $\mathbf{v} = -\mathbf{v}'$.

Тип IA. Имеет место релятивистская теория псевдоевклидова пространства-времени (в случае специальной теории относительности). Преобразования Лоренца в векторной форме [6]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + \frac{1}{\mathbf{v}'^2}\left[\frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)} - 1\right](\mathbf{x}\mathbf{v}')\,v' + \frac{\mathbf{v}'t}{N(\mathbf{v}'/c)} = \\ &= \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left\{\mathbf{x} + \mathbf{v}'t + \frac{1}{c^2}\frac{[\mathbf{v}'[\mathbf{v}'\mathbf{x}]]}{[1+N(\mathbf{v}'/c)]}\right\}, \\ t' &= \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left[t + \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}'\mathbf{x})\right], \end{aligned} \tag{3.13}$$

вытекают из композиции

$$(ict', \mathbf{x}') = (k', \mathbf{k}') \circ (ict, \mathbf{x}) \circ (k', \mathbf{k}') \tag{3.14}$$

в системе бикватернионов с модулем $\left(k'^2 + \mathbf{k}'^2\right)^{1/2} = 1$, получаемой из системы **Типа I** при замене $ct \to ict$. Здесь, согласно (3.1) и (3.2), имеем величины и соотношения

$$\begin{gathered} (k', \mathbf{k}') \circ (k', \mathbf{k}') = \frac{(1, -i\mathbf{v}'/c)}{N(\mathbf{v}'/c)}, \quad N(\mathbf{v}'/c) = \left(1 - \mathbf{v}'^2/c^2\right)^{1/2}, \\ k' = \left[\frac{1 + N(\mathbf{v}'/c)}{2N(\mathbf{v}'/c)}\right]^{1/2}, \quad \mathbf{k}' = -i\frac{\mathbf{v}'/c}{\{2N(\mathbf{v}'/c)[1 + N(\mathbf{v}'/c)]\}^{1/2}}. \end{gathered} \tag{3.15}$$

При преобразованиях сохраняется форм-инвариантным модуль бикватерниона

$$\left(-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} = \left(-c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{1/2} \tag{3.16}$$

и компонента $\mathbf{x}_\perp$ перпендикулярная к $\mathbf{v}'$, что очевидно из исходных формул [6]

$$\begin{gathered}\mathbf{x}'_\parallel=\frac{1}{N\left(\mathbf{v}'/c\right)}\left(\mathbf{x}_\parallel+\mathbf{v}'t\right),\quad \mathbf{x}'_\perp=\mathbf{x}_\perp,\quad t'=\frac{1}{N\left(\mathbf{v}'/c\right)}\left(t+\frac{|\mathbf{v}'|}{c^2}\left|\mathbf{x}_\parallel\right|\right),\\ \mathbf{x}_\parallel=\frac{\left(\mathbf{x}\mathbf{v}'\right)\mathbf{v}'}{\mathbf{v}'^2},\quad \mathbf{x}=\mathbf{x}_\parallel+\mathbf{x}_\perp,\quad \mathbf{x}'=\mathbf{x}'_\parallel+\mathbf{x}'_\perp\end{gathered}\tag{3.17}$$

для вывода (3.13). Данный подход используется в определении формул (3.11) при выводе преобразований (3.10).

Из (3.13) следует некоммутативный закон композиции элементов группы координатных трехмерных скоростей в евклидовом пространстве

$$\mathbf{u}'=\mathbf{v}'\circ\mathbf{u}=\frac{\mathbf{v}'+\mathbf{u}+\left[1+N\left(\mathbf{v}'/c\right)\right]^{-1}\left[\mathbf{v}'\left[\mathbf{v}'\mathbf{u}\right]\right]/c^2}{1+\left(\mathbf{v}'\mathbf{u}\right)/c^2}\tag{3.18}$$

и его свойства хорошо изучены.

Случай специального ортогонального преобразования в системе бикватернионов имеет место лишь при $\mathbf{v}=(v_x,0,0)$ и $\mathbf{x}=(x,0,0)$ и подробно рассматривался в [7].

Используя условие для обратного бикватерниона $(k,\mathbf{k})\circ(k',\mathbf{k}')=1$ в композиции с обратными преобразованиями, находим равенство $\mathbf{v}=-\mathbf{v}'$.

Тип III. Имеет место релятивистская теория в четырехмерной проективной геометрии. Справедливы преобразования [8, 9] для пространства-времени Бервальда-Моора, представленные в векторной форме [10]

$$\begin{gathered}\mathbf{x}'=\frac{1}{N\left(\mathbf{v}'/c\right)}\left\{\mathbf{x}+\mathbf{v}'t+\frac{1}{4c}\sum_m^4\boldsymbol{\varepsilon}^m\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v}'\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{x}\right)\right\},\\ t'=\frac{1}{N\left(\mathbf{v}'/c\right)}\left[t+\frac{1}{4c^2}\sum_m^4\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v}'\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{x}\right)\right]\end{gathered}\tag{3.19}$$

и ее аналоге

$$\begin{gathered}\mathbf{x}'=\frac{1}{N\left(\mathbf{v}'/c\right)}\left[\mathbf{x}+\mathbf{v}'t+\frac{1}{c}\left\{\mathbf{v}'\mathbf{x}\right\}\right],\\ t'=\frac{1}{N\left(\mathbf{v}'/c\right)}\left[t+\frac{1}{c^2}\left(\mathbf{v}'\mathbf{x}\right)\right],\end{gathered}\tag{3.20}$$

а также в координатном виде [9]

$$\begin{gathered}x'_i=\frac{1}{N\left(\mathbf{v}'/c\right)}\left[x_i+v'_it+\frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}v'_jx_k\right],\\ t'=\frac{1}{N\left(\mathbf{v}'/c\right)}\left[t+\frac{1}{c^2}\left(v'_ix_i\right)\right].\end{gathered}\tag{3.21}$$

Инвариантные значения компонентов векторов $\boldsymbol{\varepsilon}^1=(1,\,1,\,1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2=(-1,\,1,-1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^3=(1,\,-1,\,-1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^4=(-1,-1,\,1)$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{gathered}\sum_m^4\varepsilon_i^m=0,\ \ \tfrac{1}{4}\sum_m^4\varepsilon_i^m\varepsilon_j^m=\delta_{ij},\ \ \tfrac{1}{4}\sum_m^4\varepsilon_i^m\varepsilon_j^m\varepsilon_k^m=\varepsilon_{ijk},\ \ 1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{\varepsilon}^r\right)=0,\ \ 1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\right)^2=4,\\ \left\{\mathbf{v}'\mathbf{x}\right\}=\tfrac{1}{4}\sum_m^4\boldsymbol{\varepsilon}^m\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v}'\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{x}\right),\quad \left(\mathbf{v}'\mathbf{x}\right)=\tfrac{1}{4}\sum_m^4\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v}'\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{x}\right)\end{gathered}\tag{3.22}$$

и представляют собой выделенные направления в трехмерном пространстве. Концы этих векторов есть вершины специально ориентированного координатного тетраэдра [8, 9] В общем случае имеет место произвольно ориентированный координатный тетраэдр [10] с другими значениями компонентов векторов при выполнении равенств (3.22).

При преобразованиях остается форм-инвариантным модуль квадрачисла (или метрическая функция глобального пространства-времени Бервальда-Моора) в векторной форме

$$\left\{\prod_m^4 \left[ct + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x})\right]\right\}^{1/4} = \left\{\prod_m^4 \left[ct' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}')\right]\right\}^{1/4} \tag{3.23}$$

или в координатном виде

$$\begin{gathered}\left[c^4t^4 + x^4 + y^4 + z^4 - 2\left(c^2t^2x^2 + c^2t^2y^2 + c^2t^2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right) + 8ctxyz\right]^{1/4} = \\ = \left[c^4t'^4 + x'^4 + y'^4 + z'^4 - 2\left(c^2t'^2x'^2 + c^2t'^2y'^2 + c^2t'^2z'^2 + x'^2y'^2 + y'^2z'^2 + z'^2x'^2\right) + 8ct'x'y'z'\right]^{1/4}.\end{gathered} \tag{3.24}$$

Новое произведение векторов $\{\mathbf{v}'\mathbf{x}\}_i = \varepsilon_{ikl} v'_k x_l$ коммутативно, дистрибутивно относительно сложения, сочетательно относительно умножения на любое число, равно нулю при равенстве нулю одного из векторов.

Выпишем некоторые соотношения для произведений векторов

$$\begin{gathered}\{\mathbf{ab}\} = \{\mathbf{ba}\}, \quad \{\mathbf{ab}\} + \{\mathbf{ac}\} = \{\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})\}, \\ (\{\mathbf{ab}\}\,\mathbf{c}) = (\{\mathbf{ac}\}\,\mathbf{b}) = (\{\mathbf{ba}\}\,\mathbf{c}) = (\{\mathbf{bc}\}\,\mathbf{a}) = (\{\mathbf{ca}\}\,\mathbf{b}) = (\{\mathbf{cb}\}\,\mathbf{a}), \\ \{\mathbf{a}\{\mathbf{bc}\}\} - \{\mathbf{c}\{\mathbf{ba}\}\} = \mathbf{c}(\mathbf{ba}) - \mathbf{a}(\mathbf{bc}), \\ \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + (\{\mathbf{aa}\}\{\mathbf{bb}\}) = (\mathbf{ab})^2 + \{\mathbf{ab}\}^2, \\ \{\mathbf{aa}\}_i = 2a_k a_l, \quad \{\mathbf{a}\{\mathbf{aa}\}\}_i = 2a_i\left(a_k^2 + a_l^2\right), \\ (\mathbf{a}\{\mathbf{aa}\}) = 6a_i a_j a_k, \quad (i \neq i \neq k), \\ \{\mathbf{a}\{\mathbf{a}\{\mathbf{aa}\}\}\} = \{\mathbf{aa}\}(\mathbf{aa}) - \tfrac{1}{3}\mathbf{a}(\mathbf{a}\{\mathbf{aa}\}).\end{gathered} \tag{3.25}$$

Преобразования координат и времени следуют из композиции квадрачисел

$$(ct', \mathbf{x}') = (k', \mathbf{k}') \circ (ct, \mathbf{x}) \tag{3.26}$$

с модулем квадрачисла $\left\{\prod\limits_m^4 \left[k' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{k}')\right]\right\}^{1/4} = 1$ для выполнения равенства (3.23) и, согласно (3.1), величинами и соотношениями

$$\begin{gathered}(k', \mathbf{k}') = \frac{(1, \mathbf{v}'/c)}{N(\mathbf{v}'/c)}, \quad N(\mathbf{v}'/c) = \left\{\prod_m^4 \left[1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')/c\right]\right\}^{1/4}, \\ k' = \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}, \quad \mathbf{k}' = \frac{\mathbf{v}'/c}{N(\mathbf{v}'/c)}.\end{gathered} \tag{3.27}$$

Из (3.19) и (3.20) получим коммутативный закон композиции элементов группы координатных трехмерных скоростей в рассматриваемом пространстве

$$\mathbf{u}' = \mathbf{v}' \circ \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{u} + \frac{1}{4}\sum\limits_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{u})/c}{1 + (\mathbf{v}'\mathbf{u})/c^2} = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{u} + \{\mathbf{v}'\mathbf{u}\}/c}{1 + (\mathbf{v}'\mathbf{u})/c^2}. \tag{3.28}$$

Обратные преобразования следуют из композиции $(ct, \mathbf{x}) = (k, \mathbf{k}) \circ (ct', \mathbf{x}')$ с условием $(k, \mathbf{k}) \circ (k', \mathbf{k}') = 1$, из которой вытекает равенство $(k, \mathbf{k}) = (1, \mathbf{v}/c)/N(\mathbf{v}/c)$. В итоге получим композицию квадрачисел

$$\frac{(1, \mathbf{v}'/c)}{N(\mathbf{v}'/c)} \circ \frac{(1, \mathbf{v}/c)}{N(\mathbf{v}/c)} = 1, \tag{3.29}$$

которая после умножения на обратное квадрачисло $(1, \mathbf{v}/c)^{-1}$ запишется так

$$\frac{(1, \mathbf{v}'/c)}{N(\mathbf{v}'/c)\,N(\mathbf{v}/c)} = (1, \mathbf{v}/c)^{-1}. \tag{3.30}$$

Согласно (2.4), рассмотрим квадрачисла

$$\begin{aligned} \mathbf{A} =&\ 1 + (v_x\mathbf{e}_1 + v_y\mathbf{e}_2 + v_x\mathbf{e}_3)/c, \\ \mathbf{A}_1 =&\ 1 + (-v_x\mathbf{e}_1 + v_y\mathbf{e}_2 - v_x\mathbf{e}_3)/c, \\ \mathbf{A}_2 =&\ 1 + (v_x\mathbf{e}_1 - v_y\mathbf{e}_2 - v_x\mathbf{e}_3)/c, \\ \mathbf{A}_3 =&\ 1 + (-v_x\mathbf{e}_1 - v_y\mathbf{e}_2 + v_x\mathbf{e}_3)/c \end{aligned} \tag{3.31}$$

и, используя первое равенство (2.6) для суммы квадрачисел, получим из (3.30) равенства

$$\begin{gathered} \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)\,N(\mathbf{v}/c)} = \frac{1}{4}\left(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}_1^{-1} + \mathbf{A}_2^{-1} + \mathbf{A}_3^{-1}\right) = \\ = \frac{1}{4N^4(\mathbf{v}/c)}\left(\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2\right), \end{gathered} \tag{3.32}$$

$$(1, \mathbf{v}'/c) = \frac{\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3}{\left(\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2\right)/4}. \tag{3.33}$$

Учитываем соотношения (2.14) для композиции квадрачисел и находим скорость v' в координатном виде

$$\begin{aligned} v_x^{'} &= \frac{-v_x\left[1 - \left(v_x^2 + v_y^2 - v_z^2\right)/c^2\right] - 2v_y(v_xv_y - cv_z)/c^3}{1 - \left(v_x^2 + v_y^2 - v_z^2\right)/c^2 + 2v_z(v_xv_y - cv_z)/c^3}, \\ v_y^{'} &= \frac{-v_y\left[1 - \left(v_x^2 + v_y^2 - v_z^2\right)/c^2\right] - 2v_x(v_xv_y - cv_z)/c^3}{1 - \left(v_x^2 + v_y^2 - v_z^2\right)/c^2 + 2v_z(v_xv_y - cv_z)/c^3}, \\ v_z^{'} &= \frac{v_z\left[1 - \left(v_x^2 + v_y^2 - v_z^2\right)/c^2\right] + 2(v_xv_y - cv_z)/c^3}{1 - \left(v_x^2 + v_y^2 - v_z^2\right)/c^2 + 2v_z(v_xv_y - cv_z)/c^3} \end{aligned} \tag{3.34}$$

или перепишем в векторной форме [10]

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \left[\frac{1}{4}\sum_m^4 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v})/c}\right]\left[\frac{1}{4}\sum_m^4 \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v})/c}\right]^{-1} = \\ &= \left[-\frac{1}{4}\sum_m^4 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v})/c}\right]\left[\frac{1}{4}\sum_m^4 \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v})/c}\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

В отличие от случаев, рассмотренных для **Типа I**, относительная скорость $\mathbf{v}'$ в системе (K') не равняется противоположной $(-\mathbf{v})$ в системе отсчета (K).

Преобразования координат и времени (3.19)–(3.21) образуют группу, к которой добавим преобразования частичного отражения

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.36}$$

полного отражения и тождественного преобразования

$$P_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

с $\det P_1 = \det P_2 = \det P_3 = \det I = 1$.

Группа, состоящая из элементов I, P_1, P_2, P_3, с законом композиции

$$\begin{gathered} P_1^2 = P_2^2 = P_3^2 = I^2 = I\,,\ P_1 I = I P_1\,,\ P_2 I = I P_2\,,\ P_3 I = I P_3\,, \\ P_1 P_2 = P_2 P_1 = P_3, \quad P_2 P_3 = P_3 P_2 = P_1\,,\ P_3 P_1 = P_1 P_3 = P_2 \end{gathered} \tag{3.38}$$

есть коммутативная группа отражений.

4. Матричное представление элементов группы трехмерных скоростей

Рассмотрим матричное представление элементов группы трехмерных скоростей для релятивистских теорий в системах кватернионов и квадрачисел, не различая скорости в разных системах отсчетов и относительные скорости между ними с равенством $c = 1$.

Тип I. В случае специального ортогонального преобразования преобразуем (3.3) и запишем преобразование кватернионов

$$\frac{(1,\mathbf{u})}{N(\mathbf{u})} = \frac{(1,\mathbf{u}_1)}{N(\mathbf{u}_1)} \circ \frac{(1,\mathbf{u}_2)}{N(\mathbf{u}_2)}, \quad N(\mathbf{u}) = \left(1+\mathbf{u}^2\right)^{1/2} \tag{4.1}$$

с некоммутативным законом композиции группы трехмерных скоростей

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + [\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2]}{1 - (\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2)}\,. \tag{4.2}$$

Выполняются групповые аксиомы: ассоциативности $(\mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2) \circ \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \circ (\mathbf{u}_2 \circ \mathbf{u}_3)$, единичный элемент в $\mathbf{u} \circ \mathbf{E} = \mathbf{u}$ соответствует кватерниону $(1,\mathbf{0})$ с нулевым значением скорости, обратный элемент в $\mathbf{u} \circ \mathbf{u}^{-1} = \mathbf{E}$ (или в $\mathbf{u} + \mathbf{u}^{-1} + [\mathbf{u}\mathbf{u}^{-1}] = 0$), равняется противоположной скорости, то есть $\mathbf{u}^{-1} = -\mathbf{u}$. Таким образом, обратный кватернион имеет известный вид

$$(1,\mathbf{u})^{-1} = \frac{(1,\mathbf{u}^{-1})}{N(\mathbf{u})} = \frac{(1,-\mathbf{u})}{N(\mathbf{u})} \tag{4.3}$$

и, соответственно, вытекает равенство $\mathbf{v}' = \mathbf{v}^{-1} = -\mathbf{v}$ для относительных скоростей в релятивистской теории. Используем равенства

$$N(\mathbf{u}) = \frac{N(\mathbf{u}_1)\,N(\mathbf{u}_2)}{1 - (\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2)}, \quad N(\mathbf{u})\,N\left(\mathbf{u}^{-1}\right) = \left[1 - \left(\mathbf{u}\mathbf{u}^{-1}\right)\right], \tag{4.4}$$

вытекающие из (3.2).

Представим кватернион $(1,\mathbf{u})\,/\,N(\mathbf{u})$ с учетом (1.6) и (1.7) в форме матрицы

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{A}(\mathbf{u})}{|\mathbf{A}(\mathbf{u})|} = \frac{1}{N(\mathbf{u})} \begin{pmatrix} 1 & -u_x & -u_y & -u_z \\ u_x & 1 & -u_z & u_y \\ u_y & u_z & 1 & -u_x \\ u_z & -u_y & u_x & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

где определитель имеет значение $|\mathbf{A}(\mathbf{u})| = N(\mathbf{u})$.

Множество таких матриц образует группу по бинарной операции умножения $\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \mathbf{H}(\mathbf{u}_1)\,\mathbf{H}(\mathbf{u}_2)$, которая есть обычная операция умножения матриц. Умножение ассоциативно, единичный элемент в $\mathbf{H}(\mathbf{u})\,\mathbf{E} = \mathbf{H}(\mathbf{u})$ соответствует единичной матрице $\mathbf{E} = \mathbf{H}(\mathbf{0})$ и обратный элемент в $\mathbf{H}(\mathbf{u})\,\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{u}) = \mathbf{E}$ есть обратная матрица

$$\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{u}) = \mathbf{H}\left(\mathbf{u}^{-1}\right) = \frac{1}{N\left(\mathbf{u}^{-1}\right)}\begin{pmatrix} 1 & -u_x^{-1} & -u_y^{-1} & -u_z^{-1} \\ u_x^{-1} & 1 & -u_z^{-1} & u_y^{-1} \\ u_y^{-1} & u_z^{-1} & 1 & -u_x^{-1} \\ u_z^{-1} & -u_y^{-1} & u_x^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{N(\mathbf{u})}\begin{pmatrix} 1 & u_x & u_y & u_z \\ -u_x & 1 & u_z & -u_y \\ -u_y & -u_z & 1 & u_x \\ -u_z & u_y & -u_x & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Тип III. Запишем преобразования квадрачисел (3.26) в виде

$$\frac{(1,\mathbf{u})}{N(\mathbf{u})} = \frac{(1,\mathbf{u}_1)}{N(\mathbf{u}_1)} \circ \frac{(1,\mathbf{u}_2)}{N(\mathbf{u}_2)} \tag{4.7}$$

с коммутативным законом композиции элементов трехмерных скоростей

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\}}{1 + (\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2)}, \tag{4.8}$$

где модуль квадрачисла

$$\begin{array}{c} N(\mathbf{u}) = \sqrt[4]{\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3} = 1 + u_x^4 + u_y^4 + u_z^4 - \\ -2\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_x^2u_y^2 + u_y^2u_z^2 + u_z^2u_x^2\right) + 8u_xu_yu_z \end{array}. \tag{4.9}$$

Обратное квадрачисло $(1,\mathbf{u})^{-1} = \left(1,\mathbf{u}^{-1}\right)/N(\mathbf{u})$ имеет обратный элемент $\mathbf{u}^{-1}$ группы трехмерных скоростей, не равный противоположному элементу $(-\mathbf{u})$ и удовлетворяющий условию $\mathbf{u} + \mathbf{u}^{-1} + \left\{\mathbf{u}\mathbf{u}^{-1}\right\} = 0$. Групповые свойства закона композиции (4.8) подробно изучены в [10]. Отметим лишь необходимые равенства

$$N(\mathbf{u}) = \frac{N(\mathbf{u}_1)\,N(\mathbf{u}_2)}{1 + (\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2)}, \quad N(\mathbf{u})\,N\left(\mathbf{u}^{-1}\right) = 1 + \left(\mathbf{u}\mathbf{u}^{-1}\right). \tag{4.10}$$

Представим квадрачисло $(1,\mathbf{u})/N(\mathbf{u})$ в форме матрицы

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{A}(\mathbf{u})}{|\mathbf{A}(\mathbf{u})|} = \frac{1}{N(\mathbf{u})}\begin{pmatrix} 1 & u_x & u_y & u_z \\ u_x & 1 & u_z & u_y \\ u_y & u_z & 1 & u_x \\ u_z & u_y & u_x & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Множество матриц вида (4.11) образуют абелеву группу матриц с законом композиции $\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \mathbf{H}(\mathbf{u}_1)\,\mathbf{H}(\mathbf{u}_2)$. Умножение ассоциативно, единичный элемент в $\mathbf{H}(\mathbf{u})\,\mathbf{E} = \mathbf{H}(\mathbf{u})$ соответствует единичной матрице $\mathbf{E} = \mathbf{H}(\mathbf{0})$ и обратный элемент в $\mathbf{H}(\mathbf{u})\,\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{u}) = \mathbf{E}$ есть обратная матрица

$$\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{u}) = \mathbf{H}\left(\mathbf{u}^{-1}\right) = \frac{1}{N\left(\mathbf{u}^{-1}\right)}\begin{pmatrix} 1 & u_x^{-1} & u_y^{-1} & u_z^{-1} \\ u_x^{-1} & 1 & u_z^{-1} & u_y^{-1} \\ u_y^{-1} & u_z^{-1} & 1 & u_x^{-1} \\ u_z^{-1} & u_y^{-1} & u_x^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Наряду с исходной матрицей $H\left(\mathbf{u}\right)$ определим еще три матрицы $\mathbf{H}_1\left(\mathbf{u}\right)$, $\mathbf{H}_2\left(\mathbf{u}\right)$, $\mathbf{H}_3\left(\mathbf{u}\right)$ вида

$$\mathbf{H}_1\left(\mathbf{u}\right)=\frac{\mathbf{A}_1\left(\mathbf{u}\right)}{\left|\mathbf{A}_1\left(\mathbf{u}\right)\right|}=\frac{1}{N\left(\mathbf{u}\right)}\begin{pmatrix}1 & -u_x & u_y & -u_z\\ -u_x & 1 & -u_z & u_y\\ u_y & -u_z & 1 & -u_x\\ -u_z & u_y & -u_x & 1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2\left(\mathbf{u}\right)=\frac{\mathbf{A}_2\left(\mathbf{u}\right)}{\left|\mathbf{A}_2\left(\mathbf{u}\right)\right|}=\frac{1}{N\left(\mathbf{u}\right)}\begin{pmatrix}1 & u_x & -u_y & -u_z\\ u_x & 1 & -u_z & -u_y\\ -u_y & -u_z & 1 & u_x\\ -u_z & -u_y & u_x & 1\end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

$$\mathbf{H}_3\left(\mathbf{u}\right)=\frac{\mathbf{A}_3\left(\mathbf{u}\right)}{\left|\mathbf{A}_3\left(\mathbf{u}\right)\right|}=\frac{1}{N\left(\mathbf{u}\right)}\begin{pmatrix}1 & -u_x & -u_y & u_z\\ -u_x & 1 & u_z & -u_y\\ -u_y & u_z & 1 & -u_x\\ u_z & -u_y & -u_x & 1\end{pmatrix},$$

где определители имеют значение $\left|\mathbf{A}_1\left(\mathbf{u}\right)\right|=\left|\mathbf{A}_2\left(\mathbf{u}\right)\right|=\left|\mathbf{A}_3\left(\mathbf{u}\right)\right|=N\left(\mathbf{u}\right)$

Далее, используя значения обратной матрицы

$$\frac{\mathbf{A}\left(\mathbf{u}^{-1}\right)}{N\left(\mathbf{u}^{-1}\right)N\left(\mathbf{u}\right)}=\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{u}\right), \tag{4.14}$$

и других обратных матриц из (4.13), получим равенство

$$\frac{1}{N\left(\mathbf{u}^{-1}\right)N\left(\mathbf{u}\right)}\mathbf{E}=\frac{1}{4}\left[\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{u}\right)+\mathbf{A}_1^{-1}\left(\mathbf{u}\right)+\mathbf{A}_2^{-1}\left(\mathbf{u}\right)+\mathbf{A}_3^{-1}\left(\mathbf{u}\right)\right]. \tag{4.15}$$

Тогда из (4.14) с учетом (4.15) вытекает соотношение

$$\frac{1}{4}\left[\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{u}\right)+\mathbf{A}_1^{-1}\left(\mathbf{u}\right)+\mathbf{A}_2^{-1}\left(\mathbf{u}\right)+\mathbf{A}_3^{-1}\left(\mathbf{u}\right)\right]\mathbf{A}\left(\mathbf{u}^{-1}\right)=\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{u}\right), \tag{4.16}$$

из которого после вычислений находим матрицу

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{u}^{-1}\right)=\frac{\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{u}\right)}{1-\left(v_x^2+v_y^2-v_z^2\right)+2v_z\left(v_xv_y-cv_z\right)}, \tag{4.17}$$

где скорость $\mathbf{u}^{-1}$ имеет компоненты

$$u_x^{-1}=-\frac{\begin{vmatrix}u_x & u_z & u_y\\ u_y & 1 & u_x\\ u_z & u_x & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & u_z & u_y\\ u_z & 1 & u_x\\ u_y & u_x & 1\end{vmatrix}},\quad u_y^{-1}=\frac{\begin{vmatrix}u_x & 1 & u_y\\ u_y & u_z & u_x\\ u_z & u_y & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & u_z & u_y\\ u_z & 1 & u_x\\ u_y & u_x & 1\end{vmatrix}},\quad u_z^{-1}=-\frac{\begin{vmatrix}u_x & 1 & u_z\\ u_y & u_z & 1\\ u_z & u_y & u_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & u_z & u_y\\ u_z & 1 & u_x\\ u_y & u_x & 1\end{vmatrix}}, \tag{4.18}$$

совпадающие с выражениями (3.34) и равные отношениям алгебраических дополнений элементов u_x, u_y, u_z в симметричной матрице $\mathbf{A}\left(\mathbf{u}\right)$ к одинаковому значению алгебраических дополнений диагональных элементов (или главных миноров третьего порядка).

Используя значения векторных произведений (3.25), запишем скорость $\mathbf{u}^{-1}$ и $N(\mathbf{u})$ в новых векторных формах

$$\begin{gathered}\mathbf{u}^{-1} = -\frac{\mathbf{u}\big[1-(\mathbf{uu})\big]-\{\mathbf{uu}\}+\{\mathbf{u}\{\mathbf{uu}\}\}}{1-(\mathbf{uu})-\frac{1}{3}(\mathbf{u}\{\mathbf{uu}\})},\\ N(\mathbf{u}) = 1+(\mathbf{uu})^2-2\big[(\mathbf{uu})+\{\mathbf{uu}\}\{\mathbf{uu}\}\big]+\tfrac{4}{3}\big(\mathbf{u}\{\mathbf{uu}\}\big).\end{gathered} \tag{4.19}$$

5. Заключение

В работе приводятся некоторые результаты релятивистской теории в четырехкомпонентных гиперкомплексных системах, использующие набор чисел (2.4) и их сопряженные величины (2.5). Эти числа связаны матрицей Адамара с базисными элементами системы гиперкомплексных чисел. Рассматривается матричное представление гиперкомплексных чисел. Задача о характеристическом уравнении для матриц индуцировало изучение характеристического уравнения для гиперкомплексных чисел.

Важным свойством гиперкомплексных чисел является тот факт, что выражения с четвертой степенью модуля квадрачисла и второй степенью модуля антикватерниона в отличие от соответствующих выражений для кватерниона и скалярного кватерниона могут принимать отрицательные значения.

В настоящее время имеют место релятивистские теории, основой которых являются система бикватернионов и квадрачисел. В одном случае рассматривается псевдоевклидова геометрия Минковского с $dx^i = (cdt, d\mathbf{x})$ и метрической функцией

$$F = \left(c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{4}H_{im}\bar{H}_{mj}dx^i dx^j\right)^{1/2}, \tag{5.1}$$

а в другом – финслерова геометрия Бервальда-Моора с метрической функцией

$$\begin{gathered}F = \big[(cdt+dx+dy+dz)(cdt-dx+dy-dz)\\ (cdt+dx-dy-dz)(cdt-dx-dy+dz)\big]^{1/4} =\\ = \left(\tfrac{1}{4!}\varepsilon_{mrnl}H_{mi}H_{rj}H_{nk}H_{lt}dx^i dx^j dx^k dx^t\right)^{1/4} = \left(\varepsilon_{1234}H_{1i}H_{2j}H_{3k}H_{4t}dx^i dx^j dx^k dx^t\right)^{1/4}.\end{gathered} \tag{5.2}$$

В двумерном случае обе геометрии совпадают и, учитывая $\bar{H}_{mj} = \varepsilon_{mk}H_{kj}$, имеем

$$\begin{gathered}F = \left(c^2dt^2 - dx^2\right)^{1/2} = \left(\tfrac{1}{2}H_{im}\bar{H}_{mj}dx^i dx^j\right)^{1/2} =\\ = \left(\tfrac{1}{2}\varepsilon_{mr}H_{mi}H_{rj}dx^i dx^j\right)^{1/2} = \left(\varepsilon_{12}H_{1i}H_{2j}dx^i dx^j\right)^{1/2}.\end{gathered} \tag{5.3}$$

Новые соотношения для гиперкомплексных чисел с сопряженными величинами реабилитируют незаслуженно забытую роль традиционной операции сопряжения в Типах **III** и **IV**. Здесь выбраны некоторые композиции чисел до четвертого порядка, результатами которых являются действительные числа. Другие соотношения легко получаются для композиций с высшими порядками чисел. Причем симметричные многочлены относительно этих чисел в соотношениях (2.11) и (2.14) могут также рассматриваться как метрические функции соответствующих пространств-времени.

Список литературы

[1] Hamilton W. R. On a New Species of Imaginary Quantities connected with a Theory of Quaternions. Proc. Royal Irish Acad. 1844. V. 2. P. 424–434.

[2] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. Москва: Гостехиздат, 1955. 648 с.

[3] Pavlov D. G. Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid. arXiv: gr-gc/0206004. 2002. V. 1. P. 1–16.

[4] Елисеев В. И., Фохт А. С. Методы теории функций пространственного комплексного переменного. Препринт 84.61 Института математики АН УССР. Киев. 1984. 57 с.

[5] Sudbery A. Quaternionic analysis. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1979. V.85. P. 199–225. (Русский перевод: Содбери Э. Кватернионный анализ. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. №2 (2). С. 130–157.)

[6] Herglotz G. Uber die Mechanik des Deformierbaren Korpers vom Standpunkte der Relativitatstheorie. Annalen der Physik. 1911. Bande. 36 (4. Folge). P. 493–533.

[7] Зарипов Р. Г. О законе сложения параллельных скоростей в релятивистской и классической механике. Изв. АН ЭССР. Физика, математика. 1979. Т. 28. №4. С. 359–361.

[8] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F. On the possibility of the phase transitions in the geometric structure of space-time. Phys. Lett. A. 1998. V. 244. P. 222–226.

[9] Павлов Д. Г., Гарасько Г. И. Понятие расстояния и модуля скорости в линейных финслеровых пространствах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. №.1 (3). С. 1–15.

[10] Зарипов Р. Г. Отношение одновременности в финслеровом пространстве-времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2006. № 1 (5). С. 28–47.

Статья поступила в редакцию 15.03.2007 г.

Towards a relativistic theory in hypercomplex systems

R. G. Zaripov

Institute of mechanics and mechanical engineering, Kazan, Russia
zaripov@mail.knc.ru

The paper examines new properties of hypercomplex systems and their relation to Hadamard matrices. The characteristic equation of hypercomplex numbers is obtained. The coordinate and time transformations in relativistic theories and in different hypercomplex systems, are presented. in the system of quadri-numbers, is introduced a new operation of cross product, and is provided the transformation of particle reflection. Further, it is studied the matrix representation of quaternions and quadrinumbers for the elements of the group of 3-dimensional velocities and is determined the opposed velocity, expressed in two new forms.

Key-words: hypercomplex systems, Hadamard matrices.
MSC: 83D05, 05B20, 30G35.

О РЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Р. Г. Зарипов

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия
zaripov@mail.knc.ru

Приводятся новые свойства системы квадрачисел с коммутативной операцией векторного произведения трехмерных векторов. Даются релятивистские уравнения четвертого порядка для скалярной волновой функции в случае свободной частицы и находящейся в электромагнитном поле. Изучается представление алгебры квадрачисел недиагональными матрицами порядка четыре. Получены четыре линейных релятивистских уравнения первого порядка для четырех четырех-компонентных волновых функций, описывающие поведение свободных частиц в пространстве-времени Бервальда-Моора в случае чистого ансамбля квантовых систем. Собственные значения энергии частицы не вырождаются для данного значения импульса.

Ключевые слова: электромагнитное поле, свободная частица, метрика Бервальда-Моора, Финслерово пространство.

1. Введение

Благодаря теоретическим исследованиям, выполненным главным образом за последние годы, быстро развивается финслерова локального полностью анизотропного пространства-времени с метрической функцией Бервальда-Моора

$$
\begin{gathered}
F=[c^4dt^4+dx^4+dy^4+dz^4-\\
-2\left(c^2dt^2dx^2+c^2dt^2dy^2+c^2dt^2dz^2+dx^2dy^2+dy^2dz^2+dz^2dx^2\right)+8cdtdxdydz]^{1/4}=\\
=[(cdt+dx+dy+dz)(cdt-dx+dy-dz)(cdt+dx-dy-dz)(cdt-dx-dy+dz)]^{1/4}=\\
=\left(\varepsilon_{1234}H_i^1H_j^2H_k^3H_l^4dx^idx^jdx^kdx^l\right)^{1/4}=\left(\tfrac{1}{4!}\varepsilon_{abcd}H_i^aH_j^bH_k^cH_l^ddx^idx^jdx^kdx^l\right)^{1/4},
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

имеющей четыре различных характеристики для сигнала, и соответствующая алгебра коммутативно-ассоциативных квадрачисел. Здесь $dx^i=(cdt,d\mathbf{x})$, H_i^a есть матрица Адамара порядка четыре со свойством $H_i^aH_a^j=4\delta_i^j$ и четырехмерным символом Кронекера δ_i^j. Символ ε_{abcd} есть абсолютно симметричный символ со свойством $\varepsilon_{abcd}=1$ если $a\neq b\neq c\neq d$, остальные значения нулевые. Полная библиография работ дается в выпусках специального журнала "Гиперкомплексные числа в геометрии и физике", в сборнике [1] и на сайте http://www.polynumbers.ru.

Псевдоевклидово локальное изотропное пространство-время Минковского является подпространством в геометрии с метрической функцией

$$
\begin{gathered}
F=\left[\left(c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2\right)^2\right]^{1/4}=\left[\left(cdt-|d\mathbf{x}|\right)^2\left(cdt+|d\mathbf{x}|\right)^2\right]^{1/4}=\\
=\left[\left(\tfrac{1}{4}\right)^2H_i^a\bar{H}_{aj}H_k^b\bar{H}_{bl}dx^idx^jdx^kdx^l\right]^{1/4},
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

где $\bar{H}_{aj}=H_a^ig_{ij}$, метрический тензор $g_{ij}=(1,-1,-1,-1)$ $|d\mathbf{x}|=\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)^{1/2}$ и описывается алгеброй антикоммутативно-ассоциативных бикватернионов. Метрическая функция (1.2) имеет две различные характеристики для сигнала кратности два.

В общем случае метрическая функция записывается в известном виде

$$F = \left(g_{ijkl}dx^i dx^j dx^k dx^l\right)^{1/4}, \tag{1.3}$$

где тензоры $g_{ijkl} = \frac{1}{4!}\varepsilon_{abcd}H_i^a H_j^b H_k^c H_l^d$ и $g_{ijkl} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 H_i^a \bar{H}_{aj} H_k^b \bar{H}_{bl} = \left(g_{ij}g_{kl} + g_{ik}g_{jl}\right)/2$ определяют метрические функции (1.1) и (1.2).

В отличие от пространства-времени Минковского, для которого известны релятивистские уравнения, для полностью анизотропного пространства-времени Бервальда-Моора уравнения, описывающие состояние частиц, неисследованы и нахождение их является целью настоящей работы.

2. Матрица Адамара и характеристические значения квадрачисла

Рассмотрим квадрачисло [2]

$$\mathbf{A} = \left(a^0, \mathbf{a}\right) = a^0 + a^i \mathbf{e}_i \tag{2.1}$$

с вещественными числами a^0 и a^i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ и базисными элементами $\mathbf{e}_0 = 1$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Закон композиции базисных элементов определяется в виде

$$\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j = \delta_{ij}\mathbf{e}_0 + \varepsilon_{ij}^k \mathbf{e}_k \tag{2.2}$$

и имеет следующие свойства

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1, \\ \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь $\delta_{ij} = \delta_i^j = \delta^{ij}$ – трехмерный символ Кронекера и ε_{ij}^k есть трехмерный символ со свойством $\varepsilon_{ij}^k = 1$ при $i \neq j \neq k$, а остальные значения являются нулевыми и по повторяющимся индексам проводится суммирование. При перестановке любых двух индексов составляющие абсолютного симметричного символа $\varepsilon_{ijk} = \delta_{kr}\varepsilon_{ij}^r$ не меняются и справедливы равенства

$$\begin{gathered} \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{kji} = \varepsilon_{ikj} = \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{jik}, \\ \mathbf{e}_{ij} = \varepsilon_{ij}^k \mathbf{e}_k = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \circ \mathbf{e}_i\right), \qquad \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \circ \mathbf{e}_i = 0, \\ \mathbf{e}_m \circ \mathbf{e}_{ij} = \varepsilon_{mij} + \delta_{mi}\mathbf{e}_j + \delta_{mj}\mathbf{e}_i, \\ \mathbf{e}_{ij} \circ \mathbf{e}_m = \varepsilon_{mij} + \delta_{mj}\mathbf{e}_i + \delta_{mi}\mathbf{e}_j. \end{gathered}. \tag{2.4}$$

Согласно (2.3), закон композиции числа (2.1) и $\mathbf{B} = b^0 + b^i\mathbf{e}_i$ дается соотношением

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \left(a^0 b^0 + a^i b^i\right) + \left(a^0 b^k + b^0 a^k + \varepsilon_{ij}^k a^i b^j\right)\mathbf{e}_k \tag{2.5}$$

и имеем значения компонент

$$c^0 = a^0 b^0 + \delta_{ij} a^i b^j, \quad c^k = a^0 b^k + b^0 a^k + \varepsilon_{ij}^k a^i b^j \tag{2.6}$$

Представим выражения (2.6) в векторной форме [3]

$$c^0 = a^0 b^0 + (\mathbf{ab}), \qquad \mathbf{c} = a^0\mathbf{b} + b^0\mathbf{a} + \{\mathbf{ab}\}. \tag{2.7}$$

Новое произведение векторов $\{\mathbf{ab}\}_i = \varepsilon_{ikl} a^k b^l$ коммутативно, дистрибутивно относительно сложения, сочетательно относительно умножения на любое число, равно нулю при равенстве нулю одного из векторов.

Выпишем некоторые соотношения для произведений векторов [3]

$$\begin{gathered}
\{\mathbf{ab}\} = \{\mathbf{ba}\}\,, \quad \{\mathbf{ab}\} + \{\mathbf{ac}\} = \{\mathbf{a}\,(\mathbf{b}+\mathbf{c})\}\,, \\
(\{\mathbf{ab}\}\,\mathbf{c}) = (\{\mathbf{ac}\}\,\mathbf{b}) = (\{\mathbf{ba}\}\,\mathbf{c}) = (\{\mathbf{bc}\}\,\mathbf{a}) = (\{\mathbf{ca}\}\,\mathbf{b}) = (\{\mathbf{cb}\}\,\mathbf{a})\,, \\
\{\mathbf{a}\,\{\mathbf{bc}\}\} - \{\mathbf{c}\,\{\mathbf{ba}\}\} = \mathbf{c}\,(\mathbf{ba}) - \mathbf{a}\,(\mathbf{bc})\,, \\
\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + (\{\mathbf{aa}\}\,\{\mathbf{bb}\}) = (\mathbf{ab})^2 + \{\mathbf{ab}\}^2\,, \\
\{\mathbf{aa}\}_i = 2a^k a^l, \quad \{\mathbf{a}\,\{\mathbf{aa}\}\}_i = 2a^i\left[\left(a^k\right)^2 + \left(a^l\right)^2\right], \\
(\mathbf{a}\,\{\mathbf{aa}\}) = 6a^i a^j a^k, \quad (i \neq i \neq k)\,, \\
\{\mathbf{a}\,\{\mathbf{a}\,\{\mathbf{aa}\}\}\} = \{\mathbf{aa}\}\,(\mathbf{aa}) - \tfrac{1}{3}\mathbf{a}\,(\mathbf{a}\,\{\mathbf{aa}\})\,.
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Наряду с исходным числом $\mathbf{A}$ определяются еще три числа $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= a^0 + a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3, & a^0 &= \tfrac{1}{4}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3\right), \\
\mathbf{A}_1 &= a^0 - a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 - a^3\mathbf{e}_3, & a^1\mathbf{e}_1 &= \tfrac{1}{4}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3\right), \\
\mathbf{A}_2 &= a^0 + a^1\mathbf{e}_1 - a^2\mathbf{e}_2 - a^3\mathbf{e}_3, & a^2\mathbf{e}_2 &= \tfrac{1}{4}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3\right), \\
\mathbf{A}_3 &= a^0 - a^1\mathbf{e}_1 - a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3, & a^3\mathbf{e}_3 &= \tfrac{1}{4}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3\right).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Набор чисел (2.9) только постулируется, а не порождается известным способом, как в случае кватернионов. Действительное число [2]

$$\begin{gathered}
|\mathbf{A}| = \sqrt[4]{\mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3} = \\
= \left\{\left[\left(a^0\right)^2 - \left(a^1\right)^2 - \left(a^2\right)^2 + \left(a^3\right)^2\right]^2 - 4\left(a^1a^2 - a^0a^3\right)^2\right\}^{1/4} = \\
= \left[\left(a^0 + a^1 + a^2 + a^3\right)\left(a^0 - a^1 + a^2 - a^3\right)\left(a^0 + a^1 - a^2 - a^3\right)\left(a^0 - a^1 - a^2 + a^3\right)\right]^{1/4} = , \\
= \left\{\left(a^0\right)^4 + \left(a^1\right)^4 + \left(a^2\right)^4 + \left(a^3\right)^4 - 2\left[\left(a^0\right)^2\left(a^1\right)^2 + \left(a^0\right)^2\left(a^2\right)^2 + \right.\right. \\
\left.\left. + \left(a^0\right)^2\left(a^3\right)^2 + \left(a^1\right)^2\left(a^2\right)^2 + \left(a^2\right)^2\left(a^3\right)^2 + \left(a^3\right)^2\left(a^1\right)^2\right] + 8a^0a^1a^2a^3\right\}^{1/4}
\end{gathered} \tag{2.10}$$

называется модулем квадрачисла и, соответственно, имеет место обратное число

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}^{-1} = \left(\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3\right) \big/ \left|\mathbf{A}\right|^4 = \\
= \frac{1}{\left|\mathbf{A}\right|^4}\left\{a^0\left[\left(a^0\right)^2 - \left(a^1\right)^2 - \left(a^2\right)^2 + \left(a^3\right)^2\right] + 2a^3\left(a^1a^2 - a^0a^3\right) + \right. \\
+ \left[-a^1\left[\left(a^0\right)^2 - \left(a^1\right)^2 - \left(a^2\right)^2 + \left(a^3\right)^2\right] - 2a^2\left(a^1a^2 - a^0a^3\right)\right]\mathbf{e}_1 + \\
+ \left[-a^2\left[\left(a^0\right)^2 - \left(a^1\right)^2 - \left(a^2\right)^2 + \left(a^3\right)^2\right] - 2a^1\left(a^1a^2 - a^0a^3\right)\right]\mathbf{e}_2 + \\
\left. + \left[a^3\left[\left(a^0\right)^2 - \left(a^1\right)^2 - \left(a^2\right)^2 + \left(a^3\right)^2\right] + 2a^0\left(a^1a^2 - a^0a^3\right)\right]\mathbf{e}_3\right\}
\end{gathered} \tag{2.11}$$

с $\left(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}\right)^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \circ \mathbf{A}^{-1}$, $\left|\mathbf{A} \circ \mathbf{B}\right| = \left|\mathbf{A}\right|\left|\mathbf{B}\right|$, $\mathbf{A}_1^{-1} = \left(\mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3\right) \big/ \left|\mathbf{A}_1\right|^4$, $\mathbf{A}_2^{-1} = \left(\mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3\right) \big/ \left|\mathbf{A}_2\right|^4$, $\mathbf{A}_3^{-1} = \left(\mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_1\right) \big/ \left|\mathbf{A}_3\right|^4$ и $\left|\mathbf{A}\right| = \left|\mathbf{A}_1\right| = \left|\mathbf{A}_2\right| = \left|\mathbf{A}_3\right|$.

Соотношения (2.9) записываются также в матричном виде

$$\mathbf{A}^a = \sum_i^4 H_i^a\left(a^i\mathbf{e}_i\right), \quad \left(a^i\mathbf{e}_i\right) = \frac{1}{4}\sum_a^4 H_a^i\mathbf{A}^a, \tag{2.12}$$

где числа $\mathbf{A}^a$ и $a^r\mathbf{e}_r$ отождествляются с $(\mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$ и $(a^0, a^1\mathbf{e}_1, a^2\mathbf{e}_2, a^3\mathbf{e}_3)$, а симметричная матрица H_i^a есть нормализованная матрица Адамара

$$\mathbf{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & -\mathbf{H}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & -\mathbf{H}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = 1 \tag{2.13}$$

порядка четыре с элементами равными числам ±1. Матрица Адамара находится методом Сильвестра рекуррентным вычислением из матриц $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ Элементы строк матрицы являются дискретными значениями ортогональных функций Уолша. Матрица имеет свойство $\mathbf{H}_4\mathbf{H}_4^T = 4\mathbf{I}$ (где $\mathbf{H}_4^T$ и $\mathbf{I}$ – транспонированная и единичная четырехмерные матрицы). Матрица определяется так же, как кронекеровское произведение матриц предыдущего порядка. Порядок матрицы Адамара равняется числу $m = 2^n$ $(n = 0,\, 1,\, 2, \ldots)$.

Алгебра квадрачисел с операциями сложения, умножения на действительное число, с законом композиции и определениями модуля и обратного числа является естественным расширением алгебры двойных чисел.

Приведем некоторые новые свойства квадрачисел.

Определение. Уравнение $|\mathbf{A} - \lambda| = 0$ представляет собой характеристическое уравнение для квадрачисла, а соответствующий набор чисел - характеристические или собственные числа.

