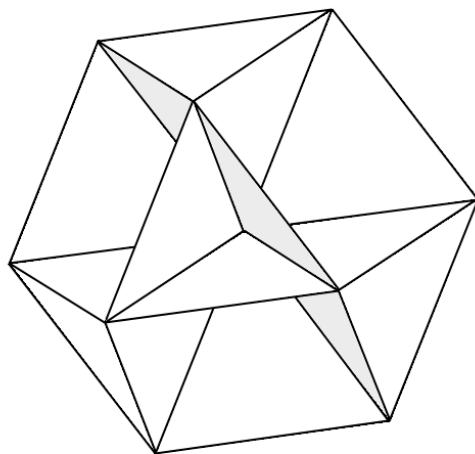


ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

№ 2 (6), Vol 3 (2006)

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 2003 г.



www.polynumbers.ru

hypercomplex@mail.ru

Оглавление

Павлов Д. Г., Сипаров С. В. Вторая международная конференция «Финслеровы расширения теории относительности» (Каир, 4–10 ноября 2006 г.)	3
Гарасько Г. И. Теория поля и финслеровы пространства	6
Павлов Д. Г. Симметрии и геометрические инварианты	21
Чернов В. М. Обобщенные n -арные законы композиции в алгебре H_4 и их связь с ассоциированными метрическими формами	34
Сухаревский П. Д. К вопросу о кватернионной геометрии	46
Кассандров В. В. Кватернионный анализ и алгебродинамика	59
Tamássy L. Finsler spaces with polynomial metric	86
Atanasiu Gh. Pairs of metrical Finsler structures and Finsler connections compatible to them	94
Atanasiu Gh., Stoica E. The horizontal and vertical semisymmetric metrical d -connections in the Relativity Theory	100
Balan V. CMC and minimal surfaces in Berwald-Moor spaces	108
Balan V., Brinzei N., Lebedev S. Geodesics, connections and Jacobi fields for Berwald-Moor quartic metrics	115
Munteanu Gh. The Lagrangian-Hamiltonian formalism in gauge complex field theories	125
Munteanu Gh. Some geometrical aspects of harmonic curves in a complex Finsler space	136
Păun M. Fundamental equations for a second order generalized Lagrange space endowed with a Berwald-Moor type metric in invariant frames	142
Сипаров С. В. Теория эффекта нулевого порядка для исследования геометрических свойств пространства-времени	157
В. О. Гладышев, Т. М. Гладышева, М. Дашко, Г. В. Подгузов, Н. Трофимов, Е. А. Шарандин Анизотропия пространства скоростей электромагнитного излучения в движущихся средах	175
Панчелюга В. А., Шноль С. Э. О пространственной анизотропии, выявляемой при исследовании "эффекта местного времени"	190
Информация для авторов	196

**ВТОРАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
«ФИНСЛЕРОВЫ РАСШИРЕНИЯ
ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ»**

Каир, 4–10 ноября 2006 г.

Д. Г. Павлов

*МГТУ им. Н. Э. Баумана
geom2004@mail.ru*

С. В. Сипаров

*Государственный Университет гражданской авиации, С-Петербург, Россия
sergey@siparov.spb.su*

С 4 по 10 ноября 2006 года в Каире прошла вторая международная конференция, посвященная вопросам Финслеровых расширений теории относительности, организованная некоммерческим фондом развития исследований по Финслеровой геометрии «Финслеровская премия» (ген. директор Д. Г. Павлов, отв. секретарь А. А. Элиович) при поддержке МГТУ им. Н. Э. Баумана (ректор И. Б. Федоров, декан факультета фундаментальных наук Б. П. Назаренко, зав. кафедрой физики А. Н. Морозов, сотрудники МГТУ Т. М. Гладышева, В. О. Гладышев и Д. Г. Павлов) и при организационной поддержке М. Райта (Великобритания). Конференция явилась логическим продолжением предыдущих аналогичных мероприятий, проводившихся в Москве (Россия), Брашове (Румыния) и Каире (Египет), а также работы Финслеровской секции ежегодной международной конференции «Физические интерпретации теории относительности», проходящей поочередно в Лондоне (Imperial College) и в Москве (МГТУ им. Н. Э. Баумана). В конференции приняли участие более 70 человек из 17 стран: Азербайджана, Алжира, Великобритании, Венгрии, Греции, Египта, Индии, Иордании, Ирана, Италии, Китая, России, Румынии, США, Турции, Узбекистана и Франции. Самая многочисленная делегация в составе 26 человек приехала из России и была представлена сотрудниками 10 ведущих ВУЗов и научных центров страны из Москвы, Санкт-Петербурга, Самары, Казани, Новосибирска и Пущино.

Научная программа

По сравнению с прошлогодней конференцией число участников увеличилось более, чем в три раза, и соответственно, тематика докладов стала более обширной и углубилась. В целях обзора результатов сделанные доклады можно условно сгруппировать следующим образом:

- алгебраические основы;
- геометрические и общематематические свойства Финслеровых пространств, представляющие интерес для теории относительности;
- экспериментальные исследования свойств пространства-времени;
- альтернативные и дополняющие подходы.

При этом некоторые доклады можно было бы отнести сразу к нескольким из указанных групп.

В докладах А. Пожидаева (Россия, Новосибирск), В. Чернова (Россия, Самара) и Ж. Шена (США, Индианаполис) обсуждались некоторые классы n -арных алгебр и их связь с геометрией и механикой, 4-мерные алгебры с полилинейным умножением Зассенхаузена и некоторые классы Финслеровых (альфа, бета)-метрик соответственно. Л. Кауфман (США, Чикаго) остановился на новом алгебраическом подходе, позволяющем получать основные структуры дифференциальной геометрии и физики на основе введения дискретных операций. В первой группе докладов естественное внимание организаторы и участники конференции уделили Финслеровым пространствам с метрическими функциями в виде симметрических многочленов — метриками Бервальда-Моора и Чернова. Как известно, к аналогичному типу относится и метрика пространства Минковского. Все эти метрики тесным образом связаны между собой и имеют предельные переходы друг в друга. В докладах Д. Павлова (Россия, Москва) и Г. Гарасько (Россия, Москва), посвященных этой тематике, были получены правила конструирования псевдоримановых геометрий (и, следовательно, гравитационных полей) в пространстве гиперкомплексных чисел H_4 . Преобразования, обобщающие преобразования Лоренца на случай пространств с метрикой Бервальда-Моора, были получены Г. Богословским (Россия, Москва) на основе рассмотрения групп движений в пространствах с полностью и частично нарушенной симметрией. В работе Ш. Цао (Китай, Пекин) был построен аналог специальной теории относительности для пространства с метрикой Бервальда-Моора, допускающий сверхсветовые скорости распространения сигнала.

Обобщение основных понятий и структур дифференциальной геометрии таких, как метрические тензора, геодезические, связности, проективные плоскости для пространств с метриками Бервальда-Моора, и обобщающими их метриками Шимады были сделаны в докладах С. Лебедева (Россия, Москва), В. Балана (Румыния, Бухарест) и Н. Бринзей (Румыния, Брашов). В докладе М. Пауна (Румыния, Брашов) были получены обобщенные уравнения Эйнштейна и Максвелла для Лагранжевых пространств второго порядка с метрикой Бервальда-Моора.

Значительная часть докладов, представленных на конференции, была посвящена исследованиям разнообразных геометрических и общематематических свойств Финслеровых пространств. Следует отметить выступления, которые сделали Г. Атанасиу, Е. Стойка, Г. Мутяну (Румыния, Брашов), Т. Бинх, Л. Тамаши, Л. Козма, И. Петер, К. Винцзе (Венгрия, Дебрецен), К. Ченг (Китай, Чонкин), Б. Ву, Ю. Ксин (Китай, Шанхай), П.-М. Вонг, К. Хан, М.-Ч. Шо, Ж. Цао (США, Индианаполис), М. Ванас, Н. Юсуф, А. Сидхамед, М. Кахил (Египет, Каир), Ч. Мишра, Д. Ядав (Индия, Файзабад), В. Али (Иран, Тегеран), А.-П. Куретсис (Греция, Афины), И. Машхур, А. Ата (Иордания, Муттах). Несмотря на большую абстрактность использованного математического аппарата и полученных результатов, работы данной группы внесли существенный вклад в постановку и решение проблем, касающихся Финслерова расширения теории относительности.

Представленные на конференции экспериментальные исследования, направленные на выявление тех или иных свойств пространства-времени, имеющих отношение к Финслеровой геометрии, носят весьма разнообразный характер. Совместная работа В. Гладышева, Т. Гладышевой, М. Дашко, А. Морозова, Б. Назаренко, Е. Шарандина и Н. Трофимова (все — Россия, Москва) выполнена на современном лабораторном оборудовании интерферометрическими методами, а ее результаты указывают на появление в движущейся среде оптической анизотропии, характерной для случая, когда геометрия пространства-времени отличается от геометрии Минковского. Коллектив в составе В. Панчелюги, С. Шноля, В. Коломбет, М. Панчелюги (все — Россия, Пушкино) представил работу по выявлению анизотропии пространства, основанную на наблюдении

ниях явления макроскопических флуктуаций на различных масштабах, характерных для Земли и Солнечной системы, а также на наблюдениях влияния быстро вращающегося тела на флуктуации при альфа-распаде. В докладе Л. Синдони (Италия, Триест) обсуждались модификации законов движения частиц в вакууме, в частности, дисперсионных соотношений, требуемой во многих моделях квантовой гравитации. Было показано, что эти эффекты, наблюдаемые для космических лучей сверхвысоких энергий, можно трактовать в терминах финслеровой геометрии пространства-времени. В работе М. Лашиз-Рея (Франция, Марсель) было показано, что измеренное микроволновое фоновое излучение имеет анизотропию, характерную для додекаэдрона Пуанкаре. Доклад С. Сипарова (Россия, Санкт-Петербург) содержал теорию эффекта нулевого порядка, пригодного для исследования геометрических свойств пространства-времени с помощью наблюдения излучения космических мазеров. Важной особенностью этого эффекта является то, что он может позволить различить риманову и финслерову геометрии в масштабах галактики.

Альтернативные и дополняющие подходы к исследованию свойств пространств с метрическими функциями, связанными с четвертыми степенями компонент, были представлены в докладах П. Сухаревского (Россия, Москва), В. Кассандрова и Ю. Лаптева (Россия, Москва) и П. Роулэндса (Великобритания, Ливерпуль). В частности, второй (алгебродинамика) и третий (нильпотентный формализм) из этих докладов касались алгебр комплексных кватернионов и их возможных приложений к построению физических теорий.

Параллельным направлением к Финслеровой тематике является разрабатываемая Ю. Владимировым (Россия, Москва) и его учениками А. Соловьевым и С. Болоховым (Россия, Москва) концепция бинарной геометрофизики. В докладах этих авторов развивались идеи межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана, альтернативные теории поля, а также рассматривались финслеровы обобщения спиноров.

Доклады Р. Ибадова (Узбекистан, Самарканд) и Т. Ярмана (Турция, Эскизехир) были посвящены построению квантовой теории поля с новой фундаментальной константой и альтернативной теории относительности.

В заключение участники прослушали выступление египтолога Т. Шерковой (Россия, Москва) на тему «Четверка в космологиях древнего Египта».

ТЕОРИЯ ПОЛЯ И ФИНСЛЕРОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Г. И. Гарасько

Всероссийский электротехнический институт, Москва, Россия

gri9z@mail.ru

Предлагается строить лагранжиан поля (полей), исходя только из метрической функции финслерова пространства, а именно как единица, деленная на объем, который зачерчивает единичный вектор, пробегающий все точки индикатрисы в касательном пространстве, если считать, что касательное пространство является евклидовым. Для пространства, конформно связанного с пространством Минковского, в предположении экспоненциальной зависимости от времени и сферически симметричной зависимости от координат получено космологическое уравнение, из которого при расстояниях от начала координат много меньших размеров Вселенной следует выполнение закона Хаббла. Записано космологическое уравнение для поля, описывающее Вселенную с геометрией, конформно связанной с геометрией поличисел H_4 , которая обладает метрикой Бервальда-Моора.

Ключевые слова: Лагранжиан, индикатриса, метрика Бервальда-Моора, Финслерово пространство, теория поля, закон Хаббла.

Введение

Наиболее удобный способ получения уравнений поля как в классической теории [1], так и в теории квантованных полей [2] связан с понятиями лагранжиана, действия и принципа стационарного (или наименьшего) действия. При этом однозначно устанавливается связь [3] между непрерывными преобразованиями, относительно которых инвариантно действие, и физическими законами сохранения, которые могут быть проверены экспериментально.

Если x^0, x^1, x^2, x^3 – координаты, $f(x) \equiv f(x^0, x^1, x^2, x^3)$ – скалярное поле в пространстве Минковского, а

$$\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{L} \left(f(x); \frac{\partial f}{\partial x^0}, \frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right), \quad (1)$$

– лагранжиан, то интеграл от лагранжиана по некоторому четырехмерному объему V пространства-времени,

$$I[f] = \int_V \mathfrak{L} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (2)$$

принято называть действием. Считая, что вариации функции поля δf равны нулю на границе объема интегрирования, и требуя стационарности действия, то есть

$$\delta I[f] = 0, \quad (3)$$

с помощью известной математической процедуры получим уравнение Лагранжа-Эйлера, которое и есть уравнение поля:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial f} = 0. \quad (4)$$

Обычно лагранжиан подбирают так, чтобы получить известные уравнения поля, или строят, обеспечивая заданную симметрию и выполнение некоторых дополнительных требований, например, чтобы получались линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Построение качественно новых лагранжианов, описывающих нелинейные физические процессы является, в известном смысле, искусством.

Функционалу (2) можно придать чисто геометрический смысл и считать его не интегралом в пространстве Минковского от лагранжиана \mathcal{L} , а объемом в некотором более сложном пространстве, в котором элемент объема имеет вид:

$$dV = \mathcal{L} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (5)$$

Рассмотрим финслерово пространство x^1, x^2, \dots, x^n [4] с метрической функцией

$$L(dx; x) \equiv L(dx^1, dx^2, \dots, dx^n; x^1, x^2, \dots, x^n). \quad (6)$$

В таком пространстве элемент длины ds по определению есть

$$ds = L(dx^1, dx^2, \dots, dx^n; x^1, x^2, \dots, x^n). \quad (7)$$

Более наглядно метрические свойства финслерова пространства можно описать с помощью понятия индикатрисы, которая определяется в каждой точке $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ основного пространства в соответствующем касательном центроаффинном пространстве $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ как геометрическое место концов единичных радиус-векторов $\xi_{(1)}$. Такая гиперповерхность описывается уравнением

$$L(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n; x^1, x^2, \dots, x^n) = 1. \quad (8)$$

Задание системы индикатрис в каждой точке основного пространства, или, что тоже самое, задание множеств единичных векторов, полностью определяет финслерову геометрию. Для того, чтобы вычислить длину вектора $(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$, надо найти сонаправленный вектору dx единичный вектор $\xi_{(1)}$, тогда числовой коэффициент ds в формуле

$$dx^i = ds \cdot \xi_{(1)}^i \quad (9)$$

и есть длина вектора dx . Из этой формулы следует, что элемент длины

$$ds = \frac{|dx|_{\text{ев}}}{|\xi_{(1)}|_{\text{ев}}}, \quad (10)$$

где $|dx|_{\text{ев}}$, $|\xi_{(1)}|_{\text{ев}}$ – длины векторов $(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$ и $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$, вычисляемые так, как если бы пространства dx^1, dx^2, \dots, dx^n и $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ были евклидовы, а системы координат в них – декартовы прямоугольные.

Если при выполнении последних предположений можно вычислить объем индикатрисы, то есть n -мерный объем, который зачерчивает единичный вектор $\xi_{(1)}$ в касательном пространстве $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$, пробегая всю индикатрису, то в финслеровом пространстве можно (аналогично (10)) определить элемент объема dV по формуле

$$dV = \text{const} \cdot \frac{dx^1 dx^2 \dots dx^n}{(V_{\text{ind}})_{\text{ев}}}, \quad (11)$$

где $(V_{\text{ind}})_{\text{ев}}$ – объем индикатрисы, вычисленный в предположении, что касательное пространство евклидово, а координаты декартовы прямоугольные. Совершенно очевидно,

что таким образом определенный элемент объема инвариантен относительно преобразования координат.

Рассмотрим n -мерное риманово пространство, метрическая функция в этом случае имеет вид

$$L(dx; x) = \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}, \quad (12)$$

а уравнение индикатрисы соответственно –

$$g_{ij} \xi^i \xi^j = 1. \quad (13)$$

Это уравнение определяет гиперповерхность второго порядка, а именно, эллипсоид. Если считать пространство $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ евклидовым, то, как известно, объем такого эллипсоида есть

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{const'}{\sqrt{\det(g_{ij})}}. \quad (14)$$

Подставляя это выражение в формулу (11), получим элемент объема в произвольном римановом пространстве

$$dV = const \cdot \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 dx^2 \dots dx^n, \quad (15)$$

что совпадает с обычным определением инвариантного элемента объема в римановом пространстве.

Для псевдоримановых пространств без специальных дополнительных условий на индикатрису

$$(V_{ind})_{ev} = \infty \quad \Rightarrow \quad dV = 0 \cdot dx^1 dx^2 \dots dx^n, \quad (16)$$

но можно провести цепочку рассуждений, которые позволяют и для псевдоримановых пространств предложить инвариантный элемент объема в виде формулы, аналогичной формуле (15). Точно такие же рассуждения приходится приводить и для получения инвариантного элемента объема в финслеровых пространствах, в которых имеет место проблема (16). Следует исходить из некоторого плоского пространства, близкого к пространству, элемент объема которого мы хотим определить.

Проведем эти рассуждения для конкретного примера: псевдориманового пространства с сигнатурой $(+, -, -, -)$. В этом случае рассмотрим вначале пространство Минковского x^0, x^1, x^2, x^3 , в котором метрическая функция имеет вид

$$L(dx) = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} \equiv \sqrt{g_{ij}^o dx^i dx^j}, \quad (17)$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = 1 \quad (18)$$

является уравнением второго порядка и определяет гиперповерхность, которая является двуполостным гиперболоидом, поэтому проблема определения объема индикатрисы имеет место. Так как и метрическая функция, и уравнение индикатрисы не зависят от точки пространства, то каким бы образом мы ни регуляризовали соответствующий интеграл, мы получим действительное число, одно и то же во всех точках пространства. Обозначим это число $(V_{ind})_{ev}$. Для того, чтобы в пространстве Минковского получить инвариантный элемент объема по формуле (11) величину $(V_{ind})_{ev}$ следует записать в виде

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{const'}{\sqrt{-\det(g_{ij}^o)}}. \quad (19)$$

Перейдем от координат x^0, x^1, x^2, x^3 к некоторым криволинейным координатам $x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$, тогда $\overset{\circ}{g}_{ij}$ перейдет в $g(x')_{i'j'}$, а значит элемент объема в пространстве Минковского в криволинейных координатах $x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$ будет определяться формулой

$$dV = const \cdot \sqrt{-det(g(x')_{i'j'})} \quad dx^{0'} dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'}, \quad (20)$$

но все же пока мы остались в том же самом пространстве Минковского.

Рассмотрим псевдориманово пространство, конформно связанное [4] с пространством Минковского,

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{\overset{\circ}{g}_{ij} dx^i dx^j}, \quad (21)$$

где $\kappa(x) > 0$, которое никаким преобразованием координат не может быть переведено в пространство Минковского. Уравнение индикатрисы для такого псевдориманово пространства можно записать следующим образом:

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = \frac{1}{\kappa^2(x)}. \quad (22)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (18), видим, что гиперповерхность, определяемая уравнением (22), получается из гиперповерхности, определяемой (18), общим масштабным преобразованием с коэффициентом $\frac{1}{\kappa(x)}$, поэтому если индикатрисе (18) мы приписывали объем (19), то индикатрисе (22) следует приписать объем

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{const'}{\kappa^4(x) \sqrt{-det(\overset{\circ}{g}_{ij})}} = \frac{const'}{\sqrt{-det(g(x)_{ij})}}, \quad (23)$$

где

$$g(x)_{ij} \equiv \kappa^2(x) \overset{\circ}{g}_{ij}. \quad (24)$$

Из выше проведенных рассуждений следует, что псевдориманову пространству с метрическим тензором $g(x)_{ij}$ и сигнатурой $(+, -, -, -)$ можно приписать инвариантный элемент объема вида

$$dV = const \cdot \sqrt{-det(g(x)_{ij})} \quad dx^0 dx^1 dx^2 dx^3, \quad (25)$$

что и принято в ОТО [1].

К проблеме (16) в псевдоримановых пространствах можно подойти более строго (в данной работе мы этого делать не будем), но при этом приходится переходить к пространствам более общим, чем псевдоримановы пространства. Поясним это на примере пространства Минковского. Если вместо пространства Минковского с метрической функцией (17) взять финслерово пространство с метрической функцией

$$L(dx) = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} + q_0 dx^0 \quad (26)$$

и условием $dx^0 \geq 0$, где $q_0 > 0$, то у такого пространства объем индикатрисы $(V_{ind})_{ev}$ – конечное действительное число, зависящее от параметра q_0 и стремящееся к ∞ , когда параметр q_0 стремится к 0.

Итак, будем считать, что в любом финслеровом пространстве, в котором имеет место проблема (16), она может быть разрешена тем или иным способом. Тогда можно утверждать, что из самой геометрии финслерова пространства, если в метрической функции содержатся некоторые поля, автоматически получается лагранжиан

$$\mathfrak{L} = \frac{const}{(V_{ind})_{ev}}, \quad (27)$$

из которого затем получаются уравнения для полей.

Замечание. Ниже постоянные, которые фигурируют в формулах (11), (14),..., (27), мы будем опускать, так как они не входят в полевые уравнения.

1 Пространства, конформно связанные с евклидовыми пространствами

Пространство, конформно связанное с n -мерным евклидовым пространством, обладает элементом длины

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2}, \quad (28)$$

где $\kappa(x) > 0$. Так как в этом случае

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = \kappa^n(x), \quad (29)$$

лагранжиан имеет вид

$$\mathfrak{L} = \kappa^n(x). \quad (30)$$

Для того, чтобы получить из такого лагранжиана уравнение поля, надо выразить скалярное поле $\kappa(x)$ через другое поле так, что лагранжиан уже будет содержать производные нового поля. Как это сделать, показано в работах [5], [6].

Обобщенные импульсы в пространстве (28) определяются формулой

$$p_i = \kappa(x) \frac{dx^i}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2}}, \quad (31)$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать следующим образом:

$$p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 - \kappa^2(x) = 0. \quad (32)$$

Скалярная функция $S(x)$, которая в пространстве x^1, x^2, \dots, x^n определяет нормальную конгруенцию геодезических и которую в классической механике принято называть действием как функцией координат, а в работе [5] функцию $S(x)$ предложено называть Мировой функцией, должна удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial S}{\partial x^n}\right)^2 = \kappa^2(x). \quad (33)$$

Таким образом,

$$\mathfrak{L} = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial S}{\partial x^n}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}}, \quad (34)$$

а уравнение поля (4) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \frac{\partial S}{\partial x^i} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial S}{\partial x^n}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}-1} \right\} = 0. \quad (35)$$

Отметим, что для $n > 2$ это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.

Запишем для пространства, конформно связанного с двумерной евклидовой плоскостью (x, y) , уравнение (35)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0, \quad (36)$$

то есть функция $S(x, y)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа, а значит она является компонентой аналитической функции комплексной переменной. Тогда

$$\kappa(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2} \quad (37)$$

есть коэффициент конформного преобразования элемента длины евклидова пространства

$$ds' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \kappa(x, y) \sqrt{x^2 + y^2} \quad (38)$$

при конформном преобразовании

$$x' = u(x, y), \quad y' = \pm v(x, y), \quad (39)$$

когда функция S является одной из компонент аналитической функции $u + iv$ комплексной переменной $x + iy$.

Найдем решение уравнения (35) в предположении, что функция S зависит только от радиуса

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2}. \quad (40)$$

Это удобнее сделать, записав элемент объема в сферических координатах и проинтегрировав по всем углам,

$$dV_r = r^{n-1} \left| \frac{dS}{dr} \right|^n dr \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{L}_r = r^{n-1} \left| \frac{dS}{dr} \right|^n. \quad (41)$$

Тогда уравнение поля запишется следующим образом:

$$\frac{d}{dr} \left[r^{n-1} \left| \frac{dS}{dr} \right|^{n-1} \right] = 0. \quad (42)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{dS}{dr} = \frac{C}{r}, \quad S = C \ln \frac{r}{r_0}, \quad (43)$$

$C \neq 0$, $r_0 > 0$ – действительные числа, тогда

$$\kappa(x) = \left| \frac{dS}{dr} \right| = \frac{|C|}{r}. \quad (44)$$

Геодезические в таком пространстве определяются уравнениями

$$\dot{x}^i = \frac{dS}{dx^i} \cdot \lambda(x), \quad (45)$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция, \dot{x}^i – производная x^i по параметру вдоль геодезической τ . Выберем $\lambda(x) = r$, тогда из (45) следует, что

$$\dot{x}^i = x^i. \quad (46)$$

Пусть $j > 1$, тогда

$$\frac{dx^j}{dx^1} = \frac{x^j}{x^1} \quad \Rightarrow \quad x^j = C^j x^1, \quad (47)$$

то есть геодезические в таком пространстве – это прямые линии, проходящие через начало координат с направляющим вектором $(1, C^2, C^3, \dots, C^n)$.

2 Пространства, конформно связанные с псевдоевклидовыми пространствами с сигнатурой $(+, -, -, \dots, -)$

Пространство, конформно связанное с n -мерным псевдоевклидовым пространством с сигнатурой $(+, -, -, \dots, -)$, обладает элементом длины

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^{n-1})^2}, \quad (48)$$

где $\kappa(x) > 0$. Так как в этом случае

$$\sqrt{(-1)^{n-1} \det(g_{ij})} = \kappa^n(x), \quad (49)$$

лагранжиан имеет вид

$$\mathfrak{L} = \kappa^n(x). \quad (50)$$

Для того, чтобы получить из такого лагранжиана уравнение поля, надо выразить скалярное поле $\kappa(x)$ через другое поле так, что лагранжиан уже будет содержать производные нового поля [5], [6].

Обобщенные импульсы в пространстве (48) определяются формулами

$$p_0 = \frac{\kappa(x) dx^0}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^{n-1})^2}}, \quad p_\mu = -\frac{\kappa(x) dx^\mu}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^{n-1})^2}}, \quad (51)$$

$\mu = 1, 2, \dots, (n-1)$, а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать следующим образом:

$$p_0^2 - p_1^2 - \dots - p_{n-1}^2 - \kappa^2(x) = 0. \quad (52)$$

Скалярная функция $S(x)$, которая в пространстве x^0, x^1, \dots, x^{n-1} определяет нормальную конгруэнцию геодезических, должна удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2 = \kappa^2(x). \quad (53)$$

Таким образом,

$$\mathfrak{L} = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}}, \quad (54)$$

а уравнение поля (4) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \frac{\partial S}{\partial x^0} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}-1} \right\} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^1 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}-1} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Отметим, что для $n > 2$ это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка и это уравнение выполняется, если функция S удовлетворяет уравнению эйконала

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^1 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2 = 0.$$

Для того, чтобы уравнение поля (55) являлось волновым уравнением, функция S одновременно должна быть решением еще одного уравнения:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^1 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2 = const.$$

Для пространства, конформно связанного с двумерной псевдоевклидовой плоскостью (x, y) , уравнение (55) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0, \tag{56}$$

то есть в двумерном случае уравнение поля (55) – это волновое уравнение.

Найдем решение уравнения (55) в предположении, что функция S зависит только от интервала

$$s = \sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^{n-1})^2}. \tag{57}$$

Запишем для этого элемент объема, выделив в качестве одной из переменных интервал s , при интегрировании по гиперболическим углам возникнут трудности, которые аналогичны проблеме (16) и которые аналогично решаются, тогда

$$dV_s = s^{n-1} \left| \frac{dS}{ds} \right|^n ds \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{L}_s = s^{n-1} \left| \frac{dS}{ds} \right|^n, \tag{58}$$

а уравнение поля приобретает вид:

$$\frac{d}{ds} \left[s^{n-1} \left| \frac{dS}{ds} \right|^{n-1} \right] = 0. \tag{59}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{dS}{ds} = \frac{C}{s}, \quad S = C \ln \frac{s}{s_0}, \tag{60}$$

$C \neq 0, s_0 > 0$ – действительные числа, тогда

$$\kappa(x) = \left| \frac{dS}{ds} \right| = \frac{|C|}{s}. \tag{61}$$

Геодезические в таком пространстве определяются уравнениями

$$\dot{x}^0 = \frac{dS}{dx^0} \cdot \lambda(x), \quad \dot{x}^\mu = -\frac{dS}{dx^\mu} \cdot \lambda(x), \tag{62}$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция, \dot{x}^i – производная x^i по параметру эволюции τ , $\mu = 1, 2, \dots, n - 1$. Выберем $\lambda(x) = \frac{s^2}{|C|}$, тогда из (62) следует, что

$$\dot{x}^i = x^i, \tag{63}$$

или

$$\frac{dx^\mu}{dx^0} = \frac{x^\mu}{x^0} \quad \Rightarrow \quad x^\mu = C^\mu x^0, \tag{64}$$

то есть геодезические (экстремали) в таком пространстве – это прямые линии, проходящие через начало координат с направляющим вектором $(1, C^2, C^3, \dots, C^n)$. Интервал при этом изменяется тоже линейно относительно координаты x^0 ,

$$s = \sqrt{1 - (C^1)^2 - \dots - (C^{n-1})^2} \cdot x^0, \quad x^0 > 0. \quad (65)$$

Так как пространство, конформно связанное с пространством Минковского, мы будем ниже использовать для построения космологического уравнения, выпишем ряд формул этого раздела для $n = 4$, используя в них метрический тензор пространства Минковского ${}^o g_{ij}$:

связь между функцией $S(x)$ и коэффициентом растяжения-сжатия $\kappa(x)$ –

$${}^o g^{ij} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} = \kappa^2(x), \quad (66)$$

лагранжиан –

$$\mathfrak{L} = \left({}^o g^{ij} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} \right)^2, \quad (67)$$

уравнение поля –

$${}^o g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\partial S}{\partial x^l} \left({}^o g^{ij} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} \right) \right] = 0. \quad (68)$$

3 Модельное космологическое уравнение в пространстве, конформно связанном с пространством Минковского

Запишем уравнение (68) в предположении, что функция S имеет вид

$$S(x^0, r) = S_0 e^{-\gamma x^0} \psi(r), \quad (69)$$

где $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$, а γ и S_0 постоянные. Более просто получить уравнение поля такого вида, если в элементе объема перейти от пространственных координат x^1, x^2, x^3 к сферической системе координат и проинтегрировать по сферическим углам, тогда, опять же опуская постоянную, получим выражение для лагранжиана

$$\mathfrak{L} = r^2 \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 \right]^2, \quad (70)$$

а уравнение поля запишется следующим образом:

$$r^2 \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \frac{\partial S}{\partial x^0} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial S}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 \right] \right\} = 0. \quad (71)$$

Подставляя в это уравнение функцию $S(x^0, r)$ (69), получим

$$3\gamma^2 r^2 \psi \left[\gamma^2 \psi^2 - \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \right] - \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{d\psi}{dr} \left[\gamma^2 \psi^2 - \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \right] \right\} = 0. \quad (72)$$

Введем безразмерную переменную $\xi \equiv \gamma r$, тогда данное уравнение переписется следующим образом:

$$3\xi^2 \psi \left[\psi^2 - \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)^2 \right] - \frac{d}{d\xi} \left\{ \xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \left[\psi^2 - \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)^2 \right] \right\} = 0. \quad (73)$$

Так как это уравнение однородно по искомой функции, то будем ее искать в виде

$$\psi(\xi) = \psi_0 \exp\left(\int_0^\xi \varphi(\xi) d\xi\right), \quad (74)$$

ψ_0 – постоянная, которая при составлении функции S перемножается с постоянной S_0 , поэтому положим ее равной единице, $\psi_0 = 1$. Подставляя (74) в (73), имеем

$$\frac{d}{d\xi} [\xi^2 \varphi(1 - \varphi^2)] - 3\xi^2(1 - \varphi^2)^2 = 0, \quad (75)$$

или

$$\xi(1 - 3\varphi^2) \frac{d\varphi}{d\xi} + 2\varphi(1 - \varphi^2) - 3\xi(1 - \varphi^2)^2 = 0. \quad (76)$$

Не удалось получить аналитическое решение этого уравнения.

В области $\xi \ll 1$ будем искать решение в виде степенного ряда

$$\varphi \simeq A\xi + B\xi^2 + C\xi^3 + O(\xi^4). \quad (77)$$

Подставим это разложение в уравнение (76), приведем подобные и получим

$$\varphi \simeq \xi - \frac{1}{5}\xi^3 + O(\xi^4). \quad (78)$$

Движение пробных тел (звезд) происходит по геодезическим (экстремалиям) пространства с элементом длины

$$ds = \kappa(x^0, r) \sqrt{(dx^0)^2 - (dr)^2} \quad (79)$$

и тангенциальным уравнением индикатрисы

$$p_0^2 - p_r^2 = \kappa^2(x^0, r). \quad (80)$$

Для поля S (69), (74) коэффициент расширения-сжатия вычисляется по формуле

$$\kappa(x^0, r) = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2} = \gamma \cdot \sqrt{1 - \varphi^2} \cdot S(x^0, r). \quad (81)$$

Из этой формулы следует, что $|\varphi| < 1$. Уравнения движения в данном случае принимают вид

$$\dot{x}^0 = \frac{\partial S}{\partial x^0} \lambda = -\gamma S \lambda, \quad \dot{r} = -\frac{\partial S}{\partial r} \lambda = -\gamma S \varphi(\gamma r) \lambda, \quad (82)$$

где точка означает полную производную по некоторому параметру эволюции τ , а произвольная функция $\lambda \neq 0$. Тогда

$$\frac{dr}{dx^0} = \varphi(\gamma r) \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = c\varphi(\gamma r). \quad (83)$$

Так как $|\varphi| < 1$, то

$$\left| \frac{dr}{dx^0} \right| < 1 \quad \text{и} \quad \left| \frac{dr}{dt} \right| < c.$$

Посмотрим, как ведет себя скорость пробного тела в области $\xi \ll 1$, для этого подставим (78) в полученную формулу:

$$\frac{dr}{dt} = c\gamma \left(1 - \frac{1}{5}\gamma^2 r^2\right) \cdot r. \quad (84)$$

Если обозначить постоянную Хаббла через H_0 , то полученная формула дает нам хорошее выполнение закона Хаббла при $\gamma r < \frac{1}{10}$, причем $H_0 = c\gamma$, и тенденцию того, как первоначально должна изменяться "постоянная Хаббла" $H(r)$ с увеличением расстояния от центра:

$$\frac{dr}{dt} = H(r) \cdot r, \quad H(r) = H_0 \cdot \left[1 - \frac{1}{5} \left(\frac{H_0}{c}\right)^2 \cdot r^2\right]. \quad (85)$$

В области $\xi \ll 1$ она уменьшается с увеличением расстояния от начала координат.

Для того, чтобы сказать что-то о размерах Вселенной и зависимости $H(r)$ во всей области возможных значений переменной r , необходимо вначале исследовать поведение решения $\varphi(\xi)$ уравнения (76), которое (решение) при $\xi \rightarrow 0$ имеет вид (78). Ни аналитически, ни численно нам не удалось этого сделать, так как при приближении к значению $\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ поведение такого решения становится весьма сложным (неустойчивым). Если предположить, что решение уравнения (76) будет получено и исследовано, то общий вид величины $H(r)$ можно будет записать следующим образом:

$$H(r) = H_0 \cdot \left[\frac{\varphi\left(\frac{H_0 r}{c}\right)}{\frac{H_0 r}{c}} \right]. \quad (86)$$

Если рассмотреть траектории движения в пространстве x^0, x^1, x^2, x^3 с Мировой функцией S (69), они (траектории) будут определяться уравнениями

$$\frac{dx^\mu}{dx^0} = \varphi(\gamma r) \frac{x^\mu}{r},$$

т. е. движение происходит по лучам, исходящим из начала координат, а значит пробные частицы движутся прямолинейно, но, конечно, движение является неравномерным.

Так как пространство с элементом длины (79) является псевдоримановым с метрическим тензором

$$g_{ij}(x^0, r) = \kappa^2(x^0, r) \cdot \overset{\circ}{g}_{ij}, \quad (87)$$

где $\overset{\circ}{g}_{ij}$ – метрический тензор пространства Минковского и

$$\kappa(x^0, r) = \gamma S \sqrt{1 - \varphi^2}, \quad (88)$$

то для него можно найти тензор кривизны и его свертки, а также непосредственно из уравнений Эйнштейна можно получить тензор энергии-импульса материи T_{km} , который фигурирует в уравнениях Эйнштейна и который соответствует пространству с метрическим тензором (87). Заметим, что уравнения гравитационного поля, конечно, при таком тензоре энергии-импульса материи выполняются автоматически, но с тензором T_{km} нельзя, вообще говоря, связывать законы сохранения энергии и импульса.

Введем удобное обозначение

$$a = \ln(\kappa^2 / const). \quad (89)$$

Тогда, используя известные классические формулы, получим выражения:

для объекта связности –

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a}{\partial x^l} \delta_k^i + \frac{\partial a}{\partial x^k} \delta_l^i - \overset{\circ}{g}^{\circ is} \frac{\partial a}{\partial x^s} \overset{\circ}{g}_{kl} \right), \quad (90)$$

тензора кривизны –

$$\begin{aligned} R_{klm}^i &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^l \partial x^k} \delta_m^i - \frac{\partial^2 a}{\partial x^k \partial x^m} \delta_l^i - \overset{\circ}{g}^{\circ is} \frac{\partial^2 a}{\partial x^l \partial x^s} \overset{\circ}{g}_{km} + \overset{\circ}{g}^{\circ is} \frac{\partial^2 a}{\partial x^m \partial x^s} \overset{\circ}{g}_{kl} \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \left(\frac{\partial a}{\partial x^m} \frac{\partial a}{\partial x^k} \delta_l^i - \frac{\partial a}{\partial x^l} \frac{\partial a}{\partial x^k} \delta_m^i - \overset{\circ}{g}^{\circ ns} \frac{\partial a}{\partial x^n} \frac{\partial a}{\partial x^s} \delta_l^i \overset{\circ}{g}_{km} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial a}{\partial x^l} \overset{\circ}{g}_{km} \overset{\circ}{g}^{\circ is} \frac{\partial a}{\partial x^s} + \overset{\circ}{g}^{\circ ns} \frac{\partial a}{\partial x^n} \frac{\partial a}{\partial x^s} \delta_m^i \overset{\circ}{g}_{kl} - \frac{\partial a}{\partial x^m} \overset{\circ}{g}_{kl} \overset{\circ}{g}^{\circ is} \frac{\partial a}{\partial x^s} \right), \end{aligned} \quad (91)$$

тензора Риччи –

$$R_{km} \equiv R_{klm}^l = \frac{1}{2} \left(-2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^k \partial x^m} - \overset{\circ}{g}^{\circ ns} \frac{\partial^2 a}{\partial x^n \partial x^s} \overset{\circ}{g}_{km} + \frac{\partial a}{\partial x^k} \frac{\partial a}{\partial x^m} - \overset{\circ}{g}^{\circ ns} \frac{\partial a}{\partial x^n} \frac{\partial a}{\partial x^s} \overset{\circ}{g}_{km} \right), \quad (92)$$

скалярной кривизны пространства –

$$R \equiv g^{km} R_{km} = \frac{1}{\kappa^2} \overset{\circ}{g}^{\circ km} R_{km} = -\frac{3}{\kappa^2} \left(2 \overset{\circ}{g}^{\circ km} \frac{\partial^2 a}{\partial x^k \partial x^m} + \overset{\circ}{g}^{\circ km} \frac{\partial a}{\partial x^k} \frac{\partial a}{\partial x^m} \right), \quad (93)$$

тензора энергии-импульса материи –

$$T_{km} = \frac{c^4}{8\pi k} \left(R_{km} - \frac{1}{2} \kappa^2 \overset{\circ}{g}_{km} R \right), \quad (94)$$

где k – гравитационная постоянная, тогда

$$T \equiv g^{km} T_{km} = \frac{1}{\kappa^2} \overset{\circ}{g}^{\circ km} T_{km} = -\frac{c^4}{8\pi k} R. \quad (95)$$

Но так как мы "независимы" от уравнений гравитационного поля Эйнштейна, то мы можем вычислить полный тензор энергии-импульса \hat{T}_{km} . Для лагранжиана поля \mathfrak{L} (67) получим

$$\hat{T}_m^k = \frac{\partial S}{\partial x^m} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \frac{\partial S}{\partial x^k}} - \delta_m^k \mathfrak{L} = 4 \overset{\circ}{g}^{\circ ks} \frac{\partial S}{\partial x^s} \frac{\partial S}{\partial x^m} \left(\overset{\circ}{g}^{\circ rs} \frac{\partial S}{\partial x^r} \frac{\partial S}{\partial x^s} \right) - \delta_m^k \left(\overset{\circ}{g}^{\circ rs} \frac{\partial S}{\partial x^r} \frac{\partial S}{\partial x^s} \right)^2, \quad (96)$$

свернув по имеющимся двум индексам, получим

$$\hat{T}_k^k \equiv 0. \quad (97)$$

Итак, тензоры T_{km} и \hat{T}_{km} качественно различаются.

4 Пространство, конформно связанное с четырехмерным пространством Бервальда-Моора

Элемент длины в таком пространстве в специальном изотропном базисе имеет вид

$$ds = \kappa(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}. \quad (98)$$

Обобщенные импульсы находятся по формулам

$$p_i = \frac{1}{4} \kappa(\xi) \frac{\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}}{d\xi^i}. \quad (99)$$

Если $\eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4$ – координаты касательного центроаффинного пространства в точке $M(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ основного пространства, то уравнение индикатрисы запишется

$$\eta^1 \eta^2 \eta^3 \eta^4 = \frac{1}{\kappa^4(\xi)}, \quad (100)$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать, например, так

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4}. \quad (101)$$

Тогда функция S , определяющая нормальную конгруенцию геодезических, удовлетворяет следующему нелинейному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} = \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4}. \quad (102)$$

Из формулы (100) следует, что

$$(V_{ind})_{ev} = const \cdot \frac{1}{\kappa^4}, \quad (103)$$

а значит, лагранжиан скалярного поля S запишется следующим образом:

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} \frac{\partial S}{\partial \xi^4}. \quad (104)$$

Соответственно уравнение поля имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^4} \left(\frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} \right) = 0. \quad (105)$$

Любая функция S , зависящая не от всех координат $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ удовлетворяет этому уравнению.

Пусть поле S зависит только от одной величины

$$s = \sqrt[4]{\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4}. \quad (106)$$

Подставляя $S(s)$ в уравнение поля (105) и используя формулу

$$\frac{\partial s}{\partial \xi^i} = \frac{1}{4} \frac{s}{\xi^i}. \quad (107)$$

получим

$$\frac{d}{ds} \left(s \frac{dS}{ds} \right) = 0. \quad (108)$$

Это же уравнение можно получить более просто, если записать элемент объема

$$dV = \mathfrak{L} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4, \quad (109)$$

выделив переменную s и три угловые переменные, а затем "проинтегрировать" по углам

$$dV_s = s^3 \left(\frac{dS}{ds} \right)^4 ds. \quad (110)$$

Интегрируя уравнение (108), получим

$$S(s) = S_0 \ln \frac{s}{s_0} \quad (111)$$

(S_0, s_0 – постоянные интегрирования), а также выражение для коэффициента растяжения-сжатия κ ,

$$\kappa = \frac{|A|}{s}. \quad (112)$$

Интересно сравнить последние две формулы с формулами (43), (44) и (60), (61).

Найдем траектории движения пробных частиц в четырехмерном пространстве Бервальда-Моора, если функция S , определяющая конгруенцию геодезических, имеет вид (111), то есть коэффициент растяжения-сжатия определяется формулой (112). Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$\dot{\xi}^i = \frac{\frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} \frac{\partial S}{\partial \xi^4}}{\frac{\partial S}{\partial \xi^i}} \lambda(\xi), \quad (113)$$

где $\lambda(\xi) \neq 0$ – некоторая скалярная функция. С учетом формулы (107) и при соответствующем выборе $\lambda(\xi)$, уравнения движения принимают более простой вид

$$\dot{\xi}^i = \xi^i. \quad (114)$$

Введем переменную

$$x^0 = \xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4, \quad (115)$$

которая в четырехмерном пространстве Бервальда-Моора играет ту же роль, что и координата x^0 в пространстве Минковского, тогда

$$\frac{d\xi^i}{dx^0} = \frac{\xi^i}{x^0} \quad \Rightarrow \quad \xi^i = \xi_0^i \cdot x^0, \quad (116)$$

где ξ_0^i – постоянные. Таким образом, все траектории движения – прямые линии, проходящие через начало координат, причем движение пробных тел является равномерным и прямолинейным относительно временной переменной x^0 .

Заключение

Предложенный новый однозначного построения лагранжиана полей по метрической функции финслера пространства требует представления полей, которые входят в лагранжиан без своих частных производных по координатам, через другие поля так, чтобы частные производные по координатам от новых полей обязательно входили в лагранжиан, иначе не получить полевые уравнения как дифференциальные уравнения в

частных производных. Таким образом, искусство построения лагранжианов заменяется искусством представления физических полей через некоторые другие поля.

Для n -мерных римановых или псевдоримановых пространств с метрическим тензором $g_{ij}(x)$, лагранжиан

$$\mathfrak{L} = \sqrt{|\det(g_{ij}(x))|}.$$

Метрический тензор $g_{ij}(x)$ можно представить, например, следующим образом:

$$g_{ij}(x) = \sum_{a=1}^N \varepsilon_{(a)} \frac{\partial f_{(a)}}{\partial x^i} \frac{\partial f_{(a)}}{\partial x^j},$$

где $\varepsilon_{(a)} = \pm 1$ – независимые знаковые множители, $f_{(a)}(x)$ – скалярные функции, причем $N \geq n$. Если $N < n$, то $\det(g_{ij}(x)) = 0$.

Литература

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М., "Наука", 1967.
- [2] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., "Наука", 1973.
- [3] Нетер Э., Инвариантные вариационные задачи: Вариационные принципы механики, сб. статей под ред. Полака Л. С., М., "ГИФМЛ", 1959, стр. 611–630.
- [4] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
- [5] Гарасько Г. И., О Мировой функции и связи между геометриями. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (5), т. 3 (2006), стр. 3–18.
- [6] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г., Конструирование псевдоримановой геометрии на основе геометрии Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (5), т. 3 (2006), стр. 19–27.

Статья поступила в редакцию 20 декабря 2006 г.

Field Theory in Finsler spaces

G. I. Garas'ko

*Electrotechnical institute of Russia
gri9z@mail.ru*

The paper proposes to build a Lagrangian of fields, depending only on the metric function of the Finsler space, namely the inverse of the volume covered by the unit vector which describes all the points of the indicatrix in the tangent space endowed with Euclidean structure. For the space, which is conformally related to the Minkowski space, assuming the exponential dependence on time and the spherical symmetric dependence on coordinates, the cosmologic equation is obtained. From this, for distances to the origin of coordinates much less than the dimension of the Universe, it follows that the Hubble law holds true. Further, we obtain the cosmologic equation of the field which describes the Universe - endowed with the geometry conformally related to the Berwald-Moor structure of the polynumbers H_4 .

Key-words: Lagrangian, indicatrix, volume, Field theory, the Hubble law, Berwald-Moor metric, Finsler structure.

MSC: 70H03, 53A30, 53B40.

СИММЕТРИИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Д. Г. Павлов

МГТУ им. Н. Э. Баумана

geom2004@mail.ru

"Важны не вещи, а принципы симметрии"

С. Вайнберг

В пространствах, метрические формы которых связаны не с квадратичными зависимостями дифференциала длины от дифференциалов компонент, а с третьими и более высокими степенями, наравне с длинами и углами должны рассматриваться их обобщения, являющиеся мерами фигур, построенных на трех и более векторах. При фиксации этих дополнительных базовых величин в качестве инвариантов, помимо изометрических и конформных симметрий появляется место для новых классов непрерывных метрически выделенных преобразований. Рассмотрение этих классов симметрий может оказаться перспективным в физических приложениях некоторых финслеровых пространств.

Выдвигается также гипотеза, что кроме гиперкомплексных чисел, которым естественным образом сопоставляются векторы, могут существовать более интересные гиперкомплексные системы, которым вместо векторов сопоставляются тензоры произвольной валентности. Особую роль в таких гиперкомплексных системах и в соответствующих им тензорных пространствах могут играть уже не бинарные, а n -арные операции, а фундаментальная роль групп симметрий переходит к n -арным обобщениям последних.

Ключевые слова: симметрии, инварианты.

1. Введение

Не так давно был установлен важный геометрический факт в отношении четырехмерного пространства с метрикой Бервальда-Моора: если бы в нем могли "жить" наблюдатели типа нас, и если бы они использовали для ориентации в основном низкоскоростные сигналы, то с их точки зрения Мир вокруг вполне естественно расщеплялся бы на одно временное и три пространственных измерения, причем последние образовывали бы почти евклидово подпространство [1]. При этом разница между геометрией такого трехмерия и обычного евклидова пространства достаточно часто оказывалась бы исчезающе малой. Этот вывод связан с тем обстоятельством, что наблюдатель для ориентации в окружающем его пространстве-времени вынужден пользоваться так называемым радарным методом [2], заключающимся в сравнении временных интервалов, прошедших по его собственным часам с теми, что прошли по часам посылаемых и принимаемых им с разных сторон сигналов. Именно такой метод мы, как раз, и применяем в реальности и именно он оказывается ответственным за то, что пространство с метрикой Бервальда-Моора, являющееся на самом деле совершенно равноправным по всем своим четырем направлениям, субъективно представляется асимметричным и расслоенным на три плюс одно принципиально различные измерения.

Этот довольно неожиданный эффект позволяет рискнуть пойти еще дальше и выдвинуть почти абсурдное предположение, что таким же симметричным образом могут быть устроены не только пространственно-временные измерения, но и все фундаментальные взаимодействия. Другими словами, вполне возможны абсолютно симметричные Миры, которые "насекающим их наблюдателям", из-за субъективности точек зрения каждого из них, представляются сильно асимметричными, причем не только в плане пространства-времени, но и заполняющих его полей.

2. Группы и n -группы симметрий

Утверждение, что понятие симметрии должно стоять рядом с такими фундаментальными категориями, как пространство, время, материя, уже давно не вызывает сомнений. Ярким примером может служить знаменитая эрлангенская программа Феликса Клейна [3], в которой он, по сути, обозначил основную задачу исследования любой геометрии, как изучение групп соответствующих ей симметрий. Однако представляется, что истинное место и роль симметрий в организации нашего Мира все еще достаточно далеки от своего полного осмысления, как среди математиков, так и среди физиков. Основанием к такому, казалось бы, уничижительному заключению может служить простое наблюдение, что в основе понятия группы симметрий лежит связь с бинарными операциями, тогда как природа математических операций сама по себе совсем не указывает на бинарность, как на единственно выделенное отношение. Более того, логика действительно последовательных исследований просто требует, чтобы наравне с бинарными операциями рассматривались и n -арные. Потенциальную плодотворность такого подхода демонстрируют интересные результаты, полученные на основе замены билинейной симметрической формы, лежащей в основе понятия метрики, на полилинейную [4]. Возникающее в результате подобного обобщения скалярное полипроизведение приводит нас к некоему подобию n -арной операции, что порождает уже не обычные евклидовы или псевдоевклидовы геометрии, а линейные финслеровы пространства.

Упомянутый выше факт, что среди последних встречаются представители, которые могут не только на равных, но и с серьезным преимуществом конкурировать с пространствами Галилея и Минковского [5], позволяет предположить целесообразность следующих шагов в том же направлении. В частности, было бы крайне любопытно выяснить, к каким фундаментальным построениям мы смогли бы прийти, если бы помимо привычных бинарных операций стали рассматривать и их n -арные разновидности не только для получения скалярных величин, но векторных и даже тензорных. Конечно, подобные вопросы уже отчасти рассматриваются математиками и физиками, например, в работах связанных с n -лиевыми алгебрами [6] и в некоторых других [7], но проблема заключается в том, чтобы применить данную логику к совершенно иной геометрии пространства-времени, чем привычные пространства Галилея или Минковского.

3. Группы непрерывных симметрий пространств Бервальда-Моора

Мы попробуем проанализировать непрерывные симметрии не применительно к геометриям "вообще", а отталкиваясь от пространств с метриками Бервальда-Моора. Их удивительной особенностью является не только абсолютная симметрия, но и тесная связь с коммутативно-ассоциативными алгебрами, во многом оказывающимися близкими родственниками алгебры комплексных чисел. Простейшим представителем такого ряда является одномерное пространство, которому соответствует алгебра действительных чисел. Метрическую функцию данного пространства можно представить в виде:

$$dS = dt.$$

Непрерывные симметрии этого пространства, которое в некотором смысле можно интерпретировать как одномерное время, связаны с однопараметрической группой трансляций. Заметим, что последней в алгебраическом плане соответствует операция сложения.

Для двумерного пространства с метрикой Бервальда-Моора метрическая функция принимает наиболее простой и симметричный вид в так называемом изотропном базисе, связанном с векторами нулевой длины:

$$dS^2 = da_1 da_2. \quad (1)$$

Соответствующий базис трудно представить физически, поскольку он состоит из векторов, лежащих на световом конусе. Переходя к компонентам, возникающим уже в обычном ортонормированном базисе, которые выражаются через старые компоненты соотношениями:

$$dt = da_1 + da_2; \quad dx = da_1 - da_2,$$

получаем существенно более привычную форму:

$$dS^2 = dt^2 - dx^2.$$

Как видим, двухмерное пространство Бервальда-Моора и псевдоевклидова плоскость – одно и то же.

Непрерывные симметрии этого пространства по сравнению с одномерным примером уже достаточно сложны и разнообразны. Данное обстоятельство можно проиллюстрировать следующим образом. Как известно, каждой квадратичной форме взаимно однозначным образом ставится в соответствие билинейная симметрическая форма от двух векторов, которая в данном конкретном случае метрики (1) наиболее простой вид приобретает в изотропном базисе:

$$(A, B) = 1/2(a_1b_2 + a_2b_1),$$

откуда выражение для квадрата интервала получается подстановкой в данную форму одного и того же вектора A :

$$(A, A) = \|A\|^2 = a_1a_2.$$

Если зафиксировать величину $\|A\|$ в качестве инварианта, то непрерывные преобразования, оставляющие этот параметр между всеми парами точек неизменным, образуют трехпараметрическую группу, разделяющуюся на двухпараметрическую подгруппу трансляций и однопараметрическую группу гиперболических поворотов (одномерных бустов). Кстати, здесь снова, как и в одномерном случае, можно наблюдать соответствие трансляций операции сложения, а вот вращениям уже соответствует вторая фундаментальная операция – умножение. Вернее сказать, вращениям соответствует операция умножения на число единичного модуля.

В двухмерном пространстве с метрикой Бервальда-Моора помимо длин векторов появилась еще одна метрическая величина, которая также может выступать самостоятельным инвариантом. Эта величина – угол. Чисто формально угол между двумя векторами можно определить как действительное число равное некоторой специальной функции от билинейной формы, в которую в качестве аргументов входят два единичных вектора $a = A/\|A\|$, $b = B/\|B\|$, связанные с рассматриваемыми направлениями:

$$\alpha = f((a, b)),$$

Вид и геометрический смысл функции f определяется требованиями, предъявляемыми к свойствам понятия угла. Так, если пожелать аддитивности сложения углов при поворотах, эта функция оказывается гиперболическим арккосинусом.

Возвращаясь к вопросу перечисления метрически выделенных преобразований, которые оставляют инвариантными не длины, а углы, мы получаем непрерывную группу, однако существенно более широкую, чем изометрии. Это группа так называемых конформных преобразований псевдоевклидовой плоскости. Она определяется условиями, аналогичными условиям Коши-Римана на комплексной плоскости, с той разницей, что для двух сопряженных функций U и V теперь справедливо иное соотношение знаков:

$$\partial U/\partial t = \partial V/\partial x, \quad \partial U/\partial x = \partial V/\partial t.$$

Еще более просто эти условия записываются в изотропном базисе:

$$\partial P_1 / \partial a_2 = 0; \quad \partial P_2 / \partial a_1 = 0.$$

Группа конформных преобразований псевдоевклидовой плоскости по своему разнообразию абсолютно ничем не отличается от своего аналога на евклидовой плоскости, а потому представляется удивительным, почему для комплексных чисел имеются многочисленные приложения, причем не только геометрические, но и физические, а в случае двухмерного пространства-времени ничего подобного не наблюдается. Возможно, дело в том, что псевдоевклидову плоскость привыкли рассматривать как упрощенный аналог четырехмерного пространства специальной теории относительности, для которого конформная группа не бесконечнопараметрическая, как на плоскости, а имеет всего лишь пятнадцать параметров (так называемая группа Боне-Метцера). Кроме того, если решиться интерпретировать конформные преобразования на псевдоевклидовой плоскости как переходы от одних систем отсчета к другим, в общем случае придется переосмысливать одно из основных положений СТО, согласно которому последняя имеет дело только с инерциальными системами отсчета. Самое неприятное, что даже если бы такая интерпретация завершилась непротиворечивым образом, расширить ее на четырехмерное пространство Минковского оказалось бы все равно невозможным именно по причине принципиального различия конформных групп. Однако, в рассматриваемом в настоящей работе случае мы реальное четырехмерное пространство-время пытаемся связывать не столько с геометрией Минковского, сколько с пространствами обладающими метрикой Бервальда-Моора, а это означает, что и вопрос об интерпретации конформных симметрий на двухмерной плоскости снова встает как один из центральных.

Заметим, что псевдоевклидова плоскость является не только частным случаем псевдориманова пространства, но и частным представителем существенно более широкого класса пространств, связываемых с именем Германа Вейля. Геометрия Вейля отличается от геометрии Римана тем, что после процедуры параллельного переноса по замкнутому контуру некоторого вектора тот не обязан совпадать сам с собой не только по первоначальному направлению, но и по длине. Кроме метрического тензора, изменяющегося от точки к точке и имеющего второй ранг, пространства Вейля характеризуются еще одним тензором, но уже первого ранга, который задает для каждой точки и ее ближайшей окрестности собственный масштаб. Естественно, что если этот масштаб и по величине и по направлению один и тот же, мы получаем обычное риманово пространство. Однако масштаб может изменяться не только в кривых римановых пространствах, он может быть переменным и в плоских геометриях. Таким образом, возвращаясь к рассматриваемой проблеме, у нас появляется заманчивая возможность связывать с произвольными конформными преобразованиями псевдоевклидовой плоскости переход от одной плоскости Вейля к другой.

Что удивительно, используя такой прием, мы получаем существенно более интересную модель плоского пространства-времени, чем это предполагает двухмерный аналог СТО. Пожалуй, самое важное отличие при этом заключается даже не в возможности рассматривать кроме инерциальных систем отсчета еще и некоторые особого вида неинерциальные – более существенным оказывается появление среди аксиом теории относительности новой аксиомы, допускающей переменные от события к событию масштабы. Ведь, по сути, это приводит нас к выводу о возможности существования таких плоских геометрий пространства-времени, в которых скорость течения времени меняется от точки к точке, причем закон, устанавливающий этот темп, оказывается не произвольным, а подчиняющимся одному из основных геометрических принципов – принципу симметрии (в данном случае – конформной).

Косвенным свидетельством обоснованности предлагаемого подхода может служить легкость, с которой он распространяется на комплексную плоскость. В этом случае каждому конформному отображению мы точно так же можем поставить в соответствие переход от одной плоскости Вейля к другой, только уже не с псевдоримановым, а с римановым метрическим тензором, одним и тем же в каждой точке.

Таким образом, перейдя от одномерного пространства Бервальда-Моора всего лишь к двумерному, мы не только получили возможность расширить внутренние непрерывные симметрии с конечнопараметрической группы на бесконечнопараметрическую, но даже смогли пересмотреть очевидность одного из основных допущений СТО о равномерности течения времени в плоских пространствах.

В трехмерном пространстве с метрикой Бервальда-Моора все оказывается еще более интересным. Метрическая функция этого пространства в изотропном базисе имеет также весьма лаконичный вид:

$$dS^3 = da_1 da_2 da_3,$$

при этом ей уже нельзя сопоставить скалярное произведение, как было в предыдущем примере. Зато для подобных пространств, как отмечалось выше, существует обобщение этого понятия [8], которое в рассматриваемом случае сводится к трилинейной симметрической форме от трех векторов и в изотропном базисе принимает вид:

$$(A, B, C) = 1/6 (a_1 b_2 c_3 + a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 + a_3 b_2 c_1). \quad (2)$$

Такое отклонение от классических правил построения метрических пространств, конечно же, не может пройти без последствий, в том числе, и для непрерывных симметрий. Изометрические преобразования, оставляющие инвариантными интервалы между произвольными парами точек, связанные с формами:

$$(A, A, A) = \|A\|^3$$

образуют пятипараметрическую группу и не содержат в себе практически ничего особенного, ну, разве что соответствующие группы таких же по размерности евклидова и псевдоевклидова пространств были шестипараметрическими. Однако, переходя к аналогам углов и определяемым теми аналогами конформных преобразований, мы сталкиваемся с первым сюрпризом. Дело в том, что, постулируя трилинейную симметрическую форму (2), с каждой парой единичных векторов $a = A/\|A\|$ и $b = B/\|B\|$ можно связывать уже не один, а два независимых параметра, в частности, определяемых как некоторые функции от форм:

$$\alpha = f_1((a, a, b)) \text{ и } \beta = f_2((a, b, b)).$$

Похоже, правда, несколько удобнее будет рассматривать их симметризованные и антисимметризованные линейные комбинации:

$$\alpha' = f_1'((a, a, b) + (a, b, b)) \text{ и } \beta' = f_2'((a, a, b) - (a, b, b)),$$

Естественно предположить, что каждый из таким образом определяемых углов задает свой собственный тип конформных преобразований, среди которых особенными свойствами будут выделяться преобразования, сохраняющие оба угла. Именно последние и будем считать прямыми аналогами обычных конформных преобразований. Группа таких преобразований, как и в двумерном случае, оказывается бесконечнопараметрической, а в алгебраическом плане с ней возможно связать понятие, аналогичное аналитической функции. Условия такой аналитичности, обобщающие условия Коши-Римана

для двухмерной плоскости, сводятся к существованию трех сопряженных скалярных функций P_1, P_2, P_3 , таких что:

$$\begin{aligned} \partial P_1 / \partial a_2 = 0; \quad \partial P_1 / \partial a_3 = 0; \quad \partial P_2 / \partial a_1 = 0; \\ \partial P_2 / \partial a_3 = 0; \quad \partial P_3 / \partial a_1 = 0; \quad \partial P_3 / \partial a_2 = 0, \end{aligned}$$

или другими словами, в изотропном базисе каждая из них зависит только от одной координаты.

Хотя конструкции таким способом определяемых аналитических функций на алгебре тройных чисел и соответствующих им конформных преобразований не особенно сложны, их класс достаточно широк, а следствия, с учетом сказанного выше на счет переменного в каждой точке масштаба, далеко не очевидны. Во всяком случае, они заслуживают того, чтобы их свойства изучались достаточно подробно. Однако сейчас мы не будем этого делать, а последуем дальше.

Точно так же, как скалярное произведение от двух векторов дает основания для введения, кроме длины, еще одного метрического параметра – угла, определенная на трехмерном пространстве Бервальда-Моора трилинейная симметрическая форма дает основания рассматривать совершенно непривычную для обычных геометрий величину, являющуюся действительной метрической характеристикой уже трех направлений. Такую величину, назовем ее *трингл*, условимся связывать с некоторой тригонометрической функцией от формы:

$$f((a^*, b^*, c^*)) = \text{tringl},$$

в которую входят не просто единичные вектора, а попарно образующие "единичные" углы. Понятие "единичного" угла в пространствах типа Бервальда-Моора следует связывать с обобщением ортогональности.

Понятие трингла не просто отличает рассматриваемую, в общем-то достаточно простую, трехмерную геометрию от привычных римановых и псевдоримановых пространств, оно отличает их *кардинально*. Дело в том, что длина и угол, вокруг которых и было сосредоточено построение геометрии все несколько тысячелетий ее развития, начиная с Евклида и даже до него, теперь перестают быть уникальными метрическими характеристиками, и уступают часть своего безраздельного господства новым участникам, среди которых тринглы – это только первые члены бесконечного ряда. И тринглы, и их дальнейшие обобщения – абсолютно геометрические понятия, но, при этом, им нет аналогов в нашем геометрическом сознании. Собственно, именно поэтому их наличие в геометрии так долго и было скрыто от внимания математиков. Теперь же ситуация меняется и у нас в связи с этим, возможно, появляются вполне реальные шансы совершенно иначе взглянуть на взаимоотношения геометрии и квантовой механики, которые, как известно, были принципиально несовместимы, пока первая в лице ОТО строилась вокруг лишь таких фундаментальных понятий, как длины и углы.

Требование сохранения инвариантности тринглов при некотором классе преобразований трехмерного пространства с метрикой Бервальда-Моора или, что тоже самое, пространства тройных чисел H_3 , с необходимостью приведет к обобщению ранее полученных условий (3) на более интересные. Какими окажутся эти условия и связанные с ними отображения, мы не будем сейчас определять. Ясно одно: именно такого рода преобразованиями многомерные пространства Бервальда-Моора и должны составить самую серьезную конкуренцию римановым и псевдоримановым многообразиям.

В случае четырехмерного Бервальда-Моора все построения можно повторить. В результате мы придем к одной форме для интервала вектора, трем формам для аналогов углов, к трем – для аналогов тринглов и еще к одной форме от четырех векторов –

квадрауглу. Естественно, что за каждым из этих новых понятий и за их комбинациями стоят свои собственные непрерывные группы метрически выделенных преобразований, или иными словами, симметрий. Конечно, эти симметрии еще только предстоит классифицировать и изучить, однако уже сейчас понятно, что потенциал стоящий за их разнообразием весьма высок, причем не только в плане абстрактной геометрии, но и применительно к физике.

4. Группы симметрий пространства Чернова

Пожалуй, здесь будет также уместно отметить, что помимо рассмотренных выше пространств с метрикой Бервальда-Моора и размерностью от единицы до четырех, определенный интерес представляет еще одно пространство: четырехмерное, но с кубической метрической формой:

$$dS^3 = dx_1 dx_2 dx_3 + dx_1 dx_2 dx_4 + dx_1 dx_3 dx_4 + dx_2 dx_3 dx_4. \quad (3)$$

Метрическую функцию такого вида условимся называть метрикой Чернова по фамилии российского математика, впервые обратившего на нее внимание в контексте применимости к реальному пространству-времени [9]. Логичность предположения Чернова вытекает из наблюдения, что метрическая форма пространства Минковского в специальном изотропном базисе принимает вид симметрического многочлена от четырех переменных второй степени:

$$dS^2 = dx_1 dx_2 + dx_1 dx_3 + dx_1 dx_4 + dx_2 dx_3 + dx_2 dx_4 + dx_3 dx_4,$$

что хоть и не кажется очевидным, на самом деле, как не сложно проверить обычной линейной подстановкой, является эквивалентным выражением для более часто употребляемой квадратичной формы:

$$dS^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

В том же ключе можно проинтерпретировать и пространство с метрической функцией в виде симметрического многочлена от четырех переменных первой степени:

$$dS^1 = dx_1 + dx_2 + dx_3 + dx_4. \quad (4)$$

Такое пространство оказывается тесно связанным с линейной зависимостью временного интервала, характерной для геометрии Галилея, то есть с представлениями о времени, свойственными классической физике.

Таким образом, было бы, наверное, просто странно, если б из четырех симметрических многочленов от четырех переменных, принимаемых в качестве фундаментальных метрических форм, одна оказалась бы исключением и не нашла бы своего отражения в реальной физике. Скорее уж, следует удивляться не гипотезе Чернова, а тому, почему она не появилась значительно раньше.

Конечно, пространство Чернова просто обязано обладать собственным своеобразием и существенно отличаться, как от пространства Минковского, так и от пространства Галилея, вернее, того пространства, что связано с линейной метрической формой (4). Однако, представляется что третья степень метрической формы, все же, несколько ближе к привычным нам квадратичным представлениям и пространство Чернова вполне может послужить своеобразным мостиком в изучении столь необычной и сложной геометрии, которой обладает финслерово пространство с метрической формой Бервальда-Моора четвертой степени. В данном контексте именно пространство Чернова, по-видимому,

может лучше всего помочь разобраться с пониманием не только обычных симметрий, но и тех, что объективно оказываются за рамками понятия группы, то есть, связаны не с бинарными, а уже с тернарными операциями.

Поскольку метрика Чернова кубическая, геометрия ей соответствующая, в первую очередь, должна содержать тернарные свойства. В частности, это проявляется в том, что роль скалярного произведения в ней играет трилинейная форма от трех векторов A, B и C , которая в одном из наиболее удобных базисов принимает вид:

$$(A, B, C) = 1/6 (a_1 b_2 c_3 + a_1 b_2 c_4 + a_1 b_3 c_2 + \dots + a_4 b_3 c_1 + a_4 b_3 c_2). \quad (5)$$

Как нетрудно проверить, при подстановке в данную форму три раза одного и того же вектора A , получается выражение эквивалентное (3) и его по аналогии с квадратом интервала обычного вектора можно связывать с кубом интервала вектора пространства Чернова:

$$(A, A, A) = \|A\|^3 = a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4. \quad (6)$$

Естественно, что столь лаконичный вид метрической формы, при переходе к другому базису будет меняться. В частности, при переходе к "ортонормированному" базису, связанному с изотропными координатами соотношениями:

$$\begin{aligned} a_1 &= t + x + y + z, & a_2 &= t - x + y - z \\ a_3 &= t + x - y - z, & a_4 &= t - x - y + z \end{aligned} \quad (7)$$

форма (6) принимает вид:

$$\|A\|^3 = 4t(t^2 - x^2 - y^2 - z^2) + 8xyz.$$

Удивительным образом в таком представлении метрической формы соединились воедино и линейная по времени метрика Галилея (t), и квадратичная Минковского ($t^2 - x^2 - y^2 - z^2$), и кубическая форма трехмерного пространства Бервальда-Моора (xyz). Все это лишней раз подчеркивает определенную взаимосвязь всех вариантов метрик, выражаемых симметрическими многочленами.

Использование для базиса связанного с координатами t, x, y, z термина "ортонормированный", хотя тот и заключен в кавычки, следует сопроводить специальным замечанием. Дело в том, что понятие ортогональности векторов в классическом смысле вытекает из билинейной симметрической формы, а у нас ее место занимает уже трилинейная форма. Кроме того, подставляя в форму (6) три раза любой из векторов X, Y, Z , имеющих в соответствии с (7) изотропные координаты $(1, -1, 1, -1)$, $(1, 1, -1, -1)$ и $(1, -1, -1, 1)$, получаем:

$$\begin{aligned} (X, X, X) &= \|X\|^3 = 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = 0; \\ (Y, Y, Y) &= \|Y\|^3 = 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = 0; \\ (Z, Z, Z) &= \|Z\|^3 = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Оказывается, кубы "длин" этих векторов равны нулю, как и у изотропных векторов пространства Минковского. Следовательно, о "нормированности", или единичности соответствующего базиса в обычном смысле, не может быть и речи. И все же, мы утверждаем, что термин "ортонормированности" для приведенной четверки достаточно уместен. Это, на первый взгляд парадоксальное заключение, связано с фундаментальным для физики понятием относительной одновременности. Впрочем, последовательным обоснованием данного утверждения, как и многим другим, что упоминалось выше, мы займемся в другой раз.

Настоящая работа не предполагает всестороннего исследования геометрий пространств Чернова и Бервальда-Моора, или связанных с ними n -арных операций и симметрий. Ее задача – на нескольких примерах попытаться обозначить максимально широкий круг идей, которые можно было бы в последующем развить и положить в основу более глубоких представлений о геометрии, чем обозначено в той же эрлангенской программе. Одной из таких идей является возможным образом обобщить геометрию не только Римана, но и Вейля. Как известно в этих многообразиях в каждой точке задаются один (геометрия Римана) или два (геометрия Вейля) тензора. Мы же, беря за основу пространство Чернова, можем рассматривать в одной точке совокупность сразу трех тензоров, а для обобщения четырехмерного пространства Бервальда-Моора – даже четыре тензора, по одному на каждую из валентностей от единицы до четырех. Совокупность именно этой четверки тензоров, быть может, когда ни будь и позволит с единых геометрических позиций описать если не все, то хотя бы два фундаментальных взаимодействия, не выходя за рамки четырех измерений. Во всяком случае, и теория Эйнштейна, и теория Вейля должны оказаться упрощенными частными случаями этой новой пока еще не созданной теории и хотя ее появление, без всякого сомнения, будет сопряжено с определенными трудностями, скорее всего, это просто вопрос времени.

5. N -арные операции и числа-матрицы

Однако даже такой солидный потенциал, что был предсказан для некоторых финслеровых пространств выше, еще не исчерпывает всех возможных связанных с ними сюрпризов, правда, надо признать, что наши дальнейшие построения во многом будут носить уже спекулятивный характер.

До сих пор мы хоть и основывали свои построения на практически n -арной операции скалярного полипроизведения, в основе определяемых ею геометрий, все же, так или иначе фигурировали бинарные операции, связанные с аксиоматическим определением алгебр H_n и функций над ними. Однако алгебры и операции могут быть не только бинарными, но и n -арными.

С другой стороны, обращает на себя внимание удивительный факт, что одно из самых значимых понятий в современной геометрии – вектора, часто имеет своим математическим аналогом ту или иную гиперкомплексную числовую структуру, а являющиеся его естественными обобщениями тензоры валентности два и выше – подобного пока не востребовали. Такое положение дел представляется достаточно странным, в связи с чем, требует проверки гипотеза: нельзя ли хотя бы некоторым тензорам высших валентностей поставить в соответствие гиперкомплексные системы более общие, чем гиперчисла. Естественно предположить, что у таких математических объектов количество свободных компонент должно в точности соответствовать количеству независимых компонент ставящегося им в соответствие тензора. Ключевым моментом в поиске подобных структур может оказаться идея постулировать не только и не столько бинарные операции типа обычных сложений и умножений, сколько n -арные. Отдавая отчет, на сколько широким при таком подходе оказывается спектр потенциальных кандидатов, можно выдвинуть ряд упрощающих предположений, которые, по нашему мнению, существенно облегчат поиск. Прежде всего, ограничимся симметрическими тензорами, связанными с матрицами: 2×2 , $3 \times 3 \times 3$ и $4 \times 4 \times 4 \times 4$. В принципе есть еще одна матрица вида "1", но она в определенном смысле тривиальна, так как представляет просто скаляр. Более сложные матрицы типа $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ и т.д. также вряд ли понадобятся, так как существующая в топологии ситуация с уникальной сложностью именно четырехмерных пространств, скорее всего, не потребует этих дальнейших расширений. В любом случае, имеем полное право, временно ограничить себя только тремя обозначенными выше объ-

ектами. Для каждого из них следует попытаться определить бинарную, тернарную и тетрадную операции, соответственно. Эти операции должны быть максимально просты и симметричны.

В первую очередь следует рассмотреть случай матриц 2×2 , причем пытаться сопоставлять им не четырехмерное линейное пространство, а специального вида двухмерное многообразие. Учитывая, что комплексным и двойным числам (которые, кстати, можно представлять матрицами 2×2 , но весьма специального вида) традиционно сопоставляются вектора евклидовой и псевдоевклидовой плоскостей, нам желателен прием, включающий эти две возможности, как частные случаи. Скорее всего, следует сосредоточиться на двухмерных многообразиях, обладающих геометрией Вейля. Если подобный поиск пройдет результативно и мы сможем указать хотя бы один способ интерпретации матриц 2×2 и действий с ними, как специальных геометрических объектов неких вейлевских пространств, переход к матрицам $3 \times 3 \times 3$, а потом и к $4 \times 4 \times 4 \times 4$ будет иметь гораздо больше шансов на успех, чем сейчас.

Прежде всего, хотелось бы обратить внимание на следующий факт. Существует всего два типа фундаментальных полилинейных симметрических многочлена от двух переменных, которые, в определенном смысле, можно называть базисными:

$$(A, B) = a_1 b_1 + a_2 b_2; \quad (A, B) = 1/2(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

С ними связаны квадратичные формы:

$$S_1^2 = (A, A) = a_1^2 + a_2^2; \quad S_2^2 = (A, A) = a_1 a_2, \quad (8)$$

соответственно.

Несложно заметить, что именно этими двумя формами полностью исчерпываются неизоморфные друг другу невырожденные двухмерные геометрии с квадратичной формой. Первая евклидова, вторая – псевдоевклидова. Составлять линейные комбинации из этих двух форм и рассматривать пространства связанные с формами вида:

$$(A, A) = m S_1^2 + n S_2^2$$

при произвольных m и n не имеет смысла, так как любая из таких комбинаций (если она не приводит к вырожденному пространству), все равно, будет изоморфна либо S_1^2 , либо S_2^2 .

Несмотря на то, что с этими обеими формами можно связать понятие коммутативно-ассоциативной алгебры, помня, что при переходе к сумме трех кубов:

$$S_1^3 = (A, A, A) = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3$$

уже нельзя сопоставить обычную алгебру и что в такой геометрии, похоже, нет направлений, которым можно было бы приписать смысл времени (несомненно, являющегося важнейшим понятием физики), – мы в качестве основы дальнейших построений выберем геометрию с формой S_2^2 , а вторую будем считать как бы вспомогательной.

Итак, идея заключается в следующем. Давайте попробуем алгебру объектов 2×2 рассматривать, как симбиоз *обеих* форм (8). Так как компонент у алгебры чисел H_2 две, можно попробовать с ними связывать коэффициенты диагональной матрицы 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Тогда произвольную симметрическую матрицу 2×2 , имеющую вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

(где из условия симметричности $a_{12} = a_{21}$), можно интерпретировать как универсальный объект, имеющий двойную природу. С одной стороны – это вектор с компонентами $a_1 = a_{11}, a_2 = a_{22}$, а с другой – симметрический тензор второго ранга. Причем эти два, казалось бы, принципиально различных объекта, похоже, вполне совместимы. Иными словами, можно надеяться так организовать операции над симметрическими тензорами 2×2 , что бы они не противоречили алгебре чисел (векторов) H_2 .

Попробуем постулировать такую операцию как действие, позволяющее получать из двух произвольных матриц A и B – третью, по правилу:

$$[A_{ij}, B_{ij}] = C_{ij},$$

где

$$c_{11} = a_{11}b_{11}, \quad c_{22} = a_{22}b_{22}, \quad c_{12} = c_{21} = a_{12}b_{12}.$$

Аналогично при конструировании тернарной операции над симметрическими матрицами $3 \times 3 \times 3$ следует воспользоваться базисными полилинейными формами от трех векторов вида:

$$\begin{aligned} (A, B, C) &= a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_3; \\ (A, B, C) &= 1/3 (a_1b_1c_2 + a_1b_1c_3 + a_2b_2c_1 + a_2b_2c_3 + a_3b_3c_1 + a_3b_3c_2 + \\ &\quad + a_1b_2c_1 + a_1b_3c_1 + a_2b_1c_2 + a_2b_3c_2 + a_3b_1c_3 + a_3b_2c_3 + \\ &\quad + a_2b_1c_1 + a_3b_1c_1 + a_1b_2c_2 + a_3b_2c_2 + a_1b_3c_3 + a_2b_3c_3); \\ (A, B, C) &= 1/6 (a_1b_2c_3 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 + a_3b_2c_1), \end{aligned}$$

но записанных не для компонент векторов, а для компонент симметрической матрицы $3 \times 3 \times 3$:

$$\begin{aligned} (A, B, C) &= a_{111}b_{111}c_{111} + a_{222}b_{222}c_{222} + a_{333}b_{333}c_{333}; \\ (A, B, C) &= 1/3 (a_{112}b_{112}c_{221} + a_{112}b_{221}c_{112} + a_{221}b_{112}c_{112} + \\ &\quad + a_{113}b_{113}c_{331} + a_{113}b_{331}c_{113} + a_{331}b_{113}c_{113} + \\ &\quad + a_{221}b_{221}c_{122} + a_{221}b_{112}c_{221} + a_{112}b_{221}c_{221} + \\ &\quad + a_{223}b_{223}c_{332} + a_{223}b_{332}c_{223} + a_{332}b_{223}c_{223} + \\ &\quad + a_{331}b_{331}c_{113} + a_{331}b_{113}c_{331} + a_{113}b_{331}c_{331} + \\ &\quad + a_{332}b_{332}c_{223} + a_{332}b_{223}c_{332} + a_{223}b_{332}c_{332}); \\ (A, B, C) &= 1/6 (a_{123}b_{231}c_{312} + a_{123}b_{312}c_{231} + a_{231}b_{123}c_{312} + \\ &\quad + a_{231}b_{312}c_{123} + a_{312}b_{123}c_{231} + a_{312}b_{231}c_{123}). \end{aligned}$$

Глядя на это, определим тернарную операцию над тремя симметрическими матрицами $3 \times 3 \times 3$ следующим образом:

$$[A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}] = D_{ijk},$$

где:

$$\begin{aligned} d_{111} &= a_{111}b_{111}c_{111}, & d_{222} &= a_{222}b_{222}c_{222}, & d_{333} &= a_{333}b_{333}c_{333}, \\ d_{112} &= 1/3 (a_{112}b_{112}c_{221} + a_{112}b_{221}c_{112} + a_{221}b_{112}c_{112}), \\ d_{113} &= 1/3 (a_{113}b_{113}c_{331} + a_{113}b_{331}c_{113} + a_{331}b_{113}c_{113}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{221} &= 1/3 (a_{221}b_{221}c_{122} + a_{221}b_{112}c_{221} + a_{112}b_{221}c_{221}), \\
d_{223} &= 1/3 (a_{223}b_{223}c_{332} + a_{223}b_{332}c_{223} + a_{332}b_{223}c_{223}), \\
d_{331} &= 1/3 (a_{331}b_{331}c_{113} + a_{331}b_{113}c_{331} + a_{113}b_{331}c_{331}), \\
d_{332} &= 1/3 (a_{332}b_{332}c_{223} + a_{332}b_{223}c_{332} + a_{223}b_{332}c_{332}), \\
d_{123} &= a_{123}b_{123}c_{123}.
\end{aligned}$$

Достоинство предлагаемого метода заключается в том, что теперь мы можем легко его распространить на матрицы $4 \times 4 \times 4 \times 4$ и на большее число измерений.

Если у матриц A, B, C отлична от нуля только компонента с $i \neq j, j \neq k, k \neq i$, их тернарная алгебра изоморфна бинарной алгебре действительных чисел. Если у матриц A, B, C отличны от нуля только диагональные элементы, их тернарная алгебра сводится к бинарной алгебре от поличисел H_3 . Это обстоятельство позволяет нам строить совершенно новые объекты и операции над ними, не отказываясь от того капитала, что мы накопили по финслеровым пространствам с метрикой Бервальда-Моора. Но в этой новой алгебре, похоже, содержится в качестве подалгебры и алгебра тензоров второго ранга. Операции этой алгебры тернарны и возможно, сосредоточившись на них и подробно изучив их свойства, мы сможем приблизиться к такому пока еще не очень отчетливому понятию геометрии, как множество симметрий, основанных не на бинарных, а на тернарных отношениях. Таким образом, мы уже оказываемся не на хорошо исследованной территории, где царствуют группы симметрий, а переходим в область, где тон задают их более сложные n -арные обобщения. К каким глобальным последствиям приведет такое расширение роли симметрий не только в геометрии, но и в теснейшем образом с ней связанной физике – сейчас можно только догадываться.

Список литературы

1. Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Трехмерные расстояния и модуль скорости в линейных финслеровых пространствах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 3, Vol. 2, 2005.
2. Пименов Р. И. Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка. Сыктывкар, 1987.
3. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангенская программа"), в кн.: Об основаниях геометрии. М., 1956.
4. Павлов Д. Г. Обобщение аксиом скалярного произведения. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1, Vol. 1, 2004.
5. Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Конструирование псевдоримановой геометрии на основе геометрии Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 5, Vol. 3, 2006.
6. Takhtajan L. A. On Foundation of the Generalized Nambu Mechanics, Comm. Math. Phys. 160.
7. Кецарис А. А. Алгебраические основы физики. М., УРСС, 1997.
8. Павлов Д. Г. Хронометрия трехмерного времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1, Vol. 1, 2004.
9. Чернов В. М. Об определяющих уравнениях для элементов ассоциативно-коммутативных конечномерных алгебр и ассоциированных метрических формах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 4, Vol. 2, 2005.

Simm

D. G. Pavlov

MSTU n. a. N. E. Bauman
geom.2004@mail.ru

abstract
abstract
abstract
abstract
abstract
abstract

Key-words: symmetries.

MSC: 666.

ОБОБЩЕННЫЕ N -АРНЫЕ ЗАКОНЫ КОМПОЗИЦИИ В АЛГЕБРЕ H_4 И ИХ СВЯЗЬ С АССОЦИИРОВАННЫМИ МЕТРИЧЕСКИМИ ФОРМАМИ

В. М. Чернов

Институт систем обработки изображений РАН, Самара
vche@smr.ru

В работе рассматривается задача полилинеаризации норм алгебры H_4 . Вводятся новые бинарные, а также тернарные и кватернарные операции в алгебре H_4 с изотропным базисом ("умножение Цассенхауза"). Показывается что квадратичная норма Минковского элемента алгебры, норма Бервальда-Моора, ассоциированная с формой четвертой степени, а также рассмотренная в предыдущей работе автора норма, ассоциированная с кубической формой, совпадают со значениями введенной бинарной, кватернарной и тернарной операций при равных значениях элементов – "сомножителей Цассенхауза".

Ключевые слова: норма Минковского, норма Бервальда-Моора, операции в алгебре.

1 Введение

1.1 Классические композиционные алгебры и алгебры H_n

Наиболее широкое распространение в физике, механике, информатике и других приложениях получили *композиционные алгебры*, то есть алгебры без делителей нуля с единицей, на векторных пространствах которых определены невырожденные *квадратичные формы* $N(x)$ (*нормы*) с условием $N(xy) = N(x)N(y)$. Рекурсивный метод их построения и классификация над различными полями связана с существованием в алгебрах, получаемых на каждом шаге рекурсии (анти)автоморфизма $x \mapsto \bar{x}$ второго порядка, продолжаемого рекурсивно для последующих шагов построения и порождающих указанные выше формы $N(x)$. За желание иметь алгебры, отличные от R и C , но с аналогами вещественной или комплексной нормы приходится расплачиваться некоммутативностью и/или неассоциативностью таких алгебр. Кроме того, рекурсивный процесс Кэли-Диксона построения композиционных алгебр уже на третьем шаге приводит к неассоциативности и не может быть продолжен дальше [1]–[3]. Помимо собственно композиционных алгебр, процесс Кэли-Диксона приводит к явному описанию алгебр ряда алгебр и с делителями нуля (например, алгебры двойных чисел, изоморфной $R \oplus R$, алгебры (2×2) -матриц $M_2(R)$), на векторных пространствах которых определена также квадратичная мультипликативная форма $N(x)$, уже не являющаяся невырожденной [1].

Некоммутативная четырехмерная алгебра кватернионов, например, успешно используется при решении задач механики, машинного зрения, в физике. Это связано как и с наличием нормы, так и, например, с элегантным представлением ортогональных преобразований трехмерного пространства не на "внешнем" матричном языке, а в терминах внутренних операций алгебры кватернионов, то есть, "бескоординатно".

Далее, например, представление элемента X четырехмерной алгебры, изоморфной алгебре (2×2) -матриц $M_2(R)$ в "клиффордовом" базисе с правилом умножения базисных элементов в форме

$$\begin{aligned} e_0^2 &= e_0, & e_1^2 &= e_0, & e_2^2 &= e_0, & e_3^2 &= -e_0; \\ e_1e_2 &= -e_2e_1, & e_1e_3 &= -e_3e_1, & e_2e_3 &= -e_3e_2; & e_1e_2 &= e_3, \end{aligned}$$

и инволютивным отображением (т. н. *симплектическая инволюция*)

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \bar{X} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

естественным вложением $R \rightarrow M_2(R)$ с $y \mapsto ye_0$, $y \in R$ позволяет записать определяющее квадратное уравнение для элемента X с коэффициентами, выраженными в бескоординатной форме в терминах нормы $N(X) = X \cdot \bar{X} = \det X$ и следа $Tr(X) = X + \bar{X} = a + d$:

$$X^2 - Tr(X) e_0 X + N(X) e_0 = 0, \tag{1.1}$$

то есть, фактически, в форме частного (двумерного) случая теоремы Гамильтона-Кэли. Отсюда при надлежащей интерпретации следует, что все результаты "линейной" геометрии двумерной плоскости могут быть получены как следствия алгебраических свойств четырехмерной алгебры $M_2(R)$.

В отличие от композиционных алгебр, произвольные ассоциативно-коммутативные конечномерные алгебры уже не являются квадратичными алгебрами над полем R . Поэтому алгебраические уравнения для их элементов естественным образом могут быть ассоциированы с автоморфизмами более высоких порядков, что дает основание предполагать возможность анализа свойств геометрических интерпретаций этих алгебр, выражаемых в терминах группы "симметрий" более высокого порядка, чем второй.

Первым шагом к реализации отмеченного выше комплекса идей и пониманию роли автоморфизмов высокого порядка при создании геометро-физических моделей пространства-времени является, по мнению автора, определение инвариантных характеристик уравнений, которым удовлетворяют элементы ассоциативно-коммутативных алгебр. То есть, определение аналогов форм $N(X) = X \cdot \bar{X} = \det X$ и $Tr(X) = X + \bar{X} = a + d$ соотношения (1.1). Таким первым шагом в указанном направлении явились работы автора [4], [5], в которых, в частности, был получен следующий результат (теорема 2.1).

Рассмотрим алгебру $R \oplus R \oplus R \oplus R \cong H_4$ с базисом $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ и с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей 1.1. (Такой базис мы далее будем называть *изотропным* базисом).

Таблица 1.1.

\times	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	E_4	0	0	0
E_2	0	E_2	0	0
E_3	0	0	E_3	0
E_4	0	0	0	E_4

Мультипликативно нейтральным элементом (единицей алгебры) в этом базисе является элемент $I = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$, а поле R канонически вкладывается в алгебру $R \oplus R \oplus R \oplus R$:

$$R \rightarrow R \oplus R \oplus R \oplus R \cong H_4, \quad x \mapsto xI, \quad x \in R.$$

Теорема. Алгебра $R \oplus R \oplus R \oplus R$ является алгеброй четвертой степени над R , то есть, любой элемент $w \in R \oplus R \oplus R \oplus R$ удовлетворяет алгебраическому уравнению степени не выше четвертой с вещественными коэффициентами.

Действительно, пусть $w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \leftrightarrow (a, b, c, d)$. Рассмотрим четыре отображения алгебры $R \oplus R \oplus R \oplus R$ в себя, являющихся, очевидно, автоморфизмами:

$$\begin{aligned}\tau_0 : w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 &\mapsto aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4, \\ \tau_1 : w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 &\mapsto bE_1 + cE_2 + dE_3 + aE_4, \\ \tau_2 : w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 &\mapsto cE_1 + dE_2 + aE_3 + bE_4, \\ \tau_3 : w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 &\mapsto dE_1 + aE_2 + bE_3 + cE_4.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Другими словами, отображения переставляют циклическим образом компоненты (a, b, c, d) элемента w алгебры. Нетрудно показать, что элемент w является корнем многочлена

$$\Phi(\xi; w) = (\xi - \tau_0(w))(\xi - \tau_1(w))(\xi - \tau_2(w))(\xi - \tau_3(w)),\tag{1.3}$$

а также то, что коэффициенты полинома $\Phi(\xi; w)$ вещественные. Действительно, непосредственным вычислением получаем:

$$\Phi(\xi; w) = \xi^4 - s_1(w)I\xi^3 + s_2(w)I\xi^2 - s_3(w)I\xi^1 + s_4(w)I,\tag{1.4}$$

где вещественные коэффициенты $s_\nu(w)$ являются однородными симметричными формами компонент (a, b, c, d) элемента w алгебры:

$$\begin{aligned}s_1(w) = s_{14}(w) &= a + b + c + d, \\ s_2(w) = s_{24}(w) &= ab + ac + ad + bc + bd + cd, \\ s_3(w) = s_{34}(w) &= bcd + acd + abd + abc, \\ s_4(w) = s_{44}(w) &= abcd.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Многочлен $\Phi(\xi; w)$ минимальной степени с вещественными коэффициентами и с коэффициентом при старшей степени ξ , равным единице, такой, что $\Phi(\xi; w)|_{\xi=w} = 0$, будем называть *определяющим многочленом элемента w* , а его коэффициенты – *определяющими формами*.

Замечание 1.1. Формы (1.5) инвариантны относительно любой перестановки $\sigma \in S_4$ четырех компонент (a, b, c, d) элемента w алгебры. Следовательно, так как $\sigma \in S_4$ является автоморфизмом алгебры $R \oplus R \oplus R \oplus R$ над полем R , то многочлен *четвертой* степени $\Phi(\xi; w)$ наряду с корнем w имеет своими корнями еще, по крайней мере, 23 корня $\sigma(w)$, $\sigma \in S_4$, то есть, *все* его автоморфные образы относительно автоморфизмов $\sigma \in S_4$.

Замечание 1.2. В базисе $\{E, I, J, K\}$ алгебры $H_4 \cong R \oplus R \oplus R \oplus R$ с законом умножения базисных единиц, задаваемых следующей таблицей Кэли.

Таблица 1.2.

\times	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	E	K	J
J	J	K	E	I
K	K	J	I	E

элемент $\omega \in H_4$ представляется в форме $\omega = tE + xI + yJ + zK$ ($t, x, y, z \in R$), E – мультипликативно нейтральный элемент (единица) алгебры. Связь между изотропным базисом $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ и базисом $\{E, I, J, K\}$ осуществляется посредством линейного преобразования с ортогональной матрицей Адамара

$$had_4 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Совершенно очевидно, что каждому автоморфизму, определяемому действием элемента группы подстановок S_4 , то есть, переставляющему компоненты элемента $\omega \in H_4$, представленного в базисе $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, соответствует линейное преобразование компонент t, x, y, z элемента $\omega = tE + xI + yJ + zK$, и также реализующее некоторый автоморфизм алгебры H_4 . В частности, такими автоморфизмами являются:

$$\begin{aligned} \mu_0 : \omega &\mapsto \mu_0(\omega) = tE + xI + yJ + zK, \\ \mu_1 : \omega &\mapsto \mu_1(\omega) = tE + xI - yJ - zK, \\ \mu_2 : \omega &\mapsto \mu_2(\omega) = tE - xI + yJ - zK, \\ \mu_3 : \omega &\mapsto \mu_3(\omega) = tE - xI - yJ + zK. \end{aligned} \tag{1.6}$$

При представлении элемента $\omega \in H_4$ в базисе $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ этой четверке преобразований соответствует действие на компоненты элемента некоторой подгруппы четвертого порядка (изоморфной прямому произведению $C_2 \times C_2$ двух циклических групп второго порядка) группы S_4 .

Записывая в этом случае определяющий многочлен, непосредственным вычислением получаем:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi; \omega) &= (\xi - \mu_0(\omega)) (\xi - \mu_1(\omega)) (\xi - \mu_2(\omega)) (\xi - \mu_3(\omega)) = \\ &= (\xi^4 - S_1(\omega) \xi^3 + S_2(\omega) \xi^2 - S_3(\omega) \xi + S_4(\omega)) E, \quad \text{где} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{14}(\omega) &= 4t, \\ S_{24}(\omega) &= 6t^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2, \\ S_{34}(\omega) &= -4tx^2 - 4y^2t - 4z^2t + 4t^3 + 8yzx = 4t(t^2 - x^2 - y^2 - z^2) + 8yzx, \\ S_{44}(\omega) &= x^4 + y^4 + z^4 - 2t^2x^2 - 2t^2y^2 - 2t^2z^2 + t^4 + 8txyz - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2, \end{aligned} \tag{1.7}$$

и $S_{24}(\omega)$ с точностью до нормирующих множителей совпадает с (псевдо)метрической формой Минковского, а $S_{44}(\omega)$ имеет стандартный "бервальд-мооровский" вид.

1.2 Основные идеи и определения

Как ни парадоксально, но идея использования дополнительных (или переопределенных) операций на той или иной конечномерной алгебре, ассоциированных с автоморфизмами порядка выше второго, с целью алгебраической поддержки решения геометрических задач имеет почтенную историю. Существует достаточно экзотическая и малоизвестная алгебраическая структура, известная как "конечные почти-поля Цассенхауза" [6] (см. также [7], глава 20). Именно, в поле F_q , $q = p^m$, (p – простое) вводится операция $x * y$ ($x, y \in F_q$), выражающаяся через операцию умножения в поле F_q по закону $x * y = y \cdot \eta(x)$, где η – автоморфизм Фробениуса специального вида. Эта операция некоммутативна и неассоциативна (последнее – в силу теоремы Веддербёрна [7], [8]). Естественно, что конечность полей F_q , следовательно, и

почти-полей Цассенхауза, ограничивает круг задач, решаемых с применением такой техники, исключительно конфигурационными задачами конечной геометрии [7]. Идея рассмотрения "полилинейных", в отличие от классических "билинейных", скалярных произведений в ассоциативно-коммутативных алгебрах с целью создания адекватных геометро-физических моделей принадлежит, по всей видимости, Д. Г. Павлову [9], [10].

Рассмотрим пример алгебры $R \oplus R$ с базисом $\{E_1, E_2\}$ и с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей 1.3 и мультипликативно нейтральным элементом (единицей) $I = E_1 + E_2 = (1, 1)$.

Таблица 1.3.

\times	E_1	E_2
E_1	E_4	0
E_2	0	E_2

Типичный элемент $x = x_1 E_1 + x_2 E_2$ будем далее обозначать для краткости $x = (x_1, x_2)$.

Пример 1.1. Рассмотрим две подстановки

$$\sigma^1 \leftrightarrow \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 \leftrightarrow \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Определим действие операторов σ^1 , σ^2 , ассоциированных с подстановками σ_1 , σ_2 на элементы $x = (x_1, x_2)$ алгебры $R \oplus R$:

$$\sigma^1(x) = (x_1, x_2), \quad \sigma^2(x) = (x_2, x_1),$$

то есть, операторы σ^1 , σ^2 переставляют компоненты элемента $x = (x_1, x_2)$ в соответствии с нижними строками подстановок σ_1 , σ_2 .

Введем на $R \oplus R$ новую бинарную операцию $[x, y]$ ("умножение Цассенхауза"):

$$[x, y] = \sigma^1(x) \bullet \sigma^2(y),$$

где символом (\bullet) обозначено обычное "покомпонентное" умножение элементов из $R \oplus R$.

Непосредственно проверяются следующие соотношения.

$$[x, y] = (x_1, x_2) \bullet (y_2, y_1) = (x_1 y_2, x_2 y_1) \doteq (\xi_2, \xi_1), \quad (1.9)$$

$$[x, x] = (x_1, x_2) \bullet (x_2, x_1) = (x_1 x_2, x_2 x_1) = x_1 x_2 I \doteq N(x) I. \quad (1.10)$$

Заметим, что введенная в (1.10) функция $N(x)$ совпадает с традиционной нормой элемента алгебры $R \oplus R$, выраженной в терминах изотропных координат (компонент).

Далее, справедливы равенства:

$$\begin{aligned} N([x, y]) &= [[x, y], [x, y]] = \sigma^1([x, y]) \bullet \sigma^2([x, y]) = \\ &= (x_1 y_2, x_2 y_1) \bullet (x_2 y_1, x_1 y_2) = (x_1 y_2 x_2 y_1, x_1 y_2 x_2 y_1) = \\ &= (x_1 y_2, x_1 y_2) \bullet (x_2 y_1, x_2 y_1) = (x_1 y_2) I \bullet (x_2 y_1) I = \xi_1 \xi_2 I = \\ &= (x_1 x_2) I \bullet (y_1 y_2) I = N(x) N(y). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Пример 1.2. Остановимся еще на одной иллюстрации "цассенхаузского умножения". Рассмотрим множество двумерно индексированных $(n \times n)$ массивов с покомпонентным сложением. Введем операцию $*$ "умножения", отличную от обычного матричного умножения. Пусть $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$, $D = \{d_{ij}\} = A * B$. Тогда, по определению:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{jk},$$

или, в неформальных терминах, « (i, j) -й элемент $*$ -произведения" равен скалярному произведению i -ой строки на j -ую строку». Преобразование массивов $\tau : A \rightarrow \tau(A)$ по правилу $\tau : a_{ij} \mapsto a_{ji}$, есть "обычное" транспонирование матриц, но которое является *автоморфизмом 2 порядка* по отношению к операции $*$: $\tau(A * B) = \tau(A) * \tau(B)$, тогда как для обычного матричного умножения транспонирование является *антиавтоморфизмом*: $(AB)^t = B^t A^t$. В терминах операции $*$ традиционное матричное умножение является просто "умножением Цассенхауза" относительно операции $*$: $AB = A * \tau(B)$. Рассмотрение, например, трехмерных массивов $A = \{a_{ijk}\}$, $B = \{b_{ijk}\}$, $C = \{c_{ijk}\}$ и автоморфизм третьего порядка $\tau : a_{ijk} \mapsto a_{jki}$ приводит к "цассенхаузскому умножению" трехмерных массивов $X = [A, B, C]$, где

$$x_{pqr} = \sum_{i,j=1}^n a_{pij} b_{iqj} c_{ijr}$$

и так далее.

Таким образом, из соотношения (1.11) следуют:

- равенство $N([x, y]) = N(x)N(y)$, то есть "соотношение мультипликативности" для нормы $N(x)$ относительно введенной операции $[x, y]$, причем эта норма совпадает с традиционной нормой элемента алгебры $R \oplus R$, выраженной в терминах изотропных координат (компонент);
- равенство

$$\sigma^1([x, y]) \bullet \sigma^2([x, y]) = \xi_1 \xi_2 I, \tag{1.12}$$

где (ξ_1, ξ_2) есть компоненты "цассенхаузского произведения" $[x, y]$, причем упорядоченная пара верхних индексов операторов σ^1, σ^2 совпадает с упорядоченной парой нижних индексов компонент (ξ_1, ξ_2) .

Последнее соображение является основой для обобщения понятия закона композиции для алгебр с n -арными операциями, а первое (мультипликативность нормы) является мотивацией для выбора именно такого принципа обобщения.

Введем некоторые формальные определения и понятия.

Пусть $\sigma_* \in S_n$ – некоторая подстановка:

$$\sigma_* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_*(1) & \sigma_*(2) & \dots & \sigma_*(n) \end{pmatrix}.$$

Ассоциированным с подстановкой $\sigma_* \in S_n$ оператором $\sigma^* : H_n \rightarrow H_n$ будем называть оператор, переставляющий изотропные координаты элемента из алгебры H_n :

$$\sigma^* : x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sigma^*(x) = (x_{\sigma_*(1)}, x_{\sigma_*(2)}, \dots, x_{\sigma_*(n)}).$$

Пусть $(\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^m)$ есть упорядоченное семейство ассоциированных операторов ($m \leq n$). Определим действие m -семейства $(\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^m)$ на m -семейство элементов $(x_1, x_2, \dots, x_m) \subset H_n$ "тензорным образом":

$$(\sigma^1 \otimes \sigma^2 \otimes \dots \otimes \sigma^m)(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sigma^1(x_1) \bullet \sigma^2(x_2) \bullet \dots \bullet \sigma^m(x_m).$$

Пусть $A \subset Z^m$ – некоторое мн-во индексов, $\tilde{S}_n^m = \{(\sigma^{a_1}, \sigma^{a_2}, \dots, \sigma^{a_m}); (a_1, \dots, a_m) \in A\}$ – некоторое "отмеченное" индексным множеством $A \subset Z^m$ множество m -семейств ассоциированных операторов.

Определение 1.1. m -арной операцией на алгебре H_n ($m \leq n$), порожденной семейством $\tilde{S}_n^m = \{(\sigma^{a_1}, \sigma^{a_2}, \dots, \sigma^{a_m}); (a_1, \dots, a_m) \in A\}$, будем называть операцию, определенную равенством (здесь и далее $\lambda_m \in R$)

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, \dots, x_m] &= \\ &= \lambda_m \sum_{(\sigma^{a_1}, \sigma^{a_2}, \dots, \sigma^{a_m}) \in \tilde{S}_n^m} (\sigma^{a_1} \otimes \sigma^{a_2} \otimes \dots \otimes \sigma^{a_m})(x_1, x_2, \dots, x_m) = \\ &= \lambda_m \sum_{(\sigma^{a_1}, \sigma^{a_2}, \dots, \sigma^{a_m}) \in \tilde{S}_n^m} \sigma^{a_1}(x_1) \bullet \sigma^{a_2}(x_2) \bullet \dots \bullet \sigma^{a_m}(x_m) \end{aligned}$$

Определение 1.2. m -арную операцию на алгебре H_n ($m \leq n$), порожденную семейством $\tilde{S}_n^m = \{(\sigma^{a_1}, \sigma^{a_2}, \dots, \sigma^{a_m}); (a_1, \dots, a_m) \in A\}$, будем называть *нормируемой*, если

$$N(x) = \lambda_m \sum_{(\sigma^{a_1}, \sigma^{a_2}, \dots, \sigma^{a_m}) \in \tilde{S}_n^m} (\sigma^{a_1} \otimes \sigma^{a_2} \otimes \dots \otimes \sigma^{a_m})(x, x, \dots, x) \in R. \quad (1.13)$$

Семейство ассоциированных операторов \tilde{S}_n^m в этом случае будем называть *нормирующим семейством*, а функцию $N(x) \in R$ будем называть \tilde{S}_n^m – *нормой* (или просто *нормой*, если из контекста ясно, какое семейство \tilde{S}_n^m имеется в виду).

Определение 1.3. Пусть $S_n^m = \{(\sigma_{a_1}, \sigma_{a_2}, \dots, \sigma_{a_m}); (a_1, \dots, a_m) \in A\}$ есть множество подстановок, ассоциированных с нормирующим семейством операторов $\tilde{S}_n^m = \{(\sigma^{a_1}, \sigma^{a_2}, \dots, \sigma^{a_m}); (a_1, \dots, a_m) \in A\}$, $[x_1, x_2, \dots, x_m]$ есть m -арная операция, порожденная семейством \tilde{S}_n^m . Пусть в изотропных координатах элемент $[x_1, x_2, \dots, x_m]$ имеет координаты $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$:

$$[x_1, x_2, \dots, x_m] = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m).$$

Будем говорить, что семейство \tilde{S}_n^m порождает обобщенный m -арный закон композиции, если выполняется равенство

$$\begin{aligned} N([x_1, x_2, \dots, x_m]) &= \underbrace{[[x_1, x_2, \dots, x_m], \dots, [x_1, x_2, \dots, x_m]]}_{m \text{ раз}} = \\ &= \lambda_m \sum_{(\sigma^{a_1}, \sigma^{a_2}, \dots, \sigma^{a_m}) \in \tilde{S}_n^m} (\sigma^{a_1} \otimes \sigma^{a_2} \otimes \dots \otimes \sigma^{a_m}) \left(\underbrace{[x_1, x_2, \dots, x_m], \dots, [x_1, x_2, \dots, x_m]}_{m \text{ раз}} \right) = \\ &= \lambda_m \sum_{(\sigma_{a_1}, \sigma_{a_2}, \dots, \sigma_{a_m}) \in S_n^m} \xi_{\sigma_{a_1}(1)} \xi_{\sigma_{a_2}(2)} \dots \xi_{\sigma_{a_m}(m)} I. \end{aligned}$$

Пример 1.3. В обозначениях Примера 1.1 рассмотрим одноэлементное множество S_2^2 состоящее из одной пары подстановок $\{(\sigma_1, \sigma_2)\}$, определенных (1.8). Равенство (1.12) означает, что бинарная операция, порожденная семейством \tilde{S}_2^2 ассоциированных операторов $\tilde{S}_2^2 = \{(\sigma^1, \sigma^2)\}$, порождает бинарный закон композиции $\sigma^1([x, y]) \bullet \sigma^2([x, y]) = \xi_1 \xi_2 I$, совпадающий с точностью до обозначений с мультипликативным законом композиции

$$N([x, y]) = [[x, y], [x, y]] = N(x)N(y) \quad \text{и} \quad \lambda_2 = 1.$$

Замечание 1.4. Не всякое множество \tilde{S}_n^m является нормирующим множеством операторов. Нетрудно убедиться, что в обозначениях Примера 1.1 одноэлементное множество $\tilde{S}_2^2 = \{(\sigma^1, \sigma^1)\}$ не является нормирующим множеством операторов, так как $N(x) = [x, x] \notin R$. В связи с этим возникает Вопрос 1: каковы необходимые и достаточные условия, сформулированные в теоретико-групповых терминах, того, чтобы множество операторов, ассоциированное с $S_n^m = \{(\sigma_{a_1}, \sigma_{a_2}, \dots, \sigma_{a_m})\}$, было бы нормирующим?

Замечание 1.5. Естественно, что наибольший интерес вызывают те нормирующие множества \tilde{S}_4^m ассоциированных операторов множества S_4^m , для которых $N(w)$ при всех $w = (a, b, c, d) \in H_4$ совпадала бы с одной из форм (1.5). В связи с этим возникает Вопрос 2: каковы необходимые и достаточные условия, сформулированные в теоретико-групповых терминах, того, что норма, порожденная множеством операторов \tilde{S}_n^m совпадала бы с одной из форм (1.5) для H_4 ?

Настоящая работа посвящена получению *достаточных* условий в Вопросе 2. Другими словами, получению ответа на вопрос: какова должна быть бинарная, тернарная или кватернарная операция на алгебре H_4 , чтобы

$$N(x) = \underbrace{[x, x, \dots, x]}_{m \text{ раз}} \in \{s_{24}(w), s_{34}(w), s_{44}(w)\}.$$

Замечание 1.6. Доказательства утверждений в следующих двух разделах работы сводятся к рутинной, хотя и громоздкой, проверке тождеств, аналогично Примеру 1.1. Поэтому в работе приводятся только формулировки соответствующих теорем.

2 Обобщенные n -арные законы композиции в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$

2.1 Обобщенный кватернарный закон композиции в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$

Пусть кватернарная операция в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$ определена равенством

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = \lambda_4 (\sigma^1 \otimes \sigma^2 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^4) (x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_4 \sigma^1(x_1) \bullet \sigma^2(x_2) \bullet \sigma^3(x_3) \bullet \sigma^4(x_4) \quad (2.1)$$

где $\lambda_4 = 1$ и

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Теорема 2.1. Одноэлементное семейство четверки операторов $\tilde{S}_4^4 = \{(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4)\}$, ассоциированное с одноэлементным множеством S_4^4 , состоящим из четверки (циклических) подстановок $\{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)\}$ является нормирующим множеством, порождающим обобщенный кватернарный закон композиции в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$ в (мультипликативной) форме

$$\begin{aligned} N_4([x_1, x_2, x_3, x_4]) &= [[x_1, x_2, x_3, x_4], [x_1, x_2, x_3, x_4], [x_1, x_2, x_3, x_4], [x_1, x_2, x_3, x_4]] = \\ &= (\sigma^1 \otimes \sigma^2 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^4) ([x_1, x_2, x_3, x_4], [x_1, x_2, x_3, x_4], [x_1, x_2, x_3, x_4], [x_1, x_2, x_3, x_4]) = \\ &= \xi_{\sigma_1(1)} \xi_{\sigma_2(2)} \xi_{\sigma_3(3)} \xi_{\sigma_4(4)} I = \\ &= (x_{11} x_{12} x_{13} x_{14}) (x_{21} x_{22} x_{23} x_{24}) (x_{31} x_{32} x_{33} x_{34}) (x_{41} x_{42} x_{43} x_{44}) I = \\ &= N_4(x_1) I \cdot N_4(x_2) I \cdot N_4(x_3) I \cdot N_4(x_4) I, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ есть четверка координат элемента $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ – результата определенной выше кватернарной операции в изотропном базисе: $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = [x_1, x_2, x_3, x_4]$.

Кроме того, справедливо равенство

$$\begin{aligned} N_4(x) &= [x, x, x, x] = (\sigma^1 \otimes \sigma^2 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^4)(x, x, x, x) = \\ &= \xi_{\sigma_1(1)} \xi_{\sigma_2(2)} \xi_{\sigma_3(3)} \xi_{\sigma_4(4)} I = (x_1 x_2 x_3 x_4) I = s_{44}(x) \bullet I, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Замечание 2.1. Из Теоремы 2.1 следует, в частности, что введенное в определении 1.2. соотношением (1.14) понятие нормы действительно представляет собой мультипликативную (псевдо)норму (1.5) Бервальда-Моора $s_{44}(x)$, выраженную в изотропном базисе.

2.2 Обобщенный тернарный закон композиции в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$

Пусть тернарная операция в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$ определена равенством

$$[x_1, x_2, x_3] = (\sigma^2 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^4 + \sigma^4 \otimes \sigma^1 \otimes \sigma^3 + \sigma^2 \otimes \sigma^4 \otimes \sigma^1 + \sigma^3 \otimes \sigma^1 \otimes \sigma^2)(x_1, x_2, x_3), \quad (2.5)$$

где $\lambda_3 = 1$ и

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Теорема 2.2. Четырехэлементное семейство троек операторов

$$\tilde{S}_4^3 = \{(\sigma^2, \sigma^3, \sigma^4), (\sigma^4, \sigma^1, \sigma^3), (\sigma^2, \sigma^4, \sigma^1), (\sigma^3, \sigma^1, \sigma^2)\},$$

ассоциированное с семейством S_4^4 троек подстановок

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

является нормирующим множеством, порождающим обобщенный тернарный закон композиции в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$ в форме

$$\begin{aligned} N_3([x_1, x_2, x_3]) &= [[x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2, x_3]] = \\ &= (\sigma^2 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^4 + \sigma^4 \otimes \sigma^1 \otimes \sigma^3 + \sigma^2 \otimes \sigma^4 \otimes \sigma^1 + \sigma^3 \otimes \sigma^1 \otimes \sigma^2)([x_1, x_2, x_3], \dots, [x_1, x_2, x_3]) = \\ &= (\xi_{\sigma_2(1)} \xi_{\sigma_3(2)} \xi_{\sigma_4(3)} + \xi_{\sigma_4(1)} \xi_{\sigma_1(2)} \xi_{\sigma_3(3)} + \xi_{\sigma_2(1)} \xi_{\sigma_4(2)} \xi_{\sigma_1(3)} + \xi_{\sigma_3(1)} \xi_{\sigma_1(2)} \xi_{\sigma_2(3)}) I, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ есть четверка координат элемента $[x_1, x_2, x_3]$ – результата определенной выше тернарной операции в изотропном базисе:

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = [x_1, x_2, x_3],$$

и, кроме того, выполняются равенства

$$\begin{aligned} N_3(x) &= [x, x, x] = \\ &= (\sigma^2 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^4 + \sigma^4 \otimes \sigma^1 \otimes \sigma^3 + \sigma^2 \otimes \sigma^4 \otimes \sigma^1 + \sigma^3 \otimes \sigma^1 \otimes \sigma^2)(x, x, x), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$N_3(x) = s_{34}(x) I. \quad (2.10)$$

2.3 Обобщенный бинарный закон композиции в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$

Пусть бинарная операция в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$ определена равенством

$$[x_1, x_2] = \lambda_2 (\sigma^1 \otimes \sigma^2 + \sigma^1 \otimes \sigma^3 + \sigma^1 \otimes \sigma^4 + \sigma^2 \otimes \sigma^3 + \sigma^2 \otimes \sigma^4 + \sigma^3 \otimes \sigma^4) (x_1, x_2), \quad (2.11)$$

где $\lambda_2 = 1/2$ и

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Теорема 2.3. Шестиэлементное семейство пар операторов

$$\tilde{S}_4^2 = \{(\sigma^1, \sigma^2), (\sigma^1, \sigma^3), (\sigma^1, \sigma^4), (\sigma^2, \sigma^3), (\sigma^2, \sigma^4), (\sigma^3, \sigma^4)\},$$

ассоциированное с семейством S_4^2 пар подстановок

$$S_4^2 = \{(\sigma_1, \sigma_2), (\sigma_1, \sigma_3), (\sigma_1, \sigma_4), (\sigma_2, \sigma_3), (\sigma_2, \sigma_4), (\sigma_3, \sigma_4)\} \quad (2.13)$$

является нормирующим множеством, порождающим обобщенный бинарный закон композиции в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$ в форме

$$\begin{aligned} N_2([x_1, x_2]) &= [[x_1, x_2], [x_1, x_2]] = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma^1 \otimes \sigma^2 + \sigma^1 \otimes \sigma^3 + \sigma^1 \otimes \sigma^4 + \sigma^2 \otimes \sigma^3 + \sigma^2 \otimes \sigma^4 + \sigma^3 \otimes \sigma^4) ([x_1, x_2], [x_1, x_2]) = \\ &= \frac{1}{2} (\xi_{\sigma_1(1)} \xi_{\sigma_2(2)} + \xi_{\sigma_1(1)} \xi_{\sigma_3(2)} + \xi_{\sigma_1(1)} \xi_{\sigma_4(2)} + \xi_{\sigma_2(1)} \xi_{\sigma_3(2)} + \xi_{\sigma_2(1)} \xi_{\sigma_4(2)} + \xi_{\sigma_3(1)} \xi_{\sigma_4(2)}) I, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ есть четверка координат элемента $[x_1, x_2]$ – результата определенной выше тернарной операции в изотропном базисе: $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = [x_1, x_2]$.

Кроме того, справедливы равенства

$$\begin{aligned} N_2(x) &= [x, x] = \\ &= 1/2 (\sigma^1 \otimes \sigma^2 + \sigma^1 \otimes \sigma^3 + \sigma^1 \otimes \sigma^4 + \sigma^2 \otimes \sigma^3 + \sigma^2 \otimes \sigma^4 + \sigma^3 \otimes \sigma^4) (x, x), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$N_2(x) = s_{24}(x). \quad (2.16)$$

Замечание 2.3. Из Теоремы 2.3 следует, в частности, что введенное в определении 1.2. соотношением (1.14) понятие нормы действительно представляет собой (псевдо)норму соответствующую метрике Минковского в форме $s_{44}(x)$, выраженную в изотропном базисе.

Замечание 2.4. В отличие от множества (2.4) подстановок в Теореме 2.2, которое группой не является, множество (2.8) подстановок в Теореме 2.3 является четырехэлементной нециклической группой, а в Теореме 2.1 множество подстановок есть циклическая группа.

3 Обобщения и открытые проблемы

1. В связи с Вопросами 1 и 2 п. 1 возникает проблема классификации обобщенных законов композиции для пространства H_n произвольной размерности.

Проблема 1. Каковы необходимые и достаточные условия, сформулированные в теоретико-групповых (или комбинаторных) терминах, того, чтобы множество операторов, ассоциированное с семейством подстановок $S_n^m = \{(\sigma_{a_1}, \sigma_{a_2}, \dots, \sigma_{a_m})\}$, было бы нормирующим; как связана порожденная норма с коэффициентами определяющего уравнения элемента алгебры H_n ?

Отметим, что групповая структура множества подстановок S_n^m является, скорее всего, достаточным условием того, чтобы ассоциированное множество операторов было бы нормирующим (Теоремы 2.1 и 2.3). Однако необходимость этого неочевидна, как показывает Теорема 2.2. Скорее всего, вопрос классификации множеств S_n^m в Проблеме 1 является комбинаторным, но не исключительно теоретико-групповым.

2. Исчерпывающая классификация ассоциативно-коммутативных алгебр без нильпотентных элементов содержится в теореме Вейерштрасса [2]: любая ассоциативно-коммутативная конечномерная алгебра без нильпотентных элементов над R изоморфна прямой сумме алгебр R и C .

Из этой теоремы легко следует, что существует не более трех неизоморфных четырехмерных алгебр этого класса, а именно: $H_4, H_2 \oplus C, C \oplus C$. В связи с этим возникает проблема экстраполяции теорем 2.1–2.3 на случай указанных четырехмерных алгебр и на случай произвольной ассоциативно коммутативной конечномерной алгебры A_n .

Проблема 2. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы множество операторов, ассоциированное с семейством автоморфизмов алгебры A_n , было бы нормирующим; как связана порожденная норма с коэффициентами определяющего уравнения элемента алгебры A_n ?

3. Из соотношения (2.3) и Замечания 2.1 следует чисто алгебраический факт мультипликативности нормы Бервальда-Моора, выраженной в терминах изотропного базиса. Конечно, соответствующие (индуцированные) соотношения инвариантности формы $S_{44}(x)$ остаются справедливыми и в "физическом" базисе $\{E, I, J, K\}$ с Таблицей 2.1 умножения базисных элементов. Но соотношение мультипликативности для формы $s_{44}(x)$, а именно $s_{44}(x_1 \bullet x_2 \bullet x_3 \bullet x) = s_{44}(x_1) s_{44}(x_2) s_{44}(x_3) s_{44}(x_4)$ может, по всей видимости, интерпретироваться как "масштабная инвариантность" свойств четырехмерного пространства-времени с метрикой Бервальда-Моора и/или как его "пространственно-временная изотропность". В отличие от Бервальд-Мооровской метризации четырехмерного пространства-времени, четырехмерное пространство с метрикой Минковского, с точностью до масштабирования совпадающего с H_4 , снабженным метрической формой $S_{24}(x)$, обладает только свойством "пространственной", но не "пространственно-временной" изотропией. Группа (линейных) изометрий пространства H_4 с метрикой Минковского хорошо известна и вне связи с Теоремой 2.3.

Проблема 3. Могут ли быть получены преобразования Лоренца из соотношений (2.9) и (2.10), то есть, как прямые следствия *явных соотношений* Теоремы 2.3?

4. Пусть $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ есть "какой-то" базис в H_4 , изотропный, например. Пусть B оператор, не обязательно линейный, действующий из H_4 в H_4 , так что

$$Bx = y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 + y_4 e_4 \in H_4.$$

Условие того, что B сохраняет форму $s_{24}(x)$, то есть норму $N_2(x)$, может быть записано в виде

$$N_2(x) = [x, x] = [Bx, Bx] = [y, y] = N_2(y) = N_2(Bx). \quad (3.1)$$

Но, в силу линейности операции $[w_1, w_2]$, соотношение (3.1) можно переписать в виде

$$[x, x] = \sum_{i,j=1}^4 x_i x_j [e_i, e_j] = [y, y] = \sum_{i,j=1}^4 y_i y_j [e_i, e_j].$$

Если оператор B линейный, то массив $\{b_{ij} = [e_i, e_j]; i, j = 1, 2, 3, 4\}$, как известно, полностью определяет действие оператора B на всем H_4 . Более того, для линейных изометрических операторов условия на числа b_{ij} могут быть получены из Теоремы 2.3.

Если требовать того, чтобы B сохраняло форму $s_{34}(x)$, то есть норму $N_3(x)$, то также в силу линейности операции $[w_1, w_2, w_3]$, получаются условия изометричности (нелинейного) оператора B в терминах *трехмерного* массива $\{b_{ijk} = [e_i, e_j, e_k]; i, j, k = 1, 2, 3, 4\}$ и *явных соотношений* Теоремы 2.2.

Проблема 4. Пользуясь Теоремой 2.2, описать операторы B , сохраняющие форму $s_{34}(x)$, то есть норму $N_3(x)$.

Работа выполнена при поддержке некоммерческого фонда развития исследований по финслеровой геометрии.

Литература

1. *Общая алгебра*. (Под ред. Л. А. Скорнякова). М.: Наука, 1990
2. Allenby, R. B. J. T., *Rings, Fields and Groups: An Introduction to Abstract Algebra*, 2nd edition, 1991
3. Кантор И. Л., Солодовников А. С. *Гиперкомплексные числа*. – М.: Наука, 1973.
4. Чернов В. М. Об определяющих уравнениях элементов ассоциативно-коммутативных конечномерных алгебр и ассоциированных метрических формах. *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*. № 4, 2005, с. 57–74.
5. V. M. Chernov. On defining equations for the elements of associative and commutative algebras and on associated metric forms. In: D. G. Pavlov (Ed.) *Space-Time Structure*. Moscow, TETRU, 2006, pp. 7–24
6. H. Zassenhaus. Über endliche Fastkörper. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 11 (1936), 187–220.
7. М. Холл. *Теория групп*. ИЛ, 1962.
8. С. Ленг. *Алгебра*. М.: Мир, 1968.
9. Д. Г. Павлов. Обобщение аксиом скалярного произведения. *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*. № 1, 2004, с. 5–19.
10. D. G. Pavlov. Generalisation of scalar product axioms. In: D. G. Pavlov (Ed.) *Space-Time Structure*. Moscow, TETRU, 2006, pp. 7–24.

Статья поступила в редакцию 22 декабря 2006 г.

Generalized n -ary laws of composition in the H_4 algebra and their relation to their associated forms

V. M. Chernov

Image Processing Systems Institute of RAS, Samara
vche@smr.ru

The poly-linearization of the norm of the algebra H_4 is studied. New binary, ternary and quaternary operations are introduced in the algebra H_4 – which is endowed with an isotropic basis ("the Zassenhaus product"). It is shown that the quadratic Minkowski norm, the Berwald-Moor norm associated to the form of fourth order, and the norm investigated in the previous paper by the author – which is associated to the cubic norm, have the same values as the introduced binary, quaternary and ternary operations for different values of the elements – "Zassenhaus comultiplicators".

Key-words: Minkowski norm, Berwald-Moor norm, operations, algebra.

MSC: 46C50, 47A07, 47A30.

К ВОПРОСУ О КВАРТИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ

П. Д. Сухаревский

psuharevskijj@uryb.faae.ru

Обсуждаются идеи А. Д. Сахарова о многолистной модели Вселенной в приложении к современной космологии. Обосновывается применение кватричной дифференциальной формы для построения метрики многомерного пространства. Построена неассоциативная алгебра кватричных антикоммутирующих матриц, квадратом которых являются квадратные антикоммутирующие матрицы Паули и Дирака. Найдены уравнения движения – кватричные аналоги уравнений Дирака с введением кватричных спиноров, получен соответствующий этим уравнениям лагранжиан. Введено необходимое для решения задач с многомерной формой бесконечномерное расширение кватернионов и их матричное представление.

Ключевые слова: космология, кватричные спиноры, уравнение Дирака, обобщенные кватернионы.

Модель А. Д. Сахарова и «Big Rip»

В 70–80 годах прошлого столетия известный физик-ядерщик, внесший определяющий вклад в создание первой в мире термоядерной бомбы, академик АН СССР Андрей Дмитриевич Сахаров опубликовал несколько статей о «многолистных моделях Вселенной» [1]. В них обсуждаются «пульсирующие» или «осциллирующие» космологические модели, которые издавна привлекали внимание ученых. Термин «многолистная модель Вселенной», предложенный Сахаровым, как он пишет в 1969 году, представлялся ему «более выразительным, больше соответствующим эмоциональному и философскому смыслу грандиозной картины многократного повторения циклов бытия». Возможно, но нам это не известно, что относительно термина у него были и другие глубокие соображения, связанные с листами римановой поверхности, возникающими в результате интегрирования пути в квадратичной метрике.

В 1970 вышел его первый препринт «Многолистная модель Вселенной» [2]. В нем при обосновании гипотезы о многолистной структуре Вселенной Сахаров ссылался на идеи астрофизика И. Д. Новикова [3] о «сшивании» при гравитационном коллапсе двух четырехмерных пространств, одно из которых находится в стадии сжатия, а другое расширения. Сахаров рассматривал бесконечную последовательность таких попарно сшитых пространств, которые он и называл листами.

Его второе исходное предположение – использование предельного случая фридмановской модели Вселенной с метрикой:

$$ds^2 = dt^2 - \{a(t)\}^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1)$$

и законом изменения масштаба: $a(t) \sim |t|^{2/3}$.

Учитывая, что особенностью метрики (1) при $t \rightarrow \infty$ является рост сколь угодно малых возмущений плотности в неограниченное число раз, в [2] сделан вывод о возможности гравитационных коллапсов при $\Delta\varepsilon/\varepsilon \sim 1$, где ε – средняя плотность энергии, включая энергию гравитационной природы. В случае Вселенной, заполненной пылью, $\varepsilon \sim 1/a^3$. Сахаров в [2] полагал, что так называемые «преждевременные» коллапсы в сжимающемся мире, рассматривавшиеся ранее в [4, 5], которым соответствуют антиколлапсы задержанных ядер в расширяющемся мире, являются теми же физическими процессами, обусловленными флуктуациями $\Delta\varepsilon \sim \varepsilon$.

В последние годы в литературе активно обсуждается гипотеза Калдвелла, Каминковского и Вейнберга «Призрачная энергия и космический судный день» (Phantom Energy and Cosmic Doomsday) [6]. В ней доказывается, что наличие во Вселенной темной энергии, которая для значений характеризующего ее параметра («квинтэссенции») $w \equiv p/\varepsilon$ в интервале $-1 < w < -1/3$ приводит к наблюдаемому ускоренному расширению Вселенной ($\varepsilon \sim 1/a^{3(1+w)}$), в случае $w < -1$ приведет за конечное время к разрыву Вселенной. Эта катастрофа Вселенной получила специальное название «*Big Rip*» («Большой Разрыв»). Легко заметить, что этот процесс, по сути, аналогичен случаю, рассматривавшемуся Сахаровым для флуктуаций во фридмановской Вселенной при $t \rightarrow \infty$ в [2] и в его последующих статьях, приведенных в [1]. Разница только во времени наступления катастрофы. Поэтому можно предположить, что *Big Rip* приведет не к гибели Вселенной, а к сшиванию ее двух листов и перетеканию вещества на другой лист с последующим сжатием Вселенной и возможным поворотом стрелы времени. Так как при $t < 0$ по Сахарову действуют статистические законы, обращенные во парадокс обратимости в его модели не существует. Таким образом, идеи о многолистной структуре Вселенной вновь становятся актуальными.

Заметим, что парные листы Вселенной фактически определены у Сахарова тем, что он пользуется квадратичной метрикой. В последнее время, в связи с рассмотрением многомерных моделей Вселенной, большой интерес вызывает рассмотрение пространств с финслеровой метрикой. Предпочтение по разным причинам отдается пространствам с квартичной метрикой, иногда называемым квадрапространствами [7]. Любопытно, что, как отмечает Д. Г. Павлов [8], который является, по-видимому, основоположником данного направления, среди изученных пространств со стандартной квадратичной метрикой выделяются пространства с двумя измерениями. В двумерном случае, согласно теореме Лиувилля [9], круг преобразований, относящихся к конформным, существенно выше, что приводит к существованию значительного разнообразия аналитических функций комплексного переменного, каждой из которых соответствует определенное конформное отображение на евклидовой плоскости. Так что квадратичная метрика наиболее адекватна пространствам с двумя, а не с четырьмя измерениями. Но эти двумерные пространства, естественно, могут быть вложены в четырехмерные.

При этом возникает естественный вопрос (и напрашивается соответствующий ответ): какая метрика наиболее адекватна пространствам с четырьмя измерениями?

Прежде, чем на него ответить, заметим, опираясь на работу [10] из того же сборника [7], что с чисто математической точки зрения размерность четыре оказывается самой сложной, так как дополнительные $d - 4$ размерности дают новую свободу действий. Например, как отмечено в [10], в размерности ≥ 5 , когда возникают самопересечения комплексов внутри многообразий, малыми шевелениями их можно устранить. В малых же размерностях это невозможно.

По мнению автора работы [10] «размерность четыре с топологической точки зрения – единственная размерность, где сталкиваются столь разные техники и появляются вопросы, казалось бы, не относящиеся друг к другу. А решение многих из них потребует развития еще более удивительных техник алгебры, геометрии и топологии».

Учитывая вышеприведенные замечания (последнее из них является наиболее вдохновляющим), предположим, что для четырех измерений наиболее адекватной должна быть именно квартичная метрика. В этом случае изменятся и представления о многолистных моделях Вселенной Сахарова. Как будет показано ниже, это уже не будет последовательность попарно сшитых (или склеенных) листов четырехмерных пространств, а более сложная циклическая конструкция с возможной перестановкой четырех листов четырехмерных пространств во время коллапсов Вселенной.

Аксиоматическое обоснование кватричной геометрии

Рассмотрим некоторые математические соображения, подтверждающие эти предположения. Прежде всего, обратимся к аксиоматическому построению дифференциально-геометрического многообразия, которое позволяет из первых принципов исследовать физическую структуру пространства.

Как известно, имеется три магистральных направления построения геометрии в целом, которые в принципе могут быть приспособлены и для построения геометрии в малом:

Первое направление – идущее от знаменитой книги Давида Гильберта «Основания геометрии» [11], написанной в конце 19 века. Это наиболее полное аксиоматическое построение евклидовой геометрии. В этом построении она статическая, как и в трактате Евклида «Начала», появившемся около 300 лет до новой эры. Отказавшись от аксиомы о параллельных прямых, ее можно преобразовать в гиперболическую геометрию Лобачевского, но невозможно обобщить на эллиптическую геометрию Римана.

Второе направление – это векторное построение геометрии, впервые проведенное в известной книге Германа Вейля «Пространство. Время. Материя» (1918 г.) [12]. Огромная роль векторного пространства в современных теоретических исследованиях и легкость обобщения аксиом на тензорный анализ делают это направление чрезвычайно привлекательным.

Третье направление – построение геометрии на основе понятия симметрии, проведенное Фридрихом Бахманом в послевоенные годы и завершившееся в 1959 году изданием монографии [13]. Важность теории групп в современной физике и, особенно, группы движения, возможность трансформации системы аксиом как на гиперболическую, так и на эллиптическую геометрию выдвигают это направление на лидирующую позицию среди этих трех классических направлений.

Четвертое направление, которое обещает стать столь же магистральным, это построение геометрии на основе теории физических структур, родившееся в работах новосибирского математика Ю. И. Кулакова и его группы [14]. Математический аппарат теории физических структур представляет собой алгебраическую теорию отношений между элементами произвольной природы. В дальнейшем оно было модернизировано и получило мощное развитие в работах профессора физфака МГУ им. М. В. Ломоносова Ю. С. Владимирова и его учеников [15].

Как отмечается в предисловии редактора книги [13] И. М. Яглома, система аксиом Бахмана не обладает свойством полноты, в отличие от аксиоматики Гильберта. Это, в принципе, не снижает ее научную ценность, но стимулирует дальнейшие исследования. В частности, в ней ничего не говорится о конгруэнтности, упорядоченности и непрерывности, которые в дальнейшем используются в групповых отношениях, о скорости отображения.

Учитывая, что конгруэнтность входит в понятие группы движения, а отсутствие отношений и аксиом порядка и непрерывности позволяет включать в рассмотрение эллиптическую геометрию, можно говорить об определенной компенсации неполноты системы аксиом Бахмана. Но отсутствие аксиомы о скорости отображения нечем компенсировать, что снижает понимание физических процессов и, в целом, проблемы геометризации физики.

В связи с этим рассмотрим два утверждения, которые представляются автору аксиомами [16], лежащими в основе физической (материальной) геометрии. При этом под термином «физическая (материальная) геометрия» будем понимать абстрактный объект, которому кроме пространственных отношений присущи свойства, описываемые уравнениями и полями, характерными для реальных физических тел. Из приведенных

выше направлений аксиоматического построения геометрии следует, что такое понимание геометрии не противоречит исторической тенденции.

(I) – *Аксиома отображения* (измерения). В физической континуальной геометрии можно ввести параметр отображения (измерения) τ такой, что скорость отображения по этому параметру $ds/d\tau = const$, где ds – бесконечно малый интервал между двумя точками (событиями). Параметр τ позволяет произвести равномерную разметку координатной сетки в дифференциально-геометрическом многообразии.

Эта аксиома определяет в дифференциально-непрерывной форме возможность определения скорости движения (или отображения симметрий по Бахману). Хотя в системе аксиом Бахмана нет понятия о дифференциальной непрерывности, она допускает такое представление через теорию групп. Но под движениями в теории групп, а значит и в аксиоматике Бахмана, понимается только чисто геометрические взаимно однозначные отображения множеств точек объектов и прямых на себя, сохраняющие отношения инцидентности (принадлежности) и порядка и переводящие отрезки и углы в конгруэнтные (тождественно равные) отрезки и углы. Это позволяет избежать ответов, в частности на парадокс (апорию) Зенона «Ахиллес и черепаха» о противоречивости некоторых свойств движения, но неудовлетворительно с точки зрения физического понимания процессов.

В то же время действительно при любой скорости реального движения (постоянной или переменной) параметр τ может быть определен, так как он не задан никакими предварительными условиями. С другой стороны, если параметр τ связать с параметром времени реального движения t , то аксиома отображения перейдет в постулат о существовании некоторой постоянной скорости реального движения – отсутствия сил в физической геометрии. В отличие от самой аксиомы, этот постулат может нарушаться в связи с медленной эволюцией масштабов физической геометрии. Но он позволяет строить теорию, геометризующую наблюдаемые движения в каждой точке с использованием в общем случае дифференциальной формы m -ой степени, например, по алгоритму:

$$ds = cd\tau = [g_{\mu\nu\dots\varepsilon} dx^\mu dx^\nu \dots dx^\varepsilon]^{1/m} = [g_{\mu\nu\dots\varepsilon} dx^\mu/dt dx^\nu/dt \dots dx^\varepsilon/dt]^{1/m} dt. \quad (2)$$

Конструкции дифференциалов могут быть и более сложной формы. В частности, при $m = 4$ в нее легко вложить зарядовые, струнные, мембранные и гипермембранные объекты, которые в дифференциальном представлении будут иметь вид:

$$(ds')^4 = g_{1\mu\nu\gamma\xi} dx^\mu dx^\nu dx^\gamma d\lambda^\xi + g_{2\mu\nu\gamma\xi} dx^\mu dx^\nu d\sigma^{\gamma\xi} + g_{3\mu\nu\gamma\xi} dx^\mu dv^{\nu\gamma\xi} + g_{4\mu\nu\gamma\xi} d\sigma^{\mu\nu} d\sigma^{\gamma\xi} + g_{5\mu\nu\gamma\xi} d\omega^{\mu\nu\gamma\xi}. \quad (3)$$

Благодаря возможности вложения в кватернионные формы дифференциальных форм меньшего порядка, объекты с $m < 4$, в том числе квадратичные и линейные, могут приобрести доминирующий вес, даже когда $|dx/dt| \ll 1$.

В частности, одной из возможностей такого вложения может быть самоорганизация (или квантование) любого из пяти членов формы (3). Например, член $g_{1\mu\nu\gamma\xi} dx^\mu dx^\nu dx^\gamma d\lambda^\xi$ в результате самоорганизации может быть преобразован в форму $g_{\mu\nu\gamma} dx^\mu dx^\nu dx^\gamma \Delta\lambda$, член $g_{2\mu\nu\gamma\xi} dx^\mu dx^\nu d\sigma^{\gamma\xi}$ в форму $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Delta\sigma$, а члены $g_{3\mu\nu\gamma\xi} dx^\mu dv^{\nu\gamma\xi}$, $g_{4\mu\nu\gamma\xi} d\sigma^{\mu\nu} d\sigma^{\gamma\xi}$, $g_{5\mu\nu\gamma\xi} d\omega^{\mu\nu\gamma\xi}$ соответственно в $g_\mu dx^\mu \Delta v$, $\Delta(\sigma)^2$, $\Delta\omega$.

Можно попытаться придать физический смысл этим объектам. Например, первый член можно считать характерным для мира со свободными струнами с квантованной длиной струны $\Delta\lambda$, второй и третий – для мира с двумя и тремя квантованными бранами соответственно, четвертый – с элементарными зарядами, а пятый с квантованным действием – постоянной Планка. Причем, все эти объекты могут существовать совместно в

кватернионном пространстве. С другой стороны, квантование может быть приближенным. Но тогда величины $\Delta\lambda$, $\Delta\sigma$, $\Delta\nu$, $\Delta(\sigma)^2$ и $\Delta\omega$ можно считать статистическими средними (или эффективными) величинами, которые за время существования Вселенной из-за постоянного роста энтропии превратились, практически, в константы. Однако, к сожалению, смысл этих преобразований еще далеко не ясен, поэтому в данной работе они более не обсуждаются.

(II) – *Аксиома жесткости* (упорядоченности). Элементы физической геометрии обладают жесткостью (упорядоченностью), то есть, несжимаемостью и однозначной последовательностью объектов, относительно которых проводится измерение.

Естественно, что эта аксиома не имеет никакого отношения к макроскопическим и даже микроскопическим, то есть, на уровне элементарных частиц, понятиям жесткости и упорядоченности для конкретных предметов. Она определяется для бесконечно малых измерений дифференциально-геометрического многообразия.

Аксиома (II) обобщает и дополняет аксиому жесткости Бахмана на плоскости, которая гласит:

Если h – луч, исходящий из точки A , и S – полуплоскость, ограниченная прямой, несущей луч h , а h' – луч, исходящий из точки A' , и S' – полуплоскость, ограниченная прямой, несущей луч h' , то не существует двух разных движений, которые переводили бы A в A' , h в h' и S в S' .

Аксиома (II) означает, что в n -мерной геометрии после проведения $n - 1$ произвольных дифференциальных смещений (отображений), сохраняющих интервал ds неизменным, n -е отображение может быть определено при помощи элементов самой геометрии. Макроскопическим прообразом таких элементов в двумерной геометрии являются линейка и циркуль. Например, задача извлечения кубического корня при помощи циркуля и линейки сводится к трисекции угла. В планиметрии она не имеет решения. Но с использованием трехмерных аналогов линейки и циркуля (их может быть несколько вариантов) задача трисекции угла решается элементарно.

Действительно, рассмотрим следующую идеальную схему. Возьмем кусок плоскости (плоской мембраны) в виде клина с углом при вершине, равным α , свернем его в конус и склеим края (рис. 1а, 1б). Выберем также аналог циркуля в виде треноги с центральным стержнем и направляющей рамкой из равностороннего треугольника (рис. 1в) и, сместив рамку влево, наденем на него конус, закрепив при вершине. Потянув рамку за центральный стержень в сторону вершины телесного угла, добьемся плотного натяжения материала мембраны ножками циркуля таким образом, что конус превратится в пирамиду. Угол при вершине этой пирамиды на каждой грани будет точно равен $\alpha/3$.

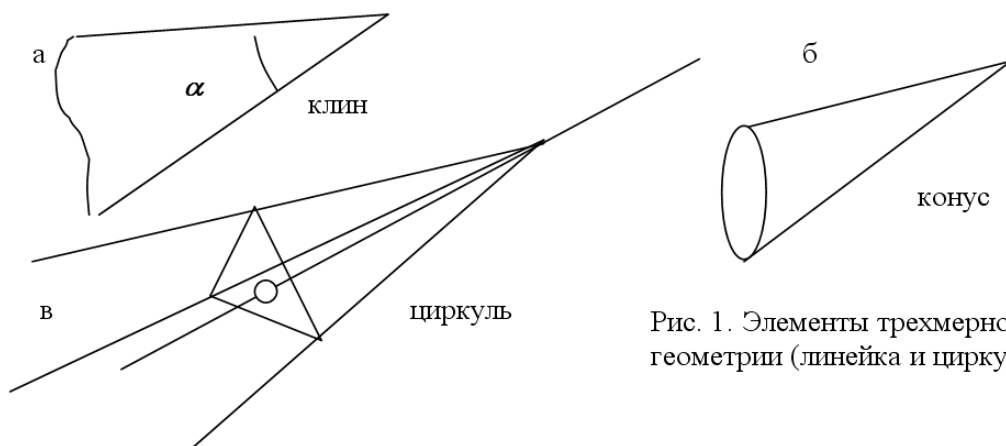


Рис. 1. Элементы трехмерной геометрии (линейка и циркуль).

Одним из следствий аксиомы (2), как будет видно из дальнейших выкладок, является неоднозначность n -го отображения, что не вытекает из аксиом Бахмана. А общим следствием аксиом (I) и (II) для физической геометрии $n = 4 + k$ измерений оказывается ограничение на введение дифференциальной формы m -го порядка величиной $m \leq 4$.

Введение данных аксиом соответствует общей идее о необходимости аксиоматизации геометрии, желанию понять первоосновы окружающего нас мира. Естественно, что там, где аксиоматика не заводит в тупик и не переусложняет задачу, она становится конструктивной. Так, введение дифференциальной формы:

$$ds^m = g_{\mu\nu\dots\varepsilon} dx^\mu dx^\nu \dots dx^\varepsilon, \quad (4)$$

где $\mu\nu\dots\varepsilon \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n = m + k$, $k \geq 0$, соответствует понятию о физических структурах, лежащих в первооснове бурбаканизации физики в духе Кулакова-Владимирова [14, 15], то есть, заданию в качестве исходных представлений унарных отношений между различными объектами, в данном случае между ds , и $dx^\mu, dx^\nu, \dots, dx^\varepsilon$ через $g_{\mu\nu\dots\varepsilon}$, хотя авторы [13, 14 и 15] не оперируют аксиомами непрерывности и упорядоченности, оставляя возможность для дискретных и неупорядоченных геометрий. Более того, в [15] показано, как можно строить геометрию без этих аксиом на самом первичном уровне. Однако, исходное понятие о физических структурах не запрещают дифференциальные отношения на любом уровне масштабов. Важна сама идея о первичности отношений между объектами. По мнению автора, континуальность и дискретность, близкодействие и дальнодействие – это различные грани одной и той же сущности.

Аксиоматические построения, естественно, – достаточно скучное занятие с очень медленным продвижением, но без них сложнее приблизиться к истине.

Для полноты исходного представления о данной физической структуре необходимо определить еще отношения для любого из этих объектов.

Учитывая это, определим отношение между одним из объектов, например dx^μ , и остальными объектами, решив алгебраическое уравнение степени m при фиксированных значениях $ds, dx^\nu, \dots, dx^\varepsilon$.

Как известно, такое алгебраическое уравнение при $m \leq 4$ решается в радикалах. Рассмотрим, какими свойствами обладает это решение.

Во-первых, оно неявно удовлетворяет аксиоме (I) и удовлетворяет требованию жесткости, то есть аксиоме (II). Действительно, при $m = 1$ или 2 решение алгебраического уравнения, как известно, находится при помощи циркуля и линейки. Если же $m = 3$, то (по методу Кардано) после сведения исходного кубического уравнения к виду $y^3 + py + q = 0$ и замены $y_0 \equiv \alpha + \beta$, где y_0 – корень модифицированного кубического уравнения, оно сводится к квадратному уравнению, корнями которого являются значения α^3 и β^3 . Последнее уравнение также решается на плоскости при помощи циркуля и линейки. А корни кубические из значений α^3 и β^3 находятся с использованием геометрических объектов – трехмерных аналогов циркуля и линейки, как было показано выше. Аналогичная ситуация складывается при решении четвертого уравнения с $m = 4$ по методу Феррари. Таким образом, решение алгебраического уравнения для каждого объекта этой физической структуры при $m \leq 4$ удовлетворяет предложенным выше геометрическим представлениям.

Во-вторых, это решение неоднозначно. Многозначная функция комплексного переменного, выражающая данное решение при $m \leq 4$, соответствует группе Галуа [17]. Иначе говоря, группа Галуа лежит в основе геометризации физических структур при $m \leq 4$ и, в частных случаях, при $m \geq 5$.

В-третьих, произвольная функция, выражающаяся в радикалах, может быть определена по непрерывности вдоль любой непрерывной кривой C , не проходящей через точки,

в которых эта функция не определена. Если при этом кривая C не проходит через точки разветвления и неоднозначности, то она определяется по непрерывности вдоль кривой C однозначно [18]. То есть эта функция обладает ценным свойством монодромии.

В-четвертых, для любой функции, выражающейся в радикалах, можно построить риманову поверхность. В данном случае она будет m -листной ($m \leq 4$) для каждого объекта $ds, dx^\mu, dx^\nu, \dots, dx^\varepsilon, \mu\nu \dots \varepsilon \in \{1, 2, \dots, n\}, n = m + k, k \geq 0$. В результате групповых преобразований при сохранении ds римановы поверхности для каждого отдельного из n объекта переходят одна в другую, образуя одну единственную риманову гиперповерхность с четырьмя n -мерными гиперлистами. Очевидно, что при интегрировании путей (переходе от геометрии в малом к геометрии в целом) свойства четырехлистности сохраняются.

Поэтому, возвращаясь к идеям о многолистной модели Вселенной Сахарова, можно отождествить при $m = 2, n = 4$ риманову гиперповерхность с двумя листами (как у А. Д. Сахарова) соответствующим им квадратичным (учитывая квадратичность метрики) четырехмерным пространствам геометрии в целом. А при переходе к $m = 4, n = 4 + k, k \geq 0$ (назовем эти пространства кватричными n -мерными) легко получается обобщение двухлистной сахаровской модели на четырехлистную модель, отождествляемую с римановой гиперповерхностью n измерений, которую по аналогии можно назвать фрагментом четырехлистной циклической структуры Вселенной (или просто четырехлистной моделью Вселенной, если не предполагать ее циклическое дублирование).

Подводя итог выше приведенным рассуждениям, скажем, что имеется достаточно оснований для того, чтобы рассматривать дифференциальные формы с $m \leq 4$ в качестве основы для геометризации физических структур, чего нельзя сказать о дифференциальных формах с $m \geq 5$.

Пример кватричного обобщения теории Дирака

Перейдем теперь к простейшей (канонической) дифференциальной форме четвертого порядка:

$$ds^4 = g_{\mu\nu\gamma\varepsilon} dx^\mu dx^\nu dx^\gamma dx^\varepsilon \Rightarrow ds^4 = dx_1^4 + dx_2^4 + dx_3^4 + dx_4^4 \quad (5)$$

и решим задачу на собственное значение кватричного дифференциального оператора в такой, условно говоря, «плоской» геометрии, то есть, без перекрестных членов:

$$(\partial_1^4 + \partial_2^4 + \partial_3^4 + \partial_4^4)\psi = m^4\psi, \quad (6)$$

где $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i, x_4 = ict, m^4$ – собственное значение дифференциального оператора. Не следует путать использованное здесь значение m , связанное в квантовой механике с массой элементарной частицы, с размерностью метрики в приведенных выше формулах (2)–(4).

Очевидно, что от выражения (6) легко перейти к дифференциальной форме (5) в квантово-механическом случае, положив $\psi = \exp\{imx_i dx_i/ds\}$, которое, собственно и является решением уравнения (6).

Очевидно также, что соотношения (5) и (6) нарушают лоренцеву инвариантность интервала ds . Но в кватричном пространстве именно форма (5) соответствует диагональному выражению для метрического тензора 4-го ранга, определяя кватричную метрику касательного пространства.

Этот оператор является выделенным в том смысле, что его размерность и порядок дифференцирования совпадают и равны 4, а размерность 4 выделена самой природой.

Некоторое обоснование, почему это так, следует (в том числе) и из вышеприведенных рассуждений, главным из которых, по-видимому, является свойство монодромии римановой гиперповерхности.

Можно ли найти корень четвертой степени из кватричного дифференциального оператора, такой, чтобы

$$(M_i \partial_i)^4 = (\gamma_i \partial_i^2)^2 = \sum_i \partial_i^4, \quad (7)$$

где γ_i – гамма-матрицы Дирака или их обобщение, а \sum_i – суммирование по индексу i ? Полученное таким образом линейное уравнение удовлетворяло бы одному из основных постулатов квантовой механики – принципу суперпозиции.

Легко показать, что не существует антикоммутирующих матриц любого порядка с обычными правилами умножения, квадрат которых также есть антикоммутирующая матрица. Действительно, если $M_i M_j = -M_j M_i$, то $M_i^2 M_j^2 = M_i M_i M_j M_j = M_i M_j M_j M_i = M_j^2 M_i^2$. Более сложные комбинации со смешиванием коммутирующих и антикоммутирующих матриц также не приводят к цели.

Однако эта трудность возникает потому, что в кватричной геометрии нужно пользоваться более сложными математическими инструментами. Поэтому введем кватричные матрицы, обобщающие матрицы Паули и матрицы Дирака со специальными правилами умножения. А именно, вначале по обычным правилам перемножим квадратные матрицы на одной гипергранице кватерны, а затем, с помощью структурных констант, определяющих правила умножения на ортогональных гипергранях, свернем остальные индексы матричных элементов. По самому определению алгебра этих матриц будет неассоциативной.

Обозначим кватричную матрицу, обобщающую матрицу Паули $\sigma_i^{a,b}$ через $\zeta_i^{a,b,c,d}$, где, в данном случае, индекс i связан с индексом координаты, левая пара индексов a и b – индексы квадратной матрицы на гипергранице, а правая пара c и d – индексы этих же элементов, обозначающие их принадлежность соответствующим гиперграням (в третьем и в четвертом измерении соответственно). Индексы a, b, c и d пробегает значения 1 и 2. В дальнейшем, как левая, так и правая пара индексов, а также, индекс координаты могут, естественно, обозначаться другими латинскими буквами. Смысл нововведения в том, что после перемножения антикоммутирующих квадратных матриц на одной гипергранице их произведения уже не будут на ней антикоммутирующими, но они могут быть антикоммутирующими на остальных ортогональных гипергранях кватерны.

Примем для элементов матриц ζ_1 и ζ_2 следующие значения ($\zeta_i^{a,b,c,d} \equiv \sigma_i^{a,b} (\sigma_i^{c,d})^{1/2}$) :

$$\zeta_1^{a,b,1,1} = \zeta_1^{a,b,2,2} = 0, \quad \zeta_1^{a,b,1,2} = \sigma_1^{a,b}, \quad \zeta_1^{a,b,2,1} = \sigma_1^{a,b}, \quad (8a)$$

$$\zeta_2^{a,b,1,1} = \zeta_2^{a,b,2,2} = 0, \quad \zeta_2^{a,b,1,2} = (-i)^{1/2} \sigma_2^{a,b}, \quad \zeta_2^{a,b,2,1} = (i)^{1/2} \sigma_2^{a,b}. \quad (8b)$$

Очевидно, что матрицы ζ_1 и ζ_2 являются эрмитово сопряженными, то есть, $\zeta_i^+ = \zeta_i$.

В результате перемножения элементов кватричных матриц ζ_1 и ζ_2 тензорным способом получим:

$$\zeta_1^{a,b,2,1} \zeta_2^{b,c,1,2} = \zeta_1^{a,b,1,2} \zeta_2^{b,c,1,2} = (-i)^{1/2} \sigma_1^{a,b} \sigma_2^{b,c} = (i)^{1/2} \sigma_3^{a,c}; \quad (9a)$$

$$\zeta_1^{a,b,2,1} \zeta_2^{b,c,2,1} = \zeta_1^{a,b,1,2} \zeta_2^{b,c,2,1} = (i)^{1/2} \sigma_1^{a,b} \sigma_2^{b,c} = (-i)^{1/2} \sigma_3^{a,c}. \quad (9b)$$

Если бы правые индексы мы сворачивали так же, как и левые, то есть, по правилам обычного матричного умножения, следовало бы сохранить второй член из (9б) и первый член из (9а), а два остальных члена отбросить. Но тогда они бы неправильно разместились в блочной структуре. В предлагаемой алгебре, наоборот, сохраним первый

член из (9б) и второй из (9а), игнорируя члены, сохранявшиеся при сохранявшихся при обычном матричном умножении.

В соответствии с новыми правилами умножения при возведении в квадрат кватричной матрицы ζ_1 сохраняются члены $(\zeta_1^{a b 1_2})^2 = I^a_b$ и $(\zeta_1^{a b 2_1})^2 = I^a_b$. А при возведении в квадрат матрицы ζ_2 – члены $(\zeta_2^{a b 1_2})^2 = -iI^a_b$ и $(\zeta_2^{a b 2_1})^2 = iI^a_b$. Если результаты возведения в квадрат матриц ζ_1 и ζ_2 разместить на одной гиперплоскости в соответствии с правой парой индексов членов, расположенных в скобках, и редуцировать единичные матрицы, то получим две искомые матрицы σ_1 и σ_2 .

В то же время этот порядок размещения результатов возведения в квадрат не подходит для получения третьей матрицы Паули используя результаты умножения в (9а) и в (9б). Для того чтобы возведение в квадрат правых крайних членов из (9а) и в (9б) и последующее редуцирование единичных матриц дало матрицу σ_3 , умноженную на мнимую единицу i , необходимо было бы член $\zeta_1^{a b 1_2} \zeta_2^{b c 1_2}$ как-то перебросить в ячейку $(^1_1)$, а $\zeta_1^{a b 2_1} \zeta_2^{b c 2_1}$ в $(^2_2)$. Однако в двумерном пространстве эта операция излишняя, поэтому ниже она не будет использована.

Так как $(\zeta_1^{a b 1_2} \zeta_2^{b c 1_2})^2 = iI^a_c$, а $(\zeta_1^{a b 2_1} \zeta_2^{b c 2_1})^2 = -iI^a_c$, то перемножение квадратов матриц $\zeta_{1,2}$ будет соответствовать алгебре матриц Паули. Так что квадраты матриц $\zeta_{1,2}$ создают гомоморфизм группы $SU(2)$ на кватричное пространство.

Чтобы формализовать это правило перемножения матриц $\zeta_{1,2}$, введем матрицу структурных констант (или оператор) $F := F^k_{d f e m}$. Заметим, что все индексы этой матрицы связаны только с правой парой индексов кватричной матрицы. Элементы этой матрицы равны единице, когда $k = c = e$, $d = f = m$, $m \neq k$, а в остальных случаях равны нулю. Структурными они названы потому, что размещают элементы результатов умножения матриц ζ_1 и ζ_2 в нужные ячейки.

Тогда перемножение матриц ζ_i и ζ_j можно записать в виде:

$$(\zeta_i \zeta_j)^{ak}_{gm} = F^k_{d f e m} \zeta_i^{a b c d} \zeta_j^{b e f g}. \quad (10)$$

Тем не менее, можно просто запомнить правило свертывания правых индексов при перемножении кватричных матриц, что и будет использовано ниже при сохранении обозначения оператора F .

Удобно также представить оператор F в виде произведения на одной из граней кватры двух четырехзначковых матриц:

$$F = \Phi_L \Phi_R := \Phi_L^{k d c r} \Phi_R^{r f e m}, \quad (11)$$

элементы которых равны единице, когда для Φ_L : $k = r = c$, $d \neq k$, а для Φ_R : $m = f$, $r = e$, $m \neq r$, и равны нулю в остальных случаях.

Кватричный спинор, естественно, в этом подходе будет иметь два индекса, то есть $\psi := \psi^{ab}$. Причем, оба индекса сворачиваются по обычному матричному умножению, то есть, спинор полностью расположен на одной из граней кватры. Тогда член с частной производной по i -ой координате в координате в матричной форме для прямого и эрмитово сопряженного спинора можно образом:

$$\Phi_R \zeta_i \partial_i \psi := \Phi_R^{r f e m} \zeta_i^{b g e f} \partial_i \psi^{gm} \equiv A_{Ri}^{r g b m} \partial_i \psi^{gm} \quad (12a)$$

$$\partial_j \psi^+ \zeta_j \Phi_L := \partial_j \psi^*_{ka} \zeta_j^{a b c d} \Phi_L^{k d c r} \equiv \partial_j \psi^*_{ka} A_{Lj}^{k b a r}. \quad (12b)$$

Обобщение этой алгебры на кватричное четырехмерное пространство не представляет затруднений.

Действительно, выберем представление антикоммутирующих четырехрядных матриц в виде:

$$\gamma_k = i\sigma_k \tau_2, \quad \gamma_4 = \tau_1, \quad \gamma_5 = -i\tau_3, \quad (13)$$

где τ_1, τ_2, τ_3 – матрицы Паули, у которых вместо единиц стоят единичные двухрядные матрицы, и запишем аналоги матриц ζ_i следующим образом:

$$Z_\mu^{a b c d} = \gamma_\mu^{a b} (\gamma_\mu^{c d})^{1/2}, \quad (14)$$

где греческие индексы μ и латинские индексы a, b, c, d пробегает значения 1, 2, 3 и 4.

Здесь появляются дополнительные делители нуля при умножении по правым индексам. Если они доставляют неудобства, можно использовать матрицы более высокого порядка, что не влияет на общую идеологию.

Нетрудно убедиться, что, введя матрицу структурных констант F , такую же, как и в двумерном случае, но с латинскими индексами, пробегающими значения 1, 2, 3 и 4, мы получим и аналогичную алгебру антикоммутирующих матриц, преобразующихся затем после поворота на кварте в четыре γ -матрицы Дирака в представлении (13). Элементы матриц F равны единице при условии $k = c = e, d = f = m, m = 5 - k$. Для матриц Φ_L соответственно имеем $k = r = c, d = 5 - k$, а для Φ_R имеем $m = f, r = e, f = 5 - e$ и $f = e \pm 2$. Остальные значения равны нулю. Вместо матриц A_{Li} и A_{Rj} получим соответственно матрицы:

$$B_{L\mu} := B_{L\mu j}^k a^b r = Z_\mu^{a b c d} \Phi_L^{k d c r} \quad (a) \quad \text{и} \quad B_{R\nu} := B_{R\nu r}^g b^m = \Phi_R^{r f e m} Z_\nu^{b g e f} \quad (b) \quad (15)$$

Обобщением уравнения Дирака в квартичной геометрии тогда будет:

$$i B_{R\mu} \partial_\mu \psi - (m^4)^{1/4} \psi = 0 \quad (16a)$$

и сопряженное с ним:

$$i \partial_\mu \underline{\psi} B_{L\mu} + (m^4)^{1/4} \underline{\psi} = 0, \quad \text{где} \quad (16b)$$

$$\underline{\psi} := \psi^+ \Gamma_4 \equiv \psi^*_{ab} \Gamma_4^b c, \quad (17)$$

а Γ_4 – матрица Дирака γ_4 , у которой вместо единиц стоят четырехрядные единичные матрицы I , индексы b и c , очевидно, относятся к правой паре индексов.

Тогда спинорный лагранжиан в квартичной метрике будет иметь вид:

$$L_4 = (i/2) [\underline{\psi} B_{R\mu} \partial_\mu \psi - \partial_\mu \underline{\psi} B_{L\mu} \psi] - (m^4)^{1/4} \underline{\psi} \psi. \quad (18)$$

Таким образом, задача извлечения корня четвертой степени из дифференциального оператора $\sum_i \partial_i^4$ может быть решена в виде:

$$\sum_\mu \partial_\mu^4 = (\gamma_\mu \partial_\mu^2) (\gamma_\nu \partial_\nu^2) = [(Z_\mu \partial_\mu) F (Z_\nu \partial_\nu)] [(Z_\alpha \partial_\alpha) F (Z_\beta \partial_\beta)], \quad \text{где} \quad F = \Phi_L \Phi_R. \quad (19)$$

При этом неассоциативность умножения необходима только в правой части равенства (19).

Так как $(m^4)^{1/4} = (\pm, \pm i) m$, то теория, построенная с использованием подобной алгебры в квартичном пространстве, будет обладать захватывающей физической перспективой, потому что будет возможным описывать частицы, античастицы, псевдочастицы и антипсевдочастицы в квартичном пространстве, которое должно проявляться при ультрарелятивистских скоростях движения. Причем, гравитационное взаимодействие двух псевдочастиц должно приводить к возникновению сил отталкивания, что соответствует антигравитации, а в глобальных масштабах к наблюдаемому ускорению расширения Вселенной. Заметим, что в модели ([19], [20]) такое ускорение может быть частично или

полностью интерпретировано как ускоренное сокращение масштабов длины и времени при сохранении размеров Вселенной (что в математическом смысле одно и то же), а также согласованное с этим сокращением изменение фундаментальных физических констант. Причем, так как природа инвариантна относительно согласованных изменений всех масштабов, то они могут наблюдаться только при нарушении этой инвариантности. Обе альтернативы ведут к коллапсу Вселенной и взаимно дополняют друг друга. Слияние псевдочастиц с псевдоантичастицами соответствует рождению античастиц. Античастицы, соответственно, должны распадаться на псевдочастицы и антипсевдочастицы. Эти эффекты могут давать вклад в наблюдаемую барионную асимметрию и темную материю Вселенной.

Естественно, что все вышеобозначенные эффекты в целом должны иметь экспериментальную или наблюдаемую в космических явлениях проверку. Причем, все они могут проявляться только при очень высоких энергиях или при чрезвычайно малых массах.

Если, например, дифференциальная форма для частицы, летящей вдоль координаты x^1 имеет вид:

$$ds^4 = (dx^4)^4 + (dx^1)^4 - [(dx^4)^2 + (dx^1)^2]a^2, \quad (20)$$

где a^2 – малая, но конечная величина, $dx^4 = icdt$, то, разделив обе части равенства на a^2 , практически всегда при $dx^1 < cdt$ двумя первыми членами в (20) можно пренебречь и будет работать обычная метрика пространства Минковского.

Тогда за интервал можно принять величину ds^2/a . Кватричная метрика начинает проявляться только при условии $2|(dx^4)^2|/a^2 + (dx^1)^2/(dx^4)^2 = 2(c^2/a^2)dt^2 + \beta^2 \geq 1$, где $\beta \equiv v/c$.

Таким образом, наблюдаемые метрические эффекты ожидаются действительно очень маленькими. Но они могут сыграть определенную роль в понимании физической картины мира и в развитии современной физической теории.

Полионы

К сожалению, рассмотренная выше задача является только частным случаем всей совокупности проблем, возникающих при попытках найти рабочие инструменты для работы в кватричном пространстве. Это видно, в частности, из работ, публикуемых в журнале «Гиперкомплексные числа в геометрии и физике», ссылки на который приведены в данной статье. Для того чтобы несколько развязать узел этих проблем приведем введение в некоторый новый математический аппарат, пригодный, как надеется автор, для исследований в кубическом и кватричном n -мерном пространстве.