С учетом тождества $\lambda = \lambda\mathbf{e}_0$ в значении модуля квадрачисла произведем замену $a^0 \to a^0 - \lambda$ и, согласно (2.10), получим равенство

$$|\mathbf{A} - \lambda|^4 = (\mathbf{A} - \lambda) \circ (\mathbf{A}_1 - \lambda) \circ (\mathbf{A}_2 - \lambda) \circ (\mathbf{A}_3 - \lambda)\,, \tag{2.14}$$

из которого вытекает соотношение

$$|\mathbf{A} - \lambda|^4 = (-\lambda)^4 + S_1\,(-\lambda)^3 + S_2\,(-\lambda)^2 + S_3\,(-\lambda) + S_4. \tag{2.15}$$

Следовательно имеем выражения

$$\begin{gathered} S_1 = \varepsilon_a\mathbf{A}^a = \mathbf{A} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3, \\ S_2 = \tfrac{1}{2!}\varepsilon_{ab}\mathbf{A}^a \circ \mathbf{A}^b = \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3, \\ S_3 = \tfrac{1}{3!}\varepsilon_{abc}\mathbf{A}^a \circ \mathbf{A}^b \circ \mathbf{A}^c = \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2, \\ S_4 = \tfrac{1}{4!}\varepsilon_{abcd}\mathbf{A}^a \circ \mathbf{A}^b \circ \mathbf{A}^c \circ \mathbf{A}^d = \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3, \end{gathered} \tag{2.16}$$

где $\varepsilon_m = 1$ и наряду с ε_{abcd} введены четырехмерные абсолютно симметричные символы со свойствами $\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{abc} = 1$, если $a \neq b \neq c$, а остальные значения нулевые. Формулы (2.16) есть однородные симметричные формы для набора квадрачисел разных порядков. Из характеристического уравнения для квадрачисла

$$\begin{gathered} |\mathbf{A} - \lambda|^4 = (-\lambda)^4 + S_1\,(-\lambda)^3 + S_2\,(-\lambda)^2 + S_3\,(-\lambda) + S_4 = \\ = (\lambda - \lambda^1)\,(\lambda - \lambda^2)\,(\lambda - \lambda^3)\,(\lambda - \lambda^4) = 0 \end{gathered} \tag{2.17}$$

получим соотношения

$$S_1 = \varepsilon_a\lambda^a, \quad S_2 = \frac{1}{2!}\varepsilon_{ab}\lambda^a\lambda^b, \quad S_3 = \frac{1}{3!}\varepsilon_{abc}\lambda^a\lambda^b\lambda^c, \quad S_4 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{abcd}\lambda^a\lambda^b\lambda^c\lambda^d \tag{2.18}$$

с различными четырьмя характеристическими или собственными числами квадрачисла

$$\begin{aligned}\lambda^1 &= a^0 + a^1 + a^2 + a^3,\\ \lambda^2 &= a^0 - a^1 + a^2 - a^3,\\ \lambda^3 &= a^0 + a^1 - a^2 - a^3,\\ \lambda^4 &= a^0 - a^1 - a^2 + a^3.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Из (2.16) и (2.18) следует, что симметричные формы для набора квадрачисел разных порядков равняются симметричным многочленам для характеристических чисел и могут представлять собой метрические функции различных финслеровых геометрий.

Представим собственные числа в виде $\lambda^a = H_i^a a^i$, где a^i отождествляется с (a^0, a^1, a^2, a^3). Тогда модуль квадрачисла определяет метрическую функцию финслеровой геометрии Бервальда-Моора

$$F = |\mathbf{A}| = \left(\lambda^1\lambda^2\lambda^3\lambda^4\right)^{1/4} = \left(\varepsilon_{1234}H_i^1 H_j^2 H_k^3 H_l^4 a^i a^j a^k a^l\right)^{1/4} = \left(\frac{1}{4!}\varepsilon_{abcd}H_i^a H_j^b H_k^c H_l^d a^i a^j a^k a^l\right)^{1/4}, \tag{2.20}$$

где число 4! есть количество различных перестановок индексов в четырехмерном симметричном символе ε_{abcd}.

3. Релятивистское уравнение четвертого порядка

При гамильтоновом формализме уравнение для энергии и импульса свободной частицы в пространстве-времени с метрической функцией (1.1) запишется так

$$\prod_m^4 \left[E - c\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{p}\right)\right] = \left(m_0 c^2\right)^4, \tag{3.1}$$

что приводит к релятивистскому и форм-инвариантному уравнению четвертого порядка для скалярной волновой функции [4]

$$\prod_m^4 \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\varepsilon}^m \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\varphi\left(\mathbf{x}, t\right) = \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^4 \varphi\left(\mathbf{x}, t\right). \tag{3.2}$$

Здесь имеем операторы $E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ и $\mathbf{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ и используются известные инвариантные значения компонентов векторов $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = (1,\, 1,\, 1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2 = (-1,\, 1, -1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^3 = (1,\, -1,\, -1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^4 = (-1, -1,\, 1)$, которые удовлетворяют равенствам [4]

$$\begin{gathered}\sum_m^4 \varepsilon_i^m = 0, \quad \tfrac{1}{4}\sum_m^4 \varepsilon_i^m \varepsilon_j^m = \delta_{ij}, \quad \tfrac{1}{4}\sum_m^4 \varepsilon_i^m \varepsilon_j^m \varepsilon_k^m = \varepsilon_{ijk},\\ 1 + \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\right)^2 = 4, \quad 1 + \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{\varepsilon}^r\right) = 0 \quad (m \neq r)\end{gathered} \tag{3.3}$$

и представляют собой выделенные направления в трехмерном пространстве. Концы этих векторов есть вершины специально ориентированного правильного координатного тетраэдра [5]. В общем случае имеет место произвольно ориентированный координатный тетраэдр [4] с другими значениями компонентов векторов при выполнении равенств (3.3).

Перепишем уравнение (3.2) в виде

$$\begin{aligned}\Bigg[&\frac{\partial^4}{c^4\partial t^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} - 2\left(\frac{\partial^4}{c^2\partial t^2\partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2} + \frac{\partial^4}{c^2\partial z^2\partial t^2} +\right.\\ &\left. + \frac{\partial^4}{c^2\partial t^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial z^2}\right) + 8\frac{\partial^4}{c\partial t\partial x\partial y\partial z}\Bigg]\varphi\left(\mathbf{x}, t\right) = \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^4 \varphi\left(\mathbf{x}, t\right).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Форм-инвариантность уравнения (3.4) обеспечивается известными преобразованиями координат и времени [4–6], записанными, например, в векторной форме [4]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \frac{1}{N\left(\mathbf{v}'/c\right)}\left\{\mathbf{x}+\mathbf{v}'t+\frac{1}{4c}\sum_{m}^{4}\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\mathbf{v}'\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\mathbf{x}\right)\right\}, \\ t' &= \frac{1}{N\left(\mathbf{v}'/c\right)}\left[t+\frac{1}{4c^{2}}\sum_{m}^{4}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\mathbf{v}'\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\mathbf{x}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

и ее аналоге [3]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \frac{1}{N\left(\mathbf{v}'/c\right)}\left[\mathbf{x}+\mathbf{v}'t+\frac{1}{c}\left\{\mathbf{v}'\mathbf{x}\right\}\right], \\ t' &= \frac{1}{N\left(\mathbf{v}'/c\right)}\left[t+\frac{1}{c^{2}}\left(\mathbf{v}'\mathbf{x}\right)\right], \end{aligned} \tag{3.6}$$

а также в координатном виде [6]

$$\begin{aligned} x'^{i} &= \frac{1}{N\left(\mathbf{v}'/c\right)}\left[x^{i}+v'^{i}t+\frac{1}{c}\varepsilon^{i}_{jk}v'^{j}x^{k}\right], \\ t' &= \frac{1}{N\left(\mathbf{v}'/c\right)}\left[t+\frac{1}{c^{2}}\left(\delta_{ij}v'^{i}x^{j}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

и матричных формах [5, 6]

$$\begin{gathered} \mathbf{X}' = \frac{\mathbf{A}\left(\mathbf{v}'\right)}{\left|\mathbf{A}\left(\mathbf{v}'\right)\right|}\mathbf{X} = \frac{\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\alpha}\right)}{\left|\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\alpha}\right)\right|}\mathbf{X}, \\ \mathbf{A}\left(\mathbf{v}'\right) = \mathbf{H}_{4}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{H}_{4} = \tfrac{1}{4}\mathbf{H}_{4}^{T}\mathbf{D}\mathbf{H}_{4}, \quad \mathbf{B}\left(\boldsymbol{\alpha}\right) = \mathbf{H}_{4}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{H}_{4} = \tfrac{1}{4}\mathbf{H}_{4}^{T}\mathbf{K}\mathbf{H}_{4}. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Диагональные матрицы $\mathbf{D} = \{d^1, d^2, d^3, d^4\}$ и $\mathbf{K} = \{k^1, k^2, k^3, k^4\}$ подобны вещественным симметричным матрицам простой структуры $\mathbf{A}(\mathbf{v}')$ и $\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})$. Матрица Адамара $\mathbf{H}_4$ представляет собой фундаментальную матрицу для рассматриваемых матриц. Вещественные характеристические числа матриц есть $d^a = H^a_i v'^i/c$ и $k^a = \exp H^a_i \alpha^i$, где v'^i и α^i отождествляются с $\left(1, v'_x/c, v'_y/c, v'_z/c\right)$ и $(\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$, соответственно. Величина $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\}$ есть угловая мера [5], $\left|\mathbf{A}(\mathbf{v}')\right|^4 = d^1d^2d^3d^4$, $\left|\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\right|^4 = k^1k^2k^3k^4$ и $\mathbf{X}\{ct, x, y, z\}$.

Вышеуказанные значения компонентов векторов $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ вытекает из коммутативного группового закона композиции скоростей в векторной форме [4]

$$\mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 \circ \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \frac{1}{4}\sum\limits_{m}^{4}\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\mathbf{u}_1\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\mathbf{u}_2\right)/c}{1 + \left(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\right)/c^2} \tag{3.9}$$

при условии

$$c\boldsymbol{\varepsilon}^m = c\boldsymbol{\varepsilon}^m \circ c\boldsymbol{\varepsilon}^m, \tag{3.10}$$

которое дает инвариантность векторов $c\boldsymbol{\varepsilon}^m$ при переходах между инерциальными системами отсчетов. Условие (3.10) имеет место с учетом (3.3) при выполнении следующего уравнения

$$2\varepsilon^m_i = \varepsilon^{jk}_i \varepsilon^m_j \varepsilon^m_k. \tag{3.11}$$

Отметим, что уравнение (3.11) для четырех векторов и нулевого вектора впервые феноменологически рассматривается в работе [7] для компонент гиперкомплексных чисел H_3.

Для взаимосвязи относительных скоростей имеем следующие формулы для векторов [4]

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' &= \left[\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{m}}{1+(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\mathbf{v})/c}\right]\left[\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{1}{1+(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\mathbf{v})/c}\right]^{-1} = \\ &= \left[-\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{m}(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\mathbf{v})}{1+(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\mathbf{v})/c}\right]\left[\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{1}{1+(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\mathbf{v})/c}\right]^{-1}\end{aligned} \qquad (3.12)$$

и их компонент [3]

$$v'_x = -\frac{\begin{vmatrix} v_x & v_z & v_y \\ v_y & 1 & v_x \\ v_z & v_x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & v_z & v_y \\ v_z & 1 & v_x \\ v_y & v_x & 1 \end{vmatrix}}, \quad v'_y = \frac{\begin{vmatrix} v_x & 1 & v_y \\ v_y & v_z & v_x \\ v_z & v_y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & v_z & v_y \\ v_z & 1 & v_x \\ v_y & v_x & 1 \end{vmatrix}}, \quad v'_z = -\frac{\begin{vmatrix} v_x & 1 & v_z \\ v_y & v_z & 1 \\ v_z & v_y & v_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & v_z & v_y \\ v_z & 1 & v_x \\ v_y & v_x & 1 \end{vmatrix}}. \qquad (3.13)$$

Используя значения векторных произведений (2.8), запишем скорость $\mathbf{v}'$ и $N(\mathbf{v})$ в новых векторных формах [3]

$$\begin{gathered}\mathbf{v}' = -\frac{\mathbf{v}[1-(\mathbf{v}\mathbf{v})] - \{\mathbf{v}\mathbf{v}\} + \{\mathbf{v}\{\mathbf{v}\mathbf{v}\}\}}{1-(\mathbf{v}\mathbf{v}) - \frac{1}{3}(\mathbf{v}\{\mathbf{v}\mathbf{v}\})}, \\ N(\mathbf{v}') = 1 - 2(\mathbf{v}'\mathbf{v}') + \tfrac{4}{3}(\mathbf{v}'\{\mathbf{v}'\mathbf{v}'\}) - [-(\mathbf{v}'\mathbf{v}')(\mathbf{v}'\mathbf{v}') + \{\mathbf{v}'\mathbf{v}'\}\{\mathbf{v}'\mathbf{v}'\}].\end{gathered} \qquad (3.14)$$

Преобразованиях (3.5)-(3.8) вытекают из форм-инвариантности модуля квадрачисла (2.20) (или метрической функции глобального пространства-времени Бервальда-Моора) с $a^0 = ct$, и $\mathbf{a} = \mathbf{x} = \{x, y, z\}$ в векторной форме

$$\left\{\prod_{m}^{4}[ct + (\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\mathbf{x})]\right\}^{1/4} = \left\{\prod_{m}^{4}[ct' + (\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\mathbf{x}')]\right\}^{1/4}. \qquad (3.15)$$

Наконец, используя гамильтонов формализм, запишем уравнение (3.4) для частицы в электромагнитном поле в операторном виде

$$\prod_{m}^{4}\left[\left(i\hbar\frac{\partial}{c\partial t} + e\varphi\right) + \varepsilon^{m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right]\varphi(\mathbf{x}, t) = (m_0 c)^4\,\varphi(\mathbf{x}, t), \qquad (3.16)$$

где φ и $\mathbf{A}$ есть скалярный и векторный потенциалы поля.

4. Матричное представление алгебры квадрачисел и релятивистские уравнения первого порядка

Рассмотрим некоторый вариант матричного представления алгебры квадрачисел. Определим двумерные матрицы

$$\begin{aligned}
T &= \begin{pmatrix} a^0 - a^3 & a^2 - a^1 \\ a^2 - a^1 & a^0 - a^3 \end{pmatrix}, \quad \det T = \left[\left(a^0\right)^2 + \left(a^3\right)^2\right] - \left[\left(a^1\right)^2 + \left(a^2\right)^2\right] + 2\left(a^1 a^2 - a^0 a^3\right), \\
T_1 &= \begin{pmatrix} a^0 + a^3 & a^2 + a^1 \\ a^2 + a^1 & a^0 + a^3 \end{pmatrix}, \quad \det T_1 = \left[\left(a^0\right)^2 + \left(a^3\right)^2\right] - \left[\left(a^1\right)^2 + \left(a^2\right)^2\right] - 2\left(a^1 a^2 - a^0 a^3\right), \\
T_2 &= \begin{pmatrix} a^0 - a^3 & -a^2 - a^1 \\ -a^2 - a^1 & a^0 - a^3 \end{pmatrix}, \quad \det T_2 = \left[\left(a^0\right)^2 + \left(a^3\right)^2\right] - \left[\left(a^1\right)^2 + \left(a^2\right)^2\right] + 2\left(a^1 a^2 - a^0 a^3\right), \\
T_3 &= \begin{pmatrix} a^0 + a^3 & -a^2 - a^1 \\ -a^2 - a^1 & a^0 + a^3 \end{pmatrix}, \quad \det T_3 = \left[\left(a^0\right)^2 + \left(a^3\right)^2\right] - \left[\left(a^1\right)^2 + \left(a^2\right)^2\right] - 2\left(a^1 a^2 - a^0 a^3\right).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Тогда матричное представление алгебры квадрачисел есть одна из четырех четырехмерных матриц в следующем блочном виде

$$P_1 = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} T_2 & 0 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} T_3 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

с определителем

$$\begin{aligned}
&\det P_1 = \det P_2 = \det P_3 = \det P_4 = \\
&= \left[\left(a^0\right)^2 - \left(a^1\right)^2 - \left(a^2\right)^2 + \left(a^3\right)^2\right]^2 - 4\left(a^1 a^2 - a^0 a^3\right)^2 = \\
&= \left(a^0\right)^4 + \left(a^1\right)^4 + \left(a^2\right)^4 + \left(a^3\right)^4 - 2\left[\left(a^0\right)^2\left(a^1\right)^2 + \left(a^0\right)^2\left(a^2\right)^2 + \right. \\
&\left. + \left(a^0\right)^2\left(a^3\right)^2 + \left(a^1\right)^2\left(a^2\right)^2 + \left(a^2\right)^2\left(a^3\right)^2 + \left(a^3\right)^2\left(a^1\right)^2\right] + 8a^0 a^1 a^2 a^3,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

равным четвертой степени модуля квадрачисла $|\mathbf{A}|^4$. Базисными элементами квадрачисла являются матрицы

$$\mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

вытекающие, например, из представления в виде P_1 и имеющие свойства (2.4) со следами $tr\,\mathbf{e}_i = 0$, $tr\,(\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j) = 4\delta_{ij}$.

Рассмотрим набор квадрачисел

$$\begin{cases} E\mathbf{e}_0 + cp_x\mathbf{e}_1 + cp_y\mathbf{e}_2 + cp_z\mathbf{e}_3, \\ E\mathbf{e}_0 - cp_x\mathbf{e}_1 + cp_y\mathbf{e}_2 - cp_z\mathbf{e}_3, \\ E\mathbf{e}_0 + cp_x\mathbf{e}_1 - cp_y\mathbf{e}_2 - cp_z\mathbf{e}_3, \\ E\mathbf{e}_0 - cp_x\mathbf{e}_1 - cp_y\mathbf{e}_2 + cp_z\mathbf{e}_3 \end{cases} \tag{4.5}$$

и, заменяя $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ на матричные операторы, получим четыре уравнения первого порядка для четырех волновых функций в случае чистого ансамбля квантовых систем

$$\begin{aligned}
&i\hbar\mathbf{e}_0\frac{\partial\psi}{c\partial t}-i\hbar\mathbf{e}_1\frac{\partial\psi}{\partial x}-i\hbar\mathbf{e}_2\frac{\partial\psi}{\partial y}-i\hbar\mathbf{e}_3\frac{\partial\psi}{\partial z}-\boldsymbol{\beta}m_0c^2\psi=0,\\
&i\hbar\mathbf{e}_0\frac{\partial\psi_1}{c\partial t}+i\hbar\mathbf{e}_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-i\hbar\mathbf{e}_2\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+i\hbar\mathbf{e}_3\frac{\partial\psi_1}{\partial z}-\boldsymbol{\beta}m_0c^2\psi_1=0,\\
&i\hbar\mathbf{e}_0\frac{\partial\psi_2}{c\partial t}-i\hbar\mathbf{e}_1\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+i\hbar\mathbf{e}_2\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+i\hbar\mathbf{e}_3\frac{\partial\psi_2}{\partial z}-\boldsymbol{\beta}m_0c^2\psi_2=0,\\
&i\hbar\mathbf{e}_0\frac{\partial\psi_3}{c\partial t}+i\hbar\mathbf{e}_1\frac{\partial\psi_3}{\partial x}+i\hbar\mathbf{e}_2\frac{\partial\psi_3}{\partial y}-i\hbar\mathbf{e}_3\frac{\partial\psi_3}{\partial z}-\boldsymbol{\beta}m_0c^2\psi_3=0,
\end{aligned}\tag{4.6}$$

где введена матрица

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}^4=1.\tag{4.7}$$

Плоская волна для случая первого уравнения в (4.6) для стационарных состояний представляется в виде четырех-компонентной волновой функции

$$\psi=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}e^{\frac{ipx}{\hbar}}\tag{4.8}$$

с постоянными числами u_1, u_2, u_3, u_4. После подстановки волновой функции (4.8) в релятивистское уравнение первого порядка (4.6) получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
-Eu_1&=-cp_zu_1+c\,(p_y-p_x)\,u_2-m_0c^2u_4,\\
-Eu_2&=c\,(p_y-p_x)\,u_1-cp_zu_2+m_0c^2u_3,\\
-Eu_3&=m_0c^2u_2-cp_zu_3+c\,(p_y+p_x)\,u_4,\\
-Eu_4&=m_0c^2u_1+c\,(p_y+p_x)\,u_3+cp_zu_4.
\end{aligned}\tag{4.9}$$

Однородная система (4.9) имеет решение при равенстве нулю детерминанта

$$\begin{vmatrix}E-cp_z&cp_y-cp_x&0&-m_0c^2\\cp_y-cp_z&E-cp_z&m_0c^2&0\\0&m_0c^2&E+cp_z&cp_y+cp_x\\m_0c^2&0&cp_y+cp_x&E+cp_z\end{vmatrix}=0.\tag{4.10}$$

Равенство (4.10) дает соотношение $\prod\limits_{m}^{4}\left[E-c\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{p}\right)\right]-\left(m_0c^2\right)^4=0$, совпадающее с (3.1). Аналогичные результаты получаются и для других уравнений из (4.6).

5. Обсуждение

Для случая квадрачисел восполняется пробел в представлении соответствующей алгебры недиагональными четырехмерными матрицами, которые используются при получении четырех уравнений первого порядка для четырех четырех-компонентных волновых функций в квантовом описании движения частиц. Причем каждому значению импульса соответствует три собственных значения энергии принадлежащих неизвестной частице и одно собственное значение неизвестной античастицы, либо наоборот. Возможен также вариант двух частиц и двух античастиц.

Таким образом, приходим к следующему понятию.

Определение. Среднее значение $\bar{A}$ оператора $\hat{A}$ для чистого ансамбля квантовых систем равно

$$\bar{A} = \frac{\int \psi_1\psi_2\psi_3\hat{A}\psi dV}{\int \psi_1\psi_2\psi_3\psi dV} = \frac{\int \psi\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3\psi_1\psi_2\psi_3 dV}{\int \psi_1\psi_2\psi_3\psi dV}, \tag{5.1}$$

где операторы $\hat{A}, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3$ соответствуют операторам для выделенных направлений в трехмерном пространстве.

Нахождение свойств и решений релятивистских уравнений (3.4), (3.16) и (4.6) для различных физических ситуаций представляет отдельную задачу.

В заключении приведем некоторый простой результат при применении гамильтонова формализма в изотропном пространстве-времени с метрической функцией (1.2). Уравнение для энергии и импульса свободной частицы имеет следующий вид

$$\left(E^2 - c^2\mathbf{p}^2\right)\left(E^2 - c^2\mathbf{p}^2\right) = \left(m_0c^2\right)^4. \tag{5.2}$$

Из (5.2) получим релятивистское и лоренц-инвариантное дифференциальное уравнение четвертого порядка для скалярной волновой функции

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\varphi(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{m_0c}{\hbar}\right)^4\varphi(\mathbf{x}, t), \tag{5.3}$$

где Δ – оператор Лапласа.

При $m_0 = 0$ и $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ из (5.3) вытекает бигармоническое дифференциальное уравнение

$$\Delta^2\varphi(\mathbf{x}) = 0, \tag{5.4}$$

решением которого является известная бигармоническая функция

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{A}{r} + br. \tag{5.5}$$

Интересно отметить, что в работе [8] уравнение (5.4) с решение (5.5), получаемое при нерелятивистском пределе, является исходной идеей обобщения ньютоновского потенциала и соответствующего обобщения уравнений Гильберта-Эйнштейна в рамках римановой геометрии пространства-времени для выяснения вопроса о темной материи. В рассматриваемом подходе не используются подходы римановой геометрии и это вселяет надежду на более широкое применение метрической функции (1.2). Также отметим, что согласно (5.2) каждому значению импульса соответствует четыре собственных значения энергии

$$E = \pm\left(c^2\mathbf{p}^2 \pm m_0c^2\right)^{1/2}, \tag{5.6}$$

принадлежащих частице и античастице, а также тахиону и антитахиону. Возможны и другие интерпретации собственных значений энергии свободной частицы для пространства-времени описываемого метрической функцией (1.1) и (1.2).

Литература

[1] Space-Time Structure. Algebra and Geometry. Eds. Pavlov D. G., Atanasiu Gh., Balan V. Moscow: Lilia-Print, 2007. 528 pp.

[2] Pavlov D. G. Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid. arXiv: gr-gc/0206004. 2002. V. 1. P. 1–16.

[3] Зарипов Р. Г. К релятивистской теории в гиперкомплексных системах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. № 1 (7) (данный выпуск).

[4] Зарипов Р. Г. Отношение одновременности в финслеровом пространстве-времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2006. № 1 (5). С. 28–47.

[5] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F. On the possibility of the phase transitions in the geometric structure of space-time. Phys. Lett. A. 1998.V. 244. P. 222–226.

[6] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Понятие расстояния и модуля скорости в линейных финслеровых пространствах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. №1 (3). С. 1–15.

[7] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Нормальное сопряжение на множестве поличисел. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. №2 (2). С. 7–14.

[8] Mannheim P. D. Alternatives to Dark Matter and Dark Energy. Progress in Particle and Nuclear Physics. 2006. V. 56. P. 340–345. (arXiv: astro-ph/0505266. 2005. V. 2. P. 1–87).

On relativistic equations in the Berwald-Moor Space-Time

R. G. Zarypov

Institute of mechanics and mechanical engineering, Kazan, Russia
zaripov@mail.knc.ru

We provide new properties of the systems of quadri-numbers endowed with the commutative operation of the vector product of 3-dimensional vectors. The relativistic equations of 4-th order for the scalar wave function are provided in the case of the free particle displaced in electromagnetic field. The representation of the algebra of quadri-numbers as non-diagonal matrices of 4-th order, is described. There are obtained four linear relativistic equations of first order for the 4-uples of wave functions with 4 components, which describe the behavior of free particles in the Berwald-Moor Space-Time in the case of the proper setting of quantum systems. The eigenvalues of the particle energy are degenerate for the momentum, in the examined case.

Key-words: electromagnetic field, free particle, Berwald-Moor metric, Finsler space.
MSC: 53B40, 78A25, 78A99.

О ПОСТРОЕНИИ АНАЛОГА МНОЖЕСТВА МАНДЕЛЬБРОТА НА ПЛОСКОСТИ ДВОЙНЫХ ЧИСЕЛ

Д. Г. Павлов, М. С. Просандеева, В. А. Панчелюга

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана,
Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, г. Пущино
geom2004@mail.ru; panvic333@yahoo.com

В работе приведен пример построения аналога множества Мандельброта на плоскости двойных чисел. Продемонстрирована нетривиальная структура полученного множества, что дает надежду на то, что с ним, как и с обычным множеством Мандельброта на комплексной плоскости C, может быть связана своя, физически содержательная нелинейная динамика. Указаны аналогии между полученным множеством и множеством Мандельброта на C.

Ключевые слова: фракталы, множество Мандельброта, двойные числа.

1. Введение

Поведение любой динамической системы может быть рассмотрено как последовательность переходов согласно некоторому закону из начального состояния в конечное, которое затем рассматривается как новое начальное, переходящее в конечное и т. д. В другой форме этот процесс может быть представлен в виде системы с обратной связью, в которой одна и та же операция выполняется многократно по тому же закону перехода, что и в предыдущем случае, и при этом, результат предыдущей итерации является начальным значением следующей и т. д.

Для линейных законов перехода поведение системы полностью детерминировано, в то время как для нелинейных оно становится очень сложным и, зачастую, полностью непредсказуемым, хаотичным. Даже для классической механики, в этом случае, устойчивое регулярное движение, скорее исключение, чем правило [1].

Общепризнано, что первой математической моделью, выявившей подобные особенности нелинейной динамики, была модель роста численности популяции, сформулированная в 1845 г. П. Ф. Ферхюльстом. Введенное в эту модель ограничение на рост привело к нелинейной связи между численностью в последовательные моменты времени и привело к очень сложному поведению модели, одной из важнейших характеристик которого служил сценарий перехода к хаосу [2]. Кроме сценария перехода к хаосу, характерного для процесса Ферхюльста, существуют и другие. В связи с этим, возникла задача установить принципы, характеризующие соотношения между индивидуальными сценариями. Это удалось Б. Мандельброту в 1980 г., когда он обнаружил множество, впоследствии названное его именем. Работа Б. Мандельброта позволила описать процесс перехода от порядка к хаосу с более общей точки зрения [2].

Идея, обеспечившая успех работе Мандельброта, состояла в том, чтобы от действительных чисел R перейти к комплексным C и наблюдать процесс не на прямой, а на плоскости. Такой переход не только позволил решить задачи, трудно решаемые в R, но породил целое направление исследований – комплексную динамику.

Но, как известно, у множества комплексных чисел есть "двойник" – гиперболические (двойные) числа H_2, с той разницей, что вместо евклидовой плоскости их естественной "средой обитания" оказывается псевдоевклидова плоскость или другими словами двухмерное пространство-время. В то время как в качестве расширения C обычно рассматривается некоммутативная алгебра кватернионов Q, для H_2 естественным расширением является коммутативная алгебра H_4 [4]. Коммутативность алгебр C, H_2, H_4, и вообще, H_n, – во многом предопределяет разнообразие множества аналитических функций соответствующих переменных, а те в свою очередь жестко связаны с разнообразием группы конформных отображений. При этом, коммутативно-ассоциативные гиперкомплексные числа H_n органично связаны с нетривиальными финслеровыми геометриями с метрикой Бервальда-Моора и видятся, возможно, не менее перспективными с точки зрения физических приложений, чем обычные комплексные числа [4].

В свете сказанного можно надеяться, что с H_n так же, как и с C, может быть связан свой тип нелинейной динамики. Настоящая работа представляет собой попытку сделать шаг в направлении исследования такого рода динамики и призвана проиллюстрировать построение аналога множества Мандельброта на множестве двойных чисел H_2.

2. Алгоритм построения аналога множества Мандельброта на H_2

Как и в случае множества Мандельброта на C, будем рассматривать квадратичное отображение:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \tag{1}$$

где $z = x + iy$ и $c = p + iq$ – двойные числа, т. е., $i^2 = 1$. Выражение (1) задает последовательность, поведение которой зависит от начальной точки z_0 и параметра c. После разделения действительной и мнимой частей в (1) получим:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 + y_n^2 + p \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + q \end{cases} \tag{2}$$

Выражение (2) можно рассматривать, как координаты точки, задаваемой (1) на плоскости H_2.

Считается, что в случае, если параметр c фиксирован, $c = const$, и изменяется z_0 мы получаем множество Жюлиа, J, а если фиксировать начальную точку отображения $z_0 = 0$ и изменять параметр c – множество Мандельброта, M [5]. Критерий принадлежности точки $c(p,\ q)$ к M, который был предложен Жюлиа и использовался Мандельбротом для компьютерных вычислений, следующий: $c \in M$ тогда и только тогда, когда $z_0 = 0$ (т. н. "критическая точка") не стремится к бесконечности [6]. Другими словами, M – это множество значений c, для которых последовательность (1) остается ограниченной, если ее начальная точка равна нулю, $z_0 = 0$ [5]. Согласно другому определению, множество Мандельброта – это такое множество значений c, для которых J связно [6]. Оба эти определения эквивалентны, как было доказано Фату и Жюлиа в 1919 г. В дальнейших построениях мы будем исходить из первого определения, а также использовать символы M^d и J^d для аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на H_2.

Результаты, приведенные ниже, рассчитывались, согласно следующему алгоритму. Для построения M^d выбиралась решетка параметров $c \in H_2$, затем для каждого c находилось время убегания T точки $z_0 = 0$, как первое значение $n + 1$, для которого z_{n+1} имеет модуль больше некоторого заданного радиуса $R0$:

$$T = n + 1|_{|z_{n+1}|^2 > R_0}\,, \tag{3}$$

где $|z_{n+1}|^2$ – модуль двойного числа z_{n+1}:

$$|z_{n+1}|^2 = z_{n+1} z'_{n+1} = x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2. \tag{4}$$

Штрихом в (4) обозначена операция комплексного сопряжения: $z' = x - iy$. В случае если по истечении некоторого, наперед заданного, максимального числа итераций N величина $|z_{n+1}|^2$ не превышала $R0$ то считалось, что для данного значения c последовательность (1) является ограниченной и полагалось $T = 0$. Такие c считались принадлежащими M^d и для них фиксировалась величина $|z_{n+1}|^2$.

По определенным правилам, на которых мы не будем останавливаться в настоящей статье, каждой точке $c \notin M^d$ присваивался свой цвет в зависимости от величины T. Точки $c \in M^d$, раскрашивались в зависимости от значения $|z_{n+1}|^2$.

3. Результаты вычислений $M\ d$ на H_2

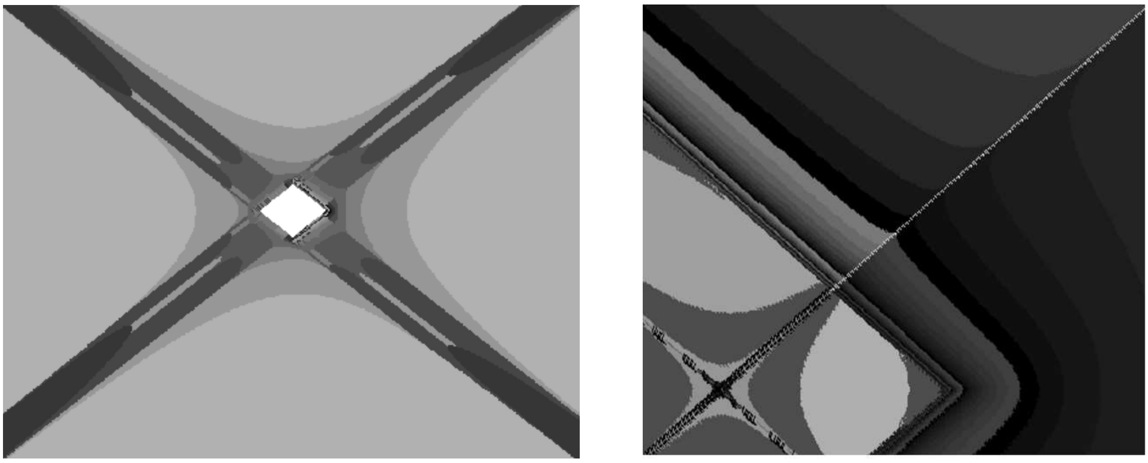


Рис. 1: Множество M^d на H_2, (показано белым цветом), *а*); увеличенный фрагмент (правый угол) аналога множества Мандельброта на H_2, *б*).

На рис. 1 показаны результаты построения аналога множества Мандельброта на плоскости двойной переменной. На рис. 1 *а*) множество M^d показано белым цветом, как маленький квадрат в центре рисунка. Оттенки серого показывают величину T, которая может рассматриваться как скорость ухода точки на бесконечность. Цель данного рисунка – дать представление об окрестностях M^d.

Рис. 1 *б*) показывает увеличенный правый угол множества M^d. В отличие от рис. 1 *а*) здесь предпринята попытка раскраски также и самого аналога множества Мандельброта, показывающая, что множеству присуща некоторая внутренняя структура. Характерным отличием H_2 от C является наличие делителей нуля, которые показаны на рис. 1 *б*) диагональю, уходящей в правый верхний угол рисунка и, пересекающей ее под прямым углом, линией в нижнем левом углу рис. 1 *б*). Обращает на себя внимание подобие фигуры, образованной линиями делителей нуля на рис. 1 *б*) с фигурой на рис. 1 *а*). Точки $c \notin M^d$ (рис. 1 *б*) находящиеся выше диагонали уходят на минус бесконечность, ниже диагонали – на плюс бесконечность.

Общим местом в получении фрактальных изображений, является очень сильная зависимость конечного результата, от метода которым сопоставляются различные цвета элементам исходного множества. На рис. 2 представлены только точки $c \in M^d$, т. е., собственно аналог множества Мандельброта на H_2, для которого использован несколько иной способ раскраски, чем для M^d на рис. 1 *б*). Также, на этом рисунке не предпринималось специальных мер для визуализации делителей нуля, хотя соответствующие им линии хорошо просматриваются.

Кроме делителей нуля, вторым существенным отличием H_2 от C, являются отрицательные значения $|z_{n+1}|^2$. На рис. 2 более темные области соответствуют положительным

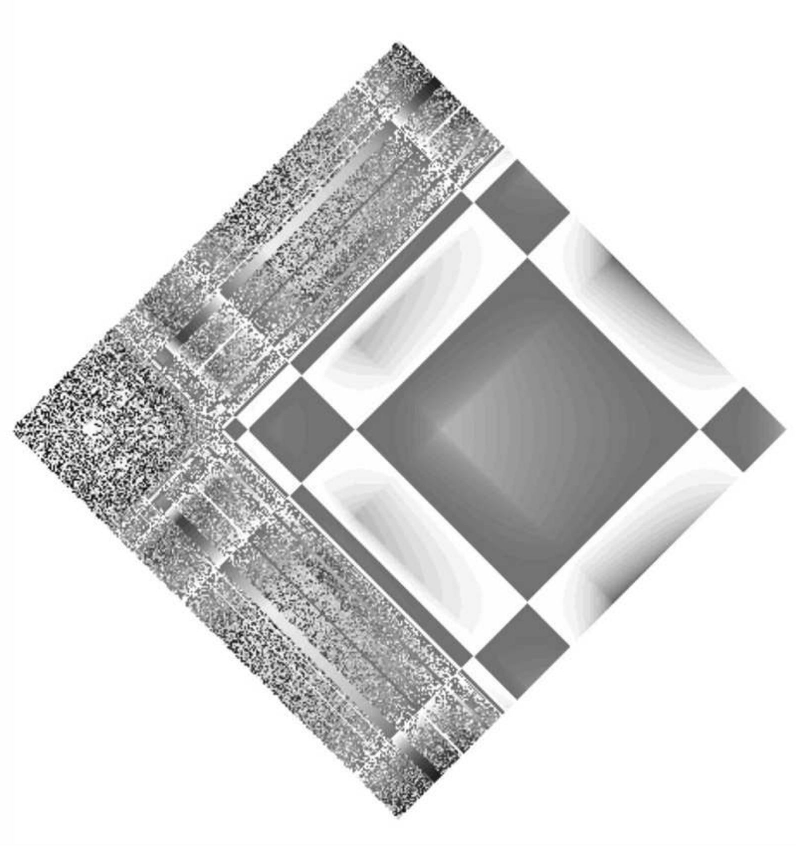


Рис. 2: Аналог множества Мандельброта для H_2.

значениям $|z_{n+1}|^2$. Более светлая раскраска этих областей отвечает большим значениям $|z_{n+1}|^2$, более темная – меньшим. Соответственно, более светлые области на рис. 2, соответствуют отрицательным значениям $|z_{n+1}|^2$. Для этих областей более светлая раскраска означает меньшие, по абсолютной величине, значения $|z_{n+1}|^2$, более темная – большие.

Уже с первого взгляда на M^d можно увидеть некоторые аналогии с множеством Мандельброта на комплексной плоскости. Основной лейтмотив M на C – многократно повторяющаяся окружность, для M^d на H_2 – это прямоугольные области, причем, отрицательные (светлые) области находятся в шахматном порядке с положительными (тёмными). Внутри каждой окружности для M на C можно построить множества уровня [2], имеющие вид концентрических полос. Для Md на H_2 таким аналогом являются пирамидальные структуры, хорошо различимые внутри каждой из прямоугольных областей на рис. 2. Для наглядности, рис. 3 показывает увеличенную область центрального квадрата, рис. 2, содержащую такую пирамидальную структуру. Стрелками показаны направления роста $|z_{n+1}|^2$. Светлая область в месте предполагаемого пересечения стрелок – "вершина" – область максимума $|z_{n+1}|^2$.

Все прямоугольные области на рис. 2 подобны, независимо от их размера. Каждая из таких областей содержит пирамидальную структуру, подобную показанной на рис. 3.

Заключение

Не оставляет сомнений чрезвычайно сложная структура множества M^d, которая, судя по рис. 2, потребует не менее длительного и тщательного изучения чем структура множества M на C. Приведенные в настоящей работе рисунки и краткие к ним описания ни в коей мере не претендуют на полноту и законченность. Они преследуют единственную цель – показать, что аналог множества Мандельброта на H_2 обладает интересной и

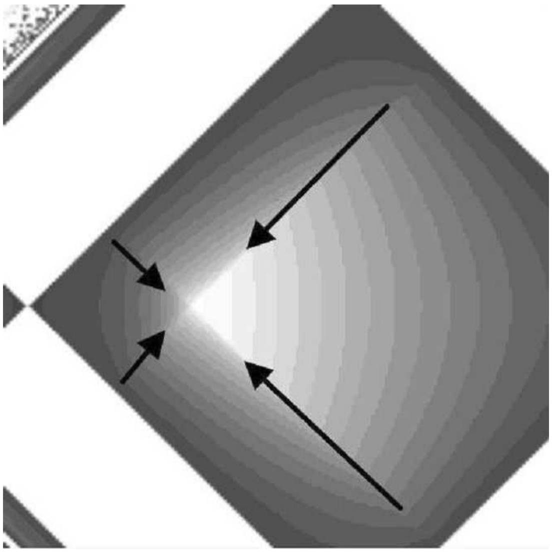


Рис. 3: Увеличенный фрагмент M^d, показывающий наличие пирамидальных структур.

нетривиальной структурой, которая заслуживает быть объектом дальнейших тщательных исследований и ждет своих, возможных физических интерпретаций.

В данной статье мы не привели примеры аналогов множеств Жюлиа для H_2, которые были нами построены, как и не касались "заснеженных" областей, окаймляющих центральную часть M^d слева вверху и внизу, рис. 2. Все это, как и более детальное исследование показанного на рис. 1–3 аналога множества Мандельброта на плоскости двойных чисел, – предмет наших последующих публикаций.

Литература

1. Г. Шустер. Детерминированный хаос. М., Мир, 1988, 240 с.

2. Х.-О. Пайтген, П. Х. Рихтер. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М., Мир, 1993, 176 с.

3. Д. Г. Павлов. Обобщение аксиом скалярного произведения. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1, Vol. 1, 2004, с. 5–19.

4. Г. И. Гарасько. Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 6, Vol. 3, 2006, с. 6–20.

5. А. Дуади. Множество Жюлиа и множество Мандельброта. // В книге [2] с. 141–153.

6. Б. Мандельброт. Фракталы и возрождение теории итераций. // В книге [2] с. 131–140.

On the construction of the analogue of the Mandelbrot set on the plane of double numbers

D. G. Pavlov, M. S. Prosandaeva, V. A. Panchelyuga

MSTU n. a. N. E. Bauman; Institute of theoretical and experimental biophysics of RAS, Pushino
geom2004@mail.ru, panvic333@yahoo.com

It is presented an example of construction of the analogue of the Mandelbrot set on the plane of double numbers. It is proved that the obtained set admits a non-trivial structure, which provides sufficient reasons to assume that, like in the standard Mandelbrot case built on the complex plane, this set carries a natural physical consistent nonlinear dynamics. Connections between the constructed set and the classical Mandelbrot set are pointed out.

Key-words: fractals, Mandelbrot set, double numbers.
MSC: 28A10, 37F45, 37F99.

ПРИНЦИП ВЗАИМНОСТИ И ФИНСЛЕРОВСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРИНЦИПОВ[1]

А. Ю. Севальников

Институт философии Российской Академии Наук
seval@iph.ras.ru

Статья посвящена рассмотрению принципа взаимности (Макс Борн, 1938 г.). В общем виде он состоит в наличии определенной симметрии относительно взаимных преобразований координат и импульсов физической системы. Показано, что этот принцип пронизывает все здание современной физики и связано с фундаментальной симметрией координатного и импульсного представлений. В статье утверждается, что данный принцип связан с фундаментальной двойственностью сущего, существованием двух модусов бытия - бытия в возможности и бытия в действительности и их определенной симметрией, а точнее отображением законов существования одного модуса на другой. С точки зрения философии такой принцип может выступать в качестве серьезного основания для введения финслеровой геометрии в физике.

Ключевые слова: Финслерова геометрия, принцип взаимности, модусы бытия, координатное и импульсное представления.

Физика – наука о природе и при ее познании она использует определенные методы, в частности методы теоретический и эмпирический. Неотъемлемой же частью теоретического метода является метод идеализаций. При построении любой теории используется идеальная модель, имеющая с большей или меньшей степенью приближенности своего референта в бытии. При смене теорий «степень их идеальности» изменяется таким образом, что мы вправе говорить о все большем соответствии или приближении теории к физической реальности. В идеале, собственно, физики и стремятся построить такую теорию, которая наиболее адекватным образом описывала природу.

Ньютон, в свое время, при построении здания классической механики использовал предположения об абсолютном пространстве и времени, теория относительности Эйнштейна, отказываясь от такой модели, перешла к реляционной концепции пространства-времени. В последнее время строятся и более радикальные теории, в которых физика отказывается от такой математической идеализации, как понятие точки. В рамках такого подхода наиболее известной является суперструнный подход, а также концепция бинарной геометрофизики, развиваемая Ю. С. Владимировым.

Если не обращаться пока к описанию микрореальности, то в рамках классического подхода существует такая идеализация, как однородность и изотропность пространства-времени. Однако, если отвлечься от идеализации, реальное пространство-время вряд ли можно рассматривать как однородное и изотропное.

В статье «Физика и реальность» Альберт Эйнштейн, рассматривая уравнения гравитационного поля в общей теории относительности

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=-cT_{ik},$$

– где R_{ik} обозначает риманов тензор кривизны, а T_{ik} – тензор энергии-импульса материи в феноменологическом представлении, отмечает, что «при такой формулировке

---

[1] Статья подготовлена при финансовой поддержке РГНФ, номер проекта № 05-03-03088а.

вся механика тяготения сведена к решению одной системы ковариантных уравнений в частных производных. Эта теория избегает всех внутренних противоречий, в которых мы упрекали классическую механику. Она достаточна, насколько мы знаем, для выражения наблюдаемых фактов небесной механики. *Но она похожа на здание, одно крыло которого сделано из изящного мрамора (левая часть уравнения), а другое – из плохого дерева (правая часть уравнения). Феноменологическое представление материи лишь очень несовершенно заменяет такое представление, которое соответствовало бы всем известным свойствам материи* (выделено мной – А. С.)» [1].

Отмеченное самим Альбертом Эйнштейном несовершенство уравнений (феноменологическое представление тензора энергии-импульса материи), связано, как представляется с еще одним обстоятельством, которому до сих пор уделялось не так много внимания. Как отмечает Ю. С. Владимиров, «*ключевые уравнения физики, такие как уравнения Максвелла, Эйнштейна, Дирака и другие, не выводятся, а открываются*. При чтении некоторых учебников может создаться впечатление, что уравнения Эйнштейна выводятся. В действительности же рассуждения, предшествующие записи этих уравнений, либо подготавливают читателя к их восприятию, либо в них постулируется что-то эквивалентное этим уравнениям и затем по известным правилам от постулированного переходят к фундаментальным уравнениям» [2]. Возникает естественно вопрос, существуют ли принципы и основания, используя которые, можно было бы получить эти уравнения?

При общей тенденции к геометризации физики, начатой ещё с работ Клиффорда и продолженной Эйнштейном, вопрос можно сформулировать более конкретно следующим образом: *а*) в рамках каких обобщенных пространств и *б*) на основании каких принципов можно вывести уравнения Эйнштейна?

При эйнштейновском подходе «искомые уравнения должны были связать геометрические величины и физические характеристики материи. Уже из ньютоновской теории гравитации следует, что в качестве источника гравитации следует выбирать величину, содержащую плотность или массу материи. После создания специальной теории относительности стало ясно, что искомая характеристика материи должна содержать скорость – более того – она должна тензорной величиной» [2]. Источником кривизны, как известно, выступает тензор энергии-импульса материи тензор энергии-импульса материи T_{ik}. При стандартном “*выводе*” уравнений Эйнштейна используется принцип наименьшего действия, где варьированию подвергается действие гравитационного поля S_g и материи S_m. Действие гравитационного поля S_g выражается, как известно, через скаляр кривизны R риманова пространства. Если мы используем единый геометрический подход, то тензор энергии-импульса материи T_{ik} должен возникать при вариации величин соответствующих уже не координатному, а импульсному пространству. Однако возникает вопрос: при «симметричном» подходе мы должны варьировать величины, соответствующие кривизне такого импульсного пространства. Если же мы исходим изначально из риманова многообразия, то кривизна такого пространства будет равна нулю, т. к. скорости и импульсы строятся на соответствующих касательных векторах, а касательное пространство, как известно, является плоским (псевдоевклидовым) пространством.

Необходимо исходить из более общих пространств, где можно было ввести нетривиальную метрику для касательных пространств. В качестве таких пространств могли бы использоваться пространства Финслера, Картана или Кавагути, которые уже неоднократно рассматривались при различных обобщениях теории относительности.

Серьёзному рассмотрению такого рода пространств мешает несколько обстоятельств. Это, прежде всего, отсутствие в настоящее время экспериментальных данных, говорящих в пользу таких геометрий [2] и, что более важно, неясность принципиальных физических оснований для их рассмотрения.

Отметим, что, вообще говоря, физический принцип, который может способствовать введению таких обобщений, давно известен. Речь идет о так называемом *принципе взаимности* (*reciprocity*), сформулированном в частном случае впервые Максом Борном еще в 1938 году [3]. До сих пор на него не обращалось должного внимания, т. к. при классическом подходе к существующим физическим понятиям не совсем понятно, что за ним скрывается.

В общем виде принцип взаимности состоит в наличии определенной симметрии основных уравнений относительно взаимных преобразований координат и импульсов (скоростей) физической системы. Прежде чем обсудить его и попытаться выяснить, с чем он связан, рассмотрим ряд эвристических соображений, рассмотрение которых позволит более полно понять этот принцип.

1. Начнем с того, что фундаментальные физические законы подчиняются законам относительности, связанные с возможностью перехода от одной системы отсчета к другой, и с заменой координатных представлений. Остановимся на этом чуть подробнее.

Необходимым составным элементом любого исследования является наличие системы отсчета. Только при наличии и правильном выборе системы отсчета, в соответствии с условиями наблюдения, можно ожидать результатов, поддающихся физической интерпретации. «Система отсчета, с одной стороны, представляет собой как бы мизансцену, на фоне которой развертываются события, с другой стороны, – это своеобразный физический прибор, предназначенный для выполнения некоторых измерений, и, как таковой имеет нечто общее с любым, обычным, физическим прибором.

Так, например, вольтметр имеет прежде всего физическую основу – базис, состоящий из магнита, рамки с обмоткой, стрелки и т. д. Но этот базис превратится в физический прибор, пригодный для измерений, только после того, как будет осуществлена его градуировка, которая должна быть, в принципе, любым, но однозначным образом зафиксирована на его шкале. Точно так же и система отсчета должна иметь физический базис – набор, определенным образом движущихся или неподвижных, тел, стандартных представлений и часов» [4].

Градуировка системы отчета распадается на две существенно различные процедуры, назовем их – (A) и (B). A-градуировка позволяет каждому телу, в механике материальной точке, сопоставит 4 координаты – числа x^k, которые характеризуют ее положение в пространстве в определенный момент времени. Ясно, что выбор координат никак не связан с изменением физической ситуации и, следовательно, мы можем переходить от одного координатного представления к другому. Из этой же произвольности следует, что в общем случае величины dx^k не могут быть истолкованы как соответствующие промежутки, и становятся таковыми лишь при введении метрики пространства.