Оказывается удобным бесконечное расширение алгебры кватернионов, в которой коммутационные соотношения выглядят следующим образом:

$$q_j q_i = \exp\{2\pi i/m\} q_i q_j, \quad (21)$$

где $m \in \{N\}$ – степень дифференциальной формы интервала, определяющей метрику; $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i < j$. При этом выполняется равенство:

$$(q_i \partial_i)^m = \sum_i \partial_i^m \quad (22)$$

Назовем такие величины *полинионами*. Нетривиальным оказывается построение матричного представления для полинионов с коммутационными соотношениями (21) даже при $m = 3$ и 4 . Действительно, так как для любых двух матриц с обычными правилами умножения $Sp(M_i M_j) = Sp(M_j M_i)$, то для удовлетворения (21) оба члена этого равенства должны быть равны нулю. С другой стороны, как легко доказать для попыток

представления полинионов матрицами Паули, которые являются точным матричным представлением обычных кватернионов, для существования матричного представления единицы $q_i^m = I$ и для образования группы преобразований ($q_i \circ q_j = q_k$, $q_i, q_j, q_k \in G$) при $m = 3$ и 4 необходимо, чтобы $Sp(M_i M_j)$ и $Sp(M_i)$ не были равны нулю (при $m = 2$ это условие не требуется).

Однако, решение задачи оказывается неожиданно простым для неассоциативной алгебры с учетом предложенного выше алгоритма для частного случая извлечения корня четвертой степени из кватерничного канонического дифференциала, которое допускает обобщение на любое значение m .

Действительно, рассмотрим обобщение матриц Паули в виде:

$$\sigma_1(m) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2(m) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & (-i)^{2/m} \\ (i)^{2/m} & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3(m) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^{2/m} \end{pmatrix}; \quad (23)$$

Тогда, если умножение матриц проводить на таком листе римановой поверхности, где единицу можно разложить на множители:

$$1 = 1^{2/m} 1^{2/m} = (-1)^{2/m} (-1)^{2/m} = (i)^{2/m} (-i)^{2/m}, \quad (24)$$

что, вообще говоря, не совпадает (например, при $m = 4$) с обычной алгеброй комплексных чисел, то выполняется условие соотношения (21).

Это уже означает, что мы переходим к неассоциативной алгебре, умножая сначала числа, стоящие в скобках, и только затем возводим результат в дробную степень, причем, склеиваем листы при аргументах 0 и 2π . При этом, очевидно, что обобщенные матрицы Паули при таком неассоциативном умножении удовлетворяют группе $SU(2)$.

По-видимому, неассоциативность, а значит и необратимость времени характерна для кубичного и кватерничного пространства, а также для более общего пространства. Это, кстати, упрощает интерпретацию модели многолистной Вселенной Сахарова при ее обобщении на кватерничную и кубичную метрику.

Далее используется блочный прием построения неассоциативных матриц, как это сделано для частного случая в соотношениях (9)–(19) с заменой σ_i и γ_μ на $\sigma_i(4)$ и $\gamma_\mu(4)$, а также построение кубичных матриц и матриц произвольного порядка. При этом несложно удовлетворить условию $[\sigma_i(m)]^m = 1$ и $[\gamma_\mu(m)]^m = 1$.

Автор благодарен за интерес к работе и поддержку Д. Г. Павлову и А. А. Элиовичу, а также участникам семинара «Гиперкомплексные числа в геометрии и физике» за полезное обсуждение рассмотренных (кроме подготовленного перед опубликованием пункта «Полинионы») в данной статье вопросов.

Список литературы

1. А. Д. Сахаров. Научные труды. М.: ЦентрКом. 1995.
2. А. Д. Сахаров. Многолистная модель Вселенной. // Препринт № 7 Института прикладной математики АН СССР. М.: 1970.
3. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. Релятивистская астрофизика. М.: Наука. 1967.
4. И. Д. Новиков. // АЖ 41. 1964. С. 1075.
5. Y. Néeman. // Ap. J. 141. 1965. С. 1303.
6. Robert R. Caldwell, Mark Kamionkowski, Nevin N. Weinberg. Phantom Energy and Cosmic Doomsday. Phys. Rev. Lett. 91. 2003. 071301.

7. Д. Г. Павлов. Четырехмерное время. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. № 1 (2004). С. 33–42.
8. Д. Г. Павлов. Обобщение аксиом скалярного произведения. // Там же. С. 5–19.
9. Б. А. Розенфельд. Многомерные пространства. М.: Наука. 1966.
10. Р. В. Михайлов. О некоторых вопросах четырехмерной топологии: обзор современных исследований. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. № 1 (2004). С. 106–110.
11. Д. Гильберт. Основания геометрии. Гостехиздат. 1948.
12. Г. Вейль. Пространство. Время. Материя. М.: Едиториал УРСС. 2004.
13. Ф. Бахман. Построение геометрии на основе понятия симметрии. М.: Наука. 1969.
14. Ю. И. Кулаков. Элементы физических структур. Новосибирск. Изд-во Новосибирского ун-та. 1968.
15. Ю. С. Владимиров. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. М.: Изд-во Моск. ун-та. Часть 1. (Теория систем отношений). 1996. Часть 2. (Теория физических взаимодействий). 1998.
16. П. Д. Сухаревский. Две аксиомы геометрии и их следствия. // Тез. докл. конференции «Инженерно-физические проблемы новой техники». Москва. 1994. С. 144–145.
17. А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Ч. III. Основные структуры. М.: Физматлит. 2001.
18. В. Б. Алексеев. Теорема Абеля в задачах и решениях. М.: Изд-во Московского центра непрерывного математического образования. 2001.
19. К. П. Станюкович, П. Д. Сухаревский, Н. П. Щербинская. Об одной возможности единой классификации космических объектов и элементарных частиц. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. Вып. 2 (1987). С. 20–28.
20. П. Д. Сухаревский, Н. П. Щербинская. Интерпретация квазаров в ТВГ. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. Вып. 1 (1992). С. 3–5.

Regarding the question of quartic geometry

P. D. Suharevsky

psuharevskijj@uryb.faae.ru

We examine A.D. Saharov's ideas on the poly-number model of Universe applied to contemporary Cosmology. We establish the basics for using a quartic differential form for the construction a metric of the multi-dimensional space. A non-associative algebra of quartic skew-commuting matrices is built; the squares of these matrices are assumed to be the square skew-commuting matrices of Pauli and Dirac. We find the equations of motion, which are quartic analogues of the Dirac equations; along with the introduction of the quartic spinors, the corresponding to these equations Lagrangian is obtained. We introduce the necessary for solving problems involving the poly-form, infinite-dimensional extension of quaternions and their matrix representation.

Key-words: Cosmology, quartic spinors, Dirac equation, generalized quaternions.

MSC: 83F05, 15A69, 15A90, 15A78, 15A33.

КВАТЕРНИОННЫЙ АНАЛИЗ И АЛГЕБРОДИНАМИКА

В. В. Кассандров

Институт гравитации и космологии РУДН

vkassan@rambler.ru

Представлен алгебродинамический подход к теории поля и частиц, основанный на нелинейном обобщении условий Коши-Римана на некоммутативные алгебры кватернионного типа. Для комплексных кватернионов такая теория лоренц-инвариантна, обладает естественной калибровочной и твисторной структурой. Точечные и струноподобные сингулярности интерпретируются как частицеподобные объекты, их электрический заряд автоквантован. Представлена новая “причинная геометрия Минковского с фазой”, индуцируемая алгеброй бикватернионов. На ее фоне рассматривается самосогласованная алгебраическая динамика сингулярностей (“ансамбля дубликонов”).

Ключевые слова: твисторные структуры, бикватернионы, некоммутативные алгебры, сингулярности.

1 О коммутативном и некоммутативном анализе и алгебродинамике

История открытия и изучения исключительных алгебр типа кватернионов и октоионов, как и многочисленных попыток использования их для “объяснения структуры Мира”, полна драматизма и неоправдавшихся до настоящего времени надежд [1, 2]. Библиография только за период XX века по применениям кватернионов в теоретической и математической физике насчитывает тысячи работ [3]. Значительная их часть посвящена проблеме построения кватернионного анализа (теории функций кватернионного переменного), по богатству внутренних свойств и приложений сопоставимого с комплексным анализом. Однако, по мнению большинства современных математиков, эта проблема так до сих пор и не получила решения [4]. Между тем *коммутативный* анализ, т. е. анализ функций, принимающих значение в ассоциативной коммутативной алгебре конечной размерности $n \geq 2$ (не обязательно обладающей делением), был построен еще в конце XIX века Г. Шефферсом [5] “по образу и подобию комплексного анализа” и в настоящее время используется, в частности, в развиваемой Д. Г. Павловым концепции *полнчисел* и связанных с ними финслеровых геометрий [6, 7]. Обобщение этого анализа на *супералгебры* было реализовано в работах В. С. Владимирова и И. В. Воловича [8].

Принципиальное различие между коммутативным и некоммутативным анализом отмечено еще А. Садбери [9]: некоммутативность стирает различие между “сопряженным” q^* и исходным q элементами алгебры, позволяя выразить их друг через друга, используя постоянные базисные элементы алгебры. Например, в случае алгебры кватернионов Гамильтона \mathbb{Q} для всех $q \in \mathbb{Q}$ имеем (см. [2], p. 121):

$$q^* \equiv -\frac{1}{2}(q + I * q * I + J * q * J + K * q * K), \quad (1.1)$$

где I, J, K – три мнимые единицы алгебры кватернионов. Поэтому определение, по аналогии с комплексным случаем, “кватернионно-аналитической” (“кватернионно-голоморфной”) функции как независимой от кватернионно-сопряженного аргумента оказывается лишенным смысла.

С другой стороны, естественное определение “правой” (“левой”) производной $F'(Z)$ кватернионной функции $F(Z)$, $F : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}$:

$$F' = dF * dZ^{-1} \quad (F' = dZ^{-1} * dF) \quad (1.2)$$

также оказывается непродуктивным, поскольку условие существования и однозначности предела (1.2) (т. е. его независимости от “пути стягивания” к нулю приращения dZ в векторном пространстве \mathbf{E}^4 алгебры \mathbb{Q}) приводит к существенно переопределенной системе дифференциальных уравнений, оказывающейся совместной лишь для тривиального случая линейной функции (подробнее см., например, [10]). Имеются и другие соображения, убеждающие в трудности построения кватернионного (и вообще некоммутативного) анализа (см., например, [11]).

Тем не менее предпринимались многочисленные попытки обхода этих трудностей, наиболее известной из которых является концепция Фетера [9, 11, 12]. Во многих работах условия “кватернионной аналитичности” (или их *бикватернионного* обобщения) выписывались формально в виде линейной системы уравнений “максвеллоподобного” типа (вместе с соответствующим ей волновым уравнением как обобщением 2D уравнения Лапласа). Однако все эти попытки, по-видимому, не могут рассматриваться в качестве последовательной версии кватернионного анализа. Если же касаться проблемы построения *неассоциативного* анализа, например над алгеброй октонионов, то подходов к ее решению пока вообще не просматривается (см., впрочем, [10], раздел 10).

Что касается коммутативного анализа, то, как известно, в отмеченном выше подходе Шеффера (его современное изложение см., например, в монографии [13]) вместо определения производной используется требование представления в инвариантной форме *дифференциала* функции алгебраического переменного. Это позволяет распространить подход на все (конечномерные) ассоциативно-коммутативные алгебры \mathbb{A} , в том числе и не обладающие делением, в частности на алгебры двойных и дуальных чисел.

А именно, пусть $F(Z)$ – \mathbb{A} -значная функция $F : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}$ алгебраического переменного $Z \in \mathbb{A}$. Шеффер сформулировал условие ее *дифференцируемости* в \mathbb{A} как условие пропорциональности линейных частей приращений (дифференциалов) dZ, dF независимой переменной и ее функции соответственно,

$$dF = H(Z) * dZ, \quad (1.3)$$

где $H \in \mathbb{A}$, а $(*)$ обозначает операцию умножения в \mathbb{A} . Для алгебр с делением условие (1.3), очевидно, эквивалентно условию существования и независимости от “пути стремления” к нулю отношения приращений, т. е. производной $H(Z) = dF * dZ^{-1} \equiv F'(Z)$ и, в частном случае алгебры комплексных чисел \mathbb{C} , немедленно приводит к уравнениям Коши-Римана. В общем случае линейные дифференциальные уравнения, связывающие частные производные от компонент $F(Z)$, следуют из (1.3) после исключения компонент $H(Z)$ и вполне аналогичны уравнениям Коши-Римана для функций комплексной переменной. Вообще, во многих аспектах построенный Шеффером коммутативный анализ воспроизводит двумерный комплексный, так что может быть построен широкий класс \mathbb{A} -дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию (1.3) и включающий, в частности, произвольные полиномы от \mathbb{A} -переменной.

Однако переход от коммутативного случая к некоммутативным ассоциативным алгебрам кватернионного типа все же представляется весьма заманчивым, поскольку такие алгебры \mathbb{A} , в отличие от коммутативных, имеют широкую группу непрерывных симметрий, представленных *внутренними автоморфизмами*

$$q \mapsto a * q * a^{-1}, \quad a \in \mathbb{A}, \forall q \in \mathbb{A}, \quad (1.4)$$

сохраняющими закон умножения в \mathbb{A} . Для алгебры \mathbb{Q} , как известно, группа автоморфизмов есть 2:1 группа 3-мерных вращений $SO(3)$, так что *исключительная алгебра кватернионов Гамильтона может рассматриваться как алгебра физического евклидова пространства \mathbf{E}^3* . Ее обобщение на поле комплексных чисел – алгебра бикватернионов \mathbb{B} – позволяет обеспечить переход к 4-мерному пространству-времени и записать основные соотношения релятивистской теории в компактном виде [14]. Наконец, предложенная автором и изложенная далее в статье версия (би)кватернионного анализа позволила получить нелинейное лоренц-инвариантное обобщение уравнений Коши-Римана и построить лишь на их основе замкнутую теорию поля и частиц – *алгебродинамику*. Изложению этой версии некоммутативного анализа и ее реализации в алгебродинамике и посвящена данная статья.

2 Кватернионная дифференцируемость и конформные отображения

Правильный подход к обобщению подхода Шеффера на алгебры кватернионного типа состоит, по-видимому, в явном учете некоммутативности алгебры \mathbb{Q} в самом определении дифференцируемой функции ее аргумента. А именно, заметим, что в правой части соотношения (1.3) фигурирует инвариантная \mathbb{A} -значная дифференциальная 1-форма наиболее общего вида, которая может быть построена с использованием только операций в алгебре \mathbb{A} . По этим соображениям в случае, когда \mathbb{A} является некоммутативной (однако по-прежнему ассоциативной), условие (1.3) может быть естественно обобщено на следующее условие *\mathbb{A} -дифференцируемости функции $F(Z)$* (см. [10, 23] и ссылки в этих работах):

$$dF = L(Z) * dZ * R(Z). \quad (2.1)$$

Здесь $L, R : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}$ – две т. н. *полупроизводные* функции от $F(Z)$, левая и правая соответственно. Для заданной $F(Z)$, удовлетворяющей (2.1), полупроизводные определены неоднозначно, с точностью до преобразования $L \rightarrow \alpha L$, $R \rightarrow \alpha^{-1}R$, где функция $\alpha(Z)$ принимает значения в *центре* (коммутативной подалгебре) алгебры \mathbb{A} (для ассоциативных алгебр α , как правило, – это действительное или комплексное число). Таким образом, согласно данному определению, *нахождение функций, дифференцируемых в некоторой некоммутативной ассоциативной алгебре \mathbb{A} – это перечисление всех триплетов функций $\{F(Z), L(Z), R(Z)\}$, удовлетворяющих условию (2.1)* (с точностью до вышеотмеченной α -эквивалентности полупроизводных).

Для коммутативных алгебр условие (2.1) редуцируется снова к (1.3), в котором теперь “производная” $H(Z)$ образована из “полупроизводных” $H(Z) = L(Z) * R(Z)$. С другой стороны, если в общем некоммутативном случае положим, например, $R(Z) = E$ (предполагая существование единичного элемента E в алгебре \mathbb{A}), то приходим снова к условию (1.3) с $H(Z) = L(Z)$. Однако, как уже было отмечено, по меньшей мере для алгебр типа кватернионов это условие является чересчур жестким, поскольку ему удовлетворяют лишь линейные функции вида $F = A * Z + B$, где A, B – некоторые постоянные элементы алгебры (см., например, [9, 15]).

В общем случае условие \mathbb{A} -дифференцируемости (2.1) определяет более широкий класс функций. В частности, для алгебры кватернионов Гамильтона \mathbb{Q} условие (2.1) оказывается алгебраическим эквивалентом условия *конформности* отображения $Z \mapsto F(Z)$ в евклидовом пространстве \mathbf{E}^4 [24–26]. Действительно, найдя кватернионную норму элементов $N^2(q) = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ в левой и правой частях соотношения (2.1) и используя соотношение *мультипликативности* нормы

$$N^2(p * q) = N^2(p)N^2(q), \quad \forall p, q \in \mathbb{Q}, \quad (2.2)$$

получим:

$$dl^2 \equiv N^2(dF) = N^2(L * R)N^2(dZ) \equiv \Lambda(Z)ds^2, \quad (2.3)$$

так что каждая \mathbb{Q} -дифференцируемая функция действительно определяет некоторое конформное отображение $ds \mapsto dl$ в \mathbf{E}^4 с масштабным фактором $\Lambda(Z) = N^2(L * R)$. Заметим, что в этом отношении соотношение (2.1) опять-таки можно рассматривать как естественное обобщение условия комплексной голоморфности.

Известно, однако (т. н. *теорема Лиувилля*, см., например, [16]), что в \mathbf{E}^4 конформные отображения образуют конечную 15-параметрическую группу, в отличие от бесконечномерной группы конформных отображений на двумерной комплексной плоскости, реализуемой аналитическими функциями комплексного переменного. Напротив, каждое из конформных отображений в \mathbf{E}^4 отвечает некоторой \mathbb{Q} -дифференцируемой функции, удовлетворяющей условию (2.1) [10]. Например, для инверсии $F(Z) = Z^{-1}$ имеем $dF = -Z^{-1} * dZ * Z^{-1}$, т. е. выражение, имеющее форму условия (2.1). Аналогично проверяется соответствующее утверждение и для других независимых конформных преобразований в \mathbf{E}^4 : трансляций, поворотов и дилатации, а также для произвольных их последовательностей. Иначе говоря, преобразования, определяемые \mathbb{Q} -дифференцируемыми функциями, образуют группу, изоморфную конформной группе \mathbf{E}^4 .

Однако, вследствие конечномерности этой группы для исключительной алгебры с делением \mathbb{Q} класс \mathbb{Q} -дифференцируемых функций, определяемых условием (2.1), оказывается все же слишком узким для применений в фундаментальной физике, например для того, чтобы соответствующие функции могли рассматриваться в качестве физических полей. Ситуация существенно меняется в случае некоммутативных алгебр с делителями нуля, в том числе в случае алгебры бикватернионов \mathbb{B} (кватернионов над полем \mathbb{C}).

3 Бикватернионная дифференцируемость и уравнение \mathbb{C} -эйконала

Мы ограничимся ниже рассмотрением случая полных $N \times N$ матричных алгебр $\mathbb{A} = Mat(N)$ над \mathbb{R} или \mathbb{C} (при $N = 2$ мы имеем изоморфизм матричной алгебры $Mat(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{B}$ с алгеброй бикватернионов). Для эквивалента кватернионной нормы – *определителя* матрицы дифференциалов dF в левой части соотношения (2.1) – будем иметь

$$\det \|dF\| = \det \|L(Z) * R(Z)\| \det \|dZ\| \equiv \lambda(Z) \det \|dZ\|. \quad (3.1)$$

В случае, когда обе матрицы L, R обратимы, так что $\lambda(Z) \neq 0$, соотношение (3.1) определяет конформное отображение с масштабным множителем $\lambda(Z)$ инфинитезимальной (комплексной или вещественно индефинитной) метрики, представленной определителями в (3.1). В частности, для алгебры \mathbb{B} мы имеем дело с конформными отображениями в комплексифицированном пространстве Минковского \mathbb{CM} .

Наиболее интересным, однако, является случай, когда $\det L = 0$ (или, аналогично, $\det R = 0$); при этом масштабный фактор $\lambda(Z) = 0$, и соотношение (3.1) определяет отображение полного векторного пространства \mathbb{A} в подпространство ее элементов – делителей нуля (в комплексный “световой конус” в случае алгебры \mathbb{B}). Такие отображения могут быть названы *вырожденными конформными отображениями*. Они составляют важный и широкий класс: в контексте представленной далее в статье алгебрадинамической теории именно такие отображения (дифференцируемые \mathbb{A} -функции) отождествляются с физическими полями. В частности, *при комплексификации кватернионов класс дифференцируемых функций и отвечающих им отображений существенно расширяется*.

В $N \times N$ матричном представлении условие дифференцируемости (2.1) в покоординатной записи принимает вид $(A, B, \dots = 1, \dots N)$:

$$\nabla_{AB} F_{CD} = L_{CA} R_{BD} \quad (3.2)$$

где ∇_{AB} соответствует оператору дифференцирования по координате Z^{AB} . Для какой-то пары фиксированных значений индексов C, D , обозначая $F_{CD} \equiv \Sigma$, $L_{CA} \equiv \phi_A$, $R_{BD} \equiv \psi_B$, имеем вместо (3.2)

$$\nabla_{AB} \Sigma = \phi_A \psi_B. \quad (3.3)$$

Детерминант матрицы полупроизводных в правой части уравнения в силу факторной структуры тождественно равен нулю, откуда следует уравнение

$$\det \|\nabla_{AB} \Sigma\| = 0, \quad (3.4)$$

которое с необходимостью выполняется для каждой матричной компоненты $F_{CD} \equiv \Sigma \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ дифференцируемой в \mathbb{A} функции $F(Z)$.

Уравнение (3.4) представляет собой *нелинейный* аналог уравнения Лапласа в комплексном анализе, причем *нелинейность возникает здесь как прямое следствие учета некоммутативности алгебры* в самом определении \mathbb{A} -дифференцируемой функции (2.1). В случае алгебры бикватернионов \mathbb{B} (3.4) есть не что иное, как *уравнение комплексного 4-эйконала*. Действительно, вводя для краткости следующие обозначения координат в матричном представлении:

$$Z^{00} = u, \quad Z^{11} = v, \quad Z^{01} = w, \quad Z^{10} = p, \quad (3.5)$$

и раскрывая определитель (3.4), будем иметь уравнение

$$(\nabla_u \Sigma)(\nabla_v \Sigma) - (\nabla_w \Sigma)(\nabla_p \Sigma) = 0, \quad (3.6)$$

которое в декартовых комплексных координатах $z^0 = (u + v)/2$, $z^3 = (u - v)/2$, $z^1 = (w + p)/2$, $z^2 = i(w - p)/2$ принимает знакомый вид уравнения эйконала

$$\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial z^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial z^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial z^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial z^3}\right)^2 = 0. \quad (3.7)$$

Согласно результатам работы [17] (см. также [18]), общее решение уравнения комплексного эйконала (УКЭ) состоит из двух различных классов, оба из которых могут быть получены алгебраически с помощью произвольной (аналитической) функции (проективного) *твисторного переменного*. А именно, в определении 4-градиента комплексного эйконала (3.2) выберем в качестве основного один из 2-спиноров, например $\psi = \{\psi_B\}$, и определим *инцидентный* ему 2-спинор $\tau = \{\tau^A\}$ с помощью соотношения Клейна-Пенроуза [19]

$$\tau = Z\psi, \quad \leftrightarrow \quad \tau^A = Z^{AB}\psi_B. \quad (3.8)$$

Пару спиноров $\{\psi_B, \tau^A\}$, связанных соотношением инцидентности (3.8), мы будем называть (*проективным*) *твистором* комплексного пространства Минковского \mathbb{CM} .

Действительно, соотношение (3.8), как и сам спинор ψ в соотношении (3.2), определены с точностью до умножения на ненулевой комплексный скаляр; поэтому определены, по существу, лишь *три комплексных отношения* компонент твистора. Пусть, например, отлична от нуля компонента спинора ψ_0 ; тогда, используя проективную эквивалентность, можно выбрать калибровку твистора вида $\psi_0 = 1$, и для этих отношений имеем:

$$\psi_1 = G, \quad \tau^0 = wG + u, \quad \tau^1 = vG + p. \quad (3.9)$$

Выберем теперь некоторую произвольную функцию Π трех комплексных аргументов – компонент проективного твистора

$$\Pi(\psi_1, \tau^0, \tau^1) \equiv \Pi(G, wG + u, vG + p) \quad (3.10)$$

Разрешая уравнение $\Pi = 0$ относительно $G(u, v, w, p)$, получаем некоторое решение УКЭ (I класса). Далее, разрешая относительно G уравнение $d\Pi/dG = 0$ и подставляя решение в исходную функцию Π , приходим к “сопряженному” решению УКЭ $\Pi(u, v, w, p)$ (II класса). Согласно результатам работы [17], два этих класса исчерпывают все (почти всюду аналитические) решения УКЭ (подробнее см. [17, 18]). Для дальнейшего заметим только, что для каждой генерирующей (“Мировой”) функции Π решение совместной системы $\Pi = 0$, $d\Pi/dG = 0$ определяет структуру особого множества $\Pi(u, v, w, p) = 0$ – множества точек ветвления самого эйконала G и, соответственно, – сингулярного множества его 4-градиента. Решение этой алгебраической системы позволяет, иногда даже без непосредственного нахождения самого эйконала, определить структуру его сингулярностей, подчас чрезвычайно сложную; соответствующие примеры приведены в работах [18, 20, 27, 31].

4 Глобальные симметрии и расщепление условий \mathbb{A} -дифференцируемости

Вернемся теперь к анализу условий \mathbb{A} -дифференцируемости (2.1) в общем некоммутативном случае матричной алгебры $Mat(N, \mathbb{C})$. Нетрудно видеть, что это фундаментальное соотношение сохраняет свой вид при следующих преобразованиях:

$$Z \mapsto PZQ^{-1}, \quad F(Z) \mapsto SF(Z)T^{-1}, \quad L(Z) \mapsto SL(Z)P^{-1}, \quad R(Z) \mapsto QR(Z)T^{-1}, \quad (4.1)$$

где P, Q, S, T – четыре постоянные обратимые и, вообще говоря, различные матрицы $N \times N$ (знак матричного умножения здесь и в дальнейшем для простоты опускаем). Отвлекаясь от масштабных преобразований (вообще говоря, с разными масштабными факторами для координат Z и функции $F(Z)$), определитель всех матриц будем в дальнейшем считать единичным, так что $P, Q, S, T \in SL(2, \mathbb{C})$.

В частном случае равенства всех матриц имеем преобразования подобия – внутренние автоморфизмы алгебры, – оставляющие инвариантным след и определитель матриц. При $N = 2$, т. е. в случае алгебры бикватернионов \mathbb{B} , определитель имеет структуру квадратичной \mathbb{C} -значной формы:

$$\det \|Z\| = (z^0)^2 - (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2 \quad (4.2)$$

и, таким образом, с учетом инвариантности следа z^0 , автоморфизмы представляют собой вращения 3-мерного комплексного пространства \mathbb{C}^3 ; группа автоморфизмов $Aut(\mathbb{B})$ 2:1 изоморфна группе вращений $SO(3, \mathbb{C})$. В общем случае ($N > 2$) автоморфизмы являются собой линейные преобразования, оставляющие инвариантными след и голоморфную “финслерову метрическую” форму N -го порядка, определяемую структурой детерминанта матрицы.

Ограничиваясь для простоты ниже случаем $N = 2$, рассмотрим общие симметрии условий бикватернионной дифференцируемости (4.1). Преобразования координат

$$Z \mapsto PZQ^{-1}, \quad P, Q \in SL(2, \mathbb{C}), \quad (4.3)$$

очевидно, представляют собой 6-параметрические вращения полного векторного пространства \mathbb{C}^4 алгебры, оставляющие инвариантной голоморфную “метрику” (4.2). Эти

преобразования образуют группу, 2:1 изоморфную группе $SO(4, \mathbb{C})$. При этом закон преобразований полупроизводных $L(Z), R(Z)$ и самой функции $F(Z)$, согласно (4.1), остается недоопределенным вследствие свободы выбора 2-х других матриц $S, T \in SL(2, \mathbb{C})$. Это, очевидно, связано с очень широкой группой симметрий условий \mathbb{B} -дифференцируемости (2.1).

Действительно, можно положить, например, $S = Q, T = P$, рассматривая тем самым симметрии вида

$$Z \mapsto PZQ^{-1}, \quad F(Z) \mapsto QF(Z)P^{-1} \quad L(Z) \mapsto QL(Z)P^{-1}, \quad R(Z) \mapsto QR(Z)P^{-1}, \quad (4.4)$$

при которых все “поля” $L(Z), R(Z), F(Z)$ ведут себя как (ковариантные) векторы, реализуя тем самым векторное представление группы $SO(4, \mathbb{C})$. Однако для тех же полей возможен и другой тип преобразований, сохраняющих вид основных уравнений (2.1). А именно, положим матрицы S, T равными единичной. Тогда будем иметь преобразования симметрий вида

$$Z \mapsto PZQ^{-1}, \quad F(Z) \mapsto F(Z) \quad L(Z) \mapsto L(Z)P^{-1}, \quad R(Z) \mapsto QR(Z), \quad (4.5)$$

так что при этом основная функция $F(Z)$ ведет себя как $SO(4, \mathbb{C})$ -скаляр, а полупроизводные $L(Z), R(Z)$ – как совокупность двух независимо преобразующихся строк (столбцов), т. е. как $SO(4, \mathbb{C})$ -спиноры!

Таким образом, в рассматриваемом случае имеем уникальную ситуацию, когда одно и то же “физическое поле” может преобразовываться по нескольким независимым представлениям “комплексифицированной группы Лоренца” $SO(4, \mathbb{C})$, являясь в одно и то же время вектором, парой спиноров или совокупностью скаляров.

Наиболее общие симметрии (4.1) образуют (в отношении 4:1) $12\mathbb{C}$ -параметрическую группу $SO(4, \mathbb{C}) \times SO(4, \mathbb{C})$, которую можно представлять себе как произведение *координатной* и *внутренней* групп. Однако по отношению к преобразованиям “полей” представление полной группы не может быть разложено однозначно на представление каждой из составляющих.

Действительно, матрицы S, T однозначно представимы в виде $S = \Lambda Q, T = \Pi P$ через некоторые новые матрицы $\Lambda, \Pi \in SL(2, \mathbb{C})$. При этом преобразования полей при общих преобразованиях симметрии (4.1) принимают вид

$$Z \mapsto PZQ^{-1}, \quad F \mapsto \Lambda(QFP^{-1})\Pi^{-1}, \quad L \mapsto \Lambda(QLP^{-1}), \quad R \mapsto (QRP^{-1})\Pi^{-1}, \quad (4.6)$$

и имеют следующую естественную интерпретацию: по отношению к группе “координатных” преобразований $SO(4, \mathbb{C})_{coord}$ все поля $L(Z), R(Z), F(Z)$ являются (ковариантными) векторами; в то же время по отношению к внутренней “изотопической” группе $SO(4, \mathbb{C})_{int}$ каждая из полупроизводных $L(Z), R(Z)$ ведет себя как пара *изоспиноров*, тогда как основное поле $F(Z)$ является *изовектором*. Однако, несмотря на удобство и общность такой интерпретации, она не является, как мы видели выше, единственно возможной.

Заметим, что координатное пространство Z может быть редуцировано к пространству *унитарных* матриц (кватернионов Гамильтона) или к пространству *эрмитовых* матриц, для которых введенные выше прямоугольные координаты z_μ вещественны, а инвариантная форма (4.2) представляет собой метрику Минковского. При этом требование сохранения введенного условия (унитарности, эрмитовости и т. п.) накладывает ограничения на общие преобразования симметрии (4.1), так что группа симметрий редуцируется к меньшей. Все подобные ситуации, включая законы возможных преобразований для “полей” (остающихся, вообще говоря, комплекснозначными) могут быть

легко проанализированы. В частности, на эрмитовом координатном подпространстве алгебра динамическая “теория поля”, основанная на условиях \mathbb{B} -дифференцируемости (2.1), будет автоматически лоренц-инвариантной. Ниже этот случай будет рассмотрен подробнее.

В заключение обсуждения вопроса о симметриях отметим, что линейные преобразования (4.1), включающие в себя $SO(4, \mathbb{C})$ -вращения и масштабное преобразование, не исчерпывают всех симметрий соотношений \mathbb{B} -дифференцируемости (2.1), которые очевидным образом инвариантны относительно $4\mathbb{C}$ трансляций, а также относительно всех *инверсий* в этом пространстве, так что полная группа симметрий по меньшей мере включает в себя $15\mathbb{C}$ -параметрическую группу конформных преобразований 4-мерного комплексного пространства с голоморфной метрикой (4.2).

В соответствии с широкой группой симметрии условия \mathbb{B} -дифференцируемости допускают различные виды их “расщепления”, т. е. редукции к более простым системам уравнений. При этом, очевидно, группа симметрий редуцированной системы будет меньше исходной. Наиболее важным примером является расщепление по столбцам (строкам) матрицы основной функции $F(Z)$ [23].

А именно, обозначим два *столбца* этой матрицы как $F = \{\eta_1, \eta_2\}$, а столбцы правой полупроизводной как $R = \{\xi_1, \xi_2\}$. Тогда исходная система редуцируется к системе двух однотипных уравнений вида

$$d\eta_a = \Phi * dZ * \xi_a, \quad a = 1, 2 \quad (4.7)$$

и решение полной системы получается как произвольная комбинация двух каких-либо решений системы типа (4.7) с одним и тем же матричным “полем” $\Phi(Z)$ (левой полупроизводной). Редуцированная система (4.7) форм-инвариантна, в частности, при следующих преобразованиях переменных:

$$Z \mapsto QZP^{-1}, \quad \xi \mapsto P\xi, \quad \Phi \mapsto P\Phi Q^{-1}, \quad \eta \mapsto P\eta, \quad (4.8)$$

при которых величины $\Phi(Z)$ преобразуются как комплексный 4-вектор, а “поля” $\eta(Z)$ и $\xi(Z)$ – как $SL(2, \mathbb{C})$ -спиноры¹.

Сведение полной системы уравнений \mathbb{B} -дифференцируемости к более простой системе вида (4.7) для двух спиноров (основного и дополнительного) и одного 4-вектора можно назвать *спинорным расщеплением* исходной системы уравнений (2.1).

Основной класс решений полной системы (2.1) на самом деле восстанавливается по произвольному решению *одной* из спинорных систем (4.7). Для этого достаточно просто занулить, например, спиноры η_2 и ξ_2 или считать их пропорциональными исходным спинорам, т. е. положить

$$\eta_2 = k\eta_1, \quad \xi_2 = k\xi_1 \quad (4.9)$$

с произвольным *постоянным* комплексным коэффициентом пропорциональности $k \in \mathbb{C}$. При этом правая полупроизводная представляет собой вырожденную (изотропную) матрицу, $\det R(Z) = 0$, а основная матричная функция отличается от изотропной на произвольную постоянную матрицу C : $F(Z) = C + H(Z)$, $\det H(Z) = 0$. Заметим, что коэффициент пропорциональности k не может нетривиально зависеть от координат Z , что легко доказать, учитывая одинаковый вид “поля” $\Phi(Z)$ для обеих спинорных систем [21].

Изотропный случай, соответствующий *вырожденным конформным отображениям* (см. раздел 3), вообще является единственным физически нетривиальным, поскольку

¹ Очевидно, что преобразования (4.8) не исчерпывают всех симметрий каждой из систем уравнений (4.7), вытекающих из общих преобразований симметрии (4.1), и представлены здесь лишь в качестве примера.

в невырожденном случае, отвечающем каноническим конформным отображениям в \mathbb{C} , напряженности ассоциированных с \mathbb{B} -дифференцируемыми функциями калибровочных полей обращаются в нуль [10, 22, 23]. С другой стороны, при изотропности, например, матрицы правой полупроизводной два ее столбца пропорциональны в точке и, ввиду постоянства коэффициента k , – глобально. Таким образом, мы показали, что все физически нетривиальные (изотропные) решения основных уравнений \mathbb{B} -дифференцируемости (2.1) можно получить из *одного* решения фундаментальной спинорной системы

$$d\eta = \Phi dZ\xi \quad (4.10)$$

с помощью тривиальной “достройки” спиноров $\xi(Z), \eta(Z)$ до изотропных матриц (при этом каждый из спиноров может быть умножен на произвольное комплексное число).

5 Общее решение фундаментальной спинорной системы

Как и уравнение комплексного эйконала (УКЭ) для отдельных компонент основного спинора $\eta(Z)$, общее решение фундаментальной спинорной системы (ФСС) (4.10) состоит из двух различных классов и получается по аналогии с общим решением УКЭ (раздел 3). Здесь мы приведем его структуру без доказательства.

Решения ФСС I класса

Определим твистор пространства \mathbb{C}^4

$$\mathbf{W} = \{\xi, \kappa\} \equiv \{\xi, Z\xi\}, \quad (5.1)$$

построенный на некотором спиноре $\xi(Z)$, удовлетворяющем ФСС (4.10) вместе с некоторыми соответствующими ему функциями $\eta(Z), \Phi(Z)$. Пусть три его *проективные* компоненты функционально независимы; тогда можно считать функционально независимыми и все четыре его компоненты

$$\{\xi_A, \kappa^A = Z^{AB}\xi_B\}. \quad (5.2)$$

При этом можно показать, что компоненты основного спинора, наоборот, функционально зависимы между собой, и их можно считать зависящими от координат лишь через компоненты твистора (5.2):

$$\eta_A(Z) = \eta_A(\sigma), \quad \sigma(Z) = \sigma(\xi, \kappa) \equiv \sigma(\xi(Z), Z\xi(Z)). \quad (5.3)$$

Выбор генерирующей функции $\sigma(\xi, \kappa)$, как и функциональной зависимости от нее компонент основного спинора $\eta_A(\sigma)$ может быть совершенно произволен (разумеется, при обеспечении необходимых условий гладкости).

Оказывается, что зависимость от координат компонент спинора $\xi_A(Z)$ может быть при этом определена из решения алгебраической системы двух уравнений вида

$$\frac{d\sigma}{d\xi_B} = 0, \quad (5.4)$$

после чего подстановкой решения $\xi(Z)$ в (5.3) получаем выражение для основного спинора $\eta(Z)$. При этом матрица “поля” Φ_{AB} изотропна и равна

$$\Phi_{AB} = \frac{d\eta_A}{d\sigma} \frac{\partial\sigma}{\partial\kappa^B}. \quad (5.5)$$

Таким образом, каждая дифференцируемая функция твисторного переменного $\sigma(\xi, \kappa)$ порождает класс эквивалентных (в смысле функциональной зависимости друг от друга компонент спинора η_A) решений ФСС. Эти решения, очевидно, соответствуют решениям I класса УКЭ, описанным в разделе 3.

Решения ФСС II класса

Пусть теперь три *проективные* компоненты твистора (5.1) функционально зависимы; тогда, опять с учетом произвола выбора четвертой компоненты твистора *общего вида*, можно считать, что между его компонентами (5.2) имеются *две* функциональные связи вида

$$\Pi^{(D)}(\xi_A, \kappa^A) = \Pi^{(D)}(\xi_A, Z^{AB}\xi_B) = 0, \quad (D) = 1, 2. \quad (5.6)$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим распределение $\xi_B(Z)$. Дифференцируя уравнения (5.6) по координатам, можно показать (см. подробнее [17]), что компоненты ξ удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида

$$\nabla_{AB}\xi_C = \left[-\frac{\partial\Pi^{(D)}}{\partial\kappa^A} Q_{(D)C}^{-1} \right] \xi_B \equiv \Psi_{CA}\xi_B, \quad (5.7)$$

где введено обозначение Ψ_{CA} для величин в квадратных скобках, и $Q_{(D)C}^{-1}$ – для матрицы, обратной к

$$Q^{(D)C} := \frac{d\Pi^{(D)}}{d\xi_C}. \quad (5.8)$$

В инвариантной пфаффовой форме система уравнений (5.7) записывается следующим образом:

$$d\xi = \Psi dZ\xi. \quad (5.9)$$

При отождествлении основного и дополнительного спиноров $\eta(Z) \equiv \xi(Z)$, а функции $\Psi(Z)$ с “полем” (левой полупроизводной) $\Phi(Z)$, эта система сама по себе, очевидно, является одним из решений ФСС, соответствующих генерирующим твисторным функциям (5.6).

На самом деле этот случай имеет исключительно важное значение для последующих применений бикватернионного анализа в контексте алгебродинамики; в предыдущих работах система (5.9) и соответствующая ей полно-матричная система

$$dF = \Psi dZF, \quad (5.10)$$

в которой $F(Z)$ – *изотропное* ($\det F = 0$) бикватернионное поле, построенное с помощью двух пропорциональных спиноров $\xi(Z)$, получила название *генерирующей системы уравнений* (ГСУ). Действительно, как мы увидим ниже, каждое решение ГСУ естественно порождает некоторое решение свободных уравнений Максвелла, Янга-Миллса и других фундаментальных (безмассовых) уравнений релятивистских полей. Заметим, что с математической точки зрения ГСУ представляет особый случай условий \mathbb{W} -дифференцируемости, при котором *правая полупроизводная* $R(Z)$ *отождествляется* с *основным бикватернионным “полем”* $F(Z)$.

Приведем теперь *общий вид* решений ФСС II класса, соответствующий некоторому произвольному набору двух твисторных функций $\Pi^{(D)}(\xi_A, \kappa^A)$. Из них путем решения алгебраических уравнений (5.6) для спинора $\xi(Z)$ и вычисления по формулам (5.7), (5.8) величин $\Psi(Z)$ получаем полное решение ГСУ (5.9). Оказывается, что при этом компоненты основного спинора $\eta(Z)$ могут быть произвольными (и, вообще говоря, различными) функциями компонент твистора (5.2):

$$\eta_A(Z) = \eta_A(\xi, \kappa) \equiv \eta_A(\xi(Z), Z\xi(Z)). \quad (5.11)$$

Заметим, что в силу связей (5.6) *только две из этих твисторных компонент на самом деле являются независимыми*. Наконец, соответствующее выражение для “поля”

$\Phi(Z)$ получается из найденного решения ГСУ $\{\Psi(Z), \xi(Z)\}$ и произвольно выбранной зависимости компонент основного спинора (5.11) следующим образом:

$$\Phi(Z) = (M\Psi(Z) + N(E + Z\Psi(Z))), \quad M := \left\| \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right\|, \quad N := \left\| \frac{\partial \eta}{\partial \kappa} \right\|, \quad (5.12)$$

где E представляет опять 2×2 единичную матрицу. В результате мы получаем, что произвольный набор двух независимых функций твисторного переменного $\Pi^{(D)}(\mathbf{W}) \equiv \Pi^{(D)}(\xi_A, \kappa^A)$ порождает некоторый класс эквивалентных (в смысле произвольности выбора зависимости компонент основного спинора $\eta_A(\mathbf{W})$) решений ФСС. Этот класс, очевидно, соответствует II классу решений УКЭ, описанному в разделе 3.

Таким образом, мы приходим к общему решению ФСС (4.10). Действительно, поскольку из трех *проективных* компонент базового твистора (5.1) либо все три, либо только две функционально независимы², то всякое решение ФСС принадлежит либо к первому, либо ко второму классу. Поэтому любое (почти всюду аналитическое) решение ФСС может быть получено из некоторой генерирующей функции твисторного переменного (I класс) либо пары таких функций (II класс) с помощью вышеописанной *чисто алгебраической* процедуры. По сравнению с общим решением уравнения комплексного эйконала, описанном выше в разделе 3 (в выбранной калибровке) и в работах [17, 18], в случае ФСС имеется дополнительный произвол в выборе (зависимости от твисторных переменных) компонент основного спинора, которые либо функционально связаны (для I класса решений) либо независимы (для II класса).

Такой произвол может быть естественным образом исключен, если в качестве основного уравнения выбирается система ГСУ (5.9) или соответствующая ей полноматричная система (5.10). Все ее решения уже принадлежат ко второму классу решений ФСС и полностью определяются выбором пары генерирующих функций твисторного переменного (5.6) (а при выборе калибровки проективного твистора (см. ниже) – даже одной единственной “Мировой” функцией). К более подробному обзору свойств и решений этой универсальной системы уравнений мы и переходим.

6 Бикватернионная дифференцируемость и калибровочные поля

В *алгебродинамике* условия бикватернионной дифференцируемости (2.1) и, конкретно, их основной случай – генерирующая система уравнений (5.9), (5.10) – рассматриваются в качестве единственных первичных уравнений физических полей – дифференцируемых \mathbb{W} -функций. При этом для обеспечения релятивистской инвариантности теории следует ограничить комплексные координаты Z на подпространство эрмитовых матриц $Z \mapsto X = X^+$ с метрикой Минковского $\det X = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$. ГСУ (5.9) принимает тогда следующий вид:

$$d\xi = \Psi dX \xi \quad (6.1)$$

и сохраняет свою форму (включая эрмитовость координатной матрицы) при следующих преобразованиях симметрии:

$$X \mapsto P^+ X P, \quad \xi \mapsto P^{-1} \xi, \quad \Psi \mapsto P^{-1} \Psi (P^+)^{-1}, \quad (6.2)$$

при которых величины $\xi(Z)$ и $\Psi(Z)$ ведут себя как $SL(2, \mathbb{C})$ -спинор и комплексный 4-вектор соответственно. Более общей группой симметрии (6.1) является *конформная* группа пространства Минковского, что и определяет существование введенной выше *твисторной* структуры.

² Утверждение, что по крайней мере две компоненты произвольного твистора всегда независимы, доказано, например, в работе [22].

Следует отметить, однако, что эрмитовость представляет собой некоторое избыточное требование, не мотивированное внутренней структурой исходной алгебры бикватернионов. В последнем разделе статьи мы покажем, каким образом в рамках полного векторного пространства \mathbb{C}^4 алгебры \mathbb{B} на самом деле *закодировано* пространство Минковского. С учетом этого обстоятельства мы будем в этом и последующих разделах сохранять *голоморфный* характер теории, работая, как и до того, с комплексными координатами $Z = \{z_\mu\}$ и, соответственно, – с ГСУ в прежней форме (5.9), (5.10). При непосредственной физической интерпретации мы всегда будем подразумевать переход к вещественным координатам $\{x_\mu\}$ или, иначе говоря, – к эрмитовой матрице координат $X = X^+$.

Заметим теперь, что ГСУ (5.9) переопределена (8 дифференциальных уравнений для 6 неизвестных функций), поэтому должны выполняться некоторые условия совместности (интегрируемости и т. п.), которые позволяют получить из (5.9) ограничения отдельно на спинор $\xi(Z)$ и на векторное поле $\Psi(Z)$. Однако перед рассмотрением этих соотношений необходимо установить *калибровочную* природу поля $\Psi(Z)$, существенно отличную от обычной. Отметим, что в дальнейшем в этом и следующем разделе мы следуем в основном изложению обсуждаемых вопросов в работах [22, 26].

Легко видеть, что хорошо известные из теории поля калибровочные $U(1)$ преобразования вида

$$\xi \mapsto \exp i\alpha(X)\xi, \quad \Psi \mapsto \Psi - i\nabla \ln \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (6.3)$$

или их комплексификация, не сохраняют форму ГСУ. Однако в работах [22, 23] было показано, что эта система обладает т. н. “слабой” (или “ограниченной”) калибровочной симметрией, при которой калибровочный параметр α зависит от координат неявно, только через компоненты самого преобразуемого спинора $\xi(Z)$ и твисторно-сопряженного ему спинора $\kappa(Z) = Z\xi(Z)$,

$$\alpha = \alpha(\mathbf{W}) = \alpha(\xi, \kappa) \equiv \alpha(\xi(Z), Z\xi(Z)). \quad (6.4)$$

Такие преобразования, соответствующие проективным преобразованиям твисторных компонент, образуют группу, являющуюся подгруппой полной калибровочной комплексной группы \mathbb{C} (комплексификацией $U(1)$) [22]. При этом величины $\Psi(Z)$ преобразуются градиентным образом, т. е. ведут себя как *потенциалы* некоторого калибровочного поля, которое, как мы увидим в дальнейшем, естественно ассоциируется с (комплексифицированным) *электромагнитным* полем.

Действительно, ГСУ (5.9) может рассматриваться как *условие ковариантного постоянства спинора* $\xi(Z)$ по отношению к \mathbb{B} -значной 1-форме эффективной связности

$$\Omega = \Psi dZ. \quad (6.5)$$

Интересно, что в 4-векторном представлении \mathbb{B} -связность (6.5) порождает аффинную связность вида [10, 23]

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \delta_\nu^\mu \Psi_\rho + \delta_\rho^\mu \Psi_\nu - \eta_{\rho\nu} \Psi^\mu - i\epsilon_{\nu\rho\lambda}^\mu \Psi^\lambda, \quad (6.6)$$

определяющую эффективную комплексную геометрию *Вейля-Картана*. В такой \mathbb{B} -индуцированной геометрии вектор неметричности Вейля и вектор псевдоследа кручения пропорциональны друг другу, и оба выражаются через компоненты основного калибровочного поля $\Psi(Z)$ ³.

³ Ковариантные векторные поля в геометрии Вейля без кручения рассматривались в работе [31]; их свойства тесно связаны с симметриями многообразий Вейля [32]. Для действительных связностей такого типа отношения между неметрической частью и частью, связанной с кручением, являлись предметом рассмотрения в [29].

Используя определение (6.5), перепишем теперь начальную ГСУ (5.9) в виде

$$d\xi = \Omega\xi \quad (6.7)$$

Динамика связности $\Omega(Z)$ может быть получена внешним дифференцированием (6.7), что приводит к условию интегрируемости вида

$$R\xi \equiv (d\Omega - \Omega \wedge \Omega)\xi = 0, \quad (6.8)$$

где (в круглых скобках) появляется *2-форма кривизны связности* R . Поскольку спинор ξ не произволен, а подчиняется (6.7), из условий интегрируемости (6.8) не следует тождественное обращение в нуль кривизны⁴. Замечательным образом, вместо тривиализации условия интегрируемости (6.8) приводят к *самодуальности* кривизны [10, 23].

Чтобы показать это, отметим, что для связности вида (6.5) кривизна R имеет следующую, довольно специальную форму

$$R = (d\Psi - \Psi dZ\Psi) \wedge dZ \equiv \pi \wedge dZ, \quad (6.9)$$

где возникает новая \mathbb{B} -значная 1-форма π с компонентами

$$\pi_{AC} = \pi_{ACBD}dZ^{BD} = (\nabla_{BD}\Psi_{AC} - \Psi_{AB}\Psi_{CD})dZ^{BD}. \quad (6.10)$$

Теперь условия интегрируемости (6.8) принимают форму $(\pi \wedge dZ)\xi = 0$, или в матричной форме

$$\pi_{ACBD}dZ^{BD} \wedge dZ^{CE}\xi_E = 0.$$

С учетом свойств симметрии 2-спиноров из последнего соотношения получаем

$$\pi_A^C{}_{C(B}\xi_E) = 0,$$

так что для любого нетривиального решения $\xi(Z)$ имеем

$$\pi_A^C{}_{CB} \equiv \nabla_{CB}\Psi_A^C + \Psi_{BC}\Psi_A^C = 0. \quad (6.11)$$

Далее, используя стандартную процедуру и разлагая кривизну (6.9) на само- и антисамодуальную часть, убеждаемся, что уравнения (6.11) представляют собой именно *условия обращения в нуль самодуальной части кривизны*. При этом другая, антисамодуальная ее часть \bar{R} имеет вид

$$\bar{R}_A^D{}_{(BC)} = \nabla_{(B}^C\Psi_{AC)} - \Psi_{(B}^C\Psi_{AC)} \quad (6.12)$$

и удовлетворяет дополнительным условиям интегрируемости $\bar{R}\xi = 0$ (далее в статье эти условия не используются).

Итак, хотя 2-форма кривизны (6.9) 1-формы связности (6.5) и не является сама по себе (анти)самодуальной (т. е. самодуальной в “сильном” смысле), она с необходимостью становится (анти)самодуальной *на решениях ГСУ*. По этой причине такое свойство кривизны ГСУ в работе [39] получило название *слабой самодуальности*.

С физической точки зрения выражение (6.12) определяет напряженность некоторого матричного калибровочного поля; в частности, ее диагональная часть

$$F_{BC} = \bar{R}_A^A{}_{(BC)} = \nabla_{(B}^A\Phi_{AC)} \quad (6.13)$$

⁴В этом пункте данный подход существенно разнится от принятого в работах Бухдала [33], Пенроуза [34] и Плебаньского [35], где предполагалось, что условия интегрируемости, напоминающие (6.8), должны выполняться для произвольного спинорного поля (или для широкого класса решений т.н. “точных” систем уравнений поля).

соответствует напряженности электромагнитного поля, в то время как бесследовая часть (6.12) определяет напряженность комплексного поля типа *Янга-Миллса*⁵. Действительно, при учете *тождеств Бианки*

$$dR \equiv \Omega \wedge R - R \wedge \Omega, \quad (6.14)$$

самодуальность кривизны $R + iR^* = 0$ немедленно влечет за собой выполнение вакуумных уравнений Максвелла для диагональной (электромагнитной) части 2-формы $F = \text{Tr}(R) = R_A^A$

$$dF^* = 0 = dF \equiv 0, \quad (6.15)$$

и уравнений Янга-Миллса для бесследовой части кривизны $\mathbf{F}_A^B = R_A^B - \frac{1}{2}F\delta_A^B$.

При этом, хотя электромагнитная 2-форма F является, вообще говоря, \mathbb{C} -значной, в силу своей самодуальности она сводится к вещественной 2-форме \mathbf{F} , связанной с F следующим образом:

$$F = \mathbf{F} - i\mathbf{F}^*. \quad (6.16)$$

Разумеется, для этой формы также выполняются однородные уравнения Максвелла, так что число независимых степеней свободы оказывается одинаковым с обычным вещественным электромагнитным полем. В явном виде для \mathbb{C} -значных напряженностей “электрического” \vec{E} и “магнитного” \vec{H} полей имеем из (симметричной по паре индексов части) условий интегрируемости (6.11)

$$\vec{E} + i\vec{H} = 0, \quad (6.17)$$

откуда $\Im(\vec{H}) = \Re(\vec{E})$, $\Re(\vec{E}) = -\Re(\vec{H})$, и пара $\{\Re(\vec{E}), \Re(\vec{H})\}$ представляет \mathbb{R} -значное электромагнитное поле, подчиняющееся уравнениям Максвелла. В дополнение из (антисимметричной по спинорным индексам части) (6.11) получаем следующее “неоднородное условие Лоренца” [10, 23] для \mathbb{C} -значных электромагнитных потенциалов $A_\mu \leftrightarrow \Phi_{AD}$:

$$\partial_\mu A^\mu + 2A_\mu A^\mu = 0, \quad (6.18)$$

которое также обязано тождественно выполняться на решениях ГСУ. Условие (6.18), разумеется, само по себе не является калибровочно инвариантным в общепринятом смысле, однако аналогично классической электродинамике инвариантно относительно слабых калибровочных преобразований (6.4) при условии, что преобразуемые потенциалы (совместно с некоторым соответствующим им спинором $\xi(Z)$) удовлетворяют ГСУ.

Что же касается полей Янга-Миллса, то они всегда могут быть выражены через напряженность *электромагнитного* поля и сам спинор ξ_A , и поэтому не могут рассматриваться самостоятельно. Заметим, что по отдельности действительная и мнимая части бесследовой компоненты кривизны \mathbf{F}_A^B уже не будут удовлетворять вакуумным уравнениям Янга-Миллса в силу нелинейности последних. Поэтому здесь поля Янга-Миллса являются *существенно комплексными*. Другие детали и особенности полей Янга-Миллса, возникающих в алгебродинамическом подходе, можно найти в статье [23].

⁵ Принимая во внимание ограниченную (слабую) калибровочную симметрию, введенное поле – это не совсем то, что обычно понимают под полями Янга-Миллса с калибровочной группой $SL(2, \mathbb{C})$. Однако вид калибровочных уравнений для введенного поля совпадает с общепринятым, ограничения имеют место только для класса отбираемых решений и их калибровочных преобразований друг в друга.

7 Изотропные бессдвиговые конгруенции, ассоциированные с ГСУ

Рассмотрим теперь ограничения на основной спинор ξ_A , возникающие при исключении калибровочного поля потенциалов Ψ_{AC} из ГСУ (5.9). Для этого распишем данную пфаффову систему дифференциальных уравнений в покомпонентном виде:

$$\nabla_{BA}\xi_C = \Psi_{CB}\xi_A \quad (7.1)$$

и, умножая ее на ортогональный спинор ξ^A , с учетом антисимметричности спинорной нормы $\xi_A\xi^A = 0$ имеем:

$$\xi^A\nabla_{BA}\xi_C = 0, \quad (7.2)$$

т.е. систему нелинейных уравнений на компоненты спинора $\xi(Z)$. Заметим, что при ограничении комплексных координат на подпространство Минковского \mathbf{M} следствием системы (7.2) является хорошо известная в общей теории относительности система уравнений для главного спинора т.н. *бессдвиговой изотропной (геодезической) конгруенции* (БИК) 4-мерных прямолинейных “лучей”:

$$\xi^B\xi^C\nabla_{AB}\xi_C = 0. \quad (7.3)$$

Отметим, что с целью унификации записи здесь и в дальнейшем при ограничении координат на \mathbf{M} мы не делаем различия между пунктирными и непунктирными индексами спиноров, что, вообще говоря, является общепринятым в спинорной алгебре.

В работах [22, 56] было показано, что исходная система (7.2) отличается от системы (7.3) для БИК только более жесткой фиксацией калибровки спинора ξ , а в той части, которая касается *отношения* компонент спинора, эти системы эквивалентны. В частности, *общее решение* системы БИК (и, тем самым, полное описание всех таких конгруенций на пространстве Минковского \mathbf{M}) связано с ее твисторной структурой и дается известной *теоремой Керра* [19, 40] в виде неявного алгебраического уравнения

$$\Pi(\xi, \kappa) = \Pi(\xi, Z\xi) = 0, \quad (7.4)$$

где Π – произвольная *однородная* функция твисторных компонент. Из (7.4) находится отношение спинорных компонент, которое только и определено системой БИК (7.3). Аналогично более жесткая система уравнений для спинора ГСУ (7.2) имеет, как было показано ранее (раздел 4), *общее решение* (5.6) в виде двух уравнений, содержащих две произвольные и независимые твисторные функции $\Pi^{(D)}(\xi, \kappa)$. Из этих уравнений уже определяются обе компоненты спинора $\xi(Z)$.

Как хорошо известно, геометрически на \mathbf{M} для построения БИК следует определить поле (вещественного) изотропного вектора, направляющего к (прямолинейным) лучам конгруенции, через основной спинор $\xi(Z)$ следующим образом:

$$k_\mu(X) = \xi^+\sigma_\mu\xi, \quad \sigma_\mu = \{E, \sigma_a\}, \quad (7.5)$$

где $\{\sigma_a\}$, $a = 1, 2, 3$ – матрицы Паули, E – единичная 2×2 -матрица.

Хорошо известно, что из решения условия инцидентности спиноров (3.8), ограниченного на \mathbf{M} ,

$$\kappa = X\xi \quad (7.6)$$

относительно точек пространства-времени X следует [19], что твисторное поле $\{\xi, \kappa\}$ вместе с определяемым им вектором БИК k_μ *переносится параллельно вдоль определяемых самим этим вектором прямолинейных изотропных направлений*. При этом в качестве параметра переноса вдоль лучей конгруенции может быть выбрана сама временная координата [18, 60, 61].

Отметим теперь, что для физических приложений важны лишь *проективные* компоненты твистора ГСУ, определяемые отношением компонент спинора $\xi_1/\xi_0 = G$ и равные

$$\kappa^0 = wG + u, \quad \kappa^1 = vG + p, \quad (7.7)$$

где u, v, w, p – комплексные матричные координаты (3.5), две из которых (u, v) при ограничении на \mathbf{M} становятся вещественными, а две другие (w, p) – комплексно-сопряженными. При этом для фундаментального спинорного поля $G(X)$ обе системы (7.2) и (7.3) эквивалентны двум ДУ следующего вида:

$$\nabla_w G = G\nabla_u G, \quad \nabla_v G = G\nabla_p G, \quad (7.8)$$

Общее аналитическое решение уравнений (7.8) для функции $G(X)$ немедленно следует теперь из калибровочно инвариантного его представления (5.6) в форме одного алгебраического уравнения (ср. с общим решением УКЭ II класса, раздел 3)

$$\Pi(G, \kappa^0, \kappa^1) = \Pi(G, wG + u, vG + p) = 0, \quad (7.9)$$

неявно определяющего функцию $G(X)$. Здесь Π – произвольная голоморфная функция трех комплексных твисторных переменных. Соотношение (7.9) выражает факт функциональной зависимости трех компонент $\{G, \kappa^0, \kappa^1\}$ проективного твистора \mathbf{W} , сопоставляемого решениям ГСУ. Для уравнений БИК (7.3) это соотношение хорошо известно, представляя теорему Керра в фиксированной калибровке.

Заметим теперь, что решения (7.8) определены всюду, кроме точек ветвления функции $G(X)$, соответствующих *кратным* корням уравнения Керра (7.9), которые определяются условием вида

$$P := \frac{d\Pi}{dG} = 0. \quad (7.10)$$

Перемножая теперь два уравнения (7.8), можно снова проверить выполнение уравнения 4-эikonала для поля $G(X)$ в виде

$$\nabla_u G \nabla_v G - \nabla_w G \nabla_p G = 0, \quad (7.11)$$

а дифференцируя эти уравнения – убедиться, что $G(X)$ удовлетворяет также и линейному *волновому* уравнению д'Аламбера [39, 41, 56]

$$\square G \equiv (\nabla_u \nabla_v - \nabla_w \nabla_p)G = 0. \quad (7.12)$$

Отметим еще, что с учетом (7.11) каждая C^2 -функция $\lambda(G)$ также является гармонической на решениях ГСУ,

$$\square \lambda(G) = 0. \quad (7.13)$$

Используя теперь выражение (5.7) для потенциалов Ψ_{AB} и принимая во внимание (7.11), можем выразить напряженности электромагнитного поля (6.13) через вторые производные от $\ln G$:

$$F_{00} = \nabla_u \nabla_p \ln G, \quad F_{11} = \nabla_v \nabla_w \ln G, \quad F_{01} = \nabla_w \nabla_p \ln G, \quad (7.14)$$

так что выполнение вакуумных уравнений Максвелла для напряженностей (7.14) сразу следует из волнового уравнения (7.13) для $\lambda = \ln G$. Дважды дифференцируя тождество (7.9) по координатам $\{u, v, w, p\}$, получим окончательно следующее важное (и не имеющее аналогов в литературе) представление напряженностей электромагнитного поля (7.14) через твисторные переменные [22, 26]:

$$F_{AB} = \frac{1}{P} \left(\Pi_{AB} - \frac{d}{dG} \left(\frac{\Pi_A \Pi_B}{P} \right) \right), \quad (7.15)$$

где функция P определена в (7.10), а $\{\Pi_A, \Pi_{AB}\}$, $A, B = 0, 1$ обозначают производные (1-го и 2-го порядков) от функции Π по ее твисторным аргументам κ^0, κ^1 . Ниже мы вернемся к этому компактному выражению для напряженностей ассоциированного поля.

Тесная связь между ГСУ и БИК дает возможность ввести еще одну геометрофизическую структуру – эффективную *риманову метрику*. Действительно, хорошо известно [40, 42], что можно деформировать метрику плоского пространства $\eta_{\mu\nu}$ в метрику $g_{\mu\nu}$ Керра-Шилда

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + hk_\mu k_\nu \quad (7.16)$$

таким образом, что основные характеристики БИК k_μ (геодезичность, вращение и сдвиг) сохраняются при такой деформации. Здесь h – некоторая скалярная функция, а изотропная (по отношению как к плоской, так и преобразованной метрикам) конгруенция k , определенная в (7.5), имеет следующий проективно инвариантный вид:

$$k = du + \bar{G}dw + Gd\bar{w} + G\bar{G}dv, \quad (7.17)$$

где через \bar{G} обозначается величина, комплексно сопряженная G .

Обратимся теперь к результатам классической статьи [40], в которой было показано, что метрика (7.16) удовлетворяет электровакуумной системе уравнений Эйнштейна-Максвелла для функций G , полученных как решение алгебраического уравнения Керра (7.9) с *линейной* по твисторным аргументам κ^0, κ^1 генерирующей функцией Π :

$$\Pi = \varphi + (qG + s)\kappa^1 - (pG + \bar{q})\kappa^0. \quad (7.18)$$

Здесь $\varphi = \varphi(G)$ – произвольная аналитическая функция комплексной переменной G , s и p – действительные, а q – комплексная константы. Не входя в детали, отметим, что в соответствии с результатами работы [40] скалярная функция h в (7.16) определена, с точностью до произвольной константы, той же функцией Π и некоторой другой функцией $\Psi(G)$, независимой от $\varphi(G)$ и связанной с электромагнитным полем решения системы Эйнштейна-Максвелла. Такие поля определены в искривленном пространстве с метрикой (7.16) и, вообще говоря, отличны от полей, возникающих в нашем подходе и удовлетворяющих уравнениям Максвелла в *плоском* пространстве-времени⁶. Тем не менее, для наиболее интересных случаев решений Райснера-Нордстрема и Керра-Ньюмена выражения для обоих этих полей почти идентичны, различаясь лишь тем, что в нашем подходе электрический заряд оказывается фиксированным по абсолютной величине самой ГСУ (см. раздел 7).

В работах [40, 41] было также показано, что сингулярности кривизны римановой метрики Керра-Шилда (7.16) определяются как раз условием (7.10). С другой стороны, из выражения (7.15) следует, что то же условие $P = 0$ определяет множество сингулярных точек электромагнитного поля. Это же условие, как можно проверить, имеет место и для сингулярностей поля Янга-Миллса (ЯМ), ассоциированного с решениями ГСУ⁷.

Таким образом, каждому решению ГСУ можно естественно сопоставить некоторое электромагнитное, комплексное ЯМ и поле кривизны (эффективное “гравитационное”) поля. Эти поля удовлетворяют соответственно свободным (комплексифицированным) уравнениям Максвелла, Янга-Миллса и, по крайней мере в основном стационарном случае, – электровакуумной системе Максвелла-Эйнштейна⁸. Сингулярности всех этих полей определяются одним и тем же условием (7.10) и совпадают в пространстве и времени. Это позволяет в алгебродинамическом подходе, основанном на ГСУ, *рассматривать*

⁶ В то же время оба таких типа полей в общем случае отличны и от полей, которые могут быть определены для БИК через твисторное преобразование Пенроуза, см. [19], глава 6.

⁷ Дополнительные сингулярности поля ЯМ соответствуют *полюсам* функции $G(X)$ [21, 22].

⁸ Соответствие между БИК и калибровочными полями в случае искривленного (алгебраически специального) пространства-времени рассматривалось в нашей работе [57].

частицы как общие сингулярности всех ассоциированных полей. Развитием этой общей концепции мы займемся в следующем разделе.

8 Сингулярные “частицеподобные” решения ГСУ с автоквантованным электрическим зарядом

Мы представим здесь краткий обзор основных решений ГСУ и ассоциированных с ними решений уравнений Максвелла, известных к настоящему времени. Все они могут быть получены выбором генерирующей функции Π с последующим решением алгебраического уравнения (7.8) и вычислением промизводных. Если ограничиться наиболее простым случаем решений, которые можно получить в явной форме, то следует рассматривать только функции Π , *квадратичные* по твисторным аргументам (линейные функции приводят к решениям с нулевыми напряженностями электромагнитного поля (7.14)).

Фундаментальное *статическое* решение генерируется функцией Π вида

$$\Pi = G\kappa^0 - \kappa^1 + 2ia \equiv G(wG + u) - (vG + p) + 2ia, \quad (8.1)$$

($a = \text{Const} \in \mathbb{R}$), не содержащее временной переменной. Приравнивая эту функцию нулю и решая квадратное уравнение относительно неизвестной G , получаем (при ограничении координат на вещественное пространство Минковского):

$$G = \frac{p}{(z + ia) \pm r_*} \equiv \frac{x + iy}{(z + ia) \pm \sqrt{x^2 + y^2 + (z + ia)^2}}. \quad (8.2)$$

Электромагнитное поле (7.14), ассоциируемое с данным решением

$$\vec{E} - i\vec{H} = \pm \frac{\vec{r}_*}{4(r_*)^{3/2}}; \quad (\vec{E} + i\vec{H} = 0), \quad (8.3)$$

где $\vec{r}_* = \{x, y, z + ia\}$, имеет сингулярность в форме *кольца* радиуса a , единственно возможную величину электрического заряда $q = \pm 1/4$ (в использованных безразмерных единицах), а также дипольный магнитный и квадрупольный электрический моменты, равные соответственно qa и qa^2 [39, 56]. Если отвлечься от ограничений на заряд, то электромагнитное поле (8.3) совместно с римановой метрикой (7.16), соответствующей БИК (7.17), в точности воспроизводит поле и метрику решения Керра-Ньюмена (в координатах статьи [40]). В частном случае, при $a = 0$, решение (8.2) соответствует *стереографической проекции* $S^2 \rightarrow \mathbb{C}$, а поля превращаются в кулоновское электрическое поле с точечной сингулярностью и в метрику Райснера-Нордстрема.

Квантование электрического заряда является фундаментальным свойством решений ГСУ, обнаруженным в [10, 23]. Это свойство следует из условий самодуальности (6.17), которое совместно с калибровочной симметрией ГСУ приводит к ограничению $q = N/4$, $N \in \mathbb{Z}$ на величину электрического заряда поля, ассоциированного с любым решением ГСУ⁹. Это свойство имеет как топологические, так и чисто динамические причины, связанные с переопределенной структурой ГСУ. Доказательство общей теоремы квантования заряда представлено в работах [26, 58].

При этом необходимо заметить, что в отличие от некоторых других, чисто топологических подходов к проблеме зарядового квантования [43, 44] в контексте ГСУ заряд

⁹ В инвариантной при преобразованиях дуальности \mathbb{W} -электродинамике на самом деле квантуется не электрический, а эффективный *магнитно-электрический* заряд, а проблема магнитного монополя получает естественное решение [58].

фундаментального статического решения (8.2) может иметь лишь одно единственное по модулю значение и, как следствие, естественным образом рассматриваться как *элементарный заряд*. Вместе с известным замечательным свойством решения Керра-Ньюмена иметь гиромагнитное отношение $g = 2$, равное его значению для дираковской частицы [45], появление в теории элементарного заряда делает гораздо более оправданными попытки интерпретации фундаментального решения (8.2) в качестве классической модели электрона. Такие попытки предпринимались, например, в моделях Лопеса [46], Израэля [47] или Буринского [48], основанных исключительно на системе уравнений Эйнштейна-Максвелла)¹⁰.

Согласно общей теореме, доказанной в работе [41] (см. также [48]), все *статические* решения уравнений БИК (а, следовательно, и ГСУ) с ограниченным в 3-мерном пространстве сингулярным множеством (ниже мы называем их *частицеподобными* [27]) сводятся (с точностью до 3-мерных вращений и трансляций) к решению Керра (8.2). Если, однако, снять требование статичности и выйти из класса функций (7.18), рассматривавшихся в [40], то можно обнаружить много зависящих от времени “частицеподобных” решений с ограниченными сингулярностями различных размерностей, с разной временной динамикой и пространственной формой.

В частности, *аксиально симметричное* решение частицеподобного типа, генерирующееся функцией

$$\Pi = \kappa^0 \kappa^1 + b^2 G^2 = 0, \quad b = \text{Const}, \quad (8.4)$$

было найдено в [21, 39]. Для действительных b оно описывает *две точечные сингулярности с элементарными зарядами* $+1/4$ и $-1/4$, совершающие встречное гиперболическое движение. Электромагнитное поле такого решения

$$E_\rho = \pm \frac{8b^2 \rho z}{\Delta^{3/2}}, \quad E_z = \mp \frac{4b^2 M}{\Delta^{3/2}}, \quad H_\varphi = \pm \frac{8b^2 \rho t}{\Delta^{3/2}}, \quad (8.5)$$

соответствует полю известного *решения Борна*. При этом использованы обозначения

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad s^2 = t^2 - z^2, \quad M = s^2 + \rho^2 + b^2, \quad \Delta = M^2 - 4s^2 \rho^2,$$

а сингулярности определяются условием $\Delta = 0$. Для чисто мнимых $b = ia$, $a \in \mathbb{R}$ в начальный момент времени $t = 0$ имеем *электрически нейтральную* кольцевую сингулярность радиуса a , которая с течением времени расширяется в *тор*. По истечении времени $t = |a|$ сингулярность превращается в *тор с самопересечением*, изображенный на рис. 1.

Отметим здесь еще частицеподобное решение, для которого сингулярность в начальный момент времени имеет форму “восьмерки”, а также решение волнового типа со *спиралевидной* сингулярностью [27]. Последнее решение (отвечающее более сложной, нежели квадратичная, генерирующей функции) представляет собой аналог электромагнитной волны в контексте алгебродинамики.

Если отказаться от квадратичности генерирующей функции, то можно прийти и к более широкому классу решений ГСУ и соответствующих им решений уравнений

¹⁰ Недавно в нашей работе [59] было показано, однако, что керровская конгруенция является *неустойчивой в смысле Арнольда*, т. е. по отношению к малому изменению параметров генерирующей функции (8.1), при котором сингулярное керровское кольцо из статического превращается в равномерно расширяющееся и “высвечивается на бесконечность”. Решение проблемы устойчивости требует, по-видимому, перехода к новой “причинной геометрии Минковского с фазой”, см. раздел 9.

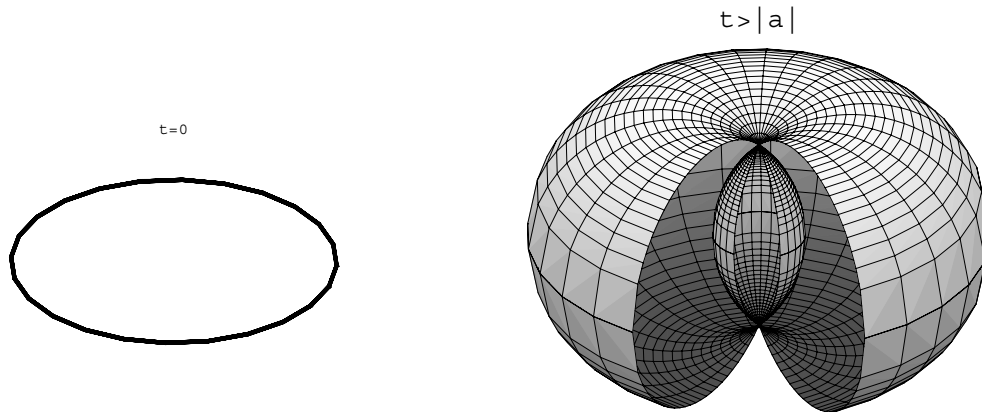


Рис. 1: Форма сингулярного множества для электромагнитного поля (8.5) электрически нейтрального решения (8.4) в начальный ($t = 0$) и последующий ($t > |a|$) моменты времени

Максвелла с чрезвычайно сложной структурой сингулярного множества. В частности, в работах [18, 20, 61] описано решение, отвечающее процессу аннигиляции двух противоположно заряженных точечных сингулярностей, а также решение с “фотоноподобной” сингулярностью (в виде пары скрещенных колец), движущейся равномерно со скоростью света.

Таким образом, чисто алгебраическим методом был получен широкий класс точных или неявно заданных решений *вакуумных* уравнений Максвелла со сложной комбинированной структурой распределенных или точечных сингулярностей. Многие из этих решений не были известны ранее, и даже само их существование не обсуждалось. Эти решения определены всюду, кроме точек, в которых электромагнитное поле обращается в бесконечность. Множество таких сингулярных точек (в фиксированный момент времени) может быть 0-, 1- или даже 2-мерным (как в случае торообразной сингулярности (8.5)); оно может динамически изменять размерность. Однако для решений общего вида, не обладающих какой-либо симметрией, это сингулярное множество всегда *одномерно* и состоит из некоторого числа замкнутых или открытых кривых (“струн”) [20]. Для частицеподобных решений сингулярное множество ограничено в 3-мерном пространстве.

Несмотря на исходную “вакуумность” исходных уравнений, сингулярности поля определяют пространственное распределение и динамику эффективного *источника поля*, в точках которого нарушается аналитичность решений. Тем самым, в отличие от обычного подхода, когда исходно задаваемый источник определяет электромагнитное поле в окружающем пространстве, в представленной концепции, наоборот, *почти всюду аналитическое поле, удовлетворяющее свободным уравнениям Максвелла, само определяет положение своих сингулярностей-источников*. Рассматриваемые решения определены, кроме сингулярного множества меры нуль, во всем бесконечном пространстве-времени, получаются алгебраически из некоторой произвольной генерирующей функции и *не требуют никаких граничных или начальных условий*.

Более того, в общем случае оказывается невозможным свести это множество сингулярностей к стандартному описанию, покрывая его δ -образными источниками, из-за существенной *многозначности* заряженных решений керровского типа. Тем не менее, все “квантовые числа”, форма и динамика таких сингулярностей хорошо определены и нетривиальны, что связано со *скрытой нелинейностью* [43, 51] уравнений Максвелла (и Янга-Миллса) в алгебраическом подходе, а именно с их *вторичностью* по отношению к исходной нелинейной ГСУ (ее условий интегрируемости).

Именно наличие первичной “мастер-структуры” ГСУ обеспечивает существование

некоторых “правил отбора” даже для решений линейных уравнений Максвелла, в том числе и ограничений на допустимые значения электрического заряда, а также приводит к нарушению принципа суперпозиции (поскольку сумма решений удовлетворяет линейным уравнениям Максвелла, но вовсе не обязательно – самой первичной ГСУ).

Исходная переопределенная ГСУ не обладает также и инвариантностью относительно пространственных отражений (а, возможно, и относительно обращения времени) [23]. Эти инвариантности восстанавливаются только на уровне *следствий* этой первичной системы уравнений, а именно уравнений Максвелла, Янга-Миллса и т. п. Такая ситуация, по-видимому, уникальна для теории поля и, с другой стороны, адекватна наблюдаемой физической реальности.

Более подробное обсуждение статуса сингулярных частицеподобных решений в алгебродинамическом подходе можно найти в работах [18, 23, 27, 58].

9 Комплексная геометрия бикватернионов и ансамбль дубликонов

Красивое представление решений уравнений БИК (а, следовательно, и бикватернионной ГСУ) было предложено в работах Е. Т. Ньюмена и др. [49, 52, 53] и развито затем в работе А. Я. Буринского, Р. П. Керра и З. Перьеса [50] и в последующих работах А. Я. Буринского и Е. Т. Ньюмена с сотр. В этом представлении рассматривается “виртуальный” точечный заряд, движущийся по некоторой произвольной “кривой” $\{z_\mu(\tau)\}$, $\tau \in \mathbb{C}$ в *комплексифицированном* пространстве Минковского \mathbb{CM} . В этом случае “след” *комплексного изотропного (“светового”) конуса* “движущегося” заряда на *действительном* пространстве-времени \mathbb{M} формирует изотропную конгруенцию лучей, которая всегда является бессдвиговой.

Конгруенция Керра представляет лишь простейший пример такого представления (генерирующий ее точечный источник “покоится” в некотором месте “дополнительного” к \mathbb{M} *мнимого* подпространства \mathbb{CM}). Приведенные выше решения ГСУ и соответствующие им БИК все могут быть получены из такого *представления Ньюмена*. С другой стороны, эти примеры показывают, что для подобных “*комплексифицированных*” *полей Лиенара-Вихерта* структура сингулярного множества может быть очень сложной и состоит, в общем случае, из большого числа одномерных кривых – струн.

В контексте алгебродинамики комплексифицированное пространство Минковского \mathbb{CM} с необходимостью возникает как полное векторное пространство алгебры бикватернионов \mathbb{B} . В то же время ограничение координат на вещественное пространство-время \mathbb{M} выглядит искусственным и мотивированным только физическими соображениями. Действительно, это подпространство даже не образует подалгебры в \mathbb{B} и не является инвариантным ни относительно автоморфизмов \mathbb{B} , ни относительно полной группы преобразований симметрии (4.1).

С другой стороны, группа автоморфизмов бикватернионов $SO(3, \mathbb{C})$ содержит 6 вещественных параметров и 2:1 изоморфна группе Лоренца $SO(3, 1)$, и не известно ни одной другой алгебры с подобными свойствами. Это свойство алгебры \mathbb{B} было использовано, в частности, при построении *кватернионной теории относительности* А. П. Ефремова [54], в контексте которой инвариантное пространство \mathbb{C}^3 рассматривалось в качестве первичного физического пространства-времени с тремя пространственными и тремя временными координатами. При этом для сведения исходного трехмерного времени к физическому одномерному накладывались дополнительные условия ортогональности.

С нашей точки зрения, такая “экзотическая” интерпретация свойств алгебры бикватернионов не является необходимой. Дело в том, что инвариантное подпространство \mathbb{C}^3 алгебры \mathbb{B} естественным образом отображается в “причинную” часть физическо-

го пространства-времени Минковского с дополнительными внутренними переменными [55]. А именно, основной комплексный инвариант этого пространства

$$\sigma = (z_1)^2 + (z_2)^2 + (z_3)^2 \quad (9.1)$$

распадается на некомпактную “модульную” часть и компактную “фазовую”. Первая часть, представленная вещественным положительно определенным инвариантом

$$S^2 := \sigma\sigma^* \geq 0, \quad (9.2)$$

как раз и определяет наблюдаемую “пространственно протяженную” физическую геометрию, тогда как вторая “фазовая” часть инварианта σ воспринимается как определяющая внутреннюю геометрию “слоя”. Так вот, основной результат работы [55] состоит в том, что положительно-определенный $SO(3, \mathbb{C})$ -инвариант (9.2) может быть эквивалентным образом представлен в виде интервала Минковского:

$$S^2 = \sigma\sigma^* \equiv T^2 - |\vec{X}|^2, \quad (9.3)$$

где *вещественные* величины

$$T := (\vec{z}, \vec{z}^*), \quad \vec{X} := i[\vec{z}, \vec{z}^*] \quad (9.4)$$

при $SO(3, \mathbb{C})$ -вращениях преобразуются как временная и пространственные координаты Минковского при преобразованиях Лоренца. В определении (9.4) круглые и квадратные скобки обозначают скалярное и векторное произведение векторов соответственно.

Таким образом, алгебру \mathbb{B} действительно можно рассматривать как *алгебру пространства-времени*, причем геометрия Минковского индуцируется ею через *квадратичное отображение* комплексных координат инвариантного подпространства \mathbb{C}^3 полного векторного пространства \mathbb{B} во *внутреннюю*, “причинную” часть светового конуса \mathbf{M} , включая его *изотропную границу*. При этом, помимо *положительно определенного инварианта Минковского (!)* (9.3) возникает другой, *фазовый инвариант* преобразований Лоренца, который может оказаться тесно связанным с квантовыми свойствами материи и явлениями квантовой интерференции в частности.

Согласно обсуждаемым здесь представлениям, первичная, “истинная” динамика материальных образований (сингулярностей и др.) имеет место именно в исходном комплексном пространстве, а наблюдаемая – в индуцированном им “причинном пространстве-времени Минковского”. Такой подход позволяет, в частности, успешно реализовать красивую старую идею Уилера-Фейнмана о “размножении электронов”.

А именно, пусть, согласно представлению Ньюмена, точечная частица “движется” в \mathbf{CM} по “траектории” $\{z_\mu(\tau)\}$, $\tau \in \mathbb{C}$ достаточно сложного вида. Тогда можно показать [62], что положение этой частицы будет жестко коррелировано с другими ее положениями на собственной Мировой линии, причем эта корреляция реализуется через одинаковое значение твисторного поля конгруенции и, соответственно, – через уравнение *комплексного изотропного конуса*.

Ситуация во многом напоминает известную процедуру Лиенара-Вихерта в электродинамике, однако, в отличие от действительного случая, в комплексном пространстве уравнение “светового конуса” имеет значительное (если не бесконечное) счетное число корней. Соответственно, частица будет “видеть” и “получать сигналы” от “самой себя” в разных ее положениях на единой траектории. Возникающий ансамбль тождественных, но различным образом расположенных и движущихся частиц был в работе [62] назван ансамблем *дубликонов* (“duplicons”).

Помимо идеи дубликонов, в рассматриваемом контексте неизбежно возникает проблема *комплексного времени*, связанная с общей концепцией времени в алгебродинамике [18, 60, 62]. А именно, каждому из решений ГСУ соответствует некоторая (бесдвиговая) изотропная конгруенция (БИК) лучей (раздел 7). Эта конгруенция может рассматриваться как основной элемент картины Мира, возникающей в алгебродинамике – как поток первичного света, “Предсвета” [18, 60]. При этом вся “материя”, представленная в теории частицеподобными сингулярными образованиями ассоциированных полей, в такой картине предстает как система *каустик* первичного предсветового потока.

Возвращаясь теперь к проблеме времени, отметим, что на \mathbf{M} временная координата может рассматриваться как *параметр вдоль лучей фундаментальной конгруенции*, и определяющим свойством времени в таком подходе является свойство *воспроизводимости*, сохранения первичного твисторного поля, имеющее место вдоль лучей. Образно выражаясь, *время выступает в теории как автоморфизм первичного поля*. При этом электромагнитное и другие поля, выражаемые через производные от твисторного поля, разумеется, не сохраняются вдоль лучей, равно как и каустики-частицы. Именно это и определяет другую фундаментальную функцию времени, отвечающую за *изменчивость* материальных форм.

Картина существенно меняется в комплексном пространстве \mathbb{CM} , где твисторное поле определено с точностью до двух комплексных параметров и остается постоянным вдоль 2-мерных комплексных плоскостей [19, 62]. Если же дополнительно требовать сохранения “материальной” структуры каустик, то остается лишь один свободный параметр, который можно рассматривать как *комплексное время* [62]. При этом, однако, временной порядок следования событий становится неопределенным, и в отсутствие каких-либо оснований для его фиксации наиболее естественно рассматривать изменения комплексного времени как *вполне случайные*. Возникающая тогда для ансамбля дубликонов стохастичность в комплексном пространстве может оказаться тесно связанной с квантовой теорией в формулировке, близкой к фейнмановской. Однако эти идеи еще только предстоит реализовать.

Заключение

В данной статье мы не ставили своей основной задачей представить ни новую левую модель, ни новый алгебраический метод нахождения новых сложных решений известных уравнений классической теории поля. Вместо этого мы пытались здесь последовательно выявить свойства самих дифференцируемых функций бикватернионного переменного, т. е. построить новую версию некоммутативного анализа. Тем не менее, общие условия \mathbb{W} -дифференцируемости [10, 23, 24] редуцируются к генерирующей системе уравнений (5.9), которая обладает врожденной калибровочной и 2-спинорной (твисторной) структурами и обнаруживает удивительные связи со структурами и с языком, общепринятыми в релятивистской теории поля.

В сущности, необходимо сделать лишь три основных предположения для того, чтобы физически интерпретировать исходную абстрактную математическую схему:

- 1) о пространстве-времени как о (вещественном или инвариантном комплексном) подпространстве векторного пространства \mathbb{W} -алгебры,
- 2) о физических полях как дифференцируемых функциях \mathbb{W} -переменного,
- 3) о частицах как пространственно ограниченных сингулярностях напряженностей (кривизн) калибровочного и метрического полей, непосредственно сопоставляемых первичным \mathbb{W} -дифференцируемым функциям-полям.

С физической же точки зрения, ГСУ может рассматриваться как весьма специфич-

ческая система уравнений поля (нелинейная, нелагранжева, переопределенная) для эффективно взаимодействующих 2-спинорного и электромагнитного полей, причем уравнения для обоих не постулируются, а следуют из условий интегрируемости или “сверток” самой ГСУ.

Твисторная структура также вполне естественным, “динамическим” образом возникает в теории в процессе интегрирования ГСУ и делает возможным получение всех ее решений, как и соответствующих им решений уравнений калибровочных полей, замечательно простым алгебраическим методом¹¹.

В частности, из алгебраического уравнения (7.9) сразу же может быть получен широкий класс точных решений линейных уравнений Максвелла с протяженной, но ограниченной в пространстве структурой сингулярности. Условие (7.10) играет при этом роль *уравнений движения* для таких частицеподобных объектов, в то же время определяя их характеристики и пространственную форму и реализуя тем самым эйнштейновскую концепцию *сверхпричинности* [38].

Как следствие невыполнения принципа суперпозиции для решений исходной ГСУ, эволюция таких частицеподобных объектов моделирует физическое взаимодействие, а динамические *перестройки* структуры сингулярного множества могут интерпретироваться как *взаимопревращения* частиц, в том числе как акты излучения / поглощения. Все эти процессы, очевидно, обнаруживают тесную связь с теорией особенностей дифференцируемых отображений и теорией катастроф [36].

Мы надеемся также, что по меньшей мере некоторые замечательные свойства ГСУ могут представлять интерес в общем контексте теории поля. Отметим здесь, в частности:

- 1) возможность расширения класса физически интересных калибровочных полевых моделей с учетом обнаруженной для ГСУ “слабой” калибровочной симметрии (6.4) и за счет использования связностей типа (6.5), (6.6);
- 2) естественную возможность получения “правил отбора” для электрического заряда, спина и других характеристик, исходя из переопределенной структуры уравнений поля;
- 3) полную алгебраизацию первичных дифференциальных уравнений в частных производных для фундаментальных полей, обладающих твисторной структурой;
- 4) возможность определения пространственного расположения и эволюции особенностей поля без непосредственного нахождения самих решений полевых уравнений (методом исключения самой полевой функции $G(X)$ из системы алгебраических уравнений (7.9) и (7.10).

Можно представить себе по меньшей мере три возможных точки зрения на смысл алгебраических структур, представленных в данной статье, и на основную ГСУ в том числе: как на красивую математическую “игрушку”, как на мощный метод получения решений известных уравнений поля и, наконец, как на фундаментальную динамическую систему уравнений, первичную по отношению к общепринятым лагранжевым системам. Причем построение классической динамики на основе переопределенных систем типа ГСУ предполагает и использование совершенно новых методов квантования. С другой стороны, можно при этом пытаться объяснить квантовые свойства в целом через, например, стохастическое поведение ансамбля частицеподобных (сингулярных) объектов (дубликонов и т. п.) или привлекая другие, но чисто классические и алгебраические по природе идеи и методы.

Во всяком случае, для нахождения правильного подхода к квантованию и к объ-

¹¹ Отметим, что в твисторном подходе Р. Пенроуза [19, 30] для получения решений волновых уравнений достаточно провести интегрирование функций твисторного аргумента; в рассматриваемом подходе даже это интегрирование не является необходимым.

яснению квантовых свойств материи вообще необходимо вначале тщательно изучить свойства самих классических решений как на фоне обычного пространства-времени Минковского, так и при рассмотрении естественно индуцируемой свойствами \mathbb{B} -алгебры “причинной геометрии Минковского с фазой”, кратко рассмотренной в последнем разделе. Мы считаем, что именно эта геометрия на самом деле может оказаться истинной геометрией физического пространства-времени, а также быть ответственной за универсальные квантовые свойства материи и за квантовую неопределенность (в контексте изначально чисто классической теории).

Во всяком случае, уже обнаруженные свойства \mathbb{B} -дифференцируемых функций-полей и многочисленных геометрофизических структур, порождаемых ими, выглядят настолько необычно и, с другой стороны, настолько коррелируют с моделями и математическим аппаратом теоретической физики, что заставляют задуматься о возможном *Числовом* происхождении фундаментальных законов природы [60, 63] и обратиться вновь, на современном математическом и физическом уровне понимания, к древней философии Пифагора и его последователей.

* * *

Автор признателен своим ученикам Джозефу А. Ризкалла и Владимиру Н. Тришину за многолетнее сотрудничество. Многие важные результаты, представленные в статье, были в свое время получены в совместных с ними работах. Я также благодарен Дмитрию Г. Павлову за поддержку и приглашение к участию в конференции по финслеровой геометрии “Каир-2006”.

Литература

- [1] Гамильтон У.Р. Избранные труды: Оптика. Динамика. Кватернионы. М.: Наука. 1994. 560 с.
- [2] Penrose R. The Road to Reality. A complete guide to the laws of the Universe. London: Jonathan Cape. 2004. 1094 p.
- [3] Gsponer A., Hurni J.-P. Quaternions in mathematical physics (1): Alphabetical bibliography. // Preprint [www.arXiv.org / math-ph /0510059](http://www.arXiv.org/math-ph/0510059); (2): Analytical bibliography. // Preprint [www.arXiv.org / math-ph /0510092](http://www.arXiv.org/math-ph/0510092)
- [4] Атья М. Геометрия и физика узлов. М.: Мир. 1995. С. 184
- [5] Sheffers G. // *Berichte Sächs. Acad. Wiss.*, **Bd. 45**, 1893, P. 828
- [6] Павлов Д. Г. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **1 (1)**, 2004, С. 17; С. 31
- [7] Гарасько Г. И. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **1 (1)**, 2004, С. 75
- [8] Владимиров В. С., Волович И. В. // *Теор. Мат. Физ.*, **59**, 1984, С. 3; **60**, 1984, С. 169
- [9] Sudbery A. // *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **85**, 1979, P. 199; русский перевод см.: *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **2 (2)**, 2004
- [10] Кассандров В. В. Алгебраическая структура пространства-времени и алгебродинамика. М: Изд-во УДН. 1992. 152 с.
- [11] Evans M., Gürsey F., Ogievetsky V. *Physical Review*, **D47**, 1993, P. 3496; русский перевод см.: *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **1 (3)**, 2005
- [12] Fueter R. // *Monatsh. Math. Phys.*, **43**, 1931, P. 69; *Comm. Math. Helv.* **4**, 1931. P.9; **7**, 1934, P. 307; **8**, 1935, P. 371; **10**, 1937, P. 306
- [13] Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В. Пространства над алгебрами. Казань: Изд-во КГУ. 1985. Глава 5
- [14] Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А. Кватернионы в релятивистской физике. Минск: Наука. 1989. 247 с.
- [15] Deavours A. // *Amer. Math. Monthly*, **80**, 1973, P. 995

- [16] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука. 1979. 760 с.
- [17] Kassandrov V.V. // *Gravitation & Cosmology*, **8**, Suppl. 2, 2002, P. 57–62; [www.arXiv.org / math-ph / 0311006](http://www.arXiv.org/math-ph/0311006)
- [18] Кассандров В. В. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **1 (1)**, 2004, С. 89; English version: Preprint [www.arXiv.org / hep-th / 0312278](http://www.arXiv.org/hep-th/0312278)
- [19] Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. Т. 2. М.: Мир. 1988. 576 с.
- [20] Kassandrov V.V. // In: *Proc. Int. Conf. on NonEuclidean Geometries*, ed. V.I. Redkov. Minsk: Institute of Physics of Belarus Press, 2006 (to be printed); <http://dragon.bus-net.by/bgl5/proc.htm>
- [21] Ризкала Дж. А. Геометризация электромагнетизма на основе пространств со связностью Вейля-Картана. Кандидатская диссертация. М.: РУДН. 1999. 125 с.
- [22] Kassandrov V.V., Rizcallah J.A. Twistor and “weak” gauge structures in the framework of quaternionic analysis. // Preprint [www.arXiv.org / math-ph / 0311006](http://www.arXiv.org/math-ph/0311006)
- [23] Kassandrov V.V. // *Gravitation & Cosmology (Moscow)*, **3**, 1995, P. 216; [www.arXiv.org / gr-qc / 0007026](http://www.arXiv.org/gr-qc/0007026)
- [24] Kassandrov V.V. // *Acta. Applic. Math.*, **50**, 1998, P. 197
- [25] Kassandrov V.V. // In: *Quasigroups and Nonassociative Algebras in Physics*, ed. J. Lõhmus and P. Kuusk. Tallinn: Institute of Physics of Estonia Press, 1990. P. 202
- [26] Кассандров В. В. // *Вестник РУДН, сер. Физика*, **1**, 1993, P. 59
- [27] Kassandrov V.V., Trishin V.N. // *Gravitation & Cosmology (Moscow)*, **5**, 1999, P. 272; [www.arXiv.org / gr-qc / 0007027](http://www.arXiv.org/gr-qc/0007027)
- [28] Robinson I. // *J. Math. Phys.*, **2**, 1961, P. 290
- [29] Tod K.P. // *Class. Quant. Grav.*, **13**, 1996, P. 2609
- [30] Penrose R. // *Int. J. Theor. Phys.*, **1**, 1968, P. 61; *J. Math. Phys.*, **10**, 1969, P. 38
- [31] Кассандров В. В., Ризкала Дж. А. // В сб: *Геометризация физики II, Труды Межд. конф. памяти А. З. Петрова*, ред. В. И. Башков. Казань: Изд-во КГУ, 1996, С. 137
- [32] Hall G.S. // *J. Math. Phys.*, **32**, 1991, P. 181; **33**, 1992, P. 2638
- [33] Buchdahl H.A. // *Nuovo Cimento*, **10**, 1958, P. 96; **11**, 1959, P. 496; **25**, 1962, P. 486
- [34] Penrose R. // *Gen. Rel. Grav.*, **12**, 1980, P. 225
- [35] Plebanski J. // *Acta Polon.*, **27**, 1965, P. 361
- [36] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. М: Изд-во МЦНМО. 2004. 672 с.
- [37] Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М: Наука. 1996. 334 с.
- [38] Эйнштейн А. Собрание сочинений. Т. 4. М: Наука. 1967. С. 109; Einstein A. // *Forschun. und Forsch.*, **5**, 1929, P. 248
- [39] Кассандров В. В., Ризкала Дж. А. // В сб: *Современные проблемы теории поля*, ред. А. В. Аминова. Казань: Изд-во КГУ, 1998, С. 176; [www.arXiv.org / gr-qc / 9809078](http://www.arXiv.org/gr-qc/9809078)
- [40] Debney G. C., Kerr R. P., Schild A. // *J. Math. Phys.*, **10**, 1969, P. 1842
- [41] Kerr R. P., Wilson W. B. // *Gen. Rel. Grav.*, **10**, 1979, P. 273
- [42] Крамер Д., Штефанн Х., Мак-Каллум М., Херлт Э. Точные решения уравнений Эйнштейна. М: Энергоиздат. 1982. 416 с.
- [43] Rapāda A. F. // *An. Fis. (Madrid)*, **A87**, 1991, P. 55; [www.arXiv.org / hep-th / 9802166](http://www.arXiv.org/hep-th/9802166)
- [44] Журавлев В. Н. // В сб: *Гравитация и электромагнетизм, № 6*, ред. А. Богуш и др. Минск: Университетское. 1998. С. 105
- [45] Carter B. // *Phys. Rev.*, **174**, 1968, P. 1559
- [46] Lopez C. A. // *Phys. Rev.*, **D30**, 1984, P. 313
- [47] Israel W. // *Phys. Rev.*, **D2**, 1970, P. 641
- [48] Буринский А. Я. // В сб: *Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 11*, ред. К. П. Станюкович. М.: Атомиздат. 1980. С. 47

- [49] Newman E. T. // *Journal Math. Phys.*, **14**, 1973, P. 102
- [50] Burinskii A. Ya. // In: *Proc. IV Hungarian Relativity Workshop* ed. P. R. Kerr and Z. Perjés. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1992, P. 149;
Burinskii A. Ya., Kerr R. P., Perjés Z. // Preprint www.arXiv.org/gr-qc/9501012
- [51] Ranáda A. F., Trueba J. L. // *Phys. Lett.*, **A202**, 1995, P.337; *Phys. Lett.*, **A235**, 1997, P. 25
- [52] Lind R. W., Newman E. T. // *Journal Math. Phys.*, **15**, 1974, P.1103
- [53] Newman E. T. // *Physical Review*, **D65**, 2002, P. 104005; arXiv.org/gr-qc/0201055
- [54] Yefremov A. P. // *Gravitation & Cosmology (Moscow)*, **2**, № 1, 1995, P. 77; № 4, P. 335
- [55] Kassandrov V. V. // *Gravitation & Cosmology (Moscow)*, **11**, 2005, P.354; www.arXiv.org/gr-qc/0602088
- [56] Kassandrov V. V., Rizcallah J. A. // In: *Geometrical and topological ideas in modern physics*, ed. V. A. Petrov. Protvino: Institute for high energy physics. 2002. P. 199
- [57] Kassandrov V. V., Trishin V. N. // *General Relativity and Gravitation*, **36**, 2004, P. 1603; www.arXiv.org/gr-qc/0401120
- [58] Kassandrov V. V. // In: *Has the last word been said on classical electrodynamics?*, eds. A. Chubykalo, V. Onooshin, A. Espinoza, R. Smirnov-Rueda. Rinton Press, 2004, P. 42; www.arXiv.org/physics/0308045
- [59] Kassandrov V. V. // In: *Proceedings of Int.School on geometry and analysis, in memory of N. V. Efimov*. Rostov-na-Donu: Rostov Univ. Press. 2004. P. 65; www.arXiv.org/gr-qc/0602046
- [60] Кассандров В. В. // В сб.: *Математика и практика. Математика и культура. Вып.2*, ред. М. Ю. Симаков. М.: Самообразование. 2001. С. 61; www.chronos.msu.ru
- [61] Кассандров В. В. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **1(1)**, 2004, С. 91–107; www.chronos.msu.ru
- [62] Kassandrov V. V. // In: *Proc. Int. Conf. "Physical Interpretations of Relativistic Theory"*, eds. M. C. Duffy et al. M: Bauman Tech. Univ. Press. 2005. P. 45; www.arXiv.org/gr-qc/0602064
- [63] Кассандров В. В. // *Дельфис*, **2**, 2005, С. 61

Quaternionic analysis and algebrodynamics

V. V. Kassandrov

Russian People's Friendship University, Institute of Gravitation and Cosmology, Moscow
vkassan@rambler.ru

An algebraic approach towards the fields and particle theories is proposed; this is based on the nonlinear generalization of the Cauchy-Riemann condition to noncommutative algebras of quaternionic type. For complex quaternions this theory is Lorentz-invariant and possesses natural gauge and twistor structures. Point-like and string-like singularities are regarded here as particle-like objects, their electric charge is quantized. It is proposed a new "causal Minkowski phase geometry", induced by the algebra of bi-quaternions. Within this background we examine the auto-correlation of the algebraic dynamics of singularities.

Key-words: twistor structures, bi-quaternions, non-commutative algebras, singularities.

MSC: 32A30, 46S10, 11R52, 32S99, 17A42.

FINSLER SPACES WITH POLYNOMIAL METRIC

L. Tamássy

Department of Mathematics, Debrecen Univ., Hungary

tamassy@math.klte.hu

1. Introduction

Let M be a paracompact n -dimensional manifold and a an r -form, that is a covariant tensor $a \in \mathcal{T}_r^\circ$ of type $(0, r)$ on M with components $a_{i_1 \dots i_r}(x)$, $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$ is a local coordinate system (x) . Then $a_{i_1 \dots i_r}(x)y^{i_1} \dots y^{i_r}$, $y \in T_x M$ (summation over $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$) is a homogeneous polynomial in $T_x M(y)$. We suppose that

$$a_{i_1 \dots i_r}(x)y^{i_1} \dots y^{i_r} = 1$$

is a star-shaped convex hypersurface in $T_x M(y)$. Then $F^n = (M, \mathcal{F})$ with the Finsler metric

$$\mathcal{F}^r(x, y) = a_{i_1 \dots i_r}(x)y^{i_1}, \dots, y^{i_r} \quad (1)$$

is a Finsler space with *polynomial metric*. Such F^n are generalizations of the Berwald-Moór metric (see [12] p. 53 or [20], [21], [16], [17], [18]). F^n with polynomial metric were recently investigated by several authors, such as V. Balan, N. Brinzei, S. Lebedev, D. G. Pavlov etc. in [2], [3], [13], [15], [19]. They considered these spaces endowed with linear metrical connections acting in the vector bundle

$$TM \times_M TM = \mathcal{V}TM = (VTM, \pi, \mathcal{V}^n)$$

$$\pi^{-1}(x, y) = \mathcal{V}^n = \{\xi(x, y)\},$$

where \mathcal{V}^n is an n -dimensional real vector space, and (x, y) is a line-element. $\mathcal{V}TM$ is no tangent bundle, for $\dim TM = 2n \neq n = \dim \mathcal{V}^n$. In $\mathcal{V}TM$ there exist linear metrical connections (e.g. Cartan connection), which allow to develop a curvature theory, etc. in a way similar to that of Riemannian geometry. But using this bundle and line-elements (x, y) has some disadvantages too. The theory becomes more complicated, and the difference between the dimensions of the base space TM and the fiber \mathcal{V}^n is sometimes inconvenient, especially in physics. A linear connection acting in the bundle $\tau_M = (TM, \pi, M, \mathcal{V}^n)$ is more simple, but in a Finsler space it cannot be metrical in general. Nevertheless there are many Finsler spaces which allow linear metrical connections in the tangent bundle. Such are the Riemannian space V^n , Minkowski spaces \mathcal{M}^n , locally Minkowski spaces $\ell\mathcal{M}^n$, and also the affine deformations $\mathcal{A}\ell\mathcal{M}^n$ of locally Minkowski spaces ([23], [24]), the Finsler spaces with 1-form metric ([15], [16]), the space modelled on Minkowski spaces ([11], [12]). Some of these spaces may not exist on every paracompact manifold ([4], [24]). There are also Finsler spaces admitting metrical connections in τ_M which are only near to linear connections [25] or which are homogeneous only [13].

In this paper we want to show that Finsler spaces with polynomial metric allow metrical tensorial connections (linear for a given type of tensors). Many of them induce, in a natural way, metrical non-linear connections in τ_M .

2. Tensorial connection

Let us consider the tensors t of type $(r, 0)$, $t \in \mathcal{T}_0^r$ over the n -dimensional manifold M . \mathcal{T}_0^r is a real vector space \mathcal{V}^N of dimension $N = n^r$. Thus t^A , $A = 1, 2, \dots, N$ can mean the components of t .

$$\hat{\mathcal{E}} = (\hat{E}, \pi, M, \mathcal{V}^N), \quad \pi : \hat{E} \rightarrow M, \quad \pi^{-1}(p) \approx \mathcal{V}^N, \quad p \in M \quad (2)$$

is a tensor bundle, that is a vector bundle of rank N over M . A linear connection γ acting in $\hat{\mathcal{E}}$ is called *tensorial connection*. In a local coordinate system (x) it is given by the connection coefficients

$$\gamma_A^B{}_k(x), \quad A, B = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

and the parallel translated $\mathcal{P}_{x(\tau)}^\gamma t_0$ of $t_0 \in \pi^{-1}(x(\tau_0))$ along a curve $x(\tau)$ according to γ is defined by the solution $t(\tau)$ of the ODE system

$$\frac{Dt^B}{d\tau} \equiv \frac{dt^B}{d\tau} + \gamma_A^B{}_k(x(\tau))t^A \frac{dx^k}{d\tau} \quad (3)$$

with initial value $t(0) = t_0$. With an appropriate γ one can realize any linear mapping between $\pi^{-1}(x(\tau_0)) \approx \mathcal{V}^N$ and $\pi^{-1}(x(\tau)) \approx \mathcal{V}^N$. – An affine connection Γ with coefficients $\Gamma_j^i{}_k(x)$ also induces certain (linear) mappings between the above fibers. These mappings are realized by special tensorial connections. In case of $r = 2$ the corresponding γ has the coefficients

$$\gamma_A^B{}_k(x) \equiv \gamma_{rs}^{ij}{}_k(x) = \Gamma_r^i{}_k(x)\delta_s^j + \delta_r^i \Gamma_s^j{}_k(x). \quad (4)$$

Clearly γ -s of this form are special ones, and they do not generate all linear mappings between $\pi^{-1}(x(\tau_0))$ and $\pi^{-1}(x(\tau))$. Also conversely, if a $\gamma_A^B{}_k$ can be represented in the form (4), then the tensorial connection γ reduces to the affine connection Γ .

The tensorial connection given by (3) is linear in $t \in \mathcal{T}_0^r$, and the operator $\frac{D}{d\tau}$ of (3) can be extended to the tensor algebra of tensors of type $(\lambda r, \mu r)$, where λ and μ can be arbitrary no-negative integers. Tensorial connection was introduced by E. Bompiani [9], and investigated by A. Cossu [10], L. Tamássy [22], M. Kucharzewski [14], and others.

Let \bar{M} be an $N = n^r$ dimensional manifold with local coordinates \bar{x} , such that $M \subset \bar{M}$, and let $\bar{\gamma}(\bar{x})$ be a C^∞ extension of γ , such that its restriction to M yields $\gamma : \bar{\gamma}(\bar{x}) \upharpoonright_M = \gamma(x)$. Then $(\bar{M}, \bar{\gamma})$ is an (ordinary) affine connection in the tangent bundle $\tau_{\bar{M}} = (T\bar{M}, \pi, \bar{M}, \mathcal{V}^N)$. So we obtain the

Proposition 1 *Any tensorial connection $(M^n(x), \gamma(x))$ is the restriction of an affinely connected space $(\bar{M}^N(\bar{x}), \bar{\gamma}(\bar{x}))$ in the form*

$$(M^n, \gamma(x)) = (\bar{M}^N, \bar{\gamma}(\bar{x})) \upharpoonright M, \quad N = n^r.$$

Here the restriction happens in the base manifold \bar{M} . This is in analogy to the fact that any Finsler space F^n can be considered as the restriction of a Riemannian space $V^{2n} = (TM, \mathcal{G})$, where \mathcal{G} is the Sasakian type metric of F^n . Here the restriction happens in the fiber. The tangent space TTM of V^{2n} is restricted to the vertical bundle $\mathcal{V}TM$ of the Finsler space.

A tensorial connection γ has two curvatures $\mathcal{A}_E^C{}_i$; $\mathbb{R}_j^i{}_{kl}$, and a torsion tensor $\mathcal{S}_j^i{}_k$. Vanishing of \mathcal{A} characterizes the reduction of γ to Γ . In this case also \mathbb{R} and \mathcal{S} reduce to curvature R^Γ and torsion \mathcal{S}^Γ of Γ ([22]).

3. Tensorial connections in case of polynomial metric

The $a(x) \in \mathcal{T}_0^r$ appearing in (1) is *parallel* along $x(\tau)$ according to γ , if

$$\frac{da_A}{d\tau} = \gamma_A{}^B{}_k(x(\tau))a_B \frac{dx^k}{d\tau},$$

and $a(x)$ is an *absolute parallel* tensor field on M (or on a domain of it), if

$$\nabla_k a_A = 0, \quad (5)$$

that is

$$\frac{\partial a_A}{\partial x^k} = \gamma_A{}^B{}_k(x)a_B. \quad (5')$$

The Finsler norm $\|y\|_F$ of a vector $y \in T_x M$ in our F^n with polynomial metric is $\|y\|_F^r = \mathcal{F}^r(x, y) = a_A b^A$, and we define the Finsler norm $\|t\|_F$ of tensor $t \in \mathcal{T}_0^r$ in our F^n by

$$\|t\|_F : a_A(x)t^A(x). \quad (6)$$

Thus

$$\|y\|_F^r = \mathcal{F}(x, y) = \|b\|_F. \quad (7)$$

The tensorial connection is called *metrical* if

$$\|\mathcal{P}_{x(\tau)}^\gamma t_0\|_F = \|t(\tau)\|_F = \text{const.}, \quad \forall x(\tau) \subset N, \quad t_0 \in \mathcal{T}^c, \quad (8)$$

and thus

$$\frac{d}{d\tau} \|t(\tau)\|_F = \frac{D}{d\tau} (a_A(x(\tau))t^A(\tau)) = \left[(\nabla_k a_A) \frac{dx^k}{d\tau} \right] t^A + a_A \frac{Dt^A}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \text{const} = 0 \quad (8')$$

for any $t(\tau)$ parallel along any $x(\tau)$. Since for parallel $t(\tau)$ $\frac{Dt^A}{d\tau} = 0$ and for an appropriate $x(\tau)$ we can obtain every x_0 and \dot{x}_0 , (8) is equivalent to (5').

For given $a(x)$ (5') is a linear equation system at any point x for the unknowns $\gamma_A{}^B{}_k(x_0)$. The equations of (5') are independent in the sense that each $\gamma_A{}^B{}_k(x_0)$ appears in a single equation only. Hence (5') is solvable for $\gamma_A{}^B{}_k(x)$. Thus we obtain

Theorem 1 *Any Finsler space with polynomial metric (1) has metrical tensorial connections.*

(5') consist of Nn equations, and in each of them (for fix A and k) appear N unknowns $\gamma_A{}^B{}_k$, of which $N - 1$ can arbitrarily be chosen. Thus in the solution of (5') $Nn(N - 1) = (N^2 - N)n$ of the $\gamma_A{}^B{}_k$ remain arbitrary.

The upper script indices of a totally symmetric tensor $t^{i_1 \dots i_r} \in \mathcal{T}_0^r$ are the multiple combinations of order r from the elements $1, 2, \dots, n$. These tensors form a linear subspace ${}^s\mathcal{T}_0^r$ of \mathcal{T}_0^r . The dimension of ${}^s\mathcal{T}_0^r$ is $C_{r,n}^m = \frac{(n-1+r)!}{(n-1)!r!} = C$, the number of the multiple combinations of order r from n elements $1, 2, \dots, n$. The components of such a tensor will be denoted by t^α , $\alpha = 1, 2, \dots, C$. Also $y^{i_1} \dots y^{i_r} = b^{i_1 \dots i_r} = b^\alpha \in {}^s\mathcal{T}_0^r$. If in (1) we draw together those $a_{i_1 \dots i_r}$ in which the same i_1, i_2, \dots, i_r appear (independently from the order), and denote their sum by g_α , then with respect to (6), (1) gets the form

$$\mathcal{F}^r(x, y) = g_\alpha b^\alpha = \|b\|_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, C. \quad (1')$$

b is decomposable. It is an r -times tensor product of $y \in \mathcal{T}_x M$:

$$b = \frac{1}{y} \otimes \dots \otimes \frac{r}{y}.$$

Thus

$$\phi := \{b\}$$

is a cone in ${}^s\mathcal{T}_0^r$. Its parameter representation is

$$b^\alpha = f^\alpha(y^1, \dots, y^n) := y^{i_1} \dots y^{i_r}, \quad \alpha = i_1 \dots i_r. \tag{9}$$

The correspondence between $(y^1, \dots, y^n) \in \mathcal{V}^n(y)$ and $b \in \phi \subset {}^s\mathcal{T}_0^r$ is $1 : 1$. Thus $\dim \phi = n$. (9) is independent of $x \in M$. Thus ϕ has the same form in each fiber $\mathcal{V}^C \approx {}^s\mathcal{T}_0^r \subset \mathcal{T}_0^r \approx \pi^{-1}(x)$ of the bundle $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{E}, \pi, M, \mathcal{V}^C)$.

One can see that

$$\mathcal{P}_{x(\tau)}^\gamma b_0 = b(x(\tau)) \equiv b(\tau) \in \phi(x(\tau)), \tag{10}$$

or in another form

$$\mathcal{P}_{x(\tau)}^\gamma \phi(x_0) = \phi(x(\tau)) \tag{10'}$$

does not hold in every tensorial connection γ . We want to obtain necessary and sufficient conditions for (10) to hold. We suppose that $b(x) = b(\tau) \in \phi(x(\tau)) = \phi(x)$, where $\phi(x)$ is independent of x . Hence every $b(x(\tau)) = b(x)$ can be considered as a point of a single representative ϕ of the $\phi(x)$ -s. Thus in case of (10) every $\frac{\partial b^\alpha}{\partial x^k}$ is a tangent of this ϕ :

$$\frac{\partial b^\alpha}{\partial x^k} \in T_b \phi. \tag{11}$$

But also conversely, if (11) is satisfied, then so is (10).

On the other hand $b(\tau)$ of (10) is a solution of

$$\frac{db^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial b^\alpha}{\partial x^k} \frac{dx^k}{d\tau} = \gamma_{\beta}^{\alpha k}(x(\tau)) b^\beta \frac{dx^k}{d\tau}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, C, \quad \forall x, \dot{x}.$$

Thus $\gamma_{\beta}^{\alpha k}$ must satisfy the relation

$$\frac{\partial b^\alpha}{\partial x^k}(y) = \gamma_{\beta}^{\alpha k}(x) b^\beta(y). \tag{12}$$

Any tangent of ϕ is a linear combination of $\frac{\partial b^\alpha}{\partial y^j} \equiv \frac{\partial b^\alpha}{\partial y^j}$ at y . Thus the required necessary and sufficient condition (11) gets the form

$$c_k^j(y) \frac{\partial b^\alpha}{\partial y^j}(y) = \gamma_{\beta}^{\alpha k}(x) b^\beta(y). \tag{13}$$

This must be satisfied identically in y .

(13) can be considered as a linear equation system for $\gamma_{\beta}^{\alpha k}$ and c_k^j . We show that (13) has a solution, while many of the unknowns $\gamma_{\beta}^{\alpha k}$ and c_k^j remain undetermined (free).

$b^\beta(y)$ is a homogeneous polynomial of order r in y . $\frac{\partial b^\alpha}{\partial y^j}$ is also a homogeneous polynomial of order $r - 1$. Thus c_k^j must be a homogeneous polynomial of order 1 : $c_k^j(y) = {}_s c_k^j y^s$. So (13) gets the form

$${}_s c_k^j y^s \frac{\partial b^\alpha}{\partial y^j}(y) = \gamma_{\beta}^{\alpha k}(x) b^\beta(y). \tag{13'}$$

This is a special, very simple equation system. For any fixed k_0 we obtain a subsystem

$${}_s c^j y^s \frac{\partial b^\alpha}{\partial y^j}(y) = \gamma_\beta^\alpha(x) b^\beta(y), \quad {}_s c^j = {}_s c_{k_0}^j, \quad \gamma_\beta^\alpha = \gamma_{\beta k_0}^\alpha. \quad (14)$$

The unknowns ${}_s c_{k_0}^j$ and $\gamma_{\beta k_0}^\alpha$ appear in one single subsystem only. Since every subsystem has the same structure, we have only to solve (14). Let us fix $\alpha = \alpha_0$. Then on both sides of (14) there is a homogeneous polynomial of order r in y , and (14) must hold identically. Thus the coefficients of $y^{i_1} \dots y^{i_r}$ consisting of the different ${}_s c^j$ and γ_β^α must be equal on the two sides. These yield homogeneous linear equations, C in number, for ${}_s c^j$ and γ_β^α . The number of the unknowns ${}_s c^j$ and γ_β^α is $n^2 + C^2$. For the different α -s (14) consists of C equations. So the number of the equations for ${}_s c^j$ and γ_β^α stemming from (14) is C^2 , and the number of the unknowns remains $n^2 + C^2$. (13') consists of n subsystems for the different k_0 with new unknowns in each. Thus (13') yields, as identities in y^s , $C^2 n$ equations with $n^3 + C^2 n$ unknowns. So we obtain

Proposition 2 *There are many tensorial connections γ taking by parallel translation any decomposable tensor $b = \frac{i}{y} \otimes \dots \otimes \frac{r}{y}$ into a similar one: $\mathcal{P}_{x(\tau)}^\gamma b_0 = b(\tau)$.*

4. Induced non-linear connection in τ_M

A tensorial connection γ for which $\mathcal{P}_{x(\tau)}^\gamma b_0 \stackrel{(10)}{=} b(x(\tau))$, or in another form $\mathcal{P}_{x(\tau)}^\gamma \phi(x_0) \stackrel{(10')}{=} \phi(x(\tau)) \approx \phi$ holds, induces a non-linear connection in τ_M . Namely, as also the diagram

$$\begin{array}{ccc} b_0 \in \phi(x_0) & \xrightarrow{\mathcal{P}_{x(\tau)}^\gamma} & b(\tau) \in \phi(x(\tau)) \\ \uparrow f & & \downarrow f^{-1} \\ y_0 \in T_{x_0} M & \xrightarrow{\mathcal{N}} & y(\tau) \in T_{x(\tau)} M \end{array}$$

shows (f^α from (9))

$$\mathcal{N} := (f^\alpha)^{-1} \circ \mathcal{P}_{x(\tau)}^\gamma \circ f^\alpha \quad (15)$$

takes any $y_0 \in T_{x_0} M$ into a $y(\tau) \in T_{x(\tau)} M$. Thus

$$\mathcal{P}_{x(\tau)}^\mathcal{N} y_0 = y(\tau). \quad (16)$$

\mathcal{N} is non-linear in y , for \mathcal{P}^γ is so in b . Thus we obtain

Theorem 2 *Any tensorial connection, which takes tensors $b = \frac{1}{y} \otimes \dots \otimes \frac{r}{y}$ into similar ones determines in τ_M among the vectors $y \in T_x M$ a non-linear connection \mathcal{N} in a natural way.*

We want to investigate *metrical* tensorial connections γ of a Finsler space with polynomial metric, which induce non-linear connections \mathcal{N} in τ_M . Then γ satisfies (13'), and it is metrical. A tensorial connection is metrical, if (5') or, in view of the symmetry of a_A ,

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^k} = \gamma_{\alpha k}^\beta(x) g_\beta \quad (17)$$

holds. At a given (x) (17) means Cn linear equations for the unknowns $\gamma_{\alpha k}^\beta$. So (13') (respectively the equations stemming from the fact that the equations of (13') must be identities in y^s) combined with (17) consists of $Cn + C^2 n$ (simple) linear equations, and the number of the unknowns ${}_s c_k^j$ and $\gamma_{\beta k}^\alpha$ remains $C^2 n + n^3$. The rank of the combined system is

maximal. If the number of the unknowns is not less than the number of the equations, that is if $C^2n + n^3 \geq C^2n + Cn$, or

$$n^2 \geq C_{n,r}^m, \tag{18}$$

then the combined system is solvable. Since γ is metrical, in this case we have

$$\|\mathcal{P}_{\alpha(\tau)}^\gamma b_0\|_F \stackrel{(7)}{=} \|b(\tau)\|_F = \text{const} \stackrel{(6)}{=} \mathcal{F}(x, y(\tau)) = \|y(\tau)\|_F^r = \|\mathcal{P}_{x(\tau)}^\mathcal{N} y_0\|_F^r.$$

Thus $\|\mathcal{P}_{x(\tau)}^\mathcal{N} y_0\|_F = \text{const}$. This yields

Theorem 3 *If γ is metrical (satisfies (17)), and takes every $b = \frac{1}{y} \otimes \dots \otimes \frac{r}{y}$ into a similar tensor (which satisfies (13')), then also the induced non-linear connection \mathcal{N} is metrical with respect to the F^n with polynomial metric.*

The condition of the solvability of the combined system is (18). For which n and r will it be satisfied? It is clear from the notion of multiple combination that $C_{n,r}^m$ is monotone increasing in r for every fix n , and also in n for every fix r . Therefore there exists a minimal r for every n for which $n^2 \geq C_{n,r}^m$. We denote this r by r_n . Then we obtain

Proposition 3 (18) holds iff $r < r_n$. In this case the combined system (13') and (17) is solvable, and the induced non-linear connection \mathcal{N} is metrical.

In case of $r = 2$ we have $C_{n,r}^m = \frac{n(n+1)}{2} < n^2$. Thus (18) holds for $\forall n$, and so we have tensorial connections γ inducing metrical non-linear connections \mathcal{N} in τ_M . In this case $\mathcal{F}^2(x, y) = a_\alpha(x)b^\alpha = a_{ij}(x)y^i y^j$. This means that for $r = 2$ the Finsler space with polynomial metric is a Riemann space: $F^n = V^n$. Then $\gamma_{\alpha}^{\beta}{}^k(x) = \gamma_{ij}{}^{rs}{}^k(x) = \Gamma_i{}^r{}^k(x)\delta_j^s + \delta_i^r \Gamma_j{}^s{}^k(x)$. This γ is constructed from the symmetric (torsion free) or non-symmetric Christoffel symbols of V^n . This γ yields a metrical tensorial connection, and the metrical connection \mathcal{N} in τ_M becomes linear with coefficients $\Gamma_j{}^i{}^k(x)$.

In case of $r = 3$ (18) reads as $C_{n,3}^m = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \leq n^2$ or equivalently $n^2 + 1 \leq 3n$. This holds for $n = 2$, but for $r = 3$ and $n = 3$ (18) is not yet true. For $n_0 \geq 3, r \geq 3$ we have $n_0^2 < C_{n_0,2}^m < C_{n_0,r}^m$, since $C_{n_0,r}^m$ is increasing in r . Thus for $n \geq 3, r \geq 3$ (18) does not hold. For $n = 2$ $C_{2,r}^m = r + 1$. Thus (18) holds for $n = 2, r = 3: 2^2 = C_{2,3}^m$ (as we have already seen), but $C_{2,3}^m < C_{2,r}^m, r > 3$, since $C_{2,r}^m$ is increasing in r . So we have $n^2 = 4 = C_{2,3}^m < C_{2,r}^m$, that is (18) holds neither for $n = 2, r > 3$.

But there may exist special $g_\alpha(x)$ for which the number of the independent equations of (17) is smaller than Cn , and thus the combined system (13') and (17) still has a solution, for example if $\frac{\partial g_{\alpha_1}}{\partial \alpha^k} + \frac{\partial g_{\alpha_2}}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{\alpha_3}}{\partial x^k}$ for certain (or several) k . The number of the dependent equations of (17) may run from C to zero. If the curvature $R_{\alpha}^{\beta}{}_{ij}(x)$ of the tensorial connection γ vanishes, then there exists $g_\alpha(x)$, such that (17) yields identities: presents no new equation for $\gamma_{\alpha}^{\beta}{}^k$.

Theorem 4 *If γ is metrical (satisfies (17)), and takes every $b = \frac{1}{y} \otimes \dots \otimes \frac{r}{y}$ into a similar tensor (satisfies (13')), then the induced non-linear connection \mathcal{N} is also metrical with respect to the F^n with polynomial metric. The condition for this is $n^2 \geq C_{n,r}^m$.*

Such γ exists for any Finsler space with polynomial metric only if $r = 2$ (in this case the Finsler space is a Riemannian space) or in case of $r = n = 3$. Such γ exists also for arbitrary r and n , but not for every polynomial metric.

Finally we make two remarks:

Remark 1 $a_A(x)$ of (1) may have the form

$$a_{ijkl}(x) = g_{ij}(x)h_{ml}(x),$$

where $g_{ij}(x)$ and $h_{ml}(x)$ are metric tensors of two Riemannian spaces V_1^n and V_2^n on M . Then

$$\mathcal{F}^4(x, y) = \|y\|_F^4 = \|y\|_{V_1}^2 \|y\|_{V_2}^2.$$

This may have a mathematical interest, but $\|y\|_{V_1}$ and $\|y\|_{V_2}$ could also mean two different impacts of a physical phenomenon.

Remark 2 A Randers space $R^n = (M, \mathbb{R}(x, y))$ is a special Finsler space ([7], [16]), where

$$\mathbb{R}(x, y) = (g_{ij}(x)y^i y^j)^{1/2} + b_i(x)y^i$$

in place of $\mathcal{F}(x, y)$ means the Randers metric. In a degenerate case we may have $\mathbb{R}(x, y) = b_i(x)y^i$. If we endow in the vector bundle $\hat{\mathcal{E}}$ (see (2)) of rank N each fiber $\pi^{-1}(x) \approx \mathcal{V}^N$ with the metric $\mathbb{R}(x, y) = a_A(x)b^A$, then we obtain a degenerate Randers vector bundle R_N^n . Thus any Finsler space with polynomial metric (1) can be considered as a degenerate Randers vector bundle. – It could have some interest to consider a Finsler space with polynomial metric as a degenerate Randers vector bundle.

References

- [1] G. S. Asanov: Finsler Geometry and Gauge Theories, *Reidel*, 1985.
- [2] V. Balan and N. Brinzei: Einstein equations for (h, v) -Bervald-Moór relativistic models, *Balkan J. Geom. Appl.* **11** (2006), 20–27.
- [3] V. Balan, N. Brinzei and S. Lebedev: Geodesics, connections and Jacobi fields for Berwald-Moór quartic metrics, in *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, to appear.
- [4] D. Bao and S. S. Chern: A note on the Gauss-Bonnet theorem for Finsler spaces, *Ann. Math.* **143** (1996), 233–252.
- [5] D. Bao, S. S. Chern and Z. Shen: An Introduction to Riemann-Finsler Geometry, *Springer, New York*, 2000.
- [6] N. Brinzei: Projective relations for Shimada spaces, to appear.
- [7] E. Bompiani: Le connessioni tensoriali, *Atti Acad. Naz. Lincei* **1** (1946), 478–482.
- [8] A. Cossu: Nozioni generali sulle connessioni di specie qualunque, *Rend. Mat. ed Appl.* **21** (1962), 162–218.
- [9] Y. Ichijyo: Finsler manifold modeled on Minkowski spaces, *J. Math. Kyoto Univ.* **16** (1976), 639–652.
- [10] Y. Ichijyo: Finsler manifold with a linear connection, *J. Math. Tokushima Univ.* **10** (1976), 1–11.
- [11] L. Kozma and V. Balan: On metrical homogeneous connections of a Finsler point space, *Publ. Math. Debrecen* **49** (1996), 59–68.
- [12] M. Kucharzewski: Über die Tensorübertragung, *Annali di Math. Pura ed Appl.* **54** (1961), 64–83.
- [13] S. Lebedev: The generalized Finslerian metric tensors, in *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, to appear.
- [14] M. Matsumoto: Foundation of Finsler Geometry and Special Finsler Spaces, *Kaisheisha, Kyoto*, 1986.
- [15] M. Matsumoto and H. Shimada: On Finsler spaces with 1-form metric, *Tensor N. S.* **32** (1978), 161–169.

- [16] M. Matsumoto and H. Shimada: On Finsler spaces with 1-form metric, II, *Tensor N. S.* **32** (1978), 275–278.
- [17] M. Matsumoto and S. Numata: On Finsler spaces with cubic metric, *Tensor N. S.* **33** (1979), 153–162.
- [18] M. Matsumoto and K. Okubo: Theory of Finsler spaces with m -th root metric, *Tensor N. S.* **56** (1995), 9–104.
- [19] D. G. Pavlov: Generalization of scalar product axioms, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, *Ed. "Mozet", Russia*, 1, 1 2004, 5–18.
- [20] H. Shimada: On Finsler spaces with 1-form metric II, Berwald-Moór metric $L = \sqrt[n]{y^1 y^2 \dots y^n}$, *Tensor N. S.* **32** (1978), 375–378.
- [21] H. Shimada: On Finsler spaces with metric $L = \sqrt[m]{a_{i_1 \dots i_m}(x) y^{i_1} \dots y^{i_m}}$, *Tensor N. S.* **33** (1979), 365–372.
- [22] L. Tamássy: Über den Affinzusammenhang von, zu Tangenzialräumen gehörenden Produkträumen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar* **11** (1960), 65–82.
- [23] L. Tamássy: Point Finsler spaces with metrical linear connections, *Publ. Math. Debrecen* **56** (2000), 643–655.
- [24] L. Tamássy: Finsler Geometry in the tangent bundle, *Advanced Studies in Pure Math.* to appear.
- [25] L. Tamássy: Metrical almost linear connections in TM for Randers spaces, to appear.

PAIRS OF METRICAL FINSLER STRUCTURES AND FINSLER CONNECTIONS COMPATIBLE TO THEM

Gheorghe Atanasiu

*Faculty of Mathematics and Computer Science,
"Transilvania" University of Braşov, România
gh_atanasiu@yahoo.com; g.atanasiu@unitbv.ro*

We consider a pair of metrical Finsler structure $g_{ij}(x, y), s_{ij}(x, y), (x, y) \in TM, i, j = \overline{1, n}, \dim M = n$ and we investigate the cases in which is possible to find Finsler connections compatible to them: $rank \|g_{ij}(x, y)\| = n, rank \|s_{ij}(x, y)\| = n - k, k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}, \forall (x, y) \in TM \setminus \{0\}$.

1 Metrical Finsler structures and metrical Finsler connections ([7])

Let M be an n -dimensional differentiable manifold and $x = (x^i)$ and $y = (y^i)$ denote a point of M and a supporting element respectively. We put $\partial_i = \partial/\partial x^i, \dot{\partial}_i = \partial/\partial y^i, (i = 1, 2, \dots, n)$.

Let $g_{ij}(x, y) = (\dot{\partial}_i \dot{\partial}_j F^2)/2$ be a Finsler metric and $N(N^j{}_i)$ a nonlinear connection, which us given the adapted basis $\{\delta_i, \dot{\partial}_i\}$ of the tangent bundle $TM =: HM \oplus VM$:

$$\delta_i = \frac{\delta}{\delta x^i} = \partial_i - N^j{}_i \dot{\partial}_j. \tag{1.1}$$

We denote $\{dx^i, dy^i\}$ the dual basis of adapted basis, where

$$\delta y^i = dy^i + N^i{}_j dx^j. \tag{1.2}$$

We shall express a Finsler connection $F\Gamma$ in terms of its coefficients as $F\Gamma = (N^j{}_k, F^i{}_{jk}, C^i{}_{jk})$, (cf. with M. Matsumoto [4], R. Miron [7] and E. Stoica [13]). A Finsler connection having a fixed nonlinear connection N is also denoted by $F\Gamma(N) = (F^i{}_{jk}, C^i{}_{jk})$. And the respective h - and v -covariant derivatives are denoted by short and long bars, e.g., $g_{ij|k}, g_{ij}{}^{\circ}{}_{|k}$ (with respect to $F\Gamma$), $g_{ij}{}^{\circ}{}_{|k}, g_{ij}{}^{\circ}{}_{|k}$ (with respect to $F\tilde{\Gamma}$), etc.

Given a Finsler metric g_{ij} , a Finsler connection $F\Gamma$ is called **metrical**, if it satisfies

$$g_{ij|k} = 0, \quad g_{ij}{}^{\circ}{}_{|k} = 0. \tag{1.3}$$

For a Finsler metric g_{ij} , we have so-called Obata's operators, [10]:

$$\Lambda_1^{pq} = \frac{1}{2} (\delta_i^p \delta_j^q - g_{ij} g^{pq}), \quad \Lambda_2^{qp} = \frac{1}{2} (\delta_i^p \delta_j^q + g_{ij} g^{pq}), \tag{1.4}$$

where $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. Then we have

Theorem 1.1 *Let $F\tilde{\Gamma}(N) = (\tilde{\Gamma}^i{}_{jk}, \tilde{C}^i{}_{jk})$ be a fixed Finsler connection. For a Finsler metric g_{ij} , we define tensor fields $U^i{}_{jk}, \tilde{U}^i{}_{jk}$ by*

$$U^i{}_{jk} = -\frac{1}{2} g^{ir} g_{rj}{}^{\circ}{}_{|k}, \quad \tilde{U}^i{}_{jk} = -\frac{1}{2} g^{ir} g_{rj}{}^{\circ}{}_{|k}. \tag{1.5}$$

Then a Finsler connection $F\Gamma(N) = (F^i_{jk}, C^i_{jk})$ is metrical, if and only if the difference tensor fields B^i_{jk}, D^i_{jk} given by

$$F^i_{jk} = \overset{\circ}{F}^i_{jk} - B^i_{jk}, \quad C^i_{jk} = \overset{\circ}{C}^i_{jk} - D^i_{jk}, \tag{1.6}$$

are solutions of the equations

$$\Lambda^{ip}_{qj} B^q_{pk} = U^i_{jk}, \quad \Lambda^{ip}_{qj} D^q_{pk} = \tilde{U}^i_{jk}. \tag{1.7}$$

Conform with Obata's theory, [10], the above equations have solutions and their general forms are given by

Theorem 1.2 (R. Miron, [7]) Let $F\overset{\circ}{\Gamma}(N) = (\overset{\circ}{F}^i_{jk}, \overset{\circ}{C}^i_{jk})$ be a fixed Finsler connection. For a Finsler metric g_{ij} , there exists a metrical Finsler connection $F\Gamma(N) = (F^i_{jk}, C^i_{jk})$ and the set of all such connections is given by

$$\begin{aligned} F^i_{jk} &= \overset{\circ}{F}^i_{jk} + \frac{1}{2} g^{ir} g_{rj|k} + \Lambda^{ip}_{qj} X^q_{pk}, \\ C^i_{jk} &= \overset{\circ}{C}^i_{jk} + \frac{1}{2} g^{ir} g_{rj|k} + \Lambda^{ip}_{qj} Y^q_{pk}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

where X^i_{jk}, Y^i_{jk} are arbitrary Finsler tensor fields.

2 Finsler connections compatible with a pair of Finsler metrics

Let g_{ij} and s_{ij} be two given Finsler metrics. A Finsler connection is called **compatible** with the pair (g_{ij}, s_{ij}) , if it is metrical with respect to both g_{ij} and s_{ij} :

$$g_{ijk} = 0, \quad g_{ij|k} = 0, \quad s_{ijk} = 0, \quad s_{ij|k} = 0. \tag{2.1}$$

We define Obata's operators by (1.4) and

$$O^{pq}_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_i^p \delta_j^q - s_{ij} s^{pq}), \quad \tilde{O}^{pq}_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_i^p \delta_j^q + s_{ij} s^{pq}), \tag{2.2}$$

where $(s^{ij}) = (s_{ij})^{-1}$. Then we have

Theorem 2.1 Let $F\overset{\circ}{\Gamma}(N) = (\overset{\circ}{F}^i_{jk}, \overset{\circ}{C}^i_{jk})$ be a fixed Finsler connection. For a pair of Finsler metrics (g_{ij}, s_{ij}) we define Finsler tensor fields $U^i_{jk}, \tilde{U}^i_{jk}, V^i_{jk}, \tilde{V}^i_{jk}$ by (1.5) and

$$V^i_{jk} = -\frac{1}{2} s^{ir} s_{rj|k}, \quad \tilde{V}^i_{jk} = -\frac{1}{2} s^{ir} s_{rj|k}. \tag{2.3}$$

Then a Finsler connection $F\Gamma(N) = (F^i_{jk}, C^i_{jk})$ is compatible with the pair (g_{ij}, s_{ij}) , if and only if the difference tensor fields B^i_{jk}, D^i_{jk} given by (2.2) are solutions of the equations (2.3) and following equations

$$O^{ip}_{qj} B^q_{pk} = V^i_{jk}, \quad \tilde{O}^{ip}_{qj} D^q_{pk} = \tilde{V}^i_{jk}. \tag{2.4}$$

It is complicated to solve the above equations.

We shall show the case when the equations have solutions.

A pair of two Finsler metrics g_{ij}, s_{ij} is called **natural**, if there exists a nonvanishing Finsler function $\mu(x, y)$ such that

$$g_{ip} g_{jq} s^{pq} = \mu s_{ij}, \tag{2.5}$$

or equivalently, if the commutativities

$$\Lambda_{\alpha}^{ip} O_{\beta}^{qr} = O_{\beta}^{ip} \Lambda_{\alpha}^{qr}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{2.6}$$

hold. Then, we have

Proposition 2.1 *All the commutativities (2.6) hold if any one of them holds.*

Proposition 2.2 *Let (g_{ij}, s_{ij}) be a natural pair of Finsler metrics. If there exists a Finsler connection compatible with the pair, the function μ in (2.5) is constant.*

Proof. The equations (2.1) are equivalent by the following equations:

$$g^{ij} |_{k=0} = 0, \quad g^{ij} |_{k=0} = 0, \quad s^{ij} |_{k=0} = 0, \quad s^{ij} |_{k=0} = 0. \tag{2.7}$$

By (2.1) and (2.1') we have $\mu_{,k} s_{ij} = 0$, $\mu |_{k=0} s_{ij} = 0$, which are reduced to $\mu_{,k} = 0$, $\mu |_{k=0} = 0$ because $s_{ij} s^{ij} = n \neq 0$. Hence the nonvanishing function μ is constant.

Proposition 2.3 *Let g_{ij} be a Finsler metric. There exists a Finsler metric s_{ij} such that the pair (g_{ij}, s_{ij}) is natural by a constant $\mu = \varepsilon c^2$ ($\varepsilon = \pm 1, c > 0$), if and only if there exists a Finsler tensor field t^i_j of type (1, 1) satisfying*

$$\varepsilon t^i_r t^r_j = \delta^i_j, \quad \varepsilon g_{pq} t^p_i t^q_j = g_{ij}. \tag{2.8}$$

The correspondence between t^i_j and s_{ij} in Proposition 2.3 is given by

$$t^i_j = c g^{ir} s_{rj}, \quad s_{ij} = \frac{1}{c} g_{ir} t^r_j. \tag{2.9}$$

Remark 2.1 If $\varepsilon = -1$, then $\mu = -c^2$ and t^i_j is an almost complex Finsler structure $f^i_j : f^2 = -I$, ($n = 2m$). In this case, the natural pair (g_{ij}, s_{ij}) is called of **elliptical type**, or a **(g, f, -1)-structure** (cf. with Gh. Atanasiu [12], Gh. Atanasiu, M. Hashiguchi, R. Miron [3]), or an **anti-Hermitian structure**:

$$f^i_r f^r_j = -\delta^i_j, \quad g_{pq} f^p_i f^q_j = -g_{ij}. \tag{2.10}$$

Remark 2.2 If $\varepsilon = +1$, then $\mu = c^2$ and t^i_j is an almost product Finsler structure $p^i_j : p^2 = I$. In this case, the natural pair (g_{ij}, s_{ij}) is called of **hyperbolical type**, or a **(g, p, +1)-structure** (see [12], [3]):

$$p^i_r p^r_j = \delta^i_j, \quad g_{rt} p^r_i p^t_j = g_{ij}. \tag{2.11}$$

Using Proposition 2.3 we can show that for a natural pair (elliptic or hyperbolic) with a constant $\mu \neq 0$ the equations (2.3) and (2.4) have solutions and their general forms are given by

Theorem 2.2 *Let $F\overset{\circ}{\Gamma}(N) = (\overset{\circ}{F}{}^i_{jk}, \overset{\circ}{C}{}^i_{jk})$ be a fixed Finsler connection. For a natural pair with a constant $\mu \neq 0$ of Finsler metric g_{ij}, s_{ij} , there exists a Finsler connection $F\Gamma(N) = (F^i_{jk}, C^i_{jk})$ compatible with the pair and the set of all such connections is given by*

$$\begin{aligned} F^i_{jk} &= \overset{\circ}{F}{}^i_{jk} + \frac{1}{2} \left(g^{ir} g_{rj} \overset{\circ}{|}_{ik} + \Lambda_{1qj}^{ip} s^{qt} s_{tp} \overset{\circ}{|}_{ik} \right) + \Lambda_{1qj}^{ip} O_{1tp}^{qr} X^t{}_{rk}, \\ C^i_{jk} &= \overset{\circ}{C}{}^i_{jk} + \frac{1}{2} \left(g^{ir} g_{rj} |_{ik} + \Lambda_{1qj}^{ip} s^{qt} s_{tp} |_{ik} \right) + \Lambda_{1qj}^{ip} O_{1tp}^{qr} Y^t{}_{rk}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

where X^i_{jk}, Y^i_{jk} are arbitrary Finsler tensor fields.

3 The case of Finsler metric with an additional structure

The previous results for a pair of Finsler metrics $g_{ij}(x, y), s_{ij}(x, y)$ are generalized to the case $s_{ij}(x, y)$ is degenerate.

Let a Finsler space (M, g_{ij}) admit a symmetric and degenerate Finsler tensor field $s_{ij}(x, y)$:

$$s_{ij} = s_{ji} \tag{3.1}$$

$$rank(s_{ij}) = n - k, \tag{3.2}$$

where k is an integer and $0 < k < n$. Then (M, g_{ij}) is called to have an **additional structure of index k** . The case of a Finsler metric $s_{ij}(x, y)$ is contained in the following discussions as the exceptional case $k = 0$.

The matrix (g_{ij}) has the inverse (g^{jk}) , but the matrix (s_{ij}) is not regular. So we shall construct some matrix (s^{jk}) which plays the role similar to the inverse matrix. (see, V. Oproiu [11], [12]). Because (g_{ij}) is positive-definite, then on each local chart there are exactly k independent Finsler vector fields ξ_a^i ($a = 1, \dots, k$) with the properties

$$s_{ij}\xi_a^i = 0, \quad g_{ij}\xi_a^i\xi_b^j = \delta_{ab} \quad (a, b = 1, \dots, k). \tag{3.3}$$

Then we define local Finsler covector fields η_i^a ($a = 1, \dots, k$) by

$$\eta_i^a = g_{ij}\xi_a^j. \tag{3.4}$$

If we define local Finsler tensor fields l^i_j and m^i_j by

$$l^i_j = \sum_a \xi_a^i \eta_i^a, \quad m^i_j = \delta_j^i - l^i_j, \tag{3.5}$$

then l^i_j and m^i_j are independent on the choice of ξ_a^i and globally defined as the respective projectors on the kernel \mathbf{K} of the mapping $s_{ij} : \xi_a^j \longrightarrow s_{ij}\xi_a^j$ and the orthogonal \mathbf{H} to \mathbf{K} with respect to g_{ij} . Then a global Finsler tensor field s^{jk} is uniquely determined from (g_{ij}, s_{ij}) by

$$s_{ij}s^{jk} = m^k_i, \quad l^i_j s^{jk} = 0. \tag{3.6}$$

A Finsler connection of a Finsler space (M, g_{ij}) with an additional structure s_{ij} is called **compatible** with the pair (g_{ij}, s_{ij}) , if it satisfies (2.1). Then the condition that a Finsler connection $F\Gamma$ is compatible with the pair (g_{ij}, s_{ij}) is given by Theorem 2.1, if we define $V^i_{jk}, \tilde{V}^i_{jk}$ by

$$\begin{aligned} V^i_{jk} &= -\frac{1}{2} \left(s^{ir} s_{rj|k}^\circ + 3l^i_t l^t_{j|k}^\circ - l^i_{j|k}^\circ \right), \\ \tilde{V}^i_{jk} &= -\frac{1}{2} \left(s^{ir} s_{rj} \dot{|}_k + 3l^i_t l^t_j \dot{|}_k - l^i_j \dot{|}_k \right), \end{aligned} \tag{3.7}$$

and Obata's operators O_{ij}^{pq} ($\alpha = 1, 2$) by

$$\begin{aligned} O_1^{pq} &= \frac{1}{2} \left(\delta_i^p \delta_j^q - \delta_i^p l_j^q - l_i^p \delta_j^q + 3l_i^p l_j^q - s_{ij} s^{pq} \right), \\ O_2^{pq} &= \frac{1}{2} \left(\delta_i^p \delta_j^q + \delta_i^p l_j^q + l_i^p \delta_j^q - 3l_i^p l_j^q + s_{ij} s^{pq} \right), \end{aligned} \tag{3.8}$$

and impose on the B^i_{jk} and D^i_{jk} the additional conditions:

$$\begin{aligned} l^r_{i s t j} B^t_{rk} &= -l^r_{i s} s_{r j \overset{\circ}{i} k}, & l^r_{i s t j} B^t_{rk} &= -l^r_{i s r j} \overset{\circ}{|}_k, \\ l^i_{t m^r_j} B^t_{rk} &= -l^i_{t l^t_j \overset{\circ}{i} k}, & l^i_{t m^r_j} D^t_{rk} &= -l^i_{t l^t_j} \overset{\circ}{|}_k. \end{aligned} \tag{3.9}$$

If we define the naturality of a pair (g_{ij}, s_{ij}) by (2.5), or equivalently (2.6) where O^{pq}_{ij} are defined by (3.8), then Propositions 2.1 and 2.2 still hold. Corresponding to Proposition 2.3, the condition that a Finsler space (M, g_{ij}) admits an additional structure s_{ij} of index k such that the pair (g_{ij}, s_{ij}) is natural by a constant $\mu = \varepsilon c^2$ ($\varepsilon = \pm 1, c > 0$) is given by the existence of a Finsler tensor field t^i_j of type $(1, 1)$, k Finsler vector fields ξ^i_a ($a = 1, \dots, k$) and k Finsler covector fields η^a_i ($i = 1, \dots, k$) satisfying

$$\begin{aligned} \varepsilon t^i_r t^r_j &= \delta^i_j - \xi^i_a \eta^a_j, & \varepsilon g_{pq} t^p_i t^q_j &= g_{ij} - \sum_a \eta^a_i \eta^a_j, \\ \eta^a_i t^i_j &= 0, & t^i_j \xi^j_a &= 0, & \eta^a_i \xi^i_b &= \delta^a_b. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Remark 3.1 If $\varepsilon = -1$, then $\mu = -c^2$ and t^i_j is an degenerate almost complex Finsler structure $f^i_j(x, y)$:

$$\begin{aligned} f^i_r f^r_j &= -\delta^i_j + \xi^i_a \eta^a_j, & g_{pq} f^p_i f^q_j &= -g_{ij} + \sum_a \eta^a_i \eta^a_j, \\ \eta^a_i f^i_j &= 0, & f^i_j \xi^j_a &= 0, & \eta^a_i \xi^i_b &= \delta^a_b. \end{aligned} \tag{3.11}$$

In this case we have a $(g, f, \xi, \eta, -1)$ -structure, [10], [9].

Remark 3.2 If $\varepsilon = +1$, then $\mu = c^2$ and t^i_j is an degenerate almost product Finsler structure $p^i_j(x, y)$:

$$\begin{aligned} p^i_r p^r_j &= \delta^i_j - \xi^i_a \eta^a_j, & g_{rt} p^r_i p^t_j &= g_{ij} - \sum_a \eta^a_i \eta^a_j, \\ \eta^a_i p^i_j &= 0, & p^i_j \xi^j_a &= 0, & \eta^a_i \xi^i_b &= \delta^a_b. \end{aligned} \tag{3.12}$$

and we have a $(g, p, \xi, \eta, +1)$ -structure, [3], [9].

The existence and arbitrariness of Finsler connections compatible with a pair (g_{ij}, s_{ij}) with a constant $\mu \neq 0$, is given by

Theorem 3.1 Let $F\Gamma(\overset{\circ}{N}) = (\overset{\circ}{F}^i_{jk}, \overset{\circ}{C}^i_{jk})$ be a fixed Finsler connection. There exists a Finsler connection $F\Gamma(N) = (F^i_{jk}, C^i_{jk})$ compatible with the pair and the set of all such connections is given by

$$\begin{aligned} F^i_{jk} &= \overset{\circ}{F}^i_{jk} + \frac{1}{2} \left[g^{ir} g_{r j \overset{\circ}{i} k} + \Lambda^{ip}_{1 qj} \left(s^{qt} s_{t p \overset{\circ}{i} k} + 3l^q_t l^t_{p \overset{\circ}{i} k} - l^q_{p \overset{\circ}{i} k} \right) \right] + \Lambda^{ip}_{1 qj} O^{qr}_{1 tp} X^t_{rk}, \\ C^i_{jk} &= \overset{\circ}{C}^i_{jk} + \frac{1}{2} \left[g^{ir} g_{r j} \overset{\circ}{|}_k + \Lambda^{ip}_{1 qj} \left(s^{qt} s_{t p} \overset{\circ}{|}_k + 3l^q_t l^t_{p} \overset{\circ}{|}_k - l^q_{p} \overset{\circ}{|}_k \right) \right] + \Lambda^{ip}_{1 qj} O^{qr}_{1 tp} Y^t_{rk}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

where O^{pq}_{ij} is given by (3.8) and X^i_{jk}, Y^i_{jk} are arbitrary Finsler tensor fields.

Lastly, it is noted whether the naturality is necessary in order that the system of equations (2.3), (2.4), (3.9) with unknowns B^i_{jk}, D^i_{jk} has a solution is an open problem.

References

- [1] Atanasiu, Gh., Variétés différentiables douées de couples de structures Finsler, Proc. of the Nat. Sem. on Finsler Spaces, Univ. of Brasov, România, vol. II, 1982, 35–67.
- [2] Atanasiu, Gh., Structures Finsler presque horsisplectiques, An.Științ. Univ. "Al. I. Cuza" Iași, Secț. I-a Mat, 30-4, 1984, 15–18.
- [3] Atanasiu, Gh., Hashiguchi, M., Miron, R., Supergeneralized Finsler spaces, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math. Phys. Chem.), 18, 1985, 19–34.
- [4] Atanasiu, Gh., Hashiguchi, M., Miron, R., Lagrange connections compatible with a pair of generalized Lagrange metrics, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math. Phys. Chem.), 19, 1986, 1–6.
- [5] Goldberg, S. I., Yano, K., Globally framed f-manifolds, Illinois J. Math., 15, 1971, 456–474.
- [6] Matsumoto, M., The theory of Finsler connections, Publ. Study Group Geom., 5, Okayama Univ., 1970.
- [7] Miron, R., Metrical Finsler structures and metrical Finsler connections, J. Math. Kyoto Univ., 23, 1983, 219–224.
- [8] Miron, R., Atanasiu, Gh., Existence et arbitraire des connexions compatibles aux structure Riemann généralisées du type Hermitien, Tensor, N. S., 38, 1982, 8–12.
- [9] Miron, R., Atanasiu, Gh., Existence et arbitrariété des connexions compatible à une structure Riemann généralisée de type presque k-horsymplectique métrique, Kodai Math. J., 6, 1983, 228–237.
- [10] Obata, M., Affine connections on manifold with almost complex, quaternion or Hermitian structure, Jap. J. Math., 26, 1957, 43–77.
- [11] Oproiu, V., Degenerate Riemannian and degenerate conformal connections, An. Univ. "Al. I. Cuza" Iași, 16, 1970, 357–376.
- [12] Oproiu, V., Degenerate almost symplectic structure and degenerate almost symplectic connections, Bull. Math. t. 14 (62), nr. 2, 1970, 197–207
- [13] Stoica, E., A geometrical characterization of normal Finsler connections, An. Științ. Univ. "Al. I. Cuza" Iași, Secț. I-a Math., 30, 1984, 3.
- [14] Yano, K., Ishihara, S., Tangent and cotangent bundle, M. Dekker, New-York, 1973,

THE HORIZONTAL AND VERTICAL SEMISYMMETRIC METRICAL D -CONNECTIONS IN THE RELATIVITY THEORY

Gheorghe Atanasiu and Emil Stoica

*Faculty of Mathematics and Computer Science,
"Transilvania" University of Braşov, România*

gh_atanasiu@yahoo.com, g.atanasiu@unitbv.ro and e.stoica@unitbv.ro

Let E be the $(m+n)$ -dimensional total space of a vector bundle (E, p, M) , $\dim M = n$, a given fixed nonlinear connection N on E and a given (h, v) -metrical structure $G \in \mathcal{T}_2^0(E)$. In the paper, we determine the Einstein equations of an h - and v -semisymmetric metrical distinguished connection on $E = TM$, if $n = 4$, for a Riemann – local Minkowski model.

1 Vector bundles. Distinguished linear connections ([11])

Let $\xi = (E, p, M)$ be a vector bundle with $\dim E = m + n$, $p : E \rightarrow M$, where M is a n -dimensional smooth differentiable manifold. If N is a nonlinear connection on E and V is a complementary vertical distribution of N then,

$$T_u E = H_u E \oplus V_u E, \quad \forall u \in E. \quad (1.1)$$

Definition 1.1 *A linear connection D on E is called distinguished linear connection or d -connection if the linear connection D preserves by parallelism the horizontal and vertical distributions:*

$$D_Z X \in HE, \quad D_Z Y \in VE, \quad \forall X \in HE, \quad Y \in VE, \quad Z \in \mathcal{X}(E). \quad (1.2)$$

For a d -connection D we have the unique decomposition

$$D = D^H + D^V. \quad (1.3)$$

where D^H and D^V are the h - and v -covariant derivatives on $\mathcal{X}(E)$

We denote by X^H (X^V) and ω^H (ω^V), the horizontal (vertical) components of $X \in \mathcal{X}(E)$ respectively $\omega \in \mathcal{X}^*(E)$

In the local coordinates (x^i, y^a) of point $u(u^\alpha) \in E$, $\alpha = \overline{1, m+n}$, $i = \overline{1, n}$, $a = \overline{1, m}$, we have $(\delta_i, \dot{\partial}_a)$, $(dx^i, \delta y^a)$ the adapted frames to $N(N^a_i(x, y))$:

$$\begin{aligned} \delta_i &= \partial_i - N^a_i(x, y) \dot{\partial}_a, & \delta y^a &= dy^a + N^a_i(x, y) dx^i, \\ \left(\delta_i &= \delta / \delta x^i, \quad \partial_i &= \partial / \partial x^i, \quad \dot{\partial}_a &= \partial / \partial y^a \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Then, $(L^i_{jk}(x, y), L^a_{bk}(x, y), C^i_{jc}(x, y), C^a_{bc}(x, y))$ are the local components of a d -connection $D\Gamma(N)$.

$$\begin{aligned} D_{\delta_k} \delta_j &= L^i_{jk}(x, y) \delta_i, & D_{\dot{\partial}_c} \delta_j &= C^i_{jc} \delta_i, \\ D_{\delta_k} \dot{\partial}_b &= L^a_{bk}(x, y) \dot{\partial}_a, & D_{\dot{\partial}_c} \dot{\partial}_b &= C^a_{bc} \dot{\partial}_a. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Also, we denote by: $T^i_{jk}, R^a_{jk}, P^a_{jc}, C^i_{jc}, S^a_{bc}$, the local components of five d -tensor fields of torsion of d -connection $D\Gamma(N)$, (1.4) and with: $R_j^i{}_{kh}, R_b^a{}_{jk}, P_j^i{}_{kd}, P_b^a{}_{kd}, S_j^i{}_{cd}, S_b^a{}_{cd}$, the local component of six d -tensors fields of curvature of d -connection $D\Gamma(N)$, (1.4).

The Algebra of d -tensor fields on E is locally generated by $\{1, \delta_i \dot{\partial}_a\}$ over the differentiable functions $\mathcal{F}(E)$.

2 Metrical structures and metrical d -connections on E ([11])

We will consider a given fixed nonlinear connection N on E with the local components $N^a_i(x, y)$ and a given (h, v) –metrical structure $\mathbb{G} \in \tau_2^0(E)$:

$$\mathbb{G} = g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j + h_{ab}(x, y) \delta y^a \otimes \delta y^b, \tag{2.1}$$

where

$$\begin{aligned} g_{ij}(x, y) &= g_{ji}(x, y), \quad \text{rank } \|g_{ij}(x, y)\| = n, \\ h_{ab}(x, y) &= h_{ba}(x, y), \quad \text{rank } \|h_{ab}(x, y)\| = m \end{aligned} \tag{2.2}$$

Obviously, we have

$$\mathbb{G}(X^H, Y^V) = 0, \quad \forall X \in HE, Y \in VE, \tag{2.3}$$

in other words, the distributions H and V are orthogonal with respect to \mathbb{G} given by (2.1).

Remark If $E = TM$, there exist metrics of type (2.1) wich satisfy (2.2). Indeed, we shall consider a Lagrange (Finsler) structure $g_{ij}(x, y)$ on TM and by Sasaki-Matsumoto lift:

$$\mathbb{G} = g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j + g_{ij}(x, y) \delta y^i \otimes \delta y^j \tag{2.4}$$

is obtained a metric of type (2.1) wich satisfy the relation (2.2).

Conversly, if $\mathbb{G} \in \tau_2^0(E)$ is a metric on E , then there exists a nonlinear connection $N(N^a_i(x, y))$ given by $\mathbb{G}(X^H, Y^V) = 0$.

Definition 2.1 A d -connexion D on E is called a **metrical d-connexion** with respect to $\mathbb{G} \in \tau_2^0(E)$ given by (2.1), if $D_X \mathbb{G} = 0, \forall X \in \mathcal{X}(E)$.

Proposition 2.1 A d -connexion D on E it is metrical if and only if

$$D_X^H \mathbb{G}^H = 0, \quad D_X^H \mathbb{G}^V = 0, \quad D_X^V \mathbb{G}^H = 0, \quad D_X^V \mathbb{G}^V = 0, \quad \forall X \in \mathcal{X}(E), \tag{2.5}$$

where $\mathbb{G}^H = g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j$ is the horizontal part and $\mathbb{G}^V = h_{ab}(x, y) \delta y^a \otimes \delta y^b$ is the vertical part of \mathbb{G} given by (2.1).

Proposition 2.2 There exists a metrical d -connection on E which depends only $N^a_i(x, y), g_{ij}(x, y)$ and $h_{ab}(x, y)$. This is given by

$$\begin{aligned} L^i_{jk}(x, y) &= 1/2g^{ih}(\delta_j g_{hk} + \delta_k g_{jh} - \delta_h g_{jk}), \\ L^a_{bk}(x, y) &= \dot{\partial}_b N^a_k + 1/2h^{ad}(\delta_k h_{bd} - h_{bc} \dot{\partial}_d N^c_k - h_{cd} \dot{\partial}_b N^c_k), \\ C^i_{jc}(x, y) &= 1/2g^{ih} \dot{\partial}_c g_{jh}, \\ C^a_{bc}(x, y) &= 1/2h^{ad}(\dot{\partial}_b h_{dc} + \dot{\partial}_c h_{bd} - \dot{\partial}_d h_{bc}), \end{aligned} \tag{2.6}$$

where $\|g^{ij}\| = \|g_{ij}\|^{-1}, \|h^{ab}\| = \|h_{ab}\|^{-1}$.

The distinguished metrical d -connection (2.4) is said to be **Miron connection** of \mathbb{G} and it will denoted by $MD\Gamma(N)$.

Proposition 2.3 There exists an unique metrical d -connection $D\Gamma(N) = (L^i_{jk}, L^a_{bk}, C^i_{jc}, C^a_{bc})$ on E for which:

$$L^a_{bk}(x, y) = L^a_{bk}(x, y), \quad C^i_{jc}(x, y) = C^i_{jc}(x, y) \tag{2.7}$$

and the d -tensor fields T^i_{jk}, S^a_{bc} are prescribed. This connection is given by (2.5) and

$$\begin{aligned} L^i_{jk}(x, y) &= \overset{M}{L}^i_{jk}(x, y) + 1/2g^{ir} \left(g_{rh}T^h_{jk} - g_{jh}T^h_{rk} + g_{kh}T^h_{jr} \right), \\ C^a_{bc}(x, y) &= \overset{M}{C}^a_{bc}(x, y) + 1/2h^{ad} \left(h_{df}S^f_{bc} - h_{bf}S^f_{dc} + h_{cf}S^f_{bd} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

The metrical distinguished connection given by (2.5) and (2.6) will be called **generalized Miron connection** of the metric \mathbb{G} given by (2.1) and it will denoted by $GMD\Gamma(N)$.

We note

$$\varepsilon(x, y) = \langle y, y \rangle = h_{ab}(x, y) y^a y^b \quad (2.9)$$

the **absolut energy** of vertical part G^V and

$$h^*_{ab}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^a \partial y^b}. \quad (2.10)$$

Definition 2.2 The d -tensor field $h_{ab}(x, y) \delta y^a \otimes \delta y^b$ is said to be **weakly regular** if the d -tensor field with components $h^*_{ab}(x, y)$ given by (2.8) is nondegenerate, i.e. $\det \|h^*_{ab}(x, y)\| \neq 0$, where $E = TM$.

Theorem 2.1 (R. Miron, [10]; see also [11] pg. 127 and [12]) If $h_{ab}(x, y) \delta y^a \otimes \delta y^b$ is a weakly regular v -metric on $E = TM$ then the functions

$$N^a_i(x, y) = \dot{\partial}_b G^a(x, y) \delta^b_i, \quad G^a = \frac{1}{2} h^{*ab} \left[\left(\dot{\partial}_b \partial_k \varepsilon \right) \delta^k_c y^c - (\partial_k \varepsilon) \delta^k_b \right], \quad (2.11)$$

are the coefficients of a nonlinear connection completely determined by $h_{ab}(x, y)$.

3 h - and v -semisymmetric metrical d -connections and their transformations

Definition 3.1 A metrical d -connection on E is said to be **h -semisymmetric** if

$$T^i_{jk} = \sigma_j \delta^i_k - \sigma_k \delta^i_j, \quad (3.1)$$

and **v -semisymmetric** if

$$S^a_{bc} = \tau_b \delta^a_c - \tau_c \delta^a_b, \quad (3.2)$$

where σ_i, τ_a are d -covector fields on E .

Theorem 3.1 There exists on E an unique metrical d -connection both h - and v -semisymmetric, $D\Gamma(N) = (L^i_{jk}, L^a_{bk}, C^i_{jc}, C^a_{bc})$, with prescribed d -covector fields σ_i, τ_a . That d -connection is given by (2.5) and

$$\begin{aligned} L^i_{jk} &= \frac{1}{2} g^{ih} (\delta_j g_{hk} + \delta_k g_{jh} - \delta_h g_{jk}) + \sigma_j \delta^i_k - g_{jk} \sigma^i, \\ C^a_{bc} &= \frac{1}{2} h^{ad} (\dot{\partial}_b h_{dc} + \dot{\partial}_c h_{bd} - \dot{\partial}_d h_{bc}) + \tau_b \delta^a_c - h_{bc} \tau^a, \end{aligned} \quad (3.3)$$

where $\sigma^i = g^{ij} \sigma_j$ and $\tau^a = h^{ab} \tau_b$.

Now, we have the following interesting transformations of h - and v -semisymmetric metrical d -connections.

Theorem 3.2 *The transformations of h- and v-semisymmetric metrical d-connections, which preserve the nonlinear connection $N, D\Gamma(N) \rightarrow D\bar{\Gamma}(N)$, are given by*

$$\begin{aligned} \bar{L}^i_{jk} &= L^i_{jk} + p_j \delta^i_k - g_{jk} p^i, \\ \bar{L}^a_{bk} &= L^a_{bk}, \\ \bar{C}^i_{jc} &= C^i_{jc}, \\ \bar{C}^a_{bc} &= C^a_{bc} + q_b \delta^a_c - h_{bc} q^a, \end{aligned} \tag{3.4}$$

where $p^i = g^{ij} p_j, q^a = h^{ab} q_b$ and p_i, q_a are arbitrary d-covector fields on E .

We shall denote these transformations by $t(p, q)$.