Одной A-градуировки недостаточно. Для описания движения тела, кроме сведений о положении центра его масс в данный момент времени необходимо знать его мгновенную ориентацию и скорость его центра масс. «Таким образом, в дополнение к A-градуировке необходимо еще занумеровать (перечислить) все направления и скорости относительного движения. Это и составляет содержание B-градуировки» [4]. Выбор этих начальных направлений и скоростей (ввиду относительности направления и скорости) – операция хотя необходимая, но формальная. «Две различные B-градуировки, которые в силу определения, конечно, равноправны, связаны преобразованием группы (B). Следовательно, группа (B) описывает переход от одной B-градуировки к другой, подобно тому как группа (A) устанавливает связь между двумя A-градуировками.

Подводя итог, можно сделать очень важный вывод, именно из того факта, что выбор как A-, так и B-градуировки – операция хотя и необходимая, но в основном формальная, не влияющая ни на состояние движения системы отсчета, ни тем более на состояние исследуемого объекта, следует.

I. Законы природы аналитически должны выражаться в форме общековариантной относительно обеих групп преобразований (А) и (В).

II. Все физические величины должны геометрически отображаться общековариантными относительно групп (А) и (В) тензорами» [4].

2. Если мы фиксируем систему отсчета, то уже здесь, на уровне обычной классической механики имеется связь, симметрия, отображаемая каноническими уравнениями движения, или уравнениями Гамильтона

$$dq/dt = \partial H/\partial p, \quad dp/dt = -\partial H/\partial q$$

Легко видеть, что они симметричны (точнее антисимметричны из-за знака минус во втором уравнении) относительно перестановки координат и импульсов системы.

3. В специальной теории относительности можно отметить наличие определенной симметрии, хотя в данном случае мы бы это точнее назвали аналогией в ее фундаментальных уравнениях, в частности между формой интервала и закона сохранения энергии

$$ds^2 = c^2dt^2 - \sum x_i^2, \quad m^2c^2 = E^2/c^2 - \sum {p_i}^2.$$

Такая аналогия является не случайной и тесно связана со структурой пространства-времени Лобачевского в специальной теории относительности и уравнениями движения в этом пространстве. Так уравнения Гамильтона-Якоби в четырехмерном виде записываются следующим образом:

$$\sum (\partial S/\partial x_i)^2 = -m^2c^2,$$

но так как $\partial S/\partial x^i$ есть ни что иное как 4-импульс p^i, получим закон сохранения энергии-импульса $\sum p_i^2 = -m^2c^2$.

Если перейдем к совершенно иной физической теории, а именно к квантовой механике, то здесь связь и симметрия между координатами и импульсами является еще более прозрачной.

4. Хорошо известно, что основные законы квантовой механики, такие, как соотношения коммутации, соотношения неопределенности и т. д., симметричны по отношению к координатам x и импульсам p. Так соотношение коммутации имеет вид

$$p_x x - x p_x = -i\hbar,$$

где p_x и x – соответствующие операторы импульса и координаты. Именно отсюда и выводится соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$

симметричное, естественно, уже относительно самих координат и импульсов.

5. Все уравнения квантовой механики (например, Шредингера и Дирака) могут быть сформулированы как в координатном, так и в импульсном представлениях, и оба эти представления являются эквивалентными и симметричными. Так в квантовой электродинамике, как известно, имеется следующая симметрия между уравнениями Дирака в координатном и импульсном пространстве соответственно:

$$(i\gamma^k \hbar\, \partial/\partial x^k - m)\psi = 0, \qquad \text{и} \quad (\gamma^k p_k + m)\psi = 0.$$

6. Само представление операторов носит также совершенно симметричный характер. Так, например, оператор импульса в координатном представлении имеет следующий вид

$$p_i = -i\hbar(\partial/\partial x_i),$$

и, наоборот, оператор координаты в импульсном представлении представляется симметрично предыдущему соотношению

$$x_i = -i\hbar(\partial/\partial p_i).$$

Также совершенно симметричны операторы координаты в координатном представлении и импульса в импульсном представлении, которые есть просто умножение на соответствующий параметр.

7. Законы распределения координат и импульсов в квантовой механике не просто связаны соотношением неопределенностей, но также имеют и определенный симметричный вид. Так, если у нас имеется частица, находящаяся в определенном состоянии, описывающейся волновой функцией $\psi(x)$, то вероятность ее обнаружения в узком интервале dx близ точки x равна, как известно,

$$P(x, dx) = |\,\psi(x)\,|^2\, dx.$$

Рассмотрим для простоты частицу, расположенную в некоторой области вокруг $x = 0$, имеющей простейшее Гауссово распределение для плотности вероятности координаты частицы, описываемой волновой функцией

$$\psi(x) = K \exp(-x^2/4\sigma^2).$$

Распределение вероятности иметь то или иное значение x для такой волновой функции дается ее квадратом

$$P(x, dx) = K^2 \exp(-x^2/2\sigma^2)dx.$$

Можно рассчитать соответствующее распределение по импульсу и прийти к «интересному результату – распределение амплитуд по p имеет в точности ту же математическую форму, как и распределение амплитуд по x, только ширина кривой Гаусса иная... Если сделать распределение по x очень узким, то... распределение по p сильно расползется. Или наоборот, если распределение по p узко, то оно соответствует широкому распределению по x» [5]. Так, соответствующая амплитуда вероятности по импульсу будет иметь вид

$$\psi(p) = 4^{1/4} K^{-1} \exp(-p^2\sigma^2/\hbar^2).$$

Легко доказать, что и делается в любом курсе квантовой механики при выводе соотношения неопределенности, что распределения по x и p всегда являются коррелированными, взаимно отображают друг друга. Такой результат тем более примечателен, что *в квантовой механике импульс частицы p не является функцией координаты частицы x* [6]. Получается, что координатное представление «отслеживает» импульсное, и наоборот (при формальной независимости координат и импульсов, что и дает собственно возможность формулировки уравнений квантовой механики в эквивалентных координатных и импульсных представлениях).

Интересно отметить, что соответствующая симметрия между координатами и импульсами ранее отмечалась Гейзенбергом и использовалась им для критики некоторых интерпретаций квантовой механики. Так, в начале 50-х годов, касаясь в статье «Развитие интерпретации квантовой теории» только что появившейся теории квантового потенциала Бома он пишет, что «язык Бома (имеется в виду формализм этой теории – А. С.) разрушает симметрию между p и q, присущую квантовой теории. Действительно, в его теории $|\psi(q)|^2$ означает плотность вероятности в координатном пространстве, но $|\psi(p)|^2$ не означает того же в импульсном пространстве. Поскольку свойства симметрии всегда относятся к физической сущности теории, совсем неочевидно, какие преимущества дает отказ от них в соответствующем языке.

То же возражение применимо к попытка де Бройля, предложившего теорию «волны-пилота»; в этом случае также $|\psi(q)|^2$ представляет собой плотность вероятности в координатном пространстве, но $|\psi(p)|^2$ не представляет ее в импульсном пространстве.

Аналогичное возражение можно сделать в несколько иной форме против статистических интерпретаций Боппа и Феньеша» [7].

8. Уравнения статистической механики также демонстрируют соответствующие симметрии. Мы не будем здесь останавливаться на виде симметричных соответствующих функций распределения, флуктуаций и т. д., а отметим только, что все уравнения статистики следуют из *основного постулата равновесной статистической механики* (который никак не следует, заметим, их механики классической), который гласит, *что все допустимые микросостояния замкнутой системы равновероятны.* Не входя в детали, хорошо известные физикам, упрощенно его можно пояснить следующим образом.

Уравнения статистической механики формулируются на так называемом фазовом пространстве, области допустимых значений координат и импульсов частиц системы. Если система замкнута, то ее полная энергия неизменна и равна величине E. Все фазовое пространство можно разбить на конечные ячейки, в которых будут находиться то или иное число частиц. Для координат интуитивно ясно, что частицы с равной степенью вероятности будут находиться во всех допустимых состояниях. В этих фазовых ячейках находятся частицы, обладающие определенной энергией, и сумма

$$N_1e_1 + N_2e_2 + N_3e_3 + \ldots,$$

(где N_i – число частиц в i-ой фазовой ячейке, а e_i – их энергия), будет равна естественно полной энергии

$$\sum N_ie_i = E.$$

Конкретный вид и есть так называемое микросостояние. Понятно, что возможно огромное число таких микросостояний, и основная гипотеза статистической механики гласит о равенстве этих вероятностей (так называемый закон *равенства априорных вероятностей*, который был четко сформулирован Толменом в 1938 году, и еще ранее неявно использованный Гиббсом при выводе его уравнений [8]. То есть возникает, говоря физическим языком, близкое к равномерному распределение состояний системы на поверхности постоянных энергий. Если для координат, такое положения, как мы уже отмечали выше, представляется естественным, то обоснование такого принципа для энергий и составляет задачу обоснования статистики. На наш взгляд, это обоснование и требует привлечения рассматриваемого принципа взаимности, и принцип *равенства априорных вероятностей* тесно связан с равномерностью распределения в координатном пространстве. Попытку обоснования этого принципа мы отложим на дальнейшее, здесь же только отметим аналогию *равновероятностей* распределений по координатам и импульсам частиц системы.

Принцип взаимности не ограничивается рассмотренными выше восемью пунктами. Аналогичность многих законов физики, относящихся к разным ее областям, хорошо известна и любой физик легко сможет продолжить представленный список. Мы здесь ограничились лишь некоторыми симметриями, относящихся к координатному и импульсному пространству. Именно эти структуры будут представлять для нас интерес в дальнейшем, и именно поэтому мы здесь ими ограничились.

Вообще говоря, можно было бы ограничиться сугубо утилитаристским подходом, подходом «аналитика-позитивиста» и констатировать, что рассмотренные аналогии хорошо известны, во многом тривиальны и вытекают из структуры тех или уравнений физики и вряд ли стоит искать что-то их объединяющее. Если же и искать нечто общее, чем, вообще говоря, и занимаются физики-теоретики, то оно будет достигнуто на пути объединения, синтеза существующих теорий. Именно по этому пути и движется физика уже, наверное, более века.

Представляется интересным, что впервые принцип взаимности (reciprocity) и был сформулирован Максом Борном как раз при попытке синтеза общей теории относительности и квантовой теории, о чем мы уже упоминали выше.

Борн заметил, «что теория преобразований в квантовой механике соответствует свойству классических уравнений движения быть инвариантными по отношению к контактным преобразованиям. Последние являются одновременными преобразованиями координат x^k (включая время) и импульсов p_k (включая энергию), при которых разность величины $p_k dx^k$, записанной в старой и новых переменных, является полным дифференциалом. Точечные преобразования в x-пространстве являются всего лишь частным случаем; однако имеется другой случай, столь же простой, как и первый, который может быть описан как точечное преобразование в p-пространстве» [3].

Далее он отмечает, что в общей теории относительности имеют дело только с точечными преобразованиями в x-пространстве. Можно показать, что и делается в тензорном анализе, что преобразования импульсов p_k, подчиненные упомянутому выше условию контактности, представляют ни что иное, как тензорное исчисление общей теории относительности.

Эти соображения и приводят его впервые к формулировке принципа взаимности: «Мне представляется, что точечные преобразования в p-пространстве можно было бы рассмотреть подобным же образом. Такой путь ведёт к некоему обращённому формализму теории относительности в p-пространстве, в котором везде координаты пространство–время и импульс-энергия поменялись местами.

Эти факты в сильной степени наводят на мысль о формулировке **«принципа взаимности», в соответствии с которым любой общий закон в x–пространстве имеет «инверсный образ» в p-пространстве** (выделено мной – А.С.)» [3].

Такого рода дуальность физических законов имеет далеко идущие последствия. Уже Макс Борн в упоминаемой работе, как мы уже говорили, пытался с единой позиции (на основе именно этого принципа) рассматривать теорию относительности и квантовую механику, что привело его к ряду интересных результатов.

Борн не построил развитую теорию, однако, результаты, полученные им, позволяют утверждать, что принцип взаимности в рамках физики является «чем-то большим, чем простой формализм» [3].

Неудача такой попытки связана по нашему мнению с тем, что теории «сшиваются горизонтально», без учета того, что зачастую теории описывают разные структурные уровни материи. Необходимо же переходить от «горизонтальной сшивки» к «вертикальной», к поиску наиболее общих структур в теориях и того, что за ними стоит. Этому в физике соответствует переход от «уровня уравнений» к «уровню симметрий». Первоначально те или иные симметрии играли в физике роль вспомогательную. Развитие квантовой механики, теории элементарных частиц, прежде всего калибровочных теорий показало фундаментальную роль тех или иных групп симметрий. Оказалось, что именно они несут на себе наиболее фундаментальную информацию о физической системе и уравнения, описывающие их поведение, являются всего лишь следствием из соответствующих симметрий.

Заметим, кстати, что хорошо известна соответствующая «симметрийная» связь между координатным пространством и импульсом замкнутой системы, а именно закон сохранения энергии-импульса тесно связан с фактом однородности пространства-времени. Действительно, в силу этой однородности свойства замкнутой системы не меняются при любом параллельном переносе системы как целого в пространстве. Параллельный перенос есть такое преобразование координат, при котором все точки системы смещаются на один и тот же вектор **e**, т. е. их радиус вектор получает соответствующее приращение: $\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \mathbf{e}$. Рассматривая неизменность т. н. функции Лагранжа при бесконечно малом смещении dx легко получить закон сохранения импульса $\mathbf{dp}/\mathbf{dt} = \mathbf{0}$.

Легко видеть, большинство рассмотренных выше примеров связано с некоторой симметрией законов при замене $(\partial/\partial x_i) \to p_i$ и наоборот, что приводит, с точки зрения математики, к рассмотрению т.н. «касательных пространств». Не входя в математические детали, будем просто говорить об импульсном пространстве и, обобщая все рассмотренные выше примеры, сформулируем принцип взаимности (обобщая формулировку Макса Борна) следующим образом:

Фундаментальные физические законы являются общековариантными при переходе от координатного к импульсному пространству.

«Общековариантность» здесь означает имение и «инверсного образа» (по Борну), и неизменность формы записи уравнений при переходе от координатного к импульсному пространству.

На наш взгляд, этот принцип позволяет по-новому рассмотреть целый ряд вопросов современной физики, как ранее многократно обсуждавшихся (например, принцип дополнительности и неопределенности в квантовой механике), так и новых, ранее практически ускользавших от внимания исследователей. Одним из таких вопросов является как раз эквивалентность описания квантовых процессов в координатном и импульсном представлениях. Для целей нашего исследования наиболее интересным представляется вопрос об онтологическом статусе импульсного пространства. Является ли оно лишь вспомогательным математическим конструктом или ему соответствует некоторый референт в бытии?

Один тот факт, что уравнения квантовой механики в импульсном пространстве приобретают более простой и изящный вид, заставляет задуматься о его реальности, бытийности, существовании соответствующего ему референта в реальности. Однако, оставаясь в рамках старой, декартовской парадигмы бытия, вопрос о соответствующей интерпретации этого принципа даже не может быть осмысленно поставлен. Говоря точнее, здесь он всегда будет оставаться как раз чисто формальным и удобным математическим принципом, который неизвестно что скрывает.

Тем не менее, его фундаментальный, его работоспособность во всех областях физики, заставляет задуматься о существовании фундаментального закона, принципа, математическим выражением которого он бы и являлся. В рамках классической парадигмы, восходящей к ньютоновско-декартовским представлениям, как видится, вопрос о существовании такого принципа не может быть даже осмысленно поставлен. Дело в том, что эта симметрия требует существования импульсного пространства (в некотором смысле) «самого по себе», независимо от координатного пространства, что противоречит обыденной физической интуиции.

Как представляется, существуют два подхода в рамках которых возможно непротиворечивое рассмотрение принципа взаимности. Первый подход в рамках классической механики, второй в рамках квантовой теории.

Применение принципа взаимности при классическом описании реальности весьма естественно «индуцирует» финслеров подход. В некотором смысле, наиболее общий лагранжев и гамильтонов формализмы уже изначально отображают в себе «протофинслерову» структуру реальности.

Как хорошо известно, в наиболее общем виде законы физики формулируются в рамках лагранжевого формализма, когда задается функция действия S(x):

$$S(x) = \int L(x^i, dx^i/dt)dt.$$

Уравнения движения системы находятся из условия экстремальности функции действия. Сразу же отметим, что функция Лагранжа $L(x^i, dx^i/dt)$ играющая фундаментальную роль в физике, является «естественным» финслеровым геометрическим объектом, а именно она задает норму вектора dx^i/dt в касательном пространстве T_n, опирающемся на точку с координатами x^i. Укажем также на то, что функция Гамильтона $H(x^i, p_i)$ является нормой вектора с компонентами p_i, принадлежащего так называемому дуальному касательному пространству.

Если учесть «естественную финслеровость» фундаментальных физических законов, с одной стороны, а с другой стороны и совершенно естественное преодоление в рамках финслеровой геометрии некоторых затруднений при формулировке релятивистской механики (см., напр. [9]), обобщение уравнений физики исторически могло бы развиваться в русле финслеровых геометрий. Кроме отмеченного выше отсутствия фундаментального принципа, ведущего к симметрии координатного и импульсного представлений, существует еще один фактор, существенно препятствовавший широкому рассмотрению финслерова подхода. Это то обстоятельство, что финслерова геометрия вводит явную анизотропию пространства. Ряд открытий, совершенных в последнее время в области физики и космологии, могут весьма убедительно свидетельствовать о такого рода анизотропии. Упомянем из них лишь данные по анизотропии и поляризации фонового реликтового излучения (WMAP), работы Ж.-П. Лумине из Франции и Д. Макмиллана (США). Об анизотропии реального пространства, как представляется, весьма убедительно и свидетельствуют работы С. Э. Шноля и В. А. Панчелюги. Особенностью всех этих работ является то, что наблюдаемая анизотропия пространства достаточно мала. Именно это обстоятельство и может свидетельствовать о том, что физические теории до этих пор вполне могли развиваться на базе представлений об однородном и изотропном пространстве-времени.

Последние рассуждения были связаны в значительной мере только с теориями классического типа. Однако в современной физике наиболее фундаментальной теорий является квантовая механика, и не одна новая теория в физике никак не может ее игнорировать. Как представляется, именно квантовая механика и дает возможность ответить на вопрос, почему в соответствии с принципом взаимности пространство импульсов может существовать «само по себе», или, говоря языком философским, сказать нам нечто об онтологическом статусе импульсного пространства. Для этого рассмотрим, к примеру, уравнение Дирака

$$(i\gamma^k \partial/\partial x^k - m)\psi = 0.$$

С точки зрения структуры оно имеет простой вид – действие некоторого оператора $(i\gamma^k \partial/\partial x^k - m)$ на поле (волновую функцию) ψ. Его можно переписать в виде

$$(i\gamma^k \partial/\partial x^k)\psi = m\psi$$

С левой стороны на поле ψ действует опять некоторый оператор, а именно $i\gamma^k \partial/\partial x^k$, что есть ни что иное (упрощенно говоря), как оператор импульса. Легко видеть, что в импульсном представлении оно записывается соответственно в следующем виде

$$\gamma^k p_k \psi = m\psi.$$

Если мы рассматриваем наиболее общий случай взаимодействия с электромагнитным полем, то уравнение Дирака запишется в виде

$$\gamma^k (i\partial/\partial x^k - eA)\psi = m\psi,$$

где A – вектор-потенциал электромагнитного поля, что также является фактически действием обобщенного импульса $\boldsymbol{P} = p + eA$ на волновую функцию.

Теперь если вспомнить, что квантовая механика описывает скорее возможности (амплитуды вероятностей) переходов и может формулироваться в гейзенберговском представлении, то можно показать, что импульсное пространство мы должны соотносить с некоторой структурой, обладающей специфическими онтологическими характеристиками. В соответствии с идеями В. Гейзенберга и В. А. Фока, можно утверждать то, что квантовая механика отсылает нас к старым метафизическим представлениям о существовании *бытия в возможности* и *бытия в действительности.* Волновые функции, операторы описывают скорее возможности, вероятности осуществления событий и связаны с бытием в возможности («потенциальные возможности» у Фока); при измерении происходит редукция волновой функции, и мы наблюдаем одно из возможных состояний системы. Последнее и есть бытие в действительности, «осуществившееся» по Фоку. Новоевропейская философия и вслед за ней физика стала мыслить и связывать сущее только с бытием действительным, квантовая механика реально возвращает нас к давно подзабытым представлениям о многомодусном бытии. Не входя в детали, можно показать (подробнее см., напр. [10]), что **мы можем соотнести «бытие в возможности» с импульсным пространством**. Наблюдаемый же импульс какой–либо частицы есть просто актуализация той или иной вероятности нахождения ее в соответствующем состоянии. При таком рассмотрении, принцип взаимности, сформулированный выше, обобщается. В соответствии с ним, если вспомнить формулировку Макса Борна, любой общий закон в координатном пространстве имеет «инверсный образ» в импульсном пространстве. Если соотнести, как мы сделали выше, импульсное пространство с «потенциальным», то этот принцип можно сформулировать таким образом:

Законы сущего на одном модусе бытия дублируют, а точнее, отображают законы сущего на другом модусе бытия, и наоборот.

Сформулированный в таком виде этот принцип вовсе не является новым и хорошо известен в истории философии. Так или иначе, он связан и с концепциями инь-ян в китайской философии, нама-рупа в индусской метафизике, основными идеями платоновской и аристотелевской философии, а также идеями «потенциального» и «актуального» в средневековой схоластике. Вовсе не случайно Нильс Бор идею дополнительности рассматривал в значительно более широком аспекте, нежели чем она вытекает из сущности квантовых процессов, и символ инь-ян китайской метафизики был высечен на его надгробии.

Принцип взаимности требует рассмотрения импульсного пространства как существующего в некотором смысле независимо от обычного координатного пространства, что сильно противоречит обыденному здравому смыслу. Если вспомнить, однако, утверждение Гейзенберга, что квантовая механика возвращает нас аристотелевской метафизике и, конкретно, к его концепции $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\sigma$ – бытия в возможности, и учесть, что операторы импульса и описывают такого рода возможности, то такой вывод не представляется таким уж и странным.

Вообще говоря, принцип взаимности, дуальность физических структур, которые мы рассматриваем, требует своего объяснения. Объяснение может быть двоякого рода. Мы можем подойти к этому явлению с точки зрения физики и искать общую теорию, в которой этот принцип выступал бы как явное следствие некоторых более первичных посылок. Можно к этому вопросу подойти более общим образом, и осмыслить его уже с точки зрения философии. Можно сделать вывод, что принцип взаимности, та корреляция, симметрия координатного и импульсного пространств, наблюдаемая в основных физических законах требует с необходимостью чего-то третьего, что бы конституировало наблюдаемую дуальность. Без конкретизации деталей, с самой общей точки зрения, то, что определяет, конституирует наблюдаемое явление и есть его *сущность*, *чтойность* данного феномена.

Описание сущего при этом вполне укладывается в рамки триадного подхода при описании реальности, которую мы уже отмечали и ранее [10]:

$o\upsilon\sigma\iota\alpha$ – сущность, «чтойность» феномена;

$\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\sigma$ – возможность, потенциальность, потенция;

$\varepsilon\nu\varepsilon\rho\gamma\varepsilon\iota\alpha$ – энергия, деятельность, действительность, актуальное.

Эта триада ($o\upsilon\sigma\iota\alpha - \delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\sigma - \varepsilon\nu\varepsilon\rho\gamma\varepsilon\iota\alpha$) хорошо известна. Она использовалась не только в греческой метафизике, но и в китайской и индийской философии, в зороастризме, в целом ряде других традиционных культур. Именно существование второго члена этой триады, промежуточной динамической реальности, связанное непосредственно импульсным представлением в квантовой механике, и отвечает за существование принципа взаимности, а также и может «наводить», конституировать анизотропию наблюдаемого макроскопического пространства. Последнее обстоятельство и может легитимизоровать применимость финслеровой геометрии при описании реального пространства-времени, что требует в дальнейшем специальных физических исследований.

Литература

[1] Эйнштейн А. Физика и реальность // Физика и реальность. М. Наука. 1965.

[2] Владимиров Ю. С. Геометрофизика. М. Бином. 2005.

[3] Борн М. Теория относительности и квантовая теория // Размышления и воспоминания физика. М. Наука. 1977.

[4] Родичев В. И. Геометрические свойства систем отсчета // Эйнштейновский сборник. 1971. М., Наука, 1972.

[5] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 8–9, М., 1978.

[6] Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. М. Наука. 1976.

[7] Гейзенберг, Вернер. Развитие интерпретации квантовой теории // Нильс Бор и развитие современной физики. М. 1958.

[8] Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. М., Мир. Т. 1. 1978.

[9] Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М. Наук. 1981.

[10] Севальников А. Ю. Современное физическое познание: в поисках новой онтологии. М. ИФ РАН. 2003.

The reciprocity principle and the Finslerian generalization of physical principles

Yu. A. Sevalnikov

Institute of Philosophy RAS, Moscow
seval@iph.ras.ru

The article deals with the consideration of reciprocity principle (Max Born, 1938). Basically this principle supposes the presence of an certain symmetry concerning reciprocal transformation of coordinates and impulses of a physical system. It is shown that this principle goes through the whole body of modern physics and it is connected with the fundamental symmetry of coordinate and impulse conceptions. In the article it is assumed that the given principle is united with the fundamental duality of nature, the existence of two modi of objective reality - in possibility and in reality - and with their appointed symmetry, namely with the reflection of the laws of existence of a modus to a modus. From the philosophical standpoint such principle can act as serious grounds for introducing Finsler-geometry into physics.

Key-words: Quantum mechanics, Finsler geometry, reciprocity principle, two modi of reality.
MSC: 53B40.

РАВЕНСТВА, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ПСЕВДОНОРМАМ МАТРИЦ N-ГО ПОРЯДКА И НЕРАВЕНСТВАМ ШВАРЦА-КОШИ-БУНЯКОВСКОГО

Л. Г. Соловей

lgsolovey@gmail.com

Показано, что матрице n-го порядка можно сопоставить положительное число, играющее роль ее псевдонормы [1], и получена соответствующая формула. Для псевдонорм $|A|$ и $|B|$ матриц A и B, как и должно быть, выполняется неравенство $|A||B| \geq |AB|$. Показано, что каждому такому неравенству соответствует определенное равенство. Показано также, что подобные равенства соответствуют неравенствам Шварца-Коши-Буняковского для скалярных произведений, причем каждому такому неравенству соответствуют некоторые гиперкомплексные числа. Для каждого из указанных равенств справедливо утверждение: "произведение суммы квадратов на сумму квадратов есть снова сумма квадратов" – обобщенная проблема Гурвица.

Ключевые слова: псевдонорма, неравенства, гиперкомплексные числа.

Введение

1. Как известно, среди комплексных матриц n-го порядка можно выделить унитарные, удовлетворяющие условию:

$$SS^{+} = 1, \tag{1}$$

($+$ – символ эрмитова сопряжения). Если умножить матрицу S на комплексное число α, получим матрицу

$$A = \alpha S, \tag{2}$$

удовлетворяющую соотношению

$$AA^{+} = a = |A|^{2}, \tag{3}$$

где a положительно. Назовем $|A|$ модулем матрицы A.

Матрицы $A, B, ...$, удовлетворяющие условию (3), назовем нормированными на единицу унитарными, или *квазиунитарными.* Как и унитарные матрицы, матрицы $A, B, ...$ образуют мультипликативную группу. Выполняются, как легко показать, соотношения

$$|AB| = |A||B|, \tag{4}$$

$$|A| = 0 \text{ только при } A = 0, \tag{5}$$

$$|-A| = |A|. \tag{6}$$

Если эта группа или ее подгруппа вместе с нулевой матрицей является мультипликативным группоидом кольца, то выполняется и "неравенство треугольника"

$$|A + B| \leq |A| + |B|. \tag{7}$$

Соотношения $(4)-(7)$ выполняются не только для квазиунитарного кольца, но и для случая, когда квазиунитарный мультипликативный группоид разбивается на несколько аддитивных групп, пересекающихся только в нуле, при выполнении для каждой из них правого и левого дистрибутивных законов (Вывод соотношений (3) – (7) см. в приложении). Модуль A при выполнении совместно с условием (3) и условий (4) – (7), называется для элементов кольца их нормой. Все указанные соотношения верны, в частности, и для квазиунитарных действительных матриц, которые назовем *квазиортогональными*. В статье будет показано, что не только для квазиунитарных или квазиортогональных матриц, но и для всех матриц n-го порядка (комплексных или действительных) можно определить величину $|A|$, для которой выполняются соотношения (5)–(7), но равенство (4) заменяется неравенством

$$|AB| \leq |A||B|. \tag{4'}$$

Кольцо, для которого выполняются условия (4′) – (7), называется псевдонормированным, а величина $|A|$-псевдонормой [1]. В статье далее будет для этого случая вычислена величина $|A|^2|B|^2 - |AB|^2$.

2. В n-мерном евклидовом векторном пространстве для скалярных произведений векторов x, y выполняется неравенство Шварца-Коши-Буняковского

$$|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|, \tag{8}$$

$$|x|^2 = (x, x), \quad |y|^2 = (y, y). \tag{9}$$

Будет вычислена величина

$$|x|^2|y|^2 - |(x, y)|^2.$$

Вычисление величин $|A|^2|B|^2 - |AB|^2$ и $|x|^2|y|^2 - |(x, y)|^2$ приводит к обобщенным соотношениям типа "сумма квадратов, умноженная на сумму квадратов, есть сумма квадратов" [2] (проблема Гурвица).

3. Будут указаны гиперкомплексные системы, соответствующие величинам

$$|x|^2|y|^2 - |(x, y)|^2.$$

§1. Псевдонорма комплексных матриц n-ого порядка

Рассмотрим кольцо матриц n-го порядка с комплексными матричными элементами. Как известно, такое кольцо представляет собой n-мерное афинное векторное пространство: матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

представляет собой вектор n^2-го порядка [3]

$$A' = (a_{11}, a_{12}, ...a_{1n}, a_{21}, a_{22}, ...a_{2n}, ...a_{n1}, a_{n2}, ...a_{nn}). \tag{11}$$

Точно так же матрице

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{12}$$

соответствует вектор

$$B' = (b_{11}, b_{12}, ...b_{1n}, b_{21}, b_{22}, ...b_{2n}, ...b_{n1}, b_{n2}, ...b_{nn}). \tag{13}$$

Рассматриваемое пространство становится евклидовым, если ввести скалярное произведение любых векторов A' и B' [4]:

$$(A', B') = a_{11}b_{11}^*+a_{12}b_{12}^*+...+a_{1n}b_{1n}^*+a_{21}b_{21}^*+a_{22}b_{22}^*+...+a_{2n}b_{2n}^*+...+a_{n1}b_{n1}^*+...+a_{nn}b_{nn}^*. \tag{14}$$

Получим теперь соотношение, связывающее скалярное произведение (A', B') с произведением матриц A и B^+, где B^+ – матрица, эрмитово сопряженная матрице B. Имеем:

$$B^+ = \begin{pmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* & ... & b_{n1}^* \\ b_{12}^* & b_{22}^* & ... & b_{n2}^* \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{1n}^* & b_{2n}^* & ... & b_{nn}^* \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} (AB)_{11}^+ &= a_{11}b_{11}^* + a_{12}b_{12}^* + ... + a_{1n}b_{1n}^*, \\ (AB)_{22}^+ &= a_{21}b_{21}^* + a_{22}b_{22}^* + ... + a_{2n}b_{2n}^*, \\ \ldots &= \ldots\ \ldots\ \ldots \\ (AB)_{nn}^+ &= a_{n1}b_{n1}^* + a_{n2}b_{n2}^* + ... + a_{nn}b_{nn}^*. \end{aligned} \tag{16}$$

След матрицы AB^+ равен:

$$\begin{gathered} Sp(AB^+) = (AB)_{11}^+ + (AB)_{22}^+ + ... + (AB)_{nn}^+ = a_{11}b_{11}^* + a_{12}b_{12}^* + ... + a_{1n}b_{1n}^* + \\ + a_{21}b_{21}^* + a_{22}b_{22}^* + ... + a_{2n}b_{2n}^* + ... + a_{n1}b_{n1}^* + a_{n2}b_{n2}^* + ... + a_{nn}b_{nn}^*. \end{gathered} \tag{17}$$

Сравнивая формулы (14) и (17) получим:

$$(A', B') = Sp(A \cdot B^+). \tag{18}$$

В частности,

$$(A', A') = Sp(A \cdot A^+), \tag{19}$$

$$(B', B') = Sp(B \cdot B^+). \tag{19'}$$

Покажем, что в качестве квадрата псевдонормы $|A|^2$ матрицы A может быть выбрано скалярное произведение (A', A'):

$$|A|^2 = (A', A') = Sp(A \cdot A^+). \tag{20}$$

Прежде всего докажем выполнение неравенства:

$$|A||B| \geq |AB|, \tag{21}$$

или, точнее, эквивалентного ему неравенства

$$|A|^2|B|^2 \geq |AB|^2. \tag{22}$$

Для доказательства вычислим $P_n(A, B) = |A|^2|B|^2 - |AB|^2$, и покажем, что $P_n(A, B)$ неотрицательно. Для большей наглядности рассмотрим сначала относительно простые примеры алгебр матриц второго и третьего порядков.

1. Для алгебры матриц второго порядка имеем:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Имеем также:

$$Sp\,D = AA^{+}, \tag{24}$$

$$\begin{gathered} Sp\,D = |A|^2 = Sp\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} = \\ = Sp\left(\begin{array}{c|c} |a_{11}|^2+|a_{12}|^2 & (AA^{+})_{12} \\ (AA^{+})_{21} & |a_{21}|^2+|a_{22}|^2 \end{array}\right) = |a_{11}|^2+|a_{12}|^2+|a_{21}|^2+|a_{22}|^2. \end{gathered} \tag{25}$$

Точно так же

$$|B|^2 = |b_{11}|^2+|b_{12}|^2+|b_{21}|^2+|b_{22}|^2. \tag{26}$$

Далее,

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Аналогично (25), (26),

$$|AB|^2 = |a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}|^2+|a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}|^2+|a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}|^2+|a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}|^2. \tag{28}$$

Согласно формулам (25), (26), (28) имеем:

$$\begin{gathered} |A|^2|B|^2-|AB|^2 = |a_{11}|^2|b_{11}|^2+|a_{12}|^2|b_{11}|^2+|a_{21}|^2|b_{11}|^2+|a_{22}|^2|b_{11}|^2+|a_{11}|^2|b_{12}|^2+ \\ +|a_{12}|^2|b_{12}|^2+|a_{21}|^2|b_{12}|^2+|a_{22}|^2|b_{12}|^2+|a_{11}|^2|b_{21}|^2+|a_{12}|^2|b_{21}|^2+|a_{21}|^2|b_{21}|^2+ \\ +|a_{22}|^2|b_{21}|^2+|a_{11}|^2|b_{22}|^2+|a_{12}|^2|b_{22}|^2+|a_{21}|^2|b_{22}|^2+|a_{22}|^2|b_{22}|^2-|a_{11}|^2|b_{11}|^2- \\ -|a_{12}|^2|b_{21}|^2-2Re\,a_{12}b_{21}a_{11}^*b_{11}^*-|a_{11}|^{|}b_{12}|^2-|a_{12}|^{|}b_{22}|^2-2Re\,a_{11}b_{12}a_{12}^*b_{22}^*-|a_{21}|^{|}b_{11}|^2- \\ -|a_{22}|^{|}b_{21}|^2-2Re\,a_{21}b_{11}a_{22}^*b_{21}^*-|a_{21}|^{|}b_{12}|^2-|a_{22}|^{|}b_{22}|^2-2Re\,a_{21}b_{12}a_{22}^*b_{22}^* = |a_{12}|^{|}b_{11}|^2+ \\ +|a_{11}|^{|}b_{21}|^2-2Re\,a_{11}b_{11}a_{12}^*b_{21}^*+|a_{22}|^{|}b_{11}|^2+|a_{21}|^{|}b_{21}|^2-2Re\,a_{21}b_{11}a_{22}^*b_{21}^*+|a_{12}|^{|}b_{12}|^2+ \\ +|a_{11}|^{|}b_{22}|^2-2Re\,a_{11}b_{12}a_{12}^*b_{22}^*+|a_{22}|^{|}b_{12}|^2+|a_{21}|^{|}b_{22}|^2-2Re\,a_{21}b_{12}a_{22}^*b_{22}^* = \\ = |a_{11}b_{21}^*-a_{12}b_{11}^*|^2+|a_{21}b_{21}^*-a_{22}b_{11}^*|^2+|a_{12}b_{12}^*-a_{11}b_{22}^*|^2+|a_{22}b_{12}^*-a_{21}b_{22}^*|^2, \end{gathered} \tag{29'}$$

т. е.

$$|A|^2|B|^2-|AB|^2 = |a_{11}b_{21}^*-a_{12}b_{11}^*|^2+|a_{21}b_{21}^*-a_{22}b_{11}^*|^2+|a_{12}b_{12}^*-a_{11}b_{22}^*|^2+|a_{22}b_{12}^*-a_{21}b_{22}^*|^2. \tag{29}$$

Таким образом,

$$|A|^2|B|^2 \geq |AB|^2, \tag{30'}$$

$$|A||B| \geq |AB|. \tag{30}$$

2. Для алгебры матриц третьего порядка получается, опуская вычисления, следующий результат:

$$\begin{gathered} |A|^2|B|^2-|AB|^2 = |a_{12}b_{11}^*-a_{11}b_{21}^*|^2+|a_{11}b_{31}^*-a_{13}b_{11}^*|^2+|a_{22}b_{11}^*-a_{21}b_{21}^*|^2+ \\ +|a_{23}b_{11}^*-a_{21}b_{31}^*|^2+|a_{32}b_{11}^*-a_{31}b_{21}^*|^2+|a_{33}b_{11}^*-a_{31}b_{31}^*|^2+|a_{11}b_{22}^*-a_{12}b_{12}^*|^2+ \\ +|a_{11}b_{32}^*-a_{13}b_{12}^*|^2+|a_{22}b_{12}^*-a_{21}b_{22}^*|^2+|a_{23}b_{12}^*-a_{21}b_{32}^*|^2+|a_{32}b_{12}^*-a_{31}b_{22}^*|^2+ \\ +|a_{11}b_{23}^*-a_{12}b_{13}^*|^2+|a_{11}b_{33}^*-a_{13}b_{13}^*|^2+|a_{22}b_{13}^*-a_{21}b_{23}^*|^2+|a_{33}b_{12}^*-a_{31}b_{32}^*|^2+ \\ +|a_{23}b_{13}^*-a_{21}b_{33}^*|^2+|a_{32}b_{13}^*-a_{31}b_{23}^*|^2+|a_{13}b_{21}^*-a_{12}b_{31}^*|^2+|a_{22}b_{31}^*-a_{23}b_{21}^*|^2+ \\ +|a_{33}b_{13}^*-a_{31}b_{33}^*|^2+|a_{33}b_{21}^*-a_{32}b_{31}^*|^2+|a_{13}b_{22}^*-a_{12}b_{32}^*|^2+|a_{22}b_{32}^*-a_{23}b_{22}^*|^2+ \\ +|a_{13}b_{23}^*-a_{12}b_{33}^*|^2+|a_{33}b_{23}^*-a_{32}b_{33}^*|^2+|a_{33}b_{22}^*-a_{32}b_{32}^*|^2+|a_{22}b_{33}^*-a_{23}b_{23}^*|^2. \end{gathered} \tag{31}$$

Правая часть равенств (29), (31) содержит соответственно 4 и 27 неотрицательных слагаемых. Поэтому неравенства (30), (30′) выполняются. Равенство (31) может быть переписано следующим образом в виде суммы различных слагаемых:

$$|A|^2|B|^2-|AB|^2=\sum_{i=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\sum_{\substack{1,2,3\\(\leftarrow k,\,\rightarrow l,\,k\neq l)}}|a_{ik}b^*{}_{lm}-a_{il}b^*{}_{km}|^2,. \tag{32}$$

Символ $\underset{(\leftarrow k,\,\rightarrow l,\,k\neq l)}{1,2,3}$ означает, что: 1) при заданных i,m в паре индексов k,l k и l не меняются местами; 2) k и l принимают все возможные значения $1,2,3$ при выполнении условия $k\neq l$.

В силу антисимметрии d_{iklm}, где

$$d_{iklm}=a_{ik}b^*{}_{lm}-a_{il}b^*{}_{km}, \tag{33}$$

по индексам k,l и симметрии по этим индексам $|d_{iklm}|^2$ легко видеть, что формула (32) может быть переписана в виде

$$|A|^2|B|^2-|AB|^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}|a_{ik}b^*_{lm}-a_{il}b^*_{km}|^2. \tag{34}$$

В формуле (34) ограничение $k\neq l$ снимается и не все слагаемые различны:

$$|d_{iklm}|^2=|d_{ilkm}|^2. \tag{35}$$

Кроме того, слагаемые с одинаковыми k и l тождественно равны нулю:

$$|d_{ikkm}|^2\equiv 0. \tag{36}$$

Перейдем к кольцу матриц n-го порядка. Имеем:

$$|A|^2=Sp\,AA^+=\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}a_{pr}(a^+)_{rp}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}a_{pr}a^*_{pr}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}|a_{pr}|^2;$$

$$|B|^2=\sum_{s=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}|b_{sq}|^2;$$

$$|AB|^2=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}a_{pr}b_{rq}a^*_{ps}b^*_{sq};$$

$$\begin{gathered}
|A|^2|B|^2-|AB|^2=\left(\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}|a_{pr}|^2\right)\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}|b_{sq}|^2\right)-\\
-\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}a_{pr}b_{rq}a^*_{ps}b^*_{sq}=\\
=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1,r\neq s}^{n}|a_{pr}|^2|b_{sq}|^2-\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1,r\neq s}^{n}a_{pr}b_{rq}a^*_{ps}b^*_{sq}=\\
=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r,s=1,2\dots n;\,r\neq s}(|a_{pr}|^2|b_{sq}|^2+\\
+|a_{ps}|^2|b_{rq}|^2)-\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r,s=1,\dots n;\,r\neq s}(a_{pr}b^*_{sq}\cdot a^*_{ps}b_{rq}+a^*_{pr}b_{sq}a_{ps}b^*_{rq})=\\
\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r,s=1,\dots n;r\neq s}(|a_{pr}|^2|b_{sq}|^2-2Re\,a_{pr}b^*_{sq}a^*_{ps}b_{rq})=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r,s=1,\dots n;r\neq s}|a_{pr}b^*_{sq}-a_{ps}b_{rq}|^2.
\end{gathered}$$

Т. е.

$$|A|^2|B|^2 - |AB|^2 = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r,s=1...n,r\neq s}^{n} |a_{pr}b^*_{sq} - a_{ps}b^*_{rq}|^2 \geq 0. \tag{37}$$

Правая часть (37) содержит $n^3(n-1)/2$ различных слагаемых. Из (37) следует:

$$|A|^2|B|^2 - |AB|^2 \geq 0, \tag{38'}$$

$$|A||B| \geq |AB|. \tag{38}$$

Далее, $|A|^2|B|^2$ – произведение сумм квадратов; $|AB|^2$ – сумма квадратов,

$$|A|^2|B|^2 = |AB|^2 + \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r,s=1,...n;r\neq s}^{n} |a_{pr}b^*_{sq} - a_{ps}b^*_{rq}|^2, \tag{39'}$$

или

$$\left(\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}|a_{pq}|^2\right)\cdot\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}|b_{rs}|^2\right) = \sum_{p'=1}^{n}\sum_{s'=1}^{n}\sum_{q'=1}^{n}|a_{p'q'}b_{q's'}|^2 + \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r,s=1..n,r\neq s}|a_{pr}b^*_{sq} - a_{ps}b^*_{rq}|^2, \tag{39}$$

т. е. сумма n^2 квадратов, умноженная на сумму n^2 квадратов, есть сумма $n^2+n^3(n-1)/2$ квадратов. В силу антисимметрии по r и s $d_{prsq} = a_{pr}b^*_{sq} - a_{ps}b^*_{rq}$ и симметрии $|d_{prsq}|^2$ получим:

$$|A|^2|B|^2 - |AB|^2 = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} |a_{pr}b^*_{sq} - a_{ps}b^*_{rq}|^2. \tag{40}$$

Здесь ограничение $r \neq s$ снято. Слагаемые не обязательно различны. Кроме того,

$$d_{prrq} \equiv 0. \tag{41}$$

Наряду с (38) очевидно, что

$$|A| \geq 0, \tag{5'}$$

$$|-A| = |A|, \tag{6}$$

поскольку

$$|A|^2 = (A', A').$$

Далее,

$$|A+B|^2 = (A'+B', A'+B') = |A|^2 + |B|^2 + (A', B') + (B', A') =$$
$$= |A|^2 + |B|^2 + (A', B') + (A', B')^* = |A|^2 + |B|^2 + 2Re\,(A', B') \leq |A|^2 + |B|^2 + 2|(A', B')|. \tag{42}$$

Но, согласно неравенству Шварца-Коши-Буняковского [4]

$$|(A', B')| \leq |A'| \cdot |B'|,$$

или

$$|(A', B')| \leq |A| \cdot |B|. \tag{43}$$

Поэтому

$$|A+B|^2 \leq |A|^2 + |B|^2 + 2|A||B| = (|A| + |B|)^2, \tag{44}$$

или

$$|A+B| \leq |A| \cdot |B|, \tag{45}$$

но, поскольку, для матриц n-го порядка A и B выполняются условия (38), (5′), (6), (45), величины $|A|, |B|, ...$ являются псевдонормами [1].

Мы видим, что неравенству (38) соответствуют равенства (37), или (39). При этом в данном случае неравенство (38) оказалось следствием равенств (37), или (39).

§2. Равенства, соответствующие неравенствам Шварца-Коши-Буняковского

Как и для псевдонорм матриц, рассмотренных в предыдущем параграфе, существуют равенства, соответствующие неравенствам Шварца-Коши-Буняковского [4, 6]. Вначале получим эти равенства для пространств малой размерности ($n = 3$ и $n = 4$).

1. $n = 3$. Имеем:

$$|x|^2 = (x,x) = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2, \quad |y|^2 = (y,y) = |y_1|^2 + |y_2|^2 + |y_3|^2 \tag{46}$$

$$\begin{aligned}|x|^2|y|^2 = |x_1|^2|y_1|^2 + |x_2|^2|y_1|^2 + |x_3|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_2|^2 + |x_2|^2|y_2|^2 + |x_3|^2|y_2|^2 + \\ +|x_1|^2|y_3|^2 + |x_2|^2|y_3|^2 + |x_3|^2|y_3|^2.\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}|(x,y)|^2 = (x_1y_1^* + x_2y_2^* + x_3y_3^*)(x_1^*y_1 + x_2^*y_2 + x_3^*y_3) = |x_1|^2|y_1|^2 + x_2y_2^*x_1^*y_1 + x_3y_3^*x_1^*y_1 + \\ +x_1y_1^*x_2^*y_2 + |x_2|^2|y_2|^2 + x_3y_3^*x_2^*y_2 + x_1y_1^*x_3^*y_3 + x_2y_2^*x_3^*y_3 + |x_3|^2|y_3|^2 = |x_1|^2|y_1|^2 + \\ +|x_2|^2|y_2|^2 + |x_3|^2|y_3|^2 + 2Re\,(x_1y_1^*x_2^*y_2) + 2Re\,(x_1y_1^*x_3^*y_3) + 2Re\,(x_2y_2^*x_3^*y_3).\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}|x|^2|y|^2 - |(x,y)|^2 = |x_2|^2|y_1|^2 + |x_3|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_2|^2 + |x_3|^2|y_2|^2 + |x_1|^2|y_3|^2 + |x_2|^2|y_3|^2 - \\ -2Re\,(x_1y_1^*x_2^*y_2) - 2Re\,(x_1y_1^*x_3^*y_3) - 2Re\,(x_2y_2^*x_3^*y_3).\end{aligned} \tag{49}$$

Далее, как легко показать,

$$|x_2|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_2|^2 - 2Re\,(x_1y_1^*x_2^*y_2) = |x_1y_2 - x_2y_1|^2, \tag{50}$$

$$|x_3|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_3|^2 - 2Re\,(x_1y_1^*x_3^*y_3) = |x_3y_1 - x_1y_3|^2, \tag{51}$$

$$|x_3|^2|y_2|^2 + |x_2|^2|y_3|^2 - 2Re\,(x_2y_2^*x_3^*y_3) = |x_2y_3 - x_3y_2|^2. \tag{52}$$

Формула (49), с учетом формул (50) – (52), принимает вид:

$$|x|^2|y|^2 - |(x,y)|^2 = |x_1y_2 - x_2y_1|^2 + |x_3y_1 - x_1y_3|^2 + |x_2y_3 - x_3y_2|^2, \tag{53$'$}$$

или

$$|x|^2|y|^2 - |(x,y)|^2 = |[x,y]|^2, \tag{53}$$

$$|x|^2|y|^2 = |(x,y)|^2 + |[x,y]|^2, \tag{53$''$}$$

где $[x, y]$ – векторное произведение векторов x, y,

$$|[x,y]|^2 = ([xy],[xy]) = |x_1y_2 - x_2y_1|^2 + |x_3y_1 - x_1y_3|^2 + |x_2y_3 - x_3y_2|^2. \tag{54}$$

Поскольку

$$|[x,y]|^2 \geq 0,$$

имеем:

$$|x|^2|y|^2 - |(x,y)|^2 \geq 0, \tag{55}$$

т. е. неравенство Шварца-Коши-Буняковского. Оно получилось здесь как следствие равенства (53). Формулу (53$''$) перепишем в виде

$$\begin{gathered}(|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2)(y_1|^2 + |y_2|^2 + |y_3|^2) = |x_1y_1^* + x_2y_2^* + x_3y_3^*|^2 + \\ +|x_1y_2 - x_2y_1|^2 + |x_3y_1 - x_1y_3|^2 + |x_2y_3 - x_3y_2|^2,\end{gathered} \tag{53$'''$}$$

т. е. сумма квадратов, умноженная на сумму квадратов, есть сумма квадратов.