Theorem 3.3 *The set of all transformations $t(p, q)$ given by (3.4) is a transformations group \mathcal{G}_N of the set of all h- and v-semisymmetric metrical d-connections, with respect to (2.1), together with the mapping product*

$$t(p', q') \circ t(p, q) = t(p + p', q + q').$$

This group \mathcal{G}_N is an Abelian group and acts on the set of all h- and v-semisymmetric metrical d-connections, having the same nonlinear connection, transitively.

If we investigate the influences for the torsion and curvature tensor fields, we have

Theorem 3.4 *The following d-tensor fields*

$$\begin{aligned} R^a_{jk}, P^a_{jc}, C^i_{jc} \\ T^i_{jk} - \frac{1}{n-1} (T_j \delta^i_k - T_k \delta^i_j), S^a_{bc} - \frac{1}{m-1} (S_b \delta^a_c - S_c \delta^a_b), \\ (T_j = T^k_{jk}, S_b = S^c_{bc}), \end{aligned} \tag{3.5}$$

are invariants with respect to transformations of the group \mathcal{G}_N .

Theorem 3.5 *For $n > 2, m > 2$, the following d-tensor fields $H_j^i{}_{kl}, M_b^a{}_{cd}$ of h- and v-semisymmetric metrical d-connections, are invariants of the group \mathcal{G}_N :*

$$H_j^i{}_{kl} = R_j^i{}_{kl} + 2 \mathcal{A} \left\{ \underset{(k,l)}{\Omega_{jk}^{si}} [R_{sl} - Rg_{sl}/2(n-1)] \right\} / (n-2), \tag{3.6}$$

$$M_b^a{}_{cd} = S_b^a{}_{cd} + 2 \mathcal{A} \left\{ \underset{(c,d)}{\wedge_{bc}^{cd}} [S_{ed} - Sh_{ed}/2(m-1)] \right\} / (m-2), \tag{3.7}$$

where we denoted the alternation operator by \mathcal{A} , the Obata operators Ω_1 and \wedge_1 of g_{ij} and h_{ab} respectively, by:

$$\begin{aligned} \Omega_1^{ij} &= \frac{1}{2} (\delta_k^i \delta_l^j - g_{kl} g^{ij}), \quad \wedge_1^{ab} = \frac{1}{2} (\delta_c^a \delta_d^b - h_{cd} h^{ab}), \\ &\text{and} \\ R_{jk} &= R_j^l{}_{kl}, \quad S_{bc} = S_b^d{}_{cd}, \quad R = g^{ij} R_{ij}, \quad S = h^{ab} S_{ab}. \end{aligned}$$

Theorem 3.6 *We have*

$$H_j^i{}_{kl} = H_j^i{}_{kl}^M, \quad M_b^a{}_{cd} = M_b^a{}_{cd}^M, \tag{3.8}$$

where $H_j^i{}_{kl}^M, M_b^a{}_{cd}^M$ are construct by means of the Miron connection of $\mathbb{G}, MD\Gamma(N)$, given by (2.4).

Proof. We consider (3.3) as a transformation of h - and v -semisymmetric metrical d -connections $MD\Gamma(N) \rightarrow D\Gamma(N)$ and we obtain (3.8), with respect to (3.6), (3.7)

By straightforward calculus, we get:

Theorem 3.7 *If the Miron connection, $MD\Gamma(N)$, (2.4), has the properties of h - and v -isotropic:*

$${}^M R_j^i{}_{kl} = h(x, y) (g_{jk}\delta_l^i - g_{jl}\delta_k^i), \quad {}^M S_b^a{}_{cd} = v(x, y) (h_{bc}\delta_d^a - h_{bd}\delta_c^a) \quad (3.9)$$

then, we have

$$H_j^i{}_{kl} = 0, \quad M_b^a{}_{cd} = 0 \quad (3.10)$$

4 The Riemann-local Minkowski model of relativity with h - and v -semisymmetric torsions

In this Section, we consider $E = TM$, $\dim M = n$.

If $h_{ab}(x, y) = h_{ab}(y)$, the metric \mathbb{G} given by (2.1) is called **v-local Minkowski**

We have

Theorem 4.1 *If the metric structure \mathbb{G} given by (2.1) is h -Riemannian, v -locally Minkowski and $h_{ab}(y)$ is weakly regular, then:*

I) *The h - and v -semisymmetric metrical d -connection, compatible with respect to \mathbb{G} , that corresponds to the 1-forms $\sigma_i(x, y) = \sigma_i(x)$, $\tau_a(x, y) = \tau_a(y)$ has the coefficients given by*

$$\begin{aligned} \hat{L}^i{}_{jk} &= \gamma_{jk}^i + \sigma_j\delta_k^i - g_{jk}\sigma^i, \\ \hat{L}^a{}_{bk} &= 0, \\ \hat{C}^a{}_{jc} &= 0, \\ \hat{C}^a{}_{bc} &= \gamma_{bc}^a + \tau_b\delta_c^a - h_{bc}\tau^a, \end{aligned} \quad (4.1)$$

here γ_{jk}^i and γ_{bc}^a are the Levi-Civita connections corresponding to the $g_{ij}(x)$ and $h_{ab}(y)$, respectively.

II) *d -tensor fields of (4.1) are*

$$\begin{aligned} \hat{T}^i{}_{jk} &= \sigma_j\delta_k^i - \sigma_k\delta_j^i, \\ \hat{R}^a{}_{jk} &= 0, \quad \hat{C}^i{}_{jc} = 0, \quad \hat{P}^a{}_{jc} = 0, \\ \hat{S}^a{}_{bc} &= \tau_b\delta_c^a - \tau_c\delta_b^a. \end{aligned} \quad (4.2)$$

III) *d -curvature fields of (4.1) are*

$$\begin{aligned} \hat{R}_j^i{}_{kl} &= r_j^i{}_{kl} + 2 \mathcal{A}_{(k,l)} \left\{ \Omega_{jk}^{si} \sigma_{sl} \right\}, \\ \hat{R}_b^a{}_{kl} &= 0, \quad \hat{P}_j^i{}_{kd} = 0, \quad \hat{P}_b^a{}_{kd} = 0, \quad \hat{S}_j^i{}_{cd} = 0, \\ \hat{S}_b^a{}_{cd} &= s_b^a{}_{cd} + 2 \mathcal{A}_{(c,d)} \left\{ \Lambda_{bc}^{fa} \tau_{fd} \right\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

where we denoted \mathcal{A} , Ω , Λ , as in Theorem 3.6, by $r_j^i{}_{kl}$, $s_b^a{}_{cd}$ the tensor fields of curvatures of γ_{jk}^i , γ_{bc}^a respectively, and

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_i \hat{\lrcorner}_j - 2\sigma_i\sigma_j + g_{ij}\alpha, \quad 2\alpha = g^{ij}\sigma_i\sigma_j, \\ \tau_{ab} &= \tau_a \hat{\lrcorner}_b - 2\tau_a\tau_b + h_{ab}\beta, \quad 2\beta = h^{ab}\tau_a\tau_b; \end{aligned} \quad (4.4)$$

(here $\widehat{}$ and $\widehat{}$ denote the h - and v -covariante derivatives with respect to $D\widehat{\Gamma}$, (3.4)).

Remark 4.1 For d -connection (4.1), h (h)-torsion and h (hh)-curvature are internal, only and v (v)-torsion and v (vv)-curvature are external, only.

Let \mathbb{G} be a metrical h -Riemannian, v -locally Minkowski on $E = TM$, v -weakly regular (Theorem 2.1) and we denote $r_{ij} = r_i^k{}_{jk}$, $r = g^{ij}r_{ij}$, $s_{ab} = s_a^c{}_{bc}$, $s = h^{ab}s_{ab}$, etc.

Taking into account the results of [1] and [2] (see, also [5] and [11], pg.83), we obtain

Theorem 4.2 *The Einstein equations of d -connection $D\widehat{\Gamma}$, (4.1) of Riemann-local Minkowski metric \mathbb{G} , (2.1), are given by*

$$\begin{aligned} r_{jk} - \frac{1}{2}(r + s)g_{jk} - (n - 2)\left(\sigma_{jk} - \frac{1}{2}\sigma g_{jk}\right) + \frac{1}{2}(m - 1)\tau g_{jk} &= \kappa \overset{1}{T}_{jk}, \\ s_{bc} - \frac{1}{2}(s + r)h_{bc} - (m - 2)\left(\tau_{bc} - \frac{1}{2}\tau h_{bc}\right) + \frac{1}{2}(n - 1)\sigma h_{bc} &= \varkappa \overset{4}{T}_{bc}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

where κ is constant, $\overset{1}{T}_{ij}, \overset{2}{T}_{ij} = 0, \overset{3}{T}_{ib} = 0, \overset{4}{T}_{ab}$ are the components in the adapted basis of the energy-momentum tensor field

$$\mathcal{T} = \overset{1}{T}_{ij}dx^i \otimes dx^j + \overset{4}{T}_{ab}\delta y^a \otimes \delta y^b, \tag{4.6}$$

$$\sigma = 2g^{ij}\sigma_{ij}, \quad \tau = 2h^{ab}\tau_{ab}. \tag{4.7}$$

Theorem 4.3 *The conservation law in this model is given by*

$$\begin{aligned} \left[r_j^i - \frac{1}{2}r\delta_j^i - (n - 2)\left(\sigma_j^i - \frac{1}{2}\sigma\delta_j^i\right) \right]_{\widehat{n}} &= 0, \\ \left[s_b^a - \frac{1}{2}s\delta_b^a - (m - 2)\left(\tau_b^a - \frac{1}{2}\tau\delta_b^a\right) \right]_{\widehat{a}} &= 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

where

$$r_j^i = g^{ik}r_{kj}, \quad \sigma_j^i = g^{ik}\sigma_{kj}, \quad s_b^a = h^{ac}s_{cb}, \quad \tau_b^a = h^{ac}\tau_{cb}. \tag{4.9}$$

Theorem 4.4 *The divergence of energy-momentum tensor is as follows*

$$\left(Div \overset{1}{T} \right)_j = \frac{1}{\kappa}U_j = 0, \quad \left(Div \overset{4}{T} \right)_b = \frac{1}{\varkappa}U_b = 0, \tag{4.10}$$

where

$$\left(Div \overset{1}{T} \right)_j = \overset{1}{T}_{j\widehat{i}i}, \quad \left(Div \overset{4}{T} \right)_b = \overset{4}{T}_{b\widehat{a}a}$$

and

$$\begin{aligned} U_j &= \frac{1}{2}\sigma_i \left(r_j^i - \frac{1}{2}\sigma\delta_j^i \right) + (n - 2) \left[\sigma^i (\partial_i\sigma_j - \partial_j\sigma_i) - \frac{1}{2}(\partial_j\alpha - 3\alpha\sigma_j) \right], \\ U_b &= \frac{1}{2}\tau_a \left(s_b^a - \frac{1}{2}\tau\delta_b^a \right) + (m - 2) \left[\tau^a (\dot{\partial}_a\tau_b - \dot{\partial}_b\tau_a) - \frac{1}{2}(\dot{\partial}_b\beta - 3\beta\tau_b) \right]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Generally, the equations (4.4) are not identically satisfied. Therefore, we need to find the conditions for 1-forms σ_i and τ_a , such that the conservation law to be satisfied.

In this aim, if we denote by \parallel the covariant derivative with respect to Levi-Civita connection γ_{jk}^i of $g_{ij}(x)$ and with $\widehat{\parallel}$ the covariant derivative with respect to Levi-Civita connection γ_{bc}^a of $h_{ab}(y)$, we obtain

Theorem 4.5 *The conservation law in the Riemann-local Minkowski model with h - and v -semisymmetric torsions is satisfied, if and only if the fields of 1-forms σ_i and τ_a satisfies the equations*

$$\begin{aligned} (r_j^i - \frac{1}{2}r\delta_j^i) \sigma_i + (n-2) [\sigma_{j||i}\sigma^i + \sigma\sigma_j + (n-4)\partial_j\alpha - 3(n-3)\sigma_j\alpha] &= 0, \\ (s_b^a - \frac{1}{2}s\delta_b^a) \tau_a + (m-2) [\tau_{b||a}\tau^a + \tau\tau_b + (m-4)\dot{\partial}_b\beta - 3(m-3)\tau_b\beta] &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Now, we consider $\dim M = 4$. We have, also $m = 4$.

Taking into account the above notations, we obtain:

Theorem 4.6 Let \mathbb{G} be a Riemannian-locally Minkowski structure on $E = TM$, $\dim M = 4$, v -weakly regular. Then:

(i) *The Einstein equations of the d -connection (4.1) are given by:*

$$\begin{aligned} r_{jk} - \frac{1}{2}(r+s-2\sigma-3\tau)g_{jk} - 2\sigma_{jk} &= \varkappa T_{jk}^{\frac{1}{2}}, \\ s_{bc} - \frac{1}{2}(r+s-2\tau-3\sigma)h_{bc} - 2\tau_{bc} &= \varkappa T_{bc}^{\frac{4}{4}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

(ii) *The conservation law is given by:*

$$\begin{aligned} \left[r_j^i - \frac{1}{2}(r-2\sigma)\delta_j^i - 2\sigma_j^i \right]_{\hat{\uparrow}i} &= 0, \\ \left[s_b^a - \frac{1}{2}(s-2\tau)\delta_b^a - 2\tau_b^a \right]_{\hat{\uparrow}a} &= 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

(iii) *The conservation law is satisfied if and only if the fields of 1-forms $\sigma_i(x)$ and $\tau_a(y)$ satisfies the equations*

$$\begin{aligned} \left(r_j^i - \frac{1}{2}r\delta_j^i \right) \sigma_i + 2 [\sigma_{j||i}\sigma^i + (\sigma - 3\alpha)\sigma_j] &= 0, \\ \left(s_b^a - \frac{1}{2}s\delta_b^a \right) \tau_a + 2 [\tau_{b||a}\tau^a + (\tau - 3\beta)\tau_b] &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

References

- [1] **Anastasiu, M.**, Vector Bundles. Einstein Equations, An. Şt. Univ. Iaşi, 32, s I-a Mat., 1986, 17–24.
- [2] **Anastasiu, M.**, Conservation Laws in the (V, H) -Bundle Model of Relativity, Tensor, N. S., 46, 1987, 323–328.
- [3] **Aringazin, A. K., Asanov, G. S.**, Problems of Finslerian Theory of Gauge Fields and Gravitation, Rep. Math. Phys., 25 (2), 1988, 35–93.
- [4] **Asanov, G. S.**, Fibred Generalization of the Gauge Field Theory. Finslerian and Jet Gauge Fields, Moskow Univ., 1989.
- [5] **Atanasiu, Gh.**, Connexion semi-symétriques sur l'espace total d'un fibré vectoriel, Memoriile Sect.Şt., IV, VIII, 1, 1985, Ed. Acad. Române, 1987, 33–41.
- [6] **Atanasiu, Gh.**, Metrical Kawaguchi Connections on the Total Space of a Vector Bundle and Some Special Subordinated Cases, Tensor, N. S., 46, 1987, 248–264.
- [7] **Cartan, E.**, Sur les equations de la gravitation d'Einstein, Gautier Villars, Paris, 1922.
- [8] **Ingarden, R. S.**, Differential Geometry and Physics, Tensor, N. S., 30, 1976, 201–209.

- [9] **Lichnerowitz, A.**, Theories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme, Masson, Paris, 1955.
- [10] **Miron, R.**, Metrical Finsler Structures and Metrical Finsler Connections, J. Math. Kyoto Univ., 23, 1983, 219–224.
- [11] **Miron, R., Anastasiei, M.**, The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and Applications, Kluwer Acad. Publ., F. Th. Ph., 59, 1994.
- [12] **Miron, R., Watanabe, S., Ikeda, S.**, Some Connections on Tangent Bundle and their Applications to the General Relativity, Tensor, N. S., 46, 1987, 8–22.
- [13] **Novikov, I. D., Frolov, V. P.**, Physics of Black Holes, Kluwer Acad. Publ., F. Th. Ph., 27, 1989.
- [14] **Stoica, E.**, A geometrical characterization of normal Finsler connections, Analele Șt. Univ. "Al. I. Cuza" Iași, 30, sIa Mat., 1984, 3.
- [15] **Stoica, E.**, *G*-structures of Finsler type (in Romanian), Ph.D. Thesis, "Al. I. Cuza" Univ. of Iași, 1986, 1–144 + XXVI.
- [16] **Yano, K., Ishihara, S.**, Tangent and cotangent bundle, M. Dekker, New-York, 1973.

CMC AND MINIMAL SURFACES IN BERWALD-MOOR SPACES

Vladimir Balan

Faculty of Applied Sciences, University Politehnica of Bucharest, Romania

vbalan@mathem.pub.ro

For Randers and Kropina Finsler spaces are described the extended equations of minimal and CMC hypersurfaces. For the Berwald-Moor type Finsler metric are then considered different types of symmetric polynomials generating the fundamental function and classes of CMC surfaces are evidentiated. Maple 9.5 representations of indicatrices point out structural differences among Berwald-Moor fundamental functions of different order, leading to different CMC approaches.

MSC2000: 53B40, 53C60, 49Q05, 53A10, 53C42, 57R42.

Key words: Berwald-Moor space, indicatrix, mean curvature vector field, minimality, PDEs, classes of solutions.

1 Introduction

Recently Z. Shen ([16]), and further M. Souza and K. Tenenblat ([17]) have investigated minimal surfaces immersed in Finsler spaces from differential geometric point of view. Still, earlier rigorous attempts using functional analysis exist in the works of G. Bellettini and M. Paolini (after 1995, e.g., [7–9]). In 1998, based on the notion of Hausdorff measure, Z. Shen ([16]) has introduced the notion of mean curvature on submanifolds of Finsler spaces as follows.

If (\tilde{M}, \tilde{F}) is a Finsler structure, and $\varphi : (M, F) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{F})$ is an isometric immersion (hence F is induced by \tilde{F}), then the mean curvature of M is given by ([16, (57), p. 563])

$$H_\varphi(X) = \frac{1}{G} \left(G_{;x^i} - G_{;z_a^i z_b^j} \varphi_{;u^a}^j u^b - G_{;x^j z_a^i} \varphi_{;u^a}^j \right) X^i,$$

where lower indices stand for corresponding partial derivatives and:

- $(u^a, v^b)_{a,b \in \overline{1,n}}$ are local coordinates in TM ($\dim M = n$);
- $(x^i, y^j)_{i,j \in \overline{1,m}}$ are local coordinates in $T\tilde{M}$ ($\dim \tilde{M} = m$);
- z_a^i are the entries of the Jacobian matrix $[J(\varphi)] = (\partial\varphi^i/\partial u^a)_{a \in \overline{1,n}, i \in \overline{1,m}}$;
- $\varphi_t : M \rightarrow \tilde{M}$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varphi_0 = \varphi$, is the variation of the surface;
- X is the vector field $X_x = \frac{\partial\varphi_t}{\partial t} |_{t=0}(x)$ induced along φ attached to the variation;
- G is the Finsler induced volume form

$$G_{\tilde{e}}(z) = \frac{\text{vol}[B^n]}{\text{vol}\{(v^a) \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{F}(v^a z_a^i \tilde{e}_i) \leq 1\}}, \quad (1.1)$$

where $z = (z_a^i)_{a \in \overline{1,n}, i \in \overline{1,m}} \in GL_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\tilde{e} = \{\tilde{e}_i\}_{i \in \overline{1,m}}$ is an arbitrary basis in \mathbb{R}^m and $B^n \subset \mathbb{R}^n$ is the standard Euclidean ball.

It was proved that the variation of the volume in M reaches a minimum for $H_\varphi = 0$ ([16]). Recent advances in constructing minimal surfaces ($n = 2$) based on (1.1) were provided in

([17]), by characterizing the minimal surfaces of revolution in Randers spaces ($\tilde{M} = \mathbb{R}^3, \tilde{F}$) with the Finsler (α, β) -fundamental function

$$\tilde{F}(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y), \quad \alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)^i y^j}, \quad \beta(x, y) = b_i(x) y^i,$$

for the particular case when $a_{ij} = \delta_{ij}$ (the Euclidean metric) and $\beta = b \cdot dx^3$, with $b \in [0, 1)$.

We further consider a real smooth manifold \tilde{M} of dimension $n + 1$ endowed with a positive 1-homogeneous locally Minkowski Finsler fundamental function $F : T\tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ ([MA]).

2 Generalized Randers-Kropina hypersurfaces ([4])

Let $H = Im \varphi, \varphi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ be a simple hypersurface. We denote $z_\alpha^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial u^\alpha}, u = (u^1, \dots, u^n) \in D$. We shall further determine the volume of the body $Q \subset T_{\varphi(u)}H$ bounded by the induced on $T_{\varphi(u)}H$ indicatrix from \tilde{M}

$$\Sigma_* = T_{\varphi(u)}H \cap \{y \in T_{\varphi(u)}\mathbb{R}^{n+1} | F(y) = 1\}.$$

If $v = v^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \in T_u D$, then $\varphi_{*,u}(v) = z_\alpha^i v^\alpha \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\varphi(u)} \in T_{\varphi(u)}H$ and hence at some fixed point $u \in D, Q$ is given by

$$Q = \{v \in T_u D | F(\varphi(u), \varphi_{*,u}(v)) \leq 1\}.$$

We have the following:

Theorem 1. *If the body Q is given by*

$$Q : \sum_{i=1}^n (z_\alpha^i v^\alpha)^2 + \mu (z_\alpha^{n+1} v^\alpha)^2 + 2\nu z_\alpha^{n+1} v^\alpha + \rho \leq 0, \tag{2.1}$$

where $\mu, \nu, \rho \in \mathbb{R}$, then

$$Vol(Q) = \begin{cases} \frac{Vol(B_n)}{\sqrt{\delta} \cdot (1 + \tau)^{(n+1)/2}} \cdot \left(\frac{\nu^2 \tau}{\mu - 1} - \rho(1 + \tau) \right)^{n/2}, & \text{for } \mu \neq 1 \\ \frac{Vol(B_n) \cdot (-\rho + \nu^2 z_a^{n+1} z_b^{n+1} h^{ab})^{n/2}}{\sqrt{\delta}}, & \text{for } \mu = 1, \end{cases} \tag{2.2}$$

where τ and δ are given by (2.3).

$$\tau = (\mu - 1) z_a^{n+1} z_b^{n+1} h^{ab}, \quad \delta = \det(h_{ab})_{a,b=\overline{1,n}}, \tag{2.3}$$

and $B_n \subset \mathbb{R}^n$ is the standard n -dimensional ball and h^{ab} is the dual of h_{ab} ($h^{as} h_{sb} = \delta_b^a$).

In particular, we obtain the following result:

Corollary 1. *a) In the Randers case*

$$F(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (y^i)^2} + by^{n+1}, \quad b \in [0, 1), \tag{2.4}$$

we obtain the known result ([17, (5), p. 627]),

$$Vol(Q_R) = \frac{Vol(B_n)}{\sqrt{\delta} (1 - b^2 z_a^{n+1} z_b^{n+1} h^{ab})^{(n+1)/2}}.$$

b) In the Kropina case

$$F(x, y) = (by^{n+1})^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} (y^i)^2, \quad b \in [0, 1), \quad (2.5)$$

we have

$$\text{Vol}(Q_K) = \frac{\text{Vol}(B_n) \left(\frac{b^2}{4} z_a^{n+1} z_b^{n+1} h^{ab} \right)^{n/2}}{\sqrt{\delta}}.$$

Remarks. In the Kropina case, the function G in (1.1) has the expression

$$G = \frac{\text{Vol}(B_n)}{\text{Vol}(Q_K)} = \frac{\sqrt{\delta}}{(z_a^{n+1} z_b^{n+1} h^{ab} \cdot b^2/4)^{n/2}} = 2^n \cdot CB^{-n/2},$$

where we have used the notations from [17], $B = b^2 z_a^{n+1} z_b^{n+1} h^{ab}$, $C = \sqrt{\delta}$. Then the mean curvature vector field has the components

$$\bar{H}_i = \frac{1}{G} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z_\varepsilon^i \partial z_\eta^j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^\varepsilon \partial u^\eta} \right), \quad i = \overline{1, n+1},$$

and the volume form of the hypersurface H is

$$dV_F = \frac{\sqrt{\delta}}{\left(\frac{b^2}{4} z_a^{n+1} z_b^{n+1} h^{ab} \right)^{n/2}} du^1 \wedge \cdots \wedge du^n.$$

Theorem 2. The mean curvature vector field of the hypersurface M in the Kropina space $\tilde{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ with the fundamental function (2.5) has the following expression in terms of B and C

$$H_i = 2^n B^{-(n+4)/2} \left[\frac{\partial^2 C}{\partial z_\varepsilon^i \partial z_\eta^j} B^2 + \frac{n(n+2)}{4} C \frac{\partial B}{\partial z_\varepsilon^i} \frac{\partial B}{\partial z_\eta^j} - \frac{nB}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial z_\varepsilon^i} \frac{\partial B}{\partial z_\eta^j} + \frac{\partial C}{\partial z_\eta^j} \frac{\partial B}{\partial z_\varepsilon^i} + C \frac{\partial^2 B}{\partial z_\varepsilon^i \partial z_\eta^j} \right) \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^\varepsilon \partial u^\eta}, \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Corollary 2. The mean curvature vector field of the surface M in the Kropina space $\tilde{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ with the fundamental function (2.5) has the following expression

$$H_i = \frac{4C}{E^3} \left[6E^2 \frac{\partial C}{\partial z_\varepsilon^i} \frac{\partial C}{\partial z_\eta^j} + 2C^2 \frac{\partial E}{\partial z_\varepsilon^i} \frac{\partial E}{\partial z_\eta^j} - C^2 E \frac{\partial^2 E}{\partial z_\varepsilon^i \partial z_\eta^j} - 3CE \left(\frac{\partial E}{\partial z_\varepsilon^i} \frac{\partial C}{\partial z_\eta^j} + \frac{\partial E}{\partial z_\eta^j} \frac{\partial C}{\partial z_\varepsilon^i} \right) + 3E^2 C \frac{\partial^2 C}{\partial z_\varepsilon^i \partial z_\eta^j} \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^\varepsilon \partial u^\eta}, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad (2.6)$$

where

$$E = b^2 \sum_{k=1}^3 \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (-1)^{\alpha+\beta} z_\alpha^k z_\beta^k z_\alpha^3 z_\beta^3, \quad \tilde{\alpha} = 3 - \alpha.$$

Corollary 3. The mean curvature of the surface M in the Kropina space (2.5) is $H_* = H_i X^i$, where H_i are given by (2.6),

$$X \in \text{Ker}(G_* Z^1) \cap \text{Ker}(G_* Z^2) \cap \{y \in T_{\varphi(u)} \tilde{M} \mid F(y) = 1\},$$

$Z^1 = (z_1^1, z_1^2, z_1^3)$, $Z^2 = (z_2^1, z_2^2, z_2^3)$, and $G_* v$ is defined by the equality $(G_* v)(v') = \langle v, v' \rangle_F = \frac{1}{2} \frac{\partial F^2}{\partial y^i \partial y^j} v^i v'^j$.

Corollary 4. *Let $M = \Sigma = Im \varphi$ be a surface of revolution described by*

$$\varphi(t, \theta) = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, t), \quad (t, \theta) \in D = \mathbb{R} \times [0, 2\pi).$$

Then M is minimal iff the function f satisfies the ODE

$$1 + f'^2 = 3ff''(1 + 2f'^2).$$

3 The Berwald-Moor Finsler case

We shall further point out the obstructions present in the case of a Berwald-Moor Finsler metric and evidentiate the means of construction of spatial and temporal CMC and minimal surfaces. The substantial difference between the Randers-Kropina framework and the Berwald-Moor Finsler metric relies in the fact that the indicatrix $\Sigma : F(x, y) = 1, x \in M$ is in general noncompact for all values of x . Hence, one may not talk about the volume contained inside this hypersurface Σ , which in the latter case extends to infinity and the volume is provided by a divergent integral.

However, specializing to certain temporal or spatial slices, one may define within them CMC or minimal submanifolds of codimension 1, in particular surfaces. First we note that in the case of Minkowski Finsler metrics of Berwald Moor type

$$F(x, y) = \sqrt[k]{P_k(y^1, \dots, y^n)}, \quad (\dim M = n \geq 3),$$

provided by appropriate order square roots of homogeneous polynomials P_k , even in the case when the indicatrix Σ is compact and strongly convex, e.g.,

$$F(x, y) = \sqrt[2k]{(y^1)^{2k} + \dots + (y^n)^{2k}}, \quad (k \geq 2), \tag{3.1}$$

the task of computing the volume bounded by Σ becomes difficult for higher orders k (see Appendix I). This points out once more that from technical point of view choosing an appropriate submanifold which would decrease the dimension, is a desirable attempt.

We shall discuss further several cases of nonpositive signature of the Finsler metric tensor field given by the halved y -Hessian of F^2 .

1. The $H(4) \sim \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ - type Berwald-Moor Minkowski - Finsler metrics [11]:

$$\begin{aligned} F_2(y) &= \sqrt{|(a+b)(c+d) + ab + cd|}, \\ F_3(y) &= \sqrt[3]{|ab(c+d) + cd(a+b)|}, \\ F_4(y) &= \sqrt[4]{|abcd|}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

where $n = 4, y = (y^1, y^2, y^3, y^4) = (a, b, c, d) \in T_p(\mathbb{R}^4)$. After performing the Hadamard change of basis of matrix $C = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} A & A \\ A & -A \end{pmatrix}$, with $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ given by $y^T = C\hat{y}^T$, $\hat{y} = (t, x, y, z)$, the functions (3.2) transform into

$$\begin{aligned} \hat{F}_2(\hat{y}) &= \sqrt{|6t^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)|}, \\ \hat{F}_3(\hat{y}) &= \sqrt[3]{|8xyz + 4t(t^2 - x^2 - y^2 - z^2)|}, \\ \hat{F}_4(\hat{y}) &= \sqrt[4]{|x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 8txyz - 2[(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) + x^2y^2 + z^2t^2]|}. \end{aligned}$$

Hence for \hat{F}_2 one might consider the slice submanifold $\hat{y}^1 \equiv t = \text{const}$ where the CMC imbedded surfaces are the Euclidean ones.

For \tilde{F}_4 , besides considering the spatial slices $v^i = \text{const}$, ($i \in \overline{1,4}$) one might look for subclasses of CMC surfaces which satisfy additional PDEs, by reformulating the energy-minimizing problem using Lagrange multipliers imposed, e.g., by

$$(v^1)^4 + \dots + (v^n)^4 \equiv \tilde{F}_4(\hat{y})|_{\hat{y}^i=(C^{-1})^i_j z^\alpha^j v^\alpha, i=\overline{1,4}},$$

or, for the initial basis,

$$(v^1)^4 + \dots + (v^n)^4 \equiv (z^1_\alpha v^\alpha)(z^2_\beta v^\beta)(z^3_\gamma v^\gamma)(z^4_\delta v^\delta),$$

where the Greek indices run through $\overline{1,n}$, with $n \geq 1$.

2. In general, for $m \geq 3$ and Berwald-Moor metrics of type (3.1), valid additional PDEs which impose the change of energy to provide surface-like CMC surfaces are

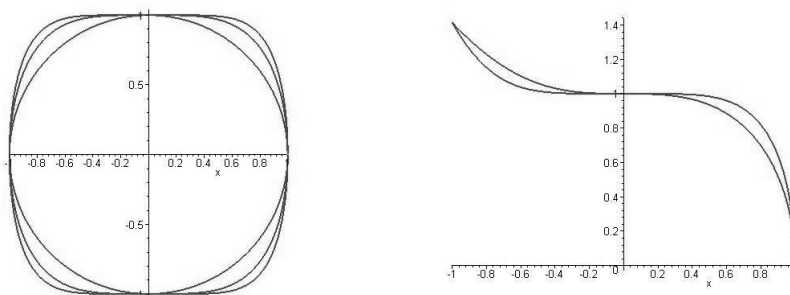
$$(v^1)^{2k} + \dots + (v^n)^{2k} \equiv F(y)|_{y^i=z^i_\alpha v^\alpha, i=\overline{1,m}},$$

with the same conventions as above.

3. A notable difference exhibited by Berwald-Moor Finsler fundamental functions

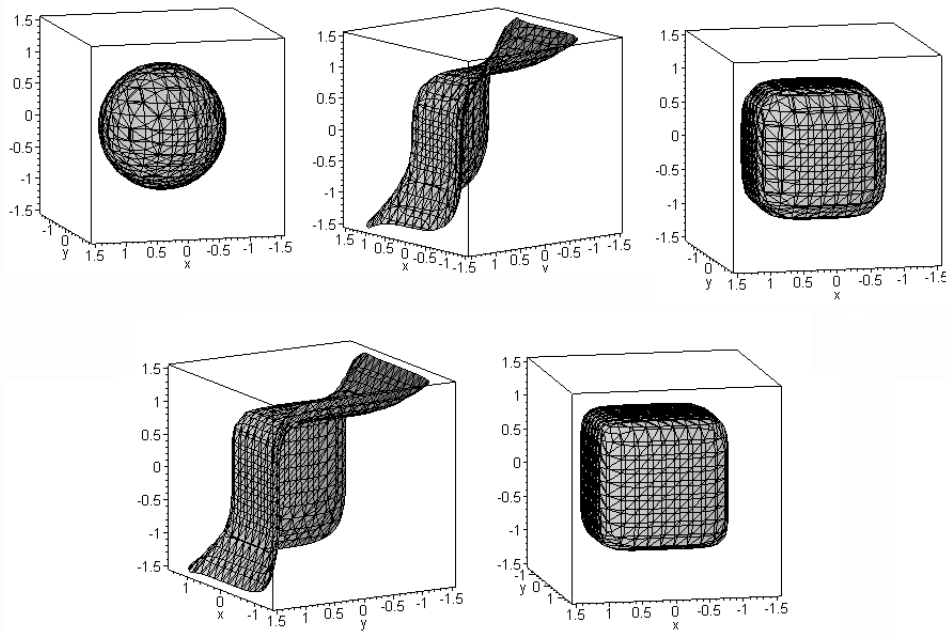
$$F(v) = \sqrt[k]{(v^1)^k + \dots + (v^n)^k}, \quad n \in \{2, 3\} \tag{3.3}$$

and hence, by their indicatrices, is the dependence of the topologic properties on the index k . For k even, the indicatrices are compact and have a strictly convex interior set, while for k odd, the indicatrices are unbounded and define no finite volume. This is illustrated for $m = 2$ by the following Maple plots of indicatrices $F(v) = 1$ with F provided by (3.3):



Berwald-Moor indicatrices ($m = 2$; even ($k \in \{2, 4, 6\}$) and odd ($k \in \{3, 5\}$) root index).

In higher dimensions (e.g. for $m = 3$) the topology strongly differs as well:

Berwald-Moor indicatrices for $k \in \{2, \dots, 6\}$ ($m = 3$)

Moreover, even for small even values of k , to compute the encompassed volume inside a bounded indicatrix implies the usage of special functions. Though the case $k = 2$ is classical, providing volumes of (hyper)-spheres ($Vol(Q)_{m=2,k=2} = \pi$, $Vol(Q)_{m=2,k=2} = 4\pi/3$, etc), for larger values of k we get results as:

$$Vol(Q)_{m=2,k=4} = \frac{1}{4}B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right), \quad Vol(Q)_{m=2,k=6} = \frac{1}{6}B\left(\frac{1}{6}, \frac{3}{2}\right),$$

where $B(\cdot, \cdot)$ is the Bessel function.

Acknowledgement. The present work was partially supported by Grant CNCSIS 1478/2005. Further study of CMC surfaces in Finsler spaces with nonconvex indicatrices is in preparation.

References

- [1] J. C. Álvarez Paiva, A. C. Thompson, *Volumes on normed and Finsler spaces*, In: Riemann-Finsler Geometry, MSRI Publications, 49 (2004), 1–46.
- [2] G. S. Asanov, *Finsler Geometry, Relativity and Gauge Geometry*, D.Reidel, Dordrecht, 1985.
- [3] V. Balan, *DPW method for CMC surfaces in Randers spaces*, in: "Modern Trends in Geometry and Topology" (Eds: D. Andrica, P. A. Blaga, S. Moroianu), Proc. of The Seventh International Workshop on Differential Geometry and Its Applications, 5–11 September 2005, Deva, Romania, Cluj University Press 2006, 79–86.
- [4] V. Balan, *Minimal surfaces in special Finsler spaces*, Proc. of The National Seminar of Finsler, Lagrange and Hamilton Spaces, 22–23 September 2006, Braşov, Romania, to appear.
- [5] D. Bao, S.-S. Chern, Z. Shen, *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, Springer-Verlag, 2000.
- [6] A. Bejancu, *Finsler Geometry and Applications*, E. Horwood, 1990.
- [7] G. Belletini, M. Paolini, *Anisotropic motion by mean curvature in the context of Finsler geometry*, Hokkaido Math. Jour. 25 (1995), 537–566.
- [8] G. Belletini, M. Paolini, *Some aspects of mean curvature flow in presence of nonsmooth anisotropies*, Progress in Mathematics, Birkhäuser 202 (2001), 245–253.
- [9] G. Belletini, M. Paolini, S. Venturini, *Some results on surface measures in calculus of variations*, Ann. di Mat. Pura ed Appl., IV vol. CLXX (1996), 329–259.

- [10] G. Breck, *Minimalité des sous-variétés totalement géodésiques en géométrie Finslerienne*, arXiv:math.DG/0409320, v1, 18 Sept. 2004.
- [11] V.M. Chernov, *On defining equations for the elements of associative and commutative algebras and on associated metric forms*, Space-Time Structure (Ed: D. Pavlov), Tetru Eds., 2006, 227–249.
- [12] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry I, II*, Interscience Publishers, New York, (1963), (1969).
- [13] R. Miron, M. Anastasiei, *The Geometry of Vector Bundles. Theory and Applications*, Kluwer Acad. Publishers, FTPH, no. 59, 1994.
- [14] H. Rund, *The Differential Geometry of Finsler Spaces*, Springer-Verlag, 1959.
- [15] Z. Shen, *Differential Geometry of Sprays and Finsler Spaces*, Kluwer Acad. Publishers, 2001.
- [16] Z. Shen, *On Finsler geometry of submanifolds*, Mathematische Annalen, Springer-Verlag 311 (1998), 549–576.
- [17] M. Souza, K. Tenenblat, *Minimal surface of rotation in Finsler space with a Randers metric*, Math. Ann. 325 (2003), 625–642.

GEODETICS, CONNECTIONS AND JACOBI FIELDS FOR BERWALD-MOOR QUARTIC METRICS

V. Balan¹, N. Brînzei² and S. Lebedev³

For Finsler spaces (M, F) with quartic metrics $F = \sqrt[4]{G_{ijkl}(x, y)y^i y^j y^k y^l}$, we determine the equations of geodesics and the corresponding arising geometrical objects-canonical spray, nonlinear Cartan connection, Berwald linear connection – in terms of the non-homogenized flag Lagrange metric $h_{ij} = G_{ij00}$. Further, are studied the geodesics and Jacobi fields of the tangent space TM for $h\nu$ -metric models.

MSC2000: 53B40, 53C60, 53C22.

Key words: Berwald-Moor quartic metric, spray, nonlinear connection, linear connection, geodesic, Jacobi field, flag metric.

1 The equations of geodesics in quartic Berwald-Moor spaces

Let (M, F) be an n -dimensional Finsler space. We shall denote by (x, y) the local coordinates on TM and by the signs “,” and “;” preceding an index, the partial derivative relative to the corresponding component of x and of the direction y , respectively. Let G_{ijkl} be the local components of the 0-homogeneous 4-metric

$$G_{ijkl}(x, y) = \frac{1}{4!}(F^4)_{;ijkl}. \quad (1.1)$$

We denote by h_{ij} the flag non-homogenized metric

$$h_{ij} = \frac{1}{12}(F^4)_{;ij} \quad (1.2)$$

which coincides with the tensor field $y_{ij}^{(4)}$ from ([9]). We shall further prove that h_{ij} is nondegenerate. The link between the two tensors (1.1) and (1.2) is

$$h_{ij} = G_{ij00}, \quad G_{ijkl} = \frac{1}{2}h_{ij;kl}$$

where the index 0 means transvection by y . We consider the Euler-Lagrange equation

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y^i} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0 \quad (1.3)$$

and we look for the solutions $c : t \in [0, 1] \rightarrow x(t) \in M$, parametrized by arclength, this is, $v(t) = 1, \forall t \in [0, 1]$, where

$$v(t) = F(x(t), y(t)), \quad y(t) = \frac{dx}{dt}(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Then we have the following

¹ Faculty of Applied Sciences, University Politehnica of Bucharest, Bucharest, Romania, vbalan@mathem.pub.ro.

² "Transilvania" University, Brasov, Romania, nico.brinzei@rdslink.ro.

³ Institute of Appl. Mathematics and Mechanics of Baumann Moskow State Technical University, Moscow, Russia, serlebedev@yahoo.com.

Proposition 1. *The system (1.3) is equivalent with*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial y^i} \right) - \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} = 0, \quad \alpha \neq 0. \tag{1.4}$$

Proof. We have $\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} = \alpha F^{\alpha-1} \frac{\partial F}{\partial x^i}$, $\frac{\partial F^\alpha}{\partial y^i} = \alpha F^{\alpha-1} \frac{\partial F}{\partial y^i}$, and since c is a unit-speed curve, it follows that $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial y^i} \right) = \alpha F^{\alpha-1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y^i} \right)$, which lead to the claim. \square

Remark. In particular, for $\alpha = 4$, (1.4) leads to

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^4}{\partial y^i} \right) - \frac{\partial F^4}{\partial x^i} = 0. \tag{1.5}$$

Using $F^4 = G_{mjkl} y^m y^j y^k y^l$, it follows ([5]) $(F^4)_{;i} = 4G_{i000}$, and further,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^4}{\partial y^i} \right) &= 4 \frac{dG_{ijkl}}{dt} y^j y^k y^l + 12G_{ijkl} \frac{dy^j}{dt} y^k y^l = \\ &= 12G_{ijkl} \frac{dy^j}{dt} y^k y^l + 4 \left(\frac{\partial G_{ijkl}}{\partial x^m} y^m y^j y^k y^l + G_{ijkl;m} \frac{dy^m}{dt} y^j y^k y^l \right). \end{aligned}$$

Since G_{ijkl} is 0-homogeneous, using Euler's relation we infer

$$G_{ijkl;m} \frac{dy^m}{dt} y^j y^k y^l = (G_{imkl;j} y^j) \frac{dy^m}{dt} y^k y^l = 0 \tag{1.6}$$

and hence

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^4}{\partial y^i} \right) = 12G_{ijkl} \frac{dy^j}{dt} y^k y^l + 4 \frac{\partial G_{ijkl}}{\partial x^m} y^m y^j y^k y^l.$$

Replacing (1.6) and the x^i -derivative $(F^4)_{;i} = G_{mjkl,i} y^m y^j y^k y^l$ in the Euler-Lagrange equation (1.5), this rewrites

$$12G_{ijkl} y^k y^l \frac{dy^j}{dt} + (4G_{ijkl,m} - G_{mjkl,i}) y^m y^j y^k y^l = 0, \tag{1.7}$$

where $y^i = \frac{dx^i}{dt}$. Using the notation $h_{ij} = y_{ij}^{(4)} = G_{ijkl} y^k y^l$ ([9]), (1.7) becomes

$$h_{ij} \frac{dy^j}{dt} + \frac{1}{12} (4G_{ijkl,m} - G_{jklm,i}) y^m y^j y^k y^l = 0. \tag{1.8}$$

Denoting

$$\gamma_{jklm}^i = \frac{1}{12} h^{ip} \gamma_{p jklm}, \quad \gamma_{p jklm} = (4G_{pjkl,m} - G_{jklm,p}), \tag{1.9}$$

we note that γ_{jklm}^i is symmetric w.r.t. the first three lower indices and the equations of geodesics can be written as

$$\frac{dy^i}{dt} + \gamma_{jklm}^i y^j y^k y^l y^m = 0. \tag{1.10}$$

As well, denoting $\tilde{\gamma}_{jklm}^i = h^{ip} \tilde{\gamma}_{p jklm} / 12$, where

$$\tilde{\gamma}_{p jklm} = G_{pjkl,m} + G_{pmjk,l} + G_{plmj,k} + G_{pklm,j} - G_{mjkl,p},$$

we can easily see that (1.10) can be rewritten as

$$\frac{dy^i}{dt} + \tilde{\gamma}_{jklm}^i y^j y^k y^l y^m = 0. \tag{1.11}$$

Remarks. 1. The tensor with which we have raised the indices is $h_{ij} = y_{ij}^{(4)}$, not $\tilde{y}_{ij}^{(4)} = F_{;i}F_{;j} - h_{ij}$ (cf. [9]), which is degenerate, as we shall further prove. The equations of geodesics (1.10) can be expressed only in terms of the non-homogenized flag 2-metric $h_{ij} = G_{ij00}$. Having in view that $G_{ijkl,m}y^k y^l = h_{ij,m}$, we rewrite (1.8) as

$$h_{is} \frac{dy^s}{dt} + \frac{1}{12}(4h_{ij,k} - h_{jk,i})y^j y^k = 0, \tag{1.12}$$

or, still

$$\frac{dy^i}{dt} + \frac{h^{is}}{12}(4h_{ij,k} - h_{jk,i})y^j y^k = 0. \tag{1.13}$$

Applying the variational principle to $F^4 = h_{ij}y^i y^j$ one gets the same equations of geodesics (1.12), which are the equations of geodesics of the Lagrange space (M, L) with the Lagrangian $L = F^4 = h_{ij}y^i y^j = G_{ijkl}y^i y^j y^k y^l$.

Unfortunately, the coefficients $\gamma_{jm00}^i = h^{ij}(4h_{ij,m} - h_{mj,i})/12$ can not stand for the coefficients of a linear connection on TM .

Last but not least, we point out several considerations regarding the used (0,2) tensor fields. We shall further skip for brevity the symbol ";" in the partials of F w.r.t. y (e.g., $F_i = F_{;i}, F_{ij} = F_{;ij}$, etc). Let $l_i = F^{-1}y_i = F_i$, where $y_i = g_{ij}y^j$ and $g_{ij} = (F^2)_{;ij}/2$ is the *fundamental Finsler metric tensor field*. Then we have:

Proposition 2. Consider the following family of (0, 2)-tensor fields

$$\Theta_{ij} = \lambda g_{ij} + \mu l_i l_j, \quad \lambda, \mu \in \mathcal{F}(M), \tag{1.14}$$

Denote by g^{ij} the dual and by δ the determinant of g_{ij} . Then

a) Θ_{ij} is non-degenerate for $\lambda(\lambda + \mu) \neq 0$ on TM .

b) The dual of Θ_{ij} is

$$\Theta^{ij} = \frac{1}{\lambda}g^{ij} + \frac{-\mu}{\lambda(\lambda + \mu)F^2}y^i y^j.$$

c) The determinant of Θ_{ij} is

$$\Delta = \lambda^{n-1}(\lambda + \mu) \cdot \delta.$$

Proof. From the 1-homogeneity of F follow $F_i y^i = F, F_{ij} y^j = 0, y_i = F F_i$. The claim follows using these relations and from straightforward calculation using properties of determinants.

Lemma. Consider the matrix $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\gamma}_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}}, \tilde{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij} + u_i u_j$, with $\Gamma = (\gamma_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}}$ non-degenerate. Then:

a) The inverse of $\tilde{\Gamma}$ has the coefficients $\tilde{\gamma}^{ij} = \gamma^{ij} - (1 + u_s u^s)^{-1} u^i u^j$, where $u^i = \gamma^{is} u_s$.

b) We have $\det(\tilde{\Gamma}) = \det(\Gamma) \cdot (1 + u_s u^s)$.

Particular cases.

1. Obviously, g_{ij} is part of the pencil (1.14), obtained for $\lambda = 1, \mu = 0$.
2. We note that $g_{ij} = F F_{ij} + F_i F_j$ which infers that

$$\Theta_{ij} = \lambda F F_{ij} + (\lambda + \mu) F_i F_j, \quad \lambda, \mu \in \mathcal{F}(M), \tag{1.15}$$

where both tensor fields F_{ij} and $F_i \cdot F_j$ are degenerate.

3. For $\lambda = 1, \mu = -1$ (1.14) provides the *angular metric*

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij} - l_i l_j. \tag{1.16}$$

Its halved version-denoted by \tilde{y}_{ij} , is employed in [9, (10)].

4. From (1.15) we respectively obtain the tensor fields used in [9, (13), (20')], as particular cases:

$$\begin{aligned} h_{ij} &= y_{ij}^{(4)} = \frac{1}{12}(F^4)_{;ij}, & \text{for } \lambda = F^2/3, \mu = 2F^2/3 \\ \tilde{y}_{ij}^{(4)} &= y_i y_j - y_{ij}^{(4)}, & \text{for } \lambda = -\mu = -F^2/3. \end{aligned} \tag{1.17}$$

We emphasize that the (0, 2)-tensor field $\tilde{y}_{ij}^{(4)}$ satisfies the following equalities

$$\tilde{y}_{ij}^{(4)} = -F^3 F_{ij}/3 = -F^2 \hat{g}_{ij}/3,$$

and hence has the property of \hat{g}_{ij} of being degenerate.

We note that the proposition above provides for $\lambda = 1 + \alpha, \mu = -\alpha \in \mathbb{R}$ the following

Corollary ([1]). *The following (0, 2) Finsler tensor fields are 0-homogeneous and non-degenerate:*

$$g_{ij} + \alpha \hat{g}_{ij}, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.18}$$

Regarding h_{ij} , this can be homogenized by dividing to F^2 . According to the Corollary, the resulting (Generalized Lagrange) homogeneous metric is included in the family of metrics (1.18). More exactly, we have

$$\frac{h_{ij}}{F^2} = \frac{1}{12F^2} [2F^2(F^2)_{;i}]_{;j} = \frac{1}{6} [(F^2)_{;ij} + 4F^{-2}y_i y_j] = g_{ij} + \alpha \hat{g}_{ij}, \alpha = -2/3.$$

Definition 1. We call *generalized 4-index angular metric tensor*, the tensor field

$$\omega_{ijkl} \equiv G_{ijkl} - l_i l_j l_k l_l. \tag{1.19}$$

This definition may be easily extended to any number of indices. In analogy with [1] we have the following

Proposition 3. *The tensors of form $\tilde{G}_{ijkl} = G_{ijkl} + \alpha \omega_{ijkl}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ are generalized metric tensors which share the same energy F^4 .*

Proof. Using that $l_i y^i = F^{-1} y_i y^i = F$, we get $\tilde{G}_{0000} = G_{0000} + \alpha(G_{0000} - (l_s y^s)^4) = F^4$, whence the claim follows.

We should note as well the relation

$$\omega_{ij00} = G_{ij00} - F^2 l_i l_j = h_{ij} - F^2 F_i F_j = F^2(F_i F_j + F F_{ij}/3) - F^2 F_i F_j = -\tilde{y}_{ij}^{(4)}.$$

2 The nonlinear connection

Consider the semispray given by the second term in the equations of geodesics (1.13)

$$2G^i = \frac{h^{ip}}{12}(4G_{pjkl,m} - G_{mjkl,p})y^m y^j y^k y^l.$$

By taking into account (1.1) and the 1-homogeneity of F , we get $G_{mjkl} y^m y^j y^k y^l = F^4$, $G_{pjkl} y^j y^k y^l = G_{p000} = \frac{1}{4}(F^4)_{;p}$, and hence G^i can be written as

$$2G^i = \frac{h^{ip}}{12} \left(\frac{\partial^2 F^4}{\partial x^m \partial y^p} y^m - \frac{\partial F^4}{\partial x^j} \right). \tag{2.1}$$

Within the Lagrange structure $(M, L = F^4/6)$, where the classical Lagrange metric induced by L is $h_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j}$, (2.1) is exactly the Kern canonical semi-spray of L ([8], [11, Theorem 7.4.1, p. 113]),

$$G^i = \frac{h^{ip}}{4} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^m \partial y^p} y^m - \frac{\partial L}{\partial x^j} \right). \tag{2.2}$$

and $N^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}$ are the Kern coefficients of the canonical nonlinear connection attached to L on TM . Its autoparallel curves described by (1.13) are exactly the geodesics determined by L . Then the equations (1.10) can be written as

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2x^i}{dt^2} + N^i_j y^j = 0,$$

or, denoting $\delta y^i = dy^i + N^i_s dx^s$,

$$\frac{\delta y^i}{dt} = 0.$$

Aiming to obtain a normal linear connection (L^i_{jk}, C^i_{jk}) on TM , one possible choice is, for example, $L^i_{jk} = \frac{\partial N^i_j}{\partial y^k}$ and $C^i_{jk} = 0$. Then the equations of geodesics rewrite

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + L^i_{jk} y^j y^k = 0.$$

Remark. The candidates for a nonlinear connection

$$\tilde{N}^i_l = \frac{h^{ip}}{12} \left(4 \frac{\partial G_{pjkl}}{\partial x^m} - \frac{\partial G_{mjkl}}{\partial x^p} \right) y^m y^j y^k = \gamma^i_{j000},$$

i.e., the coefficients of y^l from the equations of geodesics from (1.10), do not obey the specific component changes; hence they do *not* define a nonlinear connection.

3 Geodesics in the (h, v) -metric context

Let TM be endowed with: a nonlinear connection N , a metric structure

$$G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} \delta y^{(1)i} \otimes \delta y^{(1)j},$$

where the metrics g and g can be specified as in the previous sections. Consider as well a metrical normal linear d -connection D , $D\Gamma(N) = (L^i_{jk}, C^i_{jk})$ ([11]). Then N induces a local adapted basis $\left\{ \frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$, and the dual adapted basis, $\{dx^i, \delta y^i\}$. We denote by $\langle \cdot, \cdot \rangle$ the scalar product defined on TM by G , by $T^{(\gamma)}_{(\beta\alpha)}{}^i{}_{jk}$ the components of the torsion tensor $T(\delta_{\alpha k}, \delta_{\beta j}) = T^{(\gamma)}_{(\beta\alpha)}{}^i{}_{jk} \delta_{\gamma i}$, and by $R^{(\alpha)}_{(\alpha\beta\gamma)}{}^i{}_{jkl}$ the components of the curvature tensor $R(\delta_{\gamma l}, \delta_{\beta k}) \delta_{\alpha j} = R^{(\alpha)}_{(\alpha\beta\gamma)}{}^i{}_{jkl} \delta_{\alpha i}$, where $\delta_{0i} = \frac{\delta}{\delta x^i}$, $\delta_{1i} = \frac{\partial}{\partial y^i}$.

For a curve $c : [0, 1] \rightarrow TM$, $t \mapsto c(t) = (x^i(t), y^{(1)i}(t))$, we consider its velocity $V := V(t) = \dot{c} = V^{(\alpha)i} \delta_{\alpha i}$, where

$$V^{(0)i} = \frac{dx^i}{dt}, \quad V^{(1)i} = \frac{\delta y^{(1)i}}{dt}.$$

The energy of c is

$$E(c) = \int_0^1 \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle dt = \int_0^1 \langle V, V \rangle dt = \int_0^1 g_{ij} V^{(0)i} V^{(0)j} + g_{ij} V^{(1)i} V^{(1)j} dt.$$

Theorem 1 (The first variation of energy). *If $c : [0, 1] \rightarrow TM$, $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \rightarrow TM$ is a variation of c by piecewise smooth curves with fixed ends, and $W = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t)$ is the associated deviation vector field, then the first variation of energy is given by*

$$\frac{1}{2} \frac{dE(\bar{\alpha}(u))}{du} \Big|_{u=0} = - \sum_{i=0}^{k-1} \langle W, \Delta_{t_i} V \rangle + \int_0^1 \langle T(W, V), V \rangle - \langle W, A \rangle dt,$$

where A is the acceleration vector field

$$A = D_{\dot{c}}V = \frac{DV}{dt} = A^{(0)i}\delta_{0i} + A^{(1)i}\delta_{1i}$$

and $\Delta_t X$ is the jump

$$\Delta_t X = X(t_+) - X(t_-), \quad t \in [0, 1], \quad X \in \mathcal{X}(TM).$$

We note that $\langle T(\cdot, V), V \rangle$ defines a 1-form. Hence there exists a vector field F on TM such that $\langle T(W, V), V \rangle = \langle F, W \rangle$. Then, denoting

$$V = V^{(\alpha)i}\delta_{\alpha i}, \quad W = W^{(\beta)j}\delta_{\beta j}, \quad F = \sum_{\alpha=0}^1 F^{(\alpha)i}\delta_{\alpha i}$$

we have $\langle T(W, V), V \rangle = \sum_{\beta=0}^1 g_{jh}^{(\beta)} F^{(\beta)h} W^{(\beta)j}$, and the components of the field F are given by

$$F^{(\alpha)i} = \sum_{\beta, \gamma=0}^1 g^{il} g_{kh}^{(\alpha)} T_{jl}^{(\gamma)k} V^{(\beta)j} V^{(\gamma)h}, \quad \alpha = \overline{0, 1}.$$

Remark. The vector field F does not depend on the chosen variation with fixed endpoints of c .

By replacing F into the expression of the first variation of energy, we get

$$\frac{1}{2} \frac{dE(\bar{\alpha}(u))}{du} \Big|_{u=0} = - \sum_{i=0}^{k-1} \langle W, \Delta_{t_i} V \rangle + \int_0^1 \langle W, F - A \rangle dt.$$

For a smooth curve c on the whole $[0, 1]$ the jumps in the sum cancel and we have

$$\frac{1}{2} \frac{dE(\bar{\alpha}(u))}{du} \Big|_{u=0} = \int_0^1 \langle W, F - A \rangle dt,$$

which means that $u = 0$ is a critical point of E if and only if, along $c = \bar{\alpha}(0)$, we have $F = A$. Consequently we state the following

Theorem 2. Any geodesic $c : [0, 1] \rightarrow TM, t \rightarrow (x^i(t), y^{(1)i}(t))$ of (TM, G) satisfies

$$\frac{D}{dt} \frac{dc}{dt} = F.$$

Then, the smooth curve $c : [0, 1] \rightarrow TM, t \rightarrow (x^i(t), y^{(1)i}(t))$ is a geodesic of TM iff

$$\frac{DV^{(0)i}}{dt} = F^{(0)i}, \quad \frac{DV^{(1)i}}{dt} = F^{(1)i}, \tag{3.1}$$

which rewrites explicitly as

$$\begin{aligned} \frac{dV^{(0)i}}{dt} + L^i_{jk} V^{(0)k} V^{(0)j} + C^i_{jk} V^{(1)k} V^{(0)j} &= \sum_{\beta, \gamma=0}^1 g^{il} g_{kh}^{(\alpha)} T_{jl}^{(\gamma)k} V^{(\beta)j} V^{(\gamma)h} \\ &\quad \substack{(\gamma) \\ (\beta 0)} \\ \frac{dV^{(1)i}}{dt} + L^i_{jk} V^{(0)k} V^{(1)j} + C^i_{jk} V^{(1)k} V^{(1)j} &= \sum_{\beta, \gamma=0}^1 g^{il} g_{kh}^{(\alpha)} T_{jl}^{(\gamma)k} V^{(\beta)j} V^{(\gamma)h}. \\ &\quad \substack{(\gamma) \\ (\beta 1)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Example. In particular, in a Finsler space (M, F) , for $g_{ij} = g_{(0)ij} = g_{(1)ij} = \frac{1}{2}F_{,y^i y^j}^2$ considering the Cartan connection ([11]), we infer that (3.2) rewrite

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{dt} + L^i_{jk} V^{(0)k} V^{(0)j} + C^i_{jk} V^{(1)k} V^{(0)j} &= g^{il} g_{kh} (R^k_{jl} V^{(0)j} V^{(1)h} - P^k_{lj} V^{(1)h} V^{(1)j} - C^k_{lj} V^{(0)h} V^{(1)j}) \\ \frac{dV^{(1)i}}{dt} + L^i_{jk} V^{(0)k} V^{(1)j} + C^i_{jk} V^{(1)k} V^{(1)j} &= g^{il} g_{kh} (P^k_{jl} V^{(0)j} V^{(1)h} + C^k_{jl} V^{(0)j} V^{(0)h}) \end{aligned} \right.$$

Remark. If we consider, instead of a normal linear d-connection (L^i_{jk}, C^i_{jk}) , a (simple) d-connection $(L^i_{jk}, L^a_{bk}, C^i_{jc}, C^a_{bc})$, then the above equations become

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV^{(0)i}}{dt} + L^i_{jk} V^{(0)k} V^{(0)j} + C^i_{jc} V^{(1)c} V^{(0)j} &= F^{(0)i} \\ \frac{dV^{(1)a}}{dt} + L^a_{bk} V^{(0)k} V^{(1)b} + C^a_{bc} V^{(1)c} V^{(1)b} &= F^{(1)a}. \end{aligned} \right.$$

4 The second variation of energy. Deviations of geodesics on TM

Consider as well TM endowed with a nonlinear connection N , a metric structure

$$G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} \delta y^{(1)i} \otimes \delta y^{(1)j}$$

and a normal metrical linear d -connection D , $D\Gamma(N) = (L^i_{jk}, C^i_{jk})$.

Let $c : [0, 1] \rightarrow TM$, $t \mapsto (x^i(t), y^i(t))$ be a geodesic, i.e., c is \mathcal{C}^∞ on the whole $[0, 1]$ and c is a critical point of the energy

$$E = \int_0^1 \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle dt. \tag{4.1}$$

Let $\alpha : U \times [0, 1] \rightarrow TM$ be a 2-parameter variation with fixed endpoints of c by smooth curves on $[0, 1]$, U being a neighbourhood of $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. We have $\alpha(0, 0, t) = c(t)$, $\forall t \in [0, 1]$. Let W_1, W_2 be the induced deviation vector fields

$$W_1(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial u_1}(0, 0, t), \quad W_2(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(0, 0, t),$$

and let $\bar{\alpha}$ be the mapping defined on \bar{U} by

$$\bar{\alpha}(u_1, u_1)(t) = \alpha(u_1, u_2, t), \quad (u_1, u_2, t) \in U \times [0, 1].$$

The Hessian E_{**} of the energy (4.1) is

$$E_{**}(W_1, W_2) = \left. \frac{\partial^2 E(\bar{\alpha}(u_1, u_2))}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{(0,0)}.$$

Let $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(\alpha)i} \delta_{\alpha i}$ be the vector field defined by

$$\left\langle T \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right), \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}, \frac{\partial \alpha}{\partial u_2} \right\rangle,$$

having the local coefficients

$$\mathcal{F}^{(\alpha)i} = \sum_{\beta, \gamma=0}^1 g^{il} g_{kh} T^{(\gamma)k}_{jl} \frac{\partial \alpha^{(\beta)j}}{\partial t} \frac{\partial \alpha^{(\gamma)h}}{\partial t} \Big|_{(u_1, u_2, t)}, \quad \alpha = \overline{0, 1}. \tag{4.2}$$

Extending the results obtained in the Finslerian framework ([4], [7]) to the case of (h, v) -metrics (e.g., as in [13], [6]), we further state the following

Theorem 3 (The second variation of energy). *If $c : [0, 1] \rightarrow TM$ is a geodesic and $\alpha : U \times [0, 1] \rightarrow TM$ (where $\varepsilon > 0$) is a variation with fixed endpoints of c by piecewise smooth curves, then the Hessian E_{**} is given by:*

$$E_{**}(W_1, W_2) = -\sum_{i=1}^{k-1} \langle W_2, \Delta_{t_i} (T(W_1, V) + \frac{DW_1}{dt}) \rangle + \int_0^1 \left\langle W_2, \frac{D\mathcal{F}}{\partial u_1} \Big|_{u_1=u_2=0} + R(V, W_1)V - \frac{D}{dt}T(W_1, V) - \frac{D^2W_1}{dt^2} \right\rangle dt,$$

where $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ is a division of $[0, 1]$ such that α be smooth on each $U \times (t_{i-1}, t_i)$, $i = \overline{1, k}$.

As consequence, if $c : [0, 1] \rightarrow TM$ is a smooth geodesic and $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \rightarrow TM$ ($\varepsilon > 0$) is a variation of c through smooth geodesics, then the deviation vector fields - called also *generalized Jacobi fields*, $W = W^{(\alpha)i} \delta_{\alpha i}$ are given by

$$\frac{D^2W^{(\alpha)i}}{dt^2} + \frac{DT^{(\alpha)i}}{dt} = \frac{D\mathcal{F}^{(\alpha)i}}{du} \Big|_{u=0} + R^i, \quad \alpha = \overline{0, 1}, i = \overline{1, n},$$

where $\mathcal{F}^{(\alpha)i}$ are given by (4.2) and we denoted

$$\begin{cases} T^{(\alpha)i} = \sum_{\beta, \gamma=0}^1 V^{(\beta)j} W^{(\gamma)k} T^{(\alpha)i}_{(\beta\gamma)jk} \\ R^i := -\sum_{\beta, \gamma=0}^1 V^{(\alpha)h} V^{(\beta)j} W^{(\gamma)k} R^{(\alpha)i}_{(\alpha\beta\gamma)hjk} \end{cases}$$

5 Projectability of horizontal geodesics of TM

Let N be an arbitrary nonlinear connection and let (L^i_{jk}, C^i_{jk}) be the coefficients of an arbitrary metrical normal linear d-connection. A curve $c : [0, 1] \rightarrow TM$, $t \rightarrow (x^i(t), y^i(t))$ is a *horizontal geodesic* of TM iff

$$\begin{cases} V^{(1)i} \equiv \frac{dy^i}{dt} + N^i_j y^j = 0 \\ \frac{dV^{(0)i}}{dt} + L^i_{jk} V^{(0)j} V^{(0)k} = g^{il}_{(0)} g_{mh(0)} (L^m_{jl} - L^m_{lj}) V^{(0)j} V^{(0)h} \\ g^{il}_{(1)} g_{mh(0)} C^m_{jl} V^{(0)j} V^{(0)h} = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

The last two equations in (5.1) are obtained from (3.2), in which we have used the relations

$$T^m_{(00)jl} = (L^m_{jl} - L^m_{lj}), \quad T^m_{(01)jl} = C^m_{jl}.$$

We note that we take into account only curves $c : [0, 1] \rightarrow TM$ with $y^i = \frac{dx^i}{dt} = V^{(0)i}$, i.e., *extensions* to TM of curves $t \mapsto x^i(t)$ on M , and we look for conditions for such horizontal

geodesics to project to geodesics of M . For any curve on TM , we have $V^{(0)i} = \frac{dx^i}{dt}$, and hence from (5.1), we infer that the h -geodesics of TM which are extensions of curves of M are locally characterized by

$$\begin{cases} \frac{dy^i}{dt} + N^i_j y^j = 0 \\ \frac{dy^i}{dt} + L^i_{jk} y^j y^k = g^{il} g_{mh} (L^m_{jl} - L^m_{lj}) y^j y^h \\ g^{il} g_{mh} C^m_{jl} y^j y^h = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

We further obtain:

Proposition 4. *Let G^i be the coefficients of the Kern canonical semispray (2.2) of the Lagrangian $L = g_{ij} y^i y^j$. If one of the two following relations holds along any curve $t \rightarrow (x^i(t))$ of M :*

1. $2G^i \left(x, \frac{dx}{dt} \right) = \left(L^i_{jh} - g^{il} g_{mh} (L^m_{jl} - L^m_{lj}) \right) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^h}{dt}$;
2. $2G^i \left(x, \frac{dx}{dt} \right) = N^i_j y^j$;

then any horizontal geodesic of TM projects onto a geodesic of M .

Example. If F is a Finsler metric on M and N is the canonical (Cartan) nonlinear connection of F^2 , given by $N^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}$, then any horizontal curve (including the case of a horizontal geodesic) of TM is projected onto a geodesic of M .

In particular, for $g = g_{(0)}$ and $(N^i_j, L^i_{jk}, C^i_{jk})$ the Cartan connection, both the conditions 1) and 2) in the above Proposition are satisfied. Moreover, the third set of equations (5.2) is satisfied by any curve, and the first and the second one are both equivalent with the equations of geodesics of M . Then in this case, there holds:

Corollary 1 ([1]). *For the canonical Cartan connection and a given extension Γ on TM , we have:*

- a) *If Γ is a horizontal curve then Γ is a horizontal geodesic;*
- b) *Γ is a horizontal curve iff Γ is projectable onto a geodesic of M .*

Acknowledgement. The present work was partially supported by the Grant CNCSIS A1478.

References

- [1] G. S. Asanov, *Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories*, Dordrecht, Reidel, 1985.
- [2] M. Anastasiei, I. Bucătaru, *A notable submersion in higher order geometry*, BJGA 1 (1996), 1, 1–9.
- [3] M. Anastasiei, I. Bucătaru, *Jacobi fields in generalized Lagrange spaces*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 42 (1997), 9–10, 689–695.
- [4] V. Balan, *On geodesics and deviations of geodesics in the fibered Finslerian approach*, Stud. Cerc. Mat., 46, 4 (1994), 415–422.
- [5] V. Balan and N. Brinzei, *Einstein equations for the Berwald-Moore type Euclidean-locally Minkowski relativistic model*, BJGA 11, 2 (2006), 20–26.

- [6] V. Balan and N. Voicu, *Distinguished geodesics and Jacobi fields on first order jet spaces*, CEJM (Central European Journal of Mathematics), electronic, <http://www.cesj.com>, 2 (2004), 2, 1–10.
- [7] V. Balan and P. C. Stavrinou, *Deviations of geodesics in the fibered Finslerian approach*, in vol. of Kluwer Acad. Publ. FTPH no. 76, 1996, 65–74.
- [8] J. Kern, *Lagrange geometry*, Arch. Math. 25 (1974), 438–443.
- [9] S. V. Lebedev, *The Generalized Finslerian metric tensors*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics 2, 4 (2005), 44–50.
- [10] J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1963.
- [11] R. Miron and M. Anastasiei, *Vector Bundles. Lagrange Spaces. Applications in Relativity Theory*, (in Romanian), Ed. Acad. Bucharest, 1987.
- [12] D. G. Pavlov, *Four-dimensional time, Hypercomplex numbers in Geometry and Physics*, Ed. Mozet, Russia, 1, 1 (2004), 31–39.
- [13] N. Voicu, *Deviations of geodesics in the Geometry of second order* (in Romanian), Ph. D. Thesis, "Babes-Bolyai" Univ., Cluj-Napoca, 2003.

THE LAGRANGIAN-HAMILTONIAN FORMALISM IN GAUGE COMPLEX FIELD THEORIES

Gheorghe Munteanu

Faculty of Mathematics and Informatics, Transylvania Univ. of Braşov, Romania
gh.munteanu@unitbv.ro

An introduction in the study of gauge field theory in terms of complex Finsler geometry on the total space of a G -complex vector bundle E was made by us in [Mu2]. Here we briefly recall the obtained results and similar notions are investigated on the dual bundle E^* by complex Legendre transformation (the \mathcal{L} -dual process).

The complex field equations are determined with respect to a gauge complex vertical connections. The complex Hamilton equations are written for the general \mathcal{L} -dual Hamiltonian obtained as a sum of particle Hamiltonian, Yang-Mills and Hilbert-Einstein Hamiltonians.

1 Introduction

Gauge theory is called to use the differential geometric methods in order to describe the interactions of fields over a certain symmetry group G .

For initial Yang-Mills gauge theory the Lagrangians had strict local gauge symmetry. After introducing the spontaneously symmetry breaking and Higgs mechanism usually the gauge group is of complex matrices and the gauge Lagrangians are defined over a complexified G -bundle, for instance the Klein-Gordon Lagrangian, Higgs particle Lagrangian or complex fermion-gravitation, etc.. These Lagrangians act on the first order jet manifold, which plays the role of a finite dimensional configuration space of fields. By Legendre morphism, intrinsically related to a Lagrange manifold is the multimomentum Hamiltonian ([Ar, Sa]...) which works on the corresponding phase manifold (the dual G -bundle). Although in Quantum Mechanics the Lagrangian and Hamiltonian formalism is a usual technique, in the gauge field theory it remains almost unknown, especially for the complex situation.

In the present paper, our goal is to introduce a gauge complex field theory in terms of complex Lagrange and Hamilton geometries, [Mu3], extended to an associated fiber of one complex bundle and respectively to its dual bundle.

In the first section, we briefly introduce the geometric machinery which characterizes these geometries and then we study the gauge invariance of the main geometric presented objects.

In the next section we recall from [Mu2] the basic notions concerning the complex Euler-Lagrange field equations and the complex gauge invariant Lagrangian for field particle, complex Yang-Mills and Hilbert-Einstein Lagrangians are also written. In the final we translate by complex Legendre transformation the studied results on the dual bundle, and thus we obtain the complex Hamilton field equations and the \mathcal{L} -dual Hamiltonians.

2 The geometric background

In [Mu3], we make an exhaustive study of complex Lagrange (particularly Finsler) and Hamilton (Cartan) spaces, which have as a base manifold the holomorphic tangent respectively cotangent bundles of a complex manifold M .

Part of the notions studied in this book can extend to a G -complex vector bundle, and here we do this. By this way, since the extension is natural, we will omit the proofs. For more details in this part see the introductory paper [Mu2].

Let M be a complex manifold, $(z^k)_{k=\overline{1,n}}$ complex coordinates in a local chart $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\pi : E \rightarrow M$ a complex vector bundle of \mathbb{C}^m fiber, and $\eta = \eta^a s_a$ a local section on E , $a = \overline{1,m}$. Consider G a closed m -dimensional Lie group of complex matrices, whose elements are holomorphic functions over M .

Definition 2.1 *A structure of G -complex vector bundle of E is a fibration with transition functions taking values in G .*

This means that if $z'^i = z'^i(z)$ is a local change of charts on M , then the section η changes by the rule

$$z'^i = z'^i(z) ; \quad \eta'^a = M_b^a(z) \eta^b , \tag{2.1}$$

where $M_b^a(z) \in G$ and $\partial M_b^a(z) / \partial z^k = 0$ for any $a, b = \overline{1,m}$ and $k = \overline{1,n}$.

E has a natural structure of $(n + m)$ -complex manifold, a point of E is designed by $u = (z^k, \eta^a)$.

The geometry of E manifold (the total space), endowed with a Hermitian metric $g_{a\bar{b}} = \partial^2 L / \partial \eta^a \partial \bar{\eta}^b$ derived from a homogeneous Lagrangian $L : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, was intensively studied by T. Aikou ([Ai1, Ai2, Ai3, Mu3]). Let us consider the vertical bundle $VE = \ker \pi^T \subset T'E$. A local base for its sections is $\{\dot{\partial}_a := \frac{\partial}{\partial \eta^a}\}_{a=\overline{1,m}}$ and from (2.1) we have the changes $\dot{\partial}_a = M_b^a(z) \dot{\partial}'_b$. The vertical distribution $V_u E$ is isomorphic to the sections module of E in u .

A supplementary subbundle of VE in $T'E$, i.e. $T'E = VE \oplus HE$, is called a *complex nonlinear connection*, in brief (*c.n.c.*). A local base for the horizontal distribution $H_u E$, called *adapted* for the (*c.n.c.*), is $\{\delta_k := \frac{\delta}{\delta z^k} = \frac{\partial}{\partial z^k} - N_k^a \frac{\partial}{\partial \eta^a}\}_{k=\overline{1,n}}$, where $N_k^a(z, \eta)$ are the coefficients of the (*c.n.c.*). Locally $\{\delta_k\}$ defines an isomorphism of $\pi^T(T'M)$ with HE if and only if they are changed under the rules $\delta_k = \frac{\partial z'^j}{\partial z^k} \delta'_j$ and hence N_k^a obey a certain rule of transformation.

Definition 2.2 *A gauge complex transformation on G -complex vector bundle E , is a pair $\Upsilon = (F_0, F_1)$, where locally $F_1 : E \rightarrow E$ is an F_0 -holomorphic isomorphism which satisfies $\pi^T \circ F_1 = F_0 \circ \pi^T$.*

A gauge complex transformation $\Upsilon : u \rightarrow \tilde{u}$ is locally given by a system of analytic functions:

$$\tilde{z}^i = X^i(z) ; \quad \tilde{\eta}^a = Y^a(z, \eta) \tag{2.2}$$

with the regularity condition: $\det \left(\frac{\partial X^i}{\partial z^j} \right) \cdot \det \left(\frac{\partial Y^a}{\partial \eta^b} \right) \neq 0$.

Let be $X_j^i := \frac{\partial X^i}{\partial z^j}$ and $Y_b^a := \frac{\partial Y^a}{\partial \eta^b}$; and denote by $X_j^{\bar{i}}, Y_b^{\bar{a}}$ their conjugates.

Obviously, from the holomorphy requirements we have $X_j^{\bar{i}} = \frac{\partial X^{\bar{i}}}{\partial z^j} = 0$ and $Y_j^a = \frac{\partial Y^a}{\partial z^j} = 0, Y_b^{\bar{a}} = \frac{\partial Y^{\bar{a}}}{\partial \bar{\eta}^b} = 0$.

A (*c.n.c.*) is said to be gauge, (*g.c.n.c.*), if the adapted frames transforms into d -complex gauge fields, i.e. in addition to $\delta_k = \frac{\partial z'^j}{\partial z^k} \delta'_j$ we have

$$\delta_j = X_j^i \delta'_i ; \quad \dot{\partial}_b = Y_b^a \dot{\partial}'_a , \tag{2.3}$$

where $\delta'_i = \frac{\delta}{\delta z^i}$ and $\dot{\partial}'_a = \frac{\partial}{\partial \eta^a}$.

Let us consider now the dual G -bundle $\pi^* : E^* \rightarrow M$ of the G -bundle E . Likewise as above, E^* has a natural structure of complex manifold, a point is denoted by $u^* = (z^k, \zeta_a)$, $k = \overline{1,n}$ and $a = \overline{1,m}$, with the following change of charts,

$$z'^i = z'^i(z) ; \quad \zeta'_a = M_a^b(z) \zeta_b \tag{2.4}$$

where M_a^b is the inverse of M_a^b from (2.1).

By a similar way as for E manifold, we consider $T'E^*$ the holomorphic tangent bundle of E^* and $\{\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \zeta_a}\}$ a base for $T_{u^*}E^*$. Then $\{\dot{\partial}^a := \frac{\partial}{\partial \zeta_a}\}_{a=\overline{1,m}}$ will be a base for the sections in the vertical bundle $VE^* = \ker \pi^{*T}$ and theret follows the changes $\dot{\partial}^a = M_b^a \dot{\partial}^b$. A (c.n.c) on E^* is defined by a decomposition $T'E^* = VE^* \oplus HE^*$. The local base for the horizontal distribution $H_{u^*}E^*$ will be denoted by $\{\delta_k^* := \frac{\delta^*}{\delta z^k} = \frac{\partial}{\partial z^k} + N_{ak} \frac{\partial}{\partial \zeta_a}\}_{k=\overline{1,n}}$ and will be called adapted for the (c.n.c.) if $\delta_k^* = \frac{\partial z'^j}{\partial z^k} \delta_j^*$.

A complex gauge transformation on E^* is defined by a pair $\Upsilon = (F_0^*, F_1^*)$, where locally $F_1^*: E^* \rightarrow E^*$ is an F_0^* -holomorphic isomorphism which satisfies $\pi^{*T} \circ F_1^* = F_0^* \circ \pi^{*T}$.

The local expression of a complex gauge transformation on E^* is:

$$\tilde{z}^i = X^i(z) ; \quad \tilde{\zeta}_a = Y_a(z, \zeta) \tag{2.5}$$

with the regularity isomorphism condition assumed.

Let be $X_j^i := \frac{\partial X^i}{\partial z^j}$ and $Y_a^b := \frac{\partial Y_a}{\partial \zeta_b}$; then obviously, from the holomorphy requirements, we have $X_j^i = \frac{\partial X^i}{\partial \bar{z}^j} = 0$ and $Y_{a\bar{j}} = \frac{\partial Y_a}{\partial \bar{z}^j} = 0$; $Y_a^{\bar{b}} = \frac{\partial Y_a}{\partial \zeta_b} = 0$.

The various d -geometric objects on E^* are defined in complete analogy with those defined by us on E .

A (c.n.c.) on E^* is gauge, in brief it is (g.c.n.c.), if its adapted frames transform by the rules

$$\delta_j^* = X_j^i \delta_i^* ; \quad \dot{\partial}^a = Y_b^a \dot{\partial}^{\bar{b}} , \tag{2.6}$$

where $\delta_i^* = \frac{\delta^*}{\delta \bar{z}^i}$ and $\dot{\partial}^{\bar{a}} = \frac{\partial}{\partial \zeta_a}$.

Now, let us consider $L : E \rightarrow \mathbb{R}$ a complex regular Lagrangian, that is the function $L(z, \eta)$ defines a metric tensor $g_{a\bar{b}} = \partial^2 L / \partial \eta^a \partial \bar{\eta}^b$ which is Hermitian, $g_{a\bar{b}} = \overline{g_{b\bar{a}}}$ and $\det(g_{a\bar{b}}) \neq 0$ in any point $u = (z, \eta)$ of E . By $g^{\bar{b}a}$ is denoted its inverse metric tensor. The following weighty result was proved in [Mu2]

Proposition 2.1 *If $L(z, \eta)$ is a gauge invariant Lagrangian on E , i.e. $L(z, \eta) = L(\tilde{z}, \tilde{\eta})$, then*

$$N_k^a = g^{\bar{b}a} \frac{\partial^2 L}{\partial z^k \partial \bar{\eta}^b} \tag{2.7}$$

is a (g.c.n.c.).

A fundamental notion in our study is that of d -complex vertical connection on E . The metric tensor $g_{a\bar{b}}$ determines a metric Hermitian structure $\mathbf{G} = g_{a\bar{b}} d\eta^a \otimes d\bar{\eta}^b$ on the vertical bundle VE . The connection form of a d -complex vertical connection D is written according to (7.2.4) from [Mu3] as follows

$$\omega_b^a = L_{bk}^a dz^k + L_{b\bar{k}}^a d\bar{z}^k + C_{bc}^a \delta \eta^c + C_{b\bar{c}}^a \delta \bar{\eta}^c , \tag{2.8}$$

where $(dz^k, \delta \eta^c = d\eta^c + N_k^c dz^k)$ is the dual adapted base of the (c.n.c.) and $(L_{bk}^a, L_{b\bar{k}}^a, C_{bc}^a, C_{b\bar{c}}^a)$ are the coefficients of the vertical connection D .

From the general theory of Hermitian connection it result a unique metrical Hermitian connection with respect to \mathbf{G} and of (1,0)-type, called the *Chern-Lagrange complex connection*, which can be obtained by the same technique as we did for the $T'M$ bundle (Corollary 5.1.1, [Mu3]):

$$\overset{CL}{L_{bk}^a} = g^{\bar{d}a} \delta_k g_{b\bar{d}} ; \quad \overset{CL}{L_{b\bar{k}}^a} = 0 ; \quad \overset{CL}{C_{bc}^a} = g^{\bar{d}a} \dot{\partial}_c g_{b\bar{d}} ; \quad \overset{CL}{C_{b\bar{c}}^a} = 0. \tag{2.9}$$

A simplification presents a special partial complex connection (cf. [Ai2, Ai3]), called the *complex Bott connection*, which is not metrical but has a very simple expression

$$D_X Y = v[X, Y], \quad \forall X \in HE, \quad Y \in VE.$$

From the calculus of the Lie brackets, see (7.1.10) in [Mu3], it results that the connection form of the complex Bott connection is

$$\omega_b^a = L_{bk}^a dz^k, \quad \text{where} \quad L_{bk}^a = \frac{\partial N_k^a}{\partial \eta^b}.$$

The unique nonzero component of the complex Bott connection on E is

$$\Omega_b^a = R_{bi\bar{j}}^a dz^i \wedge d\bar{z}^j \quad \text{with} \quad R_{bi\bar{j}}^a = -\delta_{\bar{j}}^i L_{bi}^a, \quad (2.10)$$

while the nonzero components of complex Chern-Lagrange connection are more numerous. For this reason the complex Bott connection is an appropriate connection for our approach.