2. $n = 4$. Имеем:

$$|x|^2 = (x,x) = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2, \tag{56}$$

$$|y|^2 = |y_1|^2 + |y_2|^2 + |y_3|^2 + |y_4|^2. \tag{57}$$

$$|x|^2|y|^2 = |x_1|^2|y_1|^2+|x_2|^2|y_1|^2+|x_3|^2|y_1|^2+|x_4|^2|y_1|^2+|x_1|^2|y_2|^2+|x_2|^2|y_2|^2+|x_3|^2|y_2|^2+|x_4|^2|y_2|^2+$$
$$+|x_1|^2|y_3|^2+|x_2|^2|y_3|^2+|x_3|^2|y_3|^2+|x_4|^2|y_3|^2+|x_1|^2|y_4|^2+|x_2|^2|y_4|^2+|x_3|^2|y_4|^2+|x_4|^2|y_4|^2, \tag{58'}$$

$$|(x,y)|^2 = (x_1y_1^* + x_2y_2^* + x_3y_3^* + x_4y_4^*)(x_1^*y_1 + x_2^*y_2 + x_3^*y_3 + x_4^*y_4) = |x_1|^2|y_1|^2 + x_2y_2^*x_1^*y_1+$$
$$+x_3y_3^*x_1^*y_1 + x_4y_4^*x_1^*y_1 + x_1y_1^*x_2^*y_2 + |x_2|^2|y_2|^2 + x_3y_3^*x_2^*y_2 + x_4y_4^*x_2^*y_2 + x_1y_1^*x_3^*y_3+$$
$$+x_2y_2^*x_3^*y_3 + |x_3|^2|y_3|^2 + x_4y_4^*x_3^*y_3 + x_1y_1^*x_4^*y_4 + x_2y_2^*x_4^*y_4 + x_3y_3^*x_4^*y_4 + |x_4|^2|y_4|^2 =$$
$$= |x_1|^2|y_1|^2 + |x_2|^2|y_2|^2 + |x_3|^2|y_3|^2 + |x_4|^2|y_4|^2 + 2Re\,(x_2y_2^*x_1^*y_1) + 2Re\,(x_3y_3^*x_1^*y_1)+$$
$$+2Re\,(x_4y_4^*x_1^*y_1) + 2Re\,(x_3y_3^*x_2^*y_2) + 2Re\,(x_4y_4^*x_2^*y_2) + 2Re\,(x_4y_4^*x_3^*y_3), \tag{58}$$

$$|x|^2|y|^2-|(x,y)|^2 = |x_2|^2|y_1|^2+|x_1|^2|y_2|^2-2Re\,(x_1y_1^*x_2^*y_2)+|x_3|^2|y_1|^2+|x_1|^2|y_3|^2-2Re\,(x_3y_3^*x_1^*y_1)+$$
$$+|x_4|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_4|^2 - 2Re\,(x_4y_4^*x_1^*y_1) + |x_3|^2|y_2|^2 + |x_2|^2|y_3|^2 - 2Re\,(x_3y_3^*x_2^*y_2)+$$
$$+|x_4|^2|y_2|^2 + |x_2|^2|y_4|^2 - 2Re\,(x_4y_4^*x_2^*y_2) + |x_4|^2|y_3|^2 + |x_3|^2|y_4|^2 - 2Re\,(x_4y_4^*x_3^*y_3). \tag{59}$$

Далее, имеем:

$$|x_2|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_2|^2 - 2Re\,(x_1^*y_1x_2y_2^*) = |x_2y_1 - x_1y_2|^2, \tag{60}$$

$$|x_3|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_3|^2 - 2Re\,(x_3y_3^*x_1^*y_1) = |x_3y_1 - x_1y_3|^2, \tag{61}$$

$$|x_4|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_4|^2 - 2Re\,(x_4y_4^*x_1^*y_1) = |x_4y_1 - x_1y_4|^2, \tag{62}$$

$$|x_3|^2|y_2|^2 + |x_2|^2|y_3|^2 - 2Re\,(x_3y_3^*x_2^*y_2) = |x_3y_2 - x_2y_3|^2, \tag{63}$$

$$|x_4|^2|y_2|^2 + |x_2|^2|y_4|^2 - 2Re\,(x_4y_4^*x_2^*y_2) = |x_4y_2 - x_2y_4|^2, \tag{64}$$

$$|x_4|^2|y_3|^2 + |x_3|^2|y_4|^2 - 2Re\,(x_4y_4^*x_3^*y_3) = |x_4y_3 - x_3y_4|^2. \tag{65}$$

Из (59) и (60) – (65) следует:

$$\begin{gathered} |x|^2|y|^2 - |(x,y)|^2 = |x_2y_1 - x_1y_2|^2 + |x_3y_1 - x_1y_3|^2 + |x_4y_1 - x_1y_4|^2+ \\ +|x_3y_2 - x_2y_3|^2 + |x_4y_2 - x_2y_4|^2 + |x_4y_3 - x_3y_4|^2, \end{gathered} \tag{66}$$

или

$$\begin{gathered} (|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2)(|y_1|^2 + |y_2|^2 + |y_3|^2 + |y_4|^2) = \\ = |x_1y_1^* + x_2y_2^* + x_3y_3^* + x_4y_4^*|^2 + |x_2y_1 - x_1y_2|^2 + |x_3y_1 - x_1y_3|^2 + |x_4y_1 - x_1y_4|^2+ \\ +|x_3y_2 - x_2y_3|^2 + |x_4y_2 - x_2y_4|^2 + |x_4y_3 - x_3y_4|^2 \end{gathered} \tag{67}$$

3. Для общего случая n-мерного пространства имеем:

$$|x|^2|y|^2 - |(x,y)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_i^* \cdot \sum_{k=1}^{n} x_ky_k^* =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |x_i|^2|y_k|^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_iy_i^*x_ky_k^* =$$

$$= \sum_{i,k;1..n;i\neq k} (|x_i|^2|y_k|^2 + |x_k|^2|y_i|^2) - \sum_{i,k;1..n;i\neq k} (x_i y_i^* x_k y_k^* + x_i^* y_i x_k^* y_k) =$$

$$= \sum_{i,k;1..n;i\neq k} (|x_i|^2|y_k|^2 + |x_k|^2|y_i|^2 - x_i y_i^* x_k y_k^* - x_i^* y_i x_k^* y_k) =$$

$$= \sum_{i,k;1..n;i\neq k} (x_i y_k - x_k y_i)(x_i^* y_k^* - x_k^* y_i) = \sum_{i,k;1..n;i\neq k} |x_i y_k - x_k y_i|^2,$$

т. е.

$$|x|^2|y|^2 - |(x,y)|^2 = \sum_{i,k;1..n;\, i\neq k} |x_i y_k - x_k y_i|^2 \tag{68}$$

(в правой части – сумма $C_n^2 = n(n-1)/2$ различных слагаемых). Но вследствие симметричности каждого слагаемого по i и k имеем:

$$|x|^2|y|^2 - |(x,y)|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |x_i y_k - x_k y_i|^2. \tag{69}$$

Здесь ограничения "непереставляемости местами" i и k и $i \neq k$ снимаются. В общем случае в силу неотрицательности правой части равенства (69) неравенство Шварца-Коши-Буняковского является его следствием. Соотношение (69) может быть переписано в виде

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 = |\sum_{r=1}^{n} x_r y_r^*|^2 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} |x_l y_m - x_m y_l|^2. \tag{70}$$

§3. Равенства, соответствующие неравенствам Шварца-Коши-Буняковского, записанные с помощью некоторых гиперкомплексных систем

Равенства вида (70) могут также быть записаны с помощью гиперкомплексных систем определенного типа. Рассмотрим, как и в предыдущих параграфах, вначале соотношения (69), или (70), для случаев трехмерного и четырехмерного пространств ($n = 3, n = 4$).

1. $n = 3$.

Рассмотрим некоторую гиперкомплексную систему, элементы которой a и b записаны в виде

$$a = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k, \qquad b = y_o + y_1 i + y_2 j + y_3 k \tag{71}$$

с комплексными коэффициентами x_i, y_i ($i = 0, 1, 2, 3$), причем

$$a)\ \ i^2 = j^2 = k^2 = -1; \tag{72}$$

$$ij = -ji = k, \ \ jk = -kj = i, \ \ ki = -ik = j; \tag{73}$$

$$x_l i_l \cdot y_l i_l = -x_l y_l^*, \ \ x_l i_l \cdot y_m i_m = x_l y_m i_l i_m \qquad (l \neq m). \tag{74'}$$

$$b)\ \ x_v = \tilde{Re}\, a, \ \ y_0 = \tilde{Re}\, b, \tag{74''}$$

$$\tilde{Im}\, a = x_1 i + x_2 j + x_3 k, \ \ \tilde{Im}\, b = y_1 i + y_2 i + y_3 k, \tag{74}$$

$$\tilde{Re}\ a \cdot \tilde{Re}\, b = x_o y_0^*, x_0 \cdot (y_m j_m) = x_0 y_m j_m. \tag{74'''}$$

$\tilde{Re}\, a$, $\tilde{Re}\, b$ назовем действительными частями a и b, а $\tilde{Im}\, a$, $\tilde{Im}\, b$ – мнимыми частями. Отметим, что x_0, y_0 в комплексном пространстве – комплексные числа, а $\tilde{Im}\, a, \tilde{Im}\, b$ – вообще говоря комплексные, но отнюдь не чисто мнимые числа (подобные системы, но более общего вида, были рассмотрены в [5]).

c) Произведение a и b равно:

$$\begin{gathered}a\cdot b=(x_0+x_1i+x_2j+x_3k)\cdot(y_o+y_1i+y_2j+x_3k)=x_0y_0^*+\\+y_0(x_1i+x_2j+x_3k)+x_0(y_1i+y_2j+y_3k)+(x_1i+x_2j+x_3k)\cdot(y_1i+y_2j+y_3k),\end{gathered}\tag{75}$$

где

$$\begin{gathered}(x_1i+x_2j+x_3k)\cdot(y_1i+y_2j+y_3k)=x_1y_1^*i^2+x_2y_1ji+x_3y_1ki+x_1x_2ij+\\+x_2y_2^*j^2+x_3y_2kj+x_1y_3ik+x_2y_3jk+x_3y_3^*k^2,\end{gathered}\tag{76}$$

или, с учетом $(72),(74''')$

$$\begin{gathered}(x_1i+x_2j+x_3k)(y_1i+y_j+y_3k)=-x_1y_1^*-x_2y_2^*-x_3y_3^*+(x_2y_3-x_3y_2)i+\\+(x_3y_1-x_1y_3)j+(x_1x_2-x_2y_1)k.\end{gathered}\tag{77}$$

Поскольку:

$$x=x_1i+x_2j+x_3k,\quad y=y_1i+y_2j+y_3k\tag{78}$$

трехмерные векторы, получим, согласно (77) и (78),

$$x\cdot y=\tilde{Im}\,a\cdot\tilde{Im}\,b=-(x,y)+[x,y],\tag{79}$$

где

$$[x,y]=(x_2y_3-x_3y_2)i+(x_3y_1-x_1y_3)j+(x_1y_2-x_2y_1)k\tag{80}$$

определим как векторное произведение комплексных векторов x и y. Подставляя (77) в (75), получим:

$$\begin{gathered}a\cdot b=x_0y_0^*-(x,y)+(y_0x_1+x_0y_1+x_2x_3-x_3x_2)i+\\+(y_0x_2+x_0y_2+x_3y_1-x_1y_3)j+(y_0x_3+x_0y_3+x_1y_2-x_2y_1),\end{gathered}\tag{81'}$$

или

$$a\cdot b=x_0y_0^*-(x,y)+y_0x+x_0y+[x,y],\tag{81}$$

откуда

$$\tilde{Re}\,(a\cdot b)=x_0y_0^*-(x,y),\tag{82}$$

$$\tilde{Im}\,(a\cdot b)=y_0x+x_0y+[x,y].\tag{83}$$

Определим сопряжение элементов a и b следующим образом:

$$a^+=x_o-x_1i-x_2j-x_3k,\quad b^+=y_0-y_1i-y_2j-y_3k.\tag{84}$$

Полагая в $(81')$ $b=a^+$, получим:

$$a\cdot a^+=x_0x_0^*+x_1x_1^*+x_2x_2^*+x_3x_3^*+(x_0x_1-x_0x_1-x_2x_3+x_3x_2)i+$$

$$+(x_0x_2-x_0x_2-x_3x_1+x_1x_3)j+(x_0x_3-x_0x_3-x_1x_2+x_2x_1)k$$

или, сокращая:

$$a\cdot a^+=|x_0|^2+|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2=(a,a).\tag{85}$$

Мы видим, что

$$a\cdot a^+\geq 0,\tag{86}$$

$$a\cdot a^+=0\quad\text{только при}\quad a=0,\tag{87}$$

и, как легко показать,

$$a \cdot a^{+} = a^{+} \cdot a. \tag{88}$$

Величину $a \cdot a^{+} = a^{+} \cdot a$ определим как квадрат модуля a:

$$a \cdot a^{+} = a^{+} \cdot a = |a|^2. \tag{89}$$

Поскольку

$$x = a|_{x_0=0}, \quad y = b|_{y_0=0}, \tag{90$'$}$$

то, согласно (81)

$$x \cdot y = -(x, y) + [x, y] = -(x, y) + [x, y]_1 i + [x, y]_2 j + [x, y]_3 k. \tag{90}$$

Теперь, с учетом (85), имеем:

$$|x \cdot y|^2 = |(x, y)|^2 + |x_2 y_3 - x_3 y_2|^2 + |x_3 y_1 - x_1 y_3|^2 + |x_1 y_2 - x_2 y_1|^2. \tag{91}$$

С другой стороны

$$|x|^2 |y|^2 = |(x, y)|^2 + |x_2 y_3 - x_3 y_2|^2 + |x_3 y_1 - x_1 y_3|^2 + |x_1 y_2 - x_2 y_1|^2. \tag{54$'''$}$$

Сравнивая с (91) и (53$'''$), имеем:

$$|x \cdot y|^2 = |x|^2 \cdot |y|^2. \tag{92}$$

Это – равенство, соответствующее неравенству Шварца-Коши-Буняковского, записанное с помощью гиперкомплексных элементов $x = a|_{x_0=0}$ и $y = b|_{y_0=0}$. Отметим, что для полных элементов a и b $|a \cdot b|^2 \neq |a|^2 |b|^2$.

Можно показать, что полученная гиперкомплексная система с комплексными коэффициентами x_0, x_1, x_2, x_3 неассоциативна и неальтернативна. Однако при действительных коэффициентах она совпадает с кватернионом. Легко видеть, что (53$'''$) и (92) выполняются не только при выполнении условий (73), но и любого из условий

$$ij = -ji = (\pm)_1 k, \quad jk = -kj = (\pm)_2 i, \quad ki = -ik = (\pm)_3 j, \tag{93}$$

причем индексы $()_1, ()_2, ()_3$ означают, что выбор знаков ± в каждом из соотношений (93) независим. Следовательно, существует несколько гиперкомплексных систем, приводящих к (53$'''$) и (92). (см. также [5], стр. 36). Любой из указанных гиперкомплексных систем, для которых $x_k i_k \cdot y_k i_k = -x_k y_k^*$, может быть сопоставлена система, для которой

$$x_k i_k \cdot y_k i_k = -x_k^* y_k, \tag{94}$$

$$(\tilde{Re}\, a \cdot \tilde{Re}\, b)_l = x_0^* y_0. \tag{94$'$}$$

Если для исходной системы (назовем ее *правой*)

$$a \cdot b = \tilde{Re}\,(a \cdot b) + \tilde{Im}\,(a \cdot b), \tag{95}$$

то для системы (94$'$) (назовем ее *левой*) произведение, которое мы обозначим как $(a \cdot b)_l$, как легко показать, равно

$$(a \cdot b)_l = (\tilde{Re}\,(a \cdot b))^* + \tilde{Im}\,(a \cdot b). \tag{96}$$

Вернемся теперь к системе, умножение в которой определено формулой (81′). Для $(a\cdot b)^+$ получим:

$$\begin{gathered}(a\cdot b)^+ = x_0y_0^* - (x,y) - (y_0x_1 + y_1x_0 + x_2y_3 - x_3y_2)i-\\ -(y_0x_2 + y_2x_0 + x_3y_1 - x_1y_3)j - (y_0x_3 + y_3x_0 + y_2x_1 - y_1x_2)k.\end{gathered} \tag{97}$$

Для b^+a^+ получим:

$$b^+\cdot a^+ = y_0x_0^* - (y,x) + (-x_0y_1 - y_0x_1 + y_2x_3 - y_3x_2)i+$$

$$+(-x_0y_2 - y_0x_2 + y_3x_1 - y_1x_3)j + (-x_0y_3 - y_0x_3 + y_1x_2 - y_2x_1)k,$$

или

$$\begin{gathered}b^+a^+ = y_0x_0^* - (x,y)^* - (x_0y_1 + y_0x_1 - y_2x_3 + y_3x_2)i-\\ -(x_0y_2 + y_0x_2 - y_3x_1 + y_1x_3)j - (x_0y_3 + y_0x_3 - y_1x_2 + y_2x_1)k.\end{gathered} \tag{98}$$

Мы видим, что

$$(a\cdot b)^+ \neq b^+\cdot a^+. \tag{99}$$

Однако согласно (96)

$$\begin{gathered}b^+a^+|_l = y_0^*x_0 - (x,y) - (x_0y_1 + y_0x_1 - y_2x_3 + y_3x_2)i-\\ -(x_0y_2 + y_0x_2 - y_3x_1 + y_1x_3)j - (x_0y_3 + y_0x_3 - y_1x_2 + y_2x_1)k.\end{gathered} \tag{100}$$

Сравнивая (100) и (97) имеем:

$$(a\cdot b)^+ = (b^+\cdot a^+)_l. \tag{101}$$

Поскольку мнимые части $a\cdot b$ и $(a\cdot b)_l$ равны, то соотношение (92) остается в силе и для левой системы. Далее, т.к., согласно (95) и (96)

$$a\cdot a^+ = \tilde{Re}\,(a\cdot a^+), \tag{95′}$$

$$(a\cdot a^+)_l = (\tilde{Re}\,(a\cdot a^+))^*, \tag{96′}$$

и поскольку

$$\tilde{Re}\,(a\cdot a^+) = ((\tilde{Re}\,(a\cdot a^+))_l)^*, \tag{102}$$

то

$$a\cdot a^+ = (a\cdot a^+)_l\,, \tag{103}$$

или

$$|a| = |a|_l. \tag{104}$$

2. $n = 4$.

В четырехмерном евклидовом пространстве правая часть соотношения (66) содержит шесть слагаемых вида $|x_iy_k - x_ky_i|^2$; i, k; $(i\neq k)$ принимает значения $1, 2, 3, 4$.

Введем гиперкомплексные системы седьмого порядка, элементы которых a и b равны:

$$\begin{gathered}a = x_0 + x_1i_1 + x_2i_2 + x_3i_3 + x_4i_4 + x_5i_5 + x_6i_6,\\ b = y_0 + y_1i_1 + y_2i_2 + y_3i_3 + y_4i_4 + y_5i_5 + y_6i_6,\end{gathered} \tag{105}$$

$x_k, y_k\,(k = 0, 1...6)$ – комплексные числа,

$$\tilde{Re}\,a = x_0,\quad \tilde{Im}\,a = \sum_{k=1}^{6} x_ki_k;\quad \tilde{Re}\,b = y_0,\quad \tilde{Im}\,b = \sum_{l=1}^{6} y_li_l. \tag{106}$$

Векторам $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ соответствуют гиперкомплексные элементы

$$x = \sum_{k=1}^{4} x_k i_k, \quad y = \sum_{l=1}^{4} y_l i_l. \tag{107}$$

Определим умножение ортов i_k следующим образом:

$$a)\, i_k^2 = -1 \ \text{ для всех k }; \tag{108}$$

$$b)\, i_k i_l = 0 \ \ (k \neq l, k > 4 \text{ или } l > 4); \tag{109}$$

$$c)\, i_k i_l = i_m, \quad k \neq l; \ \ k, l \neq m; \ \ 1 \leq k \leq 4, \ 1 \leq l \leq 4, \ 1 \leq m \leq 6; \tag{110}$$

$d)$ Индексу m в (110) соответствует единственная пара индексов $(k, l) : (k', l') \to m'$,

$$\text{но если } \ (k', l') \neq (k, l), \ \ \text{ то } \ m' \neq m\,; \tag{111}$$

$$e)\, i_k i_l = -i_l i_k, \quad k \neq l(112), \quad x_0 \cdot (x_k i_k) = x_0 x_k i_k\,; \tag{113}$$

$$f)\, (x_l i_l)(y_l i_l) = -x_l y_l^*, \quad (l = 1, 2, ...5, 6) \ \ \tilde{Re}\, a \cdot \tilde{Re}\, b = x_0 y_0^*\,; \tag{114}$$

$$g)\, (x_k i_k) \cdot (y_l i_l) = (x_k y_l) i_k i_l \ \ (k, l = 1, 2...6, \ k \neq l)\,. \tag{115}$$

Рассмотрим конкретный пример такой системы, в котором (110) имеет вид:

$$i_1 i_2 = i_3, \ \ i_2 i_3 = i_4, \ \ i_3 i_4 = i_1, \ \ i_4 i_1 = i_2, \ \ i_1 i_3 = i_5, \ \ i_2 i_4 = i_6. \tag{110$'$}$$

Далее, получим:

$$\begin{aligned} a \cdot b = x_0 y_0^* - (x, y) + (x_1 y_0 + x_0 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3) i_1 + (x_0 y_2 + x_2 y_0 + x_4 y_1 - x_1 y_4) i_2 + \\ +(x_0 y_3 + x_3 y_0 + x_1 y_2 - x_2 y_1) i_1 + (x_0 y_4 + x_4 y_0 + x_2 y_3 - x_3 y_2) i_4 + \\ +(x_0 y_5 + x_5 y_0 + x_1 y_3 - x_3 y_1) i_5 + (x_0 y_6 + x_6 y_0 + x_2 y_4 - x_4 y_2) i_6. \end{aligned} \tag{116}$$

Сопряжение определим, как и при $n = 3$:

$$a^+ = x_0 - x_1 i_1 - x_2 i_2 - x_3 i_3 - x_4 i_4 - x_5 i_5 - x_6 i_6. \tag{117}$$

Полагая $b = a^+$, получим:

$$y_0 = x_0, \ y_1 = -x_1, \ y_2 = -x_2, \ y_3 = -x_3, \ y_4 = -x_4, \ y_5 = -x_5, \ y_6 = -x_6. \tag{118}$$

Подставляя (118) в (116), имеем:

$$a \cdot a^+ = |x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 + |x_5|^2 + |x_6|^2 + (x_1 x_0 - x_0 x_1 - x_3 x_4 + x_4 x_3) i_1 +$$

$$+(-x_0 x_2 + x_2 x_0 - x_4 x_1 + x_1 x_4) i_2 + (-x_0 x_3 + x_3 x_0 - x_1 x_2 + x_2 x_1) i_3 + (-x_0 x_4 + x_4 x_0 - x_2 x_3 + x_3 x_2) i_4 +$$

$$+(-x_0 x_5 + x_5 x_0 - x_1 x_3 + x_3 x_1) i_5 + (-x_0 x_6 + x_6 x_0 - x_2 x_4 + x_4 x_2) i_6$$

или, сокращая:

$$|a|^2 = a \cdot a^+ = a^+ a = |x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 + |x_5|^2 + |x_6|^2, \tag{119}$$

где $|a|^2$ снова определим как квадрат модуля. Полагая в (116), (119) $x_0 = x_5 = x_6 = 0$, $y_0 = y_5 = y_6 = 0$, получим:

$$\begin{aligned} x \cdot y = (x_3 y_4 - x_4 y_3) i_1 + (x_4 y_1 - x_1 y_4) i_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) i_3 + \\ +(x_2 y_3 - x_3 y_2) i_4 + (x_1 y_3 - x_3 y_1) i_5 + (x_2 y_4 - x_4 y_2) i_6, \end{aligned} \tag{120}$$

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^{4} |x_k|^2, \quad |y|^2 = \sum_{l=1}^{4} |y_l|^2. \tag{121}$$

Далее,

$$\begin{gathered} |x \cdot y|^2 = |(x, y)|^2 + |x_3y_4 - x_4y_3|^2 + |x_4y_1 - x_1y_4|^2 + |x_1y_2 - x_2y_1|^2 + \\ + |x_2y_3 - x_3y_2|^2 + |x_1y_3 - y_1x_3|^2 + |x_2y_4 - y_2x_4|^2. \end{gathered} \tag{122}$$

Из (66) и (122) получим:

$$|x|^2|y|^2 = |x \cdot y|^2, \tag{123}$$

(аналогично равенству (92) для $n = 3$).

Однако

$$|a|^2|b|^2 \neq |a \cdot b|^2. \tag{124}$$

Так же, как и для $n = 3$, системе (116) соответствует система, в которой

$$x_r i_r \cdot y_r i_r = -x_r^* y_r, \tag{125}$$

$$\tilde{Re}\, a \cdot \tilde{Re}\, b = x_0^* y_0. \tag{125$'$}$$

Назовем ее левой. В отличие от исходной системы, для левой системы согласно (125), (125′) имеем:

$$\begin{gathered} (ab)_l = x_0^*y_0 - x_1^*y_1 - x_2^*y_2 - x_3^*y_3 - x_4^*y_4 - x_5^*y_5 - x_6^*y_6 + (x_1y_0 + x_0y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)i_1 + \\ + (x_0y_2 + x_2y_0 + x_4y_1 - x_1y_4)i_2 + (x_0y_3 + x_3y_0 + x_1y_2 - y_1x_2)i_3 + (x_0y_4 + x_4y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)i_4 + \\ + (x_0y_5 + x_5y_0 + x_1y_3 - x_3y_1)i_5 + (x_0y_6 + x_6y_0 + x_2y_4 - x_4y_2)i_6. \end{gathered} \tag{126}$$

Для исходной системы (правой)

$$\begin{gathered} (a \cdot b)^+ = x_0y_0^* - x_1y_1^* - x_2y_2^* - x_3y_3^* - x_4y_4^* - x_5y_5^* - x_6y_6^* + (-x_1y_0 - x_0y_1 + x_4y_3 - x_3y_4)i_1 + \\ + (-x_0y_2 - x_2y_0 + x_1y_4 - x_4y_1)i_2 + (-x_0y_3 - x_3y_0 + x_2y_1 - x_1y_2)i_3 + (-x_0y_4 - x_4y_0 + x_3y_2 - x_2y_3)i_4 + \\ + (-x_0y_5 - x_5y_0 + x_3y_1 - x_1y_3)i_5 + (-x_0y_6 - x_6y_0 + x_4y_2 - x_2y_4)i_6. \end{gathered} \tag{127}$$

Далее,

$$b^+ = y_0 - y_1i_1 - y_2i_2 - y_3i_3 - y_4i_4 - y_5i_5 - y_6i_6, \tag{128}$$

$$a^+ = x_0 - x_1i_1 - x_2i_2 - x_3i_3 - x_4i_4 - x_5i_5 - x_6i_6, \tag{128$'$}$$

$$\begin{gathered} (b^+a^+)_l = y_0^*x_0 - y_1^*x_1 - y_2^*x_2 - y_3^*x_3 - y_4^*x_4 - y_5^*x_5 - y_6^*x_6 + (-y_0x_1 - y_1x_0 + y_3x_4 - y_4x_3)i_1 + \\ + (-y_0x_2 - y_2x_0 + y_4x_1 - x_4y_1)i_2 + (-y_0x_3 - y_3x_0 + y_1x_2 - y_2x_1)i_3 + (-y_0x_4 - y_4x_0 + y_2x_3 - x_2y_3)i_4 + \\ + (-y_0x_5 - y_5x_0 + y_1x_3 - y_3x_1)i_5 + (-y_0x_6 - y_6x_0 + y_2x_4 - y_4x_2)i_6. \end{gathered} \tag{129}$$

Сравнивая (127) и (129), получим:

$$(a \cdot b)^+ = (b^+a^+)_l. \tag{130}$$

В действительных пространствах как при $n = 3$, так и при $n = 4$, разница между правыми и левыми гиперкомплексными системами исчезает, и в приведенных примерах

$$(a \cdot b)^+ = b^+ \cdot a^+ \tag{131}$$

– формула (130) принимает обычный вид.

3. n-мерное комплексное евклидово пространство, $n \geq 3$.

Сопоставим векторам x, y такого пространства элементы гиперкомплексной системы

$$a = x_0 + \sum_{i=1}^{n'} x_i \varepsilon_i, \quad b = y_0 + \sum_{k=1}^{n'} y_k \varepsilon_k, \tag{132}$$

$$n' = C_n^2 = n(n-1)/2. \tag{133}$$

x_0, x_i, y_0, y_k – комплексные коэффициенты, ε_i – мнимые единицы,

$$\varepsilon_i^2 = -1; \tag{134}$$

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \sum_{s=1}^{n'} a_{ijs} \varepsilon_s, \tag{135}$$

$$a_{ijs} = -a_{jis}, \tag{136}$$

$$x_0 \cdot y_0 = x_0 y_0^*, \tag{136$'$}$$

$$x_0 \cdot y_0 = a|x_1 = x_2 = ... = 0 \cdot b|y_1 = y_2 = .. = 0$$

$$(x_i \varepsilon_i) \cdot (y_i \varepsilon_i) = -x_i y_i^*, \tag{137}$$

$$(x_i \varepsilon_i) \cdot (y_j \varepsilon_j) = (x_i y_j) \cdot \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \quad (i \neq j). \tag{138}$$

Сопряжение $^+$ определим следующим образом:

$$a^+ = x_0 - \sum_{i=1}^{n'} x_i \varepsilon_i. \tag{139}$$

Произведение $a \cdot b$ равно:

$$a \cdot b = (x_0 + \sum_{i=1}^{n'} x_i \varepsilon_i) \cdot (y_0 + \sum_{j=1}^{n'} y_j \varepsilon_j) = x_0 y_0^* + y_0 \sum_{i=1}^{n'} x_i \varepsilon_i + x_0 \sum_{i=1}^{n'} y_i \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} \sum_{s=1}^{n'} x_i y_j a_{ijs} \varepsilon_s -$$

$$- \sum_{i=1}^{n'} x_i y_i^* = x_0 y_0^* - \sum_{l=1}^{n'} x_l y_l^* + y_0 \sum_{s=1}^{n'} x_s \varepsilon_s + x_0 \sum_{s=1}^{n'} y_s \varepsilon_s + \sum_{s=1}^{n'} \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} x_i y_j a_{ijs} \varepsilon_s,$$

или

$$a \cdot b = x_0 y_0^* - \sum_{l=1}^{n'} x_l y_l^* + \sum_{s=1}^{n'} (y_0 x_s + x_0 y_s + \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} x_i y_j a_{ijs}) \varepsilon_s. \tag{140}$$

Пусть теперь

$$b = a^+ \;\; (x_0 = y_0, \; x_i = -y_i \;\; (i \neq 0)). \tag{141}$$

или, согласно (140) и (141),

$$a \cdot a^+ = x_0 x_0^* + \sum_{l=1}^{n'} x_l x_l^* + \sum_{s=1}^{n'} (x_0 x_s - x_0 x_s - \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} x_i x_j a_{ijs}) \varepsilon_s.$$

Но вследствие выполнения (136) имеем:

$$\sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} x_i x_j a_{ijs} = 0,$$

и мы получим

$$aa^+ = \tilde{Re}\,(a\cdot a^+) = |x_0|^2 + \sum_{l=1}^{n'} |x_l|^2 = \sum_{k=0}^{n'} |x_k|^2 = (a,a). \tag{142}$$

Поскольку

$$a = (a^+)^+, \tag{143}$$

имеем также

$$a^+a = aa^+ = \sum_{k=0}^{n'} |x_k|^2 = (a,a). \tag{144}$$

Имеем также, как легко показать,

$$\tilde{Re}\,(a\cdot b^+) = (a,b), \tag{142$'$}$$

$$\begin{gathered} \tilde{Re}\,(a\cdot b) = x_0y_0^* - (\tilde{Im}\,a, \tilde{Im}\,b), \\ \tilde{Re}\,(a\cdot a) = |x_0|^2 - (\tilde{Im}\,a, \tilde{Im}\,a) \end{gathered} \tag{142$''$}$$

– форма Минковского.

Ниже мы ограничимся системами, в которых

$$\begin{gathered} \varepsilon_i\varepsilon_j = -\varepsilon_j\varepsilon_i = \varepsilon_l \quad (i\neq j), \quad l\neq i\neq j; \quad i,j\leq n; \varepsilon_i\cdot\varepsilon_j = 0 \text{ при } i'>n \text{ или } j'>n, \\ \text{и каждому индексу } l \text{ соответствует одна и только одна пара индексов } i,j. \end{gathered} \tag{145}$$

Системы, удовлетворяющие соотношениям $(134), (136'), (137), (138), (139), (145)$, назовем системами *квазикватернионов*. Векторам $(x_1, x_2, ...x_n), (y_1, y_2, ...y_n)$ n-мерного комплексного пространства соответствуют элементы системы квазикватернионов

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i\varepsilon_i. \tag{146}$$

Каждому n-мерному евклидову пространству можно поставить в соответствие, разумеется, не единственное кольцо квазикватернионов (см. [5]). Только для действительных евклидовых пространств квазикватернионы являются алгебрами, поскольку для комплексных квазикватернионов

$$(\alpha a)\cdot b \neq a\cdot(\alpha b). \tag{147}$$

(α – комплексное число). Произведение двух векторных квазикватернионов равно:

$$x\cdot y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j^{\rho_{ij}}\varepsilon_i\varepsilon_j, \tag{148}$$

где ρ_{ij} – символ, определяемый соотношениями

$$\begin{cases} \rho_{ij} = *, & i=j, \\ \rho_{ij} = 1, & i\neq j. \end{cases} \tag{149}$$

Согласно $(148), (134)$ и (145) получим:

$$\begin{gathered} x\cdot y = -\sum_{m=1}^{n} x_m y_m^* + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varepsilon_i\varepsilon_j = \\ = -(x,y) + \sum_{l=1}^{n'} (x_i y_j - x_j y_i)\varepsilon_l, \quad (i\neq j; \quad i,j \ \text{ не переставляются}) \end{gathered} \tag{150}$$

Согласно (142) и (150) имеем:

$$|x \cdot y|^2 = |(x,y)|^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i y_j - x_j y_i|^2, \quad (i \neq j; \;\; i,j \text{ не переставляются}). \tag{151}$$

Сравнивая (68) и (151), получим:

$$|x \cdot y|^2 = |x|^2 |y|^2. \tag{152}$$

Это – равенство, соответствующее неравенству Шварца-Коши-Буняковского, записанное в "квазикватернионном" виде.

Произведение полных квазикватернионов $a \cdot b$ определяется формулой

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n'}\sum_{j=1}^{n'} x_i y_j^{\rho_{ij}} \varepsilon_i \varepsilon_j, \tag{153}$$

$$a = x_0 + \sum_{i=1}^{n'} x_i \varepsilon_i, \quad b = y_0 + \sum_{j=1}^{n'} y_j \varepsilon_j. \tag{154}$$

Согласно $(153), (154)$

$$a \cdot b = x_0 y_0^* + x_0 \sum_{i=1}^{n'} x_i \varepsilon_i + y_0 \sum_{j=1}^{n'} y_j \varepsilon_j + \sum_{i=1}^{n'} x_i \varepsilon_i \cdot \sum_{j=1}^{n'} y_j \varepsilon_j. \tag{155}$$

Однако вследствие соотношения $\varepsilon_i \varepsilon_j = 0$ при $i > n$ или $j > n, i \neq j$, имеем, как легко показать

$$\sum_{i=1}^{n'} x_i \varepsilon_i \cdot \sum_{j=1}^{n'} y_j \varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i \cdot \sum_{j=1}^{n} y_i \varepsilon_i. \tag{156}$$

Следовательно,

$$a \cdot b = x_0 y_0^* + x_0 \sum_{i=1}^{n'} y_i \varepsilon_i + y_0 \sum_{j=1}^{n'} x_j \varepsilon_j + \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j \varepsilon_j = x_0 y_0^* + \sum_{l=1}^{n'} (x_0 y_l + y_0 x_l) y_l +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n'}\sum_{k=1}^{n'} (x_i y_k - x_k y_i) \varepsilon_l - \sum_{m=1}^{n'} x_m y_m^* \quad (i \neq k; \;\; i,k \text{ не переставляются})$$

$$a \cdot b = x_0 y_0^* - (\tilde{Im}\, a, \tilde{Im}\, b) + \sum_{l=1}^{n'} (x_0 y_l + y_0 x_l + x_i y_k - x_k y_i) \varepsilon_l, \tag{157}$$

$$(\tilde{Im}\, a, \tilde{Im}\, b) = \sum_{m=1}^{n'} x_m y_m^*. \tag{158}$$

Далее,

$$(a \cdot b)^+ = x_0 y_0^* - (\tilde{Im}\, a, \tilde{Im}\, b) - \sum_{l=1}^{n'} (x_0 y_l + y_0 x_l + x_i y_k - x_k y_i) \varepsilon_l \tag{159}$$

(в третьем слагаемом каждому индексу l соответствует единственная пара индексов i, k).

Каждому квазикватерниону (назовем его правым) введем в соответствие квазикватернион с законом умножения

$$(a \cdot b)_l = \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} x_i^{\rho_{ij}} y_j \varepsilon_i \varepsilon_j, \tag{153'}$$

где a и b определяются формулами (154). Согласно (153′) и (154)

$$(a \cdot b)_l = [(x_0 + \sum_{i=1}^{n'} x_i\varepsilon_i)(y_0 + \sum_{j=1}^{n'} y_j\varepsilon_j)]_l = x_0^* y_0 + x_0 \sum_{j=1}^{n'} y_j\varepsilon_j + y_0 \sum_{j=1}^{n'} x_j\varepsilon_j +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j\varepsilon_j = x_0^* y_0 + \sum_{l=1}^{n'} (x_0 y_l + y_0 x_l)\varepsilon_l - (x, y)_{n'}^* + \sum_{l=1}^{n'} (x_i y_k - x_k y_i)\varepsilon_l,$$

т. е.

$$(a \cdot b)_l = x_0^* y_0 - (x, y)_{n'}^* + \sum_{l=1}^{n'} (x_0 y_l + y_0 x_l + x_i y_k - x_k y_i)\varepsilon_l. \tag{160}$$

Для $(b^+ a^+)_l$ имеем, согласно (160),

$$b^+ a^+|_l = y_0^* x_0 - (y, x)_{n'}^* - \sum_{l=1}^{n'} (y_0 x_l + x_0 y_l - y_i x_k + y_k x_i)\varepsilon_l,$$

или

$$b^+ a^+|_l = y_0^* x_0 - (x, y)_{n'} - \sum_{l=1}^{n'} (y_0 x_l + x_0 y_l - y_i x_k + y_k x_i)\varepsilon_l. \tag{161}$$

где $(x, y)_{n'} = \sum_{l=1}^{n'} x_l y_l^*$. Сравнивая (159) с (161), получим:

$$(a \cdot b)^+ = (b^+ a^+)_l. \tag{162}$$

В действительном пространстве формула (162) принимает обычный вид.

Нетрудно показать, что модули $|x|$ векторных квазикватернионов $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$ вследствие выполнения условия (152) и других условий являются нормами. Модули полных квазикватернионов вследствие того, что $|a||b| \neq |a \cdot b|$, нормами не являются. Вопрос о том, являются ли они псевдонормами, в статье не рассматривается. При умножении элементов $a \cdot b = (x_0 + \sum_{i=1}^{n'} x_i\varepsilon_i)(y_0 + \sum_{k=1}^{n'} y_k\varepsilon_k)$ применяется левый и правый дистрибутивные законы. Можно показать, что отсюда следуют дистрибутивные законы

$$(a + b)(c + d) = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d. \tag{163}$$

Следовательно, рассмотренные квазикватернионы являются кольцами.

Все полученные ваше соотношения применимы и для $n < 3$, однако размерность квазикватернионов уже не равна $n(n-1)/2 + 1$.

4. Рассмотрим вопрос о делении для двух наиболее простых квазикватернионов при $n = 3$ и $n = 1$.

а) Начнем рассмотрение с квазикватерниона с левым умножением. Для квазикватернионов a и b имеем:

$$(a \cdot x)_l = b, \tag{164}$$

где $x = x_{l,l}$ – левое частное. Изменив обозначения, имеем:

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \tag{165}$$

$$b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k, \tag{166}$$

$$x = x_{l,l} = x_0 + x_1 k + x_2 j + x_3 k. \tag{167}$$

Таким образом,

$$(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(x_0 + x_1 k + x_2 j + x_3 k)|_l = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k, \tag{168$'$}$$

т. е.

$$\begin{gathered} a_0^* x_0 - a_1^* x_1 - a_2^* x_2 - a_3^* x_3 + (a_0 x_1 + a_1 x_0 + a_2 x_3 - a_3 x_2) i + (a_0 x_2 + a_2 x_0 + a_3 x_1 - a_1 x_3) j + \\ +(a_3 x_0 + a_0 x_3 + a_1 x_2 - a_2 x_1) k = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k, \end{gathered} \tag{168}$$

откуда получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_0^* x_0 - a_1^* x_1 - a_2^* x_2 - a_3^* x_3 = b_0 \\ a_1 x_0 + a_0 x_1 - a_3 x_2 - a_2 x_3 = b_1 \\ a_2 x_0 + a_3 x_1 + a_0 x_2 - a_1 x_3 = b_2 \\ a_3 x_0 - a_2 x_1 + a_1 x_2 - a_0 x_3 = b_3 \end{cases} \tag{169$'$}$$

Согласно формуле Крамера получим, опуская промежуточные вычисления

$$x_{l,l} = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k, \tag{167}$$

где

$$\begin{gathered} x_0 = \tfrac{1}{|a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2} \Big\{ b_0 a_0 + \tfrac{1}{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2} [b_1 (a_1^* a_0^2 + |a_3|^2 a_1 + |a_2|^2 a_1 + a_0 a_2 a_3^* - \\ - a_0 a_2^* a_3 + |a_1|^2 a_1) + b_2 (a_1^* a_3 a_0 - a_0 a_1 a_3^* + |a_2|^2 a_2 + |a_3|^2 a_2 + a_0^2 a_2^* + |a_1|^2 a_2) + \\ + b_3 (|a_1|^2 a_3 + a_0^2 a_3^* + |a_2|^2 a_3 + |a_3|^2 a_3 + a_1 a_0 a_2^* - a_0 a_2 a_1^*)] \Big\}, \end{gathered} \tag{169}$$

$$\begin{gathered} x_1 = \tfrac{1}{|a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2} \Big\{ -b_0 a_1 + \tfrac{1}{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2} [b_1 (|a_0|^2 a_0 - a_1 a_2 a_3^* + a_1 a_2^* a_3 + |a_3|^2 a_0 + \\ + a_0^* a_1^2 + |a_2|^2 a_0) + b_2 (|a_0|^2 a_3 + a_1^2 a_3^* + |a_2|^2 a_3 + |a_3|^2 a_3 - a_1 a_2^* a_0 + a_1 a_2 a_0^*) - \\ - b_3 (a_0 a_1 a_3^* - a_0^* a_1 a_3 + |a_2|^2 a_2 + |a_3|^2 a_2 + |a_0|^2 a_2 + a_1^2 a_2^*)] \Big\}, \end{gathered} \tag{170}$$

$$\begin{gathered} x_2 = \tfrac{1}{|a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2} \Big\{ -b_0 a_2 + \tfrac{1}{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2} [-b_1 (|a_0|^2 a_3 + a_2^2 a_3^* + |a_1|^2 a_3 + |a_3|^2 a_3 - \\ - a_1 a_2 a_0^* + a_1^* a_2 a_0) + b_2 (|a_0|^2 a_0 + a_1 a_2 a_3^* - a_1^* a_2 a_3 + a_0 |a_3|^2 + a_0^* a_2^2 + a_0 |a_1|^2) + \\ + b_3 (|a_0|^2 a_1 + a_1 |a_3|^2 + a_1^* a_2^2 - a_0 a_2 a_3^* + a_0^* a_2 a_3 + |a_1|^2 a_1)] \Big\}, \end{gathered} \tag{171}$$

$$\begin{gathered} x_3 = \tfrac{1}{|a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2} \Big\{ -b_0 a_3 + \tfrac{1}{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2} [b_1 (a_0^* a_3 a_1 + |a_2|^2 a_2 - a_1^* a_0 a_3 + \\ + a_3^2 a_2^* + |a_0|^2 a_2 + |a_1|^2 a_2) - b_2 (|a_0|^2 a_1 + |a_2|^2 a_1 + a_1^* a_3^2 + a_3 a_0 a_2^* - a_0^* a_2 a_3 + |a_1|^2 a_1) + \\ + b_3 (|a_0|^2 a_0 - a_1 a_3 a_2^* + a_1^* a_3 a_2 + a_0 |a_2|^2 + a_3^2 a_0^* + |a_1|^2 a_0)] \Big\}. \end{gathered} \tag{172}$$

(Первый индекс в $x_{l,l}$ указывает характер деления (левое или правое), второй – характер умножения в квазикватернионе).

Аналогичные вычисления для $x_{r,l}$ дают:

$$x_{r,l} = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k, \tag{167}$$

где

$$\begin{gathered} x_0 = \tfrac{1}{|a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}\Big\{ b_0^* a_0 + \tfrac{1}{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}[b_1(|a_0|^2 a_1^* + a_1|a_3|^2 + a_1|a_2|^2 - \\ - a_0 a_2 a_3^* + a_1|a_1|^2 + a_0 a_2^* a_3) + b_2(-a_1^* a_3 a_0 + a_0 a_1 a_3^* + |a_2|^2 a_2 + |a_3|^2 a_2 + |a_1|^2 a_2 + a_0^2 a_2^*) + \\ + b_3(|a_1|^2 a_3 + a_0^2 a_3^* + |a_2|^2 a_3 + |a_3|^2 a_3 + a_0 a_2 a_1^* - a_0 a_2^* a_1)]\Big\}, \end{gathered} \tag{173}$$

$$\begin{gathered} x_1 = \tfrac{1}{|a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}\Big\{ -a_1 b_0^* + \tfrac{1}{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}[b_1(|a_0|^2 a_0 + a_1 a_2 a_3^* - a_1 a_2^* a_3 + a_0|a_3|^2 + \\ + a_0|a_2|^2 + a_1^2 a_0^*) - b_2(|a_0|^2 a_3 + a_1^2 a_3^* + |a_2|^2 a_3 + |a_3|^2 a_3 - a_1 a_2 a_0^* + a_1 a_2^* a_0) + b_3(a_0^* a_3 a_1 - \\ - a_0 a_1 a_3^* + |a_2|^2 a_2 + |a_3|^2 a_2 + |a_0|^2 a_2 + a_1^2 a_2^*)]\Big\}, \end{gathered} \tag{174}$$

$$\begin{gathered} x_2 = \tfrac{1}{|a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}\Big\{ -b_0^* a_2 + \tfrac{1}{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}[b_1(|a_0|^2 a_3 + a_2^2 a_3^* + |a_1|^2 a_3 + |a_3|^2 a_3 + \\ + a_1 a_2 a_0^* - a_1^* a_2 a_0) + b_2(|a_0|^2 a_0 - a_1 a_2 a_3^* + a_1^* a_2 a_3 + |a_3|^2 a_0 + a_2^2 a_0^* + |a_1|^2 a_0) - \\ - b_3(|a_0|^2 a_1 + a_1|a_3|^2 + a_1^* a_2^2 + a_0 a_2 a_3^* - a_0^* a_2 a_3 + |a_1|^2 a_1)]\Big\}, \end{gathered} \tag{175}$$

$$\begin{gathered} x_3 = \tfrac{1}{|a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}\Big\{ -b_0^* a_3 + \tfrac{1}{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}[-b_1(-a_0^* a_1 a_3 + a_0 a_1^* a_3 + |a_2|^2 a_2 + \\ + a_3^2 a_2^* + |a_0|^2 a_2 + |a_1|^2 a_2) + b_2(|a_0|^2 a_1 + a_1|a_2|^2 + a_1^* a_3^2 - a_0 a_3 a_2^* + a_2 a_3 a_0^* + |a_1|^2 a_1) + \\ + b_3(|a_0|^2 a_0 + a_1 a_3 a_2^* - a_1^* a_3 a_2 + a_0|a_2|^2 + a_0^* a_3^2 + |a_1|^2 a_0)]\Big\}, \end{gathered} \tag{176}$$

Далее, нетрудно показать, что:
1. $x_{l,r}$ получается из $x_{l,l}$ (формулы (169) – (172)) заменой в них b_0 на b_0^*.
2. $x_{r,r}$ получается из $x_{r,l}$ (формулы (173) – (176)) заменой в них b_0^* на b_0.

Из полученных формул следует, что деление (правое и левое) на квазикватернионы (правый или левый), рассмотренные выше, возможно только при $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$. Из этих формул также следует, что любое деление b_0 на a возможно при a, отличном от нуля.