A complex vertical connection determines the following derivative laws on VE :

$$\begin{aligned} \overset{h}{D}_{\delta_k} \dot{\partial}_b &= L_{bk}^a \dot{\partial}_a; & \overset{\bar{h}}{D}_{\delta_{\bar{k}}} \dot{\partial}_b &= L_{b\bar{k}}^a \dot{\partial}_a; \\ \overset{v}{D}_{\dot{\partial}_c} \dot{\partial}_b &= C_{bc}^a \dot{\partial}_a; & \overset{\bar{v}}{D}_{\dot{\partial}_{\bar{c}}} \dot{\partial}_b &= C_{b\bar{c}}^a \dot{\partial}_a. \end{aligned}$$

The covariant derivatives of a vertical field $\Phi = \Phi^a \frac{\partial}{\partial \eta^a}$ will be denoted with $\Phi_{|k}^a$, $\Phi_{|\bar{k}}^a$ and $\Phi_{|c}^a$, $\Phi_{|\bar{c}}^a$, where

$$\begin{aligned} \Phi_{|k}^a &= \delta_k^a \Phi^a + L_{bk}^a \Phi^b; & \Phi_{|\bar{k}}^a &= \delta_{\bar{k}}^a \Phi^a + L_{b\bar{k}}^a \Phi^b; \\ \Phi_{|c}^a &= \dot{\partial}_c \Phi^a + C_{bc}^a \Phi^b; & \Phi_{|\bar{c}}^a &= \dot{\partial}_{\bar{c}} \Phi^a + C_{b\bar{c}}^a \Phi^b. \end{aligned} \quad (2.11)$$

If D is a gauge invariant connection, because δ_k , $\dot{\partial}_c$ and $\delta_{\bar{k}}$, $\dot{\partial}_{\bar{c}}$ are gauge invariant, we may conclude that these covariant derivatives are gauge invariant as long as Φ is gauge invariant.

On E^* manifold we may introduce the similar d -complex connections with respect to a metric tensor derived from a regular Hamiltonian.

A regular complex Hamiltonian is a real valued function $H : E^* \rightarrow \mathbb{R}$ such that $h^{\bar{b}a} = \partial^2 H / \partial \zeta_a \partial \bar{\zeta}_b$ defines a Hermitian metric tensor on E^* , i.e. $\overline{h^{\bar{b}a}} = h^{\bar{a}b}$ and $\det(h^{\bar{b}a}) \neq 0$ on E^* . Let $h_{a\bar{b}}$ be its inverse. A regular complex Hamiltonian determines a metric Hermitian structure on the vertical bundle VE^* , defined by $\mathbf{H} = h^{\bar{b}a} d\zeta_a \otimes d\bar{\zeta}_b$. In completely analogy with the result on E we check

Proposition 2.2 *Let $H(z, \zeta)$ be a complex gauge invariant Hamiltonian on E^* , i.e. $H(z, \zeta) = H(\tilde{z}, \tilde{\zeta})$. Then,*

$$N_{ak} = -h_{a\bar{b}} \frac{\partial^2 H}{\partial z^k \partial \bar{\zeta}_b} \quad (2.12)$$

is a (g.c.n.c.) on E^* .

With respect to adapted frames of (2.12) (c.n.c.) a d -vertical connection on VE^* is denoted by $\overset{*}{D}$ and has the following components,

$$\begin{aligned} \overset{h^*}{D}_{\delta_k^*} \dot{\partial}^a &= H_{bk}^a \dot{\partial}^b; & \overset{\bar{h}^*}{D}_{\delta_{\bar{k}}^*} \dot{\partial}^a &= H_{b\bar{k}}^a \dot{\partial}^b; \\ \overset{v^*}{D}_{\dot{\partial}_c^*} \dot{\partial}^a &= C_b^{ac} \dot{\partial}^b; & \overset{\bar{v}^*}{D}_{\dot{\partial}_{\bar{c}}^*} \dot{\partial}^a &= C_b^{a\bar{c}} \dot{\partial}^b \end{aligned}$$

and their conjugates by $\overline{D_X Y} = D_{\bar{X}} \bar{Y}$.

It results that its connection form is

$$\omega_b^a = H_{bk}^a dz^k + H_{b\bar{k}}^a d\bar{z}^k + C_b^{ac} \delta\zeta_c + C_b^{a\bar{c}} \delta\bar{\zeta}_c, \tag{2.13}$$

with respect again to the dual adapted frame of the (2.12) (*c.n.c.*).

There exists a unique metric connection with respect to the Hermitian structure \mathbf{H} on VE^* which is of $(1, 0)$ -type,

$$\overset{CH}{H}_{bk}^a = h^{\bar{d}a} \delta_k^* h_{b\bar{d}}; \quad \overset{CH}{H}_{b\bar{k}}^a = 0; \quad \overset{CH}{C}_b^{ac} = -h_{b\bar{d}} \dot{\partial}^c h^{\bar{d}a}; \quad \overset{CH}{C}_b^{a\bar{c}} = 0, \tag{2.14}$$

called the *complex Chern-Hamilton vertical connection*.

A partial vertical connection of Bott type on VE^* is given by the vertical part of the bracket, $\overset{*B}{D}_X Y = v[X, Y]$, $\forall X \in HE^*$, $Y \in VE^*$, and has the following connection form

$$\omega_b^a = \overset{B}{H}_{bk}^a dz^k, \quad \omega_{\bar{b}}^a = \overset{B}{L}_{b\bar{k}}^a d\bar{z}^k, \quad \text{where} \quad \overset{B}{H}_{bk}^a = \frac{\partial N_{bk}}{\partial \zeta_a}. \tag{2.15}$$

The unique nonzero component of the complex Bott connection on E^* is

$$\Omega_b^a = \overset{*}{R}_{b\bar{i}\bar{j}}^a dz^i \wedge d\bar{z}^j \quad \text{with} \quad \overset{*}{R}_{b\bar{i}\bar{j}}^a = -\delta_{\bar{j}}^B H_{bi}^a. \tag{2.16}$$

If H is a gauge invariant Hamiltonian, then both complex Chern-Hamilton and Bott connection on VE^* are gauge invariant. The proof derives from the fact that $h^{\bar{b}a}$ and N_{bk} given by (2.12) are gauge invariant and δ_k^* , $\dot{\partial}^a$ are gauge adapted frames.

The sections of VE^* are 1-forms, $\Phi = \Phi_a(z, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta_a} = \Phi_a \dot{\partial}^a$. Then a vertical connection $\overset{*}{D}$ on VE^* induces covariant derivatives which act under the section Φ as follows

$$\begin{aligned} \Phi_{a|k} &= \delta_k^* \Phi_a + H_{ak}^b \Phi_b; & \Phi_{a|\bar{k}} &= \delta_{\bar{k}}^* \Phi_a + H_{a\bar{k}}^b \Phi_b; \\ \Phi_{a|c} &= \dot{\partial}^c \Phi_a - C_a^{bc} \Phi_b; & \Phi_{a|\bar{c}} &= \dot{\partial}^{\bar{c}} \Phi_a - C_a^{b\bar{c}} \Phi_b. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Now, we recall that in [Mu3] a Lagrangian-Hamiltonian formalism was introduced for the holomorphic tangent bundle $T'M$ by using a complex Legendre morphism. We proved that by complex Legendre transformation (the \mathcal{L} -dual process) the image of a complex Lagrange space is (at least locally) a complex Hamilton space. The complex Legendre transformation pushes-forward and its inverse pulls-back the various described geometric objects of a complex Lagrange space and complex Hamilton space, respectively.

Without more other details we can reproduce here, generalizing the $T'M$ case, the process of \mathcal{L} -duality for the pairs (E, L) and (E^*, H) . Let us consider L a local Lagrangian on $U \subset E$. Then the map $\Lambda : U \subset E \rightarrow \bar{U}^* \subset \bar{E}^*$

$$\Lambda : (z^k, \eta^a) \rightarrow \left(z^k, \bar{\zeta}_a = \frac{\partial L}{\partial \eta^a} \right) \tag{2.18}$$

is a local diffeomorphism. Since the sections of VE are identified with those of E , we can extend Λ to the open set of VE . By conjugation, the local diffeomorphism $\Lambda \times \bar{\Lambda}$ sends the sections of the complexified bundle $VE \times \overline{VE}$ into sections of $VE^* \times \overline{VE^*}$. This (local) morphism will be called the *complex Legendre transformation*, briefly (*c.L.t.*).

Then, locally the function

$$H = \zeta_a \eta^a + \bar{\zeta}_a \bar{\eta}^a - L \tag{2.19}$$

defines a regular (local) Hamiltonian on E^* .

By the inverse $\Lambda^{-1} : \bar{U}^* \rightarrow U$, $\Lambda^{-1} : (z^k, \bar{\zeta}_a) \rightarrow (z^k, \eta^a = \frac{\partial H}{\partial \bar{\zeta}_a})$, from a Hamiltonian structure on E^* a Lagrangian structure on E is obtained.

The properties obtained by (c.l.t) are called \mathcal{L} -dual one to other. Like in [Mu3], in the following with "*" will be designed the image of an object by Λ and with "o" their image by Λ^{-1} . Some of the assertions of § 6.7 from [Mu3] can be easily translated in our framework. For instance, in virtue of (2.19) we have

Proposition 2.3 *The unique pair of (c.n.c.) on VE and respective on VE^* which correspond by \mathcal{L} -duality is given by (2.7) and (2.12). Moreover, if L is gauge invariant Lagrangian then both of these (c.n.c.) are gauge invariant.*

Further, simple calculus proves that

Proposition 2.4 *The following equalities hold by \mathcal{L} -duality:*

- i) $(\frac{\delta}{\delta z^k})^* = \frac{\delta^*}{\delta z^k}$; $(\frac{\partial}{\partial \eta^a})^* = h_{ab} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_b}$; $(\frac{\delta^*}{\delta z^k})^o = \frac{\delta}{\delta z^k}$; $(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_a})^o = g_{ab} \frac{\partial}{\partial \eta^b}$
- ii) $(dz^k)^* = d^* z^k$; $(\delta \eta^a)^* = h^{\bar{b}a} \delta \bar{\zeta}_b$; $(d^* z^k)^o = dz^k$; $(\delta \bar{\zeta}_a)^o = g_{ab} \delta \eta^b$
- iii) $(\mathbf{G})^* = \mathbf{H}$ and $(\mathbf{H})^o = \mathbf{G}$.

If D is a metrical connection, then its dual $(D)^*$ is metrical too, moreover their curvatures correspond by \mathcal{L} -duality, $(R(X, Y)Z)^* = \overset{*}{R}(X^*, Y^*)Z^*$. We note that the image by \mathcal{L} -duality of the complex Bott connection is not the complex Bott connection on E^* . However, we shall use both of these connections for their simple expressions and convenience in calculus.

We end this section with a remark. With respect to adapted frames of the \mathcal{L} -dual (2.7) and (2.12) (c.n.c.) we can consider the almost symplectic forms ω and θ , \mathcal{L} -dual one to other, $\theta = (\omega)^*$,

$$\omega = g_{ab} \delta \eta^a \wedge \delta \bar{\eta}^b; \quad \theta = h^{\bar{b}a} \delta \bar{\zeta}_a \wedge \delta \bar{\zeta}_b. \quad (2.20)$$

3 The Euler-Lagrange complex field equations

Let E be a G -complex vector bundle over M . From physical point of view a section of E is treated as a field particle. The field particle dynamics assumes to consider the variation of a Lagrangian particle $L_p : E \rightarrow \mathbb{R}$, which is a first order differential operator over the sections of E . This is $L_p = L_p(j_1 \Phi)$, where $\Phi = \Phi^a s_a$ is a section and $j_1 \Phi$ its first jet. Enlarge this is, $\hat{L}_p(\Phi) = L_p(\Phi^a, \partial_i \Phi^a, \partial_{\bar{i}} \Phi^a, \partial_b \Phi^a, \partial_{\bar{b}} \Phi^a)$ where $\partial_i = \frac{\partial}{\partial z^i}$, $\partial_{\bar{b}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^b}$.

The field equations imply to find the particle Φ from the variational principle $\delta \mathcal{A} = \frac{d}{dt} |_{t=0} \mathcal{A}(\Phi + t \delta \Phi)$, where $\mathcal{A}(\Phi) = \int \hat{L}_p(\Phi)$ is the action integral. Actually, the action integral is defined on a compact subset $\theta \subset E$ and, for the independence of the integral at the changes of local charts, instead of $\hat{L}_p(\Phi)$ we consider the Lagrangian density $\mathcal{L}_p(\Phi) = \hat{L}_p(\Phi) |g|^2$, where $|g| = |\det g_{ab}|$ and $g_{ab} = \partial^2 L_p / \partial \eta^a \partial \bar{\eta}^b$ (since L_p depends on (z, η) by means of Φ). In the following the regularity condition for L_p will be assumed.

The problem of solutions for the field equations is one difficult, first because the chosen Lagrangian needs to be one gauge invariant (by means of Φ and its derivatives). Then the derivations in field equations are with respect to the natural frames $\partial_i, \partial_{\bar{b}}$ which, for a gauge invariant expression of the field equations, need to be replaced with the adapted frames of one (g.c.n.c.), i.e. $\partial_i = \delta_i + N_i^a \partial_a$. Such a way was followed in [Mu1] in order to obtain the gauge invariant field equations on $T'M$. The modern gauge field theories is based on the "minimal replacement" principle ([Bl, DM, Pa]...), which is nothing but a generalization of Einstein's covariance principle.

The minimal replacement principle consists in replacement in $L_p(\Phi^a, \partial_i \Phi^a, \partial_{\bar{i}} \Phi^a, \dot{\partial}_i \Phi^a, \dot{\partial}_{\bar{i}} \Phi^a)$ partial derivatives with covariant derivatives of a gauge invariant vertical connection, possible the complex Bott connection. At the first glance this seems to be a notational process, but it is a more subtle idea. The connection becomes a dynamical variable which joints mechanics with the geometry of the space. Thus we will study the variation of the action for the Lagrangian $L_p(\Phi, D\Phi)$. But for the beginning let us introduce, as in standard theory, the (complex) currents on E :

$$J(\Phi, D\Phi) \wedge \delta\omega := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{L}(\Phi, D\Phi + t\delta\omega) \tag{3.1}$$

where $\delta\omega$ is a variation for the connection form of D connection.

Direct calculus in (2.2) yields the following complex currents:

$$J_a^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{|i}^a} ; \quad \bar{J}_a^{\bar{i}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{|\bar{i}}^a} ; \quad J_a^b = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{|b}^a} ; \quad \bar{J}_a^{\bar{b}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{|\bar{b}}^a} \tag{3.2}$$

which implicitly contain the following components

$$J_a^{ib} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_{bi}^a} ; \quad \bar{J}_a^{\bar{i}\bar{b}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_{\bar{b}\bar{i}}^a} ; \quad J_a^{cb} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{bc}^a} ; \quad \bar{J}_a^{\bar{c}\bar{b}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{\bar{b}\bar{c}}^a} .$$

Now, let us focus attention to the variation of the action integral, $\delta \mathcal{A}(\Phi) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\theta} \mathcal{L}(\Phi, D\Phi + t\delta\omega) = 0$. This implies

$$\int_{\theta} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a} \delta \Phi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{|i}^a} \delta(\Phi^a_{|i}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{|\bar{i}}^a} \delta(\Phi^a_{|\bar{i}}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{|b}^a} \delta(\Phi^a_{|b}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{|\bar{b}}^a} \delta(\Phi^a_{|\bar{b}}) \right\} = 0.$$

Further, for instance the calculus of the second term involves

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{|i}^a} \delta(\Phi^a_{|i}) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{|i}^a} \frac{\partial}{\partial z^i} (\delta \Phi^a) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{|i}^a} \delta(L_{bi}^a \Phi^b) = \\ &= \frac{\partial}{\partial z^i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{|i}^a} \delta(\Phi^a) \right) - \frac{\partial}{\partial z^i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{|i}^a} \right) (\delta \Phi^a) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{|i}^a} \delta(L_{bi}^a \Phi^b) \end{aligned}$$

and analogously for the other terms. If we assume a nul variation on the boundary of θ , then finally for the variation of the integral action we obtain

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a} = \frac{\partial}{\partial z^i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{|i}^a} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\bar{i}}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{|\bar{i}}^a} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta^b} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{|b}^a} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^{\bar{b}}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{|\bar{b}}^a} \right) - \langle J, \delta\omega \rangle ,$$

where, $\langle J, \delta\omega \rangle = \int_{\theta} \{ J_a^i \delta(L_{bi}^a \Phi^b) + \bar{J}_a^{\bar{i}} \delta(L_{\bar{b}\bar{i}}^a \Phi^b) + J_a^c \delta(C_{bc}^a \Phi^b) + \bar{J}_a^{\bar{c}} \delta(C_{\bar{b}\bar{c}}^a \Phi^b) \} .$

Taking into account the (2.3) expressions of the complex currents, in adapted frames of the (2.7) (*c.n.c.*) the previous field equations are written

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a} = \delta_i J_a^i + \delta_{\bar{i}} \bar{J}_a^{\bar{i}} + \dot{\partial}_b J_a^b + \dot{\partial}_{\bar{b}} \bar{J}_a^{\bar{b}} + N_i^b \dot{\partial}_b J_a^i + N_{\bar{i}}^{\bar{b}} \dot{\partial}_{\bar{b}} \bar{J}_a^{\bar{i}} - \langle J, \delta\omega \rangle . \tag{3.3}$$

The (2.4) equations, for $a = \overline{1, m}$, will be called the *complex field equations* of the particle Φ .

The gauge invariance of the Lagrangian L_p , with respect to particle Φ and their covariant derivatives, implies the gauge invariance of the complex currents and consequently the gauge invariance of (2.4) complex field equations. Certainly, everywhere we take in discussion a gauge invariant vertical connection D , particularly the complex Chern-Lagrange or Bott connections.

For the existence of a such gauge invariant particle Lagrangian subsequently we propose a particle Lagrangian of Klein-Gordon type, quite generalized and adequate for various field applications. For this purpose we consider a pair of Hermitian metrics, one being the Lorentz metric $\gamma_{i\bar{j}}(z)$ on the complex world manifold M . The second is a mass Hermitian metric $\gamma_{a\bar{b}}(z, \eta)$ on E , derived from the matter field Lagrangian $L_m = m_{a\bar{b}}\Phi^a\bar{\Phi}^b$ ($m_{a\bar{b}}$ the Hermitian mass matrix). In the last period one Finsler-Minkowski metric kick up some interest in applications of Finsler geometry in relativity, namely the Berwald-Moor metric. We can propose instead of L_m the following complex version of Berwald-Moor metric $L_{BM} = \{\prod_a(\eta^a\bar{\eta}^a)\}^{\frac{1}{m}}$. If we wish to connect our field theory with other, a good choose instead of mass metric is one derived from an external Lagrangian with physical meaning, for instance an Antonelly-Shimada complex Lagrangian $L_{AS} = e^{2\sigma(z)}\{\sum_a(\eta^a\bar{\eta}^a)^m\}^{\frac{1}{m}}$ (see [Mu3]), with applications in biology and relativistic optics. However, each of these last complex Lagrangians could be of interest for complex Finsler geometry.

The Hermitian metric $\gamma_{a\bar{b}}$ determines the (2.7) (*c.n.c.*) and its adapted frames. Then, a gauge invariant Lagrangian with respect to a complex vertical connection D and a real valued potential function $V(\Phi)$ can be

$$L_p(\Phi, D\Phi) = \frac{1}{2} \sum_a \{ \gamma^{\bar{j}i} D_{\delta_i} \Phi^a D_{\delta_j} \bar{\Phi}^a + \gamma^{\bar{b}c} D_{\delta_c} \Phi^a D_{\delta_b} \bar{\Phi}^a \} + V(\Phi). \quad (3.4)$$

Note that L_p contains informations about matter field by means of $\gamma_{a\bar{b}}$ and by covariant derivatives of the field. $V(\Phi)$ is a potetial fuctions which, for instance, can be considered as beeing $V(\Phi) = \mp m^2 \|\Phi\|^2 - \frac{1}{4} \|\Phi\|^4$, with $\|\Phi\|^2 = \sum_a \Phi^a \bar{\Phi}^a$, for the exact symmetry or for the broken symmetry, respectively.

As we already know from the classical field theory, this particle Lagrangian $L_p(\Phi, D\Phi)$ is not able, quite so in a generalized form, to offer a solid physical theory because it does not contain enough the geometrical aspects of the space (curvature, etc.). For this purpose, in the generalized Maxwell equations the total Lagrangian of electrodynamics is taken in the form:

$$L_e(\Phi, D\Phi) = L_p(\Phi, D\Phi) + L_{YM}(D), \quad (3.5)$$

where

$$L_{YM}(D) = -\frac{1}{2} \Omega \wedge * \Omega \quad (3.6)$$

is a connection Lagrangian, Ω being the curvature form of D and $*\Omega$ is its Hodge dual.

For the complex Bott connection on E we obtain

$$L_{YM}(\overset{B}{D}) = -\frac{1}{2} \sum_{a,b} \gamma^{\bar{j}i} \gamma^{\bar{k}l} R_{bi\bar{j}}^a R_{bl\bar{k}}^a.$$

The curvature form of Chern-Lagrange connection is a bit complicate hence we renounce to apply here.

Since, $\delta_D \mathcal{A}_e(\Phi, D\Phi) = \delta_D \mathcal{A}_p(\Phi, D\Phi) + \delta_D \mathcal{A}_{YM}(D)$, and $\delta_D \mathcal{A}_p(\Phi, D\Phi) = - \langle J, \delta\omega \rangle = - \langle \delta\omega, *J \rangle$ ($*J$ is the dual form current), a computation like in [Pa], yields for the complex Bott connection that $\delta_D \mathcal{A}_{YM}(D) = \langle \delta\omega, *D^*\Omega \rangle$. Hence, for the complex Bott connection we have that $D^*\Omega = *J$, or else

$$\delta_k \Omega_b^a + L_{ck}^a \Omega_b^c - L_{bk}^c \Omega_c^a = *J_{kb}^a, \quad (3.7)$$

this generally being called the *complex Yang-Mills equation* on E .

Also we can check that $D^*J = 0$ (the same calculus like for formulae (6.7) from [DM]) and therefore the complex currents are conservative. We note that in this complex Y-M equation the curvature form of Bott connection contains implicitly the Hermitian metric tensor $g_{a\bar{b}} = \partial^2 L_p / \partial \eta^a \partial \bar{\eta}^b$ of the particle Lagrangian.

Finally, for coupling with gravity we again consider the Lorentz Hermitian metric $\gamma_{i\bar{j}}(z)$ on M , which now we assume it derives from a gravitational potential, and $\mathcal{G} = \gamma_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j + g_{a\bar{b}} \delta \eta^a \wedge \delta \bar{\eta}^b$ a metric structure on $T_C E$.

By $S_{i\bar{j}} = \sum S_{ki\bar{j}}^k$ and by $\rho(\gamma) = \gamma^{\bar{j}i} S_{i\bar{j}}$ we denote the Ricci curvature and scalar, respectively, with respect to L-C connection of $\gamma_{i\bar{j}}$ metric lifted on $T_C E$. Also by $R_{i\bar{j}} = \sum R_{a\bar{i}\bar{j}}^a$ and $\rho(g) = \gamma^{\bar{j}i} R_{i\bar{j}}$ we have the Ricci curvature and scalar, respectively, with respect to Bott connection of the g metric. The sum $\rho = \rho(\gamma) + \rho(g)$ generates an Hilbert-Einstein type Lagrangian $L_G = -\frac{1}{\chi} \rho$, where χ is the universal constant.

The complex Einstein equations on E will be

$$S_{i\bar{j}} - \frac{1}{2} \rho(\gamma) \gamma_{i\bar{j}} = \chi T_{i\bar{j}}; \quad R_{i\bar{j}} - \frac{1}{2} \rho(g) \gamma_{i\bar{j}} = \chi T_{i\bar{j}} \tag{3.8}$$

where $T_{i\bar{j}}$ is the stress-energy tensor of the potential gravity $\gamma_{i\bar{j}}(z)$ on M .

The total Lagrangian for coupling gravity with electrodynamics (complex inhomogeneous Maxwell equations) is

$$L_t(\Phi, D\Phi) = L_p(\Phi, D\Phi) + L_{YM}(D) + L_G. \tag{3.9}$$

4 Hamiltonian gauge complex theory

In the preview section, in fact a field particle was treated as section $\Phi = \Phi^a(z, \eta) s_a$ on E which induced naturally the section $\Phi = \Phi^a(z, \eta) \dot{\partial}_a$ on VE . The associated particle Lagrangian is a function of Φ and the covariant derivative $D\Phi$ is with respect to a complex vertical connection, particularly for simplicity the Bott connection. Indeed, L_p depends implicitly by the base point $u = (z, \eta) \in E$. Then by complex Legendre transformation (2.18), (2.19), the sections of VE (plus their conjugates) will be send into sections of VE^* . We obtain hereby the field particles on E^* :

$$\Phi_a(z, \zeta) = h_{a\bar{b}} \Phi^{\bar{b}}(z, \eta := \frac{\partial H_p}{\partial \zeta}) = \left(\frac{\partial L_p}{\partial \Phi^a} \right)^*. \tag{4.1}$$

Consequently, by (2.19) we obtain a Hamiltonian for the \mathcal{L} - dual particle $\Phi^* = \Phi_a \dot{\partial}^a$,

$$H_p(\Phi^*) = \Phi_a \Phi^a + \bar{\Phi}_a \bar{\Phi}^a - L_p(\Phi). \tag{4.2}$$

We note that H_p is gauge invariant with respect to the \mathcal{L} -dual gauge transformation Υ^* of Υ , forasmuch L_p is gauge with respect to Υ . As well, we proved that the \mathcal{L} -dual of a vertical connection on VE is a vertical connection VE^* , i.e. $(D)^* = \overset{*}{D}$, and moreover if one is gauge the other is gauge too. Hence, $L_p(\Phi^a, D\Phi^a)$ by (4.2) determines the \mathcal{L} -dual Hamiltonian $H_p(\Phi_a, \overset{*}{D} \Phi_a)$.

Now, by taking $\overset{*}{D} \Phi_a$ as an independent variable for the Hamiltonian, we can write down the following variation

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial \Phi_a} (\delta \Phi_a) + \frac{\partial H}{\partial \Phi_{a|i}} (\delta \Phi_{a|i}) + \frac{\partial H}{\partial \Phi_{a|b}} (\delta \Phi_{a|b}) + \text{conjugates}$$

By the same symbols ω and θ from (2.20) we denoting the \mathcal{L} -dual symplectic forms associated to the variations of field particle. Thus, we may write θ as being

$$\theta = h^{\bar{b}a} \{ \delta\Phi_a \wedge \delta\bar{\Phi}_b + \sum_i \delta\Phi_{a|i} \wedge \delta\bar{\Phi}_{b|i} + \sum_c \delta\Phi_{a|c} \wedge \delta\bar{\Phi}_{b|c} \} \quad (4.3)$$

Let as associate to Φ^a , on the curve $t \rightarrow \Phi^a(z(t), \eta(t))$, the vector field X_{Φ^a}

$$X_{\Phi^a} = \frac{\delta\Phi^a}{dt} \frac{\delta}{\delta\Phi^a} + \sum_i \frac{\delta\Phi_{a|i}}{dt} \frac{\delta}{\delta\Phi_{a|i}} + \sum_b \frac{\delta\Phi_{a|b}}{dt} \frac{\delta}{\delta\Phi_{a|b}} + \text{conjugates}.$$

By \mathcal{L} -duality on the curve $t \rightarrow \Phi_a(z(t), \zeta(t))$ we obtain the vector field $X_{\Phi_a}^* = h^{\bar{b}a} (X_{\bar{\Phi}^b})^*$,

$$X_{\Phi_a}^* = \frac{\delta\Phi_a}{dt} \frac{\delta}{\delta\Phi_a} + \sum_i \frac{\delta\Phi_{a|i}}{dt} \frac{\delta}{\delta\Phi_{a|i}} + \sum_b \frac{\delta\Phi_{a|b}}{dt} \frac{\delta}{\delta\Phi_{a|b}} + \text{conjugates}.$$

The requirement $i_{X_{\Phi^a}^*} \theta = \delta H$ of integral curve for $X_{\Phi^a}^*$ yields

$$h^{\bar{b}a} \frac{\delta\bar{\Phi}_b}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\Phi_a}; \quad h^{\bar{b}a} \frac{\delta\bar{\Phi}_{b|i}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\Phi_{a|i}}; \quad h^{\bar{b}a} \frac{\delta\bar{\Phi}_{b|c}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\Phi_{a|c}}.$$

Tacking variations $\delta\Phi_a$ in (2.17), we easily can check that $(\delta\Phi_a)_{|i} = \delta(\Phi_{a|i})$ and $(\delta\Phi_a)_{|c} = \delta(\Phi_{a|c})$ and hence, from the above formulas is obtain

$$h^{\bar{b}a} \frac{\delta\bar{\Phi}_b}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\Phi_a}; \quad \left(\frac{\partial H}{\partial\Phi_a} \right)_{|i} = \frac{\partial H}{\partial(\Phi_{a|i})}; \quad \left(\frac{\partial H}{\partial\Phi_a} \right)_{|c} = \frac{\partial H}{\partial(\Phi_{a|c})} \quad (4.4)$$

called the *complex Hamilton field equations*.

By \mathcal{L} -duality let us obtain now from (2.5) the Klein-Gordon type Hamiltonian. Since $\gamma_{i\bar{j}}(z)$ is a Hermitian metric on the base manifold M , we identify it with $(\gamma_{i\bar{j}}(z))^*$ on E^* . For the Hermitian mass metric $\gamma_{a\bar{b}}(z, \eta)$, (or eventually for one which comes from an external Lagrangian of Antonelli-Shimada type, for instance), we recall from [Mu3] that the \mathcal{L} -dual of a complex Lagrange (Finsler) space is a complex Hamilton (Cartan) space and their metrics correspond by \mathcal{L} -duality. So, let us setting $\tau_{a\bar{b}} := (\gamma_{a\bar{b}})^*$ and then $\tau^{\bar{b}a}$ its inverse. Then the associated Klein-Gordon Hamiltonian to Φ_a particle is

$$H_p(\Phi^*, D^* \Phi^*) = -\frac{1}{2} \sum_a \{ \gamma^{\bar{j}i} D_{\delta_i^*}^* \Phi_a D_{\delta_j^*}^* \bar{\Phi}_a + \tau^{\bar{b}c} D_{\delta_c^*}^* \Phi_a D_{\delta_b^*}^* \bar{\Phi}_a \} - (V(\Phi))^*. \quad (4.5)$$

Because its metric tensor is the \mathcal{L} -dual of the Lagrangian particle metric tensor, $h_{a\bar{b}} = (g_{a\bar{b}})^*$, the corresponding Hamiltonian density to the Lagrangian density $\mathcal{L}_p = L_p |g|^{-2}$ will be $\mathcal{H}_p = H_p |g|^{-2}$.

For the Yang-Mills Hamiltonian we take into account the Proposition 2.6 and Proposition 2.7 and therefore we obtain a complex Hamiltonian which contains only the curvature of a vertical connection on E^* . Although the Bott complex connections don't correspond by \mathcal{L} -duality, for applications is useful the following Y-M Hamiltonian,

$$H_{YM}(*B) = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \gamma^{\bar{j}i} \gamma^{\bar{k}l} R_{bi\bar{j}}^* R_{bl\bar{k}}^* . \quad (4.6)$$

Finally, if we consider for (4.5) its metric tensor $h_{a\bar{b}} = (g_{a\bar{b}})^*$, we may constuct the Ricci curvatures for γ and h on VE^* and thereafter the Ricci scalars, $\overset{*}{\rho}(\gamma)$ and $\overset{*}{\rho}(h)$. We observe that $\overset{*}{\rho}(\gamma)$ is identified with $\rho(\gamma)$. Thus, the Hilbert-Einstein gravitational Hamiltonian is $H_{HE} = \frac{1}{\chi} \overset{*}{\rho}$, where $\overset{*}{\rho} = \rho(\gamma) + \overset{*}{\rho}(h)$.

References

- [Ai1] T. Aikou, *A partial connection on complex Finsler bundle and its appl.*, Illinois J. of Math., **42** (1998), 481–492.
- [Ai2] T. Aikou, *Applications of Bott connection in Finsler Geom.*, Steps in Diff. Geometry, Debrecen 2000, 3–13.
- [Ai3] T. Aikou, *Finsler geometry on complex vector bundles*, Riemann Finsler Geometry, MSRI Publications, **50** (2004), 85–107.
- [Ar] V.I. Arnold: *Mathematical methods of classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1978.
- [As] G.S. Asanov, *Finsler geometry, Relativity and gauge theories*, D.Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1985.
- [As1] G.S. Asanov, *Finsleroid-relativistic time-asymmetric space and quantized fields*, Reports of Math. Physics, **57** (2006), 199–231.
- [Be] A. Bejancu, *Finsler Geometry and Appl.*, Ellis Harwood, 1990.
- [Bl] D. Bleeker, *Gauge theory and variational principles*, Addison-Wesley Publ. Co. Inc., 1984.
- [CN] M. Chaichian, N.F. Nelipa, *Introduction to gauge field theories*, Springer-Verlag, 1984.
- [CR] F. Cooperstock, N. Rosen, *A nonlinear gauge-invariant field theory of leptons*, Int. J. Theor. Physics, **28** (1989) 423–440.
- [DM] W. Drechsler, M. E. Mayer, *Fiber bundle techniques in gauge theories*, Springer-Verlag, Lecture Note in Physics, **67** (1977).
- [FM] R. Friedman, J. Morgan, *Gauge theory and topology of four-manifolds*, ed. IAS/ PARK CITY, Math. Series, AMS, **4** (1998).
- [Ma] Y.I. Manin, *Gauge field theory and complex geometry*, Springer-Verlag, 1997.
- [MA] R. Miron, M. Anastasiei, *The geometry of Lagrange spaces. Theory and appl.*, Kluwer Acad. Publ. FTPH **59** (1994).
- [MS] R. Miron, D. Hrimiuc, H. Shimada, S. Sabau, *The Geomery of Hamilton and Lagrange Spaces*, Kluwer Acad. Publ., **118** (2001).
- [Mu1] G. Munteanu, *Gauge transformations on holomorphic bundles*, Balkan J. of Geom and Appl. **6** (2001), nr. 2, 71-80.
- [Mu2] G. Munteanu, B. Iordachiescu, *Gauge complex field theory*, Balkan J. of Geom and Appl. **12** (2005), nr.2, 55–64.
- [Mu3] G. Munteanu, *Complex spaces in Finsler, Lagrange and Hamilton geometries*, Kluwer Acad. Publ., FTPH **141** (2004).
- [Pa] R. Palais, *The geometrization of physics*, Lecture Notes in Math., Hsinchu, Taiwan, 1981.
- [Sa] G. Sardanashvily, *Gravidity as Higgs field. II. Fermion-gravitation complex*, arXiv: gr-qc/9407032, 1994.
- [Wu] N. Wu, *General gauge field theory*, arXiv: hep-ph/9805453, 1998.

SOME GEOMETRICAL ASPECTS OF HARMONIC CURVES IN A COMPLEX FINSLER SPACE

Gheorghe Munteanu

Faculty of Mathematics and Informatics, Transilvania Univ., Braşov, Romania

gh.munteanu@unitbv.ro

In this note we make a short study of the geometry of curves in a complex Finsler space. For harmonic curves we obtain an equivalent characterization to that from [Ni]. A special discussion concerns the holomorphic curves.

1 Introduction

The geometry of harmonic maps knows a large references, being itself a complex subject in differential geometry. It is difficult to quote a minimal reference of this topic, we believe that [E-L] and [Gu] should give the reader some insight of the techniques and fundamental results in harmonic map theory.

In the last decades a new notion has drawn our attention for its various applications in complex geometry, namely that of complex Finsler spaces. Roughly speaking this is the geometry of the holomorphic tangent bundle, as complex manifold, equipped with a homogeneous Hermitian metric derived from a positive Lagrangian. For reference we confine here to send the reader only to some more recent comprehensive studies: [A-P, Ai, Mu, Wo].

In order to investigate the complex geodesics of a complex Finsler space, Vesentini, [Ve], studied the holomorphic isometric embedding of the unit disc, equipped with the Poincaré metric, into a complex Finsler space. Later on, Abate and Patrizio, [A-P], realized a characterization of the Kobayashi metrics using the existence of such complex geodesics and proved a classification of Kähler Finsler manifolds of constant holomorphic curvature.

In this definition of complex geodesics one can recognize the more general notion of harmonic maps from a compact Riemann surface into a complex Finsler space. The investigation of harmonic maps of a complex Finsler space knows yet some recent results: [Br, Mo, Ni]. In a recent paper we investigated the geometry of a class of particular harmonic maps, namely the holomorphic curves of a complex Finsler space, [Mu2]. The holomorphy of the curve is a restrictive request but nonetheless of interest. In some weakly Kähler circumstances of positive curvature, Nishikawa ([Ni]) proved that a harmonic map (the critical points of ∂ -energy) from a Riemannian sphere $P_1(\mathbf{C})$ to the complex Finsler manifold is either holomorphic or antiholomorphic.

In this note our goal is to investigate some general aspects in geometry of harmonic curves of a complex Finsler space. We rediscover a result of Nishikawa for harmonic curves using a different way. Some remarks concerning the holomorphic curves are done at the end.

2 Harmonic curves of a complex Finsler space

Let (M, F) be a complex Finsler space. In this note we are faithful to our terminology and notations from [Mu]. The complex coordinates in a local chart of M will be $(z^k)_{k=1, \bar{n}}$. Consider $\widetilde{M} \hookrightarrow M$ an embedded subspace of $\dim_{\mathbf{C}} \widetilde{M} = 1$ and $f : \widetilde{M} \rightarrow M$ a smooth map, locally given by $f : w \rightarrow z^k(w)$. Generally, if f is not holomorphic then $\partial z^k / \partial \bar{w} \neq 0$.

Let $T\widetilde{M}$ and TM be the corresponding tangent spaces and $df : T\widetilde{M} \rightarrow TM$ the tangent map, which can be extended to the complexified tangent spaces, $d_{\mathbf{C}}f : T_{\mathbf{C}}\widetilde{M} \rightarrow T_{\mathbf{C}}M$. We have

the decomposition $T_C M = T' M \oplus T'' M$ into holomorphic and antiholomorphic subbundles and a similar decomposition is obtained for $T_C \widetilde{M}$. The set of tangent vectors $(z^k, \eta^k = \frac{dz^k}{dt})$ to the curves $c : t \rightarrow z^k(t)$, with $t \in R$, generate the coordinate systems of the manifold $T' M$. So, the local coordinates in a local chat of $T' M$ will be denoted by (z^k, η^k) .

Analogously let (w, θ) be a system of local coordinates of $T' \widetilde{M}$ manifold, where $\theta = \frac{dw}{dt}$ is the tangent vector to the curve through w . By this construction $d_C f$ has the following local expression

$$z^k = z^k(w); \quad \eta^k = \theta \frac{\partial z^k}{\partial w} + \bar{\theta} \frac{\partial z^k}{\partial \bar{w}} \tag{2.1}$$

and will be called a *complex curve* of the (M, F) Finsler space.

We note that $d_C f$ does not preserve the holomorphic tangent bundles, except for the holomorphic maps, but it has the following components: $\partial f : T' M \rightarrow T' M$, $\bar{\partial} f : T'' M \rightarrow T' M$ and $\partial \bar{f} : T' \widetilde{M} \rightarrow T'' M$, $\bar{\partial} \bar{f} : T'' \widetilde{M} \rightarrow T'' M$, locally given by:

$$\begin{aligned} \partial f \left(\frac{\partial}{\partial w} \right) &= \frac{\partial z^k}{\partial w} \frac{\partial}{\partial z^k}; & \bar{\partial} f \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) &= \frac{\partial z^k}{\partial \bar{w}} \frac{\partial}{\partial z^k} \\ \partial \bar{f} \left(\frac{\partial}{\partial w} \right) &= \frac{\partial \bar{z}^k}{\partial w} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}; & \bar{\partial} \bar{f} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) &= \frac{\partial \bar{z}^k}{\partial \bar{w}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Obviously, we have $\partial \bar{f} = \overline{\bar{\partial} f}$ and $\bar{\partial} \bar{f} = \overline{\partial f}$.

In the corresponding complexified tangent bundles $T_C T' \widetilde{M}$ and $T_C T' M$ the natural frames are $\left\{ \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \right\}$ and $\left\{ \frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^k} \right\}$ respectively, which are tied by:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w} &= B^k \frac{\partial}{\partial z^k} + B^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} + (\dot{B}_0^k + \dot{B}_0^{\bar{k}}) \frac{\partial}{\partial \eta^k} + (\dot{B}_0^{\bar{k}} + \dot{B}_0^k) \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^k} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= B^k \frac{\partial}{\partial \eta^k} + B^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^k}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

where we set $B^k = \frac{\partial z^k}{\partial w}$, $B^{\bar{k}} = \frac{\partial \bar{z}^k}{\partial w}$; $\dot{B}_0^k = \theta \frac{\partial^2 z^k}{\partial w^2}$, $\dot{B}_0^{\bar{k}} = \bar{\theta} \frac{\partial^2 z^k}{\partial w \partial \bar{w}}$ and $\dot{B}_0^{\bar{k}} = \theta \frac{\partial^2 \bar{z}^k}{\partial w^2}$, $\dot{B}_0^k = \bar{\theta} \frac{\partial^2 \bar{z}^k}{\partial w \partial \bar{w}}$.

Indeed, for the conjugates we have $\frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \overline{\frac{\partial}{\partial w}}$ and $\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} = \overline{\frac{\partial}{\partial \theta}}$.

By $VT' M$ we denote the vertical distribution spanned locally by $\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta^k} \right\}$. A supplementary distribution to the vertical distribution, i.e. $T' T' M = VT' M \oplus HT' M$, is a complex nonlinear connection, briefly (*c.n.c.*). A local frame in $HT' M$ will be denoted with $\left\{ \frac{\delta}{\delta z^k} = \frac{\partial}{\partial z^k} - N_k^j \frac{\partial}{\partial \eta^j} \right\}$ and we say that it is adapted if its changes follow the rule ([Mu]): $N_j^i \frac{\partial z^j}{\partial z^k} = \frac{\partial z^i}{\partial z^j} N_k^j + \frac{\partial^2 z^i}{\partial z^j \partial z^k} \eta^j$.

Now let us assume that (M, F) is a complex Finsler space, with $g_{i\bar{j}} = \partial^2 F^2 / \partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j$ the Finsler metric tensor.

There exists a special Hermitian connection of (1,0)- type, namely the Chern-Finsler connection, with some remarkable properties ([A-P, Mu, Ai]): $D\Gamma(N) = (L_{jk}^i, 0, C_{jk}^i, 0)$, where

$$N_k^j = g^{\bar{m}j} \frac{\partial^2 F^2}{\partial z^k \partial \bar{\eta}^m}; \quad L_{jk}^i = g^{\bar{m}i} \frac{\delta g_{j\bar{m}}}{\delta z^k}; \quad C_{jk}^i = g^{\bar{m}i} \frac{\partial g_{j\bar{m}}}{\partial \eta^k}. \tag{2.4}$$

By the same way we can consider the vertical distribution $VT' \widetilde{M}$, locally spanned by $\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \right\}$, and from (2.3) we remark that it is a subdistribution of $V_C T' M$.

An immediate conclusion is that $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$, where \widetilde{F} is induced by (2.1) from $F(z, \eta)$, is not always a complex Finsler subspace, forasmuch \widetilde{F} generally is not necessarily a Finsler function. A special case of interest is when f is a holomorphic curve, and this situation was considered in [Mu2]. Some results about holomorphic curves will be recalled here at the end of the paper.

The main problem in discussion now is that of first variation of a complex curve. Let us consider f restricted to a compact domain D of \widetilde{M} , with \widetilde{M} being a compact Riemann surface. Following [Ni] the $\bar{\partial}$ -energy of f is given by

$$E_{\bar{\partial}}f = \int_D F^2 \left(f(w), \bar{\partial}f\left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}}\right) \right) \frac{\sqrt{-1}}{2} dw \wedge d\bar{w}.$$

In account to homogeneity of the Finsler function F , this definition is independent of the choice of the local coordinates w .

Let $f_t(w) = z^k(w) + tv^k(w)$ be a variation of f , with $f_0(w) = f(w)$. The corresponding variation of $\bar{\partial}$ -energy $\left. \frac{\partial E_{\bar{\partial}}f_t}{\partial t} \right|_{t=0}$, leads after a classical variational argument to the following type of Euler-Lagrange equations:

$$\frac{\partial F^2}{\partial z^i} - \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left(\frac{\partial F^2}{\partial \eta^i} \right) = 0.$$

Next, computing $\frac{\partial}{\partial \bar{w}}$ by means of z^i and η^i , according to the first formula (2.1), the Euler-Lagrange equations yield

$$\left(g_{i\bar{j}} \frac{\partial^2 \bar{z}^j}{\partial w \partial \bar{w}} + \frac{\partial^2 F^2}{\partial \bar{z}^j \partial \eta^i} \frac{d\bar{z}^j}{d\bar{w}} \right) + \left(g_{ij} \frac{\partial^2 z^j}{\partial \bar{w}^2} + \frac{\partial^2 F^2}{\partial z^j \partial \eta^i} \eta^j - \frac{\partial F^2}{\partial z^i} \right) = 0,$$

where $g_{ij} = \partial F^2 / \partial \eta^i \partial \eta^j$.

Definition 2.1 We call a harmonic map of the complex Finsler space (M, F) , a solution of the system:

$$g_{i\bar{j}} \frac{\partial^2 \bar{z}^j}{\partial w \partial \bar{w}} + \frac{\partial^2 F^2}{\partial \bar{z}^j \partial \eta^i} \frac{d\bar{z}^j}{d\bar{w}} = 0; \quad g_{ij} \frac{\partial^2 z^j}{\partial \bar{w}^2} + \frac{\partial^2 F^2}{\partial z^j \partial \eta^i} \eta^j - \frac{\partial F^2}{\partial z^i} = 0. \tag{2.5}$$

By conjugation in the first set of equations from (2.5), we find

$$\frac{\partial^2 z^j}{\partial w \partial \bar{w}} + N_j^i \frac{\partial z^j}{\partial w} = 0 \quad \text{where} \quad N_j^i = g^{\bar{m}i} \frac{\partial^2 F^2}{\partial z^j \partial \bar{\eta}^m} \tag{2.6}$$

is the Chern-Finsler (*c.n.c.*) along the points of the harmonic map.

In complete analogy to the proof of Proposition 5.1.3 from [Mu], we can check that (2.6) is just $g_{i\bar{i}}(L_{jk}^i - L_{kj}^i)\eta^j \bar{\eta}^l = 0$, and that is the weakly Kähler condition along the harmonic curve. It flows that,

Theorem 2.1 In a weakly Kähler Finsler space (M, F) , the equations of a harmonic curve are given by (2.6).

On the other hand, since the horizontal part of Chern-Finsler connection performs the condition $L_{jk}^i = \partial N_k^i / \partial \eta^j$, in account to homogeneity of N_k^i and the fact that along a harmonic curve $\eta^k = \frac{\partial z^k}{\partial \bar{w}}$, it results that $N_j^i \frac{\partial z^j}{\partial w} = L_{kj}^i \frac{\partial z^j}{\partial w} \frac{\partial z^k}{\partial \bar{w}}$. So, by plugging this into (2.6) we recover the known expression (5.9) from [Ni] of a harmonic map, this time for a complex curve of the space (M, F) .

If the curve is holomorphic, then $\frac{\partial z^i}{\partial \bar{w}} = 0$ and owing the last reasoning, it follows that any holomorphic curve is harmonic. Moreover, from (2.6) we have $N_j^i \frac{\partial z^j}{\partial w} = 0$, along the points of the holomorphic curve.

Subsequently we add some supplementary comments concerning holomorphic curves.

First, we remark that for a holomorphic curve (2.3) acquires a simplified form:

$$\frac{\partial}{\partial w} = B^k \frac{\partial}{\partial z^k} + \dot{B}_0^k \frac{\partial}{\partial \eta^k}; \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = B^k \frac{\partial}{\partial \eta^k}, \tag{2.7}$$

and $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$, where $\widetilde{F}(w, \theta) = F(z(w), \eta(w, \theta))$, is a holomorphic subspace of (M, F) .

The holomorphic tangent bundles are preserved by a holomorphic curve f , and $VT'\widetilde{M}$ is a subdistribution of $VT'M$. Let $VT'\widetilde{M}^\perp$ be an orthogonal distribution to $VT'\widetilde{M}$ in $VT'M$ with respect to Hermitian metric structure $G^v = g_{i\bar{j}} d\eta^i \otimes d\bar{\eta}^j$ and by $\{N_a = B_a^i \frac{\partial}{\partial \eta^i}\}_{a=2, \dots, n}$ we denote a basis in $VT'\widetilde{M}^\perp$, which we can choose to be orthonormal. Thus we have, $g_{i\bar{j}} B^i B_a^{\bar{j}} = 0$ and $g_{i\bar{j}} B_a^i B_b^{\bar{j}} = \delta_{ab}$. The frame $\mathcal{R} = [B^i \ B_a^i]$ is a moving frame along \widetilde{M} and let $\mathcal{R}^{-1} = [B_i \ B_i^a]$ be the inverse matrix of \mathcal{R} . It follows that

$$B_i B^i = 1; \quad B_i B_a^i = 0; \quad B_i^a B^i = 0; \quad B_i^a B_b^i = \delta_b^a. \tag{2.8}$$

It can be easily checked that $\frac{\partial}{\partial \eta^i} = B_i \frac{d}{d\theta} + B_i^a N_a$ and also that we have the following links between the dual bases

$$dz^i = B^i dw; \quad d\eta^i = \dot{B}_0^i dw + B^i d\theta. \tag{2.9}$$

Let N_j^i be the coefficients of the Chern-Finsler complex nonlinear connection, like in the above section, and $\delta\eta^i = d\eta^i + N_j^i dz^j$ be its adapted dual cobasis. An *induced (c.n.c)* on \widetilde{M} is defined by $\delta\theta = B_i \delta\eta^i$, where $\delta\theta = d\theta + Ndw$. From the general theory, [Mu], p. 130, it results

Proposition 2.1 $N = B_i(\dot{B}_0^i + B^j N_j^i)$.

For the adapted frames $\frac{\delta}{\delta w} = \frac{d}{dw} - N \frac{d}{d\theta}$ and $\frac{\delta}{\delta z^i} = \frac{\partial}{\partial z^i} - N_i^j \frac{\partial}{\partial \eta^j}$, according to Proposition 5.4.2 from [Mu], we have

Proposition 2.2 *i)* $dz^i = B^i dw; \quad \delta\eta^i = B^i \delta\theta + B_a^i M^a dw;$
ii) $\frac{\delta}{\delta w} = B^i \frac{\delta}{\delta z^i} + B_a^i M^a \frac{\partial}{\partial \eta^i}; \quad \frac{d}{d\theta} = B^i \frac{\partial}{\partial \eta^i},$ where $M^a = B_j^a(\dot{B}_0^j + B^k N_k^j)$.

It is proved in [Mu] that the induced (c.n.c) coincides with the intrinsic (c.n.c) of $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$, that is $N = g^{-1} d^2 \tilde{L} / dw d\bar{\theta}$, where $\tilde{L} = \tilde{F}^2$ and $g = g_{i\bar{j}} B^i \bar{B}^j$ is the induced metric on $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$.

Let $D\Gamma(N) = (L_{jk}^i, 0, C_{jk}^i, 0)$ be the Chern-Finsler linear connection as in (2.4).

According to Theorem 5.4.4, the induced tangent connection of Chern-Finsler linear connection is $\tilde{D}\Gamma(\tilde{N}) = (L, 0, C, 0)$, where

$$L = g^{-1} \frac{\delta g}{\delta w}; \quad C = g^{-1} \frac{dg}{d\theta}. \tag{2.10}$$

Like in classical theory the Gauss and Weingarten operators can be introduced here (see [Mu2]).

Further on we make a remark about the induced holomorphic sectional curvature. Recall that, [A-P, Mu], the holomorphic sectional curvature of a complex Finsler space $(M, L = F^2)$ is given by

$$K_F(z, \eta) = \frac{2}{L^2} G(\Omega(\chi, \bar{\chi})\chi, \bar{\chi}) \tag{2.11}$$

where G is the Hermitian metric structure, Ω is the curvature form of Chern-Finsler connection and $\chi = \eta^k \frac{\delta}{\delta z^k}$ is the horizontal lift of the radial vertical vector $\eta = \eta^k \frac{\partial}{\partial \eta^k}$.

K_F in η direction is written as a function of Ricci tensor as follows,

$$K_F(z, \eta) = \frac{2}{L^2} R_{\bar{j}k} \bar{\eta}^j \eta^k, \quad \text{where } R_{\bar{j}k} = -g_{\bar{l}j} \frac{\delta N_k^l}{\delta \bar{z}^h} \bar{\eta}^h. \quad (2.12)$$

In [Mu1] we found for a general holomorphic subspace $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ the relationship between K_F and intrinsic holomorphic sectional curvature $\widetilde{K}_{\widetilde{F}}$. Particularizing this result it follows that $\widetilde{K}_{\widetilde{F}}$ in $\tilde{u} = (w, \theta)$, with θ a tangent direction of the holomorphic curve, and K_F in $u = (z(w), \eta(w, \theta))$ are connected by

$$\widetilde{K}_{\widetilde{F}}(\tilde{u}) = K_F(u) - \frac{2}{L^2} B_{\bar{a}}^i B_{\bar{h}}^{\bar{a}} \{Q_{k\bar{i}}^m + \rho_{k\bar{i}}^m\} g_{m\bar{j}} \bar{\eta}^j \bar{\eta}^h \eta^k, \quad (2.13)$$

where $Q_{k\bar{i}}^m = \frac{\delta}{\delta \bar{z}^i} (N_k^m)$ and $\rho_{k\bar{i}}^m = \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^i} (N_k^m)$.

For instance, if $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ is a Riemann surface of a locally Minkowsky space (M, F) , then there exists a local chart in any point u in which $N_k^m = 0$ and consequently, in such charts, the intrinsic holomorphic curvature of $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ coincides with that of (M, F) .

For more details and other problems, like totally geodesic holomorphic curves, see [Mu2].

References

- [A-P] M. Abate, G. Patrizio, *Finsler Metrics – A Global Approach*, Lecture Notes in Math., **1591**, Springer-Verlag, 1994.
- [Ai] T. Aikou, *The Chern-Finsler connection and Finsler-Kähler manifolds*, Advanced studies in Pure Math., 2006, will appear.
- [Al] N. Aldea, *Complex Finsler spaces of constant holomorphic curvature*, Diff. Geom. and its Appl., Proc. Conf. Prague, 2004, Charles Univ., Prague, 2005, 175–186.
- [An] M. Anastasiei, *On Miron's theory of subspaces in Finsler spaces*, Analele St. Univ. A. I. Cuza, Iasi, nr. 4, **30** (1984), 11–14.
- [Br] R. Bryant, *Some remarks on Finsler manifolds which constant flag curvature*, arXiv: math.DG/0107228 v1, 2001.
- [B-F] A. Bejancu, H. R. Faran, *The geometry of pseudo-Finsler submanifolds*, Kluwer Acad. Publ., 2000.
- [E-L] J. Eells, L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, C.B.M.S., Regional Conf. Series **50**, AMS, 1983.
- [Gu] S. Gudmundsson, *The bibliography of harmonic morphisms*, www.maths.lth.se/~matematiklu/personal/sigma/harmonic/bibliography.html.
- [Ma] M. Matsumoto, *The induced and intrinsic Finsler connections of a hypersurface and Finslerian projective geometry*, Journ. of Math. of Kyoto Univ., **25** (1985), 107–144.
- [Mi] R. Miron, *A nonstandard theory of hypersurfaces in Finsler spaces*, Analele St. Univ. A. I. Cuza, Iasi, nr. 5, **30** (1984), 35–53.
- [M-A] R. Miron, M. Anastasiei, *The geometry of Lagrange Spaces; Theory and Applications*, Kluwer Acad. Publ., **59**, FTPH, 1994.
- [Mo] X. Mo, *Harmonic maps from Finsler manifolds*, Illinois J. Math. **45** (2001), 1331–1345.
- [Mu] G. Munteanu, *Complex spaces in Finsler, Lagrange and Hamilton geometries*, Kluwer Acad. Publ., **141**, FTPH, 2004.
- [Mu1] G. Munteanu, *The equations of a holomorphic subspace in a complex Finsler space*, Diff. Geom. and its Appl., submitted.
- [Mu2] G. Munteanu, *The geometry of curves of a complex Finsler space*, Bull. Math. SSMR, 2006, accepted.

-
- [Ni] S. Nishikawa, *Harmonic maps in complex Finsler geometry*, Progress in Nonlinear Diff. Equations and its Appl., **59** (2004), 113–132.
- [Ve] E. Vesentini, *Complex geodesics*, Composito Math., 44 (1981), 375–394.
- [Wd] J. Wood, *Jacobi fields along harmonic maps*, arXiv:math.DG/ 0104123 v 1, 2001.
- [Wo] P.-Mann Wong, *A survey of complex Finsler geometry*, Advanced studies in Pure Math., 2006, will appear.

FUNDAMENTAL EQUATIONS FOR A SECOND ORDER GENERALIZED LAGRANGE SPACE ENDOWED WITH A BERWALD-MOOR TYPE METRIC IN INVARIANT FRAMES

Marius Păun

Faculty of Mathematics and Informatics, Transilvania University of Braşov, România
m.paun@unitbv.ro

The purpose of this paper is to study Vranceanu identities and Maxwell equations of a generalized Lagrange space of order 2 endowed with a Berwald Moor type metric in invariant frames end to emphasize their equivalence.

0. Introduction

We introduce distinct non-holonomic frames on the three components of the Whitney's decomposition. This will determine a non-holonomic coordinates system on the total space E and thus its geometry can be studied with methods analogous to the mobile frame. We obtain, in this manner, the representation of geometrical objects (vectors, 1-forms, tensors) and prove that there are invariant at local changes of coordinates and we introduce the invariant covariant derivative. We obtain the expressions of the coefficients of the canonical metrical N-linear connection, we define the d-tensors of torsion and curvature in these non-holonomic frames and prove that there are the invariant components of the d-tensors of torsion and curvature. Using the the non-holonomy coefficients of Vranceanu we write the Vranceanu identities. Defining the invariant electromagnetic tensors in the case of normal frames w.r.t. the canonical metrical connection we can obtain Maxwell equations. The frames introduced here present a theoretical importance for the geometry of a vector bundle because through them we can outline the geometrical properties of the total space of the considerate bundle, invariant to the transformations of the pseudoorthogonal group. We mention here that in the case of this Berwald Moor type metric the Vranceanu identities coincide with the Maxwell equations.

1. General invariant frames

Let us consider M a 4-dimensional differential manifold of C^∞ -class, the bundle $E = Osc^2 M$, a nonlinear connection N with the coefficients $\left(N_{(1)j}^i, N_{(2)j}^i \right)$ and the duals $\left(M_{(1)j}^i, M_{(2)j}^i \right)$. For a point $u \in E$ let $(x^i, y^{(1)i}, y^{(2)j})$ be its coordinates in a local chart. The nonlinear connection N determines the direct decomposition:

$$T_u(Osc^2 M) = N_0(u) \oplus N_1(u) \oplus V_2(u) \quad \forall u \in Osc^2 M = E, \quad (1.1)$$

The adapted basis of the direct decomposition (1.1) is:

$$\left\{ \frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}, \frac{\delta}{\delta y^{(2)i}} \right\} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.2)$$

where:

$$\begin{cases} \frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_{(1) i}^j \frac{\partial}{\partial y^{(1)j}} - N_{(2) i}^j \frac{\partial}{\partial y^{(2)j}} \\ \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}} = \frac{\partial}{\partial y^{(1)i}} - N_{(1) i}^j \frac{\partial}{\partial y^{(2)j}} \\ \frac{\delta}{\delta y^{(2)i}} = \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}} \end{cases} \quad (1.3)$$

The dual basis will be:

$$\{\delta x^i, \delta y^{(1)i}, \delta y^{(2)i}\} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.4)$$

where:

$$\begin{cases} \delta x^i = dx^i \\ \delta y^{(1)i} = dy^{(1)i} + M_{(1) j}^i dx^j \\ \delta y^{(2)i} = dy^{(2)i} + M_{(1) j}^i dy^{(1)j} + M_{(2) j}^i dx^j \end{cases} \quad (1.5)$$

We shall consider a metric

$$G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} \delta y^{(1)i} \otimes \delta y^{(1)j} + g_{ij} \delta y^{(2)i} \otimes \delta y^{(2)j}$$

where $g_{ij} = g_{ij}(x, y^{(1)}, y^{(2)})$ such that the distributions N_0, N_1, V_2 generated by the nonlinear connection be orthogonal in pairs with respect to G .

Let also

$$F = \sqrt[4]{y^{(1)1} y^{(1)2} y^{(1)3} y^{(1)4}}$$

be the Berwald-Moor function and the generalized Lagrange metric on M given by

$$h_{ij} = \frac{1}{12F^4} \frac{\partial^2 F^4}{\partial y^i \partial y^j}$$

In this paper we shall use a particular kind of metric on $E \setminus \{0\}$

$$g_{ij}(x, y^{(1)}, y^{(2)}) = h_{ij}(y^{(1)}).$$

The invariant frames adapted to the direct decomposition (1.1)

$$\mathcal{R} = (e_{\alpha}^{(0)i}, e_{\alpha}^{(1)i}, e_{\alpha}^{(2)i}),$$

where i is a component index and α counter index, are defined in this shape:

$$\begin{aligned} e_{\alpha}^{(0)} : u \in E &\rightarrow e_{\alpha}^{(0)}(u) \subset N_0(u) \\ e_{\alpha}^{(1)} : u \in E &\rightarrow e_{\alpha}^{(1)}(u) \subset N_1(u) \\ e_{\alpha}^{(2)} : u \in E &\rightarrow e_{\alpha}^{(2)}(u) \subset V_2(u) \\ &(\alpha = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.6)$$

For this frames we have $e_{\alpha}^{(A)i}(u) = e_{\alpha}^{(A)i} \frac{\delta}{\delta y^{(A)i}} \Big|_u$ where $y^{(0)i} = x^i$. Denote by $\mathcal{R}^* = (f_i^{(0)\alpha}, f_i^{(1)\alpha}, f_i^{(2)\alpha})$ the dual frames of \mathcal{R} . For \mathcal{R}^* , i is the counter index and α is a component index.

The duality conditions are:

$$\langle e^{(A)i}_\alpha, f^{(B)\alpha}_j \rangle = \delta_j^i \delta_B^A \quad (A, B = 0, 1, 2) \tag{1.7}$$

The frames \mathcal{R} și \mathcal{R}^* are non-holonomic and thru them we can introduce a non-holonomic coordinate system $(s^{(0)\alpha}, s^{(1)\alpha}, s^{(2)\alpha})$ in Vrânceanu sense. In this frames the adapted basis and the cobasis have the representations:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x^i} &= f^{(0)\alpha}_i \frac{\delta}{\delta s^{(0)\alpha}}; & \frac{\delta}{\delta y^{(A)i}} &= f^{(A)\alpha}_i \frac{\delta}{\delta s^{(A)\alpha}}, \quad (A = 1, 2) \\ \delta x^i &= e^{(0)i}_\alpha \delta s^{(0)\alpha}; & \delta y^{(A)i} &= e^{(A)i}_\alpha \delta s^{(A)\alpha}, \quad (A = 1, 2); \end{aligned} \tag{1.8}$$

The following relations hold:

$$\left\langle \frac{\delta}{\delta s^{(A)\alpha}}, \delta s^{(B)\beta} \right\rangle = \delta_\alpha^\beta \delta_A^B, \quad (A, B = 0, 1, 2) \tag{1.9}$$

These representations lead us to a transformation group of invariant frames $\mathcal{R} \rightarrow \bar{\mathcal{R}}$. Analytical expression of this group are:

$$\bar{e}^{(A)i}_\alpha = C_\alpha^A(x, y^{(1)}, y^{(2)}) e^{(A)i}_\beta; \quad f^{(B)\alpha}_j = \bar{C}_\beta^B \bar{f}^{(B)\beta}_j, \quad (A, B = 0, 1, 2) \tag{1.10}$$

Proposition 1.1 *The set of frame transformations (II.2.6) together with the product of transformations is a group isomorphic with the multiplicative group of nonsingular matrices:*

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ C_\beta^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & C_\beta^1 & 0 \\ 0 & 0 & C_\beta^2 \end{pmatrix}$$

So we have:

$$\frac{\delta}{\delta s^{(A)\alpha}} = e^{(A)i}_\alpha \frac{\delta}{\delta y^{(A)i}} \quad (A = 0, 1, 2) \quad (y^{(0)i} = x^i) \tag{1.11}$$

and

$$\frac{\delta}{\delta \bar{s}^{(A)\alpha}} = C_\alpha^A \frac{\delta}{\delta s^{(A)\beta}}, \quad (A = 0, 1, 2) \tag{1.12}$$

together with:

$$\delta \bar{s}^{(A)\alpha} = \bar{C}_\beta^A \delta s^{(A)\beta} \quad (A = 0, 1, 2) \tag{1.13}$$

The context in which we are working and a straightforward computing of Lie brackets lead us to the introduction of the non-holonomy coefficients of Vranceanu. We obtain:

$$\left[\frac{\delta}{\delta s^{(A)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta s^{(B)\beta}} \right] = \overset{C}{W}_{(AB)\alpha\beta}^\gamma \frac{\delta}{\delta s^{(C)\gamma}} \tag{1.14}$$

$(A, B, C = 0, 1, 2; \quad A \leq B; \quad \text{sum on } C)$ where

$$\overset{0}{W}_{(00)\beta\alpha}^\gamma = f^{(0)\gamma}_l \left(\frac{\delta e^{(0)l}_\beta}{\delta s^{(0)\alpha}} - \frac{\delta e^{(0)l}_\alpha}{\delta s^{(0)\beta}} \right); \quad \overset{1}{W}_{(00)\beta\alpha}^\gamma = \overset{2}{W}_{(00)\beta\alpha}^\gamma = 0. \tag{1.15}$$

$$\overset{0}{W}_{(01)\beta\alpha}^\gamma = f^{(0)\gamma}{}_l \frac{\delta e_\alpha^{(0)l}}{\delta S^{(1)\beta}}; \quad \overset{1}{W}_{(01)\beta\alpha}^\gamma = -f^{(1)\gamma}{}_l \frac{\delta e_\beta^{(1)l}}{\delta S^{(0)\alpha}}; \quad \overset{2}{W}_{(01)\alpha\beta}^\gamma = 0. \quad (1.16)$$

$$\overset{0}{W}_{(02)\beta\alpha}^\gamma = f^{(0)\gamma}{}_l \frac{\delta e_\alpha^{(0)l}}{\delta S^{(2)\beta}}; \quad \overset{1}{W}_{(02)\alpha\beta}^\gamma = 0; \quad \overset{2}{W}_{(02)\beta\alpha}^\gamma = -f^{(2)\gamma}{}_l \frac{\delta e_\beta^{(2)l}}{\delta S^{(0)\alpha}}. \quad (1.17)$$

$$\overset{1}{W}_{(11)\beta\alpha}^\gamma = f^{(1)\gamma}{}_l \left(\frac{\delta e_\beta^{(1)l}}{\delta S^{(1)\alpha}} - \frac{\delta e_\alpha^{(1)l}}{\delta S^{(1)\beta}} \right); \quad \overset{2}{W}_{(11)\beta\alpha}^\gamma = 0 \quad (1.18)$$

$$\overset{1}{W}_{(12)\alpha\beta}^\gamma = f^{(1)\gamma}{}_l \frac{\delta e_\alpha^{(1)l}}{\delta S^{(2)\beta}}; \quad \overset{2}{W}_{(12)\beta\alpha}^\gamma = -f^{(2)\gamma}{}_l \frac{\delta e_\beta^{(2)l}}{\delta S^{(1)\alpha}}; \quad (1.19)$$

$$\overset{2}{W}_{(22)\beta\alpha}^\gamma = f^{(2)\gamma}{}_l \left(\frac{\delta e_\beta^{(2)l}}{\delta S^{(2)\alpha}} - \frac{\delta e_\alpha^{(2)l}}{\delta S^{(2)\beta}} \right); \quad (1.20)$$

All other coefficients are 0. We observe that:

$$\overset{A}{W}_{(BB)\alpha\beta}^\gamma - \overset{A}{W}_{(BB)\beta\alpha}^\gamma = 0 \quad (A, B = 0, 1, 2) \quad (1.21)$$

$$\overset{2}{W}_{(01)\alpha\beta}^\gamma - \overset{2}{W}_{(01)\beta\alpha}^\gamma = 0;$$

$$\overset{1}{W}_{(02)\alpha\beta}^\gamma - \overset{1}{W}_{(02)\beta\alpha}^\gamma = 0;$$

Proposition 1.2 Transformation laws of the Vranceanu coefficients at frames transformations are:

$$\overset{A}{W}_{(AA)\beta\alpha}^\lambda = \left(\overset{A}{C}_\alpha^\gamma \overset{A}{C}_\gamma^\varphi \overset{A}{W}_{(AA)\varphi\gamma}^\eta + \overset{A}{C}_\alpha^\gamma \frac{\delta \overset{A}{C}_\beta^\eta}{\delta S^{(A)\gamma}} - \overset{A}{C}_\beta^\varphi \frac{\delta \overset{A}{C}_\alpha^\eta}{\delta S^{(A)\varphi}} \right) \overset{A}{C}_\eta^\lambda, \quad (A = 0, 1, 2) \quad (1.22)$$

$$\overset{A}{W}_{(AB)\beta\alpha}^\lambda = \left(\overset{A}{C}_\alpha^\gamma \overset{B}{C}_\gamma^\varphi \overset{A}{W}_{(AB)\varphi\gamma}^\eta - \overset{A}{C}_\beta^\varphi \frac{\delta \overset{A}{C}_\alpha^\eta}{\delta S^{(A)\varphi}} \right) \overset{A}{C}_\eta^\lambda, \quad (A, B = 0, 1, 2 \quad A < B) \quad (1.23)$$

$$\overset{A}{W}_{(BA)\beta\alpha}^\lambda = \left(\overset{B}{C}_\alpha^\gamma \overset{A}{C}_\gamma^\varphi \overset{A}{W}_{(BA)\varphi\gamma}^\eta + \overset{B}{C}_\alpha^\gamma \frac{\delta \overset{A}{C}_\beta^\eta}{\delta S^{(B)\gamma}} \right) \overset{A}{C}_\eta^\lambda, \quad (A, B = 0, 1, 2 \quad A > B) \quad (1.24)$$

$$\overset{1}{W}_{(00)\beta\alpha}^\lambda = \overset{0}{C}_\alpha^\gamma \overset{0}{C}_\beta^\varphi \overset{1}{W}_{(00)\varphi\gamma}^\eta \overset{1}{C}_\eta^\lambda; \quad \overset{2}{W}_{(00)\beta\alpha}^\lambda = \overset{0}{C}_\alpha^\gamma \overset{0}{C}_\beta^\varphi \overset{2}{W}_{(00)\varphi\gamma}^\eta \overset{2}{C}_\eta^\lambda; \quad \overset{2}{W}_{(01)\beta\alpha}^\lambda = \overset{0}{C}_\alpha^\gamma \overset{1}{C}_\beta^\varphi \overset{2}{W}_{(01)\varphi\gamma}^\eta \overset{2}{C}_\eta^\lambda; \quad (1.25)$$

$$\overset{1}{W}_{(02)\beta\alpha}^\lambda = \overset{0}{C}_\alpha^\gamma \overset{2}{C}_\beta^\varphi \overset{1}{W}_{(02)\varphi\gamma}^\eta \overset{1}{C}_\eta^\lambda; \quad \overset{2}{W}_{(11)\beta\alpha}^\lambda = \overset{1}{C}_\alpha^\gamma \overset{2}{C}_\beta^\varphi \overset{2}{W}_{(11)\varphi\gamma}^\eta \overset{2}{C}_\eta^\lambda$$

Theorem 1.1 In the case $e_\alpha^{(0)i} = e_\alpha^{(1)i} = e_\alpha^{(2)i} = e_\alpha^i$ and $f_i^{(0)\alpha} = f_i^{(1)\alpha} = f_i^{(2)\alpha} = f_i^\alpha$ the frame \mathcal{R} is holonomic if and only if

$$\overset{0}{W}_{(00)\beta\gamma}^\alpha = \overset{0}{W}_{(01)\beta\gamma}^\alpha = \overset{0}{W}_{(02)\beta\gamma}^\alpha = 0 \quad (1.26)$$

Observation 1.1 \mathcal{R} are holonomic if and only if the Lie brackets are vertical and the conditions imposed by the previous theorem lead us to

$$\overset{1}{W}_{(11)\beta\alpha}^\gamma = \overset{2}{W}_{(22)\beta\alpha}^\gamma = 0$$

i.e. N_1 and V_2 are integrabile. The horizontal distribution is integrable if and only if $R_{(01)jk}^i = R_{(02)jk}^i = 0$ condition wich is independent of the frame \mathcal{R} .

Generally we have:

Theorem 1.2 The frames \mathcal{R} are holonomic if and only if :

$$\overset{0}{W}_{(00)\beta\alpha}^\gamma = \overset{0}{W}_{(01)\beta\alpha}^\gamma = \overset{0}{W}_{(02)\beta\alpha}^\gamma = \overset{1}{W}_{(11)\beta\alpha}^\gamma = \overset{1}{W}_{(12)\beta\alpha}^\gamma = \overset{2}{W}_{(22)\beta\alpha}^\gamma = 0$$

2. The representation of geometric objects in invariant frames \mathcal{R}

Let $X \in \chi(E)$ a vector field. Then for X we have the local representations

$$X = X^{(0)i} \frac{\delta}{\delta x^i} + X^{(1)i} \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}} + X^{(2)i} \frac{\delta}{\delta y^{(2)i}} \tag{2.1}$$

in adapted basis and

$$X = X^{(0)\alpha} \frac{\delta}{\delta s^\alpha} + X^{(1)\alpha} \frac{\delta}{\delta s^{(1)\alpha}} + X^{(2)\alpha} \frac{\delta}{\delta s^{(2)\alpha}}. \tag{2.2}$$

in invariant frames.

We have

$$X^{(A)i} = e_\alpha^{(A)i} X^{(A)\alpha} \quad \text{or} \quad X^{(A)\alpha} = f_i^{(A)\alpha} X^{(A)i} \quad (A = 0, 1, 2). \tag{2.3}$$

At local coordinate changes we have:

$$\bar{X}^{(A)\alpha} = \bar{f}^{(A)\alpha}_i \bar{X}^{(A)i} = f^{(A)\alpha}_k \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} X^{(A)l} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} = f^{(A)\alpha}_k \delta_i^k X^{(A)i} = X^{(A)\alpha} \tag{2.4}$$

So:

Proposition 2.1 The nonholonomic components of the h -, v_1 -, v_2 - projections of the vector field X are invariant at local changes of coordinates.

Let $\omega \in \chi^*$ be a field of 1-forms. The representation of ω in the invariant frames is:

$$\omega = \omega^{(0)}_i \delta x^i + \omega^{(1)}_i \delta y^{(1)i} + \omega^{(2)}_i \delta y^{(2)i} = \omega^{(0)}_\alpha \delta s^{(0)\alpha} + \omega^{(1)}_\alpha \delta s^{(1)\alpha} + \omega^{(2)}_\alpha \delta s^{(2)\alpha} \tag{2.5}$$

Proposition 2.2 The non-holonomic components $\omega^{(A)}_\alpha$ of the projections of $\omega^{(A)}$ on the three distributions N_0, N_1, V_2 are invariant at local changes of coordinates.

Dueing the fact that the geometric object studied above have invariant components at local changes of coordinates in the frames \mathcal{R} we call this frames invariant frames.

3. N-linear connections in invariant frames

In the adapted basis the coefficients of a N-linear connection are given by:

$$D \frac{\delta}{\delta x^i} \frac{\delta}{\delta x^j} = L^m_{ji} \frac{\delta}{\delta x^m}, \quad D \frac{\delta}{\delta x^i} \frac{\delta}{\delta y^{(A)j}} = L^m_{ji} \frac{\delta}{\delta y^{(A)m}}, \quad (A = 1, 2) \tag{3.1}$$

$$D \frac{\delta}{\delta y^{(A)i}} \frac{\delta}{\delta y^{(B)j}} = C^m_{(A)ji} \frac{\delta}{\delta y^{(B)m}}, \quad (A, B = 1, 2) \tag{3.2}$$

$$D \frac{\delta}{\delta y^{(A)i}} \frac{\delta}{\delta x^j} = C^m_{(A)ji} \frac{\delta}{\delta x^m}, \quad (A = 1, 2) \tag{3.3}$$

and transform after the rules

$$\tilde{L}^i_{rs} \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^k} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^r} L^r_{jk} - \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} \tag{3.4}$$

$$\tilde{C}^i_{(A)rs} \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^k} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^r} C^r_{(A)jk} \quad (A = 1, 2) \tag{3.5}$$

Proposition 3.1 *In the invariant frames \mathcal{R} and \mathcal{R}^* the essential components of the N-linear connection are nine and are given by:*

$$L^{\gamma}_{\beta\alpha}{}^{0A} = f^{(A)\gamma}_m \left(\frac{\delta e^{(A)m}_\beta}{\delta s^{(0)\alpha}} + e^{(0)i}_\alpha e^{(A)j}_\beta L^m_{ij} \right) \quad (A = 0, 1, 2) \tag{3.6}$$

$$C^{\gamma}_{\beta\alpha}{}^{BA} = f^{(A)\gamma}_m \left(\frac{\delta e^{(A)m}_\beta}{\delta s^{(B)\alpha}} + e^{(B)i}_\alpha e^{(A)j}_\beta C^m_{(B)ij} \right) \quad (A = 0, 1, 2; B = 1, 2)$$

Considering now the case of the canonical metrical N-linear connection $CT(N)$ with the coefficients

$$CT(N) = \left(0, C^m_{(1)ji}, 0 \right)$$

we obtain

Corollary 3.1 *The coefficients of the canonical metrical N-linear connection in invariant frames are:*

$$L^{\gamma}_{\beta\alpha}{}^{00} = \frac{1}{2} W^{\gamma}_{(00)\beta\alpha}, \quad L^{\gamma}_{\beta\alpha}{}^{01} = -W^{\gamma}_{(01)\beta\alpha}, \quad L^{\gamma}_{\beta\alpha}{}^{02} = -W^{\gamma}_{(02)\beta\alpha} \tag{3.7}$$

$$C^{\gamma}_{\beta\alpha}{}^{1A} = f^{(A)\gamma}_m \left(\frac{\delta e^{(A)m}_\beta}{\delta s^{(1)\alpha}} + e^{(1)i}_\alpha e^{(A)j}_\beta C^m_{(1)ij} \right) \quad (A = 0, 1, 2;)$$

$$C^{\gamma}_{\beta\alpha}{}^{20} = W^{\gamma}_{(02)\beta\alpha}, \quad C^{\gamma}_{\beta\alpha}{}^{21} = W^{\gamma}_{(12)\beta\alpha}, \quad C^{\gamma}_{\beta\alpha}{}^{22} = \frac{1}{2} W^{\gamma}_{(22)\beta\alpha} \tag{3.8}$$

Denoting by $|$ and $|^{(A)}$ ($A=1,2$) the covariant derivatives w.r.t. $CT(N)$ we obtain:

Proposition 3.2 *The movement equations of the frames \mathcal{R} and \mathcal{R}^* are:*

$$e^{(A)i}_{\alpha|m} = L^{\gamma}_{\beta\alpha}{}^{0A} e^{(A)i}_\gamma f^{(0)\beta}_m, \quad e^{(A)i}_\alpha |^m = C^{\gamma}_{\beta\alpha}{}^{(B)AB} e^{(A)i}_\gamma f^{(B)\beta}_m \quad (A = 0, 1, 2; B = 1, 2) \tag{3.9}$$

$$f^{(A)\gamma}_{i|m} = -L^{\gamma}_{\beta\alpha}{}^{0A} f^{(A)\alpha}_i f^{(0)\beta}_m, \quad f^{(A)\alpha}_i |^m = -C^{\gamma}_{\beta\alpha}{}^{(B)AB} f^{(A)\alpha}_i f^{(B)\beta}_m \quad (A = 0, 1, 2; B = 1, 2) \tag{3.10}$$

4 Covariant invariant derivatives

Let $X \in \chi(E)$ and $X^{(0)\alpha}$, $X^{(1)\alpha}$, $X^{(2)\alpha}$ its invariant components. We denote $\omega^{(A)}$, and $\omega^{(A)\alpha}$, $(A = 1, 2)$ the operators of h -, v_1 - și v_2 - covariant invariant derivative w.r.t. $CT(N)$ acting in this manner:

Definition 4.1 The h -, v_1 - și v_2 - invariant covariant derivatives of the components $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ are $(A=0,1,2; B=1,2)$:

$$X^{(A)\alpha}_{\beta} = \frac{\delta X^{(A)\alpha}}{\delta s^{(0)\beta}} + L^{(0A)}_{\varphi\beta} X^{(A)\varphi} \tag{4.1}$$

$$X^{(A)\alpha}_{\beta}^{(B)} = \frac{\delta X^{(A)\alpha}}{\delta s^{(B)\beta}} + C^{(BA)}_{\varphi\beta} X^{(A)\varphi} \tag{4.2}$$

If ω is 1-form field and $\omega^{(A)}_{\alpha}$, $(A = 0, 1, 2)$ its invariant components then:

Definition 4.2 The h -, v_1 - și v_2 - covariant invariant derivatives of the components $\omega^{(0)}_{\alpha}$, $\omega^{(1)}_{\alpha}$, $\omega^{(2)}_{\alpha}$ are $(A=0,1,2; B=1,2)$:

$$\omega^{(A)}_{\alpha\beta} = \frac{\delta \omega^{(A)}_{\alpha}}{\delta s^{(0)\beta}} - L^{(0A)}_{\varphi\alpha\beta} \omega^{(A)\varphi} \tag{4.3}$$

$$\omega^{(A)}_{\alpha\beta}^{(B)} = \frac{\delta \omega^{(A)}_{\alpha}}{\delta s^{(B)\beta}} - C^{(BA)}_{\varphi\alpha\beta} \omega^{(A)\varphi} \tag{4.4}$$

Theorem 4.1 The h -, v_1 - și v_2 - covariant invariant derivatives of $X^{(A)\alpha}$ and $\omega^{(A)}_{\alpha}$ are the invariant components of the h -, v_1 - și v_2 - covariant derivatives of the components in the adapted basis of X and ω i. e.

$$X^{(A)\alpha}_{\beta} = X^{(A)i}_{|m} f^{(A)\alpha}_i e^{(0)m}_{\beta} \tag{4.5}$$

$$X^{(A)\alpha}_{\beta}^{(B)} = X^{(A)i}_{|m} f^{(A)\alpha}_i e^{(B)m}_{\beta} \tag{4.6}$$

$$\omega^{(A)}_{\alpha\beta} = \omega^{(A)}_{i|m} e^{(A)i}_{\alpha} e^{(0)m}_{\beta} \tag{4.7}$$

$$\omega^{(A)}_{\alpha\beta}^{(B)} = \omega^{(A)}_{i|m} e^{(A)i}_{\alpha} e^{(B)m}_{\beta} \tag{4.8}$$

or equivalent:

$$X^{(A)i}_{|m} = X^{(A)\alpha}_{\beta} e^{(A)i}_{\alpha} f^{(0)\beta}_m \tag{4.9}$$

$$X^{(A)i}_{|m}^{(B)} = X^{(A)\alpha}_{\beta} e^{(A)i}_{\alpha} f^{(B)\beta}_m \omega^{(A)}_{i|m} = \omega^{(A)}_{\alpha\beta} f^{(A)\alpha}_i f^{(0)\beta}_m \tag{4.10}$$

$$\omega^{(A)}_{i|m}^{(B)} = \omega^{(A)}_{\alpha} e^{(A)i}_{\alpha} f^{(B)\beta}_m \omega^{(A)}_{i|m} = \omega^{(A)}_{\alpha\beta} f^{(A)\alpha}_i f^{(B)\beta}_m \tag{4.11}$$

5. Torsion and curvature tensor fields in invariant frames

The torsion tensor field of the canonical metrical N-linear connection C is given by:

$$T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y], \quad \forall X, Y \in \chi(E) \tag{5.1}$$

In the frames \mathcal{R} this tensor field has some horizontal and vertical components corresponding to D^H , D^{V_1} , D^{V_2} :

$$\begin{cases} h\mathcal{T} \left(\frac{\delta}{\delta_{S^{(0)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta_{S^{(0)\beta}}} \right) = \bar{T}_{(0)\beta\alpha}^{\gamma} \frac{\delta}{\delta_{S^{(0)\gamma}}} \\ v_A\mathcal{T} \left(\frac{\delta}{\delta_{S^{(0)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta_{S^{(0)\beta}}} \right) = \bar{R}_{(0A)\beta\alpha}^{\gamma} \frac{\delta}{\delta_{S^{(A)\gamma}}} \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} h\mathcal{T} \left(\frac{\delta}{\delta_{S^{(0)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta_{S^{(1)\beta}}} \right) = \bar{K}_{(1)\beta\alpha}^{\gamma} \frac{\delta}{\delta_{S^{(0)\gamma}}} \\ v_A\mathcal{T} \left(\frac{\delta}{\delta_{S^{(0)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta_{S^{(1)\beta}}} \right) = \bar{P}_{(A1)\beta\alpha}^{\gamma} \frac{\delta}{\delta_{S^{(A)\gamma}}} \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} h\mathcal{T} \left(\frac{\delta}{\delta_{S^{(0)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta_{S^{(2)\beta}}} \right) = \bar{K}_{(2)\beta\alpha}^{\gamma} \frac{\delta}{\delta_{S^{(0)\gamma}}} \\ v_A\mathcal{T} \left(\frac{\delta}{\delta_{S^{(0)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta_{S^{(2)\beta}}} \right) = \bar{P}_{(A2)\beta\alpha}^{\gamma} \frac{\delta}{\delta_{S^{(A)\gamma}}} \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} h\mathcal{T} \left(\frac{\delta}{\delta_{S^{(1)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta_{S^{(1)\beta}}} \right) = 0 \\ v_A\mathcal{T} \left(\frac{\delta}{\delta_{S^{(1)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta_{S^{(1)\beta}}} \right) = \bar{Q}_{(A1)\beta\alpha}^{\gamma} \frac{\delta}{\delta_{S^{(A)\gamma}}} \end{cases} \quad (5.5)$$

$$v_A\mathcal{T} \left(\frac{\delta}{\delta_{S^{(1)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta_{S^{(2)\beta}}} \right) = \bar{Q}_{(A2)\beta\alpha}^{\gamma} \frac{\delta}{\delta_{S^{(A)\gamma}}} \quad (5.6)$$

$$\begin{cases} v_1\mathcal{T} \left(\frac{\delta}{\delta_{S^{(2)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta_{S^{(2)\beta}}} \right) = 0 \\ v_2\mathcal{T} \left(\frac{\delta}{\delta_{S^{(2)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta_{S^{(2)\beta}}} \right) = \bar{S}_{(2)\beta\alpha}^{\gamma} \frac{\delta}{\delta_{S^{(2)\gamma}}} \end{cases} \quad (5.7)$$

(A = 1, 2.)