Легко показать, что левая и правая единицы $e_{r,l}$, $e_{l,l}$, $e_{r,r}$, e_{lr} рассмотренных квазикватернионов не совпадают, а также, что

$$e_{r,l} = 1,\ e_{l,l} \neq 1,\ e_{l,r} = 1,\ e_{r,r} \neq 1. \tag{177}$$

Рассмотрим снова правое произведение квазикватернионов $a \cdot b$ (формула (81′)) в обозначениях a_k, b_k:

$$\begin{gathered} a \cdot b = a_0 b_0^* - a_1 b_1^* - a_2 b_2^* - a_3 b_3^* + (b_0 a_1 + a_0 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2) i + \\ + (b_0 a_2 + a_0 b_2 + a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (b_0 a_3 + a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1) k. \end{gathered} \tag{81″}$$

Точно так же

$$\begin{gathered} (a \cdot b)_l = a_0^* b_0 - a_1^* b_1 - a_2^* b_2 - a_3^* b_3 + (b_0 a_1 + a_0 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2) i + \\ + (b_0 a_2 + a_0 b_2 + a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (b_0 a_3 + a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1) k. \end{gathered} \tag{81‴}$$

Перейдем к рассмотрению указанных квазикватернионов с нулевыми коэффициентами при всех мнимых ортах, кроме одного (например i-го). Тогда имеем:

$$a \cdot b = a_0 b_0^* - a_1 b_1^* + (b_0 a_1 + a_0 b_1) i, \tag{178}$$

$$(a \cdot b)_l = a_0^* b_0 - a_1^* b_1 + (b_0 a_1 + a_0 b_1) i. \tag{179}$$

Получаются замкнутые алгебраические системы, соответственно с правым и левым умножением. Они неассоциативны и неальтернативны, однако

$$b \cdot a = b_0 a_0^* - b_1 a_1^* + (a_0 b_1 + b_0 a_1) i,$$

т. е.

$$b \cdot a = (a \cdot b)_l. \tag{180}$$

Рассмотрим вопрос о делении таких систем. Полагая в формулах $(167), (169)$ – (172) и (173) – (176) a_2, b_2 и a_3, b_3 равным нулю, получим в результате вычислений

$$x_{l,l} = \frac{1}{|a_0|^2 + |a_1|^2}[a_0 b_0^* + a_1^* b_1 + (a_0^* b_1 - a_1 b_0) i], \tag{181}$$

$$x_{r,l} = \frac{1}{|a_0|^2 + |a_1|^2}[a_0 b_0^* + a_1^* b_1 + (a_0^* b_1 - a_1 b_0^*) i]. \tag{182}$$

Заменяя согласно сказанному выше b_0 на b_0^* в (181), получим:

$$x_{l,r} = \frac{1}{|a_0|^2 + |a_1|^2}[a_0 b_0^* + a_1^* b_1 + (a_0^* b_1 - a_1 b_0^*)]. \tag{183}$$

Точно так же замена в $x_{r,l}$ b_0^* на b_0 дает:

$$x_{r,r} = \frac{1}{|a_0|^2 + |a_1|^2}[a_0 b_0 + a_1^* b_1 + (a_0^* b_1 - a_1 b_0) i]. \tag{184}$$

Из формул (181) – (184) следует, что при $a \neq 0$ в такой системе всегда возможно деление, но $x_{l,l} \neq x_{r,l}$, и $x_{l,r} \neq x_{r,r}$.

Из формулы (180) также имеем:

$$x_{l,l} = x_{r,r}, \tag{185}$$

$$x_{r,l} = x_{l,r}, \tag{186}$$

что также следует из формул $(181), (184)$ и из формул $(182), (183)$. Отправляясь снова от кватернионов, рассмотрим гиперкомплексную систему той же размерности ($n = 4$) с несколько иными правилами умножения:

$$\begin{gathered} a \cdot b = a_0 b_0 - a_1 b_1^* - a_2 b_2^* - a_3 b_3^* + (a_0 b_1 + a_1 b_0^* + a_2 b_3 - a_3 b_2) i + \\ + (a_0 b_2 + a_2 b_0^* + a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_0 b_3 + a_3 b_0^* + a_1 b_2 - a_2 b_1) k. \end{gathered} \tag{187}$$

Сопряжение определим по формуле

$$a^+ = a_0^* - a_1 i - a_2 j - a_3 k, \tag{188}$$

и соответственно

$$b^+ = b_0^* - b_1 i - b_2 j - b_3 k. \tag{188'}$$

Из формул (187) – $(188')$ следует:

$$a \cdot a^+ = a^+ \cdot a = |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2. \tag{189}$$

Легко показать, что

$$(a \cdot b)^+ = b^+ a^+. \tag{189'}$$

При

$$x = a_1 i + a_2 j + a_3 k, \tag{190}$$

$$y = b_1 i + b_2 j + b_3 k, \tag{190$'$}$$

получим, согласно (187) (при $a_0 = b_0 = 0$).

$$x \cdot y = -(x, y) + (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k,$$

$$|x \cdot y|^2 = |(x, y)|^2 + |a_2 b_3 - a_3 b_2|^2 + |a_3 b_1 - a_1 b_3|^2 + |a_1 b_2 - a_2 b_1|^2,$$

и после вычислений

$$|x \cdot y|^2 = |a_1|^2 |b_1|^2 + |a_2|^2 |b_2|^2 + |a_3|^2 |b_3|^2 + |a_2|^2 |b_3|^2 + |a_3|^2 |b_2|^2 + |a_3|^2 |b_1|^2 +$$

$$+ |a_1|^2 |b_3|^2 + |a_1|^2 |b_2|^2 + |a_2|^2 |b_1|^2 = |x|^2 |y|^2,$$

т. е.

$$|x \cdot y|^2 = |x|^2 |y|^2 \tag{152}$$

– равенство, соответствующее неравенству Шварца-Коши-Буняковского. Полагая в нашей системе $a_2 = a_3 = 0$, и соответственно $b_2 = b_3 = 0$, получим из формулы (187)

$$a \cdot b = a_0 b_0 - a_1 b_1^* + (a_0 b_1 + a_1 b_0^*) i. \tag{191}$$

Получается снова замкнутая система. Это – система "удвоенных" комплексных чисел, изоморфная действительным кватернионам [2]. Дальнейшее изучение подобных систем в статье проводиться не будет.

Заключение

1. Для кольца матриц получена псевдонорма, и найдено равенство, соответствующее неравенству

$$|AB| \leq |A| \cdot |B|$$

2. Получены равенства, соответствующее неравенствам Шварца-Коши-Буняковского. Для каждого евклидова комплексного n-мерного пространства ($n \geq 3$) вводятся некоторые $n' + 1$-мерные гиперкомплексные системы ($n' = n(n-1)/2$), позволяющие с их помощью записать указанные равенства. Несколько подробнее рассмотрены две гиперкомплексные 4-мерные системы, в действительной области переходящие в кватернионы.

Литература

[1] А. Г. Курош. *Лекции по общей алгебре*, ГИФМЛ, Москва, 1962.

[2] И. Л. Кантор, А. С. Солодовников.*Гиперкомплексные числа.* "Наука", Москва, 1973.

[3] А. Г. Курош. *Курс высшей алгебры.* ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1949.

[4] И. М. Гельфанд. *Лекции по линейной алгебре.* "Наука", ГИФМЛ, Москва, 1971.

[5] А. А. Элиович. *О норме бикватернионов и иных алгебр с центральным сопряжением.* "Гиперкомплексные числа в геометрии и физике", 2 (2) 2004.

[6] С. Ленг. *Алгебра.*Перевод с английского Е. С. Голода. Под редакцией А. И. Кострикина. "Мир", Москва, 1968.

Приложение

Вывод формул (4) – (7).

Для квадрата нормы произведения квазиунитарных матриц AB имеем:

$$|AB|^2 = (AB)\cdot(AB)^+ = AB\cdot B^+A^+ = |A|^2|B|^2$$

или

$$|AB|^2 = |A|^2|B|^2, \tag{4'}$$

откуда

$$|AB| = |A||B|. \tag{4}$$

Далее,

$$|A|^2 = AA^+ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{21} & ... & a^*_{n1} \\ a^*_{12} & a^*_{22} & ... & a^*_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a^*_{1n} & a^*_{2n} & ... & a^*_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} |a_{11}|^2+|a_{12}|^2+...+|a_{1n}|^2 & 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad ...\quad 0 \\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ - & -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ - \\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ - & -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ - \\ 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad ...\quad 0 & |a_{n1}|^2+|a_{n2}|^2+...+|a_{nn}|^2 \end{array}\right).$$

Но каждый k-й диагональный элемент равен

$$|A|^2 = |A|^2_{kk} = |a_{k1}|^2 + |a_{k2}|^2 + ... + |a_{kk}|^2$$

$$(|A|^2_{11} = |A|^2_{22} = ... = |A|^2_{kk} = ...)$$

и обращается в нуль только при

$$a_{k1} = a_{k2} = a_{k3} = ... = a_{kn} = 0,$$

откуда следует:

$$|A| = 0 \ \text{ только при } \ A = 0. \tag{5}$$

Соотношение

$$|-A| = |A|. \tag{6}$$

очевидно.

Рассмотрим теперь сумму двух квазиунитарных матриц $A+B$, и потребуем, чтобы эта сумма также была квазиунитарной. Имеем:

$$|A+B|^2 = (A+B)(A^+ + B^+) = |A|^2 + |B|^2 + AB^+ + BA^+.$$

Условия квазиунитарности $A+B$, очевидно, запишутся следующим образом:

$$|A|^2 + |B|^2 + AB^+ + BA^+ \geq 0,$$

$$(A,B) = \frac{AB^+ + BA^+}{2} = c. \tag{7'}$$

где c действительно (коэффициент $\frac{1}{2}$ в левой части (7′) выбран для удобства).

(A,B) является скалярным произведением элементов (матриц) A и B, поскольку [4]:

1) оно является числом (в данном случае действительным);
2) $(A, A) = |A|^2 \geq 0, \quad (A, A) = 0$ только при $A = 0$;
3) $(A, B) = (B, A)$;
4) $(A + B, C) = (A, C) + (B, C)$;
5) $(\lambda A, B) = \lambda(A, B), \lambda$ – действительное число.

Вычислим теперь выражение

$$(|A| + |B|)^2 - |A + B|^2$$

Имеем:

$$(|A| + |B|)^2 - |A + B|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2|A||B| - |A|^2 - |B|^2 - 2(A, B) = 2(|A||B| - (A, B)).$$

Поскольку (A, B) действительно, то $(A, B) \leq |(A, B)|$ Следовательно,

$$(|A| + |B|)^2 - |A + B|^2 \geq 2(|A||B| - |(A, B)|). \tag{7''}$$

Но, согласно неравенству Шварца-Коши-Буняковского,

$$|(A, B)| \leq |A||B|.$$

Поэтому

$$(|A| + |B|)^2 - |A + B|^2 \geq 0, \quad (|A| + |B|)^2 \geq |A + B|^2,$$

откуда [6]

$$|A| + |B| \geq |A + B|. \tag{7}$$

Отметим, что совокупность квазиунитарных квазиунитарно суммируемых друг с другом матриц представляет собой действительное евклидово пространство, в котором, в частности, выполняется неравенство треугольника (7).

Equalities which correspond to pseudo-norms of matrices of order n and to the Cauchy-Buniakowski-Schwartz inequalities

L. G. Solovey

lgsolovey@gmail.com

It is shown, that one can associate to an $n-$th order matrix a positive number, playing the role of its pseudonorm ([1]), and the corresponding formula is obtained. For the pseudonorms $|A|$ and $|B|$ of the matrices A and B, is satisfied the inequality $|A||B| \geq |AB|$. It is shown that for each such inequality there corresponds a related equality. As well, it is shown that similar equalities correspond to the inequalities Cauchy-Buniakowski-Schwartz for scalar products, and for each such an inequality corresponds some hypercomplex number. For each of the presented equalities the following statement holds true: "the product between the sum of squares with the sum of squares is, again, a sum of squares", i.e., the generalized Hurwitz theorem.

Key-words: pseudonorm, inequalities, hypercomplex numbers.
MSC: 47A30, 52A21.

УРАВНЕНИЯ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ И КВАТЕРНИОННАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

В. Ф. Чуб

Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королева, г. Королев, Россия
v.chub@mail.ru

В обзоре проведен сравнительный анализ релятивистских и нерелятивистских уравнений инерциальной навигации в свободном от гравитационного поля пространстве. Для записи уравнений используются кватернионы: с вещественными, дуальными, комплексными и комплексно-дуальными коэффициентами. В рамках теории пространства-времени, основанной на кватернионах с комплексно-дуальными коэффициентами, показана незамкнутость преобразований, которые в рамках специальной теории относительности образуют группу Пуанкаре, а в рамках механики Ньютона — группу Галилея. Приведено уравнение инерциальной навигации, соответствующее кватернионной теории пространства-времени, и отмечена его абсурдность.

Ключевые слова: инерциальная навигация, кватернионы.

> *“Изобретение кватернионов — шаг вперед к пониманию величин,*
> *связанных с пространством; оно сравнимо по своему значению*
> *с изобретенной Декартом системой координат.”*
>
> *Дж. Максвелл*

> *“Это была революция в арифметике, подобная той,*
> *которую совершил Лобачевский в геометрии.”*
>
> *А. Пуанкаре*

> *“Во всяком случае видно, насколько точно приспособлены кватернионы*
> *к изображению ортогональных подстановок 3 или 4 переменных.*
> *Они могут применяться с пользой всюду, где заходит речь о таких подстановках.*
> *Напротив, вряд ли кто-нибудь сейчас видит в них универсальное целебное средство*
> *от всех недостатков геометрии, как порой казалось Гамильтону и его ученикам.”*
>
> *Ф. Клейн*

1. Введение

В теории бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) имеют дело, как минимум, с двумя системами отсчета, одна из которых (I) инерциальная (“неподвижная”), а вторая (E) связана с движущимся объектом. Далее будут использоваться только инерциальные системы отсчета в пространстве-времени с ортонормированными базисами (галилеевы системы отсчета). Неинерциальная связанная система отсчета E рассматривается как непрерывная последовательность инерциальных систем отсчета $E(\tau)$.

Положение одной системы отсчета (E) в пространстве-времени относительно другой (I) задается (без учета гравитации) десятью параметрами (t и компоненты трех векторов $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{\vartheta}$):

– положением начала отсчета системы E относительно системы отсчета I в пространстве-времени (сдвиг во времени t и радиус-вектор $\vec{r}$);
– скоростью системы E относительно I (вектор скорости $\vec{v}$);
– пространственным поворотом E относительно I (вектор ориентации $\vec{\vartheta}$).

Общая постановка задачи инерциальной навигации обсуждается в рассчитанном на широкий круг читателей кратком сообщении [1]. Далее будет рассматриваться только случай движения объекта в свободном от гравитационного поля пространстве. В случае отсутствия гравитационного поля задача БИНС состоит в вычислении текущего положения движущейся системы отсчета относительно неподвижной по измеряемым объектом ускорению $\vec{a}(\tau)$ и угловой скорости $\vec{\omega}(\tau)$ (как функций от τ — измеряемого объектом времени) при известном начальном положении (на момент τ_0).

2. Нерелятивистские уравнения инерциальной навигации

В нерелятивистском пределе, как известно, бортовое время τ совпадает с координатным временем t и называется “абсолютным” (ньютоновским) временем.

2.1. Уравнения инерциальной навигации в обычных кватернионах

Хорошо известная система нерелятивистских уравнений инерциальной навигации при отсутствии гравитационного поля имеет вид:

$$\frac{d\vec{r}_I}{d\tau} = \vec{v}_I, \tag{1}$$

$$\frac{d\vec{v}_I}{d\tau} = \vec{a}_I = \Lambda \circ \vec{a}_E \circ \bar{\Lambda}, \tag{2}$$

$$\frac{d\Lambda}{d\tau} = \frac{1}{2}\Lambda \circ i\vec{\omega}_E. \tag{3}$$

Физический смысл всех использованных векторов объяснен выше. Индексы при векторах обозначают систему отсчета, к которой отнесен вектор. Символ

$\Lambda = e^{i\vec{\vartheta}/2} = \exp(i\vec{\vartheta}/2) = \cos(\vartheta/2) + i(\vec{\vartheta}/\vartheta)\sin(\vartheta/2)$ обозначает нормированный кватернион, соответствующий преобразованию пространственного поворота;

$\vec{\vartheta}$ — вектор Эйлера (другое название — вектор ориентации), определяющий пространственный поворот ($\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}_I = \vec{\vartheta}_E$; $\vartheta = |\vec{\vartheta}|$ — модуль вектора);

i — обычная скалярная мнимая единица ($i^2 = -1$);

$\bar{\Lambda}$ — комплексно-сопряженный кватернион ($i \to -i$).

Более подробно используемые обозначения объясняются в работе [2], основным результатам которой посвящена настоящая статья.

Бросается в глаза неоднородность выписанной системы уравнений в смысле используемого математического аппарата: используются как векторные, так и кватернионные уравнения. Формально нетрудно привести все уравнения к векторному виду: надо только записать уравнение (2) в векторном виде (получится известная из теории конечного поворота формула) и заменить кинематическое уравнение (3), используя векторный параметр (например, вектор Эйлера [3, с. 121, 256]). При этом, однако, формулы значительно усложняются, а кроме того, возникает вырождение в отдельных точках [4, с. 77]. С другой стороны, не представляет труда записать все уравнения в обычных кватернионах [4, с. 20, 96].

2.2. Уравнения инерциальной навигации в дуальных кватернионах

Уравнения (1) и (3) можно объединить в одно [3, с. 100], если использовать более сложную числовую систему — кватернионы с дуальными коэффициентами (они же — бикватернионы Клиффорда); при этом уравнение (2) удобно записать для проекции вектора $\vec{v}$ на движущуюся систему отсчета [3, с. 19]:

$$\frac{d\Lambda}{d\tau} = \frac{1}{2}\Lambda \circ (i\vec{\omega}_E + \varepsilon i\vec{v}_E), \qquad \frac{d\vec{v}_E}{d\tau} = \vec{a}_E + \vec{v}_E \times \vec{\omega}_E.$$

Здесь уже

$\Lambda = \exp(\varepsilon i\vec{r}/2) \circ \exp(i\vec{\vartheta}/2)$ обозначает бикватернион Клиффорда, определяющий пространственный поворот и следующий за ним пространственный перенос системы отсчета ($\vec{r} = \vec{r}_I$, $\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}_I$, индексы опущены; $\varepsilon\vec{v}_I = \Lambda \circ \varepsilon\vec{v}_E \circ \bar{\Lambda}$);

ε — множитель Клиффорда ($\varepsilon^2 = 0$).

Данная система уравнений эквивалентна системе, выписанной в предыдущем пункте. Оператор Λ стал сложнее, но уравнений стало меньше: осталось только два уравнения, которые можно записать в бикватернионах Клиффорда.

3. Релятивистские уравнения инерциальной навигации

При записи релятивистских уравнений инерциальной навигации удобно вместо вектора скорости $\vec{v}$ использовать другой вектор — параметр скорости $\vec{\psi}$ (гиперболический угол поворота, быстрота), который связан с вектором $\vec{v}$ формулой: $\vec{v} = \operatorname{th}\vec{\psi} = (\vec{\psi}/\psi)\operatorname{th}\psi$, где ψ, как обычно, модуль вектора $\vec{\psi}$. Рассмотренные в предыдущем разделе нерелятивистские уравнения инерциальной навигации получаются предельным переходом (при $\psi \to 0$) из релятивистских уравнений, которые обсуждаются ниже[1)].

3.1. Уравнения инерциальной навигации в комплексных кватернионах

Уравнения (2) и (3) можно заменить одним релятивистским [2], если использовать кватернионы с комплексными коэффициентами (бикватернионы Гамильтона). Потребует замены на релятивистский аналог и уравнение (1):

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\tau} = \Lambda \circ \bar{\Lambda}, \qquad \frac{d\Lambda}{d\tau} = \frac{1}{2}\Lambda \circ (\vec{a} + i\vec{\omega}).$$

Здесь

$\mathrm{R} = t + \vec{r}$ — 4-вектор (его компоненты измерены в I, индексы опущены; подробнее см. [2]), связывающий начала отсчета неподвижной (I) и движущейся (E) систем отсчета;

$d\mathrm{R}/d\tau = \Lambda \circ \bar{\Lambda} = e^{\vec{\psi}} = \operatorname{ch}\psi + \operatorname{sh}\vec{\psi} = (1 + \vec{v})/\sqrt{1 - v^2}$ — 4-скорость начала отсчета системы E относительно I (скорость света считается равной единице по абсолютной величине);

$\Lambda = \exp(\vec{\psi}/2) \circ \exp(i\vec{\vartheta}/2)$ — нормированный бикватернион Гамильтона, определяющий преобразование поворота пространства-времени, разложенное на пространственный поворот и следующий за ним буст (переход к движущейся с постоянной скоростью системе отсчета), $\vec{\psi} = \vec{\psi}_I$, $\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}_I$;

$\vec{a}$ и $\vec{\omega}$ — измеряются в E, индексы опущены.

[1)] Подчеркнем, что нерелятивистские уравнения получаются в пределе $\psi \to 0$ (с отбрасыванием членов выше первого порядка по малому параметру), но не являются частным случаем релятивистских уравнений, так как полагая $\psi = 0$ нельзя получить из релятивистских уравнений инерциальной навигации систему соответствующих нерелятивистских уравнений.

Таким образом, релятивистские уравнения инерциальной навигации можно записать в виде двух уравнений в бикватернионах Гамильтона.

3.2. Уравнение инерциальной навигации в обобщенных кватернионах

Наконец, уравнения инерциальной навигации можно записать [2] в виде одного уравнения, если перейти к кватернионам с комплексно-дуальными коэффициентами (обобщенным кватернионам):

$$\frac{d\Lambda}{d\tau} = \frac{1}{2}\Lambda \circ \left(\vec{a} + i\vec{\omega} + \varepsilon i\bar{\Lambda} \circ \Lambda\right).$$

Здесь уже

$\Lambda = e^{\varepsilon i(t+\vec{r})/2} \circ e^{\vec{\psi}/2} \circ e^{i\vec{\vartheta}/2}$ — обобщенный кватернион, определяющий преобразование, переводящее, в частности, систему I в E. Он разложен на пространственный поворот, буст (лоренцев поворот) и параллельный перенос во времени и в пространстве (все преобразования заданы параметрами, отнесенными к системе отсчета I; выполняются в указанной последовательности[2]).

Это уравнение эквивалентно (для интересующих нас начальных условий) системе из двух уравнений, выписанных в предыдущем пункте. Тем не менее, анализ групповых свойств преобразований в рамках обобщенных кватернионов приводит к интересным результатам, которые нельзя получить, оставаясь в рамках бикватернионов Гамильтона или бикватернионов Клиффорда[3].

4. Кватернионная теория пространства-времени

Преобразование перехода к связанной системе отсчета, записанное в предыдущем пункте в виде обобщенного кватерниона, состоит из четырех элементарных преобразований систем отсчета — одного скалярного и трех векторных. Нас будет интересовать общий вид формул сложения однотипных векторных преобразований и перестановочных формул для преобразований разных типов[4].

Два последовательных переноса дают снова перенос:

$$e^{\varepsilon i\vec{r}_2/2}e^{\varepsilon i\vec{r}_1/2} = e^{\varepsilon i\vec{r}/2};$$

порядок множителей не важен (поэтому знак “$\circ$” может быть опущен), в результате тривиальных выкладок получим обычную формулу сложения векторов ($\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$).

Два поворота дают поворот:

$$e^{i\vec{\vartheta}_2/2} \circ e^{i\vec{\vartheta}_1/2} = e^{i\vec{\vartheta}/2};$$

порядок важен (некоммутативность пространственных поворотов), формула связи параметров составляющих и результирующего поворотов известна из теории конечных поворотов [3, с. 229].

Лоренцевы повороты (бусты), как известно [5, с. 134; 6, с. 403], незамкнуты:

$$e^{\vec{\psi}_2/2} \circ e^{\vec{\psi}_1/2} = e^{i\vec{\vartheta}/2} \circ e^{\vec{\psi}/2};$$

---

[2] Допустима и другая интерпретация, с обратной последовательностью выполнения элементарных преобразований [2].

[3] Если, конечно, не рассматривать эквивалентные обобщенным кватернионам объекты типа “пара комплексных кватернионов” или “набор из шестнадцати вещественных чисел” с определенными законами сложения и умножения, “матрицы” специального вида и т.п..

[4] Перенос во времени (скаляр) коммутирует со всеми другими преобразованиями (в развиваемой нами теории) и далее не рассматривается.

в общем случае помимо буста появляется еще и пространственный поворот. Вывод формул связи параметров довольно громоздкий, но требует только элементарной тригонометрии. Заметим, что в нерелятивистской механике (группа Галилея) скорости складываются как обычные векторы (правило параллелограмма) и никакого пространственного поворота при переходе к движущимся системам отсчета получить нельзя.

Теперь рассмотрим в общем виде формулы, позволяющие менять местами преобразования разных типов.

Поворот при перестановке с переносом инвариантен:

$$e^{\varepsilon i\vec{r}/2} \circ e^{i\vec{\vartheta}/2} = e^{i\vec{\vartheta}/2} \circ e^{\varepsilon i\vec{r}\,'/2},$$

а направление переноса в общем случае изменяется.

Точно так же поворот инвариантен и при перестановке с бустом:

$$e^{\vec{\psi}/2} \circ e^{i\vec{\vartheta}/2} = e^{i\vec{\vartheta}/2} \circ e^{\vec{\psi}\,'/2},$$

а направление скорости в общем случае изменяется.

Совершенно неожиданное[5] явление возникает при попытке переставить местами пространственный параллельный перенос и буст. Оказывается, что в общем случае этого сделать нельзя, так как приходится вводить новое преобразование, физическая интерпретация которого не найдена. Допустимо только формально исследовать перестановочные формулы этого преобразования с уже известными. Перестановочная формула имеет вид (скорость не изменяется):

$$e^{\vec{\psi}/2} \circ e^{\varepsilon i\vec{r}/2} = e^{\varepsilon i\vec{r}\,'/2} e^{\varepsilon\vec{\varphi}/2} \circ e^{\vec{\psi}/2}.$$

В отношении коммутационных свойств преобразования типа $\exp(\varepsilon\vec{\varphi}/2)$ аналогичны параллельным переносам: перестановочны друг с другом (и с переносами), изменяются при перестановке с пространственным поворотом и требуют преобразования третьего типа (в данном случае — переноса) при перестановке с бустом (полностью основные формулы приведены в [2]).

Отметим важность полученного результата.

Как известно, специальная теория относительности (СТО) — это теория пространства-времени, в основе которой лежит 10-параметрическая группа Пуанкаре (неоднородная группа Лоренца). Но нами показано, что если использовать аппарат комплексно-дуальных кватернионов[6] и естественным образом ввести преобразования, соответствующие десяти параметрам группы Пуанкаре (одно скалярное и три векторных), то получим не 10-, а 13-параметрическую группу (появляется еще одно векторное преобразование). Таким образом, мы работаем уже не в рамках специальной теории относительности, а в рамках “кватернионной теории пространства-времени”.

В работе [2] показана возможность последовательного и непротиворечивого построения на основе алгебры обобщенных кватернионов соответствующей геометрии (отличной от 4-мерной псевдоевклидовой, т. е. пространства Минковского) и соответствующей физической теории пространства-времени (отличной от СТО).

Это нисколько не противоречит совпадению многих формул (уравнений) кватернионной теории пространства-времени с известными формулами СТО (или механики

---

[5] Очевидно, потому, что просто не было до сих пор известно. Ср. с *“мутацией и прецессией сдвигов”* в работе Е. А. Каратаева “Полуточка” (http://karataev.nm.ru/pt/file5.html).

[6] Принципиальным является отождествление кватернионного умножения с композицией преобразований.

Ньютона), поскольку фундаментальная группа обсуждаемой теории содержит в качестве подгруппы 6-параметрическую группу Лоренца (а также 6-параметрическую группу движений евклидова 3-мерного пространства). Однако, в этой группе (в общем случае комплексно-дуальные кватернионы допускают расширение изучаемой нами группы до 16-параметрической непрерывной группы преобразований) нет 10-параметрической подгруппы, изоморфной 10-параметрической группе Пуанкаре специальной теории относительности.

В работе [2] также выведены (на основе развитого общего метода) уравнения инерциальной навигации, соответствующие кватернионной теории пространства-времени, которые (естественно) могут быть записаны[7] в виде одного уравнения в обобщенных кватернионах:

$$\frac{d\Lambda}{d\tau} = \frac{1}{2}\Lambda \circ (\vec{a} + i\vec{\omega} + \varepsilon i)\,, \qquad \text{где} \qquad \Lambda = e^{\varepsilon i(t+\vec{r})/2} \circ e^{\vec{\psi}/2} \circ e^{i\vec{\vartheta}/2}$$

и все обозначения соответствуют обозначениям пункта, в котором выписано релятивистское уравнение инерциальной навигации в обобщенных кватернионах. Но в отличие от уравнения, полученного в СТО, уравнение, полученное в кватернионной теории, в пределе $\psi \to 0$ не соответствует известным нерелятивистским уравнениям инерциальной навигации. Более того, из выписанного уравнения вытекает абсурдный результат: объект не двигается с места несмотря на ненулевую начальную скорость и наличие кажущегося ускорения. Тем самым доказана[8] ошибочность кватернионной теории пространства-времени, рассматриваемой как физическая теория.

Подробности доказательства физической несостоятельности кватернионной теории пространства-времени в общем случае и описание области применимости кватернионной теории как физической теории изложены в работе [2]. Здесь же еще раз кратко (аксиоматически) взглянем на тот путь, который привел к этой теории. Сформулируем следующие четыре требования (условия, аксиомы):

1) переносы следует описывать числами вида $\exp(\varepsilon i\vec{r}/2)$;

2) бусты следует описывать числами вида $\exp(\vec{\psi}/2)$;

3) при сложении (перестановке) преобразований, описываемых числами, следует использовать умножение этих чисел в качестве закона композиции преобразований;

4) преобразования пространства-времени (в том числе переносы, бусты и их композиции) следует описывать, оставаясь в рамках группы Пуанкаре.

Эти требования несовместны, то есть принятие всех четырех ведет к логическому противоречию. Но любые три из четырех указанных требований совместны, причем при отказе от одного из первых трех условий получается одна из формулировок специальной теории относительности, а при отказе от четвертого — кватернионная теория пространства-времени. Обратим также внимание читателей журнала “Гиперкомплексные числа в геометрии и физике” на иное (теоретико-групповое, а не гиперкомплексное) направление развития физически состоятельной теории, связанное с расширением группы Пуанкаре [1].

---

[7] Приведенные выше нерелятивистские уравнения инерциальной навигации, как оказалось, тоже могут быть записаны в виде одного уравнения в комплексно-дуальных кватернионах. Соответствующая статья автора рассматривается в журнале “Гироскопия и навигация”.

[8] Появление “лишнего” преобразования в теории само по себе еще не могло служить таким доказательством.

Заключение

Область применения кольца обобщенных кватернионов[9] как простейшего алгебраического объекта, тесно связанного со структурой пространства-времени, не следует ограничивать только инерциальной навигацией [7–34][10].

Благодарности. Автор признателен рецензентам журнала “Космические исследования” (Ю. Н. Челноков, В. Ф. Журавлев, В. Н. Бранец, В. Н. Платонов) и анонимным рецензентам журналов “Успехи физических наук”, “Известия РАН. Теория и системы управления”, “Теоретическая и математическая физика” за внимание к работе, а также редакциям указанных журналов за организацию ее конструктивного обсуждения.

Литература

[1] *В. Ф. Чуб.* Космич. исследования. 2007. Т. 45. № 2. С. 189.

[2] *В. Ф. Чуб.* Изв. АН. МТТ. 2002. № 6. С. 3.

[3] *В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992.

[4] *С. М. Онищенко.* Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. Киев: Наукова думка, 1983.

[5] *А. Пуанкаре.* О динамике электрона. В сб.: Принцип относительности. Сборник работ по специальной теории относительности. /Сост. А. А. Тяпкин. М.: Атомиздат, 1973. С. 118.

[6] *Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер.* Гравитация. Т. 3. М.: Мир, 1977.

[7] *Г. А. Зайцев.* О связи теории относительности с теорией групп. В кн.: М.-А. Тоннела. Основы электромагнетизма и теории относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 447.

[8] *А. В. Березин, Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев.* Кватернионы в релятивистской физике. Минск: Наука и техника, 1989.

[9] *У. Р. Гамильтон.* Избранные труды: Оптика. Динамика. Кватернионы. М.: Наука, 1994.

[10] *В. П. Визгин.* “Эрлангенская программа” и физика. М.: Наука, 1975.

[11] *Б. А. Розенфельд.* История неевклидовой геометрии. Развитие понятия о геометрическом пространстве. М.: Наука, 1976.

[12] *А. Н. Вяльцев.* Дискретное пространство-время. М.: Наука, 1965.

[13] *М. В. Синьков, Н. М. Губарени.* Непозиционные представления в многомерных числовых системах. Киев: Наукова думка, 1979.

[14] *Р. Фейнман.* Характер физических законов. М.: Наука, 1987.

[15] *М. Б. Балк, Г. Д. Балк, А. А. Полухин.* Реальные применения мнимых чисел. Киев: Радянська школа, 1988.

[16] *П. А. Лебедев.* Кинематика пространственных механизмов. М.; Л.: Машиностроение, 1966.

[17] *И. Лакатос.* Вопросы философии. 1995. № 4. С. 135.

[18] *Ф. Клейн.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т. 2. Москва; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.

[19] *В. В. Кассандров.* Алгебродинамика: кватернионный код вселенной. В сб.: Метафизика. Век XXI. /Ред. Ю. С. Владимиров. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. С. 142.

[20] *М. А. Микаэлян.* Докл. АН. 2005. Т. 400. № 2. С. 173.

[21] *А. П. Ефремов.* Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. № 1 (1). С. 111.

---

[9] Устоявшегося названия для комплексно-дуальных кватернионов нет; в работах разных авторов используется различная терминология.

[10] Недавно вышло второе издание книги [8] (см. УФН. 2003. Т. 173. № 10. С. 1151); эпиграфы к статье взяты из [15, с. 197, 201] и [18, с. 50]; в монографиях [24, 30] приведен обзор литературы по применению кватернионов и бикватернионов в современной механике и теории управления.

[22] *В. Ф. Чуб.* Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. № 2 (4). С. 153[11].

[23] *А. В. Коганов.* Белая рамка на черном фоне (Смирительный опус для прошедших через “Гимн Квадрату”). В сб.: Языки науки — языки искусства. Сб. науч. трудов. VII международная конференция “Нелинейный мир”. Суздаль–2002. /Ред. З. Е. Журавлева. Москва; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2004. С. 330.

[24] *В. В. Маланин, Н. А. Стрелкова.* Оптимальное управление ориентацией и винтовым движением твердого тела. Москва; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004.

[25] *П. Д. Крутько.* Изв. АН. ТиСУ. 2004. № 1. С. 5.

[26] Комплекснозначные и гиперкомплексные системы в задачах обработки многомерных сигналов. /Ред. Я. А. Фурман. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[27] *И. И. Попов, А. Н. Леухин.* Изв. РАН. Сер. Физическая. 2004. Т. 68. № 9. С. 1305.

[28] *А. Н. Леухин.* Космонавтика и ракетостроение. 2005. № 2. С. 148.

[29] *В. Н. Бранец.* Космонавтика и ракетостроение. 2005. № 4. С. 122.

[30] *Ю. Н. Челноков.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

[31] *В. Ф. Чуб.* Изв. РАН. МТТ. 2006. № 5. С. 3.

[32] *Н. В. Александрова.* Из истории векторного исчисления. М.: Изд-во МАИ, 1992.

[33] *И. В. Новожилов.* Знание — сила. 1995. № 12. С. 48.

[34] *Р. А. Аронов.* Вопросы философии. 2007. № 7. С. 63.

The equations of inertial navigation and the quaternionic Space-Time theory

V. F. Chub

Korolev Rocket-Space Corporation “Energiya”, Russia

A comparative analysis is provided, between relativistic and non-relativistic equations of inertial navigation in a free from gravitational field space. The quaternions - with real, dual, complex and complex-dual coefficients, are used for expressing these equations. In the framework of the Space-Time theory based on quaternions with complex-dual coefficients, it is proved that the transformations which in STR generate the Poincare group and in Newton’s theory – the Galilei group, are not closed. As well, it is determined the equation of inertial navigation, which corresponds to the quaternionic theory of Space-Time, and its absurdity is pointed out.

Key-words: inertial navigation, quaternions.

MSC: 46S10.

---

[11] Пользуясь случаем укажем замеченные в [22] опечатки: по всей статье отсутствует выделение векторов, обозначенных греческими буквами, и пропущен номер журнала № 5 в ссылке [4].

A MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE FERMIONIC STATE

Peter Rowlands

Department of Physics, University of Liverpool, Oliver Lodge Laboratory, Liverpool, UK
p.rowlands@liverpool.ac.uk

The fermionic state is the foundation for the whole of physics. Physics is entirely concerned with fermions and their interactions, and nothing else. It is possible to derive a mathematical expression for the fermionic state, which is an operator only, not an equation, or wavefunction. This operator appears to contain within it all the information needed to construct fermion interactions and particle states. Extensions to particle representations using Finsler geometry could find this formalism a particularly accessible link.

Key-words: fermionic state, quaternions, nilpotent operator, Finsler geometry

1 The nilpotent version of quantum mechanics

The nilpotent version of quantum mechanics is the most streamlined version available.[1] It is fully relativistic. It uses only (differential) operators. It doesn't need mysterious objects like wavefunctions and spinors. All terms have the same format, based on the operators $E, \mathbf{p}, m$. These terms are compartmentalised using the quaternions $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, in a similar way to real and imaginary parts. The operators are full quantum field operators – there is no need to apply second quantization. They are also intrinsically supersymmetric. Interactions and particle states are immediately explained, while calculations are relatively easy, easier than nonrelativistic ones. Renormalization of free particles is not needed, while significant divergences simply disappear.

Does this representation relate to Finsler geometry? This is a question to be decided, but, if it does, then the streamlined versions of quantum mechanics and particle physics which become possible through this representation will find it the most accessible link. We only need one operator, and this can find connections with many other formalisms. The fermionic representation is, of course, quadratic, as is conventionally the case, and as derives from special relativity. If a quartic generalisation of special relativity is possible, and if it is found useful, then the same transition can be made with the fermionic representation.

The nilpotent formalism can be derived from the concept of zero using a universal rewrite system, which seems to have much more general applications. This derivation automatically includes quantization and special relativity as part of the abstract formal structure – it doesn't need to assume them. The algebraic structure can be shown to be derived from the algebras of the four fundamental parameters, space, time, mass and charge, and their mathematically symmetric relationships.

While the derivation of the nilpotent formalism from a universal rewrite system is the only truly fundamental one,[2] there are less profound ones available from more conventional theories, e.g. by converting the gamma matrices of the conventional Dirac equation into algebraic operators (based on multivariate 4-vector quaternions or complex double quaternions).[1] The most direct is from the classical relativistic equation:

$$E^2 = p^2 + m^2$$

but it should be remembered that, fundamentally, it is the classical equation that is derived, not the quantum mechanics.

So, let us take the equation in the form:

$$E^2 - p^2 - m^2 = 0$$

and factorize using noncommuting algebraic operators (multivariate 4-vector quaternions or complex double quaternions):

$$(\pm i\boldsymbol{k}E \pm \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(\pm i\boldsymbol{k}E \pm \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m) = 0.$$

To make this a quantum equation, we simply make E and $\mathbf{p}$ into canonical quantum operators, say $i\partial/\partial t$ and $-i\nabla$, with $\hbar = 1$, rather than numerical variables. So, we can, for example, make the first bracket an operator, operating on a phase term of some kind, say $e^{-i(Et-\mathbf{p}.\mathbf{r})}$ for a free particle plane wave, and the second bracket the amplitude which results from this operation.

$$(\pm i\boldsymbol{k}E \pm \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(\pm i\boldsymbol{k}E \pm \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m) = (\pm \boldsymbol{k}\partial/\partial t \pm i\boldsymbol{i}\nabla + \boldsymbol{j}m)(\pm i\boldsymbol{k}E \pm \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)e^{-i(Et-\mathbf{p}.\mathbf{r})} = 0.$$

This now becomes equivalent to the Dirac equation for a free particle.

The algebra we need is a tensor product of quaternions and multivariate vectors (i. e. complexified quaternions), or a complexified tensor product between two quaternion algebras. The two algebras are entirely commutative towards each other. Each acts as though the other did not exist. This is intriguingly close to twistor algebra (a complex 4-D space-time), now used in QCD.

Quaternions	**Multivariate vector**
$\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{j}\ \boldsymbol{k}$ quaternion units	$\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}$ vector units
1 scalar	i pseudoscalar

The multiplication rules of the units are as follows:

$$\begin{array}{cc}
\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = 1 & (i\boldsymbol{i})^2 = (i\boldsymbol{j})^2 = (i\boldsymbol{k})^2 = i(i\boldsymbol{i})(i\boldsymbol{j})(i\boldsymbol{k}) = 1 \\
\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k} & (i\boldsymbol{i})(i\boldsymbol{j}) = (i\boldsymbol{j})(i\boldsymbol{i}) = i(i\boldsymbol{k}) \\
\boldsymbol{jk} = \boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i} & (i\boldsymbol{j})(i\boldsymbol{k}) = (i\boldsymbol{k})(i\boldsymbol{j}) = i(i\boldsymbol{i}) \\
\boldsymbol{ki} = \boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j} & (i\boldsymbol{k})(i\boldsymbol{i}) = (i\boldsymbol{i})(i\boldsymbol{k}) = i(i\boldsymbol{j})
\end{array}$$

and there are 64 possible products of the units:

$(\pm 1, \pm i)$	4 units
$(\pm 1, \pm i) \times (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$	12 units
$(\pm 1, \pm i) \times (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$	12 units
$(\pm 1, \pm i) \times (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \times (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$	36 units

Now, if we take

$$(\pm \boldsymbol{k}\partial/\partial t \pm i\boldsymbol{i}\nabla + \boldsymbol{j}m)(\pm i\boldsymbol{k}E \pm \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)e^{-i(Et-\mathbf{p}.\mathbf{r})} = 0$$

as the Dirac equation for a free particle, we can interpret the four possible sign variations of $\partial/\partial t$ and ∇ in the first bracket as making up the four components of a row vector; and the four possible sign variations of E and $\mathbf{p}$ in the second bracket as making up the four components of a column vector.

In principle, we have made both the operator and the amplitude into essentially identical 4-component spinors, with the operator applied to a single phase term.

And we can easily identify the meaning of the sign variations:

fermion / antifermion	$\pm E$
spin up / down	$\pm \mathbf{p}$

These options apply to E and $\mathbf{p}$ as either operators or amplitude eigenvalues.

Relativistic quantum mechanics is now hugely streamlined, because it now depends only on a single term:

$$(\pm i\boldsymbol{k}E \pm \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$$

taken either as operator or as amplitude. Here, E and $\mathbf{p}$ are generic terms, identified by their quaternion labels, which can be covariant derivatives or include field terms or potentials of any kind. The expression

$$(\pm i\boldsymbol{k}E \pm \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$$

which is really a row or column vector, containing the four components

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{k}E + i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)\\(\boldsymbol{k}E - i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)\\(-\boldsymbol{k}E + i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)\\(-\boldsymbol{k}E - i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)\end{gathered}$$

now contains all that can be known about any fermion state.

If we take E and $\mathbf{p}$ as generic operators, then the only way they can operate is by finding a phase factor, such that the resulting amplitude is nilpotent, or squares to zero, i.e.:

$$(\pm i\boldsymbol{k}E \pm \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(\pm i\boldsymbol{k}E \pm \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m) = 0.$$

So, specifying the operator means that we also specify the phase and the amplitude, and the 'wavefunction' becomes redundant.

But the spinor structure is also redundant. We do not need to specify

$$(\pm i\boldsymbol{k}E \pm \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$$

as a row or column vector. Once we specify the first of the four terms, the others follow by automatic sign variation. So, we only need

$$(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$$

for complete specification of the state.

To take a simple example, specifying a state as $(\pm \boldsymbol{k}\partial/\partial t \pm i\boldsymbol{i}\nabla + \boldsymbol{j}m)$ (which is a free particle) means that we have automatically created the four linked equations:

$$\begin{aligned}(\pm \boldsymbol{k}\partial/\partial t \pm i\boldsymbol{i}\nabla + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)e^{-i(Et-\mathbf{p.r})} &= 0\\(\boldsymbol{k}\partial/\partial t - i\boldsymbol{i}\nabla + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m))e^{-i(Et-\mathbf{p.r})} &= 0\\(-\boldsymbol{k}\partial/\partial t + i\boldsymbol{i}\nabla + \boldsymbol{j}m)(-i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)e^{-i(Et-\mathbf{p.r})} &= 0\\(-\boldsymbol{k}\partial/\partial t - i\boldsymbol{i}\nabla + \boldsymbol{j}m)(-i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)e^{-i(Et-\mathbf{p.r})} &= 0\end{aligned}$$

By comparison with the conventional Dirac equation, we have reduced the number of separate terms required by 98%, because we have reduced a 4×4 matrix operator multiplied by a 4-component spinor wavefunction to an operator with only a single independent term. We have effectively shown that the matrix, the wavefunction, the spinor and the equation itself, are redundant. We need only a single operator.

2 The nilpotent operator and the fundamental physical state

We may ask: what is the physical meaning of defining the fermion as an operator? What is it operating on? The indications are that it is *vacuum,* meaning the rest of the universe. The nilpotency codified in

$$(\pm \boldsymbol{ik}E \pm \ \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(\pm \boldsymbol{ik}E \pm \ \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m) = 0$$

has built-in Pauli exclusion. No two fermions can have the same state vector. But it also signifies that nilpotency is an expression of the totality zero that is fundamental to the universal rewrite system. Fermion and the rest of the universe (0 – fermion) together make a zero totality, with a zero totality state vector:

$$(\pm \boldsymbol{ik}E \pm \ \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(-(\pm \boldsymbol{ik}E \pm \ \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)) = 0.$$

The fact that Pauli exclusion is not unique to free fermions then brings us to the most revolutionary step within the nilpotent theory. We assume that *all fermionic amplitudes in all states* are nilpotent. We postulate that the most general form for a state vector is nilpotent, and that we should seek specifically nilpotent solutions for all problems.

Now, for a 'free' fermion, the phase factor $(exp(-i(Et - \mathbf{p}.\mathbf{r}))$ provides the complete range of space and time translations and rotations, but if the E and $\mathbf{p}$ terms represent covariant derivatives or incorporate field terms, then the phase term is determined by whatever expression is needed to make the amplitude nilpotent.

The operator which defines each fermion is thus a creation operator acting on vacuum (= the rest of the universe). In fact there are four creation operators:

$(\boldsymbol{ik}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$	fermion spin up
$(\boldsymbol{ik}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$	fermion spin down
$(-\boldsymbol{ik}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$	antifermion spin down
$(-\boldsymbol{ik}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$	antifermion spin up

The nature of the state is determined by which of these is the lead term. The others can be regarded as vacuum states representing ones into which it could transform. So, for example, a real antifermion spin down would be symbolized by a row vector with the following components:

$(-\boldsymbol{ik}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$	antifermion spin down
$(-\boldsymbol{ik}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$	antifermion spin up
$(\boldsymbol{ik}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$	fermion spin up
$(\boldsymbol{ik}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$	fermion spin down

Because of the way they are defined, nilpotent operators are specified with respect to the entire quantum field. Formal second quantization is unnecessary. We can consider the nilpotency as defining the interaction between the localized fermionic state and the unlocalized vacuum, with which it is uniquely self-dual. The phase is the mechanism through which this is accomplished. So, defining a fermion implies simultaneous definition of vacuum as 'the rest of the universe' with which it interacts. The nilpotent structure then provides energy-momentum conservation without requiring the system to be closed. The nilpotent structure is thus naturally thermodynamic, and provides a mathematical route to defining nonequilibrium thermodynamics.

We can now see that the expression

$$(\boldsymbol{ik}E+\boldsymbol{i}\mathbf{p}+\boldsymbol{j}m)(\boldsymbol{ik}E+\boldsymbol{i}\mathbf{p}+\boldsymbol{j}m)\to 0$$

has at least five independent meanings.

classical	special relativity
operator × operator	Klein-Gordon equation
operator × wavefunction	Dirac equation
wavefunction × wavefunction	Pauli exclusion
fermion × vacuum	thermodynamics

We thus have an operator $(\boldsymbol{ik}E+\boldsymbol{i}\mathbf{p}+\boldsymbol{j}m)$ that potentially incorporates all the physical information available to the fundamental physical state. It is easy to show that we can use our operator to do conventional quantum mechanics, e.g. by defining a probability density by multiplying by its complex quaternion conjugate $(\boldsymbol{ik}E-\boldsymbol{i}\mathbf{p}-\boldsymbol{j}m)$. We may also note that nilpotent wavefunctions or amplitudes are automatically antisymmetric:

$$(\pm\boldsymbol{ik}E_1\pm\boldsymbol{i}\mathbf{p}_1+\boldsymbol{j}m_1)(\pm\boldsymbol{ik}E_2\pm\boldsymbol{i}\mathbf{p}_2+\boldsymbol{j}m_2)-(\pm\boldsymbol{ik}E_2\pm\boldsymbol{i}\mathbf{p}_2+\boldsymbol{j}m_2)(\pm\boldsymbol{ik}E_1\pm\boldsymbol{i}\mathbf{p}_1+\boldsymbol{j}m_1)=$$
$$=4\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2-4\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1=8i\mathbf{p}_1\times\mathbf{p}_2$$

This is a particularly striking result, as it implies that all fermionic states have a *spin phase* or ‘direction’ of $\mathbf{p}$ which is unique.

3 Vacuum and CPT symmetry

The three quaternion operators $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ are not just passive mathematical objects in the nilpotent formalism. They have multiple meanings, acting almost as a kind of hypertext.

(1) The primary meaning is as charge generators.
(2) Premultiplying the nilpotent gives vacuum, e.g. $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{ik}E+\boldsymbol{i}\mathbf{p}+\boldsymbol{j}m)$ acts as a weak vacuum.
(3) Pre- and postmultiplying the nilpotent transforms via P, C or T operations: e.g. $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{ik}E+\boldsymbol{i}\mathbf{p}+\boldsymbol{j}m)\boldsymbol{k}$ becomes a T transformation.