By definition we take:

$$\begin{cases} \bar{T}_{(0)\beta\alpha}^{\gamma} = L_{\beta\alpha}^{\gamma(00)} - L_{\alpha\beta}^{\gamma(00)} - W_{(00)\beta\alpha}^{\gamma(0)} \\ \bar{R}_{(0A)\beta\alpha}^{\gamma} = W_{(00)\beta\alpha}^{\gamma(A)} \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\begin{cases} \bar{K}_{(1)\beta\alpha}^{\gamma} = -C_{\beta\alpha}^{\gamma(10)} - W_{(01)\beta\alpha}^{\gamma(0)} \\ \bar{P}_{(11)\beta\alpha}^{\gamma} = L_{\beta\alpha}^{\gamma(01)} + W_{(01)\beta\alpha}^{\gamma(1)} \\ \bar{P}_{(12)\beta\alpha}^{\gamma} = W_{(01)\beta\alpha}^{\gamma(2)} \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\begin{cases} \bar{K}_{(2)\beta\alpha}^{\gamma} = -C_{\beta\alpha}^{\gamma(20)} - W_{(02)\beta\alpha}^{\gamma(0)} \\ \bar{P}_{(21)\beta\alpha}^{\gamma} = W_{(02)\alpha\beta}^{\gamma(1)} - W_{(01)\beta\alpha}^{\gamma(1)} \\ \bar{P}_{(22)\beta\alpha}^{\gamma} = L_{\beta\alpha}^{\gamma(02)} + W_{(02)\beta\alpha}^{\gamma(2)} \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\begin{cases} \bar{Q}_{(11)\beta\alpha}^\gamma = C_{\beta\alpha}^{(11)\gamma} - C_{\alpha\beta}^{(11)\gamma} - \bar{W}_{(11)\beta\alpha}^{(1)\gamma} \\ \bar{Q}_{(21)\beta\alpha}^\gamma = \bar{W}_{(11)\beta\alpha}^{(2)\gamma} \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} \bar{Q}_{(12)\beta\alpha}^\gamma = C_{\beta\alpha}^{(21)\gamma} - \bar{W}_{(12)\beta\alpha}^{(1)\gamma} \\ \bar{Q}_{(22)\beta\alpha}^\gamma = -C_{\alpha\beta}^{(12)\gamma} - \bar{W}_{(12)\beta\alpha}^{(2)\gamma} \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\begin{cases} \bar{S}_{(2)\beta\alpha}^\gamma = C_{\beta\alpha}^{(22)\gamma} - C_{\alpha\beta}^{(22)\gamma} - \bar{W}_{(22)\beta\alpha}^{(2)\gamma} \end{cases} \quad (5.13)$$

Theorem 5.1 *The d-tensors defined by 5.8–5.13 represent the invariant components at local changes of coordinates of the components of the d-tensor of torsion of the connection C.*

We observe that all the invariant components of the torsion tensor vanish except:

$$\bar{K}_{(1)\beta\alpha}^\gamma = f^{(0)\gamma}_m e^{(1)i}_\alpha e^{(0)j}_\beta C_{(1)ij}^m, \quad \bar{P}_{(21)\beta\alpha}^\gamma = f^{(1)\gamma}_l \frac{\delta e^{(1)l}_\beta}{\delta s^{(0)\alpha}};$$

The curvature tensor field of the N-linear connection D on E are given by

$$\mathbb{R}(X, Y) = [D_X, D_Y]Z - D_{[X, Y]}Z, \quad \forall X, Y, Z \in \chi(E). \quad (5.14)$$

In the frame \mathcal{R} we define the d-tensor fields with the local components:

$$\mathbb{R}\left(\frac{\delta}{\delta s^{(0)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta s^{(0)\beta}}\right) \frac{\delta}{\delta s^{(0)\gamma}} = \bar{R}_{\gamma\beta\alpha}^\varphi \frac{\delta}{\delta s^{(0)\varphi}} \quad (5.15)$$

$$\mathbb{R}\left(\frac{\delta}{\delta s^{(0)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta s^{(1)\beta}}\right) \frac{\delta}{\delta s^{(0)\gamma}} = \bar{P}_{(1)\gamma\beta\alpha}^\varphi \frac{\delta}{\delta s^{(0)\varphi}} \quad (5.16)$$

$$\mathbb{R}\left(\frac{\delta}{\delta s^{(0)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta s^{(2)\beta}}\right) \frac{\delta}{\delta s^{(0)\gamma}} = \bar{P}_{(2)\gamma\beta\alpha}^\varphi \frac{\delta}{\delta s^{(0)\varphi}} \quad (5.17)$$

$$\mathbb{R}\left(\frac{\delta}{\delta s^{(1)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta s^{(1)\beta}}\right) \frac{\delta}{\delta s^{(0)\gamma}} = \bar{S}_{(11)\gamma\beta\alpha}^\varphi \frac{\delta}{\delta s^{(0)\varphi}} \quad (5.18)$$

$$\mathbb{R}\left(\frac{\delta}{\delta s^{(1)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta s^{(2)\beta}}\right) \frac{\delta}{\delta s^{(0)\gamma}} = \bar{S}_{(21)\gamma\beta\alpha}^\varphi \frac{\delta}{\delta s^{(0)\varphi}} \quad (5.19)$$

$$\mathbb{R}\left(\frac{\delta}{\delta s^{(2)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta s^{(2)\beta}}\right) \frac{\delta}{\delta s^{(0)\gamma}} = \bar{S}_{(22)\gamma\beta\alpha}^\varphi \frac{\delta}{\delta s^{(0)\varphi}} \quad (5.20)$$

where:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\gamma\beta\alpha}^\varphi = & \frac{\delta L^{(00)\varphi}_{\gamma\beta}}{\delta s^{(0)\alpha}} - \frac{\delta L^{(00)\varphi}_{\gamma\alpha}}{\delta s^{(0)\beta}} + L^{(00)\eta}_{\gamma\beta} L^{(00)\varphi}_{\eta\alpha} - L^{(00)\eta}_{\gamma\alpha} L^{(00)\varphi}_{\eta\beta} - \\ & - \overset{0}{W}_{\beta\alpha}^\psi L^{(00)\varphi}_{\gamma\psi} + \overset{1}{W}_{\beta\alpha}^\psi C^{(10)\varphi}_{\gamma\psi} + \overset{2}{W}_{\beta\alpha}^\psi C^{(20)\varphi}_{\gamma\psi} \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_{(1)\gamma\beta\alpha}^\varphi &= \frac{\delta C_{\gamma\beta}^{(10)\varphi}}{\delta S^{(0)\alpha}} - \frac{\delta L_{\gamma\alpha}^{(00)\varphi}}{\delta S^{(1)\beta}} + C_{\gamma\beta}^{(10)\eta} L_{\eta\alpha}^{(00)\varphi} - L_{\gamma\alpha}^{(00)\eta} C_{\eta\beta}^{(10)\varphi} - \\ &\quad - W_{(01)\beta\alpha}^{\psi(00)\varphi} L_{\gamma\psi}^{(00)\varphi} + W_{(01)\beta\alpha}^{\psi(10)\varphi} C_{\gamma\psi}^{(10)\varphi} + W_{(01)\beta\alpha}^{\psi(20)\varphi} C_{\gamma\psi}^{(20)\varphi} \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_{(2)\gamma\beta\alpha}^\varphi &= \frac{\delta C_{\gamma\beta}^{(20)\varphi}}{\delta S^{(0)\alpha}} - \frac{\delta L_{\gamma\alpha}^{(00)\varphi}}{\delta S^{(2)\beta}} + C_{\gamma\beta}^{(20)\eta} L_{\eta\alpha}^{(00)\varphi} - L_{\gamma\alpha}^{(00)\eta} C_{\eta\beta}^{(20)\varphi} - \\ &\quad - W_{(02)\beta\alpha}^{\psi(00)\varphi} L_{\gamma\psi}^{(00)\varphi} + W_{(02)\beta\alpha}^{\psi(10)\varphi} C_{\gamma\psi}^{(10)\varphi} + W_{(02)\beta\alpha}^{\psi(20)\varphi} C_{\gamma\psi}^{(20)\varphi} \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{(11)\gamma\beta\alpha}^\varphi &= \frac{\delta C_{\gamma\beta}^{(10)\varphi}}{\delta S^{(1)\alpha}} - \frac{\delta C_{\gamma\alpha}^{(10)\varphi}}{\delta S^{(1)\beta}} + C_{\gamma\beta}^{(10)\eta} C_{\eta\alpha}^{(10)\varphi} - C_{\gamma\alpha}^{(10)\eta} C_{\eta\beta}^{(10)\varphi} - \\ &\quad - W_{(11)\beta\alpha}^{\psi(10)\varphi} C_{\gamma\psi}^{(10)\varphi} + W_{(11)\beta\alpha}^{\psi(20)\varphi} C_{\gamma\psi}^{(20)\varphi} \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{(21)\gamma\beta\alpha}^\varphi &= \frac{\delta C_{\gamma\beta}^{(20)\varphi}}{\delta S^{(1)\alpha}} - \frac{\delta C_{\gamma\alpha}^{(10)\varphi}}{\delta S^{(2)\beta}} + C_{\gamma\beta}^{(20)\eta} C_{\eta\alpha}^{(10)\varphi} - C_{\gamma\alpha}^{(10)\eta} C_{\eta\beta}^{(20)\varphi} + \\ &\quad + W_{(12)\beta\alpha}^{\psi(10)\varphi} C_{\gamma\psi}^{(10)\varphi} + W_{(12)\beta\alpha}^{\psi(20)\varphi} C_{\gamma\psi}^{(20)\varphi} \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\bar{S}_{(22)\gamma\beta\alpha}^\varphi = \frac{\delta C_{\gamma\beta}^{(20)\varphi}}{\delta S^{(2)\alpha}} - \frac{\delta C_{\gamma\alpha}^{(20)\varphi}}{\delta S^{(2)\beta}} + C_{\gamma\beta}^{(20)\eta} C_{\eta\alpha}^{(20)\varphi} - C_{\gamma\alpha}^{(20)\eta} C_{\eta\beta}^{(20)\varphi} + W_{(22)\beta\alpha}^{\psi(20)\varphi} C_{\gamma\psi}^{(20)\varphi} \quad (5.26)$$

Theorem 5.2 *The formulas 5.21–5.26 represent the invariant components at local changes of coordinates of the curvature tensor fields of an N-linear connection D, which adapted basis have the coefficients*

$$D\Gamma(N) = \left(L^i_{jk}, C^i_{(1)jk}, C^i_{(2)jk} \right)$$

Corollary 5.1 *For the canonical metrical N-linear connection C all the component of the curvature tensor fields vanish except $\bar{P}_{(1)\gamma\beta\alpha}^\varphi, \bar{S}_{(11)\gamma\beta\alpha}^\varphi, \bar{S}_{(21)\gamma\beta\alpha}^\varphi$*

6. Structure equations in invariant frames

Introducing the invariant covariant differential of the vector field X in the shape

$$DX = \left\{ dX^{(A)\alpha} + X^{(A)\gamma} \omega_{\gamma}^{(A)\alpha} \right\} \frac{\delta}{\delta S^{(A)\alpha}} \quad (6.1)$$

(A=0,1,2; sumation by A)

In order to obtain the structure equations in invariant frames of the canonical metrical N-linear connection C it is necessary to compute the exterior differentials of the 1-forms of connection and of the 1-forms $\delta S^{(A)\alpha}$.

Theorem 6.1 *The exterior differentials of the 1-forms $\delta s^{(A)\alpha}$ ($A=0,1,2$) depend only on the non-holonomy coefficients of Vranceanu and are given by*

$$d(\delta s^{(0)\gamma}) = \overset{(0)}{W}_{\beta\alpha}^{\gamma} \delta s^{(0)\alpha} \wedge \delta s^{(0)\beta} + \overset{(0)}{W}_{\beta\alpha}^{\gamma} \delta s^{(0)\alpha} \wedge \delta s^{(1)\beta} + \overset{(0)}{W}_{\beta\alpha}^{\gamma} \delta s^{(0)\alpha} \wedge \delta s^{(2)\beta} \tag{6.2}$$

$$d(\delta s^{(1)\gamma}) = \overset{(1)}{W}_{\beta\alpha}^{\gamma} \delta s^{(0)\alpha} \wedge \delta s^{(1)\beta} + \overset{(1)}{W}_{\beta\alpha}^{\gamma} \delta s^{(1)\alpha} \wedge \delta s^{(1)\beta} + \overset{(1)}{W}_{\beta\alpha}^{\gamma} \delta s^{(1)\alpha} \wedge \delta s^{(2)\beta} \tag{6.3}$$

$$d(\delta s^{(2)\gamma}) = \overset{(2)}{W}_{\beta\alpha}^{\gamma} \delta s^{(0)\alpha} \wedge \delta s^{(2)\beta} + \overset{(2)}{W}_{\beta\alpha}^{\gamma} \delta s^{(1)\alpha} \wedge \delta s^{(2)\beta} + \overset{(2)}{W}_{\beta\alpha}^{\gamma} \delta s^{(2)\alpha} \wedge \delta s^{(2)\beta} \tag{6.4}$$

Using the invariant 1-form of connection of C we prove

Theorem 6.2 *The structure equations of the canonical metrical N -linear connection C in invariant frames are given by the relations:*

$$d(\delta s^{(A)\alpha}) - \delta s^{(A)\beta} \wedge \omega_{\beta}^{(A)\alpha} = - \Omega^{\alpha} \tag{6.5}$$

$$d(\omega_{\beta}^{(A)\alpha}) - \omega_{\beta}^{(A)\gamma} \wedge \omega_{\gamma}^{(A)\alpha} = - \Omega_{\beta}^{(A)\alpha} \quad (A = 0, 1, 2), \tag{6.6}$$

where the 2-forms of torsion Ω^{α} are given by:

$$\Omega^{\alpha} = \overset{(0)}{K}_{\beta\gamma}^{\alpha} \delta s^{(0)\beta} \wedge \delta s^{(1)\gamma}; \quad \Omega^{\alpha} = \overset{(1)}{P}_{\beta\gamma}^{\alpha} \delta s^{(0)\beta} \wedge \delta s^{(2)\gamma}; \quad \Omega^{\alpha} = 0 \tag{6.7}$$

and the 2-forms of curvature $\Omega_{\beta}^{(A)\alpha}$, ($A=0,1,2$), are given by:

$$\Omega_{\beta}^{(A)\alpha} = \overset{(A)}{P}_{\beta\varphi\psi}^{\alpha} \delta s^{(0)\varphi} \wedge \delta s^{(1)\psi} + \overset{(A)}{S}_{\beta\varphi\psi}^{\alpha} \delta s^{(1)\varphi} \wedge \delta s^{(1)\psi} + \overset{(A)}{S}_{\beta\varphi\psi}^{\alpha} \delta s^{(1)\varphi} \wedge \delta s^{(2)\psi} \tag{6.8}$$

7. Vranceanu identities

Let consider the Jacobi identity for three vector fields $X, Y, Z \in \chi(E)$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \tag{7.1}$$

Using the projectors h -, v_1 -, v_2 - applied on the vector fields X, Y, Z we obtain:

$$[X^A, [Y^B, Z^C]] + [Y^B, [Z^C, X^A]] + [Z^C, [X^A, Y^B]] = 0 \tag{7.2}$$

$$A, B, C = 0, 1, 2; \quad A \leq B \leq C; \quad T^0 = hT, \quad T^1 = v_1T, \quad T^2 = v_2T, \quad T \in \{X, Y, Z\}$$

The action of a field X on a function

$$f \in \mathcal{F}(E), \quad (x, y^{(1)}, y^{(2)}) \longmapsto f(x, y^{(1)}, y^{(2)}) \in \mathbf{R}$$

is given by the action of the operators $\frac{\delta}{\delta s^{(a)\alpha}}$ ($a=0,1,2$) on f .

Let consider the table

X	U	U	U	U	U	U	V	V	V	W
Y	U	U	U	V	V	W	V	V	W	W
Z	U	V	W	V	W	W	V	W	W	W

where $U = \frac{\delta}{\delta_S^{(0)\alpha}}$, $V = \frac{\delta}{\delta_S^{(1)\alpha}}$, $W = \frac{\delta}{\delta_S^{(2)\alpha}}$.

Using identity (7.2) and the linear independence of the system

$$\left\{ \frac{\delta}{\delta_S^{(0)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta_S^{(1)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta_S^{(2)\alpha}} \right\}$$

we can obtain a lot of identities. From them we mention:

Proposition 7.1 *The non-holonomy coefficients of Vranceanu satisfy the fundamental identities:*

$$\sum_{\alpha, \beta, \gamma} \left(\overset{A}{W}_{(AA)\beta\gamma}{}^\sigma \overset{A}{W}_{(AA)\alpha\sigma}{}^\eta + \frac{\delta \overset{A}{W}_{(AA)\beta\gamma}{}^\eta}{\delta_S^{(A)\alpha}} \right) = 0 \tag{7.3}$$

cyclic sumation on α, β, γ , $A=0,1,2$.

$$\diamond(\alpha, \beta) \left[\overset{0}{W}_{(01)\beta\gamma}{}^\sigma \overset{0}{W}_{(00)\alpha\sigma}{}^\eta + \overset{1}{W}_{(01)\beta\gamma}{}^\sigma \overset{0}{W}_{(01)\alpha\sigma}{}^\eta + \frac{\delta \overset{0}{W}_{(01)\beta\gamma}{}^\eta}{\delta_S^{(0)\alpha}} + \frac{1}{2} \overset{0}{W}_{(00)\alpha\beta}{}^\sigma \overset{0}{W}_{(01)\sigma\gamma}{}^\eta + \frac{1}{2} \frac{\delta \overset{0}{W}_{(00)\alpha\beta}{}^\eta}{\delta_S^{(1)\gamma}} \right] = 0 \tag{7.4}$$

$$\diamond(\alpha, \beta) \left[\overset{1}{W}_{(01)\beta\gamma}{}^\sigma \overset{1}{W}_{(01)\alpha\sigma}{}^\eta + \frac{\delta \overset{1}{W}_{(01)\beta\gamma}{}^\eta}{\delta_S^{(0)\alpha}} + \frac{1}{2} \overset{0}{W}_{(00)\alpha\beta}{}^\sigma \overset{1}{W}_{(01)\sigma\gamma}{}^\eta \right] = 0$$

$$\diamond(\alpha, \beta) \left[\overset{0}{W}_{(02)\beta\gamma}{}^\sigma \overset{0}{W}_{(00)\alpha\sigma}{}^\eta + \overset{2}{W}_{(02)\beta\gamma}{}^\sigma \overset{0}{W}_{(02)\alpha\sigma}{}^\eta + \frac{\delta \overset{0}{W}_{(02)\beta\gamma}{}^\eta}{\delta_S^{(0)\alpha}} + \frac{1}{2} \overset{0}{W}_{(00)\alpha\beta}{}^\sigma \overset{0}{W}_{(02)\sigma\gamma}{}^\eta + \frac{1}{2} \frac{\delta \overset{0}{W}_{(00)\alpha\beta}{}^\eta}{\delta_S^{(1)\gamma}} + \frac{1}{2} \frac{\delta \overset{0}{W}_{(00)\alpha\beta}{}^\eta}{\delta_S^{(2)\gamma}} \right] = 0$$

$$\frac{\delta \overset{0}{W}_{(01)\beta\gamma}{}^\eta}{\delta_S^{(0)\alpha}} + \frac{\delta \overset{1}{W}_{(12)\beta\gamma}{}^\eta}{\delta_S^{(0)\alpha}} + \overset{1}{W}_{(12)\beta\gamma}{}^\sigma \overset{1}{W}_{(01)\alpha\sigma}{}^\eta + \overset{0}{W}_{(02)\beta\gamma}{}^\sigma \overset{1}{W}_{(01)\alpha\sigma}{}^\eta + \overset{2}{W}_{(02)\beta\gamma}{}^\sigma \overset{1}{W}_{(12)\alpha\sigma}{}^\eta - \overset{1}{W}_{(01)\alpha\beta}{}^\sigma \overset{1}{W}_{(12)\sigma\gamma}{}^\eta = 0 \tag{7.5}$$

$$\frac{\delta \overset{2}{W}_{(12)\beta\gamma}{}^\eta}{\delta_S^{(0)\alpha}} + \frac{\delta \overset{2}{W}_{(02)\beta\gamma}{}^\eta}{\delta_S^{(0)\alpha}} + \overset{2}{W}_{(12)\beta\gamma}{}^\sigma \overset{2}{W}_{(02)\alpha\sigma}{}^\eta - \overset{0}{W}_{(01)\alpha\beta}{}^\sigma \overset{2}{W}_{(02)\sigma\gamma}{}^\eta - \overset{1}{W}_{(01)\alpha\beta}{}^\sigma \overset{2}{W}_{(12)\sigma\gamma}{}^\eta = 0$$

$\diamond(\alpha, \beta)$ *meaning index permutation and subtracting results,*

8. Maxwell equations in invariant frames

Let

$$Y^{(1)} = y^{(1)i} \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}, \quad Y^{(2)} = y^{(2)i} \frac{\delta}{\delta y^{(2)i}}.$$

be a vector field. Its expression in an invariant frame is

$$Y^{(1)} = y^{(1)i} f_i^{(1)\alpha} \frac{\delta}{\delta_S^{(1)\alpha}}; \quad Y^{(2)} = y^{(2)i} f_i^{(2)\alpha} \frac{\delta}{\delta_S^{(2)\alpha}} \tag{8.1}$$

Define:

$$s^{(1)\alpha} = y^{(1)i} f_i^{(1)\alpha}; \quad s^{(2)\alpha} = y^{(2)i} f_i^{(2)\alpha} \tag{8.2}$$

Denoting:

$$q^{(1)\alpha} = s^{(1)\alpha}; \quad q^{(2)\alpha} = s^{(2)\alpha} + \frac{1}{2} M_{(1)}^\alpha{}_\beta s^{(1)\beta} \tag{8.3}$$

Then the Liouville vector fields in invariant frames are:

$$\begin{aligned} \overset{1}{\Gamma} &= q^{(1)\alpha} \frac{\delta}{\delta s^{(2)\beta}} \\ \overset{2}{\Gamma} &= q^{(1)\alpha} \frac{\delta}{\delta s^{(1)\alpha}} + 2q^{(2)\alpha} \frac{\delta}{\delta s^{(2)\alpha}} \end{aligned} \tag{8.4}$$

Consider the case where the frame has identical components on the three directions. We denote by:

$$e_{\alpha}^{(0)i} = e_{\alpha}^{(1)i} = e_{\alpha}^{(2)i} = e_{\alpha}^i \tag{8.5}$$

and for the duals we have:

$$f_i^{(0)\alpha} = f_i^{(1)\alpha} = f_i^{(2)\alpha} = f_i^{\alpha} \tag{8.6}$$

Then:

$$\begin{aligned} L^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{(00)} &= L^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{(01)} = L^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{(02)} = \frac{1}{2} W_{(00)}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \\ C^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{(10)} &= C^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{(11)} = C^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{(12)} = \frac{1}{2} W_{(11)}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + f_i^{\alpha} e_{\beta}^j e_{\gamma}^k C_{(1)jk}^i \\ C^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{(20)} &= C^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{(21)} = C^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{(22)} = \frac{1}{2} W_{(22)}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \end{aligned} \tag{8.7}$$

We denote this connection by $C\bar{\Gamma}(N)$.

Definition 8.1 *The deflection tensors of $C\bar{\Gamma}(N)$ are:*

$$D^{(A)\alpha}{}_{\beta} = q^{(A)\alpha}{}_{\beta}; \quad d^{(AB)\alpha}{}_{\beta} = q^{(A)\alpha}{}_{\beta} \quad (A, B = 1, 2) \tag{8.8}$$

Definition 8.2 *The invariant electromagnetic tensor fields are:*

$$\begin{aligned} F^{(A)}{}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\delta q^{(A)}_{\alpha}}{\delta s^{(0)\beta}} - \frac{\delta q^{(A)}_{\beta}}{\delta s^{(0)\alpha}} \right) \\ f^{(AB)}{}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\delta q^{(A)}_{\alpha}}{\delta s^{(B)\beta}} - \frac{\delta q^{(A)}_{\beta}}{\delta s^{(B)\alpha}} \right) \quad (A, B = 1, 2) \end{aligned} \tag{8.9}$$

where $q^{(A)}_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta} q^{(A)\beta}$ and $\epsilon_{\alpha\beta}$ are the invariant components of the metric tensor

Theorem 8.1 *The invariant electromagnetic tensor fields satisfy the following generalized Maxwell equations*

$$\sum_{cycl\ \alpha\beta\gamma} F^{(A)}_{\alpha\beta\gamma} = 0 \tag{8.10}$$

$$\sum_{cycl\ \alpha\beta\gamma} F^{(A)}_{\alpha\beta\gamma}^{(1)} + \sum_{cycl\ \alpha\beta\gamma} f^{(A1)}_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{cycl\ \alpha\beta\gamma} \left\{ q^{(A)\eta} \left(P_{(1)\eta\beta\alpha\gamma} - P_{(1)\eta\gamma\alpha\beta} \right) - d^{(A1)}_{\beta\eta} \left(P_{(A)\alpha\gamma}^{\eta} - P_{(A)\gamma\alpha}^{\eta} \right) \right\}$$

$$\sum_{cycl\ \alpha\beta\gamma} F^{(A)}_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} + \sum_{cycl\ \alpha\beta\gamma} f^{(A2)}_{\alpha\beta\gamma} = 0$$

$$\sum_{cycl\ \alpha\beta\gamma} f^{(A1)}_{\alpha\beta\gamma}^{(1)} = \sum_{cycl\ \alpha\beta\gamma} q^{(A)\eta} S_{(A1)\eta\beta\alpha\gamma}$$

$$\sum_{cycl\ \alpha\beta\gamma} f^{(A2)}_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} = 0$$

$$\sum_{cycl\ \alpha\beta\gamma} f^{(A1)}_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} = \sum_{cycl\ \alpha\beta\gamma} \left(d^{(A1)}_{\beta\eta} P_{(21)\alpha\gamma}^{\eta} - d^{(A1)}_{\beta\eta} \left(C_{(1)\alpha\gamma}^{\eta} - C_{(1)\gamma\alpha}^{\eta} \right) \right) \tag{8.11}$$

$$\sum_{cycl\ \alpha\beta\gamma} f^{(A2)}_{\alpha\beta\gamma}^{(1)} = \sum_{cycl\ \alpha\beta\gamma} q^{(A)\eta} S_{(21)\eta\beta\alpha\gamma}$$

By direct calculations we see that:

$$\begin{aligned} F^{(A)}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \overset{0}{W}_{(00)\alpha\varphi\beta} S^{(A)\varphi}, \\ f^{(AB)}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \overset{A}{W}_{(AA)\alpha\varphi\beta} S^{(B)\varphi} \quad (A, B = 1, 2) \end{aligned} \tag{8.12}$$

Theorem 8.2 *In a generalized Lagrange space endowed with a Berwald-Moor type metric, w.r.t. the canonical metrical N-linear connection and in normal invariant frames Maxwell equations 8.10 are equivalent to Vranceanu identities 7.3–7.5.*

References

- [AN] **Anastasiu, M.**, *Vector bundles. Einstein Equations.*, An. St. Univ. Al. I. Cuza Iași, 32, (1986), 17–24.
- [AB] **Antonelli, P.L., Bucătaru, I.**, *On Holland’s frame for Randers spaces and its applications in physics*, Proc. Col. on Diff Geom, 23–30 july, Debrecen (2000), 39–53.
- [AT5] **Atanasiu, Gh.**, *The Equations of structure of an N-linear connection in the bundle of accelerations*, Balkan Journal of Geometry and its Appl., Vol I, No 1 (1996), 11–19.
- [BB] **Balan, V., Brinzei, N.**, *Einstein equations for the Berwald-Moór type Euclidean-locally Minkowsky relativistic model*, 5-th Conf of B.S.G, Mangalia, Romania 27–31 aug 2005.

- [IN] Ingarden, R. S., *Differential geometry and physics*, Tensor, N. S. 30, (1976), 201–209.
- [M] Miron, R., *A Lagrangeian theory of relativity*, I,II,An. St. Univ. Al. I. Cuza Iași, sI a Mat. 32, (1986), 37–62 și 33, (1987) 137–149.
- [M1] Miron, R., *The geometry of higher order Lagrange spaces. Applications to Mechanics and Physics*, Kluwer Acad.Publ. FTPH (1996).
- [M2] Miron, R., *Invariant frames in the normal distribution of a non-holonomic manifold of a Riemann space*, Luc. Conf. Nat. Sp. Neolo. Ed. Acad. R.S.R. (1979), 111–119.
- [MA] Miron, R., Atanasiu, Gh., *Geometrical Theory of gravitational and Electromagnetic fields in higher order Lagrange spaces*, Tsukuba j. Math. vol 20, No 1, (1996), 137–149.
- [MAN] Miron, R., Anastasiei, M., *The geometry of Lagrange spaces. Theory and applications.*, Kluwer Acad. Pub. FTPH 59, (1994).
- [MM] Miron, R., Izumi, H., *Invariant frame in generalized metric spaces*, Tensor, N. S., vol 42 (1985) 272, 282.
- [P] Păun, M., *Einstein Equations for a generalized Lagrange space of order two in invariant frames*, Proc Glob An., Diff. Geom. Lie Alg. G.B.P. 4, (1998), 76–82.
- [P1] Păun, M., *Structure equations in invariant frames*, Proc Glob An., Diff. Geom. Lie Alg. G.B.P. 3, (1996), 55–61.
- [P2] Păun, M., *The concept of invariant geometry of second order*, Balkan J. of Geom. vol 7, no 2, 2002, 57–66.
- [P4] Păun, M., *Fundamental identities in invariant frames*, Proc Glob An., Diff. Geom. Lie Alg. G.B.P. 5, (1999), 63–72.
- [PA] Pavlov, D. G., *Generalization of scalar product axioms*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. Mozet, Russia, 1, 1 (2004), 5–18.
- [PA1] Pavlov, D. G., *Chronometry of the three-dimensional time*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. Mozet, Russia, 1, 1 (2004), 19–30.
- [PA2] Pavlov, D. G., *Four-dimensional time*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. Mozet, Russia, 1, 1 (2004), 31–39.
- [VR] Vranceanu, Gh., *Les espaces non holonomes*, Gauthier, Paris, (1936).
- [VR1] Vranceanu, Gh., *Lecons de geometrie differentielle*, volI,II,III, Ed. Acad. Rom. București, (1957).
- [U] Udriște, C., *Congruences on the tangent bundle of a differentiable manifold*, Rev. Rou. Math. Pur. et Appl. 15, (1970), 1079–1096.
- [U3] Udriște, C., *Geometric Dynamics*, Southeast As. Bull. Math. Springer-Verlag,24,1, (2000), 1–11.

ТЕОРИЯ ЭФФЕКТА НУЛЕВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

С. В. Сипаров

Государственный Университет гражданской авиации, С-Петербург, Россия
sergey@siparov.spb.su

Обсуждается применимость теории относительности Эйнштейна на галактических масштабах, а также роль и место геометрии в решении проблем наблюдательной астрофизики. Предложена теория эффекта нулевого порядка для экспериментального исследования геометрических свойств пространства-времени.

Ключевые слова: теория относительности, астрофизика, оптико-метрический параметрический резонанс.

«Я буду по возможности избегать касаться тех вопросов, которые хотя и способствовали выявлению искренности математиков, но не расширили наших научных познаний».

Дж. К. Максвелл «Трактат об электричестве»

Проблема измерения и его трактовки начинает играть особую роль, поскольку никоим образом невозможно произвести измерение так, чтобы одновременно определить состояние системы и предсказать ее поведение с желаемой точностью.

«О принципе неопределенности В. Гейзенберга»

Введение

В XVII веке отклонения формы орбит планет от идеальных окружностей, обнаруженные И. Кеплером в результате наблюдений, поставили перед наукой дилемму. Либо законы природы и математики не тождественны, и миром правит не математическая гармония. Либо наши знания не полны не только в отношении природы, но и в отношении математики.

В конце XVIII века К. Гаусс стал первым, кто конструктивно подошел к вопросу о применимости геометрии Евклида для описания мира и непосредственно измерил на местности сумму внутренних углов треугольника. Вершины треугольника располагались на вершинах близлежащих гор. Гаусс не обнаружил отклонения геометрии мира от Евклидовой в пределах точности своих измерений.

В начале XIX века Н. Лобачевский принял во внимание и оценил принципиальные возможности астрономических наблюдений, что с неизбежностью привело его к созданию первой неевклидовой геометрии.

В середине XIX века В. Клиффорд уже последовательно защищал свою мысль о том, что все проявления физического мира экспериментально неотличимы от соответствующих изменений геометрической кривизны мира.

Следуя этим идеям, А. Эйнштейн в начале XX века свел общее, но качественное утверждение Клиффорда к утверждению более узкому, но зато поддающемуся

количественному анализу. Основываясь на требовании общей ковариантности физических законов (и постулировав постоянство скорости света и принцип эквивалентности инертной и гравитационной масс), он разработал теорию, основанную на том, что неустранимая в нашем мире гравитация неотличима от проявлений геометрических свойств пространства-времени. Считая, что пространство-время описывается геометрией Римана-Минковского, Эйнштейн в своей основополагающей работе привел пример наблюдаемых эффектов, которые должны иметь место в этом случае и дал их расчет. Опыты показали хорошее соответствие с расчетом, и геометрия полноправно вошла в физическую теорию. На макроуровне это позволило, например, уточнить результаты предшествовавшей теории гравитации Ньютона в применении к Солнечной системе. На микроуровне в квантовую механику вошла теория Дирака. На мегауровне в космологию вошла теория расширяющейся Вселенной и сопутствующих обстоятельств.

Говоря о данных наблюдений, с которыми должна согласовываться теория, следует указывать масштаб рассмотрения. В астрофизике таких масштабов можно указать три: Солнечная система, галактика и метagalaktika (т.е. вся наблюдаемая Вселенная). И известные достижения общей теории относительности (ОТО), связанные с введением новой геометрии, позволили связать лабораторную физику и первый из упомянутых масштабов. К концу XX века были накоплены астрофизические данные, которые на уровне современных представлений не удастся объяснить без включения в теорию новых понятий, например, темной материи или темной энергии или без пересмотра основ самой теории, включая и геометрию пространства-времени. При выборе новой геометрии было бы поспешно сразу перейти к обсуждению и поиску эффектов на границах наблюдаемой Вселенной, поскольку проблемы возникают уже на галактическом масштабе.

Предлагая физический эффект, в котором проявляются именно геометрические свойства пространства-времени, следует обратить внимание на то обстоятельство, что статические сферически-симметричные решения уравнений гравитационных полей как в случае геометрии Римана, так и в случае обобщающей ее геометрии Финслера не приводят к различиям в наблюдаемых результатах. Эффектом, пригодным для таких исследований, могли бы быть гравитационные волны (ГВ) (в достаточно общем смысле), существование которых, допускаемое в ОТО, косвенно подтверждается наблюдаемым изменением орбитального периода некоторых двойных звездных систем [1]. При различных геометриях пространства-времени ГВ обладали бы различными свойствами. Но, хотя известен целый ряд физических эффектов, которые можно было бы использовать для исследования этих свойств, проблема наблюдения ГВ не решена до сих пор. Это связано с чрезвычайной малостью величины возмущения, вносимого ГВ в любой из возможных физических эффектов уже в первом порядке. Однако то, что речь идет именно о волнах, позволяет использовать резонансные явления, которые могут проявляться не в первом порядке теории возмущений, как предлагалось в некоторых подходах до сих пор, но и в нулевом.

Дальнейшее изложение построено следующим образом. Будем считать обоснованным метрический подход к теории гравитации. Поскольку геометрия оказывается тесно связанной с распределением масс, сначала приводятся некоторые результаты астрофизических наблюдений и обсуждаются подходы к их интерпретации. Затем указываются дополнительные обстоятельства, связанные с геометрией пространства-времени, помимо тех, что следуют из экспериментальных данных. После этого излагается теория эффекта оптико-метрического параметрического резонанса (ОМПР), обсуждаются его возможные результаты для различных случаев и возникающие проблемы интерпретации. В заключение приведены примеры реальных астрофизических систем, пригодных для наблюдений.

1. Экспериментальные данные и их интерпретации

Результаты астрофизических наблюдений, о которых идет речь, представляют собой следующее. В галактическом масштабе измерены кривые вращения галактик, т.е. зависимости орбитальных скоростей вращения звезд от расстояния до центра галактики [2–5]. В масштабе метagalактики известен также релятивистский эффект гравитационного линзирования на кластерах галактик, подтверждающий основную идею Эйнштейна о связи метрики и гравитации, но количественно превышающий предсказания ОТО в разы. Установлено также наличие ускорения процесса расширения Вселенной [6–7], влекущее представление о темной энергии.

Обзор ситуации, складывающейся в этой связи в теории, приведен в [8]. В связи со сказанным во Введении ограничимся здесь краткой сводкой результатов и идей, касающихся явлений, имеющих галактический масштаб. Для иллюстрации приведем рисунки из работы [5] (см. Рис. 1). Экспериментальные точки, полученные при измерении орбитальных скоростей v звезд спиральных галактик в зависимости от расстояния R до центра галактик, описываются эмпирической зависимостью следующего вида [9]

$$v^2 = \frac{\beta^* c^2 N^*}{R} + \frac{\gamma^* c^2 N^* R}{2} + \frac{\gamma_0 c^2 R}{2}, \tag{1}$$

где c – скорость света, N^* – число звезд в галактике (обычно порядка 10^{11}), β^* для Солнца имеет значение $\beta^* = \frac{M_S G}{c^2} = 1.48 \cdot 10^5$ см (M_S – масса Солнца, G – гравитационная постоянная), γ^* и γ_0 – универсальные параметры со значениями $\gamma^* = 5.42 \cdot 10^{-41}$ см $^{-1}$, $\gamma_0 = 3.06 \cdot 10^{-30}$ см $^{-1}$.

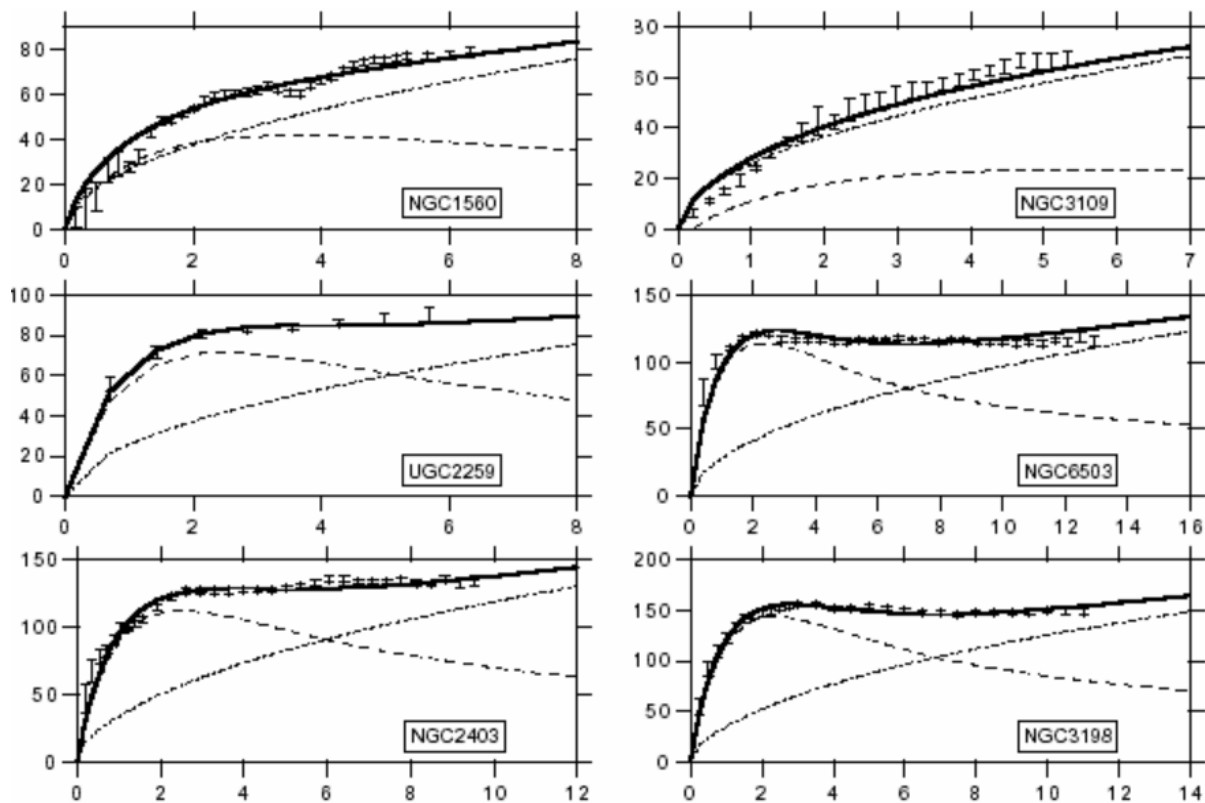


Рис. 1: [4] Скорости орбитального движения (в км/с) в зависимости от R/R_0 , где R_0 – характерный масштаб для каждой конкретной галактики. Штрихованная линия – Ньтоновский потенциал, (совпадающий с решением Шварцшильда), создаваемый наблюдаемой светящейся материей при учете экспоненциального распределения звезд в пределах галактики.

На расстояниях порядка размера галактики все три параметра становятся сопоставимыми по величине, в то время, как результат теории Ньютона, а также и решения Шварцшильда уравнений ОТО, предсказывает только спад с расстоянием, соответствующий первому слагаемому в формуле (1). При расчетах учитывалось экспоненциальное распределение звезд в галактике. Для того, чтобы обеспечить наблюдаемое движение светящихся звезд, предполагают существование дополнительной материи, взаимодействующей со звездами за счет гравитации, при этом масса этой материи должна быть втрое больше массы видимых звезд, сосредоточена она на периферии галактики, а не в ее центре, и электромагнитных волн она не излучает и не поглощает. Для целей данной работы важно подчеркнуть, что аналогичные обстоятельства – уже для кластеров галактик [8] – имеют место и на метагалактическом масштабе. Поэтому хотелось бы объяснить их причины, не привлекая отдельных дополнительных соображений для каждого из двух этих масштабов.

Усилия теоретиков, направленные на разрешение ситуации, сосредоточены на двух направлениях. Первое связано с теорией гипотетических элементарных частиц, образующих темную материю. Второе предусматривает попытки модернизации существующей теории пространства-времени-гравитации, что в ряде случаев позволяет обойтись и без нового типа материи. При любых изменениях теории естественным тестом должно быть сохранение наблюдаемой феноменологии, в частности, выполнение закона гравитации Ньютона в масштабах Солнечной системы, а также и двух других эффектов ОТО, следующих из решения Шварцшильда.

Перечислим теперь некоторые возможные подходы в рамках второго направления, не ставя задачу дать исчерпывающий обзор достигнутых результатов.

I. Наиболее прямолинейным подходом является последовательное усложнение известного квадратичного выражения Эйнштейна-Гильберта для действия

$$S_{EH} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x (-g)^{1/2} R^\alpha{}_\alpha \quad (2)$$

за счет введения чисто метрических членов следующих порядков, например, [10]

$$S_{W_1} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x (-g)^{1/2} (R^\alpha{}_\alpha)^2 \quad (2a)$$

или

$$S_{W_2} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x (-g)^{1/2} R_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} \quad (2b).$$

При этом поправки от (2a) или (2b) должны давать пренебрежимо малый вклад в решение Шварцшильда. Кроме того, можно уже на этом этапе попытаться учесть космологическую постоянную в духе попыток самого Эйнштейна.

II. Следующим естественным ходом может быть введение дополнительного макроскопического гравитационного поля, обычно скалярного S , например, [11]

$$S_{BD} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x (-g)^{1/2} \left(SR^\alpha{}_\alpha - w \frac{S_{;\mu} S^{;\mu}}{S} \right), \quad (3)$$

где w – константа.

III. Третьим направлением является увеличение числа измерений пространства-времени с последующим выходом измерений высших порядков на Планковский масштаб длин. Соответствующие работы, начавшись с работы [12], привели к развитым в математическом смысле современным теориям струн [13], а затем и бран [14].

Перечислим теперь подходы, подразумевающие не столько уточнение деталей существующих структур, предположительно позволяющие получить решение, более соответствующее наблюдениям, сколько подходы, предусматривающие пересмотр самих структур, предположительно позволяющие сделать то же.

IV. Ревизии подвергаются и классические основы. В [15] был предложен феноменологический подход, известный как МОНД – Модифицированная Ньютоновская Динамика, в котором вводится новая мировая константа, имеющая размерность ускорения

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a} = \vec{f} \quad \text{или} \quad \vec{a} = \nu\left(\frac{f}{a_0}\right)\vec{f}. \quad (4)$$

Предлагается так подобрать функции $\mu(x)$ или $\nu(x)$ и величину a_0 , чтобы в масштабах Солнечной системы получить классический результат, а в масштабе галактики – результат, соответствующий формуле (1). После того, как в [16] удалось выполнить релятивистское обобщение МОНД путем введения скалярного поля ψ , дающего аддитивную добавку к действию Эйнштейна-Гильберта в виде

$$S(\psi) = -\frac{1}{8\pi GL^2} \int d^4x (-g)^{1/2} f(L^2 g^{\alpha\beta} \psi;_{\alpha} \psi;_{\beta}), \quad (5)$$

где f – скалярная функция, L – константа, МОНД уже нельзя считать простой феноменологией. Этот подход, естественно, позволяет вполне удовлетворительно описать наблюдаемые кривые вращения галактик с помощью уравнения (1).

Фактически, говорим ли мы о темной материи или скалярном поле в теории гравитации, или об эфире в электродинамике, имеется в виду лишь объект, влияющий на наблюдаемые обстоятельства, но не поддающийся непосредственному детектированию. Но это же можно сказать и о геометрии мира. Основная идея релятивизма, идущая от Лобачевского и сформулированная Эйнштейном, состоит в том, что следует не противопоставлять гравитацию и геометрию, но рассматривать их в неразрывной взаимосвязи.

V. Модификации может подвергаться и геометрия пространства-времени. Так, отказ от симметрии метрики по индексам [17, 18] также позволяет получить приемлемое описание кривых вращения без апелляции к темной материи.

VI. Г. Вейль [19] еще в 1918 году отступил от использованной Эйнштейном геометрии Римана в целях объединения гравитации и электромагнетизма с помощью метрики. Он предложил преобразования следующего вида

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &\rightarrow e^{2\alpha(x)} g_{\mu\nu}(x) & (a) \\ A_{\mu}(x) &\rightarrow A_{\mu}(x) - e\partial_{\mu}\alpha(x) & (b) \end{aligned} \quad (6)$$

в которых гравитацию и электромагнетизм объединяет общая функция $\alpha(x)$, что привело к новой – Вейлевой – геометрии. Получающиеся далее уравнения не сводятся к обычным уравнениям Эйнштейна, но, тем не менее, содержат решения Швардшильдовского типа для масштабов Солнечной системы. Преобразование (6) Вейль назвал калибровочным, т.е. зависящим от масштаба, однако в дальнейшем этот термин стал использоваться в других областях физики и преимущественно для случая, когда показатель экспоненты является мнимым. В применении к гравитации такие преобразования называют «конформными».

VII. Дальнейшее развитие подобных идей привело к теориям конформной гравитации, в которых метрика лишь наделяется дополнительной симметрией, соответствующей (6), электромагнитные переменные не вовлекаются, а, значит, геометрия остается Римановой. Формально этот подход оказывается аналогичным подходу I, но уже

со специфическим выбором коэффициентов при (2a) и (2b). Получающиеся здесь [20] уравнения Эйнштейна имеют вид

$$4\alpha_g W^{\mu\nu} = 4\alpha_g (2C^{\mu\lambda\nu\kappa}{}_{;\lambda;\kappa} - C^{\mu\lambda\nu\kappa} R_{\lambda\kappa}) = T^{\mu\nu}, \quad (7)$$

где α_g – безразмерная константа, $C^{\mu\lambda\nu\kappa}$ – так называемый тензор Вейля, не изменяющийся при преобразованиях (6). После замены

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu}(x) &\rightarrow e^{-6\alpha(x)} W^{\mu\nu}(x) \\ T^{\mu\nu}(x) &\rightarrow e^{-6\alpha(x)} T^{\mu\nu}(x), \end{aligned}$$

преобразования координат с использованием некоторой функции $B(r)$ и введения функции источника в виде $f(r)$ уравнение (7) в стационарном случае приводится к уравнению Пуассона, но не второго порядка, как в обычном случае, а четвертого

$$\nabla^4 B(r) = f(r). \quad (8)$$

При наличии сферической симметрии уравнение (8) имеет точное решение. При этом оно не только содержит слагаемое, соответствующее решению Ньютона-Шварцшильда, но и слагаемые того же вида, что и уравнение (1)

$$\begin{aligned} B(r > R) = -g_{00} &= 1 - \frac{2\beta}{r} + \gamma r \\ 2\beta &= \frac{1}{6} \int_0^R dr' r'^4 f(r'); \quad \gamma = \frac{1}{2} \int_0^R dr' r'^2 f(r') \end{aligned} \quad (9)$$

Сплошными линиями на Рис. 1 показан результат применения выводов конформно-гравитационного подхода к описанию кривых вращения галактик. Можно признать его вполне удовлетворительным. Описанный подход не требует введения дополнительной (темной) материи, т. е. дополнительного скалярного поля. Вместо этого он использует другой выбор скалярной функции при формулировке вариационного принципа. Это сохраняет Римановскую геометрию пространства-времени, но приводит к уравнению Эйнштейна вида (7), которое, в частности, в пустом пространстве не имеет структуры волнового уравнения. Таким образом, гравитационные волны оказываются не существующими, и эффект [1], согласующийся с предсказанием традиционной ОТО с точностью до 2%, следует объяснить как-то иначе.

Выводы, к которым можно прийти на основании материала, изложенного в этом разделе, таковы. Успешные модификации теоретических представлений, согласующиеся с экспериментом, указывают на возможное существование дополнительных членов в законе гравитации, роль которых зависит от масштаба рассмотрения. Оставаясь в пределах Римановой геометрии, мы приходим к одному из двух выводов:

- либо существует дополнительная – темная – материя, сосредоточенная на периферии галактики,
- либо для описания гравитации в масштабах галактики следует иначе выбрать скаляр при формулировке вариационного принципа.

2. Финслерова геометрия анизотропного пространства-времени

Отметим теперь, что помимо масштаба рассмотрения следует обратить внимание еще на одну важную особенность. Измерения, представленные на Рис. 1 и аналогичные

им, относятся преимущественно к спиральным галактикам, обладающих выраженной (пространственной) анизотропией по сравнению с другими типами галактик. Но понятие анизотропии можно рассматривать и в более широком смысле. Стремление обобщить ОТО на случай анизотропного пространства-времени, где, в частности, скорость света не является постоянной и зависит от направления, было реализовано в [21], где теория строится на базе Финслеровой геометрии. Метрика в Финслеровой геометрии зависит не только от координаты точки (x^α) , как в Римановой, но и от некоторого касательного вектора в ней $(\dot{x}^\alpha) = \frac{dx^\alpha}{dt}$ (t – параметр), и обычно [22] представляется в виде:

$$g_{\mu\nu}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu}, \tag{10}$$

где $F(x, \dot{x})$ – достаточно гладкая, скалярная, однородная первого порядка положительная функция с определителем $\det \left| \frac{\partial^2 F^2(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu} \right| \neq 0$. Одним из важных результатов, полученных в [21], является доказательство того, что аналоги уравнения Эйнштейна в Финслеровом случае (для разнообразных метрик) имеют Шварцшильдские решения. При этом показано, что в пределах измерений одной точности, проводимых в Солнечной системе, отличить их от соответствующих решений ОТО не удастся. Показано также, что оба остальных эффекта (отклонение луча света при его прохождении вблизи Солнца и красное смещение) одинаково присутствуют как в Римановом, так и в Финслеровом случаях, хотя и по разным причинам. Поэтому с их помощью нельзя сделать обоснованный выбор геометрии для описания реального пространства-времени.

В традиционный подход Финслерова геометрия может быть вовлечена, например, при использовании в касательном пространстве метрики, состоящей из двух частей, одна из которых может зависеть не только от координаты, но и от направления вектора. При этом удастся с «горизонтальной», частью выполнить, например, конформное преобразование. Это влечет соответствующие поправки в «вертикальной» части и изменение уравнений Эйнштейна, которые в этом случае представляют собой связанную систему для соответствующих тензоров [23].

Существует несколько дополнительных причин обратиться к одному из частных случаев Финслеровой геометрии – к пространствам с метрикой Бервальда-Моора, соответствующей

$$F(y) = \sqrt[4]{y^1 y^2 y^3 y^4}. \tag{11}$$

Так, в [24–26] показано, что известная (физическая) проблема спонтанного нарушения симметрии в фермион-антифермионном конденсате соответствует (геометрическому) частичному или полному нарушению изотропии пространства-времени, если его метрика представлена в виде

$$ds' = (dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)^{(1+r_1+r_2+r_3)/4} (dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)^{(1+r_1-r_2-r_3)/4} \cdot (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)^{(1-r_1+r_2-r_3)/4} (dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)^{(1-r_1-r_2+r_3)/4}, \tag{12}$$

где безразмерные параметры r_i характеризуют степень анизотропии. Если в простейшем случае положить все $r_i = 0$ и вести новые координаты $\xi_i = A_{ij}x_j$, где

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

то интервал (12) примет вид

$$ds' = ds_{BM} = \sqrt[4]{d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4}. \tag{11a}$$

Отличие такого подхода от стандартной теории состоит в том, что спонтанное нарушение симметрии сопровождается не появлением космологической постоянной, но возникновением анизотропии пространства-времени.

Такое же выражение для метрики, фактически, использующее понятие объема, было применено в [27] для построения теории гравитации, а в работе [28] независимо от [21] был получен вывод о невозможности наблюдения эффектов, отличающих метрические свойства Финслерова пространства от свойств Риманова пространства, в масштабах Солнечной системы.

В работе [29] и последовавшей серии работ метрика Бервальда-Моора увязывается с фундаментальными математическими свойствами малоизученного числового объекта – гиперкомплексными числами H_4 . Использование алгебры H_4 или иной соответствующей алгебры может привести к изменению структуры уравнений для описания не только явлений мегамасштаба, но и на микроуровне при описании квантовых явлений, что перекликается с идеями [30].

Следует отметить, что, несмотря на имеющиеся перспективы, теоретическое направление, связанное с Финслеровой геометрией, пока недостаточно привязано к конкретным данным наблюдений. При этом эксперимент, который мог бы позволить судить о геометрических свойствах пространства-времени, до настоящего времени не был предложен.

3. Оптико-метрический параметрический резонанс

Как указывалось в предыдущем разделе, эксперименты подходящие для статического случая, не позволяют сделать обоснованный вывод о типе геометрии. Именно поэтому во Введении были упомянуты ГВ как эффект, пригодный для использования с этой целью. Однако все методики (общим числом восемнадцать [31]), предложенные к настоящему времени, основаны на детектировании эффектов воздействия ГВ в первом порядке теории возмущений. В условиях Солнечной системы это требует точности 10^{-24} , которая пока не достигнута, несмотря на длительные усилия и дорогостоящие проекты. При этом даже в случае успеха чрезвычайно малая величина предполагаемого эффекта вряд ли позволит существенно полагаться на его результат, а проблемы регистрации и обработки сигнала будет не просто преодолеть, если иметь в виду его использование для дальнейших исследований.

Воспользуемся хорошо известной в теоретической спектроскопии [32] полуклассической моделью взаимодействия атома с электромагнитным полем для исследования воздействия ГВ на атом космического мазера.

Сначала рассмотрим двухуровневый атом в монохроматическом квазирезонансном сильном поле с частотой Ω , близкой к атомной частоте ω . «Сильное» поле означает, что доминируют вынужденные переходы. Такая система, с одной стороны, описывается в терминах матрицы плотности, а с другой – поле представляется классической волной. В результате получаем систему уравнений Блоха для компонент матрицы плотности в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_{22} &= -\gamma\rho_{22} + 2i\alpha_1 \cos(\Omega t - k_1 y)(\rho_{21} - \rho_{12}) \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial y} \right] \rho_{12} &= -(\gamma_{12} + i\omega)\rho_{12} - 2i\alpha_1 \cos(\Omega t - k_1 y)(\rho_{22} - \rho_{11}) \\ \rho_{22} + \rho_{11} &= 1 \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь ρ_{22} , ρ_{11} – населенности уровней; ρ_{12} , ρ_{21} – поляризационные члены; γ , γ_{12} – продольная и поперечная постоянные распада (считая нижний уровень основным, получаем

$\gamma_{12} = \gamma/2$; $\alpha_1 = \frac{\mu E}{\hbar}$ – параметр (частота) Раби, пропорциональный интенсивности электромагнитной волны (ЭМВ); μ – дипольный момент; E – электрическая напряженность; $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-27}$ эрг·с – постоянная Планка; k_1 – волновой вектор ЭМВ; v – скорость атома вдоль оси Oy ; $\gamma \ll \alpha_1$ – условие сильного поля.

В серии работ [33–36] теоретически исследовано явление оптико-механического параметрического резонанса. Оно состоит в том, что, если компонента скорости такого двухуровневого атома, параллельная волновому вектору поля, по какой-либо причине меняется с определенной частотой, связанной с параметром Раби, то рассеянное излучение приобретет так называемую нестационарную компоненту на определенной частоте, близкой к частоте атомного перехода. Иными словами, на этой частоте будет происходить периодическое усиление и ослабление сигнала с частотой колебаний атома. Это явление связано с перераспределением энергии по частотам в результате параметрического резонанса. В обычных условиях такой сигнал наблюдаться не будет из-за усреднения по времени, но при использовании устройства, известного в спектроскопии как детектор ворот, можно выделить полупериоды сигнала нестационарной компоненты и пронаблюдать их. Оказывается, что величина такого сигнала сопоставима с величиной пика обычного сигнала, характеризующего взаимодействие атома и резонансного поля.

Переходя к исследованию астрофизической системы, заметим, что в космическом пространстве известны источники монохроматического электромагнитного излучения. Это – космические мазеры, атомы которых находятся в основных состояниях, а переходы осуществляются с метастабильных уровней, т. е. двухуровневая модель атома в данном случае вполне пригодна. Насыщенные космические мазеры полностью реализуют условия сильного поля. С другой стороны, можно предположить, что имеется причина, по которой расстояние, а, значит, и скорость заданного атома мазера в направлении на детектор сигнала на Земле будет периодически меняться. Это – воздействие периодической гравитационной волны, например, испускаемой пульсаром, расположенным, как показано на Рис. 2.

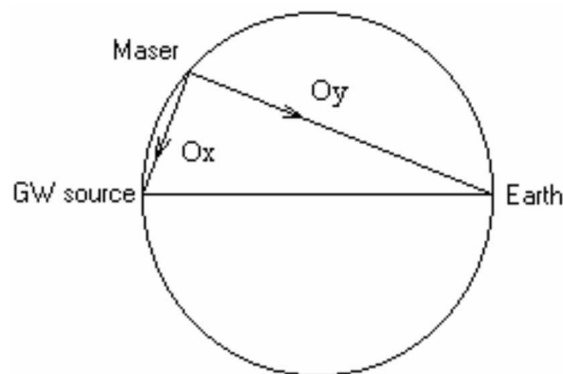


Рис. 2:

Воздействие ГВ сказывается на расположении уровней атома, на ЭМВ мазера и на положении атома. В [37] было показано, что первый эффект пренебрежимо мал по сравнению с двумя остальными. Влияние ГВ на монохроматическую ЭМВ учитывается в результате решения уравнения для эйконала

$$g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial y^i} \frac{\partial \psi}{\partial y^k} = 0. \quad (15)$$

Закон движения атома должен быть получен из уравнения геодезической

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0, \quad (16)$$

(а не из уравнения геодезического отклонения, как в соответствующих расчетах относительного смещения частей лабораторных установок). Уравнения (14–16) описывают поведение двухуровневого атома насыщенного космического лазера в поле гравитационной волны. Решая их и налагая требования параметрического резонанса, можно рассчитать соответствующий сигнал. При этом обсуждаемый эффект имеет нулевой порядок, и оказывается, что его детектирование на Земле возможно с помощью уже существующих радиотелескопов, позволяющих наблюдать сигнал космического лазера. Для этого необходимо оборудовать приемный канал радиотелескопа детектором ворот.

Этот эксперимент можно попытаться использовать для определения геометрических свойств пространства-времени следующим образом. Теоретические выражения, которые следует сравнивать с результатами эксперимента, естественно, следует получать при различных предположениях о геометрии пространства-времени. То из предположений, которое приведет к наиболее близкому соответствию с экспериментом, и будет соответствовать геометрическим свойствам пространства-времени.

4. Изотропное возмущение метрики Минковского

Будем считать геометрию Римановой и пользоваться обычными уравнениями Эйнштейна в приближении слабого поля вдали от масс $g^{ik} = g^{(0)ik} + h^{ik}$. Поправки к метрическому тензору плоского пространства-времени удовлетворяют волновому уравнению. В простейшем случае плоских волн оно имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) h^k{}_i = 0. \tag{17}$$

В качестве решений естественно рассмотреть выражения [38]

$$h^k{}_i = \text{Re}[A^k{}_i \exp(ik_\alpha x^\alpha)], \tag{17a}$$

которые удовлетворяют уравнению, если $k_\alpha k^\alpha = 0$, т.е. k^α – светоподобный вектор. Поэтому сам метрический тензор можно записать

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 + h \cos \frac{D}{c}(x^0 - x^1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - h \cos \frac{D}{c}(x^0 - x^1) \end{pmatrix} \tag{18}$$

где h – безразмерная амплитуда ГВ ($h \ll 1$), D – частота ГВ.

Решение уравнения (15) с учетом (18) показывает, что воздействие ГВ приводит к фазовой модуляции ЭМВ. В силу малости h последняя может быть представлена [39] в виде суперпозиции

$$E(t) = E \cos(\Omega t - ky) + E \frac{\omega}{4D} h [\cos((\Omega - D)t - ky) - \cos((\Omega + D)t - ky)]. \tag{19}$$

Решение уравнения (16) с учетом (18) дает [37]

$$y(t) \sim h \frac{c}{D} \sin(Dt + k_g x), \tag{20}$$

где k_g – волновой вектор ГВ. Зависимость (20) позволяет записать выражение для компоненты скорости атома, направленной в сторону Земли

$$\begin{aligned} v &= v_0 + v_1 \cos Dt \\ v_1 &= hc \end{aligned} \tag{21}$$

Подставляя (21) и (19) в (14), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_{22} &= -\gamma\rho_{22} + 2i[\alpha_1 \cos(\Omega t - ky) + \alpha_2 \cos((\Omega - D)t - ky) - \alpha_2 \cos((\Omega + D)t - ky)](\rho_{21} - \rho_{12}) \\ \frac{d}{dt}\rho_{12} &= -(\gamma_{12} + i\omega)\rho_{12} - 2i[\alpha_1 \cos(\Omega t - k_1 y) + \alpha_2 \cos((\Omega - D)t - ky) - \alpha_2 \cos((\Omega + D)t - ky)](\rho_{22} - \rho_{11}) \\ \rho_{22} + \rho_{11} &= 1 \end{aligned} \tag{22}$$

где $\alpha_2 = \frac{\omega h}{4D}\alpha_1$, а соотношение (21) было учтено в выражении для полной производной $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + kv$. Решение системы уравнений (22) проводится методом асимптотического разложения. При этом в случае выполнения определенных условий на параметры задачи можно говорить об оптико-метрическом параметрическом резонансе – ОМПР. Эти условия, сформулированные в [37, 39], имеют вид:

- ЭМВ является спектроскопически сильной

$$\frac{\gamma}{\alpha_1} = \Gamma\varepsilon; \quad \Gamma = O(1); \quad \varepsilon \ll 1. \tag{22.1}$$

- Амплитудное условие ОМПР, связанное с трихроматическим полем

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\omega h}{4D} = a\varepsilon; \quad a = O(1); \quad \varepsilon \ll 1. \tag{22.2}$$

- Амплитудное условие ОМПР в связи с периодическим изменением скорости атома

$$\frac{kv_1}{\alpha_1} = \frac{\omega h}{\alpha_1} = \kappa\varepsilon; \quad \kappa = O(1); \quad \varepsilon \ll 1. \tag{22.3}$$

- Частотное условие ОМПР

$$(\omega - \Omega + kv_0)^2 + 4\alpha_1^2 = D^2 + O(\varepsilon) \Rightarrow D \sim 2\alpha_1. \tag{22.4}$$

Если условия (22.1–22.4) выполнены, то в результате решения (22) методом асимптотического разложения по малому параметру ε получим главный член разложения для $Im(\rho_{21})$ – величины, характеризующей поток энергии рассеянного излучения. На частоте, смещенной на D от центрального пика, он пропорционален ε^0 , и имеет вид

$$Im(\rho_{21}) \sim \frac{\alpha_1}{D} \cos 2Dt + O(\varepsilon). \tag{23}$$

Отрицательные значения соответствуют усилению, положительные – ослаблению потока энергии на указанной частоте, происходящему из-за перераспределения энергии излучения мазера в условиях ОМПР. Как и в случаях [33–36], при обычном наблюдении сигнала космического мазера такой сигнал виден не будет из-за усреднения по времени, но использование детектора ворот позволит выделить полупериоды нестационарной компоненты сигнала ОМПР. Этот результат означает, что ГВ, существование которых следует из ОТО и косвенно подтверждается в [1], могут быть непосредственно обнаружены с помощью метода, основанного на эффекте ОМПР. Более подробные обсуждения и анализ выполнимости условий ОМПР для реальных астрофизических систем приводятся в [37, 39]. Здесь укажем только, что при детектировании сигнала описанного типа в процессе целенаправленных наблюдений его причина может быть уверенно идентифицирована как ГВ.

В случае существования ГВ, источниками которых являются пульсары и коротко-периодные двойные, метод, основанный на эффекте ОМПР, может стать основой гравитационной астрономии для внутренней части галактического диска Млечного пути. В

Приложении 1 содержатся координаты пригодных для исследования астрофизических систем, как в галактической окрестности Солнца, так и на периферии нашей галактики (см. пульсар 3), которая также относится к классу спиральных.

Может, однако, случиться так, что сигнал в предлагаемом эксперименте не будет обнаружен, или будет отличаться от приведенного расчета, или будет различаться для разных точек наблюдения. Это будет указывать на неучтенные, но существенные факторы. В том числе и на геометрические свойства пространства-времени.

5. Анизотропное возмущение метрики Минковского

Известные рассуждения и выкладки, приводящие к уравнению (17), можно повторить, считая, что выражение для метрики можно записать следующим образом

$$g_{ij}(x) \rightarrow g_{ij}(x, \dot{x}) = \eta_{ij}(x) + h_{ij}(x, \dot{x}), \quad (24)$$

где

$$\eta_{ij}(x) = \eta^{(0)}{}_{ij}(x) \quad (25)$$

– метрика Минковского для плоского пространства, $h_{ij}(x, \dot{x})$ – малая поправка, такая, что $h^k{}_i(x, \dot{x}) = \eta^{(0)kj} h_{ij}(x, \dot{x})$. Структура уравнений Эйнштейна при этом принципиально не изменится, и поправка $h^k{}_i(x, \dot{x})$ будет по-прежнему удовлетворять волновому уравнению типа (17). Но выражение (17.1) будет выглядеть, например, так

$$h^k{}_i(x, \dot{x}) = \text{Re} [A^k{}_i(\dot{x}) \exp(ik_\alpha x^\alpha)]. \quad (26)$$

Это означает, что амплитуда ГВ будет различаться в различных направлениях их распространения. С точки зрения наблюдений, основанных на методе ОМПР, эту разницу невозможно заметить непосредственно, поскольку используемый эффект – нулевого порядка. Но она будет проявлять себя косвенно, например, выполнением условий ОМПР на различных расстояниях в различных направлениях от одного источника ГВ. Так, условия (22.2) и (22.3) теперь станут такими

- Амплитудное условие ОМПР, связанное с трихроматическим полем

$$\frac{\alpha_2 \zeta_1(\dot{x})}{\alpha_1} = \zeta_1(\dot{x}) \frac{\omega h}{4D} = a \zeta_1(\dot{x}) \varepsilon; \quad a = O(1); \quad \varepsilon \ll 1. \quad (27)$$

- Амплитудное условие ОМПР в связи с периодическим изменением скорости атома

$$\frac{kv_1 \zeta_2(\dot{x})}{\alpha_1} = \zeta_2(\dot{x}) \frac{\omega h}{\alpha_1} = \kappa \zeta_2(\dot{x}) \varepsilon; \quad \kappa = O(1); \quad \varepsilon \ll 1, \quad (28)$$

где функции $\zeta_1(\dot{x})$, $\zeta_2(\dot{x})$ связаны с выражениями для амплитуд ГВ $A^k{}_i(\dot{x})$.

6. Исследование свойств пространства-времени с помощью эффекта ОМПР

Эксперимент для исследования геометрических (и других) свойств пространства-времени в масштабах галактики следует провести так. Выберем источники ГВ, различающиеся положением в галактике и рассмотрим для каждого из них не по одному, а по нескольким таким мазерам, что условия (22.1–22.4) выполняются. Выполним наблюдения ОМПР в соответствии с методикой, предложенной в [39], для источников ГВ в средней части галактики и для источников ГВ на ее периферии. Перечислим все возможные результаты и укажем их смысл. Для этого удобно воспользоваться таблицей, в которой введены следующие обозначения.

В левых частях (результаты эксперимента)

I, P – внутренняя и периферийная части Млечного пути соответственно;
All – все известные мазеры в окрестности источника ГВ, удовлетворяющие условиям (22.2, 22.3);
Some – некоторые из известных мазеров в окрестности источника ГВ, удовлетворяющие условиям (22.2, 22.3);
1 – эффект наблюдается; **0** – эффект не наблюдается;
 — — нет данных.

В правых частях (геометрические и другие свойства)

I, P – внутренняя и периферийная части Млечного пути соответственно;
R – Риманова геометрия; **F** – «слабая» анизотропия (Финслерова геометрия);
1 – эффект наблюдается, следовательно, уравнения Эйнштейна имеют волновую структуру и существуют ГВ;
0 – эффект не наблюдается, следовательно, уравнения Эйнштейна не имеют волновой структуры, необходим новый вариационный принцип, ГВ не существуют;
 — — ничего определенного сказать нельзя.

а) Изотропия в галактическом масштабе

$$\begin{array}{l}
 I \quad P \quad \quad I \quad P \\
 1. \quad All \quad 0 \quad 0 \iff 0 \quad 0 \quad R \\
 \quad \quad Some \quad - \quad - \quad \quad - \quad - \quad F
 \end{array}$$

Вывод: геометрия Римана; темная материя не существует; имеется проблема выбора вариационного принципа; имеется проблема интерпретации результатов [1]; ГВ-астрономия невозможна, т. к. уравнения Эйнштейна для пустого пространства не имеют структуры волнового уравнения.

$$\begin{array}{l}
 I \quad P \quad \quad I \quad P \\
 2. \quad All \quad 1 \quad 0 \iff 1 \quad 0 \quad R \\
 \quad \quad Some \quad - \quad - \quad \quad - \quad - \quad F
 \end{array}$$

Вывод: геометрия Римана; стандартная ОТО в центре галактики; масштабная неинвариантность (конформная гравитация за пределами галактики); возможна ГВ-астрономия.

$$\begin{array}{l}
 I \quad P \quad \quad I \quad P \\
 3. \quad All \quad 0 \quad 1 \iff 0 \quad 1 \quad R \\
 \quad \quad Some \quad - \quad - \quad \quad - \quad - \quad F
 \end{array}$$

Вывод: геометрия Римана; стандартная ОТО за пределами галактики; масштабная неинвариантность (конформная гравитация во внутренней части галактики); возможна ГВ-астрономия.

$$\begin{array}{l}
 I \quad P \quad \quad I \quad P \\
 4. \quad All \quad 1 \quad 1 \iff 1 \quad 1 \quad R \\
 \quad \quad Some \quad - \quad - \quad \quad - \quad - \quad F
 \end{array}$$

Вывод: геометрия Римана; стандартная ОТО; проблема темной материи; возможна ГВ-астрономия.

б) Анизотропия в галактическом масштабе

$$5. \begin{array}{l} \text{All} \quad I \ P \quad - \ - \iff - \ - \ R \\ \text{Some} \quad 1 \ 1 \quad \quad \quad 1 \ 1 \ F \end{array}$$

Вывод: геометрия Финслера; проблема темной материи; возможна ГВ-астрономия.

$$6. \begin{array}{l} \text{All} \quad I \ P \quad - \ - \iff - \ - \ R \\ \text{Some} \quad 1 \ 0 \quad \quad \quad 1 \ 0 \ F \end{array}$$

Вывод: геометрия Финслера во внутренней части галактики; масштабная неинвариантность (конформная гравитация за пределами галактики); проблема темной материи; возможна ГВ-астрономия.

$$7. \begin{array}{l} \text{All} \quad I \ P \quad - \ - \iff - \ - \ R \\ \text{Some} \quad 0 \ 1 \quad \quad \quad 0 \ 1 \ F \end{array}$$

Вывод: геометрия Финслера за пределами галактики; масштабная неинвариантность (конформная гравитация во внутренней части галактики); проблема темной материи; возможна ГВ-астрономия.

$$8. \begin{array}{l} \text{All} \quad I \ P \quad 1 \ 0 \iff 1 \ 0 \ R \\ \text{Some} \quad - \ 1 \quad \quad \quad 0 \ 1 \ F \end{array}$$

Вывод: геометрия Римана во внутренней части галактики; геометрия Финслера за пределами галактики; проблема темной материи; возможна ГВ-астрономия.

$$9. \begin{array}{l} \text{All} \quad I \ P \quad 0 \ 1 \iff 0 \ 1 \ R \\ \text{Some} \quad 1 \ - \quad \quad \quad 1 \ 0 \ F \end{array}$$

Вывод: геометрия Римана за пределами галактики; геометрия Финслера во внутренней части галактики; проблема темной материи; возможна ГВ-астрономия.

В Приложении 2 даны координаты для пар мазеров, связанных с источниками ГВ, расположенными как ближе к центру (см. пульсар 6), так и ближе к краю галактики (см. пульсар 7).

Если при выполнении эксперимента реализуются ситуации 5–9, то систематические наблюдения, интерпретируемые с помощью выражения (26), могут позволить определить функцию $F(x, \dot{x})$ в выражении для метрики с помощью формулы (10)

$$g_{ij}(x, \dot{x}) = \eta^{(0)}_{ij}(x) + h_{ij}(x, \dot{x}) = \eta^{(0)}_{ij}(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^j} = \eta^{(0)}_{ij}(x) + \eta^{(0)}_{kj}(x) h^k{}_i(x, \dot{x}). \quad (29)$$

Таким образом, если анизотропия пространства-времени в масштабах галактики имеет место, то ее количественная характеристика может быть определена опытным путем.

7. Метрика Бервальда-Моора

Естественным продолжением данного рассмотрения представляется переход к ситуации, когда анизотропия пространства-времени является не малой добавкой, как в предыдущем разделе, но непосредственно описывается геометрией Финслера. В соответствии с обсуждающимся здесь подходом, направленным на исследование характеристик ГВ, можно было бы вновь рассмотреть малые поправки, но теперь невозмущенной метрикой считать уже не метрику Минковского, а какую-либо метрику Финслера пространства

$$g_{ij}(x, \dot{x}) = h_{ij}(x, \dot{x}) + \chi_{ij}(x, \dot{x}). \quad (30)$$

В качестве такой невозмущенной метрики было бы естественно выбрать метрику Бервальда-Моора. Для того чтобы говорить об эффекте ОМПП, необходимо установить, возможны ли ГВ в пространстве с такой геометрией и выписать явно соответствующую поправку к метрике, исследовать, как изменится описание электромагнитных процессов (16, 19), и выписать уравнение геодезической.

Можно ожидать, что структура уравнений Эйнштейна останется волновой, из чего следует существование ГВ, вероятно, более сложного вида, чем в случае Римановой геометрии. Уравнение для геодезической, вероятно, также усложнится, но его решение представит собой лишь техническую задачу. Однако с описанием электромагнитных процессов и с описанием взаимодействия ГВ и ЭМВ возникнут проблемы другого рода.

Существенным моментом, выявленным и подчеркнутым в [21], является следующее замечание: понятие одновременности, лежащее в основе любой релятивистской теории, может принадлежать не каузальной структуре, но структуре Лагранжиана. Это замечание приводит к серьезному методологическому затруднению. Выбор Римановой геометрии для описания пространства-времени тесно связан с требованием инвариантности уравнений Максвелла – основы подавляющего большинства измерений. Именно это учитывал Эйнштейн при формулировке своего принципа относительности и построении СТО. Отказываясь от Римановой геометрии, мы отказываемся от инвариантности уравнений Максвелла, что будет означать возникновение в них членов метрического происхождения, которые надо будет интерпретировать в рамках известной феноменологии. Постановкой аналогичной проблемы завершилась и работа [40]. Ситуация еще более усложняется, если учесть взаимосвязь гравитации и электромагнетизма, проявляющуюся как в классических эффектах ОТО таких, как отклонение луча света и гравитационное красное смещение, имеющих и в Финслеровой геометрии, так и непосредственно [41]. Таким образом, переход к использованию Финслеровой геометрии нуждается в тщательном физическом обосновании.

Заключение

Целью данной работы было предложить эксперимент, пригодный для исследования геометрических свойств пространства-времени, и соответствующую теорию. Физическим эффектом, лежащим в основе такого эксперимента, является оптико-метрический параметрический резонанс, описанный в разделах 3–5 и в [37, 39]. Его результаты, проанализированные в разделе 6, позволили бы определить, какая геометрия больше подходит для описания пространства-времени в масштабах галактики. Более того, эти результаты могли бы иметь значение и для выбора направления дальнейших фундаментальных исследований. Так, если окажется, что в масштабах галактики приемлема геометрия Римана стандартной теории относительности, то в астрофизике либо возникает проблема обоснования выбора вариационного принципа при построении аксиоматической теории, либо сохраняется проблема темной материи, которая потребует решения

в рамках теории элементарных частиц. В последнем случае появляется возможность появления и развития гравитационно-волновой астрономии. Если же окажется, что геометрия нуждается в модификации, в частности, следует перейти к геометрии Финслера, то вместо указанных проблем придется более внимательно рассмотреть основы электродинамики, что может иметь многочисленные и далеко идущие последствия на всех уровнях рассмотрения от квантовой теории до космологии.

Благодарности

Автор выражает признательность Ю. Б. Хлыниной за помощь в работе с электронными астрономическими каталогами и Д. Г. Павлову за поддержку.

Приложение 1

Координаты и параметры астрофизических систем, пригодных для детектирования ГВ с помощью метода ОМПП [42–43]

	Name	RaJ	DecJ	d (pc)	D (Hz)
1. Пульсар	J1022+1001	10:22:58.006	+10°01'52.8"	300	60.7794489280
Мазер	AF Leo	11:25:16.4	+15°25'22"	270	
2. Пульсар	B0656+14	06:59:48.134	+14°14'21.5"	290	2.59813685751
Мазер	U ORI	05:52:51.0	+20°10'06.0"	280	
3. Пульсар	J0538+2817	05:38:25.0632	+28°17'9.07"	1770	6.9852763480
Мазер	HH 4	05:37:21.8	+23°49'24.0"	1700	
4. Пульсар	B0031-07	00:34:08.86	−07°21'53.4"	720	1.0605004987
Мазер	U CET	02:31:19.6	−13°22'02.0"	660	
5. Дв. зв.	RXJ0806.3+1527	08:06.3	+15°27'	100	0.00311526
Мазер	RT Vir	13:00:06.1	+05°27'14"	120	

Приложение 2

Координаты и параметры астрофизических систем, пригодных для детектирования ГВ с помощью метода ОМПП (проверка анизотропии пространства-времени) [42–43]

	Name	RaJ	DecJ	d (pc)	D (Hz)
6. Пульсар	J1908+0734	19:08:17.01	+07°34'14.36"	580	4.70914721426
Мазер-1	IRC+10365	18:34:59.0	+10°23'00.0"	500	
Мазер-2	RT AQL	19:35:36.0	+11°36'18.0"	530	
7. Пульсар	J0205+6449	02:05:37.92	+64°49'42.8"	3200	15.223855772
Мазер-1	IRAS00117+6412	00:11:44.6	+64°12'04.0"	3170	
Мазер-2	W3 (1)	02:21:40.8	+61°53'26.0"	3180	

Литература

- [1] Hulse, R. A., Taylor, J. H. 1975, *Astrophys J.*, 195, L-51
- [2] M. S. Roberts and R. N. Whitehurst, *Astrophys. J.* 201 (1975) 327
- [3] A. Bosma, *Astronom. J.* 86 (1981) 1791
- [4] K. G. Begeman, *Astronom. and Astrophys.* 223 (1989) 47
- [5] K. G. Begeman, A. H. Broeils, R. H. Sanders, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 249 (1991) 523
- [6] A. G. Reiss et. al., *Astrophys. J.* 560 (2001) 49
- [7] A. G. Reiss et. al., *Astrophys. J.* 607 (2004) 665
- [8] P. D. Mannheim. *Prog. Part. Nucl. Phys.* 56, p. 340, (2006)
- [9] P. D. Mannheim, *Astrophys. J.* 479 (1997) 659
- [10] B. S. DeWitt, *Relativity, Groups and Topology*, C. DeWitt and B. S. DeWitt, Eds. (Gordon and Breach New York 1964)
- [11] C. Brans and R. H. Dicke, *Phys. Rev.* 124 (1961) 925
- [12] Th. Kaluza, *Sitzungsber. d. Berl. Akad.*, 1921, p.966
- [13] А. В. Маршаков. *УФН*, 172, с.977, 2002
- [14] L. Randall, R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999) 4690
- [15] M. Milgrom, *Astrophys. J.* 270 (1983) 384
- [16] J. D. Bekenstein, M. Milgrom, *Astrophys. J.* 286 (1984) 7
- [17] B. N. Kursunoglu, *Jour. Phys. Essays* 4 (1991) 439
- [18] J. W. Moffat, *Phys. Lett. B* 355 (1995) 447
- [19] H. Weil, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* (1918) 465
- [20] P. D. Mannheim, D. Kazanas, *Gen. Rel. Gravit.* 26 (1994) 337
- [21] Р. И. Пименов. Анизотропное Финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка. Сыктывкар, 1987.
- [22] Х. Рунд. Дифференциальная геометрия Финслеровых пространств. М., Наука, 1981.
- [23] В. Балан, Н. Бринзеи. *Гиперкомп. чис. в геом и физ.*, 2005, т. 4, с. 114
- [24] Г. Ю. Богословский. *ДАН СССР*, 1973, 213, с. 1055
- [25] G. Yu. Bogoslovsky, H.F.Goenner, *Phys.Lett. A*, 2004, v. 323, 40
- [26] Г. Ю. Богословский. *Гиперкомп. чис. в геом и физ.*, 2005, v. 4, p. 27
- [27] Г. С. Асанов. *Вестник МГУ*, 1976, т. 17, с. 288
- [28] Г. С. Асанов. Дополнения. В кн. Х. Рунд. Дифференциальная геометрия Финслеровых пространств. М., Наука, 1981.
- [29] Д. Г. Павлов. *Гиперкомп. чис. в геом и физ.*, 2004, т. 1, с. 5
- [30] P. Rowlands. *Proc. Conf. PIRT-06*, London, 2006
- [31] В. О. Гладышев. Необратимые электромагнитные процессы в задачах астрофизики. М., Изд. МВТУ им. Баумана, 2000
- [32] S. Stenholm, 1984, *Foundations of Laser Spectroscopy*. (New York: Wiley)
- [33] S. V. Siparov, *Phys. Rev. A* 55, 3704, 1997
- [34] А. Яа. Kazakov, S. V. Siparov, *Opt. i Spektrosk. (rus)*, 83, 961, 1997
- [35] S. V. Siparov, *J. Phys. B* 31, 415, 1998
- [36] S. V. Siparov, *J. Phys. B* 34, 2881, 2001
- [37] S. V. Siparov, 2004, *Astron. & Astrophys.*, 416, 815
- [38] E. Amaldi, G. Pizzella, 1979, in *Astrofisika e Cosmologia Gravitazione Quanti e Relativita*, (Firenze, Guinti Barbera), (Rus. trans. 1982, Mir, Moscow, p. 241)
- [39] S. V. Siparov, *Proc. Conf. PIRT-06*, London, 2006
- [40] С. В. Сипаров. *Гиперкомп. чис. в геом и физ.*, 2005, т. 4, с. 51.
- [41] М. Е. Герценштейн. *ЖЭТФ*, т. 41, с. 113, 1961
- [42] "The ATNF Pulsar Database" <http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat/>
- [43] "Galactic H_2O masers (Palagi+ 1993)" <http://vizier.u-strasbg.fr/cgi-bin/Vizier?-source=3DJ/A+AS/101/153>

Статья поступила в редакцию 10 декабря 2006 г.

**Theory of the zero-order effect to investigate
the space-time geometrical structure**

S. V. Siparov

*State University of Civil Aviation, St-Petersburg, Russia
sergey@siparov.spb.su*

The applicability of Einstein's Relativity Theory on the galactic scale and the role of geometry in the problems of astrophysical observations are discussed. The theory of the zero-order effect to study experimentally the geometrical properties of space-time is suggested.

Key-words: Relativity Theory, optical-metric parametric resonance, astrophysics.

MSC: 83-02, 51P05, 85-02.

АНИЗОТРОПИЯ ПРОСТРАНСТВА СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ДВИЖУЩИХСЯ СРЕДАХ

В. О. Гладышев, Т. М. Гладышева, М. Дашко, Г. В. Подгузов,
Н. Трофимов, Е. А. Шарандин

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана, Россия
vgladyshhev@mail.ru

В работе обсуждается анизотропия, возникающая в движущихся средах. В таких средах скорость распространения света с нелинейно зависит от векторного поля скоростей движения среды. В результате оптическая анизотропия может зависеть от ориентации поля скоростей \vec{V}_2 движущейся среды относительно вектора скорости \vec{V} движения интерферометра в пространстве независимых физических переменных. На основании решения дисперсионного уравнения сделан вывод о возможности измерения угловых вариаций в смещении интерференционной картины, наблюдаемой в движущемся интерферометре. Показано, что амплитуда вариации пропорциональна скорости движения интерферометра \vec{V} , однако эффект угловой зависимости является эффектом более высокого порядка малости по сравнению с классическим эффектом увлечения света.

Происхождение оптической анизотропии в движущейся среде связано с анизотропными свойствами сил связывающих атомы решетки среды и имеет локальный характер. В случае отличия геометрии пространства-времени от геометрии Минковского, нелинейные процессы взаимодействия электромагнитного излучения с движущейся средой будут зависеть от пространственной ориентации. В результате должны возникнуть дополнительные угловые вариации в наблюдаемой оптической анизотропии.

В работе обсуждаются результаты экспериментов по наблюдению оптической анизотропии света во вращающейся оптически прозрачной среде, а также пространственно-временные вариации в оптической анизотропии. В интерферометре свет от лазера с длиной волны $\lambda = 0,632991 \pm 1 \times 10^{-7}$ мкм проходил через вращающийся оптический диск диаметром $D = 45$ мм, длина пути одного луча в среде в проекции на плоскую поверхность диска $l = 30$ мм, показатель преломления стекла $n = 1,78$, толщина $d = 20$ мм, угол падения луча на плоскую поверхность диска $\vartheta_0 = 53,5^\circ$. Частота вращения диска изменялась в пределах от 100 до 380 Гц.

Результаты экспериментов подтвердили в первом приближении классическую линейную зависимость сдвига интерференционных полос от скорости движения среды.

Достигнутая в экспериментах точность позволяла зарегистрировать угловые вариации $\delta\Delta$ в положении интерференционных полос при скоростях движения интерферометра \vec{V} на два порядка больших, чем галактическая скорость Земли. В проведенных экспериментах пространственная анизотропия сигнала не была обнаружена, что позволяет наложить ограничение на максимальную скорость движения интерферометра $V < 0,1 c$.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации (грант №МД-170.2003.08).

Ключевые слова: анизотропия, поле скоростей, интерферометры.

Введение

Интерес к экспериментальным попыткам обнаружения анизотропии пространства-времени связан с известными результатами по измерению анизотропии реликтового микроволнового излучения [1]. Однако, наиболее ранние попытки обнаружить анизотропию пространства предпринимались не в радиоастрономии, а в оптике. К числу этих

попыток относятся классические эксперименты Хека [2], Майкельсона-Морли [3] и более современные опыты Бриллета и Холла [4]. Анализ измерительных процедур, реализованных в этих экспериментах, позволяет объяснить отсутствие проявления анизотропии методами современной оптики движущихся сред и предложить более чувствительные интерферометрические схемы.

Инвариантность уравнений электродинамики относительно преобразований Лоренца или Меллера базируется на неинвариантных соотношениях для частных бесконечно малых приращений пространственной и временной переменных [5]. В работах [6], [7] был предложен метод построения пространственно-временных преобразований, обеспечивающий неинвариантные соотношения для частных дифференциалов независимых переменных пространства, времени и одновременно удовлетворяющий Лоренц-инвариантности. На основании полученных преобразований было предложено разделить измерительные процедуры на два основных типа.

К первому типу относятся измерения физических величин, соответствующих полным приращениям пространственной и временной переменных. К экспериментам данного типа относятся все эксперименты, проводимые в одной инерциальной системе отсчета, в которой все элементы измерительного канала выглядят покоящимися для наблюдателя, например, эксперименты Майкельсона-Морли и Бриллета, Холла.

Второй тип реализует измерения неполных (частных) приращений переменных. В последнем случае сравниваются собственные значения физической величины, например, времени, измеренные в различных инерциальных системах отсчета (ИСО). Примером данного типа измерений является опыт Росси и Холла, в котором сравнивалось время жизни быстрых π -мезонов, рожденных в верхних слоях атмосферы, и π -мезонов в лабораторной системе отсчета [8].

Также существуют измерительные процедуры промежуточного типа, в которых существуют отдельные движущиеся элементы, с которыми взаимодействует электромагнитная волна. К числу данных процедур относятся интерферометры Хека и Физо [9]. В этих интерферометрах искусственно создается поле скоростей движущейся среды, что приводит к возникновению оптической анизотропии. Кинематические эффекты сокращения длины, изменения углов преломления и отражения, эффект Доплера и явление дисперсии обычно компенсируют наблюдаемое проявление неинвариантных соотношений для частных дифференциалов физических переменных. Однако, наличие оптической анизотропии может привести к нарушению полной компенсации различных физических явлений. Действительно, распространение света в среде с трехмерным полем скоростей может быть описано на основе решения дисперсионного уравнения, в которое скорость среды входит нелинейным образом [10], [11]. В результате оптическая анизотропия становится дипольно зависящей от ориентации движущейся среды к вектору скорости движения лабораторной ИСО, в которой покоятся источник и приемник излучения. Другими словами, если неинвариантные основания общей инвариантности имеют наблюдаемые следствия, то они должны проявиться в оптике движущихся тел в задачах, в которых источник излучения, приемник, границы раздела сред и сами среды движутся с различными скоростями.

Вместе с тем, представляет интерес происхождение оптической анизотропии, возникающей в движущихся средах. В таких средах скорость распространения света зависит от скорости и направления движения среды. Возникновение оптической анизотропии связано с неодинаковостью в различных направлениях сил связывающих атомы решетки среды и имеет локальный характер, т. е. возникает на масштабах малых по сравнению с длиной волны света. Макроскопическое проявление анизотропии является результатом интегрального характера взаимодействия электромагнитного излучения с веществом. Поэтому можно предположить, что если геометрия пространства-времени отличается

от геометрии Минковского, нелинейные процессы взаимодействия электромагнитного излучения с движущейся средой будут зависеть от пространственной ориентации. В результате должны возникнуть дополнительные угловые вариации в наблюдаемой оптической анизотропии, которая может быть измерена интерферометрическими методами.

Таким образом, неинвариантные свойства пространственно-временного континуума могут быть обнаружены в экспериментах оптики движущихся сред, когда не существует одной ИСО, в которой все элементы интерферометра покоятся. Это условие реализуется в интерферометрах Хека и Физо, в которых свет распространяется в движущейся среде. В случае, когда интерферометры движутся относительно выбранной ИСО, поворот может приводить к вариации положения интерференционных полос. Амплитуда вариации пропорциональна скорости движения интерферометра, однако эффект угловой зависимости является эффектом более высокого порядка малости по сравнению с классическим эффектом увлечения. Поэтому данное явление не могло быть обнаружено в ранних экспериментах. Причем вариация смещения полос должна быть больше в однопроходной схеме интерферометра Физо (рис. 1) по сравнению с двухпроходной.

1. Оценка величины смещения полос в зависимости от ориентации поля скоростей движущейся среды относительно вектора скорости движения интерферометра

Рассмотрим однопроходную схему интерферометра Физо в ИСО, где интерферометр покоится, т. е. при $\beta = V/c = 0$, c – скорость света в вакууме. Скорости воды в ИСО интерферометра соответствует величина \vec{V}_{2n} , $\beta_{2n} = \pm V_{2n}/c$. Нормальному падению лучей соответствуют инварианты $I_t = k_t = k_0 \sin \vartheta_0 = 0$, $-I_1 = \omega_0(1 - \beta) = \omega_0$ [10].

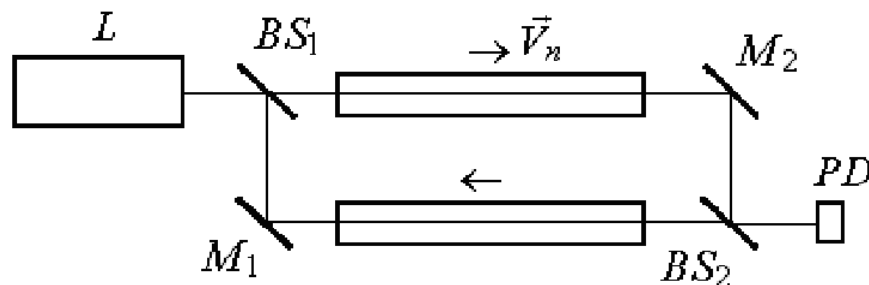


Рис. 1: Двухлучевой однопроходный интерферометр Физо

Тогда волновому вектору преломленного луча соответствует

$$k_{2n} = \frac{\omega_0 - \beta_{2n}(n_2^2 - 1) + n_2(1 - \beta_{2n}^2)}{c(1 - n_2^2\beta_{2n}^2)}. \tag{1}$$

Разность хода лучей будет зависеть от времени распространения света в двух плечах интерферометра

$$\Delta_0 = \frac{lc}{\lambda\omega_0}(k_{2n,2} - k_{2n,1}) = \frac{2l}{\lambda} \frac{\beta_{2n}(n_2^2 - 1)}{1 - n_2^2\beta_{2n}^2}. \tag{2}$$

В опыте Физо [9] использовалась двухпроходная схема, поэтому расчетная величина смещения полос равна $\Delta = 2\Delta_0$. Для параметров интерферометра $l = 1,4875$ м, $V_{2n} = 7,059$ м/с, $n_2 \approx 1,33$ для солнечного света с $\lambda = 0,526$ мкм, получаем $\Delta = 0,205$. В опыте Физо наблюдалось смещение $\Delta_y = 0,23$, что объясняется тем, что скорость воды в центре трубки была выше, чем использованное в расчетах среднее значение по

сечению V_{2n} . Квадратичный член $n_2^2 \beta_{2n}^2 \approx 10^{-15}$ очень мал и не оказывает влияния на результаты. Заметим, что использование гелий-неонового лазера с $\lambda = 0,632991 \pm 1 \times 10^{-7}$ мкм уменьшает расчетную величину до $\Delta = 0,170$. Использование однопроходной схемы (рис. 1) уменьшает это значение еще в два раза, однако изменение направления движения среды на противоположное позволит увеличить диапазон смещения полос также в два раза. Поэтому в качестве первой оценки ожидаемого смещения полос можно использовать значение $\Delta_0 = 0,170$.

Рассмотрим теперь интерферометр в ИСО, относительно которой он имеет продольную скорость $\pm V$. Тогда $-I_1 = \omega_1(1 - \beta)$, здесь ω_1 – частота излучателя в ИСО наблюдателя. Выражение (1) примет вид

$$k_{2n} = \frac{\omega_1}{c}(1 - \beta) \frac{\beta + (n_2^2 - 1) \frac{\beta - \beta_{2n}}{1 - \beta_{2n}^2} + n_2}{1 - \beta^2 - (n_2^2 - 1) \frac{(\beta - \beta_{2n})^2}{1 - \beta_{2n}^2}}. \quad (3)$$

Здесь V_{2n} – скорость в ИСО, относительно которой интерферометр движется. В ИСО интерферометра эта скорость будет равна V'_{2n} , причем

$$\beta_{2n} = \frac{\beta + \beta'_{2n}}{1 + \beta\beta'_{2n}}. \quad (4)$$

Подставив в (3), получим для двух лучей

$$k_{2n,1} = \frac{\omega_1}{c} \frac{\beta - \beta'_{2n} + n_2^2 \beta'_{2n} (1 - \beta\beta'_{2n}) + n_2 (1 - \beta_{2n}'^2)}{(1 + \beta) (1 - n_2^2 \beta_{2n}'^2)}, \quad (5)$$

$$k_{2n,2} = \frac{\omega_1}{c} \frac{\beta + \beta'_{2n} - n_2^2 \beta'_{2n} (1 + \beta\beta'_{2n}) + n_2 (1 - \beta_{2n}'^2)}{(1 + \beta) (1 - n_2^2 \beta_{2n}'^2)}. \quad (6)$$

Разность хода рассчитывается аналогично (2), однако вследствие эффекта Доплера длина волны здесь равна $\lambda_1 = \lambda_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$. Учтем также кинематический сдвиг интерферометра, в результате чего путь в среде увеличивается $l = l_1/(1 - \beta)$, а также эффект сокращения длины $l_1 = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$. Результирующий сдвиг интерференционной картины (ИК) равен

$$\Delta = \frac{2l_0}{\lambda_0} \frac{\beta'_{2n} (n_2^2 - 1)}{(1 - \beta) (1 - n_2^2 \beta_{2n}'^2)}. \quad (7)$$

Разность в показаниях интерферометров при $\beta = 0$ и $\pm\beta \neq 0$ будет равна

$$\Delta \pm \Delta_0 \approx \pm\beta\Delta_0. \quad (8)$$

Таким образом, максимальные вариации смещения полос в интерферометре, движущемся относительно Солнца с $\beta \cong 10^{-4}$, при повороте интерферометра могли бы иметь порядок величины $\delta\Delta = 2\beta\Delta_0 = 3,4 \times 10^{-5}$ полосы без учета влияния дисперсии в движущейся среде.

Для оценки влияния дисперсии, возникающей вследствие изменения частоты электромагнитной волны на нормальном разрыве скорости, будем использовать экспериментально проверенную зависимость показателя преломления стекла от длины волны излучения.

Выражения (5), (6) примут вид

$$k_{2n,1} = k_{01} \frac{\beta - \beta'_{2n} + n_{2,1}^2 \beta'_{2n} (1 - \beta\beta'_{2n}) + n_{2,1} (1 - \beta_{2n}'^2)}{(1 + \beta) (1 - n_{2,1}^2 \beta_{2n}'^2)}, \quad (9)$$

$$k_{2n,2} = k_{01} \frac{\beta + \beta'_{2n} - n_{2,2}^2 \beta'_{2n} (1 + \beta \beta'_{2n}) + n_{2,2} (1 - \beta'^2_{2n})}{(1 + \beta) (1 - n_{2,2}^2 \beta'^2_{2n})}. \tag{10}$$

Волновые векторы находятся методом последовательных приближений. Сначала в (9), (10) подставляют показатель преломления, измеренный в ИСО, где среда покоится. При этом берут частоту падающего излучения. Затем рассчитываются соответствующие длины волн в движущейся среде.

$$\lambda_{2,1} = \frac{2\pi c}{k_{2n,1}v + \omega_1 (1 - \beta)}, \tag{11}$$

$$\lambda_{2,2} = \frac{2\pi c}{k_{2n,2}v + \omega_1 (1 - \beta)}. \tag{12}$$

Для каждой длины волны находят показатель преломления, например, для $n_{1,1}$ будет соответствовать выражение

$$n_{2,1}^2 = A_1 + A_2 \lambda_{2,1}^2 + A_3 \lambda_{2,1}^{-2} + A_4 \lambda_{2,1}^{-4} + A_5 \lambda_{2,1}^{-6} + A_6 \lambda_{2,1}^{-8}. \tag{13}$$

Коэффициенты A_i для выбранного оптического материала являются справочными.

Аналогично рассчитывается $n_{2,2}$. Затем найденные показатели преломления подставляют вторично в (9), (10) и повторно рассчитывают волновые векторы. При необходимости, для повышения точности расчетов процедуру можно повторить.

Результаты численных экспериментов представлены в таблице 1. Общими для всех схем были параметры $l = 1,4875$ м, $V_{2n} = 7,059$ м/с, $\beta = (V_z + V_s)/c$, здесь V_z и V_s – суточная и орбитальная скорости Земли. Для воды брался показатель $n_2 = 1,3314$. Таким образом, дисперсия воды не учитывалась.

Так как в современном эксперименте целесообразно исключить влияние неоднородности движения воды, проводились сравнительные расчеты для воды и материала оптического стекла. Там где использовалось стекло ЛК5, показатель преломления рассчитывался по формуле (13) для каждого луча в зависимости от направления движения и, соответственно, частоты падающего света. В среднем он имел значение $n_2 = 1,476615$. Бездисперсионное (БД) приближение означало, что преломление на движущейся границе раздела сред рассчитывалось для показателя преломления на частоте падающего света. В действительности же после преломления на движущейся границе раздела сред частота света изменялась, что приводит к необходимости пересчета показателя преломления движущейся среды. Результаты численных расчетов с учетом дисперсии на границе раздела сред приведены в третьей строке таблицы. Значения Δ и Δ' приведены по модулю.

Таблица 1.

№	Длина волны, оптический материал	Смещение ИК		$\Delta' - \Delta$	$\Delta' + \Delta$
		$\beta > 0, \Delta$	$\beta < 0, \Delta'$		
1.	$\lambda = 0,526$ мкм, БД-приближение	$1,0283246 \times 10^{-1}$	$1,0288774 \times 10^{-1}$	$5,53 \times 10^{-5}$	$2,057202 \times 10^{-1}$
2.	$\lambda = 0,6328$ мкм, ЛК5, БД-приближение	$1,3054644 \times 10^{-1}$	$1,3062296 \times 10^{-1}$	$7,65 \times 10^{-5}$	$2,611694 \times 10^{-1}$
3.	$\lambda = 0,6328$ мкм, ЛК5 с дисперсией	$1,3056019 \times 10^{-1}$	$1,3060920 \times 10^{-1}$	$4,90 \times 10^{-5}$	$2,611694 \times 10^{-1}$

В первую очередь нужно отметить, что при $\beta = 0$ для всех схем сумма $\Delta' + \Delta$ равнялась приведенной в соответствующей графе таблицы величине. Из этого следует, что суммарное смещение ИК при смене направления движения среды не зависит от того, движется интерферометр, или нет. При этом разность $\Delta' - \Delta$ была равна нулю также во всех случаях.

Из сравнения приведенных в таблице значений Δ и Δ' можно заметить, что для выбранного знака $\beta > 0$ или $\beta < 0$ величины Δ и Δ' несколько отличались друг от друга.

Для первой схемы разность $\delta\Delta = \Delta' - \Delta = 5,53 \times 10^{-5}$ несколько больше первой оценки $\delta\Delta = 2\beta\Delta_0 = 3,4 \times 10^{-5}$ и на три порядка меньше той погрешности, которая была достигнута в экспериментах Физо. Этот результат был получен без учета дисперсии в движущейся воде. Так как для воды трудно учесть дисперсию, для численного эксперимента было выбран легкий крон ЛК5, для которого коэффициенты дисперсии определены экспериментально.

Во второй строчке таблицы приведены результаты расчета без учета дисперсии в БД-приближении. Можно заметить, что разность $\Delta' - \Delta$ возросла вследствие увеличения коэффициента $\kappa_2 = n_2^2 - 1$ для стекла.

В третьей строке приведены результаты расчета с дисперсией. Дисперсия в материале движущегося стекла уменьшила разность $\Delta' - \Delta$ на 36%. Следует отметить, что влияние дисперсии из-за движения границы раздела сред значительно влияет на результат. Заметим, что оценка влияния дисперсии проводилась по данным, полученным в неподвижном стекле. Кроме того, коэффициенты дисперсии A_i обеспечивают точность расчетов по формуле (18) с погрешностью $\pm 1 \times 10^{-5}$.

В двухпроходных схемах естественно ожидать уменьшения $\Delta' - \Delta$ вследствие компенсации эффектов увлечения света в движущейся среде противоположного направления. Аналогичные расчеты для двухпроходных схем опубликованы в [12].

В целом, можно заключить, что вариации $\delta\Delta$ весьма малы, максимальное значение $\delta\Delta$ равно $4,9 \times 10^{-5}$. Вместе с тем, если использовать в расчетах скорость движения интерферометра в Галактике $V = 250...300$ км/с ($\beta \approx 10^{-3}$), величина $\delta\Delta$ возрастает на порядок. Данная величина смещения полос может быть измерена в современных экспериментах. Кроме того, схема проведения эксперимента будет отличаться от приведенной на рис. 1, что при определенных условиях может привести к увеличению измеряемого эффекта.

Можно заметить, что вариации $\delta\Delta$ зависят от показателя преломления стекла n_2 , длины l скорости \vec{V}_{2n} и $\vec{\beta}$. Проведение эксперимента с изменением ориентации \vec{V}_{2n} и $\vec{\beta}$ позволило бы выяснить существует ли зависимость $\Delta' - \Delta$ от угла поворота интерферометра. В случае нулевого результата можно было бы наложить границу на максимальную величину $\vec{\beta}$.

С точки зрения эксперимента, схема на рис. 1 не является оптимальной, т. к. является нестабильной к различным возмущающим факторам. Отличительной особенностью интересующих нас интерферометров является наличие движущейся среды, что должно повлечь за собой возникновение вибраций внутри интерферометра. Однако, интерферометр может быть построен по разностной схеме, когда смещение любого элемента приводит к одинаковому влиянию на каждый из интерферирующих лучей.

2. Первые результаты экспериментов по наблюдению угловых вариаций в оптической анизотропии света во вращающейся оптически прозрачной среде

В работе использовалась схема интерферометра, эквивалентная в первом приближении интерферометру Хека или интерферометру Физо [2], в которых трубка с водой заменена оптическим диском (рис. 2). Луч от лазера L разделяется светоделителем BS на два, которые после зеркал M_1 и M_2 проходят вращающийся оптический диск в противоположных направлениях. Вследствие вращения ОД один из лучей получает положительный сдвиг фазы, другой – отрицательный. Затем лучи смешиваются на BS и после зеркала M_3 и оптической системы OS попадают на фотодетектор PD . Изменение направления вращения ОД приводит к изменению направления смещения полос на PD .

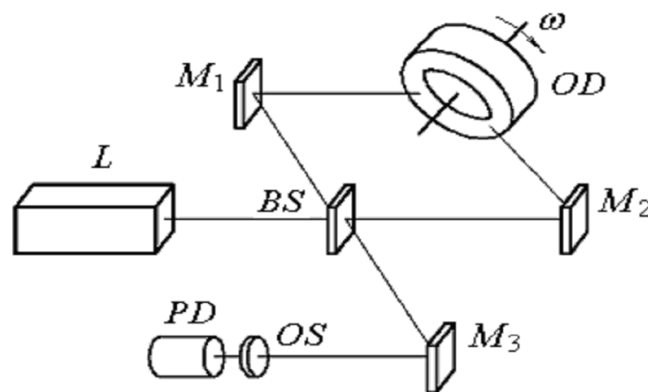


Рис. 2: Двухлучевой однопроходный интерферометр с вращающимся ОД

В экспериментах были реализованы следующие параметры: диаметр диска равнялся $D = 45$ мм, длина пути одного луча в среде в проекции на плоскую поверхность диска $l = 30$ мм, показатель преломления стекла ОД $n = 1,78$, толщина ОД $d = 20$ мм, угол падения луча на плоскую поверхность диска $\vartheta_0 = 53,5^\circ$, длина волны лазера $\lambda = 0,6329910 \pm 1 \times 10^{-7}$ мкм. Частота вращения диска изменялась в пределах от 100 до 380 Гц. Луч проходил ОД на расстоянии $r = 0,0152$ м от оси вращения. Для данных параметров при частоте вращения $\nu = 200$ Нз проекция скорости на волновой вектор равна $V_{2n} = 19,1$ м/с. Ожидаемое смещение полос вследствие эффекта Физо равно $\Delta'_0 = 1,33 \times 10^{-2}$.

Однако теоретический анализ указывает на необходимость учета нарушения закона Снеллиуса вследствие наличия тангенциального разрыва скорости на границе раздела воздух-стекло.

Ранее были проведены эксперименты на интерферометре, схема которого близка двухпроходной схеме интерферометра Физо [14], [15]. В этих экспериментах было подтверждено, что дополнительное смещение полос вследствие поперечного эффекта Физо может составлять около 20% от основного смещения.

Вследствие поперечного увлечения света угол преломления рассчитывается по формуле

$$\operatorname{tg} \vartheta'_2 = \frac{\sin \vartheta_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_0 - (n^2 - 1)\beta_n}}, \quad (14)$$

В нашем эксперименте $\beta_n = 6,4 \times 10^{-8}$, что определяет отклонение ϑ'_2 от $\vartheta_2 = \operatorname{arctg} \frac{l}{3d}$ на уровне 2×10^{-6} градуса.

Дополнительное смещение интерференционной картины определяется по формуле

$$\Delta' = \frac{6d(n-1)}{\lambda} \left(\frac{1}{\cos \vartheta'_2} - \frac{1}{\cos \vartheta_2} \right) = 2,9 \times 10^{-3}. \quad (15)$$

Суммарное смещение полос вследствие продольного и поперечного эффекта Физо равно $\Delta_{\Sigma} = \Delta'_0 + \Delta' = 1,62 \times 10^{-2}$ (без изменения направления вращения ОД). Следовательно, ожидаемая величина вариации полос при повороте интерферометра относительно вектора скорости Земли в Галактике равна $\delta_0 \approx \beta \Delta_{\Sigma} \approx 1,62 \times 10^{-5}$. Влияние дисперсии в материале может уменьшить эту величину до $\delta \Delta = 4,7 \times 10^{-6}$. Данная величина сдвига полос является весьма небольшой, однако может быть измерена.

Здесь следует обратить внимание на то, что оценки смещения интерференционных полос были выполнены в рамках электродинамики движущихся сред. Также были выполнены точные численные расчеты величины сдвига интерференционной картины в интерферометре, изменяющем свою пространственную ориентацию. Эти расчеты проводились поэлементно с учетом изменения углов падения, отражения, эффекта Доплера, сокращения размеров элементов вдоль направления движения, кинематических эффектов смещения и запаздывания лучей с учетом релятивистских членов и дисперсии в материале. Математическая модель, описывающая процессы распространения света в движущемся интерферометре, достаточно громоздка, но результаты расчетов дают смещение полос, величина которого по порядку величины равна приведенному значению в таблице 1.

Далее в работе представлены результаты экспериментов на новой схеме интерферометра с вращающимся оптическим диском (рис. 2).

Интерферометр был сконструирован на двух оптических платформах с пассивной системой вибростабилизации. На одной из платформ находился электродвигатель с ОД, на другой – остальная часть интерферометра. Обе платформы располагались на вращающемся основании. Для определения возможной зависимости сигнала от пространственной ориентации интерферометра были проведены измерения сигнала при повороте интерферометра на 360 градусов в прямом и обратном направлениях.

Свет переотражался на плоских поверхностях оптического диска. Интерференционное отражающее покрытие плоских зеркальных поверхностей диска было рассчитано на длину волны лазера.

Смещение интерференционной картины определялось по изменению времени следования интерференционных полос по апертуре фотодетектора (ФД). Метод измерений описан в работах [13], [14]. Метод пересчета интервала времени в смещение интерференционной картины осуществляется при помощи эллиптических интегралов второго рода и описан в [15]. Однако так как в течение всех измерений интерферометр настроен в одной и той же рабочей точке фазовой кривой смещение интерференционной картины (ИК) пропорционально времени следования полос в первом приближении.

В первой серии экспериментов интерферометр не был термостабилизирован. Однако за время проведения эксперимента изменение температуры окружающего воздуха изменялась в пределах, на который был рассчитан динамический диапазон лазера, равный 5°C .

В качестве измерительного фотодетектора был выбран фотодиод ФД256.

Время записи сигнала при одном угловом положении интерферометра – 2 сек. Частота вращения ОД была равна 180 Гц, что соответствовало 3600 замерам за время одного измерения.

Первичное преобразование сигналов осуществлялось аналого-цифровым преобразователем (АЦП) National Instruments PCI-6024 при входном разрешении 12 разрядов. На входы АЦП поступали сигналы от измерительного фотодиода, фотодиода для контроля мощности излучения лазера и термодатчика. Цифровая последовательность сигналов

на частоте 200 кГц поступала в персональный компьютер и проходила дальнейшую обработку в среде LabVIEW.

Перед началом измерений интерферометр юстировался таким образом, чтобы за один оборот ОД по апертуре ФД проходили в горизонтальном направлении две или три интерференционные полосы: в первую половину периода в одном направлении, во вторую – в другом. Измеряемой величиной являлся Δt_y – интервал времени между моментами прохождения выбранной интерференционной полосой апертуры ФД. Так как эта величина прямо зависит от периода вращения ОД, ее нормировали на период T . Результаты измерений, выполненные 17 декабря 2005 г., и их сплайн-интерполяция представлены на рис. 3.

График состоит из двух ветвей, что соответствует прямому и обратному направлениям поворота. Измерения выполнялись при фиксированных ориентациях платформы с шагом $\Delta\alpha = 22,5^\circ$ в лабораторной системе отсчета. Форма сигнала имеет минимум, который повторяется в прямом и обратном поворотах интерферометра. Относительная погрешность измерения $\frac{\Delta t_y}{T}$ при фиксированной ориентации равнялась 0,55%. Время проведения замеров для построения одного графика равнялось 30 минутам, поэтому прямая и обратная ветви могут иметь горизонтальный сдвиг на $1/48$ от периода. Влияние анизотропии могло проявиться в смещении сигнала при измерениях в различное время суток. Однако, повторные эксперименты, выполненные в другое время суток, дают близкую форму графиков с минимумом в центре. Это указывает на то, что форма сигнала имеет, по-всей видимости, в основном механическое происхождение и вызвана неидеальностью поворотной системы.

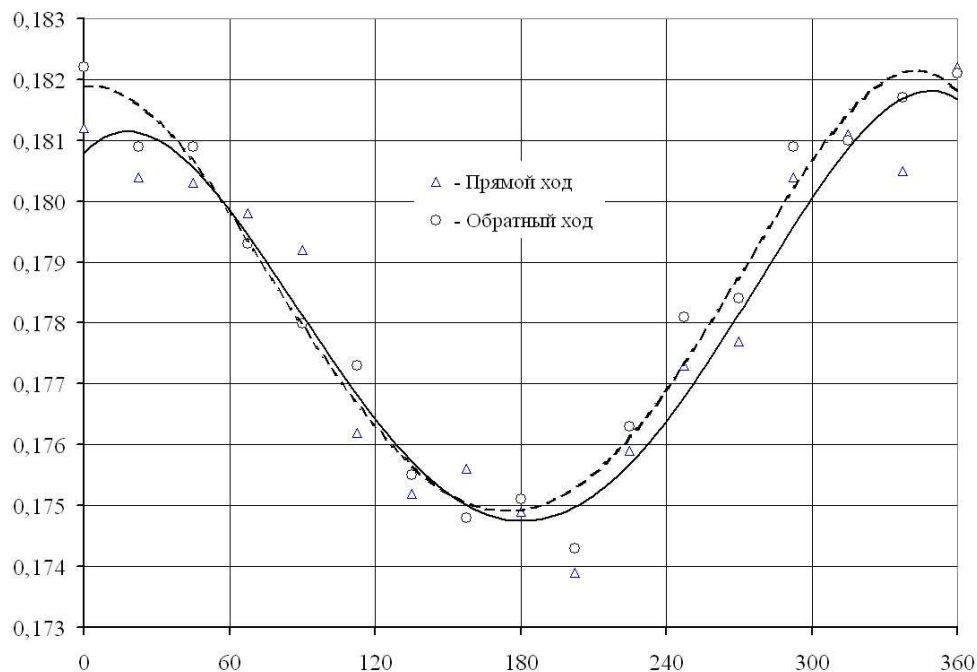


Рис. 3: Зависимость сигнала, нормированного на период, $\frac{\Delta t_y}{T}$, от угла поворота интерферометра α , $^\circ$. Результаты первой серии измерений

В следующей серии измерений шаг поворота интерферометра был уменьшен до $\Delta\alpha = 15^\circ$. Для повышения чистоты эксперимента интерферометр был помещен в кожух из оргстекла. Результаты эксперимента, выполненного 29 декабря 2005 г. в течении 50 минут, представлены на рис. 4. Из рис. следует, что общий вид угловой зависимости сохранился прежним, но появилась колебательная зависимость, повторяющаяся в прямом

и обратном направлениях поворота интерферометра. Погрешность измерения $\frac{\Delta t_y}{T}$ при фиксированной ориентации находится в пределах 0,75%.

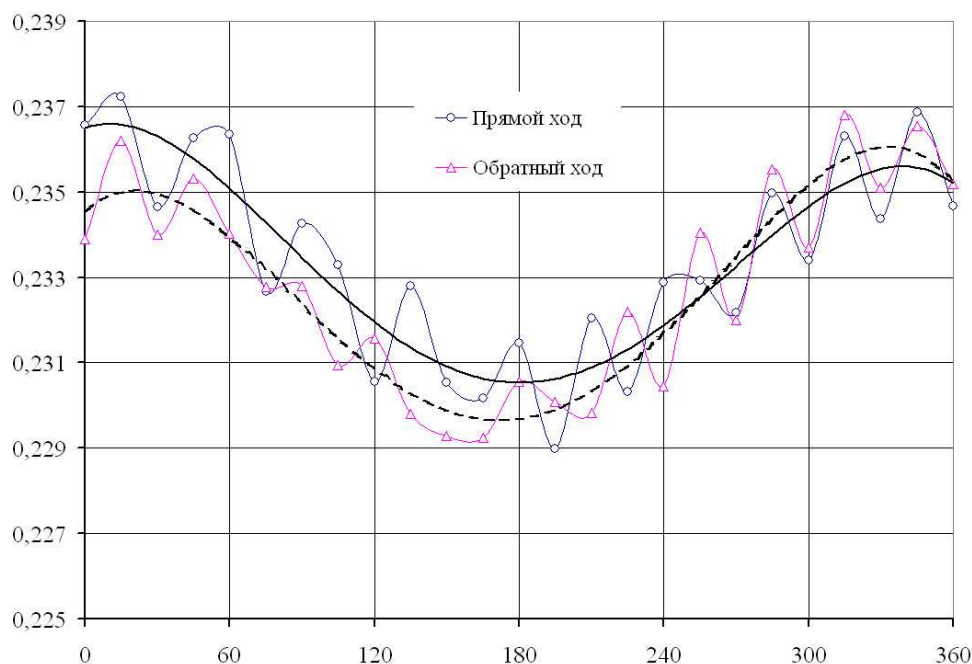


Рис. 4: Результаты второй серии измерений

Точность первых экспериментов была практически ограничена чувствительностью фотодетектора, частотой опроса и разрядностью АЦП. В связи с этим для проверки полученных результатов в эксперимент были внесены существенные изменения.

Интерферометр был помещен в кожух с активной системой термостабилизации. Точность поддержания температуры равнялась $0,1^\circ\text{C}$. Угол поворота регистрировался фотоэлектронной системой и затем проходил обработку на ПК. Точность угловой привязки была не ниже $0,2^\circ$. В качестве измерительного фотодетектора был выбран высокоскоростной PIN-фотодиод S5821-01 (Hamamatsu).

Преобразование сигналов осуществлялось аналого-цифровым преобразователем National Instruments PCI-6132, имеющем частоту оцифровки сигнала 2,5 МГц при входном разрешении 14 разрядов на канал. Сигналы от измерительного фотодиода и фотодиода для контроля мощности излучения лазера поступали на независимые входы PCI-6132.

Время записи сигнала при одной частоте вращения 15 сек. Таким образом, например при частоте вращения 200 Гц одной точке на графике соответствует 3000 замеров. Для уменьшения влияния низкочастотных механических шумов и высокочастотных электромагнитных наводок использовалась полосовая фильтрация Батерворта 5 порядка.

Результаты третьей серии измерений, выполненные 25 марта 2006 г., представлены на рис. 5. При измерениях была выбрана частота вращения ОД 200 Гц. Экспериментальные данные были записаны с частотой дискретизации 1 МГц.

График сигнала, нормированного на период вращения ОД, и его сплайн-интерполяция для двух направлений поворота интерферометра в целом похожи на полученные ранее. Однако, угловая модуляция сигнала не наблюдается. Можно заметить, что погрешность измерений уменьшилась до 0,075%.

Из рис. 5 также следует, что величина дрейфа амплитуды сигнала за 50 минут составила около 0,36%. Дополнительные замеры показали, что дрейф амплитуды сигнала

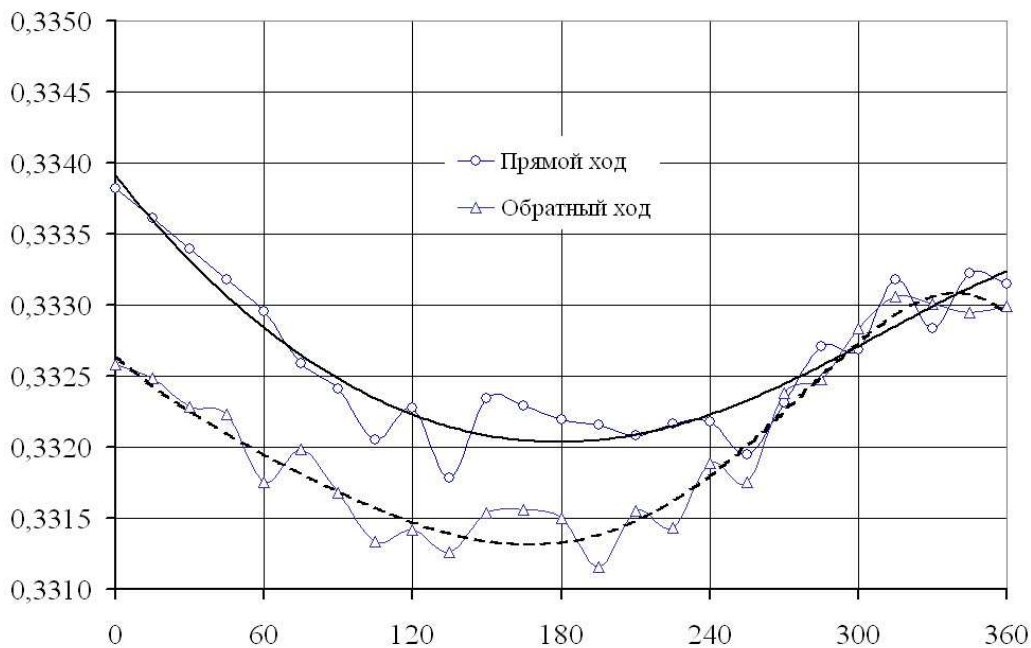


Рис. 5: Результаты третьей серии измерений

прямо пропорционален времени, поэтому замеры проводились через равные промежутки времени. Так как лазер являлся стабилизированным по частоте и мощности, а при повторном включении интерферометра через сутки или через неделю настройка оказывалась исходной, дрейф амплитуды сигнала, возможно, связан с динамической усталостью материала при вибрации платформы. Форма сигнала также имеет минимум, который повторяется в прямом и обратном поворотах интерферометра. В связи с наличием дрейфа амплитуды и неидеальностью поворотной системы информацию должна содержать разность сигналов, записанных в различное время суток.

В следующей серии экспериментов были сделаны измерения при разных скоростях вращения с целью определения оптимального соотношения сигнал/шум (результаты представлены ниже). Затем были сделаны попытки проведения измерений при скорости вращения диска, соответствующей $\nu = 350$ Гц. На данной частоте формы кривых приобрели менее повторяющийся вид, что свидетельствовало о влиянии вибраций и других факторов. В дальнейшем, из-за разрушения ОД, вызванного, по всей видимости, влиянием вибраций, не было проведено достаточного количества измерений в различное время суток.

Поэтому, анализ третьей серии экспериментов не позволяет сделать достоверный вывод об отсутствии проявлений анизотропии на достигнутом уровне точности. Для вывода о том, что разностный сигнал, находится на уровне случайной ошибки измерения, необходимо повторить эксперимент в различное время суток.

В таблице 2 представлены параметры интерферометров, реализованные в экспериментах Физо [9], Билгера и Стовелла [16], параметры эксперимента на дисковом двухпроходном интерферометре [13] и данные для последней серии экспериментов на однопроходном интерферометре (Рис. 2).

Так как в основном приближении увлечение света зависит от произведения $(n_2^2 - 1) V_{2n} l$, в последней колонке приведен параметр эффективности увлечения.

Здесь следует учесть, что в опыте Физо каждый из двух лучей проходил две трубки длиной l , поэтому эффект увлечения света определялся величиной $4\kappa_2 V_{2n} l$. В опыте

Билгера и Ствелла свет многократно переотражался и проходил через вращающийся ОД эффективное число раз, которое зависело от коэффициента отражения зеркал и активной среды кольцевого лазера. Однако, работа [16] не позволяет сделать оценку числа переотражений. Можно только заметить, что измеренный сдвиг частоты связан не только со сдвигом фаз лучей, прошедших вращающийся диск, но и с изменением длины резонатора, вследствие изменения угла преломления на границах раздела воздух-вращающийся диск. В двухпроходной схеме [13], как и в опыте Физо, эффект увлечения определялся величиной $4\kappa_2 V_{2n} l$, но с учетом поперечного эффекта увлечения, эта величина возрастала на 20%. В однопроходной схеме для продольного эффекта имеем $2\kappa_2 V_{2n} l$ и плюс поперечное увлечение света.

Таблица 2.

Название	ω , рад/с	r , м	V_{2n} , м/с	l , м	n_2	κ_2	$\kappa_2 V_{2n} l$
Физо [9]	–	–	7,059	1,487	1,33	0,769	8,071
Билгер и Ствелл [16]	< 366,5	< 0,0133	< 4,875	0,0072	1,457	1,124	< 0,040
Двухпроходный интерферометр [13]	146,6	0,0225	3,299	0,089	1,48	1,190	0,375
Однопроходный интерферометр (Рис. 2)	< 2387,6	0,0152	< 36,291	0,030	1,78	2,168	< 2,360

Можно заметить, что параметр эффективности в современных экспериментах ниже достигнутого в опыте Физо, поэтому прогресс в этой области связан со снижением уровня шума, увеличением числа проходов среды и возможностью компьютерной обработки больших массивов данных.

3. Измерение зависимости сдвига интерференционных полос от скорости движения среды

Следующая серия измерений была выполнена с целью проверки зависимости эффекта увлечения от скорости движения среды. В эксперименте при фиксированном угловом положении интерферометра частота вращения ОД изменялась в пределах от 100 до 380 Гц. Результаты измерений представлены на рис. 6 и рис. 7.

На рис. 6 представлена зависимость сигнала (времени прохождения крайней интерференционной полосы по апертуре ФД) от частоты вращения ОД. График состоит из двух ветвей. Измерения начинались с низкой частоты, затем частота увеличивалась до максимальной. После этого частота уменьшалась приблизительно до начальной. Так как зависимость, полученная при увеличении частоты, близка зависимости при уменьшении частоты, можно сделать вывод о достаточно высокой стабильности результатов. Общее время проведения замеров для одного графика составляло порядка 20 минут. За это время лабораторная система отсчета незначительно изменяла пространственную ориентацию.

Зависимость сигнала от частоты имеет гиперболический вид, однако эта зависимость отлична от теоретической зависимости без учета эффекта Физо.

Зависимость разности рассчитанного сдвига полос без учета эффекта Физо и измеренного сдвига полос от скорости вращения представлена на рис. 7. Из рис. 7 следует, что эта зависимость имеет линейный вид и в первом приближении качественно подтверждает выражение (2). При периоде 3000 мкс (это соответствует частоте около 330 Гц)

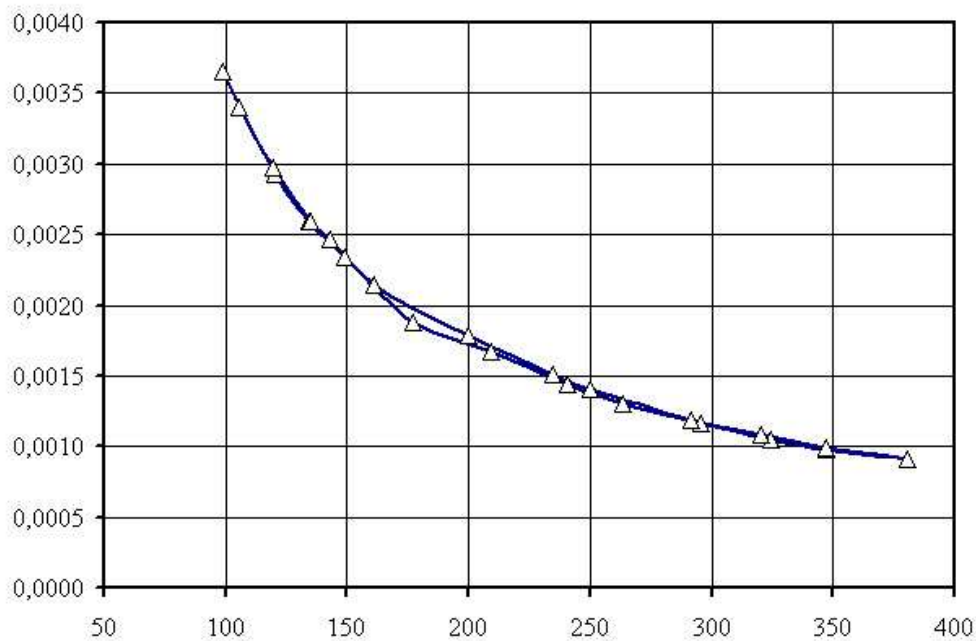


Рис. 6: Зависимость измеренного времени Δt_y (мс) прохождения интерференционной полосы по апертуре ФД от частоты вращения ОД ν , Гц

интервал времени следования интерференционной полосы уменьшается на достаточно большую величину – около 10%. Причем при периоде 5 мс эта величина соответствует расчетной величине ожидаемого сдвига ИК $\Delta_{\Sigma} = \Delta'_0 + \Delta' = 1,62 \times 10^{-2}$. Из рис. 7 следует, что погрешность определения смещения ИК находилась на уровне 1% на высоких частотах вращения, таким образом, минимально обнаружимое смещение находилось на уровне $0,1\Delta_{\Sigma} = 1,62 \times 10^{-3}$. Заметим, что погрешность третьей серии измерений, представленных на рис.5, была существенно меньше

Направление изменения интервала времени (увеличение или уменьшение) при фиксированном направлении вращения диска зависит лишь от юстировки интерферометра. Таким образом, если калибровать интерферометр, то по изменению времени следования полос можно будет определять смещение интерференционных полос. Затем можно будет решать обратную задачу – по времени следования полос определять скорость движения среды. Если скорость движения среды задана, а в эксперименте проявляется анизотропия, то по величине анизотропной составляющей, измеренной при различных ориентациях интерферометра в пространстве, можно будет определить величину и направление скорости интерферометра в пространстве.

Выше была сделана оценка точности эксперимента по измерению анизотропной составляющей: минимальная измеряемая вариация в смещении полос равна $\delta\Delta \approx 1,6 \times 10^{-3}$. Если сравнить эту величину с полученной оценкой ожидаемой вариации $\delta\Delta = 4,7 \times 10^{-6}$ вследствие галактической скорости ($\beta \approx 10^{-3}$), то можно сделать вывод, что точность измерений должна быть в 340 раз выше. Следовательно, в эксперименте могла быть обнаружена такая величина вариации в смещении полос, которая может возникнуть при $\beta \geq 0,34$. Так как величина погрешности в третьей серии экспериментов не превышала 0,36% (если дрейф за 50 минут измерений принять за проявление шумовых факторов), что в 3 раза меньше, чем величина погрешности, которую брали для получения измеряемой оценки $\delta\Delta$ и соответственно β , можно сделать вывод, что вариация $\delta\Delta$ могла быть зарегистрирована если бы $\beta \geq 0,1$.

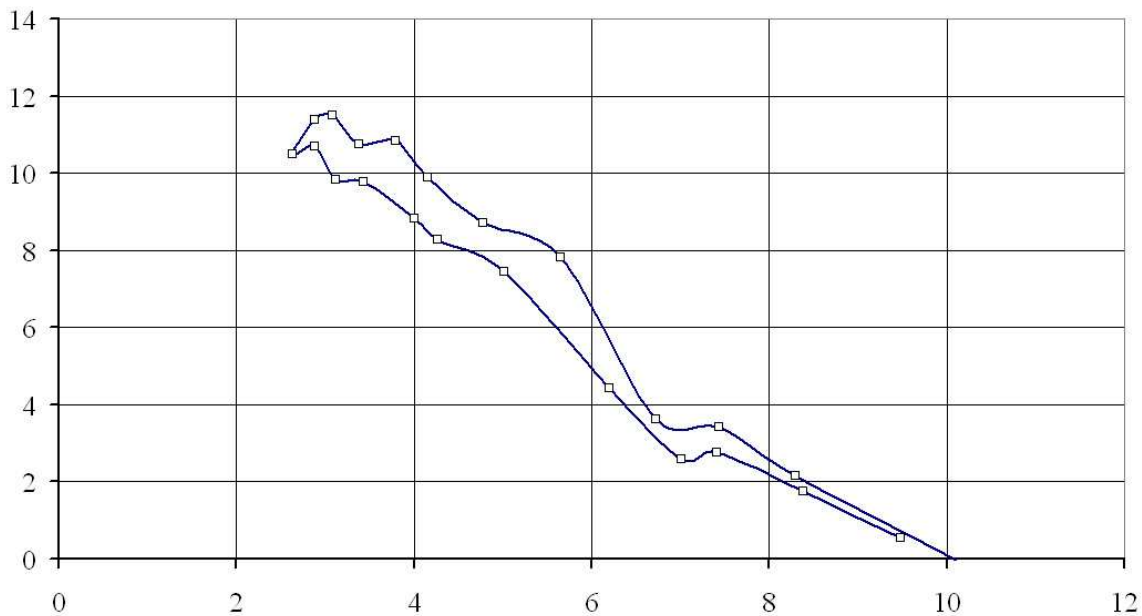


Рис. 7: Зависимость разности рассчитанного без учета эффекта Физо Δt и измеренного сигнала Δt_γ (выраженная в процентах к расчетной величине сигнала) от периода вращения T , мс.

Заключение

Увлечение света движущейся средой относится к одному из видов искусственной или наведенной оптической анизотропии. Основные результаты экспериментов качественно подтвердили линейную зависимость сдвига интерференционных полос от скорости движения среды в интервале скоростей до 36 м/с. Близкие результаты были получены в работе [16], но в меньшем диапазоне скоростей среды.

Анализ третьей серии экспериментов не позволяет сделать достоверный вывод об отсутствии проявлений пространственной анизотропии на достигнутом уровне точности. Для вывода о том, что сигнал, находится на уровне случайной ошибки измерения, необходимо повторить эксперимент в различное время суток. Подводя итоги работы можно сделать вывод о том, что угловые вариации $\delta\Delta$ могли быть зарегистрированы при $\beta \geq 0,1$.

В перспективе, принципиально важным является проверка обнаружимости $\delta\Delta$ при точностях, соответствующих галактической скорости ($\beta \approx 10^{-3}$). Для этого необходимо увеличить точность эксперимента на 2 порядка, что возможно путем использования большей частоты вращения ОД, проведения измерений с различными направлениями вращения ОД, увеличения числа проходов среды, лучшей системы виброзащиты интерферометра, более чувствительных фотодетекторов.

Литература

1. Сажин М. В. Анизотропия и поляризация реликтового излучения. Последние данные.// УФН. 2004. Т. 174. № 2, с. 197–205.
2. Франкфурт У. И., Френк А. М. Оптика движущихся тел. – М.: Наука. 1972. 212 с.
3. Michelson A., Morley E. W. Influence of motion of the velocity of light// Am. J. Phys. 1886. V. 31. № 185. P. 377–386.

4. Brillat A., Hall J. L. Improved laser test of the isotropy of space. // Phys. Rev. Lett. 1979. V. 42. N 9, pp. 549–552.
5. Гладышев В. О. Необратимые электромагнитные процессы в задачах астрофизики: физико-технические проблемы. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 276 с.
6. Gladyshev V. O. Special effects of relativity theory // Proceedings of British Society for the Philosophy of Science “Physical Interpretation of Relativity Theory”. – London, 1998. P. 99–108.
7. Gladyshev V. O. A possible explanation for the delay in detecting an astrophysical signal by using ground-based detectors // J. Moscow Phys. Soc. 1999. V. 9, N 1. P. 23–29.
8. Тоннела М.-А. Основы электромагнетизма и теории относительности. – М.: Изд-во ин. лит., 1962. 483 с.
9. Fizeau D’H. Sur les hypotesis relatives a l’ether lumineux, et sur une experience qui parait demonter que le mouvement des corps change la vitesse avec laquelle la lumiere se propage dans leur interieur // Ann. de Chimie et de Phys. 1859. V. 57. P. 385.
10. Болотовский Б. М., Столяров С. Н. Отражение света от движущегося зеркала и родственные задачи // УФН, 1989. Т. 159. В. 1. С. 155–180.
11. Гладышев В. О. Искривление траектории распространения плоской монохроматической электромагнитной волны в среде с вращением // Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 58, вып. 8. С. 593–597.
12. Gladyshev V., Gladysheva T., Zubarev V., Podguzov G. V. On possibility of a new 3D experimental test of moving media electrodynamics // Proceedings of International Meeting PIRT-2005, Moscow: BMSTU, 2005. – pp. 202–207.
13. Гладышев В. О., Гладышева Т. М., Зубарев В. Е. Регистрация эффекта увлечения света в дисковом оптическом интерферометре // Письма в ЖТФ. 2002. № 3. – С. 88–94.
14. Gladyshev V. O., Gladysheva T. M., Zubarev V. Ye. The first results of the experiment on registering light dragging observed in an interferometer with rotating medium // Proceedings British Soc. Phil. Science “Phys. Interpr. Relativity Theory”. Imperial College. London. 2002, p. 169–175.
15. Gladyshev V., Gladysheva T., Zubarev V. Propagation of electromagnetic waves in complex motion media // Journal of Engineering Mathematics. 2006. V. 55. No. 1–4, p. 239–254.
16. Bilger H. R. & Stowell W. K. Light drag in a ring laser: An improved determination of the drag coefficient. // Phys. Rev. A. 1977. 16 (No 1), 313–319.

The anisotropy of the space of velocities of the electromagnetic radiation in moving media

**V. O. Gladyshev, T. M. Gladysheva, M. Dashko,
G. V. Podguzov, N. Trofimov, E. A. Sharandin**

*MSTU n. a. N. E. Bauman
vgladyshev@mail.ru*

In this paper we study the anisotropy which appears in moving media. In such media the speed of light propagation c non-linearly depends on the vector field of media displacement. As a result, the optical anisotropy depends on the orientation of the velocity field \vec{V}_2 of the moving media relative to the velocity vector \vec{V} given by the movement of the interferometer in the space of independent physical variables. Based on the solution of the dispersion equation, we infer that the possibility of measuring angular variations in the shift of interferometry picture, examined in the moving interferometer. It is shown that the amplitude of the variation is proportional to the movement speed of the interferometer \vec{V} ; actually, the effect of angular dependence turns out to be higher order smaller compared to the classical effect of light attraction.

Key-words: anisotropy, velocity field, interferometry.

MSC: 74E10, 83-05.

О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АНИЗОТРОПИИ, ВЫЯВЛЯЕМОЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ "ЭФФЕКТА МЕСТНОГО ВРЕМЕНИ"

В. А. Панчелюга¹, С. Э. Шноль^{1,2}

(1) *Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, Пущино*

(2) *Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва*

panvic333@yahoo.com, snoll@iteb.ru

В работе исследована выраженность эффекта местного времени в зависимости от выделенных пространственных направлений. Показано, что данный эффект наиболее четко проявлен в узкой окрестности направлений север-юг и восток-запад. В этих направлениях обнаруживаемая экспериментально величина местного времени с хорошей точностью совпадает с расчетной. Полученные результаты дают представление о характере анизотропии околоземного пространства.

Ключевые слова: анизотропия, эффект местного времени.

1. Введение

"Эффект местного времени" – высокая вероятность сходства тонкой структуры гистограмм, построенных при синхронных измерениях флуктуаций в процессах разной природы, в разных географических пунктах в одно и то же местное время [1–3]. Изначально, измерения, используемые для изучения данного эффекта проводились с использованием пространственной базы от единиц до тысяч километров [4–10]. Для такого рода измерений организовывались соответствующие экспедиции. В последующих работах были выполнены исследования минимального масштаба, на котором возможно обнаружение эффекта местного времени. Было показано существование эффекта на расстояниях вплоть до одного метра [10–13]. Задача этой работы – исследование выраженности эффекта местного времени в зависимости от фиксированных пространственных направлений.

2. Постановка эксперимента

Исследование эффекта местного времени предполагает пространственно-разнесенные измерения, в которых используются, как минимум, два источника флуктуаций. Регистрация флуктуаций производится синхронно в течение промежутка времени, необходимого для получения ряда, длина которого достаточна для построения последовательности состоящей из не менее чем 1000 гистограмм. В качестве источника флуктуаций, возможно использование собственных флуктуаций любого природного процесса.

В настоящей работе в качестве источника флуктуаций использовались обратно смещенные $p - n$ переходы специальных полупроводниковых шумовых диодов [10]. На основе этих диодов были изготовлены два шумовых генератора. Каждый из генераторов помещался в металлический экран и имел полностью автономное, батарейное, питание. Генераторы были жестко закреплены на концах деревянной рейки так, что расстояние между источниками флуктуаций составляло 1.36 м.

Рейка с закрепленными на ней генераторами располагалась на специальном стенде, предварительно ориентированном по направлению север-юг. Стенд позволял выставлять нужные пространственные направления в процессе измерений. На рис. 1 показана схема исследованных в эксперименте пространственных направлений. Серыми кружками обозначены стороны света. Буквы на схеме показывают расположение первого генератора во время измерений. Второй генератор располагается диаметрально. Так, например, измерение «А» означает, что исследуется направление «север-юг», при этом, первый генератор расположен «на севере» в точке А, а второй генератор «на юге» в точке «Е». В случае измерения «Е» исследуется то же самое пространственное направление, но при этом генераторы меняются местами: первый генератор «на юге», а второй «на севере». т. к. использованная в эксперименте система, состоящая из пары генераторов, с фиксированным расстоянием между ними не является ориентированной, то измерения «А» и «Е» являются равноценными. Второе измерение используется как контрольное. Следовательно, число исследованных направлений в два раза меньше числа измерений обозначенных буквами на рис. 1. Угол, между последовательно измеряемыми направлениями составляет 11.25° .

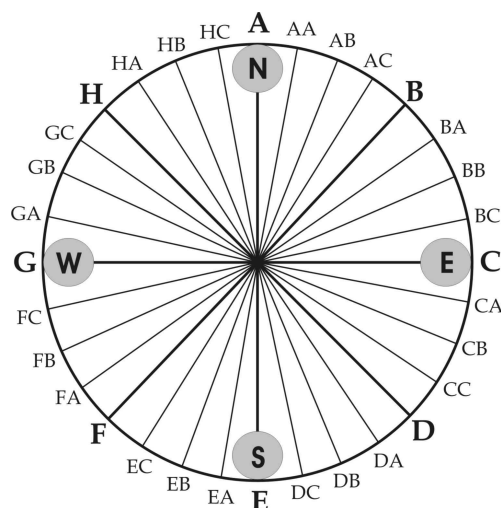


Рис. 1: Схема пространственных направлений, исследуемых в эксперименте

В качестве регистрирующей системы использовался двухканальный цифровой запоминающий осциллограф WaveJet WJ322 фирмы LeCroy. Встроенная память позволяет получать при помощи WJ322 запись длиной 500000 точек на канал. Это дает возможность построения двух синхронных последовательностей 50-точечных гистограмм, длиной 10000 гистограмм, каждая. Для экспертного анализа брались пары более коротких последовательностей длиной в 1000 гистограмм каждая, построенных по первым 50000 точкам синхронных записей.

В процессе измерений использовалась частота дискретизации, равная 100 кГц. С учетом того, что используемые для экспертного сравнения гистограммы строились по 50 точкам временного ряда, длительность одной гистограммы составляет 0.5 мсек.

3. Величина эффекта местного времени, ожидаемая для исследуемых пространственных направлений

Мы полагали ранее, что величина эффекта местного времени пропорциональна разности географических долгот мест измерений и не зависит от разности их широт. Это утверждение подтверждено всей совокупностью ранее проведенных экспериментов

[1–13]. Отсюда возникло представление об аксиальной симметрии фактора, влияющего на форму гистограмм.

Независимость эффекта от широты мест измерений, может быть истолковано, как зависимость формы гистограмм от направления в пространстве, задаваемого осью вращения Земли и точкой проведения измерений. В таком случае важен только угол между двумя плоскостями в пространстве, определяемыми местами проведения измерений. Этот угол равен разности долгот и не зависит от широты мест измерений. Но, в случае измерений с фиксированной пространственной базой $\Delta L_0 = Const$, как это имеет место в настоящем исследовании, результат эксперимента становится зависимым от широты, θ . Действительно, время, через которое источник флуктуаций № 2 будет определять то же направление в пространстве, что и источник флуктуаций № 1 до этого, зависит от скорости v , с которой каждый из источников флуктуаций пройдет расстояние $\Delta L_0 = Const$. Используя в качестве модельных представлений о фигуре Земли эллипсоид Красовского [14] и учитывая высоту места проведения измерений над уровнем моря, h , можем записать выражение для v :

$$v(\theta, h) = \frac{2\pi}{T} \left(\sqrt{\frac{R_p^2}{\frac{R_p^2}{R_e^2} + \operatorname{tg}^2(\theta)} + h} \right), \quad (1)$$

где $R_p = 6356863$ м и $R_e = 6378245$ м – величины полярного и экваториального радиусов Земли, принятые для эллипсоида Красовского [14], $\theta_P = 54^\circ 50.037'$ – широта места проведения измерений (г. Пущино, Московской области), определенная при помощи GPS-приемника, $T = 86160$ сек – период вращения Земли и $h_P = 170$ м – высота места измерения над уровнем моря. Учет численных значений в (1) дает величину $v(\theta_P, h_P) = 268$ м/сек. В случае проведения измерений, например, в приэкваториальных областях, данная величина v , следовательно, и связанная с ней величина местного времени, может отличаться почти в два раза от полученного значения $v(\theta_P, h_P) = 268$ м/сек из-за широтной зависимости $v(\theta, h)$.

Полученное значение $v(\theta_P, h_P)$ позволяет рассчитать величину местного времени для каждого из измеренных направлений, рис. 1. Так как предполагается, что величина местного времени зависит только от долготной разности расстояний между местами измерений, то ожидаемая величина местного времени, в этом случае будет равна:

$$\Delta t = \frac{\Delta L_0 \sin \alpha}{v(\theta, h)}, \quad (2)$$

где $\Delta L_0 = 1.36$ м – расстояние между генераторами, $\alpha \in [0, 2\pi]$ – азимутальный угол, отсчитываемый от направления на север («А») по часовой стрелке. На рис. 2 сплошной линией показан результат расчета величины местного времени в зависимости от угла α , произведенного на основании (2). По оси абсцисс на рис. 2 показаны пространственные направления, соответствующие направлениям, показанным на рис. 1.

4. Экспериментальные результаты

Для исследования выраженности эффекта местного времени в зависимости от заданных пространственных направлений было выполнено три серии экспериментов с одной и той же пространственной базой $\Delta L_0 = 1.36$ м, по результатам которых при помощи экспертного сравнения было получено более семидесяти распределений интервалов. Для всех экспериментов с высокой точностью можно считать, что $\theta_P = Const$ и $h_P = Const$.

Одинаковость условий позволяет нам сравнивать распределения интервалов, полученные в разных сериях измерений. На рис. 2 точками показаны положения максимумов на распределениях интервалов, для всех трех серий экспериментов. Данный рисунок носит качественный характер, т. к. часть распределений интервалов имеет сложную полиэкстремальную структуру и, поэтому, не может быть графически представлено в виде одной точки на графике. Для таких полиэкстремальных распределений бралось не более трех главных максимумов, которые, затем, учитывались при построении графика на рис. 2. Главная задача построения рис. 2 – дать суммарную картину совпадения полученных результатов с результатами модельного расчета. На рис. 2 можно четко выделить четыре области, соответствующие направлениям «А», «С», «Е» и «G», т. е., направления север-юг и восток-запад и их ближайшая (около $\pm 11.25^\circ$) окрестность. Суммарные распределения, соответствующие этим направлениям, показаны на рис. 3.

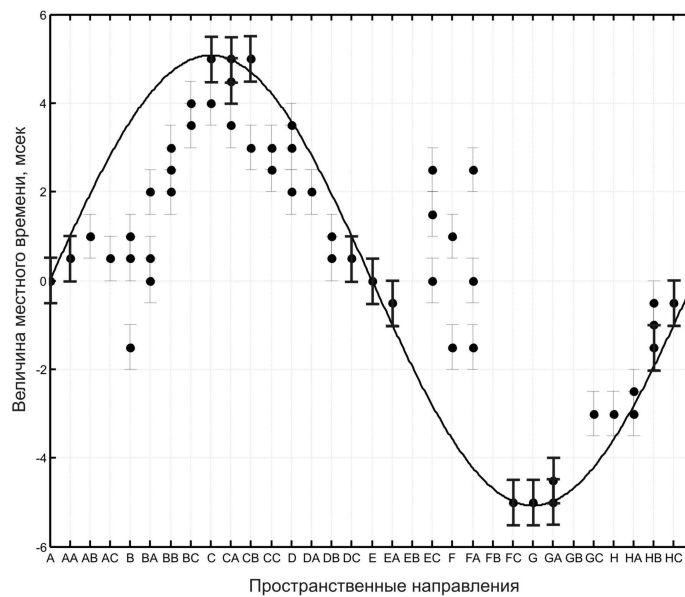


Рис. 2: Расчетные величины местного времени (сплошная линия) и величины полученные экспериментально. По оси абсцисс показаны азимутальные направления, соответствующие направлениям, показанным на рис. 1.

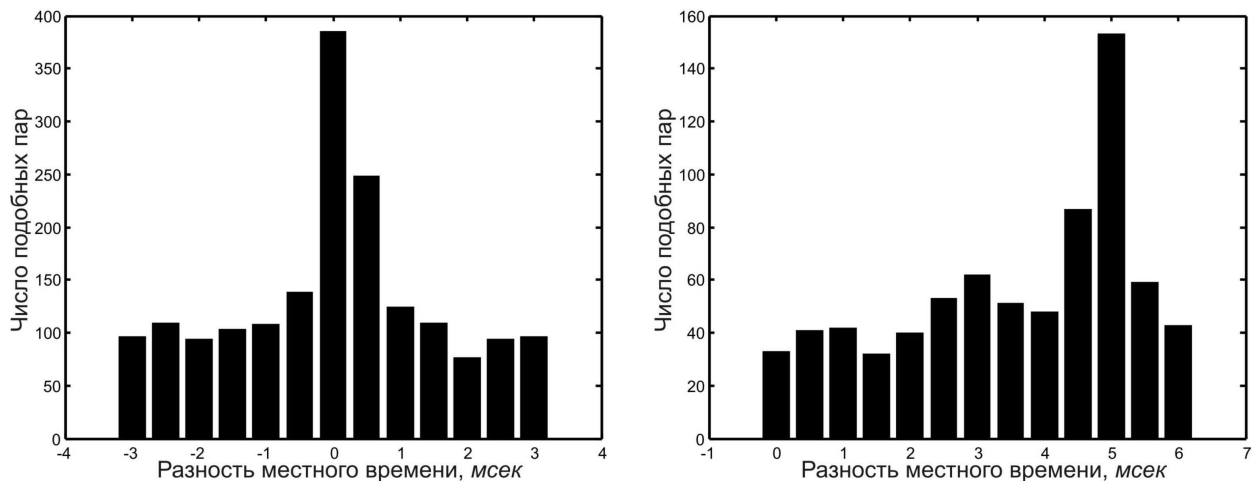


Рис. 3: Усредненные по трем экспериментам распределения интервалов для направлений север-юг (направления «А» и «Е»), а), и восток-запад (направления «С» и «G»), б).

Данным распределениям присуща четко выраженная структура с ярко выраженным пиком, величина которого с хорошей точностью соответствует полученной из (2) величине местного времени. В то же время, «диагональные» распределения интервалов в широкой окрестности направлений «В», «D», «F» и «H» полиэкстремальны и не имеют четко выраженного пика. В тех же случаях, когда на «диагональных» распределениях присутствует единственный пик, он выражен значительно хуже чем в случае направлений «А», «С», «Е» и «G». И, как правило, в этом случае его величина отличается от расчетной.

5. Обсуждение

Таким образом, в результате исследования выраженности эффекта местного времени в зависимости от выделенных пространственных направлений было найдено, что данный эффект наиболее четко выражен в узкой окрестности направлений север-юг и восток-запад. В этих направлениях обнаруживаемая экспериментально величина местного времени с хорошей точностью совпадает с расчетной. В окрестности направлений «В», «D», «F» и «H» распределения интервалов, как правило, полиэкстремальны и не всегда имеют достаточно выраженный пик местного времени. Величина местного времени, связываемая с положением максимального пика на этих распределениях, обычно плохо согласуется с расчетной.

Полученные результаты имеют принципиальное значение, для понимания феномена местного времени, т.к. указывают на характер анизотропии околоземного пространства. Действительно, если предположить, что эффект местного времени обусловлен некоторой, неизменной вдоль меридиана секторной структурой, то выраженность пика местного времени на «диагональных» распределениях интервалов должна быть такой же четкой, как и для направлений «А», «С», «Е» и «G». т.к. это не обнаружено, то мы вынуждены отказаться от представления о секторной структуре и заключить, что фактор, оказывающий влияние на форму тонкой структуры гистограмм связан с некоторыми выделенными направлениями, которые, вероятно, определяются как анизотропными свойствами использованных источников флуктуаций, так и анизотропией околоземного пространства. Узость областей, в которых наблюдается четкий пик местного времени, позволяет говорить как об острой анизотропии пространства, так и о том, что существует достаточно эффективный механизм, позволяющий источнику флуктуаций чувствовать эту анизотропию.

Список литературы

1. Шноль С.Э., Коломбет В.А., Пожарский Э.В. Зенченко Т.А., Зверева И.М., Конрадов А.А. О реализации дискретных состояний в ходе флуктуаций в макроскопических процессах // УФН 1998, 168 (10) с. 1129–1140.
2. С.Э. Шноль, Т.А. Зенченко, К.И. Зенченко, Э.В. Пожарский, В.А. Коломбет, А.А. Конрадов. Закономерное изменение тонкой структуры статистических распределений как следствие космофизических причин // УФН 2000, 170 (2), с. 214–218.
3. С.Э. Шноль Закономерные изменения тонкой структуры статистических распределений в случайных процессах, как следствие арифметических и космофизических причин. Труды семинара «Время, хаос и математические проблемы» выпуск 3, М., Книжный Дом «Университет», 2004, с. 121–154.
4. К.И. Зенченко, Т.И. Зенченко, Б.М. Кужевский, Б. Вилкен, Я. Аксфорд, С.Э. Шноль Форма гистограмм, построенных по измерениям α -распада ^{228}Ra в Линдау (Германия) и потока нейтронов в Москве, изменяется синхронно по местному времени. // Биофизика 2001, т. 46 № 5, с. 783–785

5. М. В. Федоров, Л. В. Белоусов, В. Л. Воейков, К. И. Зенченко, Т. А. Зенченко, А. А. Конрадов, С. Э. Шноль Корреляция тонкой структуры распределения амплитуд флуктуаций темнового тока фотоумножителей с вращением Земли вокруг своей оси // Биофизика, 2001, т. 46, № 5.
6. Т. А. Зенченко, М. В. Федоров, К. И. Зенченко, А. А. Конрадов, С. Э. Шноль О закономерных изменениях формы гистограмм в «случайных» временных рядах, полученных при физических измерениях и математическом моделировании. // Биофизика, 2001, т. 46, № 5.
7. С. Э. Шноль, И. А. Рубинштейн, К. И. Зенченко, Т. А. Зенченко, Н. В. Удальцова, А. А. Конрадов, С. Н. Шаповалов, А. В. Макаревич, Э. С. Горшков, О. А. Трошичев Зависимость «макроскопических флуктуаций от географических координат (по материалам Арктической (2000 г) и антарктической (2001 г) экспедиций). // Биофизика, 2003, т. 48, № 6, с. 1123–1131.
8. S. E. Shnoll, K. I. Zenchenko, S. N. Shapovalov, E. S. Gorshkov, A. V. Makarevich and O. A. Troshichev The specific form of histograms presenting the distribution of data of alpha-decay measurements appears simultaneously in the moment of New Moon in different points from Arctic to Antarctic, <http://arxiv.org/abs/physics/0412152>
9. S. E. Shnoll, V. A. Panchelyuga Cosmo-physical effects in the time series of the GCP network // <http://arxiv.org/abs/physics/0605064>, 2006, 19 p.
10. Панчелюга В. А., Коломбет В. А., Каминский А. В., Панчелюга М. С., Шноль С. Э. Эффект местного времени в шумовых процессах. // Вестник Калужского университета. 2006, № 2, с. 3–8.
11. В. А. Панчелюга, В. А. Коломбет, М. С. Панчелюга, С. Э. Шноль Исследование эффекта местного времени на малых пространственно-временных масштабах // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2006, 1 (5), т. 3, с. 116–121.
12. V. A. Panchelyuga, V. A. Kolombet, M. S. Panchelyuga, S. E. Shnoll Local-time effect on small space-time scale // Space-Time Structure. Collected papers. Editor-in-chief Pavlov D. G. M.: TETRU, 2006. – pp. 344–350.
13. Victor A. Panchelyuga, Valery A. Kolombet, Maria S. Panchelyuga and Simon E. Shnoll Experimental Investigations of the Existence of Local-Time effect on the Laboratory Scale and the Heterogeneity of Space-Time. // Progress in Physics, V. 1, January, 2007, pp. 64–69.
14. Физические величины. Справочник. М., Энергоатомиздат, 1991–1232 с.

On the spatial anisotropy exhibited during the study of the "local time effect"

S. E. Schnoll, V. A. Panchelyuga

Institute of theoretical and experimental biophysics, Puschino, Russia
panvic333@yahoo.com, snoll@iteb.ru

The paper examines the possibility of expressing the local time effect in terms of certain special directions. It is shown, that this effect is stronger perceived in a small neighborhood oriented North-South and East-West. Along these directions the detected experimental magnitude of local time perfectly coincides with the estimated one. The obtained results provide a fair characterization of the anisotropic character of the nearby Earth-surrounding space.

Key-words: local time effect, anisotropy.

MSC: 74E10, 83-05, 83B05.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных чисел в физике, е) Экспериментальные исследования возможной анизотропии пространства-времени и иных проявлений финслеровой геометрии.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.
2. Объем статьи не должен превышать 1 печ. листа (24 усл. маш. стр.)
3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате \LaTeX (версия $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$, для набора формул используется \LaTeX) и файл статьи в формате PostScript или PDF.
4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).
5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок). Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.
6. Название статьи, аннотация, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.
7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.
8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи. Публикация бесплатна для всех авторов.

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА
В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

Научный журнал. Основан в 2003 г.

№ 2 (6), Vol 3, 2006

Главный редактор Павлов Д. Г.

Ответственный секретарь Элиович А. А.

www.polynumbers.ru

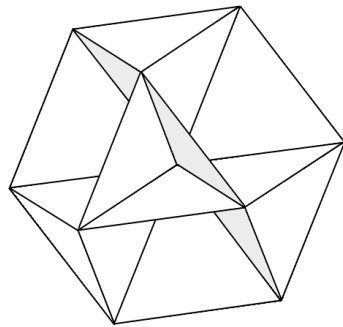
hypercomplex@mail.ru

Свидетельство о регистрации

ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.

ISSN 1814-3946

© "МОЗЭТ", Российское Гиперкомплексное Общество



Типографские данные