If we take $(\boldsymbol{ik}E+\boldsymbol{i}\mathbf{p}+\boldsymbol{j}m)$ and postmultiply it by $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{ik}E+\boldsymbol{i}\mathbf{p}+\boldsymbol{j}m)$, the result is $(\boldsymbol{ik}E+\boldsymbol{i}\mathbf{p}+\boldsymbol{j}m)$, multiplied by a scalar, which can be normalized away. This can be done an indefinite number of times. $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{ik}E+\boldsymbol{i}\mathbf{p}+\boldsymbol{j}m)$ is an idempotent, which behaves as a vacuum operator. So do $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{ik}E+\boldsymbol{i}\mathbf{p}+\boldsymbol{j}m)$ and $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{ik}E+\boldsymbol{i}\mathbf{p}+\boldsymbol{j}m)$.

Previously, we said that the vacuum state vector had the same structure, apart from a scalar factor, as that of the fermion: $(\boldsymbol{ik}E+\boldsymbol{i}\mathbf{p}+\boldsymbol{j}m)$. How then do these three vacua relate? We can see the three vacuum coefficients $\boldsymbol{k},\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ as originating in (or being responsible for) the concept of discrete (point-like) charge. The operators act as a discrete partitioning of the continuous vacuum responsible for zero-point energy, i.e. $(\boldsymbol{ik}E+\boldsymbol{i}\mathbf{p}+\boldsymbol{j}m)$. In this sense, they are related to weak, strong and electric localized charges, though they are delocalized.

The 3 vacua also help to explain the meaning of the 4 terms in the Dirac 4-spinor. There is 1 real state (the lead term) and 3 potential (vacuum) states into which the lead term can be transformed by one of the 3 interactions. All possible states are always present, either as real states or vacuum ones, e. g.:

$$\begin{array}{ll}
 & (i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m) \rightarrow (i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m) \\
\text{strong} & \boldsymbol{i}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m) \rightarrow (i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m) \\
\text{weak} & \boldsymbol{k}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m) \rightarrow (-i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m) \\
\text{electric} & \boldsymbol{j}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m) \rightarrow (-i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)
\end{array}$$

We can suggest specific identifications of the interactions on the basis of the pseudoscalar, vector and scalar characteristics of the associated terms.

$\boldsymbol{k}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$	weak vacuum	fermion creation
$\boldsymbol{i}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$	strong vacuum	gluon plasma
$\boldsymbol{j}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$	electric vacuum	SU(2)

The 3 additional terms in the Dirac spinor then become strong, weak and electric vacuum ‘reflections’ of the state defined by the lead term.

CPT symmetry uses the same operators. This is, of course, not a coincidence.

$$\begin{array}{ll}
\text{P} & \boldsymbol{i}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)\boldsymbol{i} = (i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m) \\
\text{T} & \boldsymbol{k}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)\boldsymbol{k} = (-i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m) \\
\text{C} & -\boldsymbol{j}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)\boldsymbol{j} = (-i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m) \\
\text{CPT} & -\boldsymbol{j}(\boldsymbol{i}(\boldsymbol{k}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)\boldsymbol{k})\boldsymbol{i})\boldsymbol{j} = (i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)
\end{array}$$

It is significant that CPT is defined to connect relativity with causality, but this can only true in a nilpotent theory, which gives the rest mass or proper time term the same algebraic status as the others.

4 Particle states and interactions: the scalar component

The nilpotent theory has many applications, for example, in QED, QFD (weak interaction theory), QCD, and the quantum theory of inertia (QID).[1] It can be shown in only a few lines of calculation that renormalization is not needed for a free particle and that there is therefore no hierarchy problem. In fact, the intrinsic supersymmetry of the theory (each fermion acting in vacuum as its own boson, etc.) suggests that it should be possible, in principle, to eliminate the renormalization process altogether. Also, propagators written in this formalism immediately eliminate the infrared divergence, and allow distinctions to be made between different bosonic propagators. We may additionally anticipate extensions of the theory to condensed matter physics and chemistry. However, at an even more fundamental level, we have the opportunity to resolve some of the problems involved with the symmetry breaking between the different interactions and the particle states with which they are involved.

Here, the major questions is: if the fermionic nilpotent is the most fundamental structure in physics – in effect, its fundamental unit, can it reproduce the fundamental particle states and their interactions? These two questions are not independent of each other. The first thing is to see if the structure of the nilpotent operator can give us any insight into the nature of fermionic interactions. In fact, this is precisely what it can do. But, first, assuming that the constraint of spherical symmetry exists for a point particle, then we can express the momentum term of the operator in polar coordinates, using the Dirac prescription, with an explicit spin term:

$$\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) \pm i\frac{j + 1/2}{r}.$$

We need the spin term because the multivariate nature of the **p** term cannot be expressed in polar coordinates.

The nilpotent Dirac operator now becomes:

$$\left(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}+\frac{1}{r}\pm i\frac{j+1/2}{r}\right)+\boldsymbol{ij}m\right).$$

Now, whatever phase factor we apply this to, we will find that we will not get a nilpotent solution unless the $1/r$ term with coefficient $\boldsymbol{i}$ is matched by a similar $1/r$ term with coefficient $\boldsymbol{k}$. So, simply requiring *spherical symmetry* for a point particle, requires a term of the form A/r to be added to E.

If all point particles are spherically symmetric sources, then the minimum nilpotent operator is of the form

$$\left(\boldsymbol{k}\left(E-\frac{A}{r}\right)+\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}+\frac{1}{r}\pm i\frac{j+1/2}{r}\right)+\boldsymbol{ij}m\right).$$

To establish that this is a nilpotent, we must now find the phase to which this must apply to create a nilpotent amplitude. This will quite quickly produce the characteristic solution for the pure Coulomb force (the so-called hydrogen-like atom solution). The solution is straightforward. We try the phase term

$$F=e^{-ar}r^{\gamma}\sum_{\nu=0}a_{\nu}r^{\nu},$$

to find the amplitude, and equate the squared amplitude to zero. Here, we obtain:

$$4\left(E-\frac{A}{r}\right)^2=-2\left(-a+\frac{\gamma}{r}+\frac{\nu}{r}+\ldots\frac{1}{r}+i\frac{j+1/2}{r}\right)^2-2\left(-a+\frac{\gamma}{r}+\frac{\nu}{r}+\ldots\frac{1}{r}-i\frac{j+1/2}{r}\right)^2+4m^2.$$

Equating constant terms leads to

$$E^2=-a^2+m^2,$$
$$a=\sqrt{m^2-E^2}.$$

Equating terms in $1/r^2$, with $\nu=0$, we obtain:

$$\left(\frac{A}{r}\right)^2=-\left(\frac{\gamma+1}{r}\right)^2+\left(\frac{j+1/2}{r}\right)^2,$$

from which, excluding the negative root (as usual),

$$\gamma=-1+\sqrt{(j+1/2)^2-A^2}.$$

Assuming the power series terminates at n', and equating coefficients of $1/r$ for $\nu=n'$,

$$2EA=-2\sqrt{m^2-E^2}\left(\gamma+1+n'\right),$$

the terms in $(j+\frac{1}{2})$ cancelling over the summation of the four multiplications, with two positive and two negative. From this we may derive

$$\frac{E}{m}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{A^2}{(\gamma+1+n')^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{A^2}{\sqrt{(j+1/2)^2-A^2}+n'\quad{}^{2}}}}.$$

With $A = Ze^2$, we obtain the hyperfine or fine structure formula for a one-electron nuclear atom or ion:

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(Ze^2)^2}{(\gamma+1+n')^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(Ze^2)^2}{\sqrt{(j+1/2)^2-(Ze^2)^2}+n' \quad ^2}}}.$$

We have, of course, without mentioning anything about potentials or interactions, or anything physical at all, and only using the structure of the nilpotent operator, needed to maintain the spherical symmetry of a point-particle source, created the solution for the Coulomb or inverse linear potential. And we have shown that it is absolutely necessary to any fermionic state described as a point source, regardless of what other potentials may be present. We can now proceed to show that another fundamental potential can be derived from the structure of the nilpotent operator alone.

The vector and pseudoscalar components

The vector part of the nilpotent has three components. So a significant question might be: can we have a 3-component state vector?

$$(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m) = 0$$

Clearly, nilpotency makes three identical states impossible. But the following would be possible:

$$(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{j}m) \to (i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$$
$$(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{j}m) \to (i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$$
$$(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m) \to (i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$$

So we could have a nonzero state vector if we use the vector properties of $\mathbf{p}$ and the arbitrary nature of its sign ($+$ or $-$). A state vector of the form

$$(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{i}\mathbf{p}_x + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{j}\mathbf{p}_y + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{k}\mathbf{p}_z + \boldsymbol{j}m),$$

privileging the $\mathbf{p}$ components, has six independent allowed phases, i. e. when

$$\mathbf{p} = \pm \boldsymbol{i}p_x, \quad \mathbf{p} = \pm \boldsymbol{j}p_y, \quad \mathbf{p} = \pm \boldsymbol{k}p_z,$$

but these must be *gauge invariant,* i.e. indistinguishable, or all present at once. Also, we must interpret the $E, \mathbf{p}, m$ symbols as belonging to a totally entangled state, rather than the subcomponents.

In principle, we would be using the concept of spatial (rather than temporal) separation to represent the arbitrary nature of the direction of fermionic spin. One method of picturing the arbitrary nature of the phases (gauge invariance) is to imagine an automatic mechanism of transfer between them.

$$(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{i}p_x + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{j}p_y + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\boldsymbol{k}p_z + \boldsymbol{j}m) \quad +RGB$$
$$(i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{i}p_x + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{j}p_y + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\boldsymbol{k}p_z + \boldsymbol{j}m) \quad -RBG$$
$$(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{i}p_x + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{j}p_y + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\boldsymbol{k}p_z + \boldsymbol{j}m) \quad +BRG$$
$$(i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{i}p_x + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{j}p_y + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\boldsymbol{k}p_z + \boldsymbol{j}m) \quad -GRB$$
$$(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{i}p_x + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{j}p_y + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\boldsymbol{k}p_z + \boldsymbol{j}m) \quad +GBR$$
$$(i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{i}p_x + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{j}p_y + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\boldsymbol{k}p_z + \boldsymbol{j}m) \quad -BGR$$

This has exactly the same group structure as the standard 'coloured' baryon wavefunction made of R, G and B 'quarks',

$$\psi \sim (RGB - RBG + BRG - GRB + GBR - BGR)$$

That is, it has an SU(3) structure, with 8 generators. And, since the E and $\mathbf{p}$ terms in the state vector really represent time and space derivatives, we can replace these with the covariant derivatives needed for invariance under a local SU(3) gauge transformation. This SU(3) symmetry or strong interaction is entirely nonlocal. That is, the exchange of momentum $\mathbf{p}$ involved is entirely independent of any spatial position of the 3 components of the baryon. We can suppose that the rate of change of momentum (or 'force') is constant with respect to spatial positioning or separation. A constant force is equivalent to a potential which is linear with distance, exactly as is required for the conventional strong interaction.

We can now identify our structures as those that would be required of a baryon in the nilpotent formalism. If we now construct a nilpotent operator, in which spherical symmetry still applies, we will find that the requirement for a term of the form A/r, added to E, remains unchanged; but that we now require another term of the form Br. If we now try to solve for phase and amplitude, we will find that our solution has the characteristics of infrared slavery and asymptotic freedom that we apply to quarks and the strong interaction. We note that the full symmetry between the 3 momentum components can only apply if the momentum operators can be equally positive or negative. With all phases of the interaction present at the same time (perfect gauge invariance), this is equivalent to saying that left-handedness and right-handedness must be present simultaneously in the baryon state (and can be transformed by the parity operator in the term $\boldsymbol{i}\mathbf{p}$). In other words, the baryonic state must have non-zero mass via the Higgs mechanism.

The other significant component of the nilpotent is the pseudoscalar term ($i\boldsymbol{k}E$). The particular significances of this term are:

(1) its necessity to nilpotency

(2) the necessity of removing it by a 'squaring' operation, or multiplication by a complex conjugate

(3) the dipolarity it creates between fermion and vacuum, etc. Ultimately, this leads to the necessity for a term of the form Cr^n, where n may be, say -3, to be added to the E term.

All the fundamental interactions are aspects of the nilpotent structure, in fact, of the $\mathbf{p}$ term. The electric interaction (Coulomb) is spherical symmetry of $\mathbf{p}$ (in polar coordinates). The strong is due to the vector aspect of $\mathbf{p}$. The weak (harmonic oscillator) is due to sign, more particularly, its sign relative to iE.

$$\begin{gathered}
(\boldsymbol{k}E + i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)\\
(\boldsymbol{k}E - i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)\\
(-\boldsymbol{k}E + i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)\\
(-\boldsymbol{k}E - i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)
\end{gathered}$$

We have to switch between the 4 components, changing relative signs of E and $\mathbf{p}$, as we do with the classical harmonic oscillator, with force $F = -kx$ and energy proportional to x^2. In fact, any r^n dependence of the potential other than $n = 1$ or $n = -1$ (in addition to the Coulomb term), or any combination of such terms, solves in the nilpotent to a (quantum) harmonic oscillator. For the weak interaction, with its intrinsically dipolar nature, the simplest potential would appear to require a dependence of the form r^{-3}.

There are thus only three point-particle (spherically symmetric) fermionic $\boldsymbol{ik}E$ operators which give us the desired nilpotent solution, and these have the characteristics of the three interactions:

A/r	Coulomb	electric interaction
$A/r + Br$	confinement	strong interaction
$A/r + Cr^n$	harmonic oscillator	weak interaction

We can identify the A/r term with the scalar part of the three operators $\boldsymbol{j}m, \boldsymbol{i}\mathbf{p}, \boldsymbol{ik}E$ (the coupling constant; Br with the vector part of $\mathbf{p}$; and Cr^n with the pseudoscalar part of iE.

5 Interaction vertices

The pseudoscalar part brings us to the consideration of interaction vertices. Because the state vector always represents four terms with the complete variation of signs in E and $\mathbf{p}$, an interaction vertex between any fermion / antifermion and any other

$$(\boldsymbol{ik}E_1 + \boldsymbol{i}\mathbf{p}_1 + \boldsymbol{j}m_1)(\boldsymbol{ik}E_2 + \boldsymbol{i}\mathbf{p}_2 + \boldsymbol{j}m_2)$$

will remove the quaternionic operators, leaving only scalars and vectors. When the $E, \mathbf{p}$ and m values become numerically equal, the vertex can be defined as a new *combined* bosonic state, with a single phase. Where there is an interaction vertex between two fermionic / antifermionic states, the signs of E and $\mathbf{p}$ of the second term, with respect to the first, will also determine the nature of the bosonic or combined state which may be created. Because there are three operators involved – $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – there are also three possible bosonic states. Any transformation of a fermionic state can be represented as a bosonic state in which the old state is annihilated and the new one created.

spin 1	boson:	$(\boldsymbol{ik}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(-\boldsymbol{ik}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$	T
spin 0	boson:	$(\boldsymbol{ik}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(-\boldsymbol{ik}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$	C
spin 0	Bose-Einstein	condensate / Berry phase, etc.:	
		$(\boldsymbol{ik}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(\boldsymbol{ik}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$	P

The fermion-fermion state $(\boldsymbol{ik}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(\boldsymbol{ik}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$ has many physical manifestations: Aharonov-Bohm effect; Jahn-Teller effect; quantum Hall effect; Cooper pairs; even-even nuclei. Even spin 1 He^3 can be accommodated because it has two physically separated components moving independently with opposite directions of momentum (in a harmonic oscillator configuration) and so the two $\boldsymbol{\sigma.p}$ terms can have the same signs, while the two $\mathbf{p}$ terms have opposite.

It now becomes evident that an interaction in which a fermionic state with one set of signs of E and $\mathbf{p}$ is annihilated and replaced by a state with a different sign configuration of E and $\mathbf{p}$ requires an interaction vertex which is equivalent to an intermediate bosonic state, and that such an interaction is required to be a fundamental component of a nilpotent operator which is structured as a 4-component spinor with inherent *zitterbewegung.* In principle, this means that a *weak interaction* of this kind is a consequence of the fundamental structure of the fermionic state – this time of the 4-spinor aspect – in the same way as the pure Coulomb (electric) and strong interactions are respective consequences of the nilpotent magnitude (squaring to zero) and vector aspects. That is, simply by defining an operator which is a nilpotent 4-component spinor with vector properties, we necessarily imply that it is subject to electric, weak and strong interactions.

Significantly, the spin 0 bosonic state cannot be massless, because, if it is nilpotent it automatically becomes zero.

$$(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p})(-i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p}) = 0$$

This becomes a significant factor in the Higgs mechanism. It also implies that massless fermions cannot have the same handedness as massless antifermions. The conventional derivation of spin assigns left-handedness to fermions.

The mediators of the strong force will be made up of six bosons of the form:

$$(i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{i}p_x)(-i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{j}p_y)$$

and two combinations of the three bosons of the form:

$$(i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{i}p_x)(-i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{i}p_y)$$

These structures are, of course, identical to an equivalent set in which both brackets undergo a complete sign reversal. The important thing here is that applying any of these mediators will produce a sign change in the **p** component that leads to mass.

We can also see how the 3 bosonic states are related to vacua produced by the 3 charge operators:

weak spin 1

$$(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)\boldsymbol{k}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)\boldsymbol{k}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m))\boldsymbol{k}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)\dots$$

$$(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(-i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(-i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)\dots$$

electric spin 0

$$(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)\boldsymbol{j}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)\boldsymbol{j}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)\boldsymbol{j}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)\dots$$

$$(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(-i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(-i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)\dots$$

strong B-E condensate

$$(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)\boldsymbol{i}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)\boldsymbol{i}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)\boldsymbol{i}(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)\dots$$

$$(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)(i\boldsymbol{k}E - \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)\dots$$

As stated earlier, all these discrete vacuum states produce virtual boson states which have no effect on the fermion $(i\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$. So, each fermion becomes its *own* supersymmetric bosonic partner, and vice versa. This removes the need for renormalization in the case of free particles, while 'renormalization' of interacting particles is reduced to rescaling – charge values being determined by their interactions with all the others in the universe, while the divergent terms are eliminated by cancellation of boson and fermion loops of opposite sign.

6 Discrete calculus and Finsler geometry

It is in the double nilpotent representation of bosonic states that we may see a possible link with approaches based on Finsler geometry.

It is particularly convenient here to use a version of Kauffman's discrete differential calculus.^{3} Here, we define an operator

$$\mathfrak{D} = -\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{i}\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial X_1} + i\boldsymbol{i}\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial X_2} + i\boldsymbol{i}\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial X_3},$$

where

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = [\psi, H] = [\psi, E] \qquad \text{and} \quad \frac{\partial\psi}{\partial X_i} = [\psi, P_i]\,,$$

and an amplitude

$$\psi = \boldsymbol{i}\boldsymbol{k}E + \boldsymbol{i}\mathbf{i}P_1 + \boldsymbol{i}\mathbf{j}P_2 + \boldsymbol{i}\mathbf{k}P_3 + \boldsymbol{j}m.$$

The actual signs of the differential terms are, of course, arbitrary, but are chosen here to conform with those required using conventional calclulus in the previous sections. Also, since we are not using a velocity operator, we can use $\partial/\partial X_i$, for d/dX_i. When is ψ nilpotent, then

$$\mathfrak{D}\psi = \left(-\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{i}\nabla\right)\psi = 0,$$

or, allowing for the four sign variations (and reverting to the signs used in the versions based on conventional calculus):

$$\mathfrak{D}\psi = \left(-\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{i}\nabla\right)\psi = 0. \tag{1}$$

This is then equivalent to the nilpotent Dirac equation in this calculus. Immediately noticeable is the fact that there is no mass term in the differential operator, only in the amplitude. This means that an operator is the exact negative of its charge-conjugated state. Annihilation and creation of a state, defined by an operator, cancel each other in exact mathematical terms. Also, we are able to define quantum differentials without the explicit use of an $i\hbar$ term, as defining $\mathfrak{D}$ in terms of the more conventional quantum operators

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = [\psi, H] = [\psi, E] \qquad \text{and} \quad -i\frac{\partial\psi}{\partial X_i} = [\psi, P_i]$$

with $\hbar = 1$, will produce equation (4) in the same way. Thus, in this formalism, there is no arbitrary break between quantum and classical domains. The complexity comes solely from the nilpotent amplitude.

We can also extend the definition of $\mathfrak{D}$, following Kauffman, to include covariant terms, such as A_i, so that $\mathfrak{D}$ becomes $\mathfrak{D} - A_i$, and the covariant terms A_i can be seen as representing either a field source or an expression of the distortion of the Euclidean space-time structure, such as that produced by the presence of mass in general relativity, or, in more general terms, the quartic generalisation of the Riemannian structures used for an anisotropic metric in Finsler geometry. So, if we *choose* to use structures of this kind to replace the direct use of mass, then a massless covariant $\mathfrak{D}$ operator provides us with a convenient route to achieving this.

Now, if the Berwald-Moor metric of anisotropic Finsler geometry, $ds = (dx_1 dx_2 dx_3 dx_4)^{1/4}$, is substituted for the isotropic Minkowski metric of Riemannian geometry, $ds = (dt^2 - dr^2)^{1/2}$, the zero interval manifold ($ds = 0$) becomes transformed from the familiar Minkowski light cone to a combination of two pyramids joined at the apex. By introducing exponents into the expression for the metric function, Bogoslovsky has found a geometric phase transition, which could be interpreted as a mass-creating spontaneous-symmetry breaking in a fermion-antifermion consendate.[1] According to this process, the generalised Lorentz transformations responsible for the process lead directly to the Berwald-Moor metric. The connection with a double nilpotent representation of bosonic states using the massless covariant $\mathfrak{D}$ operator is immediately apparent. In the discrete version of the double nilpotent representation of the bosonic state (or 'fermion-antifernion condensate'), no mass term appears in the operator, but the differentials may be replaced by covariant derivatives, and so the opportunity arises to represent the appearance of mass directly in terms of an anisotropic space-time structure.

---

[1] I am grateful to Sergey Siparov for his discussions on Bogoslovsky's ideas, which helped to clarify them for me.

References

[1] P. Rowlands, arXiv.org:physics/0507188, and references therein.

[2] B. Diaz and P. Rowlands, A computational path to the nilpotent Dirac equation, International Journal of Computing Anticipatory Systems, 16, 203–18, 2005.

[3] L. H. Kauffman, Non-commutative worlds, New Journal of Physics, 6, 2–46, 2004.

[4] G. Yu. Bogoslovsky, Lorentz symmetry violation without violation of relativistic symmetry, Phys. Lett. A, 350, 5–10, 2006.

Математическое описание фермионного состояния

Питер Роуландс

Университет г. Ливерпуля, лаборатория им. О. Лоджа
p.rowlands@liverpool.ac.uk

Фермионное состояние – основа всей физики. Физика всегда имеет дело с фермионами и их взаимодействиями и больше ни с чем. Можно получить математическое выражение фермионного состояния, которое является лишь оператором, но не уравнением или волновой функцией. Этот оператор, по-видимому, содержит в себе всю информацию, необходимую для построения фермионных взаимодействий и состояний частиц. Его расширения на представления частиц, использующие Финслерову геометрию, может найти этому формализму очень доступные связи.

Ключевые слова: фермионное состояние, нильпотентный оператор, Финслерова геометрия.

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НАД ТЕЛОМ КВАТЕРНИОНОВ[1)]

С. В. Людковский

Кафедра прикладной математики МИРЕА
ludkowski@mirea.ru

Статья посвящена спектральной теории неограниченных операторов над телом кватернионов. В ней исследуются вещественно-линейные и кватернионно-аддитивные операторы с плотной областью определения в банаховом пространстве. Для этого использованы некоммутативные интегралы вдоль путей над телом кватернионов. С их помощью записаны функции операторов. Выяснены специфические особенности спектральных разложений и некоммутативных проекторно-значных мер. Доказан аналог теоремы Стоуна для однопараметрических сильно непрерывных полугрупп унитарных операторов на кватернионных гильбертовых пространствах.

УДК: 517.983 + 517.984; 514.744; 517.986

Ключевые слова: неограниченный оператор, банахово пространство, спектральное разложение, тело кватернионов.

1 Введение

Тело кватернионов является алгеброй над **R**, но не является алгеброй над **C**, так как любое вложение **C** в **H** не является центральным. Поэтому исследование алгебр операторов над **H** нельзя свести к алгебрам операторов над **C**. С другой стороны, развитая ниже теория алгебр операторов над **H** имеет много специфических особенностей по сравнению с общей теорией алгебр операторов над **R** благодаря градуированной структуре **H**. Результаты данной работы можно также использовать для развития некоммутативной геометрии, суперанализа, квантовой механики над **H** и теории представлений не локально компактных групп типа групп диффеоморфизмов и петель кватернионных многообразий (см. [1,3,6,7,10]). Большая часть предыдущих работ по суперанализу была посвящена суперкоммутативным супералгебрам типа алгебры Грассмана, тогда как для некоммутативных супералгебр он оставался почти неразработанным. Тело кватернионов служит важнейшим примером супералгебры, которая не суперкоммутативна. В данной работе использованы результаты предыдущих работ автора по этой теме, в частности некоммутативный интеграл над **H** [8, 9] служащий аналогом интеграла типа Коши известного для **C**. Примерами кватернионных неограниченных операторов служат дифференциальные операторы в том числе в частных производных. Они возникают естественным образом, например, уравнение Клейна-Гордона-Фока можно записать в виде $(\partial^2/\partial z^2 + \partial^2/\partial\tilde{z}^2)f = 0$ на пространстве кватернионно локально $(z, \tilde{z})$-аналитических функций f, где z – кватернионная переменная, $\tilde{z}$ – сопряженная переменная, $z\tilde{z} = |z|^2$. Оператор Дирака для спиновых систем над $\mathbf{H^2}$ можно записать в виде $\begin{pmatrix} 0 & \partial/\partial z \\ -\partial/\partial\tilde{z} & 0 \end{pmatrix}$, что используется в теории спиновых многообразий [5], но любое спиновое многообразие можно вложить в кватернионное [9]. В данной статье приводятся основные особенности кватернионного случая, так как в одной статье невозможно дать такую же обширную теорию над **H**, как хорошо разработанную теорию операторов над **C** [2, 4].

[1)] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ДААД (DAAD, Germany).

2 Теория неограниченных операторов

2.1. Определения и замечания. Пусть X – банахово пространство (БП) над телом кватернионов $\mathbf{H}$, то есть, X – аддитивная группа, а умножения векторов $v \in X$ на скаляры $a, b \in \mathbf{H}$ слева и справа удовлетворяют аксиомам ассоциативности и дистрибутивности, существует норма $\|v\|_X =: \|v\|$ на X относительно которой, X полно, где $\|av\| = |a|_{\mathbf{H}}\|v\|$, $\|vb\| = |b|_{\mathbf{H}}\|v\|$, $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$ для любых $v, w \in X$, $a, b \in \mathbf{H}$. Тогда X имеет также структуру $X_{\mathbf{R}}$ БП над $\mathbf{R}$, так как $\mathbf{H}$ является алгеброй над $\mathbf{R}$ размерности 4.

Оператор T на плотном векторном подпространстве $\mathcal{D}(T)$ в X со значениями в БП Y над $\mathbf{H}$ называется ($\mathbf{H}$-)праволинейным (ПЛО), если $(Tva)b = T(vab)$, $T(va + wb) = (Tv)a + (Tw)b$ для любых $a, b \in \mathbf{H}$ и любых $v, w \in \mathcal{D}(T)$ и дополнительно T $\mathbf{R}$-линеен на $\mathcal{D}(T)_{\mathbf{R}}$. Для ПЛО также пишем Tv вместо $T(v)$. Если T $\mathbf{R}$-линеен и $b(Tav) = T(bav)$, $T(av + bw) = a(Tv) + b(Tw)$ для любых $a, b \in \mathbf{H}$, то T называется ($\mathbf{H}$-)леволинейным (ЛЛО). Для ЛЛО также пишем vT вместо $T(v)$. Оператор T называется ($\mathbf{H}$-)линейным, если он ЛЛО и ПЛО одновременно. Оператор $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{R}(T)$ назовем ($\mathbf{H}$-)квазилинейным (КЛО), если он аддитивен $T(v + w) = T(v) + T(w)$ и $\mathbf{R}$-однороден $T(av) = aT(v)$ для любых $a \in \mathbf{R}$, v и $w \in X$, где $\mathcal{R}(T) \subset Y$ обозначает область значений оператора. Например, производные кватернионно голоморфных функций $\mathbf{H}$-квазилинейны (см. [8]).

Пусть $L_q(X, Y)$ ($L_r(X, Y)$; $L_l(X, Y)$) обозначают БП всех ограниченных КЛО T из X в Y (ПЛО или ЛЛО соответственно), $\|T\| := \sup_{v \ne 0} \|Tv\|/\|v\|$; $L_q(X) := L_q(X, X)$, $L_r(X) := L_r(X, X)$ и $L_l(X) := L_l(X, X)$. Резольвентное множество $\rho(T)$ КЛО T определяется как $\rho(T) := \{z \in \mathbf{H} :$ существует $R(z; T) \in L_q(X)\}$, где $R(z; T) := R_z(T) := (zI - T)^{-1}$, I – единичный оператор на X, $Iv = v$ для любых $v \in X$, аналогично для ПЛО и ЛЛО. Спектр определяется как $\sigma(T) := \mathbf{H} \setminus \rho(T)$.

2.2. Лемма. *Для любых* z_1 *и* $z_2 \in \rho(T)$*:*
(*i*) $R(z_2; T) - R(z_1; T) = R(z_1; T)(z_1 - z_2)R(z_2; T)$.

2.3. Лемма. *Если* T *– замкнутый КЛО, то* $\rho(T)$ *открыто в* $\mathbf{H}$ *и* $R(z; T)$ *кватернионно голоморфно на* $\rho(T)$.

Доказательство. Пусть $z_0 \in \rho(T)$, тогда оператор $R(z_0; T)$ замкнут и по теореме о замкнутом графике ограничен, так как он определен всюду. Если $z \in \mathbf{H}$ и $|z_0 - z| < \|(z_0I - T)^{-1}\|^{-1}$, то $(zI - T) = (z_0I - T)(I - R(z_0; T)(z_0 - z))$, причем
(*i*) $R(z; T) = \{\sum_{n=0}^{\infty}[R(z_0; T)(z_0 - z)]^n\}R(z_0; T) \in L_s(X)$, так как этот ряд $[R(z_0; T)(z_0 - z)]^n R(z_0; T)$ сходится относительно топологии нормы в $L_s(X)$. В силу (*i*) $R(z; T)$ кватернионно локально z-аналитична, следовательно, голоморфна на $\rho(T)$ согласно теореме 2.16 [8].

2.4. Замечания и определения. Для БП X над $\mathbf{H}$ его топологически правосопряженное пространство X_r^* определяется как состоящее из всех функционалов $f : X \to \mathbf{H}$ таких, что f является $\mathbf{R}$-линейными и $\mathbf{H}$-праволинейными. Аналогично положим $X_q^* := L_q(X, \mathbf{H})$ и $X_l^* := L_l(X, \mathbf{H})$, где X_q^* – топологически квазисопряженное пространство, X_l^* – топологически левосопряженное пространство. Тогда X_s^* – БП над $\mathbf{H}$ с нормой $\|f\| := \sup_{x \ne 0} |fx|/\|x\|$. Если X и Y – БП над $\mathbf{H}$ и $T : X \to Y$ принадлежит $L_s(X, Y)$, то T^* определяется уравнением: $(T^*y^*)(x) := y^* \circ T(x)$ для любых $y^* \in Y_s^*$, $x \in X$. Тогда $T^* \in L_l(Y_r^*, X_r^*)$ для любых $T \in L_r(X, Y)$. Если $T \in L_l(X, Y)$, то $T^* \in L_r(Y_l^*, X_l^*)$, так как $y^* \circ T(x) = xT^*y^*$ в симметричных обозначениях, где $x \in X$. Если $T \in L_q(X, Y)$, то $T^* \in L_q(Y_q^*, X_q^*)$.

Пусть $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ – образы относительно естественного вложения X и Y в X^{**} и Y^{**} соответственно. Для любого $T \in L_s(X, Y)$ определим $\hat{T} \in L_s(\hat{X}, \hat{Y})$ уравнением $\hat{T}(\hat{x}) = \hat{y}$, где $y = T(x)$. Каждая функция S определенная на области $X^{**} \supset dom(S) \supset \hat{X}$ и такая, что $S(\hat{x}) = T(\hat{x})$ для любых $\hat{x} \in \hat{X}$ называется расширением T.

Леммы $II.3.12; VI.2.2{-}4, 6, 7$ и следствие $II.3.13$ из [2] аналогичны в случае $\mathbf{H}$ вместо $\mathbf{C}$, беря в доказательстве леммы $II.3.12$ $\|z\| = \|y + \alpha x\| = |\alpha| \|\alpha^{-1} y + x\| \geq |\alpha| d$. Положим по индукции $\mathcal{D}(T^n) := \{x : x \in \mathcal{D}(T^{n-1}), T^{n-1}(x) \in \mathcal{D}(T)\}$, $\mathcal{D}(T^\infty) := \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{D}(T^n)$, где $T^0 := I$, $T^n(x) := T(T^{n-1}(x))$.

2.5. Лемма. *Пусть* $T \in L_s(X)$, *тогда* $\sigma(T^*) = (\sigma(T))\tilde{}$ *и* $(R(\lambda, T))^* = R(\lambda^*, T^*)$, *где* $\lambda^* I := (\lambda I)^*$, $s \in \{q, r, l\}$.

Доказательство. Если $S \in L_s(X, Y)$ и существует $S^{-1} \in L_s(Y, X)$, то $S^* \in L_u(Y_s^*, X_s^*)$ имеет обратный $(S^*)^{-1} \in L_u(X_s^*, Y_s^*)$ и $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$, где $(s, u) \in \{(q, q); (r, l); (l, r)\}$. Тогда $(\lambda I - T)^* y^* = y^* \circ (\lambda I - T) = y^* \circ (\lambda I) - y^* \circ T$, следовательно, $(\lambda^* I - T^*)[(\lambda I - T)^*]^{-1} = I$ и $(R(\lambda, T))^* = R(\lambda^*, T^*)$.

2.6. Определение и замечание. Обозначим через $\mathcal{H}(T)$ семейство всех кватернионно голоморфных функций (КГФ) f на окрестностях V_f для $\sigma(T)$, где $T \in L_s(X)$, $s \in \{q, r, l\}$, а для КЛО T $\mathcal{H}_\infty(T)$ - множество КГФ на окрестности U_f для $\sigma(T)$ и ∞ в одноточечной компактификации $\hat{\mathbf{H}}$ тела кватернионов. Выберем отмеченную точку $z_0 \in \sigma(T)$. Для любого $M = wJ + xK + yL \in \mathbf{H_i}$ с $|M| = 1$, где $w, x, y \in \mathbf{R}$, существует замкнутый спрямляемый путь η состоящий из конечного объединения дуг $\eta(s) = z_0 + r_p \exp(2\pi s M)$ с $s \in [a_p, b_p] \subset [0, 1] \subset \mathbf{R}$ и сегментов прямых линий $\{z \in \mathbf{H} : z = z_0 + (r_p t + r_{p+1}(1 - t)) \exp(2\pi b_p M), t \in [0, 1]\}$ соединяющих их, причем $\eta \subset U \setminus \sigma(T)$, где $a_p < b_p$ и $0 < r_p < \infty$ для любых $p = 1, ..., m$, $m \in \mathbf{N}$, $b_p = a_{p+1}$ для любых $p = 1, ..., m - 1$, $a_1 = 0$, $b_m = 1$. Тогда существует спрямляемый замкнутый путь ψ гомотопный η и окрестность U удовлетворяющие условиям теоремы 3.9 [8] и такие, что $\psi \subset U \setminus \sigma(T)$. Для $T \in L_q(X)$ можно определить

(i) $f(T) := (2\pi)^{-1} (\int_\psi f(\zeta) R(\zeta; T) d\zeta) M^{-1}$,

где сходимость предполагается в слабой операторной топологии. Этот интеграл зависит от f, T и не зависит от U, ψ, η, γ, M. Для неограниченного КЛО T пусть $A := -R(a; T)$ и $\Psi : \hat{\mathbf{H}} \to \hat{\mathbf{H}}$, $\Psi(z) := (z - a)^{-1}$, $\Psi(\infty) = 0$, $\Psi(a) = \infty$, где $a \in \rho(T)$. Для $f \in \mathcal{H}_\infty(T)$ определим $f(T) := \phi(A)$, где $\phi \in \mathcal{H}_\infty(A)$ дается уравнением $\phi(z) := f(\Psi^{-1}(z))$.

2.7. Замечание. Рассмотрим БП X над $\mathbf{H}$ как БП $X_\mathbf{C}$ над $\mathbf{C}$, тогда

(i) $X_\mathbf{C} = X_1 \oplus X_2 j$,

где X_1 и X_2 – БП над $\mathbf{C}$, так что X_1 изоморфно с X_2. Комплексное сопряжение в $\mathbf{C}$ индуцирует комплексное сопряжение векторов в X_m, где $m = 1$ или $m = 2$. Каждый вектор $x \in X$ можно записать в матричной форме

(ii) $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ -\bar{x}_2 & \bar{x}_1 \end{smallmatrix}\right)$,

где $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$. Тогда каждый КЛО T можно записать в виде

(iii) $T = \left(\begin{smallmatrix} T_1 & T_2 \\ -\bar{T}_2 & \bar{T}_1 \end{smallmatrix}\right)$,

где $T_1 : X_1 \supset \mathcal{D}(T_1) \to Y_1$, $T_2 : X_1 \supset \mathcal{D}(T_2) \to Y_2$, $T(x) = Tx$ для $s \in \{q, r\}$, $T(x) = xT$ для $s = l$.

(iv) $\bar{T}_m x := \overline{T_m \bar{x}}$, где $m = 1$ или $m = 2$.

В частности для коммутатора $[\zeta I, T]$ при $\zeta = \left(\begin{smallmatrix} b & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{H}$, где $b \in \mathbf{C}$, выполняется формула

(v) $[\zeta I, T] = 2(-1)^{1/2} Im(b) \left(\begin{smallmatrix} 0 & T_2 \\ -\bar{T}_2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, где $Im(b)$ – мнимая часть b, $2(-1)^{1/2} Im(b) = (b - \bar{b})$.

2.8. Теорема. *Если* $f \in \mathcal{H}_\infty(T)$, *то* $f(T)$ *не зависит от* $a \in \rho(T)$ *и*

(i) $f(T) = f(\infty) I + (2\pi)^{-1} (\int_\psi f(\lambda) R(\lambda; T) d\lambda) M^{-1}$.

Доказательство. Если $a \in \rho(T)$, то $0 \neq b = (\lambda - a)^{-1}$ при $\lambda \neq a$ и $(T - aI)(T - \lambda I)^{-1} = (bI - A)^{-1} b$, поэтому $I + b^{-1}(T - \lambda I)^{-1} = b(bI - A)^{-1} b - bI$ и $b \in \rho(A)$. Если

$0 \neq b \in \rho(A)$, то $A(bI-A)^{-1} = (T-\lambda I)^{-1}b^{-1}$ и $\lambda \in \rho(T)$. Точка $b = 0 \in \sigma(A)$, так как $A^{-1} = T - aI$ неограничен. Пусть $a \notin V$, тогда $U = \psi^{-1}(V) \supset \sigma(A)$ и U открыто в $\hat{\mathbf{H}}$, а $\phi(z) := f(\psi^{-1}(z)) \in \mathcal{H}_\infty(U)$. В силу следствия 3.26 [8] получим (i).

2.9. Теорема. *Пусть* $a, b, c, e \in \mathbf{H}$, $f, g \in \mathcal{H}_\infty(T)$. *Тогда*

(i) $afc + bge \in \mathcal{H}_\infty(T)$ *и* $afc(T) + bge(T) = (afc + bge)(T)$*;*

(ii) $fg \in \mathcal{H}_\infty(T)$ *и* $f(T)g(T) = (fg)(T)$*;*

(iii) *если* f *раскладывается в сходящийся ряд* $f(z) = \sum_k (b_k, z^k)$ *в окрестности* $\sigma(T)$, *то* $f(T) = \sum_k (b_k, T^k)$ *на* $\mathcal{D}(T^\infty)$, *где* $b_k = (b_{k,1}, ..., b_{k,m(k)})$, $(b_k, z^k) := b_{k,1}z^{k_1}...b_{k,m(k)}z^{k_{m(k)}}$, $b_{k,j} \in \mathbf{H}$*;*

(iv) $f \in \mathcal{H}_\infty(T^*)$ *и* $f^*(T^*) = (f(T))^*$, *где* $f^*(z) := (f(z^*))^*$.

Доказательство. (**i**). Возьмем $V_f \cap V_g =: V$ и для него построим U, η и ψ как в §2.6. Тогда первое утверждение следует из 2.6.(i).

(**ii**). В силу теоремы 3.28 [8] функция $\tilde{g}(\tilde{z}) =: \phi(z)$ принадлежит $\mathcal{H}_\infty(T)$ и $\tilde{\phi}(\tilde{z}) = g(z)$, где $\tilde{z} = vI - wJ - xK - yL$, $z = vI + wJ + xK + yL$, $v, w, x, y \in \mathbf{R}$, $z \in V_g \subset \mathbf{H}$. Используя $\phi(A)$, рассмотрим случай ограниченного T. В силу 2.6.(i): $(\tilde{y}^*\phi(\tilde{T})\tilde{h}) = (2\pi)^{-1}y^*M\int_\psi \widetilde{d\zeta}R(\tilde{\zeta}, T)g(\tilde{\zeta})h$, где $\tilde{y}^*\tilde{T}\tilde{h} := (y^*Th)^{\tilde{}}$ и $\tilde{y}^*\tilde{h} := (y^*h)^{\tilde{}}$ для любых $y^* \in X^*$ и $h \in X$. Поэтому $(\tilde{y}^*\phi(\tilde{T})\tilde{h})^{\tilde{}} = (2\pi)^{-1}y^*M\int_{\tilde{\psi}} d\zeta R(\zeta, T)g(\zeta)h$, следовательно, $(\phi(\tilde{T}))^{\tilde{}} = (2\pi)^{-1}M\int_{\tilde{\psi}} d\zeta R(\zeta, T)g(\zeta) = g(T)$, так как левые и правые интегралы совпадают в пространстве кватернионно голоморфных функций. Функция fg кватернионно голоморфна на V (см. §§2.1 и 2.12 [8]). Существуют ψ_f и ψ_g как в §2.6 и содержащиеся в $U \setminus \sigma(T)$, где $\bar{U} \subset V$. В силу теоремы Фубини существует

$$(v) \quad f(T)g(T) = (2\pi)^{-2}\int_{\psi_f}\int_{\psi_g} f(\zeta_1)R(\zeta_1; T)(d\zeta_1)(d\zeta_2)R(\zeta_2, T)g(\zeta_2),$$

где $\zeta_1 \in \psi_f$ и $\zeta_2 \in \psi_g$. Выполняются тождества $R(\zeta; T)d\zeta = d_\zeta Ln(\zeta I - T)$ и $(d\zeta)R(\zeta; T) = d_\zeta Ln(\zeta I - T)$ для выбранной ветви Ln (см. §§3.7, 3.8 [8]), следовательно, $R(\zeta_1; T)(d\zeta_1)(d\zeta_2)R(\zeta_2; T) = d_{\zeta_1}d_{\zeta_2}Ln(\zeta_1 I - T)Ln(\zeta_2 I - T) = (d\zeta_1)R(\zeta_1; T)R(\zeta_2; T)d\zeta_2$. В силу леммы 2.2:

$$(vi) \quad R(a; T)R(b; T) = [R(a; T) - R(b; T)](b-a)^{-1}$$
$$+R(a; T)[R(b; T), (b-a)I](b-a)^{-1},$$
$$(vii) \quad [R(b; T), (b-a)I] = R(b; T)[T, (b-a)I]R(b; T),$$

так как $[(bI - T), (b-a)I] = -[T, (b-a)I]$, где $a, b \in \rho(T)$. Пусть в частности ψ_f и ψ_g содержатся в плоскости $\mathbf{R} \oplus i\mathbf{R}$ в $\mathbf{H}$, где i, j, k – генераторы $\mathbf{H}$, так что $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$. В силу 2.7.(v) и 2.8.(vii):

$$(viii) \quad \int_{\psi_f}\int_{\psi_g} f(\zeta_1)R(\zeta_1; T)[R(\zeta_2; T), (\zeta_2 - \zeta_1)I](\zeta_2 - \zeta_1)^{-1}d\zeta_1 d\zeta_2 g(\zeta_2) = 0,$$

так как ветвь Ln может быть выбрана одной и той же вдоль оси j в $\mathbf{H}$, а в силу принципа аргумента 3.30 [8] она соответствует вычету $c(\zeta_1 - z)^{-1}(\zeta_2 - z)^{-1}b(\zeta_2 - \zeta_1)(\zeta_2 - z)^{-1}(\zeta_2 - \zeta_1)^{-1}$. Тогда из $(v, vi, viii)$ следует:

$$(ix) \quad f(T)g(T) = (2\pi)^{-2}\int_{\psi_f}\int_{\psi_g} f(\zeta_1)[R(\zeta_1; T) - R(\zeta_2, T)](\zeta_2 - \zeta_1)^{-1}d\zeta_1 d\zeta_2 g(\zeta_2).$$

Выберем ψ_g так, что $|\psi_g(s) - z_0| > |\psi_f(s) - z_0|$ для любого $s \in [0, 1]$. Из аддитивности интеграла вдоль пути и теоремы Фубини:

$$(x) \quad f(T)g(T) = (2\pi)^{-2}\int_{\psi_f} f(\zeta_1)R(\zeta_1; T)d\zeta_1(\int_{\psi_g}(\zeta_2 - \zeta_1)^{-1}d\zeta_2 g(\zeta_2))$$

$$-(2\pi)^{-2}\int_{\psi_g}(\int_{\psi_f} f(\zeta_1)d\zeta_1 R(\zeta_2,T)(\zeta_2-\zeta_1)^{-1})d\zeta_2 g(\zeta_2).$$

В силу теорем 3.9, 3.24 [8] второй интеграл справа (x) равен нулю, так как $\int_{\psi_f} f(\zeta_1)d\zeta_1 R(\zeta_2;T)(\zeta_2-\zeta_1)^{-1}=0$, а первый интеграл дает

$$f(T)g(T)=(2\pi)^{-1}(\int_{\psi_f} f(\zeta_1)R(\zeta_1;T)d\zeta_1 g(\zeta_1))M^{-1}$$

$$=(2\pi)^{-1}(\int_{\psi_f} f(\zeta)g(\zeta)dLn(\zeta I-T))M^{-1},$$

где $\zeta\in\psi_f$.

(iii) следует из применения **(i, ii)** по индукции и сходимости ряда в сильной операторной топологии.

(iv). В силу леммы 2.5 $\sigma(T^*)=(\sigma(T))\tilde{}$, тогда $f\in\mathcal{H}_\infty(T^*)$. Поскольку $(f(T))^*y^*=y^*\circ f(T)$ для любых $y^*\in X^*$, то в силу леммы 2.5 $R(\zeta^*;T^*)=(R(\zeta;T))^*$, следовательно, $(f(T))^*y^*=(2\pi)^{-1}(M^{-1})^*\int_\psi(d\zeta^*)R(\zeta^*;T^*)(f(\zeta))^*y^*$, где $(f(\zeta))^*y^*:=y^*\circ f(\zeta)$. Если $f(\zeta)$ представлено рядом сходящимся в шаре: $f(\zeta)=\sum_n(a_n,\zeta^n)$, то $f(\zeta^*)=\sum_n a_{n,1}\zeta^{*n_1}...a_{n,m(n)}\zeta^{*n_{m(n)}}$, следовательно, $[f(\zeta^*)]^*=\sum_n\zeta^{n_{m(n)}}a^*_{n,m(n)}...\zeta^{n_1}a^*_{n,1}$ и $(f(T))^*=(2\pi)^{-1}(M^{-1})^*\int_\psi(d\zeta^*)R(\zeta^*;T^*)f^*(\zeta^*)=f^*(T^*)$.

2.10. Теорема. *Пусть T ограничен, $f\in\mathcal{H}(T)$, тогда $f(\sigma(T))=\sigma(f(T))$.*

2.11. Теорема. *Пусть $f\in\mathcal{H}_\infty(T)$, $f(U)$ открыто для некоторого открытого $U\subset dom(f)\subset\hat{\mathbf{H}}$, $g\in\mathcal{H}_\infty(T)$ и $f(U)\supset\sigma(T)$, $dom(g)\supset f(U)$, тогда $F:=g\circ f\in\mathcal{H}(T)$ и $F(T)=g(f(T)$.*

Доказательство вытекает из §2.9 аналогично случаю поля **C** с помощью теорем 2.16, 3.10, следствия 2.13 [8], так как $F\in\mathcal{H}_\infty(T)$.

2.12. Определение и замечание. Пусть $\mathcal{A}$ – БП и алгебра над **H** с единицей e имеющей свойства: $|e|=1$ и $|xy|\le|x||y|$ для любых x и $y\in\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ называется банаховой алгеброй (БА) или C-алгеброй (над **H**). БА $\mathcal{A}$ назовем квазикоммутативной (КК), если существует коммутативная алгебра $\mathcal{A}_{0,0}$ над **R**, так что $\mathcal{A}$ изоморфна алгебре $\{T:T=\begin{pmatrix} A & B\\ -\bar{B} & \bar{A}\end{pmatrix}:A,B\in\mathcal{A}_0\}$, где $\mathcal{A}_0:=\{A:A=A_0+A_1\mathbf{i};\ A_0\in\mathcal{A}_{0,0},\ A_1\in\mathcal{A}_{0,0}\}$, $\bar{A}:=A_0-A_1\mathbf{i}$, $\mathbf{i}:=(-1)^{1/2}$.

Рассмотрим X над **R**: $X_{\mathbf{R}}=X_e e\oplus X_i i\oplus X_j j\oplus X_k k$, где X_e, X_i, X_j и X_k – попарно изоморфные БП над **R**. Тогда $\mathcal{A}=\mathcal{A}_0 e\oplus\mathcal{A}_i i\oplus\mathcal{A}_j j\oplus\mathcal{A}_k k$, где $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_k$ – алгебры над **R**. Умножая $\mathcal{A}$ на $S\in\{e,i,j,k\}$, получим автоморфизмы $\mathcal{A}$, следовательно, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_k$ попарно изоморфны.

2.13. Определения и замечания. БА $\mathcal{A}$ снабжена инволюцией, когда существует операция $*:\mathcal{A}\ni T\mapsto T^*\in\mathcal{A}$, так что $(T^*)^*=T$, $(T+V)^*=T^*+V^*$, $(TV)^*=V^*T^*$, $(\alpha T)^*=T^*\tilde{\alpha}$ для любых $\alpha\in\mathbf{H}$.

Если БА $\mathcal{A}$ (над **H**) имеет подалгебру $\mathcal{A}_{0,0}$ (над **R**), то $T^*=\begin{pmatrix} A^* & -\bar{B}^*\\ B^* & \bar{A}^*\end{pmatrix}$.

Элемент $x\in\mathcal{A}$ называется регулярным, если существует $x^{-1}\in\mathcal{A}$. В противном случае он называется сингулярным. Тогда спектр $\sigma(x)$ для x определяется как множество всех $z\in\mathbf{H}$, для которых $ze-x$ сингулярен, а его спектральный радиус $|\sigma(x)|:=\sup_{z\in\sigma(x)}|z|$. Резольвентное множество определяется как $\rho(x):=\{z\in\mathbf{H}:ze-x$ регулярен$\}$ и резольвента как $R(z;x):=(ze-x)^{-1}$ для любых $z\in\rho(x)$.

2.14. Лемма. *Спектр $\sigma(x)$ элемента $x\in\mathcal{A}$ является непустым компактным подмножеством в **H**. Его резольвента $x(z):=R(z;x)$ кватернионно голоморфна на $\rho(x)$, $x(z)$ стремится к нулю при $|z|\to\infty$ и*

$x(z) - x(y) = x(z)(y - z)x(y)$ *для любых* $y, z \in \rho(x)$.

Доказательство вытекает из $(ze - x)x(z)x(y) = x(y)$, $x(z)x(y)(ye - x) = x(z)$, $(ze - x)(x(z) - x(y))(ye - x) = (ye - x) - (ze - x) = (y - z)e$, следовательно, $x(z) - x(y) = R(z; x)(y-z)R(y; x) = x(z)(y-z)x(y)$. Поэтому $x(z)$ непрерывно по z на $\rho(x)$ и существует $(\partial[x(z+y)x^{-1}(y)]/\partial z).h = -x(y)h$ для любого $h \in \mathbf{H}$. Для любой отмеченной точки y член $x^{-1}(y)$ постоянен на $\mathcal{A}$, причем $(\partial[x(z+y)x^{-1}(y)]/\partial \tilde{z}) = 0$, следовательно, $x(z) \in \mathcal{H}(\rho(x))$. Второе утверждение получается рассмотрением комплексификации $\mathbf{C} \otimes \mathcal{A}$.

2.15. Теорема. *Пусть* $\mathcal{B}$ *– замкнутый идеал в ККБА* $\mathcal{A}$. *Факторалгебра* $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ *изометрически изоморфна с* $\mathbf{H}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{B}$ *максимальна.*

Доказательство аналогично случаю алгебр над $\mathbf{C}$ в силу определения ККБА.

2.16. Опеределения. C^*-алгебра $\mathcal{A}$ над $\mathbf{H}$ - это БА над $\mathbf{H}$ с инволюцией $*$, так что $|x^*x| = |x|^2$ для любого $x \in \mathcal{A}$.

Скалярное произведение на линейном пространстве X над $\mathbf{H}$ (то есть, линейном относительно правого и левого умножений раздельно на скаляры из $\mathbf{H}$) – это биаддитивное $\mathbf{R}$-билинейное отображение $< *; * >$: $X^2 \to \mathbf{H}$, так что

(1) $< x; x >= \alpha_0 e$, где $\alpha_0 \in \mathbf{R}$;

(2) $< x; x >= 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

(3) $< x; y >=< y; x >^{\tilde{}}$ для любых $x, y \in X$;

(4) $< x + z; y >=< x; y > + < z; y >$;

(5) $< xa; yb >= \tilde{a} < x; y > b$ для любых $x, y, z \in X$, $a, b \in \mathbf{H}$.

Если X полно относительно топологии нормы

(6) $|x| :=< x; x >^{1/2}$, то X называется кватернионным гильбертовым пространством (ГП).

2.17. Лемма. *БА* $L_q(X)$ *на ГП* X *с инволюцией:*

(1) $< Tx; y >=:< x; T^*y >$ *для любых* $x, y \in X$

– это C^**-алгебра.*

2.18. Лемма. *Если* $\mathcal{A}$ *– КК* C^**-алгебра, то* $|x^2| = |x|^2$, $|x| = |x^*|$ *и* $I^* = I$, *где* I *– единица в* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Каждый вектор $x \in \mathcal{A}$ представим в виде: $x = x_e e + x_i i + x_j j + x_k k$. Тогда $x^* = x_e^* e - x_i^* i - x_j^* j - x_k^* k$, так как $(x_m S_m)^* = (-1)^{\kappa(S_m)} x_m S_m$, где $S_m \in \{e, i, j, k\}$ для любого $m \in \{e, i, j, k\}$, $\kappa(e) = 0$, $\kappa(i) = \kappa(j) = \kappa(k) = 1$. Поэтому $[x, x^*] = 0$ и $|x_m^2| = |x_m|^2$. Тогда $|x|^2 = |x_e|^2 + |x_i|^2 + |x_j|^2 + |x_k|^2$ и $|x^2|^2 = |(x^2)^* x^2| = |(x^*)^2 x^2| = |(xx^*)(xx^*)| = |x|^4$, следовательно, $|x^2| = |x|^2$. Поскольку $I = I_e$, то $I^* = I_e^* = I_e = I$.

2.19. Определение. Гомоморфизм $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ C^*-алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ сохраняющий инволюцию: $h(x^*) = (h(x))^*$ называется $*$-гомоморфизмом. Если h – биективный $*$-гомоморфизм $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$, то h называется $*$-изоморфизмом, а $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются $*$-изоморфными. Через $\sigma(\mathcal{A})$ обозначается структурное пространство для $\mathcal{A}$ и оно также называется спектром для $\mathcal{A}$. Структурное пространство определяется аналогично комплексному случаю с помощью теоремы 2.15.

2.20. Предложение. *Для ГП* X *пространства* $L_l(X, \mathbf{H})$ *и* $L_r(X, \mathbf{H})$ *изоморфны* X, *для БП* X $L_q(X)$ *изоморфно* $L_l(X^2)$, $L_q(\mathbf{H}) = \mathbf{H}^4$, *существует биекция между семейством КЛО* T *на* $\mathcal{D}(T) \subset X$ *и семейством ЛЛО* V *на* $\mathcal{D}(V) \subset X^2$.

Доказательство. Пусть $L_q(X) \ni \alpha = \alpha_e e + \alpha_i i + \alpha_j j + \alpha_k k$. Поскольку $S\alpha S \in L_q(X)$ для любых $S \in \mathbf{H}$, то существуют кватернионные постоянные $S_{m,l,n}$, так что

(1) $\alpha_m(x)m = \sum_n S_{m,1,n}\alpha(x)S_{m,2,n}$ для любых $m \in \{e, i, j, k\}$,

где $S_{m,1,n} = \gamma_{m,n} S_{m,2,n}$ с $\gamma_{m,n} = (-1)^{\phi(m,n)}/4 \in \mathbf{R}$, $\phi(m, n) \in \{1, 2\}$, $S_{m,l,n} \in \mathbf{R}n$ для любых $n \in \{e,i,j,k\}$ (см. §§3.7, 3.28 [8]). Применяя для x разложение из §2.12, в силу (1) получим 4×4-блочный вид операторов над $\mathbf{R}$ и изоморфизм $L_q(X)$ с $L_l(X^2)$.

2.21. Замечание. Для ЛЛО (над $\mathbf{H}$) понятия точечного $\sigma_p(T)$, непрерывного $\sigma_c(T)$ и остаточного $\sigma_r(T)$ спектров определяются аналогично случаю над полем $\mathbf{C}$, а в силу 2.20 эти понятия распространяются на КЛО.

2.22. Теорема. *КК C^*-алгебра изометрически $*$-изоморфна алгебре $C(\Lambda, \mathbf{H})$ всех непрерывных $\mathbf{H}$-значных функций на ее спектре Λ.*

Доказательство вытекает из того, что отображение $x \mapsto x(.)$ из $\mathcal{A}$ в $C(\Lambda, \mathbf{H})$ является $*$-гомоморфизмом, где $x(\mathcal{M})$ определяется равенством $x + \mathcal{M} = x(\mathcal{M}) + \mathcal{M}$ для любого максимального идеала $\mathcal{M}$. Пусть $x(\lambda) = \alpha_e e + \alpha_i i + \alpha_j j + \alpha_k k$, тогда $x^*(\lambda) = \beta_e e + \beta_i i + \beta_j j + \beta_k k$, где $\alpha_e, ..., \beta_k \in \mathbf{R}$. Имеется разложение для $X := C(\Lambda, \mathbf{H})$ из §2.12 с $X_e = C(\Lambda, \mathbf{H})$ и $x_m = \sum_n S_{m,1,n} z S_{m,2,n} \tilde{m}$ для любых $z \in \mathbf{H}$, где $z = x_e e + x_i i + x_j j + x_k k$, $x_m \in \mathbf{R}$, $m, n \in \{e,i,j,k\}$ (см. Предложение 2.20). Поэтому применима теорема Стоуна-Вейештрасса для $\mathbf{H}$-значных функций. Если $\lambda_1 \ne \lambda_2$ – два максимальных идеала в Λ, то $y(\lambda_1) \ne y(\lambda_2)$ для $y \in \lambda_1 \setminus \lambda_2$. Следовательно алгебра функций $x(.)$ совпадает с $C(\Lambda, \mathbf{H})$.

2.23. Определение. Пусть X – ГП над $\mathbf{H}$ и $\mathcal{B}$ - σ-алгебра борелевских подмножеств хаусдорфова топологического пространства Λ. Рассмотрим отображение $\hat{E}$ определенное на $\mathcal{B} \times X^2$ и определяющее единственную X-проекторнозначную спектральную меру $\hat{E}$ такую, что

(i) $< \hat{E}(\delta)x; y >= \hat{\mu}(\delta; x, y)$ – регулярная (некоммутативная) $\mathbf{H}$-значная мера для любых $x, y \in X$, где $\delta \in \mathcal{B}$. По нашему определению это означает, что

(1) $\hat{\mu}(\delta; x, y) = \hat{\mu}(x, y).\chi_\delta$ и

(2) $\hat{\mu}(x, y).f := \sum_{m,l,n} \int_\Lambda S_{m,1,n} f(\lambda) S_{m,2,n} \tilde{m} l \mu_{m,l}(d\lambda; x, y)$,

где χ_δ – характеристическая функция для $\delta \in \mathcal{B}$, $S_{m,p,n} \in \mathbf{R}n$ те же, что в §2.19, $\mu_{m,l}$ – регулярная действительнозначная мера, $m, n, l \in \{e,i,j,k\}$, $p = 1$ или $p = 2$, f - произвольная $\mathbf{H}$-значная функция на Λ, которая $\mu_{m,l}$-интегрируема для любых m, l;

(3) $(\hat{E}_S(\delta))^* = (-1)^{\kappa(S)} \hat{E}_S(\delta)$, где $(\hat{E}_S(\delta).e)x := (\hat{E}_S(\delta))x = (\hat{E}(\delta).S)x$, $S = cm$, $m \in \{e,i,j,k\}$, $c = const \in \mathbf{R}$, $x \in X$;

(4) $\hat{E}_{bS} = b\hat{E}_S$ для любых $b \in \mathbf{R}$ и любого чистого вектора $S = cm$;

(5) $\hat{E}_{S_1 S_2}(\delta \cap \gamma) = \hat{E}_{S_1}(\delta)\hat{E}_{S_2}(\gamma)$ для любых чистых кватернионных векторов S_1 и S_2 и любых $\delta, \gamma \in \mathcal{B}$. Хотя из $(3,4)$ следует, что $\hat{E}(\delta).\lambda = \lambda_e \hat{E}_e(\delta) + \lambda_i \hat{E}_i(\delta) + \lambda_j \hat{E}_j(\delta) + \lambda_k \hat{E}_k(\delta) =: \hat{E}_\lambda(\delta)$, но в общем может быть $(\hat{E}(\delta).\lambda)x \ne (\hat{E}(\delta))\lambda x$, где $\lambda_e, ..., \lambda_k \in \mathbf{R}$.

2.24. Теорема. *Каждая КК C^*-алгебра $\mathcal{A}$ содержащаяся в $L_q(X)$ для ГП X над $\mathbf{H}$ изометрически $*$-эквивалентна алгебре $C(\Lambda, \mathbf{H})$, где Λ – ее спектр. Более того, каждый изометрический $*$-изоморфизм $f \mapsto T(f)$ между $C(\Lambda, \mathbf{H})$ и $\mathcal{A}$ определяет единственную X-проекторнозначную спектральную меру $\hat{E}$ на $\mathcal{B}(\Lambda)$, так что*

(i) $< \hat{E}(\delta)x; y >= \hat{\mu}(\delta; x, y)$ – регулярная $\mathbf{H}$-значная мера для любых $x, y \in X$, где $\delta \in \mathcal{B}$;

(ii) $\hat{E}_{S_1}(\delta).T(S_2 f) = (-1)^{\kappa(S_1)+\kappa(S_2)} T(S_2 \hat{E}_{S_1}(\delta).f)$ для любых $f \in C(\Lambda, \mathbf{R})$, $\delta \in \mathcal{B}$ и чистых кватернионных векторов S_1, S_2;

(iii) $T(f) = \int_\Lambda \hat{E}(d\lambda).f(\lambda)$ для любой $f \in C(\Lambda, \mathbf{H})$, причем $\hat{E}$ σ-аддитивна в сильной операторной топологии.

Доказательство. Отметим, что Λ компактно. Существует разложение $C(\Lambda, \mathbf{H})$ как в §2.21. Каждый $\psi \in C_q^*(\Lambda, \mathbf{H})$ имеет разложение $\psi(f) = \psi_e(f)e + \psi_i(f)i + \psi_j(e)j + \psi_k(f)k$, где $f \in C(\Lambda, \mathbf{H})$ (см. 2.20.(1)). Более того, $\psi_l(f) = \psi_l(f_e e) + \psi_l(f_i i) + \psi_l(f_j j) + \psi_l(f_k k)$, где $f_m \in C(\Lambda, \mathbf{R})$, $m, l \in \{e,i,j,k\}$. Тогда

(1) $\psi(f) = \sum_{m,n,l} \psi_l(S_{m,1,n} f S_{m,2,n}) l$,
где $m, n, l \in \{e, i, j, k\}$. В силу теоремы представления Рисса IV.6.3 [2]: $\psi_l(gm) = \int_\Lambda g(\lambda)\mu_{m,l}(d\lambda)$ для любой $g \in C(\Lambda, \mathbf{R})$, где $\mu_{m,l}$ – это σ-аддитивная действительнозначная мера. Выполнение покомпонентного интегрирования матричнозначной функции дает

(2) $\psi(f) = \sum_{m,n,l} \int_\Lambda S_{m,1,n} f(\lambda) S_{m,2,n} \tilde{m} l \mu_{m,l}(d\lambda)$. Для $\psi(f) :=< T(f)x; y >$ для любой $f \in C(\Lambda, \mathbf{H})$ и отмеченных $x, y \in X$ из (2) следует, что

(3) $< T(f)x; y >= \sum_{m,n,l} \int_\Lambda S_{m,1,n} f(\lambda) S_{m,2,n} \tilde{m} l \mu_{m,l}(d\lambda; x, y)$, так как $| < T(f)x; y > | \le |f||x||y|$, следовательно, $\mu_{m,l}(\delta; xa, yb) = a\mu_{m,l}(\delta; x, y)b$ для любых $a, b \in \mathbf{R}$, причем

(4) $\sup_{\delta \in \mathcal{B}} (\sum_l |\sum_m z_m m \mu_{m,l}(\delta; x, y)|^2)^{1/2} \le |z||x||y|$ для любых $z = z_e e + z_i i + z_j j + z_k k \in \mathbf{H}$, так как $|l| = 1$.

Из (3) следует, что $\mu_{m,l}(\delta; x, y)$ является $\mathbf{R}$-биоднородной и биаддитивной по x, y. Если $f(\lambda) \in \mathbf{R}m$ для μ-п.в. $\lambda \in \Lambda$ для некоторого $m \in \{e, i, j, k\}$, то $T(f) = T((-1)^{\kappa(m)} \tilde{f}) = (-1)^{\kappa(m)} T(f)^*$, следовательно, $< T(f)x; y >= (-1)^{\kappa(m)} < T(f)y; x >^{\tilde{}}$. Тогда $\mu_{m,l}(\delta; x, y) = (-1)^{\kappa(m)+\kappa(l)} \mu_{m,l}(\delta; y, x)$ для любых $m, l \in \{e, i, j, k\}$, $x, y \in X$.

2.25. Определение. Оператор T на кватернионном ГП X называется нормальным, если $TT^* = T^*T$; T унитарен, если $TT^* = I$ и $T^*T = I$; T симметричен, если $< Tx; y >=< x; Ty >$ для любых $x, y \in \mathcal{D}(T)$, T самосопряжен, если $T^* = T$. Далее для T^* предполагается, что $\mathcal{D}(T)$ плотно в X.

2.26. Лемма. *Оператор $T \in L_q(X)$ нормален тогда и только тогда, когда минимальная ($\mathbf{H}$-)подалгебра $\mathcal{A}$ в $L_q(X)$ содержащая T и T^* КК.*

Доказательство. Пусть T нормален, тогда на $X = X_e e \oplus X_i i \oplus X_j j \oplus X_k k$ он может быть представлен в виде $T = T_e E + T_i i + T_j j + T_k k$, где $Range(T_m) \subset X_m$ и $T_m \in \mathcal{A}$ для любых $m \in \{e, i, j, k\}$. В блочном виде $T = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{smallmatrix}\right)$ и $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ -\bar{x}_2 & \bar{x}_1 \end{smallmatrix}\right)$, где $x_1 = x_e e + x_i i \in X_e e \oplus X_i i$, $x_2 j = x_j j + x_k k \in X_j j \oplus X_k k$, $\bar{x}_1 = x_e e - x_i i$, $\bar{A} x_1 := A\bar{x}_1$. Тогда $T^*(x_m m) = (-1)^{\kappa(S_m)} T(x_m m)$ для любых $m \in \{e, i, j, k\}$ и $T^* = \left(\begin{smallmatrix} A^* & -\bar{B}^* \\ B^* & \bar{A}^* \end{smallmatrix}\right)$. Поэтому, $< mTmx; mTmy >=< mT^*mx; mT^*my >$ для любых $m \in \mathbf{H}$ с $|m| = 1$, следовательно, $(mTm)(mTm)^* = (mTm)^*(mTm)$. Пространство X изоморфно с $l_2(\upsilon, \mathbf{H})$, в котором $< x; y >= \sum_{b \in \upsilon} {}^b\tilde{x}\, {}^b y$, где υ – множество, $x = \{ {}^l x : {}^l x \in \mathbf{H}, l \in \upsilon\} \in l_2(\upsilon, \mathbf{H})$. Тогда в $L_q(l_2(\upsilon, \mathbf{H}))$ выполняется $T^* = \tilde{T}$, причем $\bar{A}^* = A$ и $\bar{B}^* = B$. Поэтому $TT^* = T^*T$ дает $AA^* = A^*A$, также автоморфизм $j : X \to X$ и равенство $(mTm)(mTm)^* = (mTm)^*(mTm)$ с $m = \theta$, $m = (i + j)/2$, $m = (i + k)/2$, $m = (i + j)\theta/2$, $m = (i + k)\theta/2$, $\theta = \exp(\pi \mathbf{i}/4)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ приводит к попарному коммутированию $\{T_e, T_i, T_j, T_k\}$.

Обратно, если $\mathcal{A}$ квазикоммутативна, то $\{T_m : m = e, i, j, k\}$ – попарно коммутируют, следовательно, $TT^* = T^*T$.

2.27. Лемма. *Пусть T – симметрический оператор и $a \in \mathbf{H} \setminus \mathbf{R}e$, тогда существует $R(a; T)$ и $|x| \le 2|R(a; T)x|/|a - \tilde{a}|$ для любых $x \in \mathcal{D}(T)$. Пусть T – замкнутый оператор, тогда множества $\rho(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$ не пересекаются и их объединение есть все $\mathbf{H}$. Для самосопряженного КЛО T $\sigma(T) \subset \mathbf{R}e$, причем $R(a; T)^* = R(a^*; T)$.*

2.28. Теорема. *Для самосопряженного КЛО T существует однозначно определенная регулярная счетно-аддитивная самосопряженная спектральная мера $\hat{E}$ на $\mathcal{B}(\mathbf{H})$, $\hat{E}|_{\rho(T)} = 0$, так что*

(a) $\mathcal{D}(T) := \{x : x \in X; \int_{\sigma(T)} < (\hat{E}(dz).z^2)x; x >< \infty\}$ и

(b) $Tx = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} (\hat{E}(dz).z)x$, $x \in \mathcal{D}(T)$.

Доказательство. В силу предложения 2.20 и равенства 2.16.(5) пространство $\mathcal{D}(T)$ является $\mathbf{H}$-линейным. Воспользуемся леммой 2.27, доказательство которой аналогично случаю над полем $\mathbf{C}$, и возьмем отмеченный элемент $q \in \{i, j, k\}$, тогда $h(z) := (q-z)^{-1}$ – гомеоморфизм сферы $S^3 := \{z \in \mathbf{H} : |z| = 1\}$ и для $A := (q-z)R(z;T)(q-z) + (q-z)I$ для любого $z \in \rho(T) \setminus \{q\}$ выполняется тождество $(hI - R(q;T))A = I$. Если $z = q$, то $h = \infty$, следовательно, $h \notin \sigma(R(q;T))$. Пусть $0 \ne h \in \rho(R(q;T))$, тогда существует $B := R(q;T)A$, где $A := (hI - R(z;T))^{-1}$, следовательно, B взаимно однозначен, $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(T)$ и $(zI - T)B = (z-q)I$, то есть, $z \in \rho(T)$. При $h = 0 \in \rho(R(q;T))$ оператор $R(q;T)^{-1} = (hI - T)$ - ограниченный всюду определенный оператор и этот случай рассмотрен в теореме 2.24. Для любого $\delta \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ положим $\hat{E}(\delta) := \hat{E}^1(h(\delta))$, где $\hat{E}^1$ – разложение единицы для нормального оператора $R(q;T)$, тогда конец доказательства аналогичен теореме XII.2.3 [2].

2.29. Замечание и определение. Единственная спектральная мера, связанная с самосопряженным КЛО T называется разложением единицы для T. Для $\mathbf{H}$-значной борелевской функции f определенной $\hat{E}$-почти всюду $f(T)$ определяется соотношениями: $\mathcal{D}(f(T)) := \{x :$ существует $\lim_n f_n(T)x\}$, где $f_n(z) := f(z)$ при $|f(z)| \le n$; $f_n(z) := 0$ при $|f(z)| > n$; $f(T)x := \lim_n f_n(T)x$, $x \in \mathcal{D}(f(T))$, $n \in \mathbf{N}$.

2.30. Теорема. *Пусть $\hat{E}$ – разложение единицы для самосопряженного КЛО T и f из §2.28. Тогда $f(T)$ - замкнутый КЛО со всюду плотной областью определения, причем:*
(a) $\mathcal{D}(f(T)) = \{x : \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 < \hat{E}(dz)x; x >< \infty\}$;
(b) $< f(T)x; y >= \int_{-\infty}^{\infty} < \hat{E}(dz).f(z)x; y >$, $x \in \mathcal{D}(f(T))$;
(c) $|f(T)x|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 < \hat{E}(dz)x; x >$, $x \in \mathcal{D}(f(T))$;
(d) $f(T)^* = \tilde{f}(T)$; (e) $R(q;T) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(dz).(q-z)$, $q \in \rho(T)$.

Доказательство. Возьмем f_n из §2.29 и $\delta_n := \{z : |f(z)| \le n\}$. Тогда $|f(T)x|^2 = \lim_n |f_n(T)x|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 < \hat{E}(dz)x; x >$ для любых $x \in \mathcal{D}(f(T))$, отсюда вытекает (c), а замкнутость $f(T)$ и (a) проверяются аналогично комплексному случаю. Некоммутативная мера $\hat{\mu}$ на алгебре Υ подмножеств множества $\mathcal{S}$ соответствует КЛО со значениями $\mathbf{H}$ и в силу предложения 2.20 она полностью характеризуется $\mathbf{R}$-значными мерами $\mu_{m,n}$, так что $\mu_{m,n}(f_m) = \hat{\mu}(f_m)\tilde{n}$ для любой $\hat{\mu}$-интегрируемой $\mathbf{H}$-значной функции f с компонентами f_m, где $m, n \in \{e, i, j, k\}$. Тогда можно определить вариацию $v(\hat{\mu}, U) := \sup_{W_l \subset U} \sum_l |\hat{\mu}(\chi_{W_l})|$ по всем $\{W_l\}$ – конечным дизъюнктным системам подмножеств $W_l \in \Upsilon$ в U с $\bigcup_l W_l = U$. Если $\hat{\mu}$ ограничена, то она является КЛО ограниченной вариации с $v(\hat{\mu}, \mathcal{S}) \le 16 \sup_{U \in \Upsilon} |\hat{\mu}(\chi_U)|$, причем $v(\hat{\mu}, *)$ аддитивна на Υ. Функцию f назовем $\hat{\mu}$-измеримой, если каждая f_m $\mu_{m,n}$-измерима для любых n и $m \in \{e, i, j, k\}$. Пространство всех $\hat{\mu}$-измеримых $\mathbf{H}$-значных функций f с $v(\hat{\mu}, |f|^p)^{1/p} =: |f|_p < \infty$ обозначим $L^p(\hat{\mu})$ при $0 < p < \infty$, а $L^\infty(\hat{\mu})$ – это пространство всех f для которых существует $|f|_\infty := ess_{v(\hat{\mu},*)} - \sup |f| < \infty$. Подробно пишем $L^p(\mathcal{S}, \Upsilon, \hat{\mu}, \mathbf{H})$ вместо $L^p(\hat{\mu})$. Подмножество V в $\mathcal{S}$ назовем μ-нуль-множеством, если $v^*(\hat{\mu}, V) = 0$, где v^* – продолжение полной вариации v по формуле $v^*(\hat{\mu}, A) := \inf_{\Upsilon \ni F \supset A} v(\hat{\mu}, F)$ для $A \subset \mathcal{S}$. Некоммутативную меру $\hat{\lambda}$ на $\mathcal{S}$ назовем абсолютно непрерывной относительно $\hat{\mu}$, если $v^*(\hat{\lambda}, A) = 0$ для любого подмножества $A \subset \mathcal{S}$ с $v^*(\hat{\mu}, A) = 0$. Меру $\hat{\mu}$ назовем положительной, если каждая $\mu_{m,n}$ неотрицательна и $\sum_{m,n} \mu_{m,n}$ положительна. Использование компонент $\mu_{m,n}$ и классической теоремы Радона-Никодима (см. теоремы III.10.2,10.7) приводит к следующим ее некоммутативным вариантам.

(i). Если $(\mathcal{S}, \Upsilon, \hat{\mu})$ - пространство с σ-конечной положительной некоммутативной $\mathbf{H}$-значной мерой $\hat{\mu}$, а $\hat{\lambda}$ – абсолютно непрерывная относительно $\hat{\mu}$ конечная некоммутативная мера определенная на Υ, тогда существует и единственная $f \in L^p(\mathcal{S}, \Upsilon, \hat{\mu}, \mathbf{H})$, так что $\hat{\lambda}(U) = \hat{\mu}(f\chi_U)$ для любого $U \in \Upsilon$, причем $v(\hat{\mu}, \mathcal{S}) = |f|_1$.

(ii). Если $(\mathcal{S}, \Upsilon, \hat{\mu})$ - пространство с конечной некоммутативной $\mathbf{H}$-значной мерой

$\hat{\mu}$, а $\hat{\lambda}$ – абсолютно непрерывная относительно $\hat{\mu}$ некоммутативная мера определенная на Υ, тогда существует и единственная $f \in L^1(\hat{\mu})$, так что $\hat{\lambda}(U) = \hat{\mu}(f\chi_U)$ для любого $U \in \Upsilon$. В силу (ii) существует борелевски измеримая функция ϕ, так что $\hat{\nu}(\delta) := \hat{\mu}_{x,y}(\phi\chi_\delta) =< \hat{E}(\phi\chi_\delta)x; y >$ для любых $\delta \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$. В силу (i) $|\phi(z)| = 1$ $\hat{\nu}$-почти всюду. Рассмотрим $f^1(z) := |f(z)|\phi(z)$, тогда в силу (a) $\mathcal{D}(f^1(T)) = \mathcal{D}(f(T))$ и $< f^1(T)x; y >= \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|\hat{\nu}(dz)$. Поэтому, $< f(T)x; y >= \lim_n \int_{\delta_n} < \hat{E}(dz).f(z)x; y >= \int_{-\infty}^{\infty} < \hat{E}(dz).f(z)x; y >$ и отсюда следует (b).

(d). Из $\hat{E}_S^* = (-1)^{\kappa(S)}\hat{E}_S$ для любого $S = cs$, $0 \neq c \in \mathbf{R}$, $s \in \{e, i, j, k\}$, следует, что $\hat{E}.\tilde{f} = \hat{E}^*.f$. Возьмем $x, y \in \mathcal{D}(\tilde{f}(T)) = \mathcal{D}(f(T))$, тогда $< \tilde{f}(T)x; y >= \int_{-\infty}^{\infty} < \hat{E}(dz).\tilde{f}(z)x; y >=< x; f(T)y >$, следовательно, $\tilde{f}(T) \subset f(T)^*$. Если $y \in \mathcal{D}(f(T)^*)$, то для любых $x \in X$ и $m \in \mathbf{N}$: $\tilde{f}_m(T)y = \hat{E}(\delta_m).f(T)^*y$ сходится к $f(T)^*y$ при $m \to \infty$, следовательно, $y \in \mathcal{D}(\tilde{f}(T))$. В силу теоремы 2.24 утверждение (e) вытекает из того, что ${}_n\hat{E}(\delta) := \hat{E}(\delta_n \cap \delta)$ является разложением единицы для ограничения $T|_{X_n}$, где $X_n := \hat{E}(\delta_n)X$.

2.31. Теорема. *Ограниченный нормальный оператор T на кватернионном ГП является унитарным, эрмитовым или положительным тогда и только тогда, когда $\sigma(T)$ содержится в $S^3 := \{z \in \mathbf{H} : |z| = 1\}$, $\mathbf{R}$ или $[0, \infty)$ соответственно.*

Доказательство. В силу теоремы 2.24 равенство $T^*T = TT^* = I$ равносильно $z\tilde{z} = 1$ для любых $z \in \sigma(T)$. Если $\sigma(T) \subset [0, \infty)$, то $< Tx; x >= \int_{\sigma(T)} < \hat{E}(dz).zx; x >\geq 0$ для любых $x \in X$. Окончание доказательства аналогично комплексному случаю, используя технику данную выше.

2.32. Определение. Семейство $\{T(t) : 0 \leq t \in \mathbf{R}\}$ ограниченных КЛО в X называется сильно непрерывной полугруппой, если (i) $T(t + q) = T(t)T(q)$ для любых $t, q \geq 0$; (ii) $T(0) = I$; (iii) $T(t)x$ – непрерывная функция по $t \in [0, \infty)$ для любых $x \in X$.

2.33. Теорема. *Для любой сильно непрерывной полугруппы $\{U(t) : 0 \leq t \in \mathbf{R}\}$ унитарных КЛО в ГП X над $\mathbf{H}$ существует и единственный самосопряженный КЛО B в X, так что $U(t) = \exp(t\mathbf{i}B)$, где $\mathbf{i} = (-1)^{1/2}$.*

Доказательство. Если $\{T(t) : 0 \leq t\}$ – полугруппа непрерывная в равномерной топологии, то в силу теоремы VIII.1.2 [2] и предложения 2.20 существует ограниченный оператор A на X такой, что $T(t) = \exp(tA)$ для любых $t \geq 0$. Если $Re(z) := (z+\tilde{z})/2 > |A|$, то $|\exp(-t(zI-A))| \leq \exp(t(|A|-Re(z)) \to 0$ при $t \to \infty$. Для таких $z \in \mathbf{H}$ в силу теоремы Лебега: $(zI-A)\int_0^\infty \exp(-t(zI-A))dt = I$, а по лемме 2.3 существует $R(z; A) = \int_0^\infty \exp(-t(zI - A))dt$. Для любого $\epsilon > 0$ пусть $A_\epsilon x := (T(\epsilon)x - x)/\epsilon$, где $x \in X$, для которого существует $\lim_{0<\epsilon\to 0} A_\epsilon x$, множество таких x обозначим $\mathcal{D}(A)$. Очевидно, что $\mathcal{D}(A)$ является $\mathbf{H}$-векторным подпространством в X. Зададим на нем инфинитезимальный КЛО $Ax := \lim_{0<\epsilon\to 0} A_\epsilon x$. Рассматривая $\mathbf{H}$ как БП над $\mathbf{R}$, получим аналоги лемм 3,4,7, следствий 5, 9 и теоремы 10 из §VIII.1 [2], причем $\mathcal{D}(A)$ плотно в X, а A – замкнутый КЛО на $\mathcal{D}(A)$. Пусть $w_0 := \lim_{t\to\infty} ln(|T(t)|)/t$ и $z \in \mathbf{H}$ с $Re(z) > w_0$. Для любого $w_0 < \delta < Re(z)$ в силу следствия VIII.1.5 [2] существует константа $M > 0$ такая, что $|T(t)| \leq M \exp(\delta t)$ для любых $t \geq 0$. Тогда существует $R(z)x := \int_0^\infty \exp(-t(zI - A))xdt$ для любых $x \in X$ и $Re(z) > w_0$, следовательно, $R(z)x \in \mathcal{D}(A)$. Пусть T_z – КЛО соответствующий $z^{-1}A$ вместо T для A, где $0 \neq z \in \mathbf{H}$, причем $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(z^{-1}A)$. Тогда $z^{-1}A\int_0^\infty \exp(-t(I - z^{-1}A))xdt = \int_0^\infty \exp(-t(I - z^{-1}A)z^{-1}Axdt$, следовательно, $R(z)(zI - A)x = x$ для любого $x \in \mathcal{D}(A)$ и $R(z) = R(z; A)$. Итак, $R(z; A)x = \int_0^\infty \exp(-t(zI - A))xdt$ для любых $z \in \rho(A)$ и $x \in X$.

С помощью 2.7.(iii) для КЛО A существует КЛО B такой, что $A = \mathbf{i}B$, где $B = \left(\begin{smallmatrix} B_i & B_k-\mathbf{i}B_j \\ B_k+\mathbf{i}B_j & -B_i \end{smallmatrix}\right)$. Поскольку $U(t)U(t)^* = U(t)^*U(t) = I$, то A коммутирует с A^* и $\exp(t(A+$

$A^*)) = I$. Из $R(z;B)^* = R(\tilde{z}, B)$ следует, что $B = B^*$. Если $\hat{E}$ – разложение единицы для B и $V(t) := \exp(\mathbf{i}tB)$, то по теореме 2.30 $< V(t)x;y >= \int_{-\infty}^{\infty} < \hat{E}(dz).\exp(\mathbf{i}tz)x;y >$, то в силу теоремы Фубини $\int_0^{\infty} < V(t).\exp(-bt)x;y > dt = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} < \hat{E}(dz).\exp(-(b-\mathbf{i}z)t)x;y > dt = \int_{-\infty}^{\infty} < \hat{E}(dz).(b-\mathbf{i}z)^{-1}x;y > = R(b;\mathbf{i}B)x;y >$ для любых $b \in \mathbf{H}$ с $Re(b) > 0$. Поэтому, $\int_0^{\infty} < V(t).\exp(-bt)x;y > dt = \int_0^{\infty} < U(t).\exp(-bt)x;y > dt$ при $Re(b) > 0$. В силу леммы $VIII.1.15$ $< V(t).\exp(-\epsilon t)x;y >=< U(t).\exp(-\epsilon t)x;y >$ для любых $t \geq 0$ и $Re(b) > 0$, следовательно, $U(t) = V(t)$.

2.34. Обозначения. Пусть X – это $\mathbf{H}$-линейное локально выпуклое пространство. Рассмотрим левые, правые и двусторонние $\mathbf{H}$-линейные оболочки семейства векторов $\{v^a : a \in \mathbf{A}\}$, где $span^l_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\} := \{z \in X : z = \sum_{q_a \in \mathbf{H}; \mathbf{a} \in \mathbf{A}} q_a v^a\}$; $span^r_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\} := \{z \in X : z = \sum_{q_a \in \mathbf{H}; \mathbf{a} \in \mathbf{A}} v^a q_a\}$; $span_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\} := \{z \in X : z = \sum_{q_a, r_a \in \mathbf{H}; \mathbf{a} \in \mathbf{A}} q_a v^a r_a\}$.

2.35. Лемма. *В обозначениях §2.34* $span^l_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\} = span^r_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\} = span_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\}$.

Доказательство. В силу непрерывности сложения и умножения векторов в X и используя сходимость направленностей векторов достаточно доказать утверждение леммы для конечного множества $\mathbf{A}$. Тогда пространство $Y := span_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\}$ конечномерно над $\mathbf{H}$ и очевидно, что левые и правые $\mathbf{H}$-линейные оболочки содержатся в нем. Тогда в Y может быть выбран базис над $\mathbf{H}$ и каждый вектор записан в виде $v^a = \{v^a_1, ..., v^a_n\}$, где $n \in \mathbf{N}$, $v^a_s \in \mathbf{H}$. Каждый кватернион $q \in \mathbf{H}$ может быть записан в виде 4×4 действительной матрицы, поэтому для любого вектора $y \in Y$ существуют матрицы A и B, элементы которых принадлежат $\mathbf{H}$, так что $AV = y$ и $WB = y$, где $W = \{v^a : a \in \mathbf{A}\}$, $V = W^t$ – транспонированная матрица, так как A, B, W и V могут быть записаны в блочном виде над $\mathbf{R}$ с блоками 4×4. Поэтому $span^l_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\} \cap span^r_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\} \supset span_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\}$, что вместе с включением $span^r_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\} \cup span^l_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\} \subset span_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\}$ доказанным выше приводит к утверждению леммы.

2.36. Лемма. *Пусть* X *– ГП над* $\mathbf{H}$*, а* $\mathbf{X_R}$ *то же пространство рассматриваемое над полем* $\mathbf{R}$*. Вектор* $x \in X$ *ортогонален* $\mathbf{H}$*-линейному подпространству* Y *в* X *относительно* $\mathbf{H}$*-значного скалярного произведения в* X *тогда и только тогда, когда* x *ортогонален* $Y_{\mathbf{R}}$ *относительно скалярного произведения в* $X_{\mathbf{R}}$*. Пространство* X *изоморфно стандартному ГП* $l_2(\alpha, \mathbf{H})$ *над* $\mathbf{H}$ *сходящихся по норме последовательностей* $v = \{v^a : a \in \alpha\}$ *со скалярным произведением* $< v;w >:= \sum_a \tilde{v}^a w_a$*, причем* $card(\alpha)\aleph_0 = w(X)$*, где* $card(\alpha)$ *– мощность множества* α*,* $\aleph_0 Krd(\mathbf{N})$*.*

Доказательство. В силу леммы 2.35 и трансфинитной индукции в Y существует $\mathbf{H}$-линейно независимая система векторов $\{v^a : a \in \mathbf{A}\}$, так что $span^r_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\}$ всюду плотно в Y. Иными словами в Y существует базис Гамеля над $\mathbf{H}$. Вектор x по определению ортогонален Y тогда и только тогда, когда $< v;x >= 0$ для любого $v \in Y$, что эквивалентно $< v^a;x >= 0$ для любого $a \in \mathbf{A}$. Пространство $X_{\mathbf{R}}$ изоморфно прямой сумме $X_e \oplus iX_i \oplus jX_j \oplus kX_k$, где X_e, X_i, X_j и X_k – это попарно изоморфные ГП над $\mathbf{R}$. Скалярное произведение $< x;y >$ в X тогда можно записать в виде

(i) $< x;y >= \sum_{m,n \in \{e,i,j,k\}} < x_m; y_n > \tilde{m}n$,

где $< x_m; y_n > \in \mathbf{R}$ в силу 2.16.(3, 5). Тогда скалярное произведение $< x;y >$ в X индуцирует скалярное произведение

(ii) $< x;y >_{\mathbf{R}} := \sum_{m \in \{e,i,j,k\}} < x_m; y_m >$

в $X_{\mathbf{R}}$. Поэтому из ортогональности x подпространству Y относительно $< x;y >$ следует ортогональность x подпространству $Y_{\mathbf{R}}$ относительно $< x;y >_{\mathbf{R}}$. В силу леммы 2.35 из $y \in Y$ следует, что $my_m \in Y$ для любого $m \in \{e,i,j,k\}$. Тогда из $< x; y_m >_{\mathbf{R}} = 0$

для любых $y \in Y$ и m в силу 2.16.(5) следует $< x; y >= 0$ для любых $y \in Y$. Тогда по теореме о трансфинитной индукции [11] в X существует ортонормированный базис над $\mathbf{H}$, в котором каждый вектор представляется в виде сходящегося ряда левых (или правых) $\mathbf{H}$-линейных комбинаций базисных векторов. Для любого $x \in X$ в силу нормированности X база окрестностей счетна, а для топологической плотности выполняется равенство $d(X)Krd(\alpha)\aleph_0$, так как $\mathbf{H}$ сепарабельно, поэтому $w(X) = d(X)$. Отсюда вытекает последнее утверждение леммы.

2.37. Лемма. *Для любого КЛО T в ГП X над $\mathbf{H}$ сопряженный оператор T^* в X относительно $\mathbf{H}$-скалярного произведения совпадает с сопряженным оператором $T^*_{\mathbf{R}}$ в $X_{\mathbf{R}}$ относительно $\mathbf{R}$-значного скалярного произведения в $X_{\mathbf{R}}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}(T)$ – область определения оператора T, которая плотна в X. В силу формул 2.36.(i, ii) и существования автоморфизмов $z \mapsto zm$ в $\mathbf{H}$ для любых $m \in \{e, i, j, k\}$ следует, что непрерывность $< Tx; y >$ и $< Tx; y >_{\mathbf{R}}$ по $x \in \mathcal{D}(T)$ эквивалентны, поэтому в силу леммы 2.35 семейство всех $y \in X$, для которых $< Tx; y >$ непрерывно по $x \in \mathcal{D}(T)$ образует $\mathbf{H}$-линейное подпространство в X и оно то же самое относительно $< Tx; y >_{\mathbf{R}}$, что является областью определения $\mathcal{D}(T^*)$ оператора T^*. Тогда сопряженный оператор T^* определен равенством $< Tx; y >=:< x; T^*y >$, а $T^*_{\mathbf{R}}$ задается путем $< Tx; y >_{\mathbf{R}}=< x; T^*_{\mathbf{R}}y >_{\mathbf{R}}$, где $x \in \mathcal{D}(T)$, а $y \in \mathcal{D}(T^*)$. В силу формул 2.36.(i, ii) $< x_m; (T^*y)_m >=< x_m; (T^*y)_m >_{\mathbf{R}}$ для любых $x \in \mathcal{D}(T)$, $y \in \mathcal{D}(T^*)$ и $m \in \{e, i, j, k\}$. Поскольку в силу предложения 2.20 и леммы 2.35 $\mathcal{D}(T)$ и $\mathcal{D}(T^*)$ $\mathbf{H}$-линейны, то автоморфизмы тела $\mathbf{H}$ данные выше приводят к $T^* = T^*_{\mathbf{R}}$.

2.38. Определение. Ограниченный КЛО P в ГП X над $\mathbf{H}$ называется частичной $\mathbf{R}$- (или $\mathbf{H}$-) изометрией, если существует замкнутое $\mathbf{R}$- (или $\mathbf{H}$-) линейное подпространство Y такое, что $\|Px\| = \|x\|$ для $x \in Y$ и $P(Y^{\perp}_{\mathbf{R}}) = \{0\}$ (или $P(Y^{\perp}) = \{0\}$) соответственно, где $Y^{\perp} := \{z \in X : \ < z; y >= 0 \quad \forall y \in Y\}$, $Y^{\perp}_{\mathbf{R}} := \{z \in X_{\mathbf{R}} : \ < z; y >_{\mathbf{R}}= 0 \quad \forall y \in Y\}$.

2.39. Теорема. *Если T – замкнутый КЛО на ГП X над $\mathbf{H}$, то $T = PA$, где P – частичная $\mathbf{R}$-изометрия на $X_{\mathbf{R}}$ с начальной областью $cl(Range(T^*))$, а A – самосопряженный КЛО такой, что $cl(Range(A))cl(Range(T^*))$. Если T является $\mathbf{H}$-линейным, то P – это частичная $\mathbf{H}$-изометрия.*

Доказательство. В силу спектральной теоремы 2.28 самосопряженный КЛО T положителен тогда и только тогда, когда его спектр $\sigma(T) \subset [0, \infty)$ (см. также лемму XII.7.2 [2]). В теле $\mathbf{H}$ каждый полином имеет корень (см. теорему 3.17 [8]). Поэтому, если T – положительный самосопряженный КЛО, то сущестует и единственный положительный КЛО A, так что $A^2 = T$ (см. также лемму XII.7.2 [2]). Тогда существует положительный квадратный корень A оператора T^*T. При этом A является $\mathbf{H}$-линейным, если T является $\mathbf{H}$-линейным. Положим $SAx = Tx$ для любых $x \in \mathcal{D}(T^*T)$, а V – изометрическое расширение S на $cl(Range(A))$. Пространство $cl(Range(A))$ является $\mathbf{R}$-линейным. Если A дополнительно лево- (или право-) $\mathbf{H}$-линейно, то $cl(Range(A))$ – это $\mathbf{H}$-линейное подпространство в силу леммы 2.35. В силу леммы 2.36 существует перпендикулярная проекция E из X на $cl(Range(A))$, причем E является $\mathbf{H}$-линейной, если $cl(Range(A))$ – это $\mathbf{H}$-линейное подпространство. Тогда положим $P = VE$. Из $< Ax; Ax >=< Tx; Tx >$ для любого $x \in \mathcal{D}(T^*T)$ следует, что $PAx = Tx$ для любого $x \in \mathcal{D}(T^*T)$. Остальная часть доказательства проводится аналогично доказательству теоремы $XII.7.7$ [2] с помощью лемм 2.35–37.

2.40. Замечание и определение. В отличии от случая $\mathbf{C}$ нетривиальные полиномы кватернионных переменных могут иметь корни, которые являются не точками, а замкнутыми подмногообразиями в $\mathbf{H}$ с размерностью над $\mathbf{R}$ от 0 до 3 (см. [8]).

Замкнутое подмножество $\lambda \subset \sigma(T)$ называется изолированным подмножеством спектра, если существует окрестность U подмножества λ, так что $\sigma(T) \cap U = \lambda$. Изолированное подмножество λ спектра $\sigma(T)$ называется полюсом спектра (порядка p), если $R(z;T)$ имеет нуль на λ (порядка p, то есть, каждая $z \in \lambda$ является нулем порядка $0 < p(z) \le p$ для $R(z;T)$ и $\max_{z\in\lambda} p(z) = p$). Подмножество λ открыто-замкнутое (одновременно открытое и замкнутое) в $\sigma(T)$ называется спектральным множеством. Пусть η_1 – замкнутый спрямляемый путь в U, охватывающий λ и не пересекающийся с λ, характеризуемый вектором $M_1 \in \mathbf{H}$, $|M_1| = 1$, $M_1 + \tilde{M}_1 = 0$ (см. теорему 3.22 [8]), обозначим

$$(i) \quad \phi_n(z,T) := (2\pi)^{-1}\{\int_{\eta_1} R(\zeta;T)((\zeta-a)^{-1}(z-a))^n(\zeta-a)^{-1}d\zeta)M_1^{-1}\},$$

где $\eta_1 \subset B(\mathbf{H},a,R) \setminus B(\mathbf{H},a,r)$, $B(\mathbf{H},a,R) \subset U$, $\lambda \subset B(\mathbf{H},a,r)$, $0 < r < R < \infty$. Скажем, что индекс λ равен p тогда и только тогда, когда существует вектор $x \in X$ такой, что

$$(ii) \quad (zI-T)^{s_1}v_1\hat{E}(\delta(z);T)v_2...(zI-T)^{s_m}v_{2m-1}\hat{E}(\delta(z);T)x = 0$$

для любого $z \in \lambda$, любых $0 \le s_n \in \mathbf{Z}$ с $s_1 + ... + s_m = p$ и любых $v_1,..,v_{2m-1}$, где $v_1 = v_1(\delta,T) \in \mathbf{H}$,...,$v_{2m-1} = v_{2m-1}(\delta,T) \in \mathbf{H}$, $m \in \mathbf{N}$, $\delta := \delta(z) \ni z$, $\delta(z) \in \mathcal{B}(\lambda)$, а выражение в (ii) отлично от нуля для некоторых $z \in \lambda$ и $s_1,...,s_m$ с $s_1 + ... + s_m = p - 1$.

2.41. Теорема. *Подмножество* λ *– полюс порядка* p *КЛО* $T \in L_q(X)$ *для* $U = B(\mathbf{H},\alpha,R')$, $0 < R < R' < \infty$ *в определении 2.40, где* $0 < r < \infty$*, тогда и только тогда, когда* λ *– имеет индекс* p.

Доказательство. Выберем с помощью гомотопии относительно $U \setminus \lambda$ замкнутые пути η_1 и η_2 гомотопные γ_1 и γ_2, причем $\inf_\theta |\eta_1(\theta)| > \sup_\theta |\eta_2(\theta)|$, где γ_1 и γ_2 выбраны как в теореме 3.22 [8] (см. также теорему 3.9 там же), $\theta \in [0,1]$. В силу теоремы 3.22 [8] кватернионное разложение Лорана $R(z;T)$ в окрестности $B(\mathbf{H},a,R) \setminus B(\mathbf{H},a,r)$ имеет вид $R(z;T) = \sum_{n=0}^\infty(\phi_n(z,T) + \psi_n(z,T))$, где ϕ_n дается формулой 2.40.(i), а

$$(i) \quad \psi_n(z,T) := (2\pi)^{-1}\{\int_{\eta_2} R(\zeta;T)(z-a)^{-1}((\zeta-a)(z-a)^{-1})^n d\zeta)M_2^{-1}\}.$$

Если λ является полюсом порядка p, то $\phi_p = 0$ и $\phi_{p-1} \ne 0$, тогда существует $x \in X$ такой, что

$$(ii) \quad \phi_{p(z)}(z,T)x = 0 \text{ для любого } z \in \lambda, \text{ а}$$

$$(iii) \quad \phi_{p-1}(z,T)x \ne 0 \text{ для некоторого } z \in \lambda.$$

Аналогичные разложения с соответствующими ϕ_n верны для произведения $f(T)R(z;T)g(T)$, где f и g – кватернионно голоморфные функции на окрестности $\sigma(T)$ отличные от нуля всюду на λ. Функции ϕ_n для $R(z;T)$ аппроксимируются с любой точностью в сильной операторной топологии в виде левых $\mathbf{H}$-линейных комбинаций функциями фигурирующими в 2.40.(ii) в силу леммы 2.35 и определения кватернионного интеграла вдоль спрямляемого пути, так как при $|\xi| > \sup|\chi|$ ряд $R(\xi;T_\chi)$ сходится в равномерной операторной топологии для спектрального множества χ спектра $\sigma(T)$, где $T_\chi = T|_{X_\chi}$, $X_\chi := \hat{E}_e(\chi;T)X$. Варьирование f и g дает, что индекс λ не меньше p. Обратно пусть выполнены условия (ii) для некоторого n. Резольвента $R(z;T)x$ регулярна на $\mathbf{H} \setminus B(\mathbf{H},a,r)$ и

$$x = (2\pi)^{-1}\{\int_\eta R(\zeta;T)xd\zeta\}M^{-1}(2\pi)^{-1}\{\int_{\eta_2} R(\zeta;T)xd\zeta\}M_2^{-1}\omega(T)x,$$

где $\omega(T)$ – функция равная 1 на окрестности λ и нулю на $\mathbf{H} \setminus U$, η – соответствующий замкнутый спрямляемый путь охватывающий $\sigma(T)$ и характеризуемый $M \in \mathbf{H}$, $|M| = 1$, $M + \tilde{M} = 0$. Тогда в силу 2.40.(ii) $\phi_{p(z)}(z, T)x = 0$ для любого $z \in \lambda$.

2.42. Замечание. Изолированная точка λ спектра $\sigma(T)$ для нормального КЛО $T \in L_q(X)$ на ГП X над $\mathbf{H}$ может и не иметь собственных векторов из-за некоммутативности проекторно-значной меры $\hat{E}$ в отличии от случая линейных операторов на ГП над $\mathbf{C}$.

Литература

[1] Connes A. Noncommutative geometry. San Diego: Academic Press, 1994.

[2] Dunford N., Schwartz J.C. Linear operators. N.Y.: J. Wiley and Sons, Inc., 1966.

[3] Emch G. Mécanique quantique quaternionienne et Relativité restreinte// Helv. Phys. Acta 1963. V.**36**. P.739-769.

[4] Kadison R.V., Ringrose J.R. Fundamentals of the theory of operator algebras. N.Y.: Academic Press, 1983.

[5] Lawson H.B., Michelson M.-L. Spin geometry. Princeton: Princeton Univ. Press, 1989.

[6] Lüdkovsky S.V. Generalized Loop Groups of Complex Manifolds, Gaussian Quasi-Invariant Measures on them and their Representations// J. of Math. Sciences, 44 pages, to appear.

[7] Lüdkovsky S.V. Poisson measures for topological groups and their representations// Southeast Asian Bull. Math. 2002. V.**25**. P. 653-680.

[8] Lüdkovsky S.V., Oystaeyen F. van. Differentiable functions of quaternion variables// Bull. Mathem. France, to appear (previous variant: Los Alamos National Laboratory USA. Preprint. 2002. N **math.CV/0209166**. P.1-48; //E-print http://xxx.lanl.gov/).

[9] Lüdkovsky S.V. Functions of several quaternion variables and quaternion manifolds//J. Mathem. Sciences, to appear (previous variant: Los Alamos National Laboratory USA. Preprint. 2003. N **math.CV/0302011**. P.1-30; //E-print http://xxx.lanl.gov/).

[10] Oystaeyen F. van. Algebraic geometry for associative algebras. Ser. Lect. Notes in Pure and Appl. Mathem. V. **232**. N.Y.: Marcel Dekker, 2000.

[11] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.

Unbounded operators in the Banach spaces over the quaternion skew field

S. V. Lyudkovski

MIREA
ludkowski@mirea.ru

The article is devoted to the spectral theory of unbounded operators over the quaternion skew field. Real-linear and quaternion-additive operators with dense domains in Banach spaces are investigated. For this purpose non-commutative integrals along paths over the quaternion skew field are used. With the help of them functions of operators are written. Specific features of spectral decompositions and of non-commutative projection-valued measures are elucidated. An analog of the Stone theorem for one-parameter strongly continuous groups of unitary operators on quaternion Hilbert spaces is proved.

Key-words: unbounded operator, Banach space, spectral decomposition, quaternion skew field.
MSC: 47A10, 16S35.

АЛГЕБРА Y-ЧИСЕЛ: ВОЗМОЖНОСТИ В ОБЛАСТИ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ И МНОЖЕСТВ[1)]

С. В. Ёлкин[1,2], С. Ю. Игашов[2]

1 – Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
2 – Московский инженерно-физический институт (государственный университет)

В данной работе представлено исследование неассоциативной алгебры y-чисел. Рассмотрены вопросы делимости, извлечения корней построения функций и множеств.

Ключевые слова: алгебры, функции, квадратные корни, делимость.

1. Введение

Исторически достаточно долго считалось, что полезными для приложений и богатыми по содержания являются только математические объекты обладающие свойствами коммутативности и ассоциативности. Однако, после открытии Гамильтоном гиперкомплексных чисел взгляд математиков на некоммутативные объекты в корне изменился. Стали активно изучаться различные гиперкомплексные системы. При этом объекты обладающие неассоциативностью по-прежнему оставались в тени. Традиционно считается, что эти объекты сложны для изучения и обладают скудным набором полезных свойств, которые могли бы определить их применение к реальным физическим объектам и процессам. Тем не менее постепенно накопились результаты исследований о различных неассоциативных алгебрах и гиперкомплексных системах: октавах Кэли, алгебрах Йордана и др.

В 1993 г. были открыты неассоциативные и некоммутативные объекты обладающие рядом интересных свойств. Поскольку каждый следующий объект можно было строить из предыдущего добавлением одного из двух базовых элементов, то эти объекты были названы числами – y-числами. Несмотря на то, что эти числа являются неассоциативными и некоммутативными, для них был получен набор степенных формул и выражений, в том числе для дробных и отрицательных степеней, исследована делимость [1].

В данной работе представлено дальнейшее исследование алгебры y-чисел, рассмотрены некоторые простые функции, задаваемые в виде степенного ряда.

Алгебра y-чисел нашла в настоящий момент свои первые приложения, в частности для разработки семантического языка SL [2,3]. Надеемся, дальнейшее изучение свойств y-чисел позволит построить интегральное и дифференциальное исчисление, а сами числа найдут своё место в физических приложениях.

2. Алгебра y-чисел

Рассмотрим сначала два элемента y и $\breve{y}$ для которых определена бинарная операция – умножение "$*$" которое будем называть *инверсным.* При этом будем всегда предполагать выполненными следующие две аксиомы:

$$y * y = \breve{y} \tag{1}$$

$$\breve{y} * \breve{y} = y. \tag{2}$$

[1)] Работа поддержана РФФИ, грант № 06-01-00538

Таким образом, мы определили операцию инверсного умножения при умножении элементов y и $\breve{y}$ на себя. Что касается произведений $y * \breve{y}$ и $\breve{y} * y$, то мы будем считать их новыми элементами построенных на "образующих" элементах y и $\breve{y}$. Мы будем считать эти два новых элемента различными, тем самым рассматривая общий случай некоммутативной бинарной операции инверсного умножения. В результате мы имеем четыре элемента y, $\breve{y}$, $y{*}\breve{y}$ и $\breve{y}{*}y$. Дальнейшее конструирование новых элементов потребует образования конструкций включающих в себя две и более операции инверсного умножения. Для корректного определения этих элементов потребуется исследовать ассоциативность инверсного умножения. Для этого рассмотрим следующий пример – произведение трех элементов y:

$$(y * y) * y = \breve{y} * y \tag{3}$$

$$y * (y * y) = y * \breve{y} \tag{4}$$

Поскольку мы условились считать элементы $y{*}\breve{y}$ и $\breve{y}{*}y$ разными, то этот простейший пример показывает неассоциативность операции инверсного умножения. Отсутствие ассоциативности требует определенных правил, определяющих порядок выполнения операций инверсного умножения в произведениях включающих в себя более двух образующих элементов. Сформулируем эти правила. Прежде всего определим инверсное умножение элементов $Y_2 \equiv y * \breve{y}$ и $\bar{Y}_2 \equiv \breve{y} * y$ на образующие элементы y и $\breve{y}$. Для этого необходимо рассмотреть следующие произведения

$$y * Y_2, \quad y * \bar{Y}_2, \quad \breve{y} * Y_2, \quad \breve{y} * \bar{Y}_2, \quad Y_2 * y, \quad \bar{Y}_2 * y, \quad Y_2 * \breve{y}, \quad \bar{Y}_2 * \breve{y}. \tag{5}$$

Запишем первое из произведений (5) в явном виде:

$$y * y * \breve{y}. \tag{6}$$

В выражении (6) и во всех других будем считать, что порядок выполнения умножений – последовательный слева направо, при этом встречающиеся рядом два элемента C должны заменяться на $\breve{y}$. Соответственно встречающиеся рядом в произведении два элемента $\breve{y}$ заменяются на y. Это означает, например, что в (6) сначала мы перемножаем элементы $y * y$, получая при этом $\breve{y}$, а затем уже переходим к умножению $\breve{y} * \breve{y}$. В результате находим $y * y * \breve{y} = y$. Подобным образом определяются и инверсные произведения вида

$$\bar{Y}_2 * y = \breve{y} * y * y. \tag{7}$$

Проходя слева направо в (7) мы заменяем пару $y * y$ на $\breve{y}$, а затем в полученном выражении $\breve{y} * \breve{y}$ выполняем последнее умножение, получая y. Заметим, что кроме y и $\breve{y}$ среди элементов (5) возникают элементы "третьего" порядка $Y_3 \equiv y * \breve{y} * y$ и $\bar{Y}_3 \equiv \breve{y} * y * \breve{y}$. При перемножении элементов "третьего" порядка и образующих элементов правила перемножения требуют одного важного уточнения: после инверсного перемножения первой встреченной пары одинаковых образующих элементов мы должны вернуться к началу получающегося выражения и снова идти слева направо до первой пары одинаковых образующих элементов, затем перемножаем их, снова возвращаемся к началу получающегося выражения и так далее. В результате мы получаем выражение представляющее собой цепочку чередующихся y и $\breve{y}$. Таким образом, мы определили произведения Y_n и $\bar{Y}_n$ для любого порядка n. В результате получено множество элементов вида $Y_1 \equiv y$, $\bar{Y}_1 \equiv \breve{y}$, $Y_2 \equiv y * \breve{y}$, $\bar{Y}_2 \equiv \breve{y} * y$, $Y_3 \equiv y * \breve{y} * y$, $\bar{Y}_3 \equiv \breve{y} * y * \breve{y}$, ... Все эти элементы представляющие собой цепочки чередующихся образующих элементов y и $\breve{y}$ мы будем называть исходными элементами. Отметим, что указанное выше замечание, позволяет однозначно определить произведения элементов любого порядка между собой. В результате такие инверсные умножения приводят к элементам того или иного порядка.

Приведем несколько поясняющих примеров умножения исходных элементов:

$$Y_3 * \bar{Y}_2 = y * \breve{y} * y * \breve{y} * y = Y_5 \tag{8a}$$

$$Y_3 * Y_2 = y * \breve{y} * y * y * \breve{y} = y * \breve{y} * \breve{y} * \breve{y} = y * y * \breve{y} = \breve{y} * \breve{y} = y \equiv Y_1 \tag{8b}$$

$$Y_2 * Y_3 = y * \breve{y} * y * \breve{y} * y \equiv Y_5 \tag{8c}$$

$$Y_3 * \bar{Y}_2 = y * \breve{y} * y * \breve{y} * y \equiv Y_5 \tag{8d}$$

$$\bar{Y}_3 * \bar{Y}_2 = \breve{y} * y * \breve{y} * \breve{y} * y = \breve{y} * y * y * y = \breve{y} * \breve{y} * y = y * y = \breve{y} \equiv \bar{Y}_1 \tag{8e}$$

Таким образом, сформулировав правила инверсного умножения, мы одновременно определили множество на котором задана эта операция. В дальнейшем элементы этого множества вместе с введенной операцией инверсного умножения будем называть алгеброй y-чисел, а его элементы y-числами. Операция умножения позволяет определить операцию возведения в целую степень. Для операции возведения в степень n будем в дальнейшем использовать обозначение $[Y]_*^n$. Здесь в обозначении символ $*$ означает возведение в степень по инверсному умножению. Рассмотрим соответствующие результаты для возведения в целочисленные степени образующих элементов – y-чисел y и $\breve{y}$: $[y]_*^n \equiv y * y * ... * y$. Положим по определению для $n = 1$

$$[y]_*^1 = y. \tag{9}$$

Для степеней $n = 2, 3$ и 4 получаем:

$$[y]_*^2 = y * y = \breve{y} \tag{10}$$

$$[y]_*^3 = \breve{y} * y = \bar{Y}_2 \tag{11}$$

$$[y]_*^4 = y * y * y * y = \breve{y} * y * y = \breve{y} * \breve{y} = y \tag{12}$$

Нетрудно заметить, что и более высокие степени сводятся к тем же результатам:

$$[y]_*^{3n+1} = y = Y_1 \tag{13}$$

$$[y]_*^{3n+2} = \breve{y} = \bar{Y}_1 \tag{14}$$

$$[y]_*^{3n+3} = \breve{y} * y = \bar{Y}_2 \tag{15}$$

Такое чередование результатов возведения в положительные целые степени позволяет взять за определение операции возведения в степень соотношения (13)–(15) и распространить их на отрицательные n. Тогда, в частности из (15) при $n = -1$ получаем:

$$[y]_*^0 = \breve{y} * y = \bar{Y}_2 \tag{16}$$

При возведении в нулевую степень ненулевого вещественного числа мы получаем единицу. В алгебре y-чисел этому соответствует число $[y]_*^0 = \breve{y} * y$. Оно действительно являет собой левую единицу, но, например, для числа y: $[y]_*^0 * y = \breve{y} * y * y = y$. Очевидно, для $\breve{y}$ число $[y]_*^0$ уже не будет левой единицей: $[y]_*^0 * \breve{y} = \breve{y} * y * \breve{y} = \bar{Y}_3$.

Аналогичные результаты справедливы и для возведения в степень образующего элемента $\breve{y}$:

$$[\breve{y}]_*^{3n+1} = \breve{y} = \bar{Y}_1 \tag{17}$$

$$[\breve{y}]_*^{3n+2} = y = Y_1 \tag{18}$$

$$[\breve{y}]_*^{3n+3} = y * \breve{y} = Y_2 \tag{19}$$

3. Расширение множества y-чисел

Расширим множество y-чисел. Во-первых, определим умножение y-чисел на вещественное или комплексное число α. Будем обозначать новый элемент αY. Подчиним эту операцию аксиомам коммутативности и ассоциативности, то есть будем полагать:

$$\alpha Y = Y\alpha, \tag{20}$$

$$(\alpha\beta)\, Y = \alpha\, (\beta Y)\, , \tag{21}$$

где под Y подразумевается какое-либо из исходных y-чисел. Элементы такого вида будем относить к множеству обобщенных y-чисел. Кроме того, после определения операции умножения y-числа на вещественное или комплексное число естественно пополнить получающееся множество нулевым элементом Θ, к которому по определению приводит умножение любого y-числа на ноль:

$$0Y = \Theta, 0\alpha Y = \Theta. \tag{22}$$

$$\alpha\Theta = \Theta \tag{23}$$

Во-вторых, определим на множестве исходных y-чисел, умноженных на вещественное или комплексное число бинарную операцию, которую будем именовать сложением y-чисел. Будем считать, что для этой операции выполнены аксиомы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Определенная таким образом операция сложения является совершенно аналогичной соответствующей операции сложения для вещественных или комплексных чисел:

$$Y^{(1)} + Y^{(2)} = Y^{(2)} + Y^{(1)}, \tag{24}$$

$$Y^{(1)} + \left(Y^{(2)} + Y^{(3)}\right) = \left(Y^{(1)} + Y^{(2)}\right) + Y^{(3)}, \tag{25}$$

$$(\alpha + \beta)\, Y = \alpha Y + \beta Y, \tag{26}$$

$$\alpha\left(Y^{(1)} + Y^{(2)}\right) = \alpha Y^{(1)} + \alpha Y^{(2)}, \tag{27}$$

$$\Theta + Y = Y, \tag{28}$$

где под обозначениями $Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}, Y^{(3)}$ подразумеваются исходные y-числа, либо исходные y-числа помноженные на вещественное или комплексное число. Получаемые в результате операции сложения элементы будем называть обобщенными y-числами. Они являются расширением множества исходных y-чисел. В силу аксиом, наложенных на операцию сложения ее можно определить и для обобщенных y-чисел. В результате в множестве обобщенных y-чисел справедливы аксиомы (22)–(28).

4. Некоторые функции от y-чисел

Выше было найдено, что старшие степени образующих y-чисел сводятся всего лишь к трем y-числам (см. (9)–(19)). Это позволяет достаточно просто определить на образующих y-числах функции, представимые в виде степенного ряда. При этом не требуется введение понятия сходимости в множестве обобщенных y-чисел. Определим, например, по инверсному умножению экспоненциальную функцию $e_*^{\alpha y}$. Здесь, как и ранее при определении целых степеней y-чисел (см. (9)-(19)) чтобы подчеркнуть, что умножение понимается как инверсное, снизу приписываем значок $*$. Принимая в качестве определения экспоненциальной функции ее ряд Тейлора получим:

$$e_*^{\alpha y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n\, [y]_*^n}{n!} = [y]_*^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n\, [y]_*^n}{n!}. \tag{29}$$

Представим сумму в (29) следующим образом:

$$[y]_*^0+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n+1}\,[y]_*^{3n+1}}{(3n+1)\,!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n+2}\,[y]_*^{3n+2}}{(3n+2)\,!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n+3}\,[y]_*^{3n+3}}{(3n+3)\,!}. \tag{30}$$

Далее воспользуемся выражениями (13)-(16) для степеней y-чисел. В результате получим:

$$e_*^{\alpha y}=y\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n+1}}{(3n+1)\,!}+\breve{y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n+2}}{(3n+2)\,!}+\breve{y}*y\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n}}{(3n)\,!}. \tag{31}$$

Выражение для последней суммы в (31) хорошо известно [1]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n}}{(3n)\,!}=\frac{1}{3}\left[e^{\alpha}+2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right)\right]. \tag{32}$$

Отсюда интегрированием по α в пределах от 0 до α легко получить выражения для остающихся сумм в (31):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n+1}}{(3n+1)\,!}=\frac{1}{3}\left[e^{\alpha}-2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right], \tag{33}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n+2}}{(3n+2)\,!}=\frac{1}{3}\left[e^{\alpha}-2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right]. \tag{34}$$

Таким образом в результате получаем:

$$e_*^{\alpha y}=a\,(\alpha)\,y+b\,(\alpha)\,\breve{y}+c\,(\alpha)\,\breve{y}*y \tag{35}$$

где

$$a\,(\alpha)=\frac{1}{3}\left[e^{\alpha}-2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right] \tag{36}$$

$$b\,(\alpha)=\frac{1}{3}\left[e^{\alpha}-2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right] \tag{37}$$

$$c\,(\alpha)=\frac{1}{3}\left[e^{\alpha}+2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right)\right] \tag{38}$$

Аналогично определяется $e_*^{\alpha\breve{y}}$:

$$e_*^{\alpha\breve{y}}=a\,(\alpha)\,\breve{y}+b\,(\alpha)\,y+c\,(\alpha)\,y*\breve{y} \tag{39}$$

где $a\,(\alpha)$, $b\,(\alpha)$, $c\,(\alpha)$ определены (36)–(37).

Рассмотрим теперь другой пример:

$$\ln\,(1+z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,z^n}{n} \tag{40}$$

Подставим формально вместо z y-число αy. В результате получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\alpha^n\,[y]_*^n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n+1}\,\alpha^{3n}\,[y]_*^{3n}}{3n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{(3n+1)+1}\,\alpha^{3n+1}\,[y]_*^{3n+1}}{3n+1}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{(3n+2)+1}\,\alpha^{3n+2}\,[y]_*^{3n+2}}{3n+2} \tag{41}$$

Далее, воспользовавшись формулами (13)–(15) для степеней y-чисел, найдем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n [y]_*^n}{n} = a(\alpha)\, y + b(\alpha)\, \breve{y} + c(\alpha)\, \breve{y} * y, \tag{42}$$

где

$$a(\alpha) = -\frac{1}{6} \ln\left(\alpha^2 - \alpha + 1\right) + \frac{1}{3} \ln(1+\alpha) - \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{\sqrt{3}\alpha}{\alpha - 2} \tag{43}$$

$$b(\alpha) = -\frac{1}{6} \ln\left(1 + \alpha^3\right) + \frac{1}{3} \ln(1+\alpha) + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{\sqrt{3}\alpha}{\alpha - 2} \tag{44}$$

$$c(\alpha) = \frac{1}{3} \ln\left(1 + \alpha^3\right) \tag{45}$$

при $-1 < \alpha \leq 1$.

Рассмотрим теперь полиномиальные функции от y-чисел. Среди таких функций наиболее простой и в то же время важной для многих приложений является бином Ньютона. Поэтому рассмотрим функцию

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} z^k. \tag{46}$$

Подставляя в правую часть (46) вместо z y-число, получим

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} [y]_*^k = \sum_{k=0}^{[n/3]} \begin{pmatrix} n \\ 3k \end{pmatrix} [y]_*^{3k} + \sum_{k=0}^{3k+1 \leq n} \begin{pmatrix} n \\ 3k+1 \end{pmatrix} [y]_*^{3k+1} + \sum_{k=0}^{3k+2 \leq n} \begin{pmatrix} n \\ 3k+2 \end{pmatrix} [y]_*^{3k+2}. \tag{47}$$

Подставляя сюда явные выражения (13)–(15) для степеней y-чисел, получим:

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} [y]_*^k = ay + b\breve{y} + c\breve{y} * y, \tag{48}$$

где значения a, b, c, выражаются через значения соответствующих сумм:

$$A = \sum_{k=0}^{[n/3]} \begin{pmatrix} n \\ 3k \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)\right) \tag{49}$$

$$a = \sum_{k=0}^{3k+1 \leq n} \begin{pmatrix} n \\ 3k+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{\pi(n-2)}{3}\right)\right) \tag{50}$$

$$b = \sum_{k=0}^{3k+2 \leq n} \begin{pmatrix} n \\ 3k+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{\pi(n+2)}{3}\right)\right) \tag{51}$$

Завершая этот раздел обратим внимание на следующее обстоятельство. В выражениях (40) и (46) мы подставляли y-число не в левую часть выражения, а в ряд (сумму), который мы принимали в качестве определения функции. При этом в соответствии с формулами (13)–(15) для степеней y-чисел ряды y-чисел сводились просто к числовым рядам и нам не требовалось вводить понятия сходимости во множестве обобщенных y-чисел. Совершенно иная ситуация возникает в том случае, если мы попытаемся рассматривать функции (29), (40) не от y-числа αy, а, например, от y-числа $\breve{y} * y$. В этом случае старшие степени не сводятся к младшим, и чтобы придать смысл рядам можно ввести понятие нормы и рассматривать сходимость по норме. Естественно при этом сходящийся по одной норме ряд может не быть сходящимся по другой норме.

5. Соотношение эквивалентности и разбиение на классы эквивалентных элементов в множестве исходных y-чисел

Введем на множестве исходных y-чисел соотношение эквивалентности следующим образом: назовем эквивалентными элементы, начинающиеся с одинаковых образующих y-чисел (то есть либо с y, либо с $\breve{y}$) и заканчивающиеся одинаковыми y-числами. Очевидно, что соотношение эквивалентности введено корректно, то есть при таком определении оказываются выполненными аксиомы рефлексивности, симметричности и транзитивности. Таким образом, оказываются эквивалентными, например, y-числа y, $y*\breve{y}*y$, $y*\breve{y}*y*\breve{y}*y$, и т. д. В результате все множество исходных y-чисел разбивается на четыре класса эквивалентности. Будем использовать для этих классов следующее обозначение: $U\,(y, y)$, $U\,(\breve{y}, \breve{y})$, $U\,(y, \breve{y})$, $U\,(\breve{y}, y)$. В этих обозначениях в круглых скобках на первом месте стоит образующее y-число, с которого начинаются исходные y-числа данного подмножества, а на втором месте y-число, которым они заканчиваются:

$$U\,(y, y) = \{y\,,\ y*\breve{y}*y\,,\ y*\breve{y}*y*\breve{y}*y\,,\ ...\,\}\,, \tag{52}$$
$$U\,(\breve{y}, \breve{y}) = \{\breve{y}\,,\ \breve{y}*y*\breve{y}\,,\ \breve{y}*y*\breve{y}*y*\breve{y}\,,\ ...\,\}\,, \tag{53}$$
$$U\,(y, \breve{y}) = \{y*\breve{y}\,,\ y*\breve{y}*y*\breve{y}\,,\ y*\breve{y}*y*\breve{y}*y*\breve{y}\,,\ ...\,\}\,, \tag{54}$$
$$U\,(\breve{y}, y) = \{\breve{y}*y\,,\ \breve{y}*y*\breve{y}*y\,,\ \breve{y}*y*\breve{y}*y*\breve{y}*y\,,\ ...\,\}\,, \tag{55}$$

С использованием множеств $U\,(y, y)$, $U\,(\breve{y}, \breve{y})$, $U\,(y, \breve{y})$, $U\,(\breve{y}, y)$ будет удобно определить некоторую алгебру. Определим понятие умножения двух множеств: под произведением $A*B$ двух множеств A и B будем подразумевать множество составленное из всевозможных произведений вида $a*b$, где $a \in A$, $b \in B$. Нетрудно получить следующую таблицу умножения:

$$U\,(y, \breve{y}) * \{\breve{y}\} = \{\breve{y}\}\,. \tag{56}$$

Здесь и далее $\{\breve{y}\}$, либо $\{y\}$ означает множество состоящее из одного элемента – $\breve{y}$ либо y, соответственно.

$$U\,(\breve{y}, y) * \{y\} = \{y\}\,, \tag{57}$$
$$U\,(y, y) * \{y\} = \{\breve{y}\}\,, \tag{58}$$
$$U\,(\breve{y}, \breve{y}) * \{\breve{y}\} = \{y\}\,, \tag{59}$$
$$\{y\} * U\,(y, \breve{y}) = \{y\}\,, \tag{60}$$
$$\{\breve{y}\} * U\,(\breve{y}, y) = \{\breve{y}\}\,, \tag{61}$$
$$\{y\} * U\,(y, y) = \{\breve{y}\}\,, \tag{62}$$
$$\{\breve{y}\} * U\,(\breve{y}, \breve{y}) = \{y\}\,. \tag{63}$$
$$U\,(y, \breve{y}) * \{y\} = U\,(y, y)\,\backslash y. \tag{64}$$

В этой формуле и в последующих формулах этого раздела $U\backslash y$ означает множество U без элемента y.

$$U\,(\breve{y}, y) * \{\breve{y}\} = U\,(\breve{y}, \breve{y})\,\backslash \breve{y}, \tag{65}$$
$$U\,(y, y) * \{\breve{y}\} = U\,(y, \breve{y})\,, \tag{66}$$
$$U\,(\breve{y}, \breve{y}) * \{y\} = U\,(\breve{y}, y)\,, \tag{67}$$
$$\{\breve{y}\} * U\,(y, \breve{y}) = U\,(\breve{y}, \breve{y})\,\backslash \breve{y}, \tag{68}$$
$$\{y\} * U\,(\breve{y}, y) = U\,(y, y)\,\backslash y, \tag{69}$$
$$\{\breve{y}\} * U\,(y, y) = U\,(\breve{y}, y)\,, \tag{70}$$
$$\{y\} * U\,(\breve{y}, \breve{y}) = U\,(y, \breve{y})\,. \tag{71}$$

Эта таблица умножения позволяет решать простейшие уравнения в y-числах. Кроме того с помощью соотношений (56)–(71) можно перейти к алгебре множеств, причем образующими элементами такой алгебры будут множества $U\left(y,y\right)$, $U\left(\breve{y},\breve{y}\right)$, $U\left(y,\breve{y}\right)$, $U\left(\breve{y},y\right)$. Приведем таблицу умножения (которая будет содержать 16 соотношений, в соответствии с тем, что для каждого U есть четыре сомножителя включая его самого) для образующих множеств указанной алгебры:

$$U\left(y,y\right)*U\left(y,y\right)=\left\{\breve{y}\right\}, \tag{72}$$
$$U\left(y,y\right)*U\left(\breve{y},\breve{y}\right)=U\left(y,\breve{y}\right), \tag{73}$$
$$U\left(y,y\right)*U\left(y,\breve{y}\right)=\left\{y\right\}, \tag{74}$$
$$U\left(y,y\right)*U\left(\breve{y},y\right)=U\left(y,y\right)\backslash y, \tag{75}$$
$$U\left(\breve{y},\breve{y}\right)*U\left(\breve{y},\breve{y}\right)=\left\{y\right\}, \tag{76}$$
$$U\left(\breve{y},\breve{y}\right)*U\left(y,y\right)=U\left(\breve{y},y\right), \tag{77}$$
$$U\left(\breve{y},\breve{y}\right)*U\left(y,\breve{y}\right)=U\left(\breve{y},\breve{y}\right)\backslash\breve{y}, \tag{78}$$
$$U\left(\breve{y},\breve{y}\right)*U\left(\breve{y},y\right)=\left\{\breve{y}\right\}, \tag{79}$$
$$U\left(\breve{y},y\right)*U\left(y,y\right)=U\left(y,y\right), \tag{80}$$
$$U\left(\breve{y},y\right)*U\left(\breve{y},\breve{y}\right)=U\left(\breve{y},\breve{y}\right)\backslash\breve{y}, \tag{81}$$
$$U\left(\breve{y},y\right)*U\left(y,\breve{y}\right)=U\left(y,\breve{y}\right), \tag{82}$$
$$U\left(\breve{y},y\right)*U\left(\breve{y},y\right)=U\left(\breve{y},y\right)\backslash\breve{y}*y, \tag{83}$$
$$U\left(y,\breve{y}\right)*U\left(y,y\right)=U\left(y,y\right)\backslash y, \tag{84}$$
$$U\left(y,\breve{y}\right)*U\left(\breve{y},\breve{y}\right)=U\left(\breve{y},\breve{y}\right), \tag{85}$$
$$U\left(y,\breve{y}\right)*U\left(y,\breve{y}\right)=U\left(y,\breve{y}\right)\backslash y*\breve{y}, \tag{86}$$
$$U\left(y,\breve{y}\right)*U\left(\breve{y},y\right)=U\left(\breve{y},y\right). \tag{87}$$

Следует заметить, что полученная алгебра оказывается, как и алгебра y-чисел, неассоциативной. В этом нетрудно убедиться рассмотрев следующий пример:

$$\left(U\left(y,y\right)*U\left(y,y\right)\right)*U\left(y,y\right)=\breve{y}*U\left(y,y\right)=U\left(\breve{y},y\right), \tag{88}$$
$$U\left(y,y\right)*\left(U\left(y,y\right)*U\left(y,y\right)\right)=U\left(y,y\right)*\breve{y}=U\left(y,\breve{y}\right). \tag{89}$$

6. Возведение исходных y-чисел в степень. Таблица умножения исходных y-чисел

Выше были подробно рассмотрены вопросы инверсного умножения y-чисел, а также возведения в целую степень образующих y-чисел и, соответственно, определение некоторых функций от образующих y-чисел. Ниже мы рассмотрим возведение в степень исходных y-чисел, а также составим таблицу умножения исходных y-чисел, которая позволит значительно упростить процедуру их инверсного умножения.

Прежде всего строго определим понятие степени исходного y-числа относительно операции инверсного умножения:

$$\left[Y_m\right]_*^n\equiv\left(\ldots\left(\left(Y_m*Y_m\right)*Y_m\right)*\ldots.Y_m\right). \tag{90}$$

Расставленные в (90) скобки определяют последовательность выполнения операций умножения. Такое определение степени эквивалентно следующему рекуррентному соотношению

$$\left[Y_m\right]_*^{n+1}=\left[Y_m\right]_*^n*Y_m. \tag{91}$$

Это соотношение удобно для нахождения общих формул возведения в степень, поскольку позволяет пользоваться математической индукцией. Для дальнейшего нам понадобятся следующие соотношения, которые легко проверяются непосредственно:

$$Y_1 * Y_{2m} = Y_1, \tag{92}$$

$$\bar{Y}_1 * \bar{Y}_{2m} = \bar{Y}_1, \tag{93}$$

$$Y_{2m} * \bar{Y}_1 = \bar{Y}_1, \tag{94}$$

$$\bar{Y}_{2m} * Y_1 = Y_1, \tag{95}$$

где $m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Аналогично для исходных y-чисел нечетных порядков:

$$Y_1 * Y_{2m+1} = \bar{Y}_1, \tag{96}$$

$$\bar{Y}_1 * \bar{Y}_{2m+1} = Y_1, \tag{97}$$

$$Y_{2m+1} * Y_1 = \bar{Y}_1, \tag{98}$$

$$\bar{Y}_{2m+1} * \bar{Y}_1 = Y_1, \tag{99}$$

Соотношения (92)–(99) оказываются удобны для получения общих формул возведения в степень исходных y-чисел $Y_n, \bar{Y}_n$ нечетных порядков $n = 2m + 1$. С использованием (91) и математической индукции нетрудно получить следующие соотношения:

$$[Y_{2m+1}]_*^{3n-1} = \bar{Y}_1, \tag{100}$$

$$[Y_{2m+1}]_*^{3n} = \bar{Y}_{2(m+1)}, \tag{101}$$

$$[Y_{2m+1}]_*^{3n+1} = Y_{2m+1}, \tag{102}$$

$$\left[\bar{Y}_{2m+1}\right]_*^{3n-1} = Y_1, \tag{103}$$

$$\left[\bar{Y}_{2m+1}\right]_*^{3n} = Y_{2(m+1)}, \tag{104}$$

$$\left[\bar{Y}_{2m+1}\right]_*^{3n+1} = \bar{Y}_{2m+1}, \tag{105}$$

где $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. Что касается возведения в степень исходных y-чисел четного порядка, то, очевидно, такая операция сводится просто к умножению порядка исходного y-числа на показатель степени:

$$[Y_{2m}]_*^{n} = Y_{2mn}, \tag{106}$$

$$\left[\bar{Y}_{2m}\right]_*^{n} = \bar{Y}_{2mn}, \tag{107}$$

где $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Соотношения (92)–(99) позволяют записать следующую таблицу умножения:

	Y_{2n}	Y_{2n+1}	$\bar{Y}_{2n}$	$\bar{Y}_{2n+1}$
Y_{2m}	$Y_{2(m+n)}$	$Y_{2(m+n)+1}$	$\bar{Y}_{2n}$	$\bar{Y}_{2n+1}$
Y_{2m+1}	Y_1	$\bar{Y}_1$	$Y_{2(m+n)+1}$	$Y_{2(m+n+1)}$
$\bar{Y}_{2m}$	Y_{2n}	Y_{2n+1}	$\bar{Y}_{2(m+n)}$	$\bar{Y}_{2(m+n)+1}$
$\bar{Y}_{2m+1}$	$\bar{Y}_{2(m+n)+1}$	$\bar{Y}_{2(m+n+1)}$	$\bar{Y}_1$	Y_1

В этой таблице на пересечении строк и столбцов стоит число, являющееся результатом умножения исходного y-числа из первого столбца и верхней строки, т.е. если, например, мы хотим найти результат умножения y-числа $\bar{Y}_{2m}$ (1-й столбец, 4-я строка) и Y_{2n+1} (верхняя строка, 3-й столбец), то результат мы находим на пересечении 4-й строки и 3-го столбца: $\bar{Y}_{2m} * Y_{2n+1} = Y_{2n+1}$.

7. Извлечение корней из исходных y-чисел

Извлечение корней определим как операцию обратную возведению в степень. Из формул (100)-(107) следует, что при возведению в одну и ту же степень разных исходных y-чисел в некоторых случаях получаем один и тот же результат. Таким образом, операция извлечения корней неоднозначна. Поэтому, под операцией извлечения корня степени m из исходного y-числа Y_n будем понимать отображение, ставящее в соответствие исходному y-числу множество $\{Y_k\}$ всех исходных y-чисел, таких, которые при возведении в степень m дают число Y_n:

$$[Y_k]_*^m = Y_n. \tag{108}$$

Из формул (100)-(107) следует, что не для всех исходных y-чисел возможна операция извлечения корня, например, не существует исходного y-числа, которое бы при возведении в степень $3n$ давало Y_1. Таким образом, иногда рассматриваемое множество может быть пустым:

$$[Y_1]_*^{\frac{1}{3n}} = \emptyset. \tag{109}$$

Рассмотрим теперь более подробно формулы извлечения корней. Прежде всего, рассмотрим наиболее простой случай. Возведение в степень $3n+1$ исходных y-чисел нечетного порядка Y_{2m+1} и $\bar{Y}_{2m+1}$ дает то же самое число (102), (105). Таким образом, определим

$$[Y_{2m+1}]_*^{\frac{1}{3n+1}} = \{Y_{2m+1}\}, \tag{110}$$

$$\left[\bar{Y}_{2m+1}\right]_*^{\frac{1}{3n+1}} = \left\{\bar{Y}_{2m+1}\right\}. \tag{111}$$

Аналогично определим $[Y_1]_*^{\frac{1}{3n-1}}$ и $\left[\bar{Y}_1\right]_*^{\frac{1}{3n-1}}$:

$$[Y_1]_*^{\frac{1}{3n-1}} = \left\{\bar{Y}_{2m+1}\right\}_{m=0}^{\infty}, \tag{112}$$

$$\left[\bar{Y}_1\right]_*^{\frac{1}{3n-1}} = \{Y_{2m+1}\}_{m=0}^{\infty}. \tag{113}$$

Извлечение корней из четных чисел несколько сложнее. Дело в том, что возведение в степень $3n$ исходного y-числа $\bar{Y}_{6mn-1}$ и возведение в ту же степень числа Y_{2m} дает один и тот же результат Y_{6mn}. Таким образом, операция, обратная возведению в степень в формулах (104) и (106), а так же в формулах (101) и (107) не всегда однозначна. Из формул (104), (106) следует, что она будет однозначна, и будет описываться формулами

$$\left[Y_{2(m+1)}\right]_*^{\frac{1}{3n}} = \left\{\bar{Y}_{2m+1}\right\}, \tag{114}$$

$$[Y_{2Mn}]_*^{\frac{1}{n}} = \{Y_{2M}\}, \tag{115}$$

за исключением случая $m+1 = 3Mn$:

$$[Y_{6Mn}]_*^{\frac{1}{3n}} = \left\{\bar{Y}_{6Mn-1},\, Y_{2M}\right\}. \tag{116}$$

Соответствующие формулы для дуальных чисел имеют вид:

$$\left[\bar{Y}_{2(m+1)}\right]_*^{\frac{1}{3n}} = \{Y_{2m+1}\}, \tag{117}$$

$$\left[\bar{Y}_{2Mn}\right]_*^{\frac{1}{n}} = \left\{\bar{Y}_{2M}\right\}, \tag{118}$$

за исключением случая $m+1=3Mn$:

$$\left[\bar{Y}_{6Mn}\right]_*^{\frac{1}{3n}} = \left\{Y_{6Mn-1},\, \bar{Y}_{2M}\right\}. \tag{119}$$

Формулы (110)–(119) решают проблему извлечения корней из исходных y-чисел. Извлечение корней других степеней приводят к пустому множеству (см. (109)).

Теперь, определив понятие корня из y-числа можно обобщить понятие степени исходного y-числа, распространив его на вещественные значения показателей, т. е. определить величину $[Y_m]_*^{\frac{k}{n}}$. Эту величину можно определить либо как $\left[[Y_m]_*^{\frac{1}{n}}\right]_*^k$, либо как $\left[[Y_m]_*^k\right]_*^{\frac{1}{n}}$. Заметим, что эти два способа не одинаковы, что связано со свойствами некоммутативности и неассоциативности умножения y-чисел.

8. Операция деления исходных y-чисел

Рассмотренное в разделе 5 умножение исходных y-чисел допускает обратную операцию – деление. При этом в силу некоммутативности умножения потребуется отдельно определить понятие левого и правого частного от деления. Более того рассматриваемая операция деления, будучи определена как операция обратная умножению, оказывается неоднозначной. С такой трудностью мы уже сталкивались в разделе 6 при определении операции извлечения корней из y-чисел. В рассматриваемом случае мы поступим аналогично, рассматривая операцию деления как отображение ставящее в соответствие двум y-числам (делимому и делителю) некоторое множество y-чисел, которое в дальнейшем будем называть частным от деления.

Рассмотрим решение простейшего уравнения

$$\Lambda * Y_m = Y_n. \tag{120}$$

В этом уравнении Y_m и Y_n заданы, требуется найти все исходные y-числа Λ, удовлетворяющие этому уравнению. Множество всех исходных y-чисел Λ, удовлетворяющих уравнению (120), будем называть правым частным от деления Y_n на Y_m и обозначать Y_n/Y_m. Аналогично определим левое частное $Y_m \backslash Y_n$ как множество всех решений уравнения

$$Y_m * \Lambda = Y_n. \tag{121}$$

Таблица умножения исходных y-чисел, приведенная в разделе 5 охватывает все возможные случаи умножения исходных чисел любых порядков и потому позволяет решить задачу нахождения частного любых исходных y-чисел. Рассмотрим сначала нахождение правых частных. При этом удобно отдельно рассмотреть случаи четных и нечетных m и n в уравнении (120). Результаты приведем в виде следующей таблицы:

	делитель			
	Y_{2N}	Y_{2N+1}	$\bar{Y}_{2N}$	$\bar{Y}_{2N+1}$
Y_{2M}	$Y_{2(M-N)}$ $(M>N)$ $\left\{\bar{Y}_{2m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ $(M=N)$	$\varnothing$	$\varnothing$	$Y_{2(M-N)-1}$ $(M>N)$
Y_{2M+1}	$\{Y_{2m+1}\}_{m=1}^{\infty}$ $(M=0)$	$Y_{2(M-N)}$ $(M>N)$ $\left\{\bar{Y}_{2m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ $(M=N)$	$Y_{2(M-N)+1}$ $(M\geq N)$	$\left\{\bar{Y}_{2m+1}\right\}_{m=0}^{\infty}$ $(M=0)$
$\bar{Y}_{2M}$	$\varnothing$	$\bar{Y}_{2(M-N)-1}$ $(M>N)$	$\bar{Y}_{2(M-N)}$ $(M>N)$ $\{Y_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ $(M=N)$	$\varnothing$
$\bar{Y}_{2M+1}$	$\bar{Y}_{2(M-N)+1}$ $(M\geq N)$	$\{Y_{2m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ $(M=0)$	$\left\{\bar{Y}_{2m+1}\right\}_{m=1}^{\infty}$ $(M=0)$	$\bar{Y}_{2(M-N)}$ $(M>N)$ $\{Y_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ $(M=N)$

На пересечении строк и столбцов этой таблицы расположены правые частные от деления y-числа, находящегося в самом левом столбце (нумерующего строку) на y-число находящееся в верхней строке (нумерующее столбец). Рядом с соответствующим частным приведено условие когда оно существует (условие разрешимости уравнения (120)). Приведем пример: найдем частное от деления Y_{2M+1} (1-й столбец, 3-я строка) на $\bar{Y}_{2N}$ (верхняя строка, 4-й столбец). На пересечении 3-й строки и 4-го столбца получаем результат

$$Y_{2M+1}/\bar{Y}_{2N} = Y_{2(M-N)+1}, (M \geq N)\,. \tag{122}$$

В случаях, когда частное не существует (уравнение (120) неразрешимо) в таблице стоит знак пустого множества. Аналогичная таблица получается для левых частных $Y_M \backslash Y_N$:

	делитель			
	Y_{2N}	Y_{2N+1}	$\bar{Y}_{2N}$	$\bar{Y}_{2N+1}$
Y_{2M}	$Y_{2(N-M)}$ $(N{>}M)$	$Y_{2(N-M)+1}$ $(N{\geq}M)$	$\bar{Y}_{2N}$	$\bar{Y}_{2N+1}$
Y_{2M+1}	$\bar{Y}_{2(N-M)-1}$ $(N{>}M)$	$\bar{Y}_{2(N-M)}$ $(N{>}M)$ $\{Y_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ $(N{=}0)$	$\varnothing$	$\{Y_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ $(N{=}0)$
$\bar{Y}_{2M}$	Y_{2N}	Y_{2N+1}	$\bar{Y}_{2(N-M)}$ $(N{>}M)$	$\bar{Y}_{2(N-M)+1}$ $(N{\geq}M)$
$\bar{Y}_{2M+1}$	$\varnothing$	$\{\bar{Y}_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ $(N{=}0)$	$Y_{2(N-M)-1}$ $(N{>}M)$	$Y_{2(N-M)}$ $(N{>}M)$ $\{\bar{Y}_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ $(N{=}0)$

В этой таблице на пересечении строк и столбцов приведены левые частные. Например, найдем левое частное от деления Y_{2N+1} на $\bar{Y}_{2M}$, то есть $\bar{Y}_{2M} \backslash Y_{2N+1}$. На пересечении 4-й строки и 3-го столбца получаем результат

$$\bar{Y}_{2M} \backslash Y_{2N+1} = Y_{2N+1}. \tag{123}$$

Заключение

В работе подробно рассмотрены основные алгебраические операции, вопросы делимости, возведения в степень, в том числе извлечения корней в множестве y-чисел. Наличие свойства неассоциативности умножения y-чисел, создаёт некоторую специфику, однако допускает непротиворечивым образом определить делимость y-чисел и извлечения корней. Установлено, что операция деления не всегда является однозначной и в ряде случаев невозможна. Свойство сведения старших степеней y-чисел к младшим позволило достаточно просто определить на множестве y-чисел функции представимые в виде степенных рядов. В частности были рассмотрены экспоненциальная, логарифмическая и биномиальная функции, показано, что эти функции представимы линейной комбинацией трёх самых простых y-чисел. Теория y-чисел ещё далека от завершения, а сами y-числа содержат много неожиданных свойств, не имеющих прямых аналогов в известных на сегодняшний день алгебраических системах.

Список литературы

1. Ёлкин С. В., Алгебраический подход к концепции информонного поля // Куликов В. В., Гаврилов Д. А., Ёлкин С. В., Универсальный искусственный язык – "hOOM-Диал". М. : Гэлэкси Нэйшн, 1994. С. 73–94.

2. Ёлкин С. В. Ёлкин С. С. Информационное исчисление // Вестник ВИНИТИ НТИ. 2002. сер 2, N11. С. 17–24.

3. Ёлкин С. В. Открытый семантический язык SL // Вестник ВИНИТИ НТИ. 2003. сер 2, N4. С. 5–15

The algebra of $y-$numbers: openings in building functions and sets

S. V. Elkin, S. Iu. Igashov

Institute of applied mathematics; MEPHI

In this work is studied the non-associative algebra of $y-$numbers. Problems as divisibility, determining square roots, construction of specific functions and sets

Key-words: algebras, functions, square roots, divisibility.
MSC: 51H30, 08C99, 17B81.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных алгебр в физике, е) Экспериментальные исследования возможной анизотропии пространства-времени и иных проявлений финслеровой геометрии.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.

2. Объем статьи не должен превышать 1 печ. листа (24 усл. маш. стр.)

3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате LaTeX (версия LaTeX2_ε, для набора формул используется $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LaTeX) и файл статьи в формате PostScript или PDF.

4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).

5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок), ключевые слова, классификацию по PACS или MSC2000. Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.

6. Название статьи, аннотация, ключевые слова, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.

7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.

8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи.

9. Публикация бесплатна для всех авторов.

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА
В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

Научный журнал. Основан в 2003 г.

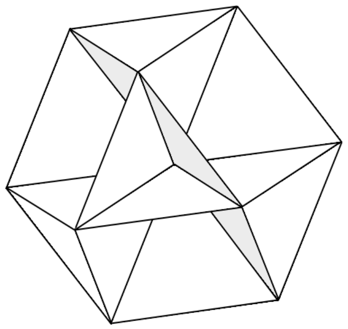
№ 1 (7), том 4, 2007

Главный редактор Павлов Д. Г.
Ответственный секретарь Элиович А. А.

www.polynumbers.ru
hypercomplex@mail.ru

Свидетельство о регистрации
ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.

ISSN 1814-3946



Типографские данные